EDUARDO SAD DA COSTA

AS EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES E O PROFESSOR DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2007

EDUARDO SAD DA COSTA

AS EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES E O PROFESSOR DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Profa. Dra. Silvia Dias Alcântara Machado.***

PUC/SP

São Paulo

2007

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ **Local e Data:** ______________

Dedico este trabalho a meus pais
e especialmente à minha esposa.

AGRADECIMENTOS

Quero expressar a minha gratidão a todos que, direta ou indiretamente contribuíram para que este trabalho se concretizasse.

A *DEUS,* por me iluminar nos momentos difíceis permitindo que eu concluísse este trabalho.

Especialmente à *Professora Doutora Silvia Dias Alcântara Machado* pela orientação competente, pela paciência extrema e necessária, por sua dedicação e, acima de tudo, por acreditar na conclusão deste trabalho.

Às Professoras *Doutoras Sandra Maria Pinto Magina* e *Abigail Fregni Lins* que, participando da banca de qualificação, contribuíram de modo significativo para o delineamento e conclusão deste trabalho.

Aos *Professores do Programa de Mestrado em Educação Matemática da PUC-SP*, pela contribuição para a minha formação.

Aos *professores entrevistados* que gentilmente aceitaram participar desta pesquisa.

Aos *meus colegas de mestrado* pelo convívio, amizade e ajuda, em especial, *Wilson, Samuel, Silvio, Carlos, Cícera* e *Márcia*.

A *meu tio Joaquim Ivelson da Costa* pela ajuda inestimável, me favorecendo condições para que eu pudesse me ausentar semanalmente e me dedicar aos estudos.

Aos *meus primos Alexandre e Carla*, pelo convívio, amizade e por muitas vezes facilitarem minha vinda a São Paulo.

A *meu irmão Fernando* pelo convívio, amizade, companheirismo e, por tudo o que fez e o que deixou de fazer para possibilitar condições para que eu concluísse este trabalho.

À *minha mãe*, por todo amor e dedicação dados durante sua vida.

A *meu pai*, por tudo o que me ensinou, fez e ainda faz por mim.

À minha esposa *Fabiana H. Marques da Costa*, a quem dedico especialmente este trabalho, que muito me incentivou e acreditou em mim. Foi minha companheira nos momentos difíceis, paciente e compreensiva durante minhas muitas e necessárias ausências.

Por fim, à *CAPES* pelo fornecimento, durante 15 meses, da bolsa de estudos que garantiu o sustento necessário à realização desta pesquisa.

Muito Obrigado!

O Autor

RESUMO

Neste trabalho apresento um estudo qualitativo sobre se, e como, professores de Matemática do Ensino Médio trabalham com seus alunos situações-problema que recaem em equações diofantinas lineares. O estudo foi feito por meio da análise de entrevistas semi-estruturadas realizadas com seis professores de Matemática dos estados de São Paulo e Minas Gerais que lecionam no Ensino Médio. A Teoria Elementar dos Números vem sendo tratada por diversos pesquisadores de Educação Matemática, como Campbell & Zazkis (2002), Resende (2007), como assunto propício para a introdução e desenvolvimento de idéias Matemáticas fundamentais no Ensino Básico. No entanto os resultados desta investigação indicam que embora os professores entrevistados afirmassem trabalhar com problemas de matemática discreta modeláveis via equação diofantina linear, nenhum deles deu indícios de trabalhar com seus alunos utilizando conhecimentos das propriedades dessas equações para decidir se as mesmas tem solução e quais seriam essas soluções.

Palavras-Chave: Teoria Elementar dos Números, equações diofantinas lineares, professores de Matemática do Ensino Médio, educação algébrica.

ABSTRACT

This work involves a qualitative study about whether and how mathematics High-School teachers work with their students the trouble-situations regarding linear Diophantine equations. The study was performed by means of analyzing semi-structured interviews applied on six mathematics teachers from the states of São Paulo and Minas Gerais, teaching at high-school level. The Numbers Elementary Theory has been treated by several researchers on Mathematical Education, as Campbell e Zazkis (2002), Resende (2007), as an adequate subject for the introduction and development of fundamental Mathematical ideas in High-School. However, the results of such investigation show that, although the interviewed teachers affirmed that they did work with problems of discreet mathematics that can be modeled through linear Diophantine equations, none of them seemed to work with their students using the knowledge of these equations properties in order to decide whether they have solution, and what these solutions would be.

Keywords: Elementary number theory, linear Diophantine equations, High school Mathematics teachers, algebra education.

SUMÁRIO

Introdução

Meu interesse em fazer uma pesquisa sobre o tema “equações diofantinas lineares” com professores de Matemática do Ensino Médio surgiu após meu contato com o projeto “O que se entende por Álgebra?” que tem sido desenvolvido pelos membros do grupo de pesquisa Educação Algébrica da PUC-SP.

Esse projeto supõe que sejam feitas pesquisas que visem investigar o que se entende por Álgebra no campo institucional (PCN, Programas nacionais e estrangeiros, Livros Didáticos,...) no campo docente (professores do Ensino Superior, Médio, Fundamental e Infantil) e no campo discente (alunos de todos os segmentos de ensino).

Após leituras propostas pelos membros do projeto, me convenci sobre a importância da Teoria Elementar dos Números para o ensino da Matemática. Por ser professor de Física e de Matemática do Ensino Médio, decidi fazer uma pesquisa com professores de Matemática desse nível de ensino.

Minha pesquisa visa investigar se e como professores de Matemática do Ensino Médio trabalham com seus alunos situações-problema que recaem em equações diofantinas lineares.

Este trabalho está divido em cinco capítulos, descritos da seguinte forma:

- No capítulo I, apresento a justificativa de investigar o tema “equações diofantinas lineares com professores de Matemática do Ensino Médio”, as questões que nortearam o desenvolvimento desta pesquisa e o objetivo pretendido.

- No capítulo II, destaco o referencial teórico matemático em que fundamentei o desenvolvimento desta pesquisa. Inclui, ainda, alguns trabalhos de pesquisadores em Educação Matemática e em áreas correlatas a respeito da Teoria Elementar dos Números e das equações diofantinas lineares, trabalhos esses, que propiciaram uma melhor compreensão da temática a ser abordada nesta pesquisa.
- No capítulo III, apresento a metodologia da pesquisa, baseada em entrevistas semi-estruturadas, segundo LUDKE e ANDRÉ, com os sujeitos da pesquisa. Apresento ainda, o roteiro das entrevistas com a respectiva análise a priori dos problemas apresentados.
- No capítulo IV, apresento a descrição das entrevistas realizadas, com a respectiva análise individual de cada uma (‘análise vertical’), seguido de uma análise coletiva (‘horizontal’) das respostas dadas a cada questão do roteiro, tais análises permitem algumas conclusões.
- As considerações e conclusões finais são expostas no capítulo V, destacando conclusões já obtidas durante as análises feitas no capítulo anterior, bem como minhas recomendações.

CAPÍTULO I

Problemática e objetivo

Problemática e Objetivo

Leciono Matemática e Física, no Ensino Médio e em curso pré-vestibular, de escolas da rede pública e particular desde meados de 2002. A experiência com a docência me entusiasmou e decidi aprofundar meus estudos nas questões do ensino e aprendizagem de Matemática. Dessa forma, decidi cursar uma pós-graduação em Educação Matemática e ingressei no mestrado da PUC-SP.

Após tomar conhecimento das propostas dos grupos de pesquisas, e por entender que a maior parte de Matemática que se ensina no Ensino Médio pertence ao campo da Álgebra, ingressei no grupo de pesquisa denominado: Educação Algébrica, doravante indicado por GPEA.

O GPEA tem como principal objetivo responder a seguinte questão: Qual a Álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de Matemática? Dentre seus projetos há o denominado “O que se entende por Álgebra”:

> Esse projeto envolve estudos em três planos paralelos e superpostos, para análise multidimensional de interações entre estudantes, professores e programas curriculares. Propõe-se a formular pesquisas de cunho documental, diagnóstica e interventiva, com o objetivo de examinar as possíveis articulações e desarticulações nesses planos e entre eles. (MARANHÂO, MACHADO E COELHO; 2004 p. 13)

Dentre as leituras propostas nas primeiras reuniões do GPEA das quais participei, constavam artigos que tratavam especificamente de Teoria dos Números. Por não haver feito um curso de bacharelado ou licenciatura em Matemática, pois me formei em Administração de Empresas e fiz Licenciatura Plena em Física, nunca havia tido aula de Teoria dos Números. Após as leituras feitas sobre esse assunto, me interessei pelo tema, pois percebi que além de poder enriquecer minhas aulas de matemática com esses conhecimentos, haviam questões de pesquisa interessantes de serem exploradas.

Uma das doutorandas do grupo GPEA que se dedicava à pesquisa nesse tema é, a agora doutora, Marilene RESENDE, que após análise epistemológica e histórica, análise de livros didáticos e entrevistas com matemáticos especialistas da área de Teoria dos Números e de educadores matemáticos, apresentou, em sua tese de doutorado, o que denominou de Teoria Elementar dos Números. Com essa denominação, Rezende procurou delimitar o conteúdo a ser lecionado em um primeiro curso de Teoria dos Números, a ser trabalhado em uma licenciatura de Matemática. Em suas conclusões Resende descreveu o que chamou de Tópicos essenciais de Teoria Elementar dos Números:

> **Números Inteiros**: evolução histórica e epistemológica do conceito de números naturais e inteiros; representações dos números naturais, operações, algoritmos e propriedades, definição por recorrência (potências em N, seqüências, progressões aritméticas e geométricas) princípio da boa ordem e princípio da indução finita; **Divisibilidade**: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, critérios de divisibilidade, o Teorema Fundamental da Aritmética; **Introdução à congruência módulo m:** definição, propriedades, algumas aplicações; **Equações diofantinas lineares.** (RESENDE, 2007 p. 227).

No que segue, sempre que me referir a Teoria Elementar dos Números estarei adotando a definição de Resende.

É importante observar que a Teoria dos Números oferece uma variedade de situações-problema, permitindo que se formulem questões fáceis de serem compreendidas pelos estudantes do ensino Básico. Coelho, Machado e Maranhão (2003) consideram a Teoria dos Números um campo apropriado para propiciar o desenvolvimento da chamada “rede de significados”, citada nos PCN, pois o assunto permite que se formulem questões cuja solução completa requer incorporação e manejo de conceitos de forma integrada. (p. 13)

Entretanto, as mesmas autoras consideram que:

> [...] embora presente nos Currículos de alguns Cursos de Licenciatura, a Teoria dos Números nem sempre tem sido explorada dessa forma, e pouca atenção tem sido dada a explorar suas potencialidades - acima citadas - como tópico da Educação Básica. (COELHO, S. et al, 2003).

A situação acima apontada ocorreu tanto em minha formação quanto no meu pouco tempo de docência, eu mesmo confesso ter tomado consciência da importância da abordagem de Teoria Elementar dos Números com os alunos somente após ter me agregado ao grupo GPEA.

Assim, despertado meu interesse pelas pesquisas e assuntos de Teoria Elementar dos Números, passei a buscar em diferentes revistas científicas, e revistas destinadas a professores do Ensino Básico o que havia sobre o tema. Nessa busca me chamou atenção o artigo: “Uma Equação Diofantina e suas Resoluções”, de Gilda de La Rocque e João Bosco Pitombeira, publicado na RPM número 19, 1991, que têm como foco a resolução de equações diofantinas lineares e sugere aos leitores seu ensino no Ensino Básico. Esse artigo provocou em mim o seguinte questionamento: Será que outros professores do Ensino Básico estão trabalhando sobre o assunto? Se estiverem trabalhando com o assunto como é esse trabalho?

Nas discussões do GPEA, outros colegas, professores do Ensino Básico como eu, levantaram a questão de que muitos problemas de ordem discreta, acessíveis a esse nível de ensino, ao serem equacionados, recaem em uma equação diofantina linear. Esses problemas têm a característica de poderem ter uma ou mais respostas ou não ter nenhuma resposta. Para decidir se há ou não resposta(s) é necessário conhecer apenas o máximo divisor comum entre dois números inteiros (MDC) e o algoritmo de Euclides, assuntos esses tratados como objetos de ensino no Ensino Fundamental.

Nessa época Silvio Barbosa de Oliveira (2006), do mesmo grupo, estava investigando como os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (PCNEM) e os livros didáticos do Ensino Médio tratavam esse assunto. Os primeiros resultados de Oliveira mostravam que as equações diofantinas lineares não apareciam explicitamente nos PCN nem nos Parâmetros Curriculares Nacionais “Mais” (PCN+), este último elaborado com a intenção de apresentar orientações educacionais complementares aos PCNEM.

Esses primeiros resultados não nos desinteressaram sobre o assunto, pelo contrário, nos levaram a verificar em profundidade se e como o assunto das equações diofantinas lineares é tratado: Oliveira continuou sua pesquisa nos livros didáticos e eu resolvi investigar entre meus pares, os professores do Ensino Médio.

Dada a pouca probabilidade de que as equações diofantinas lineares fossem consideradas objeto de ensino na acepção de Chevallard (1991), ampliei minhas questões supondo que mesmo que não fossem objeto de ensino explicitamente, poderiam estar sendo tratadas implicitamente quando da resolução de problemas que as envolvessem.

Desta forma, o objetivo desta pesquisa é de investigar se e como professores de Matemática do Ensino Médio trabalham com seus alunos situações-problema que recaem em equações diofantinas lineares.

CAPÍTULO II

Fundamentos Teóricos: Leituras e escolhas

Fundamentos Teóricos

Introdução

Neste capítulo apresento os fundamentos teóricos, tanto matemáticos como didáticos que embasaram minha pesquisa. O assunto matemático de minha pesquisa, quando tratado no ensino, é geralmente trabalhado em um curso de Teoria dos Números do Ensino Superior. Esse fato pode causar, à primeira vista, a impressão de exigir conhecimentos matemáticos fora do alcance de um aluno do Ensino Básico, no entanto, o leitor poderá perceber que isso não é verdade, pelo contrário, a matemática envolvida no trato das equações diofantinas envolve principalmente um reinvestimento na noção do m.d.c. (máximo divisor comum entre dois números inteiros). Assim, após descrever matematicamente o trabalho com equações diofantinas lineares com duas incógnitas apresento algumas colocações de pesquisadores em Teoria dos Números que deram suporte a essa pesquisa.

Assim como Almeida (2006), embasado na leitura da obra de Pozo (1998) e dos PCN do Ensino Fundamental de 1998, neste trabalho utilizo o termo **situação-problema** como: uma situação que demanda a realização de uma seqüência de ações ou operações matemáticas, feitas por um indivíduo ou um grupo para obter um resultado, ou seja, a resposta não está disponível no início, mas é possível construí-la. Com esse mesmo sentido utilizo simplesmente a palavra problema.

As Equações Diofantinas Lineares

Adoto neste trabalho a definição de equação diofantina dada por COURANT e ROBBINS:

> Uma *equação diofantina* é uma equação algébrica com uma ou mais incógnitas e coeficientes *inteiros*, para a qual são buscadas soluções *inteiras*. Uma equação deste tipo pode não ter solução, ou ter um número finito ou infinito de soluções. (Courant e Robbins, p.59, 2000).

Nesta investigação me limito a explorar os problemas que envolvem somente o caso mais simples de equações diofantinas lineares que é a equação algébrica com duas incógnitas, **ax + by = c**, onde **a**, **b** e **c** são inteiros dados, e as soluções **x**, **y** procuradas, são números inteiros.

A definição de Courant sugere a seguinte questão: É possível se conhecer de antemão se uma dada equação diofantina tem ou não solução?

"Quem" trata desse assunto é a Teoria Elementar dos Números, utilizando resultados da teoria da divisibilidade.

A seguir apresento, como exemplos, os três problemas utilizados por La Rocque e Pitombeira para introduzirem o assunto:

Problema A: O problema do laboratório

> Um laboratório dispõe de 2 máquinas para examinar amostras de sangue, uma delas examina 15 amostras de cada vez enquanto a outra examina 25. Quantas vezes essas máquinas devem ser acionadas para examinar exatamente 2 mil amostras? (LA ROCQUE e PITOMBEIRA, 1991, p. 39).

Problema B: O problema das quadras

> Quantas quadras de basquete e quantas de volei são necessárias para que 80 alunos joguem simultaneamente? E se forem 77 alunos? (LA ROCQUE e PITOMBEIRA, 1991, p. 39).

Problema C: O problema dos aviões

> Para agrupar 13 aviões em filas de 3 ou de 5, exatamente quantas filas serão formadas de cada tipo? (LA ROCQUE e PITOMBEIRA, 1991, p. 39).

As resoluções desses problemas recaem na busca de soluções inteiras (e positivas nesses casos) de equações diofantinas lineares da forma: **ax + by = c**.

Analisando cada caso acima, o problema do laboratório pode ser descrito pela equação 15x + 25y = 2000 que apresenta 27 soluções (que sejam pares de números inteiros positivos), desde a primeira máquina parada e a outra sendo acionada 80 vezes até o caso em que a primeira trabalha 130 vezes e a outra só duas. O problema das quadras pode ser descrito, para a primeira questão, pela equação 10x + 12y = 80, e apresenta duas soluções: x = 2 e y = 5 ou x = 8 e y = 0; enquanto, para a segunda questão, pode ser descrito pela equação 10x + 12y = 77, e não apresenta soluções (que sejam pares de números inteiros). No problema dos aviões, a equação 3x + 5y = 13 descreve a situação, e apresenta uma única solução (com x e y sendo números inteiros e positivos) x = 1 e y = 2.

É muito conveniente, ao estudarmos um problema matemático, termos um "processo" que nos informe se tal problema tem ou não soluções e que, caso tenha soluções, nos forneça todas elas.

Existe um critério que nos permite dizer se equações diofantinas do tipo: **ax + by = c** tem ou não soluções inteiras, e ele é uma aplicação da noção de máximo divisor comum.

Apresento a seguir um critério de existência de solução, um algoritmo para encontrar uma solução particular e, finalmente, a expressão que fornece todas as soluções inteiras a partir de uma solução particular.

Critério de existência da solução:

Considere-se a equação diofantina *a***x** + *b***y** = *c,* isto é, nela ***a, b*** e ***c*** são números inteiros e procuramos soluções (x, y) que sejam pares ordenados de números inteiros. Para saber se existe solução $\boldsymbol{x_0}$ e $\boldsymbol{y_0}$, devemos observar algumas propriedades de divisibilidade:

Propriedade 1 - Se um número inteiro ***d*** divide ***a***, então dividirá ***am***, para qualquer inteiro ***m***;

Propriedade 2 - Se ***d*** divide ***a*** e divide ***b***, então dividirá ***a + b***;

Propriedade 3 (Teorema de Bézout) - Se ***d*** é o máximo divisor comum de ***a*** e ***b***, então existem inteiros ***r*** e ***s*** tais que ***ar + bs = d.***

Observemos que, a partir das duas primeiras propriedades acima, se o problema **ax + by = c** tiver alguma solução com **x** e **y** inteiros e se ***d*** for um divisor comum de ***a*** e ***b***, então, ***d*** dividirá ***c***. Em particular, o máximo divisor comum de ***a*** e ***b*** deve dividir ***c***. Essa é, então, uma condição necessária para a existência de solução inteira.

Será também suficiente?

A terceira propriedade acima enunciada afirma que sim. Com efeito, se ***d*** for o máximo divisor comum de ***a*** e ***b*** e ***d*** dividir ***c***, então ***c = dm*** e, pela propriedade 3, existirão inteiros ***r*** e ***s*** tais que ***ar + bs = d***. Ora, multiplicando ambos os membros desta última igualdade pelo inteiro ***m***, vem ***a(rm) + b(sm) = c***, donde ***x = rm*** e ***y = sm*** é a solução procurada.

Podemos, assim, enunciar o seguinte Teorema: A equação diofantina **ax + by = c** tem solução (inteira) se, e somente se, o máximo divisor comum de ***a*** e ***b*** dividir ***c***.

Como aplicação do teorema acima, vemos que a equação: 8x + 12y = 77 não tem solução, pois *mdc*(8,12) = 4 e 4 não divide 77. Nesse caso, é fácil perceber que o número 8x + 12y, com **x** e **y** inteiros, será sempre par, logo não poderá ser 77.

Por outro lado, $4x + 6y = 72$ tem solução, pois *mdc*(4, 6) = 2 e 2 divide 72.

O Teorema acima tem um corolário imediato, que é o seguinte: Se *mdc*(***a***, ***b***) = 1, isto é, se ***a*** e ***b*** são relativamente primos (ou primos entre si), então a equação **ax + by = c** sempre tem soluções inteiras, qualquer que seja o inteiro ***c***.

Observação: Para efeito de encontrar as soluções inteiras, o caso que interessa é só esse do corolário, em que *mdc*(***a***, ***b***) = 1. De fato, se existir solução e esse máximo divisor comum ***d*** for diferente de 1, basta dividir ambos os membros da equação por ***d*** que se chega ao caso de coeficientes ***a*** e ***b*** relativamente primos (primos entre si), com um segundo membro ainda inteiro.

<u>Algoritmo para encontrar uma solução particular:</u>

Observamos que na busca de soluções inteiras de **ax + by = c**, podemos tomar *mdc*(***a***, ***b***) = 1 e que achar uma solução inteira dessa equação equivale a encontrar inteiros ***r*** e ***s*** tais que ***ar + bs*** = 1.

Uma forma de se chegar a ***r*** e ***s*** é obtida através do algoritmo de Euclides, ou algoritmo das divisões sucessivas, para o cálculo do *mdc*(***a***, ***b***). A legitimidade desse algoritmo repousa sobre as seguintes observações:

1) Se ***a*** e ***b*** são inteiros, com ***b*** > 0, existem inteiros ***q*** e ***r***, com 0 ≤ ***r*** < ***b***, únicos, tais que ***a*** = ***bq*** + ***r*** (algoritmo da divisão).

2) Sejam ***a*** e ***b*** inteiros, com ***b*** > 0, e ***a*** = ***bq*** + ***r***, com 0 ≤ ***r*** < ***b***. Então *mdc* (***a***, ***b***) = *mdc* (***b***, ***r***). Com efeito, mostraremos que o conjunto dos divisores comuns de ***a*** e ***b*** é igual ao conjunto dos divisores comuns de ***b*** e ***r***. Segue-se então, forçosamente, que o máximo divisor comum de ***a*** e ***b*** é igual ao de ***b*** e ***r***. Se ***a*** = ***bq*** + ***r*** e ***g*** é um divisor comum de ***a*** e ***b*** (isto é, ***g*** divide ***a*** e ***g*** divide ***b***), então, de ***a*** - ***bq*** = ***r***, segue-se que ***g*** divide ***b*** e ***g*** divide ***r***. Logo ***g*** é um divisor comum de ***b*** e ***r***.

Reciprocamente, se ***g*** divide ***b*** e ***r***, como ***a*** = ***bq*** + ***r***, segue-se que ***g*** divide ***a*** e ***b***.

Mostraremos agora, por um exemplo, como achar os inteiros ***r*** e ***s*** tais que ***ar*** + ***bs*** = 1. Para isso, consideremos a equação diofantina **32x + 9y = 7,** temos que: **a** = 32, **b** = 9 e **c** = 7. O algoritmo de Euclides para o cálculo do *mdc* (32,9) é o seguinte:

3	1	1	4	
32	9	5	4	1
5	4	1	0	

Este algoritmo resume as seguintes divisões:

32 = 3 . 9 + 5 (A)

9 = 1 . 5 + 4 (B)

5 = 1 . 4 + 1 (C)

e, então, pelo resultado apresentado no item 2 (mdc (a,b) = mdc (b,r)), temos

mdc (32,9) = *mdc* (9,5) = *mdc* (5,4) = *mdc* (4,1) = 1.

Combinando convenientemente as expressões (A), (B), (C), encontram-se inteiros ***r*** e ***s*** tais que 32r + 9s = 1 (***ar*** + ***bs*** = 1).

De fato:

5 **-** (1 . 4) = 1 , (por C) ou seja 5 – 4 = 1 (C')

agora tira-se o valor de 4 por (B) : 4 = 9 – 5 (B')

substituindo o valor de 4 (de B') na expressão (C') : 5 - (9 - 5) = 1 ou seja

(2 . 5) **-** 9 = 1 (C'')

de (A), temos 5 = 32 – (3 . 9) (A')

substituindo o valor de 5 (de A') na expressão C'' : 2 . [32 – (3 . 9)] **-** 9 = 1 ou

(2 . 32) – (6 . 9) – 9 = 1 ou

(2 . 32) – (7 . 9) = 1 ou

32.(2) + 9 . (-7) = 1, (D)

na qual se percebe que os números **r** e **s** procurados são, **r** = 2 e **s** = -7.

Voltando à equação inicial **32x + 9y = 7**, para obter os valores de x e y, conhecendo a expressão (D), basta multiplicar ambos os termos da expressão (D) por 7:

de fato como 32.(2) + 9.(-7) = 1

7[32.(2) + 9 . (-7)] = 7.(1)

32(2.7) + 9(-7.7) = 7,

32.14 + 9.(-49) = 7 dessa forma x=14 e y= -49 é uma das soluções procuradas.

<u>Expressão que fornece todas as soluções inteiras a partir de uma particular:</u>

Seja (x_0, y_0) uma solução inteira de **ax + by = c**, com ***a*** e ***b*** relativamente primos. Então $ax_0 + by_0 = c$. Ora, se ao primeiro membro acrescentarmos e subtrairmos o mesmo número, a igualdade continuará valendo. Para que possamos colocar ***a*** e ***b*** em evidência, exigiremos que o número acrescentado seja um múltiplo de ***ab***, isto é, seja um número da forma ***abk***, com ***k*** inteiro.

Temos, então, $ax_0 + by_0 + abk – abk = c$ ou $a(x_0 + bk) + b(y_0 – ak) = c$, o que mostra que o par ($x_0 + bk$, $y_0 - ak$) é ainda uma solução da equação diofantina considerada.

Será que estas são todas as soluções inteiras? Existirão outras? Para buscarmos uma resposta a esta pergunta, suponhamos que (x_0, y_0) e (x_1, y_1) sejam soluções inteiras de **ax + by = c**, com *mdc*(***a***, ***b***) = 1.

Temos então $ax_0 + by_0 = c$ e $ax_1 + by_1 = c$. Logo, $a(x_1 – x_0) = b(y_0 – y_1)$.

Primeiro caso: Se ***a*** = 1, chamamos de ***k*** o inteiro $y_0 – y_1$ e teremos $x_1 – x_0 = bk$, isto é, $x_1 = x_0 + bk$ onde $y_0 – y_1 = k$, ou seja, $y_1 = y_0 – k$, que é igual a $y_1 = y_0 – ak$, pois ***a*** = 1. Logo, neste caso, qualquer solução (x_1, y_1) é da forma ($x_0 + bk$, $y_0 – ak$), com ***k*** inteiro.

Segundo caso: Se $a \neq 1$, ***a*** não divide ***b***, pois ***a*** e ***b*** são relativamente primos (primos entre si, ou seja, *mdc*(***a***, ***b***) = 1) . Então ***a*** divide $y_0 – y_1$ ou seja, existe ***k*** inteiro tal que $y_0 – y_1 = ak$, donde $y_1 = y_0 – ak$. Mas então $a(x_1 – x_0) = bak$, e, como $a \neq 0$, vem que $x_1 – x_0 = bk$, ou seja, $x_1 = x_0 + bk$.

Acabamos assim de demonstrar o seguinte Teorema: Se (***x_0***, ***y_0***) for uma solução da equação diofantina **ax + by = c**, com *mdc*(***a***, ***b***) = 1, então (***x_1***, ***y_1***) será solução da equação se, e somente se, existir um inteiro ***k*** tal que ***x_1* = *x_0* + *bk*** e ***y_1* = *y_0* – *ak.***

Exemplo 1:

Determinemos todas as soluções da equação diofantina 143x + 17y = 132.

Utilizando o algoritmo de Euclides:

8	2	2	3	
143	17	7	3	1
7	3	1	0	

Em primeiro lugar, *mdc*(143,17) = *mdc*(17,7) = *mdc* (7,3) = *mdc* (3,1) = 1, logo a equação tem soluções inteiras. Para achar uma delas, observe através algoritmo de Euclides que

143 = 8 . 17 + 7 (A)

17 = 2 . 7 + 3 (B)

7 = 2 . 3 + 1 (C)

De (A) temos que 143 – (8 . 17) = 7 (A')

De (B) temos que 17 – 2 . 7 = 3 (B')

De (C) temos que 7 – 2 . 3 = 1 (C')

substituindo o valor de 3 (de B') na expressão (C') : 7 – 2. (17 – 2 . 7) = 1 ou seja

(5 . 7) – 2 . 17 = 1 (C'')

substituindo o valor de 7 (de A') na expressão (C''): 5. [143 – (8 . 17)] – 2 . 17 = 1 ou

(5 . 143) – (40 . 17) – 2 . 17 = 1 ou

(5 . 143) – (42 . 17) = 1 ou

143. (5) + 17. (-42) = 1, (D)

na qual se percebe que os números **r** e **s** procurados são, **r** = 5 e **s** = -42.

Voltando à equação inicial 143x + 17y = 132 e lembrando que ***a(rm) + b(sm) = c***, donde ***x = rm*** e ***y = sm*** é uma solução e neste caso ***m*** = 132.

Para obter os valores de x e y, conhecendo a expressão (D), basta multiplicar ambos os termos da expressão (D) por 132:
Chegamos a
143. (5 . 132) + 17. (-42 . 132) = 132, ou seja, (x_0, y_0) = (660, -5544) é uma solução da equação.

Então, todas as soluções **($x_1 = x_0 + bk$ e $y_1 = y_0 - ak$)**
são da forma ***x*** = 660 + 17***k*** e ***y*** = -5544 - 143***k***, onde ***k*** é um inteiro arbitrário.

Exemplo 2:

Problema do laboratório:

Um laboratório dispõe de 2 máquinas para examinar amostras de sangue, uma delas examina 15 amostras de cada vez enquanto a outra examina 25. Quantas vezes essas máquinas devem ser acionadas para examinar exatamente 2 mil amostras?

Construção de todas as soluções da equação 25x + 15y = 2000 a partir de uma delas:

Reduzindo a equação à 5x + 3y = 400, como *mdc*(5,3) = 1 a equação possui solução inteira pois 1 divide 400. Obtendo-se uma solução (x_0, y_0) então (x_1, y_1) será solução da equação desde que se tenha um ***k*** inteiro tal que $x_1 = x_0 + bk$ e $y_1 = y_0 - ak$ onde, nesse caso, ***a*** = 5 e ***b*** = 3.

Como *mdc*(5,3) = 1 uma solução dessa equação pode ser obtida através do par de inteiros ***r*** e ***s*** tais que: 5***r*** + 3***s*** = 1 (estou usando ***ar*** + ***bs*** = 1), onde é fácil obter os valores ***r*** = 2 e ***s*** = -3.

Note que 5 . 2 + 3 . (-3) = 10 – 9 = 1.

Obtendo dessa forma os valores $\boldsymbol{x_0}$ = 2 . 400 = 800 e $\boldsymbol{y_0}$ = -3 . 400 = -1200 [Utilizei: ***c*** = ***dm***, ***x*** = ***rm*** e ***y*** = ***sm*** ; nesse caso ***d*** =1 e ***c*** = ***m*** = 400]. Logo o par (800, -1200) é uma solução da equação 5x + 3y = 400 e (utilizando $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{bk}$ e $\boldsymbol{y_1} = \boldsymbol{y_0} - \boldsymbol{ak}$) todas as outras podem ser escritas na forma:

$\boldsymbol{x_1 = 800 + 3k}$ e $\boldsymbol{y_1 = -1200 - 5k}$ com ***k*** arbitrário.

Para encontrar x e y não negativos (devido ao contexto), resolve-se o sistema de inequações: 800 + 3k ≥ 0 e - 1200 - 5k ≥ 0. Encontrando a solução -800/3 ≤ k ≤ -240. Como k deve ser inteiro, seus valores se restringem a: -266; -265; -264 ... -238; -239; -240.

Logo, substituindo os valores restritos de k em **x = 800 + 3k e y = - 1200 - 5k** encontram-se todas as 27 possíveis soluções para a equação 25x + 15y = 2000, com x e y não negativos.

Para K igual a:	**Temos x igual a:**	**Temos y igual a:**	**Para K igual a:**	**Temos x igual a:**	**Temos y Igual a:**
-266	2	130	-252	44	60
-265	5	125	-251	47	55
-264	8	120	-250	50	50
-263	11	115	-249	53	45
-262	14	110	-248	56	40
-261	17	105	-247	59	35
-260	20	100	-246	62	30
-259	23	95	-245	65	25
-258	26	90	-244	68	20
-257	29	85	-243	71	15
-256	32	80	-242	74	10
-255	35	75	-241	77	5
-254	38	70	-240	80	0
-253	41	65			

Onde os pares ordenados: (2 , 130), (5 , 125), (8 , 120) ... (77 , 5) e (80 , 0) são todas as possíveis soluções (x , y) para o problema proposto.

Fundamentos Didáticos: leituras e escolhas

A revisão bibliográfica revelou alguns trabalhos que propiciaram uma melhor compreensão da temática a ser abordada nesta pesquisa. Apresento a seguir uma síntese de alguns trabalhos que contribuíram direta ou indiretamente para essa pesquisa.

Alguns pesquisadores têm se ocupado de questões relacionadas ao ensino de Teoria Elementar dos Números, nos três níveis de educação: infantil, básica e superior. Algumas pesquisas vêm sendo realizadas nesses três níveis.

O resultado de parte dessas pesquisas foi publicado em 2002: Learning and Teaching Number Theory - Research in Cognition and Instruction, editada por dois dos mais ativos pesquisadores da área, Stephen R. CAMPBELL e Rina ZAZKIS.

Os trabalhos, divulgados nessa obra, tratam de temas da Teoria Elementar dos Números: divisão e divisibilidade definidas nos naturais e nos inteiros, números primos e compostos, decomposição em primos, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, relação entre quocientes e restos. Incluem aspectos: conceituais, de representação, operacionais, **estratégias de resolução de problemas**, processos cognitivos e conceitos envolvidos no raciocínio e prova de alguns teoremas sobre números inteiros e naturais, formulação de conjecturas e provas por indução. Coletivamente, esses estudos fornecem alguma indicação do potencial da teoria dos números para a compreensão mais aprofundada da Matemática fundamental, no entanto os pesquisadores apontam para a necessidade de um esforço sistemático por parte da comunidade dos educadores matemáticos e pesquisadores para investigar esse potencial, pois consideram que as pesquisas nesta área têm sido relativamente esparsas e desconectadas.

Vários artigos dessa obra compartilham o potencial da Teoria Elementar dos Números para:

- auxiliar a reconhecer e compensar limitações dos estudantes em seu entendimento conceitual da aritmética dos números inteiros;

- criar oportunidades, através da abordagem de tópicos como decomposição em primos e divisibilidade, para propor problemas mais propícios a desenvolvimento de compreensão estrutural da matemática;
- investigar as habilidades dos estudantes para generalizar e fazer conjecturas e para encontrar maneiras de justificar essas conjecturas, através do desenvolvimento de estratégias de prova indutivas e dedutivas.

MARANHÃO, MACHADO e COELHO (2004), destacam outra característica da Teoria Elementar dos Números: o fato de ela constituir-se num contexto feliz para introduzir o formalismo matemático, uma vez que os objetos matemáticos examinados (números) são familiares aos estudantes do Ensino Médio desde longa data.

Essa característica faz dela um tópico privilegiado para um currículo de Licenciatura, além de gerar interessantes questões de pesquisa sobre cognição e procedimentos de ensino voltados aos futuros professores.

Como já mencionado no início do trabalho, em meu grupo de pesquisa (GPEA), alguns colegas lançaram-se a pesquisar assuntos da Teoria dos Números nos diversos níveis de ensino. Alguns trabalhos já foram realizados dentro desse Grupo, dos quais destaco os resultados de três deles por estarem mais ligados ao tema em estudo.

Machado *et. al.* (2005) investigaram a compreensão do Teorema Fundamental da Aritmética (TFA), de professores de Matemática em curso de formação continuada e alunos de 8ª série do Ensino Fundamental, buscando estabelecer uma comparação entre os dois grupos. Foram apresentadas duas questões que envolviam um número decomposto em fatores primos em cada uma delas e solicitado que os participantes verificassem se eles eram divisíveis por alguns números dados. Embora a maioria deles (66% na primeira e 71% na segunda) tenha utilizado a decomposição em fatores primos para decidir e justificar a divisibilidade, indicando o uso implícito do TFA, o uso de algoritmos foi maior no grupo dos professores do que no grupo dos alunos, sendo que na segunda questão nenhum aluno lançou mão desse recurso. Segundo as pesquisadoras, isso mostra que a trajetória destes professores, marcada pela predominância de algoritmos em relação a conceitos, cria uma resistência a outras formas de abordagens, enquanto que alunos expostos a uma formação que enfatiza significados, como os do grupo pesquisado, podem ter maior prontidão para usá-los.

Resende (2007), em sua tese de doutorado, teve como objetivo compreender a Teoria dos Números, enquanto saber a ensinar, e buscar elementos para re-significá-la na licenciatura em Matemática.

Para isso Resende analisou as propostas curriculares das disciplinas que tratam de Teoria dos Números nos cursos de licenciatura em matemática de doze universidades brasileiras; analisou dez livros didáticos e realizou sete entrevistas semi-estruturadas com professores e pesquisadores em Teoria dos Números ou em Educação Matemática.

Resende identificou elementos e possibilidades para re-significá-la, considerando que: tópicos de Teoria dos Números estão presentes na educação básica, sendo que os números naturais e os inteiros ocupam grande parte dos currículos de Matemática nesse nível e seu ensino tem questões próprias que não podem ser desconsideradas na formação do professor; a Teoria dos Números é um espaço propício para o desenvolvimento de idéias matemáticas relevantes relativas aos números naturais e algumas também estendidas aos inteiros, presentes na Matemática escolar, como a recorrência, a indução Matemática, a divisibilidade; a Teoria dos Números é um campo propício para uma abordagem mais ampla da prova, porque oferece ricas oportunidades para a exploração dos diferentes tipos de provas, permitindo ao licenciando perceber que a prova tem diferentes funções e que, no ensino, não deve ser compreendida da mesma forma que na pesquisa em Matemática; a Teoria dos Números é um campo propício para a investigação Matemática, porque permite a exploração de padrões e relações numéricas, o uso da recursão e da indução Matemática, oportunizando o desenvolvimento das habilidades de conjecturar, generalizar, testar e validar as conjecturas.

Segundo Resende essas potencialidades sustentam a concepção de uma disciplina, que está sendo denominada Teoria Elementar dos Números, que tem como fonte o saber científico, mas também os saberes escolares e as demandas que o seu ensino apresenta ao professor. Constituem tópicos essenciais a serem abordados: os números inteiros em seus aspectos históricos epistemológicos e procedimentais; a divisibilidade, números primos e equações diofantinas lineares. Seus objetivos e abordagens devem considerar que o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo, a teoria e a prática devem estar presentes na sua constituição, como elementos indissociáveis e imprescindíveis.

Oliveira (2006), decidiu investigar se e como é abordado o tema “equações diofantinas lineares” em livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio. Em sua revisão bibliográfica Oliveira mostra a importância do tema equações diofantinas lineares para o Ensino Básico:

> É fundamental ressaltar que a resolução de problemas de Teoria Elementar dos Números envolve conceitos e métodos aprendidos no Ensino Básico e exigem a interpretação de seus dados. É o caso dos problemas que envolvem o uso de conhecimentos sobre resolução de equações diofantinas lineares. Esse é um assunto importante a ser trabalhado no Ensino Básico por dois motivos: primeiro, os conhecimentos relativos à resolução de equações desse tipo estão presentes nos livros didáticos do Ensino Fundamental. Segundo, já existem diversas situações-problema que são acessíveis à compreensão do estudante e cujas soluções são facilitadas com o conhecimento dessa “ferramenta” de resolução de problemas. Dessa forma, justifica-se a presença do tema “equações diofantinas lineares” no Ensino Básico. (Oliveira, 2006 p. 28)

Em sua pesquisa Oliveira concluiu que não há qualquer referência ao objeto do saber “equações diofantinas lineares” feita tanto nos PCNEM como nos PCN+, ou seja, esse assunto não é considerado um objeto de ensino pelos autores desses documentos. E concluiu também que o objeto do saber “equações diofantinas lineares” não é considerado objeto de ensino pelos autores das duas coleções de livros didáticos por ele analisadas.

Oliveira mostrou em seu trabalho que nos poucos problemas, modelados via equações diofantinas lineares, apresentados nos livros didáticos do Ensino Médio que analisou, a sugestão dos autores é resolvê-los por tentativa.

A leitura desses textos contribuiu para fortalecer os argumentos sobre a importância do meu tema.

O tema ‘equações diofantinas lineares’ se constitui em objeto do saber científico, no entanto minha hipótese de pesquisa é de que esse tema não é considerado explícita ou implicitamente como objeto de ensino do Ensino Médio.

A escolha dos conteúdos a serem trabalhados no Ensino Médio se manifesta principalmente através dos programas escolares e dos livros didáticos. Porém, mesmo não aparecendo nos PCNEM, PCN+ e nos livros didáticos desse nível de ensino como objeto de ensino, problemas modelados por equações diofantinas lineares poderiam estar sendo trabalhados com alunos do Ensino Médio. E, em caso positivo, tal trabalho poderia estar contemplando recursos da Teoria Elementar dos Números como ferramenta de resolução.

CAPÍTULO III

Método e Procedimentos Metodológicos

Para atingir o objetivo deste trabalho, isto é, investigar se e como professores de matemática do Ensino Médio trabalham com seus alunos situações-problema que recaem em equações diofantinas lineares, julguei ser mais adequado adotar uma abordagem qualitativa.

Os sujeitos de minha pesquisa, professores de Matemática do Ensino Médio de Estados vizinhos, São Paulo e Minas Gerais, partilham de características comuns, embora não formem um grupo, o que, de acordo com Bogdan e Biklen (1994) permite considerá-los sujeitos de um estudo qualitativo:

> Os indivíduos que partilham uma característica particular, mas que não formam grupos, **podem ser sujeitos de um estudo qualitativo** [...] (pág. 92)

Na pesquisa qualitativa, segundo Menga Lüdke e Marli André (1986), dentre as diversas técnicas para coleta de dados, a entrevista é uma das principais, pois alegam que a grande vantagem da entrevista sobre outras técnicas é que ela permite a captação imediata e corrente da informação desejada, praticamente com qualquer tipo de informante e sobre os mais variados tópicos. (LUDKE e ANDRÉ, 1986 p.34)

Essas autoras distinguem três tipos de entrevistas:

1. *Entrevista estruturada:* onde o entrevistador segue um roteiro de perguntas feitas a todos os entrevistados de maneira idêntica e na

mesma ordem, situação muito próxima da aplicação de um questionário, com a vantagem de se ter o entrevistador presente para um eventual esclarecimento;

2. *Entrevista não estruturada:* não há a imposição de uma ordem rígida de questões, o entrevistado discorre sobre o tema proposto com base nas informações que ele detém e que no fundo são a verdadeira razão da entrevista; e,
3. *Entrevista semi-estruturada:* entre os dois tipos citados anteriormente, se desenrola a partir de um esquema básico, porém não aplicado rigidamente, permitindo que o entrevistador faça as necessárias adaptações.

No primeiro tipo de entrevista, se estabelece uma relação hierárquica entre o pesquisador e o pesquisando, pela aplicação de questionários, enquanto nos dois outros tipos de entrevista a relação que se cria, entre o investigador e os sujeitos da pesquisa, é de interação, havendo uma atmosfera de influência recíproca entre quem pergunta e quem responde.

De acordo com essas observações decidi usar como instrumento de minha pesquisa a da entrevista semi-estruturada. Para esse tipo de entrevista Ludke e André (1986) aconselham o uso de um roteiro que guie a entrevista através dos tópicos principais a serem cobertos.

> Esse roteiro seguirá naturalmente uma certa ordem lógica e também psicológica, isto é, cuidará para que haja uma seqüência lógica entre os assuntos, dos mais simples aos mais complexos, respeitando o sentido de seu encadeamento. (p. 36)

Essas autoras recomendam que para a realização da entrevista alguns cuidados sejam tomados. Ao lado do respeito pela cultura e pelos valores do entrevistado, o entrevistador deve desenvolver uma grande capacidade de ouvir atentamente e de estimular o fluxo natural de informações por parte do entrevistado. Essa estimulação não pode, no entanto, forçar o rumo das respostas em uma determinada direção. Deve apenas, garantir um clima de confiança, para que o informante se sinta à vontade para se expressar livremente.

Assim sendo, procurei respeitar essas considerações nos procedimentos da presente investigação.

Primeiramente fiz uma revisão bibliográfica sobre o tema de Teoria Elementar dos Números[1], a qual juntamente com as discussões do grupo de Educação Algébrica possibilitou e referenciou a focalização sobre as equações diofantinas lineares. Meu colega de grupo, Oliveira (2006), e eu decidimos investigar esse assunto, ele nos livros didáticos do Ensino Médio, como já descrito, e eu com professores desse mesmo nível.

Elaborei o roteiro da entrevista semi-estruturada por meio de uma análise a priori levando em conta as variáveis inerentes ao assunto “equações diofantinas lineares”. Conforme considerações dos capítulos anteriores decidi trabalhar com equações diofantinas lineares a duas incógnitas.

Nas análises a priori das questões, defini o objetivo de cada uma, as possíveis respostas e resoluções corretas, tecendo comentários sobre as mesmas, quando pertinente.

