unesp
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DE COMPUTAÇÃO E ESTATÍSTICA

MODELOS DE OTIMIZAÇAO DINÂMICO E ESTÁTICO PARA O CONTROLE DE PLANTAS DANINHAS

Rodrigo da Silva Chela

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Rua Cristovão Colombo, 2265
15054-000 - São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (017) 3221-2444
Fax: (017) 3221-2445

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

Modelos de Otimização Dinâmico e Estático para o Controle de Plantas Daninhas

Rodrigo da Silva Chela

Dissertação a ser apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva

São José do Rio Preto
Fevereiro de 2007

Aos meus pais, Agenor e Marina,
aos meus irmãos, João Luiz e Tatiane,
à minha namorada Roberta,
e aos meus verdadeiros amigos,
Dedico.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me dado a vida e oportunidade de conviver ao lado de pessoas verdadeiras.

Agradeço aos meus amigos de Graduação e Pós-Graduação e a todos os professores dos respectivos cursos. Em especial agradeço ao prefessor Geraldo Nunes Silva pela orientação desde a graduação, pelo incentivo e companherismo durante todo esse tempo. Agraço também à professora Vilma Alves de Oliveira pela co-orientação desse trabalho, e pelo companherismo. À todos os funcionários do DCCE agradeço, em especial ao Getúlio, Olga e Luiza.

Agradeço especialmente aos meus pais que sempre me apoiaram e me incentivaram em todas as decisões de minha vida, com muito amor, carinho e compreensão.

À minha namorada Roberta, que me apóia em todos os momentos. Agradeço a ela por todo o carinho que me deu durante todo esse tempo. Aos meus irmão João Luiz e Tatiane, agradeço pelo amor recebido. Agradeço a todos os meus verdadeiros amigos, aqueles que se mantiveram ao meu lado durante todo tempo, apesar de todas as dificuldades e obstáculo encontrados.

À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pela Bolsa de Estudos.

Resumo

Problemas relacionados à teoria de controle ótimo podem ser encontrados nas diversas áreas de pesquisa. O objetivo desse trabalho é apresentar algumas condições necessárias e suficientes para problemas de controle ótimo, e aplicar os resultados em um problema de controle de plantas daninhas em culturas agrícolas através da aplicação de herbicida. Um estudo de caso relacionado à otimização da aplicação de herbicida para o controle de plantas daninhas é apresentado. Um modelo de otimização dinâmico foi formulado, e resolvido por métodos numéricos que utilizam condições necessárias da teoria de controle ótimo (Princípio do Máximo de Pontryagin). Um modelo estático também é apresentado e resolvido para comparação com o modelo dinâmico.

Palavras-chave: Controle ótimo, otimização, controle de plantas daninhas.

Abstract

Problems related to control theory can be found in many areas of research applications. The aim of this work is to present some necessary and sufficient conditions of optimality for optimal control and to apply the results to weed control by using herbicids (chemicals). A case study of the application of herbicids to control weed is presented. A dynamical optimization model was formulated and solved by numerical methods which make use of necessary optimality conditions of optimal control theory (Maximum Principle of Pontryagin). A static model is also presented and solved as means of comparison with the dynamical model.

Keywords: optimal control, optimization, weed control.

Sumário

Lista de Figuras vii

1 Introdução **1**

2 Preliminares **4**

2.1 Sobre Plantas Daninhas 4

2.2 Modelagem Matemática 8

2.3 Modelos Matemáticos para o Manejo de Plantas Daninhas 11

2.4 Modelos para Determinar a Taxa Ótima de Aplicação de Herbicida 12

3 Controle Ótimo **17**

3.1 Controle Ótimo Contínuo 17

3.1.1 O Princípio do Máximo de Pontryagin 19

3.1.2 Equação de Hamilton-Jacobi e Métodos de Verificação 24

3.2 Controle ótimo discreto 30

3.2.1 A Função de Hamilton e o Princípio do Máximo para o Caso Discreto 31

3.3 Solução Numérica do Problema de Controle Ótimo 35

3.3.1 Programação Não-Linear 41

4 Um Estudo de Caso **45**

4.1 Introdução: Um Problema Específico de Planta Daninha 45

4.1.1 A Planta Daninha e o Modelo Populacional 46

4.2 Simulações do Modelo Populacional 48

4.2.1 Os Efeitos de u, C e ϕ_1 na Dinâmica Populacional com x_0 Fixo . . . 48

4.2.2 Variando o Banco de Sementes Inicial 54

4.2.3 Discussão dos Resultados 60

4.3 Análise da Estabilidade do Banco de Sementes 61

4.3.1 Encontrando os Pontos de Equilíbrio 61

4.3.2 Primeiro Caso: $u = 0$ 62

4.3.3 Segundo Caso: $u = 2,181$ 65

5 O Problema Econômico e os Modelos de Otimização 71

5.1 A Função de Produção e a Função Lucro 71

5.2 Os Modelos de Otimização 73

5.2.1 Um Modelo Estático 73

5.2.2 Um Modelo Dinâmico 74

5.2.3 Solução do Problema Dinâmico 76

5.2.4 Solução do Problema Estático 79

5.2.5 Resultados 81

6 Considerações Finais 89

A Equações Diferenciais e Sistemas Dinâmicos: Conceitos Básicos 90

A.1 Introdução à Equações Diferenciais 90

A.2 Sistemas Dinâmicos 91

A.2.1 Linearização e Estabilidade Local de Um Ponto de Equilíbrio 96

B Introdução ao Método de Lagrange 98

B.1 O Multiplicador e o Método de Lagrange 98

C Modelos Matemáticos para o Manejo de Plantas Daninhas 104

C.1 Diminuindo a Dependência aos Herbicidas 104

C.2 Sobre a Resistência aos Herbicidas 105

C.3 Competição Intra e Inter-específica 105

C.4 Manejo Integrado de Plantas Daninhas 108

Lista de Figuras

3.1 Conjunto alvo S 25

4.1 Evolução do banco de sementes quando $\phi_1 = 1,\ C = 1\ e\ u = 0$ 49
4.2 Evolução do banco de sementes quando $\phi_1 = 1,\ C = 1\ e\ u = 1$ 49
4.3 Evolução do banco de sementes quando $\phi_1 = 1,\ C = 1\ e\ u = 1,84$ 50
4.4 Evolução do banco de sementes quando $\phi_1 = 1,\ C = 1\ e\ u = 2,3\ e\ u = 2,5$. 51
4.5 Evolução do banco de sementes quando $\phi_1 = 0,5,\ C = 1\ e\ u = 2$ 51
4.6 Evolução do banco de sementes quando $\phi_1 = 0,5,\ C = 1\ e\ u = 3,32$ 52
4.7 Evolução do banco de sementes quando $\phi_1 = 1,\ C = 2\ e\ u = 0,98$ 53
4.8 Comparação entre as Figuras 4.3 e 4.7 53
4.9 Evolução do banco de sementes quando $\phi_1 = 0,5,\ C = 2\ e\ u = 1,8$ 54
4.10 Evolução do banco de sementes quando $\phi_1 = 1,\ C = 3\ e\ u = 0,7$ 55
4.11 Evolução do banco de sementes quando $\phi_1 = 0,\ C = 3\ e\ u = 1,4$ 55
4.12 Evolução do banco de sementes para x_0 fixo, e com a variação da taxa de mortalidade antes da semeadura ϕ_1, das condições climáticas C e da taxa de aplicação de herbicida u. 56
4.13 Evolução do banco de sementes para $u = 0$ e $C = 2$, com diferentes valores de x_0. . 57
4.14 Evolução do banco de sementes para $u = 1,5$, $C = 1$ com diferentes valores de x_0. 58
4.15 Evolução do banco de sementes para $u = 0,98$, $C = 2$ com diferentes valores de x_0. 58
4.16 Evolução do banco de sementes para $u = 2,5$ com diferentes valores de x_0 e C. . . 59
4.17 Gráfico de f(x)-x próximo do ponto de equilíbrio x_1^* com $u = 0$ 63
4.18 Gráfico de f(x)-x próximo do ponto de equilíbrio x_2^* com $u = 0$ 64
4.19 Gráfico de f(x)-x próximo do ponto de equilíbrio x_1^* com $u = 2,181$ 66
4.20 Gráfico de f(x)-x próximo do ponto de equilíbrio x_2^* com $u = 2,181$ 66
4.21 Evolução de $f(x_t)$ com $x_0 = x_1^*$ para u=0 e u=2,181 68
4.22 Evolução de $f(x_t)$ com $x_0 = x_2^*$ e $u = 0$ 68
4.23 Evolução de $f(x_t)$ com $x_0 = x_2^*$ e $u = 2,181$ 69

5.1 Controle ótimo para o problema estático 82
5.2 Banco de sementes ótimo para o problema estático 82
5.3 Lucro ótimo para o problema estático em 10 anos 83
5.4 Lucro ótima para o problema estático numa simulação de 20 anos 83
5.5 Banco de sementes ótimo para o problema dinâmico 85
5.6 Controle ótimo para o problema dinâmico 85
5.7 Lucro ótimo para o problema dinâmico 86
5.8 Comparação entre o controle ótimo dos problemas estático e dinâmico . . . 87
5.9 Comparação entre o banco de sementes ótimo dos problemas estático e dinâmico 87
5.10 Lucro alcançado para os problemas estático e dinâmico 88

A.1 Estabilidade em x^* 93
A.2 Estabilidade Assintótica em x^* 94
A.3 Instabilidade em x^* 94

B.1 Superfície sem restrição 99
B.2 Superfície com restrição 99
B.3 Ponto de mínimo 100
B.4 Ponto de inflexão 100
B.5 Ângulo para o gradiente de f num ponto estacionário. 101
B.6 Ângulo para o gradiente de g num ponto estacionário. 102

Capítulo 1

Introdução

O estudo de problemas de controle ótimo originou-se da teoria de cálculo variacional por volta de 1956. Bellman (1957) e Pontryagin et al. (1965) dão grande contribuição para o desenvolvimento do tema. A teoria de controle pode ser aplicada nos mais diversos tipos de problemas, como por exemplos, em problemas físicos, biológicos, em problemas relacionados à processos químicos, na área econômica e produtiva, entre outros (Sakr et al., 2001; Dorfman, 1969; Bressan et al., 2006a; Kennedy, 1986). Sendo assim, pode-se encontrar diversas formas de apresentar um problema de controle, dependendo de cada aplicação em particular.

Problemas de controle ótimo podem ser definidos por sistemas contínuos, onde o estado deste sistema evolui a partir de uma equação diferencial, ou seja, se $x(t)$ é o estado no tempo t, então temos que x evolui através de uma equação diferencial $\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t))$, onde $u(t)$ é o controle e $g(\cdot)$ é uma função. Problemas de controle ótimo podem ser descritos por funções discretas no tempo, e nesse caso, a equação diferencial do caso contínuo é substituída por uma equação de diferenças do tipo $x_{t+1} - x_t = g_t(x_t, u_t)$.

O objetivo dessa dissertação é discutir de forma resumida a teoria básica de controle ótimo, mostrando algumas condições necessárias e suficientes de otimalidade. Além disso, apresentamos um estudo de caso relacionado à otimização do processo de produção de uma lavoura, a partir do controle de plantas daninhas. Nesse estudo de caso, é apresentado um modelo de controle ótimo discreto, onde aplicamos condições necessárias de otimalidade para maximizar os lucros de produção.

Aplicamos a teoria de controle ótimo na resolução de um problema de otimização dinâmica ligados ao controle de plantas daninhas na agricultura, onde a variável de estado representa a densidade de sementes da planta daninhas na terra, e o controle representa a taxa de herbicida aplicada. Um modelo populacional será apresentado, o qual dará a expres-

são da equação dinâmica. Foi considerado um período de controle de 10 anos. Este estudo está baseado em Kennedy (1988); Pannell (1990a); Jones e Cacho (2000); Jones (2005).

Um modelo de otimização estático é apresentado. Nesse caso, consideramos apenas o período corrente de aplicação, onde o estado no início do período é constante, e é dado pela densidade de plantas daninhas na terra. A variável de controle é dada como no modelo dinâmico, e será a única variável do problema.

De forma geral, o problema de controle de plantas daninhas pode ser resumido da seguinte forma: dado o funcional objetivo J, com $f_t(x_t, u_t) = P_y Y(x_t, u_t) - P_u u_t - C$, onde f_t é o lucro obtido na colheita da lavoura no ano t, Y é uma função de produção, P_y é o preço de venda de cada unidade de produto produzido, P_u é o preço de custo de cada unidade de controle utilizado, e C é uma constante de produção, devemos controlar o sistema $x_{t+1} - x_t = g_t(x_t, u_t)$, de forma a maximizar J. Ou seja, devemos controlar a quantidade de plantas daninhas na lavoura, a partir da aplicação de herbicida, visando obter o maior lucro de produção possível.

Problemas como o descrito acima, são caracterizados como problemas de manejo de recurso, onde a densidade de planta daninha é o estoque desse recurso, o qual é considerado um recurso renovável (Kennedy, 1986; Jones, 2005). Modelos de otimização dinâmica e estática são utilizados para quantificar diversas variáveis relacionada a um problema de manejo de recurso. Esses modelos podem ser classificados como estocásticos ou determinísticos. Na literatura, encontramos estudos onde esses problemas de otimização são resolvidos através de métodos numéricos de programação não linear, métodos que utilizam o princípio do máximo de pontriagyn, programação dinâmica e programação dinâmica estocática (Pannell, 1990a; Jones e Cacho, 2000; Jones, 2005).

Procuramos elaborar um trabalho contendo informações claras, de forma a servir de referência aos que pretendem iniciar seus estudos nesta área.

No Capítulo 2, apresentamos conceitos preliminares que nos ajudarão no decorrer do trabalho. Inclui-se nesse capítulo, informações gerais sobre plantas daninhas, como a sua conceituação, dados históricos, informações sobre o controle de infestações, entre outros temas relacionados. Falamos também sobre modelagem matemática, e sua importância no tema estudado, além de conceitos e definições matemáticas.

O Capítulo 3 foi reservado para a apresentação da teoria de controle utilizado no trabalho. O caso contínuo e discreto são descritos no capítulo. Neste capítulo apresentamos condições necessárias e suficientes para o problema de controle ótimo contínuo (Loewen, 2006), e apresentamos o problema de controle ótimo discreto e uma condição necessária de otimalidade para esse caso. Além disso, foi feita uma abordagem sobre a obtenção de um solução numérica para problemas de controle ótimo. Dois métodos numéricos utilizados para resolver os problemas de controle ótimo são apresentados (Raggett, 1977; Kumar, 1976).

O estudo de caso já mencionado é apresentado no Capítulo 4. É apresentada nesse capítulo uma análise sobre a dinâmica de um modelo populacional de planta daninha, a partir da variação de determinados parâmetros e da taxa de herbicida aplicada. No 5 é apresentado o problema econômico ligado à produção da lavoura, e ao controle da planta daninha, o qual é otimizado utilizando a teoria apresentada no Capítulo 3. Serão apresentados dois modelos de otimização: um *estático*, no qual considera-se apenas o período atual de controle, e um modelo *dinâmico*, o qual relaciona um período de aplicação de controle de 10 anos. Os métodos numéricos apresentados no Capítulo 3 são utilizados para resolver os problemas de otimização estático e dinâmico.

O Capítulo 6 está reservado para as considerações finais do trabalho.

Finalmente, relacionamos nas *Referências Bibliográficas*, os livros e artigos por nós consultados e citados.

Como pode ser observado neste capítulo de introdução, esta dissertação está baseada em dois pontos principais. O primeiro, é o estudo de teorias básicas relacionadas à otimização de sistemas não lineares com aplicação de controle, utilizando de conhecimentos prévios sobre controle ótimo, modelagem matemática e métodos numéricos de resolução. Paralelamente, estudamos um outro assunto de nosso interesse, no qual poderíamos aplicar o que foi estudado sobre otimização. Esse assunto é o controle de plantas daninhas em culturas agrícolas, para o qual desenvolvemos uma pesquisa detalhada com o intuído de nos familiarizarmos com a nova área de pesquisa, e fornecer a quem se interessar um material contendo informações suficientes para o início de uma nova pesquisa no tema.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Sobre Plantas Daninhas

Há na literatura diversos e amplos trabalhos dedicados ao estudo de plantas daninhas. Dentre esses trabalhos, destaco dois, Lorenzi (2000a) e Lorenzi (2000b) que serviram de base para os estudos sobre plantas daninhas, pois trazem importantes informações sobre vários tópicos relacionados, entre eles a forma como as plantas daninhas se disseminam, sua origem, a importância das plantas daninhas na agricultura, as diversas formas de controlar as infestações, entre outros diversos assuntos relacionados. A seguir, farei uma sucinta apresentação sobre o tema.

Conceituação

Segundo Lorenzi (2000b), diversos termos como "plantas daninhas", "ervas más", "ervas daninhas"e "plantas invasoras", têm sido empregados na literatura agrícola e botânica brasileira, gerando confusões e controvérsias a respeito de seus conceitos. Em nosso trabalho usaremos o termo plantas daninhas, as quais podem ser definidas como um grupo de plantas silvestres[1] que crescem espontaneamente em todos os solos agrícolas e que se comportam como indesejáveis.

Origem

[1]plantas que nascem e se reproduzem espontaneamente e não são cultivadas pelo homem.

O problema de plantas daninhas é tão antigo quanto a própria agricultura. A sua origem é atribuída ao próprio homem, que na ânsia de melhorar as espécies úteis retirou-lhes gradativamente a agressividade necessária para viverem sozinhas. A natureza, por sua vez, agiu sobre as plantas silvestres no sentido contrário, ou seja, imprimindo-lhes uma seleção no sentido de torná-las cada vez mais eficientes quanto a sobrevivência.

Sobrevivência

A grande habilidade das plantas daninhas quanto a sobrevivência é atribuída aos seguintes atributos ou mecanismos desenvolvidos pela natureza: grande agressividade competitiva, grande produção de sementes, facilidade de dispersão das sementes, grande longevidade das sementes.

Classificação

As plantas daninhas podem ser classificadas de várias maneiras dependendo do interesse. A mais comum é aquela que se baseia na duração de seu ciclo vital e que as classifica em plantas anuais, bianuais e perenes. Entre as espécies anuais estão a maioria das plantas infestantes das grandes culturas e compreendem aquelas que germinam e completam o ciclo até a maturação das sementes dentro da mesma estação de crescimento (60 a 140 dias). As plantas bianuais são aquelas que germinam e crescem no primeiro ano, completando o ciclo no próximo ano. Já as espécies perenes são aquelas que vivem indefinidamente durante muitos anos.

Segundo Lorenzi (2000b), esta classificação é a mais indicada para fins de controle e ou erradicação das plantas daninhas, e ainda, para efeito de controle químico as plantas daninhas têm sido freqüentemente classificadas como espécies de "folhas largas"e de "folhas estreitas". Lorenzi ainda apresenta outras formas de classificação e suas característica que não citaremos neste trabalho.

Propagação e Disseminação

As plantas daninhas propagam-se basicamente por meios vegetativos, sexuais e assexuais. A propagação vegetativa é exclusiva das espécies perenes sendo efetuada por órgãos vegetativos que se adaptam para a propagação. A reprodução sexuada é efetuada através de sementes, que é considerada a principal unidade propagativa das plantas daninhas. A propagação assexuada entre as plantas daninhas é exclusiva das plantas do grupo das pteridófitas

(samambaias).

Com relação a disseminação, apesar de não possuírem meios próprios de locomoção as sementes das plantas daninhas são eficientes viajantes. As plantas daninhas são disseminadas principalmente pelo homem, por animais, pela aguá e pelo vento.

Importância das plantas daninhas e a interferência com as culturas agrícolas

As plantas daninhas interferem na agricultura, na pecuária, na saúde e na vida do homem, causando maiores ou menos transtornos.

É na agricultura, entretanto, que as plantas daninhas causam as maiores preocupações e danos econômicos. Segundo Lorenzi (2000b), em termos médios, 30 a 40% de redução da produção agrícola no mundo tropical é atribuído a interferência das plantas daninhas. Além desses prejuízos diretos, a presença das plantas daninhas reduz a eficiência agrícola, aumentando os custos de produção.

O controle de plantas daninhas

O controle de plantas daninhas consiste na adoção de certas práticas que resultam na redução da infestação, mas não, necessariamente, na sua completa eliminação. A erradicação total da planta daninha é o controle ideal, porém dificilmente obtido na grande agricultura. Segundo Lorenzi (2000a), devido o alto custo, a erradicação só é praticada em pequenas áreas, como em viveiros de plantas frutíferas e ornamentais.

O nível de controle de plantas daninhas obtido em uma lavoura, depende da espécie infestante, da cultura e dos métodos empregados. Muitas vezes faz-se necessário a associação de dois ou mais métodos para atingir o nível desejado, constituindo-se esse fato no "controle integrado".

Dentre as práticas de controle empregados no tratamento de plantas daninhas, podemos destacar os seguintes: controle preventivo, controle cultural, controle mecânico ou físico, controle biológico e o controle químico.

Controle preventivo

O controle preventivo de plantas daninhas consiste no uso de práticas que visam prevenir a introdução, estabelecimento e ou a disseminação de determinadas espécies em áreas ainda por elas não infestadas.

Controle cultural

O controle cultural consiste no uso de práticas comuns ao bom manejo da água e do solo, como a rotação de cultura, a variação do espaçamento da cultura e o uso de coberturas verdes.

- A rotação de culturas é praticada como meio de prevenir surgimento de altas populações de certas espécies de plantas daninhas mais adaptáveis a uma determinada cultura.

- A variação de espaçamento entre linhas ou da densidade de plantas na linha pode contribuir para a redução da interferência das plantas daninhas sobre a cultura, dependendo da arquitetura das plantas cultivadas e do tipo de infestantes.

- As coberturas verdes são culturas geralmente muito competitivas com a plantas daninhas.

Controle mecânico ou físico

O controle mecânico, conforme o próprio nome indica, consiste no uso de práticas de eliminação de plantas daninhas através do efeito físico-mecânico, como a capina manual, a roçada, a inundação, a queimada, a cobertura morta e o cultivo mecanizado.

- A capina manual através da enxada é um meio altamente eficaz de controle de plantas daninhas e talvez ainda o mais largamente empregado em nossa agricultura. Com o alto custo da mão-de-obra braçal, a capinada manual deixou de ser o método mais econômico.

- A roçada, seja manual ou mecânico, é um útil instrumento de controle de plantas daninhas em pomares e cafezais, principalmente em terrenos declivosos.

- O cultivo mecanizado, feito por cultivadores, tracionados por animais ou máquinas, tem larga aplicação na agricultura brasileira e constitui-se num dos principais meios de controle de plantas daninhas.

Controle químico

O uso de produtos químicos para o controle de plantas daninhas iniou-se pouco antes do início do século XX. O uso de controle químico obedece ao princípio de que certos produtos químicos são capazes de matar plantas, e muito mais importante, que muitos deles podem matar apenas alguns tipos de plantas, sem prejudicar outras. Esses produtos são denominados herbicidas. Um herbicida pode ser definido como qualquer produto químico que mata ou inibi significativamente o desenvolvimento de uma planta.

Quando usados corretamente os herbicidas desempenham com segurança e eficiência seu papel, transformando-se em ferramentas indispensáveis na agricultura. Contudo, se usados de maneira inadequada, podem causar severas perdas econômicas.

Os herbicidas podem ser classificados segundo sua atividade herbicida, modo de aplicação, ou segundo sua semelhança química. Os herbicidas podem ser classificados em pré-emergentes, os quais são aplicados no solo antes da germinação das sementes das plantas daninhas ou da emergência de suas plântulas, e pós-emergentes, os quais são aplicados na folhagem das plantas daninhas.

Resistência de plantas daninhas aos herbicidas

O fenômeno da resistência de plantas daninhas à herbicidas já é um fato no Brasil. Segundo a Sociedade Brasileira de Ciências de Plantas Daninhas, já foram identificadas cerca de 10 plantas daninhas resistentes a herbicidas no Brasil. O potencial de desenvolvimento de casos de resistência acentua-se com o uso prolongado de um mesmo herbicida, ou com uso continuado de herbicidas que apresentam o mesmo mecanismo de ação nas plantas.

Algumas medidas preventivas podem ser tomadas com o objetivo de minimizar o desenvolvimento de resistência de plantas daninhas aos herbicidas, como a rotação de herbicidas, misturar herbicidas com diferentes mecanismos de ação, praticar rotação de culturas, acompanhar com atenção quaisquer mudanças nas populações de plantas daninhas e usar de forma intensiva o manejo integrado de plantas daninhas.

2.2 Modelagem Matemática

Um *modelo* é uma representação ou interpretação simplificada da realidade, ou uma interpretação de um fragmento de um sistema segundo uma estrutura de conceitos. Um modelo apresenta apenas uma visão ou cenário de um fragmento do todo. Normalmente,

para estudar um determinado fenômeno complexo, criam-se vários modelos.

Um *sistema* pode ser definido como um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos deste conjunto (Monteiro, 2002). A representação matemática de um sistema real é definida como modelo, sendo a *modelagem matemática* o processo de desenvolvimento dessa representação.

Segundo Aguirre (2004), existem várias formas e técnicas de se obter modelos matemáticos, e uma delas é a *modelagem caixa branca*, a qual necessita-se conhecer a fundo o sistema a ser modelado. Modelagem caixa branca também é conhecida como *modelagem pela física ou natureza do processo.*

Se algumas grandezas que caracterizam os objetivos constituintes de um sistema, ou modelo, variam no tempo então este é dito *dinâmico*, (Aguirre, 2004) e (Monteiro, 2002).

Dentro da modelagem matemática podemos encontrar diversos tipos de modelos diferentes e várias formas de utilização dos mesmos. Neste trabalho apresentaremos um modelo populacional que descreve a dinâmica de uma planta daninha. Além disso, será apresentado *modelos de otimização* que podem ser utilizados para resolver problemas que envolvem diversos tipos de sistemas (físicos, biológicos, etc).

O modelo matemático desenvolvido para um determinado sistema é apenas uma representação aproximada. Conseqüentemente, não existe unicamente um modelo do sistema, mas uma família de modelos com características e desempenhos variados. A decisão de qual desses modelos escolher é um dos problemas não triviais a serem enfrentados. Além disso, espera-se que um modelo, sendo uma simplificação da realidade, mantenha as características fundamentais do fenômeno ou realidade que representa. Em outras palavras, pretender desenvolver um modelo que contenha muitas das características do sistema real é um alvo normalmente inatingível.

Para que Construir um Modelo

Os modelos são construídos por várias razões. De fato, ao proporcionar uma descrição abstrata e simplificada de algum sistema, eles poderão ser utilizados para direcionar os esforços de pequisas ou para definir um problema para um estudo detalhado. Mais freqüentemente, os modelos matemáticos são desenvolvidos para a predição da mudança dinâmica em função do tempo.

Dentro do ambiente de produção agrícola, os modelos matemáticos auxiliam o entendimento de sistemas considerando complexos, como o desenvolvimento de uma planta daninha e sua competição com a lavoura, e assim, abrem oportunidades para o desenvolvimento de

pesquisas, por exemplo, visando a otimização de processos como a aplicação de herbicida nas lavouras (Kennedy, 1988; Pannell, 1990a; Cacho, 1998; Jones e Cacho, 2000; Jones, 2005).

Tipos de Modelos

Faremos a seguir uma breve apresentação de alguns tipos de modelos considerados, segundo Aguirre (2004), os mais importante.

Modelos lineares e não lineares: em vias gerais, chama-se de um modelo linear os modelos que satisfazem o *princípio da superposição*. Este princípio diz que a saída de um sinal formado pela combinação linear de diferentes sinais, é igual à mesma combinação aplicada aos sinais de saída gerados por cada sinal original separadamente. A condição de linearidade normalmente simplifica bastante o modelo a ser desenvolvido. No entanto, existem situações em que esta consideração não é adequada, como por exemplo, quando deseja-se estudar as características dinâmicas não-linear do sistema, tais como oscilações e bifurcações. Os modelos não lineares não possuem classificação generalizada conhecida.

Modelos estáticos e dinâmicos: modelos estáticos relacionam variáveis sem quantificar sua dependência temporal. Quando deseja-se avaliar a evolução temporal de um sistema, modelos dinâmicos são usados. Modelos estáticos são normalmente descritos por equações algébricas, ao passo que modelos dinâmicos são compostos por equações diferenciais (ou diferenças, no caso de tempo discreto). Tais modelos podem também incluir equações algébricas.

Em última análise, todo sistema real é dinâmico. A opção de descrever um sistema real por um modelo estático é viável quando a sua dinâmica não é relevante.

Modelos discretos e contínuos: neste trabalho os termos *discreto* e *contínuo* se referem ao tempo. Modelos dinâmicos contínuos são descritos por equações diferenciais e representam a evolução do sistema continuamente no tempo. Já modelos dinâmicos discretos no tempo representam a evolução do sistema em instantes descritos por equações de diferença. Sistemas biológicos normalmente são descritos por modelos de tempo discreto.

Validação de um Modelo

Dado a determinação de um família de modelos que descrevem um determinado sistema real, necessita-se de validar esses modelos afim de garantir sua correta utilização na simulação

do comportamento de tal sistema. Tendo a validação de tais modelos garantida, podemos compara-los e determinar qual modelo descreve melhor o sistema original.

Simulação de um Modelo

Afim de avaliar o desempenho de um modelo, é necessário simulá-lo, ou seja, resolver as equações que o compõem. Portanto, a forma de simular um modelo vai depender da representação utilizada. Os casos contínuos e discretos serão brevemente descritos a seguir (Aguirre, 2004).

Modelos contínuos: nem sempre é possível determinar a solução analítica de modelos de tempo contínuo da forma $\dot{x} = f(x, t)$. No entanto, pode-se resolve esta equação diferencial de forma aproximada através de métodos numéricos.

Modelos discretos: a simulação de modelos discretos corresponde normalmente à solução de equações de diferenças. O procedimento nesse caso é direto, e na maioria dos casos não requer nenhum algoritmo especial.

2.3 Modelos Matemáticos para o Manejo de Plantas Daninhas

Os modelos matemáticos têm um papel fundamental no desenvolvimento de pesquisas relacionadas à prevenção e combate de plantas daninhas na agricultura. Porém, devido as mudanças no desenvolvimento de problemas de combate de plantas daninhas alguns modelos se tornam obsoletos, principalmente quando procura-se atribuir ao modelo aspectos relacionados aos impactos ambientais e técnicas diferentes de controle. Tendo isto, para que possamos fortalecer e sustentar melhor o modelo apresentado, necessitamos de dois fatores bases: (1) fortalecer a idéia de que é preciso levar em consideração os impactos ambientais causados pela técnica escolhida e tratar de outras alternativas de controle; (2) estudar estratégias de combate as infestações por plantas daninhas nos que diz respeito a resistência química e aplicação de controles biológicos.

Segundo Doyle (1997), existem três objetivos chaves a serem focados quando desejamos traçar uma estratégia de controle de plantas daninhas na agricultura considerando além da aplicação de herbicidas, e a obtenção do máximo lucro, aspectos ambientais. Esses objetivos

podem ser definidos como sendo estáticos, dinâmicos, determinísticos ou estocásticos. Em Cacho (2000) encontramos uma apresentação interessante sobre os modelos estático e dinâmico. A seguir faremos uma apresentação de algumas características destes modelos.

