unesp
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DE COMPUTAÇÃO E ESTATÍSTICA

Hipercomplexos: um estudo da analiticidade e da hiperperiodicidade de funções octoniônicas

José Antônio Pires Ferreira Marão

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Rua Cristovão Colombo, 2265
15054-000 - São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (017) 3221-2444
Fax: (017) 3221-2445

Hipercomplexos: Um estudo da Analiticidade e da Hiperperiodicidade de Funções Octoniônicas

José Antônio Pires Ferreira Marão [1]

Dissertação a ser apresentada no Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof.º Dr.º Manoel Ferreira Borges Neto

São José do Rio Preto
Março de 2007

[1]contato: josemarao@yahoo.com.br

O importante é isso: Estar pronto para, a qualquer momento, sacrificar o que somos pelo que poderíamos vir a ser.

Charles Du Bois

A Deus.

Aos meus pais.

A minha tia Ana Maria.

A minha avó Maria Braga *(in memorian)*.

Aos meus amigos

Dedico.

Agradecimentos

A Deus, por tudo.

Aos meus pais, Maria Izabel Pires Ferreira Marão e Antônio Carlos de Castro Marão pelo apoio, e incentivo.

A Camila Marinho Penha, por ter estado sempre ao meu lado.

A minha tia Ana Maria Pires Ferreira Lima, e minhas irmãs, pelas oportunidades.

Aos professores Benedito dos Santos Raposo, Hilkias Jordão de Souza e João Coelho Silva Filho, pelos ensinamentos.

Ao Prof.º Dr.º Masayoshi Tsuchida, pelos conhecimentos a mim transmitidos.

Aos meus amigos de república, Nilton Delbem, Fernando Rafaeli, Pedro Alexandre, Reginaldo Izelli e Pedro Cardin.

As minhas amigas Cristiane Aparecida Pendeza e Ana Carolina Oliveira, pela ajuda e incentivo.

Aos meus amigos pós-graduandos do DCCE e do Departamento de Matemática do IBILCE.

Um agradecimento especial ao Prof.º Dr.º Manoel Ferreira Borges Neto, pelo incentivo e principalmente por todos os ensinamentos.

Ao CnPq pelo auxílio finaceiro.

Resumo

Com o intuido de bem fundamentar bases teóricas para futuras aplicações dos octônios à Mecânica Quântica, Computação Quântica e Criptografia, um dos objetivos maiores deste trabalho é o de determinar e estudar a analiticidade e hiperperiodicidade de funções octoniônicas, de acordo com o **Teorema (3.1)**, enunciado e demonstrado apropriadamente no texto. Além disso, determina-se para as Funções Trigonométricas Octoniônicas a sua periodicidade, enunciada e demonstrada nos **Teoremas (3.2)** e **(3.3)**. Outro aspecto relevante abordado diz respeito a uma extensão octoniônica da Função Logarítmica, que pode ser importante para aplicações à Física Teórica de Várias dimensões.

Palavras-chave: Octônios, Funções Trigonométricas e Exponencial Octoniônica, Hiperperiodicidade.

Abstract

With the main purpose of setting up a sound theoretical basis in order to apply octonionic algebra to both Quantum Mechanics and Quantum Computation and Criptography, I have studied and determined the regularity of the exponential octonionic function, through the **Theorem (3.1)**. Moreover the determination of the Trigonometrical Octonionic Function is also made and it is obtained its regularity, stated in **Theorem (3.2)** and **(3.3)**. An octonionic extension of the Logaritimic Function is also well explored, which opens the possibility of a large number of applications in Theoretical Physics of higher dimensions.

Keywords: Octônios, Exponential and Trigonometrical Octoniônic Functions , Hiperegularity.

Sumário

Introdução **1**

1 Octônios **2**

1.1 Nota Histórica 2

1.2 Tópicos de Álgebra 4

1.3 Desigualdades 11

1.4 Coordenadas Esféricas 12

1.5 Noções Topológicas no Espaço dos Octônios 15

1.6 Conclusão 15

2 Funções Octoniônicas **16**

2.1 Funções Octoniônicas 16

2.2 Integração e Diferenciação em Octônios 19

3 Função Exponencial e Trigonométrica do tipo octoniônico **34**

3.1 Função Exponencial 34

3.2 Funções Trigonométricas 35

3.3 Extensão do Teorema de Moivre para octônios 38

3.4 Funções Trigonométricas 47

3.5 Logarítmo 53

3.6 Conclusão 55

Conclusão **57**

Referências Bibliográficas **58**

Introdução

O presente trabalho busca uma extensão para octônios de fatos relativos a Análise Complexa. Um desses fatos, a periodicidade da função e^z, cujo período é 2π [16], [7] é extendido para a Função Exponencial Octoniônica, e além disso, foram determinadas as Funções Trigonométricas Octoniônicas, verificando-se também a sua periodicidade nos mesmos moldes da periodicidade da Função Exponencial do tipo Octoniônico. Visando um melhor entendimento do texto, este foi dividido em três partes:

(i) Octônios.

(ii)Funções Octoniônicas.

(iii)Funções Trigonométricas e Exponencial Octoniônica.

Dessa forma, o primeiro capítulo é dedicado a aspectos da Teoria Geral dos Octônios, e no qual são determinadas desigualdades, sua forma trigonométrica, além de aspectos relativos a Topologia no espaço Octônionico. O capítulo seguinte, aborda aspectos relativos as funções octoniônicas, como regularidade além da integrabilidade e diferenciabilidade dessas funções. No último capítulo determina-se da Função Exponencial Octoniônica, além da Função Trigonométrica do tipo Octoniônica. Obtém-se hiperperíodos destas funções.

Capítulo 1

Octônios

Este capítulo tem por objetivo uma apresentação dos octônios como estruturas algébricas, interpretadas como uma extensão não associativa dos quatérnios. Além de uma introdução histórica baseada em [15] e [1]. Posteriormente será apresentada uma construção para os octônios como uma álgebra de divisão normada 8-dimensional; além disso serão considerados alguns aspectos tais como desigualdades, forma trigonométrica e noções topológicas, fundamentais para o bom entendimento do texto.

1.1 Nota Histórica

O desencadeamento da teoria dos quatérnios tem início em 1815 quando um grupo de professores da Universidade de Cambridge fundaram o *Analytical Society*, que tinha como objetivo principal reformular o ensino de Cálculo, adotando noções em uso no continente. A *Analytical Society* foi muito importante, pois nela a álgebra foi repensada e discutida com maior profundidade. O ambiente de profunda abstração trazido pela Analytical Society, serviu de motivação para o matemático irlandês, **William Rowan Hamilton (1805-1865)**, sendo pois, Hamilton quem fundamentou definitivamente os números complexos como pares de números reais, ou seja (x, y). Com essa formulação fica claro que um número complexo $x + yi$ não pode ser interpretado como uma soma genuína do tipo $2 + 5$, daí o sinal $+$ não passa de um acidente histórico. Após as observações, Hamilton desenvolve a teoria de maneira formal, e define assim soma e produto de pares da seguinte forma:

$$(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w)$$

$$(x, y)(z, w) = (xz - yw, xw + yz).$$

Físico, Hamilton percebe que as suas descobertas implicam em uma álgebra que permitia trabalhar com vetores no plano, com isso ele foi levado a considerar um importante problema físico para a época que era o de desenvolver uma álgebra de ternas que daria uma linguagem para trabalhar com vetores no espaço. Hamilton trabalhou durante dez anos nesse problema. Em uma carta ao seu filho Archibald, em outubro de 1843, fica clara a obsessão de Hamilton com o referido problema:

Toda manhã, quando descia para tomar café, teu irmão William Edwin e você mesmo costumavam perguntar-me "Bem pai, você já pode multiplicar ternas?"A isso eu sempre me via obrigado a responder, com um triste balanço na cabeça "Não, eu posso somá-las e subtraí-las".

A fim de desenvolver o produto de ternas, assumiu que $i^2 = j^2 = -1$, porém a dificuldade maior não era esta e sim que valor deveria ter os produtos ij e ji, mas na tentativa de preservar a lei dos cossenos que lhe impôs a necessidade de trabalhar com uma dimensão a mais, tendo em vista que até então ele considerava as ternas sobre a forma $a + bi + cj$. Em outra carta, ao seu filho, Hamilton descreve como foi a descoberta:

No dia 16 de outubro de 1843 - que era uma segunda-feira reunião do Conselho da Real Sociedade da Irlanda - eu ia andando para participar e presidir, e tua mãe andava comigo, ao longo do Royal Canal,..., embora ela falasse comigo ocasionalmente, uma corrente subjacente de pensamento estava acontecendo na minha frente, que finalmente teve um resultado, cuja importância senti imediatamente. Pareceu como se um circuito elétrico estivesse fechado; e soltou uma faísca, o heraldo de muitos anos vindouros de pensamento trabalhos dirigidos, por mim, se poupando, e de qualquer forma por parte de outros, se eu vivesse o suficiente para comunicar minha descoberta. Nesse instante eu peguei uma libreta de anotações que ainda existe e fiz um registro naquela hora. Não pude resistir ao impulso - tão não filosófico como possa ser - de gravar com um canivete numa pedra de Brougham, quando a cruzamos, a fórmula fundamental dos símbolos i, j, k,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

que contém a solução do problema.

Assim, definida a multiplicação da forma citada acima,o conjunto dos quatérnios constitui o primeiro exemplo de anel não comutativo com divisão. No dia seguinte, 17 de outubro de 1843, Hamilton escreve para o seu amigo Jhon T. Graves e comunica-lhe sobre a descoberta, mas e em dezembro do mesmo ano, Gaves descobriu a álgebra de dimensão 8, os octônios. Com essa descoberta vem uma diferença fundamental: a associatividade valia para quatérnios, mas não valia para octônios, fato observado por Hamilton em julho de 1844.

No dia 26 de dezembro de 1844, Graves escreve para Hamilton afirmando ter descoberto uma nova álgebra 8-dimensional, mostrando que esta forma uma álgebra de divisão normada, e a usou para expressar o produto de duas somas de oito quadrados perfeitos é igual a outra soma de oito quadrados perfeitos. Em 1845, de forma independente **Arthur Cayley (1821-1895)** tem a mesma conclusão obtida por Graves, por essa razão os octônios são conhecidos como *Números de Cayley.*

1.2 Tópicos de Álgebra

Visando uma melhor compreensão dos processos a serem apresentados, faz-se necessário o uso das definições da álgebra [5] que seguem:

Definição 1.1. *Consideremos uma álgebra A sobre o corpo dos reais com um espaço vetorial equipado com um mapeamento bilinear $B : A\times A \to A$, chamado "multiplicação"e o elemento neutro, denotado por 1 tal que $1 \in A$ e $B(1, x) = B(x, 1) = x$, ou ainda $B(x, y) = xy$*

Definição 1.2. ***(Grupo)*** *Seja G um conjunto não-vazio, e uma operação*

$$G \times G \to G$$

$$(a, b) \mapsto a \diamond b$$

interna em G. Dizemos então que G é um grupo em relação à essa operação se, e somente se, são satisfeitas

(G1)(propriedade associativa) $x \diamond (y \diamond z) = (x \diamond y) \diamond z, \forall x, yez \in G$

(G2) (existe elemento neutro) Existe $e \in G$, tal que $x \diamond e = e \diamond x, \forall x \in G$

(G3) (todo elemento possui inverso) $\forall x \in G, \exists x' \in G | x \diamond x' = x' \diamond x = e$

Notação: Consideremos, a operação $\diamond$, como definida acima, sendo que esta faz de G um grupo, assim, este grupo, será denotado simplesmente por $(G, \diamond)$.

Exemplo 1.1. $(\mathbb{R}^*, \cdot)$*, é um grupo.*

Definição 1.3. ***(Grupo Abeliano)*** *O grupo $(G, \diamond)$, é dito abeliano ou comutativo se, e somente se, a lei, $(a, b) \mapsto a \diamond b$, é comutativa, ou seja,*

$$x \diamond y = y \diamond x, \forall x, y \in G$$

Exemplo 1.2. $(\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$ *e* $(\mathbb{C}, +)$ *são grupos abelianos.*

Definição 1.4. ***(Quasegrupo)*** *Consideremos um conjunto Q com a operação binária $\diamond : Q \times Q \to Q$, $\exists$ únicos elementos $a, b \in Q$ de modo que*

$$a \diamond x = b$$

e

$$y \diamond a = b$$

Com isso, as únicas operação admissíveis dessas equações são $x = a \backslash b$ e $y = b/a$, onde as operações $\backslash$ e $/$ são chamadas de divisão à direita e divisão à esquerda respectivamente.

Definição 1.5. ***(Anel)*** *Seja A um conjunto não-vazio e $(a, b) \mapsto a + b$ e $(a, b) \mapsto ab$ leis de composição interna em A. Dizemos então que A é um anel se, e somente se, são válidas:*

(A1) (Associatividade da Adição) $\forall x, y, z \in A, (x + y) + z = x + (y + z)$

(A2) (Existe um elemento neutro para a adição) $\exists 0 \in A$ tal que, $\forall x \in A$, $0 + x = x$ e $x + 0 = x$

(A3) (Todo elemento de A possui inverso com respeito à adição)$\forall x \in A, \exists x' \in A$ tal que $x + x' = 0$ e $x' + x = 0$

(A4) (A Adição é comutativa) $\forall x, y \in A, x + y = y + x$

(A5) (A Multiplicação é associativa) $\forall x, y \in A, (xy)z = x(yz)$

(A6) (Existe um elemento neutro com respeito à multiplicação) $\exists 1 \in A$ tal que, $\forall x \in A, 1 \cdot x = x$ e $x \cdot 1 = x$

(A7) (A Multiplicação é comutativa) $\forall x, y \in A, x \cdot y = y \cdot x$

(A8) (A Adição é distributiva relativamente à Multiplicação) $\forall x, y, z \in A, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Notação: Consideremos as operações acima definidas, sendo que estas fazem de A um anel, este anel será denotado simplesmente por,$(A, +, \cdot)$

Se forem verificadas todas as definições acima, exceto $(A7)$, então $(A, +, \cdot)$ é chamado **anel não-comutativo.**

Exemplo 1.3. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *é um anel.*

Faz-se agora importante a definição de anel dos quatérnios, dada posteriormente, e baseada em [13].

Definição 1.6. ***(Anel dos Quatérnios)*** *Seja $\mathbb{R}^4 = \{(a, b, c, d)\ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, onde*

$$(a, b, c, d) = (a', b', c', d') \Leftrightarrow a = a', b = b', c = c', d = d'.$$

O anel $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ pode ser identificado com o anel $(\mathbb{H}, +, \cdot)$, ou seja, Anel dos Quatérnios não comutativo com a unidade.

De acordo com a definição acima, definamos agora Adição e Multiplicação em $\mathbb{R}^4$, como segue

(A) $(a, b, c, d) + (a', b', c', d') = (a + a', b + b', c + c, d + d')$

(M)$(a, b, c, d) \cdot (a', b', c', d') =$

$= (aa' - bb' - cc' - dd', ab' + ba' + cd' - c'd, ac' + a'c + db' - d'b, ad' + da' + bc' - b'c)$

onde $(0, 0, 0, 0)$ e $(1, 0, 0, 0)$ são respectivamente o zero e a unidade para o anel em questão. Sendo assim, identifiquemos:

$$1 \leftrightarrow (1, 0, 0, 0)$$

$$i \leftrightarrow (0, 1, 0, 0)$$

$$j \leftrightarrow (0, 0, 1, 0)$$

$$k \leftrightarrow (0, 0, 0, 1)$$

deste modo, $(a, b, c, d) = a + bi + cj + dk$, e assim, identificamos uma base para $\mathbb{R}^4$.

Podemos verificar que a multiplicação de quaisquer dois elementos desta base é não-comutativa. Assim, por exemplo, $ij \neq ji$, onde o produto em questão, nada mais é do que o produto vetorial desses vetores.

As definições a seguir, tornam-se essenciais para o bom entendimento das passagens futuras, sendo tais definições baseadas em [5] e [15].

Definição 1.7. ***(Álgebra com Divisão)*** *Seja A uma álgebra de divisão finita. Dizemos que A é uma álgebra de divisão se a operação de "multiplicação"pela direita e pela esquerda por algum elemento não-nulo da álgebra é inversível. Dados $x, y \in A$ de modo que $xy = 0$, temos*

$x \cdot y \cdot y^{-1} = 0,$ *então* $x = 0$ $x^{-1} \cdot x \cdot y = 0,$ *então* $y = 0$

Definição 1.8. ***(Corpo)*** *Um anel $(A, +, \cdot)$ é chamado corpo se todo elemento não-nulo de A possuir um inverso multiplicativo, ou seja,*

$$\forall x \in A \backslash 0, \exists y \in A$$

tal que

$$xy = 1$$

Definição 1.9. ***(Álgebra de Divisão Normada)*** *Seja A uma álgebra de divisão. Dizemos que A é uma álgebra de divisão normada se existe uma forma quadrática Q positivo-definida*

$$Q : A \to \mathbb{R}^+$$

$$x \to Q(x) = x^*x, \forall x, y \in A$$

$$Q(xy) = Q(x)Q(y)$$

Sendo assim, toda álgebra de divisão normada é uma álgebra de divisão, de modo que as condições de divisão seguem para as condições de norma. Suponhamos que $xy = 0 \forall x, y \in A$, então $Q(xy) = Q(x)Q(y) = 0$. Desde que o campo em questão seja o domínio dos inteiros, isso implica que $Q(x) = 0$ ou $Q(y) = 0$, o que implica que $x = 0$ ou $y = 0$.

Definição 1.10. ***(Álgebra Associativa)*** *Uma álgebra sobre um corpo arbitrário $\Im$ é um par consistindo de um anel $(A, +, \cdot, 0, 1)$ e um espaço vetorial A sobre $\Im$ de modo que no conjunto subjacente A, a adição e o elemento neutro são os mesmos no anel e espaço vetorial, e*

$$a(xy) = (ax)y = x(ay), \forall a \in \Im, x, y \in A$$

Os octônios, são uma extensão não-associativa dos quatérnios. Estes formam uma álgebra de divisão normada $8 - \textit{dimensional}$ sobre $\mathbb{R}$

Com isso, define-se o conjunto dos octônios, denotado por $\mathbb{O}$

$$\mathbb{O} = (a, b, c, d, e, f, g, h)/a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R})$$

onde, estão definidas igualdade, adição e multiplicação [15], como segue:

(i) Igualdade:

$(a, b, c, d, e, f, g, h) = (a', b', c', d', e', f', g', h') \Leftrightarrow$
$a = a', b = b', c = c', d = d', e = e', f = f', g = g', h = h'$

(ii)Adição: $(a, b, c, d, e, f, g, h) + (a', b', c', d', e', f', g', h') =$
$= (a + a', b + b', c + c', d + d', e + e', f + f', g + g', h + h')$

(iii)Multiplicação:

$(a, b, c, d, e, f, g, h).(a', b', c', d', e', f', g', h') =$
$(aa' - bb' - cc' - dd' - ee' - ff' - gg' - hh', ab' + ba' + cd' - dc' - ef' + fe' - gh' + hg', ac' - bd' + ca' + db' - eg' + fh' + ge' - hf', ad' + bc' - cb' + da' - eh' - fg' + gf' + he', ae' + bf' + cg' + dh' + ea' - fb' - gc' - hd', af' - be' - ch' + dg' + eb' + fa' - gd' + hc', ag' + bh' - ce' - df' + ec' + fd' + ga' - hb', ah' - bg' + cf' - de' + ed' - fc' + gb' + ha')$

Denominamos a álgebra definida em $\mathbb{O}$ como *Álgebra de Cayley*, ou oitavas ou Álgebra de Octônios.

Agora verificamos que os números octoniônicos $(0,0,0,0,0,0,0,0)$ e $(1,0,0,0,0,0,0,0)$ são os elementos neutros para a adição e multiplicação respectivamente, e ainda podemos identificar a existência de um inverso aditivo e de um inverso multiplicativo para cada elemento não-nulo de $\mathbb{O}$.

Usando a multiplicação, acima definida, vemos que o anel dos octônios $(\mathbb{O},+,\cdot)$, não é um corpo, pois

$$(0,1,0,0,0,0,0,0)\cdot(0,0,1,0,0,0,0,0) \neq (0,0,1,0,0,0,0,0)\cdot(0,1,0,0,0,0,0,0),$$

mas podemos dizer que $(\mathbb{O},+,\cdot)$ é um anel com divisão ou um corpo não comutativo.

Para um melhor entendimento dos procedimentos a serem feito, faz-se necessário o uso de duas definições, baseadas em [15], como segue.

Definição 1.11. ***(Loop)*** *Denomina-se-se Loop a um quasegrupo com elemento identidade. Cada elemento de um quasegrupo tem um único inverso à direita e à esquerda.*

Definição 1.12. ***(Moufang Loop)*** *Denomina-se Moufang Loop, denotado por L a um quasegrupo $(L,\diamond)$, que satisfaz*

$$(a\diamond b)\diamond(c\diamond a) = (a\diamond(b\diamond c))\diamond a, \forall a,b,c\in L$$

Façamos agora, algumas identificações pertinentes:

$$1 \leftrightarrow (1,0,0,0,0,0,0,0)$$

$$i \leftrightarrow (0,1,0,0,0,0,0,0)$$

$$j \leftrightarrow (0,0,1,0,0,0,0,0)$$

$$k \leftrightarrow (0,0,0,1,0,0,0,0)$$

$$l \leftrightarrow (0,0,0,0,1,0,0,0)$$

$$li \leftrightarrow (0,0,0,0,0,1,0,0)$$

$$lj \leftrightarrow (0,0,0,0,0,0,1,0)$$

$$lk \leftrightarrow (0,0,0,0,0,0,0,1)$$

e o número octoniônico $o = (a,b,c,d,e,f,g,h)$, com $a,b,c,d,e,f,g,h \in \mathbb{R}$, com o mesmo procedimento usado para quatérnios, anteriormente, temos

$$\begin{aligned} o &= (a,0,0,0,0,0,0,0)(1,0,0,0,0,0,0,0) \\ &+(0,b,0,0,0,0,0,0)(0,1,0,0,0,0,0,0) \\ &+(0,0,c,0,0,0,0,0)(0,0,1,0,0,0,0,0) \\ &+(0,0,0,d,0,0,0,0)(0,0,0,1,0,0,0,0) \\ &+(0,0,0,0,e,0,0,0)(0,0,0,0,1,0,0,0) \\ &+(0,0,0,0,0,f,0,0)(0,0,0,0,0,1,0,0) \\ &+(0,0,0,0,0,0,g,0)(0,0,0,0,0,0,1,0) \\ &+(0,0,0,0,0,0,0,h)(0,0,0,0,0,0,0,1). \end{aligned}$$

onde a é chamada de parte escalar, e $r = bi + cj + dk + el + fli + glj + hlk$ sua parte vetorial. Deste modo, $\mathbb{O}$ pode ser representado como a soma direta

$$\mathbb{O} = \mathbb{R} \oplus \mathcal{V},$$

onde $\mathbb{R}$ é o corpo dos reais e $\mathcal{V}$ é um espaço euclidiando. Com isso, os octônios formam um Moufang Loop.

Usando agora as regras de multiplicação para octônios mencionadas acimas, temos a seguinte tábua de multiplicação:

.	1	i	j	k	l	li	lj	lk
1	1	i	j	k	l	li	lj	lk
i	i	-1	k	$-j$	$-li$	l	$-lk$	lj
j	j	$-k$	-1	i	$-lj$	lk	l	$-li$
k	k	j	$-i$	-1	$-lk$	$-lj$	li	l
l	l	li	lj	lk	-1	$-i$	$-j$	$-k$
li	li	$-l$	$-lk$	lj	i	-1	$-k$	j
lk	lk	$-lj$	li	l	k	$-j$	i	-1

Visando uma melhor memorização da multiplicação dos octônios, faz-se necessária a implementação de um diagrama, **Plano Fano**, que recebeu esse nome devido ao matemático italiano **Gino Fano (1871-1952)**. Observando o diagrama abaixo

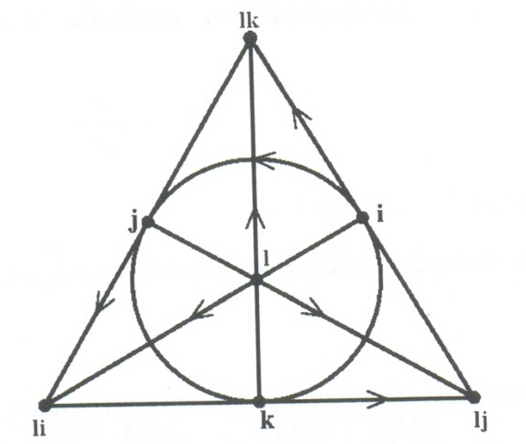

Figura 1.1: Plano Fano

os pontos correspondem aos elementos da base dos octônios, e as setas indicam os sinais dos resultdos da multiplicação dos elementos desta base.

Com o que foi feito acima, fazem-se necessárias algumas definições de importância fundamental nas passagens futuras, tais como Octônio Conjugado, Norma e inverso de um Octônio, como será definido agora.

Definição 1.13. ***(Octônio Conjugado)***
Seja $o = (a, b, c, d, e, f, g, h) = a + bi + cj + dk + el + fli + glj + hlk$*, um octônio, o seu conjugado, denotado por* $\overline{o}$ *é o octônio.* $\overline{o} = (a, -b, -c, -d, -e, -f, -g, -h) = a - bi - cj - dk - el - fli - glj - hlk$.

Definição 1.14. ***(Norma)*** *Seja* $o = (a, b, c, d, e, f, g, h) = a+bi+cj+dk+el+fli+glj+hlk$ *um octônio, a norma* $\|o\|$ *é o número real* $\|o\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2}$.

Note que a norma definida acima, nada mais é do que a norma euclidiana em $\mathbb{R}^8$, e esta acarreta a existência de um inverso para todo elemento não nulo de $\mathbb{O}$. Este último fato sugere:

Definição 1.15. ***(Inverso de um Octônio)*** *Seja o número octonionico* $o = (a, b, c, d, e, f, g, h) = a + bi + cj + dk + el + fli + glj + hlk$*, o seu inverso é dado por*

$$o^{-1} = \frac{\overline{o}}{\|o\|^2}$$

Decorre imediatamente da definição anterior que
(i)$oo^{-1} = o^{-1}o = 1$.
(ii) Dados dois números octônios o_1 e o_2, temos que:

$$\overline{o_1 o_2} = \overline{o_1}\,\overline{o_2}.$$

(iii) Dado um número octônio o_1, temos que

$$\overline{o_1}o_1 = o_1\overline{o_1} = \|o\|^2.$$

1.3 Desigualdades

Consideremos agora o número octônio $o = (a, b, c, d, e, f, g, h) = a + bi + cj + dk + el + fli + glj + hlk$ assim,

(i)

$$\|o\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2} \geq |a|$$

de modo análogo,

$$\|o\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2} \geq |b|$$

$$\|o\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2} \geq |c|$$

$$\|o\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2} \geq |d|$$

$$\|o\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2} \geq |e|$$

$$\|o\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2} \geq |f|$$

$$\|o\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2} \geq |g|$$

$$\|o\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2} \geq |h|$$

(ii) $|a| \leq \|o\|$ e $\sqrt{b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2} \leq \|o\|$, ou seja, a parte escalar em valor absoluto do número octônio o, e a norma euclidiana da sua parte vetorial são sempre menores que $\|o\|$.

Consideremos agora alguns tipos de regiões que podem ser formadas com números octônios. Denotando a distância entre dois pontos o' e o por $\|o' - o\|$, segue-se que uma hiperesfera **E** de raio ρ com centro em o' pode ser representada por

$$\|o - o'\| = \rho. \tag{1.1}$$

Conseqüentemente, a desigualdade

$$\|o - o'\| < \rho. \tag{1.2}$$

vale para qualquer ponto interior de **E**. Tal região é chamada de hiperesfera aberta, em contrapartida uma hiperesfera fechada será dada por

$$\|o - o'\| \leq \rho \tag{1.3}$$

que nada mais é do que o interior de **E** e a própria **E**.

A região descrita em (1.2) é também chamada de vizinhança do ponto o'. De modo análogo, a desigualdade $\|o - o'\| > \rho$ representa o exterior da hiperesfera.

Consideremos agora a equação $\|o\| = 1$, esta representa uma região chamada de hiperesfera unitária, isto é, uma hiperesfera de centro na origem e raio 1, no caso em questão, entende-se por origem o octônio nulo, ou seja $\widetilde{o} = (0, 0i, 0j, 0k, 0l, 0li, 0lj, 0lk)$.

1.4 Coordenadas Esféricas

Partindo das idéias encontradas em [4] e [13], é pertinente uma representação dos quatérnios em forma trigonométrica. Por outro lado um número octoniônico $o =$
$= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k + x_5 l + x_6 li + x_7 lj + x_8 lk$ também pode ser representado sob a forma trigonométrica, sendo tal forma fundamental no que tange a determinação da Função Logarítmica do tipo Octoniônico.

Visando esse fim, faz-se necessária a implementação das coordenadas esféricas, como será visto a seguir.

Consideremos uma hiperesfera de raio r e dimensão n, centrada na origem, e tomemos as seguintes notações:

$$cos\theta_i = c_i$$

$$sen\theta_i = s_i$$

$$tg\theta_i = t_i$$

Considerando agora,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= rc_1c_2\ldots c_{n-2}c_{n-1}, \quad & 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi \\
x_2 &= rc_1c_2\ldots c_{n-2}s_{n-1}, \quad & \frac{-\pi}{2} \leq \theta_{n-2} \leq \frac{\pi}{2} \\
x_3 &= rc_1c_2\ldots s_{n-2}, \quad & \frac{-\pi}{2} \leq \theta_{n-3} \leq \frac{\pi}{2} \\
& & \ldots \\
x_j &= rc_1\ldots c_{n-j}s_{n-j+1}, \quad & \frac{-\pi}{2} \leq \theta_{n-j} \leq \frac{\pi}{2} \\
& & \ldots \\
x_n &= rs_1, \quad & \frac{-\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Analisemos os casos,
(i)$n = 4$:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= rcos\theta_1cos\theta_2cos\theta_3, \quad & 0 \leq r < \infty \\
x_2 &= rcos\theta_1cos\theta_2sen\theta_3, \quad & 0 \leq \theta_3 \leq 2\pi \\
x_3 &= rcos\theta_1sen\theta_2, \quad & \frac{-\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2} \\
x_4 &= rsen\theta_1, \quad & \frac{-\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

(ii)$n = 8$:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= rcos\theta_1cos\theta_2cos\theta_3cos\theta_4cos\theta_5cos\theta_6cos\theta_7, \quad & 0 \leq r < \infty \\
x_2 &= rcos\theta_1cos\theta_2cos\theta_3cos\theta_4cos\theta_5cos\theta_6sen\theta_7, \quad & 0 \leq \theta_7 \leq 2\pi \\
x_3 &= rcos\theta_1cos\theta_2cos\theta_3cos\theta_4cos\theta_5sen\theta_6, \quad & \frac{-\pi}{2} \leq \theta_6 \leq \frac{\pi}{2} \\
x_4 &= rcos\theta_1cos\theta_2cos\theta_3cos\theta_4sen\theta_5, \quad & \frac{-\pi}{2} \leq \theta_5 \leq \frac{\pi}{2} \\
x_5 &= rcos\theta_1cos\theta_2cos\theta_3sen\theta_4, \quad & \frac{-\pi}{2} \leq \theta_4 \leq \frac{\pi}{2} \\
x_6 &= rcos\theta_1cos\theta_2sen\theta_3, \quad & \frac{-\pi}{2} \leq \theta_3 \leq \frac{\pi}{2} \\
x_7 &= rcos\theta_1sen\theta_2, \quad & \frac{-\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2} \\
x_8 &= rsen\theta_1, \quad & \frac{-\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Usando os resultados acima, a forma trigonométrica para um quatérnio e para um número octônio, será dada como segue,

(Forma Trigonométrica de um Quatérnio) Seja $x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$ um número quaterniônico, podemos escrevê-lo como segue

$$x = r(cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 + cos\theta_1 cos\theta_2 sen\theta_3 + cos\theta_1 sen\theta_2 + sen\theta_1)$$

(Forma Trigonométrica de um Octônio) Seja $o = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) =$ $= x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k + x_5 l + x_6 li + x_7 lj + x_8 lk$ um número octoniônico, podemos então escrevê-lo como segue:

$$\begin{aligned}
o = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) &= x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k + x_5 l + x_6 li + x_7 lj + x_8 lk = \\
&= rcos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 cos\theta_5 cos\theta_6 cos\theta_7 \\
&+ rcos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 cos\theta_5 cos\theta_6 sen\theta_7 i \\
&+ rcos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 cos\theta_5 sen\theta_6 j \\
&+ rcos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 sen\theta_5 k \\
&+ rcos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 sen\theta_4 l \\
&+ rcos\theta_1 cos\theta_2 sen\theta_3 li \\
&+ rcos\theta_1 sen\theta_2 lj \\
&+ rsen\theta_1 lk
\end{aligned}$$

Nota-se que o número octônio $o = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k + x_5 l + x_6 li + x_7 lj + x_8 lk$, pode ainda ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
o = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) &= x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k + x_5 l + x_6 li + x_7 lj + x_8 lk = \\
&= r(cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 cos\theta_5 cos\theta_6 cos\theta_7 \\
&+ cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 cos\theta_5 cos\theta_6 sen\theta_7 i \\
&+ cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 cos\theta_5 sen\theta_6 j \\
&+ cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 sen\theta_5 k \\
&+ cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 sen\theta_4 l \\
&+ cos\theta_1 cos\theta_2 sen\theta_3 li \\
&+ cos\theta_1 sen\theta_2 lj \\
&+ sen\theta_1 lk)
\end{aligned}$$

As relações acima serão de fundamental importância nos capítulos posteriores, tendo em vista que para a determinação do logarítimo de um número octônio $o = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k + x_5 l + x_6 li + x_7 lj + x_8 lk$, o uso de tais relações é fundamental.

1.5 Noções Topológicas no Espaço dos Octônios

A presente seção tratará de noções importantes no que diz respeito a considerações futuras. Os aspectos topologicos abordados em [9], [8] e [10], são aqui estendidos para o espaço 8-dimensional, visando dar aos octônios uma estrutura topológica adequada.

Definição 1.16. ***(Conjunto de Pontos)*** *Chama-se conjunto de pontos no espaço octônio qualquer coleção finita ou infinita de pontos.*

Definição 1.17. ***(Conjunto Aberto)*** *Um conjunto A no espaço octônio é dito aberto se cada ponto de A possui uma vizinhança na qual cada ponto pertence a A.*

Definição 1.18. ***(Conjunto Fechado)*** *Um conjunto F no espaço octônio é dito fechado se todos os pontos deste espaço que não pertencem a F formam um conjunto aberto.*

Definição 1.19. ***(Conjunto Limitado)*** *Um conjunto L no espaço octônio é dito limitado se todos os seus pontos existem no interior de uma hiperesfera de raio suficientemente grande.*

1.6 Conclusão

Os resultados deste capítulo introdutório permitem uma observação dos octônios como uma generalização dos números reais, complexos e quatérnios, além disso, os octônios formam uma álgebra não-associativa de divisão normada. Uma vez admitindo a forma trigonométrica, acima mostrada, será possível a determinação da Função Logarítmica do tipo Octonionico, além de possíveis futuras contribuições para a determinação da Fórmula Integral de Cauchy para Octônios.

Capítulo 2

Funções Octoniônicas

2.1 Funções Octoniônicas

O presente capítulo tem por objetivo definir a função octoniônica e mostrar algumas de suas propriedades. Além disso serão introduzidos conceitos tais como regularidade à esquerda, regularidade à direita e a diferenciação e integração de octônios mostrados em [12] para quatérnios e estendendo-os para octônios.

Definição 2.1. *Seja $\mathbb{A}^8 \subset \mathbb{O}$ um espaço Euclidiando 8-dimensional, e um número hipercomplexo $o = u_1 + u_2 i + u_3 j + u_4 k + u_5 l + u_6 li + u_7 lj + u_8 lk \in \mathbb{R}^8$. Assim a função octoniônica $f : \mathbb{A}^8 \to \mathbb{O}$ é um mapeamento que faz corresponder a cada $o \in \mathbb{A}^8$ um número octoniônico $w = f(o)$, ou seja:*

$$f : \mathbb{A}^8 \to \mathbb{O}$$

$$(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8) \mapsto f(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8)$$

onde temos que

$$\begin{aligned} f(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8) &= f_1(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8) \\ &+ f_2(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8) \\ &+ f_3(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8) \\ &+ f_4(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8) \\ &+ f_5(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8) \\ &+ f_6(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8) \\ &+ f_7(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8) \\ &+ f_8(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8) \end{aligned}$$

Quanto às funções coordenadas acima citadas, não é necessária nenhuma restrição a estas, somente que sejam $n-vezes$ diferenciáveis em cada uma de suas variáveis independentes. Um fato importante a ser exposto é que cada uma dessas funções coordenadas é da forma $f_l : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}$, com $l = 1, \ldots, 8$.