Decidi contatar professores do ensino médio da capital de São Paulo e de uma cidade do interior de Minas Gerais, solicitando participação em minha pesquisa. Após o contato selecionei os sujeitos da investigação.

Realizada a entrevista, fiz a transcrição das fitas gravadas, seguida da textualização da transcrição acrescentada das notas registradas por mim durante a mesma. Depois disso passei à elaboração da descrição e análise de cada uma, confrontando os resultados com a análise a priori realizada anteriormente.

As análises foram feitas primeiramente de cada uma das entrevistas (análise vertical) seguidas de uma análise por questões respondidas (análise horizontal).

Finalizei com a elaboração das conclusões que foram surgindo de forma fragmentada ao longo da pesquisa.

---

[1] Teoria Elementar dos Números conforme definida por Resende (2005) p. 109

Roteiro da entrevista semi-estruturada

O roteiro da entrevista semi-estruturada foi elaborado a fim de que não se constituísse em uma "camisa de força" que prejudicasse a dinâmica natural da entrevista e tentei direcionar as questões de modo a obter os dados considerados necessários para uma conclusão consistente e substantiva. Também cuidei que não houvesse indução às respostas.

O roteiro foi elaborado levando em conta que a entrevista semi-estruturada possibilita ao entrevistador, dependendo da situação, mudar o encaminhamento

Embora o objetivo da investigação já indique uma certa característica dos sujeitos de pesquisa, professores do Ensino Médio, nos dois primeiros blocos decidi fazer perguntas relacionadas à formação e à experiência profissional, com o objetivo de deixar o professor à vontade. Tais informações não exigem muita reflexão, pois quase todas, são dadas praticamente de modo automático durante a vida docente do profissional, assim são fáceis de informar e eventualmente poderão ser úteis para ajudar nas futuras análises.

O primeiro bloco de questões do roteiro visou à caracterização da formação acadêmica do entrevistado.

O quadro abaixo retrata as perguntas "guias" relativas a esse primeiro bloco de questões:

q.1: Realizou qual tipo de Ensino Médio: tradicional, técnico ou supletivo?

q.2: Fez qual (quais) o curso(s) de Ensino Superior?

q.3: Fez algum curso de formação continuada relacionado ao ensino de Matemática, pós-graduação?

q.4: Quais desses assuntos você lembra ter estudado durante sua formação?

Caracterização do entrevistado: quanto à formação

Ao fazer a questão 4, entrega-se uma folha com os assuntos delimitados como Teoria Elementar dos Números, segundo Resende (2005), na qual o entrevistado pode indicar o que lembra que estudou em sua formação.

Números Inteiros: operações e propriedades, princípio da indução finita.

Divisibilidade: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, o Teorema Fundamental da Aritmética;

Congruência módulo m: Pequeno Teorema de Fermat, Teorema de Euler e Teorema de Wilson;

Equações diofantinas lineares.

Teoria Elementar dos Números (Resende 2005 p. 109)

O segundo bloco de questões do roteiro visou à caracterização docente do entrevistado:

q.5: Você leciona em escola pública e/ou privada?
q.6: Há quanto tempo leciona?
q.7: Você leciona em quais séries do ensino médio e do fundamental?

Caracterização docente

O **terceiro bloco** de questões teve como objetivo investigar se e como o professor trabalha com questões que envolvem a resolução de equações diofantinas lineares com seus alunos.

Para obter esses dados selecionei 4 problemas que envolvem em sua resolução diferentes equações diofantinas lineares com e sem solução. Os problemas foram apresentados considerando uma ordem crescente de dificuldade.

O enunciado de cada problema é apresentado impresso no cabeçalho de uma folha em branco. O entrevistado poderá rabiscar na própria folha ou em folha de rascunho disponibilizada.

Decidi adotar a seguinte postura: mesmo que o professor entrevistado respondesse que não trabalhava com o tipo de problema apresentado, pediria a ele para descrever, que tipos de estratégias ele imaginava que seus alunos utilizariam para resolver o mesmo.

A seguir descrevo os problemas na ordem em que foram apresentados, as perguntas que farei em relação a cada problema, além de especificar as peculiaridades de cada problema e as estratégias previstas para a solução dos mesmos. Ao descrever as possíveis estratégias numerei-as: E_1, E_2,... $E_{m,}$ levando em conta o nível hierárquico de resolução, isto é, do que acreditava ser mais comum e/ou fácil, até o mais difícil de ser utilizado pelos alunos, mas que, no entanto poderia ter sido trabalhado com os mesmos pelo professor.

O **objetivo** principal do problema 1 é o de apresentar um problema facilmente equacionável e resolúvel via uma equação diofantina, desta forma penso que diminuo o risco de intimidar o professor, facilitando sua resposta.

Maria gastou R$ 23,00 no supermercado comprando pacotes de 5 Kg de arroz e de açúcar. Sabendo que ela pagou R$ 6,00 por pacote de arroz e R$ 5,00 por pacote de açúcar, quantos pacotes de arroz e quantos pacotes de açúcar ela comprou?

Problema 1

Ao entregar a folha com o problema 1 pedirei que o leia, e depois me responda:

q.8 Você costuma trabalhar com problemas desse tipo com seus alunos do ensino médio? q.9 Escreva quais as estratégias você imagina que seus alunos utilizariam para resolver esse problema.

Questões relativas ao problema 1

Mesmo que o professor não tenha o hábito de dar esse tipo de problema a seus alunos, trata-se de um problema cujas variáveis didáticas: uma única solução e números naturais baixos, 5,6 e 23, facilitam a resolução até por cálculo mental.

Prevejo as seguintes estratégias para resolução do problema 1:

E_1: cálculo mental (ensaio e erro ou tentativa e erro), vendo que 23 não é múltiplo de 5 nem de 6, percebe que (6 . 3) + 5 = 23 .

E_2: montar a equação 6x + 5y = 23, e dar valores não negativos para x e para y até encontrar x = 3 e y = 1 (tentativa e erro utilizando-se da equação).

E_3: montar a equação 6x + 5y = 23 perceber que se trata da equação de uma reta, e tentar obter uma solução a partir da construção de um gráfico.

E_4: montar a equação 6x + 5y = 23, verificar que o mdc(6; 5) é 1 e como 23 é divisível por 1 a equação possui solução inteira (não necessariamente x e y positivos como é exigido pelo problema). Obter mentalmente uma solução para a equação 6r + 5s = 1, por exemplo, r = 1 e s = -1. A partir daí obter uma solução particular para a equação 6x + 5y = 23 multiplicando r e s por 23, chegando à solução (x; y) = (23; -23). Apesar de ser uma solução para a equação 6x + 5y =

23, $(x_0; y_0) = (23; -23)$ não é uma solução para o problema, pois devido ao contexto, as quantidades representadas por x e y devem ser não negativas. Obter as demais soluções para a equação na forma $(x; y) = (x_0 + bk ; y_0 – ak)$. Nesse caso, as soluções seriam todas da forma: $x = 23 + 5k$ e $y = - 23 - 6k$, onde k é um inteiro arbitrário.

Para encontrar x e y não negativos (devido ao contexto), resolveria o sistema de inequações: $23 + 5k \geq 0$ e $-23 -6k \geq 0$. Encontrando a solução $-23/5 \leq k \leq -23/6$. Como k deve ser inteiro, seu valor se restringe a $k = -4$.

Logo, substituindo $k = -4$ em $x = 23 + 5k$ e $y = - 23 - 6k$ a solução para o problema é $x = 3$ e $y = 1$, ou seja, 3 saco solução e a pensar em uma maneira de obter essas soluções ou de mostrar que não existe solução.

Prevejo as seguintes estratégias para resolução deste problema:

E_1: cálculo mental (ensaio e erro ou tentativa e erro): encontrar uma, algumas, ou todas as soluções possíveis para o problema.

E_2: montar a equação 3x + 6y = 21, e dar valores não negativos para x e para y até encontrar uma, algumas, ou todas as soluções possíveis para o problema (tentativa e erro utilizando-se da equação).

E_3: montar a equação 3x + 6y = 21 simplificá-la para x + 2y = 7 e dar valores não negativos a x e a y até encontrar uma, algumas, ou todas as soluções possíveis para o problema (tentativa e erro utilizando-se da equação simplificada).

E_4: montar a equação 3x + 6y = 21 perceber que se trata da equação de uma reta, e tentar obter uma ou mais soluções a partir da construção de um gráfico.

E_5: montar a equação 3x + 6y = 21 simplificá-la para x + 2y = 7 perceber que se trata da equação de uma reta, e tentar obter uma ou mais soluções a partir da construção de um gráfico.

E_6: montar a equação 3x + 6y = 21, verificar que o mdc(3 ; 6) são 3 e como 21 é divisível por 3 a equação possui solução inteira (não necessariamente x e y positivos como é exigido pelo problema). Simplificar a equação para x + 2y = 7 e obter mentalmente uma solução para a equação 1r + 2s = 1, por exemplo, r = 1 e s = 0. A partir daí obter uma solução particular para a equação x + 2y = 7 multiplicando r e s por 7, chegando à solução $(x_0; y_0) = (7; 0)$. Obter as demais soluções para a equação x + 2y = 7 na forma $(x; y) = (x_0 + bk ; y_0 – ak)$. Nesse caso, as soluções seriam todas da forma: x = 7 + 2k e y = **-** 1k, onde k é um inteiro arbitrário.

Para encontrar x e y não negativos (devido ao contexto), resolveria o sistema de inequações: 7 + 2k ≥ 0 e -k ≥ 0.

Encontrando a solução -7/2 ≤ k ≤ 0. Como k deve ser inteiro, seus valores se restringem a 0; -1; -2; e -3.

Logo, substituindo os valores restritos de k em x = 7 + 2k e y = - k encontram-se todas as possíveis soluções para o problema: 7 mulheres e nenhum homem; 5 mulheres e um homem; 3 mulheres e 2 homens ou uma mulher e 3 homens.

E_7: método misto verifica-se que a equação tem solução pelo uso do mdc(3 ; 6) que divide 21 e se resolve com um dos métodos acima. Encontrando uma, algumas, ou todas as soluções possíveis para o problema.

A seguir apresento o problema 3, cujo **objetivo** é de forçar a reflexão sobre o tipo de estratégia adequado a sua resolução. Embora ele seja análogo ao problema 2, por possuir várias soluções, os números envolvidos são maiores que os do problema anterior dificultando a resolução por cálculo mental, o que poderá levar o entrevistado a refletir sobre estratégias diferentes de resolução.

Para participar de um evento comemorativo em um clube, não sócios pagavam R$ 12,00 e sócios R$ 8,00. Sabendo-se que foram arrecadados R$ 908,00 na portaria, quantos sócios estiveram no evento?

Problema 3

Ao entregar a folha com o problema 3 pede-se que o leia, e responda:

q.12 Escreva quais as estratégias você imagina que seus alunos utilizariam para resolver esse problema?

Questão relativa ao problema 3

Há 38 soluções possíveis para esse problema. Como no problema anterior a pergunta *q.10* indicou a possibilidade de haver mais de uma solução ou não haver solução espero que isso tenha alertado o entrevistado a procurar mais de uma solução ou todas para o problema.

Prevejo as seguintes estratégias para resolução deste problema:

E_1: cálculo mental (ensaio e erro ou tentativa e erro): encontrar uma ou algumas soluções possíveis para o problema.

Para *k* igual a:	Temos *y* igual a:	Para *k* igual a:	Temos *y* igual a:
-113	112	-94	55
-112	109	-93	52
-111	106	-92	49
-110	103	-91	46
-109	100	-90	43
-108	97	-89	40
-107	94	-88	37
-106	91	-87	34
-105	88	-86	31
-104	85	-85	28
-103	82	-84	25
-102	79	-83	22
-101	76	-82	19
-100	73	-81	16
-99	70	-80	13
-98	67	-79	10
-97	64	-78	7
-96	61	-77	4
-95	58	-76	1

Onde os valores: 112, 109, 106, 103, ... , 10, 7, 4 e 1 são todas as possíveis soluções (número total de sócios) para o problema proposto.

E$_7$: método misto verifica-se que a equação tem solução pelo uso do mdc (12; 8) que divide 908 e se resolve com um dos métodos acima. Encontrando uma, algumas, ou todas as soluções possíveis para o problema.

A seguir apresento o problema 4, cujo **objetivo** é o de observar se o entrevistado aciona os recursos de Teoria Elementar dos Números como ferramenta de resolução, pois sem esses recursos dificilmente se percebe que o problema não possui solução. O recurso á TEN ao qual me refiro é o da utilização do mdc entre 18 e 12 não dividir 400 e desta forma, indicar que não há solução para o problema.

João é dono de uma fábrica de perfumes. Marcelo, um de seus funcionários, saiu para vender perfumes de dois tipos diferentes, A e B. O do tipo A por R$ 18,00 e o do tipo B por R$ 12,00. Marcelo volta à fábrica e entrega a João R$ 400,00 arrecadados com as vendas dos perfumes. Quantos perfumes de cada tipo foram vendidos?

Problema 4

Ao entregar a folha com o problema 4 pede-se que o leia, e responda:

q.13 Escreva quais as estratégias você imagina que seus alunos utilizariam para resolver esse problema .
q.14 Será que tem solução, você lembra de algum resultado teórico que permite decidir se esse tipo de equação tem solução?

Questões relativas ao problema 4

Darei um tempo máximo de 5 minutos entre a questão 13 e a 14 para que o entrevistado tente resolver o problema. A questão 14 será feita se o entrevistado insistir em resolver o problema por calculo mental. O fato de delimitar o tempo em no máximo 5 minutos, para a resolução do problema 4, visa evitar que o entrevistado fique tentando resolver o problema por cálculo mental e saia frustrado da entrevista. Se ele tentar lembrar do resultado teórico (proposto pela q.14) dou-lhe mais 5 minutos para sua resolução.

Prevejo as seguintes estratégias para resolução do problema 4:

E_1: Calcular o mdc(18;12), que são 6, e verificar que 400 não é divisível por 6. Respondendo, então, que o problema não possui solução.

E_2: Montar a equação 12x + 18y = 400, escrevê-la na forma 6.(2x + 3y) = 400. Simplificá-la para 3(2x + 3y) = 200 e chegar em: 2x + 3y = 200/3. Como x e y devem ser números inteiros (e positivos), 2x e 3y também serão números inteiros, e a soma 2x + 3y também será um número inteiro, não podendo ser igual a 200/3 que não é um número inteiro. Respondendo, então, que o problema não possui solução.

Após a finalização da entrevista, conforme a disponibilidade de tempo do entrevistado, explicarei a ele que minha pesquisa visa refletir sobre a utilização de resultados simples de Teoria Elementar dos Números, que podem auxiliar o aluno a resolver problemas contextualizados. O principal argumento, que utilizarei para justificar a importância do tema para o aluno do Ensino Médio, é o da descontinuidade existente entre assuntos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio em relação a assuntos específicos dos números inteiros e de divisibilidade. A fim de sensibilizar cada entrevistado sobre o tema pretendo lhes entregar uma cópia do artigo: **Uma Equação Diofantina e suas Resoluções**, p. 39-46, Revista do Professor de Matemática 19 (1991). Espero assim retribuir a gentileza de sua participação em minha pesquisa contribuindo para introdução e/ou ampliação de seu interesse por assuntos da Educação Matemática.

A seleção dos sujeitos da pesquisa

Para o diagnóstico pretendido, decidi contatar 6 professores de escolas públicas e privadas, de duas cidades do interior de Minas Gerais e da capital de São Paulo, que estivessem ministrando aulas no Ensino Médio quando da ocasião da entrevista. Com isso, procurei contemplar alguma diversidade de formação e de contexto de atuação desses professores.

Escolhi o perfil de professores acima exposto, porque tenho fácil acesso a esse tipo de professor. Estou lecionando em uma escola pública e em uma escola particular do interior do Estado de Minas Gerais e conheço professores de Matemática que também lecionam nessas escolas. Na cidade de São Paulo, além de ter lecionado durante três anos (2002, 2003 e 2004), em escolas públicas e particulares, durante o período que cursei o mestrado tive colegas que lecionavam no Ensino Médio da cidade de São Paulo, o que me facilitou encontrar professores dispostos a participar das entrevistas.

Primeiro contato com os sujeitos da pesquisa e preparação do local das entrevistas

O contato com cada professor foi feito pessoalmente e de maneira informal, na ocasião, informei sobre a intenção em entrevistá-lo para minha pesquisa de mestrado. Solicitei sua colaboração, informando sobre o tempo necessário para a entrevista (por volta de 40 minutos) e sobre o fato de que estaria garantido seu anonimato.

Obtida a aquiescência dos sujeitos a serem entrevistados marquei a data e local da entrevista.

Para a escolha do local de cada entrevista atentei para que este tivesse condições físicas boas, tais como: pouco ou nenhum barulho, boa iluminação, mobiliário adequado, tomadas para gravador, etc. Tomei o cuidado de me certificar que tais locais não sofressem interferência externa.

CAPÍTULO IV

Descrição e Análise das Entrevistas

Neste capítulo, apresento a descrição e a análise das 6 entrevistas com os professores selecionados. Primeiramente, abordo a entrevista piloto, cuja análise me auxiliou a aprimorar, tanto o roteiro elaborado, quanto a forma de entrevistar. Depois apresento e analiso individualmente ('análise vertical') cada uma das outras cinco entrevistas. Em seguida analiso coletivamente ('análise horizontal') as respostas dadas a cada questão do roteiro. As análises se pautaram pelas análises a priori feitas e apresentadas no capítulo anterior e se referenciaram nos aportes teóricos desenvolvidos no capítulo 3.

Os nomes utilizados para os professores entrevistados são todos nomes Fantasia que preservam a identidade de cada um.

Entrevista Piloto

A entrevista piloto ocorreu no início de 2005, durou por volta de 30 minutos e foi realizada em uma sala tranqüila da casa do professor, conforme o horário e local sugerido pelo próprio docente entrevistado. O professor assentiu com o áudio-gravação da entrevista tendo sido informado que teria seu anonimato garantido, pois no texto me referiria a ele por um nome fictício.

A seguir descrevo cada questão feita ao entrevistado, pois o roteiro utilizado na entrevista piloto não foi exatamente o mesmo que o apresentado no capítulo III, e utilizado nas demais entrevistas. O roteiro original sofreu algumas alterações causadas pela reflexão sobre os resultados obtidos na piloto.

Na descrição e posterior análise da entrevista o professor da entrevista piloto será denominado por Almeida.

O entrevistado contou que fez o Ensino Médio, tradicional, após o que cursou uma Licenciatura curta em Matemática, depois em Física e em Química. Como formação continuada Almeida afirmou que: *de Matemática eu fiz o, pós-graduação em Batatais, cidade do interior de São Paulo, mas foi só. Eu fui (a Batatais*[3]*), acho que cinco vezes, uma vez por mês, só.*

Desde formado, em 1987, o entrevistado disse que dá aulas na mesma Escola Pública da qual foi diretor durante 7 anos. Almeida contou que até a época da entrevista nunca havia lecionado em escola particular. Ele explicou que: *No começo eu lecionava só no Fundamental. Aí, depois que eu saí da direção, eu comecei em 2004 no Ensino Médio, no primeiro e segundo ano, de matemática.*

A seguir entreguei ao entrevistado, uma folha com o problema 1. Após ter terminado a leitura do problema, perguntei a Almeida se ele utilizava esse tipo de atividade com seus alunos. O entrevistado calmamente afirmou: *Eu já trabalhei com problemas desse tipo.*

Entreguei lápis e folha em branco ao entrevistado solicitando que ele descrevesse quais as estratégias imaginava que seus alunos utilizariam para resolver o problema 1.

Após um tempo em silêncio, o professor perguntou se era para escrever a estratégia no papel, e depois de alguns minutos disse:

> Então, a estratégia que eu ia usar é essa: seis reais um pacote de arroz, se ela compra três pacotes, já vai para dezoito reais, mais um de açúcar, vinte e três reais. Eles iriam fazer de cabeça.

Escreveu no papel:

---

[3] O que aparece entre parênteses nas “falas” a seguir foi acrescentado para facilitar a compreensão do leitor.

[redacted]

Perguntei se haveriam outras estratégias para resolução do problema, ao que Almeida respondeu:

> Eu acho que seria só essa. No caso três pacotes de arroz já iam para dezoito reais (...). Bom, eu ia incentivar eles nesse, com essa estratégia, mais um pacote de açúcar a cinco reais, vinte e três reais.

Entreguei o problema 2 ao entrevistado que, após demonstrar tê-lo lido afirmou que tratava desse mesmo tipo de problema com seus alunos. Solicitei que descrevesse quais as estratégias imaginava que seus alunos utilizariam para resolver esse problema.

Almeida ficou em silêncio, olhando para a folha por algum tempo, em seguida escreveu a equação:

[redacted]

Após o que, perguntou: *Você quer que eu faça como fiz no problema anterior?* Assenti com a cabeça explicando que desejava que ele dissesse quais as estratégias seus os alunos lançariam mão para resolver a questão.

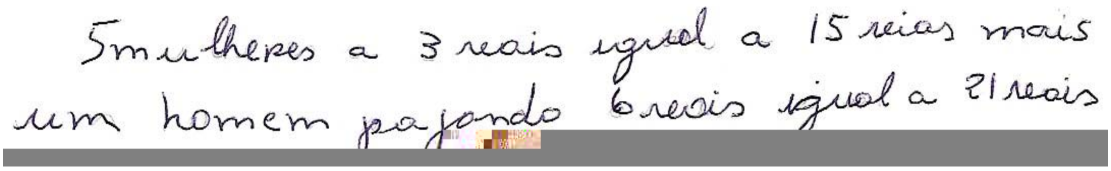
Almeida permaneceu novamente em silêncio. Olhou para a folha por algum tempo e depois escreveu no papel:

$$3 \times 5 = 15 + 6 = 21$$

Em seguida o professor disse:

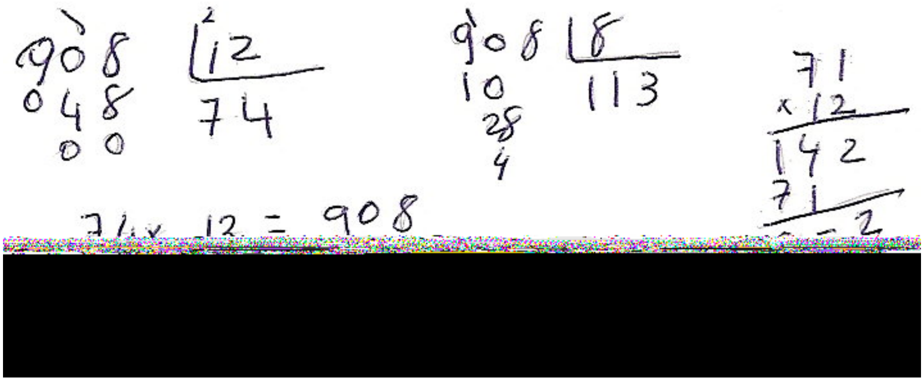
> Eu ia sugerir aos alunos a utilizarem a mesma estratégia que no problema anterior, para eles desenvolverem o raciocínio. Assim, cinco mulheres a três reais pagam ao todo quinze reais mais um homem a seis reais dá o total de vinte e um reais.

Almeida escreveu na folha:



Ao ser questionado se imaginava mais alguma estratégia a ser utilizada, Almeida respondeu: *Acho que seria só essa estratégia mesmo.*

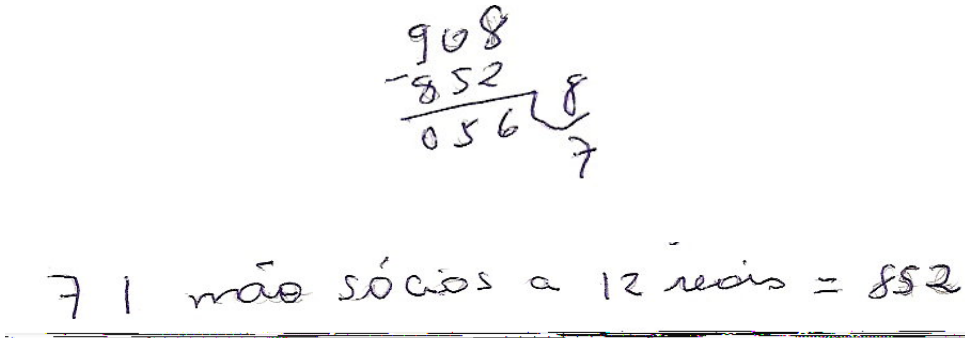
Após ler o problema 3 o professor guardou silêncio. Durante um certo tempo e após o que fez os seguintes cálculos na folha:



Depois de longo tempo fazendo contas Almeida olhou para mim, o entrevistador, apontando o gravador e sugerindo que o desligasse. Imediatamente desliguei o aparelho. O professor então perguntou: *Não vai atrapalhar sua pesquisa? Eu estou demorando muito, acho que errei.*

Afirmei a Almeida que para mim não havia problema de tempo e lhe perguntei se ele tinha algum compromisso. O entrevistado respondeu que não, que estava tudo bem.

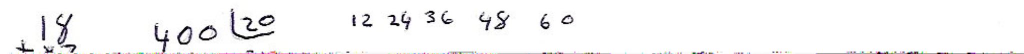
Pensei que talvez Almeida tivesse solicitado o desligamento do gravador porque estava demorando para resolver e isso causaria um gasto inútil em fita de gravação assim, religuei o aparelho, e o docente, não reclamou. Após mais algum tempo, o entrevistado fez as seguintes contas no papel:



[redacted]

Em seguida o entrevistado explicou: *Eu fiz por tentativa aqui: setenta e um não sócios a doze reais deram 852. Sete sócios a oito, 56. 852 mais 56, 908.* Então lhe perguntei qual resposta daria ao problema, ao que ele prontamente respondeu: *Setenta e um não sócios e sete sócios.*

Ao ler o problema 4, Almeida fez os seguintes cálculos na folha:



[redacted]

Depois de algum tempo o entrevistado disse: *Eu estou fazendo por tentativa aqui, mas não estou conseguindo achar uma solução.* Tranqüilizei o professor dizendo que estava tudo bem, e que o agradecia por ter participado de sua pesquisa.

Depois de finalizada a entrevista, com o gravador já desligado, Almeida comentou: *Estou cansado, mas problemas desse tipo são fáceis de resolver, eu gosto como desafio, é só sentar e resolver.*

Análise da entrevista piloto

O professor se mostrou bastante à vontade ao falar de sua formação e de sua atuação profissional, dessa forma o objetivo de deixá-lo à vontade perguntando sobre sua formação foi atingido.

É interessante ressaltar que apesar de Almeida ter iniciado sua carreira docente há 18 anos, sua experiência como professor do Ensino Médio é pequena, menos de dois anos. Além disso, o professor fez uma licenciatura curta em Matemática, Física e Química e como formação continuada ele fez um curso de extensão que pareceu depreciar ao dizer que foram só cinco dias... Depreendo de suas informações que o entrevistado teve pouca formação para a docência de matemática.

O professor informou já ter trabalhado com problemas semelhantes ao problema 1 com seus alunos. Ao invés de responder como seus alunos resolveriam esse problema, o professor disse que ele próprio utilizaria a estratégia do cálculo mental para resolvê-lo, estratégia essa prevista na análise a priori e denominada por $\mathbf{E_1}$.

Dessa forma, o objetivo de propor como primeiro problema, um fácil de ser equacionado e resolvido até mesmo por cálculo mental, para não intimidar o entrevistado no início, foi atingido.

Ao ser solicitado a mostrar por escrito a estratégia de resolução Almeida se limitou a escrever como estimou o resultado “de cabeça”. Além disso, o professor insistiu que via unicamente essa forma de resolução, acrescentando que até mesmo incentivaria seus alunos a utilizarem essa estratégia. É interessante notar que Almeida descreveu seu pensamento sem explicitar a equação relativa ao problema.

Em relação ao problema 2, nessa entrevista piloto, a questão que fiz foi simplesmente: O senhor trabalha com problemas desse tipo com seus alunos?

O professor afirmou trabalhar com problemas desse tipo com seus alunos. Escreveu a equação: $3x + 6y = 21$. Encontrou uma solução para o problema com o auxílio da equação, estratégia essa prevista na análise a priori e denominada $\mathbf{E_2}$, porém não percebeu que o problema possuía mais de uma solução.

Esse fato me motivou mudar a questão prevista para o problema 2, acrescentando uma informação que provocasse no entrevistado a reflexão sobre a possibilidade de não haver solução ou de haver mais de uma solução. Isto porque, de minha prática escolar reconheço que os livros didáticos em geral só trazem problemas com uma única solução.

De forma semelhante ao problema anterior, o professor comentou que sugeriria a seus alunos o uso da mesma estratégia, acrescentando ainda, que a mesma possibilitava o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Ao ser questionado se imaginaria mais alguma estratégia para a solução do problema 2, afirmou achar que haveria apenas a utilizada.

Um fato curioso foi o de Almeida escrever o sinal de vezes entre o coeficiente e as incógnitas x e y, pois, em geral os livros didáticos omitem esse sinal e/ou o substituem por um ponto.

Ao resolver o problema 3, o professor não apresentou uma expressão que o equacionasse matematicamente. Novamente utilizou de ensaio e erro para resolver o problema proposto, e ficou fazendo contas durante bastante tempo até encontrar uma solução que o satisfizesse. Ao encontrar uma das soluções o professor parou, se dando por satisfeito.

Apesar dos cálculos não terem sido mentais, pois Almeida os fez na folha disponibilizada, caracterizei a estratégia como sendo a $E_{1,}$ pois a resolução está mais próxima dessa estratégia.

Neste caso o professor parece também não ter admitido que houvesse mais de uma solução para o problema embora tenha expressado na folha que 74x12 = 908 (cometeu um erro na divisão) além de uma das possibilidades corretas indicadas como: 71 não sócios e 7 sócios. O que reforçou minha convicção de que deveria modificar a questão feita quanto ao problema 2.

Ao resolver o problema 4 o professor tentou exaustivamente encontrar uma solução até desistir, alegando não estar conseguindo e aparentando cansaço. O professor não utilizou nenhuma das estratégias de resolução previstas para esse problema, novamente utilizou-se de tentativa e erro, além disso, não aventou a possibilidade do problema não ter solução.

A certeza de Almeida de que haveria uma solução, sustentada provavelmente pelo fato de que em geral na escola não se propõe problemas que não tenham solução, me levou a criar no roteiro das outras entrevistas a questão que indiquei por questão 14: “Será que tem solução, você lembra de algum resultado teórico que permite decidir se esse tipo de equação tem solução?”.

No final, desligado o gravador, o professor revelou que gostava desse tipo de problemas, considerando-os fáceis de resolver e classificando-os como uma espécie de desafio.

Almeida explicitou a equação diofantina adequada somente no problema 2. Talvez não o tenha feito nos problemas posteriores porque na realidade não utilizou a equação para a resolução. Almeida tornou explícita sua convicção de que esses problemas sempre têm uma solução e que a estratégia adequada é a do ensaio e erro.

Respondendo a questão proposta como objetivo desta pesquisa, concluo que esse professor trabalha com problemas que recaem em equações diofantinas lineares, porém apenas com aqueles que possuem solução, e que indica a tentativa e erro como estratégia mais adequada para a resolução.

Entrevista com o Professor Batista

A entrevista com o professor Batista foi realizada em uma sala tranqüila de uma faculdade, no mês de fevereiro de 2005 tendo durado por volta de 30 minutos, tudo ocorreu conforme o horário e local sugerido pelo entrevistado. O professor assentiu com a gravação da entrevista.

Batista contou que fez o Ensino Médio Científico, cursou bacharelado em Engenharia Mecânica e Física e licenciatura plena em Matemática. Em relação à formação continuada em ensino de Matemática afirmou que:

> Eu fiz o latu sensu. O latu sensu era um curso de Educação Matemática. Fiz também a progressão continuada na formação de professores nas escolas que eu trabalhava, voltado para descrição metodológica. E atualmente, desde o ano passado, estou fazendo o mestrado em um Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática strictu sensu.

Quanto aos assuntos delimitados como Teoria Elementar dos Números, após uma rápida leitura Batista disse que:

> Números Inteiros, divisibilidade, o algoritmo da divisão, o máximo divisor comum, o mínimo múltiplo comum, o algoritmo de Euclides, números primos eu estudei.

Solicitei que sublinhasse na folha os assuntos estudados, no que ele prontamente atendeu marcando os seguintes assuntos: Números Inteiros: operações e propriedades, princípio da indução finita; Divisibilidade: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos.

Em seguida, Batista afirmou: *O Teorema Fundamental da Aritmética, eu não tive como objeto de estudo.* Depois de um tempo, apontando para o terceiro parágrafo comentou: *Esses também eu não tive,* e marcou com um n sob todos os assuntos descritos no parágrafo.

Ao observar o quarto parágrafo: Equações diofantinas lineares, o entrevistado afirmou: *esse eu tive.*

Ao falar sobre sua atuação docente, o professor contou lecionar há vinte e um anos, sempre em escola privada, com exceção do primeiro ano de carreira, em que lecionou tanto em escola pública quanto em escola privada. Disse ainda, que nesse ano de 2005 estava lecionando Física na primeira e terceira séries do Ensino Médio, mas que nos anos anteriores dera mais aulas de Matemática do que Física no Ensino Médio. Batista afirmou que só parou de ensinar Matemática no ensino Médio em 2003. No Ensino Fundamental, o professor afirmou que lecionara Matemática durante um curto período de tempo.

Perguntei então se naquela época, início de 2005, só estava lecionando Física no Ensino Médio, ao que Batista respondeu:

> Atualmente eu leciono Física no Ensino Médio e Matemática no terceiro grau. Eu leciono Estatística, e leciono uma disciplina básica - Métodos Quantitativos - (que serve) de formação para vários cursos (universitários).

Após a leitura do primeiro problema, ao ser questionado sobre a utilização desse tipo de atividade com seus alunos do Ensino Médio, Batista afirmou: *Eu trabalhava no primeiro ano, quando fazia o estudo de funções. Logo no começo apareciam problemas desse tipo aqui.*

Pedi então que ele descrevesse quais as estratégias imaginava que seus alunos, diante desse problema, utilizariam para resolvê-lo.

Após um tempo em silêncio, Batista explicou:

> Em geral quando eu passava esses problemas eles faziam tabelas ou tentativas sem serem tabuladas. Faziam tentativas numéricas para chegar nesse valor aqui (mostrando o 23 que aparece no enunciado). Em geral eles fazem sem muita organização, poucos alunos conseguem organizar as tentativas. Mas em geral eles fazem dessa maneira, dando números.

Solicitado a utilizar o papel para descrever como seus alunos fariam, Batista foi comentando enquanto desenhava a tabela abaixo:

> Eles tentam assim. O preço aqui do pacote de arroz é seis reais, o preço de açúcar é cinco. Então eles fazem tentativas. Eles vão colocando valores aqui e aqui, (o entrevistado mostra os dois lados da tabela) até conseguir. Por exemplo, aqui: o seis vezes dois doze, até completar aqui, nesse caso não dá, não é, seis vezes dois doze, mais dez, dá vinte e dois. Vão tentando, seis vezes um seis. Eles vão fazendo tentativas numéricas, até conseguir aqui.

TABELA. (POR TENTATIVAS)

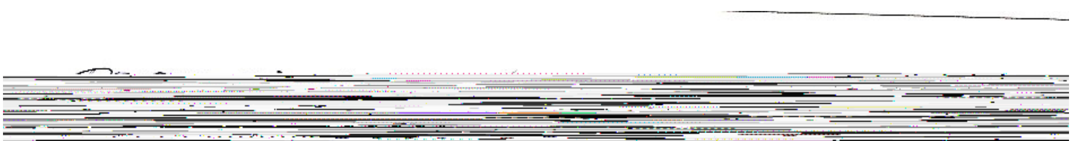
[redacted]

Depois de explicar a tabela Batista escreveu a equação acima e prosseguiu explicando:

> Por exemplo, esse problema que não tem solução, eles tem dificuldade. Eu não passava exercícios assim que não tinham solução, eu sempre começava com exercícios que tinham solução. Nesse caso não vão ter solução em Números Inteiros, então para eles é um grau de dificuldade maior.

Esperei por alguns instantes e como o entrevistado não disse mais nada, entreguei-lhe o segundo problema. Após sua leitura silenciosa, o questionei se costumava trabalhar com problemas com mais do que uma solução ou sem solução com seus alunos. Batista afirmou: *Eu costumo. Problemas dessa natureza,... trabalhava exercícios assim.*

O entrevistado descreveu, abaixo do enunciado do problema, como imaginava que os alunos resolveriam o mesmo:

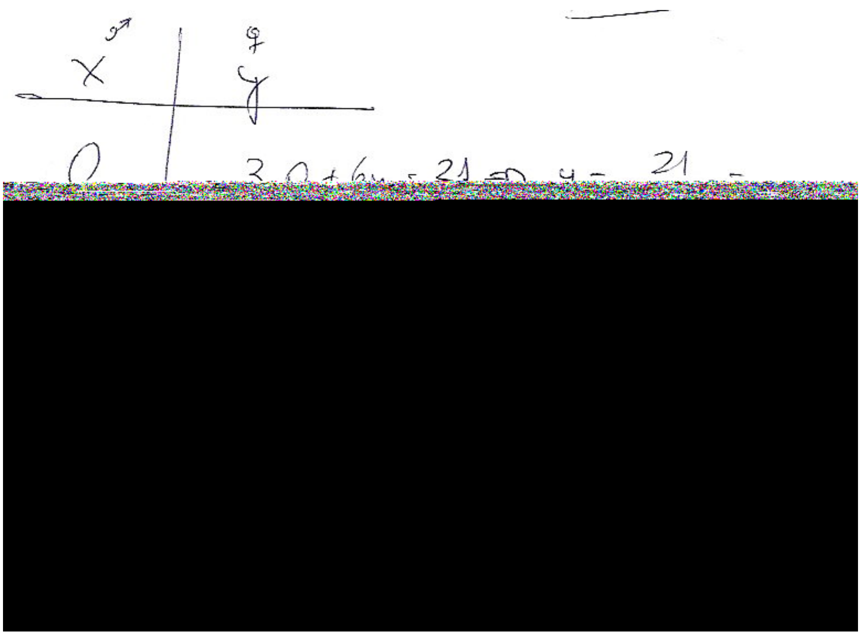


[redacted]

Ao mesmo tempo que escrevia o professor disse:

> Tentativa a esmo; tabulação. Dificilmente eles equacionam. Algumas vezes até eles equacionam. Até conseguem fazer isso (o entrevistado escreveu a equação: $3x + 6y = 21$). Mas quando chegam nessa equação eles dizem: há, está faltando alguma coisa, porque equação geralmente só tem uma variável. Então, mais é por tentativas.

Perguntei a Batista como ele resolveria o problema, ao que ele respondeu: *Eu resolveria assim, se fosse para ensino, eu faria a tabulação.* Batista esboçou a seguinte tabela:

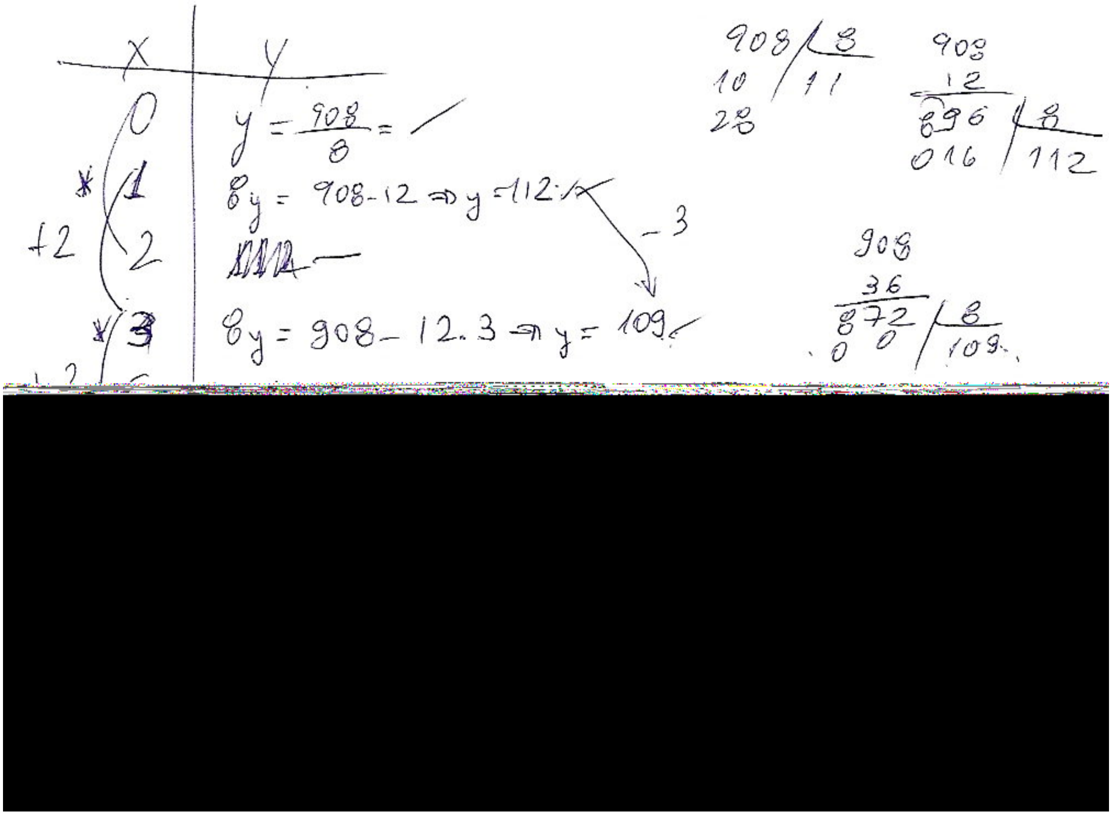


O entrevistado explicou*:*

> Chamaria de x aqui o número de homens e y o número de mulheres, e falaria: "Se você não tem nenhum homem. Você vai ter quantas mulheres? Será que vai ser possível isso? Ai você substitui aqui. Ai você resolvendo essa equação (escreveu: 3 . 0 + 6y = 21). Deu um número não inteiro de mulheres. Então essa não seria uma solução. Eu iria incrementando de um em um o valor do x (escreveu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 para x na tabela) até montar as equações. Tem uma hora que você vai ter uma resposta, que nem se fosse um homem (escreveu: 3 . 1 + 6y = 21; 6y = 18; y = 3) e três mulheres seria uma solução. Você vai organizando essas tentativas e ... (fica pensando). Até você chegar numa resposta aqui. Nesse caso você tem quatro possibilidades. Então eu organizaria assim [o professor risca na tabela os pares: (1;3), (3;2), (5;1) e (7,0)]. Em termos de estratégia, geralmente quando eu passava esses exercícios eu passava em duplas, eles discutiam. Tinham alguns alunos que chegavam nessa situação (indicou a equação: 3x + 6y = 21) e paravam. Eu explicava para fazer alguma tentativa numérica, eles esboçavam alguma, alguns desses pares aqui eles chegavam a esboçar. Poucos tinham essa idéia do todo, do geral, de organização de tabela.

Entreguei ao professor o problema 3 solicitando que descrevesse as estratégias que seus alunos utilizariam para resolvê-lo. Após ler, Batista comentou:

É basicamente a mesma estratégia que o anterior. Eu tenho dois



[redacted]

ao mesmo tempo em que ia explicando:

> Incrementando de um em um (tenta para x = 1 e escreve: 8y = 908 – 12; resolve fazendo as contas 908 – 12 e 896/8, chegando ao valor de 112). Ai achou a primeira solução (1 e 112). Ai a outra solução, você já pode partir pro... (pensou). Se o um tem solução 112 então o próximo aqui é bem provável que seja o três. Eu nem tento o dois. Mas ai na verdade você tem que fazer tentativas, (escreve: 8y = 908 – 12 . 3; resolve fazendo as contas 908 – 36 e 872/8, chegando ao valor de 109). Então aí achou duas soluções. A próxima vai ser o x=5, o x=7, o x=9.

Perguntei a Batista se ele havia achado quatro soluções, e ele acrescentou:

> É. O um e o cento e doze que é um par, ai o três e cento e nove e as próximas soluções, aqui está andando de dois em dois (mostra na tabela o lado x), as próximas é só você ir acrescentando de dois em dois, 1, 3, 5, 7, 9 e aqui (mostra o lado y da tabela) você diminui de três em três. Então o próximo, por exemplo, seria o cento e seis (escreve cento e seis para x igual a cinco), depois o cento e três, cem. E assim você tem muitas respostas na verdade, porque à medida que x vai crescendo o y vai decrescendo. Aí, quando der zero ou der negativo, aí você para. Então isso seriam todas as soluções possíveis, então para o x=1, o x=3, o x=5, o x=7, o x=9... . Aí você numera esses resultados. E de cá (lado y da tabela) vai sempre diminuindo de três em três unidades.

Perguntei ao entrevistado se haveria mais alguma estratégia, e ele respondeu:

> Eu costumo apresentar essa estratégia porque dá uma visão numérica do exercício, é uma estratégia mais natural que os alunos enxergam mais. Eu costumo não usar outra estratégia.

Após ler o problema 4, Batista comentou: Então, esse também é uma equação do mesmo tipo. E escreveu a equação:

[redacted]

e prosseguiu explicando:

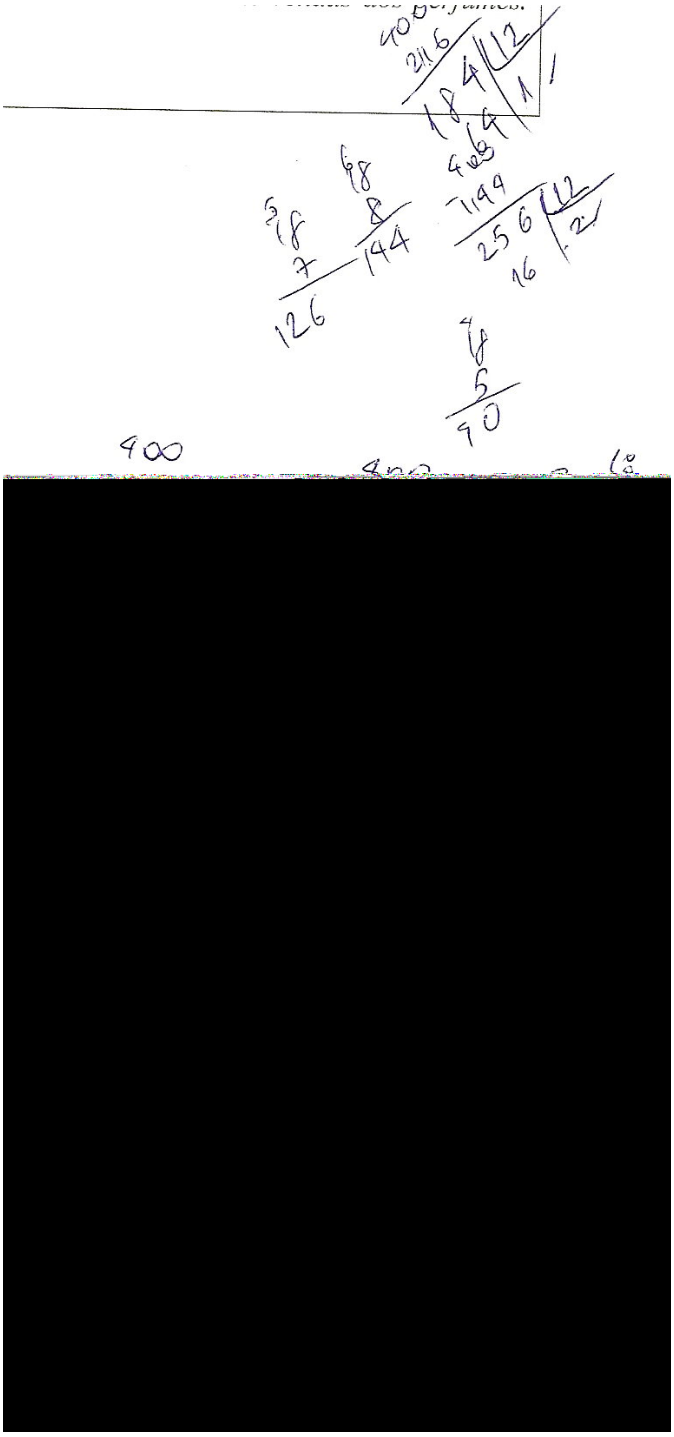
> Você pode simplificar a equação para estar resolvendo. Basicamente se você simplificar, eu acho que não, não dá o mesmo número de soluções que sem a simplificação, porque é um problema real. Então você também teria que estar fazendo a tabela e ir fazendo tentativas desde x igual a zero, o zero aqui não vai ter solução (escreve y = 400/12 = 200/6 e coloca o símbolo matemático de inexistente do lado), esse não tem solução.

O entrevistado esboçou a seguinte tabela na folha*:*

[redacted]

e comentou*: Ai você faz para o x igual a um (*escreve 12y = 400 -18; depois faz as contas 400-18 e 382/12; ao ver que para x igual a um não tem solução, vai tentando e calculando para x igual a dois, três, quatro, cinco, e seis, sempre colocando o símbolo matemático de inexistente do lado)*.*

O entrevistado fez vários cálculos na folha:



Em seguida, comentou: *Tem a ver com o mdc dos dois. O mdc é 2* (continua tentando e calcula para x igual a oito e para x igual a doze, sempre colocando o símbolo matemático de inexistente do lado)*. Tem que ficar procurando os divisores comuns para estar resolvendo a questão.*

Após seis minutos, durante os quais o entrevistado tentou resolver o problema, comentei se haveria mesmo uma solução quando Batista refletiu que: *É, talvez não tenha.*

Então, perguntei-lhe se lembrava de algum resultado teórico que permitisse decidir se esse tipo de equação tinha solução e o entrevistado respondeu: *Tem a ver com o mdc, mas eu não lembro exatamente.*

Dei por terminada a entrevista, agradeci ao entrevistado pela colaboração. Comentei brevemente sobre a minha pesquisa, e entreguei-lhe uma cópia do artigo: Uma Equação Diofantina e suas Resoluções.

Análise da entrevista de Batista

O professor Batista se mostrou bastante à vontade ao falar de sua formação e de sua atuação profissional, dessa forma ter iniciado a entrevista com essas questões tiveram o efeito desejado de deixá-lo à vontade.

O entrevistado mostrou ter investido bastante em sua formação, pois contou ter feito três graduações, todas na área de ciências exatas, sendo uma delas Licenciatura Plena em Matemática. Já como professor realizou pós-graduação latu sensu em Educação Matemática e desde 2004 era mestrando de um Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática strictu sensu. O percurso de Batista indica sua preocupação com a formação continuada e permite concluirmos que provavelmente tem tido contato com pesquisas na área de Educação Matemática.

Vale ressaltar que o entrevistado indicou que trabalhara em sua formação com assuntos da Teoria Elementar dos Números, inclusive com equações diofantinas lineares.

Embora o professor, em 2005, não estivesse lecionando Matemática no Ensino Médio, ele já possuía uma boa experiência, pois, durante 15 anos atuara como professor de Matemática desse nível de ensino e havia apenas dois anos que o deixara de fazer.

O professor informou que trabalhava com seus alunos problemas semelhantes aos apresentados, ao abordar o tema de funções no 1º ano do Ensino Médio.

Ao expor como pensava que seus alunos resolveriam esse tipo de problema, Batista apresentou sempre a mesma estratégia: apresentava a equação diofantina relativa ao enunciado e uma tabela. Durante a entrevista o professor disse que provavelmente os alunos, se equacionassem o problema, não utilizariam a equação, por não estarem habituados a trabalhar com uma única equação com duas incógnitas, ele deixou claro que pensava que o recurso à tabela era a forma mais adequada tanto para ser ensinado como para ser utilizado por seus alunos.

A estratégia da tabela não foi prevista na análise a priori, no entanto ela se aproxima muito da estratégia denominada por E_2 porque mesmo que o aluno não explicitasse a equação, implicitamente estaria utilizando a equação ao colocar na tabela o *x* e o *y* e trabalhando a interdependência entre as incógnitas.

Parece também que o uso da tabela pode ter sido enfatizado pelo professor por ter associado ao ensino de função, que na escola em geral leva à construção do gráfico via tabela.

Em relação ao primeiro problema, embora Batista tenha equacionado corretamente, na realidade ele só utilizou a tabela para concluir equivocadamente que o mesmo não tinha solução. Ao chegar a essa conclusão comentou que não “passava problemas sem solução” aos seus alunos, evidenciando uma prática comum entre os professores de matemática. É interessante notar que o entrevistado decidiu que não havia solução sem recorrer a qualquer outra estratégia. O que talvez indique a falta de hábito de validar soluções de problemas.

Embora Batista tenha afirmado que não passava problemas sem solução para seus alunos ao se deparar com o problema 2 e a questão feita pelo pesquisador se costumava dar problemas sem ou com mais do que uma solução respondeu que sim. Talvez não tenha prestado atenção à referencia feita sobre “sem solução”. Ao explicar e escrever a resolução do problema 2 corretamente, o entrevistado utilizou a equação escrita e uma tabela, ou seja, muito próximo do que denominamos na análise a priori de $\mathbf{E_2}$.

O professor montou a equação 12x + 8y = 908 para resolver o problema 3, de acordo com a estratégia indicada por $\mathbf{E_2}$ na análise a priori. Embora Batista não tenha utilizado outras estratégias, ele sugeriu haver a possibilidade de utilizar o que chamou de forma gráfica e explicou que geralmente depois de resolver o problema para os alunos ele a explica, imagino que ele quisesse dizer que desenha o gráfico da equação, para os alunos “visualizarem”. Assim, fica claro que o professor associava a equação diofantina linear com duas incógnitas a uma reta, no entanto, não utiliza isso como estratégia de resolução do problema, mas sim para “visualizar”.

Para resolver o último problema o professor utilizou a mesma estratégia que já aplicara aos anteriores: equação e tabulação, tentando exaustivamente encontrar uma solução. Neste caso ele comentou que para chegar à solução lembrava que tinha alguma coisa a ver com o mdc entre os dois coeficientes da incógnita, mas não lembrava exatamente da propriedade.

Assim, embora ele tenha afirmado que estudou equações diofantinas lineares, não acionou recursos que a Teoria Elementar dos Números oferece para a resolução desse tipo de equação.

A análise dessa entrevista evidenciou que embora o professor trabalhasse com problemas que recaem em equação diofantina linear, e que provavelmente tenha estudado sua resolução, na hora de ensinar aos alunos ele prefere sugerir o uso do ensaio e erro. Isso pode refletir o que Oliveira (2006), evocando a influência dos livros didáticos na forma de apresentar os assuntos de Matemática, já havia mostrado em sua dissertação, ao concluir que nos poucos problemas, do mesmo tipo que os problemas aqui utilizados, apresentados em livros didáticos do Ensino Médio, a sugestão dos autores é resolvê-los por tentativa.

Entrevista com o Professor Carvalho

A entrevista ocorreu em março de 2005, durou por volta de 45 minutos e foi realizada em minha casa, de acordo com o horário e local sugerido pelo professor entrevistado. A entrevista ocorreu sem ter sido interrompida, e o professor assentiu com a áudio-gravação da mesma.

O entrevistado, doravante chamado por Carvalho, contou que fez o Ensino Médio Tradicional, cursou Licenciatura plena em Física e que ainda não havia feito nenhum curso relacionado ao ensino de Matemática.

Entreguei-lhe uma caneta e uma folha com os assuntos delimitados como Teoria Elementar dos Números, solicitando que ele sublinhasse na folha os assuntos por ele estudados. Após uma rápida leitura Carvalho afirmou que:

> Números Inteiros: operações e propriedades, só operações e propriedades, princípio da indução não, não que eu me lembre. Divisibilidade: algoritmo da divisão sim, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos e Teorema Fundamental da Aritmética. Congruência módulo m: que eu me lembre Teorema de Fermat não, Teorema de Euler eu ouvi falar mas não estudei de fato, Teorema de Wilson não. E equações diofantinas lineares também não.

Atendendo ao meu pedido, Carvalho marcou com um “X” os seguintes assuntos: Números Inteiros: operações e propriedades; Divisibilidade: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos e o Teorema Fundamental da Aritmética.

Em seguida marcou com um “não” os assuntos: princípio da indução finita; Congruência módulo m: Pequeno Teorema de Fermat, Teorema de Euler e Teorema de Wilson; Equações diofantinas lineares.

Prosseguindo a entrevista perguntei sobre sua atuação docente. O entrevistado contou lecionar a três anos, sempre em escola privada. Disse ainda, que nunca lecionou no Ensino Fundamental e que naquele momento lecionava Matemática e Física nas três séries do Ensino Médio.

A seguir entreguei uma folha com o problema 1 ao entrevistado. Após a leitura do problema, ao ser questionado sobre a utilização desse tipo de atividade com seus alunos do Ensino Médio, Carvalho afirmou:

> Quando abordo principalmente a Matemática básica no primeiro ano e faço uma breve revisão dos conceitos fundamentais eu costumo trabalhar com esse tipo de problema.

Pedi então que ele descrevesse quais as estratégias imaginava que seus alunos, diante desse problema, utilizariam para resolvê-lo. Carvalho disse:

> A primeira parte que eles veriam ai no caso seria uma parte de quantificação. Eles veriam o total de gastos, o total de valores e fariam uma quantificação. Uma quantificação, você pode até colocar assim como uma comparação de valores (Escreve no papel: quantificação/comparação de valores). Posteriormente, na resolução propriamente dita, eles utilizariam conceitos, vamos dizer, básicos, na maioria dos alunos, com multiplicações e divisões, que são as operações fundamentais no exercício (Escreve Multiplicações / Divisões). Alguns alunos mais bem estruturados com relação ao Ensino Fundamental já poderiam até chegar a pensar num sistema. Mas a maioria dos alunos, em geral, vai utilizar multiplicação e divisão. Pela minha experiência, a grande maioria dos alunos está vindo muito despreparada, então, o que eles tentariam utilizar: tentativa e erro (Escreve Tentativa e erro). Seriam aí as três mais utilizadas, levando em consideração a maioria dos alunos.

Carvalho escreveu na folha:

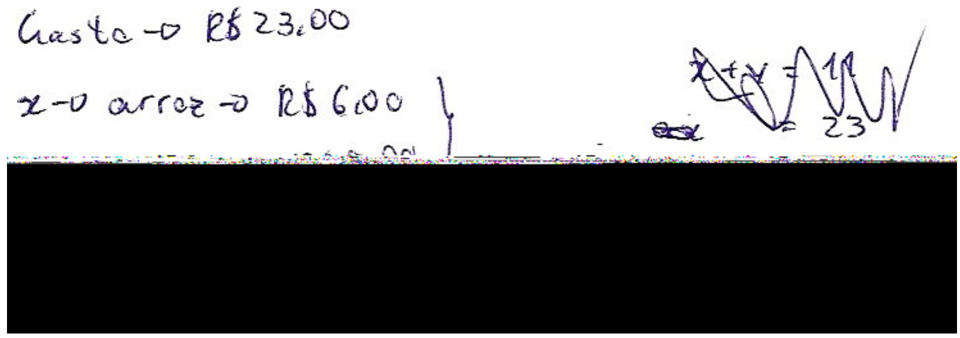
[redacted]

Perguntei a Carvalho como ele resolveria o problema, e ele disse:

> No caso eu pensaria em montar um sistema, ou,... .Eu costumo colocar todos os dados inicialmente, para fazer a análise. Colocaria x o valor do arroz, seis reais, y o valor do açúcar. E ai quantos pacotes de arroz e quantos pacotes de açúcar ela comprou, a gente poderia fazer dessa forma. x + y, um valor

unitário dariam 11 reais, e aí o valor ... deixa eu ver aqui ... aí, no caso com 23 reais você poderia estabelecer aqui um... é, por sistema não ficaria muito conveniente .

Carvalho escreveu na folha:


Gasto → R$ 23,00

x → arroz → R$ 6,00

~~x + y = 11~~

~~= 23~~

[redacted]

O entrevistado risca o que havia escrito: x + y = 11 e 5a + 6b = 23. Depois ele escreve novamente no papel 5a + 6b = 23 e fica olhando para a equação escrita. Após bastante tempo em silêncio, comenta:

Eu sei quanto dá a resposta, mas,...

Perguntei-lhe então, qual seria a resposta, e Carvalho afirmou:

Um e três. Um para o açúcar e três para o arroz. Mas eu não estou conseguindo fazer aqui um critério para explicar.

Solicitei que me dissesse como havia chegado nesse valor, e ele respondeu:

É, pelos valores, porque, o que acontece, eu tenho 23 reais. Ai se você colocar aqui, o valor de 5 reais, os múltiplos dele então tem que ser terminados em cinco ou zero. E se você colocar mais de um valor no caso, você não vai chegar num resultado tendo em vista que o valor do arroz é 6 reais. Se você colocar dois vão ser 10 reais, e no caso só sobrariam 13 reais, que não poderia ser porque não é um valor terminado em cinco, e não é um valor compatível com os 6 reais, que é um dos seus múltiplos. Então o que eu pensei, tentei utilizar primeiro o pacote de arroz que são os valores de 6 reais. Ai o que acontece, como são 23 reais, dividi pelo pacote de arroz, por seis, deu valor três e o resto deu cinco, exatamente o valor que deu o pacote de açúcar, então foram três, utilizando uma conta de divisão, o quociente deu três, que é o número de sacos de arroz, e o resto deu cinco reais exatos que é o valor de um pacote de açúcar.

Comentou ainda:

> Mas assim, uma metodologia Matemática mais precisa, eu não consegui estabelecer.

Recolhi a folha com o problema 1 e lhe entreguei outra folha, agora com o problema 2.

Após sua leitura, questionei-lhe se costumava trabalhar com problemas com mais do que uma solução ou sem solução com seus alunos. Carvalho afirmou:

> Com mais de uma resposta, às vezes sim. Não digo que sempre, mas às vezes sim. Principalmente a parte de sistemas, matrizes se trabalha muito com essa parte de várias soluções, depende do..., mas geralmente é uma coisa mais restrita, já não é um costume. Não com a mesma freqüência dos outros, já é um pouco mais raro.

Indaguei-lhe então, quais estratégias imaginava que seus alunos utilizariam para resolver esse problema. Carvalho relatou:

> Esse aqui também. (o entrevistado vai falando e escrevendo no papel) A primeira parte que eles veriam seria o gasto total... Ai, o que eles iriam fazer, também iam testar, iam fazer a tentativa e erro. Certo, porque, assim, o que o aluno poderia colocar aqui, não tem restrição nenhuma, então ele,..., na primeira vista, um aluno que conhece tabuada, ele fala assim: há, entraram sete mulheres, pelo fato de ser três reais, porque o problema não dá restrição nenhuma. Não fala que o número de homens é o dobro das mulheres, coisas do gênero. Então aqui no caso, ele com multiplicação e divisão também, nada mais que isso. Acho que dificilmente o aluno pensaria em sistema de equação porque não tem nenhuma restrição. Se houvesse ele faria em sistema de equações.

Até esse momento o entrevistado escreveu na folha:

→ Gasto Total

[redacted]

Perguntei a Carvalho como ele resolveria o problema, e ele disse:

Colocaria aqui as sete possibilidades. Então, primeira possibilidade, essa que eu tinha mencionado anteriormente. Todo o grupo ser formado de mulheres (escreve na folha.) Seriam 21 reais o gasto. Pelo número, no caso aqui, do valor unitário das mulheres, e aí daria sete mulheres (fez a conta 21/3 igual a 7, com resto zero).

[redacted]

Ai você pode pensar numa segunda possibilidade, com o maior número de homens possíveis. Também 21 reais o gasto, a 6 reais cada um daria 3 e sobrariam 3 reais, no caso aqui seriam três homens mais uma mulher (fez a conta 21/6 igual a 3, com resto 3, então 3 homens e uma mulher).

[redacted]

Poderia até pensar num número igual de homens e mulheres, mas aqui no caso não daria. O máximo que conseguiria seriam dois homens e três mulheres. Então aqui se pode colocar também a possibilidade do número mais próximo de homens e mulheres (ele escreve). Ai você poderia estabelecer uma divisão aqui de valores múltiplos, então, 12 reais e 9 reais que colocariam 2 homens e 3 mulheres.

3º Possibilidade → Número mais próximos entre   12 → 2h

[redacted]

Fora outras possibilidades também. Pode ter 5 mulheres e 1 homem, ai pode colocar uma quarta possibilidade, maior número de mulheres, com pelo menos um homem, então você faria uma conta que sobraria algum número, que teria que sobrar no caso um valor de seis. Você faria 5, sobraria 6, então um homem e ai no caso 5 mulheres (fez a conta 21/3 igual a 5, com resto 6).

4º Possibilidade → Maior Número de mulheres
com pelo menos um homem

21 | 3
6   5 → 5 mulheres
↓
1h

> Na minha opinião aqui se eu empregasse um exercício desse tipo, com uma multiplicidade de respostas, eu questionaria também quantas possibilidades possíveis de se fazer essa combinação. Poderia até ser um exercício assim para o segundo ano, para você introduzir uma análise combinatória se você tivesse uma restrição. Poderia mostrar que pode ser vários casos, tem várias combinações possíveis.

Carvalho não disse nem escreveu mais nada, então recolhi a folha com o problema 2 e lhe entreguei outra folha, agora com o problema 3.

Solicitei, novamente, para que descrevesse quais as estratégias ele imaginava que os seus alunos utilizariam para resolver esse problema. Após ler, ficou um tempo em silêncio e em seguida comentou:

> Nesse aqui o aluno poderia pensar também em,..., qual o princípio básico, multiplicação e divisão para saber os valores de como foi essa divisão entre sócios e não sócios. Porque a pergunta do texto, no caso, é quantos sócios estiveram no evento. Mas, como ele não sabe ao certo então ele teria que calcular no caso os dois, para saber exatamente. Aqui se fosse apresentado anteriormente, poderia ser falado em Conjuntos, se o aluno já tiver alguma noção, se ele já viu, se teve conjuntos no Fundamental pode até pensar em falar sobre conjuntos. Eu não sei se nesse caso os alunos poderiam pensar é..., com relação aos gastos e a diferenciação aqui em porcentagem, mas isso aqui já ficaria um pouco mais restrito. Que o sócio paga uma certa porcentagem do valor do não sócio. O não sócio paga uma porcentagem a mais do sócio. Eu poderia até pensar nisso aí, mas em termos básicos são essas três partes, pensando em equação também mas, isso também é um pouco mais restrito.

Até esse momento o entrevistado escreveu na folha:

→ Multiplicasão e Divisões

→ Conjuntos

→ Porcentagem

→ Equação

Perguntei como seria a equação mencionada e Carvalho falou:

> Ele teria que equacionar aqui. É, por exemplo, 12 é o valor dos não sócios, vezes x, sendo não sócios que é o número total mais 8 vezes y, que seriam os sócios, aí pensaria num... iguala a 908 (escreve: 12.x + 8.y = 908).

o não sócios

[redacted]

> Ele poderia colocar alguma restrição aqui, porque no caso aqui, num... também aqui sistemas também seria um pouco... o aluno poderia até pensar mas para a resolução não sei se seria o método mais conveniente porque também não dá nenhuma restrição. Ele só fala a arrecadação total e não fala se teve número x maior de sócios ou o número de não sócios diferente. Então ele não menciona. No caso aqui também cai um pouco naquela temática do primeiro exercício, do saco de arroz. Que você tem um número estabelecido, o aluno pode pensar também fazendo a conta daquele método que eu falei, pensando em ter os 908, como que colocaria os múltiplos, e nesse caso aqui poderia até ter mais de uma solução esse exercício. Fazendo a conta na ponta do lápis poderia haver mais de uma solução.

Como Carvalho não disse mais nada, perguntei como ele resolveria o problema, e ele disse:

> Esse aqui também eu pensaria com relação a esses valores numéricos aqui. É para o 8 e o 12, certo...

O entrevistado, após ficar um tempo em silencio, escreve:

[redacted]

Imaginei, naquele momento, que Carvalho estava utilizando-se do fato do mdc entre os coeficientes de x e de y ter que dividir 908 para a equação ter solução, e perguntei o que ele havia pensado. Carvalho comentou que:

> Eu pensei em ver o número que fosse divisível entre 12 e 8, fazer um máximo divisor comum entre os dois. E depois, deixar numa proporção entre o x e o y aqui no caso. Ver quantos que encaixavam entre o x e o y, para dar o valor correto aqui. Só que aqui no caso não deu certo. Então eu pensei em fazer o máximo divisor comum entre 12 e 8, para fazer uma proporção, mas só que aqui no caso eu acho que não encaixaria legal também porque, no caso aqui precisaria ter uma restrição entre os números.

Perguntei a Carvalho se havia dividido 908. Ele respondeu:

> Pelo máximo divisor comum, para ver se ele batia aqui com o 12 e o 8. No caso bateu mas, não ficaria muito bom ainda porque ficaria um pouco dissociado do que o exercício está pedindo.

O entrevistado fica em silencio por algum tempo, depois escreve:

1 sócio + 1 não-sócio M
= 20

$$\begin{array}{r|l} 900 & 20 \\ \hline 100 & 45 \\ 0 & \end{array}$$

> Aqui no caso também você pode pensar no valor assim: um sócio mais um não sócio dariam vinte reais para cada, certo. Fazendo a divisão do valor total 908 por 20, daria o resultado 4, sobraria 1, cento e oito, cinco, oito reais.

$$\begin{array}{r|l} 908 & 20 \end{array}$$

> Aqui no caso utilizando essa hipótese. Utilizando o valor de um sócio mais um não sócio dando o valor total de vinte. Então essa conta também, você poderia chegar a uma conclusão. Você concluía que entraram 45 sócios e 45 não sócios, sobraram 8 reais então no caso entraria mais um sócio. Então entrariam 45 sócios. De sócios 46, desculpa, e de não sócios, 45 pessoas.

Então você pode colocar assim porque não foi estabelecido

Valor Total → R$400,00

A → R$ 18,00 → 10 → 180

[redacted]

Comentando:

> No caso aqui o valor total de 400 reais... Valor de A, 18, valor de B, 12. É aqui também ele não dá nenhuma restrição, ele quer saber só a quantidade total.

O entrevistado ficou pensando por seis minutos sem falar e sem escrever. Então perguntei se estava pensando por tentativa. Ele respondeu:

> Também, e estou pensando também em como está relacionado os dois valores aqui, em termos unitários, vamos dizer assim, de cada um.

Carvalho continuou pensando por mais alguns minutos, quando lhe perguntei: Será que tem solução? Ele respondeu:

> É, pelos valores aqui, muito difícil assim, estimando valores... 18 e 12 para 400, assim, tem... Das possibilidades que eu pensei com relação a tentativas, a valores numéricos assim...

Indaguei de Carvalho se ele lembrava de algum resultado teórico que permitisse decidir se esse tipo de problema tem solução. Ele disse:

> É, se você conseguisse sistematizar isso, você faria por uma matriz. Dependendo do valor que a matriz informasse ela daria um sistema possível determinado, ou um sistema impossível.

Então lhe perguntei se aquele problema se tratava de um sistema. Ele respondeu:

> Não. Por isso que eu coloquei se você conseguisse sistematizar, mas não é, porque ele, não há restrição. Ele só fala, ele só quer saber a quantidade de perfumes vendidos mais não falou se o A foi vendido em dobro.

Comentei que nenhum dos problemas vistos formavam sistemas. E Carvalho falou:

> É, nenhum. Eles não colocam restrições. O sistema, em termos de problema, ele coloca uma condição e coloca uma restrição. Ele coloca a situação e coloca uma restrição sobre o valor do acontecido. No caso aqui, na minha opinião eu acho que não, não tem uma solução consistente (se referindo ao último problema). Pelo menos não a encontrei.

Tranqüilizei o professor Carvalho dizendo que estava tudo bem. Recolhi a folha e o agradeci pela colaboração. Comentei brevemente sobre a minha pesquisa, e entreguei-lhe uma cópia do artigo: Uma Equação Diofantina e suas Resoluções.

Análise da entrevista de Carvalho

O professor se mostrou bastante à vontade ao falar de sua formação e de sua atuação profissional, novamente, o objetivo de deixá-lo à vontade foi atingido.

É interessante ressaltar que, apesar de lecionar Matemática nas três séries do Ensino Médio, Carvalho possui uma pequena experiência profissional, apenas três anos. Além disso, o professor fez apenas Licenciatura Plena em Física, não tendo feito nenhum outro curso de formação continuada relacionado ao ensino de Matemática. Observo, através de suas informações, que o entrevistado teve pouca formação para a docência de Matemática.

Em relação aos assuntos delimitados por Teoria Elementar dos Números, Carvalho deixou claro que não estudou equações diofantinas lineares.

O professor disse costumar trabalhar com problemas semelhantes ao problema 1 com seus alunos do primeiro ano. Informou que seus alunos resolveriam esse problema utilizando-se de três tipos de estratégia, chamadas por ele de: Quantificação / Comparação de valores; Multiplicação / Divisões; e Tentativa e erro.

Ao ser solicitado a resolver o problema, montou a equação diofantina: 5a + 6b = 23, e pensou em valores até chegar em a = 1 e b = 3, estratégia essa prevista na análise a priori e denominada por $\mathbf{E_2}$.

O objetivo de propor como primeiro problema, um fácil de ser equacionado e resolvido até mesmo por cálculo mental, para não intimidar o entrevistado no início, foi atingido.

Em relação ao problema 2, Carvalho afirmou que às vezes trabalha com problemas com mais de uma resposta com seus alunos, porém com pouca freqüência, não mencionou nada em relação a problemas sem solução. Informou que seus alunos resolveriam esse problema utilizando-se de estratégias, chamadas por ele de: Tentativa e erro; Multiplicação e Divisão. Comentou ainda não ser possível fazer por sistema de equações, pois o problema não trazia nenhuma restrição e, portanto seus alunos dificilmente pensariam em sistema de equações.

Ao resolver o problema 2, diferentemente do problema 1, Carvalho não escreveu uma equação que o modelasse. O entrevistado percebeu que o problema tinha mais de uma solução (objetivo do mesmo). Num primeiro momento afirmou que teriam sete soluções, no final de sua resolução encontrou as quatro soluções possíveis, porém não deixou claro se haveriam outras soluções ou se eram apenas as quatro encontradas. Mostrou as soluções através do algoritmo da divisão, porém considerarei a estratégia utilizada por ele como a denominada na análise a priori por $\mathbf{E_1}$, pois antes de realizar as divisões o professor escrevia as respostas, já obtidas por ele através de cálculo mental, e só depois escrevia a conta de dividir para elucidar seu raciocínio.

Em relação ao problema 3, Carvalho informou que seus alunos o resolveriam utilizando-se das seguintes estratégias, chamadas por ele de: Multiplicação e Divisões; Conjunto; Porcentagem e Equação.

Ao ser solicitado montou a equação: 12x + 8y = 908 equacionando o problema. Ao resolvê-lo chegou a calcular o mdc de 8 e 12, verificou que 908 era divisível pelo mdc, porém não percebeu que isso implicaria no exercício ter solução. Quando perguntado sobre o mdc, disse não ter chegado a uma conclusão boa. Percebi que foi apenas uma tentativa, sem fundamentação teórica, também não utilizou o mdc para descobrir se o último problema tinha ou não solução.

Caracterizei a estratégia utilizada por Carvalho como sendo a $\mathbf{E_2}$, prevista na análise a priori, diofantinas lineares, o que atesta que o objetivo da proposição desse problema foi atingido. Ao ser questionado se lembrava de algum resultado teórico que permitia decidir se esse tipo de problema tem solução, Carvalho falou em sistema de equações, não mencionando o mdc.

Respondendo a questão proposta como objetivo desta pesquisa, concluo que esse professor pouco trabalha com problemas que recaem em equações diofantinas lineares, e que o mesmo, embora tenha afirmado trabalhar com problemas com mais de uma solução não relaciona uma equação com duas incógnitas à possibilidade de mais de uma resposta. E ainda, não considera que estar resolvendo um problema no conjunto dos inteiros (as respostas só poderiam ser números inteiros) corresponde já a uma restrição. Carvalho deu evidências de que trabalha com seus alunos problemas que recaem em sistemas de equações. Explicitou a equação diofantina adequada apenas nos problemas 1 e 3. É provável que não o tenha feito nos demais problemas porque na realidade não se utilizou das equações para suas resoluções. Carvalho deixou clara a estratégia a ser utilizada por ele nesse tipo de problemas: o ensaio e erro através de estimativas.

Entrevista com o Professor Duarte

A entrevista ocorreu em abril de 2005, durou por volta de 40 minutos e foi realizada em minha casa, de acordo com o horário e local sugerido pelo professor entrevistado. A entrevista ocorreu sem ter sido interrompida, e o professor assentiu com a áudio-gravação da mesma.

O entrevistado, doravante chamado por Duarte, contou que fez o Ensino Médio Tradicional, cursou bacharelado em Engenharia Civil e Licenciatura Plena em Matemática. Como formação continuada, Duarte disse que não havia feito nenhum curso relacionado ao ensino de Matemática. Porém, afirmou que:

> Curso de pós-graduação só a nível de especialização, em Didática do Ensino Médio e Superior e outro em Gestão de Administração e RH. O curso de Didática está relacionado ao ensino.

Quanto aos assuntos delimitados como Teoria Elementar dos Números, após uma rápida leitura Duarte afirmou que:

> Números Inteiros eu vi, operações, propriedades, PIF, algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, Teorema Fundamental da Aritmética, Teorema de Fermat, Teorema de Euler. Teorema de Wilson eu não me lembro, Equações Diofantinas Lineares, não me lembro.

E foi marcando na folha com um sinal (+) os assuntos que estudou e com um sinal
(-) os que disse não ter lembrado de estudar.

Prosseguindo a entrevista perguntei sobre sua atuação docente. O entrevistado contou lecionar Matemática há vinte e seis anos, desde 1979, e que naquele momento lecionava em escolas públicas e privadas. Disse ainda, que começou sua carreira lecionando Matemática e Física, mas que depois de uns três anos passou a lecionar só Matemática. Em relação às séries em que leciona, Duarte contou que:

> Eu sempre trabalhei no Ensino Médio, nas três séries, e na quarta série em escolas em que havia o ensino do Magistério. Na época eu trabalhava bastante em Magistério, na formação de professores pra Ensino Fundamental. E, atualmente, no Ensino Superior.

Perguntei quais disciplinas estava lecionando no Ensino Superior, ao que Duarte respondeu:

> No Ensino Superior eu trabalho com Cálculo Diferencial Integral, com Álgebra Linear, com Estatística e quando necessário alguma coisa de Probabilidade.

A seguir entreguei uma folha com o problema 1 ao entrevistado. Após a leitura do problema, ao ser questionado sobre a utilização desse tipo de atividade com seus alunos do Ensino Médio, Duarte afirmou:

> Sim, trabalho.

Pedi então que ele descrevesse quais as estratégias imaginava que os alunos, diante desse problema, utilizariam para resolvê-lo. Duarte disse:

> Cinco quilos de arroz e de açúcar. Então ele comprou x pacotes de arroz (o professor escreve na folha: x.Arroz) y pacotes de açúcar (o professor escreve na folha: y.Açúcar). Ele vai por 23 reais, cada pacote de açúcar 5 reais. Ele quer saber quantos pacotes de açúcar e quantos pacotes de arroz ele comprou (escreve: x.6 + 5.y = 23). A pergunta que você fez é?

Repeti a pergunta, pedindo para que ele descrevesse quais as estratégias imaginava que seus alunos utilizariam para resolver o problema, Duarte respondeu:

> Ele poderia fazer por ensaio. Porque esses números aqui são números o que? Inteiros. São números inteiros. Então, ele poderia utilizar ensaios, utilizando-se de números inteiros, seriam as tentativas. Quanto daria aqui? Três pacotes de ... (escreve: x = 3) e um pacote de ... (escreve: y = 1). Três vezes seis, dezoito, com cinco vinte e três.

O entrevistado escreveu na folha*:*

E continuou:

> Eu não gosto muito disso aqui (se referindo à equação: x.6 + 5.y = 23). Eu quando vou trabalhar isso aqui, eu faço com que eles tenham a possibilidade de abstrair para buscar esses dois números aqui de maneira não a fazer o cálculo matemático, mas sim mental. Eu prefiro que ele faça isso daqui (tentativas). Então, é uma maneira, porque desenvolver o sistema, ele desenvolve, mas eu prefiro que ele trabalhe dentro da linha de raciocínio. Porque na hora que ele (o aluno) estiver lá fazendo uma compra, ele sabe converter o que, se isso aqui está em quilos (apontou

para 5kg de arroz) e ele têm outros pacotes em gramas, ele pode perfeitamente evoluir essa linha de raciocínio de cálculo matemático aqui, para verificar quais são os mais compensadores, em função de linha de preço, em função de quantidade, de volume. Então eu prefiro que ele faça essa linha aqui de raciocínio, para poder buscar depois esse tipo de tentativa e não buscar quantidades específicas, que ele apontou ali, mas sim o que, uma evolução da linha de desenvolvimento do raciocínio. Mental.

Esperei por alguns segundos se o entrevistado dizia mais alguma coisa, como não disse mais nada, entreguei-lhe o problema 2.

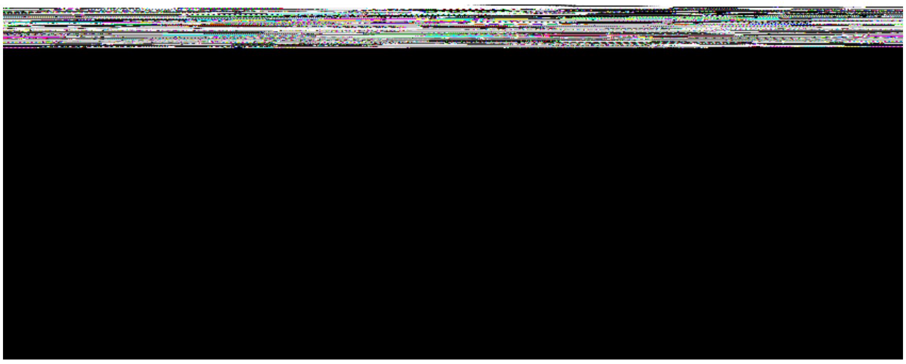
Após sua leitura, ao ser questionado se costumava trabalhar com problemas com mais do que uma solução ou sem solução com seus alunos. Duarte afirmou:

Trabalho.

Solicitei que descrevesse quais as estratégias ele imaginava que os alunos utilizariam para resolver esse problema. Duarte falou:

Eu entendo que ele vai buscar pela mesma linha de raciocínio do outro que nós fizemos agora. Quantos homens entraram? Quantas mulheres entraram? Ele vai ter três homens e uma mulher. Eu faria isso de novo, porque, o número de homens é um número inteiro e o número de mulheres é um número inteiro. Então, buscar a linha de raciocínio.

Duarte escreveu na folha:



Indaguei Duarte se haveria mais alguma estratégia, e ele respondeu:

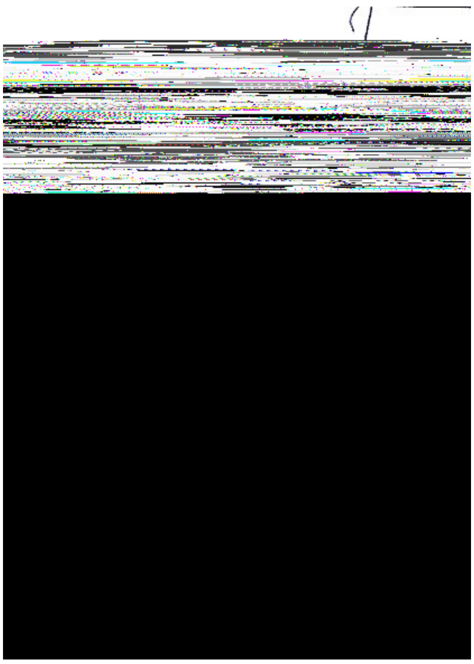
Eu não montaria não. Para mim é pensar dentro dessa linha.

Duarte não disse nem escreveu mais nada, então recolhi a folha com o problema 2 e lhe entreguei outra folha, agora com o problema 3.

Solicitei, novamente, para que descrevesse quais as estratégias ele imaginava que seus alunos utilizariam para resolver o problema. Após ler, comentou:

> Ele pode pensar dessa maneira aqui ou estabelecer um sistema. Eu não gosto de colocar no papel! Eu prefiro que o aluno faça a interpretação mental a ir jogar no papel. X vezes 12 mais y vezes 8 da 908.

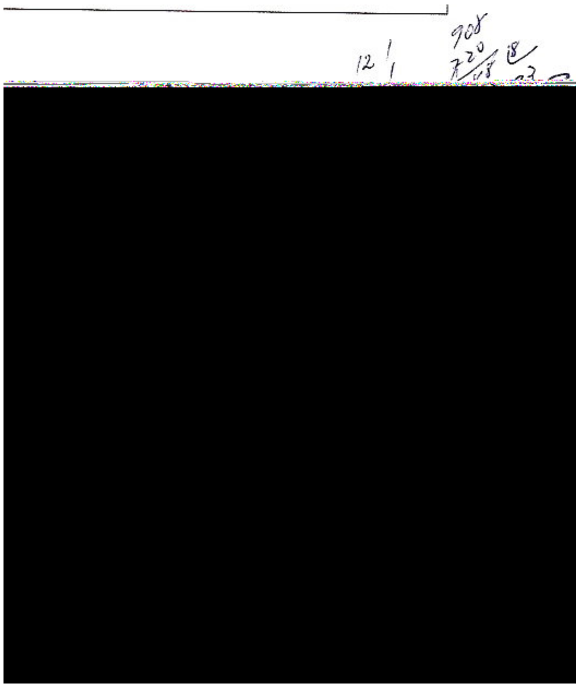
o entrevistado escreveu:

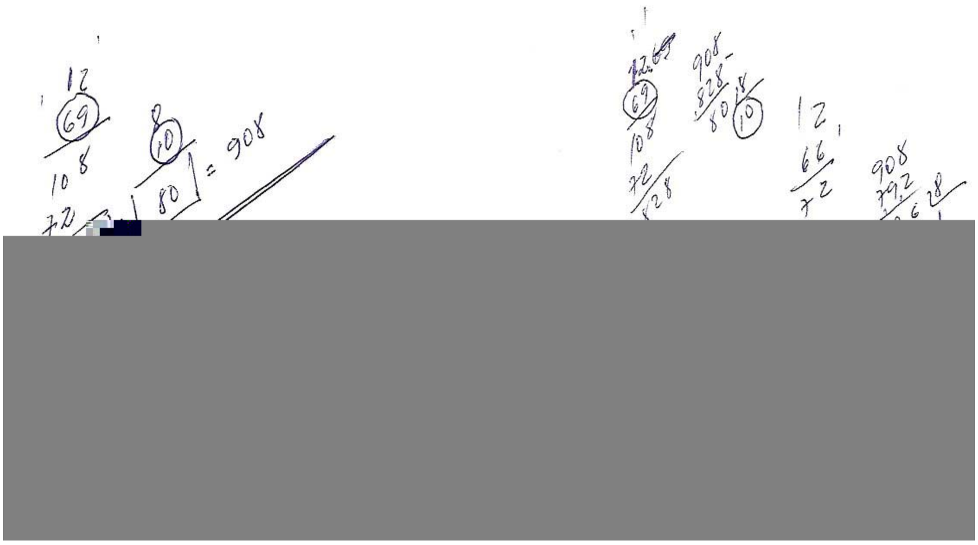


E prosseguiu:

> Ai ele vai lá montar um sisteminha, se ele tiver um lápis e um papel ele vai fazer. E se ele não tiver? Ele não vai fazer. Não é verdade? Então eu prefiro que ele vá buscar essa linha de composição aqui ó: quantas pessoas pagaram 12 (sublinhou o número 12) e quantas pagaram 8 (sublinhou o número 8), ele vai ter o que... 908 reais (escreveu R$ 908), eu não proporia nenhuma outra linha de raciocínio aqui.

Perguntei ao entrevistado como ficaria a solução desse problema. Duarte começou a fazer diversas contas na folha.





Após algum tempo fazendo contas, Duarte me perguntou:

> Esse problema dá certo? Dá um número exato?

Respondi que ele tinha solução. Duarte afirmou:

> Se ele tem solução nós vamos achar, agora se não tem, você está me fazendo fazer conta aqui a toa, há há. (O professor continuou fazendo contas na folha, já mostradas acima).

Após mais algum tempo ele pergunta:

> Tem solução mesmo?

Respondi que tem. E Duarte continuou fazendo contas, até que me perguntou:

> É essa? (apontando para 69)

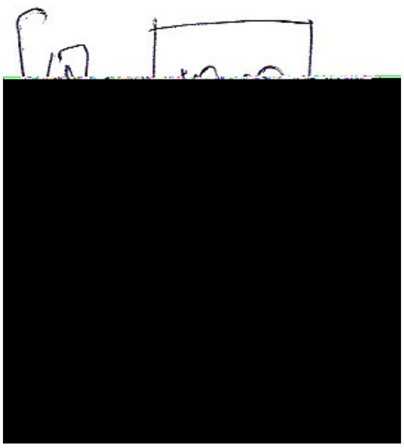
Perguntei-lhe então qual seria a resposta. Ao que Duarte disse:

> Meia nove e dez. 69 não sócios e 10 sócios. Dá 908.

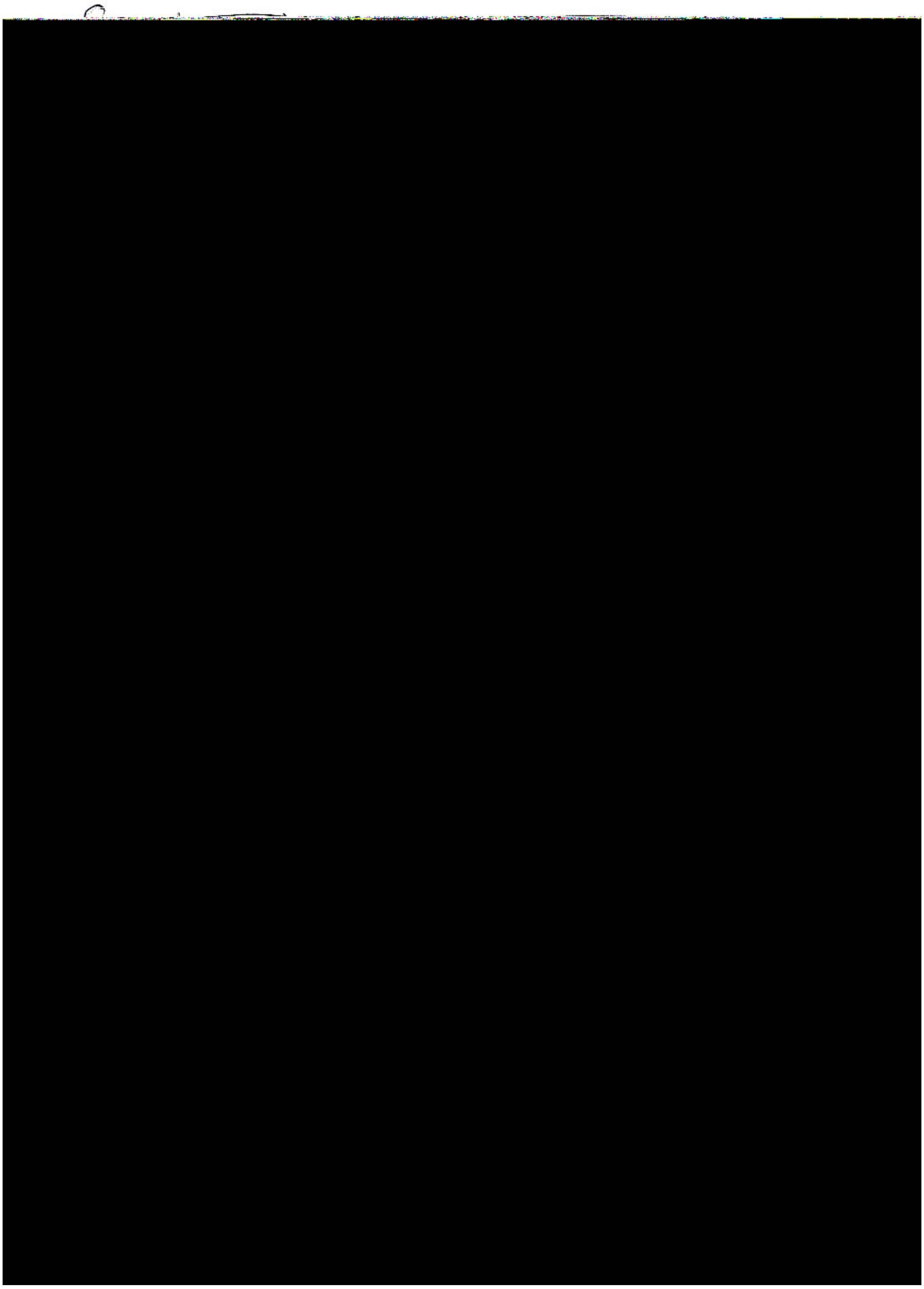
O entrevistado se mostrou satisfeito por ter achado uma solução e, como não disse mais nada, recolhi a folha e entreguei-lhe outra com o problema 4.

Após Duarte ler o problema solicitei que escrevesse quais as estratégias ele imaginava que seus alunos utilizariam para resolver o mesmo.

Duarte leu novamente o problema e escreveu:



Depois escreveu a equação 18x + 12y = 400; em seguida simplificou a equação escrevendo 9x + 6y = 200 e começou a fazer contas.



Após cerca de cinco minutos fazendo contas Duarte me perguntou:

Ele tem solução? Com número exato?

Ao invés de responder sua indagação, perguntei a Duarte se ele lembrava de algum resultado teórico que permitiria decidir se esse tipo de equação tem solução. O entrevistado respondeu que:

> Teórico (resultado). Se ele tem solução ou não?
>
> Não. A única coisa que eu estou utilizando aqui é o critério de divisibilidade, que para ele terminar em zero, ele necessariamente tem que ser um número que termine em zero. Os fatores de multiplicação aqui tem que dar zero. Correto? Porque essa parcela (indica o 9x) com essa parcela aqui (indica o 6y) tem que totalizar zero (risca o último zero do número 200). E ele não vai ter outra maneira, até porque os dois são múltiplos de três, então ela não tem jeito de você fazer uma multiplicação para dar uma soma que termine em zero. A não ser que as parcelas terminem em zero. Agora, teoricamente eu não me lembro de ter visto nada.

Informei a Duarte que aquele problema não possuía solução e ele escreveu na folha: não tem sol (e circulou com a caneta).

Recolhi a folha e agradeci ao entrevistado pela colaboração. Comentei brevemente sobre a minha pesquisa, entregando-lhe uma cópia do artigo: Uma Equação Diofantina e suas Resoluções.

Análise da entrevista de Duarte

Duarte se mostrou tranqüilo ao falar de sua formação e de sua atuação profissional, dessa forma ter iniciado a entrevista com essas questões tiveram o efeito desejado de deixá-lo à vontade.

O professor evidenciou ter se preparado para a docência de Matemática no Ensino Médio, pois contou ter feito duas graduações na área de ciências exatas, sendo uma delas Licenciatura Plena em Matemática, além de ser especialista em Didática do Ensino Médio e Superior.

Ressalto que o entrevistado indicou ter estudado, durante sua formação, assuntos da Teoria Elementar dos Números, porém afirmou não se lembrar de ter estudado equações diofantinas lineares.

Duarte indicou ter uma vasta experiência como professor de Matemática, contou lecionar há 26 anos no Ensino Médio, em escolas públicas e privadas, além de ter lecionado em cursos de Magistério, para formação de professores do Ensino Fundamental, além disso, atualmente leciona no Ensino Superior as disciplinas: Cálculo Diferencial Integral, Álgebra Linear e Estatística.

O professor informou trabalhar com seus alunos do Ensino Médio problemas semelhantes aos apresentados.

O objetivo do problema 1 foi atingido, o professor não se sentiu intimidado ao resolvê-lo, pelo contrário, montou imediatamente a equação e através de tentativas chegou ao resultado, estratégia esta denominada por E_2. O interessante foi o fato de dizer que não gostava do tipo de estratégia utilizado, ele utilizou-se da equação para resolver o problema, porém disse preferir (e indicar) que o aluno utilize o cálculo mental, sem montar a equação, considerando o uso da mesma como cálculo matemático. O professor evidenciou considerar o uso da equação como sendo o desenvolvimento de um sistema.

Mesmo afirmando trabalhar com problemas com mais do que uma solução ou sem solução com seus alunos, ao resolver os problemas 2 e 3, Duarte se mostrou satisfeito ao encontrar uma única solução e não se preocupou se haveriam outras.

Ao resolver o problema 2 o professor não montou a equação, mostrando coerência com suas afirmações anteriores, e resolveu a equação por cálculo mental (tentativa), estratégia essa denominada na análise a priori por E_1. Duarte comentou que tanto o número de homens, quanto o número de mulheres, deveriam ser números inteiros, percebendo claramente essa restrição.

Já na resolução do problema 3, Duarte volta a montar a equação, porém não aconselha seu uso. Associa novamente o uso da equação como sendo a montagem de um sistema. Duarte deixa claro que a solução para esses tipos de problemas deve ser mental, argumentando, inclusive, que se o aluno tiver um lápis e um papel ele resolve o problema através da equação, porém, se não os tiverem, não consegue resolvê-lo.

Para Duarte a interpretação deve ser mental (*x vezes 12 mais y vezes 8 dão 908*), pensa-se na equação, porém não a coloca no papel. A isso ele chama de “linha de raciocínio”.

O objetivo do problema 3, forçar a reflexão sobre o tipo de estratégia adequado a sua resolução, não foi atingido. Mesmo tendo dificuldade em encontrar uma solução, o professor insistiu no ensaio e erro (**E_1**) como forma mais adequada. Chegou a duvidar da existência de uma solução, porém não pensou na hipótese de utilizar outra estratégia. Por ter montado a equação, apesar de não aconselhar sua escrita, considero que o professor utilizou-se da estratégia **E_2**.

O professor se sentiu aliviado ao encontrar uma solução e, assim como no problema 2, não cogitou a hipótese de existirem outras soluções. Isso nos dá indícios de que o professor, diferente do que afirmara, não costuma trabalhar com problemas com mais de uma solução com seus alunos.

Duarte tenta resolver o problema 4 da mesma maneira que o fizera no problema 3, tentando exaustivamente encontrar uma solução, a única diferença é que além de escrever a equação ele a divide por 2.

Considero que o professor não acionou recursos que a Teoria Elementar dos Números oferece para a resolução dos problemas propostos. Diferente do que disse durante a entrevista, em relação ao primeiro membro da equação 9x + 6y = 200, dá para chegar a uma soma com final zero, mesmo com as parcelas não terminando em zero. Por exemplo, fazendo x igual a 6 e y igual a 6, temos 54 + 36 que dão 90, as parcelas não terminam em zero e a soma sim.

Respondendo a questão proposta como objetivo desta pesquisa, concluo, através da análise dessa entrevista, que esse professor trabalha com problemas que recaem em equações diofantinas lineares com seus alunos, e que, ao fazê-lo sugere o uso do ensaio e erro como estratégia de resolução. E mais, não aconselha o uso de equações para a resolução desse tipo de problema, enfatizando que o aluno deve desenvolver o que ele denomina por ‘linha de raciocínio mental’.

Esse fato, de não aconselhar o uso de uma equação, talvez indique o motivo pelo qual esse professor não relacione uma equação com duas incógnitas, à possibilidade de mais de uma resposta, apesar de ter afirmado trabalhar com problemas com mais de uma solução.

Entrevista com o Professor Elias

A entrevista ocorreu em junho de 2005, durou por volta de 30 minutos e foi realizada na casa do professor entrevistado, de acordo com o horário e local sugerido pelo mesmo. A entrevista ocorreu sem ter sido interrompida, e o professor assentiu com a áudio-gravação da mesma.

O entrevistado, doravante chamado por Elias, contou que fez o Ensino Médio Tradicional e fez Licenciatura Plena em Matemática. Como formação continuada, Elias disse ter feito pós-graduação comentando que:

> Lato sensu, durou um ano, nos finais de semana. Era em Didática da Matemática.

Quanto aos assuntos delimitados como Teoria Elementar dos Números, após uma rápida leitura Elias afirmou que:

> Números inteiros: operações e propriedades, princípio da indução finita, todos. Divisibilidade: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, Teorema Fundamental da Aritmética, todos também. Teorema de Euler eu lembro de ter estudado, os outros não.

Em seguida, perguntei sobre sua atuação docente. Elias contou lecionar Matemática há vinte anos, sempre em escola pública. Sobre em quais séries lecionava, Elias afirmou:

> De quinta a oitava e do primeiro ao terceiro colegial.

Então, entreguei uma folha com o problema 1 ao entrevistado. Após a leitura do problema, ao ser questionado se costuma trabalhar com esse tipo de atividade com seus alunos do Ensino Médio, Elias afirmou:

> Não, eu trabalho no Ensino Fundamental.

Pedi que ele descrevesse quais as estratégias imaginava que seus alunos, diante do problema, utilizariam para resolvê-lo.

Elias comentou:

> Aqui seria por cálculo. Comparando os valores aqui. Lendo, interpretando e fazendo os cálculos.

Em seguida perguntei ao entrevistado como achava que seus alunos iriam fazer, solicitando que ele escrevesse.

Após um tempo em silêncio, Elias disse:

> Acho que ele iria montar um sistema. Ele iria por o total que ele gastou, seriam 23 reais. O pacote de arroz ele iria chamar de uma incógnita, uma variável. Depois o pacote de açúcar de outra.

Elias escreveu na folha:

O entrevistado ficou em silêncio por alguns minutos e depois falou:

> Ele responderia 3 pacotes de arroz e 1 de açúcar.

E escreveu na folha:

3 arroz
1 açucar

Esperei por alguns segundos se o entrevistado dizia mais alguma coisa, como não disse mais nada, entreguei-lhe o problema 2.

Após sua leitura, questionei-lhe se costumava trabalhar com problemas com mais do que uma solução ou sem solução com seus alunos. Elias afirmou:

> Geralmente com problemas que tem uma solução.

Perguntei-lhe novamente sobre a utilização de problemas que tenham mais de uma ou nenhuma solução, e Elias comentou:

> Às vezes sim, porém raramente.

Solicitei que descrevesse quais as estratégias ele imaginava que seus alunos utilizariam para resolver esse problema.

Elias respondeu:

> Tentando montar a equação aqui também.

Perguntei então como eles montariam essa equação. O professor ficou em silêncio por alguns segundos e depois disse:

> É o mesmo raciocínio do outro, daria 3 homens e uma mulher.

Escreveu na folha:

3 homens
1 mulher

e a me devolveu.

Então recolhi a folha com o problema 2 e lhe entreguei outra folha, agora com o problema 3.

Esperei até que Elias terminasse de ler o problema, e então, solicitei a ele que descrevesse quais as estratégias imaginava que seus alunos utilizariam para resolvê-lo. Elias afirmou:

> Também tentando montar uma equação. Valor arrecadado, subtraía dos sócios ou dos não sócios e depois dividia.

Escreveu na folha:

908 – 80 = 900

900 | 112
080 875 sócios
0

908 – 12 = 896 | 8
09 112 sócios
16

E perguntou:

> Está perguntando quantos sócios?

Respondi que sim, quantos sócios estiveram no evento. Elias então ficou em silêncio e depois disse:

> 112 sócios, essa é a resposta. E um não sócio. Pode ser que tenha outra resposta.

Devido a esse último comentário perguntei a Elias se quando trabalha com problemas assim com seus alunos, ele pede a eles que procurem outras respostas.

E Elias respondeu:

> É difícil. Normalmente eu trabalho com problemas com uma alternativa. Agora, eles poderiam ir pensando, deduzindo até chegar à outra resposta.

Perguntei ao entrevistado como eles fariam isso. Ele disse:

> Eles iriam fazendo cálculos, somando, subtraindo, supondo, até encontrar mais respostas.

Após esse comentário o professor me entregou a folha com o problema 3.

Recolhi a folha com o problema 3 e lhe entreguei a folha com o problema 4. Esperei até que terminasse de ler o problema e em seguida solicitei que descrevesse quais as estratégias imaginava que seus alunos utilizariam para resolvê-lo.

Elias falou:

> Tentando montar a equação ou tentar por dedução também. Tem mais de uma resposta esse.

Perguntei então como montariam a equação. Elias ficou pensando e em seguida disse:

> Acho que eles tentariam por dedução esse aqui.

Escreveu na folha:

$$400 - 18 = 382 \quad \begin{array}{l|l} 382 & 12 \\ \hline 22 & 3 \end{array}$$

$$400 - 12 = 388 \quad \begin{array}{l|l} 388 & 18 \\ \hline 028 & 2 \end{array}$$

$$x + y = 400$$
$$A + B = 400$$
$$B = 400 - 18$$
$$B = 382$$
$$A = 400 - 382$$
$$A = 18$$

Esperei por cinco minutos e então perguntei a Elias: Será que tem solução?

Ele respondeu:

> Eu não consegui montar o sistema não.

E me entregou a folha com o problema 4.

Como o entrevistado não montou nenhuma equação diofantina, não fiz a pergunta: “Você lembra de algum resultado teórico que permite decidir se esse tipo de equação tem solução?”.

Recolhi a folha e agradeci a Elias por sua contribuição. Em seguida comentei brevemente sobre a minha pesquisa, entregando-lhe uma cópia do artigo: Uma Equação Diofantina e suas Resoluções.

Análise da entrevista de Elias

Elias se mostrou bastante confortável ao comentar sobre sua formação e experiência. Em relação a essa última, podemos considerar o professor bem experiente, afinal, foram vinte anos lecionando Matemática no Ensino Fundamental e Médio.

Em relação aos assuntos delimitados como TEN, Elias deixou claro que não se lembra de ter estudado equações diofantinas lineares.

O professor informou que não trabalhava com atividades semelhantes ao problema 1 com seus alunos do Ensino Médio, mas sim com seus alunos do Ensino Fundamental.

Apesar de mencionar que seus alunos poderiam resolver os problemas propostos tentando montar uma equação, em nenhum dos quatro problemas Elias montou a equação diofantina corretamente. Quando tentou montar uma equação, o fez de maneira errada (caso dos problemas 1 e 4), creio que porque estava pensando em um sistema de equações e não em um problema com uma única equação. Chegou até a comentar, no problema 4, que não havia conseguido montar o sistema.

Elias deixou claro que raramente trabalha com problemas sem solução, ou com mais de uma solução. Talvez por isso não tenha se preocupado em encontrar outras soluções, tanto no problema 2 quanto no problema 3.

Quanto às estratégias utilizadas por Elias, ficou evidente que ele se utilizou de ensaio e erro (cálculo mental) em todos os problemas, estratégia essa denominada na análise à priori dos três primeiros problemas por $\mathbf{E_1}$.

Ficou claro que o entrevistado, além de não trabalhar com problemas que recaem em equações diofantinas lineares com seus alunos do Ensino Médio, não aciona recursos de Teoria Elementar dos números como ferramenta de resolução para esse tipo de problemas.

Entrevista com o Professor Fonseca

A entrevista ocorreu em dezembro de 2005, durou por volta de 22 minutos e foi realizada em uma sala tranqüila do campus da Unifeg (Centro Universitário de Guaxupé), conforme o horário e local sugerido pelo professor entrevistado. O professor assentiu com a áudio-gravação da entrevista.

O entrevistado, doravante chamado por Fonseca, contou que fez o Ensino Médio Tradicional e que cursou Licenciatura Plena em Matemática. Como formação continuada, relacionado ao ensino de Matemática, Fonseca afirmou não ter feito nenhum curso, comentou ainda ter começado Mestrado em Matemática Pura, na área de Cálculo, mas que havia parado com o curso.

Entreguei-lhe uma caneta e uma folha com os assuntos delimitados como Teoria Elementar dos Números, solicitando que ele sublinhasse na folha os assuntos por ele estudados. Após uma rápida leitura Fonseca afirmou que:

> Números Inteiros; Divisibilidade, tudo. Equações; aqui (indicou congruência módulo m) só o Teorema de Wilson que não. Também o resto eu já vi. Números Inteiros; Divisibilidade; Congruência módulo m; Equações lineares. Só o Teorema de Wilson que não.

Fonseca fez um sinal de “certo” na frente dos seguintes assuntos: Números Inteiros: operações e propriedades, princípio da indução finita; Divisibilidade: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, o Teorema Fundamental da Aritmética; Congruência módulo m: Pequeno Teorema de Fermat, Teorema de Euler; Equações diofantinas lineares.

Em seguida sublinhou o assunto: Teorema de Wilson.

Prosseguindo a entrevista perguntei sobre sua atuação docente. O entrevistado contou lecionar Matemática há dez anos, sempre em escola privada. Disse lecionar da sétima série do Ensino Fundamental, até o terceiro ano do Ensino Médio, e ainda em cursinho pré-vestibular.

Em seguida entreguei uma folha com o problema 1 ao entrevistado. Após a leitura do problema, ao ser questionado sobre a utilização desse tipo de atividade com seus alunos do Ensino Médio, Fonseca afirmou:

> Sim, sistema. Primeiro colegial.

Pedi então que ele descrevesse quais as estratégias imaginava que seus alunos, diante desse problema, utilizariam para resolvê-lo. Fonseca me perguntou:

> Eles utilizariam ou eu utilizaria para passar para eles?

Pedi para que dissesse os dois casos. Fonseca falou:

> Eu costumo dar como exemplo o exemplo do carro e da moto. A quantidade de carros e motos no estacionamento, e eles têm que me dar a quantidade de rodas que tem no estacionamento. Então o carro tem quatro rodas, a moto tem duas rodas. Você faz quatro rodas para carro mais duas rodas de moto dão o total de rodas. Eu faço carro mais motos dando o total de veículos que eu tenho lá.
>
> Aqui a mesma coisa, eu faço a quantidade de arroz e açúcar que eu comprei. E faço o preço do arroz vezes a quantidade de quilos mais o preço do açúcar vezes a quantidade de quilos dando o total do valor.

Perguntei a Fonseca se ele achava que seus alunos fariam assim, conforme ele explicou, e ele disse:

> Fariam, fariam.

Perguntei então, como ficaria. Solicitei que ele escrevesse quais estratégias seus alunos iriam usar. Fonseca respondeu:

> Teria que usar essa. Eu vou por A para arroz e S, sugar, para açúcar.

Escreveu na folha:

A - ARROZ S = AÇUCAR

$\rightarrow$ $6 . A + 5 . S = 23$ $A + S = ?$

O entrevistado ficou em silêncio e depois comentou:

> Não, nesse caso aqui, eles não deram a (pausa), o que eles querem é a quantidade. Só deram uma informação, então aqui tem que ir por tentativa mesmo. Tinha que ir fazendo os parzinhos possíveis, porque aqui ele só me deu uma única informação, e quer essa outra, então não tem como você trabalhar com sistema, você só tem uma equação. Então aqui tem que ir por tentativa, você tem que ir fazendo, no caso teria que ser três pacotes de arroz e cinco açúcar, não, e um açúcar, perdão.

Escreveu na folha:

[redacted]

E continuou:

> Ai daria dezoito com cinco, vinte e três. A única maneira de eu dar os vinte e três reais. Tinha que ser por tentativa porque ele não me deu outra informação, a não ser essa, tem uma única informação.

Recolhi a folha com o problema 1 e entreguei a Fonseca outra folha, agora com o problema 2.

O entrevistado leu o problema e então perguntei se ele costumava trabalhar com problemas com mais do que uma solução ou sem solução com seus alunos. Fonseca respondeu:

> Mesma situação de lá (referindo-se ao problema 1). Trabalho, mas quando a gente trabalha com sistema linear no terceiro colegial. Ai você vai dar como exemplo sistema indeterminado, impossível, tudo, ai você lá trabalha. Antes a gente não trabalha, até porque no primeiro colegial não costuma ver essa parte de ... a gente comenta que quando eu tenho uma equação com duas incógnitas, você não tem uma única solução, teria que ter uma outra equação. Ai no terceiro colegial quando a gente vê sistema linear, que a gente tem a projeção de solução de sistema possível indeterminado. Ai lá a gente costuma comentar e dar exemplos até, às vezes. Tipo, se eu tiver, vou usar o exemplo anterior (problema 1), se eu tiver só aquela primeira informação, você tem várias opções, de quantidades inteiras, no caso você pode achar uma ou outra, mas, a gente costuma trabalhar mais como exemplo só, entendeu, mas lá no terceiro colegial quando a gente trabalha sistemas lineares, ou no segundo colegial quando tem um pouquinho de sistema linear depois de determinante.
>
> Resolve também?

Respondi pedindo para que escrevesse quais as estratégias imaginava que seus alunos utilizariam para resolver esse problema. Fonseca falou:

> A mesma idéia. Teria mais possibilidades. Ele teria uma equação.

Escreveu na folha:

$\rightarrow 3.M + 6.H = 21$

E continuou, comentando:

> Ai teria como exemplo, de algumas possibilidades: 5 mulheres e 1 homem, ou uma mulher e 3 homens.

Escreveu na folha:

Ex.: 5 mulheres = 1 H.

[redacted]

Prosseguiu dizendo:

> Dentre outras possibilidades que se pode ter, lógico sempre se preocupando que, no caso, não existe meia mulher, quantidades não inteiras para M e para H que satisfazem 21, como aqui se trata de mulheres e homens não tem meia mulher nem um terço de homens.

Fonseca não disse nem escreveu mais nada, então recolhi a folha com o problema 2 e lhe entreguei outra folha, agora com o problema 3.

Solicitei, novamente, para que descrevesse quais as estratégias imaginava que seus alunos utilizariam para resolver o problema. Após ler, escreveu na folha:

A – não sócios   B – sócios

$(12A + 8.B = 908) \div 4$ $B = ?$

E em seguida comentou:

> Na minha opinião cai na mesma situação, a única coisa que ele poderia fazer aqui é simplificar, dividindo tudo por 4 para tentar, dá 3A + 2B = 227, para tentar achar alguma solução.

Escreveu na folha:

$$3A + 2B = 227$$

[redacted]

E disse:

> Ai ele teria que também ir por tentativa, nesse caso, porque mesmo ele pedindo só o B, não pedindo a soma dos dois, você não tem informação suficiente, você tem uma equação com duas incógnitas, também. Ele não te deu nenhuma outra informação adicional. Teria que também ir por tentativa e fazendo os valores que A e B possam satisfazer 3A + 2B = 227.

Naquele momento Fonseca me entregou a folha com o problema 3. Recolhi e lhe entreguei outra folha, com o problema 4, solicitando, novamente, para que descrevesse quais as estratégias imaginava que seus alunos utilizariam para resolver esse outro problema. Após ler, escreveu na folha:

$$18.A + 12.B = 400$$

E comentou:

> Na minha opinião é a mesma situação. Novamente ele me deu apenas uma equação com duas incógnitas, que são A e B, e pediu valores, as quantidades possíveis para A e B. Só que ele não me deu, em nenhum momento, a quantidade total de A e B ou alguma relação entre A e B. Então novamente eu tenho várias possibilidades de soluções para A e B, ou às vezes até uma só, mas, teria que fazer por tentativa lembrando que A e B tem que ser números inteiros, também. O máximo que poderia fazer aqui é tentar dividir por dois, para talvez facilitar achar possíveis raízes, na minha opinião.

Escreveu na folha:

[redacted]

Prosseguiu dizendo:

> Porque novamente eu continuo tendo uma única equação com duas incógnitas. Para eu poder achar o valor de A e B eu teria que ter alguma outra informação, para achar o valor de A e B com

E comentou:

> Você pode pelo menos conseguir fazer um conjunto de possíveis raízes em função de alfa. Ficaria mais fácil de você achar as possíveis raízes, as possíveis soluções para essa equação.

Recolhi a folha e agradeci ao entrevistado pela colaboração. Comentei brevemente sobre a minha pesquisa, entregando-lhe uma cópia do artigo: Uma Equação Diofantina e suas Resoluções.

Análise da entrevista de Fonseca

Fonseca, assim como os demais entrevistados, também se mostrou bastante à vontade ao falar de sua formação e de sua atuação profissional, dessa forma ter iniciado a entrevista com essas questões tiveram o efeito desejado.

Sobre os assuntos delimitados como TEN, chama a atenção o fato de Fonseca ter deixado claro que estudou equações lineares, ele não falou o termo diofantinas, porém assinalou na folha que havia estudado equações diofantinas lineares.

Já em relação à sua experiência como professor, podemos considerá-la como razoável, pois foram dez anos como professor de Matemática em escolas privadas, atuando tanto no Ensino Fundamental quanto no Médio, e também em curso pré-vestibular.

O professor afirmou trabalhar com atividades como o problema 1 com seus alunos do Ensino Médio, porém primeiramente considerou a atividade com sendo ‘sistema’, só depois, ao resolver o problema, percebeu que não se tratava da resolução de um sistema (de equações).

Fonseca montou corretamente a equação diofantina linear para resolver o primeiro problema, aliás, o fez em todos os problemas. Após escrever a equação (no problema 1) percebeu que não se tratava de um sistema e afirmou que naquele caso teria que resolver por tentativa, procurando os pares que satisfariam à equação. A estratégia utilizada por Fonseca, tanto no problema 1, quanto no problema 2, foram as denominadas na análise à priori dos dois problemas por $\mathbf{E_2}$.

Vale destacar, que Fonseca afirmou trabalhar com problemas com mais de uma solução ou sem solução, com seus alunos do terceiro colegial, ao trabalhar com sistema linear.

Ao resolver o problema 2, Fonseca encontrou duas soluções e indicou a provável existência de mais soluções, porém não se mostrou muito preocupado em encontrar todas as possíveis soluções para cada um dos problemas, pelo contrário, no problema 3 ele não deu nenhuma solução, apenas escreveu a equação e a simplificou. Apesar de não ter apresentado nenhuma solução para o problema 3, podemos considerar que ele se utilizou da estratégia denominada, na análise à priori desse problema, por $\mathbf{E_3}$, pois, afinal, simplificou a equação e indicou o uso de tentativas para a sua resolução.

Outro fato relevante é o de que Fonseca percebeu, e inclusive afirmou que para todos os problemas, as possíveis respostas deveriam ser números inteiros. O professor deixou claro que relaciona uma equação com duas incógnitas, à possibilidade de mais de uma resposta.

No problema 4 o professor cogitou as hipóteses de não haver solução ou de haver uma única solução, porém, embora tenha afirmado ter estudado equações diofantinas lineares, não acionou recursos da Teoria Elementar dos Números para resolver tal problema, ou, no caso, concluir que não possuía solução.

Respondendo a questão proposta como objetivo desta pesquisa, concluo que esse professor trabalha com problemas que recaem em equações diofantinas lineares com seus alunos, e que, ao fazê-lo, sugere que tais problemas devem ser resolvidos montando-se a equação e depois se utilizando de tentativas. O que reflete, mais uma vez, o que Oliveira (2006) mostrou em sua dissertação, ao concluir que nos poucos problemas do mesmo tipo que os problemas aqui utilizados, apresentados em livros didáticos do Ensino Médio, a sugestão dos autores é a de resolvê-los por tentativa.

Análise “horizontal” das respostas às questões do roteiro da entrevista

Nesta parte levei em consideração as respostas das 6 entrevistas, inclusive as da entrevista piloto.

O primeiro bloco de questões do roteiro visou à caracterização da formação acadêmica dos entrevistados. Já o segundo bloco de questões visou à caracterização docente dos entrevistados. Esses dois primeiros blocos tiveram como objetivo principal, o propósito de deixar o professor à vontade no início da entrevista, além de servir para uma melhor caracterização dos sujeitos da pesquisa.

A tabela abaixo mostra qual o tipo de Ensino Médio feito pelos professores, bem como se fizeram Licenciatura Plena em Matemática e/ou outro Curso Superior e/ou outra Licenciatura:

	Ensino Médio Científico	Ensino Médio Tradicional	Licenciatura Plena em Matemática	Licenciatura Curta em Matemática	Outra Licenciatura	Outro Curso Superior
Almeida		X		X	X	
Batista	X		X			X
Carvalho		X			X	
Duarte		X	X			X
Elias		X	X			
Fonseca		X	X			

Tabela 1 - Tipo de curso feito pelos professores, Médio e Superior.

A tabela abaixo ilustra quais dos entrevistados fizeram ou não curso de formação continuada relacionado ao ensino de Matemática:

	Pós-graduação latu sensu relacionada ao ensino de Matemática	Mestrando em curso de Educação Matemática	Pós-graduação latu sensu em Didática do Ensino Médio e Superior
Almeida	X		
Batista	X	X	
Carvalho			
Duarte			X
Elias	X		
Fonseca			

Tabela 2 – Formação Continuada.

A tabela abaixo mostra quais professores lembravam e quais não lembravam de ter estudado equações diofantinas lineares:

	Lembravam	Não lembravam	Questão não feita
Almeida			X
Batista	X		
Carvalho		X	
Duarte		X	
Elias		X	
Fonseca	X		

Tabela 3 – Estudo de equações diofantinas lineares.

Quanto à caracterização docente, os professores entrevistados, quando da realização das entrevistas, lecionavam em escolas públicas estaduais e/ou em escolas particulares.

A tabela abaixo mostra em que tipo de escola, pública ou privada, os professores lecionavam na época da entrevista:

	Apenas pública	Apenas privada	Pública e privada
Almeida	X		
Batista		X	
Carvalho		X	
Duarte			X
Elias	X		
Fonseca		X	

Tabela 4 – Tipo de escola em que lecionavam.

A tabela a seguir expõe o tempo de docência dos professores entrevistados:

	De 2 a 4 anos	De 10 a 12 anos	De 20 a 22 anos	Mais de 25 anos
Almeida		X		
Batista			X	
Carvalho	X			
Duarte				X
Elias			X	
Fonseca		X		

Tabela 5 – Tempo de docência.

Todos os entrevistados lecionavam no Ensino Médio, sendo que um deles também lecionava de 5ª a 8ª séries do Fundamental, e um outro também lecionava na 7ª e na 8ª séries do Fundamental e em curso pré-vestibular.

Considero que o objetivo principal desses dois primeiros blocos da entrevista foi atingido, pois os professores se mostraram muito tranqüilos ao darem as respostas. Além disso, como previsto, serviu para uma melhor caracterização dos sujeitos da pesquisa.

O terceiro bloco, constituído de 4 problemas, visava investigar se e como o professor trabalha com questões que envolvem a resolução de equações diofantinas lineares com seus alunos.

Problema 1

Dos seis professores entrevistados, cinco declararam trabalhar com problemas semelhantes ao problema 1 com seus alunos do Ensino Médio, e um entrevistado (Elias) declarou não trabalhar com seus alunos do Ensino Médio, mas sim, com seus alunos do Ensino Fundamental.

A tabela abaixo discrimina as estratégias de resolução do problema 1 que os entrevistados imaginavam que seus alunos utilizariam:

	E_1	E_2
Almeida	X	
Batista		X
Carvalho		X
Duarte		X
Elias	X	
Fonseca		X

Tabela 6 – Estratégias utilizadas para o problema 1.

Vale ressaltar que o professor Batista mencionou, além da utilização da equação, o uso de uma tabela para ir colocando os possíveis valores. Batista afirmou equivocadamente que o problema 1 não tinha solução.

Verifica-se que quatro professores colocaram como estratégia o uso da equação, porém, a partir da equação montada utilizar-se-iam de tentativas.

Elias também montou uma equação, porém a mesma não modelava o problema.

Todos os entrevistados mencionaram trabalhar com problemas como o problema 1 e, pelas estratégias sugeridas e utilizadas, deixaram claro que abordam e sugerem a solução desse tipo de problema pelo método da tentativa e erro.

<u>Problema 2</u>

A pergunta: “Você costuma trabalhar com problemas com mais de uma ou nenhuma solução com seus alunos do ensino médio?” não foi feita durante a entrevista piloto (A), sendo feita somente nas outras 5 entrevistas.

Dos cinco professores questionados, três declararam trabalhar com problemas com mais de uma ou nenhuma solução com seus alunos do ensino médio, um entrevistado declarou que às vezes trabalha, porém com pouca freqüência, e um outro entrevistado declarou raramente trabalhar.

A tabela abaixo discrimina as estratégias de resolução do problema 2 que os entrevistados imaginavam que seus alunos utilizariam:

	E_1	E_2
Almeida		X
Batista		X
Carvalho	X	
Duarte	X	
Elias	X	
Fonseca		X

Tabela 7 – Estratégias utilizadas para o problema 2.

Dos seis entrevistados, apenas dois deram as quatro soluções possíveis para o problema. Um encontrou duas soluções, e os outros três apenas uma solução.

Novamente todos os entrevistados deixaram claro que o uso da tentativa e erro é a estratégia adequada e suficiente para a resolução desse tipo de problema.

Problema 3

A tabela abaixo discrimina as estratégias de resolução do problema 3 que os entrevistados imaginavam que seus alunos utilizariam:

	E_1	E_2	E_3
Almeida	X		
Batista		X	
Carvalho		X	
Duarte		X	
Elias	X		
Fonseca			X

Tabela 8 – Estratégias utilizadas para o problema 3.

Dos seis entrevistados, apenas Batista explicitou algumas soluções possíveis para o problema. Vale destacar que Fonseca montou e simplificou a equação diofantina, comentando em seguida que a partir daí deveria ir por tentativa, não se preocupando em encontrar nenhuma solução para o problema. Os outros quatro entrevistados explicitaram apenas uma solução, se dando por satisfeitos.

Mais uma vez todos os entrevistados deixaram claro que o uso da tentativa e erro é indicado para a resolução desse tipo de problema.

Problema 4

No problema 4 nenhum entrevistado chegou à conclusão de que esse problema não tinha solução. Todos indicaram novamente o uso de tentativas para encontrar uma solução. Dos seis entrevistados, dois deles não montaram a equação que modelava o problema. Um deles apresentou uma equação, porém a mesma não modelava o problema. Dos outros três que montaram a equação corretamente, dois a simplificaram.

Nenhum dos entrevistados utilizou conhecimentos da Teoria Elementar dos Números para a resolução desse problema.

Dos quatro professores questionados se lembravam de algum resultado teórico, que permitia decidir se esse tipo de equação (diofantina linear) tem solução, apenas um comentou já ter visto alguma coisa, porém, não se lembrava de como era. A questão não foi feita na entrevista piloto (Almeida), pois ainda não estava no roteiro, e também não foi feita na entrevista com o professor Elias, pois em nenhum problema ele montou uma equação que o modelasse.

CAPÍTULO V

Considerações Finais

CONCLUSÃO

Para melhor apresentação das Considerações Finais, optei por explicitar a minha questão de pesquisa, destacando conclusões já obtidas durante as análises feitas no capítulo anterior e, na seqüência, farei minhas análises e reflexões, chegando a minhas conclusões finais e a minhas recomendações.

Esta pesquisa investigou se e como professores de Matemática do Ensino Médio trabalham com seus alunos situações-problema que recaem em equações diofantinas lineares.

<u>Almeida:</u>

Revelou gostar do tipo de problemas propostos, considerando-os fáceis de resolver e classificando-os como uma espécie de desafio. Tornou explícita sua convicção de que esses problemas sempre têm uma solução e que a estratégia adequada é a do ensaio e erro.

Respondendo a questão proposta como objetivo desta pesquisa, concluo que esse professor trabalha com problemas que recaem em equações diofantinas lineares, porém apenas com aqueles que possuem solução, e que indica a tentativa e erro como estratégia mais adequada para a resolução. Não utilizando conhecimentos das propriedades dessas equações para decidir se as mesmas têm solução e quais seriam essas soluções.

Batista:

Embora tenha afirmado que estudou equações diofantinas lineares, não acionou recursos que a Teoria Elementar dos Números oferece para a resolução desse tipo de equação.

A análise dessa entrevista evidenciou que embora o professor trabalhe com problemas que recaem em equação diofantina linear, e que provavelmente tenha estudado sua resolução, na hora de ensinar aos alunos ele prefere sugerir o uso do ensaio e erro.

Carvalho:

Concluo que esse professor pouco trabalha com problemas que recaem em equações diofantinas lineares, e que o mesmo, embora tenha afirmado trabalhar com problemas com mais de uma solução não relaciona uma equação com duas incógnitas à possibilidade de mais de uma resposta. E ainda, não considera que estar resolvendo um problema no conjunto dos inteiros (as respostas só poderiam ser números inteiros) corresponde já a uma restrição. Carvalho deu evidências de que trabalha com seus alunos problemas que recaem em sistemas de equações, por várias vezes mencionou falta de restrições nos problemas. Carvalho deixou clara a estratégia a ser utilizada por ele nesse tipo de problemas: o ensaio e erro através de estimativas.

Duarte:

Também não acionou recursos que a Teoria Elementar dos Números oferece para a resolução dos problemas propostos. Concluo que esse professor trabalha com problemas que recaem em equações diofantinas lineares com seus alunos, e que, ao fazê-lo sugere o uso do ensaio e erro como estratégia de resolução. E mais, não aconselha o uso de equações para a resolução desse tipo de problema, enfatizando que o aluno deve desenvolver o que ele denomina por ‘linha de raciocínio mental’. O professor não relacionou uma equação com duas incógnitas, à possibilidade de mais de uma resposta, apesar de ter afirmado trabalhar com problemas com mais de uma solução.

Elias:

O professor informou que não trabalhava com atividades semelhantes ao problema 1 com seus alunos do Ensino Médio, mas sim com seus alunos do Ensino Fundamental.

Deixou claro que raramente trabalha com problemas sem solução, ou com mais de uma solução. Quanto às estratégias utilizadas por Elias, ficou evidente que ele se utilizou de ensaio e erro (cálculo mental) em todos os problemas. Chegou a mencionar a palavra sistema para a resolução dos problemas. Em nenhum deles montou a equação que os modelava.

Concluo que o mesmo além de não trabalhar com problemas que recaem em equações diofantinas lineares com seus alunos do Ensino Médio, não aciona recursos de Teoria Elementar dos números como ferramenta de resolução para esse tipo de problemas.

Fonseca:

Percebeu, e inclusive afirmou, que para todos os problemas, as possíveis respostas deveriam ser números inteiros. O professor deixou claro que relaciona uma equação com duas incógnitas, à possibilidade de mais de uma resposta. Além disso, cogitou as hipóteses de problemas equacionáveis por uma equação com duas incógnitas, não possuírem solução ou de possuírem uma única solução.

Embora tenha afirmado ter estudado equações diofantinas lineares, não acionou recursos da Teoria Elementar dos Números para resolver os problemas propostos.

Concluo que esse professor trabalha com problemas que recaem em equações diofantinas lineares com seus alunos, e que, ao fazê-lo, sugere que tais problemas devem ser resolvidos montando-se a equação e depois se utilizando de tentativas.

Através das conclusões mencionadas acima e no capítulo anterior, chego à seguinte conclusão desta investigação: Considero que embora os professores entrevistados afirmassem trabalhar com problemas de matemática discreta modeláveis via equação diofantina linear, nenhum deles deu indícios de trabalhar com seus alunos utilizando conhecimentos das propriedades dessas equações para decidir se as mesmas têm solução e quais seriam essas soluções. Durante as entrevistas, alguns professores citaram a necessidade de mais uma equação ou mais restrições para resolverem os problemas. O que pode indicar que, embora afirmem trabalhar com problemas com mais de uma solução, neste caso, a maioria deles não associa uma equação com duas incógnitas à possibilidade de existência de várias soluções. Ou seja, esses problemas, apesar de algumas vezes serem trabalhados com os alunos, não fazem parte daqueles que costumam ser trabalhados freqüentemente pelos professores do Ensino Médio e, quando trabalhados, não são solucionados através das ferramentas indicadas pela Teoria Elementar dos Números, reflexo talvez, do que é apontado nos livros didáticos do Ensino Médio.

Diante das conclusões obtidas, convém ressaltar que a importância desse assunto, no Ensino Médio, repousa no fato de que esse objeto do saber está atrelado à questão da divisibilidade, que é abordada desde o Ensino Fundamental e que só faz sentido quando tratada sobre os inteiros. Além disso, a utilização dos conhecimentos sobre equações diofantinas lineares facilita a resolução de muitos problemas da vida cotidiana, contextualizados a partir da vida real tornando-se modelados via esse objeto do saber.

Dessa forma, espero que a elaboração deste trabalho contribua para a percepção da necessidade de se repensar o processo de ensino-aprendizagem dos assuntos relativos à Teoria Elementar dos Números no Ensino Médio, de modo que possam surgir novas direções e novas significações para o desenvolvimento desse tema.

Esse repensar implica a realização de pesquisas que procurem:

- Responder se e como os alunos do Ensino Médio resolvem problemas que envolvem conhecimentos relativos aos assuntos de Teoria Elementar dos Números.
- Elaborar uma seqüência didática para inserir explicitamente o tema equações diofantinas lineares no Ensino Médio.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, M. M. M. **Estratégias de generalização de padrões de alunos do ensino fundamental do ponto de vista de seus professores.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica do Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: SEMT/ MEC, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S., **Investigação Qualitativa em Educação.** Porto: Porto Editora, 1994.

CAMPBELL, S., ZAZKIS, R. (2002), **Learning and Teaching Number Theory – Research in Cognition and Instruction**, Monograph Series of the Journal of Mathematical Behavior, vol. 2, Ablex Publishing, Westport, 2002. (p. 1-14) e capítulo 2 (p. 15-40).

CARNEIRO, J. P. Q. **Dispositivo Prático para Expressar o MDC de dois números como combinação linear deles.** In Revista do Professor de Matemática. São Paulo, n. 37, p. 27-33, 1998.

CHEVALLARD, Y. La **Transposition Didactique: du savoir savant au savoir enseigné.** Grenoble.La Pensée Sauvage.1991

COELHO, S. P., MACHADO, S. D. A., MARANHÃO, M. C. S. A., **Projeto: qual a álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de matemática?** In: II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2003, II SIPEM. Anais do II SIPEM, 2003. v. 1. p. 1-19.

COURANT, R., ROBBINS, H. **O que é Matemática?** Tradução Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2000.

JONES, B. W. **Teoria De Los Números.** México: Centro Regional de Ayuda Técnica 1969.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D.A. ***Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*.** São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária Ltda, 1986.

MARANHÃO, M. C. S. A.; MACHADO, S. D. A; COELHO, S. P. **Projeto: o que se entende por álgebra?** Anais: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife, 15 a 18 de julho de 2004.

MACHADO, S. D. A et al. **Como é utilizado o Teorema Fundamental da Aritmética por atores do Ensino Fundamental.** In: Actas do V CIBEM. Porto, julho 2005 v. 1, p. 1-12.

MACHADO, S. D. A.; PAIS, L. C. et al. **Educação Matemática: Uma Introdução.** 2. ed. São Paulo: EDUC, 2002. Cap. “Transposição Didática” (p. 13 – 42).

MILIES, C. P., COELHO, S. P. **Uma Introdução à Matemática.** Editora da Universidade São Paulo (EDUSP) 2000.

MONTEIRO, L. H. JACY. **Elementos de Álgebra.** 2. ed. – Livros Técnicos e Científicos Editora S. A. Rio de Janeiro 1978.

OLIVEIRA, S. B. **As equações diofantinas lineares e o livro didático de Matemática para o ensino médio.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

PADREDI, Z. L. N. **As ‘Alavancas Meta’ no discurso do professor de Álgebra Linear.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2003.

PAIS, LUIZ CARLOS. **Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa.** Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

POZO I. J. & Organizadores. **A solução de problemas.** Porto Alegre: ArtMed, 1998.

RESENDE, M. R. **Re-significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de Matemática na Lienciatura.** Tese de Doutorado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

____________. **Re-significando a Teoria dos Números na formação do professor de matemática na Licenciatura.** Relatório do exame de Qualificação do doutorado em Educação Matemática da PUC-SP. Realizado em 26 de agosto de 2005.

____________. **Teoria dos Números: presente ou ausente na formação do professor da educação básica?** In: XII ENDIPE - Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino, 2004, Curitiba-PR. XII ENDIPE - Conhecimento Local e Conhecimento Universal, 2004.

ROCQUE, G. L., PITOMBEIRA, J. B. **Uma Equação Diofantina e suas Resoluções,** p. 39-46, Revista do Professor de Matemática número 19, 1991.

SIDKI S., **Introdução à Teoria dos Números.** IMPA 1975.