Modelo Estático

Um modelo estático é aplicado quando procura-se maximizar o lucro de um investimento levando em consideração apenas o ano corrente. De forma geral, o objetivo do produtor é determinar a taxa de herbicida que maximize, dentro de um único período, o seu lucro de produção, dado uma desindade de plantas daninhas no solo.

Um modelo estático pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \max\ \pi(x,u) \\ \text{sujeito a} \quad & x = a, \end{aligned}$$

onde x é a densidade inicial de plantas daninhas, u é a dose de herbicida aplicado, a é uma constante. e $\pi(x,u)$ é a função que representa o lucro de produção da lavoura em função da densidade de plantas daninhas e da taxa de herbicida aplicado.

Modelo Dinâmico

É muito comum tratar o problema de controle de plantas daninhas como um problema de manejo de recurso ((Kennedy, 1986)), para isso, necessitamos desenvolver um modelo dinâmico. Nesse caso, o objetivo do fazendeiro é determinar de que maneira, e em qual intensidade, o banco de sementes, x, de cada estação ou ano, é alterado com a aplicação do herbicida, u, visando assim utilizar economicamente da melhor forma possível o herbicida e, conseqüentemente, maximizar seu lucro num período pré-determinado de tempo. Sendo assim, para um problema de manejo de recurso, avaliado num período de T anos, um modelo de otimização dinâmico pode ser dado da seguinte forma:

$$J = \sum_{t=1}^{T} \alpha^{t-1} \pi(x_t, u_t) \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a} \quad & x_{t+1} - x_t = g(x_t, u_t), \\ & x_1 = b, \quad u_t \in \Omega(t), \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde x_t, u_t e π são como já definidos, J é o funcional objetivo do problema, e representa o lucro alcançado num período de T anos, α é um fator de desconto (Kennedy, 1986), e $g(x_t, u_t)$ representa a variação do banco de sementes a partir da aplicação do herbicida. Essa função é construída a partir de um modelo dinâmico populacional que relaciona a variável de estado x_t e o controle aplicado u_t. $\Omega(t)$ é o conjunto de valores admissíveis para u_t.

Existem diversas formas para resolver os problemas de otimização definidos aqui. Para o caso estático, poderiam ser aplicados algoritmos de resolução de problemas de otimização não lineares, tais como método de Newton ou do Gradiente, (Bertsekas, 1999). Para o sistema descrito pelas equações (2.1)-(2.2) podemos aplicar diversos métodos, dentre ele, temos a teoria de controle ótimo (Princípio do Máximo), programação dinâmica, programação dinâmica estocástica, e métodos gerais de resolução de problemas não lineares (Gradiente, Newton-Raphson, entre outros).

Um modelo de controle ótimo

A teoria de controle é uma ferramenta muito importante na determinação da solução de um problema do tipo (2.1)-(2.2). Um componente importante de um problema dinâmico é a variável de co-estado, denotada por λ, e que será inserida no problema através da função Hamiltoniana. Para o problema de manejo de plantas daninhas, a função de Hamilton (Pontryagin et al., 1965) é dada por (Kennedy, 1986)

$$H_t = \pi(x_t, u_t) + \alpha\lambda_{t+1} g_t(x_t, u_t) \tag{2.3}$$

A função H_t é o lucro obtido a partir de um determinado nível das variáveis de estado e controle x e u, mais o valor de alguma mudança no estoque da variável de estado, avaliada com a variável de co-estado λ_{t+1}. A variável de co-estado representa o preço de sombra de uma unidade do estoque do banco de sementes, e também é chamada de custo de depreciação do estoque. A função $g_t(x_t, u_t)$, na equação (2.3), representa a taxa de mudança no banco de sementes decorrente da aplicação do herbicida. Quando $g_t(x_t, u_t)$ é multiplicada por λ_{t+1}, esta é convertida em um valor monetário, e representa a taxa de mudança do valor econômico do banco de sementes correspondente a dose de herbicida aplicada. De forma geral, este valor pode ser visto como o lucro adquirido a partir de efeitos positivos da ação do herbicida no banco de sementes (Jones e Cacho, 2000).

A teoria de controle desenvolvida por Pontryagin et al. (1965), nos da as condições de primeira ordem para este problema, que são as seguintes.

$$0 = \frac{\partial H_t}{\partial u_t} \tag{2.4}$$

$$\alpha\lambda_{t+1} - \lambda_t = -\frac{\partial H_t}{\partial x_t} \tag{2.5}$$

$$x_{t+1} - x_t = \frac{\partial H_t}{\partial \lambda_t} \tag{2.6}$$

A equação (2.4) é a condição padrão para maximização do problema com relação a u_t; a equação (2.5) é a equação adjunta e denota a taxa de mudança do preço de sombra com o passar do tempo; a equação (2.6) é a re-declaração da equação de movimento. Este conjunto de equações nos permitem determinar a processo ótimo, composto pela variável de estado e variável de controle (x^* e u^*), e a variável de co-estado relacionada ao estado λ_t^*. A variável de estado depende do estado inicial do sistema. Embora x_1 seja dado, λ_1 é desconhecido, e uma condição adicional, conhecida como a condição de transversalidade, é requerida para obtermos uma única solução. Neste problema, onde o tempo final, T, é dado e o estado final, x_T, é livre, a condição de transversalidade é $\lambda_{T+1} = 0$.

A solução do sistema (2.4)-(2.5) será dada posteriormente em outro capítulo dessa dissertação.

Para que possamos aplicar o modelo de controle ótimo descrito acima, a Hamiltoniana deve ser continuamente diferenciável. Devido essa dificuldade, muitas vezes não é possível aplicar tal modelo. Sendo assim, uma alternativa é a utilização da técnica de Programação Dinâmica, a qual teve aplicação difundida na agricultura e administração de recursos naturais (Kennedy, 1986).

Um modelo de programação dinâmica

Quando utilizamos a programação dinâmica para o problema de administração de planta daninha, a Hamiltoniana na equação (2.3) é substituída pela seguinte equação recursiva.

$$V_t(x_t) = \max_{u_t}[\pi_t(x_t, u_t) + \alpha V_{t+1}(x_{t+1})], \tag{2.7}$$

onde V_t é retorno ótimo no período t (período atual), α é o fator de desconto, π é o retorno do período atual, e x e u são as variáveis de estado e controle como previamente definidos. O problema é resolvido de forma recursiva, sujeito à equação de movimento definida pelo modelo de dinâmica populacional da planta daninha. Uma desvantagem da aproximação por

programação dinâmica é de não podermos contar com uma variável equivalente à variável de co-estado λ_{t+1} na solução. Isto implica na perda de informação sobre os benefícios de controlar o banco de sementes ano a ano.

Muitos estudos relacionados à otimização de um processo agrícola, foram feitos baseados nos dois modelos citados acima. Porém, ainda existe outra alternativa, que é a Programação Estocástica. A principal característica deste modelo é o fato de incorporarmos aos dados os efeitos estocásticos da estrutura do processo.

Mais informações sobre os modelos citados aqui podem ser encontradas em Kennedy (1988), Pannell (1990a), Cacho (1998), Jones e Cacho (2000) e Jones (2005).

Capítulo 3

Controle Ótimo

3.1 Controle Ótimo Contínuo

Como já citado anteriormente, os estudos relacionados à problemas de controle ótimo originaram-se da teoria de cálculo variacional por volta de 1956. Os problemas de controle ótimo são geralmente definidos em um conjunto de dimensão infinita, onde os controles podem ser funções do tempo que são limitadas ou integráveis. A teoria de controle pode ser aplicada nos mais diversos tipos de problemas, como por exemplos, em problemas físicos, biológicos, em problemas relacionados à processos químicos, na área econômica e produtiva, entre outros (Sakr et al., 2001; Dorfman, 1969; Bressan et al., 2006a; Kennedy, 1986). Sendo assim, pode-se encontrar diversas formas de apresentar um problema de controle, dependendo e cada problema em particular. Neste capítulo, apresentamos apenas uma parte da teoria de controle existente, visando mostrar de forma geral algumas situações existentes e preparando um material para que possamos aplicar à um problema específico relacionado ao controle de planta daninha na produção agrícola.

Um problema de controle ótimo contínuo pode ser dado da seguinte forma:

$$\min\ J = l_0(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L_0(t, x(t), u(t))dt \tag{3.1}$$

(P) sujeito a

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),\ q.t.p.\ t \in [t_0, t_1] \tag{3.2}$$

$$y_j = l_j(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L_j(t, x(t), u(t))dt,\ j = 1, 2, \ldots, M \tag{3.3}$$

$$u(t) \in \Omega,\ q.t.p.\ t \in [t_0, t_1]. \tag{3.4}$$

$$x(t_0) = \xi. \tag{3.5}$$

onde o tempo final t_1 é variável, e o tempo inicial t_0 é fixo. Supomos que o número de restrições do problema seja finito. O problema formulado acima nos permite determinar no futuro, até quanto tempo de planejamento é necessário para termos um plano ótimo ao longo de t_1 períodos ou anos, com $t_1 \in (t_0, \infty)$. O estado final $x(t_1)$ é livre, e quando o supomos dessa forma, dizemos que não há restrição de estado final para o problema.

Aqui, J é o *funcional objetivo* do problema, (3.2) é a *equação dinâmica*, a qual descreve a evolução do estado x com o tempo, as equações (3.3) formam um conjunto finito de restrições para (P), e Ω é o conjunto dos controles admissíveis para (P). Temos também que, $x(t_0) = \xi$, os custos (l_0, L_0), as restrições (l_j, L_j), e o valor de cada restrição y_j, $j = 1, \ldots, M$, são dados.

Ainda com relação ao problema acima, temos $L_j : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ l_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ j = 0, 1, \ldots, M$, $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. $SP([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ representa o espaço das funções *suaves por partes* $u : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$, e a função $u(\cdot) \in SP([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$ é a função de controle, (Loewen, 2006).

Seja $(x, u, t) \in \mathbb{R}^n \times \Omega \times [t_0, t_1]$ um *processo admissível* para o problema (P), isto é, um processo que satisfaz todas as restrições do problema (3.1)-(3.5). Chamaremos a tripla (x^*, u^*, t_1^*) de um *processo ótimo* para (P) se o funcional objetivo J for minimizado em $(x, u, t) = (x^*, u^*, t_1^*)$.

Para a obtenção da solução de um problema como o descrito, podemos utilizar uma condição necessária de otimalidade conhecida como Princípio do Máximo de Pontryagin (PMP), a qual permite a obtenção de uma candidata à solução analítica para o problema, e portanto exata. Porém, em muitos casos, se torna difícil, e até mesmo impraticável, obtermos essa candidata a solução analiticamente, devido a complexidade das expressões envolvidas.

Em casos como esses, precisamos utilizar métodos numéricos, com os quais é possível a obtenção de uma solução aproximada. Ainda neste capítulo apresentaremos alguns métodos numéricos de resolução deste tipo de problema.

Problemas de controle ótimo podem ser representados considerando o tempo contínuo, $t \in \mathbb{R}$ ou discreto, $t \in \mathbb{A}$, onde $\mathbb{A}$ é um subconjunto discreto de $\mathbb{R}$. Uma das diferenças entre esses dois problemas é que, no contínuo o sistema dinâmico relacionado ao estado do problema é descrito por uma equação diferencial, enquanto o caso discreto está relacionado à equações de diferenças. Essa diferença tem grande importância, pois resolver uma equação de diferenças, em geral, é bem mais simples que uma equação diferencial. De fato, em uma equação de diferenças, revolve-se *somas* e *produtos*, enquanto que a solução de uma equação diferencial envolve a *integração* de uma determinada expressão. Sem duvida, na maioria das vezes o cálculo de uma integral é mais complexo que o cálculo de somas e produtos. Mais adiante introduziremos os dois tipos de problemas.

Aqui, denotamos a derivada da função vetorial $x = x(t)$ com relação ao tempo por $\dot{x}$, e o seu transposto por x'. Manteremos essas duas notações para toda função e vetor durante todo o trabalho.

Apresentaremos aqui sistemas cujos comportamentos podem ser modelados por um conjunto de n equações diferenciais ordinárias da forma (3.2). De forma geral, temos que controlar o sistema a partir de um ponto inicial dado ξ em t_0, num tempo t_1 variável, de tal forma que o funcional objetivo (3.1) seja minimizado.

Naturalmente, existem controles admissíveis u que levam o sistema do estado inicial ξ ao estado final x^1, e dentre esses estamos procurando o que minimize J. Tal controle é chamado de *controle ótimo*, e o denotaremos por u^*. Admitiremos a existência deste controle ótimo para prosseguirmos no desenvolvimento da teoria. Dessa forma, precisamos agora determinar uma forma de distinguir esse controle dos demais. Uma condição necessária é dada por L. A. Pontryagin em 1956, e é conhecido como o *Princípio do Máximo de Pontryagin* (PMP) (Pontryagin et al., 1965). A seguir, veremos uma apresentação de condições necessárias e suficientes de otimalidade.

3.1.1 O Princípio do Máximo de Pontryagin

Vamos apresentar aqui o caso geral para o Princípio do Máximo de Pontryagin. Considere o problema (P) apresentado anteriormente. Sejam

$$\tilde{l}(x) = \sum_{j=0}^{M} \lambda_j l_j(x),$$

$$\tilde{L}(t,x,u) = \lambda_0 L_0(t,x,u) + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j L_j(t,x,u),$$

$$\text{e} \qquad H(t,x,u,p) = \big\langle p, f(t,x,u) \big\rangle - \tilde{L}(t,x,u).$$

A função $H(t,x,u,p)$ é chamada de *função de Hamilton* ou somente *Hamiltoniana* para (P), e a variável p é chamada é *variável de co-estado (ou adjunta)* do problema.

Teorema 3.1 (Princípio do Máximo de Pontryagin) *Suponha que $(t_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ é um processo ótimo para o problema (P). Então, existem multiplicadores $\lambda_0 \in \{0,1\}$ e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_M$ não todos nulos simultaneamente, e uma função chamada de co-estado $p(\cdot) \in SP([t_0, t_1^*]; \mathbb{R}^n)$, tal que as condições abaixo valem*

(a) *Equações adjuntas:*

$$\dot{h}(t) = \frac{\partial}{\partial t} H(t, x^*(t), u^*(t), p(t))$$
$$-\dot{p}(t) = \nabla_x H(t, x^*(t), u^*(t), p(t))$$

onde

$H(t,x,u,p) = pf(t,x,u) - \lambda_0 L_0(t,x,u) - \sum_{j=1}^{M} \lambda_j L_0(t,x,u)$ *e*

$h(t) = H(t, x^*, u^*, p)$ *é regular por partes.*

(b) *Equações de estado:*

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial}{\partial p} H(t, x^*(t), u^*(t), p(t)) = f(t, x^*(t), u^*(t)), \ \ q.t.p.\ t \in [t_0, t_1]$$

(c) *Condição de máximo (PMP):*

$$u^*(t) \in \arg\max_{u \in \Omega} H(t, x^*, u, p(t)).$$

(d) *Condição de transversalidade:*

$$< h(t_1), -p(t_1) >= \nabla_{(t_1,x)} \Big(\lambda_0 l_0(x(t_1)) + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j l_j(x(t_1)) \Big) \Big|_{x(\cdot)=x^*(\cdot),\ t_1=t_1^*}$$

Detalhes sobre o teorema acima podem ser encontrados em Cesari (1983).

As propriedades fornecidas pelo PMP são apenas condições necessárias para que um processo de controle (x, u) seja ótimo, semelhante à condição $\nabla h(x^*) = 0$, para o problema $\max\ h(x)$, sobre $x \in \mathbb{R}^n$. Dessa forma, condições suficientes para a otimalidade em controle ótimo devem ser obtidas. Para isso, temos duas possibilidades: condições suficientes à otimalidade *fracas* ou *elementares*, as quais são dadas pelos itens (i) e (ii) do Teorema 3.2, e ainda, temos as condições suficientes via *métodos de verificação*, as quais apresentaremos na próxima subseção.

Teorema 3.2 *Seja $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ um par admissível de estado e controle para (P). Se existe um arco $p : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, e algum vetor $(\lambda_1, \ldots, \lambda_M)'$, tal que (i)-(ii) abaixo valem com $\lambda_0 = 1$, então $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ é um processo ótimo para (P).*

(i) *Para q.t.p. $t \in [t_0, t_1]$, $(y, v) = (\hat{x}(t), \hat{u}(t))$ maximiza a função*

$$(y, v) \longmapsto \langle \dot{p}(t), y \rangle + H(t, y, v, p(t))$$

sobre todo $y \in \mathbb{R}^n$ e $v \in \Omega$.

(ii) *$y = \hat{x}(t_1)$ minimiza a função*

$$y \longmapsto \langle p(t_1), y \rangle + \tilde{l}(y).$$

Assim, encontrando um processo $(\tilde{x}, \tilde{u})$, e seu co-estado p dado pelo PMP (mais os multiplicadores de lagrange λ_j no caso com restrições do tipo (3.3)), deve-se verificar se o tal processo satisfaz **(i)** e **(ii)** do teorema acima, para verificar a otimalidade de $(\tilde{x}, \tilde{u})$.

Vejamos a demonstração do Teorema 3.2.

Demonstração:

Seja $(x(\cdot), u(\cdot))$ um processo admissível arbitrário de (P). Suponha que **(i)** e **(ii)** sejam satisfeitas para algum $p(\cdot) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$. Assim, de **(i)** segue que

$$\langle \dot{p}(t), \hat{x}(t) \rangle + \ H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), p(t)) \ \geq \ \langle \dot{p}(t), x(t) \rangle + \ H(t, x(t), u(t), p(t)).$$

Da restrição $\dot{x} = f(t, x, u)$, temos que $\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)$. Usando agora a definição de H, e multiplicando a desigualdade acima por -1, obtemos

$$\begin{aligned} -\langle \dot{p}(t), \hat{x}(t) \rangle - \left[\langle p(t), \dot{\hat{x}}(t) \rangle - \tilde{L}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \right] \ \leq \ & -\langle \dot{p}(t), x(t) \rangle + \\ & -\left[\langle p(t), \dot{x}(t) \rangle - \tilde{L}(t, x(t), u(t)) \right]. \end{aligned}$$

Integrando os dois lados da desigualdade acima no intervalo $[t_0, t_1]$, observando que $\langle \dot{p}, x\rangle\Big|_t + \langle \dot{x}, p\rangle\Big|_t = \dfrac{d}{dt}\langle p, x\rangle\Big|_t$, obtemos

$$-\left\langle p(t), \hat{x}(t)\right\rangle\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))dt \leq -\left\langle p(t), x(t)\right\rangle\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L}(t, x(t), u(t))dt \tag{3.6}$$

De (ii), temos

$$\left\langle p(t_1), \hat{x}(t_1)\right\rangle + \tilde{l}(\hat{x}(t_1)) \leq \left\langle p(t_1), x(t_1)\right\rangle + \tilde{l}(x(t_1)). \tag{3.7}$$

Somando ambos os lados das desigualdades (3.6) e (3.7) acima, e aplicando a condição inicial $x(t_0) = \xi = \hat{x}(t_0)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\tilde{l}(\hat{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))dt \leq \tilde{l}(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L}(t, x(t), u(t))dt \Longrightarrow \\
&\Rightarrow l_0(\hat{x}(t_1)) + \underbrace{\sum_{j=1}^{M} \lambda_j l_j(\hat{x}(t_1)) + \sum_{j=1}^{M} \int_{t_0}^{t_1} \lambda_j L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))dt}_{\sum_{j=1}^{M} \lambda_j y_j} + \int_{t_0}^{t_1} \lambda_0 L_0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))dt \leq \\
&l_0(x(t_1)) + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \Big(\underbrace{l_j(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))\, dt}_{y_j} \Big) + \int_{t_0}^{t_1} \lambda_0 L_0(t, x(t), u(t))dt \Longrightarrow \\
&\Rightarrow \underbrace{l_0(\hat{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L_0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))dt}_{\text{função objetivo para } (\hat{x},\hat{u}),\ \lambda_0=1} \leq \underbrace{l_0(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L_0(t, x(t), u(t))dt}_{\text{função objetivo para } (x,u) \text{ arbitrário admissível},\ \lambda_0=1} \Longrightarrow .
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Observe que, do lado esquerdo a desigualdade (3.8), temos a função objetivo do problema (P) avaliada no processo admissível $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$, para $t \in [t_0, t_1]$. Do lado direito da mesma desigualdade, temos a função objetiva avaliada em um processo admissível arbitrário $(x(t), u(t))$, para $t \in [t_0, t_1]$. Ou seja, o custo do processo $(\hat{x}, \hat{u})$ é menor ou igual ao custo de qualquer processo admissível (x, u). Logo, podemos concluir que o processo $(\hat{x}, \hat{u})$ é um processo ótimo para (P). ■

Com o Teorema 3.2 demonstrado, vejamos o corolário abaixo.

Corolário 3.1 *Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo, e as funções*

$$(y, v) \longmapsto -H(t, y, v, p(t)) \ \text{ e } \ y \longmapsto \tilde{l}(y) \tag{3.9}$$

são convexas, então o Teorema 3.2 se aplica.

Vejamos um caso particular, porém antes, vejamos a seguinte resultado.

Teorema 3.3 *Seja S um conjunto convexo não vazio de $\mathbb{R}^m$, e seja $f : S \to \mathbb{R}$ um função duas vezes diferenciável sobre S. Então, f é convexa se e somente se, a matrix Hessiana denotada por $\nabla^2 f$ é semi definida positiva.*

A demonstração de tal resultado é dada em M.S. Bazaraa e Shetty (1993). Vamos usar esse resultado para concluir o exemplo a seguir.

Exemplo 3.1 (Regulador Quadrático) *Considere o problema:*

$$\min x(t_1)'Dx(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \big[x(t)'Qx(t) + u(t)'Ru(t)\big]dt$$

sujeito a

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = Ax(t) + Bu(t),\ u : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m \\
&x(0) = \xi, \\
&\big\langle c_j, x(t_1)\big\rangle = y_j,\ j = 1, 2, \ldots, M,
\end{aligned}$$

onde $c_j \in \mathbb{R}^n$, $x(\cdot) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Aqui, $\Omega = \mathbb{R}^m$.

Supondo que $D = D', Q = Q'$ e $R = R'$, são semi positiva definidas, então o Corolário 3.1 se aplica.

Observe que, qualquer processo $(\hat{x}, \hat{u})$ para o qual exista p e multiplicadores $\lambda_1, \ldots, \lambda_M$ satisfazendo as condições do PMP é ótimo.

Solução: A demonstração deste se resume em mostrar que as funções definidas em (3.9) são convexas, onde $(y, v) = (\hat{x}(t), \hat{u}(t))$, e H e $\tilde{l}$ são dadas da seguinte forma:

$$H(t, y, v, p) = \big\langle p, Ay + Bv\big\rangle - \lambda_0(y'Qy + v'Rv) \ \text{ e } \ \tilde{l}(y) = \lambda_0 y'Dy + \sum_{j=1}^{M} \lambda(c_j y). \tag{3.10}$$

Derivando (3.9) até segunda ordem, para H e $\tilde{l}$ dados por (3.10), obtemos.

$$\begin{aligned}
&\nabla_y\big(-H\big) = \big\langle 0, A\big\rangle + 2\lambda_0 y'Q \Longrightarrow \nabla_y^2 - H = 2\lambda_0 Q. \\
&\nabla_v\big(-H\big) = \big\langle 0, B\big\rangle + 2\lambda_0 v'R \Longrightarrow \nabla_v^2 - H = 2\lambda_0 R. \\
&\nabla_y \tilde{l} = 2\lambda_0 y'D + \sum_{j=1}^{M} \lambda(c_j) \Longrightarrow \nabla_y^2 \tilde{l} = 2\lambda_0 D.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

A matriz Hessiana da função $-H$ é dada por $\nabla^2 - H = \Big(\nabla_y^2\big(-H\big), \nabla_v^2\big(-H\big)\Big)$. Multiplicando $\nabla^2\big(-H\big)$ por $(y,v)'$ à esquerda e (y,v) à direita, com $(y,v) \in \mathbb{R}^{n+m}$, obtemos

$$(y,v)'\Big(\nabla^2 - H\Big)(y,v) = (y,v)'(2\lambda_0 Q, 2\lambda_0 R)(y,v) = 2\lambda_0(y'Qy) + 2\lambda_0(v'Rv).$$

Dado que Q e R são semi positivas definidas, e $\lambda_0 \in \{0,1\}$, temos que $2\lambda_0(y'Qy) + 2\lambda_0(v'Rv) \geq 0$. Logo,

$$(y,v)'\Big(\nabla^2 - H\Big)(y,v) \geq 0, \ \forall y \in \mathbb{R}^n, \ \forall v \in \Omega. \tag{3.12}$$

Multiplicando (3.11) por y' à esquerda e y à direita, com $y \in \mathbb{R}^n$, obtemos

$$y'(\nabla_y^2 \tilde{l})y = 2\lambda_0 y'Dy.$$

Pelo mesmo argumento usado anteriormente, temos que $2\lambda_0 y'Dy \geq 0$. Logo,

$$y'(\nabla_y^2 \tilde{l})y \geq 0, \ \forall y \in R^n. \tag{3.13}$$

Assim, de (3.12) e (3.13), aplicando o Teorema 3.3, temos que as funções (3.9) são convexas, logo, o Corolário 3.1 se aplica.

Com isso, temos demonstrado que o problema doa reguladores quadráticos, uma solução encontrada pelo PMP é ótima.

3.1.2 Equação de Hamilton-Jacobi e Métodos de Verificação

Vamos considerar aqui problemas sem restrições do tipo (3.3). Seja $S \subseteq R^{n+1}$. Vejamos o problema abaixo:

$$\big(P(t_0,\xi)\big) \quad \text{sujeito a} \quad \begin{array}{l} \min \ l(t_1, x(t_1)) + \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))dt \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \ q.t.p. \ t \in [t_0, t_1] \\ x(t_0) = \xi; \ u(t) \in \Omega, \ q.t.p. \ t \in [t_0, t_1] \\ (t_1, x(t_1)) \in S, \ \ S \in \mathbb{R}^{n+1}. \end{array}$$

Aqui, $t_1 > t_0$, $u : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$, e S é um conjunto chamado *conjunto alvo*. O estado evolui até atingir o conjunto alvo S no instante t_1, ou seja, para todo $t \in [t_0, t_1)$, o par $(t, x(t))$ não pertence a S, mas $(t_1, x(t_1))$ pertence. Veja a Figura 3.1 abaixo.

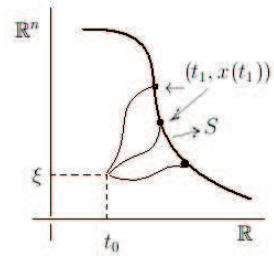

Figura 3.1: Conjunto alvo S

Vimos até aqui como determinar a otimalidade de um processo (x, u) obtido através do PMP. Veremos a seguir como verificar se um processo é ótimo através de um método de verificação baseado na equação de Hamilton-Jacobi-Bellman. Veremos que esse resultado é mais forte, pois o processo ótimo pode ser obtido por qualquer caminho, por exemplo, por observações.

3.1.2.1 A Função Valor

Vamos supor que o problema $(P(t_0, \xi))$ possua mínimo. Seja $V(t_0, \xi)$ esse valor mínimo, onde a função $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e é chamada de **função valor**. Observe que para cada par de condições iniciais (t_0, ξ), o problema tem um valor mínimo distinto. Veremos a seguir algumas propriedade relacionadas à função valor, as quais nos fornecerão uma forma de verificar se um dado processo é ótimo ou não.

Propriedade 3.1 *Para qualquer par admissível (x, u) no intervalo $[t_0, t_1]$, a função $W(s) = V(s, x(s)) + \int_{t_0}^{s} L(t, x(t), u(t))dt$ é não decrescente.*

Demonstração:

Seja (x, u) um par admissível para $P(t_0, \xi)$. Queremos mostrar que, para $t_0 \leq s_1 < s_2 \leq t_1$,

$$W(s_1) \leq W(s_2).$$

Primeiramente, observe que

$$W(s_2) - W(s_1) = V(s_2, x(s_2)) + \int_{t_0}^{s_2} L(t, x(t), u(t))dt - V(s_1, x(s_1)) - \int_{t_0}^{s_1} L(t, x(t), u(t))dt$$

agrupando as duas integrais acima, dado que $s_1 < s_2$, obtemos

$$W(s_2) - W(s_1) = V(s_2, x(s_2)) + \int_{s_1}^{s_2} L(t, x(t), u(t)) - V(s_1, x(s_1)). \tag{3.14}$$

Dada a equação acima, podemos afirmar que $W(s_2) - W(s_1) \geq 0$. De fato, pois dado que $s_1 < s_2$, o custo de um processo ótimo para $P(s_1, \xi)$ é menor ou igual que o custo de um processo ótimo para $P(s_2, \xi)$. Logo, pela definição de V, temos $V(s_2, x(s_2)) \geq V(s_1, x(s_1))$. Temos também que $\int_{s_1}^{s_2} L(t, x(t), u(t)) \geq 0$. Logo, dada a equação (3.14), temos $W(s_2) - W(s_1) \geq 0$. Como queríamos mostrar. ■

Suponhamos agora que V seja diferenciável. Usando a Propriedade 3.1, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{dW}{ds}(s) = \frac{d}{ds}\Big(V(s, x(s)) + \int_{t_0}^{s} L(t, x(t), u(t))\Big)dt \Longrightarrow \\ \Rightarrow 0 &\leq \frac{dW}{ds} = V_t(s, x(s)) + V_x(s, x(s))\dot{x}(s) + L(s, x(s), u(s)), \end{aligned}$$

para todo processo admissível (x, u) de $P(t_0, \xi)$.

O resultado obtido acima nos diz que

$$0 \leq V_t(t, x) + V_x(t, x)f(t, x, u) + L(t, x, u), \tag{3.15}$$

para todo par (t, x) antes do conjunto alvo S, e para todo $u \in \Omega$ arbitrário.

Propriedade 3.2 *Suponha que (x^*, u^*), com tempo final t_1^*, é um processo ótimo para o problema $P(t_0, \xi)$. Então, a função W correspondente*

$$W^*(s) = V(s, x^*(s)) + \int_{t_0}^{s} L(t, x^*(t), u^*(t))dt$$

é constante.

Demonstração:

Sejam $t_0 \leq s_1 < s_2 \leq t_1^*$. Então, pela Proposição 3.1,

$$W^*(s_2) \geq W^*(s_1).$$

Porém, se tivermos $W^*(s_2) > W^*(s_1)$, a desigualdade abaixo valeria

$$V(s_1, x^*(s_1)) < \int_{s_1}^{s_2} L(t, x^*(t), u^*(t))dt + V(s_2, x^*(s_2)),$$

o que contradiz a otimalidade de (x^*, u^*). De fato, pois essa desigualdade nos diz que existe um processo (x^*, u) estritamente mais "barato"partindo de $(s_1, x^*(s_1))$ até o alvo final, do que seguir o processo (x^*, u^*) no intervalo $[s_1, s_2]$ e depois otimizar.