Ainda no contexto dessas funções, dois operadores, desempenham um papel fundamental, são eles:

$$\Gamma = (\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2}i + \frac{\partial}{\partial u_3}j + \frac{\partial}{\partial u_4}k + \frac{\partial}{\partial u_5}l + \frac{\partial}{\partial u_6}li + \frac{\partial}{\partial u_7}lj + \frac{\partial}{\partial u_8}lk) \tag{2.1}$$

e

$$\bar{\Gamma} = (\frac{\partial}{\partial u_1} - \frac{\partial}{\partial u_2}i - \frac{\partial}{\partial u_3}j - \frac{\partial}{\partial u_4}k - \frac{\partial}{\partial u_5}l - \frac{\partial}{\partial u_6}li - \frac{\partial}{\partial u_7}lj - \frac{\partial}{\partial u_8}lk) \tag{2.2}$$

Sendo este último chamado de operador conjugado. Com isso vejamos agora as seguintes definições:

Definição 2.2. ***(Regularidade à Esquerda)*** *Uma função de variáveis octoniônicas f, tal que $f = f_1 + f_2 i + f_3 j + f_4 k + f_5 l + f_6 li + f_7 lj + f_8 lk$, com as coordenadas $f_l : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}$ parcialmente deriváveis, é regular à esquerda se:*

$$\Gamma f = 0 \tag{2.3}$$

Assim o operador (2.1) *se apresenta*

$$\Gamma f = (\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2}i + \frac{\partial}{\partial u_3}j + \frac{\partial}{\partial u_4}k + \frac{\partial}{\partial u_5}l + \frac{\partial}{\partial u_6}li + \frac{\partial}{\partial u_7}lj + \frac{\partial}{\partial u_8}lk)$$

$$(f_1 + f_2 i + f_3 j + f_4 k + f_5 l + f_6 li + f_7 lj + f_8 lk) =$$

$$= (\frac{\partial f_1}{\partial u_1} - \frac{\partial f_2}{\partial u_2} - \frac{\partial f_3}{\partial u_3} - \frac{\partial f_4}{\partial u_4} - \frac{\partial f_5}{\partial u_5} - \frac{\partial f_6}{\partial u_6} - \frac{\partial f_7}{\partial u_7} - \frac{\partial f_8}{\partial u_8})$$
$$+(\frac{\partial f_2}{\partial u_1} + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} + \frac{\partial f_4}{\partial u_3} - \frac{\partial f_3}{\partial u_4} - \frac{\partial f_6}{\partial u_5} + \frac{\partial f_5}{\partial u_6} - \frac{\partial f_8}{\partial u_7} + \frac{\partial f_7}{\partial u_8})i$$
$$+(\frac{\partial f_3}{\partial u_1} - \frac{\partial f_4}{\partial u_2} + \frac{\partial f_1}{\partial u_3} + \frac{\partial f_2}{\partial u_4} - \frac{\partial f_7}{\partial u_5} + \frac{\partial f_8}{\partial u_6} + \frac{\partial f_5}{\partial u_7} - \frac{\partial f_6}{\partial u_8})j$$
$$+(\frac{\partial f_4}{\partial u_1} + \frac{\partial f_3}{\partial u_2} - \frac{\partial f_2}{\partial u_3} - \frac{\partial f_1}{\partial u_4} - \frac{\partial f_8}{\partial u_5} - \frac{\partial f_7}{\partial u_6} - \frac{\partial f_6}{\partial u_7} - \frac{\partial f_5}{\partial u_8})k$$
$$+(\frac{\partial f_5}{\partial u_1} + \frac{\partial f_6}{\partial u_2} + \frac{\partial f_7}{\partial u_3} + \frac{\partial f_8}{\partial u_4} + \frac{\partial f_1}{\partial u_5} - \frac{\partial f_2}{\partial u_6} - \frac{\partial f_3}{\partial u_7} - \frac{\partial f_4}{\partial u_8})l$$
$$+(\frac{\partial f_6}{\partial u_1} - \frac{\partial f_5}{\partial u_2} - \frac{\partial f_8}{\partial u_3} + \frac{\partial f_7}{\partial u_4} + \frac{\partial f_2}{\partial u_5} + \frac{\partial f_1}{\partial u_6} - \frac{\partial f_4}{\partial u_7} + \frac{\partial f_3}{\partial u_8})li$$
$$+(\frac{\partial f_7}{\partial u_1} + \frac{\partial f_8}{\partial u_2} - \frac{\partial f_5}{\partial u_3} - \frac{\partial f_6}{\partial u_4} + \frac{\partial f_3}{\partial u_5} + \frac{\partial f_4}{\partial u_6} + \frac{\partial f_1}{\partial u_7} - \frac{\partial f_2}{\partial u_8})lj$$
$$+(\frac{\partial f_8}{\partial u_1} - \frac{\partial f_7}{\partial u_2} + \frac{\partial f_6}{\partial u_3} - \frac{\partial f_5}{\partial u_4} + \frac{\partial f_4}{\partial u_5} - \frac{\partial f_3}{\partial u_6} + \frac{\partial f_2}{\partial u_7} - \frac{\partial f_1}{\partial u_8})lk$$
$$= 0$$

Definição 2.3. ***(Regularidade à Direita)*** *Uma função de variáveis octoniônicas f, tal que $f = f_1+f_2i+f_3j+f_4k+f_5l+f_6li+f_7lj+f_8lk$, com as coordenadas $f_l : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}$ parcialmente deriváveis, é regular à esquerda se:*

$$f\Gamma = 0 \tag{2.4}$$

$$\Gamma f = (f_1 + f_2i + f_3j + f_4k + f_5l + f_6li + f_7lj + f_8lk)$$
$$(\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2}i + \frac{\partial}{\partial u_3}j + \frac{\partial}{\partial u_4}k + \frac{\partial}{\partial u_5}l + \frac{\partial}{\partial u_6}li + \frac{\partial}{\partial u_7}lj + \frac{\partial}{\partial u_8}lk) =$$
$$= (\frac{\partial f_1}{\partial u_1} - \frac{\partial f_2}{\partial u_2} - \frac{\partial f_3}{\partial u_3} - \frac{\partial f_4}{\partial u_4} - \frac{\partial f_5}{\partial u_5} - \frac{\partial f_6}{\partial u_6} - \frac{\partial f_7}{\partial u_7} - \frac{\partial f_8}{\partial u_8})$$
$$+(\frac{\partial f_2}{\partial u_1} + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} - \frac{\partial f_4}{\partial u_3} + \frac{\partial f_3}{\partial u_4} + \frac{\partial f_6}{\partial u_5} - \frac{\partial f_5}{\partial u_6} + \frac{\partial f_8}{\partial u_7} - \frac{\partial f_7}{\partial u_8})i$$
$$+(\frac{\partial f_3}{\partial u_1} + \frac{\partial f_4}{\partial u_2} + \frac{\partial f_1}{\partial u_3} - \frac{\partial f_2}{\partial u_4} + \frac{\partial f_7}{\partial u_5} - \frac{\partial f_8}{\partial u_6} - \frac{\partial f_5}{\partial u_7} + \frac{\partial f_6}{\partial u_8})j$$
$$+(\frac{\partial f_4}{\partial u_1} - \frac{\partial f_3}{\partial u_2} + \frac{\partial f_2}{\partial u_3} + \frac{\partial f_1}{\partial u_4} + \frac{\partial f_8}{\partial u_5} + \frac{\partial f_7}{\partial u_6} - \frac{\partial f_6}{\partial u_7} - \frac{\partial f_5}{\partial u_8})k$$
$$+(\frac{\partial f_5}{\partial u_1} - \frac{\partial f_6}{\partial u_2} - \frac{\partial f_7}{\partial u_3} - \frac{\partial f_8}{\partial u_4} + \frac{\partial f_1}{\partial u_5} + \frac{\partial f_2}{\partial u_6} + \frac{\partial f_3}{\partial u_7} + \frac{\partial f_4}{\partial u_8})l$$
$$+(\frac{\partial f_6}{\partial u_1} + \frac{\partial f_5}{\partial u_2} + \frac{\partial f_8}{\partial u_3} - \frac{\partial f_7}{\partial u_4} - \frac{\partial f_2}{\partial u_5} + \frac{\partial f_1}{\partial u_6} + \frac{\partial f_4}{\partial u_7} - \frac{\partial f_3}{\partial u_8})li$$

$$
\begin{aligned}
&+(\frac{\partial f_7}{\partial u_1} - \frac{\partial f_8}{\partial u_2} + \frac{\partial f_5}{\partial u_3} + \frac{\partial f_6}{\partial u_4} - \frac{\partial f_3}{\partial u_5} - \frac{\partial f_4}{\partial u_6} + \frac{\partial f_1}{\partial u_7} + \frac{\partial f_2}{\partial u_8})lj \\
&+(\frac{\partial f_8}{\partial u_1} + \frac{\partial f_7}{\partial u_2} - \frac{\partial f_6}{\partial u_3} + \frac{\partial f_5}{\partial u_4} - \frac{\partial f_4}{\partial u_5} + \frac{\partial f_3}{\partial u_6} - \frac{\partial f_2}{\partial u_7} + \frac{\partial f_1}{\partial u_8})lk \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Se uma f é regular à direita e à esquerda, dizemos então que f é regular.

2.2 Integração e Diferenciação em Octônios

A presente seção tratará de alguns resultados importantes que são generalizados a partir dos resultados obtidos dos conceitos de diferenciabilidade e integrabilidade em quatérnios [12]. Tais resultados podem ser encarados como uma extensão 8-dimensional associadas a funções octoniônicas que satisfazem as relações do tipo Cauchy-Riemann, vistas em [15].

Consideremos f uma função octoniônica, devido a não comutatividade dos octônios, teremos que definir duas integrais $\int f dz$ e $\int dz f$.

$$
\begin{aligned}
\int f dz \quad = \quad & \int (f_1 + f_2 i + f_3 j + f_4 k + f_5 l + f_6 li + f_7 lj + f_8 lk) \\
& (du_1 + du_2 i + du_3 j + du_4 k + du_5 l + du_6 li + du_7 lj + du_8 lk)
\end{aligned}
$$

Daí segue,

$$
\begin{aligned}
= \quad & \int (f_1 du_1 - f_2 du_2 - f_3 du_3 - f_4 du_4 - f_5 du_5 - f_7 du_7 - f_8 du_8) \\
& + \int (f_2 du_1 + f_1 du_2 - f_4 du_3 + f_3 du_4 + f_6 du_5 - f_5 du_6 + f_8 du_7 - f_7 du_8) i \\
& + \int (f_3 du_1 + f_4 du_2 + f_1 du_3 - f_2 du_4 + f_7 du_5 - f_8 du_6 - f_5 du_7 + f_6 du_8) j \\
& + \int (f_4 du_1 - f_3 du_2 + f_2 du_3 + f_1 du_4 + f_8 du_5 + f_7 du_6 - f_6 du_7 - f_5 du_8) k \\
& + \int (f_5 du_1 - f_6 du_2 - f_7 du_3 - f_8 du_4 + f_1 du_5 + f_2 du_6 + f_3 du_7 + f_4 du_8) l \\
& + \int (f_6 du_1 + f_5 du_2 + f_8 du3 - f_7 du_4 - f_2 du_5 + f_1 du_6 + f_4 du_7 - f_3 du_8) li \\
& + \int (f_7 du_1 - f_8 du_2 + f_5 du_3 + f_6 du_4 - f_3 du_5 - f_4 du_6 + f_1 du_7 + f_2 du_8) lj \\
& + \int (f_8 du_1 + f_7 du_2 - f_6 du_3 + f_5 du_4 - f_4 du_5 + f_3 du_6 - f_2 du_7 + f_1 du_8) lk
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
= & \int (du_1 f_1 - du_2 f_2 - du_3 f_3 - du_4 f_4 - du_5 f_5 - du_7 f_7 - du_8 f_8) \\
& + \int (du_1 f_2 + du_2 f_1 + du_3 f_4 - du_4 f_3 - du_5 f_6 + du_6 f_5 - du_7 f_8 + du_8 f_7) i \\
& + \int (du_1 f_3 - du_2 f_4 + du_3 f_1 + du_4 f_2 - du_5 f_7 + du_6 f_8 - du_7 f_5 - du_8 f_6) j \\
& + \int (du_1 f_4 + du_2 f_3 - du_3 f_2 + du_4 f_1 - du_5 f_8 - du_6 f_7 + du_7 f_6 + du_8 f_5) k \\
& + \int (du_1 f_5 + du_2 f_6 + du_3 f_7 + du_4 f_8 + du_5 f_1 - du_6 f_2 = du_7 f_3 - du_8 f_4) l \\
& + \int (du_1 f_6 - du_2 f_5 - du_3 f_8 + du_4 f_7 + du_5 f_2 + du_6 f_1 - du_7 f_4 + du_8 f_3) li \\
& + \int (du_1 f_7 + du_2 f_8 - du_3 f_5 - du_4 f_6 + du_5 f_3 + du_6 f_4 + du_7 f_1 - du_8 f_2) lj \\
& + \int (du_1 f_8 - du_2 f_7 + du_3 f_6 - du_4 f_5 + du_5 f_4 - du_6 f_3 + du_7 f_2 + du_8 f_1) lk
\end{aligned}
$$

Suponhamos agora que as funções coordenadas $f_l : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}$ sejam contínuas, e tomemos o caminho de extremos $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$ e $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8)$, numa região conexa do espaço 8-dimensional, os resultados abaixo mostram que as integrais $\int f dz$ e $\int dz f$ independerão do caminho de integração, se estas satisfazem as condições citadas nos teoremas abaixo.

Teorema 2.1. *Para todo par de pontos a e b, e qualquer caminho ligando-os em um espaço simplesmente conexo 8-dimensional, a integral $\int_a^b f dz$ independe do caminho dado se, e somente se, existe uma função $F = F_1 + F_2 i + F_3 j + F_4 k + F_5 l + F_6 li + F_7 lj + F_8 lk$, com $\int_a^b f dz = x(b) - x(a)$ e que satisfaz as seguites relações*

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1} = \frac{\partial F_2}{\partial u_2} = \frac{\partial F_3}{\partial u_3} = \frac{\partial F_4}{\partial u_4} = \frac{\partial F_5}{\partial u_5} = \frac{\partial F_6}{\partial u_6} = \frac{\partial F_7}{\partial u_7} = \frac{\partial F_8}{\partial u_8},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial u_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_2} = \frac{\partial F_4}{\partial u_3} = -\frac{\partial F_3}{\partial u_4} = -\frac{\partial F_6}{\partial u_5} = \frac{\partial F_5}{\partial u_6} = -\frac{\partial F_8}{\partial u_7} = \frac{\partial F_7}{\partial u_8},$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial u_1} = -\frac{\partial F_4}{\partial u_2} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_3} = \frac{\partial F_2}{\partial u_4} = -\frac{\partial F_7}{\partial u_5} = \frac{\partial F_8}{\partial u_6} = \frac{\partial F_5}{\partial u_7} = -\frac{\partial F_6}{\partial u_8},$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial u_1} = \frac{\partial F_3}{\partial u_2} = -\frac{\partial F_2}{\partial u_3} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_4} = -\frac{\partial F_8}{\partial u_5} = -\frac{\partial F_7}{\partial u_6} = \frac{\partial F_6}{\partial u_7} = \frac{\partial F_5}{\partial u_8},$$

$$\frac{\partial F_5}{\partial u_1} = \frac{\partial F_6}{\partial u_2} = \frac{\partial F_7}{\partial u_3} = \frac{\partial F_8}{\partial u_4} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_5} = -\frac{\partial F_2}{\partial u_6} = -\frac{\partial F_3}{\partial u_7} = -\frac{\partial F_4}{\partial u_8},$$

$$\frac{\partial F_6}{\partial u_1} = -\frac{\partial F_5}{\partial u_2} = -\frac{\partial F_8}{\partial u_3} = \frac{\partial F_7}{\partial u_4} = \frac{\partial F_2}{\partial u_5} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_6} = -\frac{\partial F_4}{\partial u_7} = \frac{\partial F_3}{\partial u_8},$$

$$\frac{\partial F_7}{\partial u_1} = \frac{\partial F_8}{\partial u_2} = -\frac{\partial F_5}{\partial u_3} = -\frac{\partial F_6}{\partial u_4} = \frac{\partial F_3}{\partial u_5} = \frac{\partial F_4}{\partial u_6} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_7} = -\frac{\partial F_2}{\partial u_8},$$

$$\frac{\partial F_8}{\partial u_1} = -\frac{\partial F_7}{\partial u_2} = \frac{\partial F_6}{\partial u_3} = -\frac{\partial F_5}{\partial u_4} = \frac{\partial F_4}{\partial u_5} = -\frac{\partial F_3}{\partial u_6} = \frac{\partial F_2}{\partial u_7} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_8}. \tag{2.5}$$

Demonstração: A integral $\int_a^b f dz$, mostrada anteriormente, independerá do caminho se existir uma função F, tal que,

$$\int_a^b f dz = \int_a^b dF = \int_a^b d(F_1 + F_2 i + F_3 j + F_4 k + F_5 l + F_6 li + F_7 lj + F_8 lk) = F(b) - F(a),$$

de modo que o valor dessa diferença dependerá unicamente dos pontos extremos.

Agora, admitindo que existe uma função F, cujas diferenciais totais das suas funções coordenadas são dadas por

$$\begin{aligned} dF_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial F_1}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial F_1}{\partial u_3}du_3+\frac{\partial F_1}{\partial u_4}du_4+\frac{\partial F_1}{\partial u_5}du_5+\frac{\partial F_1}{\partial u_6}du_6+\frac{\partial F_1}{\partial u_7}du_7+\frac{\partial F_1}{\partial u_8}du_8 \\ &= f_1du_1 - f_2du_2 - f_3du_3 - f_4du_4 - f_5du_5 - f_6du_6 - f_7du_7 - f_8du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dF_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial F_2}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial F_2}{\partial u_3}du_3+\frac{\partial F_2}{\partial u_4}du_4+\frac{\partial F_2}{\partial u_5}du_5+\frac{\partial F_2}{\partial u_6}du_6+\frac{\partial F_2}{\partial u_7}du_7+\frac{\partial F_2}{\partial u_8}du_8 \\ &= f_2du_1 + f_1du_2 - f_4du_3 + f_3du_4 + f_6du_5 - f_5du_6 + f_8du_7 - f_7du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dF_3 &= \frac{\partial F_3}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial F_3}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial F_3}{\partial u_3}du_3+\frac{\partial F_3}{\partial u_4}du_4+\frac{\partial F_3}{\partial u_5}du_5+\frac{\partial F_3}{\partial u_6}du_6+\frac{\partial F_3}{\partial u_7}du_7+\frac{\partial F_3}{\partial u_8}du_8 \\ &= f_3du_1 + f_4du_2 + f_1du_3 - f_2du_4 + f_7du_5 - f_8du_6 - f_5du_7 + f_6du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dF_4 &= \frac{\partial F_4}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial F_4}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial F_4}{\partial u_3}du_3+\frac{\partial F_4}{\partial u_4}du_4+\frac{\partial F_4}{\partial u_5}du_5+\frac{\partial F_4}{\partial u_6}du_6+\frac{\partial F_4}{\partial u_7}du_7+\frac{\partial F_4}{\partial u_8}du_8 \\ &= f_4du_1 - f_3du_2 + f_2du_3 + f_1du_4 + f_8du_5 + f_7du_6 - f_6du_7 - f_5du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dF_5 &= \frac{\partial F_5}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial F_5}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial F_5}{\partial u_3}du_3+\frac{\partial F_5}{\partial u_4}du_4+\frac{\partial F_5}{\partial u_5}du_5+\frac{\partial F_5}{\partial u_6}du_6+\frac{\partial F_5}{\partial u_7}du_7+\frac{\partial F_5}{\partial u_8}du_8 \\ &= f_5du_1 - f_6du_2 - f_7du_3 - f_8du_4 + f_1du_5 + f_2du_6 + f_3du_7 + f_4du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dF_6 &= \frac{\partial F_6}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial F_6}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial F_6}{\partial u_3}du_3+\frac{\partial F_6}{\partial u_4}du_4+\frac{\partial F_6}{\partial u_5}du_5+\frac{\partial F_6}{\partial u_6}du_6+\frac{\partial F_6}{\partial u_7}du_7+\frac{\partial F_6}{\partial u_8}du_8 \\ &= f_6du_1 + f_5du_2 + f_8du_3 - f_7du_4 - f_2du_5 + f_1du_6 + f_4du_7 - f_3du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dF_7 &= \frac{\partial F_7}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial F_7}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial F_7}{\partial u_3}du_3+\frac{\partial F_7}{\partial u_4}du_4+\frac{\partial F_7}{\partial u_5}du_5+\frac{\partial F_7}{\partial u_6}du_6+\frac{\partial F_7}{\partial u_7}du_7+\frac{\partial F_7}{\partial u_8}du_8 \\ &= f_7du_1 - f_8du_2 + f_5du_3 + f_6du_4 - f_3du_5 - f_4du_6 + f_1du_7 + f_2du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dF_8 &= \frac{\partial F_8}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial F_8}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial F_8}{\partial u_3}du_3+\frac{\partial F_8}{\partial u_4}du_4+\frac{\partial F_8}{\partial u_5}du_5+\frac{\partial F_8}{\partial u_6}du_6+\frac{\partial F_8}{\partial u_7}du_7+\frac{\partial F_8}{\partial u_8}du_8 \\ &= f_8du_1 + f_7du_2 - f_6du_3 + f_5du_4 - f_4du_5 + f_3du_6 - f_2du_7 + f_1du_8, \end{aligned}$$

daí seguem as relações

$$f_1 = \frac{\partial F_1}{\partial u_1} = \frac{\partial F_2}{\partial u_2} = \frac{\partial F_3}{\partial u_3} = \frac{\partial F_4}{\partial u_4} = \frac{\partial F_5}{\partial u_5} = \frac{\partial F_6}{\partial u_6} = \frac{\partial F_7}{\partial u_7} = \frac{\partial F_8}{\partial u_8},$$

$$f_2 = \frac{\partial F_2}{\partial u_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_2} = \frac{\partial F_4}{\partial u_3} = -\frac{\partial F_3}{\partial u_4} = -\frac{\partial F_6}{\partial u_5} = \frac{\partial F_5}{\partial u_6} = -\frac{\partial F_8}{\partial u_7} = \frac{\partial F_7}{\partial u_8},$$

$$f_3 = \frac{\partial F_3}{\partial u_1} = -\frac{\partial F_4}{\partial u_2} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_3} = \frac{\partial F_2}{\partial u_4} = -\frac{\partial F_7}{\partial u_5} = \frac{\partial F_8}{\partial u_6} = \frac{\partial F_5}{\partial u_7} = -\frac{\partial F_6}{\partial u_8},$$

$$f_4 = \frac{\partial F_4}{\partial u_1} = \frac{\partial F_3}{\partial u_2} = -\frac{\partial F_2}{\partial u_3} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_4} = -\frac{\partial F_8}{\partial u_5} = -\frac{\partial F_7}{\partial u_6} = \frac{\partial F_6}{\partial u_7} = \frac{\partial F_5}{\partial u_8},$$

$$f_5 = \frac{\partial F_5}{\partial u_1} = \frac{\partial F_6}{\partial u_2} = \frac{\partial F_7}{\partial u_3} = \frac{\partial p_8}{\partial u_4} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_5} = -\frac{\partial F_2}{\partial u_6} = -\frac{\partial F_3}{\partial u_7} = -\frac{\partial F_4}{\partial u_8},$$

$$f_6 = \frac{\partial F_6}{\partial u_1} = -\frac{\partial F_5}{\partial u_2} = -\frac{\partial F_8}{\partial u_3} = \frac{\partial F_7}{\partial u_4} = \frac{\partial F_2}{\partial u_5} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_6} = -\frac{\partial F_4}{\partial u_7} = \frac{\partial F_3}{\partial u_8},$$

$$f_7 = \frac{\partial F_7}{\partial u_1} = \frac{\partial F_8}{\partial u_2} = -\frac{\partial F_5}{\partial u_3} = -\frac{\partial F_6}{\partial u_4} = \frac{\partial F_3}{\partial u_5} = \frac{\partial F_4}{\partial u_6} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_7} = -\frac{\partial F_2}{\partial u_8},$$

$$f_8 = \frac{\partial F_8}{\partial u_1} = -\frac{\partial F_7}{\partial u_2} = \frac{\partial F_6}{\partial u_3} = -\frac{\partial F_5}{\partial u_4} = \frac{\partial F_4}{\partial u_5} = -\frac{\partial F_3}{\partial u_6} = \frac{\partial F_2}{\partial u_7} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_8}.$$

o que conclui a demonstração.

Teorema 2.2. *Para todo par de pontos a e b, e qualquer caminho ligando-os em um espaço simplesmente conexo 8-dimensional, a integral* $\int_a^b dzf$ *independe do caminho dado se, e somente se, existe uma função* $G = G_1 + G_2i + G_3j + G_4k + G_5l + G_6li + G_7lj + G_8lk$ *com* $\int_a^b dzf = G(b) - G(a)$ *e que satisfaz as seguintes relações:*

$$\frac{\partial G_1}{\partial u_1} = \frac{\partial G_2}{\partial u_2} = \frac{\partial G_3}{\partial u_3} = \frac{\partial G_4}{\partial u_4} = \frac{\partial G_5}{\partial u_5} = \frac{\partial G_6}{\partial u_6} = \frac{\partial G_7}{\partial u_7} = \frac{\partial G_8}{\partial u_8},$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial u_1} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_2} = -\frac{\partial G_4}{\partial u_3} = \frac{\partial G_3}{\partial u_4} = \frac{\partial G_6}{\partial u_5} = -\frac{\partial G_5}{\partial u_6} = \frac{\partial G_8}{\partial u_7} = -\frac{\partial G_7}{\partial u_8},$$

$$\frac{\partial G_3}{\partial u_1} = \frac{\partial G_4}{\partial u_2} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_3} = -\frac{\partial G_2}{\partial u_4} = \frac{\partial G_7}{\partial u_5} = -\frac{\partial G_8}{\partial u_6} = -\frac{\partial G_5}{\partial u_7} = \frac{\partial G_6}{\partial u_8},$$

$$\frac{\partial G_4}{\partial u_1} = -\frac{\partial G_3}{\partial u_2} = \frac{\partial G_2}{\partial u_3} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_4} = \frac{\partial G_8}{\partial u_5} = \frac{\partial G_7}{\partial u_6} = -\frac{\partial G_6}{\partial u_7} = -\frac{\partial G_5}{\partial u_8},$$

$$\frac{\partial G_5}{\partial u_1} = -\frac{\partial G_6}{\partial u_2} = -\frac{\partial G_7}{\partial u_3} = -\frac{\partial G_8}{\partial u_4} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_5} = \frac{\partial G_2}{\partial u_6} = \frac{\partial G_3}{\partial u_7} = \frac{\partial G_4}{\partial u_8},$$

$$\frac{\partial G_6}{\partial u_1} = \frac{\partial G_5}{\partial u_2} = \frac{\partial G_8}{\partial u_3} = -\frac{\partial G_7}{\partial u_4} = -\frac{\partial G_2}{\partial u_5} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_6} = \frac{\partial G_4}{\partial u_7} = -\frac{\partial G_3}{\partial u_8},$$

$$\frac{\partial G_7}{\partial u_1} = -\frac{\partial G_8}{\partial u_2} = \frac{\partial G_5}{\partial u_3} = \frac{\partial G_6}{\partial u_4} = -\frac{\partial G_3}{\partial u_5} = -\frac{\partial G_4}{\partial u_6} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_7} = \frac{\partial G_2}{\partial u_8},$$

$$\frac{\partial G_8}{\partial u_1} = \frac{\partial G_7}{\partial u_2} = -\frac{\partial G_6}{\partial u_3} = \frac{\partial G_5}{\partial u_4} = -\frac{\partial G_4}{\partial u_5} = \frac{\partial G_3}{\partial u_6} = -\frac{\partial G_2}{\partial u_7} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_8}. \tag{2.6}$$

Demonstração: A integral $\int_a^b dzf$, dada anteriormente, independerá do caminho se existir uma função G, tal que,

$$\int_a^b dzf = \int_a^b dG = \int_a^b d(G_1 + G_2 i + G_3 j + G_4 k + G_5 l + G_6 li + G_7 lj + G_8 lk) = G(b) - G(a),$$

de modo que o valor dessa diferença dependerá unicamente dos pontos extremos.

Agora, admitindo que existe uma função G, cujas diferenciais totais das suas funções coordenadas são dadas por

$$\begin{aligned} dG_1 &= \frac{\partial G_1}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial G_1}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial G_1}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial G_1}{\partial u_4}du_4 + \frac{\partial G_1}{\partial u_5}du_5 + \frac{\partial G_1}{\partial u_6}du_6 + \frac{\partial G_1}{\partial u_7}du_7 + \frac{\partial G_1}{\partial u_8}du_8 \\ &= f_1 du_1 - f_2 du_2 - f_3 du_3 - f_4 du_4 - f_5 du_5 - f_6 du_6 - f_7 du_7 - f_8 du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dG_2 &= \frac{\partial G_2}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial G_2}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial G_2}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial G_2}{\partial u_4}du_4 + \frac{\partial G_2}{\partial u_5}du_5 + \frac{\partial G_2}{\partial u_6}du_6 + \frac{\partial G_2}{\partial u_7}du_7 + \frac{\partial G_2}{\partial u_8}du_8 \\ &= f_2 du_1 + f_1 du_2 + f_4 du_3 - f_3 du_4 - f_6 du_5 + f_5 du_6 - f_8 du_7 + f_7 du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dG_3 &= \frac{\partial G_3}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial G_3}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial G_3}{\partial u_3}du_3+\frac{\partial G_3}{\partial u_4}du_4+\frac{\partial G_3}{\partial u_5}du_5+\frac{\partial G_3}{\partial u_6}du_6+\frac{\partial G_3}{\partial u_7}du_7+\frac{\partial G_3}{\partial u_8}du_8 \\ &= f_3du_1 - f_4du_2 + f_1du_3 + f_2du_4 - f_7du_5 + f_8du_6 + f_5du_7 - f_6du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dG_4 &= \frac{\partial G_4}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial G_4}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial G_4}{\partial u_3}du_3+\frac{\partial G_4}{\partial u_4}du_4+\frac{\partial G_4}{\partial u_5}du_5+\frac{\partial G_4}{\partial u_6}du_6+\frac{\partial G_4}{\partial u_7}du_7+\frac{\partial G_4}{\partial u_8}du_8 \\ &= f_4du_1 + f_3du_2 - f_2du_3 + f_1du_4 - f_8du_5 - f_7du_6 + f_6du_7 + f_5du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dG_5 &= \frac{\partial G_5}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial G_5}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial G_5}{\partial u_3}du_3+\frac{\partial G_5}{\partial u_4}du_4+\frac{\partial G_5}{\partial u_5}du_5+\frac{\partial G_5}{\partial u_6}du_6+\frac{\partial G_5}{\partial u_7}du_7+\frac{\partial G_5}{\partial u_8}du_8 \\ &= f_5du_1 + f_6du_2 + f_7du_3 + f_8du_4 + f_1du_5 - f_2du_6 - f_3du_7 - f_4du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dG_6 &= \frac{\partial G_6}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial G_6}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial G_6}{\partial u_3}du_3+\frac{\partial G_6}{\partial u_4}du_4+\frac{\partial G_6}{\partial u_5}du_5+\frac{\partial G_6}{\partial u_6}du_6+\frac{\partial G_6}{\partial u_7}du_7+\frac{\partial G_6}{\partial u_8}du_8 \\ &= f_6du_1 - f_5du_2 - f_8du_3 + f_7du_4 + f_2du_5 + f_1du_6 - f_4du_7 + f_3du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dG_7 &= \frac{\partial G_7}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial G_7}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial G_7}{\partial u_3}du_3+\frac{\partial G_7}{\partial u_4}du_4+\frac{\partial G_7}{\partial u_5}du_5+\frac{\partial G_7}{\partial u_6}du_6+\frac{\partial G_7}{\partial u_7}du_7+\frac{\partial G_7}{\partial u_8}du_8 \\ &= f_7du_1 + f_8du_2 - f_5du_3 - f_6du_4 + f_3du_5 + f_4du_6 + f_1du_7 - f_2du_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dG_8 &= \frac{\partial G_8}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial G_8}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial G_8}{\partial u_3}du_3+\frac{\partial G_8}{\partial u_4}du_4+\frac{\partial G_8}{\partial u_5}du_5+\frac{\partial G_8}{\partial u_6}du_6+\frac{\partial G_8}{\partial u_7}du_7+\frac{\partial G_8}{\partial u_8}du_8 \\ &= f_8du_1 - f_7du_2 + f_6du_3 - f_5du_4 + f_4du_5 - f_3du_6 + f_2du_7 + f_1d_u8, \end{aligned}$$

daí seguem as relações

$$f_1 = \frac{\partial G_1}{\partial u_1} = \frac{\partial G_2}{\partial u_2} = \frac{\partial G_3}{\partial u_3} = \frac{\partial G_4}{\partial u_4} = \frac{\partial G_5}{\partial u_5} = \frac{\partial G_6}{\partial u_6} = \frac{\partial G_7}{\partial u_7} = \frac{\partial G_8}{\partial u_8},$$

$$f_2 = \frac{\partial G_2}{\partial u_1} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_2} = -\frac{\partial G_4}{\partial u_3} = \frac{\partial G_3}{\partial u_4} = \frac{\partial G_6}{\partial u_5} = -\frac{\partial G_5}{\partial u_6} = \frac{\partial G_8}{\partial u_7} = -\frac{\partial G_7}{\partial u_8},$$

$$f_3 = \frac{\partial G_3}{\partial u_1} = \frac{\partial G_4}{\partial u_2} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_3} = -\frac{\partial G_2}{\partial u_4} = \frac{\partial G_7}{\partial u_5} = -\frac{\partial G_8}{\partial u_6} = -\frac{\partial G_5}{\partial u_7} = \frac{\partial G_6}{\partial u_8},$$

$$f_4 = \frac{\partial G_4}{\partial u_1} = -\frac{\partial G_3}{\partial u_2} = \frac{\partial G_2}{\partial u_3} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_4} = \frac{\partial G_8}{\partial u_5} = \frac{\partial G_7}{\partial u_6} = -\frac{\partial G_6}{\partial u_7} = -\frac{\partial G_5}{\partial u_8},$$

$$f_5 = \frac{\partial G_5}{\partial u_1} = -\frac{\partial G_6}{\partial u_2} = -\frac{\partial G_7}{\partial u_3} = -\frac{\partial G_8}{\partial u_4} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_5} = \frac{\partial G_2}{\partial u_6} = \frac{\partial G_3}{\partial u_7} = \frac{\partial G_4}{\partial u_8},$$

$$f_6 = \frac{\partial G_6}{\partial u_1} = \frac{\partial G_5}{\partial u_2} = \frac{\partial G_8}{\partial u_3} = -\frac{\partial G_7}{\partial u_4} = -\frac{\partial G_2}{\partial u_5} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_6} = \frac{\partial G_4}{\partial u_7} = -\frac{\partial G_3}{\partial u_8},$$

$$f_7 = \frac{\partial G_7}{\partial u_1} = -\frac{\partial G_8}{\partial u_2} = \frac{\partial G_5}{\partial u_3} = \frac{\partial G_6}{\partial u_4} = -\frac{\partial G_3}{\partial u_5} = -\frac{\partial G_4}{\partial u_6} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_7} = \frac{\partial G_2}{\partial u_8},$$

$$f_8 = \frac{\partial G_8}{\partial u_1} = \frac{\partial G_7}{\partial u_2} = -\frac{\partial G_6}{\partial u_3} = \frac{\partial G_5}{\partial u_4} = -\frac{\partial G_4}{\partial u_5} = \frac{\partial G_3}{\partial u_6} = -\frac{\partial G_2}{\partial u_7} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_8}. \tag{2.7}$$

o que conclui a demonstração.

Os teoremas acima podem ser encarados como os análogos 8-dimensional ao Teorema Integral de Cauchy para um domínio bi-dimensional. Faz-se importante observar que as condições dadas em (2.5) e (2.6) têm em comum as equações de Cauchy-Riemann para funções definidas num espaço bi-dimensional. Sendo estas definidas de acordo com [15], como as **Equações de Cauchy-Riemann Generalizadas**.

Agora, apresentaremos as funções $h(z)$ e $g(z)$, que são definidas em termos da função octoniônica $f(z)$, sendo que as funções coordenadas de $f(z)$ obedecem as relações de Cauchy-Riemann generalizadas (2.5) e (2.6). As funções $h(z)$ e $g(z)$ serão chamadas de derivada octoniônica à esquerda e derivada octoniônica à direita de $f(z)$, respectivamente.

Lema 2.1. *Se f(z) é uma função octoniônica, cujas funções coordenadas são diferenciáveis satisfazendo as relações (2.5), e seja uma função g(z), definida em termos de f(z) por*

$$g(z) = \frac{1}{8}\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} + \frac{\partial f_3}{\partial u_3} + \frac{\partial f_4}{\partial u_4} + \frac{\partial f_5}{\partial u_5} + \frac{\partial f_6}{\partial u_6} + \frac{\partial f_7}{\partial u_7} + \frac{\partial f_8}{\partial u_8}\right)\right.$$

$$+\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}-\frac{\partial f_1}{\partial u_2}-\frac{\partial f_4}{\partial u_3}+\frac{\partial f_3}{\partial u_4}+\frac{\partial f_6}{\partial u_5}-\frac{\partial f_5}{\partial u_6}+\frac{\partial f_8}{\partial u_7}-\frac{\partial f_7}{\partial u_8}\right)i$$

$$+\left(\frac{\partial f_3}{\partial u_1}+\frac{\partial f_4}{\partial u_2}-\frac{\partial f_1}{\partial u_3}-\frac{\partial f_2}{\partial u_4}+\frac{\partial f_7}{\partial u_5}-\frac{\partial f_8}{\partial u_6}-\frac{\partial f_5}{\partial u_7}+\frac{\partial f_6}{\partial u_8}\right)j$$

$$+\left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1}-\frac{\partial f_3}{\partial u_2}+\frac{\partial f_2}{\partial u_3}-\frac{\partial f_1}{\partial u_4}+\frac{\partial f_8}{\partial u_5}+\frac{\partial f_7}{\partial u_6}-\frac{\partial f_6}{\partial u_7}-\frac{\partial f_5}{\partial u_8}\right)k$$

$$+\left(\frac{\partial f_5}{\partial u_1}-\frac{\partial f_6}{\partial u_2}-\frac{\partial f_7}{\partial u_3}-\frac{\partial f_8}{\partial u_4}-\frac{\partial f_1}{\partial u_5}+\frac{\partial f_2}{\partial u_6}+\frac{\partial f_3}{\partial u_7}+\frac{\partial f_4}{\partial u_8}\right)l$$

$$+\left(\frac{\partial f_6}{\partial u_1}+\frac{\partial f_5}{\partial u_2}+\frac{\partial f_8}{\partial u_3}-\frac{\partial f_7}{\partial u_4}-\frac{\partial f_2}{\partial u_5}-\frac{\partial f_1}{\partial u_6}+\frac{\partial f_4}{\partial u_7}-\frac{\partial f_3}{\partial u_8}\right)li$$

$$+\left(\frac{\partial f_7}{\partial u_1}-\frac{\partial f_8}{\partial u_2}+\frac{\partial f_5}{\partial u_3}+\frac{\partial f_6}{\partial u_4}-\frac{\partial f_3}{\partial u_5}-\frac{\partial f_4}{\partial u_6}-\frac{\partial f_1}{\partial u_7}+\frac{\partial f_2}{\partial u_8}\right)lj$$

$$+\left(\frac{\partial f_8}{\partial u_1}+\frac{\partial f_7}{\partial u_2}-\frac{\partial f_6}{\partial u_3}+\frac{\partial f_5}{\partial u_4}-\frac{\partial f_4}{\partial u_5}+\frac{\partial f_3}{\partial u_6}-\frac{\partial f_2}{\partial u_7}-\frac{\partial f_1}{\partial u_8}\right)lk\Bigg] \qquad (2.8)$$

então $\int dzg(z) = f(z)$. *A função g(z) será chamada* **derivada octoniônica à direita** *de f(z), e será denotada por* $g(z) = \frac{df_r(z)}{dz}$.

Demonstração: Façamos, inicialmente a seguinte identificação:

$$g(z) = \tfrac{1}{4}(g_1 + g_2 i + g_3 j + g_4 k + g_5 l + g_6 li + g_7 lj + g_8 lk).$$

Utilizando as regras de multiplicação, e sabendo que $dz = du_1 + du_2 i + du_3 j + du_4 k + du_5 l + du_6 li + du_7 lj + du_8 lk)$, temos então:

$$\int dzg(z) = \int (du_1 + du_2 i + du_3 j + du_4 k + du_5 l + du_6 li + du_7 lj + du_8 lk)$$

$$\frac{1}{4}(g_1 + g_2 i + g_3 j + g_4 k + g_5 l + g_6 li + g_7 lj + g_8 lk)$$

$$\begin{aligned}
=&\frac{1}{8}\int (du_1 g_1 - du_2 g_2 - du_3 g_3 - du_4 g_4 - du_5 g_5 - du_6 g_6 - du_7 g_7 - du_8 g_8)\\
&+(du_1 g_2 + du_2 g_1 + du_3 g_4 - du_4 g_3 - du_5 g_6 + du_6 g_5 - du_7 g_8 + du_8 g_7)i\\
&+(du_1 g_3 - du_2 g_4 + du_3 g_1 + du_4 g_2 - du_5 g_7 + du_6 g_8 + du_7 g_5 - du_8 g_6)j\\
&+(du_1 g_4 + du_2 g_3 - du_3 g_2 + du_4 g_1 - du_5 g_8 - du_6 g_7 + du_7 g_6 + du_8 g_5)k\\
&+(du_1 g_5 + du_2 g_6 + du_3 g_7 + du_4 g_8 + du_5 g_1 - du_6 g_2 - du_7 g_3 - du_8 g_4)l\\
&+(du_1 g_6 - du_2 g_5 - du_3 g_8 + du_4 g_7 + du_5 g_2 + du_6 g_1 - du_7 g_4 + du_8 g_3)li\\
&+(du_1 g_7 + du_2 g_8 - du_3 g_5 - du_4 g_6 + du_5 g_3 + du_6 g_4 + du_7 g_1 - du_8 g_2)lj\\
&+(du_1 g_8 - du_2 g_7 + du_3 g_6 - du_4 g_5 + du_5 g_4 - du_6 g_3 + du_7 g_2 + du_8 g_1)lk
\end{aligned}$$

Usando agora as relações (2.5)em $dzg(z)$, temos que $\int dzg(z)$ é dada por

$$=\frac{1}{8}\int 4\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial f_1}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial f_1}{\partial u_3}du_3+\frac{\partial f_1}{\partial u_4}du_4+\frac{\partial f_1}{\partial u_5}du_5+\frac{\partial f_1}{\partial u_6}du_6+\frac{\partial f_1}{\partial u_7}du_7+\frac{\partial f_1}{\partial u_8}du_8\right)$$

$$+8\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_2}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_2}{\partial u_4}du_4+\frac{\partial f_2}{\partial u_5}du_5+\frac{\partial f_2}{\partial u_6}du_6+\frac{\partial f_2}{\partial u_7}du_7+\frac{\partial f_2}{\partial u_8}du_8\right)i$$

$$+8\left(\frac{\partial f_3}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_3}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_3}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_3}{\partial u_4}du_4+\frac{\partial f_3}{\partial u_5}du_5+\frac{\partial f_3}{\partial u_6}du_6+\frac{\partial f_2}{\partial u_7}du_7+\frac{\partial f_3}{\partial u_8}du_8\right)j$$

$$+8\left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial f_4}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial f_4}{\partial u_3}du_3+\frac{\partial f_4}{\partial u_4}du_4+\frac{\partial f_4}{\partial u_5}du_5+\frac{\partial f_4}{\partial u_6}du_6+\frac{\partial f_4}{\partial u_7}du_7+\frac{\partial f_4}{\partial u_8}du_8\right)k$$

$$+8\left(\frac{\partial f_5}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial f_5}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial f_5}{\partial u_3}du_3+\frac{\partial f_5}{\partial u_4}du_4+\frac{\partial f_5}{\partial u_5}du_5+\frac{\partial f_5}{\partial u_6}du_6+\frac{\partial f_5}{\partial u_7}du_7+\frac{\partial f_5}{\partial u_8}du_8\right)l$$

$$+8\left(\frac{\partial f_6}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial f_6}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial f_6}{\partial u_3}du_3+\frac{\partial f_6}{\partial u_4}du_4+\frac{\partial f_6}{\partial u_5}du_5+\frac{\partial f_6}{\partial u_6}du_6+\frac{\partial f_6}{\partial u_7}du_7+\frac{\partial f_6}{\partial u_8}du_8\right)li$$

$$+8\left(\frac{\partial f_7}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial f_7}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial f_7}{\partial u_3}du_3+\frac{\partial f_7}{\partial u_4}du_4+\frac{\partial f_7}{\partial u_5}du_5+\frac{\partial f_2}{\partial u_6}du_6+\frac{\partial f_7}{\partial u_7}du_7+\frac{\partial f_7}{\partial u_8}du_8\right)lj$$

$$+8\left(\frac{\partial f_8}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial f_8}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial f_8}{\partial u_3}du_3+\frac{\partial f_8}{\partial u_4}du_4+\frac{\partial f_8}{\partial u_5}du_5+\frac{\partial f_8}{\partial u_6}du_6+\frac{\partial f_8}{\partial u_7}du_7+\frac{\partial f_8}{\partial u_8}du_8\right)lk,$$

assim, aplicando a regra da cadeia, serão obtidas as diferenciais totais das funções coordenadas, ou seja,

$$\begin{aligned}\int dzg(z) &= \int(df_1+df_2i+df_3j+df_4k+df_5l+df_6li+df_7lj+df_8lk)\\ &= f_1+f_2i+f_3j+f_4k+f_5l+f_6li+f_7lj+f_8lk=f(z),\end{aligned}$$

o que demonstra o lema.

Lema 2.2. *Se f(z) é uma função octoniônica, com funções coordenadas diferenciáveis satisfazendo as relações (2.6), e seja uma função h(z), definida em termos de f(z) por*

$$h(z) = \frac{1}{8}\Bigg[\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2} + \frac{\partial f_3}{\partial u_3} + \frac{\partial f_4}{\partial u_4} + \frac{\partial f_5}{\partial u_5} + \frac{\partial f_6}{\partial u_6} + \frac{\partial f_7}{\partial u_7} + \frac{\partial f_8}{\partial u_8}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1} - \frac{\partial f_1}{\partial u_2} + \frac{\partial f_4}{\partial u_3} - \frac{\partial f_3}{\partial u_4} - \frac{\partial f_6}{\partial u_5} + \frac{\partial f_5}{\partial u_6} - \frac{\partial f_8}{\partial u_7} + \frac{\partial f_7}{\partial u_8}\right)i$$

$$+\left(\frac{\partial f_3}{\partial u_1} - \frac{\partial f_4}{\partial u_2} - \frac{\partial f_1}{\partial u_3} + \frac{\partial f_2}{\partial u_4} - \frac{\partial f_7}{\partial u_5} + \frac{\partial f_8}{\partial u_6} + \frac{\partial f_5}{\partial u_7} - \frac{\partial f_6}{\partial u_8}\right)j$$

$$+\left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1} + \frac{\partial f_3}{\partial u_2} - \frac{\partial f_2}{\partial u_3} - \frac{\partial f_1}{\partial u_4} - \frac{\partial f_8}{\partial u_5} - \frac{\partial f_7}{\partial u_6} + \frac{\partial f_6}{\partial u_7} + \frac{\partial f_5}{\partial u_8}\right)k$$

$$+\left(\frac{\partial f_5}{\partial u_1} + \frac{\partial f_6}{\partial u_2} + \frac{\partial f_7}{\partial u_3} + \frac{\partial f_8}{\partial u_4} - \frac{\partial f_1}{\partial u_5} - \frac{\partial f_2}{\partial u_6} - \frac{\partial f_3}{\partial u_7} - \frac{\partial f_4}{\partial u_8}\right)l$$

$$+\left(\frac{\partial f_6}{\partial u_1} - \frac{\partial f_5}{\partial u_2} - \frac{\partial f_8}{\partial u_3} + \frac{\partial f_7}{\partial u_4} + \frac{\partial f_2}{\partial u_5} - \frac{\partial f_1}{\partial u_6} - \frac{\partial f_4}{\partial u_7} + \frac{\partial f_3}{\partial u_8}\right)li$$

$$+\left(\frac{\partial f_7}{\partial u_1} + \frac{\partial f_8}{\partial u_2} - \frac{\partial f_5}{\partial u_3} - \frac{\partial f_6}{\partial u_4} + \frac{\partial f_3}{\partial u_5} + \frac{\partial f_4}{\partial u_6} - \frac{\partial f_1}{\partial u_7} - \frac{\partial f_2}{\partial u_8}\right)lj$$

$$+\left(\frac{\partial f_8}{\partial u_1} - \frac{\partial f_7}{\partial u_2} + \frac{\partial f_6}{\partial u_3} - \frac{\partial f_5}{\partial u_4} + \frac{\partial f_4}{\partial u_5} - \frac{\partial f_3}{\partial u_6} + \frac{\partial f_2}{\partial u_7} - \frac{\partial f_1}{\partial u_8}\right)lk\Bigg] \tag{2.9}$$

então $\int h(z)dz = f(z)$. *Onde a função h(z) será chamada de* **derivada octoniônica à esquerda** *de f(z), e denotada por* $h(z) = \frac{df_l(z)}{dz}$.

Demonstração: Façamos, inicialmente a seguinte identificação:

$$h(z) = \tfrac{1}{8}(h_1 + h_2 i + h_3 j + h_4 k + h_5 l + h_6 li + h_7 lj + h_8 lk).$$

Usando as regras de multiplicação, e sabendo que $dz = du_1 + du_2 i + du_3 j + du_4 k + du_5 l + du_6 li + du_7 lj + du_8 lk$, temos então:

$$\int h(z)dz = \int \frac{1}{8}(h_1 + h_2 i + h_3 j + h_4 k + h_5 l + h_6 li + h_7 lj + h_8 lk)$$

$$(du_1 + du_2 i + du_3 j + du_4 k + du_5 l + du_6 li + du_7 lj + du_8 lk)$$

$$\begin{aligned}
=&\frac{1}{8}\int (h_1 du_1 - h_2 du_2 - h_3 du_3 - h_4 du_4 - h_5 du_5 - h_6 du_6 - h_7 du_7 - h_8 du_8)\\
&+(h_2 du_1 + h_1 du_2 - h_4 du_3 + h_3 du_4 + h_6 du_5 - h_5 du_6 + h_8 du_7 - h_7 du_8)i\\
&+(h_3 du_1 + h_4 du_2 + h_1 du_3 - h_2 du_4 + h_7 du_5 - h_8 du_6 - h_5 du_7 + h_6 du_8)j\\
&+(h_4 du_1 - h_3 du_2 + h_2 du_3 + h_1 du_4 + h_8 du_5 + h_7 du_6 - h_6 du_7 - h_5 du_8)k\\
&+(h_5 du_1 - h_6 du_2 - h_7 du_3 - h_8 du_4 + h_1 du_5 + h_2 du_6 + h_3 du_7 + h_4 du_8)l\\
&+(h_6 du_1 + h_5 du_2 + h_8 du_3 - h_7 du_4 - h_2 du_5 + h_1 du_6 + h_4 du_7 - h_3 du_8)li\\
&+(h_7 du_1 - h_8 du_2 + h_5 du_3 + h_6 du_4 - h_3 du_5 - h_4 du_6 + h_1 du_7 + h_2 du_8)lj\\
&+\int (h_8 du_1 + h_7 du_2 - h_6 du_3 + h_5 du_4 - h_4 du_5 + h_3 du_6 - h_2 du_7 + h_1 du_8)lk
\end{aligned}$$

Usando agora as relações (2.6) no fator $dzh(z)$, temos que $\int dzh(z)$ é dada por,

$$=\frac{1}{8}\int 8\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_1}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_1}{\partial u_4}du_4 + \frac{\partial f_1}{\partial u_5}du_5 + \frac{\partial f_1}{\partial u_6}du_6 + \frac{\partial f_1}{\partial u_7}du_7 + \frac{\partial f_1}{\partial u_8}du_8\right)$$

$$+8\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_2}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_2}{\partial u_4}du_4 + \frac{\partial f_2}{\partial u_5}du_5 + \frac{\partial f_2}{\partial u_6}du_6 + \frac{\partial f_2}{\partial u_7}du_7 + \frac{\partial f_2}{\partial u_8}du_8\right)i$$

$$+8\left(\frac{\partial f_3}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_3}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_3}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_3}{\partial u_4}du_4 + \frac{\partial f_3}{\partial u_5}du_5 + \frac{\partial f_3}{\partial u_6}du_6 + \frac{\partial f_2}{\partial u_7}du_7 + \frac{\partial f_3}{\partial u_8}du_8\right)j$$

$$+8\left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_4}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_4}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_4}{\partial u_4}du_4 + \frac{\partial f_4}{\partial u_5}du_5 + \frac{\partial f_4}{\partial u_6}du_6 + \frac{\partial f_4}{\partial u_7}du_7 + \frac{\partial f_4}{\partial u_8}du_8\right)k$$

$$+8\left(\frac{\partial f_5}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_5}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_5}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_5}{\partial u_4}du_4 + \frac{\partial f_5}{\partial u_5}du_5 + \frac{\partial f_5}{\partial u_6}du_6 + \frac{\partial f_5}{\partial u_7}du_7 + \frac{\partial f_5}{\partial u_8}du_8\right)l$$

$$+8\left(\frac{\partial f_6}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_6}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_6}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_6}{\partial u_4}du_4 + \frac{\partial f_6}{\partial u_5}du_5 + \frac{\partial f_6}{\partial u_6}du_6 + \frac{\partial f_6}{\partial u_7}du_7 + \frac{\partial f_6}{\partial u_8}du_8\right)li$$

$$+8\left(\frac{\partial f_7}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_7}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_7}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_7}{\partial u_4}du_4 + \frac{\partial f_7}{\partial u_5}du_5 + \frac{\partial f_2}{\partial u_6}du_6 + \frac{\partial f_7}{\partial u_7}du_7 + \frac{\partial f_7}{\partial u_8}du_8\right)lj$$

$$+8\left(\frac{\partial f_8}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_8}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_8}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_8}{\partial u_4}du_4 + \frac{\partial f_8}{\partial u_5}du_5 + \frac{\partial f_8}{\partial u_6}du_6 + \frac{\partial f_8}{\partial u_7}du_7 + \frac{\partial f_8}{\partial u_8}du_8\right)lk,$$

assim, aplicando a regra da cadeia, serão obtidas as diferenciais totais das funções coordenadas, ou seja,

$$\begin{aligned}\int h(z)dz &= \int (df_1 + df_2 i + df_3 j + df_4 k + df_5 l + df_6 li + df_7 lj + df_8 lk)\\ &= f_1 + f_2 i + f_3 j + f_4 k + f_5 l + f_6 li + f_7 lj + f_8 lk = f(z),\end{aligned}$$

Observa-se que é possível reproduzir as definições de derivadas octoniônicas à direita e à esquerda, usando conjugação direta do operador octoniônico Γ da **Teoria de Fueter** [15] dado por (2.2), sendo assim é possível obter respectivamente, para (2.8) e (2.9), as formas que seguem:

$$8g(z) = \bar{\Gamma} f \quad ou \quad \int dz g(z) = \frac{1}{8} \int dz \bar{\Gamma} f = f, \tag{2.10}$$

e

$$8h(z) = f \bar{\Gamma} \quad ou \quad \int h(z) dz = \frac{1}{8} \int f \bar{\Gamma} dz = f. \tag{2.11}$$

Capítulo 3

Função Exponencial e Trigonométrica do tipo octoniônico

O presente capítulo tem por objetivo generalizar a função exponencial e as funções trigonométricas de um número complexo z vistas em [2], [16], para um número octônionico o, além disso, após a generalização, notaremos que tanto a função exponencial como as funções trigonométricas de um número octônio serão também periódicas, o que é um fato relevante, para eventuais possíveis aplicações da equação da onda, e outras aplicações à Física Teórica de várias dimensões.

3.1 Função Exponencial

Sabemos que a função real e^x goza das seguintes propriedades:

(i) $(e^x)' = e^x$

(ii)$e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$

a representação em Série de Maclaurin de e^x mostra que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... \tag{3.1}$$

mas a função exponencial para o complexo $z = x+yi$ é representado por e^z e definida, assim, em termos das funções reais e^x, $seny$ e $cosy$, como segue:

$$e^z = e^x(cosy + iseny) \tag{3.2}$$

mas $e^z = e^x e^{yi}$, assim obtemos $e^{yi} = cosy + iseny$ chamada de fórmula de Euller.

De acordo com as equações de Riemann-Cauchy e^z é analítica para qualquer z

Sendo assim, a representação trigonométrica de um número complexo $z = x + yi$ pode ser indicada como segue:

$$z = r(cos\theta + isen\theta) = re^{i\theta} \tag{3.3}$$

Além disso,

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{cos^2\theta + sen^2\theta} = 1 \tag{3.4}$$

Analisando o comportamento de e^{iy} quando $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, $y = \pi$, $y = \frac{3\pi}{2}$ e $y = 2\pi$, segue que:

$$\begin{aligned} e^{2\pi i} &= 1 \\ e^{\pi i} = e^{-\pi i} &= -1 \\ e^{\frac{\pi i}{2}} &= i \\ e^{\frac{-\pi i}{2}} &= -i. \end{aligned}$$

Assim, é imediato que:

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z, \tag{3.5}$$

o que mostra que e^z é imaginária de período $2\pi i$. Temos então

$$e^{z+2n\pi i} = e^z, (n = 0, 1, ...) \tag{3.6}$$

Devido a periodicidade acima determinada, todos os valores de e^z apresentam-se na faixa

$$-\pi < y \leq \pi \tag{3.7}$$

infinita, que é chamada de região fundamental de e^z, [7].

3.2 Funções Trigonométricas

Da fórmula de Euller, temos que:

$$cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, senx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{3.8}$$

Sendo assim, para um número complexo $z = x + yi$, temos:

$$cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, senz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{3.9}$$

Além disso, das definições conhecidas do Cálculo Real, fazemos:

$$tgz = \frac{senz}{cosz}$$

$$cotgz = \frac{cosz}{senz}$$

$$secz = \frac{1}{cosz}$$

$$cossecz = \frac{1}{senz}$$

Como e^z é analítica para qualquer z, o mesmo acontece com as funções $cosz$ e $senz$. As funções tgz e $secz$, são analítica com exceção nos pontos onde $cosz$ se anula, e $cotgz$, $cossecz$ são analíticas exceto onde $senz$ se anula.

As funções $cosz$ e $secz$ como no caso das funções reais, são pares, enquanto $senz$, tgz, $cotgz$ e $cossecz$ são ímpares. Sendo assim:

$$cos(-z) = cosz, sec(-z) = secz$$

$$sen(-z) = -senz, cossec(-z) = -cossecz$$

$$tg(-z) = -tgz, cotg(-z) = -cotgz$$

Sabemos que a função exponencial é periódica, as funções trigonométricas, conseqüentemente também serão periódicas, assim:

$$cos(z \pm 2n\pi) = cosz$$

$$sen(z \pm 2n\pi) = senz$$

$$tg(z \pm n\pi) = tgz$$

$$cotg(z \pm n\pi) = cotgz$$

onde $n = 0, 1, ...$

Com todas a propriedades acima válidas para funções trigonométricas de $z = x + yi$. Temos:

$$\frac{dcosz}{dz} = -senz$$

$$\frac{dsenz}{dz} = cosz$$

$$\frac{dtgz}{dz} = sec^2 z$$

Além disso,

$$cos(z_1 \pm z_2) = cos(z_1)cos(z_2) \mp sen(z_1)sen(z_2) \tag{3.10}$$

$$sen(z_1 \pm z_2) = sen(z_1)cos(z_2) \pm sen(z_2)cos(z_1) \tag{3.11}$$

e

$$sen^2 z + cos^2 z = 1$$

Da fórmula de Euller, que é válida para valores complexos, segue que:

$$e^{iz} = cosz + isenz \tag{3.12}$$

o que nos dá, aplicando as fórmulas (3.11) e (3.12)

$$cos(x + yi) = cosxcosyi - senxsenyi \tag{3.13}$$

$$sen(x + yi) = senxcosyi + cosxsenyi \tag{3.14}$$

De (3.8) segue-se

$$cosiy = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = coshy, seniy = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = isenhy \tag{3.15}$$

Sendo assim obtemos as relações abaixo

$$cos(x + yi) = cosxcoshy - isenxsenhy$$

$$sen(x + yi) = senxcoshy + icosxsenhy$$

que serão fundamentais para o cálculo numérico de $cosz$ e $senz$.

O co-seno hiperbólico e o seno hiperbólico de uma variável complexa z são definidos pelas fórmulas semelhantes às do Cálculo Real, mostrados em [14] e [2], e definidos por

$$coshz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, senhz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \tag{3.16}$$

Usando novamente as fórmulas (3.8) agora em (3.17), obtemos:

$$coshz = cos(iz), senhz = -isen(iz) \tag{3.17}$$

Como no Cálculo Real, definimos também

$$tghz = \frac{senhz}{coshz}$$
$$cothz = \frac{coshz}{senhz}$$
$$sechz = \frac{1}{coshz}$$
$$cossechz = \frac{1}{senhz}$$

3.3 Extensão do Teorema de Moivre para octônios

A extensão do Teorema de Moivre para quatérnios [4], e para octônios [15], que será mostrada, rediscutida e ampliada nesta seção, terá por objetivo principal uma análise de outras funções que decorrem imediatamente da função exponencial do tipo octoniônica. São elas as Funções Trigonométricas e Exponencial em sua forma hipercomplexa.

Além disso, a presente seção tem por objetivo determinar a Função Exponencial do tipo octniônica, a fim de posteriomente determinar a sua hiperperiodicidade, além de determinar as Funções Trigonométricas e Logarítmica do tipo octoniônica. Para isso, fez-se necessário usar o procedimento mostrado em [15].

O uso do procedimentos apresentados em [3] foi conservado, porém foi necessário usar fórmula $e^{\vec{u}} = \left\{ cos|\vec{u}| + (\vec{u})\left(\frac{sen|\vec{u}|}{|\vec{u}|}\right)\right\}$ também sob a forma abaixo:

$$e^{\vec{-u}} = \left\{ cos|\vec{u}| - (\vec{u})\left(\frac{sen|\vec{u}|}{|\vec{u}|}\right)\right\}.$$

Afim de determinar as Funções Trigonométricas do tipo octoniônica.

Trata-se agora de generalizar a relação de Eulle para octônios, para isso faz-se necessário o uso de algumas definições que serão dadas a seguir.

Definição 3.1. *Sejam os octônios* $p = p_1 + p_2 i + p_3 j + p_4 k + p_5 l + p_6 li + p_7 lj + p_8 lk$ *e*

$q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k + q_5l + q_6li + q_7lj + q_8lk$. *O produto interno de p e q será dado por:*

$$\begin{aligned} pq &= p_1q_1 + p_2q_2i + p_1q_3j + p_1q_4k + p_1q_5l + p_1q_6li + p_1q_7lj + p_1q_8lk \\ &+p_2q_1i - p_2q_2 + p_2q_3k - p_2q_4j - p_2q_5li + p_2q_6l - p_2q_7lk + p_2q_8lj \\ &+p_3q_1j - p_3q_2k - p_3q_3 + p_3q_4i - p_3q_5lj + p_3q_6lk + p_3q_7l - p_3q_8li \\ &+p_4q_1k + p_4q_2j - p_4q_3i - p_4q_4 - p_4q_5lk - p_4q_6lj + p_4q + 7li + p_4q_8l \\ &+p_5q_1l + p_5q_2li + p_5q_3lj + p_5q_4lk - p_5q_5 - p_5q_6i - p_5q_7j - p_5q_8k \\ &+p_6q_1li - p_6q_2l - p_6q_3lk + p_6q_4lj + p_6q_5i - p_6q_6 - p_6q_7k + p_6q_8j \\ &+p_7q_1lj + p_7q_2lk - p_7q_3l - p_7q_4li + p_7q_5j + p_7q_6k - p_7q_7 - p_7q_8i \\ &+p_8q_1lk - p_8q_2lj + p_8q_3li - p_8q_4l + p_8q_5k - p_8q_6j + p_8q_7i - p_8q_8 \end{aligned}$$

As definições que seguem, de Produto Escalar e Produto Vetorial, serão importantes na caracterização de produtos de octônios, são elas,

Definição 3.2. ***(Produto Escalar)*** *Seja uma base ortonormal positiva $(i, j, k) \in \mathbb{R}^3$. Consideremos dois vetores $p = (x_1, y_1, z_1)$ e $q = (x_2, y_2, z_2)$ relativos a esta base, o produto interno entre p e q é dado por:*

$$\vec{p}.\vec{q} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Definição 3.3. ***(Produto Vetorial)*** *Seja uma base ortonormal positiva $(i, j, k) \in \mathbb{R}^3$. Podemos escrever um vetor $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ em relação a suas componentes como*

$$\overrightarrow{p} = i(px) + j(py) + k(pz)$$

Consideremos agora, de acordo com as definições dadas anteriormente, torna-se possível escrever o produto vetorial de $\vec{p} = p_1 + p_2i + p_3j + p_4k + p_5l + p_6li + p_7lj + p_8lk$ e $\vec{q} = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k + q_5l + q_6li + q_7lj + q_8lk$, ou seja, $\vec{p} \times \overrightarrow{q}$ em um espaço euclidiando 8-dimensional da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \vec{p} \times \vec{q} &= (p_3q_4 - p_4q_3 + p_6q_5 - p_5q_5 + p_8q_7 - p_7q_8)i \\ &+ (p_4q_2 - p_2q_4 + p_6q_8 - p_8q_6 + p_7q_5 - p_5q_7)j \\ &+ (p_2q_3 - p_3q_2 + p_7q_6 - p_6q_7 + p_8q_5 - p_5q_8)k \\ &+ (p_2q_6 - p_6q_2 + p_3q_7 - p_7q_3 + p_4q_8 - p_8q_4)l \\ &+ (p_4q_7 - p_7q_4 + p_5q_2 - p_2q_5 + p_8q_3 - p_3q_8)li \\ &+ (p_2q_8 - p_8q_2 + p_5q_3 - p_3q_5 + p_6q_4 - p_4q_6)lj \\ &+ (p_3q_6 - p_6q_3 + p_5q_4 - p_4q_5 + p_7q_2 - p_2q_7)lk \end{aligned}$$

Sendo assim, o respctivo produto escalar de $\vec{p}$ e $\vec{q}$ será dado por:

$$\vec{p}.\vec{q} = p_2q_2 + p_3q_3 + p_4q_4 + p_5q_5 + p_6q_6 + p_7q_7.$$

Logo, podemos escrever,

$$p.q = p_1q_1 + p_1(q_2+q_3+q_4+q_5+q_6+q_7+q_8) + q_1(p_2+p_3+p_4+p_5+p_6+p_7+p_8) + (-\vec{p}.\vec{q}) + \vec{p}\times\vec{q}$$

ou ainda,

$$p.q = p_1q_1 + p_1(\vec{q}) + q_1(\vec{p}) - \vec{p}.\vec{q} + \vec{p}\times\vec{q}$$

Tomando agora o número octônio $o = u_1 + u_2i + u_3j + u_4k + u_5l + u_6li + u_7lj + u_8lk$.Trata-se agora de fazer uma generalização da função exponencial complexa, sendo assim, podemos escrever (3.1) da seguinte forma:

$$e^o = 1 + o + \frac{o^2}{2!} + \frac{o^3}{3!} + \ldots + \frac{o^x}{x!} + \ldots \tag{3.18}$$

que é chamada **função exponencial octoniônica**. A fim de obter uma fórmula conveniente para a função exponencial octoniônica, assim como foi encontrada para a função exponencial complexa como em (3.2), consideremos a parte vetorial do número o, ou seja, $\overrightarrow{u} = u_2i + u_3j + u_4k + u_5l + u_6li + u_7lj + u_8lk$ assim, podemos escrever o número o da seguinte forma $o = u_1 + \overrightarrow{u}$. Procedendo assim, os termos em (3.18) podem ser calculados através de uma expansão binomial. Faz-se importante mencionar que a função exponencial do tipo octoniônica (3.18) admite representação única, uma vez que $o^3 = oo^2 = o^2o$, e também verificou-se que $o^5 = o^2o^3 = o^3o^2$, garantindo a unicidade.

Recorremos então a

Definição 3.4. *Definimos uma expansão binomial de uma soma de números reais a e b como segue*

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n+1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{1.2.3\ldots(n-1)n}b^n \tag{3.19}$$

onde,

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Assim, a expansão terá a forma;

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} a^{n-r}b^r \tag{3.20}$$

Agora, usando a fórmula (3.18), e substituindo $(u_1 + \vec{u})$, teremos:

$$o^0 = 1$$

$$o^1 = u_1 + \vec{u}$$

$$o^2 = (u_1 + \vec{u})^2 = \sum_{r=0}^{2} \begin{pmatrix} 2 \\ r \end{pmatrix} u_1^{2-r} (\vec{u})^r = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u_1^2 (\vec{u})^0 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u_1 (\vec{u}) + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} u_1^0 (\vec{u})^2$$

mas,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$$

Logo, teremos a expresão $o^2 = u_1^2 + 2u_1\vec{u} + (\vec{u})^2$. Por outro lado, temos:

$$(\vec{u})^2 = -u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 - u_5^2 - u_6^2 - u_7^2 - u_8^2 = -|\vec{u}|^2$$

Daí segue que:

$$o^2 = u_1^2 + 2u_1\vec{u} - |\vec{u}|^2.$$

Analogamente é possível determinar os termos $o^3, o^4, \ldots$, com isso os temos representados na série (3.19) serão dados por:

$$\frac{o^2}{2!} = (u_1 + \vec{u})^2 = \frac{u_1^2}{2!} + \frac{2u_1\vec{u}}{2!} - \frac{\vec{u}^2}{2!} = \frac{u_1^2}{2!} + u_1\vec{u} - \frac{|\vec{u}|^2}{2!}$$

$$\frac{o^3}{3!} = \frac{u_1^3}{3!} - \frac{3u_1|\vec{u}|^2}{3!} + \frac{3u_1^2\vec{u}}{3!} - \frac{|\vec{u}^3|}{3!} = \frac{u_1^3}{3!} + \frac{u_1^2\vec{u}}{2!} - \frac{u_1|\vec{u}|^2}{2!} - \frac{|\vec{u}|^3}{3!}$$

$$\frac{o^4}{4!} = \frac{u_1^4}{4!} + \frac{4u_1^3\vec{u}}{4!} + \frac{6u_1|\vec{u}|^2}{4!} + \frac{4u_1|\vec{u}|^3}{4!} + \frac{|\vec{u}|^4}{4!} = \frac{u_1^4}{4!} + \frac{u_1^3|\vec{u}|}{3!} - \frac{u_1^2|\vec{u}|^2}{2!2!} - \frac{u_1|\vec{u}|^3}{3!} + \frac{|\vec{u}|^4}{4!}$$

$$\frac{o^5}{5!} = \frac{u_1^5}{5!} - \frac{5u_1^4|\vec{u}|}{5!} - \frac{10u_1^3|\vec{u}|^2}{5!} - \frac{10u_1^2|\vec{u}|^3}{5!} + \frac{5u_1|\vec{u}|^4}{5!} + \frac{|\vec{u}|^5}{5!} = \frac{u_1^5}{5!} + \frac{u_1^4\vec{u}}{4!} - \frac{u_1^3|\vec{u}|^2}{3!2!2!} - \frac{u_1|\vec{u}|^3}{3!2!} + \frac{u_1|\vec{u}|^4}{4!} + \frac{|\vec{u}|^5}{5!}$$

$$\begin{aligned} \frac{o^6}{6!} &= \frac{u_1^6}{6!} + \frac{6u_1^5\vec{u}}{6!} - \frac{6!u_1^5|\vec{u}|^2}{4!2!6!} - \frac{6!u_1^{3|\vec{u}|^3}}{3!3!6!} + \frac{6u_1^2|\vec{u}|^4}{2!4!6!} + \frac{6!u_1|\vec{u}|^5}{6!} - \frac{|\vec{u}|^6}{6!} \\ &= \frac{u_1^6}{6!} + \frac{u_1^5\vec{u}}{5!} - \frac{u_1^4|\vec{u}|^2}{4!2!} - \frac{u_1^3|\vec{u}|^3}{3!3!} + \frac{u_1^2|\vec{u}|^4}{2!4!} + \frac{u_1|\vec{u}|^5}{5!} + \frac{|\vec{u}|^6}{6!} \end{aligned}$$

Usando os resultados acima é possível definir (3.19), como segue:

$$e^o = 1 + u_1 + \vec{u} + \frac{u_1^2}{2!} + u_1\vec{u} - \frac{|\vec{u}|^2}{2!} + \frac{u_1^3}{3!} + \frac{u_1^2\vec{u}}{2!} - \frac{u_1|\vec{u}|^2}{2!} - \frac{|\vec{u}|^3}{3!} + \frac{u_1^4}{4!} + \frac{u_1^3\vec{u}}{3!}$$

$$-\frac{u_1^2|\vec{u}|^2}{2!2!} - \frac{u_1|\vec{u}|^3}{3!} + \frac{|\vec{u}|^4}{4!} + \frac{u_1^5}{5!} + \frac{u_1^4\vec{u}}{4!} - \frac{u_1^3|\vec{u}|^2}{3!2!2!} - \frac{u_1^2|\vec{u}|^3}{3!2!} + \frac{u_1|\vec{u}|^4}{4!} + \frac{|\vec{u}|^5}{5!} +$$

$$+\frac{u_1^6}{6!}+\frac{u_1^5\vec{u}}{5!}-\frac{u_1^4|\vec{u}|^2}{4!2!}-\frac{u_1^3|\vec{u}|^3}{3!3!}+\frac{u_1^2|\vec{u}|^4}{2!4!}+\frac{u_1|\vec{u}|^5}{5!}+\frac{|\vec{u}|^6}{6!},\dots\,. \tag{3.21}$$

Agrupando termos, temos:

$$\begin{aligned} e^o =&\left(1-\frac{|\vec{u}|^2}{2!}+\frac{|\vec{u}|^4}{4!}-\frac{|\vec{u}|^6}{6!}+\dots\right)+\left(u_1-\frac{u_1|\vec{u}|^2}{2!}+\frac{u_1|\vec{u}|^4}{4!}+\dots\right)+\left(\frac{u_1^2}{2!}-\frac{u_1^2|\vec{u}|^2}{2!2!}+\frac{u_1^2|\vec{u}|^4}{2!4!}-\dots\right)\\ &+\left(\frac{u_1^3}{3!}-\frac{u_1^3|\vec{u}|^2}{3!2!2!}+\dots\right)+\left(\frac{u_1^4}{4!}-\frac{u_1^4|\vec{u}|^2}{4!2!}+\dots\right)+\left(\vec{u}-\frac{|\vec{u}|^3}{3!}+\frac{|\vec{u}^5|}{5!}-\dots\right)\\ &+\left(u_1\vec{u}-\frac{u_1|\vec{u}|^3}{3!}+\frac{u_1|\vec{u}|^5}{5!}-\dots\right)+\left(\frac{u_1^2\vec{u}}{2!}-\frac{u_1^2|\vec{u}|^3}{2!3!}+\dots\right)+\left(\frac{u_1^3\vec{u}}{3!}-\frac{u_1^3|\vec{u}|^3}{3!3!}+\dots\right)\\ &+\left(\frac{u_1^4\vec{u}}{4!}-\dots\right)+\left(\frac{u_1^5}{5!}-\dots\right)+\left(\frac{u_1^5\vec{u}}{5!}-\dots\right)+\left(\frac{u_1^6}{6!}-\dots\right)+\dots\,. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Nota-se que os primeiros termos dos cinco primeiros grupos de somas infinitas em (3.22) são colocados em evidência. Sendo assim,

$$\begin{aligned} e^o =&\left(1+u_1+\frac{u_1^2}{2!}+\frac{u_1^3}{3!}+\frac{u_1^4}{4!}+\frac{u_1^5}{5!}+\frac{u_1^6}{6!}+\dots\right)\left(1-\frac{|\vec{u}|^2}{2!}+\frac{|\vec{u}|^4}{4!}-\frac{|\vec{u}|^6}{6!}+\dots\right)\\ &+\left(\vec{u}+u_1\vec{u}+\frac{u_1^2\vec{u}}{2!}+\frac{u_1^3\vec{u}}{3!}+\frac{u_1^4\vec{u}}{4!}+\frac{u_1^5\vec{u}}{5!}+\dots\right)-\frac{|\vec{u}|^3}{3!}\left(1+u_1+\frac{u_1^2}{2!}+\frac{u_1^3}{3!}+\dots\right)\\ &+\frac{|\vec{u}|^5}{5!}\left(1+u_1+\frac{u_1^2}{2!}+\frac{u_1^3}{3!}+\dots\right)-\dots\,. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Considerando os três últimos grupos em (3.23), podemos colocar o termo $\vec{u}$ em evidência o que nos dá

$$\begin{aligned} e^o =&\left(1+u_1+\frac{u_1^2}{2!}+\frac{u_1^3}{3!}+\frac{u_1^4}{4!}+\frac{u_1^5}{5!}+\frac{u_1^6}{6!}+\dots\right)\left(1-\frac{|\vec{u}|^2}{2!}+\frac{|\vec{u}|^4}{4!}-\frac{|\vec{u}|^6}{6!}+\dots\right)\\ &+\vec{u}\Bigg\{\left(1+u_1+\frac{u_1^2}{2!}+\frac{u_1^3}{3!}+\frac{u_1^4}{4!}+\frac{u_1^5}{5!}\dots\right)-\frac{|\vec{u}|^2}{3!}\left(1+u_1+\frac{u_1^2}{2!}+\frac{u_1^3}{3!}+\dots\right)\\ &+\frac{|\vec{u}|^4}{5!}\left(1+u_1+\frac{u_1^2}{2!}+\frac{u_1^3}{3!}+\frac{u_1^4}{4!}+\dots\right)-\dots\Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Como o primeiro termo de (3.24) se repete em todos os grupos, é possível então colocá-lo em evidência

$$e^{o} = \left(1 + u_1 + \frac{u_1^2}{2!} + \frac{u_1^3}{3!} + \frac{u_1^4}{4!} + \frac{u_1^5}{5!} + \frac{u_1^6}{6!} + \ldots\right)\left\{\left(1 - \frac{|\vec{u}|^2}{2!} + \frac{|\vec{u}|^4}{4!} - \frac{|\vec{u}|^6}{6!} + \ldots\right) + \vec{u}\left(1 - \frac{|\vec{u}|^2}{3!} + \frac{|\vec{u}|^4}{5!} + \ldots\right)\right\}. \tag{3.25}$$

Consideremos agora as expressões abaixo,

$$(i)\left(1 - \frac{|\vec{u}|^2}{2!} + \frac{|\vec{u}|^4}{4!} - \frac{|\vec{u}|^6}{6!} + \ldots\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(|\vec{u}|)^{2n}}{(2n)!} = cos|\vec{u}|.$$

$$(ii)\left(1 - \frac{|\vec{u}|^2}{3!} + \frac{|\vec{u}|^4}{5!} - \ldots\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(|\vec{u}|)^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{1}{|\vec{u}|} = \frac{sen|\vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$

os resultados (i) e (ii), são os desenvolvimentos em série do cosseno e do seno respectivamente. Além disso, é fácil verificar que

$$e^{o} = \left(1 + u_1 + \frac{u_1^2}{2!} + \frac{u_1^3}{3!} + \frac{u_1^4}{4!} + \frac{u_1^5}{5!} + \frac{u_1^6}{6!} + \ldots\right) = e^{u_1},$$

ou seja, temos a função exponencial de e^{u_1}. Sendo assim, podemos escrever (3.25) como

$$e^{o} = e^{u_1}\left\{cos|\vec{u}| + \vec{u}\left(\frac{sen|\vec{u}|}{|\vec{u}|}\right)\right\}. \tag{3.26}$$

Considerando então o valor absoluto de $\vec{u} = u_2 i + u_3 j + u_4 k + u_5 l + u_6 li + u_7 lj + u_8 lk$, $|\vec{u}| = \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}$, é possível escrever (3.26) como

$$e^{o} = e^{u_1}\left\{cos\left(\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}\right) + \vec{u}\left(\frac{sen(\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2})}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}\right)\right\} \tag{3.27}$$

Agora temos a função exponencial octoniônica, dada pela expressão acima, obtivemos assim a relação de Moivre generalizada para octônios.

Alguns fatos relevantes merecem ser citados no que diz respeito a função exponencial acima encontrada, enumeremos:

Consideremos,$\vec{u} = u_2i+u_3j+u_4k+u_5l+u_6li+u_7lj+u_8lk$, assim $e^{\vec{u}} = e^{(u_2i+u_3j+u_4k+u_5l+u_6li+u_7lj+u_8lk)}$, de acordo com a fórmula (3.27), temos que:

$$e^{\vec{u}} = cos|\vec{u}| + \vec{u}(\frac{sen|\vec{u}|}{|\vec{u}|}) \Rightarrow |e^{\vec{u}}| = \sqrt{cos^2|\vec{u}| + \left(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right)^2 sen^2|\vec{u}|} \tag{3.28}$$

mas,

$$(\vec{u})^2 = -u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 - u_5^2 - u_6^2 - u_7^2 - u_8^2 = -|\vec{u}|^2$$

assim,

$$\frac{(\vec{u})^2}{(|\vec{u}|)^2} = -1.$$

Logo, temos que:

$$|e^{\vec{u}}| = \sqrt{cos^2|\vec{u}| + (-1)^2 sen^2|\vec{u}|} = 1.$$

A fim de determinar a periodicidade das funções trigonométricas que serão estudadas posteriormente, torna-se fundamental investigar a periodicidade da função

$$e^o = e^{u_1}\left\{cos|\vec{u}| + \vec{u}\left(\frac{sen|\vec{u}|}{|\vec{u}|}\right)\right\}.$$

Assim, analisemos a função

$$e^{\vec{u}} = cos|\vec{u}| + \vec{u}\left(\frac{sen|\vec{u}|}{|\vec{u}|}\right):$$

Definição 3.5. *Seja p um octônio. Uma função octoniônica é dita periódica quando*

$$f(o+p) = f(o), \forall o$$

Definição 3.6. *Seja u_i um octônio cujas coordenadas são nulas exceto a $j-esima$, e seja f uma função octoniônica periódica, ou seja*

$$f(o+u_i) = f(o).$$

O período de f será dado pelo valor da $j-esima$ coordenada de u_i.

Teorema 3.1. *Seja $o = (u_1 + u_2i + u_3j + u_4k + u_5l + u_6li + u_7lj + u_8lk)$, e $\vec{u_i}$, $i = 1, 2, \ldots, 7$ e os vetores abaixo*

$$\vec{u_1} = (0, 2\pi i, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\vec{u_2} = (0, 0, 2\pi j, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\vec{u_3} = (0,0,0,2\pi k,0,0,0,0)$$

$$\vec{u_4} = (0,0,0,0,2\pi l,0,0,0)$$

$$\vec{u_5} = (0,0,0,0,0,2\pi li,0,0)$$

$$\vec{u_6} = (0,0,0,0,0,0,2\pi lj,0)$$

$$\vec{u_7} = (0,0,0,0,0,0,2\pi lk)$$

Se e^o é a Função Exponencial do tipo Octoniônica, então esta é periódica.

Demonstração: De fato,
calculando $e^{\vec{u_i}}, i = 1,2,\ldots 7$, temos que:

$$\begin{aligned}
e^{\vec{u_1}} &= e^{(0,2\pi i,0,0,0,0,0,0)} \\
&= cos\sqrt{0^2+(2\pi)^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2} \\
&\quad + \frac{(0,2\pi i,0,0,0,0,0,0)}{\sqrt{0^2(2\pi)^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2}} sen\sqrt{0^2+(2\pi)^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2} \\
&= cos 2\pi = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\vec{u_2}} &= e^{(0,0,2\pi j,0,0,0,0,0)} \\
&= cos\sqrt{0^2+0^2+(2\pi)^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2} \\
&\quad + \frac{(0,0,2\pi j,0,0,0,0,0)}{\sqrt{0^2+0^2+0^2+(2\pi)^2+0^2+0^2+0^2+0^2}} sen\sqrt{0^2+(2\pi)^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2} \\
&= cos 2\pi = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\vec{u_3}} &= e^{(0,0,0,2\pi k,0,0,0,0)} \\
&= cos\sqrt{0^2+0^2+0^2+(2\pi)^2+0^2+0^2+0^2+0^2} \\
&\quad + \frac{(0,0,0,2\pi k,0,0,0,0)}{\sqrt{0^2+0^2+0^2+(2\pi)^2+0^2+0^2+0^2+0^2}} sen\sqrt{0^2+0^2+(2\pi)^2+0^2+0^2+0^2+0^2} \\
&= cos 2\pi = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\vec{u_4}} &= e^{(0,0,0,0,2\pi l,0,0,0)} \\
&= cos\sqrt{0^2+0^2+0^2+0^2+(2\pi)^2+0^2+0^2+0^2} \\
&\quad + \frac{(0,0,0,0,2\pi l,0,0,0)}{\sqrt{0^2+0^2+0^2+0^2+(2\pi)^2+0^2+0^2+0^2}} sen\sqrt{0^2+0^2+0^2+(2\pi)^2+0^2+0^2+0^2} \\
&= cos 2\pi = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\vec{u_5}} &= e^{(0,0,0,0,0,2\pi li,0,0)} \\
&= cos\sqrt{0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+(2\pi)^2+0^2+0^2} \\
&\quad + \frac{(0,0,0,0,0,2\pi li,0,0)}{\sqrt{0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+(2\pi)^2+0^2+0^2}} sen\sqrt{0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+(2\pi)^2+0^2+0^2} \\
&= cos 2\pi = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\vec{u_6}} &= e^{(0,0,0,0,0,0,2\pi lj,0)} \\
&= cos\sqrt{0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+(2\pi)^2+0^2} \\
&\quad + \frac{(0,0,0,0,0,0,2\pi lj,0)}{\sqrt{0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+(2\pi)^2+0^2}} sen\sqrt{0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+(2\pi lj)^2+0^2} \\
&= cos 2\pi = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\vec{u_7}} &= e^{(0,0,0,0,0,0,0,2\pi lk)} \\
&= cos\sqrt{0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+(2\pi)^2} \\
&\quad + \frac{(0,0,0,0,0,0,0,2\pi lk)}{\sqrt{0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+(2\pi)^2}} sen\sqrt{0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+(2\pi)^2} \\
&= cos 2\pi = 1
\end{aligned}$$

Os resultados acima mostram que $e^{\vec{u_i}} = 1$; $i = 1, 2, \dots, 7$. Sendo assim fica fácil verificar que $e^{o+\vec{u_i}} = e^o e^{\vec{u_i}} = e^o.1 = e^o$; $i = 1, 2, \dots, 7$, o que mostra que a função e^o é periódica de período imaginário em cada um dos eixos do espaço de dimensão 7 separadamente, ou seja:

$$e^{o+n\vec{u_i}} = e^o$$

com $i = 1, 2, \dots$ e $i = 1, 2, \dots, 7$, o que conclui a demonstração do teorema.

Faz-se importante citar que o resultado acima é uma generalização de um resultado muito importante das Variáveis Complexas, onde temos que a função e^z com $z = x + yi$, é analítica em uma região infinita do plano $0 < y \leq \pi$. Tal região, recebe o nome de **região fundamental** [7]. Esta é a região onde encontram-se os valores de e^z, e a esse fato deve-se a periodicidade desta função. Assim, para o caso em questão, ou seja para a Função Exponencial do tipo octoniônica, a **região fundamental**, será uma região em $\mathbb{R}^7$.

3.4 Funções Trigonométricas

Anteriormente, determinamos a função exponencial octoniônica. Agora trataremos de determinar as funções trigonométricas para um número octônio, fazendo uma generalização das funções trigonométricas para valores complexos [7], ou seja para valores de z.

$o = u_1 + u_2 i + u_3 j + u_4 k + u_5 l + u_6 li + u_7 lj + u_8 lk$, para isso, consideremos as equações abaixo:

$$e^{\vec{u}} = cos|\vec{u}| + \vec{u}\left(\frac{sen|\vec{u}|}{|\vec{u}|}\right)$$

$$e^{-\vec{u}} = cos|\vec{u}| - \vec{u}\left(\frac{sen|\vec{u}|}{|\vec{u}|}\right)$$

onde $\vec{u} = (u_2 i + u_3 j + u_4 k + u_5 l + u_6 li + u_7 lj + u_8 lk)$. Das equações anteriores, segue que:

$$cos|\vec{u}| = \frac{e^{\vec{u}} + e^{-\vec{u}}}{2} \tag{3.29}$$

$$sen|\vec{u}| = \frac{|\vec{u}|}{\vec{u}}.\frac{e^{\vec{u}} - e^{-\vec{u}}}{2} \tag{3.30}$$

Isto sugere as seguintes definições para valores $o = u_1 + u_2 i + u_3 j + u_4 k + u_5 l + u_6 li + u_7 lj + u_8 lk$,

$$coso = \frac{e^o + e^{-o}}{2} \tag{3.31}$$

$$seno = \frac{|\vec{u}|}{\vec{u}}.\frac{e^o - e^{-o}}{2} \tag{3.32}$$

Consideremos agora a soma dos quadrados dos termos das equações (3.32) e (3.33)

$$\begin{aligned} sen^2 o + cos^2 o &= \left(\frac{e^o + e^{-o}}{2}\right)^2 + \left(\frac{|\vec{u}|}{\vec{u}}.\frac{e^o - e^{-o}}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{e^{2o} + 2 + e^{-2o}}{4}\right) + \left(\frac{|\vec{u}|}{\vec{u}}\right)^2 \left(\frac{e^{2o} - 2 + e^{-2o}}{4}\right) = 1 \end{aligned}$$

aqui foi usado a identidade

$$\frac{(|\vec{u}|)^2}{(\vec{u})^2} = -1.$$

Além disso de acordo com as definições familiares do cálculo real, fazemos

$$tgo = \frac{seno}{coso} = \frac{|\vec{u}|}{\vec{u}} \cdot \frac{e^o - e^{-o}}{e^o + e^{-o}} \tag{3.33}$$

$$cotgo = \frac{coso}{seno} = \frac{|\vec{u}|}{\vec{u}} \cdot \frac{e^o + e^{-o}}{e^o - e^{-o}} \tag{3.34}$$

$$seco = \frac{1}{coso} = \frac{2}{e^o + e^{-o}} \tag{3.35}$$

$$cosseco = \frac{1}{seno} = \frac{\vec{u}}{\vec{u}} \cdot \frac{2}{e^o - e^{-o}} \tag{3.36}$$

Um fato de fácil verificação é que a função seno é ímpar e a função cosseno é par, assim

$$cos(-o) = coso$$

$$sen(-o) = -seno$$

$$tg(-o) = -tgo$$

$$cotg(-o) = -cotgo$$

$$cosec(-o) = cosseco$$

$$sec(-o) = seco$$

Lema 3.1. *Seja* $o = (u_1 + u_2i + u_3j + u_4k + u_5l + u_6li + u_7lj + u_8lk)$, *e* $\vec{u'_i}$, $i = 1, 2, \ldots, 7$ *e os vetores abaixo*

$$\vec{u'}_1 = (0, \pi i, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\vec{u'}_2 = (0, 0, \pi j, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\vec{u'}_3 = (0, 0, 0, \pi k, 0, 0, 0, 0)$$

$$\vec{u'}_4 = (0, 0, 0, 0, \pi l, 0, 0, 0)$$

$$\vec{u'}_5 = (0, 0, 0, 0, 0, \pi li, 0, 0)$$

$$\vec{u'}_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \pi lj, 0)$$

$$\vec{u'}_7 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \pi lk)$$

Se e^o *é a função exponencial octoniônica, então* $e^{\vec{u'}_i} = -1$, *para* $i = 1, 2, \ldots, 7$.

Demonstração:De fato,
calculando o valor de $e^{\vec{u'}_i}, i = 1, 2, \ldots 7$, temos que:

$$\begin{aligned}
e^{\vec{u'}_1} &= e^{(0,\pi i,0,0,0,0,0,0)} \\
&= cos\sqrt{0^2 + (\pi)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2} \\
&\quad + \frac{(0, \pi i, 0, 0, 0, 0, 0, 0)}{\sqrt{0^2 + (\pi)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2}} sen\sqrt{0^2 + (\pi)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2} \\
&= cos\pi = -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\vec{u'}_2} &= e^{(0,0,\pi j,0,0,0,0,0)} \\
&= cos\sqrt{0^2 + 0^2 + (\pi)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2} \\
&\quad + \frac{(0, 0, \pi j, 0, 0, 0, 0, 0)}{\sqrt{0^2 + 0^2 + (\pi)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2}} sen\sqrt{0^2 + 0^2 + (\pi)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2} \\
&= cos\pi = -1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
e^{\vec{u_7}_3} &= e^{(0,0,0,\pi k,0,0,0,0)}\\
&= cos\sqrt{0^2+0^2+0^2+(\pi)^2+0^2+0^2+0^2+0^2}\\
&\quad+\frac{(0,0,0,\pi k,0,0,0,0)}{\sqrt{0^2+0^2+0^2+(\pi)^2+0^2+0^2+0^2+0^2}}sen\sqrt{0^2+0^2+0^2+(\pi)^2+0^2+0^2+0^2}\\
&= cos2\pi=-1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{\vec{u_7}_4} &= e^{(0,0,0,0,\pi l,0,0,0)}\\
&= cos\sqrt{0^2+0^2+0^2+0^2+(\pi)^2+0^2+0^2+0^2}\\
&\quad+\frac{(0,0,0,0,\pi l,0,0,0)}{\sqrt{0^2+0^2+0^2+0^2+(\pi)^2+0^2+0^2+0^2}}sen\sqrt{0^2+0^2+0^2+0^2+(\pi)^2+0^2+0^2}\\
&= cos\pi=-1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{\vec{u_7}_5} &= e^{(0,0,0,0,0,\pi li,0,0)}\\
&= cos\sqrt{0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+(\pi)^2+0^2+0^2}\\
&\quad+\frac{(0,0,0,0,0,\pi li,0,0)}{\sqrt{0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+(\pi)^2+0^2+0^2}}sen\sqrt{0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+(\pi)^2+0^2+0^2}\\
&= cos\pi=-1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{\vec{u_7}_6} &= e^{(0,0,0,0,0,0,\pi lj,0)}\\
&= cos\sqrt{0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+(\pi)^2+0^2}\\
&\quad+\frac{(0,0,0,0,0,0,\pi lj,0)}{\sqrt{0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+(\pi)^2+0^2}}sen\sqrt{0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+(\pi)^2+0^2}\\
&= cos2\pi=-1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{\vec{u'}_7} &= e^{(0,0,0,0,0,0,0,\pi lk)} \\
&= cos\sqrt{0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+(\pi)^2} \\
&+ \frac{(0,0,0,0,0,0,0,\pi lk)}{\sqrt{0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+(\pi)^2}} sen\sqrt{0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+(\pi)^2} \\
&= cos 2\pi = -1
\end{aligned}
$$

Os resultados acima mostram que $e^{\vec{u'}_i} = -1$; $i = 1, 2, \ldots, 7$, o que completa a demonstração.

Um resultado de fundamental importância diz respeito a periodicidade das funções trigonométricas octoniônicas, vejamos.

Teorema 3.2. *Seja* $o = (u_1 + u_2 i + u_3 j + u_4 k + u_5 l + u_6 li + u_7 lj + u_8 lk)$, *e* $\vec{u'_i}$, $i = 1, 2, \ldots, 7$ *e os vetores abaixo*

$$\vec{u'}_1 = (0, 2\pi i, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\vec{u'}_2 = (0, 0, 2\pi j, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\vec{u_3} = (0, 0, 0, 2\pi k, 0, 0, 0, 0)$$

$$\vec{u'}_4 = (0, 0, 0, 0, 2\pi l, 0, 0, 0)$$

$$\vec{u'}_5 = (0, 0, 0, 0, 0, 2\pi li, 0, 0)$$

$$\vec{u'}_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 2\pi lj, 0)$$

$$\vec{u'}_7 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2\pi lk)$$

Se seno e coso são a função seno e cosseno octoniônica respectivamente, então estas funções são periódicas.

Demonstração: De fato, tomando

$$sen(o + \vec{u'_i}) = \frac{|\vec{u}|}{\vec{u}} \cdot \frac{e^{o+u_i} - e^{-o-u_i}}{2} = \frac{|\vec{u}|}{\vec{u}} \cdot \frac{e^o e^{u_i} - e^{-o} e^{-u_i}}{2} \tag{3.37}$$

Usando os resultados do **Teorema 3.1**, segue que:

$$sen(o+\vec{u_i'}) = \frac{|\vec{u}|}{\vec{u}} \cdot \frac{e^o e^{u_i} - e^{-o}e^{-u_i}}{2} = \frac{|\vec{u}|}{\vec{u}} \cdot \frac{e^o \cdot 1 - e^{-o} \cdot 1}{2} = \frac{|\vec{u}|}{\vec{u}} \frac{e^o - e^{-o}}{2} = seno \qquad (3.38)$$

tomando agora

$$cos(o+\vec{u_i'}) = \frac{e^{o+u_i} + e^{-o-u_i}}{2} = \frac{e^o e^{u_i} + e^{-o}e^{-u_i}}{2} \qquad (3.39)$$

mas, usando novamente o **Teorema 3.1**, temos:

$$cos(o+\vec{u_i'}) = \frac{e^{o+u_i} + e^{-o-u_i}}{2} = \frac{e^o \cdot 1 + e^{-o} \cdot 1}{2} = \frac{e^o + e^{-o}}{2} = coso \qquad (3.40)$$

Teorema 3.3. *Seja* $o = (u_1 + u_2 i + u_3 j + u_4 k + u_5 l + u_6 li + u_7 lj + u_8 lk)$, *e* $\vec{u_i'}$, $i = 1, 2, \ldots, 7$ *e os vetores abaixo*

$$\vec{u'}_1 = (0, \pi i, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\vec{u'}_2 = (0, 0, \pi j, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\vec{u'}_3 = (0, 0, 0, \pi k, 0, 0, 0, 0)$$

$$\vec{u'}_4 = (0, 0, 0, 0, \pi l, 0, 0, 0)$$

$$\vec{u'}_5 = (0, 0, 0, 0, 0, \pi li, 0, 0)$$

$$\vec{u'}_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \pi lj, 0)$$

$$\vec{u'}_7 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \pi lk)$$

Se tgo e cotgo são a função tangente e cotangente octoniônica respectivamente, então estas são periódicas.

Demonstração: De fato, tomando

$$tg(o+\vec{u_i'}) = \frac{|\vec{u}|}{\vec{u}} \cdot \frac{e^{o+u_i'} - e^{-o-u_i'}}{e^{o+u_i'} + e^{-o-u_i'}} = \frac{|\vec{u}|}{\vec{u}} \cdot \frac{e^o e^{u_i'} - e^{-o}e^{-u_i'}}{e^o e^{u_i'} + e^{-o}e^{u_i'}} \qquad (3.41)$$

mas, pelo **Lema 3.1**, temos:

$$tg(o+\vec{u_i'}) = \frac{|\vec{u}|}{\vec{u}} \cdot \frac{e^{o+u_i'} - e^{-o-u_i'}}{e^{o+u_i'} + e^{-o-u_i'}} = \frac{|\vec{u}|}{\vec{u}} \cdot \frac{e^o \cdot (-1) - e^{-o} \cdot (-1)}{e^o \cdot (-1) + e^{-o} \cdot (-1)} = \frac{|\vec{u}|}{\vec{u}} \cdot \frac{e^o - e^{-o}}{e^o + e^{-o}} = tgo \quad (3.42)$$

tomando agora,

$$cotg(o+\vec{u_i'}) = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \cdot \frac{e^{o+u_i'} + e^{-o-u_i'}}{e^{o+u_i'} - e^{-o-u_i'}} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \cdot \frac{e^o e^{u_i'} + e^{-o}e^{-u_i'}}{e^o e^{u_i'} - e^{-o}e^{u_i'}} \quad (3.43)$$

usando o **Lema 3.1**, segue que:

$$cotg(o+\vec{u_i'}) = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \cdot \frac{e^o e^{u_i'} + e^{-o}e^{-u_i'}}{e^o e^{u_i'} - e^{-o}e^{-u_i'}} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \cdot \frac{e^o(-1) + e^{-o}(-1)}{e^o(-1) - e^{-o}(-1)} = \frac{|\vec{u}|}{\vec{u}} \cdot \frac{e^o + e^{-o}}{e^o - e^{-o}} = cotgo \quad (3.44)$$

3.5 Logarítmo

A presente seção visa dar uma extensão da Função Logarítimica para octônios. Com essa finalidade faz-se necessário o uso das coordenadas esféricas dadas na seção 1.4. Consideremos agora o problema de determinar o logarítmo de $o = u_1+u_2i+u_3j+u_4k+u_5l+u_6li+u_7lj+u_8lk$, que será representado por lno e é definido como a função inversa da função exponencial; assim, $w = lno$ é a função que satisfaz á relação

$$e^w = o \quad (3.45)$$

para cada $o \neq 0$. Façamos para isso, $w = u_1' + u_2'i + u_3'j + u_4'k + u_5'l + u_6'li + u_7'lj + u_8'lk$, assim, usando as coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}
u_1 &= rcos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 cos\theta_5 cos\theta_6 cos\theta_7, & 0 \leq r < \infty \\
u_2 &= rcos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 cos\theta_5 cos\theta_6 sen\theta_7, & 0 \leq \theta_7 \leq 2\pi \\
u_3 &= rcos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 cos\theta_5 sen\theta_6, & \frac{-\pi}{2} \leq \theta_6 \leq \frac{\pi}{2} \\
u_4 &= rcos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 sen\theta_5, & \frac{-\pi}{2} \leq \theta_5 \leq \frac{\pi}{2} \\
u_5 &= rcos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 sen\theta_4, & \frac{-\pi}{2} \leq \theta_4 \leq \frac{\pi}{2} \\
u_6 &= rcos\theta_1 cos\theta_2 sen\theta_3, & \frac{-\pi}{2} \leq \theta_3 \leq \frac{\pi}{2} \\
u_7 &= rcos\theta_1 sen\theta_2, & \frac{-\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2} \\
u_8 &= rsen\theta_1, & \frac{-\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

podemos escrever w como segue

$$\begin{aligned}
o &= u_1 + u_2 i + u_3 j + u_4 k + u_5 l + u_6 li + u_7 lj + u_8 lk = \\
&= r\left(\frac{u_1}{r} + \frac{u_2}{r}i + \frac{u_3}{r}j + \frac{u_4}{r}k + \frac{u_5}{r}l + \frac{u_6}{r}li + \frac{u_7}{r}lj + \frac{u_8}{r}lk\right) \\
&= r(cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 cos\theta_5 cos\theta_6 cos\theta_7 \\
&+ cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 cos\theta_5 cos\theta_6 sen\theta_7 i \\
&+ cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 cos\theta_5 sen\theta_6 j \\
&+ cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 sen\theta_5 k \\
&+ cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 sen\theta_4 l \\
&+ cos\theta_1 cos\theta_2 sen\theta_3 li \\
&+ cos\theta_1 sen\theta_2 lj \\
&+ sen\theta_1 lk)
\end{aligned}$$

como $r > 0$.

Por outro lado, temos que

$$e^w = e^{u'_1}\left\{cos|\vec{u'}| + \vec{u'}\left(\frac{sen|\vec{u'}|}{|\vec{u'}|}\right)\right\}. \tag{3.46}$$

com $w = u'_1 + \vec{u'}$ substituindo agora (3.46) e o na forma trigonométrica em (3.45), temos:

$$e^{u'_1} e^{u'} = o \tag{3.47}$$

daí segue que

$$e^{u'_1} = r \tag{3.48}$$

ou ainda

$$u'_1 = ln|r| \tag{3.49}$$

e

$$\begin{aligned}
u' &= ln|(cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 cos\theta_5 cos\theta_6 cos\theta_7 && (3.50)\\
&+ cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 cos\theta_5 cos\theta_6 sen\theta_7 i && (3.51)\\
&+ cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 cos\theta_5 sen\theta_6 j && (3.52)\\
&+ cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 sen\theta_5 k && (3.53)\\
&+ cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 sen\theta_4 l && (3.54)\\
&+ cos\theta_1 cos\theta_2 sen\theta_3 li && (3.55)\\
&+ cos\theta_1 sen\theta_2 lj && (3.56)\\
&+ sen\theta_1 lk)| && (3.57)
\end{aligned}$$

mas, $w = u_1' + u,'$ daí segue que

$$\begin{aligned}
w = lno &= ln|r| + ln|(cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 cos\theta_5 cos\theta_6 cos\theta_7\\
&+ cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 cos\theta_5 cos\theta_6 sen\theta_7 i\\
&+ cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 cos\theta_5 sen\theta_6 j\\
&+ cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_4 sen\theta_5 k\\
&+ cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 sen\theta_4 l\\
&+ cos\theta_1 cos\theta_2 sen\theta_3 li\\
&+ cos\theta_1 sen\theta_2 lj\\
&+ sen\theta_1 lk)|
\end{aligned}$$

Observa-se claramente que o, na forma trigonométrica é uma função da forma $o = o(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7)$, assim temos que o logarítmo de um octônio também é uma função de θ_i, com $i = 1, 2 \ldots, 7$. Daí segue que, tomando o vetor da forma $o' = (0, \theta_1 + 2\pi, \theta_2 + 2\pi, \theta_3 + 2\pi, \theta_4 + 2\pi, \theta_5 + 2\pi, \theta_6 + 2\pi, \theta_7 + 2\pi)$ observa-se facilmente que:

$$l(o + o') = lno$$

3.6 Conclusão

Neste capítulo foi analisado no **Teorema (3.1)** que a Função Exponencial do tipo Octoniônica é periódica. Ademais, foram determinadas as Funções Trigonométricas e Logarítmica do tipo Octoniônico, e foi observada nas Funções Trigonométricas foi notada, preservação da periodicidade, ficando claras essas conclusões nos **Teoremas (3.2)** e **(3.3)**. Outro fato relevante diz respeito a Função Exponencial Octoniônica, cujos valores existem em uma região de $\mathbb{R}^7$ chamada de **região fundamental**.

Conclusão

Os octônios possibilitam a análise de fenômenos no âmbito 8-dimensional, por isso torna-se fundamental a determnação de funções tais como as Funções Trigonométricas e a Função Logaítmica mostradas no presente trabalho. O fato de que estas funções, assim como a Função Exponencial do tipo octoniônica preservarem a sua periodicidade contribui fortemente para aplicações futuras à Física Teorica, mais precisamente à Mecânica Quântica [11], Ginaydin, Piron e Ruegg em 1978, [6] mostraram que a Mecânica Quântica poderia ser formulada referindo-se à Álgebras de Jordan excepcional, definindo-se então a Mecânica Quântica Octoniônica. Além disso a aplicabilidade dos octônios foi mostrada em 1980 à Teoria de Cordas [1]. Já na Geometria em 1925 Cartan descreve a geometria de um fenômeno chamado de "triality,"que na ocasião estabelecia simetria entre vetores "spnors"em um espaço 8-dimensional [3].

Para aplicações futuras, a relação obtida de um octônio na sua forma trigonométrica, mostrada nesta dissertação em (1.4) será possivelmente usada na determinação da Fórmula Integral de Cauchy estendida para octônios. No que diz respeito as funções trigonométricas aqui abordadas, devido a sua hiperperiodicidade aqui definida e tratada, torna possível um estudo futuro mais aprofundado. Além disso, uma outra possível aplicação desse estudo refere-se à Computação Quântica. A Computação Quântica garante a transmissão da informação com cem por cento de segurança ao contrário da Computação Binária (Clássica). Uma vez que os estados quânticos são não-associativos, uma formulação da Computação Quântica é desejável, desde que a Teoria Octoniônica se desenvolva adequadamente. Este foi um dos objetivos deste trabalho.

Tratando a função exponencial do tipo octonionica como uma extensão de e^z onde $z = x + yi$, obtivemos resultados análogos aos resultdos obtidos para a função exponencial a valores complexos. No nosso caso a região fundamental para valores complexos, ou seja, a região onde encontram-se os valores de e^z é uma faixa infinita do plano $-\pi < y \leq \pi$, e no caso octoniônico será uma região em $\mathbb{R}^7$ onde todos os valores de e^o existirão. Quanto a função logaritimica do tipo octoniônica, esta tem uma periodicidade diferenciada pois ela acontece em todas as sete coordenadas $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7$.

Referências Bibliográficas

[1] Baez, J. The octonions. *Bull. Amer. Math. Soc. (39):2* (2001), 145–205.

[2] Butkov, E. *Física Matemática.* LTC Editora, 1988.

[3] Cartan, . Le principle de dualité et la théorie des groupes simple et semi-simples. *Bull. Sci. Math. 49* (1925), 361–374.

[4] de Oliveira, A. Quatérnio, operadores de fuerter e relações quaterniônicas trancedentais. Master's thesis, 2006.

[5] Garcia, A., and Lequain, Y. *Álgebra: um curso de introdução.* Projeto Euclides, 1988.

[6] Ginaydin, M., Piron, C., and Rueg, H. Moufang plane and octonionic quantum mechanics. *Comm. Math. Phys. 61* (1978), 69–85.

[7] Kreyszig, E. *Matemática Superior.* LTC Editora, 1969.

[8] Lima, E. L. *Elementos de Topologia Geral.* Projeto Euclides, 1970.

[9] Lima, E. L. *Espaços Métricos.* Projeto Euclides, 2003.

[10] Lima, E. L. *Curso de Análise.* Projeto Euclides, 2004.

[11] Lin, W. L. Octonions and exceptional groups? *Chinese Journal o Phisics 30* (1992), 579–597.

[12] Machado, J. M., and Borges, M. F. New remarks on the diferenciability o hpiercomplex functions. *International Journal of Aplied Mathematics 8* (2002), 85–101.

[13] Maricato, J. Funções quaseconformes. Master's thesis, 2006.

[14] Neto, A. L. *Funções de uma Variável Complexa.* Projeto Euclides, 1996.

[15] Pendenza, C. Álgebras não associativas octoniônicas e relações extensivas do tipo "de moivre". Master's thesis, 2006.

[16] Ruel V., R. *Variáveis Complexas e Suas Aplicações.* Cambridge University Press, 1975.

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo