

Heurísticas para um problema de
dimensionamento de lotes com restrições
de capacidade e custo de transporte

Flávio Molina da Silva

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Heurísticas para o problema de dimensionamento de lotes capacitado com custo de transporte

Flávio Molina da Silva ¹

Dissertação a ser apresentada no Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo

São José do Rio Preto
2007

¹contato: flaviomolinabr@yahoo.com.br

Aos meus pais
e irmão
Dedico

Agradecimentos

A Deus, pela constante presença em todos os momentos da minha vida, iluminando, protegendo e conduzindo os meus passos.

Aos meus pais, João e Solangela, e ao meu irmão Fábio, por todo sacrifício, paciência e incentivos dados para realização deste trabalho. Agradeço também a minha tia Marisa e minhas primas, Natália e Patrícia, por todo apoio e ajuda fornecida desde a minha graduação.

A minha namorada, agradeço o carinho, a compreensão e os cuidados dedicados.

A todo o pessoal que morou e freqüentou a "República dos Macacus", pela grande amizade, pela paciência e por todos os momentos que fizeram nossa convivência tão importante. Agradeço principalmente ao Danilo, Viviane, Marcelo, Fabiana e Mariana pela grande amizade e companheirismo.

Aos amigos da faculdade, agradeço pelas conversas, pelas risadas e principalmente pela paciência e discussões sobre o trabalho. Em especial, agradeço ao Chela, Gabi, Karla, Josimeire, Michele, Silvia, Ana Paula e Cibele por todo apoio, incentivo e pela grande amizade e confiança.

Em especial, agradeço ao Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo, pela amizade, orientação, incentivo e paciência na elaboração deste trabalho e a Profa. Dra. Socorro Rangel, pela paciência, incentivo e amizade que existe desde o terceiro ano de minha graduação.

Aos meus professores de graduação e pós-graduação por toda a atenção dada.

Ao Getúlio, Olga e Luíza, pela atenção e paciência. E a todas as pessoas e funcionários do IBILCE que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

Resumo

Este trabalho consiste numa extensão do estudo de um problema de dimensionamento de lotes com custo de transporte feito por Norden e Velde [53], onde a produção dos itens é transportada, em paletes, para um armazém. O transporte é feito por uma empresa terceirizada sob um contrato com os seguintes custos pré-estabelecidos: um custo fixo de contrato, um custo para o transporte de um determinado volume de paletes e um custo adicional para paletes extras. O problema foi estendido, no presente trabalho, considerando restrições de capacidade e a possibilidade de atrasos no atendimento a demanda. Nosso objetivo é propor um modelo matemático para o problema estendido e desenvolver dois métodos heurísticos de resolução. Tais métodos são baseados em dois tipos de relaxação: relaxação Lagrangiana e relaxação Lagrangiana/Surrogate. Os resultados obtidos pelas heurísticas são comparados com os resultados obtidos pelo pacote de otimização CPLEX 10.0. Além disso, é feita uma comparação entre os métodos heurísticos.

Palavras-Chave: Dimensionamento de lotes, custos de transporte, heurística Lagrangiana e Lagrangiana/Surrogate.

Abstract

This work consist of an extension of a study of the capacitated lot-sizing problems with transportation cost by Norden and Velde [53], where the production of itens is transported into pallets to an warehouse. The transportation is executed by another company, under a contract with the following transportation cost established: a fixed contract cost, a transportation cost for determined quantity of pallets and an additional cost for extra pallets. The problem was extended, in this work, considering capacity constraint and backlogging. Our objective is to propose a mathematical model for the extended problem and to develop two heuristics methods of resolution. The methods are based on two types of relaxation: Lagrangian relaxation and Lagrangian/Surrogate relaxation. The results obtained by heuristics are compared with the results obtained by CPLEX 10.0. Furthermore, a comparison between the heuristics is made.

Keywords: Lot-Sizing, transportation cost, Lagrangian and Lagrangian/Surrogate heuristics.

Lista de Figuras

1.1	Formulações do problema	8
1.2	Problema de busca em grafo	12
4.1	Convergência Lagsur - Problema 1	78
4.2	Convergência Lagrangiana - Problema 1	78
4.3	Heurística Lagsur X Lagrangiana - Problema 1	79

Lista de Tabelas

2.1	Roteiro de Resolução dos problemas	38
2.2	Dados Para Cada Exemplar	39
2.3	Tabela de Exemplares	39
2.4	Número de iterações simplex	40
2.5	Número de nós analisados	40
2.6	Valor do <i>Gap</i> relativo	41
2.7	Tempo de resolução	41
2.8	Número de Problemas com Solução Ótima Obtida	43
4.1	Dados fixos de cada exemplar	72
4.2	Dados que serão variados	72
4.3	Tabela de Exemplares - Grupo 1.	73
4.4	Tabela de Exemplares - Grupo 2.	74
4.5	Tabela de Exemplares - Grupo 3.	74
4.6	Tabela de Exemplares - Grupo 4.	75
4.7	Limitante Inferior - grupo 1 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)	76
4.8	Limitante Inferior - grupo 1 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)	76
4.9	Limitante Inferior - grupo 1 com folga de capacidade ($\alpha = 0,50$)	77
4.10	Resultado Comparativos - grupo 1 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)	81
4.11	Resultado Comparativos - grupo 1 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)	82
4.12	Resultado Comparativos - grupo 1 com folga de capacidade ($\alpha = 0,50$)	82
4.13	Resultado Comparativos - grupo 2 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)	83
4.14	Resultado Comparativos - grupo 2 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)	83
4.15	Resultado Comparativos - grupo 2 com folga de capacidade ($\alpha = 0,50$)	84
4.16	Resultado Comparativos - grupo 3 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)	84
4.17	Resultado Comparativos - grupo 3 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)	85
4.18	Resultado Comparativos - grupo 3 com folga de capacidade ($\alpha = 0,50$)	86
4.19	Resultado Comparativos - grupo 4 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)	86

4.20	Resultado Comparativos - grupo 4 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)	87
4.21	Resultado Comparativos - grupo 4 com folga de capacidade ($\alpha = 0,50$)	87
B.1	Resultado do CPLEX - grupo 1 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)	114
B.2	Resultado do CPLEX - grupo 1 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)	114
B.3	Resultado do CPLEX - grupo 1 com folga de capacidade ($\alpha = 0,5$)	115
B.4	Resultado do CPLEX - grupo 2 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)	116
B.5	Resultado do CPLEX - grupo 2 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)	116
B.6	Resultado do CPLEX - grupo 2 com folga de capacidade ($\alpha = 0,5$)	117
B.7	Resultado do CPLEX - grupo 3 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)	117
B.8	Resultado do CPLEX - grupo 3 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)	118
B.9	Resultado do CPLEX - grupo 3 com folga de capacidade ($\alpha = 0,50$)	118
B.10	Resultado do CPLEX - grupo 4 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)	119
B.11	Resultado do CPLEX - grupo 4 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)	120
B.12	Resultado do CPLEX - grupo 4 com folga de capacidade ($\alpha = 0,50$)	120
B.13	Resultado das heurísticas - grupo 1 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)	121
B.14	Resultado das heurísticas - grupo 1 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)	122
B.15	Resultado das heurísticas - grupo 1 com folga de capacidade ($\alpha = 0,50$)	123
B.16	Resultado das heurísticas - grupo 2 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)	124
B.17	Resultado das heurísticas - grupo 2 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)	124
B.18	Resultado das heurísticas - grupo 2 com folga de capacidade ($\alpha = 0,50$)	125
B.19	Resultado das heurísticas - grupo 3 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)	125
B.20	Resultado das heurísticas - grupo 3 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)	126
B.21	Resultado das heurísticas - grupo 3 com folga de capacidade ($\alpha = 0,50$)	127
B.22	Resultado das heurísticas - grupo 4 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)	127
B.23	Resultado das heurísticas - grupo 4 capacidade normal ($\alpha = 0,85$)	128
B.24	Resultado das heurísticas - grupo 4 com folga de capacidade ($\alpha = 0,50$)	129

Lista de Abreviações e Notações

- Capítulo 1

- a_* : número de peças do item no padrão de corte;
- b_* : custo do atraso da demanda no período, por item;
- c_* : custo de produção do item no período;
- Cap_* : capacidade do período;
- c_0 : custo fixo, por período, para transporte dos itens;
- c_1 : taxa, por período, para transporte dos primeiros R paletes;
- c_2 : taxa diferenciada pelo transporte dos paletes que excedem o limite R .
- d_* : demanda;
- $F_t = 1 + \sum_{j=1}^{t-1} \eta_j$: denota o primeiro sub-período do período t ;
- H_* : custo unitário de estocagem do item no período;
- I_* ou I_*^+ : quantidade em estoque no final do período;
- I_*^- : quantidade em atraso no fim do período;
- K : número de itens produzidos;
- $L_t = F_t + \eta_t - 1$: denota o último sub-período do período t ;
- M : valor suficientemente grande;
- N : número de itens distintos produzidos;
- P : número máximo de itens em um palete;
- p_* : custo de produção por unidade;
- \mathcal{P} : número de padrões possíveis;
- $Pred(*)$: conjunto dos itens predecessores imediatos do item;
- q_* : tempo de preparo para a produção do item;
- R : limite de paletes que podem ser transportados com a taxa c_1 ;

- r_* : tempo de produção do item;
- s_* : custo de *setup* do item no período;
- $Suc(*)$: conjunto dos itens sucessores imediatos de um determinado item;
- T : número de períodos de produção;
- v_* : soma do custo total de produção com o custo de estoque;
- W_* : representa a quantidade transferida de uma facilidade para outra durante um período;
- X_* : quantidade produzida do item no período;
- $Y_* = 1$ se ocorre *setup* no período e $Y_* = 0$ caso contrário;
- Z_* : fração da demanda total produzida em um período do horizonte de planejamento;
- η_t : número máximo de sub-períodos no período t ;
- ρ_* : custo de transferência, por unidade, de itens de uma facilidade para outra, em um período;
- μ_* : unidades de um tipo de item necessárias para a produção de outro tipo de item.

- Capítulo 2

- A_t : número de paletes transportados no período t com a taxa c_1 ;
- B_t : número de paletes transportados no período t com a taxa c_2 ;
- b_* : custo de atraso no período;
- c_0 : custo fixo, por período, para transporte dos itens;
- c_1 : taxa, por período, para transporte dos paletes;
- c_2 : taxa diferenciada pelo transporte dos paletes que excedem o limite R ;
- Cap_* : capacidade de produção no período;
- d_* : demanda de produção do item no período;
- FR : fração da demanda total que pode ser transportada pelo custo mais baixo;
- h_* : custo de estoque no período;
- I_*^+ : quantidade em estoque do item no fim do período t ;
- I_*^- : quantidade em atraso do item no fim do período t ;

- N : número de itens distintos;
- P : número máximo de itens em um palete;
- q_* : tempo de preparo da máquina para a produção do item;
- R : número máximo de paletes que podem ser transportados com a taxa c_1 ;
- r_* : tempo de produção do item;
- s_* : custo de *setup* para a produção do item no período;
- T : número de períodos;
- X_* : quantidade do item produzidas no período;
- $Y_* = 1$ se existe *setup* para a produção do item no período.

- Capítulo 3

- A_t : número de paletes transportados no período t com a taxa c_1 ;
- B_t : número de paletes transportados no período t com a taxa c_2 ;
- b_* : custo de atraso no período;
- c_0 : custo fixo, por período, para transporte dos itens;
- c_1 : taxa, por período, para transporte dos paletes;
- c_2 : taxa diferenciada pelo transporte dos paletes que excedem o limite R ;
- Cap_* : capacidade de produção no período;
- d_* : demanda de produção do item no período;
- FR : fração da demanda total que pode ser transportada pelo custo mais baixo;
- h_* : custo de estoque no período;
- I_*^+ : quantidade em estoque do item no fim do período t ;
- I_*^- : quantidade em atraso do item no fim do período t ;
- N : número de itens distintos;
- P : número máximo de itens em um palete;
- q_* : tempo de *setup* do item;
- R : número máximo de paletes que podem ser transportados com a taxa c_1 ;
- $RL_\lambda P$: relaxação Lagrangiana do problema P com multiplicador λ ;

- $RL_{\lambda}S_{\pi}P$: relaxação Lagrangiana/Surrogate do problema P com multiplicadores λ e π ;
- $RS_{\pi}P$: relaxação Surrogate do problema P com multiplicador π ;
- r_* : tempo de produção do item;
- s_* : custo de *setup* para a produção do item no período;
- T : número de períodos;
- $v(P)$: valor da ótimo da função objetivo do problema P
- X_* : quantidade do item produzidas no período;
- $Y_* = 1$ se existe *setup* para a produção do item no período;
- λ_*^* : multiplicador lagrangiano;
- π_*^* : multiplicador surrogate.

- Capítulo 4

- b_* : custo de atraso no período;
- c_0 : custo fixo, por período, para transporte dos itens;
- c_1 : taxa, por período, para transporte dos paletes;
- c_2 : taxa diferenciada pelo transporte dos paletes que excedem o limite R ;
- Cap_* : capacidade de produção no período;
- FR : fração da demanda total que pode ser transportada pelo custo mais baixo;
- h_* : custo de estoque no período;
- N : número de itens distintos;
- P : número máximo de itens em um palete;
- q_* : tempo de preparação da máquina para a produção do item;
- R : número máximo de paletes que podem ser transportados com a taxa c_1 ;
- r_* : tempo de produção do item;
- s_* : custo de *setup* para a produção do item no período;
- T : número de períodos;
- α : parâmetro de controle da capacidade. Quanto menor o valor de α , maior será a folga da capacidade;

- γ : parâmetro de ajuste do tamanho do passo;
- λ_*^* : multiplicador lagrangiano;
- π_*^* : multiplicador surrogate.

Sumário

Lista de Figuras	i
Lista de Tabelas	ii
Lista de Abreviações e Notações	iv
Introdução	1
1 Problemas de Dimensionamento de Lotes	4
1.1 Dimensionamento de Lotes Único Item	6
1.1.1 Problema de Dimensionamento de Lotes Único Item Não Capacitado	7
1.1.2 Problema de Dimensionamento de Lotes Único Item Capacitado . . .	16
1.2 Dimensionamento de Lotes Multi Itens	17
1.2.1 Problema de Dimensionamento de Lotes Monoestágio	17
1.2.2 Problema de Dimensionamento de Lotes Multiestágio	19
1.3 Problema de Dimensionamento de Lotes Integrado	20
1.3.1 Problema de Dimensionamento e Seqüenciamento de Lotes	21
1.3.2 Problema de Dimensionamento de Lotes Combinado com Corte . . .	26
1.3.3 Problema de Dimensionamento de Lotes com Custos de Transporte .	28
2 Análise de Métodos de Resolução Aplicada à Problemas de Dimensionamento de Lotes com Custo de Transporte	32
2.1 Métodos de Resolução	33
2.1.1 <i>Branch-and-Bound</i>	33
2.1.2 Geração de Planos de Cortes	34
2.1.3 Pré-processamento	34
2.1.4 Heurística Primal	34
2.2 Modelo e Testes Realizados	35

2.2.1	Problema de Dimensionamento de Lotes Capacitado com Custo de Transporte	35
2.2.2	Testes e Resultados Computacionais	37
3	Métodos de Solução para um Problema de Dimensionamento de Lotes Capacitado com Custo de Transporte	44
3.1	Procedimentos Básicos	45
3.1.1	Relaxação Lagrangiana	45
3.1.2	Resolução do Problema de Dimensionamento de Lotes com Atraso . .	52
3.1.3	Resolução do Problema do Transporte dos Paletes	54
3.1.4	Heurística de Factibilização	56
3.1.5	Heurísticas de Melhoria	60
3.1.6	Método do Subgradiente	62
3.1.7	Relaxação LagSur	64
3.1.8	Busca Unidimensional	67
3.2	Heurística Lagrangiana	68
3.3	Heurística Lagrangiana/Surrogate	69
4	Resultados Computacionais	71
4.1	Geração de Dados	71
4.2	Resultados Computacionais	75
4.2.1	Convergência das Heurísticas - Limitantes Inferiores	75
4.2.2	Resultados das Heurísticas X CPLEX 10.0	80
	Conclusão e Trabalhos Futuros	89
	Referências Bibliográficas	92
	Apêndice A	98
A	Métodos Básicos	99
A.1	Resolução do Problema de Dimensionamento de Lotes com Atraso	99
A.2	Resolução do Problema do Transporte dos Paletes	100
A.3	Heurística de Factibilização da Capacidade	101
A.4	Heurística de Factibilização dos Paletes	103
A.5	Heurística de Melhoria em Relação ao Transporte de Paletes	103
A.6	Heurística de Melhoria em Relação a Capacidade de Produção	105
A.7	Método do Subgradiente	106

A.8	Busca Unidimensional	107
A.9	Heurística Lagrangiana	108
A.10	Heurística Lagrangiana/Surrogate	110
	Apêndice B	112
B	Resultados	113
B.1	Resultados do pacote AMPL/CPLEX 10.0	113
B.2	Resultados da heurística Lagrangiana/Surrogate e Lagrangiana	121

Introdução

O problema de dimensionamento de lotes é um problema de otimização da produção, onde o objetivo é planejar a quantidade de itens a ser produzida em várias, ou única, máquinas em cada período ao longo de um horizonte de tempo, de modo a atender uma demanda e otimizar uma função objetivo.

O planejamento da produção em indústrias, que envolve a produção de diversos itens utilizando várias máquinas, é uma tarefa complexa e precisa ser realizada rotineiramente. Deve-se ressaltar que a natureza combinatória de tais problemas os torna de difícil solução do ponto de vista da complexidade computacional e exige o desenvolvimento de complexas ferramentas matemático/computacionais para sua solução. A dificuldade de resolução dos problemas de dimensionamento de lotes pode aumentar, dependendo de algumas propriedades do problema.

De acordo com Drexel e Kimms [25] "Os problemas de dimensionamento de lotes e programação da produção interagem com outras atividades de uma indústria, por exemplo: planejamento de distribuição, corte e empacotamento e programação de projetos. A coordenação destas tarefas de planejamento é, portanto, muito importante para evitar altos custos transacionais. Contudo, as pesquisas têm praticamente negligenciado os problemas de coordenação. Como o aproveitamento de oportunidades para diminuir custos é um aspecto vital num ambiente competitivo, a resolução de problemas de coordenação talvez seja a meta mais crucial de trabalhos futuros".

Um tipo de integração de problemas, envolvendo o dimensionamento de lotes, é o problema de dimensionamento de lotes com transporte. De acordo com [53], embora os custos de transporte representem mais de cinquenta por cento do custo logístico total de um produto, este é praticamente negligenciado na modelagem dos problemas de dimensionamento de lotes.

Dentre os poucos estudos de dimensionamento de lotes que consideram custos de transporte, a maioria tem em comum a suposição de que a taxa para o transporte diminui de acordo com o aumento do volume transportado. Neste trabalho, o custo de transporte não obedecerá essa regra. Suponha uma empresa que, ao produzir seus produtos finais, tem que transportá-los até um armazém e, além disso, suponha que o transporte é terceirizado. Para isso, é feito um contrato com uma empresa que estabelece os seguintes custos para o transporte: um custo fixo de contrato, um custo, por palete, para um determinado número

de paletes transportados e um custo adicional para o transporte dos paletes extras.

Observe que as características do transporte desta empresa diferem das características do custo de transporte tratados pela maioria dos estudos. Neste caso, a alta produção dos itens em apenas um período pode encarecer o transporte, criando um *trade-off* entre o custo de transporte e o planejamento da produção. Desta forma, neste trabalho, é feito um estudo onde o problema de dimensionamento e o custo de transporte são tratados de modo integrado.

Cabe observar que, na literatura, outros tipos de problemas podem ser tratados de forma integrada, por exemplo a decisão de seqüenciamento da produção. No problema de dimensionamento de lotes, as decisões de seqüenciamento não são tomadas, obtém-se apenas a quantidade que será produzida e em que período, faltando a ordem da produção. Já nos problemas de dimensionamento e seqüenciamento de lotes, um plano de produção que atenda as demandas dos itens é determinado e, além disso, é determinada a seqüência em que os lotes devem ser produzidos. Em alguns setores industriais tais como o setor de fundição, bebidas, móveis, nutrição, entre outros, onde a produção dos itens envolve tempo de preparo das máquinas, que pode depender da ordem em que os itens são produzidos, a ordem de produção é um fator importante na decisão e pode dificultar a resolução do problema.

O problema de dimensionamento de lotes também pode ser integrado ao problema de corte e empacotamento. O problema de corte pode ser descrito em um problema, onde objetos grandes (placas de madeira, bobinas de papel, placas de espuma, etc.) tem que ser cortados em itens menores com o objetivo de minimizar a perda (maximizar o lucro) e atender a demanda dos produtos finais. O problema de empacotamento pode ser considerado o inverso do problema de corte, pois podemos considerar o problema de cortar objetos maiores em itens menores equivalente a alocar peças menores em itens maiores. É usual as indústrias resolverem o problema de dimensionamento primeiro e depois, para cada período do horizonte de planejamento, resolvem um problema de corte e empacotamento. Assim como no problema de dimensionamento integrado com transporte ou seqüenciamento, tratar o problema de corte e empacotamento integrado ao dimensionamento de lotes pode fornecer uma solução melhor do que a obtida quando os dois problemas são tratados separadamente.

Esta dissertação está dividida da seguinte forma. No Capítulo 1 é feita uma revisão e discussão sobre a classificação e modelos de problemas de dimensionamento de lotes e problema de dimensionamento de lotes integrados. No Capítulo 2 é apresentado o modelo do nosso problema e são discutidos alguns métodos de solução utilizados por alguns pacotes de otimização. Além disso, são realizados alguns testes computacionais, com o objetivo de identificar a diferença entre a dificuldade de resolução entre o modelo dado em [53], onde não se considera restrições de capacidade, e o modelo com restrições de capacidade.

No terceiro capítulo são desenvolvidos dois métodos heurísticos de resolução. O primeiro método consiste na aplicação da Relaxação Lagrangiana e a aplicação de métodos heurísticos para a resolução da relaxação, obtendo um limitante inferior para o problema. Através de métodos heurísticos de transferências, limitantes superiores são obtidos. O próximo passo da heurística é a atualização dos multiplicadores lagrangianos através do método do subgradiente.

Na segunda heurística, a relaxação Lagrangiana é aplicada sobre uma restrição surrogate, criada sobre dois conjuntos de restrições. Nesta heurística, também aplicamos métodos heurísticos para resolução da relaxação e depois usamos heurísticas de factibilização e melhoria da solução obtida com a relaxação do problema. Os multiplicadores surrogate também são atualizados pelo método do subgradiente e após algumas iterações dos passos mencionados, é aplicado um método de busca unidimensional para a atualização do multiplicador lagrangiano.

No Capítulo 4 temos a geração de dados e os resultados computacionais. A conclusão de nosso trabalho e idéias para trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 5.

Capítulo 1

Problemas de Dimensionamento de Lotes

O Problema de Dimensionamento de Lotes (*lot sizing*) é um problema de planejamento de produção que consiste em definir os itens que serão produzidos, e em quais períodos, de modo que satisfaça uma demanda, capacidade de produção, etc. e minimize o custo total de produção.

Diversos modelos para o problema de dimensionamento de lotes são propostos. Um dos primeiros modelos desses problemas é o modelo *Economic Order Quantity* (EOQ), proposto por Harris [37], que consiste num modelo sem restrição de capacidade e um único tipo de item é produzido. Além disso, a demanda é estacionária, os períodos de tempo são contínuos e o horizonte de planejamento é infinito. O modelo EOQ é resolvido otimamente por uma expressão analítica.

Posteriormente, o modelo EOQ foi estendido para o modelo *Economic Lot Scheduling Problem* (ELSP) que considera restrições de capacidade e vários itens. No ELSP, assim como no EOQ, a demanda também é estacionária e os períodos de tempo são contínuos com um horizonte de planejamento infinito.

Buscando se ajustar cada vez mais à realidade, tem-se uma extensão do problema de dimensionamento de lotes dada por Wagner e Whitin [69] que, além de considerar a demanda dinâmica, assume um horizonte de planejamento finito dividido em vários períodos discretos. Além do modelo, Wagner e Whitin [69] propõem um método para resolver este problema otimamente em tempo polinomial e Evans [27] propõe um algoritmo com a mesma complexidade do algoritmo de Wagner e Whitin, porém, testes computacionais mostraram que o algoritmo de Evans é mais eficiente. Além desses dois trabalhos, três trabalhos mais recentes, Federgruen e Tzur [30], Wagelmans *et al.* [68] e Aggarwal e Park [2] apresentam novos algoritmos de menor complexidade para resolver este problema. Podemos encontrar uma revisão bibliográfica mais recente deste problema em Brahim *et al.* [17].

Karimi *et al.* [41] faz uma classificação dos problema de dimensionamento de lotes

de acordo com algumas características como horizonte de planejamento, número de itens, capacidade, etc. A seguir comentaremos algumas dessas características.

- Horizonte de Planejamento.

O horizonte de planejamento é o intervalo de tempo onde serão produzidos os itens. Este pode ser finito ou infinito. Um horizonte de planejamento finito é usualmente acompanhado por uma demanda dinâmica e um horizonte de planejamento infinito acompanhado por uma demanda estacionária.

O sistema pode ser observado de modo contínuo ou discreto. E assim, classificados por problemas **contínuos** ou **discretos**.

Pode-se também classificar os problemas pelo tamanho dos períodos. Problemas com períodos grandes, podendo assim produzir diversos tipos de itens, são denominados *Big Bucket*. Problemas com períodos de tempos curtos, onde há produção de no máximo um ou dois tipos de itens, são classificados por *Small Bucket*.

- Número de estágios.

A produção é classificada como **monoestágio** ou **multiestágio**. No sistema monoestágio o item final é produzido de maneira direta, em um único estágio. As demandas dos produtos são satisfeitas diretamente pelo produto final, neste caso dizemos que o problema tem **demandas independentes**.

No sistema multiestágio, temos alguns itens (produtos finais) que dependem de outros itens. Conseqüentemente a demanda de um nível de produção depende da produção dos níveis anteriores e assim temos **demandas dependentes**.

- Número de itens.

O número de tipos de itens é uma característica importante que afeta o modelo e a complexidade do problema.

Há dois tipos principais de sistema de produção em relação ao número de tipos de itens. Em **um-item** temos um único tipo de item para cada atividade organizada. Quando produzimos vários itens distintos temos um problema **multi-itens**, onde a complexidade deste poder ser bem maior que a do problema um-item.

- Capacidade ou restrições de recurso.

Um problema onde é possível admitir-se produzir qualquer quantidade de itens é classificado como **não capacitado**. Caso contrário, ou seja, existe um limite má-

ximo de produção, este é um problema **capacitado**. As restrições de capacidade são importantes e afetam a complexidade do problema.

- Demanda.

Um problema tem **demanda estática** quando os valores da demanda não mudam em relação ao tempo, enquanto na **demanda dinâmica** ocorre variação na demanda em relação ao tempo.

Se os valores da demanda são conhecidos, o problema é determinístico, mas se não é conhecido porém há uma probabilidade de ocorrer um determinado valor, o problema é estocástico.

Além disso, demandas dependentes (independentes) ocorrem se existe (não existe) dependência entre as demandas dos itens, como já comentado anteriormente.

- Tempo e custo de preparo para produção.

Outro fator importante que afeta a estrutura e a complexidade do modelo é o tempo e o custo de *setup* ou preparo de produção. O custo de *setup* e/ou tempo de *setup* são usualmente modelados com a introdução de uma variável zero-um no modelo matemático.

Serão considerados dois tipos de *setup*, se o tempo de *setup* é independente é dito que o **tempo de *setup* é simples**, mas se a seqüência de produção ou o período afetam o tempo de *setup*, então o **tempo de *setup* é complexo**.

- Atraso de entrega (*backlogging*).

Atraso de entrega da demanda é outra característica que afeta o modelo e a complexidade do problema. Podemos assumir que a demanda em um dado período t pode ser satisfeita em outro período i ($i \geq t$), mas esse atraso gera um custo que é adicionado a função objetivo.

Nas seções a seguir são apresentadas as modelagens de algumas variações do problema de dimensionamento de lotes.

1.1 Dimensionamento de Lotes Único Item

Nesta seção são apresentados alguns modelos e variações do problema de dimensionamento de lotes para a produção de um único item (*single item lot sizing problem*), com

produção em uma única máquina. O objetivo é determinar os períodos onde teremos produção e a quantidade produzida em cada período, minimizando o custo total de produção.

Considere os seguintes dados.

- T : número de períodos de produção;
- d_t : demanda do item no período t ($t = 1 \dots T$);
- p_t : custo de produção por unidade no período t ;
- s_t : custo de *setup* no período t (custo fixo que ocorre se o processo de produção ocorre no período t);
- h_t : custo de estoque no período t ;
- $d_{qt} = d_q + d_{q+1} + \dots + d_t$.

1.1.1 Problema de Dimensionamento de Lotes Único Item Não Capacitado

O problema de dimensionamento de lotes para um único item sem restrição de capacidade é um problema onde é considerado um único tipo de produto e a capacidade da produção é ilimitada, ou seja, pode-se produzir uma quantidade infinita de itens em cada período.

Como mencionado anteriormente, um dos primeiros métodos de resolução para esse problema é dado por Wagner e Whitin [69], onde os autores apresentam um algoritmo de programação dinâmica, cujo objetivo é determinar o caminho mínimo em um grafo orientado. Uma implementação do algoritmo de Wagner e Whitin é proposta por Evans [27]. A complexidade de ambos estudos (Wagner-Whitin e Evans) é a mesma, mas testes experimentais mostram que a implementação de Evans é mais eficiente. Revisões mais detalhadas sobre métodos de resolução, para problema de dimensionamento de lotes único item não capacitado, podem ser encontradas em [62], [17] e [70].

1.1.1.1 Formulação Inicial do Problema

Nos tópicos a seguir, são apresentadas algumas variações do modelo de dimensionamento de lotes. Antes é feita uma observação sobre a importância dessas diferentes formulações. Supondo duas formulações para um problema de programação inteira, representadas pela figura a seguir:

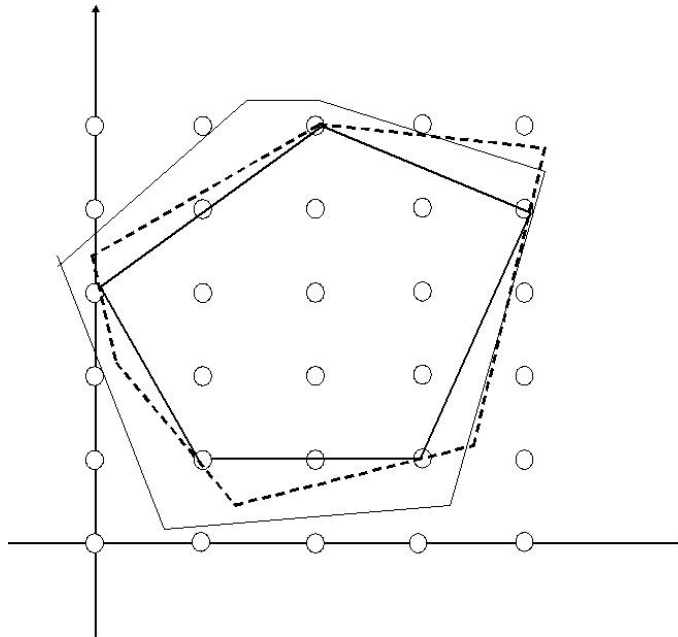


Figura 1.1: Formulações do problema

podem ser observadas três regiões; a primeira, desenhada pela linha contínua mais grossa, representa a região com as soluções viáveis para o problema. A segunda, formada pela linha pontilhada, representa a região factível da primeira modelagem e a região limitada pela linha contínua mais fina representa a região do segundo modelo. Ambos os modelos representam o mesmo problema mas, pode-se perceber que a região limitada pelo primeiro modelo se aproxima mais da região de soluções do problema (envoltório convexo). As formulações que serão dadas a seguir são feitas em busca de um modelo mais "apertado", ou seja, uma formulação que aproxima melhor a região do envoltório convexo.

As formulações dadas a seguir são baseadas em [17]. Além dos dados considerados anteriormente (início da Subseção 1.1), consideraremos as seguintes variáveis de decisão.

- X_t : quantidade produzida no período t ;
- I_t : quantidade em estoque no final do período t ;
- $Y_t = 1$ se ocorre *setup* no período t ($X_t > 0$) e $Y_t = 0$ caso contrário.

Com esses dados podemos fazer a seguinte modelagem do problema.

$$\min \sum_{t=1}^T (s_t Y_t + p_t X_t + h_t I_t) \quad (1.1)$$

sujeito a.

$$I_{t-1} + X_t = d_t + I_t \quad t = 1, \dots, T \quad (1.2)$$

$$X_t \leq Y_t d_{tT} \quad t = 1, \dots, T \quad (1.3)$$

$$Y_t \in \{0, 1\} \quad t = 1, \dots, T \quad (1.4)$$

$$I_t, X_t \geq 0 \quad t = 1, \dots, T \quad (1.5)$$

Assuma, sem perda de generalidade, que o estoque inicial é igual a zero ($I_0 = 0$). Isto pode ser feito pois caso o estoque inicial seja diferente de zero, basta reduzir este estoque das demandas iniciais do problema e zerar o estoque inicial.

A função objetivo minimiza a soma dos custos de *setup*, produção e estoque dos T períodos. A restrição (1.2) é a equação de balanço, ou seja, a soma do estoque no final do período $t - 1$ mais a produção no período t é igual a demanda mais o estoque no final do período t . A restrição (1.3) relaciona a variável de produção com a variável de *setup* (só é possível produzir se tiver *setup*).

1.1.1.2 Formulação Agregada

Antes de apresentar o modelo, é feito um estudo para entender algumas restrições. Considerando a formulação anterior, através do conjunto de restrições (1.2), tem-se que o estoque, a cada período, é dado da seguinte forma.

Para $t = 1$, a equação (1.2) é escrita da seguinte forma:

$$I_1 = X_1 - d_1.$$

Considerando $t = 2$,

$$I_2 = X_2 - d_2 + I_1.$$

Substituindo I_1 , obtido na primeira equação, na segunda equação, tem-se

$$\begin{aligned} I_2 &= X_2 - d_2 + X_1 - d_1 \\ &= (X_1 + X_2) - (d_1 + d_2) \\ &= \sum_{i=1}^2 X_i - \sum_{i=1}^2 d_i. \end{aligned}$$

Se $t = 3$,

$$I_3 = X_3 - d_3 + I_2.$$

Novamente, substituindo I_2 , obtém-se

$$\begin{aligned} I_3 &= X_3 - d_3 + X_2 - d_2 + X_1 - d_1 \\ &= (X_1 + X_2 + X_3) - (d_1 + d_2 + d_3) \\ &= \sum_{i=1}^3 X_i - \sum_{i=1}^3 d_i. \end{aligned}$$

Seguindo este raciocínio até $t = T$, o estoque no período t pode ser escrito da seguinte forma:

$$I_t = \sum_{i=1}^t X_i - \sum_{i=1}^t d_i \quad t = 1, \dots, T \quad e \quad I_t \geq 0.$$

Assim, substituindo o estoque na função objetivo (1.1) obtém-se:

$$\begin{aligned} &\sum_{t=1}^T (s_t Y_t + p_t X_t + h_t (\sum_{i=1}^t X_i - \sum_{i=1}^t d_i)) \\ &= \sum_{t=1}^T s_t Y_t + \sum_{t=1}^T (p_t + \sum_{t=1}^T h_t) X_t - \sum_{t=1}^T h_t d_{1t}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ainda considerando o conjunto de restrições (1.2), fazendo a soma das duas primeiras restrições obtém:

$$I_0 + X_1 + I_1 + X_2 = d_1 + I_1 + d_2 + I_2.$$

Como $I_0 = 0$ (mencionado na modelagem anterior), somando a terceira restrição obtém:

$$(X_1 + X_2) + I_2 + X_3 = (d_1 + d_2) + I_2 + I_3 + d_3.$$

Observe que após somar todas as restrições e considerando $I_T = 0$, a soma das T restrições (1.2) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sum_{t=1}^T X_t = d_{1T}. \quad (1.7)$$

Se substituir o conjunto de restrições (1.2) pela restrição (1.7), não garantimos que o modelo não terá atraso de entrega, já que agora nossa restrição garante que a soma da produção em todos os períodos tem que ser igual a soma da demanda de todos períodos. E assim, não é garantida a produção da demanda período por período. Portanto, devemos adicionar no modelo a seguinte restrição que garante o atendimento de pelo menos a demanda em cada período.

$$\sum_{i=1}^t X_i \geq d_{1t} \quad t = 1, \dots, T - 1$$

Obtendo assim, a seguinte formulação sem variável de estoque.

$$\min \sum_{t=1}^T s_t Y_t + \sum_{t=1}^T (p_t + \sum_{t=1}^T h_t) X_t - \sum_{t=1}^T h_t d_{1t} \quad (1.6)$$

sujeito a.

$$\sum_{t=1}^T X_t = d_{1T} \quad (1.7)$$

$$\sum_{i=1}^t X_i \geq d_{1t} \quad t = 1, \dots, T - 1 \quad (1.8)$$

$$X_t \leq Y_t d_{tT} \quad t = 1, \dots, T \quad (1.9)$$

$$Y_t \in \{0, 1\} \quad t = 1, \dots, T \quad (1.10)$$

$$X_t \geq 0 \quad t = 1, \dots, T \quad (1.11)$$

Note que o último somatório pode ser omitido na função objetivo, pois trata-se de uma constante.

1.1.1.3 Formulação do Menor Caminho

Esta formulação é baseada em um problema em grafo, onde cada nó do grafo representa um período, incluindo um período falso $T + 1$ com um arco entre cada par de nós. O arco entre os nós t e q representa a opção de produção da soma da demanda entre o período t e o período $q - 1$ no período t . O objetivo é encontrar o menor caminho de 1 até $T + 1$.

Considere o seguinte grafo.

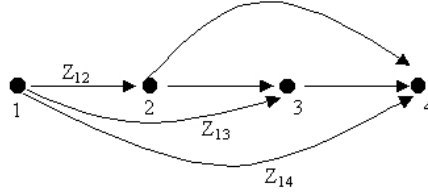


Figura 1.2: Problema de busca em grafo

Seja Z_{tq} a fração da demanda total do período t até o fim do período $q - 1$ que é produzida no período t , e v_{tq} o custo total de produção mais o custo de estoque. Por exemplo, $v_{14} = d_1p_1 + d_2(p_1 + h_1) + d_3(p_1 + h_1 + h_2)$.

O problema do caminho mais curto tem as seguintes restrições:

$$\sum_{i=2}^T Z_{1i} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{t-1} Z_{it} = \sum_{i=t+1}^{T+1} Z_{ti} \quad t = 2, \dots, T$$

A primeira restrição garante que pelo menos um arco sai do nó 1, neste caso podemos considerar que existe produção no período 1. A restrição seguinte, é chamada de restrição de fluxo que, junto com a restrição anterior, garante o atendimento da demanda de todos os períodos.

Para a construção do modelo, são necessárias as restrições de controle de *setup* e não negatividade

$$\sum_{i=t+1}^{T+1} Z_{ti} \leq Y_t \quad t = 1, \dots, T$$

$$Z_{tq} \geq 0 \quad t = 1, \dots, T + 1 \text{ e } q = 1, \dots, T + 1$$

Será considerada a seguinte função objetivo, que minimiza o custo de *setup* e o custo de produção e estoque.

$$\min \sum_{t=1}^T (s_t Y_t + \sum_{q=t+1}^T v_{tq} Z_{tq})$$

Disto, segue o seguinte modelo para o problema de dimensionamento de lotes.

$$\min \sum_{t=1}^T (s_t Y_t + \sum_{q=t+1}^T v_{tq} Z_{tq}) \quad (1.12)$$

sujeito a.

$$\sum_{i=2}^T Z_{1i} = 1 \quad (1.13)$$

$$\sum_{i=1}^{t-1} Z_{it} = \sum_{i=t+1}^{T+1} Z_{ti} \quad t = 2, \dots, T \quad (1.14)$$

$$\sum_{i=t+1}^{T+1} Z_{ti} \leq Y_t \quad t = 1, \dots, T \quad (1.15)$$

$$Y_t \in \{0, 1\} \quad t = 1, \dots, T \quad (1.16)$$

$$Z_{tq} \geq 0 \quad t = 1, \dots, T + 1 \text{ e } q = 1, \dots, T + 1 \quad (1.17)$$

Esta formulação é mais forte, no sentido que a relaxação linear tem uma solução com as variáveis Y_t inteiras. Podemos verificar que o conjunto de restrições (1.15) forma um matriz totalmente unimodular [54].

1.1.1.4 Formulação Baseada em Localização de Serviços

Esta formulação é chamada de formulação desagregada ou formulação baseada em localização de serviços. Defina X_{qt} como o número de unidades produzidas no período q para satisfazer a demanda do período t (pode-se relacionar X_{qt} como sendo a variável de decisão para o modelo de localização de serviços que fornece a fração da demanda do cliente t atendida pelo serviço q) e $c_{qt} = p_q + h_q + h_{q+1} + \dots + h_{t-2} + h_{t-1}$ ($q \leq t$).

Considere que cada cliente i pode ser atendido apenas pelos serviços t tal que $t \leq i$, pois não é permitido o atraso na entrega da demanda. Assim, a soma da fração da demanda do cliente t produzidas por todos os serviços, que atendem estes clientes, tem que ser igual a demanda.

$$\sum_{i=1}^t X_{it} = d_t \quad t = 1, \dots, T$$

A variável de *setup* pode ser considerada como a variável de decisão do problema de localização que indica se o serviço está ou não instalado, obtendo a seguinte restrição para o problema.

$$X_{qt} \leq d_t Y_q \quad t = 1, \dots, T$$

Com as restrições dadas acima, segue o modelo para este problema [17].

$$\min \sum_{t=1}^T (s_t Y_t + \sum_{i=t}^T c_{ti} X_{ti}) \quad (1.18)$$

sujeito a.

$$\sum_{i=1}^t X_{it} = d_t \quad t = 1, \dots, T \quad (1.19)$$

$$X_{qt} \leq d_t Y_q \quad t = 1, \dots, T \quad (1.20)$$

$$Y_t \in \{0, 1\} \quad t = 1, \dots, T \quad (1.21)$$

$$X_{tq} \geq 0 \quad t = 1, \dots, T \text{ e } q = 1, \dots, T \quad (1.22)$$

A vantagem dessa formulação, assim como na anterior, é que a solução ótima da relaxação linear tem valores de Y_t inteiros.

1.1.1.5 Extensões do Problema Inicial

A seguir, são apresentadas algumas variações do problema de dimensionamento de lotes com um único item e sem restrições de capacidade.

a) Atraso de entrega da demanda.

Admita, neste caso, que possa existir um atraso de entrega da demanda. Mas, para isso, é cobrado uma penalidade, ou custo, para cada unidade atrasada a cada período. O primeiro estudo com atraso de demanda (*backlogging*) foi apresentado por Zangwill [72]. Neste o problema é tratado como um problema de fluxo em rede. Além disso, é desenvolvido um método de resolução ótimo para o problema.

Considerando o modelo inicial (1.1)-(1.5) e admitindo o atraso de entrega da demanda, segue o modelo:

$$\min \sum_{t=1}^T (s_t Y_t + p_t X_t + h_t I_t^+ + b_t I_t^-) \quad (1.23)$$

sujeito a.

$$I_{t-1}^+ - I_{t-1}^- + X_t = d_t + I_t^+ - I_t^- \quad t = 1, \dots, T \quad (1.24)$$

$$X_t \leq Y_t d_{tT} \quad t = 1, \dots, T \quad (1.25)$$

$$Y_t \in \{0, 1\} \quad t = 1, \dots, T \quad (1.26)$$

$$I_t^+, I_t^-, X_t \geq 0 \quad t = 1, \dots, T \quad (1.27)$$

Onde, b_t é o custo no atraso do período t , I_t^+ o estoque no fim do período t e I_t^- a quantidade em atraso no fim do período t .

b) Múltiplas facilidades.

A idéia de múltiplas facilidades foi introduzida por Zangwill [72] que considerou dois casos: **facilidades em paralelo** e **facilidades em série**. No caso de facilidades em paralelo, não há interação entre a produção dos itens, cada facilidade satisfaz suas exigências. No caso de facilidades em série o produto final de uma facilidade é o produto inicial da outra e assim, o último produto satisfaz a demanda. Quando temos múltiplas facilidades, o custo de *setup*, custo de produção e custo de estoque podem ser diferentes para cada tipo de facilidade. A principal diferença entre o modelo inicial (1.1)-(1.5) e o de múltiplas facilidades é a adição da variável W_{jkt} que representa a quantidade que será transferida da facilidade j para k durante o período t .

Para melhor compreensão do modelo de múltiplas facilidades em paralelo, imagine em uma fábrica, três linhas independentes de produção, sendo que, cada linha representa uma facilidade e considere que, os períodos de produção são iguais para cada linha de produção. A variável W_{jkt} indica a quantidade transferida dos itens finais, já produzidos, de uma linha de produção para a outra.

Para a modelagem a seguir são necessários os seguintes dados e variáveis .

Dados:

- d_{jt} : demanda da facilidade j no período t ;
- p_{jt} : custo por unidade produzida na facilidade j no período t ;
- s_{jt} : custo de setup da facilidade j n período t ;
- h_{jt} : custo de estoque da facilidade j n período t ;

- ρ_{jkt} : custo de transferência, por unidade, de itens da facilidade j para a facilidade k no período t .

Variáveis:

- X_{jt} : quantidade produzida na facilidade j no período t ;
- I_{jt} : quantidade em estoque na facilidade j no final do período t ;
- $Y_{jt} = 1$ se existe produção na facilidade j no período t e 0 caso contrário.

Temos o seguinte modelo.

$$\min \sum_j \sum_t (s_{jt}Y_{jt} + p_{jt}X_{jt} + h_{jt}I_{jt} + (\sum_{k \neq j} \rho_{jkt}W_{jkt})) \quad (1.28)$$

sujeito a.

$$I_{jt-1} + X_{jt} + \sum_{l \neq j} W_{ljt} = d_{jt} + I_{jt} + \sum_{k \neq j} W_{jkt} \quad j, t = 1, \dots, T \quad (1.29)$$

$$X_t \leq Y_{jt} \sum_j \sum_i d_{ji} \quad j, t = 1, \dots, T \quad (1.30)$$

$$Y_{jt} \in \{0, 1\} \quad j, t = 1, \dots, T \quad (1.31)$$

$$I_{jt}, X_{jt}, W_{jkt} \geq 0 \quad j, k, t = 1, \dots, T \quad (1.32)$$

$$I_{j0} = 0, I_{jT} = 0 \quad t = 1, \dots, T. \quad (1.33)$$

Este modelo, dado em [17], inclui o custo de transferência de produção na função objetivo.

1.1.2 Problema de Dimensionamento de Lotes Único Item Capacitado

Em alguns casos não é possível admitir que a capacidade de produção de uma fábrica seja ilimitada ou grande o suficiente para produzir qualquer quantidade desejada. Desta forma, é preciso considerar restrições de capacidade no modelo. Nesta subseção será comentada a diferença com relação aos modelos da subseção anterior. Um dos primeiros trabalhos com problemas de dimensionamento de lotes capacitado foi apresentado em [33], neste também é desenvolvido um algoritmo para resolver este problema. Kirca [44] propôs um algoritmo, em dois estágios, para resolver este problema. O primeiro estágio gera planos de produção que podem fazer parte da solução ótima e o segundo, aplica um algoritmo de programação

dinâmica usando os planos gerados no primeiro estágio. Em [17] é feita uma revisão sobre métodos e algoritmos de solução. Revisões mais gerais podem ser encontradas em [41].

Para o modelo inicial (1.1)-(1.5) e o modelo agregado (1.6)-(1.11) apenas é atribuído o valor de capacidade do período t (Cap_t), e adicionado a restrição abaixo no modelo.

$$X_t \leq Cap_t Y_t \quad t = 1, \dots, T \quad (1.34)$$

Para o modelo do menor caminho (1.12)-(1.17) é necessário adicionar ao modelo a seguinte restrição:

$$\sum_{i=t+1}^{T+1} d_{ti-1} Z_{ti} \leq Cap_t \quad t = 1, \dots, T. \quad (1.35)$$

E para a formulação baseada em localização de serviços (1.18)-(1.22) adicionamos a restrição

$$\sum_{k=t}^T X_{tk} \leq Cap_t \quad t = 1, \dots, T. \quad (1.36)$$

1.2 Dimensionamento de Lotes Multi Itens

Nesta seção será considerado que todos os problemas são capacitados. Cabe observar que, em geral, admitindo que a capacidade é ilimitada, um problema multi item pode ser decomposto em problemas de um único item. Assim, é possível resolver o problema, com vários itens utilizando métodos de solução desenvolvidos para problemas com um único tipo de item. Entretanto, quando as restrições de capacidade são consideradas, é necessário o desenvolvimento de métodos específicos para o problema com vários tipos de itens.

Karimi *et al.* [41] divide os métodos de resolução dessa classe de problemas em três tipos: métodos exatos, heurísticas especializadas e heurísticas baseadas em programação matemática. Em [47] e [11] são feitas boas revisões sobre estruturas, modelos e métodos para o problema de dimensionamento de lotes vários itens. Uma revisão mais detalhada pode ser encontrada em [50], onde há uma revisão de heurísticas, relaxações e métodos.

1.2.1 Problema de Dimensionamento de Lotes Monoestágio

Como dito anteriormente, no sistema monoestágio o item final é produzido de maneira direta, em um único estágio. O problema pode ser formulado como um problema de programação inteira mista. Se o tempo e os custos de preparação são irrelevantes, o problema pode

ser modelado como um programa linear e poderá ser resolvido por alguma técnica padrão de Programação Linear.

Podem ser encontrados na literatura métodos exatos e heurísticos para resolver o problema monoestágio. A maioria desses trabalhos não consideram tempo de preparação. Alguns métodos exatos, sem considerar tempo de preparação, podem ser encontrados em Baryan *et al.* [12], Evans [28]. Métodos heurísticos para resolver o problema monoestágio sem tempo de preparação podem ser encontrados em Cattrysse *et al.* [19] e Kirca e Kökten [45]. Vale observar que, devido à complexidade do problema, os procedimentos exatos resolvem apenas problemas pequenos, enquanto os procedimentos heurísticos fornecem soluções para problemas de maior porte.

Métodos exatos que consideram tempo de preparação podem ser encontrados em Daby *et al.* [22], que desenvolvem um método branch-and-bound. Armentano *et al.* [10] representam o problema como uma rede generalizada e utilizam um algoritmo branch-and-bound. Trabalhos que desenvolvem heurísticas que consideram tempo de preparação não nulo destaca-se Trigeiro *et al.* [66], onde é desenvolvido um método heurístico que consiste em relaxar as restrições de capacidade através da técnica de relaxação Lagrangiana. Em seguida, se a solução for infactível, um método de factibilização é aplicado, o qual, transfere produção entre períodos na tentativa de factibilizar a solução e, finalmente, os multiplicadores duais são atualizados utilizando o método do subgradiente. Araujo e Arenales [4], fazem uma modificação no método desenvolvido por Trigeiro *et al.* [66] e obtém uma pequena melhoria nos resultados computacionais.

O modelo que será apresentado a seguir (baseado em [66]), é um modelo monoestágio com restrições de capacidade e considera tempo e custo de *setup* e uma única máquina. Considere os seguintes dados.

- N tipos de itens;
- T períodos;
- c_{it} : custo de produção do item i no período t ;
- s_{it} : custo de preparação do item i no período t ;
- H_{it} : custo unitário de estocagem do item i no período t ;
- q_i : tempo de preparo para da produção do item i ;
- r_i : tempo de produção do item i ;
- Cap_t : limite de capacidade, em unidade de tempo, no período t ;

- d_{it} : demanda do item i no período t ;
- M : número suficientemente grande.

Além disso, considere as seguintes variáveis de decisão.

- X_{it} : quantidade do item i produzida no período t ;
- I_{it} : quantidade do item i em estoque no final do período t ;
- $Y_{it} = 1$ se existe produção do item i no período t . Caso contrário, $Y_{it} = 0$.

Com isso, obtém o seguinte modelo.

$$\min \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N (H_{it}I_{it} + c_{it}X_{it} + s_{it}Y_{it}) \quad (1.37)$$

sujeito a.

$$I_{it-1} + X_{it} = d_{it} + I_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (1.38)$$

$$\sum_{i=1}^N (r_i X_{it} + q_i Y_{it}) \leq Cap_t \quad t = 1, \dots, T \quad (1.39)$$

$$X_{it} \leq M Y_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (1.40)$$

$$Y_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (1.41)$$

$$X_{it}, I_{it} \geq 0 \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (1.42)$$

Nesta formulação a função objetivo minimiza a soma dos custos de produção, estoque e preparação (*setup*). As restrições (1.38) são de balanço de estoque, ou seja, a quantidade produzida num período mais o estoque do período anterior é igual a demanda mais o estoque no fim do período. As restrições (1.39) são as restrições de capacidade, em unidade de tempo, onde é considerado o tempo de produção e preparação das máquinas. As restrições (1.40) garantem que só existirá produção caso a máquina esteja preparada, ou seja, se tiver *setup*.

1.2.2 Problema de Dimensionamento de Lotes Multiestágio

Como mencionado anteriormente, o problema de dimensionamento de lotes multiestágio ocorre quando a produção de um item final depende de outros itens, que também são programados para que a produção satisfaça a demanda. Os itens que são usados na produção de outros itens são denominados de predecessores e os itens que dependem de outros para serem produzidos são chamados de sucessores. Assim, consideremos os seguintes conjuntos:

- $Suc(i)$: conjunto dos itens sucessores imediatos do item i ;
- $Pred(i)$: conjunto dos itens predecessores imediatos do item i ;

Nesse problema a produção dos itens não tem apenas que satisfazer a demanda por período, mas também tem que garantir uma quantidade suficiente para que os itens sucessores possam ser produzidos. Assim, as equações de balanço entre as variáveis de estoque e produção devem determinar a produção e o estoque para suprir a demanda (d_{it}) mais $\sum_{j \in Suc(i)} \mu_{ij} X_{jt}$, onde μ_{ij} são as unidades do item i necessárias para a produção do item j .

Considerando os dados do modelo anterior, temos o seguinte modelo apresentado em [14].

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (H_{it} I_{it} + c_{it} X_{it} + s_{it} Y_{it}) \quad (1.43)$$

sujeito a.

$$I_{it-1} + X_{it} = d_{it} + \sum_{j \in Suc(i)} \mu_{ij} X_{jt} + I_{it} \quad t = 1, \dots, T \quad (1.44)$$

$$\sum_{i=1}^N (r_i X_{it} + q_i Y_{it}) \leq Cap_t \quad t = 1, \dots, T \quad (1.45)$$

$$X_{it} - M Y_{it} \leq 0 \quad t = 1, \dots, T \text{ e } i = 1, \dots, N \quad (1.46)$$

$$Y_{it} \in \{0, 1\} \quad t = 1, \dots, T \text{ e } i = 1, \dots, N \quad (1.47)$$

$$X_{it} \text{ e } I_{it} \quad t = 1, \dots, T \text{ e } i = 1, \dots, N \quad (1.48)$$

Pode-se observar que, a única diferença entre esta formulação e a anterior está na equação de balanço, que além de garantir a produção da demanda, também garante a produção dos itens necessários para a produção dos itens sucessores (demanda interna).

Várias pesquisas sobre técnicas de resolução do problema de dimensionamento de lotes multiestágio considerando variações na estrutura do produto e/ou na limitação de capacidade podem ser encontradas. Apenas alguns desses trabalhos serão citados a seguir: Afentakis *et al.* [1], Billington *et al.* [15], Maes *et al.* [49], Kuik *et al.* [46].

1.3 Problema de Dimensionamento de Lotes Integrado

Nas seções anteriores, foi tratado apenas o problema de decidir os períodos em que os itens serão produzidos e em qual quantidade cada item será produzido. De acordo com

[25] "os problemas de dimensionamento de lotes interagem com outras atividades de uma indústria (planejamento de distribuição, corte e empacotamento, programação de projetos, etc.). Relacionar estas atividades é importante para evitar altos custos transacionais. Porém, as pesquisas tem negligenciado esta integração. Como o aproveitamento para diminuir custos é um aspecto de muita importância para a sobrevivência no mercado competitivo, a resolução de problemas integrados seja a meta crucial para trabalhos futuros".

O grupo de pesquisa no qual o presente trabalho está inserido tem trabalhado com alguns problemas reais onde o problema de dimensionamento de lotes aparece de forma integrada a outros problemas. Em Araujo e Arenales [5, 6] e Araujo *et al.* [8] é estudado o setor de fundições considerando o problema em fundição de pequeno, médio e grande porte. Outro setor onde encontramos o problema de dimensionamento de lotes integrado é na industria de bebidas. Em Rangel e Ferreira [55] tem-se complexas inter-relações entre os vários setores de uma empresa de refrigerantes. E temos também o setor de nutrição, onde Toso e Morabito [65] fazem um estudo de caso em uma fábrica de ração. Em Araujo *et al.* [7] é feito um estudo genérico de setores onde os problemas de dimensionamento de lotes e seqüenciamento aparecem de forma integrada.

Outros diferentes tipos de integração podem ser encontrados na literatura em trabalhos como [25], [21], [35], [53]. A seguir, são apresentados alguns problemas e modelos integrados.

1.3.1 Problema de Dimensionamento e Seqüenciamento de Lotes

No problema de dimensionamento de lotes, as decisões de seqüenciamento não são tomadas. Já os problemas de dimensionamento e seqüenciamento de lotes, determinam um plano de produção que atenda as demandas dos itens e determine em qual seqüência os lotes devem ser produzidos.

Uma abordagem usual das pesquisas, e que geralmente acontece na prática, no tratamento do problema de dimensionamento e seqüenciamento de lotes, consiste na determinação do tamanho dos lotes e, a seguir, na resolução do problema de seqüenciamento em cada período separadamente [61]. Assim, estes dois problemas, dimensionamento e seqüenciamento, podem ser tratados de forma independente: em um estágio é resolvido o problema de dimensionamento dos lotes e no outro, realizado depois, é resolvido o problema de seqüenciamento; ou integrados por um modelo matemático que capture simultaneamente as relações entre os dois problemas.

Um dos primeiros modelos de dimensionamento e seqüenciamento apresentados, consistem no Problema de Dimensionamento de Lotes e Programação de Produção Discreto (*Discrete Lot sizing and Scheduling Problem-DLSP*). Nesse modelo, são considerados períodos de

produção pequenos ou micro-períodos (horas, por exemplo) e não mais macro-períodos (semanas, por exemplo). Assim, as decisões de seqüenciamento já estão embutidas no modelo. Outra característica desse modelo é que, apenas um item pode ser produzido por período (*Small Bucket Problem*) e o item produzido utiliza toda a capacidade do período.

Uma das principais limitações do modelo DLSP consiste no fato de que, uma vez que houve preparação da máquina para a produção de determinado item, deve-se utilizar toda a capacidade do período. Algumas variações do DLSP foram propostas, uma delas é o Problema de Dimensionamento de Lote e Programação da Produção Contínuo (*Continuous Setup Lot Sizing Problem - CSLP*). O modelo CSLP é bastante parecido com o DLSP. Entretanto, o modelo CSLP permite que não seja utilizada toda a capacidade do período.

Atualmente, tem-se encontrado algumas pesquisas que enfocam modelos integrados do tipo *big bucket* (não tem a limitação de produção para um ou poucos itens). Nesta linha de modelos tem-se o Problema de Dimensionamento de Lotes e Programação da Produção Generalizado (*General Lot Sizing and Scheduling Problem - GLSP*).

Nesta subseção será apresentado alguns modelos para o problema de dimensionamento e seqüenciamento de lotes.

1.3.1.1 Problema de Dimensionamento e Seqüenciamento de Lotes Discreto e Extensões

Para este problema, é considerada a produção de apenas um item por período e os seguintes dados adicionais.

- s_i : custo de preparação do item i ;
- H_i : custo de estoque do item i .

Consideraremos também a seguinte variável de decisão:

- $Z_{it} = 1$ se existe preparação da máquina para a produção do item i e 0 caso contrário.

O modelo é dado em [25] da seguinte forma:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (s_i Z_{it} + H_i I_{it}) \quad (1.49)$$

Sujeito a.

$$I_{it-1} + X_{it} = d_{it} + I_{it} \quad i = 1, \dots, N \text{ e } t = 1, \dots, T \quad (1.50)$$

$$r_i X_{it} = Cap_t Y_{it} \quad i = 1, \dots, N \text{ e } t = 1, \dots, T \quad (1.51)$$

$$\sum_{i=1}^N Y_{it} \leq 1 \quad t = 1, \dots, T \quad (1.52)$$

$$Z_{it} \geq Y_{it} - Y_{it-1} \quad i = 1, \dots, N \text{ e } t = 1, \dots, T \quad (1.53)$$

$$Z_{it} \text{ e } Y_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, N \text{ e } t = 1, \dots, T \quad (1.54)$$

$$I_{it} \text{ e } X_{it} \geq 0 \quad i = 1, \dots, N \text{ e } t = 1, \dots, T \quad (1.55)$$

Assim como mencionado anteriormente, as decisões de seqüenciamento já estão embutidas no modelo, pois são considerados micro períodos. Além disso, neste modelo, apenas um tipo de item pode ser produzido por período. Este tipo de problema é denominado (*Small Bucket*).

Neste modelo o item que será produzido terá que utilizar toda a capacidade do período (os períodos são discretos ou podemos dizer que a produção é do tipo "tudo ou nada"), ou seja, quando se prepara a máquina para produzir um determinado item, este terá que ser produzido até ocupar toda a capacidade do período, isto ocorre por causa da restrição (1.51) e a restrição (1.52) garante a produção de no máximo um item por período.

Como estão sendo considerados micros períodos, não faz mais sentido cobrar um custo pela preparação da máquina no início de todo período, caso exista produção de itens iguais em períodos consecutivos. Por isso, é adicionada a variável Z_{it} e a restrição (1.53) que indicam o início da produção de um item novo. Caso tenha a troca de produção de itens, a restrição (1.53) garante que será considerado o custo de preparo da máquina. As restrições (1.53) e a função objetivo garantem que Z_{it} assume valor zero entre os períodos onde não existe troca de produção de itens.

Este problema é classificado como *NP-Hard*. Estudos sobre a complexidade deste problema são feitos em [57] e [58]. Procedimentos de solução do DLSP são dados em [3], [20] e [59].

Como mencionado, o modelo DLSP, obriga a produção de um tipo de item em todo o período, caso exista produção do item no período. Caso seja desejado a produção em parte do período, tem que ser considerado o modelo como contínuo (*Continuous Setup Lot Sizing*

Problem - CSLP). Para isso, basta substituir o conjunto de restrições (1.51) por:

$$r_i X_{it} \leq \text{Cap}_t Y_{it} \quad i = 1, \dots, N \text{ e } t = 1, \dots, T. \quad (1.56)$$

Com essa nova restrição, é permitida a produção em apenas uma parte do período. Com isso, é permitido iniciar um novo lote de um tipo de item, sem custo de preparação adicional [25]. Estudos sobre o modelo CLSP são encontrados em [16] e [42].

Até aqui, é considerada a produção de apenas um tipo de item por período. Mesmo com a restrição anterior, não podemos aproveitar a capacidade, não utilizada em um período, para a produção de um novo tipo de item. Com algumas alterações podemos permitir a produção de apenas mais um tipo de item no período. Para isso, será considerado o caso contínuo e além disso, será substituído o conjunto de restrições (1.51) por:

$$r_i X_{it} \leq \text{Cap}_t (Y_{it-1} + Y_{it}) \quad i = 1, \dots, N \text{ e } t = 1, \dots, T \quad (1.57)$$

e para garantir que a soma dos itens produzidos em um período não ultrapasse a capacidade do mesmo, basta adicionar o seguinte conjunto de restrições no modelo:

$$\sum_{i=1}^N r_i X_{it} \leq \text{Cap}_t \quad t = 1, \dots, T \quad (1.58)$$

Este modelo é conhecido como *Proportional lot sizing and scheduling problem - PLSP*. Estudo deste modelo e suas variações são encontrados em [23] e [24]. Uma revisão maior e mais detalhada sobre estudos desses problemas é dada em [25].

1.3.1.2 Problema de Dimensionamento e Seqüenciamento de lotes Generalizado

Nos modelos anteriores, foram considerados períodos pequenos e a produção foi limitada a, no máximo, dois itens. O modelo a seguir considera algumas divisões dentro de cada período gerando sub-períodos e cada lote é associado a um único sub-período. É considerado também um número máximo de sub-períodos possíveis.

Para este modelo serão necessários os seguintes dados:

- η_t : número máximo de sub-períodos no período t ;
- $F_t = 1 + \sum_{j=1}^{t-1} \eta_j$: denota o primeiro sub-período do período t ;
- $L_t = F_t + \eta_t - 1$: denota o último sub-período do período t .

Portanto, o total de sub-períodos no horizonte de planejamento é $\eta = \sum_{t=1}^T \eta_t$.

Considere também as seguintes variáveis para o modelo.

- X_{in} : unidades do item i produzidas no sub-período n ;
- I_{it} : unidades do item i em estoque no final do período t ;
- $Z_{in} = 1$ se o custo de preparação para produzir o item i no sub-período n é considerado e 0 caso contrário;
- $Y_{in} = 1$ se a máquina está preparada para produzir o item i no sub-período n e 0 caso contrário.

Temos assim, o seguinte modelo [25].

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{\eta} s_i Z_{in} + \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T H_i I_{it} \quad (1.59)$$

Sujeito a.

$$I_{it-1} + \sum_{n=F_t}^{L_t} X_{in} = d_{it} + I_{it} \quad i = 1, \dots, N \text{ e } t = 1, \dots, T \quad (1.60)$$

$$r_i X_{in} \leq \text{Cap}_t(Y_{in}) \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T \text{ e } n = F_t, \dots, L_t \quad (1.61)$$

$$\sum_{i=t}^N \sum_{n=F_t}^{L_t} r_i X_{in} \leq \text{Cap}_t \quad t = 1, \dots, T \quad (1.62)$$

$$\sum_{i=1}^N Y_i n \leq 1 \quad n = 1, \dots, \eta \quad (1.63)$$

$$Z_{in} \geq Y_{in} - Y_{in-1} \quad i = 1, \dots, N \text{ e } n = 1, \dots, \eta \quad (1.64)$$

$$Y_{in} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, N \text{ e } n = 1, \dots, \eta \quad (1.65)$$

$$I_{it}, Z_{in} \text{ e } X_{it} \geq 0 \quad i = 1, \dots, N \text{ e } t = 1, \dots, T \quad (1.66)$$

Nesse modelo, a função objetivo minimiza a soma dos custos de preparação e estoque. As restrições (1.60) são de controle de estoque. Observe que, um item pode ser produzido em vários sub-períodos n e a restrição (1.61) garante a programação da máquina para a produção do itens. A capacidade de produção do período é garantida pela restrição (1.62). Este modelo não considera a reposição de capacidade entre os sub-períodos, ou seja, pode-se utilizar toda a capacidade de um período no primeiro sub-período e os outros sub-períodos ficam com capacidade igual a zero.

Fleischmann e Meyer [32] mostram que o modelo GLSP generaliza os três casos apresentados sobre dimensionamento de lotes e seqüenciamento, DLSP, CLSP e PLSP. Estes

também apresentam alguns algoritmos, baseados em busca local e uma heurística para resolver o modelo GLSP.

1.3.2 Problema de Dimensionamento de Lotes Combinado com Corte

O problema de corte consiste em, dada a matéria-prima em estoque e a demanda de itens a ser cortada, determinar um plano de corte com objetivo de minimizar as perdas do processo, ou custo ou tempos de processo. Assim como mencionado no problema de dimensionamento de lotes e seqüenciamento, embora os problemas de corte ocorram integrados a processos produtivos são, geralmente, resolvidos de forma isolada. Uma vez definidos os lotes em cada período, uma quantidade de itens deve ser cortada a partir dos itens produzidos, ou seja, um problema de corte deve ser resolvido a cada período. Sabe-se, contudo, que o desperdício depende diretamente dos tamanhos dos itens e das quantidades requeridas, de modo que a formação de lotes inicial deveria levar em conta esta variável. Este problema é, em geral, muito relevante, já que busca minimizar desperdícios que podem representar o principal custo envolvido.

Um dos primeiros trabalhos, onde o problema de dimensionamento e o problema de corte são integrados, é feito em Farley [29]. O objetivo global do trabalho é maximizar a utilidade do sistema ao longo do período de planejamento em uma fábrica de roupas. Hendry *et al.* [39] propõem a solução do problema integrado em duas fases. Na primeira, o problema de corte de estoque com restrições de capacidade é resolvido heurísticamente. A solução obtida na primeira fase é então usada para formular e resolver um problema de otimização inteira para determinar a produção diária.

Um modelo integrado de corte e dimensionamento de lotes com função objetivo não linear e restrições lineares que minimiza custos de estoque, preparo e perda é proposto em [52]. O modelo proposto, considerando que os padrões de corte são conhecidos a priori, é simplificado para obter uma função objetivo côncava e é resolvido por heurísticas. Arbib e Marinelli [9] consideram um modelo integrado de otimização inteira mista para obter o planejamento semanal da produção que, além de integrar as decisões de corte da matéria-prima e do dimensionamento dos lotes, permite que itens não-demandados sejam cortados e, posteriormente, agrupados para obter itens demandados. Além disso, custo de estoque e transporte de matéria-prima são incluídos no modelo.

Gramani e França [35] propõem um modelo integrado que considera restrições de capacidade do equipamento de corte com o objetivo de minimizar perda de matéria prima, além de custos de estoque e preparo. Os autores também propõem uma método que tem por base o problema de caminho mínimo.

A seguir, é apresentado um modelo de dimensionamento de lotes com corte estudado em [35]. Gramani e França [35] estudam um problema, onde o processo de produção é feito em três estágios. O primeiro verifica a demanda de produtos finais por período. O segundo, converte a demanda de produtos finais em peças necessárias para a produção do produto final. O terceiro estágio consiste em decidir quantas peças cortar (lembrando que para cortar essas peças menores são usados padrões de corte) em cada período para satisfazer a demanda, minimizando o custo total, que neste problema envolve custo de estoque, custo de preparação da máquina (*setup*) e perda de material (que ocorre através dos cortes nas placas). Para isso, é considerada uma produção onde placas retangulares (chapas de aço, madeira, etc) são cortadas para produção de peças menores que serão agrupadas para formar um item final da produção.

Para este modelo, considere os seguintes dados:

- T : número de períodos;
- N : número de produtos finais;
- \mathcal{P} : número de padrões possíveis;
- K : número de itens produzidos.
- a_{kj} : número de peças k obtidas com o corte do padrão j ;
- r_j : tempo necessário para cortar as peças do padrão j ;
- p_j : custo da perda obtida com o corte do padrão j .
- M : valor suficientemente grande;

Considere também, a seguinte variável de decisão para o problema:

- Q_{jt} : quantidade de placas cortadas no período t com o padrão j .

Obtemos assim, o seguinte modelo.

$$\min \sum_{j=1}^{\mathcal{P}} \sum_{t=1}^T p_j Q_{jt} + \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T h_{kt} I_{kt} + \sum_{t=1}^T s_t Y_t \quad (1.67)$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{P}} a_{kj} Q_{jt} + I_{kt-1} = d_{kt} + I_{kt} \quad k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T \quad (1.68)$$

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{P}} r_j Q_{jt} \leq Cap_t \quad t = 1, \dots, T \quad (1.69)$$

$$Q_{jt} \leq M Y_t \quad j = 1, \dots, \mathcal{P} \text{ e } t = 1, \dots, T \quad (1.70)$$

$$Q_{jt} \geq 0 \quad j = 1, \dots, \mathcal{P} \text{ e } t = 1, \dots, T \quad (1.71)$$

$$I_{kt} \geq 0 \quad k = 1, \dots, K \text{ e } t = 1, \dots, T \quad (1.72)$$

$$Y_t \in \{0, 1\} \quad t = 1, \dots, T \quad (1.73)$$

Nesse modelo a função objetivo minimiza a perda com os cortes das placas, custo de estoque e custo de preparo das máquinas. Observe que a restrição de balanço de produção e estoque (1.68) é mantida, mas agora o número de item produzidos é calculado somando o produto entre os itens que estão contidos no padrão e o número de vezes que o padrão de corte é usado.

A restrição de capacidade (1.69) é dada apenas pelo tempo de corte dos padrões, ou seja, não é considerado o tempo de preparo das máquinas. As outras restrições são mantidas como nos modelos anteriores.

1.3.3 Problema de Dimensionamento de Lotes com Custos de Transporte

De acordo com [53], embora o custo de transporte represente uma boa parte do custo do produto de uma empresa, em geral ele é ignorado na hora em que se resolve o problema de dimensionamento de lotes. Em [53] é feita uma pequena discussão sobre o custo do transporte nos produtos finais de uma empresa e os diferentes tipos de contrato de transporte, de acordo com a produção.

O mesmo problema é estudo por Santos *et al.* [60], onde é proposto um novo método heurístico, baseada em relaxação Lagrangiana/Surrogate e testes computacionais, mostraram que para este problema as duas relaxações são equivalentes quanto à qualidade das soluções

encontradas, no entanto, o limitante da relaxação Lagrangiana/Surrogate é obtido num menor número de iterações.

Outros problemas são encontrados na literatura onde o dimensionamento de lotes é resolvido integrado ao problema de transporte. Em Baumol e Vinod [13] os custos da taxas de embarque ou carga são introduzidos em um modelo e são propostos dois métodos para solução desses problema.

No problema estudado por Lee *et al.* [48], os autores consideram que a capacidade de transporte está associada ao número de *containers* (paletes) utilizados pelos itens, ou seja, os itens são produzidos e alocados em *containers*, logo o objetivo é minimizar o número de *containers* utilizados uma vez que os custos logísticos são proporcionais a esse número. Os autores propuseram uma heurística baseada na representação do modelo como um problema de fluxo em redes. As soluções obtidas foram comparadas com as melhores soluções geradas pelo CPLEX 6.0.5 considerando o limite de 700.000 nós.

Uma revisão geral dos problemas integrados de produção e de distribuição pode ser encontrada em Erenguç *et al.* [26] e em Rizk e Martel [56] e uma revisão que considera extensões do modelo clássico de dimensionamento de lotes para modelos com custos de transportes pode ser vista em Bertazzi e Speranza (1999).

Kim e Kim [43] fazem um estudo de um problema de dimensionamento de lotes integrado ao problema de planejamento de distribuição com um armazém e vários clientes. Um modelo e um algoritmo, para um problema de dimensionamento de lotes com distribuição com múltiplos armazéns, um único produto e horizonte infinito é dado em [67]. Além disso, são considerados custo de estoque, custo de transporte e demanda contínua.

A seguir, é apresentado um modelo dado em [53], que considera o problema integrado de dimensionamento com custo de transporte. O problema consiste em determinar a produção dos itens, considerando que estes, serão transportados até um armazém.

O problema foi inspirado numa empresa europeia que tem que transportar seus produtos finais para um armazém. Esse transporte é terceirizado e feito através de paletes, onde cada palete pode conter no máximo P itens. O custo de transporte é dado pelo número de paletes transportados e calculado pela função

$$f(r) = \begin{cases} c_0 + rc_1, & \text{se } r \leq R \\ c_0 + Rc_1 + (r - R)c_2, & \text{se } r > R \end{cases}$$

onde, r é o quantidade de paletes transportados, c_0 é uma taxa mensal fixa do transporte, c_1 é o custo de transporte dos R primeiros paletes, que são contratados a longo prazo, e c_2 é uma taxa diferenciada ($c_2 \gg c_1$) que representa o custo de transporte dos paletes excedentes a R , que não são contratados.

O problema da empresa consiste em determinar a produção dos itens, em cada período, de modo que satisfaça a demanda de cada período sem atraso e minimize a soma do custo operacional com o custo de transporte. O custo operacional é dado pela soma dos custos de preparação, estoque e o custo de transporte dado pela função descrita acima.

Assim, para este modelo, são considerados os seguintes dados extras:

- P : número máximo de itens em um palete;
- c_0 : custo fixo, por período, para transporte dos itens;
- c_1 : taxa, por período, para transporte dos paletes;
- R : limite de paletes que podem ser transportados com a taxa c_1 ;
- c_2 : taxa diferenciada pelo transporte dos paletes que excedem o limite R .

Considere também as seguintes variáveis para o problema.

- A_t : número de paletes transportados no período t com a taxa c_1 ;
- B_t : número de paletes transportados no período t com a taxa c_2 .

Segue então, o modelo do problema de dimensionamento de lotes com custo de transporte.

$$\min \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N (h_t I_{it} + s_{it} Y_{it}) + \sum_{t=1}^T (c_0 + c_1 A_t + c_2 B_t) \quad (1.74)$$

Sujeito a.

$$I_{it-1} + X_{it} = d_{it} + I_{it} \quad t = 1, \dots, T \text{ e } i = 1, \dots, N \quad (1.75)$$

$$X_{it} \leq M Y_{it} \quad t = 1, \dots, T \text{ e } i = 1, \dots, N \quad (1.76)$$

$$B_t + A_t \geq \frac{1}{P} \sum_{i=1}^N X_{it} \quad t = 1, \dots, T \quad (1.77)$$

$$0 \leq A_t \leq R \quad t = 1, \dots, T \quad (1.78)$$

$$I_{it}, X_{it} \geq 0 \quad i = 1, \dots, N \text{ e } t = 1, \dots, T \quad (1.79)$$

$$Y_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, N \text{ e } t = 1, \dots, T \quad (1.80)$$

$$A_t, B_t \in \mathbb{N} \quad t = 1, \dots, T \quad (1.81)$$

No modelo, assume-se que, assim que os produtos são produzidos, estes chegam instantaneamente nos armazéns. Portanto, os produtos podem ser usados para satisfazer a demanda no mesmo período que são produzidos.

A função objetivo (1.74) minimiza o custo de estoque e de preparação da máquina para produção dos itens e os custos de transporte. Observe que somatório $\sum_{t=1}^T c_0$ pode ser omitido na função objetivo, pois trata-se de uma constante. As equações (1.75) e (1.76) são as equações de balanço de produção e estoque, e *set-up* respectivamente. As equações (1.77) verificam o número de paletes que serão transportados em cada taxa e, com as restrições (1.78), o número de paletes transportados pelo custo mais baixo não excede o valor de R paletes. Observe que, caso os custos de transporte c_1 e c_2 forem iguais, o *trade off* entre a produção e o transporte não ocorrem mais, ou seja, basta determinar o tamanho dos lotes. No próximo capítulo, será feito um pequeno estudo computacional deste modelo.

Capítulo 2

Análise de Métodos de Resolução Aplicada à Problemas de Dimensionamento de Lotes com Custo de Transporte

Neste capítulo, é apresentado um modelo matemático para um problema de dimensionamento de lotes capacitado com custo de transporte. Este modelo consiste numa adaptação do modelo (1.74)-(1.81), visto no Capítulo 1 ([53]). Nosso objetivo, neste capítulo, será avaliar a dificuldade de resolução do modelo de dimensionamento de lotes capacitado com custo de transporte, através de um pacote de otimização inteira-mista. Além disso, serão avaliados alguns métodos de resolução implementados neste pacote para a resolução do nosso modelo.

O uso de modelos e pacotes de programação inteira tem aumentado consideravelmente. Há aproximadamente vinte anos, era necessário computadores de alta capacidade para resolver problemas de cinquenta a cem variáveis inteiras. Hoje, problemas com milhares de variáveis inteiras são resolvidos em um microcomputador e as soluções podem ser encontradas em poucos minutos.

A base dos pacotes de programação inteira é o método *Branch-and-Bound*. Os códigos de hoje, entretanto, estão mais e mais complexos com a incorporação de algoritmos, estratégias de resolução avançadas, pré-processamento, algoritmo de geração de planos de corte e heurísticas. O "comportamento" do algoritmo *Branch-and-Bound* pode ser alterado consideravelmente pelo conjunto de parâmetros que controla o modo que o programa busca a solução dos problemas.

Os fabricantes dos pacotes de programação inteira, através de experimentos, determinam um conjunto de parâmetros (combinação de métodos), que são bons para resolver a maioria dos problemas de programação inteira, este conjunto é chamado *default*. Mas, como não podem garantir a existência de um método que funcione bem para todos os problemas de programação inteira, neste capítulo, serão feitos testes computacionais, alterando a combinação dos métodos implementados nos pacotes de otimização inteira-mista, com o objetivo de avaliar o efeito de cada método na resolução do problema de dimensionamento de lotes

capacitado com custo de transporte.

2.1 Métodos de Resolução

Antes da análise dos parâmetros, é feito um pequeno resumo de alguns métodos para resolver problemas de programação inteira. Para uma descrição mais detalhada de tais métodos, veja [70] e [71].

2.1.1 *Branch-and-Bound*

A técnica *Branch-and-Bound* pode ser representada por uma árvore de decisão que divide o espaço de soluções (*Branch*) e o ponto ótimo pode ser encontrado através da enumeração implícita das soluções. Limites inferiores e superiores (*Bound*) da função objetivo permitem eliminar sub-ramos da árvore de decisão. A árvore do método *Branch-and-Bound* contém nós, onde cada nó representa a resolução de uma relaxação do problema, sendo que, o nó raiz representa a relaxação do problema que queremos resolver.

O método contém um conjunto de nós ativos, formado inicialmente apenas pelo nó raiz, onde a cada iteração do método é escolhido um nó que será removido do conjunto de nós ativos e avaliado.

Existem algumas estratégias de busca na árvore do método *Branch-and-Bound*. A seguir são feitos comentários sobre alguns tipos de estratégias.

- Pode-se fazer a escolha dos nós ativos que serão ramificados, priorizando os nós que tem o pior limitante para a solução ótima. Por exemplo, em um problema de minimizar, "seleciona-se" o nó que tem o menor limite inferior. Isto permite diminuir a diferença entre os limitantes superior e inferior (diminuir o *GAP*).
- Na escolha da variável a ser ramificada (caso tenha-se mais de uma variável com solução fracionária), a escolha pode ser feita de dois modos; ramificando pela parte fracionária que mais se aproxima de 0,5 ou o contrário. Além das regras que são atribuídas durante a resolução, existem também regras a priori.
- Usa-se também, estratégias para percorrer a árvore. Neste caso, existe a busca em profundidade, busca em largura, busca pelo menor limitante, entre outras.

Observação. Não serão avaliadas as estratégias do *Branch-and-Bound*, apenas a aplicação do método. As estratégias serão aplicadas de acordo com o *default* do programa.

2.1.2 Geração de Planos de Cortes

Os problemas de otimização inteira mista também podem ser resolvidos através do método de geração de planos de corte. O método de geração de planos de corte pode ser usado junto com o método *Branch-and-Bound* e consiste de duas fases. A primeira fase consiste em encontrar uma solução x_0 , ótima para a relaxação linear do problema. Caso a solução da relaxação linear não seja uma solução do problema inteiro, é realizada a segunda fase do método, que é encontrar uma inequação válida (π, π_0) para o problema inteiro e que não satisfaça $\pi x_0 \leq \pi_0$. Logo após, adiciona-se a inequação à relaxação do problema e retorna a primeira fase. Gomory e Chvátal (detalhes sobre o método podem ser encontrados em [70]) foram os primeiros a desenvolverem métodos, automatizados e finitos, para se obter planos de corte em problemas de programação linear inteira.

Se for feita uma interação entre os métodos *Branch-and-Bound* com o de geração de planos de corte, ou seja, para cada nó da árvore do *Branch-and-Bound* realizamos um determinado número de iterações do método de geração de planos de corte, obtemos o método *Branch-and-Cut*. O método de geração de planos de corte pode ser usados nos nós da árvore do *Branch-and-Bound* para melhorar os limites e assim, melhorar a busca pela solução ótima. Mas, por outro lado, a cada plano de corte adicionado, uma nova restrição é gerada para o problema, ou seja, a cada iteração do método de geração de planos de corte, a dimensão do problema inicial é aumentada.

2.1.3 Pré-processamento

Presolver, ou pré-processamento, é realizado em muitos pacotes antes de começar a resolver os problemas. O pré-processamento é utilizado, muitas vezes, para diminuir o tamanho do problema. O uso do pré-processamento para diminuir o tamanho do problema pode ser útil na aplicação do método *Branch-and-Bound*, pois, diminuindo o tamanho do problema, pode-se reduzir o tamanho da árvore de busca do método. Mas, por outro lado, pode interferir no método de geração de planos de corte, pois, este pode "retirar", com algumas condições, variáveis e restrições do modelo e, com isso, em alguns casos, pode impedir a construção de alguns planos de corte ou gerar planos de corte menos eficientes.

2.1.4 Heurística Primal

Heurísticas Primais são algoritmos com a finalidade de encontrar soluções viáveis para problemas de otimização inteira mista. Para um problema de minimizar, enquanto os planos de corte são aplicados para melhorar o limite inferior, a heurística primal é usada para melho-

rar o limitante superior da função objetivo. A aplicação de heurísticas pode ser mais eficiente para obter uma solução viável para o problema inteiro, ou seja, os métodos heurísticos podem encontrar soluções melhores (ou de maneira mais rápida), para o problema inteiro, comparados à busca por uma solução inteira em um nó da árvore do *Branch-and-Bound*.

A motivação para aplicar essas heurísticas nos problemas de otimização inteira é obter um limite superior de maneira rápida e assim, possibilitar um maior número de cortes na árvore de busca do método *Branch-and-Bound*. Em alguns casos as heurísticas encontram uma solução ótima para o problema no nó raiz, e assim, aplicamos o método *Branch-and-Bound* para garantir que a solução é ótima. Então, usar as heurísticas e um algoritmo de geração de planos de corte com o método *Branch-and-Bound*, pode reduzir o *Gap* entre os limites e conseqüentemente o tamanho da árvore de resolução do método.

2.2 Modelo e Testes Realizados

Nosso objetivo, neste capítulo, é avaliar os métodos de resolução do pacote de otimização AMPL/Cplex 10.0, procurando identificar as diferenças entre as soluções encontrada pelos métodos, pré-processamento, geração de planos de corte e/ou heurística, quando aplicados junto ao método *Branch-and-Bound*. Adicionalmente, nosso objetivo é também avaliar a dificuldade de resolução do modelo estendido (proposto na próxima seção) em relação ao modelo (1.74)-(1.81) proposto em [53].

2.2.1 Problema de Dimensionamento de Lotes Capacitado com Custo de Transporte

Inicialmente, será apresentado o modelo do problema de dimensionamento de lotes capacitado com custo de transporte. Nosso problema consiste em encontrar o dimensionamento de lotes da produção de N tipos de itens em T períodos, minimizando os custos e satisfazendo determinadas restrições do problema.

Os custos do problema consiste em: custo de preparação da máquina para a produção dos itens a cada período; custo por unidade em estoque a cada período e custo por unidade em atraso de entrega da demanda por período. Além dos custos operacionais, como já descrito anteriormente, o problema possui o custo de transporte. Este custo ocorre, pois a produção de cada período tem que ser transportada até um armazém, onde neste, será estocado o item ou fará o atendimento da demanda. Este transporte é feito por uma outra empresa a qual faz um contrato com os seguintes dados: cada palete tem capacidade máxima de P itens (estamos considerado que os itens, embora distintos, tenham dimensões iguais); além

do custo fixo de contrato c_0 , será cobrado uma taxa c_1 para o transporte dos R primeiros paletes. Caso seja transportado mais que R paletes, será cobrada uma taxa diferenciada c_2 , para cada palete excedente ($c_2 \gg c_1$).

As restrições do problema são: atender a demanda de cada tipo de item nos T períodos, lembrando que o problema permite que a demanda seja entregue com atraso. Não é permitido transportar mais que R paletes pelo custo c_1 e, a cada período, toda a produção tem que ser transportada. Existe também a restrição de capacidade de produção que limita o número de itens produzidos a cada período.

Assim, para nosso modelo, considere os seguintes dados:

- T : número de períodos;
- N : número de itens distintos;
- P : número máximo de itens em um palete;
- d_{jt} : demanda de produção do item j no período t ;
- s_{jt} : custo de preparação para a produção do item j no período t ;
- h_t : custo de estoque no período t ;
- b_t : custo de atraso no período t ;
- Cap_t : capacidade de produção no período t ;
- r_j : tempo de produção do item j ;
- q_j : tempo de preparação para a produção do item j ;
- c_0 : custo fixo, por período, para o transporte dos itens;
- c_1 : custo de transporte, por palete, para os R primeiros paletes;
- R : limite de paletes que podem ser transportados com a taxa c_1 ;
- c_2 : taxa diferenciada pelo transporte dos paletes que excedem o limite R .

Há também, as seguintes variáveis:

- X_{jt} : quantidade do item j produzidas no período t ;
- $Y_{jt} = 1$ se existe produção do item j no período t ; 0 caso contrário;

- I_{jt}^+ : quantidade em estoque do item j no fim do período t ;
- I_{jt}^- : quantidade em atraso do item j no fim do período t ;
- A_t : número de paletes transportados no período t com a taxa c_1 ;
- B_t : número de paletes transportados no período t com a taxa c_2 .

Segue o seguinte modelo.

$$\min z = \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T (h_t I_{jt}^+ + b_t I_{jt}^- + s_{jt} Y_{jt}) + \sum_{t=1}^T (c_0 + c_1 A_t + c_2 B_t) \quad (2.1)$$

S.a

$$I_{jt-1}^+ - I_{jt-1}^- + X_{jt} - I_{jt}^+ + I_{jt}^- = d_{jt} \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (2.2)$$

$$X_{jt} - \sum_{k=1}^T d_{jk} Y_{jt} \leq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (2.3)$$

$$\sum_{j=1}^N (r_j X_{jt} + q_j Y_{jt}) \leq Cap_t \quad t = 1, \dots, T \quad (2.4)$$

$$A_t + B_t \geq \frac{1}{p} \sum_{j=1}^N X_{jt} \quad t = 1, \dots, T \quad (2.5)$$

$$0 \leq A_t \leq R \quad t = 1, \dots, T \quad (2.6)$$

$$X_{jt}, I_{jt}^+, I_{jt}^- \geq 0, A_t, B_t \in \mathbb{Z} \text{ e } Y_{jt} \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (2.7)$$

Para o modelo, é considerado como função objetivo, equação (2.1), a soma dos custos de estoque, de atraso, de preparação e transporte dos paletes. O balanço de produção, estoque e atraso da demanda é feito pela restrição (2.2). A restrição (2.3) garante que a produção dos itens em cada período só acontecerá se existir *setup*. O controle do uso da capacidade da produção é expresso na equação (2.4), onde a soma do tempo utilizado na produção dos itens, em cada período, mais o tempo de *setup* para a produção dos itens não pode exceder a capacidade do período. A restrição (2.5) junto com a restrição (2.6) fornece a quantidade de paletes transportados pelos custos c_1 e c_2 .

2.2.2 Testes e Resultados Computacionais

As estratégias de solução serão feitas combinando os métodos de resolução e serão consideradas oito combinações distintas dos métodos disponíveis no pacote de otimização CPLEX.

Na primeira estratégia, será utilizado apenas o método *Branch-and-Bound*. Para a segunda, junto ao *Branch-and-Bound* será utilizado o pré-processamento (Observe a coluna 2 na Tabela 2.1). No terceiro teste, é combinado a geração de planos de corte com o *Branch-and-Bound*. Este raciocínio segue, até todos os métodos tenham sido combinados. A tabela a seguir representa os testes realizados.

Tabela 2.1: Roteiro de Resolução dos problemas

Testes	1	2	3	4	5	6	7	8
Pré-processamento		x			x	x		x
Geração de Planos de Corte			x		x		x	x
Heurística				x		x	x	x

Além de identificar os melhores métodos de resolução, queremos identificar a influência da restrição de capacidade no modelo de dimensionamento de lotes integrado ao problema de transporte de paletes. Assim, os testes serão realizados em dois modelos. O primeiro modelo representa o problema dado na Seção 1.3.3 admitindo atraso na entrega da demanda (modelo (1.74)-(1.81)) e o segundo modelo é dado pelo problema da Seção 2.2.1 (modelo (2.1)-(2.7)).

Para a análise, serão gerados os dados de acordo com alguns parâmetros. Para cada parâmetro e cada estratégia, serão resolvidos dez exemplares. Os exemplares serão criados de acordo com os seguintes parâmetros baseados em Norden e Velde [53] e Trigeiro *et al.* [66]. Para todos os exemplares serão considerados fixos: o número de itens que podem ser transportados em um palete ($P = 100$), o número de itens distintos ($N = 20$) produzidos pela empresa, número de períodos ($T = 12$), que corresponde um horizonte de um ano (ou seja, cada período equivale a um mês). Também serão fixos: o custo de *setup* ($s_{jt} = 100$, $j = 1, \dots, N$ e $t = 1, \dots, T$), o tempo de produção dos itens em cada período ($r_j = 1$) e o custo fixo de transporte ($c_0 = 0$). O tempo de *setup* das máquinas serão gerados, de acordo com a distribuição uniforme, em um intervalo fixo. Neste caso, o tempo de *setup* será gerado uniformemente no intervalo $[30, 150]$.

O último dado gerado é o valor de R . Considere FR uma fração da demanda total dos períodos. O valor R será calculado de modo que o número de paletes transportados pela menor taxa é menor que uma fração FR da demanda total. Em nossos testes, consideraremos $FR = \frac{1}{6}$. Assim, segue a tabela de dados para todos os exemplares.

Os dados restantes, são gerados uniformemente entre um intervalo fixo, por exemplo a demanda de cada item a cada período, será gerada em um intervalo que depende da demanda média ED_j de cada item. A demanda média será gerada uniformemente, para cada exemplar,

Tabela 2.2: Dados Para Cada Exemplar

Dados	N	T	P	s_{jt}	r_j	$c_0 = 0$	q_j	FR
Valores	20	12	100	100	1	0	[30,150]	$\frac{1}{6}$

num intervalo fixo $[40, 700]$ e esta, fornecerá o intervalo $\left[\left\lfloor \frac{ED_j}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{3ED_j}{2} \right\rfloor \right]$ para a geração da demanda dos itens. Além disso, é suposto que, no quinto e décimo período existe um pico na demanda de todos os itens da empresa. Assim, para esses períodos a demanda será multiplicada por 1.5.

A capacidade de produção em cada período será gerada dependente dos tempos de produção e *setup* pela seguinte fórmula:

$$Cap_t = \left\lfloor \left(\frac{\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^T (r_j d_{jk} + q_j)}{T} \right) \right\rfloor \quad t = 1, \dots, T,$$

ou seja, a capacidade será dada pelo piso da média do tempo utilizado para a produção da demanda dos itens em cada período. Estamos tomando o piso, pois queremos obter dados inteiros para o problema.

Os dados restantes são escolhidos entre alguns valores fixos. Neste caso temos: custos de transporte c_1 e c_2 que terão dois valores, $c_1 = 50$ e $c_2 = 200$, representando custo baixo de transporte, e $c_1 = 150$ e $c_2 = 500$ como custo alto. O custo de estoque também terá dois valores, alto e baixo. Sendo $h_t = 1$ o custo baixo e $h_t = 3$ o custo alto. O custo de atraso será dependente do custo de estoque, neste caso, este será mil vezes maior que o custo de estoque, representando uma situação em que os atrasos são fortemente indesejados. A seguir, é apresentada a tabela, indicando os exemplares que serão gerados.

Tabela 2.3: Tabela de Exemplares

Exemplares	h	c_1	c_2
1	1	50	200
2	3	50	200
3	1	150	500
4	3	150	500

Para melhor compreensão dos resultados, primeiramente será analisado a influência dos métodos e modelos no número de iterações simplex, realizados durante a resolução dos problemas. As tabelas estão divididas em, número de iterações simplex, tempo de resolução, número de problemas com solução ótima encontrada, número de nós avaliados e *Gap*. Os

problemas foram resolvidos em um microcomputador com processador Pentium 4 de 3 GHz e 1 GB de memória Ram pelo programa AMPL/CPLEX 10.0. O tempo de resolução foi limitado em 300 segundos e foram gerados 10 exemplares para cada combinação de parâmetros.

Tabela 2.4: Número de iterações simplex

Modelo	Exemplar	Métodos							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1.187.815,9	1.098.922,8	535,1	594.481,5	471,5	692.110,2	535,9	471,5
2	1	1.367.531,3	1.336.192,6	595.963,4	927.568,1	546.138,5	943.939,3	508.688,8	606.976,4
1	2	1.233.227,9	1.202.254,2	495,1	725.861,1	460,2	678.561,7	0	459,5
2	2	1.354.760,0	1.198.972,0	602.291,0	888.449,0	666.598,5	934.842,6	550.642,7	532.050,1
1	3	1.179.567,9	1.146.740,6	535,1	694.853,3	471,5	644.488,3	535,9	471,5
2	3	1.364.746,3	1.292.531,6	498.282,8	938.950,0	551.358,4	944.391,7	511.252,3	610.268,4
1	4	1.148.961,7	1.075.892,3	495,1	757.488,2	460,2	732.264	492,8	459,5
2	4	1.375.454,6	1.369.008,2	699.949,0	940.792,4	664.136,4	934.421,2	544.928,3	529.866,2

Na Tabela 2.4, com o número de iterações simplex, pode-se observar que, na maioria dos casos, há um aumento no número de iterações simplex quando a restrição de capacidade é incluída ao modelo (modelo 2). Para os três primeiros testes (ver Tabela 2.1) a geração de planos de corte diminui consideravelmente o número de iterações simplex. Verifica-se também que, os testes 5 e 8, na maioria dos casos, diminui o número de iterações simplex.

Tabela 2.5: Número de nós analisados

Modelo	Exemplar	Métodos							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1.182.455,4	1.098.683,6	19,1	591.083,3	0	691871,0	15,3	0
2	1	860.626,3	845.537,0	179.484,1	566.931,0	169.510,3	605.188,2	147.492,1	183.077,8
1	2	1.227.277,5	1202013,5	0	721650,3	0	678321	492,8	0
2	2	1.068.140,0	875.772,0	220.409,4	599.930,9	264.159,4	634.011,0	225.946,7	196.482,6
1	3	1.174.235,6	1.146.501,4	19,1	690.910,0	0	644.249,1	15,3	0
2	3	858.494,4	818.878,6	154.307,2	574.070,9	170.965,4	604.891,0	148.128,5	183.957,8
1	4	1.143.368,4	1.075.651,8	0	753.101,0	0	732.023,2	0	0
2	4	935.554,6	918.369,8	252.768,8	632.761,0	263.242,1	633.669,9	223.730,9	195.803,4

Analisando o número de nós do método *Branch-and-Bound* (Tabela 2.5). Verifica-se que, o método *Branch-and-Cut* (testes 3, 5, 7 e 8) é mais eficiente para a resolução dos problemas testados pois, quando combinamos o método *Branch-and-Bound* somente com o pré-processamento e/ou as heurística (1, 2, 4 e 6), um número bem maior de nós é analisado, embora as heurística também tenham diminuído consideravelmente o número de nós em relação ao *Branch-and-Bound* puro (teste 1). Quando é feita a combinação dos métodos de geração de planos de corte com o pré-processamento (teste 5), obtemos uma melhora significativa para os problemas com o modelo 1, sem restrição de capacidade. Se, além do pré-processamento, adicionamos as heurísticas (teste 8), todos os testes realizados com o

modelo 1 são resolvidos no nó raiz. Para o modelo 2 o método 8 diminui o número de nós analisados, comparado com o teste 5.

Tabela 2.6: Valor do *Gap* relativo

Modelo	Exemplar	Métodos							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0,464	0,466	0	0,475	0	0,472	0	0
2	1	0,374	0,385	0,002	0,367	0,001	0,368	0,002	0,002
1	2	0,287	0,288	0	0,303	0	0,305	0	0
2	2	0	0	0,006	0,365	0,006	0,356	0,006	0,005
1	3	0,464	0,465	0	0,472	0	0,473	0	0
2	3	0,374	0,385	0,002	0,366	0,001	0,367	0,002	0,002
1	4	0,289	0,291	0	0,302	0	0,303	0	0
2	4	0,371	0,374	0,005	0,365	0,006	0,356	0,011	0,005

Será considerado como *Gap* relativo do problema, a seguinte fórmula:

$$Gap = 100 * \frac{\text{Solução CPLEX} - \text{limitante inferior CPLEX}}{\text{limiante inferior CPLEX}}$$

O *Gap* é um dos dados mais importantes para serem analisados (Tabela 2.6). Novamente, analisando os três primeiros testes, o método *Branch-and-Cut* é melhor para resolver os problemas de dimensionamento de lotes com custo de transporte. Para o restante dos testes, existe uma pequena melhora no *Gap* do problema, sendo os testes com planos de corte (testes 3, 5, 7 e 8) os quais se destacam na maioria dos casos e obtiveram resultados muito parecidos.

Tabela 2.7: Tempo de resolução

Modelo	Exemplar	Métodos							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	300,00	300,00	0,09	300,00	0,04	300,00	0,12	0
2	1	300,00	300,00	167,92	300,00	152,72	300,00	178,84	202,35
1	2	300,00	300,00	0,03	300,00	0,03	300,00	0,04	0,03
2	2	300,00	300,00	210,22	300,00	183,60	300,00	215,01	183,88
1	3	300,00	300,00	0,08	300,00	0,04	300,00	0,12	0,05
2	3	300,00	300,00	169,16	300,00	152,44	300,00	178,66	201,85
1	4	300,00	300,00	0,03	300,00	0,03	300,00	0,04	0,03
2	4	300,00	300,00	211,81	300,00	183,63	300,00	215,15	183,95

Outro dado importante é o tempo de resolução dos problemas (Tabela 2.7). O tempo de resolução de um problema é importante na análise dos dados, pois nos itens anteriores, principalmente no valor do *Gap*, pode-se obter soluções muito melhores em alguns casos.

Por outro lado, para os modelos com capacidade o resultado é mantido igual aos das análises anteriores, ou seja, o teste 3 foi melhor entre os três primeiros testes e os testes com planos de corte (teste 3, 5, 7 e 8) se destacam entre todos os outros na maioria dos casos. Se compararmos os resultados dos testes 3, 5, 7 e 8, para o caso capacitado considerando o tempo de resolução e o número de nós analisados, podemos perceber que, para os problemas com custo de estoque baixo $h_t = 1$, além do tempo de resolução aumentar com o teste 8, o número de nós analisados também aumenta. Quando o custo de estoque é alto, podemos perceber que, embora os tempos sejam iguais para os problemas capacitados, o número de nós analisados dos testes 5 e 8 são menores entre os testes 3, 5, 7 e 8.

Quando comparamos os testes 6 e 8, podemos verificar que aplicar as heurísticas e o pré-processamento sem a geração de planos de corte (teste 6) aumentam o número de nós analisados na árvore, mas isto não implica em obter uma solução melhor para o problema, como pode ser observado pelas Tabelas 2.5 e 2.6. Além disso, podemos verificar que, apenas com o pré-processamento e as heurísticas, o método *Branch-and-Bound* necessita de um tempo maior para obter uma solução ótima (neste caso, o pacote de otimização extrapola o limite de tempo sem obter a solução ótima do problema).

Considerando agora os testes 7 e 8 analisaremos o efeito do pré-processamento, podemos observar que, quando o custo de estoque é menor, o método sem o pré-processamento (teste 7), obtém um *Gap* similar ao do teste 8 e necessita de menos tempo para obter a solução ótima, para os problemas capacitados. Quanto o custo de estoque, para os problemas capacitados, é mais caro, podemos observar que o pré-processamento (teste 8) diminui o tempo de resolução e melhora o *Gap* do problema. Conclusões semelhantes são obtidas quando comparamos os testes 3 e 8, quando analisamos o efeito do pré-processamento e da heurística juntos.

Note agora que, para os problemas com restrições de capacidade, se compararmos os testes 5 e 8 podemos observar que, as heurísticas aumentam o tempo de resolução porém, o teste 5 obtém praticamente o mesmo *Gap* que o método 8.

Observe que, através da análise dos tempos de resolução, os problemas do modelo 2 são bem mais difíceis de resolver. Além disso, nos resultados obtidos pelos testes 5 e 8, os tempos de resolução dos problemas com o modelo 1 são bem menores que os tempos do modelo 2.

Com a Tabela 2.8 verifica-se que, quando as restrições de capacidade são adicionadas, obtém-se um modelo para o problema de dimensionamento de lote capacitado com custo de transporte e este fica mais difícil de ser resolvido pelo *solver*, independente da estratégia de solução. Verifica-se também que, apenas nas estratégias com geração de planos de corte obtém uma solução para os problemas.

Assim, analisando os resultados das 5 tabelas, observa-se que, o método 5 é mais eficiente

Tabela 2.8: Número de Problemas com Solução Ótima Obtida

Modelo	Problemas	Métodos							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	10	0	10	0	10	10
2	1	0	0	5	0	6	0	5	5
1	2	0	0	10	0	10	0	10	10
2	2	0	0	4	0	4	0	3	4
1	3	0	0	10	0	10	0	10	10
2	3	0	0	5	0	6	0	5	5
1	4	0	0	10	0	10	0	10	10
2	4	0	0	5	0	6	0	5	5

para resolver os problemas de dimensionamento de lotes com custo de transporte (com ou sem restrição de capacidade de produção) para os problemas apresentados nesta seção. Isto é concluído pois, excluindo o número de iterações simplex, o método 5 diminui o tamanho da árvore de busca do *Branch-and-Bound* e melhora a média do tempo de resolução e o *Gap*.

Podemos concluir também que, a geração de planos de corte é o principal método que auxilia na resolução do problema de dimensionamento de lote com custo de transporte. Isto pode ser notado na Tabela 2.8 com base no fato de que, apenas nos métodos com geração de planos de corte é encontrada a solução ótima da maioria dos problemas. Notamos também que, as heurísticas não influenciam muito na melhoria da solução obtida na resolução. Isto pode ser observado pois, os testes 3 e 5 obtêm em geral, um número maior de soluções ótimas ou soluções melhores que o teste 7 (o mesmo ocorre comparando os testes 5 e 8), onde é aplicado a heurística.

Podemos perceber também que, ao contrário das heurísticas, o pré-processamento auxilia na busca das soluções ótimas dos problemas. Note que, o teste 5 obtêm um número maior de soluções ótimas para os problemas em relação ao teste 3 (o mesmo ocorre quando comparamos os testes 7 e 8). Além disso, percebe-se que o modelo com restrição de capacidade de produção dificulta o problema pois, com a restrição de capacidade, além da árvore do *Branch-and-Bound*, o *Gap* também é maior.

O tempo computacional é bem maior para o problema com restrição de capacidade, comparado com o modelo 1. No próximo capítulo será feito um estudo sobre métodos heurísticos de resolução para o problema de dimensionamento de lotes capacitado com custo de transporte. Para isso, faremos um estudo sobre a relaxação (Lagrangiana e Lagrangiana/Surrogate) do problema e sobre métodos de resolução das relaxações. Isto será feito com a intenção de obter um método de resolução para o problema sem a necessidade de um pacote de otimização inteira.

Capítulo 3

Métodos de Solução para um Problema de Dimensionamento de Lotes Capacitado com Custo de Transporte

Neste capítulo, são apresentadas duas heurísticas, Lagrangiana e Lagrangiana/Surrogate, para resolução do problema de dimensionamento de lotes capacitado com custo de transporte (modelo (2.1)-(2.7) dado na seção 2.2.1).

Como mencionado, este trabalho é uma extensão do trabalho feito por Norden e Velde [53]. Em Norden e Velde, foi estudado o problema de dimensionamento de lotes com custo de transporte onde não são consideradas as restrições de capacidade e a não é permitido o atraso da entrega da demanda. No trabalho feito por Maristela *et al.* [60], o mesmo problema é estudado e os autores sugerem um novo método heurístico de resolução baseado na relaxação Lagrangiana/Surrogate.

Neste trabalho, como serão considerados as restrições de capacidade da produção e o atraso da entrega da demanda, serão necessárias algumas modificações de alguns métodos. A primeira modificação será na relaxação do problema, pois em [53] e [60] a relaxação é feita apenas em um conjunto de restrições do problema (sob o conjunto de restrições de transporte) e, como estamos considerando restrições de capacidade, a relaxação será feita sob o conjunto de restrições de transporte e de capacidade.

Como o conjunto de restrições de capacidade será relaxado, é necessário incluir um método de factibilização da solução para o conjunto de restrições de capacidade, que será descrito mais adiante.

O método de resolução do problema de dimensionamento de lotes será diferente do aplicado em [53] e [60], pois nos dois trabalhos não são considerados os atrasos da entrega da demanda. Assim, descrevemos as heurísticas que serão apresentadas neste capítulo.

A heurística Lagrangiana consiste de quatro etapas: na primeira etapa é feita uma relaxação Lagrangiana do modelo para que, na segunda etapa, a relaxação seja resolvida, obtendo um limitante inferior para o problema. A terceira etapa é aplicar duas heurísticas

de factibilização e logo após são aplicadas duas heurísticas de melhoria, uma em relação ao transporte dos paletes e a segunda em relação capacidade de produção dos períodos, obtendo um limitante superior para o problema. A quarta e última etapa, é atualizar os multiplicadores lagrangianos e retornar a primeira etapa.

A heurística Lagrangiana/Surrogate (heurística Lagsur) consiste de cinco etapas; na primeira etapa é feita uma relaxação do problema. A relaxação do problema é feita sob algumas restrições do problema através do método de relaxação Surrogate, obtendo do conjunto de restrições, uma única restrição denominada restrição surrogate. Após aplicar a primeira relaxação, a restrição surrogate é relaxada através da relaxação Lagrangiana. Denominaremos essa relaxação como relaxação Lagrangiana/Surrogate ou relaxação LagSur. A segunda etapa da heurística consiste em resolver a relaxação do problema, obtendo um limitante inferior. Na terceira etapa são aplicados dois métodos de factibilização sobre a solução obtida da relaxação e depois são aplicados dois métodos de melhoria, caso o método de factibilização encontre uma solução viável. A quarta etapa é realizada a cada determinada quantidade de iterações realizadas. Nesta etapa é feita uma busca unidimensional para a atualizar o multiplicador lagrangiano. A quinta etapa consiste em atualizar os multiplicadores surrogate, através do método do subgradiente e retornar a primeira etapa.

As três próximas seções serão divididas da seguinte forma: a primeira seção será formada por métodos utilizados durante as heurísticas. Denominaremos estes métodos por procedimentos básicos. A segunda seção descreve a heurística Lagrangiana e a última seção descreve a heurística Lagsur.

3.1 Procedimentos Básicos

Nesta seção descreveremos os vários procedimentos básicos que serão utilizados nas duas heurísticas descritas nas seções (3.2) e (3.3). Iniciaremos esta seção com a Relaxação Lagrangiana. Nosso objetivo é obter um modelo relaxado, do problema de dimensionamento de lotes capacitado com custo de contrato, mais fácil de ser resolvido.

3.1.1 Relaxação Lagrangiana

Neste tópico, é feita uma relaxação Lagrangiana do modelo de dimensionamento de lotes capacitado com custo de transporte, com o objetivo de estruturar o modelo para aplicar o método de resolução. A relaxação Lagrangiana será dividida em duas etapas apenas para facilitar a compreensão do leitor e construção do método.

Apenas para recordar, reescrevemos a seguir o modelo (2.1)-(2.7):

$$P = \min z = \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T (h_t I_{jt}^+ + b_t I_{jt}^- + s_{jt} Y_{jt}) + \sum_{t=1}^T (c_0 + c_1 A_t + c_2 B_t) \quad (3.1)$$

S.a

$$I_{jt-1}^+ - I_{jt-1}^- + X_{jt} - I_{jt}^+ + I_{jt}^- = d_{jt} \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.2)$$

$$X_{jt} - \sum_{k=1}^T d_{jk} Y_{jt} \leq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.3)$$

$$A_t + B_t \geq \frac{1}{P} \sum_{j=1}^N X_{jt} \quad t = 1, \dots, T \quad (3.4)$$

$$\sum_{j=1}^N (r_j X_{jt} + q_j Y_{jt}) \leq Cap_t \quad t = 1, \dots, T \quad (3.5)$$

$$0 \leq A_t \leq R \quad t = 1, \dots, T \quad (3.6)$$

$$X_{jt}, I_{jt}^+, I_{jt}^- \geq 0, A_t, B_t \in \mathbb{Z} \text{ e } Y_{jt} \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.7)$$

A primeira etapa da relaxação será sob o conjunto de restrições de transporte de paletes (3.4) e a segunda sob o conjunto de restrições de capacidade de produção (3.5).

Considerando a relaxação Lagrangiana em relação a restrição de transporte dos paletes e o multiplicador lagrangiano $\lambda_t^1 \geq 0$ para $t = 1, \dots, T$ ($\lambda^1 \in \mathbb{R}_+^{1 \times T}$), temos o seguinte problema lagrangiano:

$$RL_{\lambda_t^1} P = \min \psi = \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T (h_t I_{jt}^+ + b_t I_{jt}^- + s_{jt} Y_{jt}) + \sum_{t=1}^T (c_0 + c_1 A_t + c_2 B_t) \quad (3.8)$$

$$- \sum_{t=1}^T \lambda_t^1 (A_t + B_t - \frac{1}{P} \sum_{j=1}^N X_{jt})$$

S.a

$$I_{jt-1}^+ - I_{jt-1}^- + X_{jt} - I_{jt}^+ + I_{jt}^- = d_{jt} \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.9)$$

$$X_{jt} - \sum_{k=1}^T d_{jk} Y_{jt} \leq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.10)$$

$$\sum_{j=1}^N (r_j X_{jt} + q_j Y_{jt}) \leq Cap_t \quad t = 1, \dots, T \quad (3.11)$$

$$0 \leq A_t \leq R \quad t = 1, \dots, T \quad (3.12)$$

$$X_{jt}, I_{jt}^+, I_{jt}^- \geq 0, A_t, B_t \in \mathbb{Z} \text{ e } Y_{jt} \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.13)$$

Agora, fazendo a relaxação Lagrangiana do problema acima sob o conjunto de restrições de capacidade de produção e considerando o multiplicador lagrangiano $\lambda_t^2 \geq 0$ para $t = 1, \dots, T$ ($\lambda^2 \in \mathbb{R}_+^{1 \times T}$) obtemos:

$$RL_{\lambda^1, \lambda^2} P = \min \omega = \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T (h_t I_{jt}^+ + b_t I_{jt}^- + s_{jt} Y_{jt}) + \sum_{t=1}^T (c_0 + c_1 A_t + c_2 B_t) \quad (3.14)$$

$$- \sum_{t=1}^T \lambda_t^1 (A_t + B_t - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^N X_{jt}) + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T \lambda_t^2 ((r_j X_{jt} + q_j Y_{jt}) - Cap_t)$$

S.a

$$I_{jt-1}^+ - I_{jt-1}^- + X_{jt} - I_{jt}^+ + I_{jt}^- = d_{jt} \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.15)$$

$$X_{jt} - \sum_{k=1}^T d_{jk} Y_{jt} \leq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.16)$$

$$0 \leq A_t \leq R \quad t = 1, \dots, T \quad (3.17)$$

$$X_{jt}, I_{jt}^+, I_{jt}^- \geq 0, A_t, B_t \in \mathbb{Z} \text{ e } Y_{jt} \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.18)$$

Observe que, o modelo (3.14) a (3.18) é obtido aplicando a relaxação sob dois conjuntos de restrições. Considere o vetor $(\lambda^1, \lambda^2) \in \mathbb{R}_+^{1 \times 2T}$ onde, $(\lambda_t^1) \geq 0$ e $(\lambda_t^2) \geq 0$ para $t = 1, \dots, T$, como um único multiplicador lagrangiano e assim, obtemos uma relaxação do problema (3.1) a (3.7).

A seguir algumas substituições serão feitas na função objetivo da relaxação Lagrangiana do problema. Para isso, considere a equação obtida da restrição (3.15):

$$X_{jt} = d_{jt} + I_{jt}^+ - I_{jt-1}^+ - I_{jt}^- + I_{jt-1}^-. \quad (3.19)$$

Para fazer a substituição, vamos separar a função objetivo lagrangiana em quatro partes:

$$(I) \quad \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T (h_t I_{jt}^+ + b_t I_{jt}^- + s_{jt} Y_{jt})$$

$$(II) \quad \sum_{t=1}^T (c_0 + c_1 A_t + c_2 B_t)$$

$$(III) \quad - \sum_{t=1}^T \lambda_t^1 (A_t + B_t - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^N X_{jt})$$

$$(IV) \quad \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T \lambda_t^2 ((r_j X_{jt} + q_j Y_{jt}) - Cap_t).$$

De (I) + (II) temos:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T (h_t I_{jt}^+ + b_t I_{jt}^- + s_{jt} Y_{jt}) + \sum_{t=1}^T (c_0 + c_1 A_t + c_2 B_t).$$

Substituindo a equação (3.19) em (III) temos:

$$\begin{aligned} (III) &= - \sum_{t=1}^T \lambda_t^1 (A_t + B_t) + \frac{1}{p} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^N \lambda_t^1 (d_{jt} + I_{jt}^+ - I_{jt-1}^+ - I_{jt}^- + I_{jt-1}^-) \\ &= - \sum_{t=1}^T \lambda_t^1 (A_t + B_t) + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_t^1 d_{jt}}{p} + \frac{1}{p} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^N \lambda_t^1 I_{jt}^+ - \frac{1}{p} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^N \lambda_t^1 I_{jt-1}^+ \\ &\quad - \frac{1}{p} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^N \lambda_t^1 I_{jt}^- + \frac{1}{p} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^N \lambda_t^1 I_{jt-1}^- \\ (III) &= - \sum_{t=1}^T \lambda_t^1 (A_t + B_t) + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_t^1 d_{jt}}{p} + \frac{1}{p} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{j=1}^N \lambda_t^1 I_{jt}^+ + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^N \lambda_T^1 I_{jT}^+ \\ &\quad - \frac{1}{p} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{j=1}^N \lambda_{t+1}^1 I_{jt}^+ - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^N \lambda_1^1 I_{j0}^+ - \frac{1}{p} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{j=1}^N \lambda_t^1 I_{jt}^- - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^N \lambda_T^1 I_{jT}^- \\ &\quad + \frac{1}{p} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{j=1}^N \lambda_{t+1}^1 I_{jt}^- + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^N \lambda_1^1 I_{j0}^- \\ &= - \sum_{t=1}^T \lambda_t^1 (A_t + B_t) + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_t^1 d_{jt}}{p} + \frac{1}{p} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{j=1}^N (\lambda_t^1 - \lambda_{t+1}^1) I_{jt}^+ \\ &\quad + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^N (\lambda_T^1 I_{jT}^+ - \lambda_{T+1}^1 I_{j0}^+) + \frac{1}{p} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{j=1}^N (\lambda_{t+1}^1 - \lambda_t^1) I_{jt}^- + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^N (\lambda_1^1 I_{j0}^- - \lambda_{T+1}^1 I_{jT}^-). \end{aligned}$$

Substituindo a equação (3.19) em (IV) temos:

$$\begin{aligned}
(IV) &= \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T \lambda_t^2 ((r_j(d_{jt} + I_{jt}^+ - I_{jt-1}^+ - I_{jt}^- + I_{jt-1}^-) + q_j Y_{jt}) - Cap_t) \\
&= \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T \lambda_t^2 r_j (d_{jt} + I_{jt}^+ - I_{jt-1}^+ - I_{jt}^- + I_{jt-1}^-) + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T \lambda_t^2 q_j Y_{jt} - \sum_{t=1}^T \lambda_t^2 Cap_t \\
&= \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T \lambda_t^2 r_j d_{jt} + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^{T-1} \lambda_t^2 r_j I_{jt}^+ + \sum_{j=1}^N \lambda_T^2 r_j I_{jT}^+ - \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^{T-1} \lambda_{t+1}^2 r_j I_{jt}^+ - \sum_{j=1}^N \lambda_1^2 r_j I_{j0}^+ \\
&\quad - \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^{T-1} \lambda_t^2 r_j I_{jt}^- - \sum_{j=1}^N \lambda_T^2 r_j I_{jT}^- + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^{T-1} \lambda_{t+1}^2 r_j I_{jt}^- - \sum_{j=1}^N \lambda_1^2 r_j I_{j0}^- \\
&\quad + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T \lambda_t^2 q_j Y_{jt} - \sum_{t=1}^T \lambda_t^2 Cap_t \\
&= \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T \lambda_t^2 r_j d_{jt} + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^{T-1} r_j I_{jt}^+ (\lambda_t^2 - \lambda_{t+1}^2) + \sum_{j=1}^N r_j (\lambda_T^2 I_{jT}^+ - \lambda_1^2 I_{j0}^+) \\
&\quad \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^{T-1} r_j I_{jt}^- (\lambda_{t+1}^2 - \lambda_t^2) + \sum_{j=1}^N r_j (\lambda_1^2 I_{j0}^- - \lambda_T^2 I_{jT}^-) \\
&\quad + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T \lambda_t^2 q_j Y_{jt} - \sum_{t=1}^T \lambda_t^2 Cap_t.
\end{aligned}$$

Somando *I*, *II*, *III* e *IV*, e colocando os termos em comum em evidência obtemos:

$$\begin{aligned}
RL_{\lambda^1, \lambda^2} P = \min \psi &= \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^{T-1} I_{jt}^+ (h_t + \frac{\lambda_t^1 - \lambda_{t+1}^1}{P} + r_j (\lambda_t^2 - \lambda_{t+1}^2)) + \sum_{j=1}^N I_{jT}^+ (h_t + \frac{\lambda_T^1}{P} + r_j \lambda_T^2) \\
&\quad + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^{T-1} I_{jt}^- (b_t + \frac{\lambda_{t+1}^1 - \lambda_t^1}{P} + r_j (\lambda_{t+1}^2 - \lambda_t^2)) + \sum_{j=1}^N I_{jT}^- (b_t - \frac{\lambda_T^1}{P} - r_j \lambda_T^2) \\
&\quad + \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_1^1}{P} (I_{j0}^- - I_{j0}^+) + \lambda_{t+1}^2 r_j (I_{j0}^- - I_{j0}^+) + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T Y_j (s_j + \lambda_t^2 q_j) \\
&= + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T d_{jt} \left(\frac{\lambda_t^1}{P} + \lambda_t^2 r_j \right) - \sum_{t=1}^T \lambda_t^2 Cap_t + \sum_{t=1}^T c_0 \\
&\quad + \sum_{t=1}^T A_t (c_1 - \lambda_t^1) + B_t (c_2 - \lambda_t^1).
\end{aligned}$$

Considerando $\lambda_{T+1}^1 = \lambda_{T+1}^2 = 0$ podemos escrever a função lagrangiana da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
RL_{\lambda^1, \lambda^2} P = \min \psi &= \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T I_{jt}^+ \left(h_t + \frac{\lambda_t^1 - \lambda_{t+1}^1}{P} + r_j(\lambda_t^2 - \lambda_{t+1}^2) \right) \\
&+ \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T I_{jt}^- \left(b_t + \frac{\lambda_{t+1}^1 - \lambda_t^1}{P} + r_j(\lambda_{t+1}^2 - \lambda_t^2) \right) \\
&+ \sum_{j=1}^N (I_{j0}^- - I_{j0}^+) \left(\frac{\lambda_1^1}{P} + \lambda_{t+1}^2 r_j \right) + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T Y_j (s_j + \lambda_t^2 q_j) \\
&+ \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T d_{jt} \left(\frac{\lambda_t^1}{P} + \lambda_t^2 r_j \right) - \sum_{t=1}^T \lambda_t^2 Cap_t + \sum_{t=1}^T c_0 \\
&+ \sum_{t=1}^T A_t (c_1 - \lambda_t^1) + B_t (c_2 - \lambda_t^1).
\end{aligned}$$

Neste trabalho, consideraremos o estoque e o atraso inicial iguais a zero ($I_{j0}^+ = 0$ e $I_{j0}^- = 0$, para $j = 1, \dots, N$). Assim, podemos simplificar nossa função objetivo escrevendo:

$$h_t^* = \left(h_t + \frac{\lambda_t^1 - \lambda_{t+1}^1}{P} + r_j(\lambda_t^2 - \lambda_{t+1}^2) \right); \quad (3.20)$$

$$b_t^* = \left(b_t + \frac{\lambda_{t+1}^1 - \lambda_t^1}{P} + r_j(\lambda_{t+1}^2 - \lambda_t^2) \right); \quad (3.21)$$

$$a_{jt}^* = (s_j + \lambda_t^2 q_j). \quad (3.22)$$

Temos então a seguinte função objetivo:

$$\begin{aligned}
RL_{\lambda^1, \lambda^2} P = \min \psi &= \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T I_{jt}^+ h_t^* + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T I_{jt}^- b_t^* + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T Y_j a_{jt}^* - \sum_{t=1}^T \lambda_t^2 Cap_t \\
&+ \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T d_{jt} \left(\frac{\lambda_t^1}{P} + \lambda_t^2 r_j \right) + \sum_{t=1}^T c_0 + \sum_{t=1}^T A_t (c_1 - \lambda_t^1) + B_t (c_2 - \lambda_t^1).
\end{aligned}$$

Deste modo, obtemos o seguinte problema lagrangiano:

$$RL_{\lambda^1, \lambda^2} P = \min \psi = \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T I_{jt}^+ h_t^* + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T I_{jt}^- b_t^* + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T Y_j a_{jt}^* - \sum_{t=1}^T \lambda_t^2 Cap_t \quad (3.23)$$

$$+ \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T d_{jt} \left(\frac{\lambda_t^1}{P} + \lambda_t^2 r_j \right) + \sum_{t=1}^T c_0 + \sum_{t=1}^T A_t (c_1 - \lambda_t^1) + B_t (c_2 - \lambda_t^1)$$

S.a

$$I_{jt-1}^+ - I_{jt-1}^- + X_{jt} - I_{jt}^+ + I_{jt}^- = d_{jt} \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.24)$$

$$X_{jt} - \sum_{k=1}^T d_{jk} Y_{jt} \leq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.25)$$

$$0 \leq A_t \leq R \quad t = 1, \dots, T \quad (3.26)$$

$$X_{jt}, I_{jt}^+, I_{jt}^- \geq 0, A_t, B_t \in \mathbb{Z} \text{ e } Y_{jt} \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.27)$$

Observe que, podemos separar o problema (3.23) a (3.27) em dois problemas. O primeiro relacionado a produção dos lotes e o segundo com as variáveis de transporte. Isso pode ser feito pois, com a relaxação, não existe mais restrições relacionando a produção com o transporte.

Assim, podemos considerar:

$$RL_{\lambda^1, \lambda^2} P1 = \min \psi1 = \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T I_{jt}^+ h_t^* + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T I_{jt}^- b_t^* + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T Y_j a_{jt}^* \quad (3.28)$$

$$- \sum_{t=1}^T \lambda_t^2 Cap_t + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T d_{jt} \left(\frac{\lambda_t^1}{P} + \lambda_t^2 r_j \right)$$

S.a

$$X_{jt} - \sum_{k=1}^T d_{jk} Y_{jt} \leq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.29)$$

$$I_{jt-1}^+ - I_{jt-1}^- + X_{jt} - I_{jt}^+ + I_{jt}^- = d_{jt} \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.30)$$

$$X_{jt}, I_{jt}^+, I_{jt}^- \geq 0, \text{ e } Y_{jt} \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.31)$$

como um problema e o outro problema é dado por:

$$RL_{\lambda^1, \lambda^2} P2 = \min \psi2 = \sum_{t=1}^T c_0 + \sum_{t=1}^T A_t (c_1 - \lambda_t^1) + B_t (c_2 - \lambda_t^1) \quad (3.32)$$

S.a

$$0 \leq A_t \leq R \quad t = 1, \dots, T \quad (3.33)$$

$$B_t, A_t \in \mathbb{Z} \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.34)$$

Em [36] é apresentada a seguinte propriedade: dado, um problema

$$(P) = \min_x \{f(x) \mid Ax \leq b, Cx \leq d, x \in X\}$$

onde, A e $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ e b e $d \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Seja

$$(RL_\lambda P) = \min_{x(\lambda)} \{f(x(\lambda)) + \lambda(Ax(\lambda) - b) \mid Cx(\lambda) \leq d, x(\lambda) \in X\}$$

onde, $\lambda \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$, a relaxação Lagrangiana do problema P .

Considere $v(P)$ o valor ótimo da função objetivo do problema P . Observe que, para cada $\lambda \geq 0$, é obtido um problema $(RL_\lambda P)$ de minimizar uma função que depende de um vetor x . Observe que, o abuso da notação $\lambda \geq 0$ que dizer que todo elemento do vetor λ é não negativo, ou seja $\lambda \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$.

Segue assim, a seguinte propriedade:

Propriedade 3.1. *Dado $\lambda \geq 0$, se $x(\lambda)$ é uma solução ótima de $(RL_\lambda P)$, então*

$$f(x(\lambda)) + \lambda[Ax(\lambda) - b] \leq v(P).$$

Assim, pela propriedade (1), para cada $(\lambda^1, \lambda^2) \geq 0$ a inequação $v(RL_{\lambda^1, \lambda^2} P) \leq v(P)$ é verdadeira e assim, o objetivo é encontrar $(\lambda_*^1, \lambda_*^2) \geq 0$ tal que $v(RL_{\lambda^1, \lambda^2} P) \leq v(RL_{\lambda_*^1, \lambda_*^2} P)$, para todo $(\lambda^1, \lambda^2) \geq 0$. Um método para encontrar $(\lambda_*^1, \lambda_*^2)$ é o método do subgradiente, que será apresentado ainda neste capítulo. Utilizaremos a relaxação lagrangiana, pois para este tipo de problema, a propriedade de integralidade da relaxação linear do problema não é satisfeita e assim, a relaxação lagrangiana obtém um limitante inferior melhor para o problema do que a relaxação linear.

3.1.2 Resolução do Problema de Dimensionamento de Lotes com Atraso

De acordo com [40], a solução ótima de um problema de dimensionamento de lote não capacitado com atraso satisfaz a propriedade de que no máximo duas, das três variáveis, I_{jt}^+ , I_{jt}^- e X_{jt} , são diferentes de zero. Zangwill em [72] afirma que a seguinte propriedade tem que ser satisfeita para ter uma solução ótima para o problema de dimensionamento de lotes com atraso:

Propriedade 3.2. *A solução ótima do problema de dimensionamento de lotes único item, satisfaz as seguintes condições:*

1. *Se no período $t - 1$ o estoque do item for não nulo, então não há produção deste item no período t ;*
2. *Se existe produção do item no período t , então o atraso no mesmo período é nulo;*
3. *Se há estoque no período $t - 1$, então o atraso no período t é nulo.*

Nesta seção é apresentado um método para resolver o problema $RL_{\lambda^1, \lambda^2}P1$. Observe que $RL_{\lambda^1, \lambda^2}P1$ não possui restrição de capacidade e assim, pode-se separar $RL_{\lambda^1, \lambda^2}P1$ em N problemas independentes ($RL_{\lambda^1, \lambda^2}P1j$) onde, para cada $j = 1, \dots, N$, é determinada a produção do item j em todo horizonte de planejamento. Além disso, os dois últimos somatórios serão retirados da função objetivo do problema, pois para cada (λ^1, λ^2) , podemos considerar esses dois somatórios como uma constante.

Para cada problema ($RL_{\lambda^1, \lambda^2}P1j$), o objetivo é determinar o lote de cada item. Assim, para cada item j , o problema é resolvido da seguinte forma: Seja M_{tk} o custo mínimo de produção, em exatamente um dos períodos $t + 1, t + 2, \dots, k$, para satisfazer a demanda do item j em todos os períodos no intervalo de $t + 1$ até k . Considere também, I_t^+ o estoque no período t e I_t^- o atraso no mesmo período. Além disso, para cada M_{tk} , temos $I_t^+ = I_t^- = 0$.

Então

$$M_{tk} = \begin{cases} s_{jt}, & \text{se } k = t + 1; \\ \min_{t+1 \leq l \leq k} \left[s_{jt} + \sum_{r=t+1}^{l-1} (b_r * I_r^-) + \sum_{r=l}^{k-1} (h_r * I_r^+) \right], & \text{se } k > t + 1. \end{cases}$$

onde $I_r^- = \sum_{i=t+1}^r d_{ji}$ e $I_r^+ = \sum_{i=r+1}^k d_{ji}$.

O valor da função objetivo de ($RL_{\lambda^1, \lambda^2}P1j$) é dada pela seguinte fórmula recursiva:

$$F_k = \min_{0 \leq t \leq k-1} [F_t + M_{tk}] \text{ para } k = 1, 2, \dots, T$$

onde $F_0 = 0$.

Assim, para obter a solução ótima do problema $RL_{\lambda^1, \lambda^2}P1$, basta resolver os N problemas $RL_{\lambda^1, \lambda^2}P1j$, através da fórmula recursiva dada acima. Mais detalhes sobre este método de resolução podem ser encontrados em [72].

Observe que $F_T = F_t + M_{tk}$ para algum t e $k = T$. Além disso, M_{tk} é calculado como descrito anteriormente. Assim, podemos definir os valores da produção, estoque e atraso do item j do seguinte modo: se $k = t + 1$ então

$$X_{jk} = d_{jk}, Y_{jk} = 1 \text{ e } I_{jk}^+ = I_{jk}^- = 0.$$

Caso contrário, ou seja, se $k > t + 1$, a produção do item j é feita no período l (obtido no cálculo de M_{tk}) e assim:

$$X_{jl} = \sum_{i=t+1}^k d_{ji}, \quad Y_{jl} = 1$$

e

$$X_{jp} = Y_{jp} = 0 \text{ para } p = t + 1, \dots, l - 1, l + 1, \dots, k.$$

Como a produção em X_{jl} satisfaz a produção do período $t + 1$ até o período k temos que, para $p = t + 1, \dots, l - 1$:

$$I_{jp}^- = \sum_{w=t+1}^p d_{jw}$$

e

$$I_{jp}^+ = 0.$$

Para $p = l, \dots, k - 1$ temos que:

$$I_{jp}^- = 0$$

e

$$I_{jp}^+ = \sum_{w=p+1}^k d_{jw}.$$

E para $p = k$, o estoque e o atraso são nulos, ou seja, $I_{jp}^+ = I_{jp}^- = 0$.

Com isso, temos a produção do item j do período $t + 1$ até o período T . Para obter a produção dos períodos restantes, repita o raciocínio para F_t . Este processo é repetido até que a produção, estoque e atraso sejam determinados em todos os períodos.

3.1.3 Resolução do Problema do Transporte dos Paletes

O problema de designar o transporte dos itens nos paletes é de fácil resolução. Para $t = 1, \dots, T$ basta tomar $A_t = R$ se $c_1 - \lambda_t^1 < 0$ e $A_t = 0$ caso contrário. Para determinar os valores de B_t , para $t = 1, \dots, T$ faça: $B_t = 0$ se $c_2 - \lambda_t^1 \geq 0$ e $B_t = \infty$ caso contrário. Esta solução fornece um valor infinitamente pequeno e assim, nosso limitante inferior será muito ruim. Como queremos um limitante inferior que mais se aproxima da solução ótima do problema inicial, usaremos o método de resolução dado em [53], que fornece um limitante melhor para o problema.

Para o método, são consideradas duas novas restrições para o problema, que limitam o número de paletes transportados. A primeira restrição limita o valor de B_t para $t = 1, \dots, T$, garantindo que o transporte dos paletes pelo custo mais alto não ultrapasse a quantidade

total de paletes, necessária para o transporte da produção nos períodos futuros, menos a quantidade de paletes que podem ser transportados pelo custo mais baixo, ou seja temos:

$$B_s \leq \left[\frac{1}{P} \sum_{t=s}^T \sum_{j=1}^N d_{jt} \right] - (T - s + 1)R, \text{ para } s = 1, \dots, T.$$

O próximo conjunto de restrições é redundante para o problema inicial, mas não para o subproblema obtido após a relaxação Lagrangiana, garante que, dado um período s , o transporte dos paletes do primeiro período até o período s , não pode ser menor que o número necessário de paletes para o transporte da demanda nesse mesmo período. Assim, temos o seguinte conjunto de restrições:

$$\sum_{t=1}^s (A_t + B_t) \geq \left[\frac{1}{P} \sum_{t=1}^s \sum_{j=1}^N d_{jt} \right], \text{ para } s = 1, \dots, T.$$

Assim, o método de resolução do problema do transporte dos paletes $RL_{\lambda^1, \lambda^2}P2$, além das restrições do problema, também terá que satisfazer as restrições mencionadas acima. Tal método é descrito a seguir.

O primeiro passo é a inicialização dos dados. Sejam, UD_t a demanda ainda não designada para o transporte no período t , inicialmente $UD_t = \sum_{j=1}^N d_{jt}$, para $t = 1, \dots, T$ e FS_t o espaço ainda não usado nos paletes de custo mais baixo no período t , cujo valor inicial é $FS_t = P * R$ para $t = 1, \dots, T$.

Após atribuir os valores de UD_t e FS_t para $t = 1, \dots, T$, passe para o segundo passo, que é a atribuição dos itens nos paletes no primeiro período, isto é feito da seguinte forma:

$$A_1 = \min \left\{ R * P, \sum_{j=1}^N d_{j1} \right\};$$

$$B_1 = \max \left\{ 0, \sum_{j=1}^N d_{j1} - A_1 \right\}.$$

Após atribuir os valores, atualizamos os valores de FS_1 e UD_1 .

$$FS_1 = \max\{0, UD_1 - A_1\} \text{ e } UD_1 = 0.$$

O próximo passo, é atribuir zero a quantidade de paletes transportada nos períodos restantes:

$$A_t = 0, \text{ } t = 2, \dots, T;$$

$$B_t = 0, \text{ } t = 2, \dots, T.$$

No passo quatro, para cada período $s = 2, \dots, T$, temos quatro etapas. Na primeira etapa, tome dois conjuntos V_1 e V_2 tais que, $V_1 = \{c_1 - \lambda_t^1; t = 1, \dots, s\}$ e $V_2 = \{c_2 - \lambda_t^1; t = 1, \dots, s\}$.

Na segunda etapa, faça $V = V_1 \cup V_2$ e ordene o vetor V do menor valor para o maior. Para a próxima considere $V[k]$ o k -ésimo elemento do vetor V e faça $k = 1$. Se $V[k] \in V_1$, faça:

$$\begin{aligned} A_k &= A_k + \min \{UD_s, FS_k\}; \\ UD_s &= UD_s - \min \{UD_s, FS_k\}; \\ FS_k &= FS_k - \min \{UD_s, FS_k\}. \end{aligned}$$

Caso contrário, se $V[k] \notin V_1$, faça:

$$\begin{aligned} B_k &= B_k + UD_s; \\ UD_s &= 0. \end{aligned}$$

Na quarta, e última etapa desse passo, verifica-se se $UD_s = 0$. Caso seja verdadeiro, passamos para o quinto passo. Caso contrário, faça $k = k + 1$ e retorne ao início da terceira etapa do quarto passo.

No quinto passo, faça $s = s + 1$ e verifique se $s \leq T$. Se verdadeiro, volte para o início da etapa três. Caso contrário, pare.

3.1.4 Heurística de Factibilização

Além da Propriedade 3.1, dada no final da Seção 3.1.1, em [36] é dada a seguinte propriedade:

Propriedade 3.3. *Dados o problema P e sua relaxação Lagrangiana $RL_\lambda P$, como na Propriedade 3.1, temos:*

1. *Dado $\lambda \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$, se $x(\lambda)$ é uma solução ótima de $(RL_\lambda P)$, então*

$$f(x(\lambda)) + \lambda[Ax(\lambda) - b] \leq v(P);$$

2. *Se (1) acontece e $x(\lambda)$ é uma solução viável para (P) , então*

$$f(x(\lambda)) + \lambda[Ax(\lambda) - b] \leq v(P) \leq f(x(\lambda)).$$

Assim, caso a solução obtida pelas heurísticas das seções 3.1.2 e 3.1.3 sejam viáveis para o problema inicial, pela Propriedade 3.3, esta fornece um limitante superior para o problema. Para afirmar que tal solução é ótima para P , falta apenas verificar se a solução satisfaz algumas condições de otimalidade que serão dadas na Seção 3.1.5. Caso contrário, ou seja, a solução da relaxação não é viável para o problema inicial, será necessário uma heurística que forneça uma solução viável para o problema inicial. O método de factibilização será dividido em duas etapas. Primeiro é feita a factibilização da capacidade de produção (restrições 3.5) e depois a dos paletes (restrições 3.4).

3.1.4.1 Factibilização da Capacidade

Caso a solução encontrada para a relaxação do problema através das heurísticas apresentadas na seções 3.1.2 e 3.1.3 viole o conjunto de restrição de capacidade, ou seja, existe pelo menos um período onde a produção dos itens ultrapassa a capacidade de tempo de produção do período, então nosso objetivo agora é transferir o excesso de produção do período onde a produção excede para algum período com folga de capacidade. Essa transferência pode ser resumida em quatro etapas. Na primeira, começamos do último período, buscando transferir a produção de itens de períodos com produção além da capacidade para períodos anteriores. Essa transferência é feita até o segundo período de produção e assim, apenas o primeiro período poderá não satisfazer a restrição de capacidade. A segunda etapa também consiste em transferir a produção dos itens onde a restrição de capacidade não é satisfeita mas, neste caso, começamos do primeiro período e caminhamos em direção ao penúltimo período. Essas duas etapas são repetidas mais uma vez e verificamos se as restrições de capacidade são satisfeitas. Os critérios de escolha de transferência para obter uma solução viável são baseados em [62] e [63].

A escolha dos itens e períodos para a transferência será feita de acordo como descrito a seguir, e para isso, definimos $\Delta(t)$ como a diferença entre o tempo de produção utilizado no período e a capacidade do mesmo, ou seja:

$$\Delta(t) = \sum_{j=1}^N (r_j X_{jt} + q_j Y_{jt}) - Cap_t.$$

Assim, podemos definir o excesso de produção no período como:

$$Excesso(t) = \max\{\Delta(t), 0\}.$$

Para eliminar o excesso de produção no período t onde a capacidade é excedida, temos que transferir uma determinada quantidade w de um item j para um período k . A quantidade

transferida é calculada obtendo o mínimo entre o excesso de produção no período t e a produção do item j no mesmo período, ou seja:

$$w = \min\{Excesso(t), X_{jt}\}.$$

Agora que os períodos que têm excesso de produção e a quantidade que será transferida são conhecidos, falta decidir qual item j , que está sendo produzido no período t , será transferido e para qual período k a produção será transferida. Para isso, consideraremos três valores, o primeiro é a variação do custo com a transferência (*variacao_custo*) e indica o quanto estamos nos distanciando do valor da relaxação. O segundo valor é em relação à factibilidade e representa o quanto estamos aproximando de uma solução viável (penalidade em relação ao excesso de produção restante na solução - *Penalidade*). O terceiro valor é relacionado a quantidade de tempo utilizado transferido do período t (*ReducaoExcesso*).

Assim, podemos resumir dizendo que, dado o período com excesso de capacidade t , a seleção do item j e do período k em que será transferida a produção, são obtidos através dos valores de j e k que minimizam a seguinte função:

$$\frac{variacao_custo + \beta * Penalidade}{ReducaoExcesso}. \quad (3.35)$$

A seguir, serão dados mais detalhes sobre cada um desses valores. O valor de *ReducaoExcesso* é dado pela fração da capacidade que deixará de ser utilizada no período t , ou seja,

$$ReducaoExcesso = \frac{wr_j + q_j \delta}{Cap_t} \quad (3.36)$$

$$\text{onde } \delta = \begin{cases} 1, & \text{se } w = X_{jt}; \\ 0, & \text{se } w < X_{jt}. \end{cases}$$

Observe que, δ é uma variável que indica apenas se a quantidade transferida do item j do período t é igual a quantidade produzida. Assim, a função δ informa se será, ou não, necessário o *setup* no período t .

A *Penalidade* é um valor não negativo, que pode ser interpretado como o custo para o uso excedente da capacidade nos períodos t e k e é dada pela soma de duas frações. A primeira é a fração do excesso no período t , sem a produção da quantidade que será transferida em relação a capacidade do período t . A segunda é dada pela diferença entre o excesso no período k , o qual a produção será transferida, e o excesso de produção caso seja feita a transferência para o período k em relação a capacidade desse período. Assim, temos:

$$Penalidade = \left\{ \frac{ExcessoDepois(t)}{Cap_t} + \frac{ExcessoDepois(k) - ExcessoAntes(k)}{Cap_k} \right\} \quad (3.37)$$

onde,

$$\begin{aligned} ExcessoDepois(t) &= \max\{0, \Delta(t) - wr_j - q_j\delta\} \\ ExcessoDepois(k) &= \max\{0, \Delta(k) + wr_j + (1 - Y_{jk})q_j\} \\ ExcessoAntes(k) &= \max\{0, \Delta(k)\}. \end{aligned}$$

O fator β , que multiplica a *Penalidade* na função (3.35), pode ser interpretado como o peso dado para a função, para que a transferência dos itens obtenha uma solução viável. Este peso, é incrementado quando uma solução viável não é encontrada após as transferências da produção.

Nosso último dado é a variação de custo (*variacao_custo*), que é dada pela soma dos custos de *setup* e a diferença entre os custo de estoque e atraso, divididos pela fração do custo total pelo produto do numero de itens e períodos. Ou seja, a variação do custo é dado por:

$$variacao_custo = \frac{variacaoEstoqueAtraso + (1 - y_{jk})s_j - \delta * s_j}{\left(\frac{valorSolucao}{T * N}\right)} \quad (3.38)$$

onde, *valorSolucao* é o valor dado pela solução atual do problema e $\delta = \begin{cases} 1, & \text{se } w = X_{jt}; \\ 0, & \text{se } w < X_{jt}. \end{cases}$

O cálculo de *VariacaoEstoqueAtraso* é dado da seguinte forma:

$$VariacaoEstoqueAtraso = Valor_FO_depois - Valor_FO_antes \quad (3.39)$$

onde, $Valor_FO_antes = \sum_{t=1}^T (b_t I_{jt}^- + h_t I_{jt}^+)$ e $Valor_FO_depois = \sum_{t=1}^T (b_t Iaux_t^- + h_t Iaux_t^+)$

com $Iaux_t^-$ e $Iaux_t^+$ sendo a quantidade de atraso e estoque respectivamente, do item j caso a transferência seja feita. Ou seja, o valor de *VariacaoEstoqueAtraso* é dado pela diferença dos custos de estoque antes e após a transferência da produção. Em [64] é feito um procedimento semelhante a este, aplicado a uma fundição.

O método de factibilização inicia com um valor inicial $\beta = \beta_0$ e aplica o método de transferência descrito acima. Caso as transferências não forneçam uma solução viável, o valor β é incrementado em uma unidade e o método de transferência é aplicado novamente. Este processo é repetido até encontrar uma solução viável ou até que β atinja o seu valor máximo.

3.1.4.2 Factibilização dos Paletes

Com os métodos descritos anteriormente, é possível obter uma solução para o problema de dimensionamento de lotes capacitado que pode não satisfazer as restrições de transporte

dos paletes. Nesta subseção, é apresentado um método para factibilizar a solução, a partir da solução encontrada com a aplicação dos métodos anteriores. Assim, nosso objetivo é determinar A_t e B_t para $t = 1, \dots, T$, que satisfazem o conjunto de restrições (3.4). Isto é feito da seguinte forma: a cada período, se o número de itens for menor que $P * R$ (quantidade máxima de itens transportados pelo custo mais baixo), aloca-se toda a produção em paletes para serem transportados pelo custo mais baixo. Caso contrário, transporta-se o número máximo de paletes no custo mais baixo e o restante da produção é transportada pelo custo mais alto.

3.1.5 Heurísticas de Melhoria

As propriedades citadas neste capítulo, são dadas como um teorema em [36] e este teorema pode ajudar a determinar se a solução, obtida da relaxação do problema, é ótima. Segue o teorema dado em [36].

Teorema 3.1. *Dado, um problema*

$$(P) = \min_x \{f(x) \mid Ax \leq b, Cx \leq d, x \in X\}$$

e a relaxação Lagrangiana

$$(RL_\lambda P) = \min_{x(\lambda)} \{f(x(\lambda)) + \lambda(Ax(\lambda) - b) \mid Cx(\lambda) \leq d, x(\lambda) \in X\}$$

onde A e $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, b e $d \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $\lambda \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$, temos:

1. Dado $\lambda \geq 0$, se $x(\lambda)$ é uma solução ótima de $(RL_\lambda P)$, então

$$f(x(\lambda)) + \lambda[Ax(\lambda) - b] \leq v(P);$$

2. Se (1) acontece e $x(\lambda)$ é uma solução viável para (P) , então

$$f(x(\lambda)) + \lambda[Ax(\lambda) - b] \leq v(P) \leq f(x(\lambda));$$

3. Se (1) e (2) acontecem e, além disso, $\lambda[Ax(\lambda) - b] = 0$, então $x(\lambda)$ é uma solução ótima de (P) e $v(P) = f(x(\lambda))$.

As condições do item três do Teorema 3.1 são chamadas Condições das Folgas Complementares. A seguir, serão apresentadas duas heurísticas de melhoria. Uma relacionada ao transporte do paletes e a outra em relação a capacidade da produção. Para a segunda heurística, a busca de uma solução melhor será realizada buscando uma solução que satisfaça a condição 3 do teorema acima.

3.1.5.1 Heurística de Melhoria em Relação ao Transporte de Paletes

Esta heurística será dada como uma tentativa de melhorar o limitante superior do problema, ou seja, um método de melhoria da solução, que satisfaz as restrições de capacidade do problema, encontrada pelo método anterior.

Nesta heurística será feita uma busca de períodos onde ocorre o transporte de paletes extras, ou seja, existe paletes transportados pelo custo mais alto, e após identificar esses períodos, é feita uma transferência da produção para períodos onde tenha capacidade de transporte de paletes com o menor custo e capacidade de produção. Essa transferência só é feita se melhorar o custo final da produção.

O processo de transferência é feito de duas formas. Primeiro começamos do último período, caminhando para o primeiro, buscando identificar se existe transporte de paletes pelo custo mais alto. Caso exista, toma-se a decisão de qual item e para qual período será feita a transferência. Para determinar o período, é feita uma busca por algum período anterior, onde o número de paletes transportados é menor que o número máximo de paletes que podem ser transportados pela menor taxa. A quantidade dos itens que será transferida é determinada pelo mínimo entre a produção do item no período de onde será feita a transferência, a capacidade de produção do período para onde será transferida a produção e a capacidade de transporte pelo menor custo do período para onde será transferida a produção. O mesmo passo é repetido, mas fazendo a busca do primeiro para o último período.

A seguir será dada uma nova heurística de melhoria, mas nesta nova heurística, a transferência será feita considerando a capacidade de produção de cada período.

3.1.5.2 Heurística de Melhoria em Relação a Capacidade de Produção

Assim como a heurística anterior, esta heurística será dada como uma tentativa de melhorar o limitante superior do problema. Com a aplicação dos métodos de factibilização da capacidade da produção e transporte, é obtida uma solução viável para o problema de dimensionamento de lotes capacitado com custo de transporte e, como mencionado anteriormente (Seção 3.1.2), satisfaz as propriedades dadas em [72]. Também mencionamos que, se a solução ótima da relaxação for viável para o problema inicial, é verificado se a solução satisfaz a condição 3 do Teorema 3.1, para verificar se a solução é ótima. Caso contrário, aplicamos o método de factibilização da capacidade e de transporte, com o objetivo de obter uma solução viável para o problema inicial.

Supondo que, com a aplicação dos métodos de factibilização da capacidade e transporte, uma solução viável para o problema inicial é encontrada, podemos então tentar obter uma solução melhor para o problema. Sabemos que, um critério para saber se estamos na solução

ótima, são os critérios das folgas complementares (condição 3 do Teorema 3.1). Assim, a partir da solução obtida pela factibilização, queremos encontrar uma solução melhor e que mais se aproxima de satisfazer as condições das folgas complementares para o conjunto de restrições de capacidade. Faremos então a transferência da produção de um período para outro de acordo com os seguintes critérios: a transferência será feita de um período onde o multiplicador lagrangiano λ_t^2 é nulo, para outro período k com λ_k^2 não nulo e com folga na capacidade que só será concretizada se a nova solução for melhor que a anterior.

A transferência será feita em duas etapas. Na primeira, começa do último período para o segundo e depois caminhamos do primeiro para o penúltimo período mas, a escolha dos itens e períodos de transferência não serão mais dados pela função (3.35), e sim pelos valores que maximizem a seguinte função:

$$valor_antes - valor_depois$$

onde, $valor_antes$ é o valor da função objetivo obtido até o momento e $valor_depois$ é o valor da função objetivo com a transferência da produção do item j do período t para o período k . A quantidade da produção do item j que será transferida (w) é dada por:

$$w = \min\{Folga(k) + (1 - Y_{jk}) * s, X_{jt}\}$$

onde, $Folga(k)$ é capacidade não utilizada no período k .

Este método será usado junto às heurísticas, para obter um limitante superior melhor. Este método é usado logo após os métodos de factibilização descritos em 3.1.4, caso esta tenha encontrado uma solução viável para o problema de dimensionamento de lotes capacitado com custo de transporte. As heurísticas são aplicadas da seguinte forma: primeiro é aplicada a heurística de melhoria dos paletes e logo após é aplicada a heurística de melhoria em relação a capacidade de produção.

3.1.6 Método do Subgradiente

Até aqui foram descritos, um método para obter um limitante inferior do problema de dimensionamento de lotes capacitado com custo de transporte, um método de factibilização, aplicado em duas etapas (primeiro viabiliza a produção em relação a capacidade e depois em relação ao transporte do paletes) e duas heurísticas de melhoria da solução. Estes métodos dependem dos valores dos multiplicados lagrangianos λ_t^1 e λ_t^2 , para $t = 1, \dots, T$ e conseqüentemente as soluções obtidas, através dos métodos, também dependem desses multiplicadores pois, como mencionado anteriormente, para cada valor dos multiplicadores lagrangianos há

um limitante inferior para o problema. Assim, é importante determinar os valores dos multiplicadores que fornecem o melhor limitante inferior. Para isso, usaremos o método do subgradiente.

Considere o problema $(P) = \min_x \{f(x) \mid Ax \leq b, Cx \leq d, x \in X\}$ e a relaxação Lagrangiana $(RL_\lambda P) = \min_{x(\lambda)} \{f(x(\lambda)) + \lambda(Ax(\lambda) - b) \mid Cx(\lambda) \leq d, x(\lambda) \in X\}$, do início desse capítulo (Propriedade 3.1). Em [34] temos que, se a função lagrangiana é uma função côncava, linear por partes e não diferenciável em alguns pontos. O método do subgradiente é uma adaptação do método do gradiente, para funções não diferenciáveis em todo os pontos do domínio. O método consiste em, dado um valor inicial para os multiplicadores, "caminha-se", a cada iteração, em uma determinada direção, atualizando multiplicadores.

Descrevendo o método com mais detalhes, pode-se dizer que, o método do subgradiente consiste de quatro passos. O primeiro passo pode ser considerado como a inicialização do método. Neste passo, iniciamos o contador de iterações ($k = 1$) e atribuímos um valor inicial para o multiplicador lagrangiano ($\lambda_1 = \lambda_{inicial}$).

O Passo 2 é dividido em três etapas: A primeira etapa consiste em resolver o problema $RL_{\lambda_k} P$ onde, λ_k é o valor do multiplicador na k -ésima iteração. Na segunda etapa, é verificado se $v(RL_{\lambda_k} P)$ é o melhor limitante já obtido. Caso verdadeiro LB recebe $v(RL_{\lambda_k} P)$ e $\lambda^* = \lambda_k$. Na etapa seguinte é verificado se a solução do problema é viável para o problemas P . Se verdadeiro, verifica-se se a solução é ótima para o problema P . Caso seja ótima o método é finalizado. Caso contrário, ou seja, a solução é viável mas não é ótima para P , atualiza-se o limitante superior do problema P e começa o Passo 3. Na terceira etapa, são aplicados métodos de factibilização da solução e logo após são aplicados métodos de melhoria da solução. Após aplicar os métodos, atualiza-se o limitante superior do problema P .

Na quarta etapa é verificado se a solução é viável para o problema P . Caso verdadeiro, se a solução for ótima para o problema P então o método é finalizado. Se a solução não for ótima, o limitante inferior de P é atualizado. Caso a solução não seja viável para P , então é aplicado um método de factibilização e o limitante superior é atualizado.

No terceiro passo, o multiplicador lagrangiano é atualizado. Mas para isso, são necessários dois dados: a direção em que o multiplicador será atualizado e qual o tamanho do passo.

De acordo com [18], o método do subgradiente converge se $\sum_{k=1}^{\infty} t^k = \infty$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} t^k = 0$. O tamanho do passo será dado de acordo com [38], ou seja, o tamanho do passo é dado pela seguinte fórmula:

$$t^k = \frac{\gamma(UB - v(RL_{\lambda_k} P))}{\|Ax^k - b\|^2}$$

onde, $\gamma \in]0, 2[$ pode ser considerado como um parâmetro que serve para ajustar o tamanho do passo à medida que se deseja obter com mais precisão o valor de λ . O dado $v(RL_{\lambda^k}P)$ é o valor ótimo da função objetivo da relaxação Lagrangiana do problema na k -ésima iteração, x^k é a solução ótima da relaxação do problema na k -ésima iteração e UB é o melhor limitante superior obtido até a iteração k .

A direção do subgradiente (∇^k) é dada de acordo com [38] onde, tem-se que, um subgradiente válido para aplicar o método do subgradiente em uma iteração k é dado por $(Ax^k - b)$ onde, x^k é a solução ótima da relaxação na iteração k .

No quarto passo é verificado se já foi feito o número máximo de iterações (n_max). Caso verdadeiro, retorne o melhor limitante LB e o multiplicador λ^* referente ao melhor limitante. Senão, é verificado se já passaram $valor_atualiza$ iterações sem atualizar γ . Caso verdade γ é dividido por dois. Além disso, o número de iterações k é atualizado e retorna ao Passo 2.

Uma revisão bibliográfica e mais detalhes sobre o método do subgradiente podem ser encontrados em [34], [18], [38] e [31].

3.1.7 Relaxação LagSur

No início deste capítulo, apresentamos a relaxação Lagrangiana. Neste tópico, será apresentada a relaxação Lagrangiana/Surrogate (Lagsur). Esta relaxação consiste de duas etapas. Na primeira é feito uma relaxação Surrogate sobre um determinado conjunto de restrições, obtendo uma restrição surrogate, para que, na próxima etapa seja aplicada a relaxação Lagrangiana sobre a relaxação Surrogate.

Novamente, considere o problema

$$(P) = \min_x \{f(x) \mid Ax \leq b, Cx \leq d, x \in X\}$$

onde, A e $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$, b e $d \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $x \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ e seja $\pi \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$ o multiplicador surrogate. A relaxação Surrogate é dada fazendo uma combinação linear de um determinado conjunto de restrições, obtendo uma nova restrição, denominada restrição surrogate. Assim, temos a seguinte relaxação de P sob o conjunto de restrições $Ax \leq b$:

$$(RS_{\pi}P) = \min_x \{f(x) \mid \pi Ax \leq \pi b, Cx \leq d, x \in X\}.$$

Observe que, o conjunto de restrições $Ax \leq b$ é substituído, na relaxação, por uma única restrição $\pi Ax \leq \pi b$.

Agora, para obter a relaxação Lagsur, é preciso fazer a relaxação Lagrangiana sob a restrição surrogate. Observe que, para esta relaxação, será usado um único multiplicador lagrangiano $\lambda \in \mathbb{R}_+$ e não mais um vetor de multiplicadores.

Deste modo, temos a seguinte relaxação Lagsur para o problema P ,

$$(RL_\lambda S_\pi P) = \min_x \{f(x) + \lambda(\pi Ax - \pi b) \mid Cx \leq d, x \in X\}.$$

A seguir apresentaremos a relaxação Lagsur do problema de dimensionamento de lotes capacitado com custo de transporte. A relaxação será feita da seguinte forma; primeiro tem-se uma relaxação Surrogate em relaxação as restrições de transporte e capacidade de produção, obtendo uma única restrição. Após a relaxação Surrogate, será feita uma relaxação Lagrangiana sob a restrição gerada com a relaxação Surrogate.

Novamente, apresentamos o seguinte modelo do problema de dimensionamento de lotes capacitado com custo de transporte.

$$\min z = \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T (h_t I_{jt}^+ + b_t I_{jt}^- + s_{jt} Y_{jt}) + \sum_{t=1}^T (c_0 + c_1 A_t + c_2 B_t) \quad (3.40)$$

S.a

$$I_{jt-1}^+ - I_{jt-1}^- + X_{jt} - I_{jt}^+ + I_{jt}^- = d_{jt} \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.41)$$

$$X_{jt} - \sum_{k=1}^T d_{jk} Y_{jt} \leq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.42)$$

$$A_t + B_t \geq \frac{1}{p} \sum_{j=1}^N X_{jt} \quad t = 1, \dots, T \quad (3.43)$$

$$\sum_{j=1}^N (r_j X_{jt} + q_j Y_{jt}) \leq Cap_t \quad t = 1, \dots, T \quad (3.44)$$

$$0 \leq A_t \leq R \quad t = 1, \dots, T \quad (3.45)$$

$$X_{jt}, I_{jt}^+, I_{jt}^- \geq 0, A_t, B_t \in \mathbb{Z} \text{ e } Y_{jt} \in \{0, 1\} \quad (3.46)$$

Escrevendo o conjunto de restrições (3.43) da seguinte forma,

$$\frac{1}{p} \sum_{j=1}^N X_{jt} \leq A_t + B_t$$

e considerando o multiplicador $\pi = \{\pi_1^1, \dots, \pi_T^1, \pi_1^2, \dots, \pi_T^2\}$, com π_t^1 e π_t^2 não negativos para todo $t = 1, \dots, T$, obtém-se a seguinte relaxação do problema:

$$RS_{\pi^1, \pi^2} P = \min \rho = \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T (h_t I_{jt}^+ + b_t I_{jt}^- + s_{jt} Y_{jt}) + \sum_{t=1}^T (c_0 + c_1 A_t + c_2 B_t) \quad (3.47)$$

S.a

$$I_{jt-1}^+ - I_{jt-1}^- + X_{jt} - I_{jt}^+ + I_{jt}^- = d_{jt} \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.48)$$

$$X_{jt} - \sum_{k=1}^T d_{jk} Y_{jt} \leq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.49)$$

$$\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^N \left(\frac{\pi_t^1 X_{jt}}{p} + \pi_t^2 (r_j X_{jt} + q_j Y_{jt}) \right) \leq \sum_{t=1}^T (\pi_t^1 (A_t + B_t) + \pi_t^2 Cap_t) \quad (3.50)$$

$$0 \leq A_t \leq R \quad t = 1, \dots, T \quad (3.51)$$

$$X_{jt}, I_{jt}^+, I_{jt}^- \geq 0, A_t, B_t \in \mathbb{Z} \text{ e } Y_{jt} \in \{0, 1\}. \quad (3.52)$$

O próximo passo é relaxar o problema $RS_{\pi^1, \pi^2} P$ (3.47-3.52), através da relaxação Lagrangiana. Para isso, considere o multiplicador lagrangiano $\lambda \geq 0$. Assim, segue a relaxação Lagsur do problema de dimensionamento de lotes capacitado com custo de transporte.

$$RL_{\lambda} S_{\pi^1, \pi^2} P = \min \gamma = \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T (h_t I_{jt}^+ + b_t I_{jt}^- + s_{jt} Y_{jt}) + \sum_{t=1}^T (c_0 + c_1 A_t + c_2 B_t) \quad (3.53)$$

$$+ \lambda \left(\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^N \left(\frac{\pi_t^1 X_{jt}}{p} + \pi_t^2 (r_j X_{jt} + q_j Y_{jt}) \right) - \sum_{t=1}^T (\pi_t^1 (A_t + B_t) + \pi_t^2 Cap_t) \right) \quad (3.54)$$

S.a

$$I_{jt-1}^+ - I_{jt-1}^- + X_{jt} - I_{jt}^+ + I_{jt}^- = d_{jt} \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.55)$$

$$X_{jt} - \sum_{k=1}^T d_{jk} Y_{jt} \leq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.56)$$

$$0 \leq A_t \leq R \quad t = 1, \dots, T \quad (3.57)$$

$$X_{jt}, I_{jt}^+, I_{jt}^- \geq 0, A_t, B_t \in \mathbb{Z} \text{ e } Y_{jt} \in \{0, 1\} \quad (3.58)$$

Assim como na relaxação Lagrangiana, faremos a substituição da variável X_{jt} da função objetivo, utilizando a seguinte equação, obtida do conjunto de restrições (3.55).

$$X_{jt} = d_{jt} + I_{jt}^+ - I_{jt-1}^+ - I_{jt}^- + I_{jt-1}^-, \forall t = 1, \dots, T$$

Será apresentado apenas o modelo final pois, as contas feitas neste modelo são análogas as efetuadas na relaxação Lagrangiana. Assim, segue o modelo da relaxação Lagsur do problema de dimensionamento de lotes capacitado com custo de transporte.

$$\begin{aligned}
RL_{\lambda}S_{\pi^1, \pi^2}P = \min \gamma = & \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T I_{jt}^+ h_t^* + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T I_{jt}^- b_t^* + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T Y_j a_{jt}^* - \lambda \sum_{t=1}^T \pi_t^2 Cap_t \\
& + \lambda \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T d_{jt} \left(\frac{\pi_t^1}{P} + \pi_t^2 r_j \right) + \sum_{t=1}^T c_0 + \sum_{t=1}^T A_t (c_1 - \lambda \pi_t^1) + B_t (c_2 - \lambda \pi_t^1)
\end{aligned} \quad (3.59)$$

S.a

$$I_{jt-1}^+ - I_{jt-1}^- + X_{jt} - I_{jt}^+ + I_{jt}^- = d_{jt} \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.60)$$

$$X_{jt} - \sum_{k=1}^T d_{jk} Y_{jt} \leq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.61)$$

$$0 \leq A_t \leq R \quad t = 1, \dots, T \quad (3.62)$$

$$X, I^+, I^- \geq 0, A, B \in \mathbb{Z} \text{ e } Y \in \{0, 1\}. \quad (3.63)$$

onde,

$$h_t^* = \left(h_t + \frac{\lambda(\pi_t^1 - \pi_{t+1}^1)}{P} + \lambda r_j (\pi_t^2 - \pi_{t+1}^2) \right); \quad (3.64)$$

$$b_t^* = \left(b_t + \frac{\lambda(\pi_{t+1}^1 - \pi_t^1)}{P} + \lambda r_j (\pi_{t+1}^2 - \pi_t^2) \right); \quad (3.65)$$

$$a_{jt}^* = (s_j + \lambda \pi_t^2 q_j). \quad (3.66)$$

Assim como a relaxação Lagrangiana, a relaxação Lagsur também pode ser separada em dois problemas onde, o primeiro determina a produção dos lotes e o segundo o transporte dos paletes. Como os modelos são parecidos aos apresentados na relaxação Lagrangiana, omitiremos os dois problemas neste tópico.

Observe que, para esta relaxação, existem dois tipos de multiplicadores para serem determinados de forma que a relaxação forneça o melhor limitante inferior para o problema. Ou seja, é interessante obter π_* e λ_* de tal modo que $v(RL_{\lambda_*}S_{\pi_*^1, \pi_*^2}z)$ tenha o melhor limitante inferior para o problema de dimensionamento de lotes capacitado com custo de transporte. Para um determinado λ , pode-se usar o método do subgradiente, descrito na seção 3.1.6, para obter o valor de π^* . A seguir será apresentado um método para atualizar o multiplicador λ .

3.1.8 Busca Unidimensional

O método de busca unidimensional é baseado em [51]. A busca do multiplicador leva em conta que não existe um intervalo fixo onde o multiplicador se encontra, o que ocorre na relaxação Lagsur.

Para explicar o método, considere a seguinte relaxação Lagsur:

$$(RL_{\lambda}S_{\pi}P) = \min_x \{f(x) + \lambda(\pi Ax - \pi b) \mid Cx \leq d, x \in X\}.$$

Considere que, para um dado $\pi \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$, queremos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}_+$ que melhore o limitante inferior da relaxação. Para isso, considere um valor inicial λ_0 , um limitante inferior para λ^* , que denominaremos por λ_1 , um limitante superior denominado por λ_2 e o melhor multiplicador obtido, denominado por λ^* .

Inicialmente faça $\lambda_1 = 0$ (podemos atribuir o valor zero como menor valor para o multiplicador, pois de acordo com o problema P, o multiplicador é não negativo) e $\lambda_2 = \infty$. Após determinar o intervalo inicial, calcule $v(RL_{\lambda_0} S_{\pi} P)$. Após o cálculo da relaxação Lagsur para os multiplicadores π e λ_0 , calcule o valor da inclinação da função objetivo da relaxação Lagsur no ponto ótimo, ou seja, calcule o valor da primeira derivada da função objetivo, da relaxação Lagsur, no ponto ótimo. Caso a inclinação seja negativa, isto indica que o valor de λ^* é maior que λ_1 e assim, pode-se fazer $\lambda_1 = \lambda_0$. Se a inclinação for positiva, tem-se que λ^* é menor que λ_2 . Assim, um limitante superior para o valor de λ^* é λ_0 , ou seja, pode-se atualizar o limitante superior fazendo $\lambda_2 = \lambda_0$.

Conforme a atualização do limitante, o multiplicador λ_0 sofrerá um acréscimo ou decréscimo e uma nova avaliação será feita. Este processo é repetido de forma iterativa, até que o critério de parada seja satisfeito. Assim como em [51], serão considerados dois critérios de parada. O primeiro é o número máximo de iterações e o segundo será o grau de precisão de λ_0 , ou seja, a diferença entre os limitantes do multiplicador tem que ser menor que um valor estipulado.

Descrevemos a seguir um resumo sobre o método de busca unidimensional para um dado multiplicador π .

Nas duas seções a seguir, serão apresentadas duas heurísticas para resolver o método de dimensionamento de lotes capacitado com custo de transporte. A primeira heurística será baseada na relaxação Lagrangiana e a segunda em relação a relaxação Lagsur.

3.2 Heurística Lagrangiana

Nesta seção será apresentada a primeira heurística para resolver o problema de dimensionamento de lotes capacitado com custo de transporte. A heurística pode ser descrita em cinco passos. No primeiro é dado os valores iniciais para a aplicação da heurística. Para isso basta determinar, o valor inicial de γ (parâmetro de ajuste do tamanho do passo para atualização dos multiplicadores lagrangianos - ver tópico 3.1.6), o valor dos limitantes superior e inferior ($UB = \infty$ e $LB = -\infty$), o valor inicial dos multiplicadores lagrangianos ($\lambda_t^1 = \lambda_t^2 = 0$ para $t = 1, \dots, T$) e iniciar os contadores de iterações ($k = n_iteracao = 1$).

O próximo passo é resolver a relaxação Lagrangiana do problema, para isto serão usados os métodos descritos em 3.1.2 e 3.1.3, e atualizar o valor do limitante inferior. Logo após, é

verificado se a solução é viável para o problema inicial. Se verdadeiro, atualiza-se o limitante superior e verifica se a solução satisfaz a condição das folgas complementares, ou seja, se a solução é ótima. Caso contrário, ou seja, a solução da relaxação não é viável para o problema inicial, aplica-se, o terceiro passo que consiste nos métodos apresentados em 3.1.4 para obter uma solução viável e, caso o método encontre uma solução viável, aplica-se o procedimento de melhoria, um relação ao transporte e outro em relação a capacidade de produção, descrito na Seção 3.1.5. Após aplicar os métodos de melhoria o limitante superior é atualizado.

Após encontrar o limitante superior e inferior, caminha-se para o quarto passo, para a atualização dos multiplicadores. Os multiplicadores lagrangianos serão atualizados de acordo com método do subgradiente descrito em 3.1.6, ou seja, o tamanho do passo é calculado e logo após, os multiplicadores são atualizados. No quinto, e último passo, primeiro é verificado se o número máximo de iterações foi atingido. Se verdade, a heurística termina e retorna os limitantes encontrados. Caso contrário, adicionamos uma unidade ao número de iterações e verifica se $n_iteracao$ atingiu o número máximo. Se for falso, o algoritmo retorna para o passo 2. Se verdadeiro, o valor de γ é atualizado, $n_iteracao$ recebe 1 e a heurística volta para o passo 2.

Os dados iniciais utilizados nos testes serão fornecidos mais adiante. Na próxima seção será apresentada a segunda heurística .

3.3 Heurística Lagrangiana/Surrogate

A principal diferença entre a primeira e a segunda heurística, está no método de relaxação do problema. Na heurística Lagrangiana é utilizada apenas a relaxação Lagrangiana, enquanto na heurística Lagrangiana/Surrogate utiliza-se a relaxação Lagsur. Com isso, na heurística Lagrangiana existe a atualização de apenas um tipo de multiplicador (os multiplicadores lagrangianos $(\lambda_1^1, \dots, \lambda_T^1, \lambda_1^2, \dots, \lambda_T^2)$). Por outro lado, na heurística Lagsur é necessário atualizar dois multiplicadores, os multiplicadores surrogate, $\pi_1^1, \dots, \pi_T^1, \pi_1^2, \dots, \pi_T^2$ e o multiplicador lagrangiano λ .

A heurística Lagsur pode ser descrita em seis passos. Assim como na primeira heurística, no primeiro passo são fornecidos os valores iniciais para a aplicação da heurística. Mas, na heurística Lagrangiana/Surrogate, além do valor inicial de γ (parâmetro de ajuste do tamanho do passo para atualização dos multiplicadores lagrangianos - ver tópico 3.1.6), o valor dos limitantes superior e inferior ($UB = \infty$ e $LB = -\infty$), o valor inicial do multiplicador lagrangiano (λ) e iniciar os contadores de iterações ($k = n_iteracao = 1$), é necessário determinar também, o número de iterações sem atualização do multiplicador lagrangiano ($quando_busca$), o número de iterações para a atualização do multiplicador lagrangiano

(*nbuscauni*), o valor inicial de *incremento* (tamanho do passo para atualização unidimensional), o valor de precisão para busca unidimensional (ε) e o valor inicial dos multiplicadores surrogate π . Os passos dois e três, do método Lagrangiano/Surrogate, são análogos aos passos dois e três do método Lagrangiano.

No quarto passo é verificado se já passaram *quando_busca* iterações sem a atualização do multiplicador lagrangiano. Caso isso ocorra, é feita atualização do multiplicador lagrangiano, de acordo com o método descrito em 3.1.7. Caso contrário, o algoritmo segue para o passo cinco. Neste, é feita a atualização dos multiplicadores surrogates através do método do subgradiente, apresentado em 3.1.6. No sexto e último passo, atualiza-se os contadores de iteração e o parâmetro α .

Agora que as duas heurística são conhecidas, no próximo capítulo serão fornecidos os dados para gerar os exemplares e os resultados computacionais obtidos pelo *CPLEX* 10.0 e as duas heurísticas apresentadas.

Capítulo 4

Resultados Computacionais

Neste capítulo serão apresentados os valores para gerar os dados do problema de dimensionamento de lotes capacitado com custo de transporte e, além disso, serão dados os resultados computacionais dos problemas resolvidos pela heurística Lagrangiana, pela heurística Lagrangiana/Surrogate e os resultados obtidos pelo pacote de otimização CPLEX 10.0 (os problemas foram modelados com o auxílio da linguagem de modelagem AMPL 10.0). As heurísticas foram implementadas em C++ com o auxílio do programa Borland C++ versão 5.01 (1996). Todos os testes foram feitos em um micro computador Pentium 4 de 3Ghz e 1G de memória RAM em plataforma Windows XP.

4.1 Geração de Dados

A geração dos dados dos problemas terá como base os trabalhos de Norden e Velde [53] e Trigeiro *et al.* [66]. Para gerar os exemplares serão considerados alguns dados fixos, como a produção de 20 tipos diferentes de itens ($N = 20$), 12 períodos (horizonte de planejamento de um ano, $T = 12$) e cada palete contém no máximo 100 itens ($P = 100$). Além desses valores, serão fixos para todos os exemplares, os seguintes dados: custo de *setup* ($s_{jt} = 100$ para $j = 1, \dots, N$ e $t = 1, \dots, T$) e o tempo de produção ($r_j = 1$ para $j = 1, \dots, N$).

Para o transporte dos paletes, serão considerados dois tipos de custos de transporte. O primeiro, custo baixo, é dado por $c_1 = 50$ e $c_2 = 200$ e o segundo, custo alto, é dado por $c_1 = 150$ e $c_2 = 500$. O valor de R , ou seja, o número máximo de paletes transportados pelo custo c_1 , será calculado de acordo com a fração da demanda total que queremos transportar com este custo. Serão considerados dois valores para a fração da demanda total. Seja FR a fração da demanda total que pode ser transportada pelo custo c_1 , então serão dados dois valores para FR ; o primeiro $FR = \frac{1}{6}$ e o segundo $FR = \frac{1}{4}$.

O tempo de *setup* q_j será gerado aleatoriamente considerando dois casos, tempo de *setup*

baixo e tempo de *setup* alto. Para o caso de tempo de *setup* baixo, os tempos de *setup* estarão contidos no intervalo $[10, 50]$ e para o caso de tempo de *setup* alto, estes estarão contidos em $[30, 150]$.

A capacidade de produção em cada período será gerada de forma dependente dos tempos de produção e *setup* pela seguinte fórmula:

$$Cap_t = \left\lfloor \left(\frac{\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^T (r_j d_{jk} + q_j)}{\alpha * T} \right) \right\rfloor \quad t = 1, \dots, T.$$

onde, α é um parâmetro para controle da folga na capacidade. Este terá três variações, $\alpha = 1$, $\alpha = 0.85$ e $\alpha = 0.50$ representando, respectivamente, a capacidade apertada, capacidade normal e capacidade com folga. Observe que o cálculo da capacidade é feito obtendo a média do tempo utilizado na produção de toda a demanda. Além disso, arredondamos o valor para o piso para gerar dados inteiros.

Os custos de estoque também terão dois valores, alto e baixo. Sendo $h_t = 1$ o custo de estoque baixo e $h_t = 3$ o custo alto. O custo de atraso será dependente do custo de estoque, neste caso, será considerado que o atraso é b_t vezes mais alto que o estoque no mesmo período e assim, teremos três variações: $b_t = 5$, $b_t = 10$ e $b_t = 50$.

Assim, temos a seguinte tabela de dados que são fixos para todos os exemplares.

Tabela 4.1: Dados fixos de cada exemplar

Dados	N	T	P	s_{jt}	$r_j = 1$
Valores	20	12	100	100	1

Temos também, a seguinte tabela com a variação dos dados para a geração dos exemplares.

Tabela 4.2: Dados que serão variados

Dados	Valores
Custo de transporte (c_1, c_2)	(50,200) e (150,500)
Fração da demanda total (FR)	$\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{4}$
Tempo de <i>setup</i> (q_j)	$[10,50]$ e $[30,150]$
Controle de folga da capacidade (α)	1, 0,85 e 0,50
Custo de estoque (h_t)	1 e 3
Custo de atraso em relaxação ao estoque (b_t)	5, 10 e 50
Número de exemplos para cada combinação	100
Total de exemplos gerados	14400

A seguir, serão apresentadas tabelas contendo os parâmetros dos testes realizados. As tabelas serão divididas em grupos de problemas, onde fixamos, em cada grupo, os dados de transporte. Assim, teremos quatro grupos de problemas. O primeiro com a fração da demanda total igual a um sexto ($FR = \frac{1}{6}$) e custos de transporte baixo ($c_1 = 50$ e $c_2 = 200$).

No segundo grupo, temos a mesma fração da demanda total do primeiro grupo ($FR = \frac{1}{6}$), mas consideraremos o custo de transporte alto ($c_1 = 150$ e $c_2 = 500$). O terceiro grupo terá a fração da demanda total igual a um quarto ($FR = \frac{1}{4}$) e custo de transporte baixo ($c_1 = 50$ e $c_2 = 200$) e por último, o quarto grupo com fração da demanda total igual a um quarto ($FR = \frac{1}{4}$) e custo de transporte alto ($c_1 = 150$ e $c_2 = 500$). Assim, seguem as tabelas com os exemplares, sendo que as variações dos outros parâmetros são colocadas em cada linha das tabelas.

1. Grupo 1: $FR = \frac{1}{6}$, $c_1 = 50$ e $c_2 = 200$.

Tabela 4.3: Tabela de Exemplares - Grupo 1.

Exemplares	α	h	b	q
1	1	1	5	[10,50]
2	1	1	5	[30,150]
3	1	1	10	[10,50]
4	1	1	10	[30,150]
5	1	1	50	[10,50]
6	1	1	50	[30,150]
7	1	3	5	[10,50]
8	1	3	5	[30,150]
9	1	3	10	[10,50]
10	1	3	10	[30,150]
11	1	3	50	[10,50]
12	1	3	50	[30,150]
13	0,85	1	5	[10,50]
14	0,85	1	5	[30,150]
15	0,85	1	10	[10,50]
16	0,85	1	10	[30,150]
17	0,85	1	50	[10,50]
18	0,85	1	50	[30,150]

Exemplares	α	h	b	q
19	0,85	3	5	[10,50]
20	0,85	3	5	[30,150]
21	0,85	3	10	[10,50]
22	0,85	3	10	[30,150]
23	0,85	3	50	[10,50]
24	0,85	3	50	[30,150]
25	0,5	1	5	[10,50]
26	0,5	1	5	[30,150]
27	0,5	1	10	[10,50]
28	0,5	1	10	[30,150]
29	0,5	1	50	[10,50]
30	0,5	1	50	[30,150]
31	0,5	3	5	[10,50]
32	0,5	3	5	[30,150]
33	0,5	3	10	[10,50]
34	0,5	3	10	[30,150]
35	0,5	3	50	[10,50]
36	0,5	3	50	[30,150]

2. Segundo grupo: $FR = \frac{1}{6}$, $c_1 = 150$ e $c_2 = 500$.

Tabela 4.4: Tabela de Exemplos - Grupo 2.

Exemplares	α	h	b	q
37	1	1	5	[10,50]
38	1	1	5	[30,150]
39	1	1	10	[10,50]
40	1	1	10	[30,150]
41	1	1	50	[10,50]
42	1	1	50	[30,150]
43	1	3	5	[10,50]
44	1	3	5	[30,150]
45	1	3	10	[10,50]
46	1	3	10	[30,150]
47	1	3	50	[10,50]
48	1	3	50	[30,150]
49	0,85	1	5	[10,50]
50	0,85	1	5	[30,150]
51	0,85	1	10	[10,50]
52	0,85	1	10	[30,150]
53	0,85	1	50	[10,50]
54	0,85	1	50	[30,150]

Exemplares	α	h	b	q
55	0,85	3	5	[10,50]
56	0,85	3	5	[30,150]
57	0,85	3	10	[10,50]
58	0,85	3	10	[30,150]
59	0,85	3	50	[10,50]
60	0,85	3	50	[30,150]
61	0,5	1	5	[10,50]
62	0,5	1	5	[30,150]
63	0,5	1	10	[10,50]
64	0,5	1	10	[30,150]
65	0,5	1	50	[10,50]
66	0,5	1	50	[30,150]
67	0,5	3	5	[10,50]
68	0,5	3	5	[30,150]
69	0,5	3	10	[10,50]
70	0,5	3	10	[30,150]
71	0,5	3	50	[10,50]
72	0,5	3	50	[30,150]

3. Terceiro grupo: $FR = \frac{1}{4}$, $c_1 = 50$ e $c_2 = 200$

Tabela 4.5: Tabela de Exemplos - Grupo 3.

Exemplares	α	h	b	q
73	1	1	5	[10,50]
74	1	1	5	[30,150]
75	1	1	10	[10,50]
76	1	1	10	[30,150]
77	1	1	50	[10,50]
78	1	1	50	[30,150]
79	1	3	5	[10,50]
80	1	3	5	[30,150]
81	1	3	10	[10,50]
82	1	3	10	[30,150]
83	1	3	50	[10,50]
84	1	3	50	[30,150]
85	0,85	1	5	[10,50]
86	0,85	1	5	[30,150]
87	0,85	1	10	[10,50]
88	0,85	1	10	[30,150]
89	0,85	1	50	[10,50]
90	0,85	1	50	[30,150]

Exemplares	α	h	b	q
91	0,85	3	5	[10,50]
92	0,85	3	5	[30,150]
93	0,85	3	10	[10,50]
94	0,85	3	10	[30,150]
95	0,85	3	50	[10,50]
96	0,85	3	50	[30,150]
97	0,5	1	5	[10,50]
98	0,5	1	5	[30,150]
99	0,5	1	10	[10,50]
100	0,5	1	10	[30,150]
101	0,5	1	50	[10,50]
102	0,5	1	50	[30,150]
103	0,5	3	5	[10,50]
104	0,5	3	5	[30,150]
105	0,5	3	10	[10,50]
106	0,5	3	10	[30,150]
107	0,5	3	50	[10,50]
108	0,5	3	50	[30,150]

4. Quarto grupo: $FR = \frac{1}{4}$, $c_1 = 150$ e $c_2 = 500$.

Tabela 4.6: Tabela de Exemplos - Grupo 4.

Exemplares	α	h	b	q
109	1	1	5	[10,50]
110	1	1	5	[30,150]
111	1	1	10	[10,50]
112	1	1	10	[30,150]
113	1	1	50	[10,50]
114	1	1	50	[30,150]
115	1	3	5	[10,50]
116	1	3	5	[30,150]
117	1	3	10	[10,50]
118	1	3	10	[30,150]
119	1	3	50	[10,50]
120	1	3	50	[30,150]
121	0,85	1	5	[10,50]
122	0,85	1	5	[30,150]
123	0,85	1	10	[10,50]
124	0,85	1	10	[30,150]
125	0,85	1	50	[10,50]
126	0,85	1	50	[30,150]

Exemplares	α	h	b	q
127	0,85	3	5	[10,50]
128	0,85	3	5	[30,150]
129	0,85	3	10	[10,50]
130	0,85	3	10	[30,150]
131	0,85	3	50	[10,50]
132	0,85	3	50	[30,150]
133	0,50	1	5	[10,50]
134	0,50	1	5	[30,150]
135	0,50	1	10	[10,50]
136	0,50	1	10	[30,150]
137	0,50	1	50	[10,50]
138	0,50	1	50	[30,150]
139	0,50	3	5	[10,50]
140	0,50	3	5	[30,150]
141	0,50	3	10	[10,50]
142	0,50	3	10	[30,150]
143	0,50	3	50	[10,50]
144	0,50	3	50	[30,150]

4.2 Resultados Computacionais

Para cada exemplar, dado nas Tabelas 4.3 a 4.6, serão gerados 100 problemas e estes serão resolvidos pelos métodos descritos no Capítulo 3 e pelo pacote de otimização CPLEX 10.0. Os resultados apresentados são obtidos pela média dos cem problemas de cada exemplar. Nas próximas seções apresentaremos os resultados obtidos em cada método para cada combinação de parâmetros. Na Seção (4.2.4) estes resultados são resumidos.

4.2.1 Convergência das Heurísticas - Limitantes Inferiores

Neste tópico, faremos um estudo sobre a convergência dos limitantes inferiores das heurísticas. Para isso, apresentaremos os resultados obtidos pelas mesmas em tabelas contendo o tempo médio de resolução, a média dos limitantes inferiores em valores absolutos e número médio de iterações onde o melhor limitante inferior foi encontrado. Segue assim, as tabelas com os resultados obtidos pelas heurísticas.

Podemos verificar pela Tabela 4.7 que, embora a heurística Lagsur necessite, em média, de mais tempo para resolver os problemas, a heurística Lagsur obtém um limitante inferior melhor para o mesmo, comparada a heurística Lagrangiana. Além disso, o limitante inferior é obtido com um número menor de iterações com a heurística Lagsur. Concluimos assim

Tabela 4.7: Limitante Inferior - grupo 1 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)

problemas	Lagrangiana/Surrogate			Lagrangiana		
	tempo	limitante inferior	iteração	tempo	limitante inferior	iteração
1	12,30	98.397,44	792,55	9,65	98.366,33	793,08
2	8,28	93.633,59	787,75	7,07	93.635,70	790,84
3	12,40	100.590,26	785,78	10,79	100.090,99	792,78
4	7,94	93.790,98	790,44	6,84	93.779,09	790,68
5	12,49	117.312,37	722,40	11,95	111.315,92	792,88
6	8,15	94.823,93	781,30	7,15	94.492,80	790,04
7	15,31	126.674,09	792,32	11,51	126.655,75	792,89
8	8,15	109.328,90	789,28	6,78	109.334,35	791,15
9	12,86	133.722,17	793,54	11,36	131.738,52	794,16
10	8,14	109.825,94	788,46	6,98	109.753,55	792,06
11	15,06	184.749,28	786,15	14,41	165.949,95	794,00
12	8,12	113.339,78	789,08	7,06	111.944,62	792,83
Média	10,77	114.682,39	783,25	9,30	112.254,80	792,28

que, a heurística Lagsur converge para o limitante inferior do problema com um número menor de iterações e, além disso, o limitante inferior da heurística Lagsur é melhor, para os problemas do grupo 1 com capacidade apertada. Entretanto é preciso observar que a cada cinco iterações a heurística Lagrangiana realiza uma busca unidimensional, o que explica o maior tempo computacional.

Tabela 4.8: Limitante Inferior - grupo 1 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)

problemas	Lagrangiana/Surrogate			Lagrangiana		
	tempo	limitante inferior	iteração	tempo	limitante inferior	iteração
13	5,32	90.572,45	746,84	4,39	90.572,36	775,81
14	5,44	89.853,24	752,40	4,54	89.853,22	777,52
15	5,27	90.572,48	754,33	4,35	90.572,36	777,21
16	5,38	89.853,24	751,30	4,50	89.853,22	779,40
17	5,22	90.572,47	752,58	4,31	90.572,35	771,84
18	5,31	89.853,24	750,91	4,45	89.853,22	780,46
19	4,66	96.729,57	755,13	3,68	96.728,38	785,96
20	4,95	93.815,74	765,60	4,01	93.815,49	775,49
21	4,48	96.729,57	762,28	3,53	96.728,38	786,10
22	4,62	93.815,74	764,54	3,74	93.815,49	775,62
23	4,48	96.729,57	762,48	3,54	96.728,38	785,99
24	4,61	93.815,74	764,54	3,74	93.815,49	775,62
Média	4,98	92.742,75	756,91	4,07	92.742,36	778,92

Para os problemas do grupo 1 com capacidade normal (Tabela 4.8), os limitantes inferiores obtidos pelas heurísticas são bem próximos. Porém, os limitantes são obtidos pela heurística Lagsur com menos iterações.

Tabela 4.9: Limitante Inferior - grupo 1 com folga de capacidade ($\alpha = 0,50$)

problemas	Lagrangiana/Surrogate			Lagrangiana		
	tempo	limitante inferior	iteração	tempo	limitante inferior	iteração
25	3,96	88.841,20	560,26	3,07	88.841,06	558,87
26	4,05	88.841,15	517,82	3,16	88.841,06	508,96
27	3,85	88.841,20	560,21	2,98	88.841,06	558,85
28	3,97	88.841,15	517,43	3,10	88.841,06	508,43
29	3,80	88.841,20	574,12	2,94	88.841,06	567,34
30	3,90	88.841,15	517,68	3,03	88.841,06	508,84
31	2,99	89.427,03	564,26	2,09	89.426,95	554,30
32	3,06	89.427,00	497,05	2,15	89.426,94	496,09
33	2,81	89.427,03	564,26	1,95	89.426,95	554,30
34	2,81	89.427,00	497,05	1,94	89.426,94	496,09
35	2,80	89.427,03	564,26	1,94	89.426,95	554,30
36	2,79	89.427,00	497,05	1,93	89.426,94	496,08
Média	3,40	89.134,10	535,95	2,52	89.134,00	530,20

Os resultados do grupo 1 com folga de capacidade (Tabela 4.9) mostra um comportamento diferente entre as heurísticas, comparado ao comportamento dos resultados anteriores. Para este caso, as heurísticas obtêm uma diferença entre os limitantes quase que insignificante podendo assim dizer que, as heurísticas obtêm o mesmo limitante inferior para o problema. Porém, neste caso, a heurística Lagrangiana obtêm o limitante com um pouco menos iterações que a Lagsur. Ao contrário dos casos anteriores onde a heurística Lagsur é mais rápida.

Não apresentaremos neste seção os resultados dos grupos 2, 3 e 4, pois os mesmos não apresentam diferenças expressivas em relação aos resultados do grupo 1.

A seguir, serão apresentados também, alguns gráficos que representam o comportamento do método em relação à busca do limitante inferior. Para isso, será escolhida uma instância do primeiro grupo e avaliaremos o comportamento das heurísticas a cada iteração. Para a análise foi escolhida a instância 17 do exemplar 1 (ver Tabela 4.3) e serão apresentadas três figuras. A primeira contendo o comportamento da heurística Lagsur, a segunda com a heurística Lagrangiana e para uma melhor visualização da diferença entre os comportamentos, a terceira figura contém as duas heurísticas. Os gráficos foram feitos com o auxílio do programa Microsoft Office Excel 2002. Assim, seguem os gráficos do comportamento do limitante inferior das heurísticas.

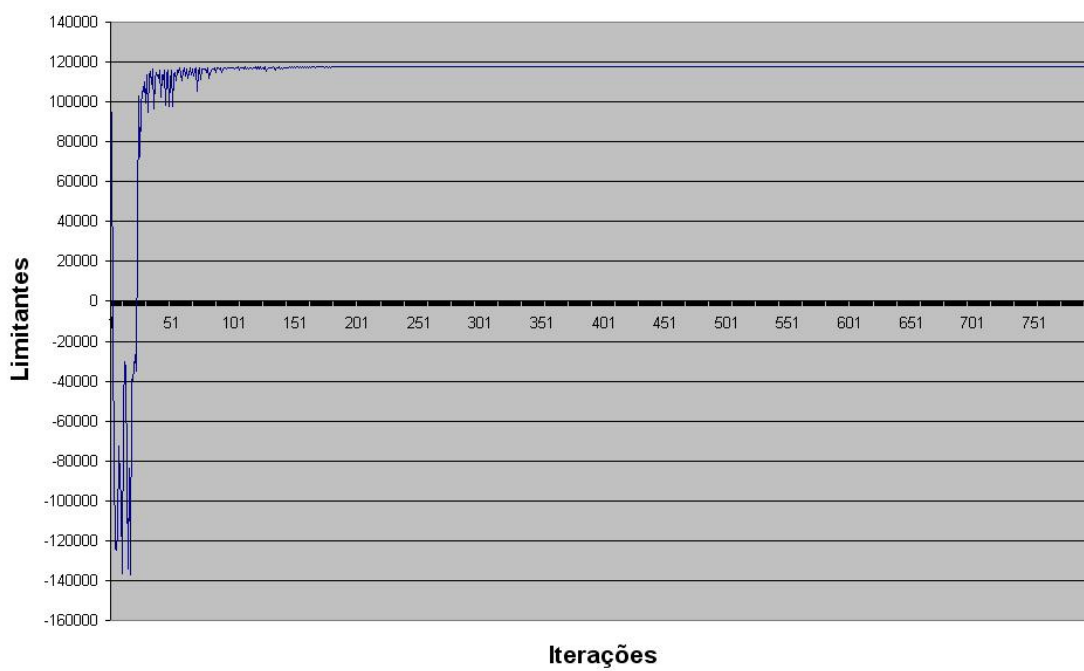


Figura 4.1: Convergência Lagsur - Problema 1

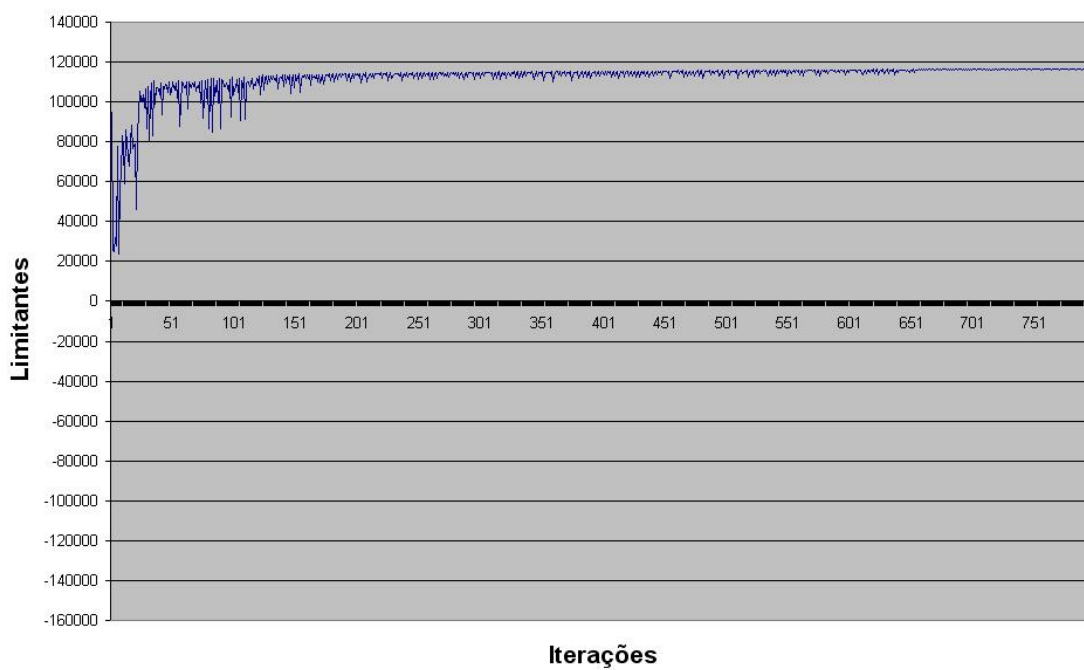


Figura 4.2: Convergência Lagrangiana - Problema 1

Podemos verificar pelos gráficos 4.1 e 4.2 que, para a instância 17 do problema 1 (ver Tabela 4.3), a heurística Lagsur converge mais rápido para o melhor limitante superior. Através dos gráficos, podemos afirmar que a heurística Lagsur é melhor para resolver esse problema, pois a mesma obtém um limitante inferior melhor e com menos iterações.

A diferença da convergência dos métodos pode ser vista mais facilmente observando o gráfico a seguir (Figura 4.3) gerado pelos limitantes inferiores obtidos a cada iteração pelas duas heurísticas onde, a sequência 1 representa a heurística Lagsur e a sequência 2 a heurística Lagrangiana.

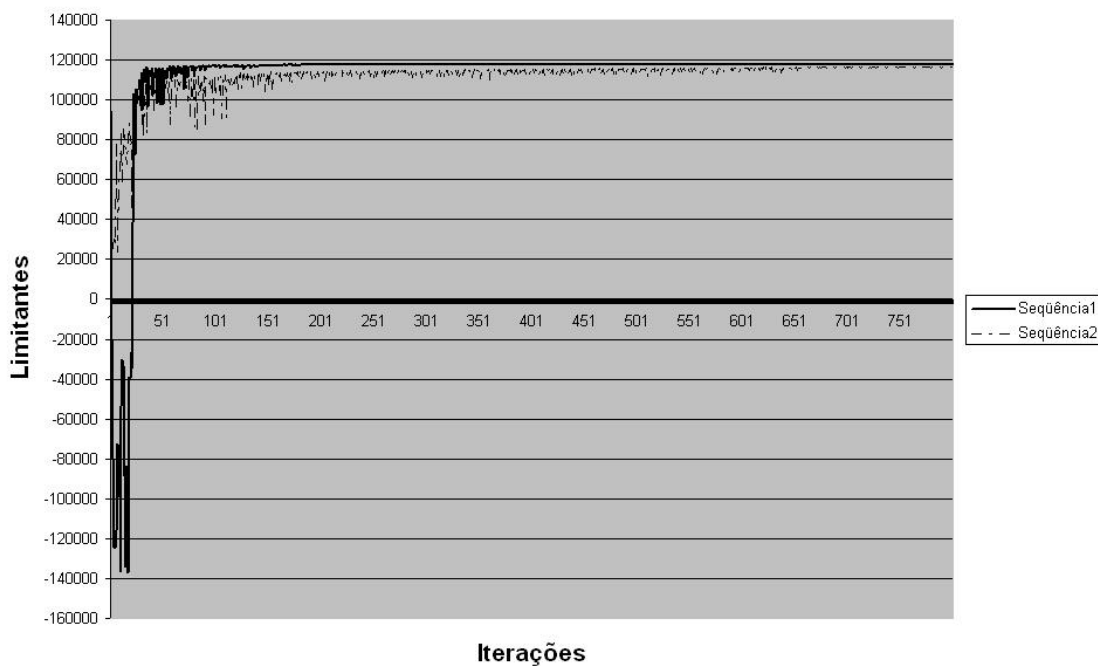


Figura 4.3: Heurística Lagsur X Lagrangiana - Problema 1

Na próxima seção, serão apresentadas tabelas com o objetivo de comparar as soluções viáveis obtidas pelas heurísticas, com a solução do pacote de otimização CPLEX 10.0.

4.2.2 Resultados das Heurísticas X CPLEX 10.0

Nesta seção, serão apresentadas tabelas que comparam os resultados obtidos pelos métodos e o pacote de otimização CPLEX 10.0. As comparações serão feitas considerando o tempo de resolução e o valor da função objetivo. Cada tabela será apresentada de acordo com os grupos apresentados no início deste capítulo. As tabelas irão conter: número médio de iterações onde o melhor limitante superior foi obtido, o tempo de resolução e função objetivo obtidos pelo CPLEX, tempo de resolução e *Gap3* entre a função objetivo obtida pelo CPLEX e as heurísticas. Considere como *Gap3* nas tabelas a seguir, o seguinte valor:

$$Gap3 = 100 * \frac{\text{função_objetivo_heurística} - \text{função_objetivo_CPLEX}}{\text{função_objetivo_CPLEX}}.$$

A seguir, são apresentados os resultados.

Tabela 4.10: Resultado Comparativos - grupo 1 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)

Problema	CPLEX		Lagrangiana/Surrogate			Lagrangiana		
	tempo	função obj.	tempo	Gap3 (%)	Iterações	tempo	Gap3 (%)	iterações
1	180,39	99.155,01	12,30	1,28295	455,29	9,65	1,34219	434,87
2	179,05	94.105,46	8,28	1,12632	261,45	7,07	1,12471	244,60
3	180,27	101.779,25	12,40	1,42348	412,86	10,79	1,80269	449,14
4	178,93	94.343,37	7,94	1,10910	255,71	6,84	1,12217	221,14
5	179,27	121.116,99	12,49	2,74903	445,59	11,95	4,72578	447,25
6	178,93	95.732,13	8,15	1,25391	274,67	7,15	1,54927	241,48
7	179,36	128.493,05	15,31	1,56817	423,67	11,51	1,75584	455,03
8	178,41	110.551,27	8,15	1,10231	256,50	6,78	1,04786	201,16
9	179,08	136.441,06	12,86	1,88787	397,03	11,36	2,93258	414,32
10	177,08	111.127,66	8,14	1,13490	251,42	6,98	1,17194	216,13
11	166,95	194.173,20	15,06	4,59931	415,88	14,41	7,67256	407,05
12	177,92	115.278,02	8,12	1,62268	255,54	7,06	2,30149	208,40
Média	177,97	116.858,04	10,77	1,94174	342,13	9,30	2,76396	328,38

Podemos verificar, pela Tabela 4.10, o tempo utilizado pelo pacote CPLEX é bem maior que o tempo utilizados em cada heurística e, como mencionado anteriormente, o tempo da heurística Lagsur é maior do que o tempo da heurística Lagrangiana. Verificamos também que a heurística Lagsur obtém um *Gap3* melhor que a heurística Lagrangiana e que ambas as heurísticas, na maioria os casos, obtém em média, um limitante superior próximo de 2% maior que o obtido pelo CPLEX.

Para os problemas do grupo 1 com capacidade normal, podemos perceber, pela Tabela 4.11, que para os caso onde o custo de estoque é maior $h_t = 3$, as heurísticas obtém limitantes superiores bem próximos dos obtidos pelo CPLEX com um tempo bem menor.

Na Tabela 4.12, podemos verificar que não há diferença entre os limitantes superiores obtidos pelas heurísticas. Temos novamente que, para os problemas com estoque mais caro, as heurísticas obtém um limitante superior mais próximo da solução encontrada pelo CPLEX comparado aos problemas com estoque mais barato. Porém, percebemos que, para os problemas com estoque mais caro, a diferença entre o tempo de resolução das heurísticas é maior. Percebemos também que, para os casos onde o estoque é mais caro, apenas a heurística Lagrangiana tem um tempo menor que o método CPLEX. Observando o resultado da Tabela B.3, em geral, o resultado para estes problemas é ótimo.

Tabela 4.11: Resultado Comparativos - grupo 1 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)

Problema	CPLEX		Lagrangiana/Surrogate			Lagrangiana		
	tempo	função obj.	tempo	Gap3 (%)	Iterações	tempo	Gap3 (%)	iteraões
13	179,71	90.878,38	5,32	1,12613	54,81	4,39	1,12994	56,75
14	180,25	90.138,20	5,44	1,22309	25,91	4,54	1,22986	26,59
15	179,91	90.899,49	5,27	1,11780	56,60	4,35	1,12378	57,58
16	180,26	90.156,83	5,38	1,21824	23,08	4,50	1,22382	30,01
17	179,79	90.902,29	5,22	1,12772	58,04	4,31	1,13239	51,87
18	180,23	90.160,84	5,31	1,21430	22,62	4,45	1,21805	28,95
19	20,86	97.542,04	4,66	0,48884	55,88	3,68	0,49136	62,32
20	14,63	94.667,08	4,95	0,52282	39,88	4,01	0,52590	70,20
21	20,41	97.544,33	4,48	0,49257	55,74	3,53	0,49101	64,93
22	14,28	94.670,22	4,62	0,52111	39,70	3,74	0,52419	70,04
23	21,06	97.547,33	4,48	0,49011	54,50	3,54	0,48855	62,17
24	14,50	94.673,44	4,61	0,51770	39,70	3,74	0,52077	70,04
Média	98,82	93.315,04	4,98	0,82820	43,87	4,07	0,83140	54,29

Tabela 4.12: Resultado Comparativos - grupo 1 com folga de capacidade ($\alpha = 0,50$)

Problema	CPLEX		Lagrangiana/Surrogate			Lagrangiana		
	tempo	função obj.	tempo	Gap3 (%)	Iterações	tempo	Gap3 (%)	iteraões
25	178,57	89.073,64	3,96	1,51880	1,06	3,07	1,51880	1,06
26	178,53	89.072,05	4,05	1,52533	1,05	3,16	1,52533	1,05
27	178,72	89.084,86	3,85	1,50470	1,07	2,98	1,50470	1,07
28	178,61	89.083,56	3,97	1,52975	1,06	3,10	1,52975	1,06
29	178,56	89.092,54	3,80	1,50152	1,07	2,94	1,50152	1,07
30	178,59	89.094,99	3,90	1,52131	1,06	3,03	1,52131	1,06
31	2,01	90.131,99	2,99	0,90796	1,00	2,09	0,90796	1,00
32	2,01	90.131,99	3,06	0,91146	1,00	2,15	0,91146	1,00
33	2,05	90.133,86	2,81	0,90593	1,00	1,95	0,90593	1,00
34	2,01	90.133,86	2,81	0,90949	1,00	1,94	0,90949	1,00
35	1,99	90.136,97	2,80	0,90310	1,00	1,94	0,90310	1,00
36	1,98	90.136,97	2,79	0,90527	1,00	1,93	0,90527	1,00
Média	90,30	89.608,94	3,40	1,21026	1,03	2,52	1,21026	1,03

Tabela 4.13: Resultado Comparativos - grupo 2 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)

Problema	CPLEX		Lagrangiana/Surrogate			Lagrangiana		
	tempo	função obj.	tempo	Gap3 (%)	Iterações	tempo	Gap3 (%)	iterações
37	180,37	216.501,56	13,30	1,42336	416,56	9,94	1,43248	387,40
38	180,28	211.395,58	8,63	1,37037	271,54	7,19	1,36579	232,22
39	179,42	219.712,56	13,10	1,24474	474,30	10,80	1,38948	406,90
40	178,90	212.089,89	8,51	1,17384	256,11	7,18	1,19913	250,98
41	180,39	239.363,46	12,80	1,77454	418,38	12,10	2,86389	386,59
42	178,83	213.597,84	8,58	1,21226	281,40	7,45	1,35499	258,19
43	178,50	246.695,63	14,05	1,28363	417,42	10,04	1,33189	381,72
44	177,70	228.656,35	8,21	1,07622	245,32	6,85	1,09337	239,12
45	179,19	254.866,80	13,25	1,34037	422,56	11,37	1,89329	410,47
46	178,70	229.323,54	8,17	1,06801	255,92	6,98	1,12733	246,03
47	175,77	312.968,43	13,47	2,83579	414,34	12,28	5,17323	401,09
48	177,82	233.783,56	8,38	1,21038	263,87	7,22	1,53501	254,88
Média	178,82	234.912,93	10,87	1,46287	344,81	9,12	1,92658	321,30

Para os problemas do grupo 2, com capacidade apertada (Tabela 4.13), as heurísticas se aproximam da solução obtida pelo pacote de otimização e, neste caso, a heurística Lagsur se destaca.

Tabela 4.14: Resultado Comparativos - grupo 2 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)

Problema	CPLEX		Lagrangiana/Surrogate			Lagrangiana		
	tempo	função obj.	tempo	Gap3 (%)	Iterações	tempo	Gap3 (%)	iterações
49	180,23	208.133,91	5,62	1,53392	53,93	4,66	1,54873	51,32
50	180,22	207.390,13	5,50	1,60049	22,60	4,58	1,62167	16,94
51	180,25	208.606,96	5,48	1,35037	62,57	4,52	1,35655	50,48
52	180,22	207.861,84	5,45	1,43756	20,49	4,53	1,43996	18,85
53	180,26	208.653,22	5,37	1,36306	58,12	4,44	1,37309	56,43
54	180,23	207.908,67	5,37	1,45068	19,48	4,48	1,45046	20,80
55	53,19	215.640,68	4,60	0,89178	51,14	3,63	0,89816	53,63
56	30,23	212.759,75	4,66	0,93775	30,92	3,77	0,94367	37,93
57	53,10	215.667,52	4,58	0,88902	52,79	3,63	0,89336	49,51
58	30,11	212.785,08	4,64	0,93102	31,13	3,75	0,93694	37,66
59	52,26	215.915,44	4,57	0,77424	51,39	3,64	0,77702	50,11
60	29,50	213.060,59	4,65	0,80331	31,62	3,77	0,80963	37,11
Média	110,82	211.198,65	5,04	1,15914	40,52	4,12	1,16627	40,06

Novamente, pelos resultados mostrados na Tabela 4.11 notamos que, para os problemas com custo de estoque mais caro, as heurísticas conseguem obter um valor mais próximo do

valor encontrado pelo pacote de otimização CPLEX.

Tabela 4.15: Resultado Comparativos - grupo 2 com folga de capacidade ($\alpha = 0,50$)

Problema	CPLEX		Lagrangiana/Surrogate			Lagrangiana		
	tempo	função obj.	tempo	Gap3 (%)	Iterações	tempo	Gap3 (%)	iterações
61	178,41	206.318,52	4,05	1,95591	1,06	3,16	1,95591	1,06
62	178,47	206.319,57	4,08	1,94606	1,13	3,19	1,94606	1,13
63	180,18	206.794,99	3,92	1,76460	1,06	3,05	1,76460	1,06
64	180,22	206.794,42	4,01	1,75629	1,06	3,14	1,75629	1,06
65	180,18	206.827,25	3,81	1,77636	1,06	2,95	1,77636	1,06
66	180,19	206.827,28	3,89	1,77674	1,06	3,03	1,77674	1,06
67	5,89	208.211,82	2,85	1,25320	1,00	1,97	1,25320	1,00
68	6,05	208.211,82	2,83	1,25530	1,00	1,95	1,25530	1,00
69	7,99	208.234,56	2,82	1,24515	1,00	1,96	1,24515	1,00
70	7,22	208.234,56	2,81	1,24698	1,00	1,94	1,24698	1,00
71	6,84	208.495,73	2,80	1,12006	1,00	1,94	1,12006	1,00
72	6,21	208.495,73	2,79	1,12099	1,00	1,93	1,12099	1,00
Média	93,15	207.480,52	3,39	1,51682	1,04	2,52	1,51682	1,04

Na Tabela 4.15, podemos verificar que as heurísticas são mais rápidas que o pacote de otimização porém, o resultado obtido pelo pacote de otimização é melhor do que o resultado obtido pelas heurísticas.

Tabela 4.16: Resultado Comparativos - grupo 3 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)

Problema	CPLEX		Lagrangiana/Surrogate			Lagrangiana		
	tempo	função obj.	tempo	Gap3 (%)	Iterações	tempo	Gap3 (%)	iterações
73	180,29	96.237,51	13,17	1,21051	444,94	10,54	1,25602	428,41
74	178,68	91.248,08	8,82	1,14265	271,09	7,61	1,14418	249,18
75	180,56	98.871,11	13,65	1,34970	446,23	11,75	1,71255	448,63
76	179,66	91.596,60	9,37	1,01687	252,17	8,21	1,01170	241,58
77	179,69	118.179,11	12,84	2,79788	434,12	12,22	4,80663	416,35
78	179,18	92.782,82	8,74	1,34169	261,78	7,73	1,69510	251,26
79	178,96	125.485,41	14,31	1,55955	457,89	10,59	1,73474	432,73
80	177,12	107.687,22	9,54	1,10663	233,17	8,15	1,07223	209,05
81	179,24	133.467,51	15,36	1,82162	391,87	13,41	2,99653	402,36
82	176,72	108.258,11	9,50	1,20311	226,55	8,31	1,22302	235,53
83	167,55	191.216,60	14,81	4,88839	420,66	13,97	7,77668	398,77
84	175,92	112.421,93	8,73	1,91954	232,06	7,65	2,41630	216,27
Média	177,80	113.954,33	11,57	2,00466	339,38	10,01	2,80577	327,51

Para os problemas do grupo 3 com capacidade apertada (Tabela 4.16), podemos verificar

que, para os problemas onde os tempos de *setup* são baixos e também para os problemas onde o custo de atraso é alto ($b_t = 50$), a diferença de tempo de resolução entre as heurística é bem menor, comparado aos outros resultados do mesmo grupo. Note também que, quanto o custo de atraso é alto, a solução obtida pelas heurísticas é a que mais se distancia do resultados dado pelo pacote de otimização.

Tabela 4.17: Resultado Comparativos - grupo 3 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)

Problema	CPLEX		Lagrangiana/Surrogate			Lagrangiana		
	tempo	função obj.	tempo	Gap3 (%)	Iterações	tempo	Gap3 (%)	iterações
85	178,13	88.083,86	6,50	1,26864	55,16	5,52	1,28468	51,12
86	177,56	87.359,98	6,83	1,41258	24,71	5,90	1,41783	27,63
87	178,58	88.098,90	6,25	1,27882	57,88	5,31	1,29329	54,50
88	179,97	87.377,33	7,59	1,41937	26,23	6,80	1,42160	25,71
89	178,36	88.108,36	6,20	1,28690	55,43	5,28	1,30320	50,74
90	178,70	87.301,22	6,45	1,50683	25,35	5,61	1,50903	28,05
91	26,42	94.893,39	6,14	0,58954	52,24	5,16	0,59354	66,20
92	16,77	92.041,57	6,74	0,65727	39,43	5,69	0,66190	58,13
93	24,38	94.896,18	7,04	0,58874	54,05	5,82	0,59327	68,74
94	13,31	92.044,96	6,88	0,65440	39,57	5,91	0,66087	57,79
95	24,91	94.899,94	5,60	0,58640	51,80	4,68	0,59193	64,23
96	15,57	92.049,91	5,76	0,64898	39,57	4,89	0,65546	57,79
Média	99,39	90.596,30	6,50	0,97934	43,45	5,55	0,98663	50,89

Observamos que, os resultados dos limitantes superiores dos exemplares da Tabela 4.17 com custo de estoque caro ($h_t = 3$), são os que mais se aproximam do resultado obtido pelo CPLEX, comparando com os resultados de todas as tabelas. Também verificamos que em alguns casos o limitante superior obtido pela relaxação Lagsur é um pouco melhor que o resultado da heurística Lagrangiana mas, esta tem um tempo de resolução menor.

Para os resultados do grupo 3 com folga de capacidade (Tabela 4.18), observamos que para os casos com custo de estoque barato ($h_t = 1$), o tempo de resolução das heurísticas é menor do que o do pacote de otimização. Porém, para o restante dos problemas, o tempo das heurísticas é bem maior do que o tempo de resolução do CPLEX.

Nos resultados da Tabela 4.19 (grupo 4), podemos observar que, na maioria dos casos os limitantes obtidos pelas heurística são menos que 1,5% maiores que os valores obtidos pelo CPLEX.

Tabela 4.18: Resultado Comparativos - grupo 3 com folga de capacidade ($\alpha = 0,50$)

Problema	CPLEX		Lagrangiana/Surrogate			Lagrangiana		
	tempo	função obj.	tempo	Gap3 (%)	Iterações	tempo	Gap3 (%)	iteraões
97	176,86	86.342,25	5,43	1,84729	1,13	4,58	1,84729	1,13
98	176,76	86.342,00	6,37	1,84165	1,11	5,41	1,84165	1,11
99	177,01	86.354,21	5,38	1,83710	1,13	4,49	1,83710	1,13
100	177,36	86.356,78	6,42	1,86012	1,12	5,46	1,86012	1,12
101	176,12	86.358,68	5,29	1,83957	1,13	4,39	1,83957	1,13
102	176,23	86.278,38	5,34	1,95054	1,12	4,48	1,95054	1,12
103	2,48	87.614,40	4,84	1,14594	1,00	3,90	1,14594	1,00
104	2,87	87.614,40	5,06	1,15118	1,00	4,13	1,15118	1,00
105	2,39	87.616,68	6,03	1,13985	1,00	5,01	1,13985	1,00
106	2,39	87.616,68	5,77	1,14146	1,00	4,75	1,14146	1,00
107	2,26	87.620,55	4,32	1,13615	1,00	3,46	1,13615	1,00
108	2,48	87.620,55	4,32	1,13623	1,00	3,46	1,13623	1,00
Média	89,60	86.977,96	5,38	1,49960	1,06	4,46	1,49960	1,06

Tabela 4.19: Resultado Comparativos - grupo 4 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)

Problema	CPLEX		Lagrangiana/Surrogate			Lagrangiana		
	tempo	função obj.	tempo	Gap3 (%)	Iterações	tempo	Gap3 (%)	iteraões
109	179,52	209.550,84	13,57	1,43060	445,63	10,14	1,44952	394,02
110	180,31	204.532,79	10,46	1,43219	261,65	8,76	1,43624	212,66
111	179,44	212.706,64	15,32	1,26506	466,16	12,85	1,40165	393,84
112	180,32	205.164,58	9,16	1,27953	255,10	7,78	1,31050	249,79
113	180,30	232.347,39	12,96	1,80432	436,82	12,42	2,81923	365,22
114	180,26	206.633,24	9,20	1,31471	273,21	7,98	1,48919	255,45
115	179,15	239.679,35	14,35	1,34075	415,66	10,36	1,38960	390,51
116	176,59	221.894,45	8,85	1,13983	254,20	7,48	1,14137	238,38
117	179,41	247.840,65	13,75	1,40016	448,57	12,01	1,88175	422,35
118	176,71	222.516,20	9,21	1,13983	262,52	8,13	1,17500	219,16
119	176,72	305.787,09	14,41	3,04768	426,72	13,29	5,23686	378,40
120	176,49	226.750,08	9,87	1,36616	280,92	8,68	1,68448	231,52
Média	178,77	227.950,28	11,76	1,54706	352,26	9,99	1,98316	312,61

Tabela 4.20: Resultado Comparativos - grupo 4 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)

Problema	CPLEX		Lagrangiana/Surrogate			Lagrangiana		
	tempo	função obj.	tempo	Gap3 (%)	Iterações	tempo	Gap3 (%)	iterações
121	178,26	201.362,67	6,88	1,77407	63,76	5,90	1,79130	57,90
122	179,73	200.638,70	8,09	1,87520	20,23	7,04	1,89771	21,97
123	179,07	201.752,41	7,62	1,64034	62,48	6,58	1,65167	56,12
124	179,13	201.015,98	6,56	1,74565	22,43	5,64	1,77207	20,42
125	178,81	201.794,03	6,36	1,66661	63,54	5,42	1,67779	54,73
126	179,63	201.059,51	6,44	1,77199	21,49	5,53	1,79531	24,44
127	61,29	209.266,58	5,73	1,00929	53,08	4,77	1,02127	67,20
128	33,59	206.436,55	6,10	1,07236	30,25	5,20	1,07206	40,08
129	58,86	209.291,02	5,88	1,00776	53,32	4,92	1,01762	64,89
130	34,50	206.461,88	6,00	1,06812	30,48	5,10	1,06557	41,03
131	57,31	209.303,44	5,84	0,99787	52,90	4,91	1,01124	63,51
132	33,21	206.474,34	6,69	1,06534	30,37	5,81	1,06278	41,03
Média	112,78	204.571,43	6,52	1,38532	42,03	5,57	1,39704	46,11

Os limitantes superiores encontrados pelas heurísticas, descritos na Tabela 4.20, não são muito diferentes, sendo os limitantes obtidos pela heurística Lagsur um pouco melhores que os da Lagrangiana. Note também que, embora pequena, há uma aproximação melhor dos limitantes encontrados pelas heurísticas em relação aos encontrados pelo CPLEX. Verifique que, os limitantes são melhores quando o custo de estoque é alto.

Tabela 4.21: Resultado Comparativos - grupo 4 com folga de capacidade ($\alpha = 0,50$)

Problema	CPLEX		Lagrangiana/Surrogate			Lagrangiana		
	tempo	função obj.	tempo	Gap3 (%)	Iterações	tempo	Gap3 (%)	iterações
133	177,61	199.617,11	6,17	2,34489	1,11	5,24	2,34489	1,11
134	178,06	199.618,45	6,54	2,34525	1,12	5,66	2,34525	1,12
135	180,21	200.000,39	5,94	2,24418	1,08	5,02	2,24418	1,08
136	180,21	200.000,14	5,48	2,22467	1,06	4,60	2,22467	1,06
137	180,23	200.041,02	5,09	2,27607	1,08	4,23	2,27607	1,08
138	180,17	200.042,49	5,24	2,25588	1,06	4,38	2,25588	1,06
139	10,14	202.075,63	4,39	1,44220	1,00	3,51	1,44220	1,00
140	9,07	202.075,63	4,68	1,45187	1,00	3,80	1,45187	1,00
141	10,98	202.095,55	4,50	1,43500	1,00	3,62	1,43500	1,00
142	11,64	202.095,55	4,60	1,43885	1,00	3,71	1,43885	1,00
143	13,08	202.105,49	4,68	1,43610	1,00	3,78	1,43610	1,00
144	12,99	202.105,49	5,04	1,43515	1,00	4,15	1,43515	1,00
Média	95,37	200.989,41	5,20	1,85851	1,04	4,31	1,85851	1,04

Na Tabela 4.21 verificamos que, para o custo de estoque barato, os limitantes ficam em média 2,25% maiores do que os resultados do CPLEX e os problemas com custo de estoque alto, os limitantes superiores são, em média, 1,41% maiores.

Em resumo, as heurísticas propostas neste trabalho, não conseguiram superar os resultados apresentados pelo pacote de otimização CPLEX 10.0. Porém, as heurísticas conseguem, em um tempo bem menor, soluções bem próximas as obtidas pelo pacote de otimização. Verificamos que a heurística Lagrangiana/Surrogate (Lagsur), obtém na maioria das vezes, um limitante inferior melhor e com menos iterações que a heurística Lagrangiana. Cade mencionar que, para um mesmo número de iterações, a heurística Lagsur necessita de mais tempo do que a Lagrangiana para solucionar um problema de dimensionamento de lotes com custo de transporte. Isto era esperado devido à busca unidimensional realizada entre algumas iterações do método do subgradiente.

Foi possível verificar também, a influência de alguns dados do problema na resolução do mesmo. Notamos que, os problemas com custo de estoque mais caro são, em geral, mais fáceis de serem resolvidos, tanto pelas heurísticas como pelo pacote de otimização. Verificamos também que, em alguns casos, os problemas com capacidade apertada que apresentam tempo de *setup* alto, são resolvidos mais rapidamente do que os problemas com tempo de *setup* baixo. Esta diferença já não é verdadeira quando a capacidade é normal ou existe folga na capacidade.

Além disso, os problemas com os custos de atraso altos e tempo de *setup* baixo, são mais difíceis de serem resolvidos tanto pelas heurísticas como pelo pacote de otimização. Verificamos também que, para os problemas com custo de atraso muito grande, as heurísticas obtém soluções mais distantes das encontradas pelo pacote de otimização.

Conclusão e Trabalhos Futuros

Neste trabalho foi estudado um problema de dimensionamento de lotes capacitado com custo de transporte e admitindo atraso na entrega da demanda. O trabalho foi inspirado em [53], onde os autores estudam um problema de dimensionamento de lotes em uma empresa, cuja produção tem que ser transportada, em paletes, para um armazém. O transporte é feito por uma empresa terceirizada, e para isso, é feito um contrato com três custos para o transporte. Norden e Velde [53] fazem um modelo para o problema e desenvolvem um método heurístico, baseado em relaxação Lagrangiana, para resolver o problema.

O problema foi estendido, no presente trabalho, considerando a produção capacitada e admitindo atraso da demanda. Inicialmente foi desenvolvido um modelo para o problema (ver Capítulo 2) e fez-se um estudo sobre métodos heurísticos de resolução do problema. As heurísticas foram implementadas e resolveram os problemas com soluções muito próximas as soluções obtidas pelo pacote de otimização.

A primeira heurística (Heurística Lagrangiana) consiste em fazer aplicar a relaxação Lagrangiana sob os conjuntos de restrições de capacidade e transporte dos paletes, obtendo dois problemas: um de transporte de paletes e outro de dimensionamento de lotes. Com a solução da relaxação Lagrangiana, foram aplicadas heurísticas de transferência para obter uma solução que satisfizesse as restrições de capacidade. Logo após foi aplicado um método de factibilização do transporte dos paletes.

Também foram desenvolvidas duas heurísticas de melhoria: uma em relação ao transporte dos paletes e outra em relação a restrição de capacidade. Na primeira heurística, a produção era transferida de períodos com transporte de paletes com custo mais caro, para períodos com capacidade de transporte em paletes de custo mais barato. A segunda heurística, consiste em determinar os períodos cuja solução não satisfaz as condições das folgas complementares e fazer a transferência da produção, buscando aproximar o máximo possível de uma solução que satisfaça essa condição. Em ambas as heurísticas, a transferência só é realizada se a solução obtida for melhor que a encontrada até o momento. Após a melhoria, os multiplicadores lagrangianos são atualizados pelo método do subgradiente.

Na segunda heurística (Heurística Lagsur), é feita a relaxação Lagrangiana/Surrogate do problema, obtendo dois tipos de multiplicadores: lagrangiano e surrogate. Após a relaxação, o problema também é separado em outros dois. A resolução dos dois problemas, a factibilização e a melhoria, é feita de modo análogo a heurística Lagrangiana. A seguir é aplicado

o método do subgradiente para atualizar os multiplicadores surrogates. Após algumas iterações da heurística é feita uma busca unidimensional, para a atualização do multiplicador lagrangiano.

Os métodos foram testados para diferentes tipos de problemas e os resultados foram comparados aos resultados dado pelo pacote de otimização CPLEX 10.0. As heurísticas, embora mais rápidas, não conseguiram obter resultados melhores que o CPLEX. Porém, os métodos são independentes de qualquer pacote de otimização e, além disso, na maioria dos casos, a solução fornecida pelas heurísticas são obtidas mais rapidamente e são, no máximo, 3% maiores que os resultados obtidos pelo pacote de otimização.

Analisando o comportamento das heurísticas, observamos que a heurística Lagsur precisa de mais tempo para resolver os problemas do que a heurística Lagrangiana. Percebemos também que, em geral, a heurística Lagsur obtém um limitante inferior para o problema com um número menor de iterações e além disso, o limitante obtido pela heurística Lagsur é melhor que o limitante obtido pela heurística Lagrangiana. A análise do limitante superior foi feita comparando os resultados das heurísticas com o resultado dado pelo pacote CPLEX 10.0. Observamos que a heurística Lagsur é a que mais se aproxima do resultado obtido pelo pacote. Principalmente para problemas com capacidade apertada ($\alpha = 1$).

Cabe observar que, foram feitos testes com uma capacidade mais apertada (por exemplo $\alpha = 1, 20$). Porém, quando as heurísticas de factibilização são aplicadas, estas não conseguem obter uma solução viável para o problema. Para resolver este problema, sugerimos como estudo futuro uma mudança do método de factibilização que, após o último passo das transferências, considere o excesso de produção do último período como atraso da demanda.

Outro fato observado é em relação aos parâmetros utilizados na heurística Lagsur (ver Capítulo 3). Observamos que, dependendo do valor inicial do incremento e o número de busca unidimensional para atualizar o multiplicador Lagrangiano, a heurística Lagsur tem uma melhora significativa para a maioria dos problemas, em relação aos resultados obtidos pela heurística Lagrangiana, porém, a heurística Lagsur em algumas instâncias obtém um multiplicador lagrangiano muito alto, fazendo com que algumas variáveis ultrapasse o valor máximo que uma variável pode receber no programa.

Tendo em vista melhorar os resultados computacionais bem como estender o trabalho, sugerimos como próximos passos:

- testar diferentes formas de factibilização com critérios diferentes para a transferência;
- estudar métodos diferentes de melhoria da solução obtida.
- estudar e testar diferentes métodos de atualização dos multiplicadores surrogate;

- estender o problema para o caso onde o tamanho dos itens são diferentes, sendo que, um problema de empacotamento deverá ser resolvido para a alocação de itens nos paletes;
- estender o problema para múltiplas máquinas, considerando valores de capacidade, *setup* e tempo de produção distintos.

Referências Bibliográficas

- [1] AFENTAKIS, P., GAVISH, B., E KARMAKAR, U. Computationally efficient optimal solutions to the lot-sizing problem in multistage assembly systems. *Management Science* 30, 2 (1984), 222–239.
- [2] AGGARWAL, A., E PARK, J. K. Improved algorithms for economic lot size problems. *Operations Research* 41 (1993), 549–571.
- [3] AHMADI, R. H., DASU, S., E TANG, C. The dynamic line allocation problem. *Management Science* (1992), 1341–1353.
- [4] ARAUJO, S. A., E ARENALES, M. N. Problema de dimensionamento de lotes monoestágio com restrição de capacidade: modelagem, método de resolução e resultados computacionais. *Pesquisa Operacional* 20, 2 (2000), 287–306.
- [5] ARAUJO, S. A., E ARENALES, M. N. Dimensionamento de lotes e programação do forno numa fundição de porte médio. *Pesquisa Operacional* 20, 3 (2003).
- [6] ARAUJO, S. A., E ARENALES, M. N. Planejamento e programação da produção numa fundição cativa automatizada de grande porte. *Investigação Operacional* 24 (2004), 197–210.
- [7] ARAUJO, S. A., ARENALES, M. N., E CLARK, A. R. Joint rolling-horizon scheduling of materials processing and lot-sizing with sequence-dependent setups. *to appear in Journal of Heuristics* (2006).
- [8] ARAUJO, S. A., ARENALES, M. N., E CLARK, A. R. Lot-sizing and furnace scheduling in small market-driven foundries. *to appear in Computers and Operations Research* (2006).
- [9] ARBIB, C., E MARINELLI, F. Integrating process optimization and inventory planning in cutting-stock with skiving option: An optimization model and its application: Supply

- chain management and advanced planning. *European Journal of Operational Research* 163, 3 (2005), 617–630.
- [10] ARMENTANO, V. A., TOLEDO, F. M. B., E FRANÇA, P. A network flow model for capacitated lot- sizing problems. *Omega* 27 (1999), 275–284.
- [11] BAHL, H., RITZMAN, L. P., E GUPTA, J. N. D. Determining lot sizes and resource requirements: A review. *Operations Research* 35, 3 (1987), 329–345.
- [12] BARANY, I., ROY, T. J. V., E WOLSEY, L. A. Strong formulations for multi-item capacitated lot sizing. *Management Science* 30, 10 (1984), 1255–61.
- [13] BAUMOL, W. J., E VINOD, H. D. An inventory theoretic model of freight transport demand. *Management Science* 16, 413-421 (1970).
- [14] BILLINGTON, P. J., MCCLAIN, J. O., E THOMAS, L. Mathematical programming approaches to capacity mrp systems: Review, formulation and problem reduction. *Management Science* 29, 10 (1983), 1126–1141.
- [15] BILLINGTON, P. J., MCCLAIN, J. O., E THOMAS, L. Heuristics for multilevel lot-sizing with a bottleneck. *Management Science* 32, 8 (1986), 989–1006.
- [16] BITRAN, G. R., E MATSUO, H. Approximation formulations for the single-product capacitated lot size problem. *Management Science* 28 (1982), 1147–1186.
- [17] BRAHIMI, N., DAUZERE-PERES, S., NAJID, N. M., E NORDLI, A. Single item lot sizing problems. *European Journal of Operational Research* 168, 1 (2005), 1–16.
- [18] CAMERINI, P. M., FRATTA, L., E MAFFIOLI, F. On improving relaxation methods by modified gradient techniques. *Mathematical Programming Study* 3 (1975), 26–34.
- [19] CATTRYSSE, D., MAES, J., E VAN WASSENHOVE, L. N. Set partitioning and column generation heuristics for capacitated dynamic lot sizing. *European Journal of Operational Research* 46, 1 (1990), 38–47.
- [20] CATTRYSSE, D., SALOMON, M., KUIK, R., E VAN WASSENHOVE, L. N. A dual ascent and column generation heuristic for the discrete lot sizing and scheduling problem with setup-times. *Management Science* 39 (1993), 477–486.
- [21] Ş. S. ERENGÜÇ, SIMPSON, N., E VAKHARIA, A. Integrated production/distribution planning in supply chains: An invited review. *European Journal of Operational Research* 115 (1999), 219–236.

- [22] DIABY, M., BAHL, H., KARWAN, M. H., E ZIONTS, S. Capacitated lot-sizing and scheduling by lagrangian relaxation. *European Journal of Operational Research* 59 (1992), 444–458.
- [23] DREXL, A., E HAASE, K. Proportional lotsizing and scheduling. *International Journal of Production Economics* 40 (1995), 73–57.
- [24] DREXL, A., E HAASE, K. Sequential-analysis based randomized-regred-methods for lot-sizing and scheduling. *Journal of Operational Research Society* 47 (1996), 251–265.
- [25] DREXL, A., E KIMMS, A. Lot sizing and scheduling - survey and extensions. *European Journal of Operational Research* 99 (1997), 221–235.
- [26] ERENGUÇ, S. S., SIMPSON, N. C., E VAKHARIA, A. J. Integrated production/distribution planning in supply chains? an invited review. *European Journal of Operational Research* 115 (1999), 219–236.
- [27] EVANS, J. R. An efficient implementation if the wagner-whitin algorithm for dynamic lot-sizing. *Journal of Operations Management* 5 (1985), 229–235.
- [28] EVANS, J. R. Network-based optimization algorithms for the capacitated multi-item lotsizing problem. *Computers and Industrial Engineering* 9 (1985), 297–305.
- [29] FARLEY, A. A. Mathematical programming models for cutting-stock problems in the clothing industry. *Journal of Operational Research Society* 39, 1 (1988), 41–53.
- [30] FEDERGRUEN, A., E TZUR, M. Fast solution and detection of minimal forecast horizons in dynamic programs with a single indicator of the future: Applications to dynamic lot-sizing models. *Management Science* 41 (1995), 874–893.
- [31] FISHER, M. L. The lagrangian relaxation method for solving integer programming problems. *Management Science* 27, 1 (1981), 1–18.
- [32] FLEISCHAMNN, B., E MEYER, H. The general lotsizing and scheduling problem. *OR Spektrum* 19 (1997), 11–21.
- [33] FLORIAN, M., E KLEIN, M. Deterministic production planning with concave cost and capacity constraints. *Management Science* 19, 1 (1974), 12–20.
- [34] GEOFFRION, A. M. Lagrangean relaxation for integer programming. *Mathematical Programming Study* 2 (1974), 82–114.

- [35] GRAMANI, M. C., E FRANÇA, P. M. The combined cutting stock and lot-sizing problem in industrial processes. *European Journal of Operational Research* 147, 1 (2006), 509–521.
- [36] GUIGNARD, M. Lagrangean relaxation. *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa TOP* 11, 2 (2003), 151–228.
- [37] HARRIS, F. W. How many parts to make at once. *The Magazine of Management* 10 (1913), 135–36.
- [38] HELD, M., WOLFE, P., E CROWDER, H. P. Validation of subgradient optimization. *Mathematical Programming* 6 (1974), 62–88.
- [39] HENDRY, L. C., FOK, K. K., E SHEK, K. W. A cutting stock and scheduling problem in the copper industry. *Journal of Operational Research Society* 47, 1 (1996), 38–47.
- [40] JOHNSON, L. A., E MONTGOMEY, D. C. *Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control*. Georgia Institute of Technology - John Wiley, 1976.
- [41] KARIMI, B., GHOMI, S. M. T. F., E WILSON, J. M. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. *Omega- The International Journal of Management Science* 31 (2003), 365–378.
- [42] KARMAKAR, U. S., KEKRE, S., E KEKRE, S. The deterministic lotsizing problem with startup and reservation costs. *Operational Research* 35 (1987), 389–398.
- [43] KIM, J. U., E KIM, Y. D. A lagrangian relaxation approach to multi-period inventory/distribution planning. *Journal Operational Research Society* 51 (2000), 364–370.
- [44] KIRCA, O. An efficient algorithm for capacitated single item dynamic lot size problem. *European Journal of Operational Research* 45 (1990), 15–24.
- [45] KIRCA, O., E KOKTEN, M. A new heuristic approach for the multi-item dynamic lot sizing problem. *European Journal of Operational Research* 75, 2 (1994), 332–41.
- [46] KUIK, R., SALOMOM, M., VAN WASSENHOSE, L. N., E MAES, J. Linear programming, simulated annealing and tabu search heuristics for lotsizing in bottleneck assembly systems. *IIE Transactions* 25, 1 (1993), 62–72.
- [47] KUIK, R., SALOMON, M., E VAN WASSENHOVE, L. N. Batching decisions: structure and models. *European Journal of Operational Research* 75 (1994), 243–263.

- [48] LEE, W. S., HAN, J. H., E CHO, S. J. A heuristic for a multi-product dynamic lot-sizing and shipping problem. *Int. J. Production Economics* 98 (2005), 204–214.
- [49] MAES, J., MCCLAIN, J. O., E WASSENHOVE, L. N. V. Multilevel capacitated lotsizing complexity and lp based heuristic. *European Journal of Operational Research* 53 (1991), 131–148.
- [50] MAES, J., E VAN WASSENHOVE, L. N. Multi-item single level capacitated dynamic lot-sizing heuristics a general review. *Journal of the Operation Research Society* 39, 11 (1988), 991–1004.
- [51] NARCISO, M. G., E LORENA, L. A. N. *A relaxação Lagrangiana/Surrogate e algumas aplicações em otimização combinatória*. Tese de Doutorado, INPE, São José dos Campos, Março 1998.
- [52] NONAS, S. L., E THORSTENSON, A. A combined cutting-stock and lot-sizing problem. *Operation Research* 120, 2 (2000), 327–342.
- [53] NORDEN, L., E VELDE, S. Multi-product lot-sizing with a transportation capacity reservation contract. *European Journal of Operational Research* 165 (2005), 127–138.
- [54] PAPADIMITRIOU, C. H., E STEIGLITZ, K. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Prentic-Hall, New Jersey, 1982.
- [55] RANGEL, S., E FERREIRA, D. Um modelo de dimensionamento de lote para uma fábrica de refrigerantes. *Tema - Tendências Em Matemática Aplicada e Computacional* 4, 2 (2003), 237–246.
- [56] RIZK, N., E MARTEL, A. Supply chain flow planning methods: a review of the lot-sizing literature. Working Paper, Université Laval, QC, Canada, 2001.
- [57] SALOMON, M. *Deterministic Lot Sizing Models for Production Planning, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer, Berling, 1991.
- [58] SALOMON, M., KROON, L., KUIK, R., E VAN WASSENHOVE, L. N. Some extensions of the discrete lotsizing and scheduling problem. *Management Science* 41 (1991), 453–468.
- [59] SALOMON, M., VAN WASSENHOVE, M. M. S. L. N., DUMAS, Y. D., E DAUZÈRE-PÉRÈS, S. Solving the discrete lotsizing and scheduling problem with sequence dependent set-up cost and set-up times using the traveling salensman problem with time windows. *European Journal of Operational Research* 100, 3 (1997).

- [60] SANTOS, M. O., TOLEDO, F. M. B., E ARAUJO, S. A. Uma abordagem utilizando relaxação lagrangiana/surrogate para o problema de dimensionamento de lotes e distribuição. Notas de trabalho - ICMC, 2007.
- [61] SIKORA, R., CHHAJED, D., E SHAW, M. J. Integrating the lot-sizing and sequencing decisions for scheduling a capacitated flow line. *Computers Ind. Engng* 4, 30 (1996), 359–679.
- [62] TOLEDO, F. M. B., E ARTEMANO, V. A. *Dimensionamento de Lote em Máquinas Paralelas*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas-Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação-Departamento de Desenvolvimento de Sistemas, 1998.
- [63] TOLEDO, F. M. B., E ARTEMANO, V. A. A lagrangian-based heuristic for the capacitated lot sizing problem in parallel machines. *European Journal of Operational Research* 175 (2006), 1070–1083.
- [64] TONAKI, V. S., E TOLEDO, F. M. B. Uma heurística para o problema de dimensionamento de lotes em fundição de mercado. Dissertação de Mestrado, ICMC/USP-São Carlo, 2006.
- [65] TOSO, E., E MORABITO, R. Otimização do dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção: Estudo de caso numa fábrica de rações. *Gestão & Produção* 12, 2 (2005), 203–217.
- [66] TRIGEIRO, W. W., THOMAS, L. J., E MCCLAIN, J. O. Capacitated lot sizing with set-up times. *Management Science* 35, 3 (1989), 353–66.
- [67] VROBLEFSKI, M., RAMESH, R., E ZIONTS, S. Efficient lot-sizing under a differential transportation cost structure for serially distributed ware-houses. *European Journal of Operational Research* 127 (2000), 574–593.
- [68] WAGELMANS, A., VAN HOESEL, S., E KOLEN, A. Economic lot sizing: an $o(n \log n)$ algorithm that runs in linear time in the wagner-whitin case. *Operations Research* 40 (1992), 145–156.
- [69] WAGNER, H. M., E WHITIN, T. M. Dynamic version of the economic lot size model. *Management Science* 13 (1966), 105–119.
- [70] WOLSEY, L. A. *Integer Programming*. Wiley, New York, 1998.

- [71] WOLSEY, L. A., E NEMHAUSER, G. L. *Integer and Combinatorial Optimization*. Wiley-Interscience, 1999.
- [72] ZANGWILL, W. L. A backlogging model and a multi-echelon model of a dynamic economic lot size production system - a network approach. *Management Science* 15, 9 (1969), 506–527.

Apêndice A

Métodos Básicos

A.1 Resolução do Problema de Dimensionamento de Lotes com Atraso

Passo 1 - Inicialização:

$$F_0 = 0$$

$$k = 1$$

Para $t = 1, \dots, T$

$$X_{jt} = 0$$

$$I_{jt}^+ = 0$$

$$I_{jt}^- = 0$$

Passo 2 - Cálculo do custo mínimo de produção:

para $t = 0, \dots, k$

$$M_{tk} = \begin{cases} s_{jt}, & \text{se } k = t + 1; \\ \min_{t+1 \leq l \leq k} \left[s_{jt} + \sum_{r=t+1}^{l-1} (b_r * I_r^-) + \sum_{r=l}^{k-1} (h_r * I_r^+) \right], & \text{se } k > t + 1. \end{cases}$$

$$\text{onde } I_r^- = \sum_{i=t+1}^r d_{ji} \text{ e } I_r^+ = \sum_{i=r+1}^k d_{ji}.$$

$$l_k^* = l$$

$$t_ant_k = t + 1$$

Passo 3 - Decisão do menor caminho:

$$F_k = \min_{0 \leq t \leq k-1} [F_t + M_{tk}]$$

Se $k = T$, F_T é o valor da ótimo da função objetivo

Caso contrário, $k = k + 1$ e retorne ao **Passo 2**.

Passo 4 - Calculo da produção, estoque e atraso:

Faça $k=T$

Enquanto $k > 0$ faça

$$X_{jl_{tk}^*} = \sum_{i=t_ant_k+1}^k d_{ji}$$

$$Y_{jl_{tk}^*} = 1$$

Para $p = t_ant_k, \dots, l_{tk}^* - 1$ faça

$$I_{jp}^- = \sum_{i=t_ant_k+1}^p d_{ji}$$

Para $p = l_{tk}^*, \dots, k - 1$ faça

$$I_{jp}^+ = \sum_{i=p+1}^k d_{ji}$$

$$k = t_ant_k$$

Retorne a solução do problema.

A.2 Resolução do Problema do Transporte dos Paletes

Passo 1 - Inicialização:

Para $t = 2, \dots, T$

$$UD_t = \sum_{j=1}^N d_{jt}$$

$$FS_t = P * R$$

$$s = 2$$

$$k = 1$$

Passo 2 - Decisão de transporte no primeiro período:

$$A_1 = \min \left\{ R * P, \sum_{j=1}^N d_{j1} \right\}$$

$$FS_1 = FS_1 - A_1$$

$$B_1 = \max \left\{ 0, \sum_{j=1}^N d_{j1} - A_1 \right\}$$

$$UD_1 = 0$$

Passo 3:

Para $t = 2, \dots, T$

$$A_t = 0$$

$$B_t = 0$$

Passo 4:

Passo 4.1: Calculo dos vetores V_1 e V_2

$$V_1 = \{c_1 - \lambda_t^1; t = 1, \dots, s\}$$

$$V_2 = \{c_2 - \lambda_t^1; t = 1, \dots, s\}$$

Passo 4.2:

$$\text{Faça } V = V_1 \cup V_2$$

Ordene V em ordem crescente

Passo 4.3:

Se $V[k] \in V_1$ faça:

$$A_k = A_k + \min \{UD_s, FS_k\}$$

$$UD_s = UD_s - \min \{UD_s, FS_k\}$$

$$FS_k = FS_k - \min \{UD_s, FS_k\}$$

Caso contrário, faça:

$$B_k = B_k + UD_s$$

$$UD_s = 0$$

Passo 4.4:

Se $UD_s = 0$

Passe para o **Passo 5**

Caso contrário

$$k = k + 1$$

Volte para **Passo 4.3**

Passo 5:

$$s = s + 1$$

Se $s \leq T$

Volte para **Passo 4**

Caso contrário: Pare.

A.3 Heurística de Factibilização da Capacidade

Passo 1 - Inicialização:

para $t = 1, \dots, T$ faça

Calcule $\Delta(t)$

Calcule $Excesso(t)$

$Iteracao = 1$

Passo 2 - Backward:

$t = T$

Passo 2.1:

Se $Excesso(t) > 0$

Encontre j e k ($k \leq t$) que minimize $\frac{variacao_custo + \beta * Penalidade}{ReducaoExcesso}$

$w = \min\{Excesso(t), X_{jt}\}$.

Transfira a produção, atualizando as variáveis

Atualize $\Delta(t)$, $Excesso(t)$, $\Delta(k)$ e $Excesso(k)$

Retorne ao **Passo 2.1**

Caso contrário

Se $t > 2$

$t = t - 1$ e retorne ao **Passo 2.1**

Passo 3 - Forward:

$t=1$

Passo 3.1:

Se $Excesso(t) > 0$

Encontre j e k ($k \geq t$) que minimize $\frac{variacao_custo + \beta * Penalidade}{ReducaoExcesso}$

$w = \min\{Excesso(t), X_{jt}\}$.

Transfira a produção, atualizando as variáveis

Atualize $\Delta(t)$, $Excesso(t)$, $\Delta(k)$ e $Excesso(k)$

Retorne ao **Passo 3.1**

Caso contrário

Se $t < T - 1$

$t = t + 1$ e retorne ao **Passo 3.1**

$Iteracao = Iteracao + 1$

Passo 4:

Se $Iteracao = 2$

Retorne ao **Passo 2**

Caso contrário

Verifique se a solução é viável

Se verdadeiro: PARE

Caso contrário

Verifique se β atingiu seu valor máximo

Se verdade

retorne a mensagem que não foi encontrada solução viável

Senão:

$$\beta = \beta + 1$$

$$Iteracao = 1$$

Retorne ao **Passo 2**.

A.4 Heurística de Factibilização dos Paletes

Passo 1 - Inicialização:

Dada a solução X_{jt} para $j = 1, \dots, N$ e $t = 1, \dots, T$

Passo 2 - Alocação dos itens nos paletes:

para $t = 1, \dots, T$ faça:

$$A_t = \min \left\{ R, \left\lceil \frac{1}{P} \sum_{j=1}^N X_{jt} \right\rceil \right\}$$

$$B_t = \max \left\{ 0, \left\lceil \frac{1}{P} \sum_{j=1}^N X_{jt} \right\rceil - R \right\}.$$

A.5 Heurística de Melhoria em Relação ao Transporte de Paletes

Passo 1 - Inicialização:

Dada uma solução viável para o problema P

$$v^* = v(P)$$

para $t = 1, \dots, T$ faça

Calcule $\Delta(t)$

Passo 2 - *Backward*:

para $t = T, \dots, 2$ faça

$transfere = 1$

Enquanto $B_t > 0$ e $transfere = 1$ faça

$$w^* = 0$$

$transfere = 0$

para $k = t - 1, \dots, 1$ faça
 para $j = 1, \dots, N$ faça
 Se $A_k < R$
 Determine $w = \min\{(R - A_k) * P, X_{jt}, -\Delta(k)\}$
 Se $Y_{jk} = 0$
 $w = w - q_j$
 Se $w > 0$
 Calcule o valor da função objetivo com a transferência (v')
 Se $v' < v^*$ então
 $v^* = v'$
 $j^* = j$ $k^* = k$
 $w^* = w$
 $transfere = 1$

Se $w^* > 0$
 transfira a produção de w^* itens j^* do período t para o período k^*
 Atualize $\Delta(t)$

Passo 3 - forward:

para $t = 1, \dots, T - 1$ faça
 $transfere = 1$
 Enquanto $B_t > 0$ e $transfere = 1$ faça
 $w^* = 0$
 $transfere = 0$
 para $k = t + 1, \dots, T$ faça
 para $j = 1, \dots, N$ faça
 Se $A_k < R$
 Determine $w = \min\{(R - A_k) * P, X_{jt}, -\Delta(k)\}$
 Se $Y_{jk} = 0$
 $w = w - q_j$
 Se $w > 0$
 Calcule o valor da função objetivo com a transferência (v')
 Se $v' < v^*$ então
 $v^* = v'$
 $j^* = j$ $k^* = k$
 $w^* = w$
 $transfere = 1$

Se $w^* > 0$

transfira a produção de w^* itens j^* do período t para o período k^*
 Atualize $\Delta(t)$

Passo 4:

Retorne o valor de v^*

A.6 Heurística de Melhoria em Relação a Capacidade de Produção

Passo 1 - Inicialização:

para $t = 1, \dots, T$ faça

Calcule $\Delta(t)$

Calcule $Folga(t) = \min\{0, -\Delta(t)\}$

Passo 2 - Backward:

$t=T$

Passo 2.1:

Se $\lambda_t^2 > 0$ e $Folga(t) > 0$

Encontre um item j e um período k ($k \leq t$) tal que

- $\lambda_k^2 = 0$ e
- j e k maximize (valor_antes - valor_depois)

Caso a solução obtida com a troca da produção é melhor que a anterior

Transfira a produção atualizando as variáveis

Atualize $\Delta(t)$, $Folga(t)$, $\Delta(k)$ e $Folga(k)$

Se tiver transferência, retorne ao **Passo 2.1**

Caso contrário

Se $t \geq 2$

$t = t - 1$ e retorne ao **Passo 2.1**

Passo 3 - Forward:

$t=1$

Passo 3.1:

Se $\lambda_t^2 > 0$ e $Folga(t) > 0$

Encontre j e $k > t$ ($k \geq t$) tal que

- $\lambda_k^2 = 0$ e
- j e k maximize (valor_antes - valor_depois)

Caso a solução obtida com a troca da produção é melhor que a anterior

Transfira a produção, atualizando as variáveis

Atualize $\Delta(t)$, $Folga(t)$, $\Delta(k)$ e $Folga(k)$

Se tiver transferência, retorne ao **Passo 3.1**

Caso contrário

Se $t \leq T$

$t = t + 1$ e retorne ao **Passo 3.1**

Passo 4: Retorne a solução encontrada.

A.7 Método do Subgradiente

Passo 1 - Inicialização:

$k = 1$ (número de iterações)

$k_contador = 1$

$LB = \infty$

$UB = \infty$

$\gamma = \gamma_inicial$

Faça:

$\lambda^k = \lambda_inicial$

Passo 2:

Passo 2.1:

Resolva o problema $RL_\lambda P$

Passo 2.2:

Se $v(RL_\lambda P) > LB$:

$LB = v(RL_\lambda P)$

$\lambda^* = \lambda$

Passo 2.3:

Se a solução encontrada for viável:

Caso a solução encontrada é ótima para o problema P : PARE

Caso contrário

Se $v(RL_\lambda P) < UB$

$UB = v(RL_\lambda P)$

Vá para o **Passo 3**

Passo 2.3:

Aplicar o método de factibilização em x_k

Verifique se a solução obtida é viável

Se for viável

Aplicar os métodos de melhoria

Verifique a nova solução obtém um limitante melhor que UB

Caso verdadeiro: Atualize UB

Passo 3:

Calcule

$$t^k = \frac{\gamma(UB - v(RL_{\lambda^k}P))}{\|Ax^k - b\|^2}$$

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + t^k * \nabla^k$$

Passo 4:

Se $k < n_max$

Se $k_contador = valor_atualiza$

$$\gamma = \frac{\gamma}{2}$$

$$k = k + 1$$

Retorna ao **Passo 2**

Senão. retorne LB e λ^* .

A.8 Busca Unidimensional

Passo 1 - Inicialização:

$k = 1$ (número de iterações)

$\lambda_1 = 0$ (limitante inferior)

$\lambda_2 = \infty$ (limitante superior)

$\lambda_0 = valor_inicial$

$\varepsilon = 1 * 10^{-5}$ (valor da precisão)

$v^* = -\infty$ (melhor limitante inferior)

$\lambda^* = \lambda_0$ (valor inicial do multiplicador)

$incremento = incremento_inicial$

Passo 2 - Busca do melhor multiplicador:

Enquanto $k < valor_maximo$ ou $\lambda_2 - \lambda_1 < \varepsilon$ faça

$incremento = incremento_inicial$

Determine $v(RL\lambda^*S_{\pi}P)$

Se $v(RL\lambda^*S_{\pi}P) < v^*$

$$melhor_ \lambda = \lambda^*$$

$$v^* = v(RLSz(\pi, lambda^0))$$

Calcule $incl_k$ ($incl_k$ é a inclinação da função Lagsur na iteração k)

Se $incl_k > 0$ faça

$$\lambda_2 = \lambda^*$$

$$\lambda^* = \lambda^* - incremento$$

Se $\lambda^* < \lambda_1$

$$incremento = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{2}$$

$$\lambda^* = \lambda^* + incremento$$

Caso contrário

$$\lambda_1 = \lambda^*$$

$$\lambda^* = \lambda^* + incremento$$

Se $\lambda^* > \lambda_2$

$$\lambda^* = \lambda^* - incremento$$

$$incremento = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{2}$$

$$\lambda^* = \lambda^* + incremento$$

Passo 3: retorne $melhor_ \lambda$

A.9 Heurística Lagrangiana

Passo 1 - Inicialização:

$k = 1$ (número de iterações)

$LB = \infty$ (limitante superior)

$UB = -\infty$ (limitante inferior)

Para $t = 1, \dots, T$ faça:

$$\lambda_t^1 = 0$$

$$\lambda_t^2 = 0$$

$\gamma = valorinicial_ \gamma$

$n_iteracao = 1$

Passo 2 - Limitante Inferior:

Resolva a relaxação Lagrangiana do problema (Seção 3.1.2 e 3.1.3)

Se $v(RL_\lambda P) > LB$ então

$$LB = v(RL_\lambda P)$$

Passo 3 - Limitante Superior:

Verifique se a solução encontrada é viável para o problema inicial

Se for viável

Verifique se a solução é menor que limitante superior UB

Caso verdadeiro, UB recebe o novo valor.

Verifique se a solução satisfaz as folgas complementares

Se verdadeiro, PARE: solução é ótima

Caso contrário (a solução não é viável)

Aplice o método de factibilização para obter uma solução viável (Seção 3.1.4)

Verifique se a solução dada pelo método é viável

Se falso: vá para o **Passo 4**

Se verdadeiro

Aplice o método de melhoria de transporte (Seção 3.1.5.1)

Aplice o método de melhoria da capacidade (Seção 3.1.5.2)

Atualize o valor de UB

Se a solução viável fornece um limitante pior que UB , faça:

$$n_iteracao = n_iteracao + 1$$

Passo 4 - Atualização dos multiplicadores**Pass 4.1 - Calculo da direção e do passo**

$gg = 0$ (norma ao quadrado da direção)

para $t = 1, \dots, T$

$$g_t^1 = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^N X_{jt} - A_t - B_t \text{ (direção de } \lambda_t^1 \text{)}$$

$$g_t^2 = \sum_{j=1}^N (q_j X_{jt} + r_j Y_{jt}) - Cap_t \text{ (direção de } \lambda_t^2 \text{)}$$

$$gg_t = g_t^1 * g_t^1 + g_t^2 * g_t^2$$

$$t^k = \frac{\gamma(UB - v(RL_{\lambda}P))}{gg}$$

Pass 4.2 - Atualização dos λ 's

para $t = 1, \dots, T$

$$\lambda_t^1 = \lambda_t^1 + t^k g_t^1$$

$$\lambda_t^2 = \lambda_t^2 + t^k g_t^2$$

Passo 5 - Atualização dos dados

Se k é igual ao número máximo de iterações.

Retorne os limitantes e Pare.

Caso contrário

$$k = k + 1$$

se $n_iteracao$ é igual ao número de iterações sem melhora dos limitantes

$$\gamma = \frac{\gamma}{2}$$

$$n_iteracao = 1$$

Retorne ao **Passo 2**.

A.10 Heurística Lagrangiana/Surrogate

Passo 1 - Inicialização:

$k = 1$ (número de iterações)

$LB = \infty$ (limitante superior)

$UB = -\infty$ (limitante inferior)

$\gamma = \text{valorinicial_}\gamma$

$n_iteracao = 1$

$\lambda = \lambda_0$

$incremento = incremento_0$

Para $t = 1, \dots, T$ faça:

$$\pi_t^1 = 0$$

$$\pi_t^2 = 0$$

Passo 2 - Limitante Inferior:

Resolva a relaxação Lagsur do problema (Seção 3.1.2 e 3.1.3)

Se $v(RL_\lambda S_\pi P) > LB$ então

$$LB = v(RL_\lambda S_\pi P)$$

Passo 3 - Limitante Superior:

Verifique se a solução encontrada é viável para o problema inicial

Se for viável

Verifique se a solução é menor que limitante superior UB

Caso verdadeiro, UB recebe o novo valor.

Verifique se a solução satisfaz as folgas complementares

Se verdadeiro, PARE: solução é ótima

Caso contrário (a solução não é viável)

Aplique o método de factibilização para obter uma solução viável (Seção 3.1.4)

Verifique se a solução dada pelo método é viável

Se falso: vá para o **Passo 4**

Se verdadeiro

Aplique o método de melhoria de transporte (Seção 3.1.5.1)

Aplique o método de melhoria da capacidade (Seção 3.1.5.2)

Atualize o valor de UB

Se a solução viável fornece um limitante pior que UB , faça:

$$n_iteracao = n_iteracao + 1$$

Passo 4 - Busca Unidimensional

Se k é múltiplo de $quando_busca$, faça

$$k_int = 1$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = \infty$$

$$v^*$$

$$\lambda^* = \lambda$$

Enquanto $k_int < nbuscauni$ ou $\lambda_1 - \lambda_2 < \varepsilon$ faça

$$incremento = incremento_0$$

Determine $v(RL_{\lambda^*}S_{\pi}P)$

Se $v(RL_{\lambda^*}S_{\pi}P) < v^*$ (v^* é o melhor limitante encontrado no passo 4)

$$melhor_t = \lambda^*$$

$$v^* = v(RL_{\lambda^*}S_{\pi}P)$$

Calcule $incl_{k_int}$ ($incl_{k_int}$ é a inclinação da função Lagsur na iteração k_int)

Se $incl_{k_int} < 0$ faça

$$\lambda_2 = \lambda^*$$

$$\lambda^* = \lambda^* - incremento$$

Se $\lambda^* < \lambda_1$

$$incremento = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{2}$$

$$\lambda^* = \lambda^* + incremento$$

Caso contrário

$$\lambda_1 = \lambda^*$$

$$incremento = incremento * incremento$$

$$\lambda^* = \lambda^* + incremento$$

Se $\lambda^* > \lambda_2$

$$\lambda^* = \lambda^* - incremento$$

$$incremento = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{2}$$

$$\lambda^* = \lambda^* + incremento$$

$$k_int = k_int + 1$$

Se $v^* > LB$ faça

$$LB = v^*$$

$$\lambda = \lambda^*$$

Passo 5 - Atualização dos multiplicadores surrogate

Pass 5.1 - Calculo da direção e do passo

$gg = 0$ (norma ao quadrado da direção)

para $t = 1, \dots, T$

$$g_t^1 = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^N X_{jt} - A_t - B_t \text{ (direção de } \lambda_t^1)$$

$$g_t^2 = \sum_{j=1}^N (q_j X_{jt} + r_j Y_{jt}) - Cap_t \text{ (direção de } \lambda_t^2)$$

$$gg_t = g_t^1 * g_t^1 + g_t^2 * g_t^2$$
$$t^k = \frac{\gamma(UB - v(RL_\lambda S_\pi P))}{gg}$$

Pass 5.2 - Atualização dos π 's

para $t = 1, \dots, T$

$$\pi_t^1 = \pi_t^1 + t^k g_t^1$$

$$\pi_t^2 = \pi_t^2 + t^k g_t^2$$

Passo 6 - Atualização dos dados

Se k é igual ao número máximo de iterações.

Retorne os limitantes e Pare.

Caso contrário

$$k = k + 1$$

se $n_iteracao$ é igual ao número de iterações sem melhora dos limitantes

$$\gamma = \frac{\gamma}{2}$$

$$n_iteracao = 1$$

Retorne ao **Passo 2**.

Apêndice B

Resultados

B.1 Resultados do pacote AMPL/CPLEX 10.0

As tabelas a seguir serão apresentadas, divididas de acordo com os grupos do tópico anterior, com os resultados do problema. As tabelas irão conter, os tempos médio de resolução, as médias dos números de nós analisados e as médias dos *Gap1* onde,

$$Gap1 = 100 * \frac{\text{Solução CPLEX} - \text{limitante inferior CPLEX}}{\text{limiante inferior CPLEX}}.$$

Em cada grupo, os resultados serão divididos em três tabelas onde, a primeira contém os resultados do grupo com capacidade apertada ($\alpha = 1$), a segunda com capacidade normal ($\alpha = 0,85$) e a terceira com folga de capacidade ($\alpha = 0.5$). Assim, temos os seguintes resultados.

Podemos observar pela Tabela B.1 que na maioria dos casos, embora o *Gap1* seja pequeno, o CPLEX não consegue provar a otimalidade, pois a média de tempo está próxima ao tempo limite de três minutos. Existe uma tendência de aumento do *Gap1* a medida em que os custos de atraso sobem (ver Tabela 4.3), mostrando que o incremento no custo de atraso tornam o problema mais difícil. Além disso, problemas com tempo de *setup* alto são mais fáceis de resolver. Por fim, podemos observar que, o número de nós analisados da árvore do *Branch-and-Bound* é, na maioria dos casos maior que cem mil.

Na Tabela B.2 podemos observar dois comportamentos na resolução dos problemas. O primeiro caso é para os problemas onde o custo de estoque é mais barato. Podemos observar que, para os problemas com custo de estoque igual a um ($h_t = 1$), o pacote de otimização tem dificuldade em provar a otimalidade da solução (ver média do *Gap1*), embora o *Gap1* seja pequeno. Para o caso com estoque alto ($h_t = 3$), o pacote de otimização obtém uma solução ótima antes do tempo máximo de resolução com uma média baixa de nós analisados.

Tabela B.1: Resultado do CPLEX - grupo 1 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)

Exemplo	tempo médio	número médio de nós analisados	maior número de nós analisados	Gap1 médio	maior Gap1
1	180,39	92.671,08	143.801,00	0,00404	0,00777
2	179,05	117.340,64	168.801,00	0,00407	0,00773
3	180,27	97.877,47	152.901,00	0,00525	0,01108
4	178,93	93.265,53	162.600,00	0,00464	0,00969
5	179,27	97.842,67	171.201,00	0,00734	0,03113
6	178,93	115.516,64	167.101,00	0,00449	0,00904
7	179,36	120.691,85	167.201,00	0,00496	0,01009
8	178,41	144.784,72	186.501,00	0,00446	0,01585
9	179,08	112.833,16	166.401,00	0,00617	0,01472
10	177,08	146.860,81	192.001,00	0,00442	0,01850
11	166,95	108.438,68	183.401,00	0,00763	0,05062
12	177,92	144.861,44	195.101,00	0,00438	0,01650
Média	177,97	116.082,06	171.417,58	0,00515	0,01689

Tabela B.2: Resultado do CPLEX - grupo 1 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)

Exemplo	tempo médio	número médio de nós analisados	maior número de nós analisados	Gap1 médio	maior Gap1
13	179,71	150.813,49	242.701,00	0,00226	0,00388
14	180,25	164.709,12	217.601,00	0,00228	0,00425
15	179,91	161.189,12	216.501,00	0,00246	0,00458
16	180,26	149.109,64	213.001,00	0,00251	0,00510
17	179,79	158.473,06	219.101,00	0,00245	0,00456
18	180,23	162.435,48	205.301,00	0,00251	0,00502
19	20,86	20.389,19	155.940,00	0,00010	0,00010
20	14,63	14.867,41	217.645,00	0,00010	0,00055
21	20,41	20.128,68	170.775,00	0,00010	0,00068
22	14,28	14.629,52	222.237,00	0,00010	0,00015
23	21,06	20.801,21	165.901,00	0,00010	0,00067
24	14,50	14.753,30	222.801,00	0,00010	0,00034
Média	98,82	87.691,60	205.792,08	0,00126	0,00249

Possivelmente, este fato ocorre pois, a capacidade de cada período é aproveitada evitando estoques. Podemos observar também que, comparado com o *Gap1* dos problemas com capacidade apertada (ver Tabela B.1), o *Gap1* dos problemas com capacidade normal é menor. As mesmas observações podem ser vistas para o problema com folga de capacidade (Tabela B.3).

Tabela B.3: Resultado do CPLEX - grupo 1 com folga de capacidade ($\alpha = 0,5$)

Exemplo	tempo médio	número médio de nós analisados	maior número de nós analisados	Gap1 médio	maior Gap1
25	178,57	158.084,05	250.001,00	0,00210	0,00435
26	178,53	165.421,85	250.201,00	0,00207	0,00450
27	178,72	160.485,04	216.901,00	0,00220	0,00391
28	178,61	165.660,22	254.416,00	0,00219	0,00391
29	178,56	168.271,25	244.501,00	0,00226	0,00430
30	178,59	162.225,71	233.601,00	0,00229	0,00435
31	2,01	1.560,29	12.628,00	0,00009	0,00010
32	2,01	1.560,30	12.628,00	0,00009	0,00010
33	2,05	1.598,48	14.303,00	0,07157	7,14800
34	2,01	1.598,51	14.303,00	0,00009	0,00010
35	1,99	1.594,51	13.959,00	0,00009	0,00010
36	1,98	1.594,51	13.959,00	0,00009	0,00010
Média	90,30	82.471,23	127.616,75	0,00709	0,59782

A seguir, são apresentadas as tabelas com resultados do CPLEX para os problemas do grupo 2.

Assim como o resultado do grupo 1 com capacidade apertada (Tabela B.1), o CPLEX consegue obter um *Gap1* pequeno para os problemas do grupo 2 com capacidade apertada (Tabela B.4), mas não consegue obter uma solução ótima para os mesmos, ultrapassando o limite de tempo de resolução para os problemas do grupo 2 com capacidade apertada. O aumento nos custos de atrasos e o tempo de *setup* baixo continuam dificultando a solução dos problemas.

Assim como o resultado anterior, os resultados dos problemas do grupo 2 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$) apresentados na Tabela B.5, são parecidos com os resultados do grupo 1 com mesma capacidade, no sentido de apresentar uma diferença entre as soluções com estoque mais caro ($h_t = 3$) e o estoque mais barato ($h_t = 1$). Note que, para o estoque mais caro, o pacote de otimização consegue obter resultado ótimo para os problemas. O mesmo se repete para os resultados com folga na capacidade (Tabela B.6).

Até aqui foram apresentados os resultados para os problemas com o volume de paletes que podem ser transportados pelo custo mais baixo não podendo ultrapassar um sexto da

Tabela B.4: Resultado do CPLEX - grupo 2 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)

Exemplo	tempo médio	número médio de nós analisados	maior número de nós analisados	Gap1 médio	maior Gap1
37	180,37	101.066,24	158.101,00	0,00195	0,00397
38	180,28	114.453,04	161.301,00	0,00214	0,00343
39	179,42	88.027,50	133.201,00	0,00284	0,00623
40	178,90	107.819,40	153.901,00	0,00256	0,00501
41	180,39	89.371,32	157.201,00	0,00522	0,01799
42	178,83	99.598,92	146.201,00	0,00309	0,00839
43	178,50	108.624,22	190.001,00	0,00322	0,00671
44	177,70	123.927,38	171.601,00	0,00305	0,00988
45	179,19	94.922,57	167.101,00	0,00474	0,01110
46	178,70	122.849,58	170.601,00	0,00337	0,01047
47	175,77	106.280,51	189.901,00	0,00631	0,03254
48	177,82	120.905,97	170.673,00	0,00336	0,00941
Média	178,82	106.487,22	164.148,67	0,00349	0,01043

Tabela B.5: Resultado do CPLEX - grupo 2 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)

Exemplo	tempo médio	número médio de nós analisados	maior número de nós analisados	Gap1 médio	maior Gap1
49	180,23	170.298,07	229.501,00	0,00123	0,00249
50	180,22	169.021,32	215.701,00	0,00127	0,00205
51	180,25	162.978,50	237.001,00	0,00151	0,00265
52	180,22	161.451,60	220.101,00	0,00158	0,00263
53	180,26	156.629,90	207.601,00	0,00174	0,00291
54	180,23	157.976,78	231.801,00	0,00181	0,00303
55	53,19	55.465,92	246.801,00	0,00016	0,00087
56	30,23	28.289,30	188.381,00	0,00011	0,00061
57	53,10	48.168,72	197.501,00	0,00016	0,00086
58	30,11	26.627,82	161.301,00	0,00011	0,00070
59	52,26	49.223,12	195.044,00	0,00014	0,00086
60	29,50	28.725,58	182.116,00	0,00010	0,00049
Média	110,82	101.238,05	209.404,17	0,00083	0,00168

Tabela B.6: Resultado do CPLEX - grupo 2 com folga de capacidade ($\alpha = 0,5$)

Exemplo	tempo médio	número médio de nós analisados	maior número de nós analisados	Gap1 médio	maior Gap1
61	178,41	175.922,07	238.901,00	0,00123	0,00214
62	178,47	174.087,05	244.901,00	0,00123	0,00215
63	180,18	177.363,64	258.801,00	0,00153	0,00272
64	180,22	168.507,43	245.701,00	0,00154	0,00256
65	180,18	167.927,51	253.488,00	0,00168	0,00326
66	180,19	166.381,77	253.601,00	0,00168	0,00328
67	5,89	5.436,70	41.199,00	0,00010	0,00010
68	6,05	5.438,57	41.199,00	0,00010	0,00010
69	7,99	6.484,34	73.665,00	0,00010	0,00010
70	7,22	6.548,41	73.665,00	0,00010	0,00010
71	6,84	5.725,29	44.401,00	0,00010	0,00010
72	6,21	5.679,09	44.401,00	0,00010	0,00010
Média	93,15	88.791,82	151.160,25	0,00079	0,00139

produção total de todos os períodos ($FR = \frac{1}{6}$). A seguir, serão apresentados os resultados para os problemas com a taxa de transporte baixa, ou seja, a $FR = \frac{1}{4}$.

Tabela B.7: Resultado do CPLEX - grupo 3 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)

Exemplo	tempo médio	número médio de nós analisados	maior número de nós analisados	Gap1 médio	maior Gap1
73	180,29	94.788,09	145.501,00	0,00408	0,00734
74	178,68	111.713,57	157.401,00	0,00407	0,00736
75	180,56	91.506,13	148.401,00	0,00544	0,01232
76	179,66	109.195,66	154.401,00	0,00435	0,00734
77	179,69	96.785,83	170.901,00	0,00738	0,02930
78	179,18	99.289,81	147.501,00	0,00447	0,00829
79	178,96	117.792,75	157.001,00	0,00490	0,01107
80	177,12	140.050,22	188.800,00	0,00444	0,01391
81	179,24	106.274,71	157.001,00	0,00644	0,01708
82	176,72	147.776,32	188.501,00	0,00434	0,01711
83	167,55	107.097,58	192.301,00	0,00781	0,05699
84	175,92	137.612,88	185.301,00	0,00440	0,01391
Média	177,80	113.323,63	166.084,25	0,00518	0,01683

Podemos observar que, a média do *Gap1* para os problemas do grupo 3 com capacidade apertada são levemente piores que os obtidos no grupo 1 (Tabela B.1).

Novamente, percebemos uma divisão nos resultados apresentados na Tabela B.8. Os

Tabela B.8: Resultado do CPLEX - grupo 3 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)

Exemplo	tempo médio	número médio de nós analisados	maior número de nós analisados	Gap1 médio	maior Gap1
85	178,13	146.709,81	248.801,00	0,00201	0,00377
86	177,56	142.057,25	208.901,00	0,00207	0,00454
87	178,58	137.830,22	194.801,00	0,00216	0,00411
88	179,97	129.395,18	202.401,00	0,00224	0,00457
89	178,36	144.986,23	201.901,00	0,00221	0,00435
90	178,70	142.193,41	217.201,00	0,00229	0,00426
91	26,42	26.287,44	207.601,00	0,00011	0,00071
92	16,77	14.298,38	161.501,00	0,00010	0,00043
93	24,38	24.523,06	211.101,00	0,00011	0,00061
94	13,31	13.581,08	234.401,00	0,00011	0,00099
95	24,91	25.028,11	209.601,00	0,00011	0,00063
96	15,57	14.033,37	180.301,00	0,00011	0,00080
Média	99,39	80.076,96	206.542,67	0,00114	0,00248

resultados são bem diferentes entre os problemas com estoque igual a um ($h_t = 1$) e estoque igual a três ($h_t = 3$). Pode-se notar que os problemas com estoque mais caro são resolvidos mais facilmente, comparado aos problemas com estoque mais barato. O mesmo é notado na Tabela B.9, dada a seguir, para os problemas do grupo 3 com folga na capacidade ($\alpha = 0,50$). Note também que, a média de nós analisados quando o custo de estoque é mais alto, é bem menor comparado aos casos com custo de estoque barato.

Tabela B.9: Resultado do CPLEX - grupo 3 com folga de capacidade ($\alpha = 0,50$)

Exemplo	tempo médio	número médio de nós analisados	maior número de nós analisados	Gap1 médio	maior Gap1
97	176,86	159.026,12	233.601,00	0,00185	0,00407
98	176,76	147.424,00	231.701,00	0,00186	0,00444
99	177,01	153.208,05	224.401,00	0,00195	0,00380
100	177,36	144.487,07	210.301,00	0,00200	0,00397
101	176,12	143.204,76	221.201,00	0,00201	0,00400
102	176,23	150.895,49	221.201,00	0,00200	0,00400
103	2,48	2.061,80	32.021,00	0,00009	0,00010
104	2,87	2.061,84	32.021,00	0,00009	0,00010
105	2,39	1.994,98	26.195,00	0,00009	0,00010
106	2,39	1.995,00	26.195,00	0,00009	0,00010
107	2,26	1.851,30	25.934,00	0,00009	0,00010
108	2,48	1.851,30	25.934,00	0,00009	0,00010
Média	89,60	75.838,48	125.892,17	0,00102	0,00139

Por último, serão apresentados a seguir, as tabelas com resultados obtidos pelo CPLEX, para os problemas do grupo 4.

Tabela B.10: Resultado do CPLEX - grupo 4 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)

Exemplo	tempo médio	número médio de nós analisados	maior número de nós analisados	Gap1 médio	maior Gap1
109	179,52	89.807,15	149.401,00	0,00194	0,00393
110	180,31	112.871,40	156.101,00	0,00217	0,00450
111	179,44	88.692,29	131.301,00	0,00294	0,00884
112	180,32	98.375,83	137.701,00	0,00264	0,00503
113	180,30	91.272,84	179.001,00	0,00524	0,01807
114	180,26	99.524,27	144.901,00	0,00298	0,00752
115	179,15	105.123,97	181.201,00	0,00321	0,00805
116	176,59	112.923,41	161.301,00	0,00307	0,01124
117	179,41	102.473,60	157.001,00	0,00460	0,01110
118	176,71	121.105,61	166.001,00	0,00315	0,00909
119	176,72	91.213,22	150.701,00	0,00672	0,03442
120	176,49	115.154,67	163.901,00	0,00336	0,01270
Média	178,77	102.378,19	156.542,67	0,00350	0,01121

Para os problemas do grupo 4, ou seja, problemas com $FR = \frac{1}{4}$ e custo de transporte mais caro ($c_1 = 150$ e $c_2 = 500$), cujos resultados para capacidade apertada são apresentados na Tabela B.10, temos uma queda significativa do valor do *Gap1*, em relação aos mesmos problemas do grupo 3 (Tabela B.7). Assim como nos casos anteriores, com capacidade apertada ($\alpha = 1$), a média de tempo de resolução é muito próxima de três minutos, concluindo assim, que a maioria dos problemas não obtém solução ótima no tempo limite. Para este caso, também podemos perceber que o número de nós analisados, continua próximo de cem mil nós.

Podemos perceber que, os problemas com $FR = \frac{1}{4}$ e o custo de transporte mais caro ($c_1 = 150$ e $c_2 = 500$) necessitam de mais tempo para serem resolvidos do que os problemas do grupo 3 com mesma capacidade. Embora continuamos com uma diferença na resolução entre os problemas com estoque barato ($h_t = 1$) e estoque caro, os problemas com estoque mais caro precisam em média, de um tempo maior para obter a solução ótima. Além do tempo, o número de nós analisados também é maior para este caso. O mesmo pode ser notado na Tabela B.12 dada a seguir.

Tabela B.11: Resultado do CPLEX - grupo 4 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)

Exemplo	tempo médio	número médio de nós analisados	maior número de nós analisados	Gap1 médio	maior Gap1
121	178,26	163.688,79	217.001,00	0,00114	0,00218
122	179,73	156.830,54	206.501,00	0,00121	0,00223
123	179,07	154.014,15	250.701,00	0,00142	0,00249
124	179,13	143.476,85	209.701,00	0,00148	0,00264
125	178,81	139.497,79	213.701,00	0,00162	0,00319
126	179,63	152.324,41	224.301,00	0,00168	0,00345
127	61,29	53.121,80	195.101,00	0,00017	0,00092
128	33,59	33.482,95	208.401,00	0,00012	0,00065
129	58,86	59.904,91	227.201,00	0,00016	0,00073
130	34,50	32.793,00	194.601,00	0,00011	0,00048
131	57,31	51.865,43	198.101,00	0,00016	0,00111
132	33,21	31.970,55	190.901,00	0,00012	0,00125
Média	112,78	97.747,60	211.351,00	0,00078	0,00178

Tabela B.12: Resultado do CPLEX - grupo 4 com folga de capacidade ($\alpha = 0,50$)

Exemplo	tempo médio	número médio de nós analisados	maior número de nós analisados	Gap1 médio	maior Gap1
133	177,61	171.447,68	236.001,00	0,00111	0,00178
134	178,06	154.705,01	220.601,00	0,00114	0,00190
135	180,21	166.521,60	235.801,00	0,00143	0,00272
136	180,21	160.891,75	228.201,00	0,00143	0,00255
137	180,23	144.602,03	227.901,00	0,00164	0,00317
138	180,17	150.465,01	229.401,00	0,00164	0,00317
139	10,14	8.293,74	172.601,00	0,00010	0,00012
140	9,07	8.346,21	177.984,00	0,00010	0,00010
141	10,98	10.940,70	212.001,00	0,00010	0,00021
142	11,64	10.695,62	211.301,00	0,00010	0,00022
143	13,08	11.868,30	210.601,00	0,00010	0,00022
144	12,99	11.920,69	208.501,00	0,00010	0,00022
Média	95,37	84.224,86	214.241,25	0,00075	0,00137

B.2 Resultados da heurística Lagrangiana/Surrogate e Lagrangiana

Após obter os resultados dos problemas através do pacote de otimização CPLEX 10.0, apresentaremos os resultados obtidos pelas heurísticas. Antes de resolver os problemas pelas heurísticas, foram feitos testes, com um número menor de exemplares, com objetivo de obter alguns parâmetros para a resolução dos problemas. Através desses testes, fixamos para ambas as heurísticas um limite de oitocentas iterações. Para cada heurística, após um determinado número de iterações, o multiplicador γ era atualizado para melhorar a busca dos multiplicadores lagrangiano e surrogate. Fixamos em 1,75 o valor inicial de γ e a cada vinte iterações sem melhoria do limitante inferior, γ é atualizado recebendo metade do seu valor. Para a heurística Lagsur, é fixado em 1,5 o valor inicial para o multiplicador lagrangiano (λ). Além disso, após cinco iterações para a atualização do multiplicador surrogate (π), são feitas dez iterações da busca unidimensional, para atualização do multiplicador lagrangiano. Também fixamos em 0,01 o incremento inicial da busca do unidimensional.

Para a análise, serão fornecidos os seguintes dados: média do tempo de resolução, média da número de iterações necessárias para obter o melhor limitante inferior, média de iterações necessárias para obter o melhor limitante superior, média dos *Gap2* obtidos onde,

$$Gap2 = \frac{\text{melhor limitante superior da heurística} - \text{melhor limitante inferior da heurística}}{\text{melhor limitante inferior da heurística}},$$

e o maior *Gap2* obtido entre os cem exemplares. Assim, podemos apresentar os seguintes resultados.

Tabela B.13: Resultado das heurísticas - grupo 1 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)

Exemplar	Lagrangiana/Surrogate					Lagrangiana				
	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.
1	2,06	4,48	13,34	792,55	455,29	2,13	5,65	10,50	793,08	434,87
2	1,64	2,81	8,30	787,75	261,45	1,63	2,74	7,03	790,84	244,60
3	2,61	9,97	12,53	785,78	412,86	3,35	13,46	10,85	792,78	449,14
4	1,70	3,16	8,57	790,44	255,71	1,72	4,24	7,39	790,68	221,14
5	5,74	50,12	13,21	722,40	445,59	11,82	59,41	12,72	792,88	447,25
6	2,17	22,27	8,69	781,30	274,67	2,67	28,32	7,63	790,04	241,48
7	3,01	9,10	14,56	792,32	423,67	3,14	11,47	10,72	792,89	455,03
8	2,23	4,13	7,91	789,28	256,50	2,17	4,14	6,55	791,15	201,16
9	3,82	17,44	12,51	793,54	397,03	6,00	28,20	10,98	794,16	414,32
10	2,32	5,68	7,80	788,46	251,42	2,40	9,10	6,63	792,06	216,13
11	9,25	158,30	12,95	786,15	415,88	21,25	102,45	12,14	794,00	407,05
12	3,00	21,64	8,04	789,08	255,54	4,46	60,19	6,95	792,83	208,40
Média	3,30	25,76	10,70	783,25	342,13	5,23	27,45	9,17	792,28	328,38

Analisando inicialmente o *Gap2* dos problemas do grupo 1 (Tabela B.13), podemos perceber que na maioria dos casos, a heurística Lagsur obtém um *Gap2* menor que o obtido pela heurística Lagrangiana. Temos também que, com exceção de dois exemplares, a heurística Lagsur tem uma variação menor do *Gap2*, comparado a heurística Lagrangiana. Embora o *Gap2* e sua variação sejam melhores com a heurística Lagsur, o tempo de resolução da heurística Lagsur é maior do que o tempo de resolução da heurística Lagrangiana. É possível observar que as duas heurísticas mantêm a tendência de aumento do *Gap2* quando os custos de atrasos aumentam.

Em relação a média de iterações necessárias para obter o melhor limitante inferior, notamos que heurística Lagsur necessita, em média, de dez iterações a menos. Podemos notar também que, os resultados são bem distintos para dois tipos de problemas: tempo de *setup* baixo ($q_j \in [10, 50]$) e tempo de *setup* alto ($q_j \in [30, 150]$). Observe que, pela Tabela 4.3, os exemplares de número ímpar tem tempo de *setup* baixo e os pares tem tempo de *setup* alto.

Para o tempo de *setup* baixo, o limitante superior é obtido, em média, próximo de 400 iterações para ambas heurísticas. Enquanto os problemas com tempo de *setup* alto, o limitante superior é encontrado com metade do número de iterações. O mesmo pode ser percebido com o tempo de resolução.

Tabela B.14: Resultado das heurísticas - grupo 1 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)

Exemplar	Lagrangiana/Surrogate					Lagrangiana				
	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.
13	1,48	3,76	6,30	746,84	54,81	1,49	3,76	5,30	775,81	56,75
14	1,56	3,59	5,42	752,40	25,91	1,57	3,59	4,51	777,52	26,59
15	1,50	3,76	5,46	754,33	56,60	1,51	3,76	4,50	777,21	57,58
16	1,58	3,59	5,72	751,30	23,08	1,58	3,59	4,77	779,40	30,01
17	1,51	3,76	5,86	752,58	58,04	1,52	3,76	4,90	771,84	51,87
18	1,58	3,54	5,71	750,91	22,62	1,58	3,54	4,79	780,46	28,95
19	1,34	3,12	4,91	755,13	55,88	1,35	3,12	3,85	785,96	62,32
20	1,45	3,32	4,62	765,60	39,88	1,45	3,32	3,72	775,49	70,20
21	1,35	3,12	4,47	762,28	55,74	1,35	3,12	3,52	786,10	64,93
22	1,45	3,32	4,62	764,54	39,70	1,46	3,32	3,72	775,62	70,04
23	1,35	3,12	4,47	762,48	54,50	1,35	3,12	3,52	785,99	62,17
24	1,45	3,32	4,60	764,54	39,70	1,46	3,32	3,72	775,62	70,04
Média	1,47	3,44	5,18	756,91	43,87	1,47	3,44	4,24	778,92	54,29

As observações realizadas na Tabela B.13 em relação aos problemas com tempo de *setup* alto e tempo de *setup* baixo, ocorrem, de maneira mais suave, para os problemas do grupo 1 com capacidade normal (Tabela B.14). Também podemos verificar que, o número de iterações para obter os limitantes, tanto inferior como superior, é menor comparado com os

problemas de capacidade apertadas.

Podemos perceber também que, o *Gap2* obtido para os problemas com capacidade normal são menores, comparados ao *Gap2* obtido dos problemas com capacidade apertada. Embora para este caso a média do *Gap2*, de cada exemplar, é menor com a heurística Lagsur, o maior *Gap2* encontrado é o mesmo para cada classe de exemplares.

O tempo de resolução da heurística Lagsur continua maior que o tempo da heurística Lagrangiana, embora a diferença de tempo seja menor que dois segundos, para a maioria dos casos.

Tabela B.15: Resultado das heurísticas - grupo 1 com folga de capacidade ($\alpha = 0,50$)

Exemplar	Lagrangiana/Surrogate					Lagrangiana				
	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.
25	1,81	5,08	4,49	560,26	1,06	1,81	5,08	3,55	558,87	1,06
26	1,81	5,08	4,06	517,82	1,05	1,81	5,08	3,16	508,96	1,05
27	1,81	5,08	4,47	560,21	1,07	1,81	5,08	3,56	558,85	1,07
28	1,83	5,08	4,23	517,43	1,06	1,83	5,08	3,34	508,43	1,06
29	1,81	5,08	4,16	574,12	1,07	1,81	5,08	3,27	567,34	1,07
30	1,84	5,08	4,28	517,68	1,06	1,84	5,08	3,34	508,84	1,06
31	1,72	9,48	3,06	564,26	1,00	1,72	9,48	2,16	554,30	1,00
32	1,73	9,48	2,83	497,05	1,00	1,73	9,48	1,94	496,09	1,00
33	1,72	9,48	2,81	564,26	1,00	1,72	9,48	1,94	554,30	1,00
34	1,73	9,48	2,81	497,05	1,00	1,73	9,48	1,94	496,09	1,00
35	1,72	9,48	2,79	564,26	1,00	1,72	9,48	1,94	554,30	1,00
36	1,73	9,48	2,79	497,05	1,00	1,73	9,48	1,93	496,08	1,00
Média	1,77	7,28	3,57	535,95	1,03	1,77	7,28	2,67	530,20	1,03

O resultado dos problemas do grupo 1 com folga de capacidade (Tabela B.15) não tem a mesma diferença dos dados entre os problemas com tempo de *setup* alto e baixo. Embora o *Gap2* médio e sua variação sejam maiores do que os obtidos para os problemas com capacidade normal, o tempo médio de resolução é menor e os limitantes são obtidos com um número menor de iterações, principalmente o limitantes superior que é encontrado, em média, na primeira iteração. Podemos notar também, uma pequena variação entre com resultados onde o custo de estoque é diferente. Observe que, os seis primeiros exemplares (custo de estoque igual a um - $h_t = 1$) tem em média uma variação do *Gap2* menor do que o *Gap2* obtidos dos seis problemas restantes (custo de estoque alto - $h = 3$). Essa variação ocorre de modo contrário aos dados obtidos pelo pacote CPLEX (ver dados das Tabelas B.1 a B.12).

Na Tabela B.16, podemos perceber que, embora o limitante inferior, para ambas as heurísticas, seja encontrado em média, próximo a iteração 800, os limitante superiores são encontrados com um número menor de iterações com a relaxação Lagrangiana. Porém, o

Tabela B.16: Resultado das heurísticas - grupo 2 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)

Exemplar	Lagrangiana/Surrogate					Lagrangiana				
	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.
37	1,54	3,39	14,34	790,51	416,56	1,54	2,89	10,73	792,26	387,40
38	1,31	2,30	9,71	789,14	271,54	1,31	2,01	8,11	789,56	232,22
39	1,89	4,99	14,34	785,62	474,30	2,13	6,98	11,81	792,78	406,90
40	1,37	2,38	8,44	789,33	256,11	1,40	2,25	7,09	791,21	250,98
41	3,46	13,62	12,59	721,87	418,38	6,54	33,24	11,83	793,28	386,59
42	1,55	4,51	8,51	789,05	281,40	1,86	15,41	7,35	791,17	258,19
43	2,20	6,77	13,82	794,83	417,42	2,18	6,36	9,82	793,96	381,72
44	1,72	3,14	8,15	790,24	245,32	1,73	3,09	6,77	789,77	239,12
45	2,63	11,87	13,84	794,83	422,56	3,77	16,69	11,83	794,58	410,47
46	1,79	3,31	8,72	791,05	255,92	1,86	4,84	7,49	790,85	246,03
47	5,62	23,06	14,22	785,79	414,34	13,60	66,93	12,86	793,69	401,09
48	2,21	13,09	9,35	789,69	263,87	2,99	32,22	8,04	791,89	254,88
Média	2,27	7,70	11,34	784,33	344,81	3,41	16,08	9,48	792,08	321,30

Gap2 médio obtido pela relaxação Lagsur é melhor, na maioria dos casos. Novamente, temos uma diferença entre os tempos de resolução dos problemas com tempo de *setup* baixo e alto. Temos também, que as heurísticas precisam de mais tempo, em relação ao grupo 1, para resolver o problema. Analisando o *Gap2* obtido na resolução dos problemas do grupo 2, com capacidade apertada, com os problemas do grupo 1 com capacidade apertada, temos que as heurísticas obtêm um *Gap2* melhor para o problema com custo de estoque mais barato ($h = 1$).

Tabela B.17: Resultado das heurísticas - grupo 2 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)

Exemplar	Lagrangiana/Surrogate					Lagrangiana				
	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.
49	1,39	2,63	6,47	773,12	53,93	1,40	3,14	5,42	781,91	51,32
50	1,44	2,96	6,49	761,27	22,60	1,46	2,96	5,47	785,01	16,94
51	1,44	2,56	5,48	771,08	62,57	1,44	3,18	4,50	777,78	50,48
52	1,51	3,11	5,45	763,82	20,49	1,51	3,11	4,52	783,18	18,85
53	1,47	3,39	5,36	767,71	58,12	1,48	3,22	4,42	787,04	56,43
54	1,55	3,04	5,38	778,84	19,48	1,55	3,04	4,46	783,80	20,80
55	1,38	3,28	4,59	760,39	51,14	1,39	3,28	3,61	787,89	53,63
56	1,46	3,37	4,66	759,90	30,92	1,46	3,37	3,75	770,32	37,93
57	1,39	3,28	4,96	768,60	52,79	1,40	3,28	3,98	788,57	49,51
58	1,46	3,37	4,98	760,03	31,13	1,47	3,37	4,06	769,26	37,66
59	1,40	3,28	4,96	768,60	51,39	1,40	3,28	3,98	788,71	50,11
60	1,46	3,37	5,54	752,72	31,62	1,47	3,37	4,55	769,60	37,11
Média	1,45	3,14	5,36	765,51	40,52	1,45	3,22	4,39	781,09	40,06

Na Tabela B.17, assim como nos resultados da Tabela B.14, embora os limitantes inferiores sejam encontrados com um número de iterações próximas de 800, os limitantes superiores

são encontrados com um número menor de iterações e o tempo de solução e o *Gap2* são menores comparados ao problemas com capacidade apertada. O *Gap2* obtido pela heurística Lagsur é suavemente menor ao obtido pela heurística Lagrangiana. Mas a variação do *Gap2* com a heurística Lagsur é menor.

Tabela B.18: Resultado das heurísticas - grupo 2 com folga de capacidade ($\alpha = 0,50$)

Exemplar	Lagrangiana/Surrogate					Lagrangiana				
	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.
61	1,78	3,75	4,69	728,72	1,06	1,78	3,75	3,72	721,05	1,06
62	1,76	3,91	4,75	694,44	1,13	1,76	3,92	3,77	680,25	1,13
63	1,82	3,91	3,92	713,56	1,06	1,82	3,92	3,05	705,51	1,06
64	1,81	4,43	4,01	692,96	1,06	1,81	4,44	3,14	685,65	1,06
65	1,85	4,33	3,81	709,83	1,06	1,85	4,34	2,95	701,89	1,06
66	1,85	4,42	3,89	701,04	1,06	1,85	4,42	3,02	693,47	1,06
67	1,71	4,49	2,85	693,24	1,00	1,71	4,49	1,97	669,82	1,00
68	1,71	4,49	2,83	684,95	1,00	1,71	4,49	1,94	651,19	1,00
69	1,71	4,49	3,01	693,24	1,00	1,71	4,49	2,10	669,82	1,00
70	1,72	4,49	3,00	684,94	1,00	1,72	4,49	2,13	651,29	1,00
71	1,72	4,49	2,97	693,12	1,00	1,72	4,49	2,07	669,88	1,00
72	1,72	4,49	3,07	684,94	1,00	1,72	4,49	2,16	651,28	1,00
Média	1,76	4,31	3,57	697,92	1,04	1,76	4,31	2,67	679,26	1,04

Com os resultados da Tabela B.18, pode-se verificar o mesmo comportamento obtido nos resultados apresentados na Tabela B.15. Ou seja, os limitantes podem ser encontrados com um número menor de iterações, principalmente o limitante superior que é encontrado em média na primeira iteração da método. O tempo de resolução é pequeno, não ultrapassando cinco segundos de resolução e o valor do *Gap2* é sempre menor que 2%.

Tabela B.19: Resultado das heurísticas - grupo 3 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)

Exemplar	Lagrangiana/Surrogate					Lagrangiana				
	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.
73	2,12	4,49	13,65	791,92	444,94	2,16	5,07	10,97	792,31	428,41
74	1,85	3,95	8,58	788,18	271,09	1,85	3,91	7,41	789,96	249,18
75	2,69	9,97	12,38	785,34	446,23	3,43	13,5	10,64	793,23	448,63
76	1,93	4,38	8,45	790,18	252,17	1,93	4,62	7,35	791,5	241,58
77	5,83	52,46	12,69	729,82	434,12	12,15	66,79	12,04	793,28	416,35
78	2,25	8,94	9,89	789,63	261,78	2,94	32,87	8,84	791,45	251,26
79	3,04	9,94	15,95	793,18	457,89	3,17	11,26	11,78	792,77	432,73
80	2,41	6,77	9,00	784,26	233,17	2,37	4,77	7,56	784,88	209,05
81	3,82	19,57	14,14	793,45	391,87	6,21	30,14	12,34	794,03	402,36
82	2,55	7,22	8,99	784,25	226,55	2,6	9,05	7,81	785,98	235,53
83	9,61	163,93	13,52	786,37	420,66	21,85	116,13	12,7	794,56	398,77
84	3,35	22,01	9,02	785,59	232,06	4,8	61,43	7,93	786,16	216,27
Média	3,45	26,14	11,36	783,51	339,38	5,46	29,96	9,78	790,84	327,51

Novamente, na Tabela B.19 podemos observar uma diferença dos resultados entre os problemas com tempo de *setup* baixo e tempo de *setup* alto (ver Tabela 4.5 e observe que os exemplares ímpares tem tempo de *setup* baixo e os pares tem tempo de *setup* alto). Os problema com tempo de *setup* baixo precisam, em média, no máximo quinhentas iterações para obter um bom limitante superior. Enquanto os problema com *setup* alto, precisam de no máximo trezentas iterações. Observe também que o tempo entre os problemas com *setup* baixo e *setup* alto, são diferentes. Em especial, podemos observar o exemplar 83, que obteve os piores limitantes e com o maior *Gap2* excessivamente grande. Este problema (ver Tabela 4.5) contém tempo de *setup* baixo e custo de atraso alto.

Tabela B.20: Resultado das heurísticas - grupo 3 com capacidade normal ($\alpha = 0,85$)

Exemplar	Lagrangiana/Surrogate					Lagrangiana				
	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.
85	1,90	4,53	6,84	772,20	55,16	1,92	4,53	5,81	779,41	51,12
86	2,05	4,72	6,52	738,81	24,71	2,05	4,89	5,60	786,12	27,63
87	1,93	4,26	6,25	772,25	57,88	1,94	4,27	5,30	773,58	54,50
88	2,08	4,72	6,44	734,16	26,23	2,08	4,89	5,55	785,33	25,71
89	1,95	4,32	6,81	766,23	55,43	1,96	4,32	5,84	779,81	50,74
90	2,07	4,72	7,29	740,15	25,35	2,08	4,89	6,35	786,65	28,05
91	1,88	7,71	6,14	753,31	52,24	1,88	7,80	5,14	782,00	66,20
92	2,05	8,79	6,34	751,89	39,43	2,06	8,79	5,40	773,12	58,13
93	1,88	7,80	6,40	752,97	54,05	1,88	7,80	5,42	781,89	68,74
94	2,06	8,79	5,99	751,23	39,57	2,06	8,79	5,06	773,06	57,79
95	1,88	7,80	5,59	753,25	51,80	1,88	7,80	4,66	781,89	64,23
96	2,06	8,79	6,01	751,23	39,57	2,06	8,79	5,16	773,06	57,79
Média	1,98	6,41	6,39	753,14	43,45	1,99	6,46	5,44	779,66	50,89

Os resultados do grupo 3 com capacidade normal também apresentam diferenças entre os problemas com tempo de *setup* distintos. Comparando os resultados, com a Tabela B.19, percebemos novamente que o problemas com capacidade normal obtém os limitantes mais rapidamente. O tempo de resolução dos problemas com capacidade normal também é mais rápido, comparado com os problemas do grupo 3 com capacidade apertada. Percebemos também que os problemas com capacidade normal, não apresentam uma diferença significativa entre os resultados obtidos pelo métodos, ou seja, o *Gap2* das resoluções são muito parecidos.

Os resultados dos problemas com folga de capacidade, obtém um *Gap2* médio pior que os problemas com capacidade normal. Percebemos que novamente os problemas com folga de capacidade não apresentam diferenças muito grandes entre os problemas com tempo de *setup* diferentes. O limitante superior dos problemas são encontrados em média na primeira iteração. O tempo de resolução dos métodos são muito parecidos, sendo a heurística Lagsur

Tabela B.21: Resultado das heurísticas - grupo 3 com folga de capacidade ($\alpha = 0,50$)

Exemplar	Lagrangiana/Surrogate					Lagrangiana				
	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.
97	2,50	7,81	5,70	709,68	1,13	2,50	7,82	4,75	708,41	1,13
98	2,50	7,62	5,55	677,47	1,11	2,50	7,63	4,66	675,55	1,11
99	2,51	7,70	5,17	709,70	1,13	2,51	7,71	4,30	708,63	1,13
100	2,53	7,81	5,38	677,45	1,12	2,54	7,82	4,50	675,49	1,12
101	2,52	7,70	5,71	701,77	1,13	2,52	7,71	4,85	700,74	1,13
102	2,53	7,70	6,54	677,40	1,12	2,53	7,71	5,57	675,44	1,12
103	2,58	9,57	5,01	686,58	1,00	2,59	9,57	4,01	680,28	1,00
104	2,59	9,57	4,62	670,84	1,00	2,59	9,57	3,72	670,16	1,00
105	2,58	9,57	5,16	686,52	1,00	2,58	9,57	4,21	680,17	1,00
106	2,58	9,57	5,77	670,90	1,00	2,58	9,57	4,87	670,27	1,00
107	2,58	9,57	4,54	686,52	1,00	2,58	9,57	3,64	680,17	1,00
108	2,58	9,57	5,27	670,90	1,00	2,58	9,57	4,38	670,27	1,00
Média	2,55	8,65	5,37	685,48	1,06	2,55	8,65	4,46	682,97	1,06

aproximadamente um segundo mais lenta.

Tabela B.22: Resultado das heurísticas - grupo 4 com capacidade apertada ($\alpha = 1$)

Exemplar	Lagrangiana/Surrogate					Lagrangiana				
	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.
109	1,59	2,82	13,80	792,42	445,63	1,60	3,29	10,31	792,51	394,02
110	1,46	3,23	9,25	790,13	261,65	1,46	3,33	7,69	790,94	212,66
111	1,97	8,72	13,07	776,10	466,16	2,18	7,08	10,82	793,56	393,84
112	1,54	3,22	9,07	789,99	255,10	1,57	3,50	7,68	790,59	249,79
113	3,65	22,60	12,73	707,01	436,82	6,61	31,74	12,12	793,07	365,22
114	1,73	5,35	9,11	784,15	273,21	2,06	16,67	7,87	789,66	255,45
115	2,28	5,59	14,09	793,32	415,66	2,29	6,94	10,12	791,86	390,51
116	1,93	4,34	8,78	786,54	254,20	1,93	3,61	7,38	785,71	238,38
117	2,71	9,92	13,10	793,03	448,57	3,74	15,60	11,40	792,62	422,35
118	1,98	5,29	8,68	782,97	262,52	2,02	5,88	7,53	786,59	219,16
119	5,68	23,51	13,44	785,48	426,72	13,79	66,59	12,35	792,96	378,40
120	2,40	11,86	8,91	786,96	280,92	3,19	33,60	7,74	786,87	231,52
Média	2,41	8,87	11,17	780,68	352,26	3,54	16,49	9,42	790,58	312,61

Para o grupo 4 com capacidade apertada (ver Tabela 4.6), também podemos observar uma diferença na resolução entre os exemplares com tempo de *setup* diferentes, mas neste caso, a diferença entre os *Gap2* não é tão grande. Podemos perceber a diferença dos resultados entre os exemplares, pela média do número de iterações em que o melhor limitante superior foi encontrado e o tempo de resolução. A variação do problema com tempo de *setup* baixo e custo de atraso alto é menor quando comparado com os problemas, com tempo de *setup* e atraso iguais, do grupo 1 e 3. Novamente, o tempo de processamento da heurística Lagsur é maior do que o tempo da heurística Lagrangiana. Assim como nos resultados an-

teriores, com capacidade apertada, a heurística Lagsur obtém um *Gap2* melhor do que a heurística Lagrangiana.

Tabela B.23: Resultado das heurísticas - grupo 4 capacidade normal ($\alpha = 0,85$)

Exemplar	Lagrangiana/Surrogate					Lagrangiana				
	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.
121	1,76	4,40	7,07	775,54	63,76	1,78	4,40	5,99	779,94	57,90
122	1,86	4,17	6,69	754,14	20,23	1,89	4,17	5,74	777,95	21,97
123	1,83	4,70	6,58	758,72	62,48	1,84	4,70	5,54	774,78	56,12
124	1,93	4,30	6,56	750,52	22,43	1,95	4,30	5,62	781,16	20,42
125	1,88	4,43	6,34	774,56	63,54	1,89	4,43	5,40	784,55	54,73
126	1,98	4,35	6,43	758,67	21,49	2,00	4,35	5,51	779,18	24,44
127	1,85	4,68	5,72	767,82	53,08	1,86	4,68	4,75	776,77	67,20
128	1,97	5,12	5,83	760,82	30,25	1,97	4,88	4,92	773,55	40,08
129	1,86	4,68	5,71	767,84	53,32	1,87	4,68	4,76	777,20	64,89
130	1,98	5,12	5,79	760,94	30,48	1,97	4,88	4,90	773,59	41,03
131	1,85	4,68	5,76	767,73	52,90	1,87	4,68	4,79	777,98	63,51
132	1,98	5,12	5,79	760,39	30,37	1,98	4,88	4,91	773,34	41,03
Média	1,89	4,65	6,19	763,14	42,03	1,91	4,59	5,24	777,50	46,11

Podemos observar que, os limitantes inferiores para o problema do grupo 4 com capacidade normal (Tabela B.23) e com capacidade apertada B.22 são obtidos, em média, com um número menor de iterações pela heurística Lagsur. Percebemos também, com o número de médio de iterações onde o limitante superior foi encontrado que, os problemas com tempo de *setup* alto precisam de menos iterações para serem obtidos. Com exceção do limitante superior, não é notada uma diferença muito relevante entre os exemplares de *setup* alto e *setup* baixo. Novamente, o *Gap2* obtido pela heurística Lagsur são melhores que o obtido pela heurística Lagrangiana.

Na Tabela B.24, podemos perceber um pequena diferença entre os tempo médio de resolução entre os seis primeiros exemplares e seis exemplares restantes. Podemos notar que os exemplares com custo de estoque mais caro (ver Tabela 4.6), levam menos tempo para serem resolvidos pelas heurísticas. Podemos notar também que, a heurística Lagsur tem um *Gap2* levemente menor.

Tabela B.24: Resultado das heurísticas - grupo 4 com folga de capacidade ($\alpha = 0,50$)

Exemplar	Lagrangiana/Surrogate					Lagrangiana				
	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.	Gap2 médio	Maior Gap2	Tempo médio	melhor iter. lim. inf.	melhor iter. lim. sup.
133	2,34	5,74	5,69	775,91	1,11	2,34	5,75	4,79	775,46	1,11
134	2,34	5,66	5,67	759,03	1,12	2,35	5,66	4,78	759,14	1,12
135	2,44	5,72	5,30	776,13	1,08	2,44	5,73	4,43	775,82	1,08
136	2,42	5,57	5,47	760,03	1,06	2,42	5,57	4,60	760,12	1,06
137	2,50	5,69	5,08	774,22	1,08	2,50	5,70	4,23	766,37	1,08
138	2,48	5,70	5,24	759,96	1,06	2,48	5,70	4,38	760,07	1,06
139	2,38	5,31	4,37	767,86	1,00	2,38	5,31	3,49	761,38	1,00
140	2,39	5,31	4,36	742,75	1,00	2,39	5,32	3,48	742,72	1,00
141	2,39	5,31	4,35	767,86	1,00	2,39	5,31	3,48	761,38	1,00
142	2,39	5,31	4,34	742,68	1,00	2,39	5,32	3,47	742,91	1,00
143	2,39	5,31	4,38	767,86	1,00	2,39	5,31	3,53	761,38	1,00
144	2,39	5,31	4,31	742,67	1,00	2,39	5,32	3,45	742,89	1,00
Média	2,40	5,50	4,88	761,41	1,04	2,41	5,50	4,01	759,14	1,04

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)