Logo, $W^*(s_2) = W^*(s_1)$, para todo $s_1,\ s_2$ em $[t_0, t_1^*]$. ■

Pelas duas propriedades apresentadas aqui sobre a função $W(s)$, temos que, W é não decrescente ao longo de qualquer processo, e constante ao longo de qualquer processo ótimo. Supondo então W diferenciável, chegamos à seguinte conclusão sobre a função $W(s)$ ao longo do processo ótimo (x^*, u^*) no intervalo $[t_0, t_1^*]$.

$$0 = \frac{dW^*}{ds} = V_t(s, x^*(s)) + V_x(s, x^*(s))f(s, x^*(s), u^*(s)) + L(s, x^*(s), u^*(s)), \quad \forall\ s \in [t_0, t_1^*].$$

onde V_t e V_x são as derivadas da função valor com relação ao tempo t, e variável de estado x respectivamente.

Se existir uma trajetória ótima $x^*(\cdot)$ correspondente ao controle $u^*(\cdot)$, então para todo par (t, x), seguindo a trajetória antes de alcançar o conjunto alvo S, teremos

$$0 = V_t(t, x) + V_x(t, x)f(t, x, u^*) + L(t, x, u^*). \tag{3.16}$$

para algum u^*, onde u^* é o controle ótimo no pronto (t, x).

De (3.15) e (3.16), temos que, para cada ponto (t, x) antes de S,

$$-V_x(t, x)f(t, x, u) - L(t, x, u) \begin{cases} \leq V_t(t, x), & \forall\ u \in \Omega \\ = V_t(t, x), & \text{para algum } u \in \Omega. \end{cases}$$

Isto é,

$$V_t(t,x) = \max_{u\in\Omega}\Big\{ - V_x(t,x)f(t,x,u) - L(t,x,u)\Big\}.$$

Vamos definir agora a função conhecida como a *verdadeira função Hamiltoniana.* Denotaremos essa função por $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}(t,x,p) = \max_{u\in\Omega}\big\{H(t,x,u,p)\big\}.$$

A partir da definição de $\mathcal{H}$, temos determinado a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB):

$$\mathcal{H}(t,x,-V_x(t,x)) = V_t(t,x). \tag{3.17}$$

Observe que está incluída na equação acima a seguinte condição de fronteira

$$V(t_0,\xi) = l_0(\xi), \;\; \forall\ (t_0,\xi)\in S.$$

3.1.2.2 Condição Suficiente de Otimalidade

Até aqui vimos que, se o par (x^*,u^*) e o tempo final t_1^* formam uma *tripla ótima* do problema $P(t_0,\xi)$, então a função $W^*(\cdot)$ é constante ao longo desse processo. Esta é uma condição necessária para otimalidade. Além disso, ao longo de qualquer outro processo admissível, a função $W(\cdot)$ é não decrescente. Como conseqüência, temos que a função valor satisfaz a equação de HJB (3.17). Vejamos agora uma condição suficiente de otimalidade.

Teorema 3.4 (Condição suficiente de otimalidade)
Suponha que $\mathcal{W}(t,x)$ é uma função que satisfaz as condições abaixo.

(i) $\mathcal{W}_t(t,x) + \mathcal{W}_x f(t,x,u) + L(t,x,u) \geq 0, \;\; \forall\ (t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}, \;\; \forall\ u\in\Omega.$

(ii) $\mathcal{W}(t,x) \geq l(t,x), \;\; \forall\ (t,x)\in S,$

e que, para algum processo $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ em $[t_0,\hat{t}_1]$ satisfaz

(iii) $\mathcal{W}_t(t,\hat{x}(t)) + \mathcal{W}_x(t,\hat{x}(t))f(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)) + L(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)) = 0$

(iv) $\mathcal{W}(\hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)) = l(\hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1))$.

Então, $(\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot))$ *em* $[t_0\hat{t}_1]$*, é um processo minimizante do problema* $P(t_0, \xi)$.

Demonstração:

Seja (x, u) um processo admissível qualquer definido no intervalo $[t_0, t_1]$. Considerando que a função $\mathcal{W}$ definida no teorema, seja o custo do processo do problema $P(t_0, \xi)$, vamos comparar o valor de $\mathcal{W}(x, u)$ com o valor de $\mathcal{W}(\hat{x}, \hat{u})$, para $(\hat{x}, \hat{u})$ definido em $[t_0, \hat{t}_1]$.

Primeiramente, vamos usar as condições (iii) e (iv) para determinar uma relação para $\mathcal{W}(t_0, \xi)$. Vamos integrar (iii) com relação ao tempo t no intervalo $[t_0, \hat{t}_1]$.

$$\int_{t_0}^{t} \Big(\mathcal{W}_t(t, \hat{x}(t)) + \mathcal{W}_x(t, \hat{x}(t)) f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) + L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))\Big) dt = 0.$$

Admitindo que cada parcela dentro da integral acima é integrável em $[t_0, t]$, para $t_0 < t \leq \hat{t}_1$, e usando que $\dfrac{d}{dt}\mathcal{W}(t, \hat{x}(t)) = \mathcal{W}_t(t, \hat{x}(t)) + \mathcal{W}_x(t, \hat{x}(t))\dot{\hat{x}}(t)$, obtemos

$$\mathcal{W}(\hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)) - \mathcal{W}(t_0, \xi) + \int_{t_0}^{\hat{t}_1} L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt = 0. \tag{3.18}$$

Substituindo $\mathcal{W}(\hat{t}^1, \hat{x}(\hat{t}_1)) = l(\hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1))$ (condição (iv)) em (3.18), obtemos

$$l(\hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)) + \int_{t_0}^{\hat{t}_1} L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt = \mathcal{W}(t_0, \xi). \tag{3.19}$$

Agora, integrando (i) com relação ao tempo t ao longo do processo (x, u) intervalo $[t_0, t_1]$, e utilizando a condição (ii) em seguida, obtemos

$$l(t_1, x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t)) dt \geq W(t_0, \xi). \tag{3.20}$$

De (3.19) e (3.20), temos

$$\underbrace{l(\hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)) + \int_{t_0}^{\hat{t}_1} L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt}_{\text{custo do processo } (\hat{x}, \hat{u}) \text{ em } [t_0, \hat{t}_1]} \leq \underbrace{l(t_1, x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t)) dt}_{\text{custo do processo arbitrário } (x, u) \text{ em } [t_0, t_1]}. \tag{3.21}$$

Note que, o lado esquerdo da desigualdade (3.21) representa o custo do processo $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$, para $t \in [t_0, \hat{t}_1]$. Do lado direito da mesma desigualdade temos o custo do processo arbitrário

$(x(t), u(t))$, para $t \in [t_0, t_1]$. Ou seja, o custo do processo $(\hat{x}, \hat{u})$ é menor ou igual ao custo de qualquer processo admissível (x, u). Logo, podemos concluir que a tripla $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{t}_1)$ é um processo ótimo de $P(t_0, \xi)$. ■.

Note que a função valor naturalmente satisfaz as condições (i) e (ii). O problema é exatamente como calculá-la. Mas, a demonstração do teorema nos mostra que não é necessário ser a função valor, mas sim qualquer função que satisfaça as condições (i) e (ii). Essas funções são chamadas de *funções de verificação*, e servem para verificar se um processo qualquer (x, u) é ótimo ou não. Para ser ótimo, é necessário verificar se o processo satisfaz (iii) e (iv) em conjunto com uma função de verificação, isto é, que satisfaz (i) e (ii).

De forma geral, temos que, dado o problema $P(t_0, \xi)$, devemos achar uma função que satisfaça as condições (i) e (ii) do Teorema 3.4. Essa função será a nossa função de verificação. Agora, dado um processo qualquer admissível $(x, u) \in \mathbb{R}^{n+m}$, para verificar se esse processo é ótimo, a função de verificação, aplicada à esse processo, deve satisfazer as condições (iii) e (iv) do Teorema 3.4.

3.2 Controle ótimo discreto

Vamos estudar nesta seção problemas de controle ótimo de tempo discreto. Uma característica deste problema é o fato de tratarmos de equações de diferenças ao invés de equações diferenciais, como no caso contínuo. De forma geral, um problema de controle ótimo discreto é dado da seguinte forma

$$\max J = \sum_{t=0}^{T} f_t(x_t, u_t) \tag{3.22}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} & x_{t+1} - x_t = g_t(x_t, u_t), \\ & x_0 = b, \;\; u_t \in \Omega_t, \; t = 0, 1, \ldots, T. \end{aligned} \tag{3.23}$$

onde J é o funcional objetivo do problema, $f_t : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g_t : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a equação dinâmica, Ω é o conjunto de controles admissíveis, $T \geq 0$ é o tempo final, e $b \in \mathbb{R}$ é a condição inicial para o estado. Vamos supor que o tempo final T é fixo, e que não há restrição sobre o estado final x_T. Admitiremos que a função L seja continuamente diferenciável até segunda ordem, ou seja, $L \in C^2$.

De forma geral, o problema de controle ótimo discreto possui três características principais que o define:

1. As variáveis podem ser divididas em dois conjuntos distintos, as *variáveis de estado*, x_t, e as *variáveis de controle*, u_t;

2. O conjunto de restrições (3.23) relaciona a diferença entre as variáveis de estado, $x_{t+1} - x_t$, para os valores atuais, x_t, u_t, através da função g_t. A expressão $x_{t+1} - x_t = g_t(x_t, u_t)$ para cada t é chamada de *equação dinâmica* do problema;

3. A função objetivo (3.22) está expressa como a soma de $(T+1)$ termos, e cada t-ésimo termo do somatório depende somente dos t-ésimos valores das variáveis de estado e controle. Uma função objetivo deste tipo é dita *separável*.

A seguir, vamos formalizar um método de resolução para problemas de controle ótimo discreto do tipo (3.22)-(3.23), a partir da função de Lagrange apresentada no Apêndice B. Esse método é conhecido como o método de Hamilton. Nesse método, a solução ótima é encontrada a partir da resolução de equações de diferença chamadas de *equações de Hamilton*, usando técnicas desenvolvidas especialmente para esse tipo de problema.

Nem sempre será possível dizer se existe um único valor ótimo do problema, porém existem argumentos relacionados a concavidade e convexidade da função de Hamilton a ser determinada pelo método, que podem garantir a existência de tal ponto (Fryer e Greenman, 1987). Não nos atentaremos neste momento a isto, e apenas apresentaremos o método de resolução.

3.2.1 A Função de Hamilton e o Princípio do Máximo para o Caso Discreto

Consideremos o problema de otimização dado por (3.22)-(3.23). A função de Lagrange para este caso é dado por

$$L = \sum_{t=0}^{T} f_t(x_t, u_t) - \sum_{t=0}^{T} \lambda_t(x_{t+1} - x_t - g_t(x_t, u_t)) \tag{3.24}$$

onde λ_t é o multiplicado de Lagrange para a t-ésima equação de (3.23). Se derivarmos a função L com relação as variáveis de controle e estado num ponto estacionário do problema, obteremos uma relação dinâmica entre λ_t e λ_{t+1} (Apêndice B). Vejamos então.

Primeiramente, observe a forma expandida do somatório (3.24),

$$\begin{aligned} L &= f_0(x_0,u_0) - \lambda_0(x_1 - x_0 - g_0(x_0,u_0)) \\ &+ f_1(x_1,u_1) - \lambda_1(x_2 - x_1 - g_1(x_1,u_1)) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ f_{t-1}(x_{t-1},u_{t-1}) - \lambda_{t-1}(x_t - x_{t-1} - g_{t-1}(x_{t-1},u_{t-1})) \\ &+ f_t(x_t,u_t) - \lambda_t(x_{t+1} - x_t - g_t(x_t,u_t)) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ f_T(x_T,u_T) - \lambda_T(x_{n+1} - x_T - g_T(x_T,u_T)) \end{aligned} \tag{3.25}$$

Derivando L com relação a x_t num ponto estacionário, chegamos facilmente à seguinte relação

$$\frac{\partial L}{\partial x_t} = \frac{\partial f_t}{\partial x_t} + \lambda_t \frac{\partial g_t}{\partial x_t} - \lambda_{t-1} + \lambda_t = 0, \quad t = 1,2,\ldots,T. \tag{3.26}$$

Derivando agora a função L com relação a u_t, temos

$$\frac{\partial L}{\partial u_t} = \frac{\partial f_t}{\partial u_t} + \lambda_t \frac{\partial g_t}{\partial u_t} = 0. \tag{3.27}$$

As duas relações dadas pela equações (3.26) e (3.27) são apresentadas mais formalmente quando definirmos uma função H_t da seguinte forma:

$$H_t(\lambda_t, x_t, u_t) = f_t(x_t,u_t) + \lambda_t g_t(x_t,u_t). \tag{3.28}$$

Sendo assim, temos o seguinte sistema de equações relacionados a H_t:

$$0 = \frac{\partial H_t}{\partial u_t}, \quad t = 0,1,\ldots,T. \tag{3.29}$$

$$\lambda_{t+1} - \lambda_t = -\frac{\partial H_t}{\partial x_t}, \quad t = 0,1,2,\ldots,T-1. \tag{3.30}$$

$$x_{t+1} - x_t = \frac{\partial H_t}{\partial \lambda_t}, \quad t = 0,1,\ldots,T. \tag{3.31}$$

Observe que a expressão $\lambda_t - \lambda_{t-1} = -\partial H_t/\partial x_t$, $t = 1, \ldots, T$ é equivalente à expressão $\lambda_{t+1} - \lambda_t = -\partial H_t/\partial x_t$, $t = 0, \ldots, T-1$.

A iteração das três equações apresentadas acima nos possibilita determinar o conjunto de solução para as variáveis x_t, u_t e λ_t. A função H_t é chamada de *função de Hamilton*, ou *Hamiltoniana*. A variável λ_t é a *variável de co-estado* do problema. Afim de mantermos a mesma notação utilizada na teoria de controle ótimo contínuo, vamos denotar a variável de co-estado do caso discreto por p, deixando a variável λ para representar o multiplicador de Lagrange. Porém, é importante lembrar que o co-estado para o caso discreto é originado do multiplicador de Lagrange.

A equação (3.29) se refere à condição necessária de otimalidade dada pelo PMP. As equações (3.30) e (3.31) são chamadas de *equações de Hamilton*.

A estratégia usada para resolver o sistema determinado pelas equações (3.29)-(3.31) é usar a equação (3.29) para expressar u_t em termos de x_t e λ_t, e então substituir u_t nas equações (3.30) e (3.31), as quais, como conseqüência, se tornaram equações dependentes somente de x_t e λ_t. Estas duas equações são exemplos de equações de diferenças, e são conhecidas como as equações de diferença de Hamilton para o problema de controle ótimo discreto. Para problemas onde o tempo final T é fixo, a condição de transversalidade sobre a variável de co-estado é dada por $\lambda_T = 0$.

Veja a seguir um exemplo simples de controle discreto.

Exemplo 3.2 *Considere o problema de controle ótimo*

$$\max J = \sum_{t=0}^{3} -x_t + u_t^2 \tag{3.32}$$

sujeito a

$$x_{t+1} - x_t = u_t, \tag{3.33}$$

$$x_0 = 0.$$

Para esse problema, a função de Hamilton é dada da seguinte forma

$$H_t = -x_t + u_t^2 + \lambda_t u_t.$$

Assim, o sistema (3.29)-(3.31) é dado por

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial H_t}{\partial u_t} = 2u_t + \lambda_t && (3.34)\\
\lambda_{t+1} - \lambda_t &= -\frac{\partial H_t}{\partial x_t} = 1 && (3.35)\\
x_{t+1} - x_t &= \frac{\partial H_t}{\partial \lambda_t} = u_t && (3.36)
\end{aligned}
$$

De (4.8), temos que

$$u_t = -\lambda_t/2.$$

Dado a condição de transversalidade $\lambda_3 = 0$*, resolva (3.35) recursivamente para* $t = 2, 1, 0$*. Dessa forma, obtemos os seguinte valores ótimos para o vetor de co-estado* p^**:*

$$\lambda^* = (-3, -2, -1, 0)'.$$

Substitua cada coordenada de λ *na equação de estado (3.36), com* $u_t = -\lambda_t/2$*.*

$$x_{t+1} - x_t = -\lambda_t/2, \quad t = 0, 1, 2, 3; \ \textit{com}\ x_0 = 0.$$

Dessa forma, temos os seguintes valores ótimos para os vetores de estado x^* *e controle* u^**:*

$$
\begin{aligned}
x^* &= (0, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3, 3)',\\
u^* &= (\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0)'.
\end{aligned}
$$

Se possuirmos inicialmente um problema de tempo contínuo, sua discretização pode ser dada sem muitas dificuldades utilizando vários métodos. Dentre esses métodos, destaco o método de Runge-Kutta. Informações sobre a discretização de problemas de controle ótimo contínuos via o método de Runge-Kutta são encontradas em Campos (2005).

A teoria de controle ótimo é bastante ampla e pode ser usada para resolver problemas de vários tipos, dependendo da necessidade de cada situação. Algumas variações em problemas de otimização com aplicação de controle podem ser dadas quando supomos, por exemplo, condições relacionadas ao tempo final T, e/ou ao estado final x_T. T pode ser fixo ou não, e ainda podemos supor alguma restrição ao estado final x_T. Podemos ainda impor restrições as variáveis de estado e controle, x_t e u_t, em todo t (o mais comum é limitarmos a variável de controle u_t). Essas são apenas algumas das formas de variação de problemas de controle

ótimo, e em nosso trabalho, apresentaremos um estudo de caso relacionado a um problema de controle ótimo de tempo discreto, sem restrição de estado final, com u_t limitado por uma função de x_t, e T fixo.

3.3 Solução Numérica do Problema de Controle Ótimo

Ex

(Griesse e Walther, 2004).

Os métodos apresentados a seguir são aplicados na resolução de problemas de controle ótimo sem restrição sobre a variável de estado no tempo final. Porém, esses métodos também podem ser aplicados em problemas com restrição desse tipo, a qual é eliminada pela utilização de constantes de penalidade, como será visto a seguir.

Vamos supor o seguinte problema de controle

$$\min J = C(x(t_1)) \tag{3.37}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ &x(t_0) = \xi, \quad u(t) \in \Omega(t), \end{aligned} \tag{3.38}$$

onde os parâmetros e variáveis são como já definidos. Esse problema está representado na forma de *Mayer*, onde o funcional objetivo é expresso em função da variável de estado avaliada no instante final t_1. Um problema de controle ótimo também pode ser descrito nas formas de *Bolza* ou *Lagrange*, de acordo com a definição de seu funcional objetivo, sendo essas três formas equivalentes (Cesari, 1983).

A função de Hamilton para esse problema é dada por

$$H(t, x, u, p) = pf(t, x, u), \tag{3.39}$$

onde p é como já definida. Aqui, a condição de transversalidade será dada por

$$p_1^*(t_1) = \frac{\partial C(x^*(t_1))}{\partial x_1}, \ldots, p_n^*(t_1) = \frac{\partial C(x^*(t_1))}{\partial x_n}.$$

Vejamos então como resolver numericamente um problema desse tipo.

Métodos indiretos

Os métodos indiretos que serão abordados aqui foram propostos por Kumar (1976) e Raggett (1977). Em Kumar (1976) é feita uma investigação numérica de um procedimento iterativo, denominado *control averaging technique* (CAT), com o qual se pode obter uma boa aproximação para a solução ótima de um problema de controle ótimo singular, em um tempo computacional relativamente pequeno.

O problema de valor de contorno resultante da aplicação da condição necessária de Pontryagin, pode ser representado como um caso especial do operador geral de ponto fixo $y = \Gamma(y)$. Desse modo, o método baseia-se em sucessivas iterações do operador Γ até a obtenção da convergência, onde o controle converge para o controle ótimo, que é ponto fixo do operador.

O procedimento definido possui a seguinte expressão:

$$\hat{y}^{k+1} = (1 - \omega_t)\hat{y}^k + \omega_t \Gamma(\hat{y}^k);\ \hat{y}^0 = y^0. \tag{3.40}$$

Com certas condições sobre Γ, (3.40) converge para o ponto fixo, para qualquer y^0, desde que a seqüência ω_t satisfaça:

$$\lim_{k\to\infty} \omega_t = 0 \text{ e } \sum_{k=0}^{\infty} \omega_t = \infty.$$

Com isso, foi sugerida a seqüência $\omega_t = \frac{1}{k+1}$, a qual satisfaz as condições impostas, obtendo resultados satisfatórios.

No caso de condições finais sobre as variáveis de estado, o método CAT as trata implicitamente por uma função de penalidade. Para isso, define uma nova equação, denominada funcional objetivo aumentado:

$$J_a(u(\cdot)) = J(u(\cdot)) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \psi_j [h_j(x(t_1; u(\cdot)))]^2 \tag{3.41}$$

onde $J(u(\cdot))$ é o funcional objetivo do problema original, $h_j(x(t_1; u(\cdot)))$ é a restrição do estado no instante final, e os ψ_j são chamados de constantes de penalidade. A solução de um problema desse tipo é encontrar x, u e ψ que satisfaçam, além das restrições impostas pela definição do problema, as condições necessárias de otimalidade do PMP.

Finalmente, pode-se construir o operador de ponto fixo. Sendo ξ uma classe de funções $v(\cdot,\cdot,\cdot) : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \Omega$ satisfazendo a condição de mínimo:

$$H(t, x, v(t, p, x), p) = \min_{u\in\Omega} H(t, x, u, p) \tag{3.42}$$

para todo $(t, x, p) \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Então o problema está resolvido somente se, para algum $v \in \xi$:

$$u^*(t) \equiv v(p(t; u^*), x(t; u^*), t). \tag{3.43}$$

Sejam $F : \Omega \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ definida como $F(u(t)) = \{x(t; u), p(t; u)\}$ e $V(x, p) = u$, tal que $u(t) = v(t, x(t; u), p(t; u))$, para cada $v \in \xi$.

Definindo o operador $\Gamma = V \circ F$, é possível construir o algoritmo para a obtenção de uma aproximação do controle ótimo, o qual será dado pelo Algoritmo CAT a seguir.

Algoritmo CAT

Passo 1:	Para k=0, defina $\hat{u}^0 = u_0$; (u_0 pode ser escolhido arbitrariamente)
Passo 2:	Resolva a EDO $\dot{x}^{k+1}(t) = f(t, x^{k+1}(t), \hat{u}^k(t))$, para $x(t_0) = x_0$;
Passo 3:	Resolva a EDO $\dot{p}^{k+1}(t) = -\nabla_x H(t, x^{k+1}(t), \hat{u}^k(t), p^{k+1}(t))$, sujeito a $p^{k+1}(t_1) = \nabla_x J_a(x^{k+1}(t_1))$;
Passo 4:	Faça k=k+1;
Passo 5:	Encontre $u^k = \upsilon(x^k, p^k)$, de acordo com (3.42);
Passo 6:	Calcule $\hat{u}^k = (1-\omega_t)\hat{u}^{k-1} + \omega_t u^k$, com $\omega_t = \frac{1}{k+1}$, e volte ao **Passo 3**.

Raggett (1977) descreve um método iterativo do tipo gradiente, denominado DOG (*double operator gradient*), no qual é demonstrada maior eficiência com relação ao CAT, em um grande número de casos considerados.

O DOG não mantém o mesmo tamanho de passo em cada iteração, como feito, por exemplo, no método gradiente de passo fixo. Ao invés disso, o passo é dobrado enquanto o valor do funcional objetivo diminui. Se para um determinado passo ocorrer um aumento no valor do funcional, então o passo é diminuído pela metade, descartando também o controle responsável por esse aumento. A iteração continua com o mesmo passo, ao invés de dobrá-lo agora, até que o valor do funcional aumente novamente e então o passo é reduzido pela metade. O algoritmo utiliza uma constante de tolerância como critério de parada, e a diferença de dois valores consecutivos do funcional objetivo é sempre comparada com essa tolerância.

Considerando o funcional objetivo aumentado (3.41), o método é descrito pelo Algoritmo DOG dado a seguir.

Algoritmo DOG

Passo 1: Faça k=0. Dado u^k, resolva a EDO $\dot{x}^k(t) = f(t, x^k(t), u^k(t))$ para $x(t_0) = x_0$ (u^0 pode ser escolhido arbitrariamente);

Passo 2: Avalie o funcional objetivo aumentado J_a^k;

Passo 3: Resolva a EDO $\dot{p}^k(t) = -\nabla_x H(t, x^k(t), u^k(t), p^k(t))$, sujeito a $p^{k+1}(t_1) = \nabla_x J_a(x^{k+1}(t_1))$;

Passo 4: Calcule $u^{k+1} = u^k - \epsilon_t \nabla_{u^k} H$.
Se qualquer u^{k+1} estiver fora de Ω, então toma-se o valor mais próximo dentro de Ω;

Passo 5: Repita os passos 1 e 2 com k trocado por $k+1$;

Passo 6: Se $|J'^{k+1} - J'^k| < \nu$, então pare.

Passo 7: Se $J'^{k+1} \geq J'^k + \nu$, então reduza ϵ_t à metade e repita o processo a partir do **Passo 4** com o antigo valor de u^k;

Passo 8: Se $J'^{k+1} \leq J'^k - \nu$, então:
(a) Se o **Passo 7** ainda não foi aplicado, então faça $\epsilon_{k+1} = 2\epsilon_t$ e repita a partir do **Passo 3**, com $k = k+1$;
(b) Se o **Passo 7** já foi aplicado, então faça $\epsilon_{k+1} = \epsilon_t$ e repita a partir do **Passo 3**, com $k = k+1$.

Métodos diretos

A utilização de métodos diretos envolve, inicialmente, a discretização do problema contínuo antes que algum método de otimização seja aplicado. Diversas formas de discretização de um problema de controle ótimo são propostas na literatura. Hager (2000) utiliza a técnica de discretização completa para problemas de controle ótimo, tratando as equações do método de discretização como uma restrição adicional. São introduzidas variáveis adicionais de otimização, correspondentes às funções de controle em pontos intermediários da malha de discretização. Com isso, elimina a necessidade de interpolação do controle e permite o cálculo simplificado do gradiente do funcional objetivo, porém o novo problema de otimização obtido possui um número maior de variáveis.

A discretização é obtida baseando-se nos métodos de Runge-Kutta, uma classe de métodos numéricos originalmente propostos por Runge (1905), para a obtenção de soluções aproximadas de equações diferenciais sujeitas a condições iniciais (problemas de valor inicial, ou PVI).

Em Griesse e Walther (2004) o problema original é transformado no seguinte problema de programação não-linear de dimensão finita:

$$\min \tilde{C}(u) = \varphi(\sigma^{N_t+1}(u)) \tag{3.44}$$

$$\text{sujeito a } a \leq u^j \leq b,$$

onde $x = \sigma(u) = (\sigma^1(u), ..., \sigma^{N_t+1}(u))'$ são as variáveis de estado definidas em função do controle, e N_t é o número de subintervalos da discretização do intervalo original do problema.

O novo problema obtido possui apenas u como variável de otimização, caracterizando a técnica recursiva. Porém, como podemos ver, o funcional objetivo do problema ainda depende do último componente do vetor de variáveis de estado. Para obter o valor dessa variável, é utilizado um método de Runge-Kutta explícito de quarta ordem.

Apesar de (3.44) ter um número relativamente pequeno de variáveis, o gradiente da função objetivo, necessário para a resolução do problema, não possui uma avaliação trivial. Desse modo, três abordagens são citadas para o cálculo de derivadas: métodos de diferenças finitas, discretização direta das equações adjuntas contínuas, e aplicação de diferenciação automática.

Para problemas de controle ótimo com restrições sobre a variável de controle, Chryssoverghi et al. (2004) propõe a obtenção da solução numérica através da discretização das equações de estado do problema, utilizando um método de Runge-Kutta de quarta ordem explícito, e as variáveis de controle são aproximadas por funções contínuas por parte. Um

método aproximado de projeção de gradiente é definido a fim de gerar seqüencias de controles discretos, que são refinadas progressivamente durante as iterações.

A partir da discretização do problema de controle ótimo contínuo, é possível determinar um problema de programação não-linear, o qual pode ser resolvido utilizando-se de vários métodos. A seguir trataremos de alguns deles.

3.3.1 Programação Não-Linear

A programação matemática envolve problemas de otimização cuja solução é composta de um número finito de valores reais que satisfazem as restrições e o objetivo do problema. Entre esses, estão os problemas de programação linear, programação não-linear e programação inteira.

Quando utilizamos métodos diretos para a resolução numérica do problema de controle ótimo contínuo, o primeiro passo é discretizarmos o problema original a fim de obtermos um problema aproximado equivalente. Desse modo, transformamos o problema original em um problema de programação matemática, ou mais especificamente, de programação não-linear. Resolvendo esse novo problema, obtemos um solução aproximada para o problema original (M.S. Bazaraa e Shetty, 1993).

Serão apresentados agora, métodos para resolução de problemas não-lineares do tipo

$$\min \ f(x) \tag{3.45}$$

$$\text{sujeito a} \quad x \in S. \tag{3.46}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a função objetivo e $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é a região factível do problema. Vamos considerar, inicialmente, a classe de métodos iterativos que possuem a seguinte forma geral:

$$x^{k+1} = x^k + \epsilon^k d^k, \quad k = 0, 1, ... \tag{3.47}$$

onde d^k e ϵ^k são chamados de *direção de busca* e *tamanho do passo*, respectivamente, devendo ser satisfeito $\epsilon^k \geq 0$. A cada iteração k, a direção d^k é escolhida de modo que:

$$\nabla f(x^k)' d^k < 0 \tag{3.48}$$

para $\nabla f(x^k) \neq 0$. Quando $\nabla f(x^k) = 0$, o método pára, já que a condição necessária de primeira ordem é satisfeita. As diferentes escolhas para a direção d^k, satisfazendo (3.48), dão origem aos diversos métodos de otimização que iremos abordar em uma etapa a seguir. Além disso, ϵ^k deve ser escolhido a cada iteração, ou seja, além de definirmos em que direção

andar, devemos também saber o quanto andar, de modo a garantir que haja convergência e que essa seja acelerada (Bertsekas, 1999).

Escolha da Direção de Busca

I - Método do Gradiente: Apresentado em 1847 por M. Augustin Cauchy, este método é de implementação fácil porém de convergência lenta quando comparado aos demais. Foi motivado pela necessidade de se obter uma aproximação inicial para a solução do problema, que pudesse ser refinada posteriormente por algum outro método (o Método de Newton, por exemplo).

Neste método, temos $d^k = -\nabla f(x^k)$, ou seja,

$$x^{k+1} = x^k - \epsilon^k \nabla f x^k, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{3.49}$$

Com isso, a direção de busca para o cálculo do ponto atual é sempre a direção do vetor gradiente (no sentido oposto) calculado no ponto anterior. Entretanto, essa direção é quase ortogonal à direção que leva ao mínimo da função objetivo, fazendo com que ocorra o comportamento conhecido como *zig-zagging*, que resulta no lento progresso do algoritmo.

II - Método de Newton: Tendo como objetivo obter uma solução para um sistema do tipo $g(x) = 0$, foi desenvolvido o método de Newton. É peculiar deste método o fato de necessitarmos que o vetor inicial seja um ponto próximo da solução ótima. Para o problema de maximização (3.45)-(3.46), podemos utilizar o Método de Newton para determinar a solução ótima x^* tal que $\nabla f(x^*) = 0$, e assim a condição necessária de primeira ordem é

$$x^{k+1} = x^k - \epsilon^k \nabla f x^k$$

$$f(x = f(x$$

$$\nabla f(x^*) = 0$$

$$d$$

Maa g do método ad por

propostas com o intuito de facilitar sua implementação e aumentar a velocidade de convergência, como a substituição de $\nabla^2 g(x^k)$ por $\nabla^2 g(x^0)$ para toda iteração, ou ainda por uma matriz simétrica definida positiva construída por meio de diferenças finitas.

III - Método Gradiente Conjugado: Tendo em vista as dificuldades apresentadas pelos dois métodos anteriores, este método tem como motivação melhorar a velocidade de convergência do método Gradiente e, ao mesmo tempo, diminuir o número de cálculos e o armazenamento de matrizes exigidos pelo método de Newton.

Foi originalmente proposto para obter uma solução para um problema de otimização com função objetivo quadrática, do tipo:

$$f(x) = \frac{1}{2}x'Qx - b'x \tag{3.52}$$

onde Q é uma matriz definida positiva. Pela condição necessária de otimalidade, o problema é equivalente a resolver o sistema linear

$$Qx = b.$$

A cada iteração, a escolha da direção d^k é feita de modo a formar um conjunto de direções Q-conjugadas com as direções escolhidas nas iterações anteriores. O passo ϵ^k deve ser selecionado de modo que

$$f(x^k + \epsilon^k d^k) = \min_{\epsilon} f(x^k + \epsilon d^k).$$

Um conjunto de direções $d^1, ..., d^k$, não-nulas, é Q-conjugado se

$$(d^i)'Qd^j = 0, \qquad 0 \leq i \leq k,\ 0 \leq j \leq k, \ \text{ com } i \neq j.$$

Essas direções podem ser geradas a partir de qualquer conjunto de vetores linearmente independentes, com o mesmo número de elementos, através do procedimento de *Gram-Schmidt*. Neste procedimento, dado o conjunto $\chi^0, ..., \chi^k$ de vetores linearmente independentes, os vetores $d^0, ..., d^k$ são gerados da seguinte maneira recursiva:

- $d^0 = \chi^0$
- $d^{i+1} = \chi^{i+1} + \sum_{m=0}^{i} c^{(i+1)m} d^m$

onde os coeficientes $c^{(i+1)m}$ devem ser escolhidos de modo que d^{i+1} seja Q-conjugado com $d^0, ..., d^i$. Para isso, deve valer

$$c^{(i+1)j} = -\frac{(\chi^{i+1})'Qd^j}{(d^j)'Qd^j}, \quad j = 0, ..., i.$$

Para a escolha dos vetores χ^i, utilizamos o gradiente da função objetivo, ou seja,

$$\chi^0 = -\nabla f(x^0),\ ...,\ \chi^{n-1} = -\nabla f(x^{n-1})$$

onde $\nabla f(x^k) = Qx^k - b$ por (3.52). Sendo assim:

$$d^0 = -\nabla f(x^0), \qquad d^k = -\nabla f(x^k) + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\nabla f(x^k) Q d^j}{(d^j)' Q d^j} d^j. \tag{3.53}$$

Como $\nabla f(x^k)$ é ortogonal ao subespaço gerado por $d^0, ..., d^{k-1}$, a equação (3.53) pode ser reduzida a

$$d^0 = -\nabla f(x^0), \qquad d^k = -\nabla f(x^k) + \beta^k d^{k-1}, \tag{3.54}$$
$$com\ \ \beta^k = \frac{\nabla f(x^k)' \nabla f(x^k)}{\nabla f(x^{k-1})' \nabla f(x^{k-1})}.$$

Considerando um problema n-dimensional, o método termina em no máximo n iterações, ao se obter $\nabla f(x^k) = 0$. Problemas com função objetivo não-quadrática também podem ser resolvidos utilizando este método, entretanto podem ser necessárias mais que n iterações para que a solução seja obtida. Além disso, o coeficiente β^k para o caso não-quadrático deve ser definido por

$$\beta^k = \frac{\nabla f(x^k)' (\nabla f(x^k) - \nabla f(x^{k-1}))}{\nabla f(x^{k-1})' \nabla f(x^{k-1})}.$$

A razão para essa mudança é heurística (não se tem certeza da obtenção da solução ótima). Os termos não-quadráticos da função objetivo e aproximações não precisas para ϵ^k, fazem com que a Q-conjugação das direções geradas seja progressivamente perdida e que o método *emperre*, pois as direções d^k geradas se tornam quase ortogonais ao gradiente $\nabla f(x^k)$, levando a $\nabla f(x^{k+1}) \approx \nabla f(x^k)$.

Entretanto, mesmo com essa mudança em β^k, os termos não-quadráticos da função objetivo podem causar perda de conjugacidade. Em casos assim, pode ser usado o método de descida acentuada como reinício, a cada n iterações, ou sempre que a perda de conjugacidade for detectada.

Capítulo 4

Um Estudo de Caso

4.1 Introdução: Um Problema Específico de Planta Daninha

O manejo e controle de plantas daninhas em lavouras é um importante tema de estudo dentro do agronegócio, e vem sendo feito principalmente através da aplicação de defensivos químicos. Entretanto, esta não é a única forma de combate às daninhas, pois pode-se utilizar também técnicas de rotação de cultura, formas diferentes de plantio (plantio direto), controle biológico e mecânico, entre outras formas de controle. Podemos utilizar algumas técnicas em conjunto, e denomina-se esse fato por manejo integrado de planta daninha.

O controle da infestação tem como objetivo principal reduzir perdas de rendimento pela competição da praga com a lavoura (Cousens, 1985a), perdas essas que chegam a inviabilizar o plantio. Por conseguinte, uma gama de decisões de controles foi desenvolvida para maximizar os lucros em uma determinada estação ou ano (Auld e Tisdell, 1987).

Devido a necessidade de gerarmos mecanismos de controle, foram desenvolvidos modelos matemáticos que descrevem a dinâmica populacional da planta daninha, os quais nos possibilitam entender como esta se relaciona com o meio (clima e solo, por exemplo), de que forma compete com a plantação (Park et al., 2003), qual o seu comportamento quando se tenta controlar a infestação, e quais as formas de atacar o problema. Muitas vezes devemos decidir se é necessário, ou não, controlar a infestação (Cacho et al., 2004), pois o processo de controle gera gastos que podem ser evitados caso a infestação não prejudique a plantação. De forma geral, nem sempre é prejudicial a presença de alguma planta daninha na lavoura, e além disso, deve ficar claro que o objetivo em geral não é erradicar totalmente a daninha, e sim determinar uma relação entre, o equilíbrio da lavoura com a planta daninha, e os custos

de controle.

A técnica mais comum de controle de plantas daninhas na agricultura é a aplicação de herbicidas, a qual gera um alto custo no processo de plantio. Essa prática de combate à daninha tem algumas particularidades que devem ser cuidadosamente observadas, como os efeitos ambientais que ela causa e a utilização sem planejamento do produto químico que pode gerar resistência da planta ao herbicida (Powles e Shaner, 2001). É conhecido da literatura que as condições climáticas da região onde é feito o plantio influencia diretamente no desempenho do herbicida sobre a planta daninha.

Neste capítulo apresentaremos um estudo de caso onde analisaremos a dinâmica populacional de uma importante planta daninha encontrada no Sul da Austrália, a Aveia Selvagem (*Avena* spp), e utilizaremos o modelo populacional e seus parâmetros, dado no artigo Jones e Cacho (2000).

Primeiramente, através desse modelo matemático, faremos simulações para um período de 20 anos para o controle da planta daninha, visando observar como a planta se comporta à determinadas quantidades de controle e variadas condições climáticas. Feito isto, passamos a analisar alguns fatos interessante observados nessas simulações, tentando entender qual o efeito das observações feitas numa tomada de decisão sobre a forma de manejo utilizado. Como resultado final deste capítulo, faremos uma análise do problema econômico relacionado ao manejo de planta daninha. De forma geral, estudaremos quais os efeitos da planta na lavoura e qual a melhor forma de combater a infestação para que se obtenha a melhor lucratividade possível.

4.1.1 A Planta Daninha e o Modelo Populacional

A aveia selvagem é uma planta daninha que compete rigorosamente com as colheitas de grãos de inverno no sul da Austrália, resultando em grande perda de rendimento. Esta planta daninha tem como característica um alto poder de reprodução, logo gera um grande número de sementes, afetando diretamente o tamanho do banco de sementes no solo.

Segue abaixo um modelo que descreve a dinâmica de população da planta daninha. Neste modelo, consideramos três populações P_i, M_i e R_i, que estão subdivididas em três coortes representados pelo parâmetro i. Um coorte pode ser considerado como um conjunto de indivíduos nascidos ao mesmo tempo, (Jones e Cacho, 2000).

$$
\begin{aligned}
P_{it} &= p_i \delta B_t && (4.1)\\
M_{it} &= (1-\phi_i)(1-\gamma_i)P_{it} && (4.2)\\
R_{it} &= \exp[\alpha_i \ln M_{it}/(\mu_i + \varepsilon_i \ln M_{it})] && (4.3)\\
N_t &= \sum_{j=1}^{3}(\kappa R_{jt}) - \eta + \xi && (4.4)\\
B_{t+1} &= N_t + (1-\Psi)(1-\delta)B_t && (4.5)\\
& \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

Aqui B_t é o banco de sementes no início do ano t, P_{it} são as plântulas (plantas jovens) do i-coorte do ano t, M_{it} é a quantidade de plantas germinadas que chegam a fase adulta, R_{it} são sementes resultantes da reprodução das aveias selvagens, N_t são as novas sementes adicionadas ao banco de sementes no ano t, δ é a taxa anual de germinação das sementes da planta daninha, p_i é a porcentagem de sementes que germinaram no i-ésimo coorte, ϕ_i é a taxa de mortalidade de plantas, de forma natural ou resultante do uso, antes de semear, de algum herbicida adicional para controle das mudas da planta daninha, γ_i é a taxa de mortalidade de plantas daninhas induzida pelo herbicida, α_i, μ_i, ε_i são coeficientes de regressão na equação (4.3), κ é a taxa de sobrevivência de novas sementes, η representa a retirada de sementes na colheita, ξ é a importação de sementes (vento, pássaros, etc), e Ψ é o índice de mortalidade de sementes dormentes. Os valores dos parâmetros p, δ, ϕ, α, μ, ε, κ, η, ξ e Ψ aplicado para a aveia selvagem e usados neste estudo foram retirados de Jones e Cacho (2000), e estão representados na Tabela 1. Considerou-se R_{it} nulo quando M_{it} for menor que $0,5$ plantas por m^2, porque, devido à forma do funcional usado, o resultado da equação (4.3) tende ao infinito quando M_{it} se aproxima de zero.

As medidas P_{it}, M_{it}, R_{it} e B_t são dadas pela quantidade de cada população por metro quadrado, ou seja, são medidas de densidade.

A taxa de mortalidade induzida pelo herbicida *Diclofop-metil* no controle da aveia selvagem em função da quantidade de herbicida aplicado (litros (L)/ha) e o índice de condições climáticas até a data de aplicação que utilizamos para a simulação é dada pela relação:

$$\gamma = \gamma(u) = \frac{\exp[-0,428 + 1,496\ln(u) + 0,945C]}{1 + \exp[-0,428 + 1,496\ln(u) + 0,945C]}. \tag{4.6}$$

Esta relação foi encontrada em (Jones e Cacho, 2000). Como já foi dito anteriormente, a eficácia do herbicida vai depender diretamente das condições climáticas da região onde é feito o plantio, e neste caso o parâmetro que trás esta informação é o parâmetro C, que assume os valores de 1, 2 e 3 para ruins, médias e boas condições climáticas, respectivamente.

Da forma com que função γ está representada acima, a variável u não pode assumir valor nulo. Aplicando as propriedade da função exponencial, podemos reescrever a equação (4.6) de modo a eliminar essa restrição. A nova representação da função γ é dada por

$$\gamma = \gamma(u) = \frac{\exp(-0,428 + 0,945C)u^{1,496}}{1 + \exp(-0,428 + 0,945C)u^{1,496}}. \tag{4.7}$$

4.2 Simulações do Modelo Populacional

Como mencionado anteriormente, neste capítulo faremos uma análise da dinâmica populacional da planta daninha através de um período de 20 anos. Esta análise consiste em utilizar diversos valores para a taxa de herbicida aplicada, para as condições climáticas e para taxa de mortalidade de pré-semeadura e observar o comportamento do banco de sementes no decorrer do tempo. As simulações foram organizadas da seguinte forma: numa primeira série de simulações tomamos o banco de sementes inicial fixo igual a 500 sem/m^2 e variamos os valores dos parâmetros u, C e ϕ. Feito isto, iniciamos uma segunda série de simulações onde variamos, além dos parâmetros u, C e ϕ, o banco de sementes inicial. Denotaremos a partir daqui o banco sementes B_t por x_t.

As simulações foram feitas através de um modelo computacional baseado no sistema (4.1)-(4.5). O programa computacional MATLAB foi utilizado para gerar os resultados.

4.2.1 Os Efeitos de u, C e ϕ_1 na Dinâmica Populacional com x_0 Fixo

Nesta primeira etapa das simulações tomamos $\phi_1 = 1$ e $C = 1$ e variamos o valor de u. Dessa forma, estamos supondo que a técnica usada para combater a infestação presente no solo antes de semear obteve cem por cento de sucesso, conseqüentemente, quando lançarmos as sementes da cultura no solo, não haverá plantas daninhas na terra. É claro que isso é pouco provável na prática, mas em nossas simulações assumimos que seja possível. Também tomamos em princípio $C = 1$, o que significa que temos condições climáticas ruins na data de aplicação do herbicida.

Na simulação apresentada na Figura 4.1 não aplicamos herbicida de pós-semeadura ($u = 0$), e podemos observar um aumento significativo no banco de sementes com o decorrer dos

anos. Também podemos ver que o banco tende a se estabilizar num determinado tempo, o que já era esperado devido às limitações biológicas da planta e/ou dos nutrientes presentes na terra.

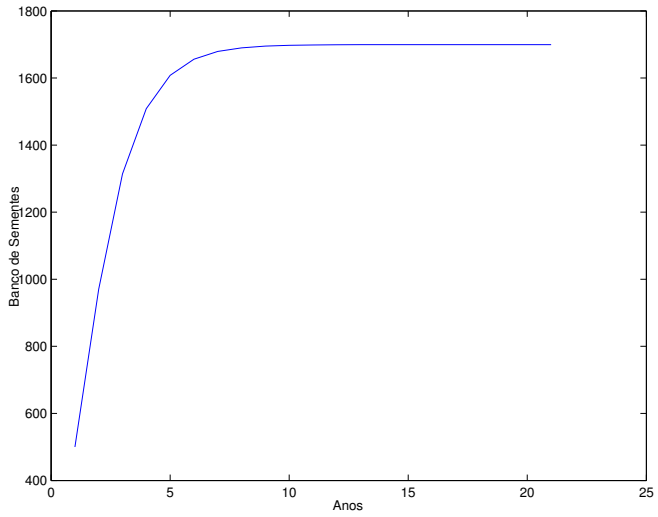

Figura 4.1: Evolução do banco de sementes quando $\phi_1 = 1,\ C = 1\ e\ u = 0$

Agora, aplicando uma taxa de herbicida de 1 L/ha, observamos um declínio no valor de estabilidade do banco, mas ainda é maior que o valor inicial. Ver a Figura 4.2.

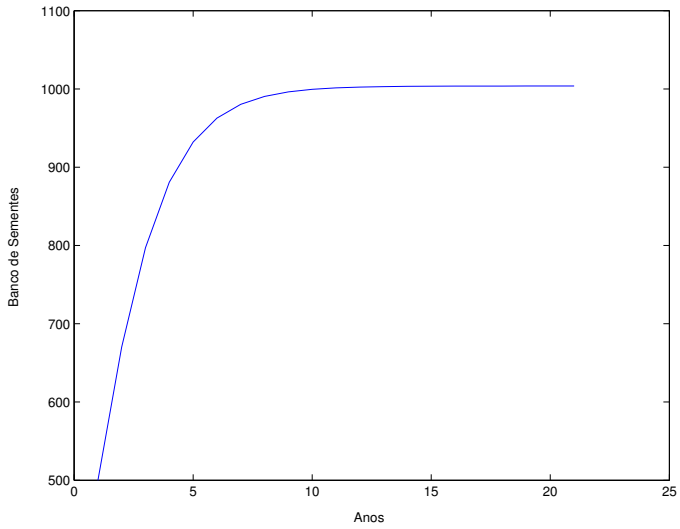

Figura 4.2: Evolução do banco de sementes quando $\phi_1 = 1,\ C = 1\ e\ u = 1$

Já num terceiro cenário, mantivemos os valores de ϕ_1 e C dados anteriormente e aplicamos uma taxa de 1,84 L/ha de herbicida, e obtemos uma curva decrescente do banco de

sementes desde o primeiro ano. Esse é o primeiro valor de u no qual isso ocorre quando tomando esse conjunto de informações iniciais. Note que o banco de sementes tende a se estabilizar em um valor muito próximo do inicial, Figura 4.3. A partir daí, procuramos aplicar taxas mais elevadas de herbicida, observando quando e em que valor o banco se estabiliza. Na Figura 4.4, quando utilizamos 2,3 L/ha de herbicida, podemos observar que o controle é mais eficiente, e faz o banco se aproximar de um valor bem abaixo do inicial. Quando utilizamos uma taxa acima de 2,5 L/ha, o valor do banco se aproxima de zero. Esse fato não ocorre na prática, mas devido a modelagem apresentada podemos obter tal resultado.

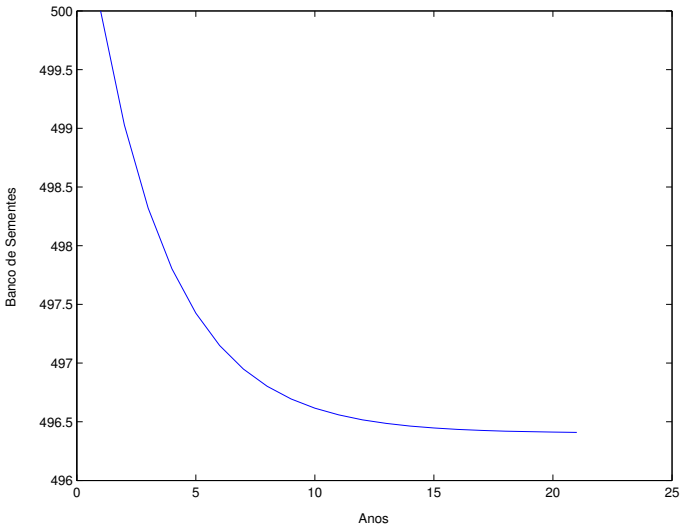

Figura 4.3: Evolução do banco de sementes quando $\phi_1 = 1,\ C = 1\ e\ u = 1,84$

Vamos agora manter o valor de $C = 1$ e mudar o valor de ϕ_1 para 0,5, o que indica que não foi possível erradicar totalmente a daninha no período de pré-semeadura, mais precisamente, foram mortas apenas 50% delas. Nesse caso, mesmo aplicando uma taxa de 2 L/ha de herbicida, a infestação não é controlada, e temos um grande aumento no banco de sementes, ver a Figura 4.5. Se compararmos esta simulação com a representada pela Figura 4.3, observamos que agora aplicamos uma quantidade de herbicida maior (2 L/ha) do que anteriormente, e mesmo assim o banco de sementes cresce com o tempo. Como mantemos $C = 1$ e $x_0 = 500$ nas duas simulações, nos cabe concluir que o fator que influenciou para esse aumento no banco de sementes foi taxa de mortalidade de pré-semeadura, $\phi_1 = 0,5$.

Mantivemos os valores de $\phi_1 = 0,5$ e $C = 1$, e supomos agora $u = 3,32$. Com esses dados observamos que o banco de sementes começa a decair e alcança um valor aproximado de 90 sem/m^2 no final do período de 20 anos, ver Figura 4.6. Mais uma vez, ressaltamos a importância do combate à praga antes de semear, pois para diminuir o tamanho banco

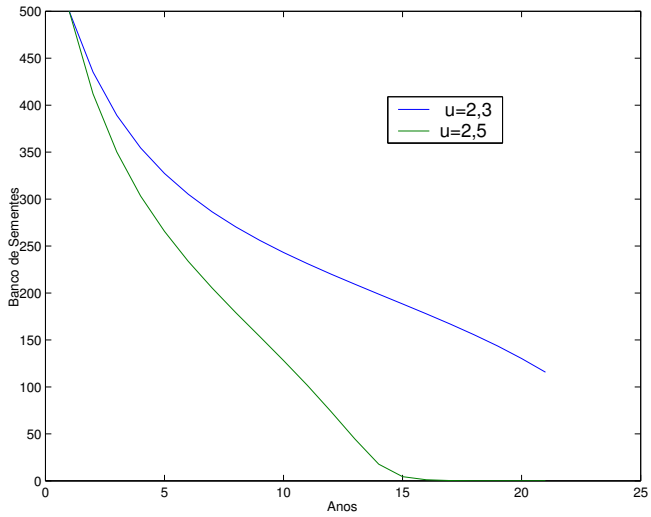

Figura 4.4: Evolução do banco de sementes quando $\phi_1 = 1,\ C = 1\ e\ u = 2,3\ e\ u = 2,5$

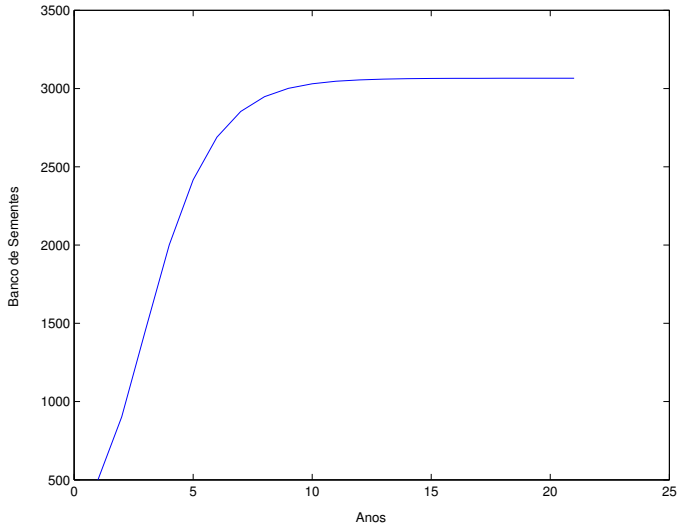

Figura 4.5: Evolução do banco de sementes quando $\phi_1 = 0,5,\ C = 1\ e\ u = 2$

de sementes foi preciso aplicar uma quantidade de herbicida muito maior quando supomos $\phi_1 = 0,5$, Figura 4.6, do que $\phi_1 = 1$, Figura 4.4.

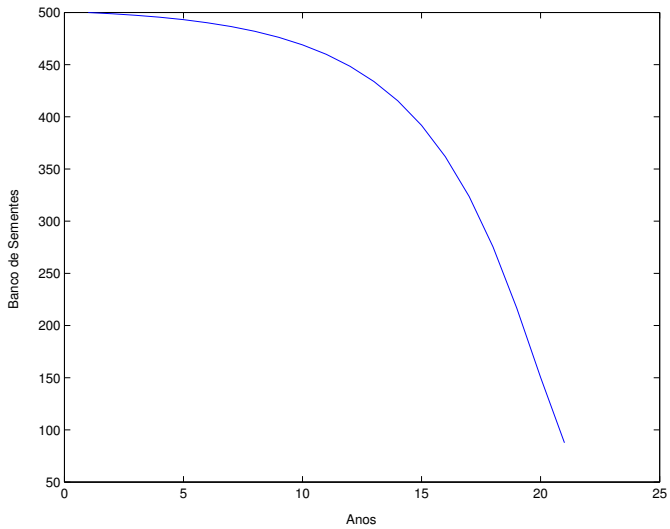

Figura 4.6: Evolução do banco de sementes quando $\phi_1 = 0,5,\ C = 1\ e\ u = 3,32$

Como também foi dito no inicio do trabalho, as condições climáticas é um fator importante no resultado da aplicação do herbicida, e nas próximas simulações testamos o modelo para médias e boas condição climáticas.

Iniciando a série de simulações onde testamos o efeito climático no combate a planta daninha, supomos que temos uma condição climática média para aplicação do herbicida, $C = 2$. Feito isso, aplicamos diferentes taxas de herbicidas e analisamos os resultados. A Figura 4.7 representa a trajetória do banco de sementes quando aplicamos uma taxa de herbicida igual a 0,98 L/ha e supomos que o combate pré-semeadura da planta daninha foi cem por cento eficiente, $\phi_1 = 1$. Neste caso, observamos que o banco de sementes apresenta uma trajetória de queda desde o primeiro ano, mostrando uma boa performance do herbicida sobre a planta daninha. Comparando esse resultado com o exposto pela Figura 4.3, podemos observar que realmente há um benefício no combate da planta daninha quando temos condições climáticas melhores, visto que precisamos aplicar menos herbicida para obtermos resultados parecidos. Veja uma comparação gráfica entres o dois resultados na Figura 4.8.

Tomando agora $u = 1,8$ e $\phi_1 = 0,5$ observamos também que o banco de sementes é controlado, e tende a zero com o tempo, Figura 4.9. Se compararmos este resultado com o representado na Figura 4.4, onde tomamos $u = 2$, $C = 1$ e $\phi_1 = 0,5$, iremos notar novamente uma melhoria no combate a planta daninha quando temos melhores condições climáticas,

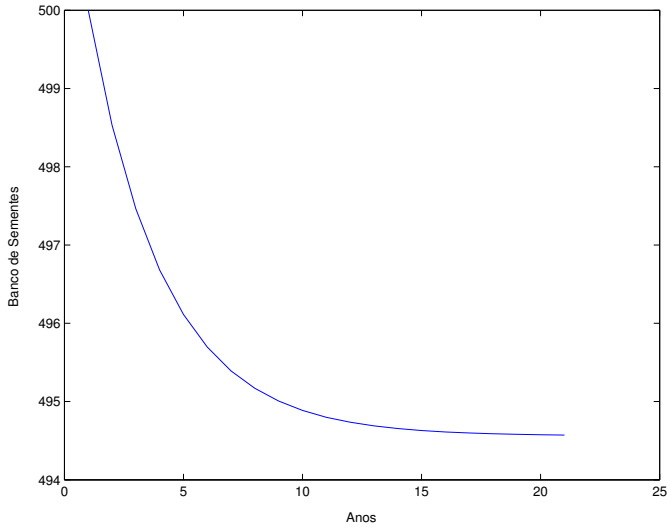

Figura 4.7: Evolução do banco de sementes quando $\phi_1 = 1,\ C = 2\ e\ u = 0,98$

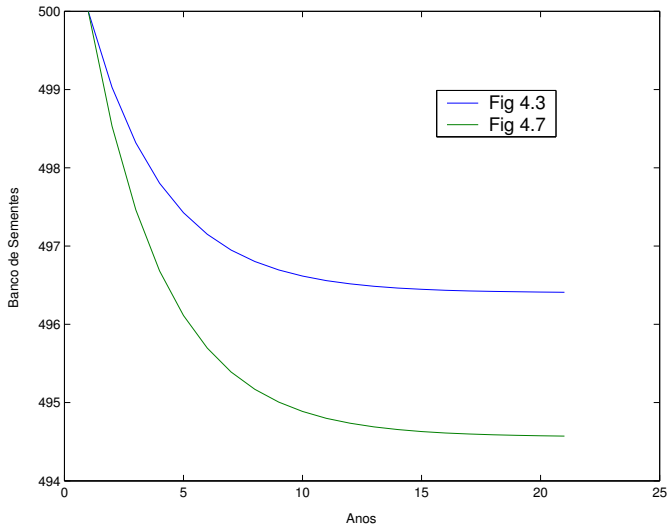

Figura 4.8: Comparação entre as Figuras 4.3 e 4.7

pois mesmo aplicando uma quantidade inferior de herbicida pós-semeadura conseguimos controlar a infestação, o que não ocorre no caso comparado.

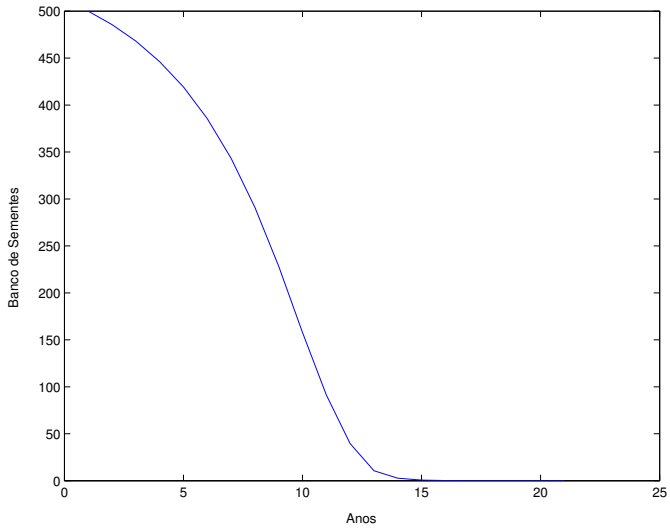

Figura 4.9: Evolução do banco de sementes quando $\phi_1 = 0,5,\ C = 2\ e\ u = 1,8$

Os resultados alcançados nas simulações onde alternamos as condições climáticas vêm confirmar as informações encontradas na literatura sobre o efeito do clima sobre a eficácia do herbicida no combate à planta daninha. Esses resultados mostram uma coerência na modelagem do problema quanto à questão do clima. Veremos agora algumas simulações onde supomos boas condições climáticas.

Como introduzido acima, vamos supor agora que temos boas condições climáticas quando aplicarmos o herbicida, $C = 3$. Para este caso, a infestação já é controlada com u = 0,7 e admitindo $\phi_1 = 1$, ver Figura 4.10. Se supormos $\phi_1 = 0$, ou seja, não atacamos a daninha antes de semear, será necessário apenas 1.4 L/ha para controlarmos a infestação, ver Figura 4.11.

4.2.2 Variando o Banco de Sementes Inicial

Terminamos aqui a primeira série de simulações, e a partir destas, podemos tirar algumas informações importantes sobre a dinâmica populacional da planta daninha, mais especificamente, informações do comportamento do banco de sementes quando variamos os parâmetros relacionados às condições climáticas, taxa de mortalidade de pré-semeadura e quantidade de herbicida aplicado. A Figura 4.12 ilustra um comparativo entre alguns resultados obtidos no combate à planta daninha com diferentes valores de ϕ_1, C e u.

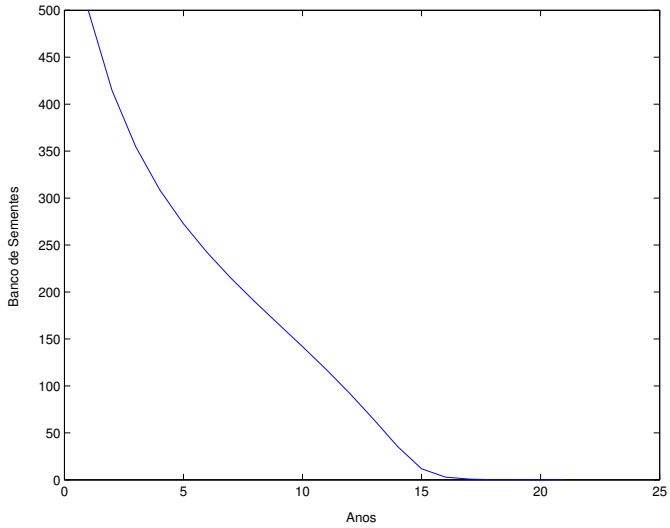

Figura 4.10: Evolução do banco de sementes quando $\phi_1 = 1,\ C = 3\ e\ u = 0,7$

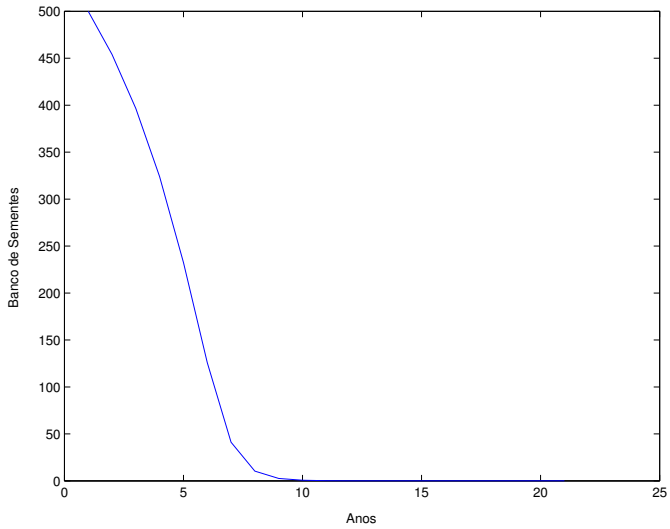

Figura 4.11: Evolução do banco de sementes quando $\phi_1 = 0,\ C = 3\ e\ u = 1,4$

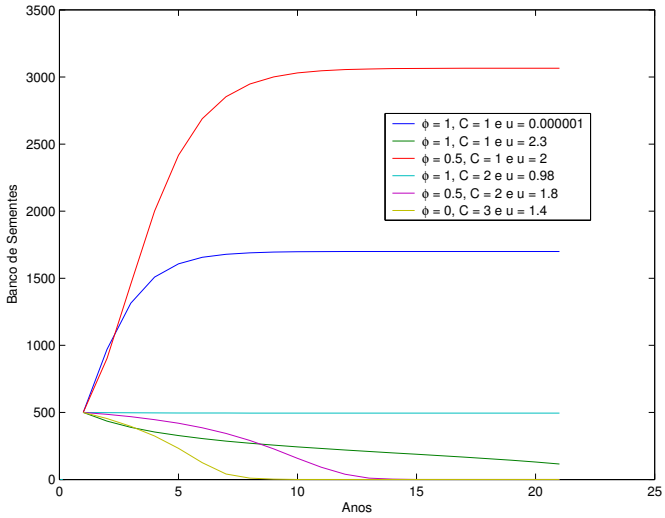

Figura 4.12: Evolução do banco de sementes para x_0 fixo, e com a variação da taxa de mortalidade antes da semeadura ϕ_1, das condições climáticas C e da taxa de aplicação de herbicida u.

Através das simulações apresentadas até aqui, podemos observar que os parâmetros relacionados as condições climáticas e a taxa de mortalidade de pré-semeadura são fundamentais no processo de controle da planta daninha. Esses fatores fazem com que a quantidade de herbicida aplicado após o plantio varie consideravelmente.

Outro fato que chama a atenção nas simulações é que em determinados conjuntos de dados o banco de sementes se anula em algum instante de tempo. Na prática isso não é observado, e nos cabe concluir que esse acontecimento é fruto da modelagem matemática. Um ponto de pesquisa interessante seria reavaliar o modelo e tentar adequá-lo para que isso não ocorra.

Além disso, observamos um outro fato interessante, que é a estabilização do banco de sementes a partir de um determinado tempo. Trataremos desta observação na segunda série de simulações.

Nesta segunda parte das simulações vamos supor $\phi_1 = 1$ para todos os casos apresentados. Como já pode ser observado nas simulações anteriores, em determinados situações o banco de sementes tende a se estabilizar com o tempo, tanto acima como abaixo do valor inicial tomado. Esse fato será explorado na simulações apresentadas a seguir, onde analisaremos esta possível estabilização do banco de sementes supondo diferentes condições climáticas, diferentes taxas de herbicida pós-semeadura e variando o banco de sementes inicial.

Na primeira simulação desta série tomamos $u = 0$ e variamos o banco de sementes inicial. Veja a Figura 4.13.

Podemos observar que para valores de x_0 acima de 5 sem/m^2 o banco de sementes se

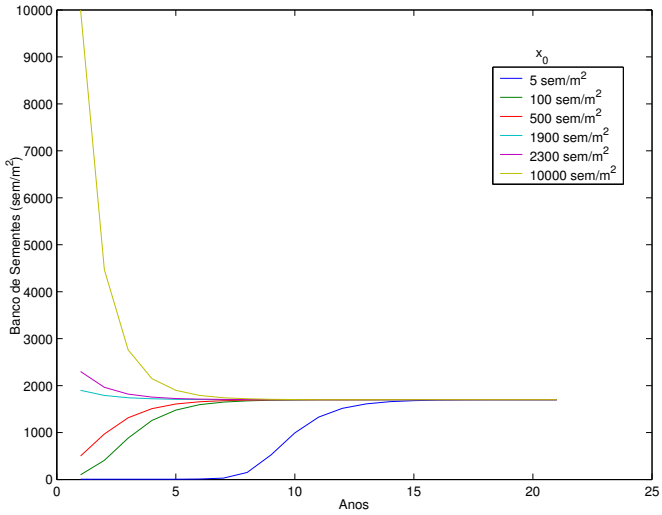

Figura 4.13: Evolução do banco de sementes para $u = 0$ e $C = 2$, com diferentes valores de x_0.

estabiliza bem próximo de 1700 sem/m^2. Note que mesmo tomando valores bem diferentes para x_0, como por exemplo 5 e 1000 sem/m^2, com o tempo, o banco de estabiliza no mesmo valor. Aparentemente esse fato é resultado da competição intra-específica da planta daninha, pois a quantidade de nutrientes encontrados no solo, os quais são fundamentais para o desenvolvimento da planta, são limitados.

Em simulações não apresentadas neste trabalho, consideramos as mesmas condições anteriores exceto para C, onde tomamos $C = 1$ e $C = 3$, e observamos um comportamento similar entre as três simulações. Esse fato já era esperado, pois o efeito do clima no combate à planta daninha ocorre quando aplicamos algum herbicida de pós-semeadura, e neste caso supomos $u = 0$ e assim $\gamma(u) = 0$.

A seguir apresentaremos a mesma simulação mudando apenas a taxa de herbicida aplicada, $u = 1,5$. Novamente observamos que o banco de sementes tende a se estabilizar, agora em torno de 700 sem/m^2. Note que este valor de estabilização é menor do que no caso anterior, e podemos concluir que o efeito do herbicida de pós-semeadura gerou essa queda. Veja a Figura 4.14.

Vamos mudar agora o índice de condições climáticas e analisar o comportamento do banco de sementes com relação à estabilidade apresentada.

Se tomarmos $C = 2$ e $u = 0,98$, como feito na simulação representada pela Figura 4.7, e variarmos o valor do banco de sementes inicial, notaremos que o valor de estabilização é próximo de 495 sem/m^2. Nesse caso, para x_0 menor que 77 sem/m^2 o banco de sementes tende a zero com o tempo. Para os demais valores de x_0, o banco de sementes se estabiliza próximo de 495 sem/m^2. Veja a Figura 4.15.

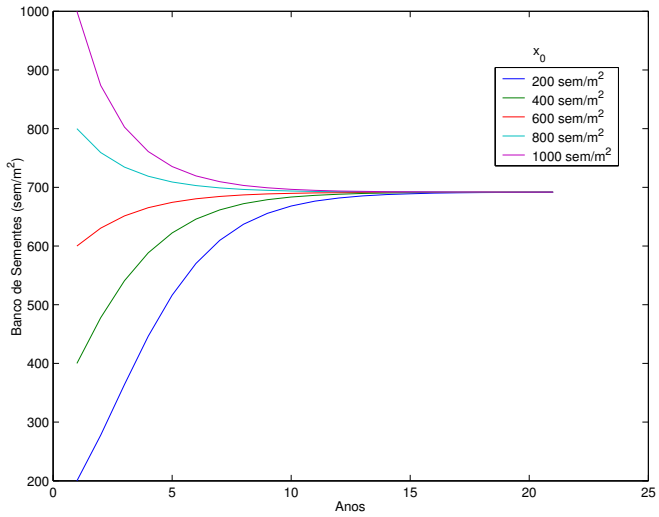

Figura 4.14: Evolução do banco de sementes para $u = 1,5$, $C = 1$ com diferentes valores de x_0.

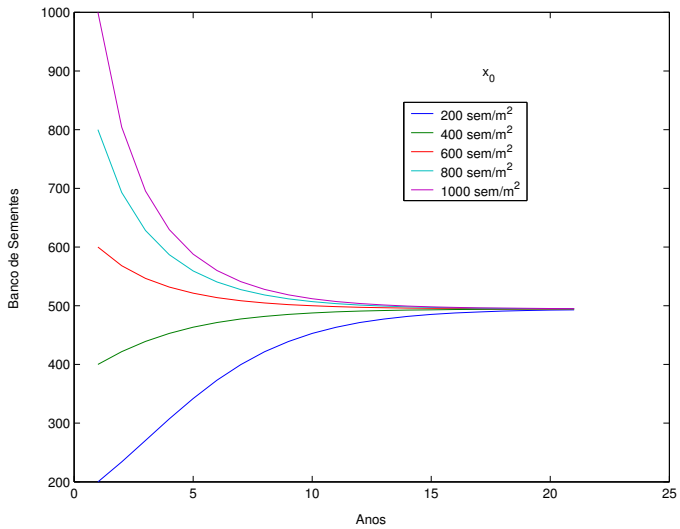

Figura 4.15: Evolução do banco de sementes para $u = 0,98$, $C = 2$ com diferentes valores de x_0.

Comparando este resultado com o ilustrado pela Figura 4.14, podemos notar um melhor resultado no controle da planta daninha. Mais uma vez, temos o aparecimento do efeito das condições climáticas sobre o herbicida, pois, no caso anterior, aplicamos uma taxa de herbicida superior a $0,98$ e o banco de sementes se estabilizou num valor maior que 495 sem/m^2. Supondo $u = 1,5$ e $C = 2$, o banco de sementes tende a zero para quaisquer valores de x_0.

Na última simulação desta série (Figura 4.16) fixamos o valor de u e variamos os valores de x_0 e C. Estas simulações nos mostram que para valores de u acima de 2,5 L/ha, o banco de sementes tende a zero independentemente da umidade do solo e banco de sementes inicial. Mais uma vez observamos que esse fato não é observado na prática.

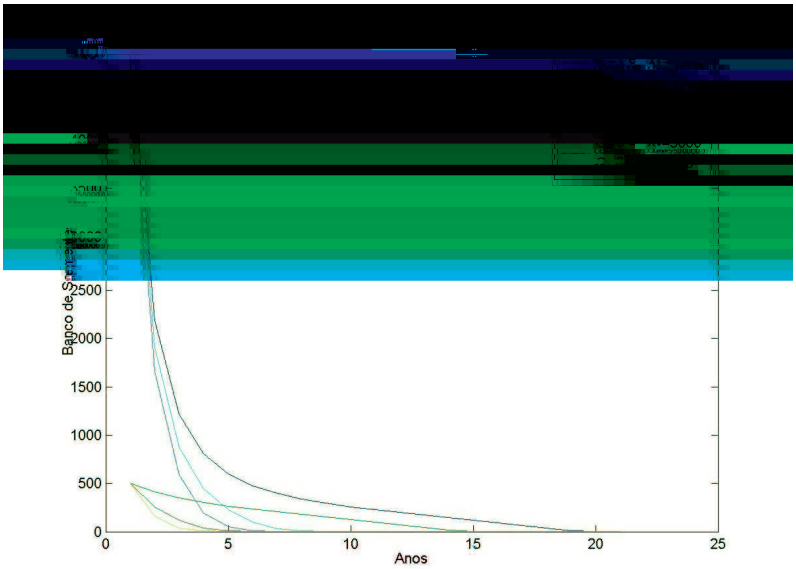

Figura 4.16: Evolução do banco de sementes para $u = 2,5$ com diferentes valores de x_0 e C.

Tendo em vista que estamos realizando um estudo da dinâmica do modelo populacional da planta daninha, seria interessante determinar para que valor de u o banco de sementes tem seu comportamento alterado com relação ao crescimento e decrescimento da sua trajetória dado uma quantidade inicial de sementes x_0. Ou seja, determinar para que valor de u ocorre $x_{t+1} < x_t$ para algum $t \in \mathbb{Z}$. Para determinarmos esse valor de u alteramos o nosso modelo original colocando como parâmetro de controle apenas o valor da função γ, onde $\gamma \in [0, 1]$. Nesta simulação tomamos $x_0 = 500$, $C = 1$ e $\phi_1 = 1$.

Variamos o valor de γ em $0,01,\ 0,02,\ \ldots,\ 1$. O valor encontrado foi $\gamma = 0,81$. Ou seja, quando atingimos uma eficiência do herbicida no controle da planta daninha de 81% logo no primeiro ano, o banco de sementes no ano seguinte será menor que o valor inicial do ano

anterior.

Utilizando o programa computacional Maple, determinamos qual o valor de u que satisfaz a seguinte igualdade

$$\gamma = \gamma(u) = \frac{\exp(-0,428 + 0,945C)u^{1,496}}{1 + \exp(-0,428 + 0,945C)u^{1,496}} = 0,81. \tag{4.8}$$

O valor de u que satisfaz essa equação é $u = 1,86$. Esse resultado nos diz que para taxas de aplicação de herbicida maiores ou iguais a $u = 1,86$ o banco de sementes tem uma trajetória de queda desde o primeiro ano de aplicação do controle. Se estivéssemos considerando os custo de aplicação do herbicida, possuiriamos agora o custo mínimo da operação de controle da planta daninha quando supomos $x_0 = 500$, $C = 1$ e $\phi_1 = 1$. Esses parâmetros formam um conjunto de condições iniciais desse problema, e para cada variação desse conjunto obteremos diferentes valores de u.

4.2.3 Discussão dos Resultados

Através das simulações apresentadas neste trabalho podemos observar dois pontos principais no tratamento da infestação na lavoura: as condições climáticas na data da aplicação do herbicida e o valor da taxa de mortalidade pré-semeadura. Esses fatores fazem com que a quantidade de herbicida aplicada após o plantio varie consideravelmente, deixando em dúvida qual é o melhor conjunto de condições para o combate à infestação. Tendo em vista que não podemos controlar o clima, o que nos cabe é observar o clima da região de plantio e esperar para que tenhamos as melhores condições possíveis. Além disso, devemos analisar o fato de controlar a planta daninha antes de semear, utilizando de alguma técnica de controle (mecânica, química, biológica, etc). A partir daí, será possível fazer uma previsão de como a infestação será controlada e qual o custo gerado por esse processo. Ainda neste trabalho faremos a otimização deste processo utilizando teorias matemáticas conhecidas.

Um fato que chama atenção nas simulações, é que em determinados conjuntos de dados o banco de sementes se anula em algum instante de tempo. Na prática isso não é observado, e nos cabe concluir que esse acontecimento é fruto de algum desvio na modelagem matemática. De fato o banco tende a zero devido a imposição de $R_{it} = 0$ quando $M_{it} < 0.5$. Um ponto de pesquisa interessante seria reavaliar o modelo e tentar adequá-lo para que isso não ocorra.

Além disso, observamos um outro fato interessante, que é a estabilização do banco de sementes a partir de um determinado tempo. Na seção seguinte apresentamos um estudo sobre a estabilidade do sistema dinâmico relacionado ao banco de sementes.

4.3 Análise da Estabilidade do Banco de Sementes

Dentro das simulações apresentadas acima notamos a existência de possíveis pontos de equilíbrio da equação dinâmica (4.5) que descreve a comportamento do banco de sementes. Veja as Figura 4.13, 4.14 e 4.15. Esta seção está reservada para a apresentação de um estudo sobre estes pontos de equilíbrio. Para isto, tomamos fixos todos os parâmetros relacionados ao modelo populacional da planta daninha, entre eles o parâmetro relacionado às condições climáticas C ($C = 1$), e a taxa de herbicida aplicada, u ($u = 0$ e $u = 2,181$).

Neste trabalho tomamos algumas vezes $u = 0$, o que significa a ausência da aplicação de controle no combate à planta daninha. Para este valor de u a equação dinâmica (4.5) possui pontos de equilíbrio, porém, nem sempre isto ocorrerá dependendo do valor de u. Determinamos numericamente através de um programa computacional o maior valor de u para o qual existem pontos de equilíbrio para o sistema dinâmico associado ao banco de sementes, e assim

pontos de equilíbrio, mas retira da dinâmica do processo o fato do banco de sementes ir para zero com determinadas combinações de controle e banco inicial de sementes.

Para uma melhor apresentação do problema, vamos tomar $B_t = x_t$. Sendo assim, a partir da execução das etapas citadas a pouco, chegamos no seguinte sistema dinâmico:

$$S1 \begin{cases} x_{t+1} = f(x_t) & = 0,25x_t + 0,5\exp^{\frac{7,6\ln\left(0,30\left(1-\frac{\exp(0,517+1,496\ln(u))}{1+\exp(0,517+1,496\ln(u))}\right)x_t\right)}{1,20+0,8\ln\left(0,30\left(1-\frac{\exp(0,517+1,496\ln(u))}{1+\exp(0,517+1,496\ln(u))}\right)x\right)}} \\ & + 0,5\exp^{\frac{6,8\ln\left(0,05\left(1-\frac{\exp(0,517+1,496\ln(u))}{1+\exp(0,517+1,496\ln(u))}\right)x_t\right)}{2,00+0,8\ln\left(0,30\left(1-\frac{\exp(0,517+1,496\ln(u))}{1+\exp(0,517+1,496\ln(u))}\right)x_t\right)}} \\ \text{sujeito a } x_0 = a, \quad a \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.9}$$

onde $f(x_t)$ é uma função não linear, $t \in \mathbb{Z}$, u é uma constante dada, e $x_0 = a$ é a condição inicial do sistema.

No sistema dinâmico $(S1)$ supomos que $t \in \mathbb{Z}$, e sua variável de estado x_t pode assumir valores reais positivos. Sendo assim, considerando que $f(x_t)$ é uma função não linear, podemos classificar $(S1)$ como um sistema dinâmico não linear de tempo discreto.

De acordo com a teoria apresenta no Apêndice C, se x^* é um ponto de equilíbrio do sistema $(S1)$, então temos a igualdade

$$x^* = f(x^*).$$

Impondo esta igualdade, conseguimos determinar todos os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico $(S1)$, e a partir daí podemos analisar esses pontos com relação a sua estabilidade (estável ou instável).

4.3.2 Primeiro Caso: $u = 0$

Neste primeiro caso supomos que a taxa de herbicida aplicada é zero ($u = 0$) afim de analisarmos os pontos de equilíbrio do banco de sementes quando não controlamos a infestação. Para este caso, temos que o sistema $(S1)$ será dado por

$$S2 \begin{cases} x_{t+1} = f(x_t) = 0,5\exp^{\frac{(7,6\ln(0,30x_t))}{(1,20+0,8\ln(0,30x_t))}} + 0,5\exp^{\frac{(6,8\ln(0,05x_t))}{(2,00+0,67\ln(0,05x_t))}} + 0,25x_t \\ \text{sujeito a } x_0 = a. \end{cases}$$

O primeiro passo para determinarmos a estabilidade deste sistema dinâmico é achar os valores x^* tais que $x^* = f(x^*)$, ou seja, determinar o pontos do equilíbrio do sistema. Para isto, utilizamos o programa computacional Maple mantendo duas casas decimais para os valores, e obtemos os seguintes resultados

$$x_1^* = 1699,54 \text{ e } x_2^* = 4,49.$$

As Figuras 4.17 e 4.18 representam as trajetórias de $f(x) - x$ em torno os pontos de equilíbrio x_1^* e x_2^* respectivamente.

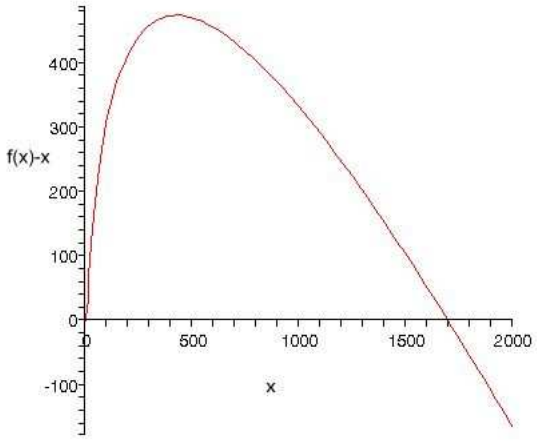

Figura 4.17: Gráfico de f(x)-x próximo do ponto de equilíbrio x_1^* com $u = 0$

Quando os gráficos cruzam o eixo x temos a igualdade desejada $x^* = f(x^*)$.

Determinados os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico, precisamos analisar a estabilidade destes pontos. Existem várias formas de avaliar a estabilidade de um ponto de equilíbrio de um dado sistema dinâmico unidimensional de tempo discreto. Um método usado para este fim é o Método Direto de Lyapunov, (Monteiro, 2002). Outra forma de analisar a estabilidade de um sistema dinâmico não linear de tempo discreto é o método de linearização. Este método consiste na linearização do sistema original em torno de seu ponto de equilíbrio e análise da estabilidade deste ponto tomando agora o sistema linear associado. A partir daí aplica-se o Teorema de Hartman-Grobman, (Monteiro, 2002). No Apêndice A descrevemos melhor esses métodos.

Dessa forma, determinados os pontos de equilíbrio, devemos linearizar o sistema $(S2)$ em torno dos pontos x_1^* e x_2^* afim de determinarmos um novo sistema dinâmico, agora linear, para que possamos analisar a estabilidade deste novo sistema. Expandindo em série de Taylor a função $f(x_t)$ em torno dos pontos x_1^* e x_2^*, e tomando apenas até o termo linear

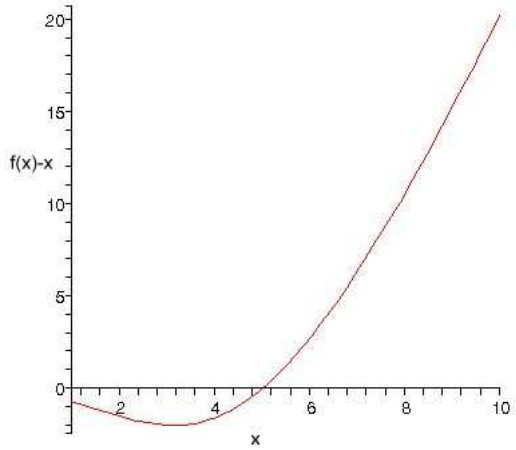

Figura 4.18: Gráfico de f(x)-x próximo do ponto de equilíbrio x_2^* com $u = 0$

nessa expressão, obtem-se os sistemas dinâmicos lineares associados a $(S2)$ com relação aos respectivos pontos de equilíbrio. Sejam então:

$$S2' \left\{ x_{t+1} = f(x_t) = f(x_1^*) + f'(x_1^*)(x_t - x_1^*) = 1699,54 + 0,47(x_t - 1699,54) \right.$$

e

$$S2'' \left\{ x_{t+1} = f(x_t) = f(x_2^*) + f'(x_2^*)(x_t - x_2^*) = 4,99 + 3,2(x_t - 4,99). \right.$$

Observe que $|f'(x_1^*)| = |0,47| < 1$, logo, pelos resultados de estabilidade para sistemas lineares, x_1^* é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema $S2'$. Como resultado, podemos dizer que x_1^* também é ponto equilíbrio estável do sistema não linear associado, porém, este resultado é garantido apenas numa vizinhança do ponto x_1^* (Teorema de Hartman-Grobman). Ou seja, para valores iniciais x_0 numa vizinhança de x_1^*, o sistema dinâmico não linear $(S2)$ irá se estabilizar assintoticamente em $x = 1699,54$.

Vamos analisar agora qual o tipo de estabilidade do ponto x_2^*. Observe que neste caso $|f'(x_2^*)| = |3,2| > 1$, logo, x_2^* é um ponto de equilíbrio instável do sistema linear $S2''$ e conseqüentemente, para valores de x_0 numa vizinhança de x_2^*, o sistema dinâmico não linear $(S2)$ terá também como ponto de equilíbrio instável o ponto x_2^*. Dessa forma, o sistema permanece somente por algum tempo próximo do ponto de instabilidade e logo muda sua trajetória.

Afim de comparação, sabemos que o ponto de equilíbrio instável nunca é alcançado pelo sistema. O que ocorre é que a trajetória do sistema oscila por algum tempo numa vizinhança

do ponto de equilíbrio instável, e com o tempo tende a sair dessa vizinhança. No caso do ponto de equilíbrio estável, o sistema irá convergir para ele, por isso é chamado de equilíbrio assintótico.

Considerando que a variável x_t poderá assumir somente valores reais positivos, buscamos através de um programa computacional identificar o maior valor de u para o qual a equação dinâmica $(S1)$ possui algum ponto de equilíbrio. Esse valor foi determinado e é igual a $2,181$. A partir desse valor de u, a dinâmica do sistema se altera, e deixa de possuir pontos de equilibro bem definidos, e passa a possuir somente um ponto de equilíbrio induzido pela restrição $R_{it} = 0$ quando $D_{it} < 0.5$ do modelo populacional (4.1)-(4.5).

4.3.3 Segundo Caso: $u = 2,181$

Vejamos então os resultados obtidos quando supomos $u = 2,181$. O processo de determinação e análise dos pontos de equilíbrio do sistema dinâmico $(S1)$ quando tomamos essa quantidade de controle é idêntica à forma utilizada quando supomos $u = 0$. Para $u = 2,181$, temos o seguinte sistema dinâmico

$$S3 \begin{cases} x_{t+1} = f(x_t) = 0,5 \exp^{\frac{(7,6 \ln(0,047x_t))}{(1,20+0,8 \ln(0,047x_t))}} + 0,5 \exp^{\frac{(6,8 \ln(0,008x_t))}{(2,00+0,67 \ln(0,008x_t))}} + 0,25x_t \\ \text{sujeito a } \ x_0 = a. \end{cases}$$

Como feito anteriormente, devemos analisar primeiro o sistema linear associado, e assim aplicar os resultados de estabilidade obtidos neste sistema para o sistema não linear original.

Da mesma forma como feito no caso anterior, o primeiro passo para determinarmos a estabilidade deste sistema dinâmico é achar os valores dos pontos de equilíbrio, ou seja, determinar x^* tal que $x^* = f(x^*)$. Para isto, utilizamos o programa computacional Maple, e obtemos os seguintes resultados

$$x_1^* = 225,96 \ \text{ e } \ x_2^* = 205,55.$$

As figuras (4.20) e (4.19) representam as trajetórias de $f(x) - x$ em torno os pontos de equilíbrio x_1^* e x_2^* respectivamente.

Quando os gráficos cruzam o eixo x temos a igualdade desejada $x^* = f(x^*)$.

Repetiremos os mesmos passos realizados no primeiro caso, ou seja, determinados os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico original, devemos linearizar o sistema original em torno dos pontos x_1^* e x_2^* para analisarmos a estabilidade destes pontos, e aplicamos ao

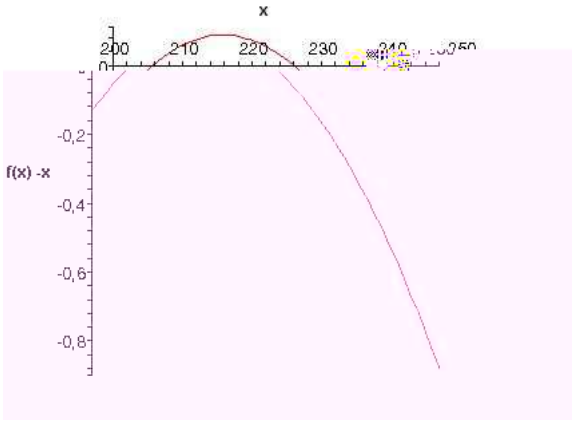

Figura 4.19: Gráfico de f(x)-x próximo do ponto de equilíbrio x_1^* com $u = 2,181$

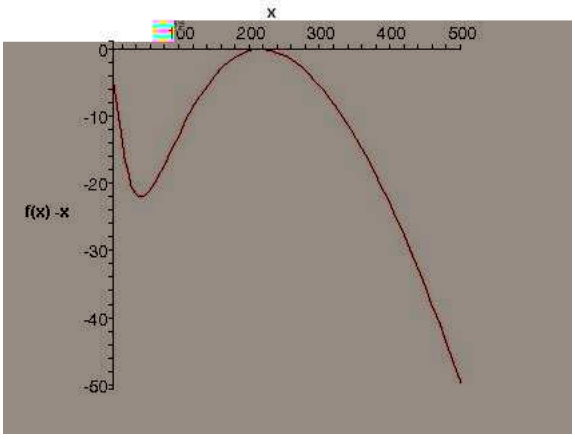

Figura 4.20: Gráfico de f(x)-x próximo do ponto de equilíbrio x_2^* com $u = 2,181$

sistema não linear os resultados obtidos para o sistema linear associado utilizando o Teorema de Hartman-Grobman.

Expandindo em série de Taylor a função $f(x_t)$ em torno dos pontos x_1^* e x_2^*, e tomando apenas até o termo linear nessa expressão, temos respectivamente

$$S3' \left\{ x_{t+1} = f(x_t) = f(x_1^*) + f'(x_1^*)(x_t - x_1^*) = 225,96 + 0,98(x_t - 225,96) \right.$$

e

$$S3'' \left\{ x_{t+1} = f(x_t) = f(x_2^*) + f'(x_2^*)(x_t - x_2^*) = 205,55 + 1,02(x_t - 205,55). \right.$$

Note que que $|f'(x_2^*)| = |1,02| > 1$, logo, pelos resultados de estabilidade para sistemas lineares, x_2^* é um ponto de equilíbrio instável do sistema $S3''$. Como resultado, podemos dizer que x_2^* também é ponto equilíbrio instável do sistema não linear original, porém, como mencionado no caso anterior, este resultado é garantido apenas para valores de x_0 numa vizinhança do ponto x_2^*.

Vamos analisar agora qual o tipo de estabilidade do ponto x_1^*. Observe que neste caso, $|f'(x_1^*)| = |0,98| < 1$, logo, x_1^* é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema linear $S3'$ e conseqüentemente, para valores de x_0 numa vizinhança de x_1^*, este também é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema não linear associado $S3$.

Foram feitas algumas simulações do sistema dinâmico $S1$ supondo que o valor inicial x_0 seja os pontos de equilíbrio para os respectivos valores de u. As Figuras 4.21, 4.22 e 4.23 mostram os resultados. Estas simulações foram realizadas da mesma forma como na seção anterior.

A Figura 4.21 ilustra a evolução do sistema dinâmico referente ao banco de sementes $S1$, quando supomos $x_0 = x_1^*$ com os respectivos valores de u, $u = 0$ e $u = 2,181$. Note que a trajetória de $x_{t+1} = f(x_t)$ não se altera com o tempo, o que já era esperado, pois tomamos como condição inicial os pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis.

Na Figura 4.22 tomamos x_0 como sendo o ponto de equilíbrio instável x_2^* com valor u igual a zero. Note que a trajetória de $f(x_t)$ permanece por um tempo numa vizinhança do ponto de equilíbrio, mas num determinado momento começa a decair e tende a zero com o tempo (para esta simulação tomamos incluímos restrição do modelo populacional citada anteriormente, e por isso o sistema tende a zero com o tempo).

Nesta simulação observamos que a trajetória da variável de estado tende a zero com o tempo. Esse fato só é possível quando incluímos ao modelo a restrição de $R_{it} = 0$ quando D_{it}, porém isto só será possível em uma simulação numérica como feita na seção anterior

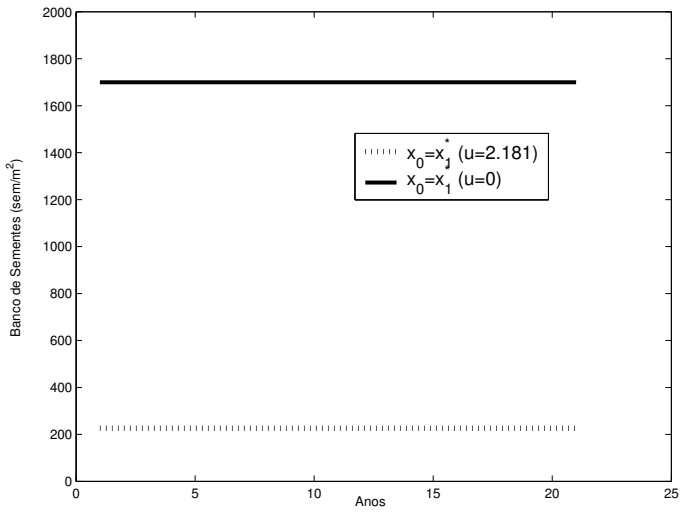

Figura 4.21: Evolução de $f(x_t)$ com $x_0 = x_1^*$ para u=0 e u=2,181

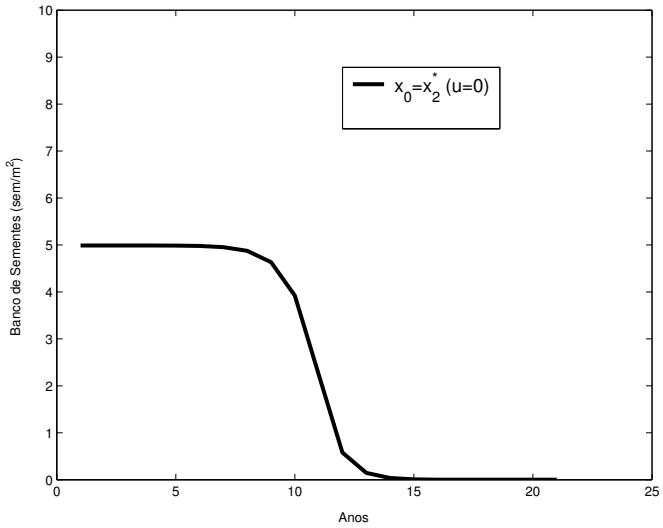

Figura 4.22: Evolução de $f(x_t)$ com $x_0 = x_2^*$ e $u = 0$

e aplicada aqui para a obtenção das figuras apresentadas. Para este caso, zero pode ser interpretado como um ponto de equilíbrio induzido do sistema dinâmico.

Nesta última figura (Figura 4.23) podemos observar que a variável de estado $x_{t+1} = f(x_t)$ permanece por algum tempo numa vizinha do ponto de equilíbrio instável $x_2^* = 205,55$ mas tem sua trajetória alterada tendendo ao ponto de equilíbrio estável $x_1^* = 225,96$. Note que tomamos nesta simulação um intervalo de tempo bem maior que nas simulações anteriores. Apesar de ser irreal a utilização de um intervalo de tempo tão grande para o estudo de manejo de plantas daninhas na agricultura, supomos este intervalo de tempo apenas para analisar matematicamente o comportamento do sistema dinâmico reference ao problema de manejo.

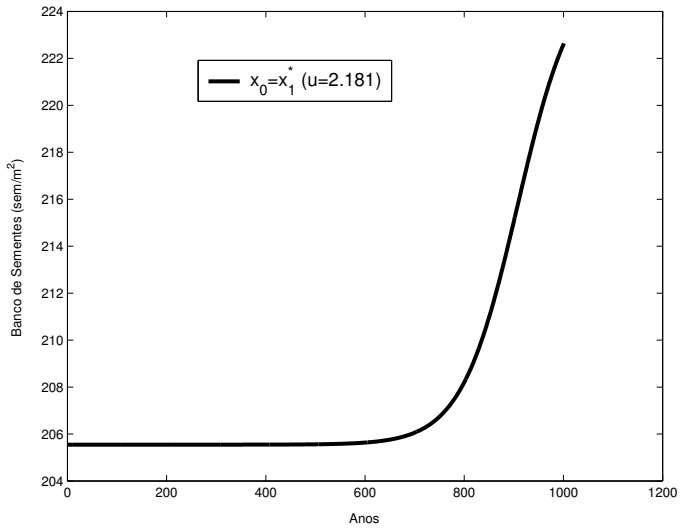

Figura 4.23: Evolução de $f(x_t)$ com $x_0 = x_2^*$ e $u = 2,181$

Tabela 1. Valores dos Parâmetros			
Parâmetros do modelo populacional			
δ		0,5	
Ψ		0,5	
η (sementes/m^2)		0	
ξ (sementes/m^2)		0	
κ		0,5	
	Coorte 1	Coorte 2	Coorte 3
p_i	0,3	0,6	0,1
ϕ_i	1	0	0
α_i	8,60	7,60	6,80
μ_i	0,74	1,20	2,00
ε_i	0,88	0,80	0,67
Parâmetros Econômicos			
P_y (\$/tonelada)		165.00	
P_u (\$/litros)		22.5	
Y_0 (toneladas/ha)		3,9	
C_1 (\$/ha)		2,22	
C_2 (\$/ha)		166,24	
α		0,965	

Capítulo 5

O Problema Econômico e os Modelos de Otimização

5.1 A Função de Produção e a Função Lucro

Muitos fatores podem influenciar, e determinar o rendimento final de uma colheita. Por exemplo, a forma que é feito o plantio (direta ou convencional), o clima da região onde é plantada a lavoura, a quantidade de chuvas na temporada, pestes, doenças, infestações por plantas daninhas, a maneira que será colhida a produção, entre outros. Esses fatores podem ser fixos ou variáveis, e estão relacionados em uma função de produção Y, que pode ser representada por

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_n), \tag{5.1}$$

onde $X_1, \ldots, X_n$ são os parâmetros de produção, os quais podem ser fixos ou variáveis. Nosso objetivo nesse momento é avaliar as mudanças na densidade de plantas daninhas na lavoura a parir da aplicação de herbicidas, ou seja, não utilizaremos quaisquer outra técnica de controle além da aplicação do defensivo químico. Dessa forma, tomaremos apenas dois fatores como variáveis: a população inicial de plantas daninhas, x, e a dosagem de herbicida aplicada, u, e todos os outros fatores supomos fixos, e denotamos por z, como feito em Jones e Cacho (2000).

Sendo assim, a função de produção pode ser reescrita da seguinte forma,

$$Y = f(x, u, z). \tag{5.2}$$

A equação (5.2) pode ser separada em outras duas equações: Y_0, que é o rendimento da produção numa lavoura livre de plantas daninhas, e a perda de rendimento, Y_L, associada com a densidade de planta daninha na lavoura x, e o controle aplicado u. Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} Y_0 &= f(z), && (5.3)\\ Y_L &= f(x, u), && (5.4)\\ Y &= Y_0(1 - Y_L). && (5.5) \end{aligned}$$

Cousens (1985a) argumentou que a função que melhor descreve perda de rendimento como uma função de densidade de planta daninha é a hiperbolóide que segue

$$Y_L = \frac{ID}{1 + \frac{ID}{A}}, \tag{5.6}$$

onde D é a densidade de planta daninha que influencia o rendimento, I é a porcentagem de rendimento perdido por unidade de área quando a densidade de planta daninha é muito pequena, e A é a estimativa do máximo rendimento perdido numa lavoura cheia de plantas daninhas relativo ao rendimento de uma colheita livre de plantas daninhas.

A densidade de plantas daninhas que afeta o rendimento da colheita, D, é uma função da densidade inicial de plantas daninhas x, e da proporção de plantas daninhas mortas pela aplicação do herbicida γ (equação 4.7).

$$D = x(1 - \gamma), \quad 0 \leq \gamma \leq 1. \tag{5.7}$$

Quando o herbicida é aplicado, há uma perca de rendimento na produção devido a ação tóxica do produto químico, que neste caso, foi estimada em $Y_p = 0,01333u$. Sendo assim, a função de produção Y é reescrita novamente por

$$Y = Y_0(1 - Y_L)(1 - Y_p). \tag{5.8}$$

Tendo construída a função de produção Y, podemos então introduzir a função lucro para o problema de aplicação de herbicida. Essa função é dada por:

$$\pi(x, u) = P_y Y(x, u) - P_u u - C_1 - C_2, \tag{5.9}$$

onde π é o lucro anual, P_y é o preço de cada unidade do produto produzido (\$/ton), P_u é o custo por cada unidade de controle (\$/L), C_1 é a constante dos custos de aplicação do controle (maquinários e suportes) e C_2 é o custo de produção relacionado aos fatores fixos z. O primeiro termo da equação, P_yY, é a renda total, e não é determinada apenas pelo nível da variável de controle, mas também pela densidade inicial de plantas daninhas x. Assim, a renda total para qualquer variação de u será específica para cada valor inicial x.

Neste trabalho, apresentaremos uma simulação do controle da planta daninha apresentada nesse estudo de caso, para um período de 10 anos. A variável de controle u representa o herbicida utilizado, é a única forma de controle considerada. Dois modelos de otimização serão apresentados.

5.2 Os Modelos de Otimização

Como já mencionado, podemos resolver o problema de otimização referente ao controle de plantas daninhas utilizando modelos estáticos e dinâmicos. A seguir, mostraremos mais detalhes sobre os modelos estáticos e dinâmicos apresentados no capítulo de preliminares dessa dissertação.

5.2.1 Um Modelo Estático

Muitas vezes o produtor de uma determinada lavoura procura maximizar o lucro de seu investimento levando em consideração apenas o ano (ou estação) corrente. Essa é uma visão muito empregada no meio agrícola, e pode ser modelada e representada por um modelo de otimização estático.

De forma geral, o objetivo do produtor é determinar a taxa de herbicida que maximize, dentro de um único ano, a função lucro π para uma dada densidade inicial de plantas daninhas x. Sendo assim, podemos determinar o valor ótimo para a taxa de herbicida u, que maximize a função lucro π, resolvendo o seguinte problema:

$$\max \pi(x, u) \tag{5.10}$$

$$\text{sujeito a} \quad x = a, \tag{5.11}$$

$$u \in \Omega,$$

onde as variáveis são como já definidas. Ω é o conjunto de controles admissível para u, e será dado como no caso dinâmico apresentado a seguir.

Uma aproximação estática para o controle de plantas daninhas, onde os benefícios e custos são considerados dentro de um único ano (ou estação), pode ser uma tática inadequada, dado que existem diversos efeitos associados ao controle da infestação, e que podem influenciar no desenvolvimento do banco de sementes. Por exemplo, as plantas daninhas que não são atingidas com eficiência pelo herbicida, e sobrevivem em uma determinada estação, podem se reproduzirem e aumentar em muito a sua população nos anos seguintes. Conseqüentemente, é mais apropriado considerar o controle da planta daninha no contexto de um problema de manejo de recursos, onde o objetivo principal é determinar o nível ótimo de controle aplicado entre dois ou mais anos. Para resolver problemas desse tipo, é preciso formular um modelo de otimização dinâmico (Jones e Cacho, 2000).

5.2.2 Um Modelo Dinâmico

Para o estudo com problemas dinâmicos, precisamos definir de que forma a variável de estado irá evoluir com o tempo. Observe que no caso estático, a variável de estado é considerada constante e representa a quantidade de plantas daninhas presentes no solo x. Para o caso dinâmico, tomaremos como a variável de estado o banco de sementes da planta daninha. Sendo assim, temos que definir uma equação que descreva a variação desse banco de sementes com o passar do tempo. Dessa forma, temos definida uma *equação dinâmica*. Para esse caso, podemos tratar as sementes da planta como um recurso renovável, e o banco de sementes como o estoque deste recurso. Nos problemas dinâmicos, esse estoque pode alterar, com o passar do tempo, a solução ótima do problema.

Com o tempo, o banco de sementes pode sofrer alterações no seu tamanho devido diversos fatores, como a ação do controle aplicado, que acarreta num decréscimo do banco de sementes, ou a reprodução da planta, que faz com que o banco de sementes cresça no ano seguinte. Essas mudanças podem ser descritas da seguinte forma:

$$x_{t+1} = x_t - P_t - E_t + N_t \tag{5.12}$$

onde x_t representa a densidade inicial de sementes no solo no ano t, P_t são as sementes que germinaram durante o ano t, E_t é a retirada de sementes devido à ação de predadores e mortalidade natural, e N_t são as novas sementes adicionadas ao banco de sementes ou por reprodução, ou importação por expansão natural, ou ainda por operações tal como colher e semear. As expressões P_t, E_t e N_t são geradas a partir do modelo populacional da planta

(4.1)-(4.5). Expandido a (4.5) e igualando à (5.12), obtemos

$$P_t = \delta x_t$$

$$E_t = \Psi(1-\delta)x_t$$

$$N_t = \sum_{j=1}^{3}(\kappa R_{jt}) - \eta + \xi.$$

De forma geral, o objetivo do fazendeiro é determinar de que maneira, e em qual intensidade, o banco de sementes x, de cada estação ou ano, é alterado com a aplicação do herbicida u, visando assim utilizar economicamente da melhor forma possível o herbicida e, conseqüentelmente, maximizar seu lucro num período pré-determinado de tempo. Sendo assim, para um período de aplicação de T anos, podemos formular o seguinte problema de otimização dinâmica:

$$\max J = \sum_{t=1}^{T} \alpha^{t-1}\pi(x_t, u_t) \tag{5.13}$$

$$\text{sujeito a} \quad x_{t+1} - x_t = g_t(x_t, u_t), \tag{5.14}$$

$$x_1 = b, \quad u_t \in \Omega_t.$$

onde J é o funcional objetivo do problema, e representa o lucro alcançado num período de T anos, x é a variável que representa o banco de sementes, b é a condição inicial do problema, e representa densidade do banco de sementes no início do primeiro ano de plantio, u é a variável de controle, π é o lucro anual, α é um fator de desconto (Kennedy, 1986), e g é a taxa de mudança no banco de sementes a partir da aplicação do herbicida dada por (5.12), e Ω_t é o conjuntos dos controles admissíveis u_t.

Antes de continuarmos, note que, nas simulações feitas na seção 4.2, assumimos como o primeiro período de aplicação do herbicida o tempo $t = 0$ 1 Ω0 12 0 0 0 12 293 040 0 32 345632 mΩ(:

Dessa forma, $u_t \in \Omega_t$, se $M(x_t, u_t) < 0,5$, para x_t dado. Resolvendo essa inequação, temos a expressão de u_t em função de x_t:

$$u_t < 0,66 \cdot 10^{-1040}(0,57 \cdot 10^{1556} x_t - 0,77 \cdot 10^{1556})^{125/187}. \tag{5.15}$$

Vamos limitar inferiormente o valor de x_t por 1,5. Dessa forma, não teremos o banco de sementes se anulando, o que realmente não ocorre na prática. Substituindo $x_t = 1,5$ em (5.15), temos que $u_t = 0,09$. Vamos limitar u_t inferiormente por esse valor. Dessa forma, temos

$$\Omega_t = [0,09\ ,\ 0,66 \cdot 10^{-1040}(0,57 \cdot 10^{1556} x_t - 0,77 \cdot 10^{1556})^{125/187}].$$

A principal diferença entre os dois modelos de otimização apresentados acima (estático e dinâmico) está na forma da função objetivo J de cada um. No primeiro, relacionamos apenas a estação (ou ano) corrente, deixando de lado os efeitos da otimização nos períodos seguintes. No segundo caso, temos que a otimização o processo no período t influencia diretamente a otimização do período $t+1$. Ou seja, quando aplicamos uma determinada quantidade de herbicida no primeiro período, estamos dizendo que esta quantidade irá afetar diretamente a solução ótima dos períodos seguinte. De um visão econômica, ao aplicarmos o modelo dinâmico, estamos "gastando"em controle no momento t parte do que seria gasto no momento $t+1$. A constante α está relacionada a esse fato, por isso é chamada de fator de desconto.

Existem diversas formas para resolver os problemas de otimização definidos aqui. Para o caso estático, um simples método de otimização não linear resolveria o problema. Para o sistema descrito por (5.13)-(5.14) podemos aplicar diversos métodos, dentre esses, temos os baseados no Princípio do Máximo de Pontryagin, programação dinâmica, e métodos gerais de resolução de problemas não lineares (Gradiente, Newton-Raphson, entre outros). Resolveremos os dois problemas de otimização utilizando métodos que relacionam o princípio de máximo e programação não linear.

5.2.3 Solução do Problema Dinâmico

A teoria de controle é uma ferramenta muito importante para determinarmos a solução ótima de um problema dinâmico. Um componente importante desse tipo de problema é a variável de co-estado, denotada por p, e que será inserida no problema através da função Hamiltoniana. Para o problema de manejo de plantas daninhas, a função de Hamilton é

dada por (Kennedy, 1986)

$$H_t(p_{t+1}, x_t, u_t) = \pi(x_t, u_t) + \alpha p_{t+1} g_t(x_t, u_t), \tag{5.16}$$

onde os parâmetros são como já definidos. A função H_t é o lucro obtido a partir de um determinado nível das variáveis de estado e controle x e u, mais o valor de alguma mudança no estoque da variável de estado, avaliada com a variável de co-estado p_{t+1}. A função g_t na equação (5.16), representa a taxa de mudança no banco de sementes decorrente da aplicação do herbicida. Quando g_t é multiplicada por p_{t+1}, esse produto é convertido em um valor monetário, e representa a taxa de mudança do valor econômico do banco de sementes correspondente a dose de herbicida aplicada. De forma geral, este valor pode ser visto como o lucro adquirido a partir de efeitos positivos da ação do herbicida no banco de sementes (Jones e Cacho, 2000).

De acordo com Kennedy (1986), as condições de primeira ordem, dadas pelo princípio do máximo, para um problema de manejo de recursos, são as seguintes:

$$0 = \frac{\partial H_t}{\partial u_t} = P_Y \frac{\partial Y}{\partial u_t} - P_u + \alpha p_{t+1} \frac{\partial g}{\partial u_t} \tag{5.17}$$

$$\alpha p_{t+1} - p_t = -\frac{\partial H_t}{\partial x_t} = -P_Y \frac{\partial Y}{\partial x_t} - \alpha p_{t+1} \frac{\partial g}{\partial x_t} \tag{5.18}$$

$$x_{t+1} - x_t = \frac{\partial H_t}{\partial p_t} = g_t(x_t, u_t) \tag{5.19}$$

A equação (5.17) é a condição necessária para a maximização do problema com relação a u_t, e representa o princípio do máximo; a equação (5.18) é a equação de co-estado, e denota a taxa de mudança do preço de sombra com o passar do tempo; a equação (5.19) é a re-declaração da equação de movimento. Esse conjunto de equações nos permite determinar o processo ótimo, composto pela variável de estado x^* e a variável de controle u^*, e a variável de co-estado relacionada ao estado p^*. A variável de estado depende do estado inicial do sistema b. Embora b seja dado, p_1 é desconhecido, e uma condição adicional, conhecida como a condição de transversalidade, é requerida para obtermos uma única solução. Nesse problema, onde o tempo final T é dado, e o estado final x_T é livre, a condição de transversalidade é $p_{T+1} = 0$. Supomos aqui $T = 10$.

5.2.3.1 Métodos Numéricos de Resolução

Os problemas de otimização (5.10)-(5.11) e (5.13)-(5.14), formam resolvidos utilizando dois métodos baseados nos métodos CAT e DOG apresentados na seção 3.3. Vamos apresentar a seguir os algoritmos utilizados para resolver os problemas.

Sejam os vetores de estado e controle $x^k = (x_1, x_2^k, \ldots, x_{10}^k, x_{11}^k)'$ e $u^k = (u_1^k, u_2^k, \ldots, u_{10}^k)'$, e o vetor de co-estado $p^k = (p_1^k, \ldots, p_{10}^k, p_{11})'$ referentes à $k-$ésima iteração do método. Para ambos os métodos aplicados, foi tomado a aproximação $u^0 = (7.2, 3.5, 2.5, 2.5, 2, 1.5, 1.5, 1, 1, 0)'$, e $x_1 = 500$ é dado. A condição de transversalidade $p_{11} = 0$ foi imposta. Um vetor auxiliar para o controle é necessário para a aplicação do Método 1. Esse vetor será dado por $\hat{u}^k = (\hat{u}_1^k, \ldots, \hat{u}_{10}^k)'$. Vejamos então os métodos.

Método 1 - CAT

Passo 1	Para k=0, defina o vetor $\hat{u}^k = u^0$ (u^0 pode ser escolhido arbitrariamente);
Passo 2	Resolva $x_{t+1}^{k+1} = x_t^{k+1} + g_t(x_t^{k+1}, \hat{u}_t^k)$, para t=1, ..., T, com $x_1^k = x_1$.
Passo 3	Determine p_t^{k+1} usando a equação recursiva (5.18), para t=T, ..., 1, dado a condição de transversalidade $p_{T+1}^{k+1} = 0$;
Passo 4	Faça $k = k + 1$;
Passo 5	Determine $u_t^k = \max_{\hat{u}_t^k} H(c_{t+1}^k, x_t^k, \hat{u}_t^k)$, para t=1, ..., T; Se qualquer u_t^k estiver fora de Ω_t, então toma-se o valor mais próximo dentro de Ω_t;
Passo 7	Calcule $\hat{u}^k = (1 - \omega_k)\hat{u}^{k-1} + \omega_k u^k$, com $\omega_k = 1/(k+1)$, e volte ao **Passo 2**.

Foi utilizado um critério de parada para o Método 1. Exigiu-se que o método fosse interrompido se para algum k, $\left|J(x^{k+1}, u^k) - J(x^k, u^{k-1})\right| < 0,01$, onde J é o funcional objetivo dado por (5.13).

Método 2 - DOG

Passo 1	Faça k=0. Dado u^k, resolva $x_{t+1}^k = x_t^k + g(x_t^k, u_t^k)$, para t=1, ..., T, com $x_1^k = x_1$. (u^0 arbitrário);
Passo 2	Avalie o funcional objetivo J^k;
Passo 3	Determine p_t^{k+1} usando a equação recursiva (5.18), para t=T, ..., 1, dado a condição de transversalidade $p_{T+1}^{k+1} = 0$;
Passo 4	Calcule $u_t^{k+1} = u_t^k - \epsilon_k \nabla_{u_t^k} H_t$, para t=1, ..., T. Se qualquer u_t^{k+1} estiver fora de Ω_t, então toma-se o valor mais próximo dentro de Ω_t;
Passo 5	Repita os passos 1 e 2 com $k = k + 1$;
Passo 6	Se $\lvert J^{k+1} - J^k \rvert < \nu$, então pare.
Passo 7	Se $J^{k+1} \leq J^k - \nu$, então reduza ϵ_k à metade e repita o processo a partir do Passo 4, com o antigo valor de u^k;
Passo 8	Se $J^{k+1} \geq J^k + \nu$, então: *(a)* Se o Passo 7 ainda não foi aplicado, então faça $\epsilon_{k+1} = 2\epsilon_k$, e repita a partir do Passo 3, com $k = k + 1$; *(b)* Se o Passo 7 já foi aplicado, então faça $\epsilon_{k+1} = \epsilon_k$, e repita a partir do Passo 3, com $k = k + 1$.

Observe que, os passos 6, 7 e 8 do Algoritmo DOG dado na seção 3.2, sofrem uma pequena modificação no Método 2 apresentado acima. Essa modificação se dá na comparação dos valores dos funcionais J^{k+1} e J^k, e é necessária porque o algoritmo original é construído para um problema de mínimo, enquanto o problema resolvido aqui é um problema de máximo. Supomos aqui $\nu = 0,01$.

5.2.4 Solução do Problema Estático

O problema de otimização estático (5.10)-(5.11) é resolvido [redacted] métodos do problema dinâmico, basta tomar $T = 1$. Dessa forma, a função [redacted] 16), avaliada em $t = 1$, se iguala à função lucro (5.9), devido à condição de [redacted] $p_2 = 0$.

Para cada ano de aplicação, resolvemos o problema de ot[redacted] és dos Métodos 1 e 2 tomando $T = 1$. Vamos repetir o processo para um pe[redacted] s. Vamos indexar os anos de aplicação pelo índice j. Ou seja, para cada j [redacted] omamos $T = 1$, e determinamos as variáveis de estado x_j e controle u_j, co[redacted] o.

Para resolver o problema através dos métodos apr[redacted] devemos entrar com um valor aproximado para u_j^*, para cada j. Ou seja [redacted] nos que definir u_j^k em cada ano j. Para $j = 1$, tomamos $u_1^0 = 1,2$. Para [redacted] s, tomou-se $u_j^0 = u_{j-1}^*$, $j = 2, 3, \ldots, 10$.

A variável de estado no início do primeiro ano [redacted] $= 500 = x_1^*$. Para os anos seguintes, tomamos $x_j^0 = x_{j-1}^* + g_t(x_{j-1}^*, u_{j-1}^*)$, j [redacted]

De forma simplificada, resolvemos o problem[redacted] eguinte forma:

Primeiramente, faça $T = 1$. E se va[redacted] s ano[redacted]. Fa[redacted] $j = 1$, onde j representa o j-ésimo ano de ap[redacted] $u_j^k = u_1^0 = 1,2$, e o valor da condição inicial x_j^k [redacted] era[redacted]ão do método para o j-ésimo ano. Agora, aplique o método escolhido. Ao final desse processo, teremos determinado o valor do controle ótimo para o primeiro ano u_1^*, e o valor do estado ótimo para o primeiro ano é $x_1^* = x_1$. Dessa forma, precisamos agora resolver o problema para o segundo ano, ou seja, $j =$ [redacted]

5.2.5 Resultados

Modelo Estático

Foi avaliado o desenvolvimento do banco de sementes, e da taxa ótima de aplicação de herbicida, para um período de 10 anos. Os resultados foram obtidos a partir da implementação dos Métodos 1 e 2 dados aqui. As Figuras 5.1 e 5.2 trazem um comparativo do valor de banco de sementes x^*, e da taxa de controle aplicada u^*, para os dois métodos utilizados na resolução do problema estático.

Observe que o comportamento das trajetórias para os dois métodos são semelhantes, mostrando que, a pesar de ser valores aproximados, os resultados dos métodos foram parecidos. Esse fato pode ser encarado como uma validação da solução encontrada. Pois, aplicando dois métodos diferentes, chegamos à soluções bem próximas.

De uma perspectiva econômica, a solução mostra que, a quantidade de herbicida aplicada é diminuída a cada ano, assim, diminuindo os custos de produção relacionados à aplicação do herbicida. Esse fato condiz com a diminuição do banco de sementes a cada ano. Observe também que, com o tempo, o valor de u^* se aproxima de 2 L/ha, e se estabiliza neste valor. Isso já era esperado, pois a população de plantas daninhas também tende a se estabilizar (Seção 4.3), não necessitando de, a partir de então, aumentar a quantidade de herbicida aplicado. Para o primeiro método, os três últimos anos de aplicação tiveram os seguintes valores para x^* e u^*: $x_9^* = 118,03$, $x_{10}^* = 115,4$ e $x_{11}^* = 113,7$; $u_8^* = 2,1$, $u_9^* = 2,08$ e $u_{10}^* = 2,06$. Em uma simulação para 20 anos, x^* se estabiliza próximo de 110 sem/m^2, e u^* próximo de 2 L/ha.

Quando analisamos o lucro anual alcançado para o problema estático, observa-se que o lucro aumenta ano a ano, até que num determinado momento se estabiliza. Na simulação para 10 anos não está muito evidente essa estabilização, porém, a variação do lucro dos três últimos anos é pequena, Figura (5.3). Numa simulação para 20 anos, observou-se que o lucro anual se estabiliza próximo de $US\$$ 358.00/ha, Figura 5.4. Esse fato se deve à estabilidade do banco de sementes, e conseqüentemente, a estabilidade da taxa de herbicida aplicada.

O lucro alcançado no final dos 10 anos, para os dois métodos de resolução, tiveram valores parecidos. Veja a Figura 5.10.

Com relação ao desempenho computacional de cada método, o primeiro convergiu significativamente mais lentamente que o segundo (cerca de 13 vezes mais lento). Porém, o tempo para convergência de ambos foi pequeno, 26 segundos para o primeiro, e 2 segundos para o segundo método, aproximadamente. Essa diferença se deve principalmente ao quinto passo

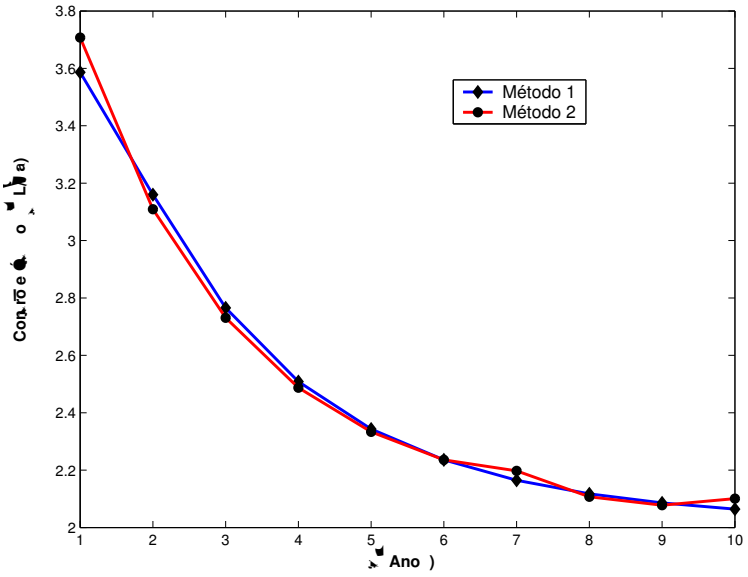

Figura 5.1: Controle ótimo para o problema estático

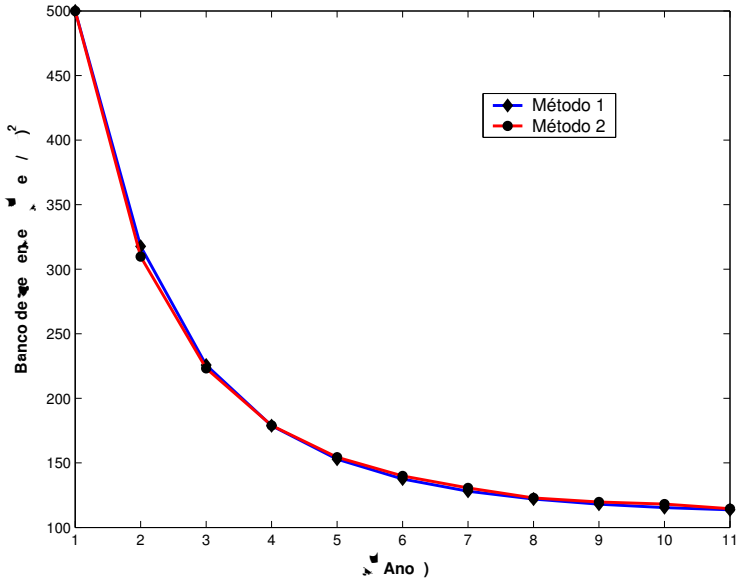

Figura 5.2: Banco de sementes ótimo para o problema estático

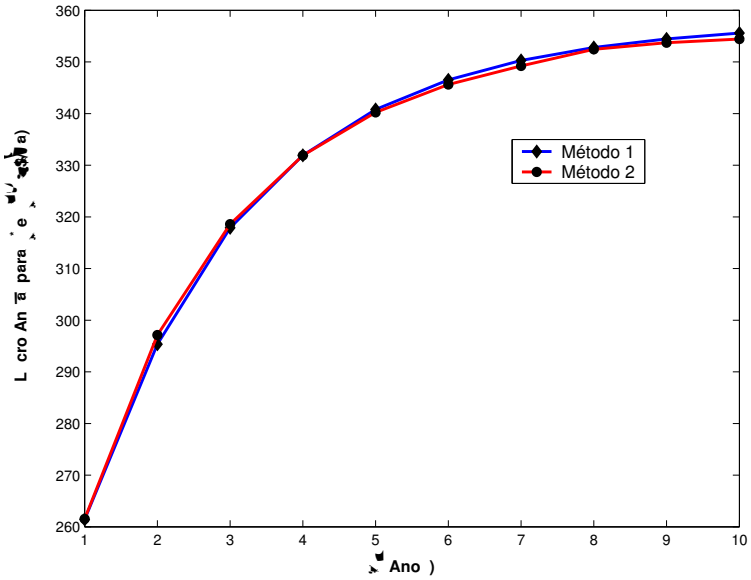

Figura 5.3: Lucro ótimo para o problema estático em 10 anos

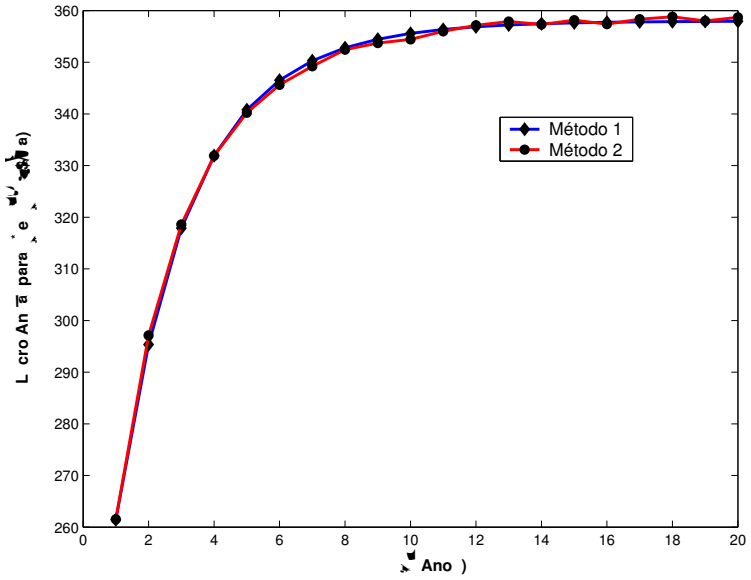

Figura 5.4: Lucro ótima para o problema estático numa simulação de 20 anos

do primeiro método, já que exige a implementação de algum método para determinar u_t^k. Nesse trabalho, esse passo foi satisfeito resolvendo diretamente a expressão $\partial H/\partial \hat{u} = 0$. O número de iterações necessárias para a convergência do primeiro método foi de 30 iterações, enquanto que o Método 2 necessitou de 35 iterações. Apesar do número de iterações do Método 1 ser menor que do Método 2, o segundo método mostro-se mais eficiente.

Os métodos de resolução foram implementados no programa computacional Maple.

Modelo Dinâmico

Foi avaliado o desenvolvimento do banco de sementes, e da taxa ótima de aplicação de herbicida, para um período de 10 anos. Os resultados foram obtidos a partir da implementação dos Métodos 1 e 2 dados aqui. As Figuras 5.6 e 5.5 trazem um comparativo do valor de banco de sementes x^*, e da taxa de controle aplicada u^*, para os dois métodos utilizados.

Observe que para o caso dinâmico, o banco de sementes x^* nos dois métodos foram bem parecidos, Figura 5.5. Porém, para o controle u^*, houve alguns pontos que diferiram um pouco mais, por exemplo, o valor de u_6^* para o método 1 é de 0,74, enquanto que no método 2, u_6^* é 0,09, Figura 5.6. Não foi possível determinar exatamente a causa dessa diferença, porém, devido o fato das soluções encontradas serem aproximações, e os métodos serem diferentes, podemos considerar normal alguma diferença entre as soluções.

Uma observação feita na otimização deste problema, é que, num determinado momento, $t = 7$, o banco de sementes alcança o menor valor possível, e se estabiliza nele, em ambos os métodos. Ou seja, a partir do sétimo ano, a planta daninha atinge o menor risco possível para a plantação. Junto a esse fato, observamos também a estabilização da taxa de herbicida aplicada num valor bem menor daquele utilizado nos primeiro anos ($u^* = 0,09$). Esse é um resultado coerente, pois com a estabilização do banco num valor pequeno, a quantidade de herbicida aplicado deverá se estabilizar também num valor pequeno.

Analisando o lucro alcançado em cada ano, observamos que do primeiro ao quinto ano de controle, o lucro aumenta ano a ano, mostrando que houve benefício econômico no controle da planta. Do quinto ao sétimo ano, observa-se pequenas variações para cima ou para baixo no lucro obtido. Porém, a partir do sétimo ano, há um acentuada queda nos valores, Figura 5.7. Esse resultado pode ser interpretado como conseqüência da estabilização do banco de sementes num valor bem pequeno, e a continuidade da aplicação do herbicida, mesmo que com essa densidade de plantas daninhas, não fosse necessário a aplicação do controle. Os já citados modelos de densidade mínima informam a quantidade mínima de plantas daninhas na lavoura que justificaria economicamente a aplicação de herbicidas.

O lucro alcançado no final dos 10 anos, para os dois métodos de resolução, tiveram

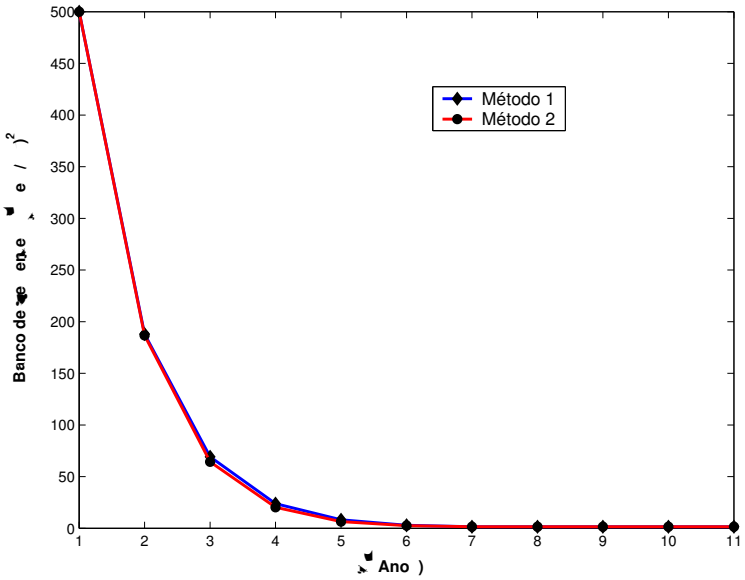

Figura 5.5: Banco de sementes ótimo para o problema dinâmico

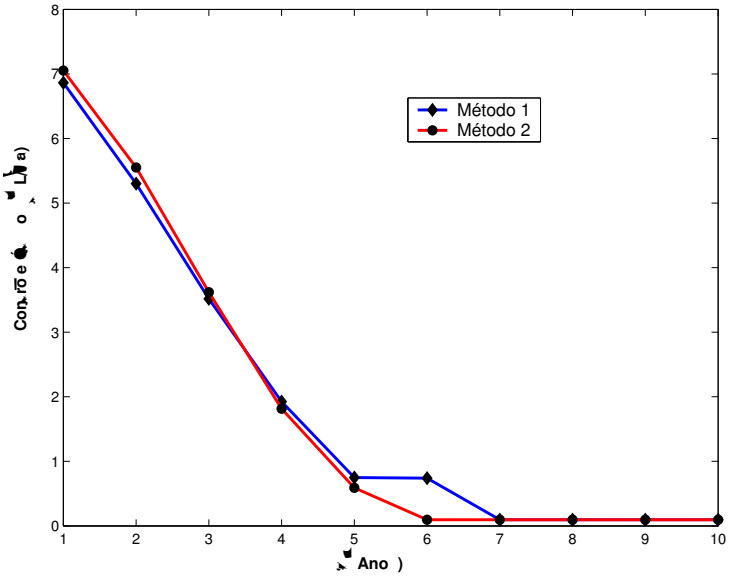

Figura 5.6: Controle ótimo para o problema dinâmico

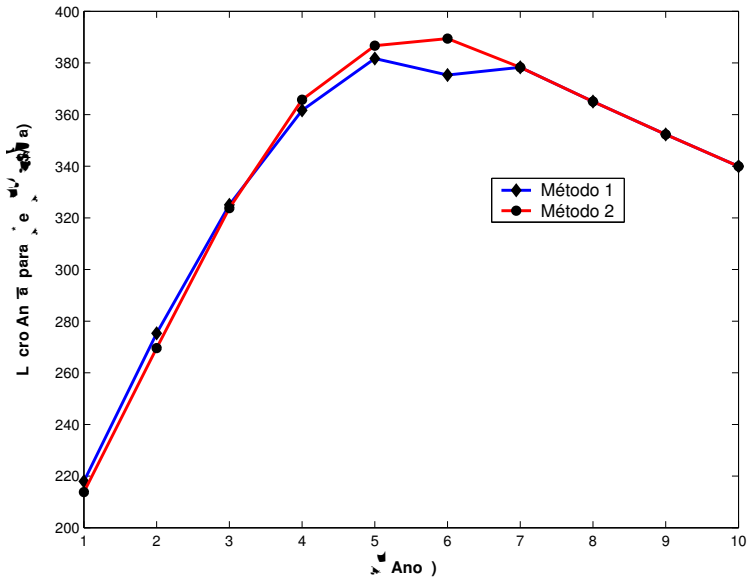

Figura 5.7: Lucro ótimo para o problema dinâmico

valores parecidos. Veja a Figura 5.10.

Com relação ao desempenho computacional de cada método, o primeiro convergiu significativamente mais lentamente que o segundo (cerca de 98 vezes mais lento). Porém, o tempo para convergência de ambos foi pequeno, 390 segundos para o primeiro, e 4 segundos para o segundo método, aproximadamente. O número de iterações necessário para a convergência do Método 2 foi de 22 iterações, enquanto que do primeiro foi de 44 iterações.

Os métodos de resolução foram implementados no programa computacional Maple. Ambos os casos, estático e dinâmico, foram resolvidos em um microcomputador Intel Pentium 4, com 1 GB de memória RAM.

Comparação Estático × Dinâmico

As Figuras 5.8 e 5.9 trazem um comparativo entre as soluções ótima x^* e u^*, para os problemas estático e dinâmico, utilizando os dois métodos de solução.

Observe que no caso estático, a taxa de herbicida aplicada nos primeiros anos não difere muito da quantidade aplicada nos últimos anos. Porém, no caso dinâmico, a diferença entre o primeiro e o último ano é grande. Além disso, a taxa de herbicida aplicada nos primeiros anos do problema dinâmico é bem maior que a taxa aplicada no caso estático.

Em média, a taxa de aplicação de herbicida para o caso estático foi de 2,5 L/ha, enquanto que o caso dinâmico teve média de 2 L/ha. Apesar de serem valores próximos, o modelo

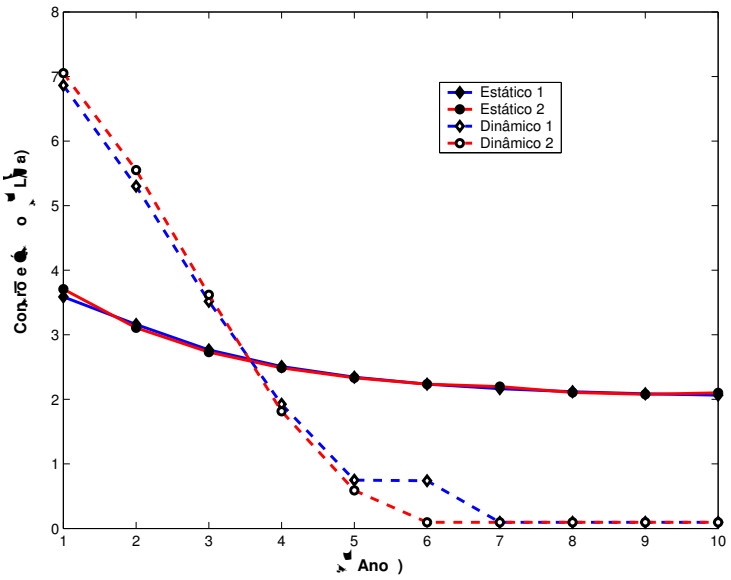

Figura 5.8: Comparação entre o controle ótimo dos problemas estático e dinâmico

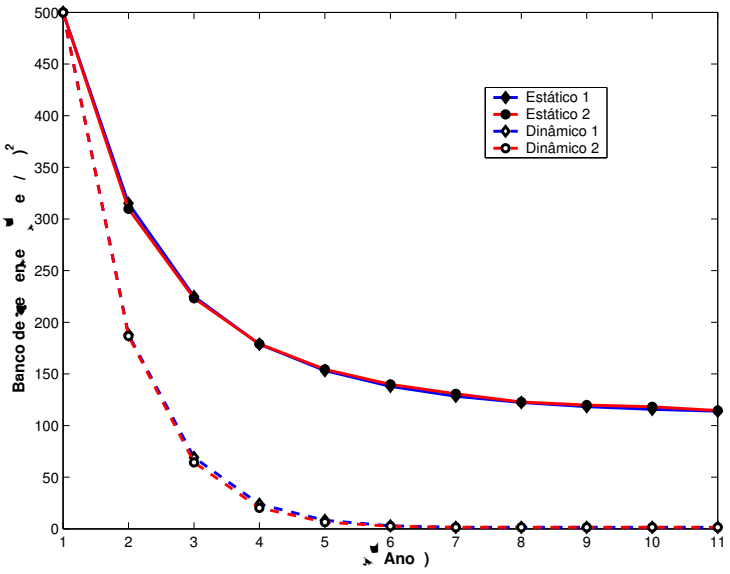

Figura 5.9: Comparação entre o banco de sementes ótimo dos problemas estático e dinâmico

dinâmico obteve melhor resultado, utilizando uma quantidade menor de herbicida em média. Além disso, obteve lucro maior no período de 10 anos.

A Figura 5.10 mostra o lucro alcançado (em U$) por cada método em seus respectivos problemas.

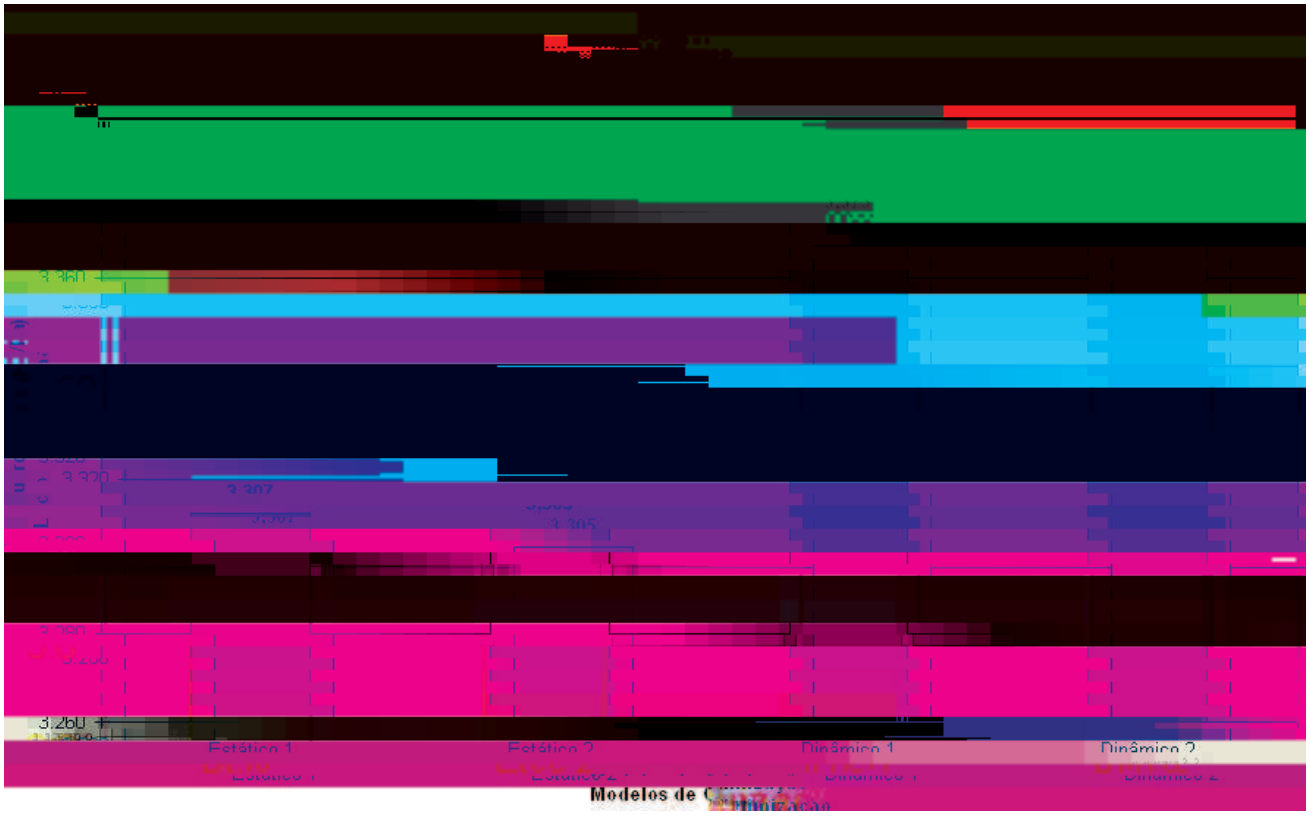

Figura 5.10: Lucro alcançado para os problemas estático e dinâmico

Capítulo 6

Considerações Finais

Essa dissertação teve como objetivo discutir de forma resumida a teoria básica de controle ótimo, mostrando algumas condições necessárias e suficientes de otimalidade. Além disso, buscamos aplicar resultados sobre otimização dinâmica com aplicação de controle em um estudo de caso relacionado à otimização do processo de produção de uma lavoura, a partir do controle de plantas daninhas. Como visto, esse estudo de caso também apresentou um modelo de otimização estático, o qual foi comparado com o modelo dinâmico.

Estudos relacionados à utilização de ferramentas matemáticas para resolver problemas ligados à produção agrícola têm aumentado significativamente nos últimos anos no Brasil. A implementação de tecnologias na produção agrícola caracteriza a agricultura de precisão. Nesse trabalho apresentamos umas das formas de utilizar a matemática para buscar melhoras nos resultados de produção, visando assim tornar o processo de produção cada vez mais viável economicamente. É importante lembrar que, ao otimizarmos o processo de aplicação de herbicida numa determinada lavoura, um processo de melhor utilização do produto químico está em curso, o que gera benefícios ao meio ambiente.

Uma proposta de continuação desse trabalho, é acrescentar variáveis relacionadas à controles biológicos da planta daninha ao modelo de otimização. Note que no modelo apresentado, a única forma de controle é o produto químico. Incluindo formas alternativas de controle de pragas vegetais ao modelo, criamos a oportunidade de diminuirmos os efeitos ambientais causados pela prática de controle por herbicidas.

Enfim, espero ter apresentado um material claro e objetivo, e que possa servir de referência para trabalhos futuros.

Apêndice A

Equações Diferenciais e Sistemas Dinâmicos: Conceitos Básicos

A.1 Introdução à Equações Diferenciais

Muitos dos problemas significativos e importantes da engenharia, das ciências físicas e das ciências sociais, quando formulados matematicamente, requerem a determinação de uma função que satisfaça uma equação contendo derivadas da função incógnita. Tais equações são denominadas *equações diferenciais*.

Nesta secção faremos uma breve apresentação sobre equações diferencias ordinárias (EDO's) e parciais (EDP's). Vejamos primeiramente alguns exemplos de EDO's.

$$y' = 4x + 1 \tag{A.1}$$

$$y' + y = 5x \tag{A.2}$$

$$y'' + (y')^2 = 2x \tag{A.3}$$

Nosso objetivo é obter a função $y = f(x)$ que satisfaça a equação diferencial. No exemplo (A.1) temos que $y = 2x^2 + x$ é solução de $y' = 4x + 1$.

A *ordem* da equação diferencial ordinária é a derivada de maior ordem contida na equação. Assim, as equações (A.1) e (A.2) são equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, e a equação (A.3) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Generalizando, a

equação

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{A.4}$$

é uma equação ordinária de ordem n. A equação (A.4) representa a relação entre a variável x e a n-ésima

Caso Contínuo

Considere neste momento $T = \mathbb{R}$. Sendo assim, a função θ_t é chamada de *fluxo*. Note que a definição dada acima implica que existe uma função inversa θ_{-t} para cada t (basta tomar $s = -t$ em (b)). Vejamos um exemplo de sistema dinâmico.

Exemplo A.1 *Seja A um operador linear definido num espaço vetorial E. Tome $E = X$ e $\theta : \mathbb{R} \times X \to X$ definida por $\theta(t, x) = e^{tA}x$. Assim, $\theta_t : X \to X$ pode ser representada por $\theta_t = e^{tA}$. É fácil observar que $\theta_0 = e^0 = id$, e desde que $e^{s+t} = e^{tA}e^{sA}$, temos definido um sistema dinâmico em E.*

Este exemplo está relacionado à equação diferencial $dx/dt = Ax$. Um sistema dinâmico θ_t em geral dá origem a uma equação diferencial, que é, um campo vetorial sobre X, $f : X \to E$. Neste caso X é tomado como um conjunto aberto do espaço vetorial E. Sendo assim, f pode ser definida por

$$f(x) = \frac{d\theta_t(x)}{dt}\Big|_{t=0}; \tag{A.7}$$

assim, para $x \in X$, $f(x)$ é um vetor em E o qual pode ser interpretado como um vetor tangente à curva $t \to \theta_t(x)$ com $t = 0$. Sendo assim, todo sistema dinâmico dá origem a uma equação diferencial, (Hirsch e Smale, 2003).

Existe uma forma mais convencional de escrever o sistema (A.7). Se $\theta_t : X \to X$ é um sistema dinâmico e $x \in X$, seja $x(t) = \theta_t(x)$ e $f : X \to E$ como definida em (A.7). Então, podemos reescrever (A.7) como

$$\dot{x} = f(x). \tag{A.8}$$

Dessa forma, $x(t)$ ou $\theta_t(x)$ é solução de (A.8) satisfazendo a condição inicial $x(0) = x$. Observe que da forma que está representada a equação (A.8), a função f não dependerá do tempo t. Equações desse tipo são chamada de *equações autônomas*.

Um tópico relevante no estudo de sistemas dinâmicos é a determinação do *espaço de estados*, ou *espaço de fases* do sistema. Um espaço de fases é um espaço n-dimensional, cujos eixos coordenados são os eixos $x_1,\ x_2, \ldots x_n$. Um estado é representado como um ponto com coordenadas $x_1(t),\ x_2(t), \ldots x_n(t)$ nesse espaço. A evolução temporal desse ponto pode ser determinada pelo sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

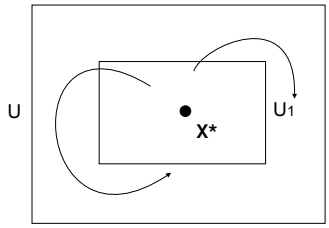

Figura A.1: Estabilidade em x^*

onde $x = (x_1,\ x_2, \ldots, x_n)$ e $f = (f_1,\ f_2, \ldots, f_n)$. As variáveis dependentes x_i são chamadas de *variáveis de estado.* As funções f_i definem o *campo de velocidade* desse sistema (Monteiro, 2002).

Chama-se *retrato de fases* o conjunto de curvas obtidas pela evolução temporal do sistema a partir de todas as condições iniciais nas quais as funções f_i são definidas.

Vejamos agora alguns resultados sobre a estabilidade de sistemas dinâmicos de tempo contínuo. Considere uma equação diferencial da forma

$$\dot{x} = f(x), \quad f : X \to \mathbb{R}^n, \quad X \subset \mathbb{R}^n \text{ aberto.} \tag{A.9}$$

Suponha que f é de classe C^1. Um ponto $x^* \in X$ é chamado de um *ponto de equilíbrio* de (A.10) se $f(x^*) = 0$.

Um ponto de equilíbrio pode ser classificado como *estável* ou *instável.* Veremos a seguir algumas definições relacionadas à estabilidade dos pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico de acordo com Lyapunov.

Definição A.1 *Seja $x^* \in X$ um ponto de equilíbrio da equação diferencial*

$$\dot{x} = f(x),$$

onde $f : X \to E$ é de classe C^1, e $X \in E$ aberto. Então, x^* é um ponto de equilíbrio estável se para toda vizinhança U de x^* em X existe uma vizinhança U_1 de x^* em U, tal que toda solução $x(t)$, com $x(0) \in U_1$, está definida e contida em U. (Veja a Figura A.1.)

Definição A.2 *Se U_1 poder ser escolhido de forma que, além das propriedades descritas na Definição A.1, $x(t) \to x^*$, quando $t \to \infty$, então x^* é chamado de ponto de equilíbrio assintoticamente estável. (Veja a figura A.2.)*

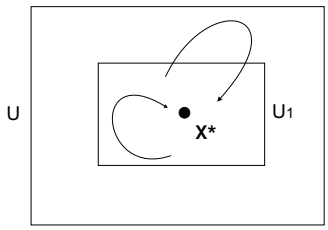

Figura A.2: Estabilidade Assintótica em x^*

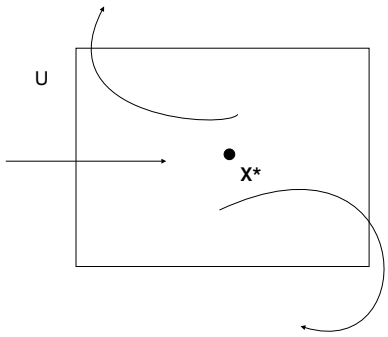

Figura A.3: Instabilidade em x^*

Definição A.3 *Um ponto de equilíbrio x^* que não é estável é chamada de ponto de equilíbrio instável. De forma geral, existe uma vizinhança U de x^* tal que para toda vizinhança U_1 de x^* em U, existe pelo menos uma solução $x(t)$ iniciando em $x(0) \in U_1$, a qual não pertence inteiramente a U. (Veja a figura A.3.)*

Um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico pode ser estável mas não assintoticamente estável. Em exemplo disto é a equação linear $x' = Ax$, onde A tem auto valor imaginário puro, com ponto de equilíbrio $x = 0$.

Um teorema importante relacionado à classificação do ponto de equilíbrio quanto a sua estabilidade é dado a seguir.

Teorema A.1 *Seja $X \subset E$ um aberto, e $f : X \to E$ continuamente diferenciável. Suponha $f(x^*) = 0$ e x^* um ponto de equilíbrio estável da equação*

$$\dot{x} = f(x).$$

Então nenhum auto valor de $Jf\big|_{x^*}$ tem parte real positiva.

Dizemos que um ponto de equilíbrio é *hiperbólico* se $Jf\big|_{x^*}$ não possui auto valor com parte real nula.

Uma outra forma de classificarmos os pontos de equilíbrio é através da *funções de Liapunov*. Mais detalhes podem ser encontrados em Monteiro (2002) e Hirsch e Smale (2003).

D.M. Grobman, em 1959, e P. Hartman em 1963, provaram independentemente que, na vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico, um sistema não linear de dimensão n apresenta um comportamento qualitativamente equivalente ao sistema linear correspondente. O teorema de Hartman-Grobman garante uma equivalência topológica orbital entre os retratos de fases do sistema dinâmico não linear e do respectivo sistema linearizado, em torno do ponto de equilíbrio. Se o ponto de equilíbrio é não-hiperbólico, ou seja, se há algum autovalor com parte real nula, então a linearização não permite predizer a estabilidade do sistema não linear (Monteiro, 2002).

Caso Discreto

Suponha agora que $T = \mathbb{Z}$, ou seja, estamos trabalhando com sistemas representados em termos de equações de tempo discreto. O uso de equações desse tipo é adequado quando tais grandezas só podem variar em determinado instantes, regularmente espaçados. Um exemplo clássico são as aplicação financeira cujos rendimentos são creditados somente uma vez por mês.

Geralmente, é mais fácil solucionar sistemas de tempo discreto do que sistemas de tempo contínuo, pois, podemos resolver o primeiro caso calculando somas e produtos, enquanto que os segundos são resolvidos através de integrais, uma operação matemática bem mais complicada.

A evolução do sistema de tempo discreto é dado pela seguinte relação

$$x_{t+1} = f(x_t). \tag{A.10}$$

onde x_{t+1} é a variável de estado no tempo $t+1$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1. Podemos determinar uma órbita (ou trajetória) a partir de uma seqüência de pontos gerados pela sucessiva aplicação de f, dado uma condição inicial x_0.

Ainda neste apêndice falaremos da determinação dos pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico de tempo contínuo e discreto. Afim de adiantarmos este tema, podemos determinar um ponto de equilíbrio, x^*, do sistema discreto dado por (A.10) impondo a seguinte relação

$$x^* = f(x^*).$$

Muitas vezes é impossível obter soluções analíticas exatas de equações diferenciais não lineares. Porém, sob determinadas condições, um sistema não linear pode ser aproximado,

em torno de um ponto de equilíbrio, por um sistema linear (Teorema de Hartman-Grobmam), (Monteiro, 2002). Tal procedimento é conhecido como *linearização*.

