



**Teorema de Sturm e  
Zeros de Polinômios Ortogonais**

*Fernando Rodrigo Rafaeli*

Dissertação de Mestrado  
Pós-Graduação em Matemática Aplicada

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**Fernando Rodrigo Rafaeli <sup>1</sup>**

**Teorema de Sturm e Zeros de Polinômios Ortogonais**

Dissertação apresentada no Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov

São José do Rio Preto

Fevereiro de 2007

---

<sup>1</sup>contato: [fe\\_ro\\_rafaeli@yahoo.com.br](mailto:fe_ro_rafaeli@yahoo.com.br)

Aos meus pais, Dionísio e Marlene  
e aos meus irmãos Márcio e Cleber,  
dedico.

# Agradecimentos

À FAPESP, pelo auxílio financeiro.

Um agradecimento especial ao Prof. Dr. Dimitar K. Dimitrov, por toda orientação, dedicação e incentivo.

Aos professores do grupo de polinômios ortogonais, Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga, Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Cleonice Fátima Bracciali e Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Eliana Xavier Linhares de Andrade.

À professora Débora Lobo, pela minha iniciação na carreira acadêmica.

Aos meus pais Dionísio e Marlene, que sempre me apoiaram e me incentivaram em meus estudos e aos meus irmãos Márcio e Cleber.

À Maria Zago, pelas orações e incentivo.

A todos os colegas de turma, em especial a Cristiane e a Gabi.

A todos os professores e funcionários que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho.

A Deus, por tudo.

# Resumo

Neste trabalho estudamos o Teorema de Sturm para zeros de soluções de equações diferenciais lineares de segunda ordem e suas extensões. Estes resultados clássicos são aplicados para análise de monotonicidade e convexidade de zeros de polinômios ortogonais clássicos.

# Abstract

We study Sturm's theorem on zeros of solution of linear second-order differential equations as well as its extension. These classical results are applied to analyze monotonicity and convexity of zeros of classical orthogonal polynomials.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Resultados Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1	Equações Diferenciais de Segunda Ordem . . . . .	3
1.1.1	Tópicos da Teoria . . . . .	3
1.1.2	Transformadas . . . . .	7
1.2	Polinômios Ortogonais . . . . .	9
1.2.1	Propriedades gerais dos polinômios ortogonais . . . . .	9
1.2.2	Propriedades elementares dos zeros . . . . .	13
1.2.3	Polinômios ortogonais clássicos . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Teoremas de Sturm-Liouville</b>	<b>26</b>
2.1	Teorema de Separação de Sturm . . . . .	28
2.2	Teorema de Comparação de Sturm . . . . .	29
2.3	Teorema de Convexidade . . . . .	33
2.4	Limites para as Distâncias entre Zeros . . . . .	34
2.5	Forma Integral do Teorema de Sturm . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Aplicações dos Teoremas de Sturm-Liouville para Zeros</b>	<b>37</b>
3.1	Aplicações do Teorema de Comparação para Zeros . . . . .	37
3.1.1	Limites para os Zeros dos Polinômios de Jacobi . . . . .	37
3.1.2	Limites Superiores para os Zeros dos Polinômios de Gegenbauer . . . . .	40
3.1.3	Limites para os Zeros dos Polinômios de Jacobi . . . . .	46
3.1.4	Propriedades de Monotonicidade dos Zeros dos Polinômios de Gegenbauer . . . . .	50
3.1.5	Resultados de Monotonicidade dos Zeros do Polinômio de Laguerre . . . . .	53
3.2	Desigualdades Tipo Turán sobre Zeros . . . . .	57
3.3	Forma Integral . . . . .	62



3.3.1 Propriedades de Monotonicidade dos Zeros dos Polinômios de Gegenbauer 62

**Referências Bibliográficas 67**

# Introdução

Os polinômios ortogonais clássicos surgem cada vez mais em problemas fundamentais na matemática. Um estudo principal é o comportamento de seus zeros, pois há várias aplicações importantes. Uma delas é que esses zeros são os melhores nós da fórmula de quadratura de Gauss, isto é, a fórmula de quadratura com  $n$  nós

$$\int_a^b f(x) \rho(x) dx = \sum_{\nu=1}^n A_\nu f(x_\nu);$$

é exata para todo polinômio de grau  $2n - 1$  se, e somente se,  $x_\nu, \nu = 1, \dots, n$ , são os zeros do  $n$ -ésimo polinômio que é ortogonal em  $(a; b)$  com relação a função peso  $\rho(x)$ . Outro fato interessante é que os zeros dos polinômios ortogonais clássicos admitem uma bonita interpretação eletrostática. Para os zeros do polinômio de Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  esta interpretação é a seguinte: dadas duas cargas fixas com forças  $(- + 1) = 2$  e  $(+ + 1) = 2$ , localizadas em  $-1$  e  $1$ , respectivamente, e  $n$  cargas unitárias livres em  $(-1; 1)$ , a única posição para a qual a energia atinge o mínimo global é quando a posição das cargas coincide com os zeros de  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ . Há ainda outras aplicações como em Teoria dos Códigos, Teoria do Potencial em Equações Diferenciais, Desigualdades Polinomiais, Regressão Polinomial e Processo de Nascimento e Morte em Estatística e Métodos de Relaxação em Álgebra Linear. Devido a importância dos zeros dos polinômios ortogonais, fazemos um estudo de suas propriedades de monotonicidade e convexidade.

Desenvolvemos um estudo detalhado do *Teorema Clássico de Sturm* para zeros de soluções de equações diferenciais lineares de segunda ordem e suas extensões. Estes resultados são aplicados para análise dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos de Jacobi, Gegenbauer, Laguerre e Hermite.

A dissertação está organizada da seguinte forma.

O primeiro capítulo - *Resultados Preliminares* - contém alguns tópicos básicos da teoria de equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem, a transformada de Liouville,

---

as propriedades gerais dos polinômios clássicos, tais como fórmula do tipo de Rodrigues, relação de ortogonalidade, relação de recorrência e equação diferencial associada. No segundo capítulo - *Teoremas de Sturm-Liouville* - apresentamos em detalhes os teoremas clássicos de Sturm, que são os teoremas de separação e comparação, o teorema de convexidade e a versão integral do teorema de Sturm. No terceiro capítulo - *Aplicações dos Teoremas de Sturm-Liouville para Zeros* - apresentamos os resultados dos artigos (Elbert e Laforgia [7], [6] e [9], Ahmed, Muldoon e Spigler em [1], Deano, Gil e Segura em [3] e Elbert e Siafarikas em [11]).

# Capítulo 1

## Resultados Preliminares

### 1.1 Equações Diferenciais de Segunda Ordem

#### 1.1.1 Tópicos da Teoria

Uma equação diferencial linear de segunda ordem é da forma

$$\rho_0(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \rho_1(x) \frac{dy}{dx} + \rho_2(x)y = \rho_3(x); \quad (1.1)$$

onde  $\rho_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 0; 1; 2; 3$ , são funções contínuas no intervalo  $I$ , o qual pode ser finito ou infinito.

Nesta seção nos deteremos a escrever um pouco da teoria das equações lineares de segunda ordem e ao comportamento de suas soluções.

Dividindo (1.1) pelo coeficiente  $\rho_0(x)$ , obtemos a chamada *forma normal*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \rho(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x); \quad (1.2)$$

$$\rho = \rho_1/\rho_0; \quad q = \rho_2/\rho_0; \quad r = \rho_3/\rho_0; \quad (1.3)$$

Esta equação diferencial é equivalente a (1.1) quando  $\rho_0(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ . Quando  $\rho_0(x_0) = 0$  para algum ponto  $x = x_0$ , então as funções  $\rho$  e  $q$  não são definidas em  $x_0$ . Neste caso, dizemos que a equação diferencial (1.1) tem um *ponto singular*, ou uma *singularidade*, no ponto  $x_0$ .

Nesta discussão, trataremos somente de equações diferenciais lineares de 2ª ordem da forma (1.1) em intervalos onde  $\rho_0(x) \neq 0$ .

Para iniciar, consideremos o conjunto  $C^2(I)$  das funções de classe  $C^2$  definidas em  $I$ , isto é, o conjunto das funções que são duas vezes diferenciáveis e a segunda derivada é contínua

em  $I$ . Claramente,  $C^2(I)$  é um espaço vetorial, pois, dados  $f, g \in C^2(I)$  e escalares  $\alpha$  e  $\beta$ , temos  $\alpha f + \beta g \in C^2(I)$ .

**Operador Diferencial.** Dada uma equação diferencial linear de segunda ordem da forma (1.1), chamamos a transformação linear

$$L : C^2(I) \rightarrow C^0(I) \quad (1.4)$$

definida por  $L[f] = p_0 f'' + p_1 f' + p_2 f$  de operador diferencial associado à equação (1.1). O operador  $L$  de fato é linear, isto é, satisfaz  $L[\alpha f + \beta g] = \alpha L[f] + \beta L[g]$  para quaisquer escalares  $\alpha$  e  $\beta$  e funções  $f, g$  de  $C^2(I)$ .

**Problema de Valor Inicial.** Em geral, dada uma equação diferencial linear de segunda ordem, da forma (1.1) ou (1.2), o problema de encontrar uma solução  $y(x)$  que satisfaz as condições iniciais dadas  $f(x_0) = y_0$  e  $f'(x_0) = y'_0$  é chamado de *problema de valor inicial*. Provaremos que, se as funções  $p_j$  são todas contínuas e  $p_0(x) \neq 0$ , este problema tem uma única solução.

**Teorema 1.1.** (*Existência e Unicidade*) Se  $p$  e  $q$  são funções contínuas em um intervalo  $(a; b)$ , então o problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{array} \right.$$

tem uma, e somente uma, solução definida em  $(a; b)$ .

**Teoria da Equação Homogênea.** Uma equação diferencial linear de segunda ordem é dita *homogênea* se, para todo  $x$  em  $I$ , a função  $p_3(x)$  na equação (1.1), ou  $r(x)$  na equação (1.2), for identicamente igual a zero. Caso contrário, a equação é chamada *não-homogênea*. Vamos estudar a equação diferencial linear de segunda ordem homogênea, isto é,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0; \quad (1.5)$$

onde  $p$  e  $q$  são funções contínuas em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . Usando o operador diferencial  $L$ , esta equação reduz-se a  $L[y](x) = 0$ .

Uma característica fundamental da equação diferencial linear homogênea (1.5) é o chamado *Princípio da Superposição*. Dadas duas soluções  $f$  e  $g$  de (1.5) e quaisquer dois escalares

$\alpha$  e  $\beta$ , a função  $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$  é também solução de (1.5). Esta propriedade é característica das equações lineares homogêneas.

Vamos introduzir a noção de independência linear. Dada duas funções  $f$  e  $g$  definidas em um intervalo  $I$ , elas são ditas *linearmente dependentes* em  $I$  se, existem escalares  $\alpha$  e  $\beta$  não simultaneamente nulos, tais que,  $\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$ , para todo  $x$  em  $I$ . Se a condição  $\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$  para todo  $x$  em  $I$  implicar que  $\alpha = \beta = 0$ , então as funções  $f$  e  $g$  são ditas *linearmente independentes*.

Tomando-se duas funções  $f$  e  $g$  diferenciáveis, podemos relacionar a dependência linear através do Wronskiano, o qual definiremos a seguir.

**Definição 1.1.** O Wronskiano de quaisquer duas funções diferenciáveis  $f$  e  $g$  é definido por

$$W(f; g; x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - g(x)f'(x): \quad (1.6)$$

**Proposição 1.1.** Se  $f$  e  $g$  são funções diferenciáveis e linearmente dependentes em um intervalo  $I$ , então  $W(f; g; x) \equiv 0$ , para todo  $x$  em  $I$ .

Demonstração:

Sejam  $f$  e  $g$  funções diferenciáveis definidas em  $I$  e escalares  $\alpha$  e  $\beta$  ambos não nulos tais que  $\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$ , para todo  $x$  em  $I$ . Daí,  $\alpha f'(x) + \beta g'(x) = 0$ , para todo  $x$  em  $I$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $\beta \neq 0$ . Multiplicando a primeira equação por  $f'$  e a segunda por  $f$  e subtraindo ambos os resultados, obtemos para todo  $x$  em  $I$ ,  $\beta(f(x)g'(x) - g(x)f'(x)) = 0$ , ou seja,  $W(f; g; x) = 0$ . ■

**Proposição 1.2.** Se  $f$  e  $g$  são funções diferenciáveis em um intervalo  $I$  com Wronskiano diferente de zero em um ponto  $x_0$  de  $I$ , então  $f$  e  $g$  são linearmente independentes.

Demonstração:

Suponhamos, por contradição, que  $f$  e  $g$  são linearmente dependentes. Então, existem escalares  $\alpha$  e  $\beta$  ambos não nulos tais que  $\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$ , para todo  $x$  em  $I$ . Daí, derivando, obtemos,  $\alpha f'(x) + \beta g'(x) = 0$ , para todo  $x$  em  $I$ . Em particular, para  $x = x_0$  temos o sistema

$$\begin{cases} \alpha f(x_0) + \beta g(x_0) = 0 \\ \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) = 0 \end{cases}$$

cujos determinante é  $W(f; g; x_0)$ , o qual é diferente de zero por hipótese. Conseqüentemente  $\alpha = \beta = 0$ , o que é uma contradição. ■

**Teorema 1.2.** *Sejam  $f$  e  $g$  duas soluções de (1.5) em um intervalo  $I$ . Então  $f$  e  $g$  são linearmente independentes em  $I$  se, e somente se, seu Wronskiano nunca se anula em  $I$ .*

Demonstração:

Da Proposição (1.2), resta provar que se  $f$  e  $g$  são soluções linearmente independentes de (1.5) em  $I$ , então seu Wronskiano é diferente de zero. Fixemos  $x_0$  em  $I$  e provemos que  $W(f; g; x_0) \neq 0$ . Suponha, por contradição, que isso não ocorra. Concluimos então que o sistema

$$\begin{cases} \alpha f(x_0) + \beta g(x_0) = 0 \\ \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) = 0 \end{cases}$$

tem solução  $(\alpha; \beta)$  não trivial. Formemos a função  $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$  a qual é solução de (1.5) pelo Princípio da Superposição, e, como  $h(x_0) = h'(x_0) = 0$ , pelo Teorema da Unicidade,  $h(x) \equiv 0$  em  $I$ . Daí, concluimos que  $f$  e  $g$  são linearmente dependentes, o que é uma contradição. ■

**Teorema 1.3.** *Sejam  $f$  e  $g$  duas soluções da equação diferencial linear homogênea (1.5). Se  $W(f; g; x_0) \neq 0$ , para algum ponto  $x_0$ , então cada solução  $h$  desta equação diferencial é igual a alguma combinação linear de  $f$  e  $g$ , ou seja,  $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$  para algum par de escalares  $\alpha$  e  $\beta$ .*

Demonstração:

Pelo Princípio da Superposição, qualquer  $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$  satisfaz (1.5). Por outro lado, suponha que a função  $h$  satisfaz a equação diferencial (1.5). Então, no ponto  $x = x_0$ , constantes  $\alpha$  e  $\beta$  podem ser encontradas tais que

$$\alpha f(x_0) + \beta g(x_0) = h(x_0); \quad \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) = h'(x_0); \quad (1.7)$$

De fato, as constantes  $\alpha$  e  $\beta$  são

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{h(x_0)g'(x_0) - g(x_0)h'(x_0)}{f(x_0)g'(x_0) - g(x_0)f'(x_0)} \\ \beta &= \frac{f(x_0)h'(x_0) - h(x_0)f'(x_0)}{f(x_0)g'(x_0) - g(x_0)f'(x_0)}. \end{aligned}$$

Pelo Princípio da Superposição, para estas escolhas de  $\alpha$  e  $\beta$ , a função  $y(x) = h(x) - \alpha f(x) - \beta g(x)$  satisfaz a equação diferencial homogênea (1.5), com condições iniciais  $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ . Daí, pelo Teorema da Unicidade,  $y$  é a solução trivial ( $y(x) \equiv 0$ ) da equação diferencial homogênea. Conseqüentemente  $h = \alpha f + \beta g$ . ■

Este resultado é de suma importância, pois ele nos diz que se encontrarmos duas soluções linearmente independentes de (1.5) então a solução geral de (1.5) está determinada e é dada pela combinação dessas soluções.

**Teorema 1.4.** *O Wronskiano de quaisquer duas soluções de (1.5) satisfaz*

$$W(f; g; x) = W(f; g; x_0) \exp \left( - \int_{x_0}^x p(t) dt \right) \quad (1.8)$$

Demonstração:

Derivando (1.6) e escrevendo  $W(f; g; x) = W(x)$  para abreviar, obtemos

$$W' = fg'' - gf'' \quad (1.9)$$

Pelo fato de que  $f$  e  $g$  são soluções de (1.5), temos que  $f'' = -pf' - qf$  e  $g'' = -pg' - qg$ . Substituindo estas expressões de  $g''$  e  $f''$  em (1.9) e cancelando, chega-se a

$$W'(x) + p(x)W(x) = 0$$

que é uma equação linear de primeira ordem. A solução é dada por (1.8), onde  $x_0$  pode ser tomado como qualquer ponto do intervalo de definição. ■

### 1.1.2 Transformadas

Neste trabalho, usaremos um tipo especial de transformada que reduz uma equação diferencial homogênea de segunda ordem em uma equação da forma Sturm-Liouville. Lembremos que uma equação diferencial de Sturm-Liouville é da forma

$$u' + p(x)u = 0 \quad (1.10)$$

Sejam  $K(x)$ ;  $M(x)$ ; e  $N(x)$  funções definidas em um intervalo  $(a; b)$ , onde  $K$  e  $M$  possuem derivadas contínuas e  $K(x) \neq 0$  neste intervalo. Se, na equação diferencial linear homogênea de segunda ordem

$$K(x)y'' + M(x)y' + N(x)y = 0 \quad (1.11)$$

fizemos  $y(x) = s(x)u(x)$ , onde  $u(x)$  é uma função desconhecida,  $s(x)$  pode ser determinada tal que  $u(x)$  satisfaça uma equação da forma (1.10). Com efeito, substituindo  $y(x) = s(x)u(x)$  em (1.11) obtemos

$$u' + p(x)u + \frac{2Ks' + Ms}{Ks} \cdot u = 0; \quad p(x) = \frac{Ks'' + Ms' + Ns}{Ks}$$



Mas (1.10) implica em,  $2Ks' + Ms = 0$ . Calculando diretamente, segue que

$$s(x) = e^{-\int \frac{M}{2K} dx} \quad e^{-\int \frac{M}{2K} dx} \left( -\frac{d}{dx} \frac{M}{2K} - \frac{M}{2K} \right) + \frac{N}{K} \quad (1.12)$$

Se introduzirmos em (1.11) uma nova variável independente definida por  $x = \mathfrak{A}(\mu)$ , obtemos

$$\frac{dy}{d\mu} = \frac{dy}{dx} \cdot \mathfrak{A}'(\mu) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\mu} \cdot \frac{1}{\mathfrak{A}'(\mu)}$$

e

$$\frac{d^2 y}{d\mu^2} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\mathfrak{A}''(\mu)}{\mathfrak{A}'(\mu)} + \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot [\mathfrak{A}'(\mu)]^2 \Leftrightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{[\mathfrak{A}'(\mu)]^2} \cdot \frac{d^2 y}{d\mu^2} - \frac{\mathfrak{A}''(\mu)}{\mathfrak{A}'(\mu)} \cdot \frac{dy}{d\mu}.$$

Substituindo na equação (1.11) segue

$$K \cdot \frac{1}{[\mathfrak{A}'(\mu)]^2} \cdot \frac{d^2 y}{d\mu^2} - \frac{\mathfrak{A}''(\mu)}{\mathfrak{A}'(\mu)} \cdot \frac{dy}{d\mu} + M \cdot \frac{1}{\mathfrak{A}'(\mu)} \cdot \frac{dy}{d\mu} + Ny = 0$$

e simplificando, chegamos a

$$K \cdot \mathfrak{A}'(\mu) \cdot \frac{d^2 y}{d\mu^2} + \frac{M \cdot [\mathfrak{A}'(\mu)]^2 - K \cdot \mathfrak{A}''(\mu)}{\mathfrak{A}'(\mu)} \cdot \frac{dy}{d\mu} + N[\mathfrak{A}'(\mu)]^3 y = 0 \quad (1.13)$$

Aplicando o raciocínio anterior, escrevemos  $y = s^* u$ , onde  $s^*$  pode ser determinada de tal forma que  $u$  satisfaça

$$\frac{d^2 u}{d\mu^2} + \mathfrak{A}^* u = 0 \quad (1.14)$$

logo

$$\frac{dy}{d\mu} = s^* \cdot \frac{du}{d\mu} + \frac{ds^*}{d\mu} \cdot u \quad e \quad \frac{d^2 y}{d\mu^2} = s^* \cdot \frac{d^2 u}{d\mu^2} + 2 \frac{ds^*}{d\mu} \cdot \frac{du}{d\mu} + u \cdot \frac{d^2 s^*}{d\mu^2}.$$

Então (1.13) se reduz a

$$K \mathfrak{A}'(\mu) \left( s^* \frac{d^2 u}{d\mu^2} + 2 \frac{ds^*}{d\mu} \frac{du}{d\mu} + u \frac{d^2 s^*}{d\mu^2} \right) + \frac{M[\mathfrak{A}'(\mu)]^2 - K \mathfrak{A}''(\mu)}{\mathfrak{A}'(\mu)} \cdot s^* \frac{du}{d\mu} + \frac{ds^*}{d\mu} u + N[\mathfrak{A}'(\mu)]^3 y = 0$$

ou seja,

$$\frac{d^2 u}{d\mu^2} + \mathfrak{A}^* u + \frac{1}{K \mathfrak{A}'(\mu) s^*} \left( 2K \mathfrak{A}'(\mu) \frac{ds^*}{d\mu} + \frac{M[\mathfrak{A}'(\mu)]^2 - K \mathfrak{A}''(\mu)}{\mathfrak{A}'(\mu)} \right) \frac{du}{d\mu} = 0 \quad (1.15)$$

onde

$$\mathfrak{A}^* = \frac{1}{s^*} \cdot \frac{d^2 s^*}{d\mu^2} + \frac{M[\mathfrak{A}'(\mu)]^2 - K \mathfrak{A}''(\mu)}{K \mathfrak{A}'(\mu) s^*} \cdot \frac{ds^*}{d\mu} + \frac{N[\mathfrak{A}'(\mu)]^2}{K} \quad (1.16)$$

De (1.14) segue que

$$2K \mathfrak{A}'(\mu) \frac{ds^*}{d\mu} + \frac{M[\mathfrak{A}'(\mu)]^2 - K \mathfrak{A}''(\mu)}{\mathfrak{A}'(\mu)} s^* = 0$$

ou equivalentemente

$$-\frac{M[\mathfrak{A}'(\mu)]^2 - K \mathfrak{A}''(\mu)}{2K \mathfrak{A}'(\mu)} d\mu = \frac{1}{s^*} \cdot ds^*:$$

Um cálculo direto nos leva a  $S^* = S \cdot (\mathcal{W})^{1/2}$ . Por outro lado, como

$$\begin{aligned} \frac{dS^*}{d\mu} &= -\frac{[M[\mathcal{W}'(\mu)]^2 - K\mathcal{W}''(\mu)]}{2K\mathcal{W}'(\mu)} \cdot S^* \\ \frac{d^2S^*}{d\mu^2} &= \frac{M[\mathcal{W}'(\mu)]^2 - K\mathcal{W}''(\mu)}{2K\mathcal{W}'(\mu)} \cdot S^* - \frac{d}{d\mu} \frac{M[\mathcal{W}'(\mu)]^2 - K\mathcal{W}''(\mu)}{2K\mathcal{W}'(\mu)} \cdot S^* \end{aligned}$$

então (1.16) é escrito como

$$S^* = -\frac{d}{d\mu} \frac{M[\mathcal{W}'(\mu)]^2 - K\mathcal{W}''(\mu)}{2K\mathcal{W}'(\mu)} - \frac{M[\mathcal{W}'(\mu)]^2 - K\mathcal{W}''(\mu)}{2K\mathcal{W}'(\mu)} + \frac{N}{K} \cdot [\mathcal{W}'(\mu)]^2; \quad (1.17)$$

## 1.2 Polinômios Ortogonais

Nesta seção, forneceremos algumas informações sobre polinômios ortogonais e também destacaremos algumas de suas propriedades. Para mais detalhes, consultar Szegő [15].

### 1.2.1 Propriedades gerais dos polinômios ortogonais

Sejam  $[a; b]$  um intervalo dado, finito ou infinito, e  $!(x)$  uma função definida e não-negativa em  $[a; b]$ . Vamos supor que

$$\int_a^b !(x)dx > 0;$$

para qualquer subintervalo  $[a'; b']$  de  $[a; b]$ . Toda função  $!(x)$  que satisfaz essa propriedade é chamada *função peso* em  $[a; b]$ .

**Definição 1.2.** Definimos o produto interno, associado ao peso  $!(x)$ , de duas funções  $f$  e  $g$  em  $[a; b]$  por

$$\langle f; g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)!(x)dx;$$

**Definição 1.3.** Duas funções  $f$  e  $g$  são ortogonais em  $[a; b]$  com relação a uma função peso  $!(x)$ , e escrevemos,  $f \perp g$ , se  $\langle f; g \rangle = 0$ :

**Definição 1.4.** Definimos por  $\mathcal{H}_n$  o espaço dos polinômios de grau  $n$ .

**Definição 1.5.** Dizemos que uma seqüência de polinômios  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  é ortogonal com respeito à função peso  $!(x)$  em  $[a; b]$  se, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , o polinômio  $P_n(x)$  é um polinômio de grau exatamente  $n$ , e para todo par  $(m; n)$  de números inteiros não-negativos, os polinômios  $P_n(x)$  e  $P_m(x)$  são ortogonais com relação ao produto interno  $\langle \cdot; \cdot \rangle$ , ou seja,

$$\begin{aligned} (i) \quad & P_n(x) = a_n \sum_b^x + r_{n-1}; \quad a_n > 0; \quad r_{n-1} \in \mathcal{H}_{n-1} \\ (ii) \quad & \langle P_n; P_m \rangle = \int_a^b P_n(x)P_m(x)!(x)dx = h_{n\pm m} \end{aligned} \quad (1.18)$$

onde  $\delta_{i,j}$  representa o delta de Kronecker, isto é,  $\delta_{i,j} = 0$ , se  $i \neq j$  e  $\delta_{i,j} = 1$ , se  $i = j$ . Por alguns motivos, em vez de exigirmos que todos os  $P_n$  sejam de grau exatamente  $n$ , impõe-se que o coeficiente do termo de maior grau do polinômio seja positivo. Quando  $h_n = 1$  em (1.18), dizemos que a seqüência de polinômios é ortonormal e denotamos por  $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ .

Por simplicidade e para evitar confusão, denotaremos os coeficientes do polinômio  $P_n(x)$  por  $a_{n,k}$ ;  $k = 0; \dots; n$ : Logo,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} x^k; \quad a_{n,n} \neq 0: \quad (1.19)$$

Destaquemos algumas propriedades dos polinômios ortogonais.

**Propriedade 1.** *Seja  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  uma seqüência de polinômios ortogonais. Toda subsequência finita  $P_0(x); P_1(x); \dots; P_m(x)$  de polinômios é linearmente independente.*

Demonstração:

Seja  $c_j$ ;  $j = 0; 1; \dots; m$ , escalares, tais que  $\sum_{j=0}^m c_j P_j(x) = 0$ . Fazendo o produto interno por  $P_k(x)$ ;  $k = 0; \dots; m$ ; segue imediatamente que

$$\sum_{j=0}^m c_j \langle P_j(x); P_k(x) \rangle = 0:$$

Usando a definição de ortogonalidade (1.18),

$$0 = \sum_{j=0}^m c_j \langle P_j(x); P_k(x) \rangle = c_k \langle P_k(x); P_k(x) \rangle;$$

ou seja,  $c_k = 0$ ;  $k = 0; \dots; m$ . Portanto, o conjunto  $\{P_0(x); P_1(x); \dots; P_m(x)\}$  é linearmente independente. ■

**Propriedade 2.** *Seja  $Q(x)$  um polinômio de grau menor ou igual do que  $n$ , então  $Q$  pode ser unicamente representado por*

$$Q(x) = {}^{\circledast}_0 P_0(x) + \dots + {}^{\circledast}_n P_n(x)$$

com coeficientes  ${}^{\circledast}_0; \dots; {}^{\circledast}_n$  reais.

Demonstração:

De fato, pela propriedade 1, os polinômios  $P_0(x); \dots; P_n(x)$  formam uma base para  $\mathcal{A}_n$ , então cada elemento de  $\mathcal{A}_n$  é unicamente representado como combinação de  $P_0(x); \dots; P_n(x)$ . Os coeficiente  ${}^{\circledast}_j$ ;  $j = 0; \dots; n$  são facilmente determinados e são dados por  ${}^{\circledast}_j = \frac{\langle Q; P_j \rangle}{\langle P_j; P_j \rangle}$ . ■

**Propriedade 3.** *Seja  $Q(x)$  um polinômio de grau menor ou igual do que  $n - 1$ , isto é,  $Q \in \mathcal{U}_{n-1}$ . Então,  $\langle Q; P_n \rangle = 0$ . Em outras palavras, isto significa que  $P_n(x)$  é ortogonal a todos os polinômios de grau menor ou igual do que  $n - 1$ .*

Demonstração:

Seja  $Q \in \mathcal{U}_{n-1}$ , então pela propriedade 2, existem escalares  ${}^{\circledast}{}_0; \dots; {}^{\circledast}{}_{n-1}$  tais que

$$Q(x) = {}^{\circledast}{}_0 P_0(x) + \dots + {}^{\circledast}{}_{n-1} P_{n-1}(x):$$

Da definição de ortogonalidade, segue imediatamente que

$$\langle Q; P_n \rangle = {}^{\circledast}{}_0 \langle P_0; P_n \rangle + \dots + {}^{\circledast}{}_{n-1} \langle P_{n-1}; P_n \rangle = 0;$$

ou seja,  $Q \perp P_n$ . ■

**Propriedade 4.** *Quaisquer duas seqüências de polinômios ortogonais com mesma função peso diferem apenas de uma constante, em outras palavras, se  $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  e  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  são duas seqüências de polinômios ortogonais em  $[a; b]$  com relação à função peso  $!(x)$ , então,*

$$Q_j(x) = {}^{\circledast}{}_j P_j(x); j = 0; 1; 2; \dots$$

Demonstração:

Seja  $Q_j(x) \in \{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ . Pela Propriedade 2, existem escalares  ${}^{\circledast}{}_0; \dots; {}^{\circledast}{}_j$  tais que

$$Q_j(x) = {}^{\circledast}{}_0 P_0(x) + \dots + {}^{\circledast}{}_j P_j(x):$$

Daí, pela ortogonalidade,

$$0 = \langle Q_j; P_k \rangle = \sum_{i=0}^j {}^{\circledast}{}_i \langle P_i; P_k \rangle = \sum_{i=0}^j {}^{\circledast}{}_i \langle P_i; P_k \rangle = {}^{\circledast}{}_k \langle P_k; P_k \rangle;$$

para  $k = 0; \dots; j - 1$ . Como  $\langle P_k; P_k \rangle \neq 0$ , então  ${}^{\circledast}{}_k = 0; k = 0; \dots; j - 1$ . Portanto,

$$Q_j(x) = {}^{\circledast}{}_j P_j(x); j = 0; 1; 2; \dots$$

Mais ainda,  ${}^{\circledast}{}_j$  é dado por:  ${}^{\circledast}{}_j = \frac{\langle Q_j; P_j \rangle}{\langle P_j; P_j \rangle}$ . ■

**Propriedade 5** (Relação de Recorrência). *Toda seqüência de polinômios ortogonais  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  satisfaz uma relação de recorrência de três termos da seguinte forma,*

$$\begin{aligned} P_{-1} &= 0 \\ P_0 &= 1 \\ P_{n+1}(x) &= (A_{n+1}x - B_{n+1})P_n(x) - C_{n+1}P_{n-1}(x); n = 0; 1; 2; \dots \end{aligned} \tag{1.20}$$

com  $A_{n+1}; B_n; C_n \in \mathbb{R}; n = 1; 2; \dots;$ , onde

$$A_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0; \quad C_{n+1} = \frac{A_{n+1}}{A_n} \frac{\langle P_n; P_n \rangle}{\langle P_{n-1}; P_{n-1} \rangle} \neq 0; \quad (1.21)$$

$$B_{n+1} = A_{n+1} \frac{\langle xP_n; P_n \rangle}{\langle P_n; P_n \rangle};$$

Demonstração:

Desde que  $xP_n(x) \in \mathcal{U}_{n+1}$ , pela propriedade 2, existem escalares  ${}^{\circledast}{}_0; \dots; {}^{\circledast}{}_{n+1}$  tais que

$$xP_n(x) = {}^{\circledast}{}_0 P_0(x) + \dots + {}^{\circledast}{}_n P_n(x) + {}^{\circledast}{}_{n+1} P_{n+1}(x);$$

Usando a ortogonalidade, segue imediatamente que

$$\langle xP_n; P_j \rangle = {}^{\circledast}{}_j \langle P_j; P_j \rangle \quad (1.22)$$

para  $j = 0; \dots; n+1$ . Por outro lado, pela propriedade 3,

$$\langle xP_n; P_j \rangle = \int_a^b xP_n(x)P_j(x) \rho(x) dx = \langle P_n; xP_j \rangle = 0 \quad (1.23)$$

para  $j = 0; \dots; n-2$ . De (1.22) e (1.23), obtemos

$$xP_n(x) = {}^{\circledast}{}_{n-1} P_{n-1}(x) + {}^{\circledast}{}_n P_n(x) + {}^{\circledast}{}_{n+1} P_{n+1}(x); \quad (1.24)$$

ou seja

$$P_{n+1}(x) = (A_{n+1}x - B_{n+1})P_n(x) - C_{n+1}P_{n-1}(x) \quad (1.25)$$

onde,  $A_{n+1} = \frac{1}{{}^{\circledast}{}_{n+1}}$ ;  $B_{n+1} = \frac{{}^{\circledast}{}_n}{{}^{\circledast}{}_{n+1}}$  e  $C_{n+1} = \frac{{}^{\circledast}{}_{n-1}}{{}^{\circledast}{}_{n+1}}$ . ■

**Corolário 1.1.** *Seja  $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  uma seqüência de polinômios ortonormais. Então vale a seguinte relação de recorrência de três termos:*

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x); \quad n \geq 0; \quad (1.26)$$

com as condições iniciais  $p_0(x) = 1$  e  $p_{-1}(x) = 0$ ; onde

$$a_n = \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n,n}} \quad e \quad b_n = \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n}} - \frac{a_{n+1,n}}{a_{n+1,n+1}};$$

Aplicando a relação de recorrência de três termos à expressão

$$p_{m+1}(x)p_m(y) - p_m(x)p_{m+1}(y);$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \rho_{m+1}(x)\rho_m(y) - \rho_m(x)\rho_{m+1}(y) &= A_{m+1}(x-y)\rho_m(x)\rho_m(y) \\ &+ C_{m+1} \{ \rho_{m-1}(y)\rho_m(x) - \rho_{m-1}(x)\rho_m(y) \} : \end{aligned}$$

Por (1.21),

$$\begin{aligned} \frac{a_{m,m}}{a_{m+1,m+1}} \frac{\rho_{m+1}(x)\rho_m(y) - \rho_m(x)\rho_{m+1}(y)}{x-y} &= \rho_m(x)\rho_m(y) \\ &+ \frac{a_{m-1,m-1}}{a_{m,m}} \frac{\rho_m(x)\rho_{m-1}(y) - \rho_{m-1}(x)\rho_m(y)}{x-y}. \end{aligned}$$

Escrevendo a expressão acima para  $m = 0; 1; \dots; n$ , (que vale para  $m = 0$  com  $a_{-1,-1}$  arbitrário) e somando-as, obtemos a importante identidade:

**Teorema 1.5** (Identidade de Christoffel-Darboux). *Seja  $\{\rho_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  uma seqüência de polinômios ortonormais. Então,*

$$\sum_{k=0}^n \rho_k(x)\rho_k(y) = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}} \frac{\rho_{n+1}(x)\rho_n(y) - \rho_n(x)\rho_{n+1}(y)}{x-y}. \quad (1.27)$$

No caso especial em que  $y = x$ , chegamos que

$$\sum_{k=0}^n \{\rho_k(x)\}^2 = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}} \left[ \rho'_{n+1}(x)\rho_n(x) - \rho'_n(x)\rho_{n+1}(x) \right]. \quad (1.28)$$

## 1.2.2 Propriedades elementares dos zeros

**Teorema 1.6.** *Seja  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  uma seqüência de polinômios ortogonais associados à função peso  $!(x)$  no intervalo  $[a; b]$ . Então todos os zeros de  $P_n(x)$  são reais, distintos e estão localizados em  $[a; b]$ .*

Demonstração:

Seja  $n \geq 1$  arbitrário e fixo. Suponhamos que  $P_n(x)$  não muda de sinal em  $(a; b)$ . Logo,  $P_n(x) > 0$  ou  $P_n(x) < 0$ , para todo  $x \in (a; b)$ . Então,

$$\int_a^b P_n(x)!(x)dx > 0 \quad \text{ou} \quad \int_a^b P_n(x)!(x)dx < 0. \quad (1.29)$$

Mas, pela ortogonalidade, temos que

$$\int_a^b P_n(x)!(x)dx = \langle 1; P_n(x) \rangle = 0. \quad (1.30)$$

De (1.29) e (1.30) temos um absurdo. Logo,  $P_n(x)$  muda de sinal pelo menos uma vez em  $(a; b)$ , ou seja,  $P_n(x)$  tem pelo menos um zero real de multiplicidade ímpar em  $(a; b)$ .

Seja  $x_{n,1}; x_{n,2}; \dots; x_{n,r}; r < n$ , os zeros de multiplicidade ímpar de  $P_n(x)$  em  $(a; b)$ . Então, pelo Teorema Fundamental de Álgebra,

$$P_n(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \dots (x - x_{n,r})q_{n-r}(x); \tag{1.31}$$

onde  $q_{n-r}(x)$  é um polinômio de grau  $n - r$ . Observemos que  $q_{n-r}(x)$  tem somente zeros complexos conjugados, zeros reais que não pertencem ao intervalo  $(a; b)$  ou zeros reais de multiplicidade par em  $(a; b)$ . Conseqüentemente,  $q_{n-r}(x)$  não muda de sinal neste intervalo.

Agora, usando a ortogonalidade, temos

$$\int_a^b (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \dots (x - x_{n,r})P_n(x)!(x)dx = 0; \tag{1.32}$$

Substituindo (1.31) em (1.32) segue que

$$\int_a^b (x - x_{n,1})^2(x - x_{n,2})^2 \dots (x - x_{n,r})^2q_{n-r}(x)!(x)dx \neq 0; \tag{1.33}$$

De (1.32) e (1.33) chegamos a um absurdo. Logo,  $r \geq n$ . Como  $P_n(x)$  é um polinômio de grau  $n$ , pelo Teorema Fundamental da Álgebra, concluímos que  $r = n$ . Portanto,  $P_n(x)$  tem exatamente  $n$  zeros distintos no intervalo  $(a; b)$ .

Observe que podemos mostrar que os zeros de  $P_n(x)$  são reais através da seguinte interpretação dos zeros como autovalores de uma matriz. Usando a fórmula de recorrência para os polinômios ortonormais, isto é, fazendo  $n = 1; 2; \dots; m$  em (1.26), respectivamente, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} xp_0(x) = a_1p_1(x) + b_0p_0(x) + a_0p_{-1}(x) \\ xp_1(x) = a_2p_2(x) + b_1p_1(x) + a_1p_0(x) \\ \vdots \\ xp_m(x) = a_{m+1}p_{m+1}(x) + b_m p_m(x) + a_m p_{m-1}(x) \end{cases}$$

Na forma matricial, o sistema linear acima pode ser escrito como

$$J_m(x)u(x) = xu(x) - a_m p_m(x)e_m;$$

onde

$$J_m = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m-2} & b_{m-2} & a_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m-1} & b_{m-1} \end{pmatrix}; u(x) = \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ p_{m-2}(x) \\ p_{m-1}(x) \end{pmatrix}$$

e

$$e_m = \begin{matrix} 3 & & & & & & & & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

Consideremos  $x_{m,k}$  um zero de  $p$



Analogamente, se considerarmos  $x = x_{n,k+1}$ ,

$$P'_n(x_{n,k+1})P_{n+1}(x_{n,k+1}) < 0; \quad 1 \leq k \leq n-1; \quad (1.37)$$

Multiplicando (1.36) e (1.37) e usando (1.35) chegamos que

$$P_{n+1}(x_{n,k})P_{n+1}(x_{n,k+1}) < 0; \quad 1 \leq k \leq n-1; \quad (1.38)$$

Então, existe pelo menos um zero de  $P_{n+1}(x)$  entre  $x_{n,k}$  e  $x_{n,k+1}$ , o que resulta em pelo menos  $n-1$  zeros de  $P_{n+1}(x)$  entre  $x_{n,1}$  e  $x_{n,n}$ .

Precisamos ainda verificar a existência de pelo menos mais dois zeros: um entre  $x_{n,0}$  e  $x_{n,1}$  e outro entre  $x_{n,n}$  e  $x_{n,n+1}$ .

Primeiramente, consideremos  $x = x_{n,n}$  em (1.34). Então,  $P'_n(x_{n,n})P_{n+1}(x_{n,n}) < 0$ . Como estamos considerando  $a_{n,n} > 0$ , vemos que  $P'_n(x_{n,n}) > 0$ : Logo,  $P_{n+1}(x_{n,n}) < 0$ . Além disso, como  $a_{n+1,n+1} > 0$ ,  $P_{n+1}(x_{n,n+1}) > 0$ . Então,  $P_{n+1}(x_{n,n})P_{n+1}(x_{n,n+1}) < 0$ . Assim, provamos a existência de pelo menos um zero de  $P_{n+1}(x)$  entre  $x_{n,n}$  e  $x_{n,n+1}$ .

Analogamente, se considerarmos  $x = x_{n,1}$  em (1.34), provamos a existência de pelo menos um zero entre  $x_{n,0}$  e  $x_{n,1}$ , totalizando os  $n+1$  zeros de  $P_{n+1}(x)$ . Dessa forma, temos que existe um, e somente um, zero de  $P_{n+1}(x)$  em cada intervalo  $(x_{n,k}; x_{n,k+1})$ ;  $k = 0; 1; 2; \dots; n$ . Resumindo, se  $x_{n,1} < \dots < x_{n,n}$  e  $x_{n+1,1} < \dots < x_{n+1,n+1}$  são zeros de  $P_n(x)$  e  $P_{n+1}(x)$ , respectivamente, então

$$x_{n+1,1} < x_{n,1} < \dots < x_{n,n} < x_{n+1,n+1};$$

■

### 1.2.3 Polinômios ortogonais clássicos

#### Polinômios de Jacobi - $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$

Os **polinômios de Jacobi** são definidos pela fórmula de Rodrigues (Szegő [15], p.67)

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left[ (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right]; \quad (1.39)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são números arbitrários. Para as considerações seguintes supomos que  $\alpha$  e  $\beta$  são reais maiores que  $-1$ .

Seja  $w(x) := n!(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$  uma função auxiliar. Então

$$(-2)^n w'(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left[ (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right];$$

Pela fórmula de Leibniz, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}] &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} [(1-x)^{\alpha+n}] \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} [(1+x)^{\beta+n}] \\ &= (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{\alpha+n}{n-k} \binom{\beta+n}{k} (x-1)^k (x+1)^{n-k}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{\alpha+n}{n-k} \binom{\beta+n}{k} (x-1)^k (x+1)^{n-k}. \quad (1.40)$$

Para  $x = 1$  o polinômio  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  assume o valor

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(1) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{\alpha+n}{n-k} \binom{\beta+n}{k} \\ &= \frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\cdots(\alpha+1)}{n!} \\ &= \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \end{aligned} \quad (1.41)$$

Os três primeiros polinômios de Jacobi são:

$$\begin{aligned} P_0^{(\alpha,\beta)}(x) &= 1; \\ P_1^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{2}[(\alpha+\beta+2)x + \alpha - \beta]; \\ P_2^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{8}[(\alpha+\beta)^2 + 7(\alpha+\beta) + 12]x^2 + 2(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+3)x \\ &\quad + (\alpha-\beta)^2 - (\alpha+\beta) - 4; \end{aligned}$$

Mostraremos agora que os polinômios de Jacobi são ortogonais no intervalo  $[-1; 1]$  com relação a função peso  $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ , isto é,

$$\begin{aligned} \langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x); P_m^{(\alpha,\beta)}(x) \rangle &= \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \\ &\begin{cases} = 0; & \text{se } m \neq n \\ > \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(\alpha+\beta+2n+1)} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}; & \text{se } m = n \end{cases} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Primeiramente de (1.40) o coeficiente de  $x^n$  em  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ , o qual denotamos por  $a_{n,n}$  é

$$\begin{aligned} a_{n,n} &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mu_{n+k} \mu_{n-k} \\ &= \frac{1}{2^n} \mu_{n+n} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}. \end{aligned}$$

Continuando, consideremos sem perda de generalidade que  $m \leq n$ , assim, usando (1.39) temos

$$\begin{aligned} \langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x); P_m^{(\alpha,\beta)}(x) \rangle &= \int_{-1}^1 P_m^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \frac{(-1)^m}{2^m m!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^m}{dx^m} (1-x)^{\alpha+m} (1+x)^{\beta+m} dx \\ &= \frac{(-1)^m}{2^m m!} \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \frac{d^m}{dx^m} (1-x)^{\alpha+m} (1+x)^{\beta+m} dx. \end{aligned}$$

Fazendo  $g_m(x) := (1-x)^{\alpha+m} (1+x)^{\beta+m}$  e integrando  $m$  vezes por parte, obtemos

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x); P_m^{(\alpha,\beta)}(x) \rangle = \frac{1}{2^m m!} \int_{-1}^1 \{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^{(m)} g_m(x) dx:$$

Portanto,

- Se  $n < m$  então temos que  $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^{(m)} = 0$ , logo  $\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x); P_m^{(\alpha,\beta)}(x) \rangle = 0$ :
- Se  $n = m$  então

$$\begin{aligned} \langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x); P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \rangle &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 \{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^{(n)} g_n(x) dx \\ &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 \{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^{(n)} (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} dx. \end{aligned}$$

Observe que  $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}^{(n)} = a_{n,n} n!$ . Logo

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x); P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \rangle = \frac{a_{n,n}}{2^n} \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} dx:$$

Agora, fazendo a mudança  $x = 2t - 1$  na integral acima, obtemos

$$\begin{aligned} \langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x); P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \rangle &= \frac{2a_{n,n}}{2^n} \int_{-1}^1 2^{\alpha+n} (1-t)^{\alpha+n} 2^{\beta+n} (t)^{\beta+n} dt \\ &= 2^{\alpha+\beta+n+1} a_{n,n} \int_{-1}^1 (1-t)^{\alpha+n} (t)^{\beta+n} dt. \end{aligned}$$

Sabemos que  $B(x; y) = \int_{-1}^1 (1-t)^{y-1} t^{x-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$  (ver [2]), e portanto, segue que

$$\begin{aligned} \langle P_n^{(\alpha, \beta)}(x); P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \rangle &= 2^{\alpha+\beta+n+1} a_{n,n} B(\alpha+n+1; \beta+n+1) \\ &= 2^{\alpha+\beta+n+1} a_{n,n} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}. \end{aligned}$$

Substituindo  $a_{n,n}$  nesta equação, temos

$$\begin{aligned} \langle P_n^{(\alpha, \beta)}(x); P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \rangle &= 2^{\alpha+\beta+n+1} \frac{\Gamma(\beta+\alpha+2n+1)}{2^n n! \Gamma(\beta+\alpha+n+1)} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+2n+2)} \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+n+1}}{n!} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{(\beta+\alpha+2n+1)\Gamma(\beta+\alpha+2n+2)}. \end{aligned}$$

A Relação de recorrência (1.20) para os polinômios de Jacobi, tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} &2(n+1)(n+\beta+1)(2n+\beta-\alpha)P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) \\ &= (2n+\beta+\alpha+1)[(2n+\beta+2)(2n+\beta-\alpha)x+\beta^2-\alpha^2]P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \\ &\quad - 2(n+\beta)(n-\alpha)(2n+\beta+2)P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x): \end{aligned}$$

O  $n$ -ésimo polinômio de Jacobi satisfaz uma equação diferencial linear de segunda ordem, a qual vamos deduzir. Seja a função  $u(x) = (1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}$ . Pela diferenciação de  $\log u$ , obtemos a equação

$$(1-x^2)u' + [(\beta+\alpha+2n)x+\beta-\alpha]u = 0: \quad (1.43)$$

Agora, diferenciando  $(n+1)$ -vezes (1.43) segue

$$(1-x^2)v'' + [(\beta+\alpha+2)x+\beta-\alpha]v' + (n+1)(\beta+\alpha+2n)v = 0; \quad (1.44)$$

onde  $v$  denota a função  $v = u^{(n)}$ . Se fizermos  $v = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ , então (1.44) transforma-se em

$$(1-x^2)y'' + [\beta-\alpha - (\beta+\alpha+2)x]y' + n(\beta+\alpha+n+1)y = 0:$$

Portanto, o polinômio de Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  satisfaz a equação diferencial acima. Acabamos de deduzir uma das mais importantes propriedades dos polinômios de Jacobi. Enunciaremos este resultado através de teorema.

**Teorema 1.9.** *Os polinômios de Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  satisfazem à equação diferencial de segunda ordem:*

$$(1-x^2)y'' + [\beta-\alpha - (\beta+\alpha+2)x]y' + n(n+\beta+\alpha+1)y = 0 \quad (1.45)$$

ou

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1} y' \right] + n(n+\beta+\alpha+1)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta y = 0:$$

**Teorema 1.10.** *Sejam  $\alpha > -1$  e  $\beta > -1$ . A equação diferencial*

$$(1 - x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y' + \alpha y = 0 \quad (1.46)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro, tem solução polinomial não identicamente nula se, e somente se,  $\alpha$  é dado por  $n(n + \alpha + \beta + 1)$ ,  $n = 0; 1; 2; \dots$ . A solução é  $cP_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ , e não existe solução polinomial que seja linearmente independente de  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ .

**Definição 1.6.** *A série hipergeométrica de Gauss  ${}_2F_1(a; b; c; z)$  é dada por*

$${}_2F_1(a; b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} z^k$$

onde  $c$  é um inteiro positivo, converge para  $|x| < 1$ . Além disso,  $Y(z) = {}_2F_1(a; b; c; z)$  satisfaz a equação diferencial

$$z(1 - z)Y'' + [c - (a + b + 1)z]Y' - abY = 0: \quad (1.47)$$

Se  $m$  é inteiro positivo,

$$\lim_{c \rightarrow -(m-1)} (c + m - 1) {}_2F_1(a; b; c; z) = (-1)^{m-1} \frac{a(a+1)(b+1)\dots(b+m-1)}{m!(m-1)!} z^m \times {}_2F_1(a+m; b+m; m+1; z) \quad (1.48)$$

e a função  $z^m {}_2F_1(a+m; b+m; m+1; z)$  satisfaz à equação (1.47) com  $c = -(m-1)$ .

Podemos representar o polinômio de Jacobi em termos da função hipergeométrica da seguinte forma

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} {}_2F_1\left(-n; n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1-x}{2}\right) \quad (1.49)$$

De fato: Seja  $y(x) = Y\left(\frac{1-x}{2}\right)$ . Derivando, obtemos  $y'(x) = -\frac{1}{2}Y'\left(\frac{1-x}{2}\right)$  e  $y''(x) = \frac{1}{4}Y''\left(\frac{1-x}{2}\right)$ .

Agora, fazendo  $z = \frac{1-x}{2}$  em (1.47), vem

$$\frac{1-x}{2} \left(1 - \frac{1-x}{2}\right) Y''\left(\frac{1-x}{2}\right) + \left[c - (a+b+1)\frac{1-x}{2}\right] Y'\left(\frac{1-x}{2}\right) - abY\left(\frac{1-x}{2}\right) = 0;$$

ou seja,

$$\frac{1-x^2}{4} Y''\left(\frac{1-x}{2}\right) + [2c - (a+b+1) + (a+b+1)x] \frac{1}{2} Y'\left(\frac{1-x}{2}\right) - abY\left(\frac{1-x}{2}\right) = 0:$$

Logo,

$$(1 - x^2)y''(x) + [2c - (a + b + 1) + (a + b + 1)x]y'(x) - aby(x) = 0 \quad (1.50)$$

Comparando (1.45) e (1.50), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} -2c + (a + b + 1) &= -\alpha - \beta \\ a + b + 1 &= \alpha + \beta + 2 \\ -ab &= n(n + \alpha + \beta + 1) \end{aligned} \quad (1.51)$$

Observemos que, em particular,  $a = -n$ ,  $b = n + \alpha + \beta + 1$  e  $c = \alpha + 1$  é solução de (1.51), o que significa que

$$y(x) = F_{-n}^{\mu} \left( -n; n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1 - x}{2} \right)$$

$$w(x) = (1 - x^2)^{\lambda-1/2}.$$

A notação usual para os polinômios ultraesféricos é  $P_n^{(\lambda)}(x)$ , onde

$$\begin{aligned} P_n^{(\lambda)}(x) &= \frac{\Gamma(\mathbb{R} + 1)\Gamma(n + 2\mathbb{R} + 1)}{\Gamma(2\mathbb{R} + 1)\Gamma(n + \mathbb{R} + 1)} P_n^{(\alpha, \alpha)}(x) \\ &= \frac{\Gamma(\mathbb{S} + 1)\Gamma(n + 2\mathbb{S})}{\Gamma(2\mathbb{S})\Gamma(n + \mathbb{S} + 1)} P_n^{(\lambda-1/2, \lambda-1/2)}(x); \quad \mathbb{R} = \mathbb{S} - 1/2 \end{aligned} \quad (1.54)$$

A relação de ortogonalidade desses polinômios é dada por:

$$\begin{aligned} \langle P_n^{(\lambda)}(x); P_m^{(\lambda)}(x) \rangle &= \int_{-1}^1 P_n^{(\lambda)}(x) P_m^{(\lambda)}(x) (1 - x^2)^{\lambda-1/2} dx \\ &\begin{cases} \neq 0; & \text{se } m \neq n \\ = \frac{2^{\lambda-1} \Gamma(n + 2\mathbb{S})}{n!(n + \mathbb{S}) [\Gamma(\mathbb{S})]^2}; & \text{se } m = n: \end{cases} \end{aligned} \quad (1.55)$$

Os três primeiros polinômios Ultraesféricos são:

$$\begin{aligned} P_0^{(\lambda)}(x) &= 1; \\ P_1^{(\lambda)}(x) &= 2\mathbb{S}x; \\ P_2^{(\lambda)}(x) &= 2\mathbb{S}(\mathbb{S} + 1)x^2 - \mathbb{S}: \end{aligned}$$

Os Polinômios ultraesféricos satisfazem à seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$(1 - x^2)y'' - (2\mathbb{S} + 1)xy' + n(n + 2\mathbb{S})y = 0; \quad (1.56)$$

Aplicando a transformada da seção 1.1.2, obtemos a seguinte e importante transformação da equação diferencial do Polinômio Ultraesférico:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1/2 (n + \mathbb{S})^2}{1 - x^2} + \frac{1/2 + \mathbb{S} - \mathbb{S}^2 + x^2}{(1 - x^2)^2} u = 0; \quad (1.57)$$

$$u = u(x) = (1 - x^2)^{\lambda/2+1/4} P_n^{(\lambda)}(x);$$

ou

$$\frac{d^2 u}{d\mu^2} + \frac{1/2 (n + \mathbb{S})^2}{\sin^2 \mu} + \frac{\mathbb{S}(1 - \mathbb{S})}{\sin^2 \mu} u = 0; \quad u = u(\mu) = (\sin^2 \mu)^{\lambda} P_n^{(\lambda)}(\cos \mu); \quad (1.58)$$

### Polinômios de Laguerre - $L_n^{(\alpha)}(x)$

Os **polinômios de Laguerre** são ortogonais no intervalo  $[0; \infty)$ , com relação à função peso  $! (x) = x^\alpha e^{-x}$ ,  $\alpha > -1$ , e podem ser definidos, pela Fórmula de Rodrigues, por

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} x^{\alpha+n} e^{-x} :$$

A relação de ortogonalidade desses polinômios é a seguinte

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n \neq m; \\ n! \Gamma(\alpha + n + 1) & , \text{ se } n = m: \end{cases}$$

Obtemos também a relação de recorrência de três termos através de (1.20), que é dada por:

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = [x - (2n + \alpha + 1)] L_n^{(\alpha)}(x) - n(n + \alpha) L_{n-1}^{(\alpha)}(x); \quad n = 1, 2, \dots :$$

Dessa forma, temos que os quatro primeiros polinômios de Laguerre são:

$$\begin{aligned} L_0^{(\alpha)} &= 1; \\ L_1^{(\alpha)} &= x - \alpha - 1; \\ L_2^{(\alpha)} &= x^2 - 2(\alpha + 2)x + (\alpha + 2)(\alpha + 1); \\ L_3^{(\alpha)} &= x^3 - 3(\alpha + 3)x^2 + 3(\alpha + 3)(\alpha + 2)x - (\alpha + 3)(\alpha + 2)(\alpha + 1); \end{aligned}$$

Esses polinômios satisfazem a seguinte equação diferencial:

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0:$$

Aplicando a transformada da Seção 1.1.3, obtemos

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1/2 n + (\alpha + 1) = 2}{x} + \frac{1 - \alpha^2}{4x^2} - \frac{1}{4} u = 0; \quad (1.59)$$

cuja solução é dada por

$$u = u(x) = e^{-x/2} x^{(\alpha+1)/2} L_n^{(\alpha)}(x):$$

Fazendo o limite  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} {}_2F_1(\alpha; -; \alpha; -^{-1}x)$ ; obtemos a série hipergeométrica

$${}_1F_1(\alpha; \alpha; x) = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+v-1) x^v}{(\alpha+1)\dots(\alpha+v-1) v!} :$$

Pode-se, então, demonstrar que ( ver Szegö [15], p. 103 )  $L_n^{(\alpha)}(x)$  é dado em termos das funções hipergeométricas, por

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \binom{n+\alpha}{n} {}_1F_1(-n; \alpha+1; x); \quad (1.60)$$



Daí, obtemos a importante relação entre os polinômios de Jacobi e de Laguerre

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(1 - 2^{-1}x):$$

Como consequência, se  $x_{n,1}^{(\alpha)} < \dots < x_{n,n}^{(\alpha)}$  denotam os zeros de  $L_n^{(\alpha)}(x)$ ; temos:

$$x_{n,n-j+1}^{(\alpha)} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(1 - x_{n,j}^{(\alpha, \beta)}); \quad j = 1; \dots; n:$$

Portanto, obtemos os seguintes resultados para o menor e maior zeros do polinômio de Laguerre:

$$x_{n,1}^{(\alpha)} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(1 - x_{n,n}^{(\alpha, \beta)}) \tag{1.61}$$

e

$$x_{n,n}^{(\alpha)} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(1 - x_{n,1}^{(\alpha, \beta)}): \tag{1.62}$$

### Polinômios de Hermite - $H_n(x)$

Os polinômios de Hermite são ortogonais no intervalo  $(-\infty; \infty)$ , com relação à função peso  $w(x) = e^{-x^2}$  e são definidos pela fórmula de Rodrigues por

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}: \tag{1.63}$$

A relação de ortogonalidade desses polinômios é a seguinte:

$$\langle H_n; H_m \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n \neq m; \\ \sqrt{\pi} 2^n n! & , \text{ se } n = m; \end{cases}$$

e a relação de recorrência de três termos dos polinômios de Hermite pode ser obtido através de (1.20), ou também, podemos deduzi-la da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{d^{(n+1)}}{dx^{(n+1)}} e^{-x^2} \\ &= (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{d^{(n)}}{dx^{(n)}} \left( \frac{d}{dx} e^{-x^2} \right) \\ &= 2(-1)^n e^{x^2} \frac{d^{(n)}}{dx^{(n)}} x e^{-x^2} \\ &= 2(-1)^n e^{x^2} \left[ x \frac{d^{(n)}}{dx^{(n)}} e^{-x^2} + n \frac{d^{(n-1)}}{dx^{(n-1)}} e^{-x^2} \right] \\ &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x); \quad n = 1; 2; \dots \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que os quatro primeiros polinômios de Hermite são:

$$\begin{aligned}H_0(x) &= 1; \\H_1(x) &= 2x; \\H_2(x) &= 4x^2 - 2; \\H_3(x) &= 8x^3 - 12x;\end{aligned}$$

Os polinômios de Hermite satisfazem a seguinte equação diferencial

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0:$$

Aplicando a transformada da Seção 1.1.3, obtemos que

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + (2n + 1 - x^2)u = 0; \quad (1.64)$$

cuja solução é dada por

$$u = u(x) = e^{-x/2} x^{(\alpha+1)/2} L_n^{(\alpha)}(x):$$

Um resultado muito interessante sobre os zeros de  $H_n(x)$ , demonstrado por Elbert e Laforgia em [8], é o seguinte:

**Teorema 1.11.** *Sejam  $x_{n,k}(\varsigma)$ ,  $k = 1; \dots; n$ , os zeros do polinômio ultraesférico  $P_n^{(\lambda)}(x)$  e sejam  $h_{n,k}$ ,  $k = 1; \dots; n$ , os zeros do polinômio de Hermite  $H_n(x)$ . Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\varsigma} x_{n,k}(\varsigma) = h_{n,k}; \quad k = 1; \dots; n:$$

Mais precisamente, Elbert e Laforgia em [8], mostraram a seguinte fórmula

$$\sqrt{\varsigma} x_{n,k}(\varsigma) = h_{n,k} \left[ 1 - \frac{2n-1+2h_{n,k}^2}{8\varsigma} + O\left(\frac{1}{\varsigma}\right) \right]; \quad (\varsigma \rightarrow \infty): \quad (1.65)$$

para todo  $k = 1; \dots; n$ .

# Capítulo 2

## Teoremas de Sturm-Liouville

Consideremos a equação da onda simples

$$y''(x) + k^2y(x) = 0; \tag{2.1}$$

onde  $k$  é uma constante positiva e a equação geral de Sturm-liouville

$$y''(x) + F(x)y(x) = 0; \tag{2.2}$$

onde  $F(x)$  é positiva e contínua em  $(a; b)$ .

Relembremos a interpretação cinemática das equações (2.1) e (2.2). A primeira equação escrita na forma

$$\ddot{x}(t) + k^2x(t) = 0$$

é aquela do oscilador harmônico, onde  $x(t)$  é a posição da partícula  $P$  no tempo  $t$  movendo-se ao longo do eixo sobre a influência de uma força central proporcional a distância de  $P$  à origem  $O$ . Os zeros de  $x(t)$  são simplesmente os tempos de passagem de  $P$  por  $O$ . A frequência da oscilação é constante e para uma condição inicial dada a amplitude é constante. A segunda equação

$$\ddot{x}(t) + F(t)x(t) = 0$$

descreve um caso mais geral de movimento retilíneo sobre uma força central. Este movimento ainda é proporcional a distância de  $P$  a  $O$ , mas o fator de proporcionalidade  $F(t)$  depende do tempo  $t$ . As oscilações variam em frequência e amplitude, há amortecimentos, a força pode até mesmo ser mais fraca para puxar a partícula até o centro ou para impedi-la de escapar para o infinito.

A equação (2.1) tem soluções

$$y_1(x) = \text{sen}(kx) \text{ e } y_2(x) = \text{cos}(kx);$$

as quais, como é obvio, são oscilatórias em  $(-\infty; \infty)$ .

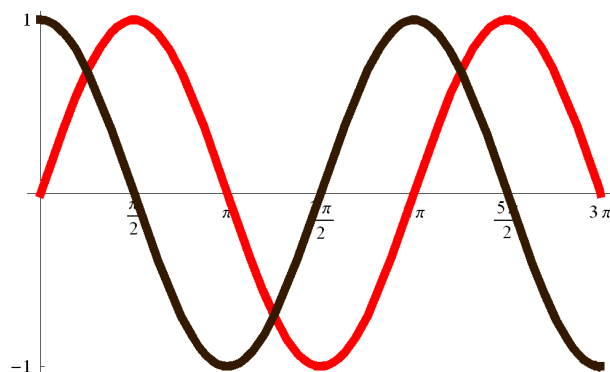


Figura 2.1: Gráfico de  $\sin(x)$  e  $\cos(x)$

Observemos dois fenômenos interessantes. O primeiro é de que os zeros, das soluções linearmente independentes da equação (2.1), se entrelaçam. Podemos esperar então que, se  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  são duas soluções linearmente independentes de uma equação diferencial de Sturm-Liouville, então entre dois zeros consecutivos de uma solução, há um zero da outra solução. A segunda observação é que a distância entre dois zeros consecutivos é  $\lambda/k$  e torna-se menor quanto maior  $k$ . Outro fato interessante para se discutir e analisar é o de comparar duas equações da forma

$$y''(x) + f(x)y(x) = 0 \text{ e } Y''(x) + F(x)Y(x) = 0;$$

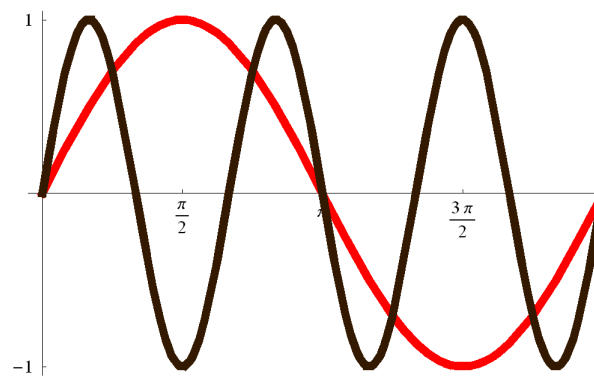
pois, pelo princípio heurístico, uma força maior deverá oscilar mais do que uma força mais fraca. Para exemplificar, consideremos as seguintes equações diferenciais

$$y''(x) + y(x) = 0 \text{ e } Y''(x) + 9Y(x) = 0;$$

cujas soluções são, respectivamente,  $y(x) = \text{sen}(x)$  e  $Y(x) = \text{sen}(3x)$ . É fácil ver que entre dois zeros quaisquer de  $y(x)$  há zeros de  $Y(x)$ . Veja figura 2.2.

Provaremos que estes fenômenos observados ocorrem para as soluções de todas as equações diferenciais de Sturm-Liouville.

Nas seções a seguir, faremos uma discussão do comportamento dos zeros de equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes variáveis, isto é, de equações da forma (2.2).

Figura 2.2: Gráfico de  $\sin(x)$  e  $\sin(3x)$ 

## 2.1 Teorema de Separação de Sturm

**Teorema 2.1.** (*Teorema de Separação de Sturm*): Sejam  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  duas soluções linearmente independentes da equação diferencial linear homogênea (2.2) em um intervalo  $(a; b)$  e suponha que  $y_1(x)$  tenha pelo menos dois zeros neste intervalo. Se  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são dois zeros consecutivos de  $y_1(x)$ , então  $y_2(x)$  tem um único zero no intervalo  $(\alpha_1; \alpha_2)$ .

Demonstração:

Sejam  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  ( $\alpha_1 < \alpha_2$ ) dois zeros consecutivos de  $y_1(x)$  no intervalo  $(a; b)$ , isto é,  $y_1(\alpha_1) = y_1(\alpha_2) = 0$  e  $y_1(x)$  é não nulo para  $\alpha_1 < x < \alpha_2$ . Mostraremos que existe exatamente um único ponto  $\eta$  entre  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  tal que  $y_2(\eta) = 0$ . (Ver figura 2.3)

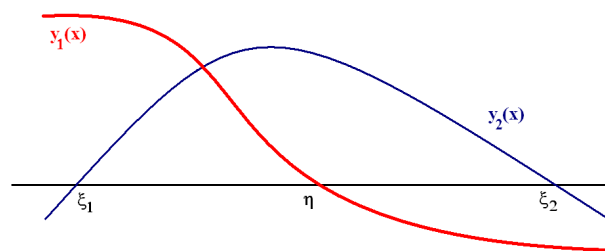


Figura 2.3:

Desde que  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  são soluções linearmente independentes da equação (2.2), segue do Teorema (1.2) que o Wronskiano de  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  é não nulo em  $(a; b)$ . Mais ainda, pela Fórmula de Abel (1.8) temos que

$$W(y_1; y_2; x) = C \neq 0;$$

onde  $C$  é uma constante, para todo  $x$  em  $(a; b)$ . Assim, o Wronskiano não muda de sinal nesse intervalo. Desde que os valores do Wronskiano em  $x =$

Sem perda de generalidade, suponha que  $y(x) > 0$  para todo  $x \in (x_1; x_2)$ , daí segue que  $y'(x_2) \leq 0$ . Se  $Y'(x_1) > 0$  e  $Y(x) > 0$  em todo intervalo  $(a; b)$  então

$$-Y(x_2)y'(x_2) > 0 \text{ e } \int_{x_1}^{x_2} [F(x) - f(x)]y(x)Y(x)dx > 0:$$

o que é contradição. Agora se  $Y'(x_1) < 0$  e  $Y(x) < 0$  em  $(a; b)$  segue que

$$-Y(x_2)y'(x_2) < 0 \text{ e } \int_{x_1}^{x_2} [F(x) - f(x)]y(x)Y(x)dx < 0:$$

o que é novamente uma contradição. Portanto,  $Y(x)$  não pode permanecer com o mesmo sinal em todo intervalo  $(a; b)$ . ■

**Teorema 2.3.** *Sejam  $y(x)$  e  $Y(x)$ , respectivamente, soluções não-triviais das equações diferenciais*

$$y''(x) + f(x)y(x) = 0 \text{ e } Y''(x) + F(x)Y(x) = 0$$

em um intervalo  $I = (a; b)$

Portanto, o Wronskiano de  $y(x)$  e  $Y(x)$  é uma função decrescente em  $[\alpha_1; \alpha_2]$ , o que contradiz (2.4). Agora, se  $Y(x) < 0$  em  $(\alpha_1; \alpha_2)$ , temos que

$$W(y; Y; \alpha_1) = -Y(\alpha_1)y'(\alpha_1) \geq 0; \quad W(y; Y; \alpha_2) = -Y(\alpha_2)y'(\alpha_2) \leq 0$$

e

$$\frac{d}{dx}W(y; Y; x) = y(x)Y(x)[f(x) - F(x)] < 0;$$

o que é novamente uma contradição. Portanto,  $Y(x)$  muda de sinal pelo menos uma vez em  $(\alpha_1; \alpha_2)$ . ■

**Teorema 2.4.** *Sejam  $y(x)$  e  $Y(x)$ , respectivamente, soluções não-triviais das equações diferenciais*

$$y''(x) + f(x)y(x) = 0 \quad \text{e} \quad Y''(x) + F(x)Y(x) = 0$$

em um intervalo  $I = (a; b)$ , com  $f(x) < F(x)$  funções contínuas para todo  $x$  em  $I$ . Suponha que  $\alpha_1$  é o primeiro zero de  $y(x)$  maior do que  $a$  e que  $\lim_{x \rightarrow a^+} W(y; Y; x) = 0$ , isto é,  $\lim_{x \rightarrow a^+} \{y(x)Y'(x) - Y(x)y'(x)\} = 0$ . Então  $Y(x)$  tem pelo menos um zero  $X_1$  tal que  $a < X_1 < \alpha_1$ .

Demonstração:

Suponha, sem perda de generalidade, que  $y(x)$  é positiva e não identicamente nula em  $(a; \alpha_1)$ , onde  $\alpha_1$  é o primeiro zero de  $y(x)$  maior do que  $a$  e  $\lim_{x \rightarrow a^+} W(y; Y; x) = 0$ . Se  $Y(x) > 0$  em  $(a; \alpha_1)$ , temos então que

$$W(y; Y; \alpha_1) = -Y(\alpha_1)y'(\alpha_1) \geq 0:$$

Por outro lado, temos

$$\frac{d}{dx}W(y; Y; x) = y(x)Y(x)[f(x) - F(x)] < 0$$

no intervalo  $(a; \alpha_1)$ , ou seja,  $W(y; Y; x)$  é uma função decrescente em  $(a; \alpha_1)$ . Como

$$\lim_{x \rightarrow a^+} W(y; Y; x) = 0;$$

temos uma contradição. Agora se  $Y(x) < 0$  em  $(a; \alpha_1)$ , então

$$W(y; Y; \alpha_1) = -Y(\alpha_1)y'(\alpha_1) \leq 0 \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}W(y; Y; x) = y(x)Y(x)[f(x) - F(x)] > 0;$$

o que é novamente uma contradição. Portanto,  $Y(x)$  muda de sinal pelo menos uma vez em  $(a; \alpha_1)$ .



**Corolário 2.2.** *Sejam  $y(x)$  e  $Y(x)$ , respectivamente, soluções não-triviais das equações diferenciais*

$$y''(x) + f(x)y(x) = 0 \quad \text{e} \quad Y''(x) + F(x)Y(x) = 0$$

*em um intervalo  $I = (a; b)$ , com  $f(x) < F(x)$  funções contínuas para todo  $x$  em  $I$ . Suponha que  $y(a) = 0$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^+} W(y; Y; x) = 0$  e que  $x_1$  é o primeiro zero de  $y(x)$  maior do que  $a$ . Então  $Y(x)$  tem pelo menos um zero  $X_1$  tal que  $a < X_1 < x_1$ .*

**Teorema 2.5.** *(Teorema de Comparação de Sturm): Sejam as funções  $y(x)$  e  $Y(x)$  soluções não triviais das equações diferenciais*

$$y'' + f(x)y = 0; \quad Y'' + F(x)Y = 0$$

*e sejam  $x_1; x_2; \dots; x_m$  e  $X_1; X_2; \dots; X_m$  zeros de  $y(x)$  e  $Y(x)$ , respectivamente, em um intervalo  $I = (a; b)$ . Suponha que  $f(x)$  e  $F(x)$  são contínuas, que*

$$f(x) < F(x); \quad a < x < x_m$$

*e que*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} [y'(x)Y(x) - y(x)Y'(x)] = 0; \quad (2.5)$$

*Então,*

$$X_k < x_k; \quad k = 1; 2; \dots; m;$$

Demonstração:

Este teorema decorre dos Teoremas 2.3 e 2.4. De fato, sejam  $x_1 < \dots < x_m$  e  $X_1 < \dots < X_m$  os zeros de  $y(x)$  e  $Y(x)$ , respectivamente. Então, aplicando o Teorema 2.4 no intervalo  $(a; x_1)$  concluímos que  $a < X_1 < x_1$ . Agora, aplicando o Teorema 2.3 em cada intervalo  $(x_k; x_{k+1})$ ,  $k = 1; \dots; n - 1$ , segue que  $x_k < X_{k+1} < x_{k+1}$ . ■

Observe que, na hipótese, podemos ter  $f(x) \leq F(x)$  desde que  $f(x) \equiv F(x)$  em cada um dos intervalos  $[a; x_1]$  e  $[x_k; x_{k+1}]$ ,  $k = 1; \dots; n - 1$ .

Vamos formular mais um resultado que é consequência do teorema anterior e que será denominado *Teorema de Comparação Paramétrica*.

**Corolário 2.3.** *Seja*

$$y''(x; \lambda) + F(x; \lambda)y(x; \lambda) = 0$$

*uma família de equações diferenciais de Sturm tais que, para todo  $\lambda \in (c; d)$ , a solução  $y(x; \lambda)$  desta equação possui zeros  $a < x_1(\lambda) < \dots < x_m(\lambda) < b$  distintos. Se  $\frac{\partial F(x; \lambda)}{\partial \lambda}$  existe e é menor do que zero, então, todos os zeros  $x_k = x_k(\lambda)$  de  $y(x; \lambda)$  são funções crescentes de  $\lambda$ .*

**Teorema 2.6.** *Se  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  são, respectivamente, soluções não-triviais das equações diferenciais*

$$(H_1(x)y'(x))' + F_1(x)y(x) = 0 \quad \text{e} \quad (H_2(x)y'(x))' + F_2(x)y(x) = 0$$

*em um intervalo  $I$ , e suponha que  $H_1, H_2, F_1, F_2$  são positivas, contínuas,  $H_2(x) < H_1(x)$  e  $F_2(x) > F_1(x)$  para todo  $x \in I$ . Então entre dois zeros de  $y_1(x)$  há pelo menos um zero de  $y_2(x)$ .*

Para demonstração deste teorema consultar Hille [12].

**Corolário 2.4.** *Seja  $y(x; \lambda)$  uma família de funções com relação ao parâmetro  $\lambda$ . Se para todo  $\lambda \in (c; d)$  a solução  $y(x; \lambda)$  da equação diferencial*

$$(H(x; \lambda)y'(x; \lambda))' + F(x; \lambda)y(x; \lambda) = 0$$

*possui zeros  $c < x_1(\lambda) < \dots < x_m(\lambda) < d$  e se  $\frac{\partial H(x; \lambda)}{\partial \lambda} > 0$  e  $\frac{\partial F(x; \lambda)}{\partial \lambda} < 0$ , então os zeros  $x = x(\lambda)$  de  $y(x; \lambda)$  são funções crescentes de  $\lambda$ .*

## 2.3 Teorema de Convexidade

**Teorema 2.7.** *Sejam  $F(x)$  uma função contínua e decrescente em  $(a; b)$  e  $y(x)$  uma solução não-trivial de*

$$y''(x) + F(x)y(x) = 0:$$

*Se  $x_1 < x_2 < x_3$  são três zeros consecutivos de  $y(x)$ , então  $x_2 - x_1 < x_3 - x_2$ , isto é, a seqüência de zeros de  $y(x)$  é convexa. Similarmente, se  $F(x)$  é crescente, a seqüência é côncava. Observe também que podemos reescrever a convexidade e a concavidade como,  $x_3 - 2x_2 - x_1 > 0$  e  $x_3 - 2x_2 - x_1 < 0$ , respectivamente.*

Demonstração:

Considere as equações

$$z''(x) + F(x + x_2)z(x) = 0 \quad \text{e} \quad Z''(x) + F(x + x_1)Z(x) = 0;$$

cujas soluções são  $z(x) = y(x + x_2)$  e  $Z(x) = y(x + x_1)$ . Como, por hipótese,  $F(x)$  é decrescente, temos que  $F(x + x_2) < F(x + x_1)$ . Desde que  $z(0) = z(x_3 - x_2) = 0$  e  $Z(0) = Z(x_2 - x_1) = 0$ , pelo Teorema de Comparação de Sturm, segue o resultado. ■

## 2.4 Limites para as Distâncias entre Zeros

Consideremos os Teoremas de Comparação e de Convexidade de Sturm na seguinte forma:

**Teorema 2.8.** *Seja  $y(x)$  uma solução não-trivial da equação diferencial de segunda ordem  $y'' + F(x)y = 0$  em um intervalo  $(a; b)$ , com  $F(x)$  continua neste intervalo. Se  $x_k < x_{k+1} < \dots$  denota os zeros consecutivos de  $y(x)$  em  $(a; b)$ , arranjados em ordem crescente, então:*

1. *Se existe  $F_M > 0$  tal que  $F(x) < F_M$  em  $(a; b)$  então*

$$\Delta x_k \equiv x_{k+1} - x_k > \frac{1/4}{\sqrt{F_M}}.$$

2. *Se existe  $F_m > 0$  tal que  $F(x) > F_m$  em  $(a; b)$  então*

$$\Delta x_k \equiv x_{k+1} - x_k < \frac{1/4}{\sqrt{F_m}}.$$

Demonstração:

Seja  $x_k < x_{k+1}$  zeros consecutivos de  $y(x)$ . Como  $y(x)$  é uma solução não trivial de  $y'' + F(x)y = 0$ , temos necessariamente que  $y'(x_k)y'(x_{k+1}) \neq 0$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $y(x)$  é positivo em  $(x_k; x_{k+1})$ . Então,  $y'(x_k) > 0$  e  $y'(x_{k+1}) < 0$  e portanto, a função

$$h(x) = \frac{-y'(x)}{y(x)}$$

satisfaz  $\lim_{x \rightarrow x_k^+} h(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow x_{k+1}^-} h(x) = +\infty$ . Além disso,  $h(x)$  é diferenciável em  $(x_k; x_{k+1})$  e

$$h'(x) = \frac{-y''(x)y(x) + y'(x)^2}{y(x)^2} = F(x) + h(x)^2.$$

Supondo agora que  $F(x) < F_M$  para todo  $x$  em  $(a; b)$ , onde  $F_M > 0$ , segue que  $h' < F_M + h^2$  em  $(x_k; x_{k+1})$ . Seja  $g(x) \equiv h'(x) - (F_M + h(x)^2) < 0$ . Então

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{x_k + \varepsilon}^{x_{k+1} - \varepsilon} g(x) dx < 0$$

ou seja,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \arctan \frac{h(x_{k+1} - \varepsilon)}{\sqrt{F_M}} - \arctan \frac{h(x_k + \varepsilon)}{\sqrt{F_M}} - \frac{1}{F_M} (x_{k+1} - x_k) < 0.$$

Logo, temos que

$$\frac{1/4}{\sqrt{F_M}} - (x_{k+1} - x_k) < 0.$$

Isto prova (1.). O item (2.) se prova de maneira análoga. ■

Uma análise da prova mostra que o primeiro resultado ainda vale se existe um ponto em  $(a; b)$  onde  $F(x) = F_M$  e  $F(x) < F_M$  para os outros pontos. Por exemplo, encontramos este caso quando  $F(x)$  alcança um máximo absoluto em  $(a; b)$ , cujo valor é  $F_M$ . O segundo resultado do teorema pode ser generalizado da mesma maneira.

## 2.5 Forma Integral do Teorema de Sturm

Consideremos uma família parametrizada de funções  $y(x; \lambda)$  satisfazendo

$$(H(x; \lambda)y'(x))' + F(x; \lambda)y(x) = 0: \quad (2.6)$$

Lembremos que, pelo Corolário 2.4, se  $H(x; \lambda)$  é crescente e  $F(x; \lambda)$  é decrescente com relação ao parâmetro  $\lambda$ , então cada zero  $\alpha = \alpha(\lambda)$  é uma função crescente do parâmetro.

Elbert e Muldoon [10] obtiveram uma bonita fórmula para a derivada  $\alpha'(\lambda)$  do zero  $\alpha$  da solução  $y(x)$  de (2.6). Esta fórmula é conhecida como *Fórmula de Richardson*. Demonstraremos esta fórmula a seguir:

**Teorema 2.9.** (*Fórmula de Richardson*): *Seja  $y(x; \lambda)$  solução de (2.6) para cada  $x \in I$ , e para cada  $\lambda$  em algum intervalo  $J$ . Suponha que as funções  $H^{-1}(x; \lambda)$  e  $F(x; \lambda)$  são continuamente diferenciáveis com respeito a ambas as variáveis. Então a solução  $y = y(x; \lambda)$  é também suave com respeito a  $x$  e a  $\lambda$ . Mais ainda, se os zeros da solução  $y$  são distintos, então cada zero  $\alpha$  é uma função suave do parâmetro  $\lambda$ . Além disso, suponha que  $y(a; \lambda) = 0$  ou  $y'(a; \lambda) = 0$ , onde a última derivada é com respeito à primeira variável. Então*

$$H(\alpha; \lambda) \frac{d}{dx} \left. \frac{dy(x; \lambda)}{dx} \right|_{x=\alpha} \alpha'(\lambda) = \int_a^\alpha \frac{\partial F(x; \lambda)}{\partial \lambda} [y(x; \lambda)]^2 + \frac{\partial H(x; \lambda)}{\partial \lambda} \frac{d}{dx} \left. \frac{dy(x; \lambda)}{dx} \right|_{x=\alpha} dx: \quad (2.7)$$

Demonstração:

Diferenciando (2.6) com respeito ao parâmetro obtemos

$$D_x[H_\lambda y_x + H y_{\lambda x}] + F_\lambda y + F y_\lambda = 0: \quad (2.8)$$

Multiplicando (2.6) por  $y_x$  e (2.8) por  $(-y)$  e somando, obtemos

$$D_x[Hy_x y_\lambda - Hy y_{\lambda x} - H_\lambda y_x y] = F_\lambda y^2 + H_\lambda y_\lambda^2: \quad (2.9)$$

Agora, se  $y(a; \lambda)y_x(a; \lambda) = 0$  para cada  $\lambda \in J$  e se,  $\alpha = \alpha(\lambda)$  é outro zero de  $y(x; \lambda)$ , vemos, integrando (2.9) de  $a$  até  $\alpha$ , que

$$H(\alpha; \lambda)y_x(\alpha; \lambda)y_\lambda(\alpha; \lambda) = \int_a^\alpha [F_\lambda y^2 + H_\lambda y_\lambda^2] dx: \quad (2.10)$$

Também, diferenciando  $y(x; \lambda) = 0$ , temos

$$y_x(x; \lambda) y'_\lambda(x; \lambda) + y_\mu(x; \lambda) = 0: \quad (2.11)$$

Então, substituindo (2.11) em (2.10), obtemos finalmente a fórmula de Richardson (2.7).

É óbvio que, quando  $H(x; \lambda) \equiv 1$ , para os zeros da equação diferencial de Sturm-Liouville  $y''(x) + F(x)y(x) = 0$ , temos

$$h \frac{dy(x; \lambda)}{dx} \Big|_{x=c} - i_2 c'(\lambda) = - \int_a^c \frac{F(x; \lambda)}{\lambda} [y(x; \lambda)]^2 dx: \quad (2.12)$$

Consideremos agora o caso onde o ponto  $a$  é um ponto singular da equação diferencial. Assumimos novamente que  $H(x; \lambda) \equiv 1$ . Então, se  $a$  é o ponto extremo esquerdo do intervalo  $I$ , para  $\lambda > a$  obtemos, como acima,

$$y_x(\lambda; \lambda) y_\mu(\lambda; \lambda) + [y y_{\mu x} - y_x y_\mu] \Big|_{x=a+\epsilon} = \int_{a+\epsilon}^\lambda [F_\mu y^2] dx: \quad (2.13)$$

para cada  $\epsilon > 0$ . Obtemos o resultado (2.12) novamente, desde que a integral do lado direito da igualdade existe e desde que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [y(a + \epsilon) y_{\mu x}(a + \epsilon) - y_x(a + \epsilon) y_\mu(a + \epsilon)] = 0: \quad (2.14)$$

■

# Capítulo 3

## Aplicações dos Teoremas de Sturm-Liouville para Zeros

### 3.1 Aplicações do Teorema de Comparação para Zeros

Neste capítulo, fizemos um estudo detalhado de alguns artigos que utilizam o Teorema de Comparação de Sturm para obter propriedades de monotonicidade e convexidade sobre zeros de alguns polinômios ortogonais clássicos.

#### 3.1.1 Limites para os Zeros dos Polinômios de Jacobi

O resultado descrito a seguir, que é devido a Szegő [15], é uma aplicação direta do Teorema de Comparação de Sturm 2.5.

Para iniciar, consideremos os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  definidos apenas entre  $-1/2$  e  $1/2$ , mais precisamente,  $-1/2 \leq \alpha, \beta \leq 1/2$ , excluindo, em geral, o caso  $\alpha^2 = \beta^2 = 1/4$ . Agora, denotemos por  $x_{n,\nu} = x_{n,\nu}(\alpha, \beta)$ ,  $\nu = 1, \dots, n$ , os zeros do polinômio de Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ , arranjados em ordem decrescente, ou seja,  $-1 < x_{n,n} < \dots < x_{n,1} < 1$ . Fazendo a mudança  $x = \cos \mu$ , temos que os zeros de  $P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \mu)$  são dados por  $\mu_{n,\nu} = \arccos x_{n,\nu}$ ,  $\nu = 1, \dots, n$ , com  $0 < \mu_{n,1} < \dots < \mu_{n,n} < \pi/2$ .

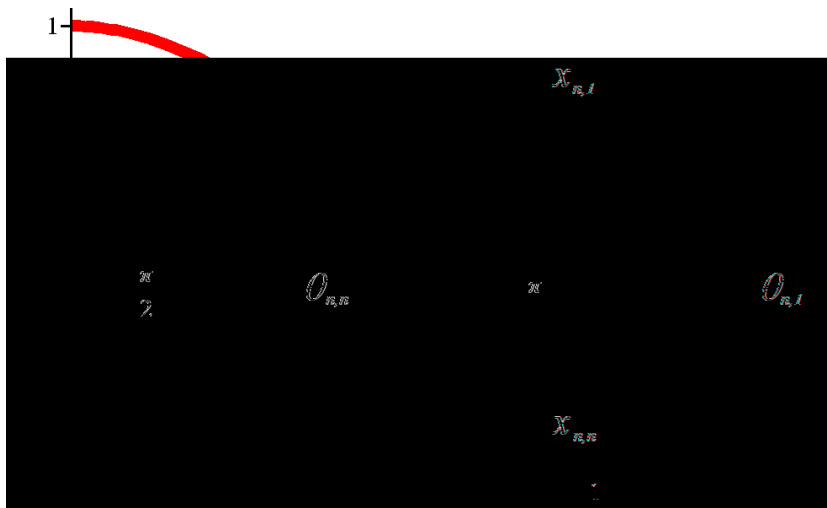


Figura 3.1: Gráfico de  $x = \cos \mu$

**Teorema 3.1.** *Sob as condições acima mencionadas, temos:*

$$\mu_{n,\nu} - \mu_{n,\nu-1} < \frac{1/4}{n + (\sigma + \tau + 1)/2}; \quad \sigma = 1; 2; \dots; n + 1; \quad (3.1)$$

que vale para  $\sigma^2 = \tau^2 = 1=4$ , com o sinal de  $=$  no lugar de  $<$ . Aqui,

$$\mu_{n,0} := \begin{cases} < 0 & , \text{ se } \sigma > -1=2 \\ -\mu_{n,1} & , \text{ se } \sigma = -1=2 \end{cases}$$

e

$$\mu_{n,n+1} := \begin{cases} < 1/4 & , \text{ se } \tau > -1=2 \\ 2/4 - \mu_{n,n} & , \text{ se } \tau = -1=2 \end{cases}$$

Demonstração:

Notemos que, para

$$\sigma = \tau = -1=2 \Rightarrow \mu_{n,\nu} = \begin{cases} \mu & \sigma = \tau = +1=2 \Rightarrow \mu_{n,\nu} = \frac{1/4}{n+1}; \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\sigma = -\tau = +1=2 \Rightarrow \mu_{n,\nu} = \frac{1/4}{n + \frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \sigma = -\tau = -1=2 \Rightarrow \mu_{n,\nu} = \frac{\sigma - \frac{1}{2}}{n + \frac{1}{2}} 1/4;$$

para  $\sigma = 0; 1; \dots; n + 1$ :

A desigualdade (3.1) segue imediatamente do Teorema de Comparação de Sturm 2.5, quando comparamos a equação (1.53), isto é,

$$\frac{d^2 u}{d\mu^2} + F_n(\mu; \sigma; \tau) u = 0;$$

$$F_n(\mu; \alpha; \beta) = \frac{\frac{1}{4} - \alpha^2}{4\sin^2(\mu/2)} + \frac{\frac{1}{4} - \beta^2}{4\cos^2(\mu/2)} + \mu \frac{\alpha + \beta + 1}{2}$$

cujas soluções são

$$u(\mu) = \sin^{\frac{\mu}{2}} P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \mu);$$

com

$$\frac{d^2 v}{d\mu^2} + f_n(\mu; \alpha; \beta)v = 0; \quad f_n(\mu; \alpha; \beta) = \mu \frac{\alpha + \beta + 1}{2} \tag{3.3}$$

com solução

$$v = \sin(n + (\alpha + \beta + 1)\mu/2)(\mu - \mu_{n, \nu-1});$$

De fato, como  $F_n > f_n$  temos que (1.53) é um majorante "Sturminiano" de (3.3). Assim, como  $\mu_{n, \nu-1}$  é um zero de  $v$ , o próximo zero de  $v$ , o qual denotamos por  $\bar{\mu}$ , ocorre depois de  $\mu_{n, \nu}$ .

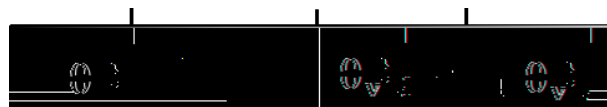


Figura 3.2: Desigualdades sobre zeros de Jacobi

Portanto, temos então que,  $\mu_{n, \nu} - \mu_{n, \nu-1} < \bar{\mu} - \mu_{n, \nu-1} = \frac{\frac{1}{4}}{n + (\alpha + \beta + 1)/2}$ . ■

**Teorema 3.2.** *Sob as condições mencionadas no teorema anterior, temos:*

$$\frac{\alpha + (\alpha + \beta - 1)/2}{n + (\alpha + \beta + 1)/2} \frac{1}{4} < \mu_{n, \nu} < \frac{\alpha}{n + (\alpha + \beta + 1)/2} \frac{1}{4}; \quad \alpha = 1; 2; \dots; n; \tag{3.4}$$

Demonstração:

Os limites (3.4) seguem da soma de (3.1) para  $\alpha = 1; 2; \dots; n+1$ ; e do fato de  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(-x)$ . Com efeito,

$$\mu_{n, \nu} = (\mu_{n, 1} - \mu_{n, 0}) + (\mu_{n, 2} - \mu_{n, 1}) + \dots + (\mu_{n, \nu} - \mu_{n, \nu-1}) < \frac{\frac{1}{4}}{n + (\alpha + \beta + 1)/2}$$

e

$$\frac{1}{4} - \mu_{n, n+1-\nu} = \mu_{n, \nu} < \frac{\alpha}{n + (\alpha + \beta + 1)/2} \frac{1}{4}$$

ou seja,

$$\mu_{n, n+1-\nu} > \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\alpha}{n + (\alpha + \beta + 1)/2} \right) = \frac{1}{4} \frac{n - \alpha + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}}{n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}};$$



Fazendo a mudança  $n+1-\alpha = \beta$ , temos

$$\mu_{n,\mu} > \frac{\beta-1+\frac{\alpha+\beta+1}{2}}{n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}} = \frac{\beta+\frac{\alpha+\beta-1}{2}}{n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}}.$$

No caso  $\alpha = -1=2$ , o fator  $\alpha$  do limite superior pode ser substituído por  $\alpha - 1=2$ .

Se  $\beta = -1=2$ , o fator  $\alpha+(\alpha+\beta+1)=2$  do limite inferior pode ser substituído por  $\alpha+(\alpha+\beta)=2$ .

Nos casos (3.2), valem os mesmos limites, com o sinal de  $=$  no lugar de  $<$ . ■

### 3.1.2 Limites Superiores para os Zeros dos Polinômios de Gegenbauer

Seja  $x_{nk}(\lambda)$ ,  $k = 1; 2; \dots; [n=2]$ , os zeros, arranjados em ordem decrescente, dos polinômios ultraesféricos  $P_n^{(\lambda)}(x)$ . Elbert e Laforgia em [7] estabeleceram limites superiores para  $x_{nk}(\lambda)$ . A ferramenta usada para obter esses limites é o Teorema de Comparação 2.5.

A idéia para resolver este problema é comparar a equação diferencial (1.57)

$$y' + F(x)y = 0; \quad (3.5)$$

onde

$$F(x) = \frac{(n+\lambda)^2}{1-x^2} + \frac{1=2+\lambda-\lambda^2+x^2=4}{(1-x^2)^2}$$

satisfeita por  $u_\lambda(x) = (1-x^2)^{\lambda/2+1/4}P_n^{(\lambda)}(x)$  com a equação diferencial

$$\mathcal{F}' + \mathcal{F}(x)\mathcal{F} = 0; \quad (3.6)$$

onde  $\mathcal{F}(x) < F(x)$  e cujos zeros da solução são conhecidos. Para isso, precisamos de alguns resultados preliminares.

**Lema 3.3.** *Seja  $\mathcal{H}(x)$  definido por*

$$\mathcal{H}(x) = [\mathcal{H}'(x)]^{-1/2}; \quad (3.7)$$

*Então as funções*

$$v_1(x) = \mathcal{H}(x) \cos \mathcal{H}'(x); \quad v_2(x) = \mathcal{H}(x) \operatorname{sen}'(x) \quad (3.8)$$

*são soluções da equação diferencial*

$$v'' + \left[ \mathcal{H}' \right]^2 - \frac{\mathcal{H}''}{\mathcal{H}} v = 0; \quad (3.9)$$

Demonstração:

A demonstração é facilmente verificada por substituição. ■

Para o nosso propósito, tomemos

$$v'(x) = \int_0^x \frac{(A - Bs^2)^{1/2}}{1 - s^2} ds; \quad 0 < A < B; \quad |x| \leq \sqrt{\frac{A}{B}} \quad (3.10)$$

Claramente,  $v'(x)$  é uma função estritamente crescente. As constantes  $A$  e  $B$  serão determinadas mais tarde. Fazendo a mudança

$$x = \sqrt{\frac{A}{B}} \operatorname{sen} \mu; \quad s = \sqrt{\frac{A}{B}} \operatorname{sen} \mu; \quad |\mu| < \frac{\pi}{2} \quad (3.11)$$

a integral (3.10) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{A}{\sqrt{B}} \int_0^\theta \frac{\cos^2 t}{1 - (A/B) \operatorname{sen}^2 t} dt \\ &= \sqrt{B} I(\mu) \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde

$$I(\mu) = \mu - \frac{B-A}{B} \arctan \frac{\mu}{B} \tan \mu \quad (3.13)$$

Por (3.8) a função  $v_1(x)$  tem zeros onde  $v'(x) = \pm \frac{\pi}{2}; \pm \frac{3\pi}{2}; \dots$  e a função  $v_2(x)$  tem zeros onde  $v'(x) = 0; \pm \frac{\pi}{4}; \pm \frac{3\pi}{4}; \dots$ . Suponha primeiramente  $n$  par e denotemos por  $\alpha_{nk}(s)$  as soluções da equação

$$v'(\alpha_{nk}(s)) = (n+1-2k)\frac{\pi}{2}; \quad k = 1; 2; \dots; n; \quad (3.14)$$

desde que eles existam. Para assegurar a existência de todos os  $\alpha_{nk}(s)$ , precisamos da relação

$$v'(\sqrt{\frac{A}{B}}) \geq (n-1)\frac{\pi}{2}; \quad (3.15)$$

que será mostrada mais adiante.

Claramente,  $\alpha_{nk}(s)$  ( $k = 1; 2; \dots; n$ ) são os zeros de  $v_1(x)$  quando  $n$  é par. Similarmente, é fácil ver que  $\alpha_{nk}(s)$  definido por (3.14) são zeros de  $v_2(x)$  quando  $n$  é ímpar. Usando (3.12) e (3.11) a relação (3.14) pode ser escrita como

$$\alpha_{nk}(s) = \sqrt{\frac{A}{B}} \operatorname{sen} \mu_{nk}(s) = \sqrt{\frac{A}{B}} \operatorname{sen} I^{-1} \left( \frac{\mu}{\sqrt{B}} \frac{n+1-2k}{2} \right); \quad k = 1; 2; \dots; n; \quad (3.16)$$

Agora, escolhamos os valores de  $A$  e  $B$  de tal maneira que a equação diferencial (3.5) é um majorante "Sturminiano" para (3.9) no intervalo  $(-\sqrt{\frac{A}{B}}; \sqrt{\frac{A}{B}})$ . Para isso, pomos

$$\begin{aligned} A &= n^2 + 2s n + \dots \\ B &= (n + s)^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.17)$$

e consideremos a diferença entre os coeficientes  $(F(x) - \mathcal{F}(x))$  das equações diferenciais (3.5) e (3.9)

$$\frac{(n + \alpha)^2}{1 - x^2} + \frac{1 - 2\alpha + \alpha^2 + x^2 - 4\alpha^2}{(1 - x^2)^2} - \left[ \alpha' \right]^2 - \frac{\mathcal{W}''}{\frac{1}{2}}; \quad |x| < \sqrt{\frac{A-B}{A+B}} \quad (3.18)$$

De (3.10) obtemos

$$\frac{\mathcal{W}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{W}''}{\mathcal{W}'} = -\frac{1}{2} (\log \mathcal{W}')' = \frac{Bx}{2(A - Bx^2)} - \frac{x}{1 - x^2} \quad (3.19)$$

e diferenciando obtemos

$$\frac{\mu \mathcal{W}''}{\frac{1}{2}} = \frac{\mathcal{W}''}{\frac{1}{2}} - \frac{\mu \mathcal{W}''}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{\mu \mathcal{W}'''}{\mathcal{W}'},$$

e

$$\frac{\mathcal{W}''}{\frac{1}{2}} = \frac{3B^2x^2 + 2AB}{4(A - Bx^2)} - \frac{Bx^2}{(1 - x^2)(A - Bx^2)} - \frac{1}{(1 - x^2)^2};$$

Conseqüentemente (3.18) pode ser escrito como

$$\frac{G(x)}{4(1 - x^2)^2(A - Bx^2)};$$

onde

$$\begin{aligned} G(x) = & 4B^2x^6 + [4B^2(\alpha - \alpha') - 4B^2 - 8AB\alpha + 4AB]x^4 \\ & + [4A^2\alpha - 8AB(\alpha - \alpha') + A^2 - 4AB + 3B^2]x^2 \\ & + 4A^2(\alpha - \alpha') + 2AB - 2A^2; \end{aligned} \quad (3.20)$$

Assim, a equação diferencial (3.5) é um majorante "Sturminiano" de (3.9) se  $G(x) > 0$  para  $|x| < \sqrt{\frac{A-B}{A+B}}$ .

No lema a seguir, damos três exemplos de escolhas para  $\alpha$  e  $\alpha'$  tais que  $G(x) > 0$ .

**Lema 3.4.** A função  $G(x)$  definida por (3.20) é positiva no intervalo  $(-\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}; \sqrt{\frac{A-B}{A+B}})$  nos seguintes casos

- (i)  $\alpha = \alpha' = 0; \quad \alpha > 0$
- (ii)  $\alpha = \alpha' = \alpha; \quad \alpha > 0$
- (iii)  $\alpha = \alpha; \quad \alpha' = 0; \quad -\frac{1}{2} < \alpha < 0 \quad \text{ou} \quad \alpha \geq 1.$

Demonstração:

Caso (i): Desde que  $B - A = \alpha^2$  de (3.20) temos

$$\begin{aligned} G(x) = & 4(B^2\alpha - B^2 + AB)x^4 + (-8AB\alpha + A^2 - 4AB + 3B^2)x^2 \\ & + 4A^2\alpha + 2AB - 2A^2 \\ = & 4\alpha(A - Bx^2)^2 + \alpha^2q(x^2); \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde

$$q(t) = -4Bt^2 + (3B - A)t + 2A; \quad (3.22)$$

O Primeiro termo do lado direito de (3.21) é claramente positivo; Assim, para provar que  $G(x) > 0$  é suficiente mostrar que  $q(t) > 0$  quando  $0 \leq t < A=B$ . É claro que  $q(0) > 0$  e  $q(A=B) = 5A(B - A) = B > 0$ . Além disso,  $q(t)$  é côncava, portanto, concluímos que  $q(t) > 0$  para todo  $t \in [0; A=B]$ .

Caso (ii): Como no caso (i) temos  $B - A = \rho^2$  e

$$G(x) = 4\rho x^2(A - Bx^2)^2 + \rho^2 q(x^2);$$

onde  $q(t)$  é definido por (3.22). Como no caso anterior, concluímos que  $G(x) > 0$ .

Caso (iii): Agora temos  $B - A = \rho^2 - \rho$  e

$$G(x) = (\rho^2 - \rho)q(x^2)$$

o qual é positivo para  $-\frac{1}{2} < \rho < 0$  ou  $\rho > 1$ . Assim, a prova do lema (3.4) está completa. ■

Agora estamos prontos para provar o seguinte teorema:

**Teorema 3.5.** Para  $k = 1; 2; \dots; [n=2]$  seja  $\alpha_{nk}(\rho)$  o  $k$ -ésimo zero positivo em ordem decrescente dos polinômios ultrasféricos  $P_n^{(\lambda)}(x)$ . Então as desigualdades

$$\alpha_{nk}(\rho) \leq \alpha_{nk}(\rho); \quad n = 1; 2; \dots; \quad k = 1; 2; \dots; [n=2] \quad (3.23)$$

são válidas para as seguintes escolhas de  $A$  e  $B$  em (3.17):

$$(i) \quad \rho = \pm = 0; \quad \rho > 0$$

$$(ii) \quad \rho = \pm = \rho; \quad \rho > 0$$

$$(iii) \quad \rho = \rho; \quad \pm = 0; \quad -\frac{1}{3} \leq \rho < 0 \quad \text{ou} \quad \rho \geq 1.$$

Quando  $\rho = 0$  os polinômios Ultraesféricos reduzem-se aos polinômios de Tchebycheff e temos igualdade em (3.23) em todos os casos. Se  $\rho = 1$  temos igualdade no caso (iii).

Demonstração:

Para assegurar a existência de  $\alpha_{nk}(\rho)$  precisamos provar a desigualdade (3.15). Por (3.12) temos

$$\rho \left( \overline{A=B} \right) = (\rho=2)(\sqrt{B} - \sqrt{B-A});$$

Realmente, para o caso (i)

$$\rho(A=B) = n \frac{\mu}{2} > (n-1) \frac{\mu}{2}$$

e para o caso (ii)

$$\rho(A=B) = \left[ \rho \frac{(n+\mu)^2 + \mu - \mu}{2} \right] \frac{\mu}{2} \geq n \frac{\mu}{2} > (n-1) \frac{\mu}{2}$$

Finalmente, para o caso (iii), obtemos para  $\mu \geq -1=3$

$$\rho(A=B) = \left[ n + \mu - \sqrt{\mu^2 - \mu} \right] \frac{\mu}{2} \geq (n-1) \frac{\mu}{2}$$

Distinguimos os casos de  $n$  par e ímpar. Para valores de  $n$  par temos

$$P_n^{(\lambda)}(0) \neq 0; \quad \frac{d}{dx} P_n^{(\lambda)}(x) \Big|_{x=0} = 0$$

Consideremos a solução  $v_1(x) = \frac{1}{2} \cos x$  da equação (3.9). Por (3.10), (3.7) e (3.19) temos

$$v_1(0) = 0; \quad v_1'(0) = \frac{1}{\sqrt{4A}}; \quad v_1''(0) = 0$$

conseqüentemente  $v_1(0) > 0$  e  $v_1'(0) = 0$ . Além disso, pelo lema (3.4) a equação diferencial (3.5) é um majorante "Sturminiano" de (3.9). Daí, aplicando o Teorema de Comparação de Sturm (2.5) no ponto  $x = 0$  concluímos que o  $k$ -ésimo zero positivo de  $P_n^{(\lambda)}(x)$  ocorre antes do  $k$ -ésimo zero de  $v_1(x)$ , o que prova a primeira parte do teorema. Para  $n$  ímpar,

$$P_n^{(\lambda)}(0) = 0; \quad \frac{d}{dx} P_n^{(\lambda)}(x) \Big|_{x=0} \neq 0$$

Tomando então a solução  $v_2(x) = \frac{1}{2} \sin x$  da equação (3.9), segue que  $v_2(0) = 0$  e  $v_2'(0) > 0$ . Assim, pelo mesmo argumento anterior, a prova está completa. ■

A fórmula (3.16) para  $x_{nk}(\mu)$  permite-nos obter bons limites superiores para  $x_{nk}(\mu)$ , mas infelizmente sua aplicação não é imediata. Portanto, é útil relatar aqui algumas conseqüências do Teorema 3.5 que estabelecemos como corolário.

**Corolário 3.1.** *Se  $A$  e  $B$  satisfazem as condições do Teorema 3.5, então vale as desigualdades*

$$x_{nk}(\mu) \leq \rho \frac{A=B \mu}{\sqrt{B - \sqrt{B - A}}} \frac{\mu}{2}; \quad k = 1; 2; \dots; [n=2]; \quad (3.24)$$

Demonstração:

Desde que  $\rho \frac{A=B \mu}{(B - A)=B \mu} < 1$  de (3.12) temos que

$$v_1(x) \geq \sqrt{B}(\mu - \rho \frac{A=B \mu}{(B - A)=B \mu})$$

ou

$$\mu < \frac{f'(x)}{\sqrt{B} - \sqrt{B-A}};$$

Conseqüentemente por (3.11)

$$x \leq \sqrt[A=B]{\frac{f'(x)}{\sqrt{B} - \sqrt{B-A}}}; \quad (3.25)$$

Além disso, pelo Teorema 3.5, temos  $f'(x_{nk}(\lambda)) \leq f'(x_{nk}(\lambda))$  (porque  $f'(x)$  é uma função estritamente crescente). Aplicando (3.25) com  $x = x_{nk}(\lambda)$  e levando em conta (3.14) obtemos o resultado desejado. ■

Observação: De (3.24) e do Teorema 3.5 obtemos imediatamente o interessante limite superior para o maior zero

$$x_{n1}(\lambda) < \frac{\sqrt{n^2 + 2\lambda n}}{n + \lambda}; \quad \lambda \geq 0;$$

Agora vamos usar (3.12) para encontrar os primeiros três termos da expansão em série de  $I^{-1}(\mu)$ . Desta maneira, obtemos aproximações para  $x_{nk}(\lambda)$  que são particularmente precisos quando  $k$  é próximo a  $[n/2]$ . Por simplicidade, usamos a notação

$$m = \sqrt[B-A]{B};$$

Então,  $0 < m < 1$  e por (3.12)

$$I(\mu) = \mu - m \arctan(m \tan \mu);$$

Da expansão de  $\tan \mu$  e  $\arctan \mu$  encontramos

$$I(\mu) = (1 - m^2)\mu - \frac{m^2}{3}(1 - m^2)\mu^3 - \frac{m^2(1 - m^2)(2 - 3m^2)}{15}\mu^5 + \dots$$

e, após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$I^{-1}(\mu) = \frac{\mu}{(1 - m^2)} - \frac{m^2}{3} \frac{\mu}{1 - m^2} + \frac{2m^2(1 + m^2)}{15} \frac{\mu}{1 - m^2} + \dots \quad (3.26)$$

Desta maneira, conseguimos um resultado que fornece aproximações para  $x_{nk}(\lambda)$ . Enunciaremos este resultado no corolário a seguir:

**Corolário 3.2.** *Se  $A$ ,  $B$  e  $\lambda$  satisfazem as condições do Teorema 3.5. Então para  $x_{nk}^{(\lambda)}$  temos a fórmula de aproximação*

$$x_{nk}(\lambda) \doteq \sqrt[A=B]{\zeta} + \frac{2m^2 - 1}{6} \zeta^3 + \frac{16m^4 - 4m^2 + 1}{120} \zeta^5; \quad (3.27)$$

onde

$$\zeta = (n + 1 - 2k) \frac{\sqrt{B}}{A} \frac{1}{2}; \quad m^2 = \frac{B - A}{B};$$

Demonstração:

De (3.16) temos que calcular os três primeiros termos da expansão em série de  $\text{sen} l^{-1}(\mu)$  com  $\mu = (n+1-2k)\frac{1}{2}\sqrt{B}$ . Usando a fórmula (3.26) para  $l^{-1}(\mu)$  encontramos a expansão desejada. ■

### 3.1.3 Limites para os Zeros dos Polinômios de Jacobi

Seja  $x_{nk}(\alpha, \beta)$ ,  $k = 1; 2; \dots; n$  os zeros dos polinômios de Jacobi, arranjados em ordem decrescente. Elbert, Laforgia e Rodonó em [9], usaram o Teorema de Comparação de Sturm 2.5, como na seção anterior, para obter desigualdades para  $x_{nk}$ .

Para isso, consideremos a função

$$u(x) = (1-x)^{(\alpha+1)/2}(1+x)^{(\beta+1)/2}P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \quad (3.28)$$

que é solução da equação diferencial (1.52)

$$u' + q(x)u = 0 \quad (3.29)$$

onde

$$q(x) = \frac{1}{4} \frac{1-\alpha^2}{(1-x)^2} + \frac{1}{4} \frac{1-\beta^2}{(1+x)^2} + \frac{n(n+\alpha+\beta+1) + (\alpha+1)(\beta+1)}{1-x^2} \quad (3.30)$$

para,  $\alpha > -1$  e  $\beta > -1$ . Introduzindo a notação

$$\alpha = \alpha + \frac{1}{2}; \quad \beta = \beta + \frac{1}{2}$$

e

$$A = (2n + \alpha + \beta)^2; \quad B = 4n^2 + 4n(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)^2; \quad C = 2(\alpha^2 - \beta^2)$$

a função  $q(x)$  assume a forma

$$q(x) = \frac{B - Cx - Ax^2}{4(1-x^2)^2} + \frac{\frac{3}{4} + \alpha}{4(1-x)^2} + \frac{\frac{3}{4} + \beta}{4(1+x)^2} + \frac{(\alpha + \beta) + 4 + \frac{1}{8}}{1-x^2}. \quad (3.31)$$

O polinômio quadrático  $B - Cx - Ax^2$  pode ser escrito como

$$B - Cx - Ax^2 = A(a-x)(x-b)$$

onde

$$a, b = \frac{\alpha^2 - \beta^2 \pm \sqrt{16n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}}{(2n+\alpha+\beta)^2}; \quad a > b \quad (3.32)$$

É claro que  $-1 \leq b < a \leq 1$  e, de (3.32)

$$\rho \frac{1}{(1-a)(1-b)} = \frac{2\theta}{2n+\theta+\epsilon}; \quad \rho \frac{1}{(1+a)(1+b)} = \frac{2\epsilon}{2n+\theta+\epsilon}; \quad (3.33)$$

Agora, introduzimos a função  $\theta(x)$  por

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \int_x^a \frac{S}{4(1-s^2)^2} \frac{B - Cs_a S^2}{ds} = \\ &= \frac{2n+\theta+\epsilon}{2} \int_x^a \frac{\rho}{1-s^2} \frac{1}{(a-s)(s-b)} ds; \quad b \leq x \leq a; \end{aligned} \quad (3.34)$$

É fácil ver que  $\theta(x)$  é decrescente com relação a  $x$ . Fazendo a substituição

$$t^2 = \frac{a-x}{x-b}; \quad 0 \leq t < \infty$$

em (3.34) obtemos

$$\theta(x) = (2n+\theta+\epsilon) \arctan t - \theta \arctan \frac{1-b}{1-a} t - \epsilon \arctan \frac{1+b}{1+a} t;$$

Esta fórmula pode ser verificada diretamente pela diferenciação com respeito a  $x$ , levando em conta a fórmula (3.33). Além disso, temos

$$\theta(a) = 0; \quad \theta(b) = n\theta;$$

Agora, definimos a função  $\eta(x)$  por

$$\eta(x) = (1-x^2)^{1/2} [(a-x)(x-b)]^{-1/4}; \quad (3.35)$$

Portanto, pelo Lema 3.3, as funções

$$v_1(x) = \eta(x) \sin \theta(x); \quad v_2(x) = \eta(x) \cos \theta(x) \quad (3.36)$$

são soluções linearmente independentes da equação diferencial (3.9)

$$v'' + \left[ \rho^2 - \frac{\eta''}{\eta} \right] v = 0;$$

para  $b < x < a$ .

Por (3.36) e (3.35) temos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} v_1(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} v_1(x) = 0;$$



Conseqüentemente, a função  $v_1(x)$  tem zeros em  $\alpha_k$ , onde

$$v_1'(\alpha_k) = k\lambda; \quad k = 1; 2; \dots; n \tag{3.37}$$

com os casos especiais

$$\alpha_0 = a; \quad \alpha_n = b;$$

Agora, estamos em condição de provar o seguinte resultado:

**Teorema 3.6.** *Para  $k = 1; 2; \dots; n$ , seja  $x_{nk} = x_{nk}(\alpha; \beta)$  o  $k$ -ésimo zero, em ordem decrescente, do polinômio de Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ . Então, para  $\alpha > -1/2$  e  $\beta > -1/2$  temos*

$$\alpha_k < x_{nk} < \alpha_{k-1}; \quad k = 1; 2; \dots; n$$

onde,  $\alpha_0; \alpha_1; \dots; \alpha_n$  são definidos por (3.37). Em particular  $\alpha_0 = a$  e  $\alpha_n = b$  são dados por (3.32).

Demonstração:

Aplicaremos o Teorema da Comparação de Sturm 2.5 para as equações diferenciais (3.29) e (3.9). Realmente, mostraremos que a equação diferencial (3.29) é um majorante "Sturminiano" de (3.9).

Por (3.31) e (3.34) temos que mostrar a desigualdade

$$\frac{\frac{3}{4} + \alpha}{4(1-x)^2} + \frac{\frac{3}{4} + \beta}{4(1+x)^2} + \frac{(\alpha + \beta) - 4 + \frac{1}{8}}{1-x^2} + \frac{W'}{\frac{1}{2}} > 0; \quad \text{para } b < x < a; \tag{3.38}$$

onde,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  e  $\frac{1}{2}$  é definido por (3.35).

Por (3.35) temos

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1-a-x} - \frac{1}{4(x-b)} - \frac{x}{1-x^2}$$

e

$$\frac{W'}{\frac{1}{2}} = \frac{\mu}{\frac{1}{2}} \frac{P_2}{P_1} + \frac{\mu}{\frac{1}{2}} \frac{P_1}{P_1};$$

Usando essas relações em (3.38) temos que provar a desigualdade

$$2[(\alpha - \beta)x + \alpha + \beta](x-a)^2(x-b)^2 + P(x) > 0$$

onde

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 - 2)(x-a)^2(x-b)^2 - 2x(1-x^2)(2x-a-b)(a-x)(x-b) + \\ &= +(1-x^2)^2 - 3x^2 - 3(a+b)x + \frac{5a^2 + 2ab + 5b^2}{4}; \end{aligned}$$

Desde

$$(\mathbb{Q} - \mathbb{E})x + \mathbb{Q} + \mathbb{E} > 0; \quad -1 \leq x \leq 1;$$

precisamos mostrar somente que  $P(x) \geq 0$  para  $b < x < a$ .

Com as notações

$$\frac{a+b}{2} = F; \quad ab = G;$$

o polinômio  $P(x)$  pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} P(x) = P(x; F; G) &= (x^2 - 2)(x^2 - 2Fx + G)^2 + 4x(1 - x^2)(x - F) \cdot \\ &\cdot (x^2 - 2Fx + G) + (x^2 - 1)(3x^2 - 6Fx + 5F^2 - 2G); \end{aligned}$$

Desde

$$P(x; F; G) = P(-x; -F; G);$$

é suficiente para provar a desigualdade  $P(x) \geq 0$  somente para  $F \geq 0$ . Observemos que

$$2F - 1 \leq G \leq 2xF - x^2; \quad b \leq x \leq a;$$

Certamente, a primeira desigualdade é equivalente a  $(1 - a)(1 - b) \geq 0$  o que é claramente verdadeira. A segunda delas é equivalente a  $(a - x)(x - b) \geq 0$  o que é também verdadeiro para  $b \leq x \leq a$ .

Agora,  $P(x; F; G)$  é um polinômio quadrático em  $G$  e o coeficiente de  $G^2$  é  $x^2 - 2$  que é negativo em nosso caso. Conseqüentemente, a fim de provar que  $P(x) \geq 0$ , temos somente que checar as desigualdades nos pontos extremos  $G = 2F - 1$  e  $G = 2xF - x^2$ , isto é,

$$P(x; F; 2F - 1) \geq 0; \quad P(x; F; 2xF - x^2) \geq 0;$$

No primeiro caso obtemos

$$P(x; F; 2F - 1) = (x - 1)^3 F [(x + 3)F + 2(x + 1)(x - 2)];$$

Claramente,  $(x - 1)^3 < 0$  e  $F \geq 0$ , assim, temos que mostrar somente que a expressão no intervalo  $b < a < x$  é negativa. Desde que

$$F = \frac{a+b}{2} \leq \frac{1+x}{2}$$

precisamos provar que  $(x + 3)\frac{1+x}{2} + 2(x + 1)(x - 2) < 0$ . Mas, isto é verdade porque esta desigualdade é equivalente a  $\frac{5}{2}(1 + x)(x - 1) < 0$ . Isso prova que  $P(x; F; 2F - 1) \geq 0$ . A desigualdade  $P(x; F; 2xF - x^2) \geq 0$  segue imediatamente observando que isto é equivalente a

$5(x-1)^2(F-x)^2 \geq 0$ . Assim, podemos concluir que  $P(x) > 0$  em  $b < x < a$ , ou equivalentemente, que a equação (3.29) é um majorante "Sturminiano" de (3.9). Conseqüentemente, aplicando o Teorema da Comparação de Sturm 2.5 nas equações (3.29) e (3.9), concluímos que entre dois zeros consecutivos  $x_k, x_{k-1}$  de  $V_1(x)$  ocorre pelo menos um zero de  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ . Mas sabemos que no intervalo  $(-1; 1)$  a exatamente  $n$  zeros de  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ , daí podemos concluir que em cada intervalo  $(x_k, x_{k-1})$  ocorre exatamente o zero  $x_{nk}(\alpha, \beta)$  de  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ . ■

### 3.1.4 Propriedades de Monotonicidade dos Zeros dos Polinômios de Gegenbauer

Denotemos por  $x_{nk}(\lambda)$ ,  $k = 1, 2, \dots, [n/2]$ , os zeros positivos do polinômio ultrasférico  $P_n^{(\lambda)}(x)$ . Sabemos que  $x_{nk}(\lambda)$  são funções decrescentes de  $\lambda$ . Entretanto, a questão muito natural é avaliar quantitativamente o comportamento dos zeros positivos. Uma forma natural para fazer tal avaliação é determinar a função extrema  $f_n(\lambda)$  para a qual os produtos  $f_n(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$ , tornam-se funções crescentes de  $\lambda$ . O professor Askey conjecturou que a função apropriada será  $f(\lambda) = \sqrt{\lambda + 1}$ . Esta conjectura foi estabelecida parcialmente em [4], pelo menos para  $n$  suficientemente grande e quando o parâmetro  $\lambda$  é relativamente pequeno. Esta conjectura foi provada por Ahmed, Muldoon e Spigler em [1] para todo  $n \in \mathbb{N}$  e para todo  $\lambda \in (-1/2; 3/2)$ , ainda com a melhor função  $f_n(\lambda) = [\lambda + (2n^2 + 1)/(4n + 2)]^{1/2}$ . Mais tarde, Elbert e Siafarikas em [11] estenderam o resultado de Ahmed, Muldoon e Spigler para todo  $\lambda > -1/2$ , provando assim esta conjectura. Em [5], Dimitrov e Rodrigues provaram que o resultado de Elbert e Siafarikas é preciso, isto é, que não pode ser melhorado. Estas contribuições ajudaram a conhecer o comportamento dos zeros dos polinômios Gegenbauer mais profundamente.

Nesta seção demonstraremos o resultado obtido por Ahmed, Muldoon e Spigler em [1]. Para isto, usaremos o Teorema de Comparação de Sturm, para obter  $f := f_n(\lambda)$  e mostrar tal monotonicidade.

Para dar início, lembremos que a função  $u = u_\lambda(x) = (1 - x^2)^{\lambda/2+1/4}P_n^{(\lambda)}(x)$  satisfaz a equação diferencial (1.57)

$$u'' + F(x; \lambda)u = 0; \quad (3.39)$$

onde

$$F(x; \lambda) = \frac{(n + \lambda)^2}{1 - x^2} + \frac{1/2 + \lambda - \lambda^2 + x^2/4}{(1 - x^2)^2}.$$

Seja  $t = f_n(s)x$ , então a função  $U_\lambda(t) = u_\lambda(x)$ ,

$$U_\lambda(t) = 1 - \frac{t}{f} P_n^{(\lambda)}\left(\frac{t}{f}\right) \quad (3.40)$$

é solução da equação diferencial

$$\frac{d^2 U(t)}{dt^2} + \mathfrak{F}(t; s)U(t) = 0; \quad (3.41)$$

com

$$\mathfrak{F}(t; s) = [f_n(s)]^{-2} F\left(\frac{t}{f}; s\right);$$

ou seja,

$$\mathfrak{F}(t; s) = \frac{(n+s)^2}{f^2 - t^2} + \frac{(1-2s - s^2)f^2 + t^2 - 4}{(f^2 - t^2)^2} \quad (3.42)$$

Conseqüentemente, os zeros de  $U(t)$  são 0,  $f_n(s)$  e  $t_{nk}(s) = f_n(s)x_{nk}^{(\lambda)}$ .

Agora, estamos em condições de mostrar o seguinte resultado:

**Teorema 3.7.** *A função  $t_{nk}(s) = f_n(s)x_{nk}(s)$  cresce com  $s \in I$ , onde  $I \subset (-\frac{1}{2}; \infty)$ , para toda função  $f_n(s)$  que satisfaz  $f_n(s) > 0$ ,  $f_n'(s) > 0$ ,  $f_n'(s)$  contínua para  $s \in I$  e*

$$\begin{aligned} & (f^2 - t^2)[2(n+s)^2 f' - (2n+1)f] + 2t^2(n+s)(f^2 - t^2) \\ & + f f'(1 + 2s - 2s^2)(f^2 - t^2) + t^2 f f' \geq 0; \quad 0 < t < f; \end{aligned} \quad (3.43)$$

Demonstração:

A conclusão deste teorema segue do Teorema da Comparação de Sturm aplicado na equação diferencial de Sturm-Liouville (3.41). Isto implica que os zeros  $t_{nk}(s)$  da solução da equação diferencial (3.41) são funções crescentes de  $s$  desde que a derivada parcial de  $\mathfrak{F}(t; s)$  com respeito a  $s$  é negativa para todo  $t \in (0; f)$  quando  $s \in I$ . Assim, de (3.42)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{F}(t; s)}{\partial s} = & \frac{1}{(f^2 - t^2)^3} \{ (f^2 - t^2)[2(n+s)^2 f' - (2n+1)f] + 2t^2(n+s)(f^2 - t^2) \\ & + f f'(1 + 2s - 2s^2)(f^2 - t^2) + t^2 f f' \} \end{aligned}$$

chegamos ao resultado desejado. ■

Spigler [14] chamou a função  $f_n(s)$  "aceitável" se satisfaz as hipóteses colocadas sobre  $f$  no teorema (3.7).

Para determinar  $f$ , dividimos (3.43) por  $[f_n(s)]^4$  e assim obtemos

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{t}{f} \cdot \left[ 2(n+s)^2 \frac{f'}{f} - (2n+1) + 2 \frac{t}{f} (n+s) \right] \left( 1 - \frac{t}{f} \right) \\ & + \frac{f'}{f} (1 + 2s - 2s^2) \left( 1 - \frac{t}{f} \right) + \frac{t}{f} \frac{f'}{f} \geq 0 \end{aligned}$$

Depois de algumas manipulações algébricas, temos

$$\frac{f'}{f} \geq F \frac{t^{\mu}}{f^2} \quad ; 0 < t < f; \quad (3.44)$$

onde

$$F(u) = \frac{(1-u)[2(n+1) - 2u(n+s)]}{2(n+s)}$$

### 3.1.5 Resultados de Monotonicidade dos Zeros do Polinômio de Laguerre

Para  $\alpha > -1$  e  $n = 1, 2, \dots$ , seja  $l_{n,k} = l_{n,k}^{(\alpha)}$  o

onde

$$F_n(t) = \frac{3[b']^2 - 2bb'}{4b^4} + \frac{f_n(x)}{b^2}. \quad (3.57)$$

Para a prova dos Teoremas, usaremos duas transformações de (3.52). Para provar (3.50), seja  $\rho_n(x)$  definida por

$$\rho_n(x) = n + \frac{\textcircled{+} + 1}{2} x - \frac{1}{4} x^2. \quad (3.58)$$

É fácil ver que

$$\max_{-\infty < x < \infty} \rho_n(x) = \rho_n(\tilde{x}_n) = n + \frac{\textcircled{+} + 1}{2} \tilde{x}_n;$$

onde

$$\tilde{x}_n = 2n + \textcircled{+} + 1.$$

Mais ainda,

$$\rho_{n+1}(x) > \rho_n(\tilde{x}_n); \quad \text{para } \tilde{x}_{n1} < x < \tilde{x}_{n2}; \quad (3.59)$$

onde

$$\tilde{x}_{n1} = \tilde{x}_n + 2 - \frac{1}{4\tilde{x}_n + 4}; \quad \tilde{x}_{n2} = \tilde{x}_n + 2 + \frac{1}{4\tilde{x}_n + 4}.$$

Agora distinguimos três casos:

- a.  $\tilde{x}_{n1} < l_{n+1,k} < \tilde{x}_{n2}$ ;
- b.  $\tilde{x}_{n2} \leq l_{n+1,k}$ ;
- c.  $0 < l_{n+1,k} < \tilde{x}_{n1}$ .

Note que, usando (3.58), a desigualdade (3.50) pode ser escrita como

$$\rho_n(l_{n,k}) < \rho_{n+1}(l_{n+1,k}); \quad k = 1; 2; \dots; n; \quad (3.60)$$

*Caso a.* De (3.59) obtemos imediatamente a desigualdade (3.60);

*Caso b.* Para provar este caso, usamos um resultado que é devido a Szegő [[15], p.129], que diz que  $(n + (\textcircled{+} + 1)/2)x_{n,k}$  decresce com  $n$ , isto é

$$n + \frac{\textcircled{+} + 1}{2} x_{n,k} > n + 1 + \frac{\textcircled{+} + 1}{2} x_{n+1,k}; \quad \textcircled{+} > -1; \quad k = 1; \dots; n;$$

Dessa forma, obtemos

$$l_{n+1,k} < l_{n,k} \frac{2n + \textcircled{+} + 1}{2n + \textcircled{+} + 3}.$$

Além disso, de (3.58), a função  $\rho_n(x)$  decresce com respeito a  $x$  em  $[\tilde{X}_n + 2; \infty)$ . Por esta razão, para provar (3.60) é suficiente mostrar que

$$\rho_n(l_{n,k}) < \rho_{n+1}(l_{n,k}(2n + \textcircled{0} + 1) = (2n + \textcircled{0} + 3)):$$

De fato, esta última desigualdade é verdadeira, pois é equivalente a  $\frac{\textcircled{0} 2n + \textcircled{0} + 1}{2n + \textcircled{0} + 3} < 1$ .

Caso c. Em (3.54), escolhemos  $a(x)$  e  $b(x)$  como

$$b(x) = b_n(x) = n + \frac{1}{2}(\textcircled{0} + 1) - \frac{1}{2}x; \quad a(x) = a_n(x) = [b(x)]^{-1/2}.$$

Fazendo  $x' = 0$  em (3.55) encontramos que a função  $Z_n(t) = \frac{\textcircled{0}}{b_n(t)} y_n(x)$  satisfaz a equação diferencial

$$z''(t) + F_n(t)z(t) = 0; \quad (3.61)$$

onde

$$F_n(t) = \frac{4t + 1 - \textcircled{0}^2}{4x^2 b_n^2(x)} + \frac{3}{16} \frac{1}{b_n^4(x)} \quad (3.62)$$

e

$$x = x_n(t) = 2n + \frac{1}{2}(\textcircled{0} + 1) - \frac{\textcircled{0}}{n + \frac{1}{2}(\textcircled{0} + 1) - t}.$$

Além de (3.61), consideremos a equação diferencial

$$w''(t) + F_{n+1}(t)w(t) = 0; \quad (3.63)$$

satisfeita por  $Z_{n+1}(t)$ . Se pusermos  $x' = \tilde{X}_{n+1}$  em (3.55), então  $b_n(x)$  e  $b_{n+1}(x)$  são positivos em  $I = [0; \tilde{X}_{n+1}]$ . Agora, afirmamos que (3.61) é um majorante "Sturminiano" de (3.63). De fato, isto é verificado se mostrarmos que as funções  $x_n(t)b_n(x)$  e  $b_n(x)$  são crescentes com relação à  $n$ . Com efeito, temos que

$$\frac{\textcircled{0} x_n(t)}{\textcircled{0} n} = \frac{-2x}{2n + \textcircled{0} + 1 - x} < 0; \quad \frac{\textcircled{0} b_n(x)}{\textcircled{0} n} = \frac{2n + \textcircled{0} + 1}{2n + \textcircled{0} + 1 - x} > 0$$

e também

$$\frac{\textcircled{0}}{\textcircled{0} n} [x b_n(x)] = \frac{x^2}{2n + \textcircled{0} + 1 - x} > 0:$$

Daí, segue que  $b_n(x)$  e  $x b_n(x)$  são ambas crescentes com respeito a  $n$ , quando  $t$  é fixo.

A condição limite (2.5), do Teorema 2.5, é satisfeita em  $t = 0$ , isto é,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} [y'(t)Y(t) - y(t)Y'(t)] = 0:$$



Então, uma aplicação direta do Teorema de Comparação de Sturm 2.5 nos leva às seguintes desigualdades entre os zeros de  $Z_n(t)$  e  $Z_{n+1}(t)$

$$t_{n,k} < t_{n+1,k}; \quad k = 1; 2; \dots; n;$$

onde  $t_{n,k} = \rho_n(l_{n,k})$  e  $t_{n+1,k} = \rho_{n+1}(l_{n+1,k})$ . Isto completa a prova do Teorema 3.9.

Agora vamos provar o Teorema 3.10. Aplicando a transformação  $t = x=l_{nk}$  na equação diferencial (3.52) (isto é,  $b(x) = 1=l_{nk}$  em (3.55)), verificamos por (3.57) que a função  $Z_n(t) = y_n(x)$  satisfaz

$$z'' + l_{n,k}^2 f_n(l_{n,k}t)z = 0; \quad (3.64)$$

daí, por (3.53)

$$l_{n,k}^2 f_n(l_{n,k}t) = \frac{n + \frac{1}{2}(\mathbb{Q} + 1)}{t} l_{n,k} + \frac{1 - \mathbb{Q}^2}{4t^2} - \frac{1}{4} l_{n,k}^2; \quad (3.65)$$

Além de (3.64), consideremos a equação

$$w'' + l_{n+1,k}^2 f_{n+1}(l_{n+1,k}t)w = 0; \quad (3.66)$$

satisfeita por  $Z_{n+1}(t) = y_{n+1}(x)$ . As funções  $Z_n(t)$  e  $Z_{n+1}(t)$  tem um zero comum em  $t = 1$ . Além disso, para  $t > 1$  temos,

$$\begin{aligned} t[l_{n+1,k}^2 f_{n+1}(l_{n+1,k}t) - l_{n,k}^2 f_n(l_{n,k}t)] &> [n + 1 + \frac{1}{2}(\mathbb{Q} + 1)]l_{n+1,k} - \frac{1}{4}l_{n+1,k}^2 \\ &\quad - [n + \frac{1}{2}(\mathbb{Q} + 1)]l_{n,k} + \frac{1}{4}l_{n,k}^2; \end{aligned}$$

sendo o lado direito da desigualdade positivo em vista do Teorema 3.9. Por isso, (3.66) é um majorante "Sturminiano" de (3.64) e aplicando o Teorema de Comparação Comparação de Sturm temos que o próximo zero de  $Z_{n+1}(t)$  ocorre antes do próximo zero de  $Z_n(t)$ , isto é,

$$\frac{l_{n+1,k+j}}{l_{n+1,k}} < \frac{l_{n,k+j}}{l_{n,k}}; \quad j = 1; 2; \dots; n - k; \quad (3.67)$$

Isto prova (3.51) para  $m = 1$ . Então, por indução, obtemos de (3.67), a desigualdade mais geral

$$\frac{l_{n+m,k+j}}{l_{n+m,k}} < \frac{l_{n,k+j}}{l_{n,k}}; \quad m = 1; 2; \dots; \quad (3.68)$$

o que completa a prova do Teorema 3.10.

## 3.2 Desigualdades Tipo Turán sobre Zeros

Consideremos a equação hipergeométrica de Gauss (1.47), satisfeita pela função hipergeométrica de Gauss  ${}_2F_1(a; b; c; x)$

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0$$

com as seguintes restrições aos parâmetros que asseguram a condição oscilatória em  $(0;1)$

$$a < 0; \quad b > 1; \quad c - a > 1; \quad c - b < 0 \quad (3.69)$$

ou, por simetria, trocando  $a$  por  $b$  e vice-versa. Agora, ao invés de considerarmos os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$ , consideremos os parâmetros reais

$$n = -a; \quad \alpha = c - 1; \quad \beta = a + b - c$$

o qual corresponde a conhecida notação para os polinômios de Jacobi (1.49)

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} {}_2F_1(-n; n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; (1-x)^{-2}):$$

As condições oscilatórias (3.69) no intervalo  $(0;1)$  são reescritas, em termos dos parâmetros de Jacobi, como segue:

$$n > 0; \quad n + \alpha + \beta > 0; \quad n + \alpha > 0; \quad n + \beta > 0: \quad (3.70)$$

Aplicando a transformação (1.12) à equação diferencial hipergeométrica acima, chegamos a uma equação da forma (1.10)

$$u'' + \lambda(x)u' = 0:$$

com

$$\lambda(x) = \frac{L^2 - \alpha^2 - \beta^2 + 1}{x(1-x)} + \frac{1 - \alpha^2}{x^2} + \frac{1 - \beta^2}{(1-x)^2} \quad (3.71)$$

onde

$$L = b - a = 2n + \alpha + \beta + 1:$$

Em [3], Deaño, Gil e Segura, estudaram as propriedades de monotonicidade de  $\lambda(x)$  para todos os valores dos parâmetros  $L$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ . Mostraremos os resultados obtidos por eles a seguir.

Mudança  $z(x) = \arccos(1 - 2x)$ :

A escolha  $z(x) = \arccos(1 - 2x)$ , leva o intervalo  $(0;1)$  ao intervalo  $(0; \frac{1}{2})$ . A nova variável  $z(x)$  é o ângulo  $\mu$  em (1.53). Usaremos a notação  $\mu(x)$  ao invés de  $z(x)$ . Aplicando a transformação de Liouville da Seção 1.1.2, obtemos

$$4\Omega(x) = L^2 - \frac{\alpha^2 - 1}{x} - \frac{\beta^2 - 1}{1-x}; \quad (3.72)$$

Observe que a equação diferencial na forma normal correspondente a  $\Omega(x(\mu))$  em (3.72), torna-se a equação estudada por Szegő, Teoremas 3.1 e 3.2. Como veremos a seguir, usando o Teorema 2.8, obtemos os mesmos limites de Szegő quando  $|\alpha|, |\beta| \leq 1$ , estendendo o resultado para todos os valores  $\alpha$  e  $\beta$  desde que satisfaçam as condições oscilatória (3.70). Para isso, vamos destacar algumas propriedades de  $\Omega(x)$ . Temos que:

$$\begin{aligned} \Omega'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\alpha^2 - 1}{x^2} - \frac{\beta^2 - 1}{(1-x)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4(\alpha^2 - \beta^2)x^2 - 2(4\alpha^2 - 1)x + 4\alpha^2 - 1}{4x^2(1-x)^2} = 0. \end{aligned}$$

Logo,

1. Se  $|\alpha| = |\beta| = \frac{1}{2}$ , então  $\Omega'(x) = 0$ ;
2. Caso contrário:
  - a. Se  $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$  e  $|\beta| \leq \frac{1}{2}$ , então  $\Omega(x)$  tem um mínimo absoluto em  $[0;1]$ ;
  - b. Se  $|\alpha| \geq \frac{1}{2}$  e  $|\beta| \geq \frac{1}{2}$ , então  $\Omega(x)$  tem um máximo absoluto em  $[0;1]$ ;
  - c. Se  $|\alpha| \geq \frac{1}{2}$  e  $|\beta| \leq \frac{1}{2}$ , então  $\Omega'(x) > 0$  em  $(0;1)$ ;
  - d. Se  $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$  e  $|\beta| \geq \frac{1}{2}$ , então  $\Omega'(x) < 0$  em  $(0;1)$ .

Nos casos onde existe um extremo absoluto, ele é atingido em

$$x_e = \frac{\sqrt{|1-\alpha^2|}}{\sqrt{|1-\alpha^2|} + \sqrt{|1-\beta^2|}} \quad (3.73)$$

e o valor de  $\Omega(x)$  neste ponto é

$$\Omega(x_e) = \frac{1}{4} L^2 \pm \frac{\sqrt{|1-\alpha^2|} \sqrt{|1-\beta^2|}}{\sqrt{|1-\alpha^2|} + \sqrt{|1-\beta^2|}} > 0; \quad (3.74)$$

onde o sinal + quando o extremo é máximo e o sinal - quando ele é um mínimo. Conseqüentemente, pelo Teorema 2.8, obtemos as seguintes relações em termos de  $\mu(x)$ .

**Teorema 3.11.** *Seja  $n$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  satisfazendo (3.70). Seja  $x_k$ ,  $k = 1; \dots; n$ ,  $x_1 < \dots < x_n$ , os zeros de qualquer solução da equação hipergeométrica em  $(0; 1)$  e seja  $\mu_k = \arccos(1 - 2x_k)$ ,  $k = 1; \dots; n$ . Então*

1. Se  $|\alpha| = |\beta| = \frac{1}{2}$ , então  $\Delta\mu_k = \frac{2\sqrt{L}}{L}$ ;

2. Caso contrário:

- a. Se  $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$  e  $|\beta| \leq \frac{1}{2}$ , então  $\Delta\mu_k < \sqrt{\frac{2\sqrt{L}}{L^2 + \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{1-4-\alpha^2} + \sqrt{\frac{1-\beta^2}{1-4-\beta^2}}}}}$ ;

- b. Se  $|\alpha| \geq \frac{1}{2}$  e  $|\beta| \geq \frac{1}{2}$ , então  $\Delta\mu_k > \sqrt{\frac{2\sqrt{L}}{L^2 - \sqrt{\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2-1-4} + \sqrt{\frac{\beta^2-1}{\beta^2-1-4}}}}}$ ;

- c. Se  $|\alpha| \geq \frac{1}{2}$  e  $|\beta| \leq \frac{1}{2}$ , então  $\Delta^2\mu_k < 0$ ;

- d. Se  $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$  e  $|\beta| \geq \frac{1}{2}$ , então  $\Delta^2\mu_k > 0$ .

Mudança  $z(x) = \log(x)$ :

Fazendo a mudança  $z(x) = \log(x)$ , a correspondente função  $\Omega(x)$  é

$$4\Omega(x) = -L^2 + \frac{L^2 - \alpha^2 + \beta^2 - 1}{1-x} + \frac{1 - \beta^2}{(1-x)^2}; \quad (3.75)$$

onde a singularidade em  $x = 0$  foi eliminada pela nova variável  $z(x)$  e desapareceu em  $\Omega(x)$ .

Novamente, calculando  $\Omega'(x)$  obtemos

$$\begin{aligned} \Omega'(x) &= \frac{1 - \beta^2}{2(1-x)^3} + \frac{-1 + L^2 - \alpha^2 + \beta^2}{4(1-x)^2} \\ &= \frac{(-1 + L^2 - \alpha^2 + \beta^2)x - 1 - L^2 + \alpha^2 + \beta^2}{4(x-1)^3}; \end{aligned}$$

Logo, temos as seguintes propriedades de monotonicidade em  $(0; 1)$ :

1. Se  $|\beta| \leq 1$ , então  $\Omega'(x) > 0$ ;

2. Se  $|\beta| > 1$ , então  $\Omega(x)$  tem somente um máximo absoluto, o qual está localizado em

$$0 < x_e = \frac{L^2 - \alpha^2 - (\beta^2 - 1)}{L^2 - \alpha^2 + \beta^2 - 1} < 1;$$

onde

$$\Omega(x_e) = \frac{1}{16} \frac{[(L + \alpha)^2 - (\beta^2 - 1)][(L - \alpha)^2 - (\beta^2 - 1)]}{\beta^2 - 1} > 1;$$

Conseqüentemente, temos o seguinte:

**Teorema 3.12.** *Sejam  $n, \alpha$  e  $\beta$  satisfazendo (3.70) e  $z(x) = \log(x)$ . Então os zeros da função hipergeométrica em  $(0;1)$  satisfazem*

1. Se  $|\alpha| \leq 1$ , então  $\Delta^2 Z_k < 0$ . Portanto, os zeros da função hipergeométrica satisfazem a desigualdade

$$X_k^2 > X_{k-1}X_{k+1}. \tag{3.76}$$

2. Se  $|\alpha| > 1$ , então  $\Delta Z_k > f(L; \alpha; \beta)$  onde

$$f(L; \alpha; \beta) = \frac{L^2 - \alpha^2 - 1}{[(L + \alpha)^2 - (\alpha^2 - 1)][(L - \alpha)^2 - (\alpha^2 - 1)]}; \tag{3.77}$$

ou, em termos dos zeros da função hipergeométrica

$$\frac{X_{k+1}}{X_k} > e^{f(L, \alpha, \beta)}. \tag{3.78}$$

Em termos do polinômio de Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ , e denotando seus zeros por  $\tilde{X}_k$ , obtemos (observe que  $\tilde{X} = 1 - 2x$ )

**Corolário 3.3.** *Sejam  $n, \alpha$  e  $\beta$  satisfazendo (3.70). Então os zeros do polinômio de Jacobi satisfazem*

1. Se  $|\alpha| \leq 1$ , então  $(1 - \tilde{X}_k)^2 > (1 - \tilde{X}_{k-1})(1 - \tilde{X}_{k+1})$
2. Se  $|\alpha| > 1$ , então  $\frac{1 - \tilde{X}_k}{1 - \tilde{X}_{k+1}} > e^{f(L, \alpha, \beta)}$ .

Se tomarmos a mudança  $z(x) = -\log(1 - x)$ , obtemos resultados similares, mas com  $\alpha$  trocado por  $\beta$  e vice-versa, bem como  $x$  por  $1 - x$ , nas equações (3.76) e (3.78). Em termos dos zeros do polinômio de Jacobi, obtemos

**Corolário 3.4.** *Sejam  $n, \alpha$  e  $\beta$  satisfazendo (3.70). Então os zeros do polinômio de Jacobi satisfazem*

1. Se  $|\beta| \leq 1$ , então  $(1 + \tilde{X}_k)^2 > (1 + \tilde{X}_{k-1})(1 + \tilde{X}_{k+1})$
2. Se  $|\beta| > 1$ , então  $\frac{1 + \tilde{X}_{k+1}}{1 + \tilde{X}_k} > e^{f(L, \beta, \alpha)}$ .

Mudança  $z(x) = -\tanh^{-1}(\sqrt{1 - x})$ :

Consideremos a seguinte mudança  $z(x) = -\tanh^{-1}(\sqrt{1 - x})$ . aplicando a transformação de Liouville, a singularidade em  $x = 0$  desaparece em  $\Omega(x)$ , o qual tem a seguinte forma

$$\Omega(x) = \frac{L^2 - \alpha^2 - 1}{4} + \frac{\mu}{L^2 - \frac{1}{4}} x - \frac{\nu}{1 - x}; \tag{3.79}$$

Novamente, assumindo que as condições oscilatórias (3.70) é fácil ver que  $\Omega(x)$  tem as seguintes propriedades de momotonicidade:

1. Se  $|\tau| \leq \frac{1}{2}$ , então  $\Omega'(x) > 0$  em  $(0;1)$ ;
2. Se  $|\tau| \geq \frac{1}{2}$ , então  $\Omega(x)$  tem somente um máximo absoluto em  $[0;1]$ , o qual está localizado

em

$$0 < x_e = 1 - \frac{S \sqrt{L^2 - 1 - 4\tau^2}}{L^2 - 1 - 4\tau^2} \leq 1;$$

onde

$$\Omega(x_e) = \frac{3}{L^2 - 1 - 4\tau^2} - \frac{L^2 - 1 - 4\tau^2}{L^2 - 1 - 4\tau^2} - \tau^2 > 0;$$

Conseqüentemente, temos o seguinte:

**Teorema 3.13.** *Seja  $n, \tau$  e  $\tau$  satisfazendo (3.70) e seja  $z(x) = -\tanh^{-1}(\sqrt{1-x})$ . Então os zeros da função hipergeométrica em  $(0;1)$  satisfazem as seguintes desigualdades:*

1. Se  $|\tau| \leq \frac{1}{2}$ , então  $\Delta^2 Z_k < 0$ , ou, em termos dos zeros  $x_k$  da função hipergeométrica,

$$\frac{x_{k+1}x_{k-1}}{x_k^2} < \frac{h(x_{k+1})h(x_{k-1})}{h(x_k)^2} \tag{3.80}$$

com

$$h(x) \equiv (1 - \sqrt{1-x})^2;$$

2. Se  $|\tau| \geq \frac{1}{2}$ , então  $\Delta Z_k > \rho(L; \tau; \tau)$  onde

$$\rho(L; \tau; \tau) = \frac{\tau^2}{L^2 - 1 - 4\tau^2 - \frac{\tau^2}{L^2 - 1 - 4\tau^2} - \tau^2};$$

Isto implica que

$$\frac{1 + \sqrt{1-x_k}}{\sqrt{x_k}} \frac{\sqrt{x_{k+1}}}{1 + \sqrt{1-x_{k+1}}} > e(\rho(L; \tau; \tau)); \tag{3.81}$$

Similarmente como antes, se considerarmos a mudança de variável  $z(x) = \tanh^{-1}(\sqrt{x})$ , temos relações similares trocando  $\tau$  por  $\tau$  e vice-versa, como segue:

**Corolário 3.5.** *Seja  $n, \tau$  e  $\tau$  satisfazendo (3.70). Então os zeros da função hipergeométrica em  $(0;1)$  satisfazem:*

1. Se  $|\tau| \leq \frac{1}{2}$ , então

$$\frac{(1-x_{k+1})(1-x_{k-1})}{(1-x_k)^2} < \frac{g(x_{k+1})g(x_{k-1})}{g(x_k)^2}; \tag{3.82}$$

onde

$$g(x) \equiv (1 + \sqrt{x})^2;$$

2. Se  $|\mathbb{Q}| \geq \frac{1}{2}$ , então  $\Delta Z_k > \rho(L; \cdot; \mathbb{Q})$  para  $z(x) = \tanh^{-1}(\sqrt{x})$ . Isto significa que

$$\frac{\sqrt{1-x_k} \frac{1+\sqrt{x_{k+1}}}{1+\sqrt{x_k}}}{\sqrt{1-x_{k+1}}} > e(\rho(L; \cdot; \mathbb{Q})): \quad (3.83)$$

Mudança  $z(x) = \log(x/(1-x))$

Esta mudança elimina as singularidades em  $x = 0$  e em  $x = 1$  de  $\Omega(x)$ , o qual tem a seguinte forma

$$4\Omega(x) = -(L^2 - 1)x^2 + (L^2 + \mathbb{Q}^2 - \mathbb{Q}^2 - 1)x - \mathbb{Q}^2: \quad (3.84)$$

Como podemos observar,  $\Omega(x)$  é uma parábola com um máximo absoluto em

$$0 < x_e = \frac{1}{2} \frac{L^2 + \mathbb{Q}^2 - \mathbb{Q}^2 - 1}{L^2 - 1} < 1;$$

onde

$$\Omega(x_e) = \frac{1}{16} \frac{(L^2 - 1 - (\mathbb{Q} - \cdot)^2)(L^2 - 1 - (\mathbb{Q} + \cdot)^2)}{L^2 - 1}.$$

Como conseqüentemente deste resultado, e observando as condições oscilatórias, temos:

$$\Delta Z_k > f(\cdot; \mathbb{Q}; L) = f(\mathbb{Q}; \cdot; L);$$

onde  $f$  é definido em (3.77).

Em termos dos zeros da função hipergeométrica, temos o seguinte limite global:

**Teorema 3.14.** *Os zeros da função hipergeométrica em  $(0;1)$  satisfazem:*

$$\frac{1-x_k}{x_k} \frac{x_{k+1}}{1-x_{k+1}} > e(f(\mathbb{Q}; \cdot; L)) \quad (3.85)$$

para todos os valores dos parâmetros satisfazendo a condição oscilatória (3.70).

## 3.3 Forma Integral

### 3.3.1 Propriedades de Monotonicidade dos Zeros dos Polinômios de Gegenbauer

Demonstraremos agora, o resultado obtido por Elbert e Siafarikas [11], o qual estende o resultado dado por Ahmed, Muldoon e Spigler [1], que foi relatado na subseção 3.2.4.

Para este propósito, observe que podemos considerar o produto

$$\mathcal{P}_n(\cdot) X_{nk}(\cdot)$$

onde

$$\mathfrak{f}_n(\zeta) = \frac{f_n(\zeta)}{4n+2} = \zeta + \frac{2n^2+1}{4n+2} \zeta^{1/2};$$

ao invés do produto  $f_n(\zeta)x_{nk}(\zeta)$  dado no Teorema 3.8.

Agora, fazendo  $\mathfrak{F} = \mathfrak{f}_n(\zeta)x$ ; em (3.39), a função  $U(\mathfrak{F}) = u(x)$  satisfaz à equação diferencial

$$\frac{d^2 U(\mathfrak{F})}{d\mathfrak{F}^2} + \mathfrak{F}(\mathfrak{F}, \zeta)U(\mathfrak{F}) = 0;$$

com

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{F}, \zeta) = [\mathfrak{f}_n(\zeta)]^{-2} F \left( \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{f}_n(\zeta)}; \zeta \right);$$

Substituindo  $\mathfrak{F} = \zeta$  e  $\mathfrak{f}_n(\zeta) = \zeta + \frac{2n^2+1}{4n+2}$ , temos

$$S(\zeta; \zeta'; \zeta) = \mathfrak{F}(\mathfrak{F}, \zeta) = \frac{(n+\zeta)^2}{\zeta' - \zeta} + \frac{\zeta'(1-2+\zeta-\zeta^2) + \zeta=4}{(\zeta' - \zeta)^2};$$

Como  $U(0)U'(0) = 0$ , podemos aplicar a Fórmula de Richardson (2.12). Calculando a derivada  $\frac{d}{d\zeta} S(\zeta; \zeta'; \zeta)$ , obtemos:

$$(\zeta' - \zeta)^3 \frac{d}{d\zeta} S(\zeta; \zeta'; \zeta) = A\zeta^2 + B\zeta + C; \quad (3.86)$$

onde

$$A = 2(n+\zeta);$$

$$B = -(4n+2\zeta+1)\zeta' + \zeta^2 - \zeta - 1 + (n+\zeta)^2;$$

$$C = (2n+1)\zeta'^2 + [\zeta^2 - \zeta - 1 - 2 - (n+\zeta)^2]\zeta';$$

Pela definição de  $\zeta'$  temos  $C = 0$ . Seja  $\zeta_0 = -B/A$ . Então,  $\zeta_0 \geq \zeta'$  se  $\zeta \in (-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$  e  $0 < \zeta_0 < \zeta'$  se  $\zeta > \frac{3}{2}$ . Daí,

$$\frac{dS(\zeta; \zeta'; \zeta)}{d\zeta} \begin{cases} < 0 & \text{para } 0 < \zeta < \zeta'; \text{ se } \zeta \in (-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]; \\ < 0 & \text{para } 0 < \zeta < \zeta_0; \text{ se } \zeta > \frac{3}{2}; \\ > 0 & \text{para } \zeta_0 < \zeta < \zeta'; \text{ se } \zeta > \frac{3}{2}; \end{cases} \quad (3.87)$$

Seja  $\mathfrak{w}(\zeta) = \mathfrak{f}_n(\zeta)x_{n,k}(\zeta)$  um zero positivo de  $U(\zeta; t) = 0$ . Assim, por (2.12), o sinal de  $d\mathfrak{w}^{(\lambda)} = d_\zeta$  é determinado pela integral

$$\Phi(\mathfrak{w}) = - \int_0^{\mathfrak{w}} \frac{\xi dS(\mathfrak{F}; \zeta'; \zeta)}{d_\zeta} U^2(t; \zeta) dt; \quad 0 < \mathfrak{w} < \mathfrak{f}_n(\zeta); \quad (3.88)$$

De (3.87), esta integral é sempre positiva se  $\zeta \in (-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$  pois o integrando é negativo. Observemos que esta integral também é positiva para  $\zeta > \frac{3}{2}$ . Por (3.87), a função  $\Phi(\mathfrak{w})$  cresce com  $\mathfrak{w}$  para  $0 < \mathfrak{w} < \sqrt{\zeta_0}$  e  $\Phi(\mathfrak{w})$  alcança seu máximo quando  $\mathfrak{w} = \sqrt{\zeta_0}$ . Então,  $\zeta'(\mathfrak{w})$  é decrescente no intervalo  $(\sqrt{\zeta_0}; \zeta')$ . Logo, para  $\mathfrak{w} = \zeta'$ ;  $\zeta'(\mathfrak{w}) = 0$ : Temos, então, o seguinte resultado:



**Lema 3.15.** A função  $\Phi(\nu)$  definida em (3.88) é positiva para  $0 < \nu < \frac{1}{2}$  e  $\Phi(0) = \Phi(\frac{1}{2}) = 0$ .

Vamos mostrar, agora, o seguinte resultado:

**Lema 3.16.** Para  $\nu > \frac{3}{2}$ ;

$$\int_0^1 \frac{\tilde{f}_n(\lambda)}{d_\nu} dS(\mathbb{P}; \nu; \nu) U^2(\mathbb{P}, \nu) dt = \int_0^1 \frac{A(\nu)x^4 + Bx^2}{(1-x^2)^3} (1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} |P_n^{(\lambda)}(x)|^2 dx = 0: \tag{3.89}$$

Demonstração:

Sejam  $l_\nu = l_\nu(n; \nu)$  definidas por:

$$l_\nu = l_\nu(n; \nu) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\nu-\frac{1}{2}} |P_n^{(\lambda)}(x)|^2 dx; \quad \nu > \frac{1}{2}; \quad \nu = 0; 1; 2; \tag{3.90}$$

Particularmente,  $l_0$  é bem conhecida pois é  $P_n^{(\lambda)}; P_n^{(\lambda)}$ , isto é,

$$l_0(n; \nu) = \frac{2^{1-2\lambda}\Gamma(n+2\nu)}{n!(n+\nu)[\Gamma(\nu)]^2} \mathcal{N}; \quad \nu > -\frac{1}{2}; \quad n = 0; 1; \dots; \tag{3.91}$$

A fórmula para  $l_1$  é menos familiar:

$$l_1(n; \nu) = \frac{2^{1-2\lambda}\Gamma(n+2\nu)}{n!(\nu-\frac{1}{2})[\Gamma(\nu)]^2} \mathcal{N}; \quad \nu > \frac{1}{2}; \quad n = 0; 1; \dots; \tag{3.92}$$

De fato, para  $\nu = 1; 2$  e  $\nu > \nu - \frac{1}{2}$ , temos, por (3.90),

$$\begin{aligned} (2\nu - 2\nu + 1)(l_\nu - l_{\nu-1}) &= (2\nu - 2\nu + 1) \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\nu-\frac{1}{2}} x^2 |P_n^{(\lambda)}(x)|^2 dx \\ &= - \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\nu+\frac{1}{2}} x |P_n^{(\lambda)}(x)|^2 dx \\ &= - \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\nu+\frac{1}{2}} |P_n^{(\lambda)}(x)|^2 dx \\ &\quad + \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\nu+\frac{1}{2}} x P_n^{(\lambda)}(x) P_n^{(\lambda)}(x) dx \\ &= l_{\nu-1} + 2 \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\nu+\frac{1}{2}} x |P_n^{(\lambda)}(x)|^2 dx: \end{aligned} \tag{3.93}$$

Para  $\nu = 1$ , a última integral pode ser facilmente determinada. Como  $x |P_n^{(\lambda)}(x)|^2 =$

$n P_n^{(\lambda)}(x) + \sum_{i=0}^{n-2} c_{n,i} x^i$ , onde  $c_{n,i}$  são constantes, temos, pela relação de ortogonalidade, que esta última integral é dada por

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} x |P_n^{(\lambda)}(x)|^2 dx = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} n P_n^{(\lambda)}(x) + \sum_{i=0}^{n-2} c_{n,i} x^i |P_n^{(\lambda)}(x)|^2 dx$$

$$= n \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} P_n^{(\lambda)}(x)^2 dx = n l_0:$$

Assim, por (3.93), temos

$$(2\lambda - 1)l_1 = 2(n + \lambda)l_0; \quad \text{para } \lambda > \frac{1}{2}: \quad (3.94)$$

Logo, por (3.91) e pela equação acima, obtemos (3.92).

Finalmente, o caso  $\lambda = 2$  ainda não aparece nos livros sobre integrais definidas. Por (1.56), temos, para  $y = P_n^{(\lambda)}(x)$ ;

$$(1-x^2)^{\lambda} P_n^{(\lambda)}(x)'' - (2\lambda + 1)x P_n^{(\lambda)}(x)' + n(n+2\lambda)P_n^{(\lambda)}(x) = 0:$$

Multiplicando esta identidade por  $(1-x^2)^{\lambda-\frac{3}{2}} P_n^{(\lambda)}(x)$  e integrando no intervalo  $[-1; 1]$ , obtemos

$$(2\lambda + 1) \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{3}{2}} x P_n^{(\lambda)}(x)' P_n^{(\lambda)}(x) dx$$

$$= - \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} x P_n^{(\lambda)}(x)' P_n^{(\lambda)}(x) dx + n(n+2\lambda)l_1;$$

onde a integral do lado direito é nula devido à ortogonalidade. Assim, de (3.93),

$$2\lambda - \frac{3}{2} \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) l_2 = \int_{-1}^1 (n + \lambda)^2 + \lambda^2 - \lambda - 1 P_n^{(\lambda)}(x)^2 dx: \quad (3.95)$$

Logo, de (3.92), obtemos

$$l_2(n; \lambda) = \frac{4^{2-\lambda} \Gamma(n+2\lambda)}{n! [\Gamma(\lambda)]^2} \frac{(n+\lambda)^2 + \lambda^2 - \lambda - 1}{(\lambda + \frac{1}{2})(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{3}{2})}; \quad \lambda > \frac{3}{2}; \quad n = 0; 1; \dots: \quad (3.96)$$

Agora estamos aptos a demonstrar o Lema. Usando os valores de  $A$  e  $B$  dados em (3.86), temos que

$$A'(\lambda)x^4 + Bx^2 = \int_{-1}^1 \left[ 2(n+\lambda) \left( \frac{1-x^2}{2} \right)' - (2\lambda-1)(1-x^2) \right] P_n^{(\lambda)}(x)^2 dx + \left[ 2\lambda + \frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{3}{2} \right) \right] \int_{-1}^1 (n+\lambda)^2 + \lambda^2 - \lambda - 1 P_n^{(\lambda)}(x)^2 dx:$$

Por (3.90), a integral em (3.89) é dada por

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{A'(\lambda)x^4 + Bx^2}{(1-x^2)^3} (1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} P_n^{(\lambda)}(x)^2 dx = \int_{-1}^1 (x) \left[ 2(n+\lambda)l_0 - (2\lambda-1)l_1 \right] P_n^{(\lambda)}(x)^2 dx + \left[ 2\lambda + \frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{3}{2} \right) \right] \int_{-1}^1 (n+\lambda)^2 + \lambda^2 - \lambda - 1 P_n^{(\lambda)}(x)^2 dx:$$

Mas, por (3.94) e (3.95) temos que esta integral é nula. Assim, chegamos ao resultado desejado.

■

Assim, demonstramos o resultado para todo  $\lambda$ , isto é, provamos o seguinte Teorema:

**Teorema 3.17.** *Sejam  $n \geq 3$  e  $1 \leq k \leq [n/2]$ . Então, a função*

$$\mathfrak{F}_n(\lambda) x_{n,k}(\lambda)$$

com

$$\mathfrak{F}_n(\lambda) = \lambda + \frac{2n^2 + 1}{4n + 2} \lambda^{1/2}$$

é uma função crescente de  $\lambda$  para  $\lambda > -1/2$ :

Por (1.65) temos, para os polinômios ultrasféricos, que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda + \frac{2n^2 + 1}{4n + 2} \lambda^{1/2} x_{n,k}(\lambda) = h_{n,k}.$$

Combinando este limite com a monotonicidade estabelecida no teorema anterior, temos o seguinte resultado:

**Corolário 3.6.** *Para os zeros positivos  $x_{n,k}(\lambda)$  do polinômio ultrasférico  $P_n(\lambda)(x)$ , tem-se a seguinte desigualdade:*

$$\lambda + \frac{2n^2 + 1}{4n + 2} \lambda^{1/2} x_{n,k}(\lambda) < h_{n,k} \quad \text{para } \lambda > -\frac{1}{2}; \quad k = 1; 2; \dots; [\frac{n}{2}].$$

# Referências Bibliográficas

- [1] AHMED, S., MULDOON, M. E., AND SPIGLER, R. Inequalities and numerical bound for zeros of ultraspherical polynomials. *SIAM J. Math. Anal.* 17 (1986), 1000–1007.
- [2] ANDREWS, G., ASKEY, R., AND ROY, R. *Special Functions, Encyclopedia of Mathematics and Applications*. Cambridge University Press, 1999.
- [3] DEAÑO, A., GIL, A., AND SEGURA, J. New inequalities from classical Sturm Theorems. *J. Approx. Theory* 131 (2004), 208–230.
- [4] DIMITROV, D. K. On a conjecture concerning monotonicity of zeros of ultraspherical polynomials. *J. Approx. Theory* 85 (1996), 88–97.
- [5] DIMITROV, D. K., AND RODRIGUES, R. O. On the behaviour of zeros of Jacobi polynomials. *J. Approx. Theory* 116 (2002), 224–239.
- [6] ELBERT, A., AND LAFORGIA, A. Monotonicity results on the zeros of generalized Laguerre polynomials. *J. Approx. Theory* 51 (1987), 168–174.
- [7] ELBERT, A., AND LAFORGIA, A. Upper bounds for the zeros of ultraspherical polynomials. *J. Approx. Theory* 61 (1990), 88–97.
- [8] ELBERT, A., AND LAFORGIA, A. Asymptotic formulas for ultraspherical polynomials  $P_n^{(\lambda)}(x)$  and their zeros for large values of  $n$ . *Proc. Amer. Math. Soc.* 114 (1992), 371–377.
- [9] ELBERT, A., LAFORGIA, A., AND RODONÓ, L. G. On the zeros of Jacobi polynomials. *Acta Mathematica Hungarica* 64 (1994), 351–359.
- [10] ELBERT, A., AND MULDOON, M. E. On the derivative with respect to a parameter of a zero of a Sturm-Liouville function. *SIAM J. Math. Anal.* 25 (1994), 354–364.

- 
- [11] ELBERT, A., AND SIAFARIKAS, P. D. Monotonicity properties of the zeros of ultraspherical polynomials. *J. Approx. Theory* 97 (1999), 31–39.
- [12] HILLE, E. *Lectures on ordinary differential equations*. Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
- [13] HORN, R. A., AND JOHNSON, C. R. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985.
- [14] SPIGLER, R. On the monotonic variation of the zeros of ultraspherical polynomials with the parameter. *Canad. Math. Bull.* 27 (1984), 472–477.
- [15] SZEGŐ, G. *Orthogonal Polynomials*, vol. 23. Amer. Math. Soc., 1975.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)