A.2.1 Linearização e Estabilidade Local de Um Ponto de Equilíbrio

Nesta seção trataremos da estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico de tempo discreto. Considere o sistema dinâmico (A.10).

Para uma equação de tempo discreto de ordem n, o ponto equilíbrio x^* é calculado impondo que:

$$x_{t+n} = x_{t+n-1} = \ldots = x_{t+1} = f(x_t) = x^*.$$

As soluções de equilíbrio de sistema sistema discreto da forma (A.10) são os valores x^* tais que $f(x^*) = x^*$. A estabilidade de x^* é estudada analisando o comportamento das sucessivas iterações que partem de um ponto x_k localizado numa vizinhança de x^*. Se a seqüência de pontos obtida aproxima-se de x^*, então esse ponto é assintoticamente estável; se a seqüência se afasta, x^* é instável.

Seja x_k um ponto numa vizinhança de x^*, isto é:

$$x_t = x^* + \sigma_t$$

com $|\sigma_t| = |x_t - x^*| \lll 1$. Se o ponto x_{t+1}:

$$x_{t+1} = f(x_t) = f(x^* + \sigma_t)$$

está mais próximo de x^*, então x^* é assintoticamente estável; se está mais afastado, x^* é instável. O ponto x_{t+1} pode ser escrito como:

$$x_{t+1} = x^* + \sigma_{t+1}.$$

Dessa maneira, a estabilidade de x^* é determinada comparando-se a distância $|\sigma_{t+1}|$ com a distância $|\sigma_t|$. Se $|\sigma_{t+1}| < |\sigma_t|$, x^* é assintoticamente estável; se $|\sigma_{t+1}| > |\sigma_t|$, instável.

Supondo que a distância $|\sigma_t|$ seja pequena. Expandindo $f(x_t)$ em torno de x^*, e tomando apenas até o termo linear dessa expansão, obtém-se:

$$f(x_t) = f(x^* + \sigma_t) \backsimeq f(x^*) + \frac{df}{dx}\Big|_{x=x^*}\sigma_t + \mathcal{O}(\sigma_t)^2.$$

Levando em consideração que $f(x_t) = x_{j+1} = x^* + \sigma_{t+1}$, a expressão anterior pode ser simplificada para:

$$\sigma_{j+1} = \lambda \sigma_t$$

onde λ é dado por:

$$\lambda = \frac{df}{dx}\Big|_{x=x^*}$$

Portanto, $|\sigma_{t+1}| < |\sigma_t|$ implica $-1 < \lambda < 1$, o que corresponde à estabilidade assintótica. Analogamente, $|\sigma_{t+1}| > |\sigma_t|$ implica $\lambda > 1$ e $\lambda < -1$, o que corresponde à instabilidade.

Se $\lambda = +1$ ou $\lambda = -1$, e f uma função não linear, então não se pode determinar a estabilidade de x^* por esse método. Para resolver um problema desse tipo, pode-se utilizar o *método direto de Lyapunov* ou a *teoria da variedade central*, (Monteiro, 2002).

De forma geral, em um sistema linear, o único ponto fixo x^* é assintoticamente estável quando o módulo do autovalor relacionado ao sistema dinâmico é menor que 1. Se o autovalor tem módulo maior que 1, o ponto de equilíbrio é instável. Para sistemas não lineares basta aplicar o Teorema de Hartman-Grobman, (Monteiro, 2002). Vamos formalizar tal resultado pela proposição e o teorema a seguir.

Proposição A.1 *O sistema dinâmico $x_{t+1} = f(x_t)$ é localmente estável em torno do ponto de equilíbrio x^* se, e somente se*

$$\left|\frac{dx_{t+1}}{dx_t}\Big|_{x^*}\right| < 1$$

Teorema A.2 (Teorema de Hartman-Grobman) *O comportamento de um sistema dinâmico não linear da forma $x_{t+1} = f(x_t)$ em uma vizinhança de um ponto de equilíbrio x^* é topologicamente equivalente ao comportamente de um sistema linear $x_{t+1} = f'(x^*)x_t$, desde que $|f'(x^*)| \neq 1$.*

Apêndice B

Introdução ao Método de Lagrange

B.1 O Multiplicador e o Método de Lagrange

Vamos introduzir o método de Lagrange para resolução de problemas de otimização não-linear. Este método é utilizado para resolver problemas de otimização com restrições de igualdade do tipo

$$\max f(x) \tag{B.1}$$

$$\text{sujeito a} \qquad g(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{B.2}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função não linear e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a restrição do problema. Vamos nos restringir aqui a $x \in \mathbb{R}^2$, ou seja $x = (x_1, x_2)'$, $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$.

Interpretação geométrica do problema

Antes de explicar e justificar o método de Lagrange, vamos fazer uma pequena interpretação geométrica do problema descrito pelas equações (B.1) e (B.2). Considere a superfície tridimensional

$$z = f(x_1, x_2). \tag{B.3}$$

Observe que, com a ausência da restrição (B.2) podemos percorrer livremente a superfície afim de determinar algum ponto estacionário, e particularmente, o "maior" deles, veja a Figura B.1. Por outro lado, se impormos a restrição (B.2) ao problema, estaremos restringindo o nosso movimento à um certo caminho dentro desta superfície. Este caminho é

definido como a intersecção da superfície (equação (B.3)) com a restrição (uma curva, neste caso) definida pela equação (B.2).

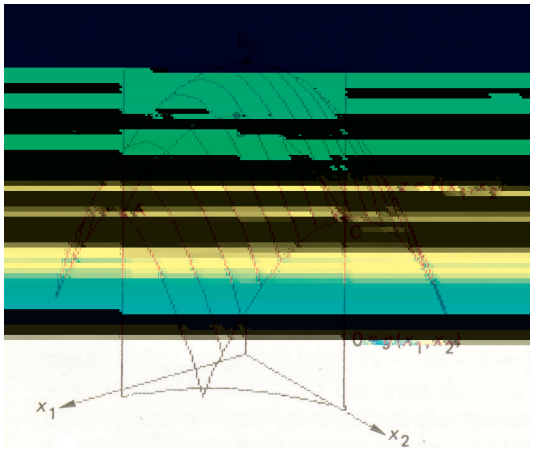

Figura B.1: Superfície sem restrição

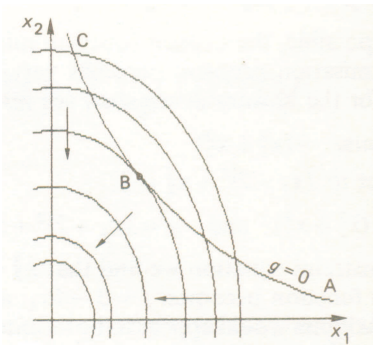

Figura B.2: Superfície com restrição

O maior valor de f para o problema definido pelas equações (B.1) e (B.2), é o maior valor alcançado sobre o caminho determinado (ponto B), e não é necessariamente o maior valor da superfície (B.3) (ponto B_0). Veja a Figura B.1.

Afim de uma melhor representação geométrica do problema, vamos projetar a superfície (B.3) sobre a plano (x_1, x_2) através dos mapas das suas cursas de nível (ou contornos). A restrição é sobreposta como a curva neste plano obtida pela relação $g(x_1, x_2) = 0$. Veja a Figura B.2.

O ponto B, o ponto mais alto sobre o caminho, é um exemplo de um *ponto estacionário restrito*, definido como o ponto no qual um curva de nível de f toca a curva de restrição. Um ponto estacionário não é necessariamente um ponto de máximo do problema, pois pode ser um ponto de mínimo (Figura B.3) ou ainda um ponto de inflexão (Figura B.4).

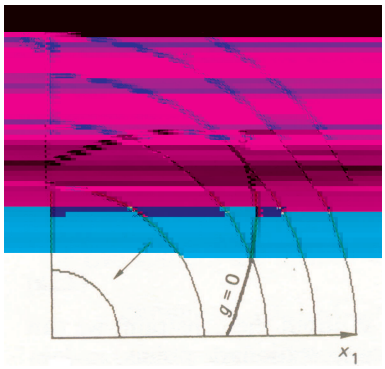

Figura B.3: Ponto de mínimo

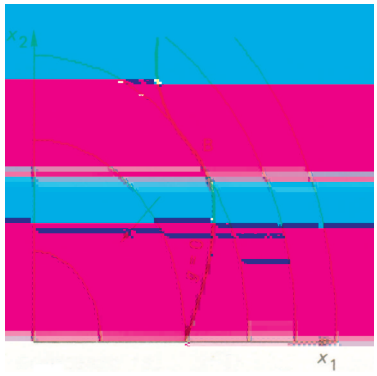

Figura B.4: Ponto de inflexão

Vejamos agora a construção do método de Lagrange para este problema.

O Método do Multiplicador de Lagrange

Considerando os resultados de cálculo diferencial para funções de duas variáveis com relação às derivadas direcionais da superfície $z = f(x_1, x_2)$, e sabendo que o gradiente de f num ponto estacionário é nulo (Pinto e Morgado, 2000), obtemos a seguinte relação:

$$\tan\theta = -\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial f}{\partial x_2}, \tag{B.4}$$

onde θ é o ângulo definido na Figura B.5. Se considerarmos o caminho de restrição como uma curva se nível de uma superfície da forma

$$w = g(x_1, x_2)$$

então, de forma análoga como feito com f, temos

$$\tan\phi = -\frac{\partial g}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial g}{\partial x_2}, \tag{B.5}$$

onde ϕ é o ângulo definido na Figura B.6. Se supormos que o caminho de restrição $g(x_1, x_2) = 0$ toque em uma curva de nível de $z = f(x_1, x_2)$, obteremos a seguinte igualdade

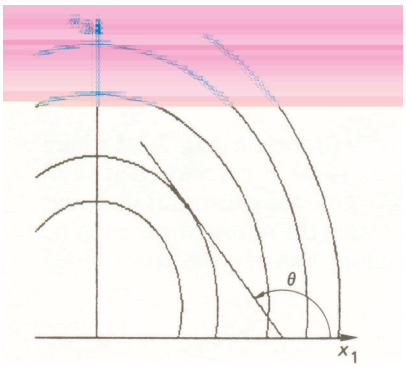

Figura B.5: Ângulo para o gradiente de f num ponto estacionário.

$$-\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{\partial g}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial g}{\partial x_2}. \tag{B.6}$$

Esta condição, juntamente com a representada pela equação (B.2) nos fornece outras duas relações para o problema de determinação do ponto estacionário. Para chegarmos a

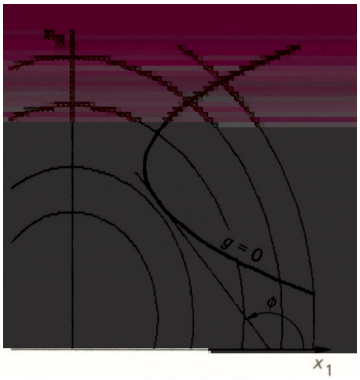

Figura B.6: Ângulo para o gradiente de g num ponto estacionário.

essas outras duas relações, faremos algumas simples manipulações sobre a equação (B.6). Os passos desta manipulação seguem abaixo.

1. Rearrange a equação (B.6) para obtermos

$$\frac{\partial f/\partial x_1}{\partial g/\partial x_1} = \frac{\partial f/\partial x_2}{\partial g/\partial x_2}.$$

2. Compare cada um dos lados a equação encontrada no passo 1 a um parâmetro ainda indeterminado

$$\frac{\partial f/\partial x_1}{\partial g/\partial x_1} = \lambda,$$
$$\frac{\partial f/\partial x_2}{\partial g/\partial x_2} = \lambda.$$

3. Rearrange os resultados obtidos em 2

$$\partial f/\partial x_1 - \lambda \partial g/\partial x_1 = 0, \tag{B.7}$$
$$\partial f/\partial x_2 - \lambda \partial g/\partial x_2 = 0. \tag{B.8}$$

4. Defina a função L da seguinte forma

$$L = f(x_1, x_2) - \lambda g(x_1, x_2),$$

então as equações (B.7) e (B.8) podem ser reescritas como

$$\partial L/\partial x_1 = 0, \tag{B.9}$$
$$\partial L/\partial x_2 = 0. \tag{B.10}$$

Estas duas equações, juntamente com a equação (B.2) formam um conjunto de equações para determinar os pontos estacionário do problema. A função L é chamada de *função de Lagrange*, λ é o *multiplicador de Lagrange* e as equações (B.9) e (B.10) são as *equações de Lagrange*.

Este resultado pode ser facilmente expandido para funções de n variáveis, e neste caso, o problema seria dado da seguinte forma.

$$\begin{aligned} & \max f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \text{sujeito a} & \\ & g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ & g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{aligned}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função não linear e as funções $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, formam o conjunto de restrições do problema.

Apêndice C

Modelos Matemáticos para o Manejo de Plantas Daninhas

C.1 Diminuindo a Dependência aos Herbicidas

Sem dúvidas, a aplicação de herbicidas nas lavouras como forma de combater as infestações por plantas daninha é a técnica mais comum no meio agrícola, a qual geral altos custos ao produtor e preocupações sobre a qualidade final do produto, pois muitos herbicidas permanecem por muito tempo em determinados alimentos mesmo sendo tratados corretamente após a colheita. Além disso, se o herbicida for aplicado de forma descontrolada pode-se gerar uma resistência da planta ao produto químico utilizado, (Powles e Shaner, 2001).

Dessa maneira geral, é interessante estudar formas de diminuir a dependência da utilização de herbicidas nas lavouras como forma de controlar as infestações por plantas daninhas. Em Doyle (1989), Doyle (1991) e Pannell (1990a), podemos encontrar modelos que visam reduzir a freqüência e as taxas de utilização dos herbicidas, os quais tentam determinar para quais níveis de infestação de plantas daninhas seriam justificáveis os custos com controle, pois dependendo da densidade da infestação não é preciso utilizar herbicidas e nem mesmo outras técnicas de controle. Modelos com essa característica são chamados de *modelos de densidade mínima*.

Fatores relacionados aos impactos ambientais podem ser incluídos nesses modelos, porém poucos estudos tratam dessa assunto. Algumas incertezas podem pairar sobre os modelos de densidade mínima, pois segundo Doyle (1997), existem três fatores principais que influenciam na determinação dessa densidade mínima, que são o tamanho da população da planta daninha, a função usada para determinarmos a perda de rendimento na colheita devido a ação

da planta daninha, e a forma da função de dose-resposta do herbicida. Além disso, deve ser observado se foi ou não utilizado alguma técnica ou aplicado algum herbicida pré-emergente no combate à planta daninha antes de semear a terra.

De forma geral, para que possamos utilizar melhor os modelos mínimos precisaríamos de mais informações a respeitos do rendimento de produção e condições para abaixar os níveis de infestação de plantas daninhas, a forma como as plantas daninhas estão distribuídas pela plantação, a variação de produção e de dose-resposta na mesma área de plantação, e do efeito de incertezas sobre o comportamento da própria planta.

Um outro fator citado anteriormente que gera preocupações é a resistência adquirida pela planta pelo herbicida aplicado. Faremos agora algumas observações de como seria possível conter ou evitar esse acontecimento.

C.2 Sobre a Resistência aos Herbicidas

Historicamente, sempre houve uma grande preocupação por parte dos produtores com respeito a erradicação das plantas daninhas nas lavouras. Para alcançar o melhor resultado possível no controle das infestações, era aplicado o herbicida de forma exagerada, sem nenhum planejamento e sem levar em consideração os efeitos colaterais gerados pelo controle químico, como por exemplo a resistência ao herbicida aplicado que as plantas poderiam vir a adquirir com o tempo.

Devido à resistência gerada por plantas daninhas a um determinado herbicida, é um tema cada vez mais comum encontrar pesquisas feitas com o intuito de desenvolver herbicidas cada vez mais poderoso para serem utilizados no controle de infestações por plantas daninhas.

Modelos matemático podem servir como ferramentas para que possamos avaliar táticas de manejo, e estudarmos a resistência aos herbicidas. Porém, na maioria das vezes, os modelos matemáticos são construídos de forma empírica, ou seja, experimentalmente, e isso significa que os modelos podem descrever o comportamento de uma população de plantas daninhas a qual está sujeita à ação de uma determinada dose de herbicida, porém, esses modelos não podem explicar de que forma a redução na população ocorre.

C.3 Competição Intra e Inter-específica

O processo de competição existente entre a lavoura e a planta daninha é um fator de

relevância dentro dos estudos de manejo de plantas daninhas na cultura agrícola. Saber de que forma a competição ocorre e quais as suas conseqüências são fatores importantíssimos. Baseado no artigo Park et al. (2003) farei uma apresentação sobre competição intra e inter-específica mostrando alguns modelos relacionados ao assunto.

Competição intra-específica trata da competição entre seres da mesma espécies. Já na competição inter-específica, temos uma relação entre espécies diferentes (planta daninha versus cultura, por exemplo). Vejamos então o que o trabalho citado a pouco nos fala sobre esses tipos de competição.

Competição Intra-específica

Muitos dos estudos feitos atualmente sobre competição intra-específica são baseados em artigos publicados nas décadas de 50 e 60 por um grupo de Japoneses (Yoda et al., 1963). Esses artigos identificam três efeitos principais resultantes deste tipo de competição em monoculturas: o efeito densidade-competição, no qual a planta tem o seu tamanho médio diminuído fazendo com que a densidade aumente; o efeito de alteração no tamanho dos indivíduos da população, fazendo com que as plantas se desenvolvam de formas diferentes, e assim gerando uma hierarquia determinada pelo tamanho; e por fim, a mortalidade de plantas dependendo da densidade, conhecido como o feito de auto diluição. Este último efeito não é citado no trabalho (ver Yoda et al. (1963)), pois em uma situação agronômica as combinações de tamanho e densidade, onde o efeito de auto diluição aconteceria, raramente ocorre (Enquist et al., 1998).

O feito densidade-competição

Ainda de acordo com o artigo, os primeiros estudos sobre monoculturas despertaram interesses nos pesquisadores com relação ao desenvolvimento da planta relacionado com sua densidade. As baixas geradas no desenvolvimento das plantas devido a competitividade relacionada à densidade foram descritas por uma equação (Watkinson, 1980) da forma

$$w = w_s(1 + aN)^{-b} \tag{C.1}$$

onde w é o peso médio da planta, N é a densidade de planta na terra, w_s é o peso seco médio de uma planta isolada num determinado tempo, e a e b são parâmetros, (Watkinson, 1980).

Este modelo tem sido usado com sucesso para descrever a relação entre a densidade de planta e o rendimento da colheita em monoculturas, e está relacionado com os processos de

densidade-competição.

Competição Inter-específica

Quando a competição inter-específica é citada em estudos ligados à agronomia, geralmente está relacionada a uma planta daninha e uma planta cultivada. Muitos estudo têm sido feitos para determinar os efeitos da competição entre espécies diferentes, e normalmente, têm como base projetos experimentais e análises estatísticas (Freckleton e Watkinson, 2000). Em Park et al. (2003) é apresentado três formas diferentes de quantificar a competição inter-específica, mas nesta revisão discutirei apenas o Projeto Aditivo, o qual reflete melhor o cenário de competição da planta daninha com a cultura.

Projeto Aditivo

O projeto aditivo trata de experimentos onde a densidade e a proporção de cada espécie diferem. Dentro deste projeto encontramos uma formulação simples e bastante aplicada no contexto agrícola, chamada de projeto aditivo parcial, que permite que a densidade de uma espécie seja considerada constante enquanto a densidade da segunda espécie é variada segundo uma escala. Este projeto favorece o estudo da competição entre plantas daninhas e a lavoura, embora os dados gerados possam fornecer somente um retrato limitado da interação entre as espécies, porque não fornecem nenhuma informação do efeito da lavoura sobre a planta daninha. Uma formulação do modelo hiperbólico que é usado para descrever os danos ao rendimento da colheita causado pela competição das plantas daninhas é dado por Cousens (1985b) da seguinte forma

$$Y_L = \frac{ID}{I + \frac{ID}{A}}. \tag{C.2}$$

Onde Y_L é a porcentagem de rendimento perdido na lavoura devido a ação da planta daninha, D é a densidade de planta daninha que influencia o rendimento, I é a porcentagem de rendimento perdido por unidade de área quando a densidade de planta daninha é muito pequena, e A é a estimativa do máximo rendimento perdido numa lavoura cheia de plantas daninhas relativo ao rendimento de uma colheita livre de plantas daninhas.

Esta equação pode ser modifica afim de levar em consideração o tempo de emergência entre a cultura e a planta daninha. Cousens et al. (1987) apresentou uma formulação desse

tipo:

$$Y_L = \frac{bD}{e^{cT} + \frac{bD}{A}} \tag{C.3}$$

onde T é o tempo entre a emergência da cultura e da planta daninha e a, b e c são parâmetros.

Park et al. (2002) apresenta um modelo de regressão que permite quantificar ambas as competições intra e inter-específica quando analisadas entre duas espécies. De forma geral, o modelo apresentado em (C.1) pode ser expandido para quando temos duas espécies diferente de plantas da seguinte forma

$$w_i = w_{s,i}(1 + \sum \beta_{ij} N_j)^{-b} \tag{C.4}$$

onde w é o peso médio da planta, w_s é o peso seco médio da planta isolada num determinado tempo e β representa os efeitos em cada planta da competição intra (β_{ii}) e inter-específica (β_{ij}) (Watkinson, 2004).

Projetos e Análises Experimentais

Uma pergunta freqüente, é como podemos obter os quantificadores de um processo de competição. Os projetos e análises de experimentos são as melhores formas para responder a essa pergunta, entretanto, há uma grande discussão sobre qual o melhor projeto a ser aplicado. Freckleton e Watkinson (2000) argumentaram que esses quantificadores do processo de competição podem variar dependendo do projeto e método utilizado para medi-los. Não existe, entretanto, um consenso sobre um projeto ou método a ser utilizado, pois os objetivos e particularidades de cada estudo e espécies podem variar muito.

Estes estudos servem para que possamos discutir cada vez mais como o processo de competição influi no rendimento final de uma colheita, e de que forma os aspectos ambientais, como solo, clima, quantidade de chuva, entre outros, podem afetar o rendimento final da colheita e o desenvolvimento da planta daninha.

C.4 Manejo Integrado de Plantas Daninhas

Muitos dos estudos relacionados ao controle de plantas daninhas na agricultura buscam diminuir a dependência sobre os herbicidas. Uma alternativa para alcançarmos esse objetivo, é utilizarmos do Manejo Integrado de Plantas Daninhas. Esse é o nome dado à aplicação de outras técnicas e estratégias de controle juntamente com a aplicação de herbicidas, agora

à uma taxa menor do que quando utilizamos somente o produto químico (Swanton e Weise, 1991). Existem diversas estratégias que podem ser adotadas com este fim, como por exemplo, o manejo preventivo, o manejo cultural, utilização de máquinas e o manejo biológico (Seção 2.1). É importante salientar que, mesmo utilizando destas técnicas, dificilmente conseguiremos dispensar totalmente o uso de herbicidas.

Modelos matemáticos também são utilizados para estudar de que forma podemos combinar técnicas de manejo de plantas daninha com o objetivo de traçar boas estratégias de controle. Porém, só a pouco tempo é que foi dada maior importância à utilização dos modelos matemático nessa área. Na maioria dos casos, os modelos matemáticos servem apenas para avaliar os riscos econômicos decorrentes da utilização de outras técnicas, como o manejo biológico e o controle genético, (Pandey e Medd, 1990; Volker e Boyler, 1994).

Referências Bibliográficas

Aguirre, L. A. (2004). *Introdução à Identificação de Sistemas, Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*, Editora UFMG, Belo Horizone, MG.

Auld, B. A. e Tisdell, C. (1987). Economic threshold and response to uncertainty in weed control, *Agricultural Systems* (25): 219–127.

Bellman, R. (1957). *Dymanic Programming*, Princeton University Press, Priceton, NJ.

Bertsekas, D. (1999). *Nonlinear Programming. 2a ed.*, Athena Scientific, Belmont, MA.

Bressan, G. M., Koenigkan, L. V., Oliveira, V. A., Cruvinel, P. E. e Karam, D. (2006a). Sistema de sistema de classificação fuzzy para o risco de infestação por plantas daninhas considerando a sua variabilidade espacial, *Planta Daninha* **24**(2): 229–238.

Cacho, O. J. (1998). Solving bioeconomic optimal control models numerically, *Workshop (Post-Australian Agricultural and Resource Economics Society Conference)* pp. 13–26.

Cacho, O. J., Wise, R. M., Hester, S. M. e Sinden, J. A. (2004). Weed invasions: To control or not control?, *Working Paper Series in Agricultural and Resource Economics* .

Campos, J. R. (2005). *Uma abordagem para problemas de conrole Ótimo via métodos de runge-kutta e análise de erro*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Biociência, Letras e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, SP.

Cesari, L. (1983). *Optimisation Theory and Applications. Problems with Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, Los Angeles, CA.

Chryssoverghi, I., Coletsos, J. e Kokkinis, B. (2004). Approximate gradient projection method with runge-kutta schemes for optimal control problems, *Computational Optimization and Applications* **29**: 91–115.

Cousens, R. (1985a). An empirical model relating crop yield to weed crop density and a statistical comparison with other models, *Journal of Agricultural Science* **105**: 513–521.

Cousens, R. (1985b). A simple model relating yield loss to weed density, *Annals of Applied Biology* **107**: 239–252.

Cousens, R., Brian, P., J.T., O. e A., O. (1987). The use of biologically realistic equations to describe the effects of weed density and relative time of emergence on crop yield, *Weed Science* **35**: 720–725.

Dorfman, R. (1969). An economic interpretation of optimal control theory, *American Economic Review* **59**(5): 817–31.

Doyle, C. J. (1989). Modelling as an aid to weed control management, *British Crop Protetion Council* pp. 937–942.

Doyle, C. J. (1991). Mathematical models in weed management, *Crop Prot.* **10**: 432–444.

Doyle, C. J. (1997). A review of the use of models of weed control in integrated crop protection, *Agriculture Ecosystems Environment 64* pp. 165–172.

Enquist, B., Brown, J. e West, G. (1998). Allometric scaling of plant energetics and population density, *Nature* **395**: 163–165.

Freckleton, R. e Watkinson, A. (2000). Desings for greenhouse studies of iteractions between plants: an analytical perspective, *Journal of Ecology* **88**: 386–391.

Fryer, M. e Greenman, J. (1987). *Optimisation Theory. Aplications in OR and Economics*, Edward Arnold Ltd, London, UK.

Griesse, R. e Walther, A. (2004). Evaluating gradients in optimal control: Continuous adjoints versus automatic differentiation, *Journal of Optimization Theory and Applications* **122**(1): 63–86.

Hager, W. W. (2000). Runge-kutta methods in optimal control and the transformed adjoint system, *Numerische Mathematik* **87**: 247–282.

Hirsch, M. W. e Smale, S. (2003). *Diferential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Elsevier Science, San Diego, CA.

Jones, R. (2005). Sustainability and integrated weed management in australian winter cropping systems: A bioeconomic analysis, *Paper Presented to the 49th Annual Conference of the Australian Agricultural and Resource Economic Society* **2**: 1–15.

Jones, R. e Cacho, O. J. (2000). A dynamic optimisation model of weed control, *Agricultural and Resource Economics* (1): 1–17.

Kennedy, J. O. (1988). Principles of dynamic optimization in resource management, *Agricultural Economics* **2**: 57–72.

Kennedy, J. O. S. (1986). *Dynamic Programming: Applications to Agriculture and Natural Resources*, Elsevier, New York, NY.

Kumar, V. (1976). A control averaging technique for solving a class of singular optimal control problems, *Int. J. Control* **23**(3): 361–380.

Loewen, P. (2006).

Lorenzi, H. (2000a). *Manual de Identificação e de Controle de Plantas Daninhas: Plantio Direto e Convencional*, Instituto Plantarum de Estudos da Flora Ltda, Nova Odessa, SP.

Lorenzi, H. (2000b). *Plantas Daninhas do Brasil: Terrestre, Aquáticas, Parasitas e Tóxicas*, Instituto Plantarum de Estudos da Flora Ltda, Nova Odessa, SP.

Monteiro, L. H. A. (2002). *Sistemas Dinâmicos*, Editora Livraria da Física, São Paulo, SP.

M.S. Bazaraa, H. S. e Shetty, C. (1993). *Nonlinear Programming. 2a ed.*, Editora John Wiley and Sons, Hoboken, NJ.

Pandey, S. e Medd, R. (1990). Integration of seed and palnt kill tactics for control of wild oats: An economic evaluation, *Agricultural Systems 34* **1**: 65–76.

Pannell, D. J. (1990a). An economic response model of herbicide application for weed control, *Australian Journal of Agricultural Economics* **34**(3): 223–241.

Park, S., Benjamin, L. e Watkinson, A. (2002). Comparing biological productivity in cropping systems: A competition approach, *Journal of Applied Ecology* **39**: 416–426.

Park, S. E., Benjamin, L. R. e Watkinson, A. R. (2003). The theory an aplication of plant competition models: an agronomic perspective, *Annals of Botany 92* pp. 741–748.

Pinto, D. e Morgado, M. C. F. (2000). *Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis*, Editora UFRJ, Rio de Janeiro, RJ.

Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. H., Gamkrelidze, R. V. e Mishchenko, E. F. (1965). *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, John Wiley, New York, NY.

Powles, S. e Shaner, D. (2001). *Herbicide Resistence and World Grains*, CRC Press, London, UK.

Raggett, G. (1977). An efficient gradient technique for the solution for optimal control problems, *Computer Methods in Applied Machanics and Engineering* **12**: 315–322.

Runge, C. (1905). Über die numerische auflösung totaler differentialgleichungen, *Nachr. Gesel. Wiss.* pp. 252–257.

Sakr, L., Luetkemeyer, L. e Rafikov, M. (2001). Controle Ótimo de pragas em vários estágios do seu desenvolvimento, *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional* **2**(1): 203–212.

Schwartz, A. L. (1996). *Theory and implementation of numerical methods based on runge-kutta integration for solving optimal control problems*, Dissertação de Mestrado, University of California, Berkeley, CA.

Swanton, C. e Weise, S. (1991). Integrated weed management: The rationale and approach, *Weed Technologic* **5**: 657–663.

Volker, K. e Boyler, C. (1994). Bean rust as a model system to evaluate efficiency of teliospore induction, especially the potential mycoherbicide puccinia punctiformis, *Weed Res.* **34**: 275–281.

Watkinson, A. (1980). Density dependence in single species populations of plants, *Journal of Theoretical Biology* **83**: 345–357.

Watkinson, A. R. (2004). *Plant Response to Crowding*, Editora UFMG, Belo Horizone, MG.

Y.A., K. (1998). *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag.

Yoda, K., Kira, T., Ogawa, H. e Hozumi, K. (1963). Self-thinning in overcrowded pure stands under cultivated and natural conditions (intraspecific competition among higher plants xi), *Journal of Biology, Osaka City University* **14**: 107–129.

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo