DIANA MAIA

FUNÇÃO QUADRÁTICA:

UM ESTUDO DIDÁTICO DE UMA ABORDAGEM COMPUTACIONAL

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2007

DIANA MAIA

FUNÇÃO QUADRÁTICA:

UM ESTUDO DIDÁTICO DE UMA ABORDAGEM COMPUTACIONAL

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação do Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud*

PUC/SP

São Paulo

2007

Banca Examinadora

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por ter-me dado saúde e inspiração para concluir este trabalho.

Ao meu namorado Adriano Lima, mesmo não estando comigo desde o início, foi minha maior fonte de inspiração para concluir este trabalho e principal incentivador para que eu pudesse terminar o Mestrado.

Ao meu orientador Professor Dr. Saddo Ag Almouloud, por ter sido paciente e compreensível nos momentos de dificuldade e atrasos nos prazos. Mas acima de tudo agradeço sua amizade.

À Professora Drª Siobhan Victoria Healy, carinhosamente chamada Lulu, pelas importantes sugestões que enriqueceram este trabalho.

Á Professora Drº Regina Grando, por ter aceitado o convite de fazer parte da banca examinadora e pelas valiosas contribuições dadas na qualificação.

À Professora Drª Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, por várias vezes estar on-line e sempre me socorrer nos momentos de dúvidas.

À minha amiga Natasha Sant'Anna por ter cedido seus alunos para a pesquisa e me ajudado nos momentos mais difíceis.

À minha amiga Daniela Sciarra, que mesmo estando muito longe, fez a revisão deste trabalho.

Às amigas Luciana e Renata, por terem sido tão eficientes na observação da experimentação.

À Direção do Colégio Paraíso por gentilmente ceder o espaço para a realização da pesquisa.

Aos alunos da 8ª Série do Ensino Fundamental do Colégio Paraíso que colaboraram para o desenvolvimento da pesquisa e trouxeram discussões muito ricas para a conclusão do trabalho.

Aos meus pais, pois se não fossem eles, nada disso seria possível.

RESUMO

Esta pesquisa tem por objetivo, complementar estudos já realizados a respeito do ensino da função quadrática e da utilização de software para este fim. Com o intuito de abordar a questão da construção gráfica da função quadrática utilizando o procedimento de interpretação global das propriedades figurais e, ainda, inserir uma dinâmica lúdica para introduzir as noções de intervalo e domínio da função. Fundamentada nos princípios da Engenharia Didática e embasada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e na Teoria das Situações de Guy Brousseau.

A seqüência didática apresentada orienta-se nas análises de alguns livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio, nas pesquisas de Benedetti (2003), sobre a utilização de software gráficos e sobre o trabalho de Duval (1988) sobre a articulação entre os registros gráfico e algébrico. A ferramenta computacional utilizada na aplicação da seqüência foi o software Winplot, além do uso de papel e lápis. A seqüência foi aplicada com alunos da oitava série do Ensino Fundamental de uma escola particular na cidade de São Bernardo do Campo no estado de São Paulo. Foram analisados os protocolos de quatro duplas, que participaram das sete sessões. Os resultados obtidos levam a concluir que houve um avanço por parte dos alunos, na apreensão do conceito de função quadrática, propiciado pela compreensão e articulação entre as variáveis visuais e unidades simbólicas significativas.

Palavras-Chave: função quadrática, variáveis visuais, unidades simbólicas significativas, milieu, Winplot.

ABSTRACT

This research aims to supplement the studies that have already been conducted in regard to teaching quadratic functions as well as the utilization of software that support this teaching. It also aims to consider graphs of quadratic functions by making use of the global interpretation of the properties of images, as well as by adding a playful dynamic to initiate students into the notion of interval and function domain.

The study has its theorectical roots based on the principles of Didactic Engineering and Raymond Duval´s Theory of *Semiotic Representation Registers* and Guy Brousseau's *Theory of Didactical Situations*.

The didactic studies presents some brief analyses of some primary and middle school level didactic books and builds upon Benedetti's research (2003) about the utilization of graph software as well as Duval's research (1998) about the articulation problems between the graphical and algebraic registers. The computer-based tool used for the application of this study was Winplot. The study was carried out with private school students undergoing the 8th grade in the City of São Bernardo do Campo in the state of São Paulo. Data from four pairs that took part in seven research sessions were reviewed. Results reveal that an improvement was obtained and better retention was measured amongst students in regards of the square function concept, which was achieved by the articulation between visual variables and meaningful symbolic units.

Key Words: quadratic function, visual variables, meaningful symbolic units, milieu, Winplot.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE PROTOCOLOS

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo complementar os estudos já realizados a respeito da função quadrática e a utilização de *software* para este fim, abordando a questão da análise de características das funções utilizando-se de um *software* gráfico, que traz o caráter lúdico para introduzir noções como intervalo e domínio da função.

A utilização de uma ferramenta computacional favorece a manipulação da representação gráfica de maneira mais rápida que a utilização de lápis e papel, permitindo que o educando faça simulações em busca de um resultado que satisfaça o objetivo proposto, desenvolvendo a capacidade analítica de fazer previsões e questionar resultados.

Desenvolvemos nossa pesquisa utilizando os princípios da Engenharia Didática, ou seja, fazemos análises prévias do conceito de função, elaboramos uma seqüência didática realizando a análise a priori, partindo em seguida para a experimentação e finalmente efetuamos a análise a posteriori e a validação de nossa pesquisa.

No Capítulo I apresentamos as análises prévias que consistem em descrever o estudo histórico e epistemológico do conceito de função, bem como destacar alguns problemas sobre o ensino e aprendizagem deste conceito. Procuramos também, analisar os Parâmetros Curriculares Nacionais com o intuito de verificar como este documento sugere que o ensino de funções seja abordado nos ensinos Fundamental e Médio. E, ainda, verificar como os livros didáticos apresentam a função quadrática, quais são os processos de construção gráfica mais utilizados, se é realizada a passagem da representação gráfica para a representação algébrica.

A justificativa do tema, questão de pesquisa e fundamentação teórica são apresentadas no Capítulo II. Baseando-nos nas análises prévias temos como propósito apresentar um tratamento para o ensino e aprendizagem de função polinomial do 2º grau utilizando uma ferramenta computacional. Para tanto fundamentamos nossa pesquisa nos trabalhos de Guy Brousseau (1986) e Raymond Duval (2003), Teoria das Situações e Registros de representação semiótica, respectivamente.

Antecipamos, aqui, que percebemos a predominância de duas formas da passagem da representação algébrica para a representação gráfica: por meio da construção de tabelas, na qual números inteiros são escolhidos na maioria das vezes, ou utilizando-se apenas alguns pontos especiais, os quais os livros denominam de pontos notáveis da parábola. Salientamos, também, que mesmo se tratando de funções que pertencem a uma mesma família de curvas, todo este processo de construção é reiniciado várias vezes, sem que se faça qualquer relação entre os gráficos destas funções. E, ainda, que a passagem inversa, ou seja, do gráfico para a fórmula, é pouco realizada.

E, são justamente estes pontos que nos motivaram para a realização desta pesquisa e criação de uma seqüência didática que permita mostrar o processo de construção gráfica da função quadrática como um conjunto de variáveis visuais que implicam em unidades simbólicas significativas da escrita algébrica utilizando um ambiente computacional aliado ao caráter lúdico como uma das ferramentas de aprendizagem.

Passamos, então, ao Capítulo III no qual distinguimos dois tipos de variáveis pertinentes ao nosso problema, ou seja, descrevemos variáveis macro e micro didáticas objetivando a construção de uma seqüência que permita levar o aluno a perceber que modificações na escrita algébrica de uma função geram modificações na representação gráfica e vice-versa.

Este capítulo tem como finalidade destacar a metodologia de pesquisa utilizada e ressaltar alguns aspectos sobre os participantes da mesma: professor, alunos e observadores, bem como fazer uma breve descrição do *software* utilizado.

Dividimos o quarto capítulo de nosso trabalho em duas partes: análise a priori e análise a posteriori. A primeira consiste em examinar a seqüência didática proposta a luz da Teoria das Situações e da Teoria dos Registros de Representações.

Utilizando o esquema de análise de *milieu* desenvolvido por Claire Margolinas (1999) caracterizamos as atividades dos alunos numa situação adidática, mostrando as relações entre aluno – conhecimento – professor. Isto é, d

CAPÍTULO I

1. ANÁLISES PRÉVIAS

Esse capítulo tem por objetivo apresentar um estudo histórico e epistemológico do conceito de função, com o intuito de identificar os obstáculos, e as dificuldades inerentes ao conhecimento.

Primeiramente faremos algumas considerações históricas sobre o conceito de função, e relataremos alguns problemas sobre o ensino e a aprendizagem deste conceito. Depois mostraremos a maneira com a qual os Parâmetros Curriculares Nacionais tanto do Ensino Fundamental como do Médio, discutem o ensino de função.

Finalizando, analisaremos seis livros didáticos seguindo a organização praxeológica de Chevallard com o intuito de descrever os tipos de tarefas propostos por esses livros.

1.1 UM BREVE ESTUDO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO

O conceito de função passou por evoluções relevantes, fato que, segundo Eves (2002), pode ser percebido por meio dos vários refinamentos deste processo evolutivo que acompanha o progresso escolar, desde os cursos mais elementares até os mais avançados e sofisticados.

De acordo com Youschkevitch (1976), diversos autores têm opiniões divergentes sobre a época em que apareceu efetivamente o conceito de função. O autor destaca alguns desses pontos de vista,

> [...] depois de tudo, a real idéia de funcionalidade, aquela que se exprime com a utilização de coordenadas, foi exposta claramente e publicamente pela primeira vez por Descartes. (SMITH, apud YOUSCHKEVITCH, 1976, p.7).

> [...] A propósito da obra de Fermat, [ ] o conceito de função e a idéia de símbolos como representantes de variáveis não se encontram em nenhum trabalho daquela época. (BOYER, apud YOUSCHKEVITCH, 1976, p.7).

> [...] a questão da origem e do desenvolvimento do conceito de função é tratada habitualmente com uma notável parcialidade: ela é considerada quase que exclusivamente em relação à análise cartesiana a qual, por sua vez, é reivindicada (incorretamente, no nosso entendimento) como sendo um descendente tardio da escolástica “latitude das formas”. E mais adiante, [ ] trabalhar com funções pressupõe um alto grau de perfeição na época em que as primeiras tentativas foram feitas para dar forma a uma concepção geral de função. (HARTNER e SCHRAMM, apud, YOUSCHKEVITCH, 1976, pp. 7-8).

Youschkevitch (1976) apresenta três etapas do desenvolvimento do conceito de função até a metade do século XIX:

(1) A Antigüidade: etapa ao longo da qual o estudo dos diferentes casos de dependência entre duas quantidades ainda não isolou as noções gerais de quantidades variáveis e de funções.

(2) A Idade Média: etapa ao longo da qual, na ciência européia do século XIV, a noção de dependência é expressa pela primeira vez e de uma maneira precisa, de uma forma ao mesmo tempo geométrica e mecânica. A dependência entre duas quantidades era definida por uma descrição verbal ou por um gráfico mais que por uma fórmula.

(3) O período moderno: etapa ao longo da qual, a partir do fim do século XVI e especialmente durante o século XVII, as expressões analíticas de funções começam a prevalecer, a classe das funções analíticas tornou-se a principal classe utilizada. Uma função analítica é geralmente expressa por meio de somas de séries infinitas.

Vamos então ilustrar essas três etapas do desenvolvimento do conceito de função.

Há 2000 anos a.C., nas tábuas babilônicas já aparecia uma representação de função, os matemáticos babilônicos utilizavam largamente para seus cálculos, as tabelas sexagesimais de quadrados e raízes quadradas, de cubos e raízes cúbicas, entre outras. Neugebauer (apud YOUSCHKEVITCH, 1981, p. 10) determinou que as tábuas de funções fossem empregadas na astronomia babilônica, para a compilação das efemérides do sol, da lua e dos planetas. As funções tabuladas de maneira empírica tornaram-se os fundamentos matemáticos de todo o desenvolvimento posterior da astronomia.

O conceito de função aparece de uma nova maneira na matemática e ciência natural gregas. As tentativas atribuídas aos primeiros pitagóricos para determinar as leis mais simples da acústica são típicas da procura de interdependência quantitativa de várias quantidades físicas, como por exemplo, o comprimento e a altura da nota emitida por cordas de mesma espécie, pinçadas com tensões iguais.

Porém, os gregos não se limitaram à utilização de funções tabuladas. Segundo Boyer (1996), o método de Apolônio de Perga, em *As cônicas*, em muitos pontos é tão semelhante aos modernos que às vezes se considera seu tratado como uma geometria analítica, antecipando a de Descartes por 1800 anos. A aplicação de retas de referências em geral, e de um diâmetro e uma tangente em sua extremidade em particular, não difere essencialmente, do uso de sistemas de coordenadas. As distâncias medidas ao longo do diâmetro a partir do ponto de tangência são as abscissas, e os segmentos paralelos à tangente e cortados entre o eixo e a curva são as ordenadas. No entanto, a álgebra geométrica grega não englobava grandezas negativas; além disso, o sistema de coordenadas era sempre superposto a posteriori sobre uma curva dada a fim de estudar suas propriedades.

Na geometria antiga, parece não existir nenhum exemplo, em que o sistema de coordenadas é utilizado a priori para fins de representação gráfica de uma equação ou relação expressa, seja simbólica ou retoricamente. Ainda, segundo Boyer (1996), da geometria grega podemos dizer que as equações são determinadas pelas curvas, mas não que as curvas fossem definidas por equações. Coordenadas, variáveis e equações eram noções subsidiárias derivadas de uma situação geométrica específica.

Entretanto, é na Idade Média que a raiz do conceito de função apareceu, pela primeira vez, com Oresme (1323-1382), que descreveu graficamente a dependência entre velocidade e tempo utilizando linhas verticais e horizontais.

Essa representação gráfica conhecida como latitude das formas, continuou sendo um tópico popular desde o tempo de Oresme até o de Galileu. Em sua obra intitulada *Tractatus de Figuratione potentiarum et mensurarum,* Oresme chegou a sugerir uma extensão a três dimensões de sua “latitude de formas” em que a função de duas variáveis independentes era representada como um volume formado de todas as ordenadas construídas segundo uma regra dada, em pontos numa parte do plano de referência.

Segundo Eves (2002), Nicole Oresme antecipou outros aspectos da geometria analítica ao representar graficamente certas leis, confrontando a variável dependente com a independente, à medida que se permitia que esta última sofresse pequenos acréscimos. Os que defendem Oresme como o inventor da geometria analítica argumentam com esse aspecto de seu trabalho, que seria a primeira manifestação explícita da equação da reta, e com algumas noções a que ele chegou envolvendo espaços de dimensões superior.

Já no período Moderno (final do séc. XVI e séc. XVII), podemos citar também, o exemplo dos estudos de Galileu (1564-1643) sobre a queda livre dos corpos pesados, na qual ele estabeleceu que a distância percorrida por um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda, que podemos traduzir na seguinte fórmula $s=gt^2/2$.

Segundo Youschkevitch (1981), um papel fundamental para o desenvolvimento posterior da teoria das funções foi

> [...] desempenhado, por um lado, pela crescente vivacidade dos cálculos matemáticos; por outro lado, pela criação da álgebr

quantidades variáveis de maneira a permitir o cálculo dos valores de uma delas em correspondência aos valores dados pela outra.

Na segunda parte de *La géométrie*, Descartes classifica as curvas algébricas, observando que todos os pontos dessas curvas estão relacionados com todos os pontos de uma reta, com a possibilidade de representar essa relação por uma equação.

A introdução de funções sob a forma de equações teve o efeito de uma revolução no desenvolvimento das matemáticas. Segundo Youschkevitch, a utilização de expressões analíticas, as operações com as quais elas são efetuadas seguindo regras estritamente especificadas darão ao estudo das funções um estatuto de verdadeiro cálculo, abrindo horizontes inteiramente novos.

Em 1671, Isaac Newton escreveu seu *Method of Fluxions* publicado em 1736, no qual dizia que uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Dada essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele chamou de *fluente* e à sua taxa de variação *fluxo do fluente*. Em notação moderna esse fluxo equivale a dy/dt, onde t representa o tempo.

A palavra "função" parece ter sido introduzida por Leibniz em 1694, inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva, como por exemplo, as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação de uma curva e o raio da curvatura de uma curva.

Por volta de 1718, Johann Bernouilli (apud YOUSCHEKEVITCH, 1981, p.35) apresenta a primeira definição explícita de uma função como expressão analítica, em seu artigo intitulado "Considerações sobre o que se tem, até o presente momento sobre soluções de problemas de isoperímetros", publicado nas memórias da Academia Real de Ciências de Paris,

> [...] Chama-se função de uma grandeza variável uma quantidade composta de alguma maneira que seja desta grandeza variável e de constantes. (ibidem, p.35).

Mais tarde, em 1748, Euler (ibid., p.36) definiu uma "função de quantidade variável como sendo uma expressão analítica composta de alguma maneira que seja desta quantidade e de números ou de quantidades constantes".

O conceito de Euler se manteve inalterado até que Joseph Fourier (1768-1830) foi levado a considerar, em suas pesquisas sobre a propagação do calor, as chamadas séries trigonométricas. Essas séries envolvem uma forma de relação mais geral entre as variáveis que as que já haviam sido estudadas anteriormente. (EVES, 2002). Em 1805, I.

Segundo Kieran (1992) a dificuldade apresentada pelos estudantes em apreender o conceito de função reside na não compreensão da noção de variável. Em seu trabalho intitulado *Teaching and Learning of School Algebra*, a autora analisa algumas pesquisas que confirmam esse pressuposto.

Küchemann (apud KIERAN, 1992, p. 396) realizou em 1976 um estudo de larga escala sobre as interpretações de termos literais de 3000 estudantes britânicos de 13 a 15 anos. Utilizou uma classificação desenvolvida por Collis (1975), categorizando cada item em um dos seis níveis de interpretação de letras de acordo com o nível mínimo requerido para um desempenho bem sucedido:

> 1. Letra avaliada: A letra recebe um valor numérico desde o princípio;
> 2. Letra não considerada: A letra é ignorada ou sua existência é reconhecida sem dar a ela significado;
> 3. Letra considerada como um objeto concreto: A letra é vista como uma abreviação para um objeto concreto ou vista como um objeto em si mesma;
> 4. Letra considerada como uma incógnita específica: A letra é vista como um número específico, mas desconhecido;
> 5. Letra considerada como um número generalizado: A letra é vista como representando, ou pelo menos sendo capaz de assumir, vários valores, ao invés de apenas um;
> 6. Letra considerada como variável: A letra é vista como representando um domínio de valores não específicos e uma relação sistemática é percebida entre tais dois conjuntos de valores. (ibidem, p. 396)

Identificou, então, que a maioria dos estudantes tratava as letras como objetos concretos ou as ignorava (73% dos de 13 anos, 59% dos de 14 anos e 53% dos de 15 anos), e que somente um pequeno número de estudantes era capaz de considerar as letras como números generalizados. E, que um número menor ainda era capaz de interpretar letras como variáveis. Um número maior de alunos conseguiu interpretar letras como incógnitas específicas.

Em nossa prática, observamos que realmente os alunos têm uma grande dificuldade em tratar letras como números generalizados e/ou interpretá-las como variáveis, o que pode acarretar a não compreensão do conceito de função. Os alunos tratam a escrita algébrica da função como se fosse simplesmente uma equação, igualam a zero e “acham o valor do x”, não entendendo o real significado de raiz da função.

Em seu *Discours sur la Méthode* (1637), o matemático e filósofo René Descartes faz uma alusão à Geometria Analítica que reduz suas linhas a números, conservando da geometria as figuras, o que permite recorrer à imaginação, e, da álgebra, a brevidade e simplicidade.

> [...] Depois, tendo atentado que, para conhecê-las, eu precisaria às vezes considerar cada uma em particular, e outras vezes somente decorá-las, ou compreender várias ao mesmo tempo, pensei que para melhor considerá-las em particular, teria de supô-las linhas, porque não encontrava nada mais simples que pudesse representar mais distintamente à minha imaginação e aos meus sentidos; mas, para reter e compreender várias ao mesmo tempo, eu precisava explicá-las por alguns sinais, os mais curtos possíveis, e que, deste modo, aproveitaria o melhor da análise geométrica e da álgebra e corrigiria todos os defeitos de uma pela outra. (DESCARTES, 2003, pp.24-25)

A percepção de Descartes ao ver a possibilidade de representar curvas por meio de uma equação foi um grande avanço no desenvolvimento da matemática, e é justamente essa passagem gráfico/representação algébrica que queremos enfatizar em nosso trabalho.

Várias pesquisas, Duval (1988), Kieran (1992), Oliveira (1997), Schwarz (1995) e Simões (1995) apontam que os alunos encontram dificuldades no que diz respeito à construção de gráficos de funções. Segundo Swan (apud KIERAN, 1992, p.410), os estudantes são rotineiramente solicitados a gerar tabelas de valores que satisfaçam equações algébricas com duas variáveis, marcarem pontos em um gráfico cartesiano com uma escala adequada e a lerem coordenadas de pontos em um gráfico, às vezes com o intuito de resolver uma equação ou sistemas de equações.

Schwarz (1995) realizou uma pesquisa que visava verificar qual a concepção de função do aluno ao final do 2º grau (atual Ensino Médio), para tanto aplicou um teste a 40 alunos do 3º ano, dividindo-o em dois momentos, o primeiro os alunos trabalhavam em duplas e respondiam questões relativas a representações gráficas, representações algébricas e por último descrever o que era função. Num segundo momento, foram apresentadas três definições de função aos alunos (individualmente), para que optassem por uma delas.

Para analisar as respostas dadas o autor baseou-se no estudo de Anna Sfard, no qual ela classificou o processo de transição de uma concepção operacional para uma concepção estrutural de qualquer conceito matemático em três níveis: interiorização, condensação e reificação. Segundo Sfard, sem a reificação a concepção permanece puramente operacional.

Schwarz (1995, p.128) concluiu em seu trabalho que se

> os alunos não se habituaram a ver e relacionar as diferentes representações de uma função, adquirindo habilidade de passar da representação gráfica para a representação algébrica e vice-versa,[] eles estariam destinados a permanecer com a concepção operacional[1], ou ainda, com uma concepção elementar de função.

Complementa, afirmando que em sua pesquisa, quando os alunos se depararam com a representação algébrica de uma relação, mecanicamente construíram tabelas, alguns alunos abandonaram a tabela e não concluíram se a relação era ou não função, outros argumentavam por meio dos dados da tabela e poucos alunos esboçaram o gráfico para decidir se era ou não uma representação de função. Por outro lado, uma quantidade irrelevante destes mesmos alunos ao se depararem com a representação gráfica tentou obter a representação algébrica, donde o autor concluiu que para estes alunos o gráfico tem todas as informações necessárias para que se decida se é função ou não.

O autor ainda percebe que existe uma crença que a representação algébrica não tem sentido e que ela faz parte de um processo para se obter uma tabela. Evidenciando um obstáculo para que o aluno progrida no processo de passagem de uma concepção operacional para a estrutural do conceito de função.

Já o trabalho de Simões (1995) apresenta uma seqüência didática para o ensino e aprendizagem da função quadrática na 8ª série do Ensino Fundamental, com o objetivo de instrumentalizar o aluno para o jogo de quadros (entre o algébrico e o geométrico) e incentivando-o à reflexão e à descoberta.

A autora relata as seguintes dificuldades que os alunos apresentaram quando da aplicação de sua seqüência:

1) $0x^2 \neq x^2$ e $0x^2 \neq -x^2$, os alunos ao lerem um monômio onde o coeficiente 1 ou -1 não esteja explícito, relacionam com a não existência do mesmo, associando-o como o número zero.

2) Alguns alunos colocaram os coeficientes como o valor absoluto do número.

3) Os ramos da parábola terminando na altura da maior ou menor ordenada obtida na tabela, e alguns alunos esboçam o gráfico em forma de ogiva, apontando para uma

[1] Segundo Sfard (apud Schwarz, 1995, p.22) uma concepção operacional é uma noção concebida num processo calculatório.

crença que os ramos das parábolas não se estendem e que o vértice da parábola tem a forma da ponta de uma flecha.

4) Confusão de representação entre ponto do plano cartesiano, representado por um par ordenado de números e anuladores, representado por dois números ligados pelo conectivo ‘e’.

Duval (1988) afirma que as representações gráficas são introduzidas e definidas por meio do tratamento por pontos. E, conclui que este procedimento é necessariamente favorecido quando se trata de traçar o gráfico correspondente a uma equação do 1º grau, a uma equação do 2º grau... ou de ler as coordenadas de um ponto especial (como o ponto de intersecção com um dos eixos, ou com uma outra reta, ponto de máximo, etc.), porém focaliza-se somente o traçado e não se leva em conta as variáveis visuais relevantes da representação gráfica, sendo orientado para a investigação de valores específicos, sem se prender a escrita algébrica.

Com base no exposto, percebemos a importância da Álgebra no que diz respeito à compreensão de conceitos ligados à função, como variáveis e grandezas. Também, é notória a importância dada às representações da função, bem como a passagem de uma a outra.

Nossa pesquisa vem como uma complementação a estes estudos no sentido de trazer uma abordagem diferenciada para o estudo de funções quadráticas, pois além, de permitir ao aluno perceber as mudanças na escrita algébrica (forma canônica) acarretam mudanças na representação gráfica e vice-versa, ela insere o caráter lúdico para a discussão da noção de intervalo de função.

Com o intuito de verificar algumas abordagens do ensino de funções, especificamente, a função quadrática, a próxima seção tem por objetivo analisar alguns livros didáticos tanto do Ensino Fundamental como do Ensino Médio.

1.2 LIVROS DIDÁTICOS E A FUNÇÃO QUADRÁTICA

Esta análise nos permite evidenciar os tipos de exercícios e abordagens de ensino sobre função quadrática propostos no nível fundamental e médio, pois a influência dos livros didáticos na prática do professor é muito forte. Buscamos no trabalho de Oliveira (1997), no qual a autora faz uma análise detalhada das concepções de professores acerca do conceito de função, evidências deste fato. Ela conclui que apesar da Proposta Curricular de Matemática incentivar o trabalho com situ gráfica. Fundamentamos nosso estudo na noção de organização praxeológica introduzida por Chevallard (1995).

1.2.1 ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA

Para a análise dos livros, como já anunciamos, utilizaremos a noção de Organização Praxeológica proposta por Chevallard (1995) presente em sua Teoria Antropológica do Didático, que situa a atividade matemática no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais.

> [...] Uma obra matemática surge sempre como resposta para uma questão ou para um conjunto de questões. Mas em que se materializa tal resposta? Em uma primeira aproximação, poderíamos dizer que a resposta matemática para uma questão se cristaliza em um conjunto organizado de objetos ligados entre si por diversas inter-relações, isto é, em uma organização matemática. Essa organização é o resultado final de uma atividade matemática que, como toda atividade humana, apresenta dois aspectos inseparáveis: a prática matemática ou “práxis”, que consta de tarefas e técnicas, e o discurso fundamentado ou “logos” sobre essa prática, que é constituído por tecnologias e teorias. (Chevallard, 2001, p.275).

Como não existe práxis sem logos e nem logos sem práxis, ao uní-las estamos obtendo a noção de praxeologia, ou seja, numa atividade matemática como em qualquer atividade, existem duas partes, que não podem viver uma sem a outra. De um lado estão as tarefas e as técnicas, as quais chamamos prática. E, de outro lado, estão as tecnologias e as teorias que são compostas de elementos que permitem justificar e entender o que é feito, isto é uma reflexão sobre a prática. Para responder uma determinada questão matemática é necessário organizar uma praxeologia matemática, que é constituída por um tipo de problema, uma ou diversas técnicas, sua tecnologia e a sua teoria correspondente.

Assim, podemos concluir que a atividade do professor também envolve uma técnica que está associada a uma tecnologia de uma determinada teoria. Ao realizarmos a articulação entre tarefas, técnicas, tecnologia e teoria, organizamos o estudo de um conceito ou tema, ou seja, realizamos uma organização praxeológica.

Neste sentido, o termo “tarefa” é utilizado para designar uma gama de problemas que podem ser resolvidos por meio de uma “técnica”, ou seja, o modo de resolução adotado. Essa técnica é justificada pela “tecnologia”, que além de torná-la compreensível, traz elementos que podem modificar essa técnica e ampliar seu alcance, superando suas limitações e permitindo, às vezes, a produção de uma nova técnica. Por sua vez a “teoria” é a explicação da tecnologia, serve para interpretá-la e justificá-la. Outro elemento da Organização Praxeológica que utilizamos em nossa análise é chamado de Discurso Teórico-tecnológico que consiste em utilizar a teoria e a tecnologia em relação a uma técnica de forma simultânea.

Para que fique claro o entendimento desses elementos numa análise, exemplificaremos a seguinte situação:

“Esboce o gráfico da função $y = x^2 - 6x + 5$ *, a partir de seus pontos notáveis.”*

Neste caso, observamos que o tipo de tarefa consiste em esboçar o gráfico de uma função quadrática. E a técnica a ser utilizada consiste em determinar os pontos notáveis desta função, ou seja, determinar intersecções com os eixos e coordenadas do vértice da parábola. O discurso teórico-tecnológico compreende o conceito de função quadrática dado pela sua forma desenvolvida $y = ax^2 + bx + c$, inclusive com suas propriedades e notações.

Com base no exposto, analisaremos os livros didáticos apresentando como o conteúdo sobre função quadrática é abordado, os tipos de tarefas envolvidos nos problemas e/ou exercícios de cada um deles, identificando possíveis técnicas que o texto do livro permite o aluno utilizar e explicar o discurso teórico-tecnológico que está envolvido nesta resolução. Também faremos alguns comentários, que julgamos pertinentes ao nosso estudo, sobre exemplos dados no texto destes livros.

Estamos interessados em observar tarefas que envolvam construção de gráficos, procedimentos de construção, características dos gráficos (concavidade, simetria, intersecções com eixos), exercícios de aplicação e família de curvas.

1.2.2 LIVROS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Quanto à estrutura do capítulo sobre função quadrática no livro A, o autor define função quadrática e afirma que sua representação gráfica é uma curva chamada parábola. Ilustra o termo parábola com várias figuras: Igreja da Pampulha, arremesso de um corpo - chute, antena parabólica, espelho parabólico, feixe de luz de uma lanterna refletido na parede e corte do cone. Salientamos que nem todos eles representam funções polinomiais do 2º grau, levando o aluno a pensar que toda parábola representa esse tipo de função.

Ainda, no livro A, o autor trabalha todas as noções a partir da construção do gráfico de uma função específica $y = x^2 - 7x + 10$. Inicia montando uma tabela atribuindo os valores de 9 a 14 ($\in IN$) para o x, quando, então, coloca os pares ordenados no plano cartesiano, ele não obtém uma parábola, e prossegue dizendo que os valores escolhidos não são adequados e, portanto para se ter uma idéia melhor do gráfico é conveniente localizar alguns pontos notáveis.

Apresenta, então, os possíveis gráficos para a função quadrática (ver fig. 2.1) salientando algumas informações importantes:

- A parábola é simétrica.
- O eixo de simetria das parábolas estudadas aqui são retas verticais que passam pelo vértice da parábola.
- O vértice da parábola é um ponto que a separa em duas partes: uma sempre crescente e outra sempre decrescente.
- A parábola **sempre** intercepta o eixo das ordenadas (eixo y) em um só ponto.
- A parábola pode interceptar o eixo das abscissas (eixo x) em 2 pontos, 1 ponto ou não intercepta esse eixo.

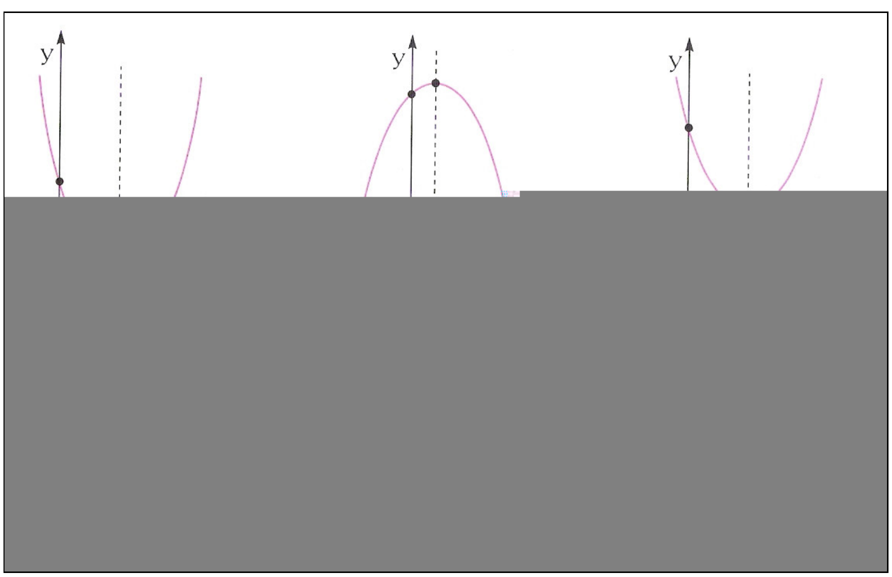


Figura 1.1 – Representações de parábolas

Vemos que o autor se preocupa em mostrar aos alunos que existem tais representações e enunciar suas características. Deixando de dar oportunidade para que o aluno descubra essas representações por outros meios, ou seja, que o aluno construa seus conhecimentos.

Mais adiante ele mostra como encontrar os “pontos notáveis”, começando com as intersecções com os eixos e depois o cálculo das coordenadas do vértice. Percebemos que o autor preocupa-se em demonstrar como chegar nas coordenadas do vértice da parábola por meio de uma fórmula. E, ainda, afirma que se o aluno quiser um gráfico mais definido, com mais pontos, ele deve construir uma tabela de valores de **x** próximos da abscissa do vértice. Evidenciando o que Duval (1988) chama de procedimento por pontos, pois, a preocupação é construir o gráfico somente com o que foi chamado de pontos notáveis da parábola, e acrescentar mais alguns pontos.

Os exercícios que seguem podemos dividí-los em dois grupos, o primeiro cujo objetivo é somente construir gráficos e/ou destacar alguns pontos. O segundo grupo, além de construir o gráfico de algumas funções quadráticas, o aluno deve observar regularidades.

Os exercícios do primeiro grupo são semelhantes as situações abaixo.

Situação: “Dada a função $y = x^2 - 5x + 6$, construa uma tabela atribuindo valores inteiros entre -4 e 4, para a variável x. A seguir, esboce o seu gráfico.”

*Tarefa: E*sboçar um gráfico.

Técnica: Construir uma tabela e plotar os pontos no sistema de eixos cartesianos.

Discurso Teórico-tecnológico: Definição de função quadrática associando a cada x $\in$ IR o elemento $(ax^2 + bx + c) \in$ IR, em que a, b, c são números reais dados e $a \neq 0$.

Uma variante para esse tipo de situação seria simplesmente pedir para que seja construído o gráfico. E, então, segundo o livro A, podemos ter uma outra técnica de construção.

Técnica: Determinar os pontos notáveis e plotá-los no sistema de eixos cartesianos.

Discurso Teórico-Tecnológico: Significado geométrico das raízes, ou seja, onde a parábola corta o eixo das abscissas, intersecção da parábola com o eixo das ordenadas e definição de vértice da parábola.

Ainda, no primeiro grupo temos exercícios que podem ser descritos na seguinte situação:

Situação: “Dê as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico das funções com os eixos das abscissas e das ordenadas. a) $y = -x^2 + x + 18$, b) $y = 2x^2 - 10x + 12$, c) $y = x^2 - 6x + 9$, d) $y = x^2 + 2x$, e) $2x^2 - 6$.”

Tarefa: Encontrar pontos de intersecção com os eixos.

Técnicas: Para encontrar a intersecção com o eixo das ordenadas: substituir na função dada a variável independente x por zero, encontrando o valor para a variavél dependente y. Tendo encontrado as coordenadas para esse ponto. Para encontrar a intersecção com o eixo das abscissas: encontrar as raízes da função dada, utilizando qualquer técnica de resolução de equação de 2º grau.

Discurso Teórico-tecnológico: Significado geométrico das raízes, ou seja, onde a parábola corta o eixo das abscissas. Intersecção da parábola com o eixo das ordenadas.

Verificamos até aqui, com exceção de uma representação algébrica, todas as outras são representadas graficamente por párabolas cuja concavidade é voltada para cima, a maioria sempre tem duas raízes reais, sejam iguais ou distintas, somente uma representação não apresenta raízes reais e os coeficientes são sempre números inteiros.

Do ponto de vista cognitivo, o aluno pode ser levado a representar graficamente a função quadrática sempre com a concavidade voltada para cima, sempre cruzar o eixo das abscissas e ainda, não utilizar números não inteiros para os coeficientes, deixando de lado a própria definição apresentada, ou seja que os coeficientes da função quadrática são números reais.

O segundo grupo de exercícios além de construir os gráficos, é necessário observar algumas de suas características. Como exemplos escolhemos as seguintes situações:

Situação: “Observe que uma função do tipo $y = ax^2 + bx$ sempre passa pela origem (0,0). Explique por quê.”

Tarefa: Explicar uma característica de uma família de funções quadráticas.

Técnicas: Resolver graficamente ou algebricamente.

Discurso Teórico-Tecnológico: Significado geométrico das raízes ou definição de raízes de funções.

Situação: "Explique qual é a característica do gráfico das funções do tipo $y = ax^2 + c$."

Tarefa: Explicar uma característica de uma família de funções quadráticas.

Técnica: Construir alguns gráficos variando os coeficientes **a** e **c** simultaneamente ou não.

Discurso Teórico-Tecnológico: Propriedades dos coeficientes **a** e **c**.

Situação: "Represente num mesmo sistema cartesiano as funções: a) $y = x^2$; b) $y = 2x^2$; c) $y = 3x^2$; d) $y = \frac{x^2}{2}$. O que você observou?"

Tarefas: Construir gráficos e observar características.

Técnica: Para construção dos gráficos podemos utilizar as duas técnicas já mencionadas anteriormente.

Discurso Teórico-Tecnológico: Propriedades do parâmetro **a**, levando em consideração que são representações na forma $y = ax^2$.

Observando as duas últimas situações apresentadas anteriormente, podemos pensar que há uma tentativa do autor em observar características dos gráficos em relação a maior ou menor abertura da concavidade da parábola, reflexão com o eixo das abscissas, translação vertical da parábola, porém, ao analisar as respostas dadas no livro, percebemos que a preocupação era outra, ou seja, na segunda situação a resposta está focada nas raízes da função e na terceira situação o enfoque é o eixo de simetria ser o das ordenadas e as coordenadas do vértice serem sempre o ponto (0,0).

É importante destacar a resposta para a segunda situação: "As raízes da equação $ax^2 + c = 0$ são simétricas." Se um aluno, por exemplo, construir vários gráficos e em um deles escolher a = 1 e c = 1, visualmente o gráfico não intercepta o eixo das abscissas, ou seja, não existem raízes reais, então, questionamos como explicar esta resposta aos alunos, se o maior conjunto numérico que eles aprenderam até o momento é o conjunto dos números reais? Seria um momento de introduzir números complexos?

Prosseguindo no conteúdo do livro A, o autor analisa gráficos da função linear e da função quadrática. Quanto a essa segunda função, ele introduz as noções de ponto de máximo e mínimo, função decrescente e crescente, e ainda faz o estudo dos sinais da função. É válido salientar que o autor utiliza a mesma função do início do capítulo, $y = x^2 - 7x + 10$.

Logo após a explicação, é dada a seguinte situação:

Situação: "Considere as funções: $y = 2x^2 + 3x + 4$, $y = -x^2 + 4x - 4$ e $y = x^2 - 5x + 4$. Para cada uma das funções: a) Analise seus coeficientes e diga se o gráfico tem concavidade para baixo ou para cima. b) Verifique se a função tem ponto de máximo ou mínimo. c) Dê as coordenadas do vértice. d) Indique para quais valores de x a função é crescente e para quais é decrescente. e) Indique para quias valores de x temos, na parabola, y > 0 e para quais temos y < 0."

Tarefa: Analisar os gráficos de três funções.

Técnica: O próprio exercício descreve como o aluno deve proceder, ou seja, verificar o valor do coeficiente **a** para saber sobre a concavidade e conseqüentemente se é ponto de máximo ou mínimo. Obter as coordenadas do vértice e verificar crescimento/decrescimento. Fazer estudo do sinal das funções.

Discurso Teórico-Tecnológico: Definições de máximo e mínimo, vértice, crecimento e decrescimento de funções, estudo do sinal da função quadrática.

No final do capítulo o autor apresenta uma aplicação para o uso da função polinomial do 2º grau, intitulada "Relações entre áreas e perímetros", é apresentado um problema e logo em seguida é proposto um exercício semelhante ao exemplo, modificando somente o valor do perímetro.

Situação: "Um sitiante dispõe de 100 m de tela para cercar uma horta de formato retangular. Quais devem ser as dimensões do cercado, de modo que se possa obter maior produtividad na horta?"

Tarefa: Encontrar as dimensões do cercado.

Técnica: Construir uma tabela com dimensões de retângulos que satisfaçam a condição do problema, ou seja, perímetro igual a 100 e suas respectivas áreas. Em seguida fazer uma análise da tabela e fazer um gráfico relacionando um dos lados e a área.

Destacamos as frases acima, por notarmos a preocupação da autora em resgatar os conceitos de dependência, área, função e medida, os quais os alunos tiveram contato nos capítulos anteriores.

Continuando o problema, representa a medida do lado do quadrado por **x**, e a área da cruz por **y** escreve a seguinte fórmula $y = x^2 - 16$. Salientando, que "para cada valor positivo de **x**, temos um único valor para **y**: **x** e **y** são as variáveis. Dizemos que **y** é função de **x**." Novamente, há um resgate do conceito de função.

Finalizando o problema, a autora menciona que a fórmula apresentada é do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com a = 1, b = 0 e c = -16 representando uma função do 2º grau ou função quadrática.

Prosseguindo as explicações, ela enuncia o seguinte problema:

Situação 2: "Num trapézio retângulo, a base menor mede 4 cm e a medida da base maior é o dobro da medida da altura. Escreva uma expressão para a área desse trapézio."

Tarefa: Escrever uma expressão para representar a área de um trapézio.

Técnica: Representar a medida da altura por x e a área do trapézio por y e, então substituir as informações do problema na fórmula da área do trapézio.

Discurso Teórico-Tecnológico: Conceito de área e conceito de função.

Prossegue o exemplo, escolhendo alguns valores para **x** (todos inteiros), e calculando os valores correspondentes de **y**, utilizando a fórmula encontrada no problema, ou seja, $y = x^2 + 2x$. E, então propõe a seguinte situação:

Situação: "Se a área de um trapézio deste tipo for 360 cm^2, quais serão as medidas da altura e da base desse trapézio?"

Tarefa: Calcular as dimensões de um trapézio.

Técnica: Substituir **y** por 360 e resolver a equação assim obtida.

Discurso Teórico-Tecnológico: Resolução de equações quadráticas.

Com estas duas situações do trapézio, a autora relembra como montar uma tabela de valores dada uma função, e ainda, como resolver equações de 2º grau. E, então ela define função do 2º grau como sendo toda função cuja fórmula pode ser escrita na forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, dado que **a**, **b** e **c** são números reais; **a** e **b** são os coeficientes dos termos x^2 e x respectivamente; **c** é o termo independente ou termo constante; **x** é a variável independente e **y** é a variável dependente.

Apresenta-se, então, um texto intitulado "Uma curva chamada parábola", mostrando a seguinte figura:

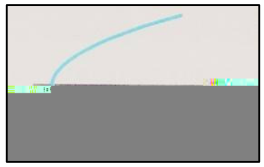


Figura 1.3 – Parábola segundo livro B

Faz-se, também, uma definição de superfície parabólica. E, cita-se alguns exemplos, como antenas parabólicas e faróis de carro. Termina o texto dizendo que "as fórmulas de curvas parabólicas são funções quadráticas". O que sabemos não ser verdade, pois, $y^2 = -4px$ é uma fórmula que representa uma parábola e no entanto não representa uma função quadrática. E, ainda, ressaltamos que a figura apresentada pode levar o aluno a cometer erros quando da construção de gráficos de funções do 2º grau, pois o gráfico apresentado não representa uma função.

São apresentados sete exercícios, dos quais dois deles são semelhantes ao primeiro exemplo e os outros são semelhantes as situações a seguir.

Situação: "Considere a função quadrática definida por $y = 5x^2 - 6x + 1$ e responda: a) Qual é o valor correspondente ao número 2, por esta função? b) Qual é o valor correspondente ao número -1/5, por esta função? c) Existem dois números cujos valores correspondentes, por esta função, são iguais a zero. Quais são esses números? d) Escolha um número qualquer e determine valor correspondente a ele, por esta função."

Tarefa: Encontrar valores para **x** ou para **y** dada uma função quadrática

Técnica: Substituir o valor de **x** (ou **y**) na fórmula e resolver a equação.

Discurso Teórico-tecnológico: Definição de função, definição de imagem de um elemento, definição de raiz de função.

Situação: "Considere a sentença $y - (x+2)^2 = 2x - 8$ e responda como fica **y** em função de **x** numa sentença do tipo $y = ax^2 + bx + c$?"

Tarefa: Obter **y** em função de **x**.

Técnica: Desenvolver o trinômio do quadrado perfeito, isolar y, somar termos semelhantes.

Discurso teórico-tecnológico: Produtos notáveis e conceito de função.

Situação: “Considere as seguintes funções do 2º grau definidas pelas fórmulas: $y = 9x^2 - 4$; $y = x^2 - 4x + 4$; $y = -3x^2 + 4x - 5$; $y = -\frac{2}{3}x^2 + x$ e $y = x^2 - 2x + 8$. a) Quais são as raízes destas funções? b) Duas destas funções não têm raízes reais. Quais são elas? c) Uma destas funções tem raízes reais e iguais. Identifique essa função.”

Tarefa: Encontrar as raízes das funções dadas.

Técnica: Resolução de equações do 2º grau – completas e incompletas.

Discurso Teórico-tecnológico: Definição de raiz de uma função, ou seja, os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de **x** reais tais que f(x) = 0 e, portanto, as soluções da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Verificamos até aqui, que em nenhum momento foi definida a raiz da função quadrática, porém é razoável pensar que a autora ao definir no capítulo anterior a raiz da função de 1º grau, não encontrou razão para fazê-la novamente para função de 2º grau, entendendo que o aluno faria uma analogia entre as duas.

O próximo tópico do capítulo é intitulado de “Desenhando parábolas”, a autora inicia mostrando o gráfico de $y = x^2$ já construído e diz “Os valores de y de qualquer ponto desta figura dependem dos valores de x, conforme a função $y = x^2$”. E, ainda, mostra que o gráfico foi construído a partir de uma tabela, na qual foram escolhidos valores para x e substituindo na fórmula foram encontrados os valores para y. Vale salientar que para todos os exemplos dados no capítulo sempre são atribuídos valores inteiros para x e sempre entre -3 e 4. O que pode levar o aluno a sempre atribuir esses valores e pensar que não se pode substituir outros valores como números racionais ou irracionais.

Constrói, logo após, o gráfico de $y = -x^2$, e explica sobre a concavidade da parábola ser voltada para cima quando a>0 e voltada para baixo quando a<0. Passa, *Tarefa:* Construir o gráfico de uma determinada função.

Técnica: Por meio da construção de uma tabela, escolhendo valores para **x** e encontrando o **y** correspondente.

Discurso Teórico-Tecnológico: Definição de função quadrática associando a cada x $\in$ IR o elemento $(ax^2 + bx + c) \in$ IR, em que a, b, c são números reais dados e $a \neq 0$.

Nos dois primeiros exemplos são destacados no gráfico e na tabela as intersecções com o eixo das abscissas dizendo que esses pontos representam os zeros ou raízes das funções. E, também o vértice da parábola, obtendo a coordenada **x** do vértice pela fórmula $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ e para encontrar a coordenada **y**, substiuiu-se a coordenada **x** do vértice nas funções dadas. Em nenhum momento a autora demonstrou como obter esta fórmula.

No terceiro exemplo é dada uma função cujas raízes não são reais, destacando-se apenas o vértice da parábola tanto no gráfico como na tabela. Cabe dizer que em nenhum dos exemplos foi definido o vértice da parábola e sim indicado no gráfico.

Logo após estas explicações é apresentado um outro texto onde se faz uma conexão com a física, ou seja, relaciona com a função horária do movimento uniformente variado, porém, utiliza um caso particular $d = \dfrac{1}{2}gt^2$, onde **d** é a distância, **g** é a aceleração da gravidade e **t** é o tempo.

Então são apresentados cinco exercícios, basicamente seme9( )-9.0414memh48107( )=8(c)0.28(4

Tarefas: Discutir a existência das raízes e esboçar gráficos.

Técnica: Observar o valor do discriminante Δ.

Discurso Teórico-tecnológico: Raízes da função quadrática e ínterpretação geométrica das raízes.

A autora continua o assunto apresentando mais um texto intitulado de “Máximos e mínimos”, no qual aparece o seguinte desenho:

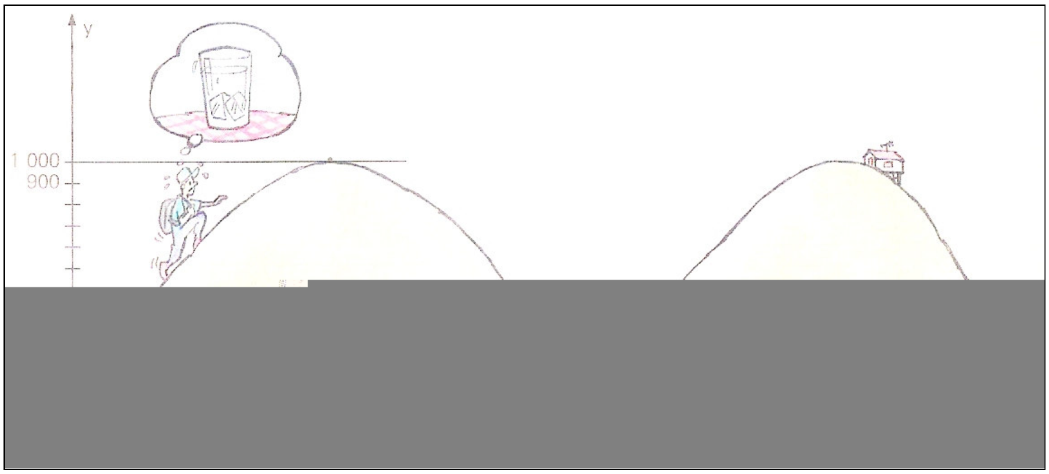


Figura 1.4 – Introdução a máximos e mínimos segundo o livro B

Entendemos que esse desenho pode trazer problemas, no sentido de apresentar figuras não simétricas, que não representam propriamente a função quadrática.

O texto ainda traz uma descrição do ponto de máximo e ponto de mínimo e apresenta a seguinte situação:

Situação: “Ponto de máximo ou ponto de mínimo? Quais são as coordenadas desses pontos das funções definidas por $y = 3x^2 - 18x + 50$ e $y = -2x^2 + 20x - 60$.”

Tarefa: Determinar as coordenadas do vértice.

Técnica: Aplicar a fórmula $x_v = -\dfrac{b}{2a}$, e substituir o valor encontrado na função para obter a ordenada do vértice. Identificar a concavidade da parábola.

Discurso Teórico-Tecnológico: Definição de vértice, ponto de máximo e de mínimo.

A seguir, vem o último tópico do capítulo que se refere ao estudo dos sinais da função quadrática, no qual a autora analisa as seguintes situações.

Situação: “Observe o gráfico da função de 2º grau definida por $y = x^2 - 6x + 8$, e responda: qual é o sinal de **y**, quando se substitui **x** por um valor maior que 4? E por um valor menor que 2?”

Tarefa: Estudar o sinal da função para x < 2 ou x > 4.

Técnica: Esboçar o gráfico indicando as raízes da função, e observar quais os valores de y correspondentes a x < 2 ou x > 4.

Discurso Teórico-Tecnológico: Conceito de Imagem e estudo dos sinais da função.

Após esta situação, a autora modifica a função dada apenas invertendo a concavidade da parábola, e mostra que agora os valores para **y** serão negativos. E, prossegue pedindo para que os alunos calculem alguns valores correspondentes aos números maiores que 4 e menores que 2, pelas duas funções dadas, para confirmarem as respostas das duas situações.

Continuando, ela completa o estudo, observando o que acontece com os valores de **y** quando se substitui valores para **x** entre 2 e 4. E, finalmente apresenta mais três exemplos. O primeiro exemplo é estudar o sinal de uma função que possui duas raízes reais iguais e tem a concavidade voltada para cima, o segundo exemplo, é dada uma função que não possui raízes reais e a concavidade é voltada para baixo. E, o terceiro exemplo é representado pela seguinte situação.

Situação: “Qual é o conjunto solução da inequação $-x^2 - 3x + 4 > 0$?”

Tarefa: Resolver uma inequação.

Técnica: Representar a expressão algébrica dada por y e analisar a função assim definida.

Discurso Teórico-Tecnológico: Definição de inequação e estudo do sinal da função quadrática.

Finalizando o capítulo são apresentados sete exercícios semelhantes aos exemplos dados, e um exercício que a autora destaca e o intitula “Resolvendo problemas de áreas”. Apesar deste último, a tarefa ser a mesma do terceiro exemplo dado, ou seja, resolver uma inequação, ele é apresentado em forma de problema, e exige que o aluno tenha conhecimentos sobre área e aplique o que aprendeu no último tópico do capítulo. Destacaremos a seguir este problema:

"No retângulo LUAR, a medida de $\overline{RL}$ é o dobro da medida de $\overline{AR}$. Para que medidas do lado $\overline{RL}$, de LUAR, a área de LEAR será maior que 60 cm^2?"

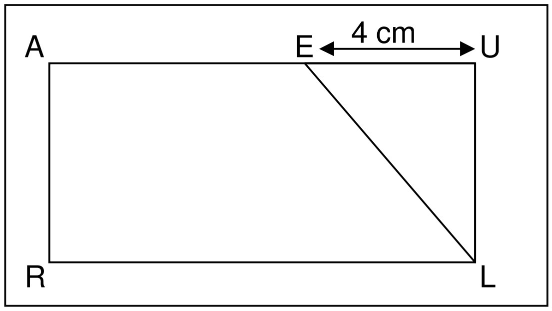


Figura 1.5 – Problema, Livro B

O Livro B privilegia a passagem da expressão algébrica para a representação gráfica da função quadrática, e semelhantemente ao Livro A, esta construção é realizada pelo procedimento por pontos. E, ainda, em momento algum aparece a definição de domínio e imagem.

Passemos a analisar o próximo livro.

O Livro C em seu capítulo sobre função polinomial do 2º grau igualmente ao Livro A inicia com a definição de função quadrática, porém começa com o gráfico de uma outra função, $f(x) = x^2$, destacamos que é a primeira vez que aparece a notação f(x), o que não ocorreu nos outros dois livros. A partir deste gráfico que foi construído por meio da elaboração de uma tabela, na qual foram atribuídos valores inteiros entre -2 e 2, o autor explicita:

- que o gráfico é uma curva plana chamada parábola,
- o eixo y como eixo de simetria da parábola,
- vértice como sendo o ponto em que o eixo de simetria corta o gráfico,
- ponto de mínimo, domínio e imagem.

O autor faz as mesmas considerações, agora utilizando o gráfico da função $f(x) = -2x^2$, porém definindo ponto de máximo. Então é apresentada o seguinte exemplo:

Situação: "Suponha uma função y = f(x) tal que **y** seja diretamente proporcional a x^2, e y = -3 quando x = -1. Como descobrir uma fórmula para essa função."

Tarefa: Encontrar a fórmula para uma determinada função.

Técnica: Realizar a passagem da descrição da função para a linguagem algébrica. Substituir os valores do par ordenado.

Discurso Teórico-Tecnológico: Definições de função e imagem.

São apresentados, então, seis exercícios, nos quais temos as seguintes tarefas: completar tabelas, construir gráficos, verificar ponto de máximo ou mínimo, todas presentes nos outros dois livros e dentre eles é dada uma nova situação.

Situação: "Determine o valor de **a** para que (3,-4) seja um elemento da função dada por $f(x) = ax^2$."

Tarefa: Encontrar a fórmula para uma determinada função.

Técnica: Substituir os valores do par ordenado.

Discurso Teórico-Tecnológico: Definições de função e imagem.

Apesar deste exercício e do exemplo terem o mesmo tipo de tarefa, podemos dizer que o exemplo exigia um pouco mais de raciocínio, pois era necessário primeiramente passar da linguagem escrita para a algébrica, ou seja, era dada uma descrição da função, agora no exercício isto já está pronto.

Destacamos, ainda, que em dois exercícios é pedido para que se construam gráficos num mesmo plano cartesiano, porém nada mais é solicitado. Aqui teriamos a oportunidade de explorar a propriedade de maior ou menor abertura da parábola, visto que somente foram apresentadas funções na forma $f(x) = ax^2$.

Após os exercícios temos uma atividade intitulada "Laboratório de Matemática", que iremos descrever a seguir.

Situação: "Com o gráfico da função $f(x) = x^2$ e uma régua podemos fazer uma estimativa razoável das raízes quadradas de alguns números reais."

Tarefa: Estimar algumas raízes quadradas.

Técnica: Construir o gráfico da função $f(x) = x^2$, passar uma reta paralela ao eixo x passando pelo ponto (0,x). Com a régua medir a distância entre este ponto e o ponto de

x

ponto (0,5). A reta corta o gráfico em dois pontos. Com a régua medimos as abscissas dos dois pontos: $\pm\sqrt{5} \cong \pm 2{,}2$".

Esta tentativa de mostrar uma aplicação da função quadrática, pode trazer problemas aos alunos no que se refere a alguns conceitos como o de raiz quadrada, ou até mesmo o conceito de medir. Outro fator a ser considerado, é o fato do aluno ter que construir o gráfico utilizando o papel quadriculado, o que torna o trabalho impreciso. Seria interessante o uso de um *software* gráfico, visto que o objetivo não é a construção do gráfico e sim fazer uma verificação de raízes quadradas aproximadas.

No próximo item, intitulado "Gráficos de funções quadráticas", o autor tem uma preocupação voltada para mostrar uma forma de encontrar as coordenadas do vértice, para então, escolher valores "convenientes" para x, para que se possa construir o gráfico de uma determinda função.

É interessante destacar que o autor faz um tratamento da escrita algébrica da função passando da forma desenvolvida ($f(x) = ax^2 + bx + c$) para a forma canônica $\left(f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$ utilizando propriedades das equações, e o faz utilizando duas funções específicas. Porém todo o trabalho é deixado de lado, a partir do momento que generaliza este tratamento e encontra as fórmulas para a determinação das coordenadas do vértice. Neste momento, poderiam ser exploradas outras propriedades relativas às variáveis visuais. Poderia ser o início de um estudo das características do gráfico em relação aos valores das coordenadas do vértice $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$, ou seja, verificar as translações verticais e horizontais da representação gráfica em relação à função $f(x) = x^2$.

O autor, a partir dos gráficos construídos nos exemplos define conjunto imagem e eixo de simetria da parábola, contudo o procedimento para a construção dos gráficos continua sendo o procedimento por pontos, no entanto, diferentemente dos outros dois livros, os valores para x não são pré determinados, mas sim, escolhidos de acordo com as coordenadas do vértice, sempre dois valores maiores que a abscissa do vértice e dois valores menores.

Ao final do capítulo são apresentados sete exercícios, que podemos separar em tarefas semelhantes as apresentadas até agora: construir gráficos e determinar coordenadas de pontos. E outras tarefas:

Situação: "O vértice da parábola $y = x^2 + mx + n$ é o ponto (2,6). Calcule **m** e **n**."

Tarefa: Encontrar os valores de dois coeficientes da função.

Técnica: Utilizar fórmula de cáculo de x_v, igualar ao valor dado para x_v, encontrando assim o valor de m, depois substituir as coordenadas do vértice na fórmula dada e encontrar o valor de n.

Discurso Teórico-tecnológico: Conceitos de vértice de parábola, função e sistemas de equação.

Em um dos exercícios são dados dois gráficos num quadriculado com escala e pedido para que sejam extraídas algumas informações, como descrito abaixo.

Situação: "Indique os pontos de intersecção com os eixos, a reta de simetria e a expressão algébrica de cada função."

Para as duas primeiras tarefas (indicar pontos de intersecção e dar a reta de simetria), é suficiente olhar para o gráfico e indicá-las, pois os pontos estão evidentes. Para a terceira tarefa, ou seja, representar a função algebricamente o autor utiliza a seguinte técnica.

Técnica: A partir da função na forma $y = ax^2 + bx + c$ substitui-se o valor de **c** que está evidente no gráfico, ou seja, a intersecção com o eixo y. Aplica-se a fórmula da abscissa do vértice e obtém-se uma equação com duas incógnitas. Substitui-se, então, as coordenadas do vértice na função, obtendo outra equação com duas incógnitas. Para finalizar resolve-se o sistema formado por estas duas equações, encontrando o valor de **a** e **b**.

Discurso Teórico-Tecnológico: Definição de função, vértice e sistema de equações.

Podemos perceber por meio da resolução apresentada pelo autor, que todo aquele tratamento dado à expressão algébrica foi em vão, pois ele mostrou uma outra forma de escrita para a função quadrática, na qual aparecem as coordenadas do vértice (forma canônica) e não utilizou isso como uma ferramenta para obter a expressão algébrica da função. Voltamos ao ponto que citamos anteriormente, a respeito das coordenadas do vértice, ao representarmos a função quadrática em sua forma canônica, estaremos proporcionando ao aluno condições de esboçar o gráfico sem que seja construída uma tabela, ou mesmo, aplicadas fórmulas para encontrar pontos notáveis, pois, esta forma permite relacionar as variáveis visuais à escrita algébrica, o que será explicado mais profundamente no próximo capítulo.

Concluimos que o Livro C, também utiliza o procedimento por pontos para a construção dos gráficos, porém foi um pouco além dos outros ao trabalhar com outra notação (f(x)), ficando mais evidente a relação de dependência entre as variáveis. Identificou o eixo de simetria da parábola, o que não aconteceu nos outros livros.

A tabela 1.1 destaca os tipos de tarefas apresentados nos três livros do Ensino Fundamental, bem como a quantidade de cada uma delas.

Tabela 1.1 –Tipos de tarefas dos Livros de Ensino Fundamental

Tipo de tarefa	Livro A (quant.)	Livro B (quant.)	Livro C (quant.)	Total
Construir gráficos	5	13	4	22
Explicar características de determinadas famílias de funções quadráticas	5	0	0	5
Localizar e/ou determinar pontos	9	14	11	34
Estudar crescimento e/ou decrescimento	3	0	0	3
Estudar os sinais da função	3	7	0	10
Identificar concavidade da parábola	3	5	0	8
Cálcular áreas	1	1	0	2
Determinar a expressão algébrica a partir do gráfico	0	0	2	2
Discutir a existência de raízes	0	2	0	2
Encontrar o domíno e a imagem	0	0	7	7
Determinar reta de simetria	0	0	7	7
Total	29	42	31	102

Observando a tabela anterior e as técnicas apresentadas pelos livros analisados podemos concluir que pouco se realiza a passagem da representação gráfica da função quadrática para sua representação algébrica. Segundo Duval (2003) a compreensão em matemática implica na capacidade de mudar de registro, e também em saber explicar as propriedades ou aspectos diferentes de um mesmo objeto matemático em suas diferentes representações.

E ainda, as técnicas apresentadas reforçam a idéia de que o procedimento privilegiado para a construção do gráfico é o procedimento por pontos. Do ponto de vista cognitivo, construir gráficos desta maneira pode tornar o aprendizado falho, no sentido de que este procedimento implica numa visão pontual do gráfico, na qual o aluno preocupa-se em encontrar pares ordenados e localizá-los no plano cartesiano, e não fazendo muitas vezes a volta, ou seja, a partir do gráfico obter a expressão algébrica. E isto segundo Duval (2003), leva a não compreensão do conceito matemático.

Após esta reflexão pensamos em elaborar uma seqüência didática de forma a introduzir um procedimento diferente para a construção de gráficos da função quadrática e que permita ao aluno trabalhar com coeficientes reais sem que isto seja um empecilho para sua aprendizagem, visto que alunos costumam pensar que números decimais, fracionários e irracionais, não podem ser usados nos coeficientes da expressão algébrica da função.

O objetivo principal de nosso trabalho é permitir que os alunos descubram a forma canônica da função do 2º grau de modo que percebam que as modificações nesta escrita algébrica produzem modificações na representação gráfica e vice-versa. E, ainda introduzir a noção de intervalo de função bem como reaplicar todo o conhecimento aprendido na construção de desenhos, sendo o uso do computador uma motivação. Salientamos que esse ponto será discutido mais adiante no Capítulo IV.

Seguimos, então, analisando livros do Ensino Médio, também visando verificar quais as tarefas apresentadas, visto que um dos objetivos da etapa final da Educação Básica é aprofundar conceitos aprendidos no Ensino Fundamental.

1.2.3 LIVROS DO ENSINO MÉDIO

Nesta seção, vamos nos limitar a fazer uma breve descrição de como o assunto é tratado em cada um dos livros e apenas citar os tipos de tarefas, pois as mesmas são praticamente iguais aos que apresentamos até agora. Porém, quando julgarmos necessário, ou seja, quando tivermos outros exemplos, então utilizaremos a organização praxeológica.

O capítulo sobre função polinomial do 2º grau do livro que chamaremos de D, é iniciado com um tópico intitulado de “Conceituação”, no qual é apresentado um problema sobre custo de produção de baldes de plástico cuja a fórmula é dada por uma função quadrática. É mostrada, então, a definição desta função e algumas expressões algébricas como exemplos.

Por meio da localização de alguns pontos no plano cartesiano pertencentes a função $y = x^2$, utilizando números inteiros de -3 a 3, obtém o gráfico dizendo que se forem atribuídos a **x** os infinitos valores reais tem-se uma curva chamada parábola. Introduz as noções de eixo de simetria, vértice e concavidade da parábola.

O próximo tópico trata dos pontos notáveis da parábola, ou seja, intersecção com os eixos e vértice. Quanto a intersecção com o eixo x, vale salientar que é feita a discussão sobre a existência de raízes reais. O autor apresenta três exercícios resolvidos e quatro atividades, nos quais enunciamos as seguintes tarefas: esboçar o gráfico a partir de seus pontos notáveis, determinar domínio e imagem, a partir do gráfico obter a expressão algébrica. Desta última tarefa, salientamos que a técnica utilizada é a mesma do Livro C.

Quanto às noções de ponto de máximo e de mínimo são dados alguns exemplos de aplicações, como: custo mínimo de produção, balística, entre outros, e logo em seguida suas definições. Apresenta-se um exercício resolvido e três atividades, nos quais o autor envolve conceitos da física, como lançamento oblíquo, porém percebemos que as tarefas são sempre as mesmas, esboçar gráficos e determinar coordenadas de pontos.

Existe, também, um tópico sobre estudo dos sinais da função quadrática e pedido para discutir a variação de sinal de algumas funções. Ao final do capítulo, o autor apresenta um texto sobre párabolas no cotidiano cujo o objetivo do texto é mostrar onde encontramos parábolas no nosso dia a dia, porém como já citado anteriormente, quando da análise dos livros de ensino fundamental, essas comparações podem refletir na apreensão do conceito de função quadrática levando o aluno a imaginar que todos esses exemplos são representações dessas funções.

Cabe aqui ressaltar, que em todos os exercícios apresentados neste capítulo, os coeficientes da representação algébrica da função polinomial do 2º grau, em sua maioria são números inteiros, dificilmente aparecem por exemplo, números fracionários.

O livro E tem a mesma estrutura teórica apresentanda até aqui, ou seja, definição, construção do gráfico (tabela e pontos notáveis), definição de eixo de simetria, concavidade, vértice, pontos de máximo e mínimo.

O autor define função quadrática como sendo uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$, definida para todo x real, onde a, b e c são números reais, com $a \neq 0$. Especifica que a, b e c são chamados coeficientes e que c é particularmente chamado de termo constante ou independente de x. Então, apresenta algumas funções do 2º grau destacando os coeficientes, e pela primeira vez aparecem exemplos, cujos coeficientes são representados por números fracionários, decimais e irracionais.

São citadas as áreas de um quadrado (S = x^2) e de um círculo ($S = \pi r^2$), e o lançamento vertical ($h(t) = at^2 + bt + c$) como exemplos de funções quadráticas, para x > 0, r > 0 e t ≥ 0, respectivamente.

Logo após a definição de função quadrática existem dois exemplos que podem levar o alunos a ter uma compreensão errônea de determinados conceitos, vejamos:

Exemplo 1: Situação: “Determinada aplicação financeira proporciona a cada mês um rendimento porcentual **x**, a taxa, sobre o capital empregado. Indicando por **c** um capital inicial, responder: a) Como é dado o capital **C** ao final do primeiro mês, em função da taxa **x**? b) Como é dado, em função de **x**, o capital acumulado em dois meses?

Tarefa: Obter expressões algébricas para determinadas funções.

Técnica: Ao final do primeiro mês temos como rendimento a taxa vezes o capital aplicado, ou seja, o novo capital será o capital inicial acrescido desse rendimento. Assim, obtemos $C(x) = c(1 + x)$, com $c \neq 0$ temos uma função polinomial do 1º grau. Sendo c(1+x) o capital ao final do 1º mês, ao final do 2º mês o capital acumulado, será $c(1+x)\cdot(1+x)$. Assim, teremos $C(x) = c(1+x)^2$, suposto $c \neq 0$ temos uma função polinomial do 2º grau.

Discurso Teórico-Tecnológico: Definição de função, juros e montante.

A forma como o autor apresenta este problema pode levar o aluno a pensar que em uma aplicação financeira a juros compostos o capital é função da taxa, e na realidade é o montante que é função do tempo de aplicação.

Ao afirmar que a segunda função representa uma função polinomial de 2º grau, o autor está indo contra a definição por ele apresentada anteriormente, na qual declara que a função é definida para todo **x** real. Ora, sabemos que para aplicações financeiras o valor da taxa é sempre um valor positivo, então teremos o gráfico da função somente no primeiro quadrante.

A seguir é apresentado um problema de seqüência, mais especificamente progressão aritmética.

Exemplo 2: Situação: “Se a soma S dos n elementos iniciais de uma seqüência é dada em função de n, n $\in N^*$, por $S_n = n^2 + 4n$ obter, a) a soma dos 5 elementos iniciais da seqüência; b) o 6º elemento da sucessão; c) os elementos a_1 e a_2.”

A expressão dada para o cálculo da soma dos elementos da seqüência é uma função quadrática limitada aos números naturais, cujo gráfico não será uma parábola.

É certo, que o autor não constrói gráficos nos dois exemplos analisados, porém como sugestão didática seria conveniente retomá-los ao final da próxima sessão do capítulo que se refere a construção de gráficos, apresentando a parábola como uma representação da função quadrática, e verificando graficamente o que acontece quando mudamos o domínio da função.

São propostos então treze exercícios, dos quais dez tem como tarefa encontrar coordenadas de pontos (abscissa ou ordenada) apartir da função, um exercício de cálculo de área, um para identificar funções de 2º grau e o outro para simplificar uma função para que ela fique na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

A seguir são explicadas algumas características a respeito do gráfico da função quadrática por meio da construção de dois gráficos, um com a concavidade voltada para cima e o outro com a concavidade voltada para baixo. O procedimento utilizado é o por pontos, passando pela tabela e então localizando os pontos no plano cartesiano, os valores escolhidos estão entre -2 e 4 (sempre inteiros), no entanto o autor fornece outros pontos com números fracionários e irracionais que pertencem à função (somente no primeiro exemplo).

A partir destes exemplos faz uma breve descrição de zeros da função, parábola, eixo de simetria e vértice. São propostos, então sete exercícios, dos quais três são destinados a construção de gráficos e quatro sobre intersecção com os eixos.

No próximo item do capítulo faz um aprofundamento sobre vértice da parábola, fazendo uma demonstração da fórmula para encontrar sua abscissa. E, então propõe seis exercícios, cujas tarefas são: obter coordenadas do vértice, obter raízes e esboçar gráficos.

Segue-se a definição de ponto de máximo (ou mínimo) da função, e apresenta dois exemplos um para determinar a imagem da função e outro para obter a área máxima de um retângulo cujo o perímetro vale **k**. São propostos dezesseis exercícios, todos semelhantes aos descritos até o momento.

Podemos, também, dizer que o Livro E tem como enfoque a obtenção de coordenadas de pontos e o esboço de gráficos. Não existe nenhum exercício onde é dado gráfico da função quadrática e pedido a fórmula.

O Livro F, começa apresentando a seguinte situação:

Situação: "Vamos desenhar três retângulos inscritos em um triângulo retângulo d catetos medindo 8 cm e 6 cm, de tal forma que dois de seus lados estejam sobre os catetos."

Propõe, então que sejam discutidas as seguintes questões: Aumentando a medida de um lado do retângulo (x) o que acontece com a medida do outro lado (y)?; É possível expressar y em função de x?; Qual a expressão que indica a área dos três retângulos? E, ainda afirma que poderão surgir novas questões após estas discussões: Como obter a maior área possível para um retângulo assim construído?, Quais são as medidas dos lados do retângulo, de tal forma que a área seja a máxima possível? Qual o valor dessa área?

Com base nestas questões o autor inicia com a seguinte tarefa:

Tarefa: Obter uma expressão que representa a área do retângulo em função de um dos lados.

Técnica: Constrói-se um retângulo genérico de dimensões **x** e **y** inscrito no triângulo retângulo dado e por semelhança de triângulos obtém-se a relação entre y e x. Substituindo essa relação na expressão que permite calcular a área do retângulo (S = $x \cdot y$), obteremos uma fórmula que representará a área do retângulo em função de x.

Discurso Teórico-Tecnológico: Definição de área, semelhança de triângulos e função.

E o autor continua, explicando que é possível gerar uma tabela de valores a partir desta expressão, atribuindo valores para x, desde que estejam entre 0 e 8, obtendo alguns possíveis valores para a área. Constrói, então uma tabela atribuindo valores de 0,5 a 6 em intervalos de 0,5. E afirma que pela tabela podemos ser conduzidos a acreditar que a maior área do retângulo é 12, mas que não podemos ter certeza. Esse exercício é finalizado somente na seção sobre máximo e mínimo.

Após esta introdução, o autor define função quadrática: "Uma função f:IR→IR é denominada função quadrática, quando existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo x real".

São propostos sete exercícios cujas tarefas são: obter coordenadas de pontos, determinar domínio e imagem.

Quanto à construção do gráfico da função quadrática são apresentadas três funções e pedido para que se construam os gráficos em papel quadriculado e pede-se para observar as características destes gráficos. Depois, o autor exemplifica a construção dos gráficos com outras duas funções, gerando uma tabela, onde o x é sempre considerado inteiro. Vale destacar que uma representação é com a concavidade para baixo e a outra com a convavidade para cima, e ainda, que dos valores escolhidos para o x, notamos que o autor escolhe exatamente os que representam as abscissas do vértice e das intersecções com os eixos.

Logo a seguir, mostra dois gráficos genéricos sem eixos cartesianos, relacionando concavidade da parábola com o sinal de **a**, representa o eixo de simetria e define vértice como sendo o ponto de intersecção entre o eixo de simetria e a curva.

O autor segue a mesma seqüência, já apresentadas em outros livros, ou seja, intersecção com os eixos, sinal da função, vértice, máximo e mínimo.

Quanto aos tipos de tarefas apresentadas no Livro F, destacamos: obter coordenadas de pontos; dar o domínio e a imagem da função; construir gráficos; traçar o eixo de simetria; estudar o sinal da função; obter as coordenadas do vértice; obter ponto de máximo ou de mínimo; dada a representação gráfica obter os coeficientes da função, esta última é semelhante a tarefa do Livro D.

A tabela 1.2 mostra os tipos de tarefas privilegiadas nos livros de Ensino Médio por nós analisados, mostrando que estas tarefas são as mesmas encontradas nos livros de Ensino Fundamental, e ainda a ênfase dada a localização/determinação de pontos é muito maior. Evidenciando, que o procedimento por pontos na construção de gráficos é ainda muito forte.

Tabela 1.2 –Tipos de tarefas dos Livros de Ensino Médio

Tipo de tarefa	Livro D (quant.)	Livro E (quant.)	Livro F (quant.)	Total
Construir gráficos	14	14	6	34
Localização e/ou determinação de pontos	18	30	32	80
Identificar uma função quadrática	0	7	0	7
Estudar os sinais da função	12	0	3	15
Identificar pontos de mínimo ou de máximo	0	0	5	5
Calcular áreas	3	4	4	11
A partir do gráfico determinar a expressão algébrica	2	0	1	3
Encontrar o domíno e/ou a imagem	12	6	5	23
Total	61	61	56	176

Levando em consideração os tipos de tarefas e técnicas apresentadas nos livros concluimos que o procedimento privilegiado para a construção de gráficos de funções é o procedimento por pontos, visto que a maioria dos execícios preocupa-se em determinar e/ou localizar pontos no gráfico, deixando de verificar o gráfico como um todo e explorar as características visuais que possiblitam a passagem da representação gráfica para a algébrica.

1.3 REFLEXÕES

Finalmente, gostaríamos de tecer comentários a respeito do material de apoio ao professor que encontramos no final dos livros por nós analisados, no qual encontramos argumentos que mostram que os autores estão privilegiando somente a construção de gráficos.

"O estudo de gráficos reduz-se a esboços, dada a impossibilidade de serem construídos exatamente. Nesse esboço basta considerar os pontos relevantes. (Livro B)" .

"A intenção não é que o aluno saiba construir com precisão um gráfico, mas que ao menos consiga esboçá-los, identificando os pontos principais como o vértice. (Livro F)".

E ainda, apesar do Livro D trazer como um dos objetivos para o estudo da função quadrática que ao final do capítulo o aluno deva estar preparado para determinar a lei de formação a partir do gráfico da função, a ênfase que se dá a essa passagem é mínima, o que pode ser constatado na tabela anterior.

Esses comentários são um tanto quanto pertubadores, pois será que há realmente aprendizagem do conceito de função quadrática quando estudamos pontos isolados? Será que ao trabalharmos desta forma, não estamos mecanizando a construção de gráficos?

Nossa pesquisa insere-se nesse contexto, de modo a contribuir para que o ensino e aprendizagem do conceito de função quadrática seja visto de modo global, onde o aluno possa perceber o gráfico como uma fonte de variáveis visuais que estão relacionadas com os coeficientes da expressão algébrica, e que a geração de uma tabela de valores não se faz necessária. No próximo capítulo apresentamos o conceito de variável visual.

Tentamos mostrar uma outra visão do esboço de gráficos da função quadrática, com o intuito de minimizar os efeitos da construção de tabelas, nas quais os alunos sempre questionam que valores atribuir ao x, ou mesmo, quando a construção é feita por meio dos pontos notáveis.

Acreditamos que a obtenção destes pontos notáveis pode ser um obstáculo no aprendizado, visto que o problema de fazer uma construção assim, pode levar o aluno a não esboçar o gráfico de funções que não possuem raízes reais, por encontrar o valor do discriminante menor que zero.

Com base no exposto, passamos, então, a definir nossa problemática.

CAPÍTULO II

2. PROBLEMÁTICA

Neste capítulo apresentamos nossas justificativas e questão de pesquisa. Iremos primeiramente, reavivar alguns elementos das análises feitas no capítulo anterior, fazer algumas considerações sobre a utilização de computadores no processo de ensino e aprendizagem de funções. Por fim apresentaremos elementos da Teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval e da Teoria das situações de Guy Brousseau os quais fundamentam nosso trabalho.

2.1 JUSTIFICATIVAS E QUESTÃO DE PESQUISA

Realizadas as análises dos livros didáticos pudemos perceber a predominância de duas formas da passagem da representação algébrica para a representação gráfica: por meio da construção de tabelas, que na maioria das vezes são escolhidos números inteiros, ou utilizando-se apenas alguns pontos especiais, aos quais os livros chamam de pontos notáveis da parábola. Salientamos, também, que mesmo se tratando de funções que pertencem a uma mesma família de curvas, todo esse processo de construção é realizado novamente, sem que se faça qualquer relação entre os gráficos. E, ainda, que a passagem inversa, ou seja, do gráfico para a fórmula, pouco é realizada.

Ressaltamos que em nenhum dos livros analisados o uso de computador é citado como ferramenta para auxílio na construção de gráficos. O que nos leva a uma primeira pergunta: Será que a impossibilidade de construir exatamente o gráfico de uma função, citada por um dos autores, não poderia ser sanada com o uso de *software* apropriados e a partir das construções feitas no computador, poderíamos explorar as características visuais da representação gráfica, a fim de introduzir outro procedimento que permita complementar o estudo da função quadrática?

Benedetti (2003) faz uma análise detalhada de algumas pesquisas sobre a utilização de *software* gráficos e/ou calculadoras gráficas no ensino e aprendizagem de funções enfatizando as ações dos estudantes. A primeira pesquisa apontada pelo autor, privilegia a passagem pelas representações num ambiente computacional.

> [...] pode-se dizer que a interligação entre essas representações, feita de maneira quase instantânea, possibilita que as representações empregadas para analisar um determinado fenômeno sejam contrastadas umas com as outras, provocando ou um conhecimento mais abrangente e flexível do que é estudado, ou uma dúvida sobre o que parecia tão certo em uma dada representação olhada isoladamente. (Borba, apud BENEDETTI, 2003, p.42)

E ainda, o autor destaca que Borba e Confrey indicam o papel dos *software* gráficos como sendo mais do que um auxílio na construção de idéias matemáticas, e em vista disto os estudantes podem utilizar seus conhecimentos prévios enquanto trabalham com as representações de funções, ao mesmo tempo em que têm suas ações condicionadas pelo *software*. (p. 43)

As atividades realizadas por Souza (1996, apud BENEDETTI, 2003, p.43) caracterizam-se pelo uso alternado lápis-papel e calculadora gráfica, incentivando a passagem pelas representações, principalmente algébrica e gráfica, e pelos conceitos de função nessas representações.

Outra pesquisa citada é a de Gomes-Ferreira (1998, apud BENEDETTI, 2003, p.44) na qual se constatou que a interação entre estudante-*software* levou estudantes a reverem alguma de suas concepções prévias, descobrirem novos subconceitos [4], generalizá-los para um maior número de funções, buscarem variantes e invariantes em diferentes funções e relacionarem de diversas formas subconceitos e as famílias de funções estudadas.

Castro et al (2000, apud BENEDETTI, 2003, p.45) afirmam que o papel do *software* em suas pesquisas foi fundamental para que algumas questões surgissem e a produção de significados sobre função fosse possibilitada.

Benedetti (2003) propôs em sua pesquisa três atividades, a primeira com o objetivo de discutir as variações dos parâmetros **a** e **b** de uma função de 1º grau de fórmula geral $y = ax + b$ e introduzir funções racionais do tipo $y = \frac{1}{x}$, a segunda atividade objetivava a discussão das variações dos parâmetros a, b e c de uma função do 2º grau do tipo

[4] A autora chama de subconceitos de função: monotonicidade, período, domínio e imagem.

$y = ax^2 + bx + c$ e observar a função racionais do tipo $y = \frac{1}{x^2+1}$. E na última atividade explorava as características de outras funções como: $y = \frac{x}{x^2+1}$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$ e $y = x^6$.

Ao explorar essas funções utilizando um *software* gráfico o autor concluiu que este estudo ganhou possibilidades qualitativas e quantitativas na produção de significados.

> Qualitativa porque vários aspectos tais como monotonicidade, raízes, simetria, domínio, imagem e outros, foram bastante explorados ao disporem das diversas representações, o que foi **facilmente permitido pelo software gráfico**. Quantitativo, porque um considerável número de gráficos, fórmulas ou tabelas pôde ser representado em pouco tempo, **restringindo a atenção dos grupos para a análise das características das funções**, em vez de se despender um tempo considerável em processos predominantemente operacionais. (BENEDETTI, 2003, p.288, grifo nosso).

Pelho (2003) elaborou uma seqüência didática para introduzir o conceito de função e observou que a utilização do *software* Cabri-Géométrè II propiciou aos alunos uma melhor compreensão das variáveis da função, bem como o relacionamento entre elas. E ainda, afirma que o uso do *software* permitiu aos alunos realizarem a articulação entre diferentes registros de representação da função – do gráfico para o numérico e deste para o algébrico.

Segundo os PCN (1998) de Ensino Fundamental, a utilização de recursos tecnológicos traz significativas contribuições a fim de se repensar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática à medida que:

> Relativiza a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio desses instrumentos os cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente;
>
> Evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de vários problemas;
>
> Possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem;
>
> Permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo. (PCN, 1998, p.43-44)

Os PCN ainda apontam outro aspecto a ser considerado a respeito da computação gráfica, dizendo que hoje este é um recurso bastante estimulador para a compreensão e análise do comportamento de gráficos de funções com relação à mudança dos parâmetros de suas equações.

> Assim, a visualização e a leitura de informações gráficas em Matemática são aspectos importantes, pois auxiliam a compreensão de conceitos e o desenvolvimento de capacidades de expressão gráficas. A disponibilidade de modernos recursos para produzir imagens impõe a necessidade de atualização das imagens matemáticas, de acordo com as tendências tecnológicas e artísticas, incorporando a cor, os gráficos, a fotografia, assim como a importância de ensinar os alunos a fazer uso desses recursos. (Ibidem, p. 46)

Destacamos ainda os seguintes argumentos sobre a importância da utilização de computadores no ensino e aprendizagem:

> [...] Consideramos fundamental a utilização do microcomputador, não apenas pela disponibilidade, mas, principalmente, por ser viável torná-lo parte integrante do processo de ensino/aprendizagem. A tela do microcomputador, com suas inúmeras aberturas e possibilidades, tem tudo para ser um fator extremamente enriquecedor,quando pensamos na construção do conhecimento significativo. (Barufi e Lauro, 2000, p.8)

> [...] Os educadores não podem mais fechar os olhos à realidade que e apresenta: em plena era do homem virtual, com o advento a globalização, na qual as informações do mundo chegam a todos por meio da televisão, do rádio, do vídeo e dos computadores, a relutância de muitos professores em não utilizar os recursos da informática não encontra respaldo. Percebe-se que ainda não assimilaram totalmente a importância de despertar em seu aluno o aprendizado com autonomia, processo do qual o computador é o maior facilitador. As informações correm soltas, à disposição de quem quiser utilizá-las. Esse novo aluno deve ser preparado para desenvolver senso crítico suficiente para selecionar informações e utilizá-las. (Petitto, 2003, p. 40)

> [...] Como podemos enfatizar a relação função-gráfico? A resposta é simples, e o computador pode ajudar. Deixemos ao computador a tarefa de descobrir os valores da tabela em t. Melhor ainda, façamos o computador locar os pontos. Então o aluno poderá se concentrar no que acontece com uma função quando se fazem mudanças, como $y = x^2$, $y = x^2 + 2$ e $y = x^2 – 2$. Fazer gráficos com a ajuda do computador enfatiza a criatividade e a beleza inerente ao produto acabado. Alunos e professores continuarão gostando de fazer gráficos e alcançando a desejável relação função-gráfico. (SAUNDERS e BLASSIO, 1995, p.178)

Nosso trabalho vem como uma complementação a esses estudos já realizados, devido a abordar além da questão da análise de características das funções utilizando um *software* gráfico, o caráter lúdico para introduzir noções como intervalo e domínio da função.

Sendo assim, acreditamos que a utilização de uma ferramenta computacional favorece a manipulação da representação gráfica de maneira mais rápida que a utilização de lápis e papel, permitindo que o educando faça simulações em busca do resultado que satisfaça a situação proposta, desenvolvendo a capacidade de fazer previsões e criticar resultados.

Segundo Friedmann (1996) a aprendizagem depende em grande parte da motivação. Os alunos precisam de um estímulo para aprender, e o exercício lúdico desperta a motivação e o interesse destes.

> [...] hoje a computação gráfica é um recurso bastante estimulador para compreensão e análise do comportamento de gráficos de funções como as alterações que estes sofrem quando ocorrem mudanças nos parâmetros de suas equações.
>
> Assim, a visualização e a leitura de informações gráficas em Matemática são importantes, pois auxiliam na compreensão de conceitos e o desenvolvimento de capacidades de expressão gráficas. (PCN, 1998, pp.45-46).

Concordamos com Kampff, Machado e Cavedini (2004), no que diz respeito à importância de se contribuir para que o aluno transforme seus pensamentos, desenvolva atividades criativas, compreenda conceitos e reflita sobre si mesmo e, conseqüentemente, crie novos significados.

> É necessário repensar o ensino e a aprendizagem, colocando-se numa postura de professor inovador, criando situações significativas e diferenciadas, cabendo propiciar diferentes situações “problemas” ao educando. O aluno precisa ser motivado a envolver-se ativamente nesse processo, construindo o seu conhecimento a partir de múltiplas interações. O professor de matemática deve organizar um trabalho estruturado através de atividades que propiciem o desenvolvimento da exploração informal e investigação reflexiva e que não privem os alunos nas suas iniciativas e controle da situação. (Kampff, Machado e Cavedini, 2004, p.2).

Nesse sentido, tomamos como base o trabalho de Moretti (2003) sobre o uso da translação como um recurso no esboço de curvas, no qual ele afirma que esse procedimento traz uma grande economia da atividade do esboço, uma vez que grande parte do trabalho está fundamentada na translação de uma curva cuja forma já é conhecida.

> [...] Esse tipo de transformação pode contribuir para que o aluno perceba o traçado/eixo como uma imagem que representa o objeto descrito por uma expressão algébrica [] Libertando-se do procedimento de esboço de curvas **exclusivamente por pontos**, o aluno poderá perceber certas variações ou lugares na curva que são, em geral, importantes na interpretação de fenômenos que ela retrata. Essa transformação, combinada com noções de simetria como a axial e a central, pode elevar bastante a capacidade do aluno no esboço de curvas. (ibidem, p.159-160, grifo do autor).

E para que o aluno adquira esta percepção, privilegiamos a forma canônica da função quadrática $\left(y = a\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$ pois, essa expressão nos fornece todas as informações necessárias para podermos comparar as representações gráficas da função $y = ax^2 + bx + c$, onde **a** é diferente de zero, com a representação mais simples $y = x^2$.

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) o estudo da função quadrática, como posição do gráfico, coordenadas do ponto de máximo/mínimo, zeros da função,

> deve ser realizado de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o "aspecto" do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica, evitando-se a memorização de regras. O trabalho com a forma fatorada ($f(x) = a \cdot (x - m)^2 + n$) pode ser um auxiliar importante nessa compreensão. (ibidem, p.73).

A partir das reflexões acima, apresenta-se a seguinte questão: é possível que alunos de 8ª série do Ensino Fundamental se apropriem do processo de construção gráfica da função quadrática como um conjunto de variáveis visuais que implicam em unidades simbólicas significativas da escrita algébrica utilizando um ambiente computacional aliado ao caráter lúdico como uma das ferramentas de aprendizagem?

2.2 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Dividimos este item em duas partes, a primeira na qual apresentamos elementos da Teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, mostrando a importância da utilização de várias formas de representação de um mesmo objeto matemático. E na segunda parte, trazemos elementos da Teoria das Situações de Guy Brousseau que possibilitaram a construção e aplicação de nossa seqüência didática, bem como analisar o processo de aprendizagem.

2.2.1 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

As pesquisas por nós analisadas Kieran (1992), Simões (1995), Oliveira (1997), Pelho (2003), Benedetti (2003), assinalam a importância da utilização de diferentes formas de se representar um mesmo objeto matemático, no caso funções. Em vista disto, escolhemos a Teoria de Registros de Representação de Raymond Duval que trata da aquisição de conhecimentos matemáticos.

Ao tentar entender as dificuldades na compreensão da matemática que se mostram muitas vezes insuperáveis por muitos alunos, bem como sua natureza e onde se encontram, Duval (2003, p.11) afirma que "estas questões passaram a ter amplitude e uma importância particular devido a recente exigência de uma maior formação matemática inicial para todos os alunos, de modo a prepará-los para enfrentar um ambiente informático e tecnológico cada vez mais complexo."

E Duval continua, afirmando que a intenção da formação inicial não é formar futuros matemáticos nem dar instrumentos que servirão eventualmente muito mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização, e para isso se faz necessária uma abordagem cognitiva.

Para o autor a originalidade da abordagem cognitiva está em procurar descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino.

Ele caracteriza a atividade matemática do ponto de vista cognitivo alegando que a atividade cognitiva requerida pela matemática é diferente daquelas requeridas em outros domínios do conhecimento, e esta diferença deve ser procurada em duas características: na **importância das representações semióticas**, ou seja, as possibilidades de tratamento matemático dependem do sistema de representação utilizado e de que os objetos matemáticos não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos; e na **grande variedade de representações semióticas** utilizadas na matemática, isto é, sistemas de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas e formais, representações gráficas e a linguagem natural.

Duval (2003) utiliza o termo "registro" de representação para designar os diferentes tipos de representações semióticas, linguagem natural e formal, figuras geométricas, sistemas de escrita (numérica, algébrica e simbólica) e gráficos cartesianos. Segundo o autor a compreensão da matemática se deve à coordenação de ao menos dois registros, ou seja, para toda análise do funcionamento cognitivo da compreensão existem dois tipos diferentes de transformações de representações semióticas:

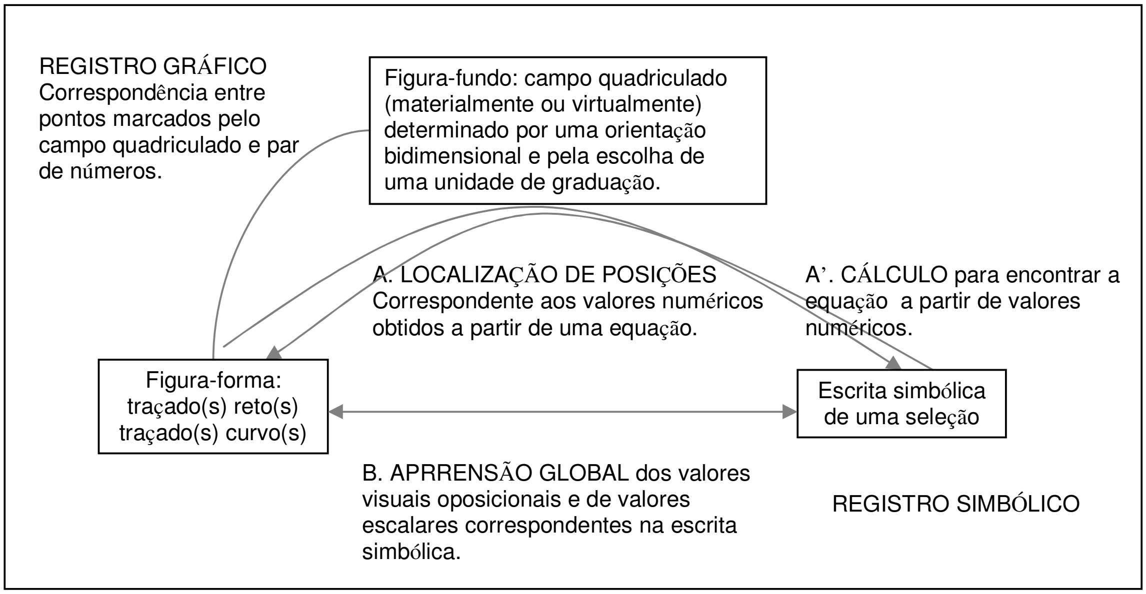
> Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar cálculos ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria.
>
> As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica. (DUVAL, 2003, p.16)

Em nossa pesquisa, por exemplo, o objeto matemático é a função quadrática e as conversões utilizadas são da gráfica para escrita algébrica e vice-versa, e o tratamento utilizado é a representação algébrica desta função em sua forma canônica.

Duval explica que geralmente considera-se a conversão de representações como uma operação simples e local, ou seja, seria reduzida a uma "codificação". E, por exemplo, passar de uma equação à sua representação gráfica seria aplicar uma regra, na qual um ponto está associado a um par de números num plano cartesiano.

> [...] tal visão é superficial e enganadora não somente nos fatos concernentes às aprendizagens [], mas igualmente de um ponto de vista teórico, pois a regra de codificação permite somente uma leitura pontual das representações gráficas. Essa regra não permite uma apreensão global e qualitativa. (DUVAL, 2003, p.17)

E é justamente essa apreensão global e qualitativa que se faz necessária para extrapolar, interpolar, ou para utilizar os gráficos para fins de controle relacionados aos tratamentos algébricos. Para o autor a conversão entre gráficos e equações é suposto que se leve em conta as variáveis visuais próprias dos gráficos e os valores escalares das equações. Como pode ser visto no quadro 2.1.



Quadro 2.1 – Esquema de organização semiótica e do funcionamento das representações gráficas. (DUVAL, 2003, p.18)

Duval explica que essa organização permite três tipos de tratamento e dois tipos de conversão com o registro simbólico. As ligações A e A' permitem somente uma leitura pontual dos gráficos e somente a coordenação B permite uma apreensão global qualitativa.

Em seu artigo intitulado “Gráficos e equações: a articulação entre os dois registros” (1988), Duval fez um estudo das variáveis visuais dos gráficos da função afim y=ax+b (inclinação, intersecção com os eixos, etc.) e das unidades simbólicas significativas da equação (coeficientes positivos ou negativos, maior, menor ou igual a 1, etc).

Ele evidencia as dificuldades dos alunos em passarem do registro gráfico para o algébrico e vice-versa.

É importante ressaltar que Duval explica que a compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro, pois, passar de um registro de representação a outro não é somente mudar o modo de tratamento, mas também saber explicar propriedades de um mesmo objeto. E, isto está intimamente ligado ao fato de dispor ao menos de dois registros diferentes.

O procedimento para a construção de gráficos que mais aparece em livros didáticos é aquele no qual os pontos são obtidos por substituição na expressão algébrica da função e, então localizados em um sistema cartesiano para que se possa desta maneira traçar a curva ligando estes pontos.

Opostamente a esse procedimento, Duval apresenta o procedimento de interpretação global das propriedades figurais, no qual o conjunto traçado/eixo forma uma figura que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica, permitindo que se identifiquem modificações tanto na figura como na expressão. Salienta que "neste tipo de tratamento não estamos em presença da associação *um ponto ↔ par ordenado*, mas na associação *variável visual da representação ↔ unidade significativa da escrita algébrica*" (Duval 1988, p.237).

Para exemplificar este procedimento de esboços de curvas, o autor relaciona as variáveis visuais e a correspondente unidade simbólica, no estudo de funções polinomiais de 1º grau, $y = ax + b$, onde são variáveis visuais o sentido da inclinação, ângulo com os eixos e posição sobre os eixos; e suas unidades simbólicas correspondentes são o valor do coeficiente angular **a** nas duas primeiras, e o valor do coeficiente linear **b** na terceira variável visual.

Com base neste contexto, prosseguimos distinguindo as variáveis visuais e unidades simbólicas significativas referentes à função polinomial de 2º grau, e para isso faremos um tratamento na escrita algébrica, passando da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ para a forma $f(x) = a(x+m)^2 + n$, onde $m = -\frac{b}{2a}$ e $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, pois a correspondência entre coeficientes e variáveis visuais não é tão evidente na primeira.

Em uma expressão algébrica cada símbolo corresponde a uma unidade significativa. Há, contudo unidades significativas cujos símbolos são omitidos: o coeficiente 1, o caractere "+" na frente dos coeficientes maiores que zero. Assim não se escreve $y = +1x^2$, em contrapartida escreve-se $y = -3x^2$. A recordação dessa trivialidade é importante quando se trata de corresponder as variáveis visuais relevantes do gráfico e as unidades significativas da escrita algébrica.

Analogamente ao trabalho de Duval, destacaremos as quatro variáveis visuais (quadro 2.2) pertinentes ao estudo da função quadrática, onde nosso conjunto traçado/eixo é uma curva aberta denominada parábola.

Variáveis Visuais	Valores das variáveis visuais
Concavidade da parábola	Voltada para cima Voltada para baixo
Abertura da parábola	Maior abertura Menor abertura
Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das abscissas	Acima do eixo Na origem Abaixo do eixo
Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das ordenadas	A esquerda do eixo Na origem A direita do eixo

QUADRO 2.2 – Variáveis Visuais e Valores

Para as duas primeiras variáveis visuais correspondem dois valores, e às duas últimas correspondem três.

Ao utilizarmos a forma canônica da função quadrática, $y = a(x+m)^2 + n$ podemos perceber facilmente que as mudanças ocorridas na representação algébrica acarretam mudanças na representação gráfica e vice-versa. O que pode ser observado no Quadro 2.3.

Variáveis Visuais	Valores	Unidade simbólica correspondente
Concavidade da parábola	Voltada para cima Voltada para baixo	Parâmetro a >0 (ausência do símbolo -) Parâmetro a <0 (presença do símbolo -)
Abertura da parábola	Maior abertura Menor abertura	0<|a|<1 |a|=1 (o parâmetro não está escrito) |a|>1
Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das abscissas	Acima do eixo Na origem Abaixo do eixo	n>0 n=0 n<0
Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das ordenadas	A esquerda do eixo Na origem A direita do eixo	m>0 m=0 m<0

QUADRO 2.3 – Unidade simbólica correspondente às variáveis visuais

Algumas observações devem ser feitas a respeito deste quadro:

1) Partimos de uma função polinomial de 2º grau que chamamos de mais simples $y = f(x) = x^2$, cujo gráfico é uma parábola. Com base neste gráfico, podemos construir os de:

- $f(x) = ax^2$, em que o parâmetro **a**, quando positivo e diferente de 1, provoca mudanças na abertura do gráfico de $f(x) = x^2$; e quando negativo, o gráfico resultará numa reflexão em relação ao eixo das abscissas.
- $f(x) = x^2 + n$, em que o parâmetro **n** diferente de zero provoca uma translação vertical no gráfico de $f(x) = x^2$, ou seja, para **n** maior que zero ocorre uma translação vertical para cima, e para **n** menor que zero ocorre uma translação vertical para baixo.
- $f(x) = (x + m)^2$, em que o parâmetro **m** diferente de zero provoca uma translação horizontal no gráfico de $f(x) = x^2$, ou seja, para **m** maior que zero ocorre uma translação horizontal para a esquerda, e para **m** menor que zero ocorre uma translação horizontal para a direita.

2) Podemos, então, perceber que a partir do gráfico de $f(x) = x^2$, obteremos o gráfico de $y = a(x + m)^2 + n$ por uma translação horizontal, seguida de uma mudança na abertura da concavidade, com ou sem reflexão em relação ao eixo das abscissas, e, por último uma translação vertical.

2.2.2 TEORIA DAS SITUAÇÕES

A Teoria das Situações de Guy Brousseau tem como objetivo estudar os fenômenos que interferem no processo de ensino e aprendizagem, propondo um modelo teórico para construção, análise e experimentação de situações didáticas, levando em consideração as interações entre professor e aluno, mediadas pelo saber em uma situação de ensino.

Segundo Brousseau (1986, p.46)

> uma concepção de ensino requer que o professor provoque uma adaptação em seus estudantes mediante uma escolha racional de problemas que são colocados diante deles. Estes problemas são escolhidos de tal maneira que permitam ao aluno: agir, falar, pensar e evoluir por seus próprios meios,

ou seja, entre o momento em que o estudante aceita o problema e produz sua resposta, o professor não interfere e nem sugere o conteúdo que quer que se aprenda, o aluno adquire novos conhecimentos inteiramente justificados pela lógica interna da situação e que possam ser construídos sem ter como recurso razões didáticas. A esta situação, o autor, chama **situação adidática**.

Concordamos com Freitas (1999, p.70) quando ele afirma que "as situações adidáticas representam o momento mais precioso da aprendizagem, pois o sucesso do aluno nas mesmas significa que ele, por seu próprio mérito, conseguiu sintetizar um conhecimento."

Vale destacar que o conjunto de situações adidáticas que permitem introduzir conhecimentos em sala de aula seguindo uma epistemologia científica é chamado de **situação fundamental**. Segundo Perrin-Glorian (1999, p.286), "a situação fundamental é uma situação adidática característica de um saber ou um conhecimento", na qual os diferentes valores dados às variáveis didáticas devem permitir administrar todas as situações representativas do saber em jogo.

A **situação didática** se caracteriza como um jogo de interações entre professor e problema proposto, cujo objetivo é aprender, pois o professor faz a devolução ao aluno de uma situação adidática, e esta por sua vez tem o objetivo de ensinar, oferecendo maior responsabilidade ao aluno na construção do conhecimento. O aluno não distingue, subitamente, na situação o que é adidático e o que é de origem didática.

É importante ressaltar que a pertinência das situações adidáticas depende da escolha de variáveis didáticas. Segundo Almouloud (2000, p.102) variáveis didáticas são aquelas para as quais as escolhas de determinados valores provocam modificações nas estratégias de resolução de problemas. A determinação dessas variáveis são pontos importantes para a construção das situações.

Brousseau apóia sua teoria em três hipóteses: o aluno aprende adaptando-se a um meio, no qual o saber se manifesta pelas novas respostas. O meio sem intenções didáticas não é suficiente para permitir a aquisição do conhecimento pelo estudante, ou seja, o professor deve criar e organizar um meio e situações capazes de provocar essas aprendizagens. E por último, o meio e as situações devem engajar os saberes matemáticos cuja aquisição é visada pelo aluno.

Almouloud (2000, p.99) acrescenta uma quarta hipótese tomando como referência Bachelard: “um novo conhecimento constrói-se a partir de conhecimentos antigos e, também contra esses mesmos conhecimentos antigos”.

A teoria das situações permite analisar o processo de aprendizagem em quatro fases, nas quais o saber em jogo tem funções diferentes e o aluno também não tem a mesma relação com o saber. São elas: ação, formulação, validação e institucionalização.

Na fase da ação, o professor propõe as situações didáticas nas quais interações entre aluno e situação estão centralizadas na tomada de decisões. Ela permite ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-la sem intervenção do professor, graças a retroação da situação. O aluno realiza uma ação de caráter experimental sem se preocupar com a teoria que justifique o resultado. Nessa fase o professor espera que o aluno empregue conhecimentos que irão funcionar como uma ferramenta para auxiliá-lo na resolução da situação.

Deste modo, percebemos que o saber envolvido atua de maneiras diferentes durante estas fases, primeiramente tem o estatuto de ferramenta implícita (pré construído), ou seja, está relacionado com o contexto da situação proposta. Depois, o saber é descontextualizado passando a ter o estatuto de objeto de estudo, e finalmente ele é recontextualizado tornando-se uma ferramenta explícita para ser aplicado em novas situações.

Outro ponto a se destacar é a noção de contrato didático que Brousseau (1986) define como sendo:

> o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor. Esse contrato é o conjunto de regras que determinam explicitamente, para uma pequena parte, mas, sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e aquilo que, de uma maneira ou outra, ele terá de prestar conta perante o outro. (ibidem, p. 51).

O contrato didático é uma estratégia da situação didática. É a justificativa que o professor tem para apresentar a situação, porém a evolução da situação modifica o contrato, na medida em que ocorrem novas situações. O aluno tem a responsabilidade de gerenciar sua relação com o saber nas fases de ação, formulação e de validação, enquanto que o professor está encarregado da fase de institucionalização.

Segundo Silva (1999) o contrato didático visa à aquisição dos saberes pelos alunos, o seu funcionamento depende dos diferentes contextos do ensino e da aprendizagem, adaptando-se às escolhas pedagógicas, ao tipo de trabalho proposto aos alunos, aos objetivos do curso, à epistemologia do professor, às condições de avaliação, entre outras.

> Se a relação didática se desenvolve num ambiente em que o professor dá aulas expositivas, onde predominam definições, exemplos e listas de exercícios para os alunos resolverem, aí o conjunto de regras, explícitas ou implícitas que regem o gerenciamento da atividade será muito diferente daquele que direciona uma prática pedagógica em que os alunos trabalham, realizando atividades propostas

conhecimentos/saberes e as situações, e por outro lado, as relações entre os próprios conhecimentos, e as relações entre as situações.

Este “meio” deve respeitar três condições, primeiramente ele deve ser fator de contradições, de dificuldades, de desequilíbrio e então adaptações. Deve, também permitir o funcionamento “autônomo” do aluno e, finalmente a aprendizagem deve ter por conseqüência a dominação de saberes matemáticos.

Para fazer o estudo do *milieu*[5] adaptamos o esquema proposto por Margolinas (1994 apud BLOCH, 1999) que foi baseado no modelo de Brousseau (1986 e 1990), no qual a autora valoriza o caráter central da situação didática e permite duas análises: a ascendente e a descendente, a primeira caracteriza as atividades dos alunos em uma situação adidática e a segunda caracteriza a atividade do professor nos diversos níveis de estruturação do meio. (Quadro 2.4).

M3: M – de construção		P3: P – noosférico	S3: Situação da noosfera	didática
M2: M – de projeto		P2: P – construtor	S2: Situação de construção	
M1: M – didático	E1: E – reflexivo	P1: P – projetista	S1: Situação de projeto	
M0: M – de aprendizagem	E0: Aluno	P0: Professor	S0: Situação didática	
M-1: M – de referência	E-1: E – aprendizagem	P-1: P – observador	S-1: Situação de aprendizagem	adidática
M-2: M – objetivo	E-2: E – ação		S-2: Situação de referência	
M-3: M – material	E-3: E – objetivo		S-3: Situação objetiva	

QUADRO 2.4 – Estruturação do *milieu*

Nesta estruturação M, E, P são as posições relativas ao meio, ao aluno, e ao professor respectivamente. Os meios, material, objetivo, de referência e de aprendizagem não são portadores de intenção didática, porém os meios didático, de projeto e de construção o são. Bloch (1999) levanta a hipótese que em uma situação adidática professor e aluno aprendem, porém essa aprendizagem não ocorre da mesma maneira.

A partir da análise ascendente podemos caracterizar o meio do professor, ou seja, meio material, objetivo, e de referência do aluno e o meio de referência do professor.

---

[5] Meio

O meio material do professor é formado pelos alunos e pelo meio material dos alunos que é composto pelos pré-requisitos para o desenvolvimento da situação, ou seja, neste momento o professor é responsável pela adequação do meio material e da utilização do mesmo pelo o aluno. O par aluno/meio se revela antagônico ao professor revelando dois componentes, o primeiro refere-se ao meio material do aluno que o professor controla, e o segundo é constituído das reações dos alunos que nem sempre são controladas pelo professor.

Segundo Bloch (1999) o meio objetivo do professor constitui-se dos elementos da situação, das ações dos alunos e, sobretudo dos conhecimentos desses alunos e das modificações que esses conhecimentos provoquem no meio objetivo dos alunos, este último formado pelos objetos da situação objetiva com os quais o aluno estabelece uma relação.

Já o meio de referência do aluno é aquele no qual os conhecimentos deste se transformam em saber, permitindo identificar conhecimentos novos, os quais ele deve compreender e validar do ponto de vista científico. E, o meio de referência do professor é constituído dos elementos da situação, tentativas, erros, conjecturas, formulações e estratégias dos alunos.

A situação objetiva refere-se ao problema proposto no qual o meio material contém objetos disponíveis para o aluno (E-3) iniciar a resolução. A situação de referência (S-2) refere-se ao aluno (E-2) agindo frente a um meio material (M-3). O nível da situação de aprendizagem (S-1) corresponde ao aluno (E-1) que resolve um problema em situação adidática utilizando o meio objetivo (M-2) para comunicar informações sobre a ação, nesta posição o aluno é responsável por sua aprendizagem.

A situação didática (S0) é formada pelas interações meio de aprendizagem/aluno/professor. O meio M0 é constituído pelas interações entre o meio M-1, o aluno E-1 e o professor P-1.

Margolinas (1994 apud BLOCH, 1999) privilegia, para o professor, a análise descendente do esquema citado anteriormente, que corresponde ao nível de ação do professor: P-noosférico, P- construtor, P-projetista, Professor, e em S-1, P-observador. Contudo, esta interpretação destaca efetivamente o que pode permanecer ou ser alterado neste projeto: a análise descendente estuda os conhecimentos do professor frente à situação sobre seu ponto de vista. E consequentemente sobre a adequação entre as intenções do professor e o que aconteceu realmente, e que também, os conhecimentos não são adquiridos por uma simples posição de observação (ainda que seja necessário precisar a implicação desta ação de observação), mas por uma interação com o meio do professor; esta interação compreende certamente da observação.

O nível da “noosfera” (+3) caracteriza a atividade do professor que reflete de modo geral sobre o ensino da matemática e/ou determinado tema. O nível de construção (+2) é aquele no qual o professor procura situações adidáticas. Já o nível de projeto (+1) corresponde ao planejamento da aula. A situação didática (S0) é caracterizada pela ação do professor em sala de aula. A observação ou devolução das atividades dos alunos faz parte do nível -1, e por fim os níveis -2 e -3 são caracterizados pelas atividades dos alunos, sendo o professor o organizador e mediador.

Fazer a análise descendente implica em observar o papel do professor nos diferentes níveis, primeiramente temos o professor refletindo sobre um determinado tema, analisando a estrutura matemática e a gênese histórica e epistemológica do conceito visado. Depois o professor reflete sobre como ensinar este conceito, planeja sua aula e finalmente aplica suas atividades.

A Teoria dos Registros de Representação nos auxiliou na elaboração de nossas atividades, no que diz respeito à introdução das variáveis visuais e suas correspondentes unidades simbólicas significativas. Já a Teoria das Situações, nos permitiu fazer a análise a priori e, também, a análise a posteriori.

Diante deste contexto teórico, damos continuidade a nossa pesquisa, elaborando uma seqüência didática para introduzir o procedimento de interpretação global das propriedades figurais e aplicá-lo na resolução de atividades lúdicas.

CAPÍTULO III

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo tem por objetivos destacar a metodologia de pesquisa utilizada em nosso trabalho e comentar sobre os participantes da pesquisa: professor, alunos e observadores, bem como fazer uma breve descrição do *software* utilizado.

3.1 METODOLOGIA

Para desenvolver nosso estudo utilizamos os princípios da Engenharia Didática de Michèle Artigue (1995). Segundo a autora esta metodologia se caracteriza por um esquema experimental baseado nas realizações didáticas em sala de aula, ou seja, sobre a concepção, realização, observação e análise de seqüências de ensino permitindo uma validação interna, a partir da confrontação das análises a priori e a posteriori.

Faz-se necessário distinguir dois tipos de variáveis, as macrodidáticas ou globais relativas à organização geral da engenharia, e as microdidáticas ou locais relativas à organização de uma sessão ou de uma fase.

Destacaremos, então, as variáveis didáticas pertinentes ao nosso estudo, permitindo, assim, descrever e analisar a seqüência, e fazer previsões de possíveis comportamentos dos alunos.

Percebemos que em todos os livros analisados somente a forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ é apresentada, acarretando o uso constante de tabelas e/ou identificação de alguns pontos para a construção dos gráficos. Ficando evidente o procedimento ponto a ponto, o que, às vezes, se torna um trabalho impreciso, pois são utilizados alguns valores inteiros e pode acontecer que em determinadas funções quadráticas, por exemplo, as raízes serem números não inteiros.

Partindo deste pressuposto, fizemos nossas primeiras escolhas globais, ou seja, escolhemos representar a função quadrática por sua forma canônica $f(x) = a(x+m)^2 + n$, onde $m = -\dfrac{b}{2a}$ e $n = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$, permitindo, assim, fazer um estudo analítico mais detalhado.

Quanto às variáveis microdidáticas, escolhemos iniciar as três primeiras atividades sempre com a função $f(x) = x^2$, pretendendo evidenciar que a partir desta função podemos construir outros gráficos de funções quadráticas utilizando os recursos de translação e reflexão.

Para a primeira atividade escolhemos funções na forma $f(x) = ax^2$, utilizamos como coeficientes números inteiros e fracionários. Construindo gráficos num mesmo plano cartesiano, objetivamos a compreensão da propriedade envolvida, ou seja, fazendo notar as duas primeiras variáveis visuais – concavidade e abertura da parábola e suas unidades simbólicas correspondentes – a > 0, a < 0 e 0 < |a| <1, |a| = 1, |a| > 1 respectivamente.

A segunda atividade teve por meta explorar a terceira variável visual – posição do vértice em relação ao eixo das abscissas, e para isso utilizamos funções na forma $f(x) = x^2 + n$. Pretendemos, também, começar a explorar a noção de vértice da parábola.

Quanto à terceira atividade as funções utilizadas estão na forma $f(x) = (x + m)^2$ para que seja descoberta a quarta variável visual – posição do vértice em relação ao eixo das ordenadas.

A partir da quarta atividade pretendemos mostrar a importância do tratamento dado à escrita algébrica da função quadrática, ou seja, confrontar as duas representações, reforçando a idéia de visualização global do traçado.

Pensando numa maneira de introduzir a noção de intervalo a partir da construção de gráficos, demos continuidade à seqüência selecionando duas figuras, cujas representações são partes de gráficos de funções quadráticas. Com isso temos o intuito de verificar a utilização das propriedades figurais, tipos de números atribuídos aos parâmetros (**a**, **m** e **n**), e ainda, quais hipóteses os alunos formulariam sobre como limitar o domínio da função.

Por meio da utilização de desenhos para introduzir certas noções e verificar apreensão de conhecimento, pretendemos estimular a criatividade do aluno pertinente à elaboração de estratégias de resolução e na sua validação.

Após a organização da seqüência didática, fizemos a análise a priori tendo por objetivo determinar como as escolhas efetuadas permitem controlar o comportamento dos alunos.

Segundo Artigue (1995), esta análise compreende uma parte de descrição e outra de previsão, devendo:

- Descrever as escolhas feitas no nível local (relacionando-as eventualmente com as seleções globais) e as características da situação adidática desenvolvida;
- Analisar o que poderia estar em jogo nesta situação para o aluno em função das possibilidades de ação, seleção, decisão, controle e validação que o aluno terá durante a experimentação.
- Prever campos de comportamentos possíveis e tentar demonstrar como a análise permite controlar seus significados e assegurar, particularmente, que se tais comportamentos esperados ocorreram, é por conseqüência do desenvolvimento visado pela aprendizagem.

A próxima fase da Engenharia Didática consiste na aplicação da seqüência didática, tendo como pressupostos apresentar os objetivos e condições da realização da pesquisa, estabelecer o contrato didático e registrar as observações feitas durante a experimentação.

A última fase da Engenharia Didática é composta pela análise a posteriori e a validação da pesquisa. A análise a posteriori consiste em um conjunto de dados colhidos ao longo da experimentação, como por exemplo, produção dos alunos, registros de observadores e registro em vídeo. Após esta análise, se faz necessário sua confrontação com a análise a priori para que seja feita a validação ou não das hipóteses formuladas na investigação.

3.2 PARTICIPANTES DA PESQUISA

Participaram da pesquisa oito alunos da 8ª série do Ensino Fundamental e uma professora de Matemática de uma escola particular situada em São Bernardo do Campo. Para o registro escrito de observações contamos com a colaboração de duas observadoras, as discussões e desenvolvimento da seqüência foram filmados em VHS, e ainda, as atividades realizadas foram salvas em disquetes.

Decidimos trabalhar com alunos de 8ª série, pois é nesta série que comumente se introduz o conceito de função e construção de gráficos de funções polinomiais de 1º e 2º graus. As atividades foram aplicadas ao final do ano letivo de 2004, nos meses de outubro a dezembro durante sete sextas-feiras[6]. Em decorrência, os alunos iniciaram a seqüência familiarizados com a função polinomial de 2º grau na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, e em suas aulas regulares estavam aprendendo a construir gráficos utilizando o processo fómula-tabela-gráfico, ou seja, tinham uma visão pontual do gráfico.

Destacamos que os alunos já conheciam o *software Winplot*, pois haviam realizado atividades sobre função polinomial de 1º grau em suas aulas regulares. Essas atividades tinham por objetivo observar o comportamento do gráfico relacionando-o com os coeficientes linear e angular. Também já havia sido introduzida a representação algébrica da função quadrática como uma multiplicação de duas funções de 1º grau.

O convite para a participação na pesquisa foi feito pela professora, que explicou as características da pesquisa e o fato de a mesma incluir filmagens, que todas as atividades realizadas deveriam ser gravadas em disquete, e a presença de uma observadora e da pesquisadora. Dezesseis alunos se ofereceram para participar do estudo, porém somente oito permaneceram até o final. Fato este, devido às sessões serem as sextas-feiras no período da tarde fora do horário regular. Ressaltamos que a escola disponibilizou o laboratório de informática e que todos os pais estavam cientes do acontecimento.

Não adotamos critério algum para compor as duplas, visto que já estavam acostumados a trabalhar deste modo, deixamos livre esta opção. As duplas que desenvolveram a seqüência até o final foram: Adriana e Fátima; Silvia e Rosana; André e Renato; Bruna e Adriano.

---

[6] Datas: 15/10; 22/10; 12/11; 19/11; 26/11; 03/12 e 10/12.

Quanto à professora, peça fundamental no desenvolvimento da seqüência, nossa amiga e também mestranda no curso de Educação Matemática do programa da Pontifícia Universidade Católica, é de extrema importância enfatizar que a mesma utiliza em suas aulas a estratégia em que os alunos trabalham em duplas ou individualmente. Sendo que os alunos estão acostumados a não perguntarem como realizar as atividades, seguindo as orientações das mesmas, e somente depois de todos terem finalizado é que há a abertura para a explicitação e validação de seus resultados e finalmente o fechamento conjunto (professor + alunos), visando a institucionalização de um novo conceito.

A cada sessão, também contamos com a presença de uma pessoa que tinha o papel de observar e relatar por escrito os diálogos da dupla André e Renato, no desenvolvimento da seqüência. No início deste item, dissemos que havia duas observadoras, pois, em uma das sessões a pessoa que tinha se oferecido para observar não pode comparecer, e então ela foi substituída somente nesta sessão.

A pesquisadora esteve presente em todas as sessões e também atuou como observadora, mas não de uma dupla e sim do grupo todo (alunos e professora). Cabe destacar que em uma sessão atuou como professora, pois a professora da sala precisou faltar. O que não acarretou nenhum problema, visto que a prática de ensino da pesquisadora é semelhante a da professora da sala, e podemos afirmar que os alunos não notaram diferença alguma, e a atividade ocorreu tranqüilamente.

Podemos dizer também que a filmagem não interferiu em momento algum no modo como a seqüência foi aplicada, os alunos se sentiram muito a vontade e “importantes” por estarem participando de uma pesquisa.

3.3 *SOFTWARE* WINPLOT

Lembramos que nosso objetivo não é introduzir o conceito de função quadrática e sim proporcionar ao aluno uma outra visão a respeito da construção de gráficos, observando determinadas propriedades, segundo o procedimento de interpretação global das propriedades figurais.

No item 2.1 relacionamos uma série de pesquisas que apontam a utilização de *software* no ensino e aprendizagem de funções como um fator de estímulo para a melhor compreensão deste conceito.

O *software* por nós selecionado chama-se *Winplot,* um programa de domínio público, criado por Richard Parris, da *Philipps Exeter Academy*. Recentemente traduzido para o português pelo professor Adelmo Ribeiro de Jesus[7], pode ser encontrado no site http://math.exeter.edu/rparris. É um programa simples, mas poderoso. Uma de suas vantagens é ser gratuito, podendo ser utilizado por professores e alunos do Ensino Fundamental, Médio, e Superior. Os aplicativos mais recentes, como o *Maple V*, *Mathcad*, *Mathematica* têm uma sintaxe mais pesada e são de alto custo para o usuário. Neste sentido, concordamos com Jesus (2002), ser fundamental a divulgação deste programa para professores de Matemática.

A palavra *Winplot* indica que este programa é utilizado para construir gráficos de funções em Matemática, em um ambiente *Windows*. Além disso, ele permite executar uma série de outros comandos, dos quais apresentaremos os que permitem realizar as atividades de nossa seqüência.

Ao abrir o programa (Fig. 3.1) o usuário encontrará as opções: 2-dim, 3-dim, Adivinhar e Mapeador. Os comandos 2-dim e 3-dim nos permitem trabalhar com funções no plano e no espaço respectivamente. O comando Adivinhar mostra gráficos de funções para que possamos escrever sua representação algébrica, e a opção Mapeador permite trabalhar com transformações no plano. Limitamos-nos a explicar como funciona a opção 2-dim, pois foi esta opção que utilizamos para o desenvolvimento de nossa seqüência.

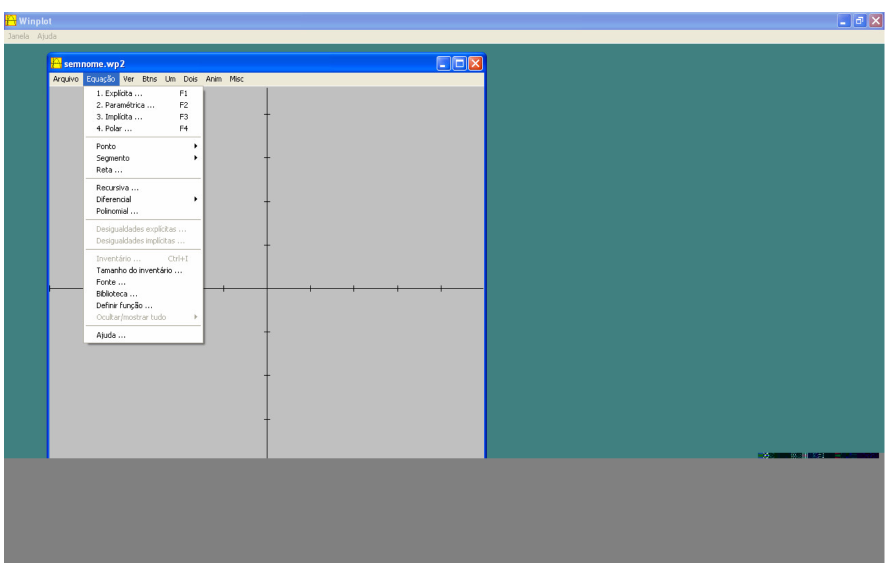


Figura 3.1 – Iniciando o *Winplot*

[7] Professor Adjunto da UFBA (aposentado). Professor do Curso de Matemática da Universidade Católica de Salvador e da Faculdade Jorge Amado.

A opção 2-dim permite escolher o tipo de equação algébrica que desejamos utilizar para construir os gráficos, ou seja, forma cartesiana (y=f(x)), polar (r=f(t)), paramétrica (x=f(t), y=g(t)) e implícita (0=f(x,y)). Aparecem, também, as opções coordenadas de pontos, segmento de reta, equação da reta, seqüências no plano, equações diferenciais e polinômio. Destes comandos utilizamos apenas a forma cartesiana, cujo comando é “Explícita”.

Em cada menu existe a opção “Ajuda”, que permite ao usuário esclarecer quaisquer dúvidas a respeito da utilização do *software*. Por exemplo, como utilizar os comandos na opção “Explícita”. Na opção “Biblioteca” o usuário encontra as funções que são utilizadas pelo programa, bem como o modo de digitá-las.

No menu “Ver” (Fig. 3.2) encontramos a opção “Grade” que permite configurar detalhes relacionados ao sistema de coordenadas, ou seja, mostrar os eixos cartesianos, modificar a escala, mostrar linhas de grade, etc.

Figura 3.2 – Menu VER

Para inserir uma função utilizamos a opção “Explícita” no menu “Equação” e as demais que desejarmos inserir utilizamos a opção “Inventário” (Fig. 3.3). Quando selecionamos esta opção, é aberta uma caixa de diálogo, da qual utilizamos os seguintes botões:

- Editar: permite fazer alterações na equação digitada, como por exemplo, fixar um intervalo para a função, alterar a cor de exibição do gráfico e espessura da linha.
- Apagar: apaga a expressão algébrica selecionada.
- Duplicar: permite duplicar a expressão anterior sem apagá-la, ou seja, permite visualizar vários gráficos num mesmo plano cartesiano.
- Mostrar gráfico: esconde e mostra o gráfico sem apagar a equação do inventário.
- Mostrar equação: esconde e mostra a equação na área do gráfico.

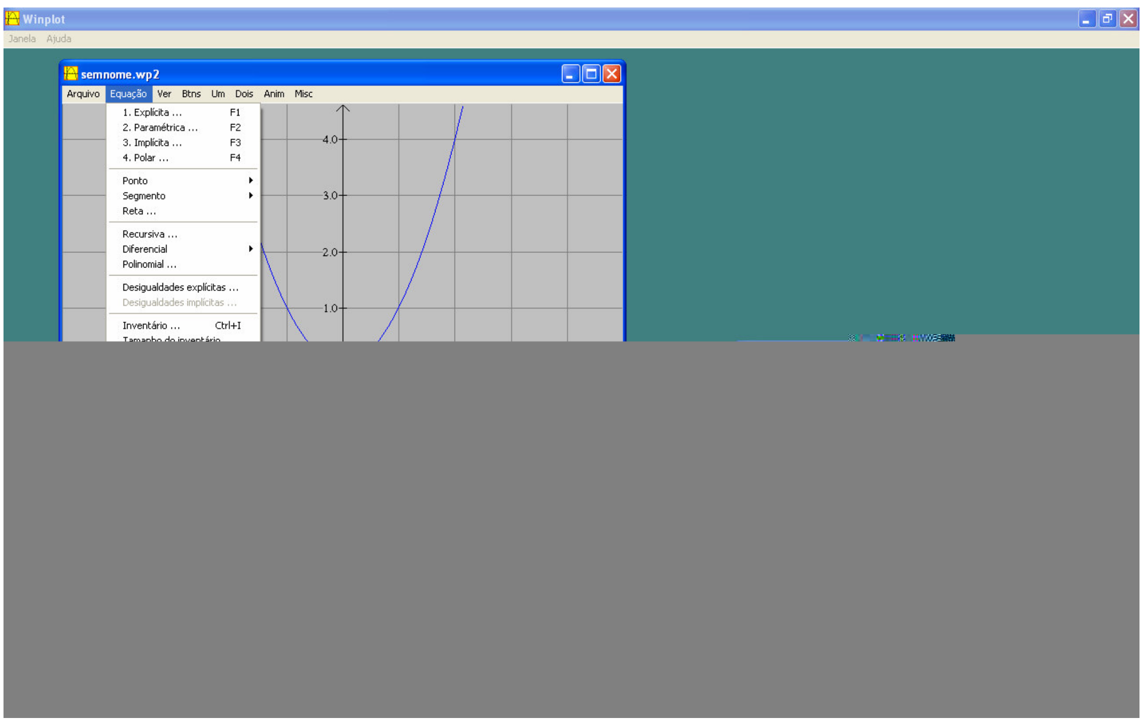


Figura 3.3 – Inventário

Outro recurso que utilizamos é o menu “Anim” (fig. 3.4), cujo principal objetivo foi auxiliar-nos no momento da institucionalização das três primeiras atividades de nossa seqüência. Este recurso permite animar os parâmetros da representação algébrica da função, por exemplo, dada a função $f(x) = ax^2$, podemos fixar alguns valores para o parâmetro **a**, e mostrar o que acontece quando temos valores positivos ou negativos, $0 < a < 1$, $a = 0$, $a = 1$ e $a > 1$.

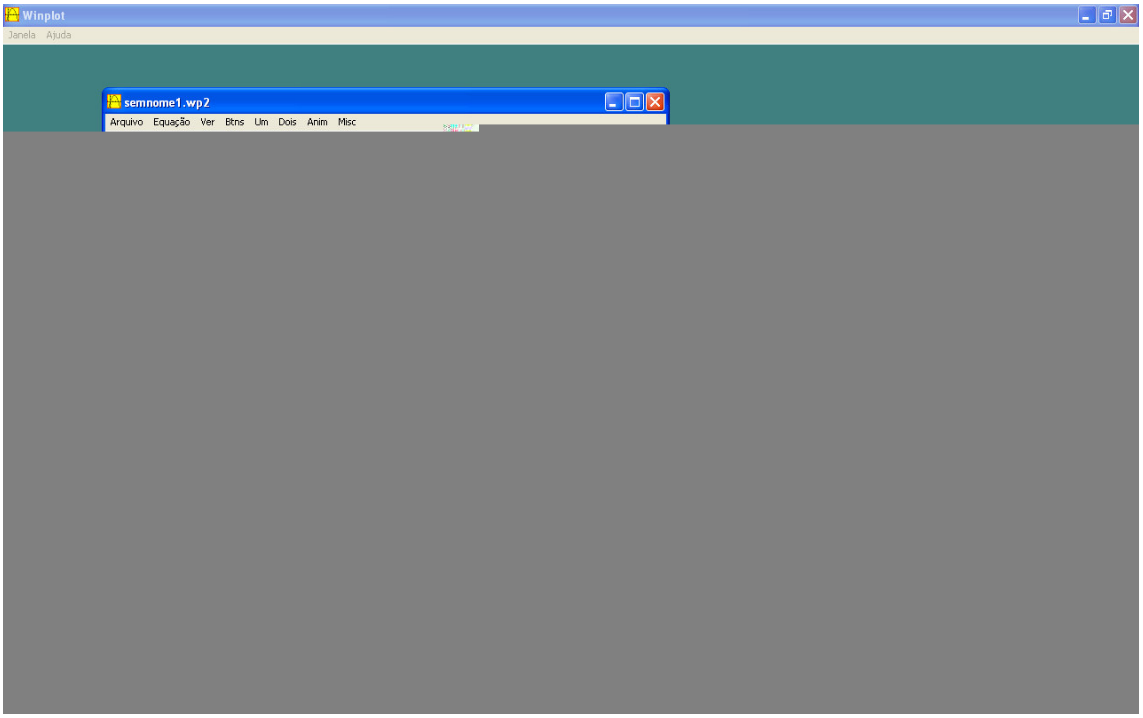


Figura 3.4 – Opção Anim

Do menu “Arquivo” destacamos as opções: abrir arquivo, salvar, formatar impressão, imprimir e copiar o gráfico para ser utilizado em outro programa do *Windows*. Estes comandos foram utilizados pelos alunos para guardar as atividades realizadas e pela pesquisadora para compor a anáslise a posteriori.

É importante ressaltar que este *software* permite visualizar vários gráficos num mesmo plano cartesiano, e ainda o recurso de animação possibilita a generalização das famílias de curvas estudadas em nosso trabalho, o que é imprescindível para determinar as propriedades envolvidas em nossa proposta.

Ainda, destacamos que é necessário habituar os alunos a uma nova escrita, pois, as funções quadráticas digitadas no programa tem uma outra forma, ou seja, passamos, por exemplo, a escrever $y = ax \wedge 2$, no lugar de $y = ax^2$.

CAPÍTULO IV

4. A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Este capítulo está dividido em dois momentos: Análise a priori e análise a posteriori da seqüência didática.

A análise a priori consiste em examinar a seqüência didática proposta a luz da Teoria das Situações e da Teoria dos Registros de Representações caracterizando as atividades dos alunos e a atividade do professor nos diferentes níveis de estruturação do meio. Conjuntamente com a descrição da experimentação realizamos a análise a posteriori objetivando a validação de nossa pesquisa.

Elaboramos uma seqüência didática composta por 6 atividades, sendo que as

4.1.1 ANÁLISE DO MILIEU DA PARTE 1:

O objetivo das quatro primeiras atividades da seqüência didática é proporcionar ao aluno condições de construir a forma canônica da função polinomial do 2º grau, e perceber que modificações na escrita algébrica da função acarretam mudanças na representação gráfica e vice-versa.

As três primeiras atividades são divididas em duas partes, a primeira parte é destinada à construção de gráficos de funções do 2º grau, utilizando o *Winplot* e, a segunda parte reservada à análise dos gráficos obtidos. Partimos sempre da função descrita por $f(x) = x^2$, por ser a representação mais "simples" da função de 2º grau, para que o aluno a perceba quais modificações ocorrem em seu gráfico quando alteramos o valor de **a** quando consideramos somente representações na forma $f(x) = ax^2$; o valor de **n** quando $f(x) = x^2 + n$ e o valor de **m** quando $f(x) = (x+m)^2$.

É importante salientar que as quatro primeiras atividades visam também à construção do meio material das duas últimas atividades.

<u>Atividade 1</u>

1. Num mesmo par de eixos cartesianos desenhe, utilizando o *Winplot*, o gráfico de:

   a. $f_1(x) = x^2$

   b. $f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$

   c. $f_3(x) = 3 \cdot x^2$

   d. $f_4(x) = 10 \cdot x^2$

   e. $f_5(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2$

   f. $f_6(x) = -x^2$

   g. $f_7(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2$

   h. $f_8(x) = -3 \cdot x^2$

   i. $f_9(x) = -10 \cdot x^2$

   j. $f_{10}(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2$

2. Analisando os gráficos:

   a) O que é possível concluir a respeito do coeficiente de x^2 ser um número maior que zero.

b) O que é possível concluir a respeito do coeficiente de x^2 ser um número menor que zero.

c) Os gráficos possuem algum ponto em comum? Por quê?

d) O que garante em termos do gráfico de cada função, o fato do coeficiente de x^2 ser um número positivo? E de ser um número negativo?

e) Comparando os gráficos do item **a** e **f** o que se pode concluir?

O quadro 4.1 esquematiza as posições do professor e do aluno relativas ao meio, situação e dialéticas.

DIALÉTICAS	**MEIO[8] (M)**	**ALUNO (E)**	**PROFESSOR (P)**	**SITUAÇÃO (S)**	
Institucionalização	M0: aprendizagem	E0: aluno Aprendizagem	P0: professor Institucionalização	S0: didática Sistematização da propriedade do parâmetro **a**.	
Validação	M-1: referência	E-1: aprendiz Identificação de novos saberes	P-1: observador Observa as tentativas, os sucessos, conjecturas e estratégias dos alunos.	S-1: aprendizagem Como utilizar o parâmetro **a**.	adidática
Formulação	M-2: objetivo	E-2: ativo Parte 2 da atividade Hipóteses		S-2: referência Conjecturas sobre o coeficiente de x^2	
Ação	M-3: material Software, parte 1 da atividade.	E-3: objetivo Utilização do *software* e representação gráfica da função quadrática.	Adequação do meio e utilização desse meio pelos alunos	S-3: objetiva Interação com representação gráfica de $f(x) = ax^2$	

Quadro 4.1 – Análise ascendente do *milieu* da atividade 1

Para a determinação da situação objetiva (S-3) temos o meio material do aluno (M-3), no qual está disponível o *software Winplot* e as representações gráficas da função quadrática. Nesse momento o professor espera que o aluno utilize esses conhecimentos como ferramentas para começar a desenvolver a atividade. Os conhecimentos sobre a utilização do *software* gráfico *Winplot* que o aluno (E-3) possui permitem a interação com o meio material, pois aqui o aluno tem o registro algébrico da função na forma $f(x) = ax^2$ e ao digitá-lo no programa ele utiliza o registro $f(x) = ax\hat{}2$. A situação objetiva permite que o aluno construa com o auxílio do *software* os gráficos das funções desejadas.

[8] Tradução de "*milieu*".

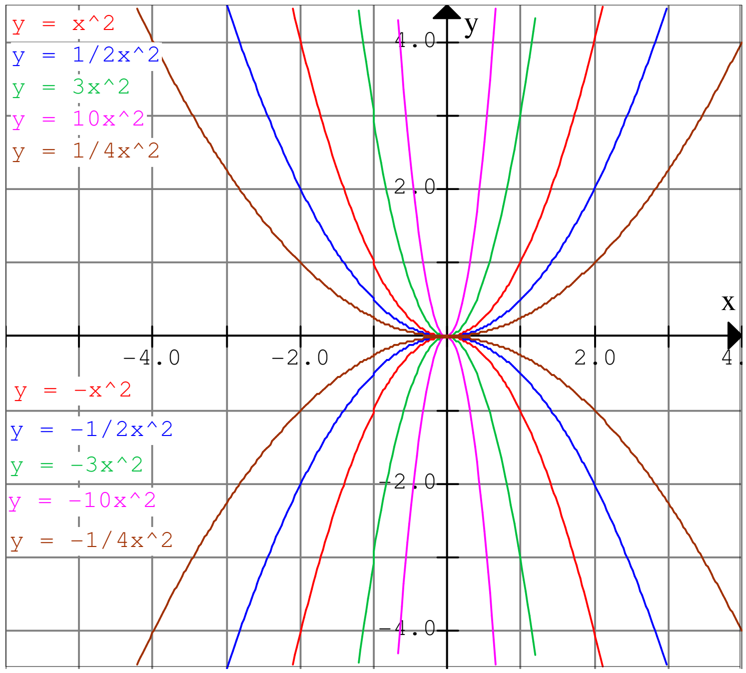


FIGURA 4.1 – Representação das funções da atividade 1

Na situação de referência (S-2), os objetos da situação objetiva (S-3) com os quais o aluno (E-3) estabelece uma relação tornam-se o meio objetivo (M-2) para a interação do aluno ativo (E-2) – tratam-se das representações gráficas de algumas funções quadráticas.

Na situação de referência (S-2) o aluno (E-2) fará conjecturas a respeito do coeficiente de x^2, pois passamos para a fase de formulação, na qual o aluno por meio das respostas das questões propostas começa a exploração sistemática dos gráficos. O professor espera que os conhecimentos como plano cartesiano, coordenadas de um ponto no plano, simetria, reflexão e noção de coeficiente sejam utilizados como ferramentas na resolução da atividade.

E, então esperamos que o aluno observe os gráficos obtidos e verifique, em primeiro lugar, que todos eles são curvas, que se denominam parábolas. Verifique também que, conforme o coeficiente (**a**) positivo de x^2 aumenta (a>1), o gráfico vai se "fechando" cada vez mais, de acordo com o aumento do coeficiente positivo de x^2. Isso pode ser verificado fazendo, por exemplo, x=1. Em $f_1(x) = x^2$, obtemos o valor da ordenada y=1, enquanto que em $f_3(x) = 3 \cdot x^2$, obtemos y=3, isto é, o triplo, e em $f_4(x) = 10 \cdot x^2$, obtemos y=10, ou seja, dez vezes mais. Para qualquer outro valor não nulo de x, comparando esses gráficos, verificamos o mesmo tipo de comportamento para as ordenadas y = f(x) correspondentes.

Pode-se verificar também, conforme o coeficiente positivo de x^2 diminui (0<a<1), o gráfico vai se “abrindo” cada vez mais, de acordo com a diminuição do coeficiente positivo de x^2. Isso pode ser verificado fazendo, por exemplo, x=1. Em $f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$, obtemos o valor da ordenada y=$\frac{1}{2}$, isto é, a metade, e em $f_5(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2$, obtemos y=$\frac{1}{4}$, ou seja, quatro vezes menos. Para qualquer outro valor não nulo de x, comparando esses gráficos, verificamos o mesmo tipo de comportamento para as ordenadas y = f(x) correspondentes.

Observando os gráficos construídos, podemos concluir que, conforme o coeficiente de x^2, que é negativo, vai ficando maior em valor absoluto, mais “fechado” o gráfico se torna. Isso pode ser verificado fazendo, por exemplo, x=1. Em $f_6(x) = -x^2$, obtemos o valor da ordenada y=-1, enquanto que em $f_8(x) = -3 \cdot x^2$, obtemos y=-3. Comportamento análogo pode ser verificado quando atribuímos qualquer outro valor não nulo à variável x.

Observamos também que todos os gráficos têm um ponto em comum: a origem. Ou seja, para todos eles, quando a variável independente x assume o valor 0, a variável dependente y também é 0.

Para a obtenção da situação de aprendizagem (S-1), temos o meio de referência (M-1) formado pelas representações gráficas das funções definidas por $f(x) = ax^2$ e pelas conjecturas levantadas pelos alunos ao responderem as questões propostas. O aluno aprendiz (E-1) tentará identificar como utilizar o parâmetro **a**. Estamos na fase de validação, na qual o professor observador (P-1) espera que o aluno empregue seus conhecimentos para justificar e provar os resultados a fim de corrigir ou fazer evoluir sua produção, e isto se dará por meio da socialização dos saberes envolvidos.

Nessa socialização verificaremos as estratégias utilizadas pelos alunos ao tentarem responder as questões, ou seja, se atribuíram outros valores para o coeficiente de x^2 para tentar validar suas respostas, em caso afirmativo, quais registros numéricos (decimais, fracionários, irracionais), e também se atribuíram o valor zero e quais conclusões chegaram.

Na situação didática (S0) que é a fase da institucionalização o aluno (E0) apropria-se do saber aprendido na situação de aprendizagem (S-1) como objeto de estudo. E, então o professor sistematiza as propriedades envolvidas nesta atividade, ou seja, concavidade da parábola, reflexão e simetria.

A segunda atividade tem o propósito verificar a translação vertical que ocorre com o gráfico da função $f(x) = x^2$ quando somamos ou subtraímos uma constante. É esperado que o aluno substitua outros valores a essa constante, e também que ele consiga compreender que esse resultado – translação vertical – também se aplica ao gráfico da função $f(x) = -x^2$. E, ainda que ele compreenda o significado de vértice da parábola, mostrando as coordenadas deste ponto.

<u>Atividade 2</u>

1. Num mesmo par de eixos cartesiano desenhe, utilizando o *Winplot*, o gráfico de:

    a) $f_1(x) = x^2$

    b) $f_2(x) = x^2 + 1$

    c) $f_3(x) = x^2 + 2$

    d) $f_4(x) = x^2 - 1$

    e) $f_5(x) = x^2 - 2$

2. O que acontece com o gráfico da função inicial $f_1(x) = x^2$ quando se soma ou subtrai uma constante, para obter uma nova função.

3. Quais são as coordenadas do vértice da parábola em cada um dos casos?

O quadro 4.2 esquematiza as posições do professor e do aluno relativas ao meio, situação e dialéticas.

<table>
<tr><th>DIALÉTICAS</th><th>MEIO (M)</th><th>ALUNO (E)</th><th>PROFESSOR (P)</th><th>SITUAÇÃO (S)</th><th></th></tr>
<tr><td>Institucionalização</td><td>M0: aprendizagem</td><td>E0: aluno
Aprendizagem</td><td>P0: professor
Institucionalização</td><td>S0: didática
Sistematização da propriedade do parâmetro n.</td><td></td></tr>
<tr><td>Validação</td><td>M-1: referência</td><td>E-1: aprendiz
Identificação de novos saberes</td><td rowspan="2">P-1: observador
Observa as tentativas, os sucessos, conjecturas e estratégias dos alunos.</td><td>S-1: aprendizagem
Como utilizar o parâmetro n.</td><td rowspan="3">adidática</td></tr>
<tr><td>Formulação</td><td>M-2: objetivo</td><td>E-2: ativo
Parte 2 da atividade
Hipóteses</td><td>S-2: referência
Conjecturas sobre o parâmetro n e sobre o vértice da parábola.</td></tr>
<tr><td>Ação</td><td>M-3: material
Software e parte 1 da atividade</td><td>E-3: objetivo
Plano cartesiano; coordenadas de um ponto no plano; simetria; reflexão; translação; representação da função no plano; noção de coeficiente e utilização do software.</td><td>Adequação do meio e utilização desse meio pelos alunos</td><td>S-3: objetiva
Interação com representação gráfica de
$f(x) = x^2 + n$</td></tr>
</table>

Quadro 4.2 – Análise ascendente do *milieu* da atividade 2

Para a determinação da situação objetiva (S-3) temos o meio material do aluno (M-3) no qual o aluno possui como conhecimentos prévios a representação de funções quadráticas no plano, a noção de coeficiente e utilização do *software Winplot.* Neste momento o professor espera que o aluno utilize esses conhecimentos como ferramentas para começar a desenvolver a atividade. Esses conhecimentos do aluno (E-3) permitem a interação com o meio material (M-3), a fim de construir e analisar os gráficos pedidos.

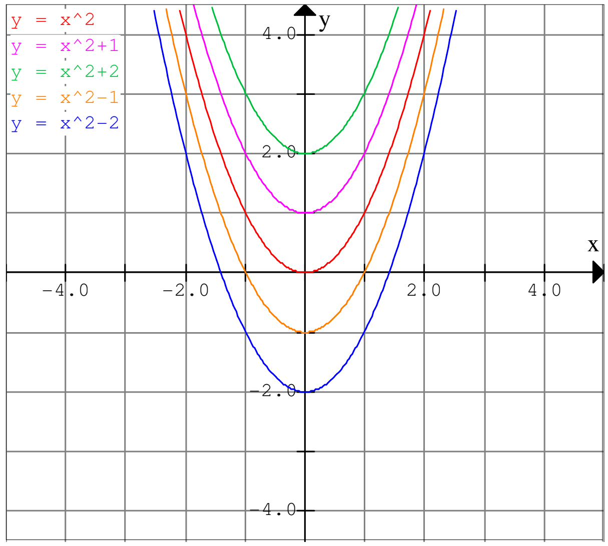


Figura 4.2 – Representações das funções da atividade 2

Na situação de referência (S-2), os objetos da situação objetiva (S-3) com os quais o aluno (E-3) estabelece uma relação tornam-se o meio objetivo (M-2) para a interação do aluno ativo (E-2) – tratam-se das representações gráficas de algumas funções quadráticas na forma $f(x) = x^2 + n$.

Na situação de referência (S-2) o aluno (E-2) fará conjecturas a respeito da constante somada ou subtraída da função inicial $f(x) = x^2$ e sobre o vértice da parábola, é o momento de formulação visando à exploração sistemática dos gráficos a fim de responder as questões propostas. O professor espera que os conhecimentos sobre plano cartesiano, coordenadas de um ponto no plano, simetria e translação sejam utilizados como ferramentas na resolução da atividade.

Observando os gráficos obtidos, verificamos que a adição ou a subtração de uma constante faz a translação vertical do gráfico de $f_1(x) = x^2$, o gráfico de, por exemplo, $f_4(x) = x^2 - 1$, pode ser encarado como sendo o resultado de subtrair 1 a todos os valores das ordenadas dos pontos do gráfico inicial, ou seja, a primeira curva sofreu uma translação de uma unidade na vertical para baixo. Analogamente, as curvas obtidas em (**b**), (**c**) e (**e**) são o resultado de translações verticais de 1 unidade para cima, 2 unidades para cima e 2 unidades para baixo, respectivamente.

As coordenadas do vértice de cada um dos gráficos são: (0,0); (0,1); (0,2); (0,-1) e (0,-2), respectivamente. Pode-se perceber que a coordenada x permanece a mesma e a coordenada y varia, pois estamos transladando o gráfico de $f_1(x) = x^2$ sobre o eixo das ordenadas.

Para a obtenção da situação de aprendizagem (S-1), temos o meio de referência (M-1) formado pelas representações gráficas do tipo $f(x) = x^2 + n$ e pelas conjecturas levantadas pelos alunos ao responderem as questões propostas. O aluno (E-1) tentará identificar como utilizar o parâmetro **n**. Estamos na fase de validação, na qual o professor observador (P-1) espera que o aluno empenhe seus conhecimentos para justificar e provar os seus resultados por meio da socialização dos saberes envolvidos.

Nessa socialização verificaremos as estratégias utilizadas pelos alunos, ou seja, se atribuíram outros valores para o parâmetro **n** para tentar validar suas respostas e, também se eles utilizaram a função do tipo $f(x) = -x^2 + n$.

Na situação didática (S0) que se refere a fase da institucionalização, o aluno (E0) apropria-se do saber aprendido na situação de aprendizagem (S-1) como objeto de estudo. E, então o professor sistematiza as propriedades envolvidas nesta atividade, ou seja, translação vertical do vértice da parábola.

A terceira atividade também tem uma parte destinada à construção de gráficos utilizando o *Winplot* e outra dedicada à análise desses gráficos.

O propósito dessa atividade é perceber a translação horizontal do gráfico da função $f(x) = x^2$ quando adicionamos uma constante **m** à variável independente x. Acreditamos que o aluno perceberá que o mesmo ocorre para o gráfico da função $f(x) = -x^2$.

Atividade 3

1. Num mesmo par de eixos cartesiano desenhe, utilizando o *Winplot*, o gráfico de:

a) $f_1(x) = x^2$

b) $f_2(x) = (x+1)^2$

c) $f_3(x) = (x-1)^2$

d) $f_4(x) = (x+\frac{1}{2})^2$

e) $f_5(x) = (x-\frac{1}{2})^2$

2. Compare os gráficos a partir da função inicial $f_1(x) = x^2$, o que acontece com o gráfico, conforme somamos ou subtraímos uma constante positiva da variável independente x?

3. Quais são as coordenadas do vértice da parábola em cada um dos casos?

O quadro 4.3 esquematiza as posições do professor e do aluno relativas ao meio, situação e dialéticas.

DIALÉTICAS	**MEIO (M)**	**ALUNO (E)**	**PROFESSOR (P)**	**SITUAÇÃO (S)**
Institucionalização	M0: aprendizagem	E0: aluno Aprendizagem	P0: professor Institucionalização	S0: didática Sistematização da propriedade do parâmetro **m**.
Validação	M-1: referência	E-1: aprendiz Identificação de novos saberes	P-1: observador Observa as tentativas, os sucessos, conjecturas e estratégias dos	S-1: aprendizagem Como utilizar o parâmetro **m**.
Formulação	M-2: objetivo	E-2: ativo Parte 2 da atividade, Hipóteses		

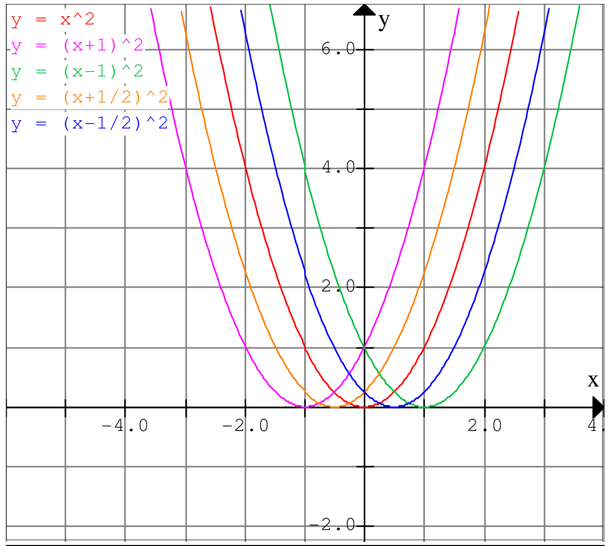


Figura 4.3 – Representações das funções da atividade 3

Na situação de referência (S-2), os objetos da situação objetiva (S-3) com os quais o aluno (E-3) estabelece uma relação tornam-se o meio objetivo (M-2) para a interação do aluno ativo (E-2) – tratam-se das representações gráficas de algumas funções quadráticas na forma $f(x)=(x+m)^2$.

Na situação de referência (S-2) o aluno (E-2) fará conjecturas a respeito da constante somada ou subtraída da variável independente **x**, e sobre o vértice das parábolas, passamos para a fase de formulação, pois, o aluno por meio das respostas às questões propostas começa a exploração sistemática dos gráficos. O professor espera que os conhecimentos sobre translação e noção de vértice possam ser utilizados como ferramenta na resolução da atividade.

Analisando os gráficos obtidos, podemos observar que a adição de uma constante positiva à variável x, faz a translação horizontal do gráfico de $f_1(x)=x^2$ para a esquerda e que a subtração de uma constante positiva, faz a translação horizontal para a direita. De fato, ao comparar o gráfico de, por exemplo, $f_4(x)=(x+\frac{1}{2})^2$, com o gráfico de $f_1(x)=x^2$, verificamos que o valor que a $f_1(x)$ assume para x=0 é o mesmo valor para x=$-\frac{1}{2}$ na $f_4(x)$, ou seja, nas duas funções o valor correspondente para a variável y é 0. Assim, o gráfico da função dada em (**c**) pode ser considerado como uma translação horizontal de ½ unidade para a esquerda do gráfico de $f_1(x)=x^2$.

Analogamente, as curvas obtidas em (b), (c) e (e), são os resultados de translações horizontais de 1 unidade para a esquerda, 1 unidade para a direita, ½ unidade para a direita, respectivamente, do gráfico de $f_1(x) = x^2$.

As coordenadas do vértice de cada um dos gráficos são: (0,0); (-1,0); (1,0); (-½,0) e (½,0), respectivamente. Pode-se perceber que a coordenada y permanece a mesma e a coordenada x varia, pois estamos transladando o gráfico de $f_1(x) = x^2$ sobre o eixo das abscissas.

Para a obtenção da situação de aprendizagem (S-1), temos o meio de referência (M-1) formado pelas representações gráficas do tipo $f(x) = (x+m)^2$ e pelas conjecturas levantadas pelos alunos ao responderem as questões propostas. O aluno aprendiz (E-1) tentará identificar como utilizar o parâmetro **m**. Estamos na fase de validação, na qual o professor observador (P-1) espera que o aluno empenhe seus conhecimentos para justificar e provar os seus resultados por meio da socialização dos saberes envolvidos.

Nesta socialização verificaremos as estratégias utilizadas pelos alunos, ou seja, se atribuíram outros valores para o parâmetro **m** para tentar validar suas respostas e, também se eles utilizaram a função do tipo $f(x) = -(x+m)^2$.

A situação didática (S0) consistem em institucionalizar o saber, o aluno (E0) apropria-se do saber aprendido na situação de aprendizagem (S-1) como objeto de estudo. E, então o professor sistematiza as propriedades envolvidas nesta atividade, ou seja, translação horizontal do vértice da parábola.

A quarta atividade visa reaplicar conjuntamente os conhecimentos aprendidos nas atividades anteriores, ou seja, observar o comportamento do gráfico da função quadrática na forma $f(x) = a(x+m)^2 + n$, fazer o tratamento da escrita algébrica da função polinomial de 2º grau $(f(x) = ax^2 + bx + c)$, relacionando seus coeficientes com os parâmetros **m** e **n** da forma canônica a fim de que os alunos percebam que estes representam as coordenadas do vértice da parábola.

É esperado que o aluno consiga transitar entre as essas duas formas de representar a função do 2º grau através da aplicação do trinômio do quadrado perfeito e do completamento de quadrados.

<u>Atividade 4</u>

1. Sem utilizar o *Winplot* descreva a partir da função inicial $f_1(x) = x^2$, como ficará o gráfico das funções abaixo? E responda quais são as coordenadas do vértice da parábola em cada caso?

   a) $f_2(x) = 2(x+3)^2 - 4$

   b) $f_3(x) = -3\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}$

2. Desenhe o gráfico de $f(x) = (x+3)^2 - 5$ (utilize o *Winplot*)
3. Você consegue prever o gráfico de $g(x) = x^2 + 6x + 4$? Explique.
4. Escreva uma função do segundo grau genérica em função dos parâmetros **a**, **m** e **n**, de modo que seja fácil a visualização de seu gráfico.
5. O que cada um dos parâmetros (**a**, **m** e **n**) faz com o gráfico da função inicial?
6. Relacione os parâmetros da função que vocês encontraram no item 4 com os parâmetros da função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Quais conclusões vocês chegaram?

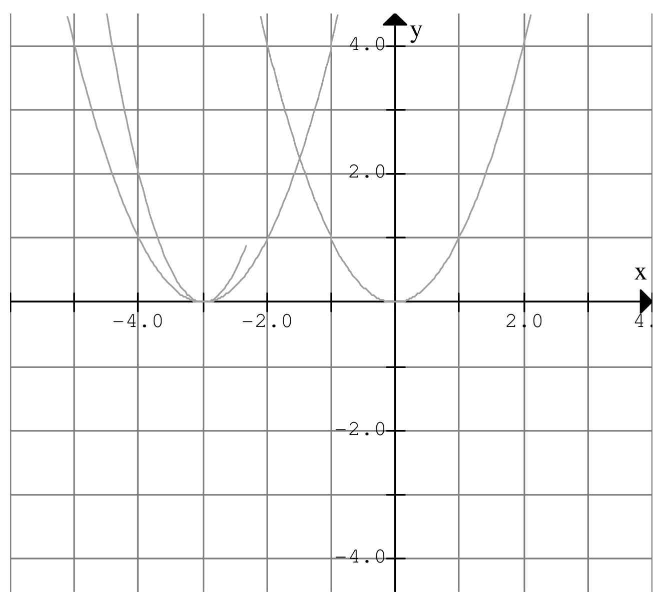
O quadro 4.4 esquematiza as posições do professor e do aluno relativas ao meio, situação e dialéticas.

<table>
<tr><th>DIALÉTICAS</th><th>MEIO (M)</th><th>ALUNO (E)</th><th>PROFESSOR (P)</th><th>SITUAÇÃO (S)</th><th></th></tr>
<tr><td>Institucionalização</td><td>M0: aprendizagem</td><td>E0: aluno Aprendizagem</td><td>P0: professor Institucionalização</td><td>S0: didática Tratamento da forma algébrica da função quadrática</td><td></td></tr>
<tr><td>Validação</td><td>M-1: referência</td><td>E-1: aprendiz Identificação de novos saberes</td><td rowspan="2">P-1: observador Observa as tentativas, os sucessos, conjecturas e estratégias dos alunos.</td><td>S-1: aprendizagem Forma canônica da função quadrática.</td><td rowspan="3">adidática</td></tr>
<tr><td>Formulação</td><td>M-2: objetivo</td><td>E-2: ativo Forma desenvolvida Hipóteses</td><td>S-2: referência Conjecturas sobre o uma “nova” forma de representação da função quadrática.</td></tr>
<tr><td>Ação</td><td>M-3: material Atividades 1, 2 e 3.</td><td>E-3: objetivo Conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores.</td><td>Adequação do meio e utilização desse meio pelos alunos</td><td>S-3: objetiva Interação com as propriedades dos parâmetros a, m e n</td></tr>
</table>

Quadro 4.4 – Análise ascendente do *milieu* da atividade 4

Para a determinação da situação objetiva (S-3) temos meio material do aluno (M-3), no qual estão disponíveis os conhecimentos adquiridos com as atividades anteriores, ou seja, propriedades dos parâmetros **a**, **m** e **n**. Nesse momento da ação o professor espera que os alunos utilizem estes conhecimentos que deixam de ser objetos de estudo e passam a ser ferramentas para resolver a atividade. Os conhecimentos do aluno (E-3) que permitem a interação com o meio material (M-3) são: concavidade da parábola, translação horizontal e vertical do vértice.

Espera-se que o aluno perceba que para se obter o gráfico de $f_2(x) = 2(x+3)^2 - 4$ a partir de $f_1(x) = x^2$, temos os seguintes passos: primeiro uma translação horizontal de 3 unidades para esquerda; em seguida uma abertura mais "estreita" que o gráfico anterior e finalmente uma translação vertical de 4 unidades para baixo. As coordenadas do vértice são (-3, -4), pois ao transladarmos horizontalmente o gráfico da função inicial (f_1) mudamos as coordenadas para (-3,0) e depois com a translação vertical chegamos as coordenadas do vértice do gráfico de f_2, ou seja (-3,-4).



relação ao eixo das abscissas (concavidade para baixo) e finalmente uma translação vertical de $\frac{1}{3}$ de unidade para cima. As coordenadas do vértice são $\left(\frac{5}{4},\frac{1}{3}\right)$, pois ao transladarmos horizontalmente o gráfico da função inicial (f_1) mudamos as coordenadas para $\left(\frac{5}{4},0\right)$ e depois com a translação vertical chegamos às coordenadas do vértice do gráfico de f_2, ou seja, $\left(\frac{5}{4},\frac{1}{3}\right)$.

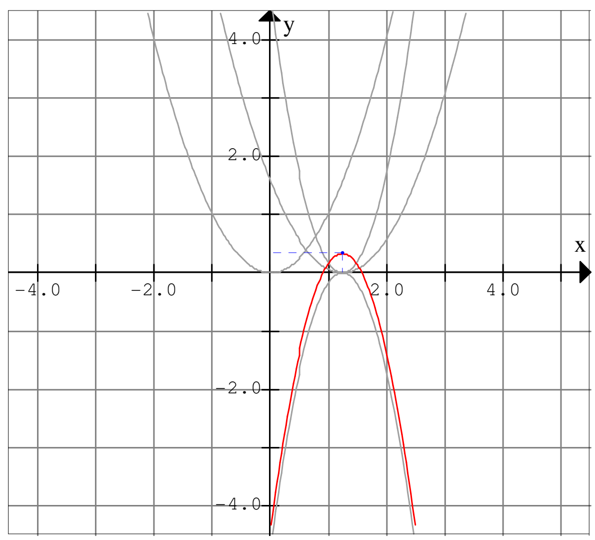


Figura 4.5 – Representação da função da questão 1b

O gráfico da função $f(x) = (x+3)^2 - 5$ é a translação da curva de $f_1(x) = x^2$, 3 unidades para esquerda e 5 unidades para baixo.

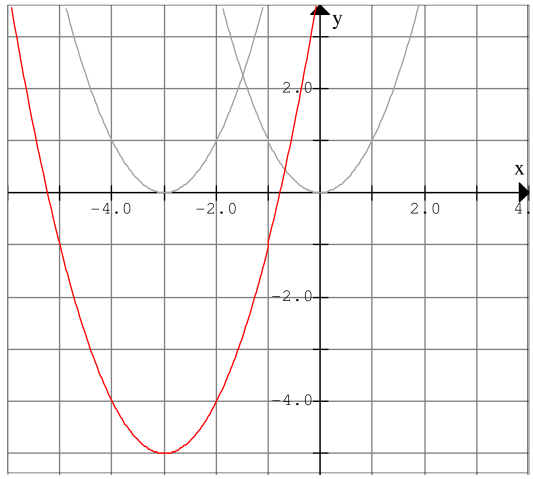


Figura 4.6 – Representação da função da questão 2

Na situação de referência (S-2) o aluno (E-2) fará conjecturas a respeito da previsão do gráfico de $g(x) = x^2 + 6x + 4$, com o auxílio do *software* o aluno pode perceber que este é exatamente o gráfico de $f(x) = (x+3)^2 - 5$. Temos a fase de formulação, pois o professor espera que conhecimentos como desenvolvimento do trinômio do quadrado perfeito ou completamento de quadrados sejam utilizados como ferramentas para perceber que são duas representações algébricas para uma mesma função. O aluno poderá proceder de duas maneiras:

$$x^2 + 6x + 4 = x^2 + 6x + 9 - 9 + 4 = (x+3)^2 - 5$$

ou

$$(x+3)^2 - 5 = x^2 + 6x + 9 - 5 = x^2 + 6x + 4$$

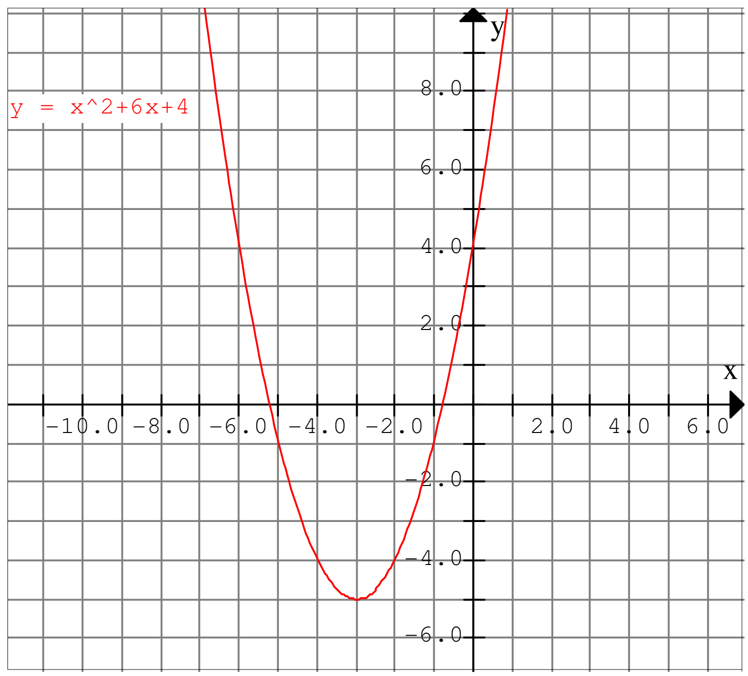


Figura 4.7 – Representação da função da questão 3

Para a obtenção da situação de aprendizagem (S-1), temos o meio de referência (M-1) formado pelas representações algébricas da função quadrática e pelas hipóteses levantadas pelos alunos ao responderem as questões 3, 4, 5 e 6. O aluno aprendiz (E-1) tentará relacionar os parâmetros da função na forma $f(x) = a(x-m)^2 + n$, $a \neq 0$ com os coeficientes da forma $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Estamos na fase de validação na qual o professor observador (P-1) espera que os alunos empenhem seus conhecimentos para justificar e provar os seus resultados por meio da socialização dos saberes envolvidos.

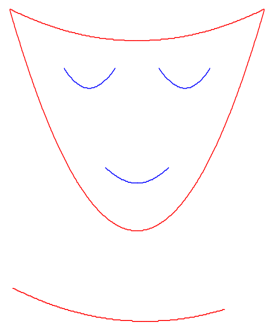
Nessa socialização verificaremos o procedimento que os alunos utilizaram para comparar as duas expressões algébricas. Esperamos que os alunos verificassem a igualdade $ax^2 + bx + c = a(x-m)^2 + n$, obtendo **m** e **n** em função de **a**, **b** e **c**.

Desenvolvendo o segundo membro:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 - 2xm + m^2) + n = ax^2 - 2axm + am^2 + n$$
$$a = a$$
$$b = -2am$$
$$c = am^2 + n$$

Atividade 5

Com o auxílio do *Winplot* desenhe as figuras abaixo, e descreva como vocês realizaram esta tarefa.



O quadro 4.5 esquematiza as posições do professor e do aluno relativas ao meio, situação e dialéticas.

DIALÉTICAS	MEIO (M)	ALUNO (E)	PROFESSOR (P)	SITUAÇÃO (S)	
Institucionalização	M0: aprendizagem	E0: aluno Aprendizagem	P0: professor Institucionalização	S0: didática Sistematização das propriedades.	
Validação	M-1: referência	E-1: aprendiz Identificação de novos saberes	P-1: observador Observa as tentativas, os sucessos, conjecturas e estratégias dos alunos.	S-1: aprendizagem Como utilizar partes do gráfico.	Adidática
Formulação	M-2: objetivo	E-2: ativo Hipóteses		S-2: referência Conjecturas sobre como construir as “máscaras”.	
Ação	M-3: material	E-3: objetivo Conhecimentos adquiridos com as atividades anteriores. Utilização do *software*.	Adequação do meio e utilização desse meio pelos alunos	S-3: objetiva Interação com a forma canônica.	

Quadro 4.5 – Análise ascendente do *milieu* da atividade 5

Para a determinação da situação objetiva (S-3) temos o meio material (M-3) no qual o aluno possui os conhecimentos adquiridos com as atividades anteriores, ou seja, a interação com a forma canônica da função quadrática. Nesse momento o professor espera que o aluno utilize a forma canônica como ferramenta para desenvolver a atividade. Os conhecimentos que permitem ao aluno (E-3) interagir com o meio material, são: translações verticais e/ou horizontais; mudanças na concavidade da parábola; reflexão em relação ao eixo das abscissas e conhecimentos sobre o *software* gráfico W*inplot*.

Na situação objetiva (S-3) o aluno (E-3) constrói com o auxílio do *software* os desenhos pedidos, podendo começar a partir de $f(x) = x^2$ e ajustar convenientemente o coeficiente de x^2 com a finalidade de obter uma curva para fazer o contorno do rosto. O aluno poderá utilizar as linhas de grade para auxiliá-lo nas escolhas, também, poderão ajustar ou não a translação vertical e/ou horizontal.

Pode-se, por exemplo, começar o contorno da máscara[9], como a figura a seguir:

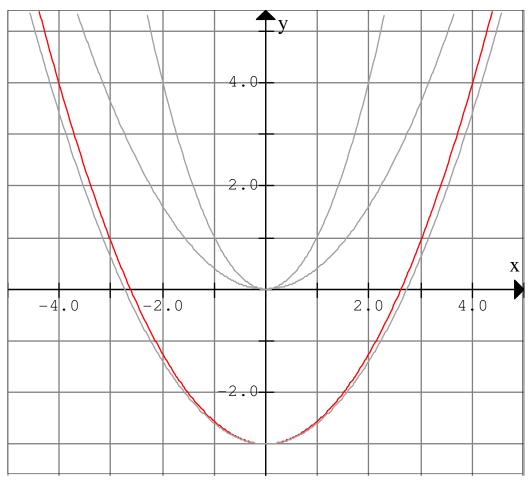
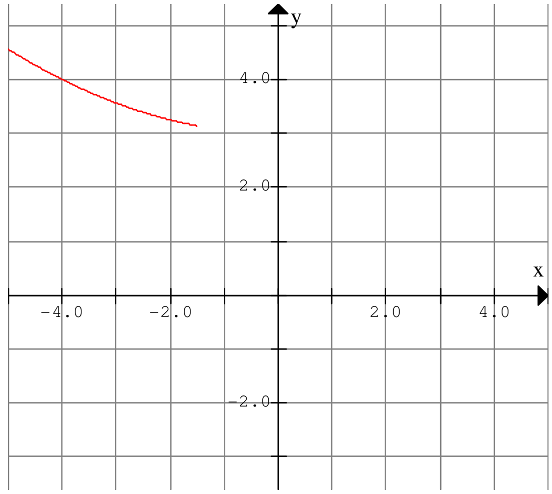


Figura 4.8 – Representação da função do contorno do rosto

A partir do contorno do rosto, os alunos poderão partir para o contorno da “cabeça”. E chegar a construção seguinte:

[9] As linhas em cor cinza representam as modificações na curva e a linha em cor vermelha representa a função final.


y
4.0
2.0
x
-4.0
-2.0
2.0
4.0
-2.0

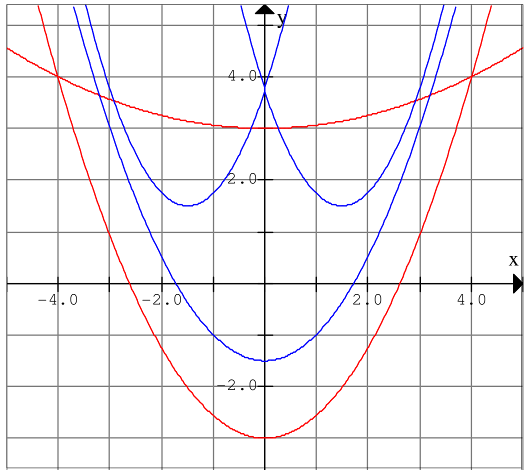


Figura 4.11 – Representação da função da boca

Para a obtenção da situação de aprendizagem (S-1), temos o meio de referência (M-1) formado pelas representações das funções polinomiais do segundo grau em sua forma canônica e suas respectivas representações gráficas. O aluno aprendiz (E-1) deve buscar um modo de construir as máscaras utilizando apenas partes do gráfico, ou seja, deve perceber que é necessário estabelecer um domínio para suas funções. Na fase de validação o aluno aprendiz (E-1) busca a melhor maneira de construir as máscaras e o professor (P-1) observa as tentativas, os sucessos, conjecturas e estratégias dos alunos.

Verificaremos, então, se eles utilizarão para o rosto, cabeça e boca o eixo **y** como eixo de simetria das parábolas envolvidas. O produto final pode ser, por exemplo:

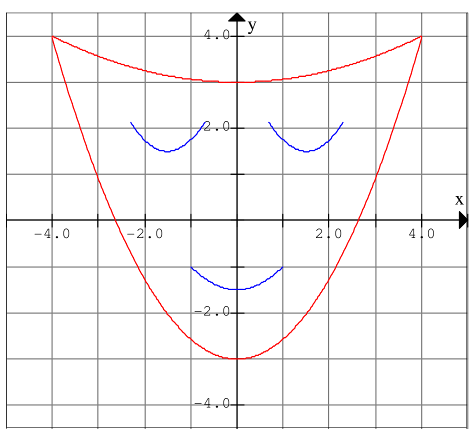


Figura 4.12 – “Máscara feliz”

Para a outra máscara esperamos que os alunos percebam que a “boca triste” é uma reflexão da “boca alegre”.

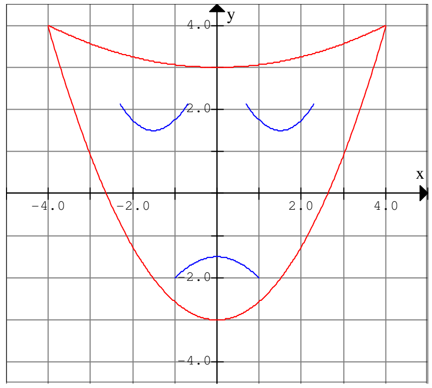


Figura 4.13 – “Máscara triste”

Essa atividade, também, permite avaliar a utilização das variáveis visuais relativas à função quadrática juntamente com sua unidade simbólica correspondente, isto é, mostrar que o aluno está aplicando o procedimento de interpretação global das propriedades figurais.

Na situação didática (S0), fase de institucionalização o aluno (E0) pode apropria-se do saber aprendido na situação de aprendizagem (S-1). E, então o professor sistematiza as propriedades envolvidas nesta construção, como simetria, reflexão, domínio e imagem, e introduz a noção de intervalo.

4.1.3. ANÁLISE DO MILIEU DA PARTE 3:

Os objetivos desta última atividade são: reutilizar os saberes/conhecimentos envolvidos nas atividades anteriores: reflexão, abertura da parábola, translações, simetria e intervalos, verificar a aprendizagem e introduzir curvas simétricas em relação a um eixo.

<u>Atividade 6</u>

A dona da loja “DINA-Shirts” gostaria de inovar sua produção de camisetas. Seus estilistas ficaram sabendo que existe um programa de computador que poderia auxiliá-los em sua empreitada. Mas, para isso, precisam de ajuda.

Assim, o problema é o seguinte: Quais são as funções polinomiais do segundo grau e quais são os domínios de definição para obter a tão sonhada camiseta?

Descreva o procedimento que vocês utilizaram para construir a camiseta.

O quadro 4.6 esquematiza as posições do professor e do aluno relativas ao meio, situação e dialéticas.

DIALÉTICAS	MEIO (M)	ALUNO (E)	PROFESSOR (P)	SITUAÇÃO (S)	
Institucionalização	M0: aprendizagem	E0: aluno Aprendizagem	P0: professor Institucionalização	S0: didática Simetria em relação a um eixo	
Validação	M-1: referência	E-1: aprendiz Identificação de novos saberes	P-1: observador Observa as tentativas, os sucessos, conjecturas e estratégias dos alunos.	S-1: aprendizagem Como utilizar simetria de curvas.	adidática
Formulação	M-2: objetivo	E-2: ativo Hipóteses		S-2: referência Conjecturas sobre como construir a camiseta.	
Ação	M-3: material	E-3: objetivo Conhecimentos adquiridos com as atividades anteriores Utilização do *software*.	Adequação do meio e utilização desse meio pelos alunos	S-3: objetiva Interação com a forma canônica e com a noção de intervalos.	

Quadro 4.6 – Análise ascendente do *milieu* da atividade 6

Para a determinação da situação objetiva (S-3) temos o meio material (M-3) no qual o aluno possui os conhecimentos adquiridos com atividades anteriores, ou seja, a interação com a forma canônica da função quadrática e a noção de intervalo. O professor espera que o aluno (E-3) utilize translações verticais e/ou horizontais; mudanças na concavidade da parábola; reflexão em relação ao eixo das abscissas; e noção de intervalo como ferramentas para a construção da “camiseta”.

Na situação objetiva (S-3) o aluno (E-3) poderá fazer um esboço da camiseta, utilizando lápis e papel, para ter uma idéia de quantas curvas precisará, e também, para saber por onde começar a desenhar a camiseta.

Supondo que o aluno decida começar a camiseta pela gola, primeiramente ele deverá partir de $f(x) = x^2$ e ajustar convenientemente o coeficiente de x^2 com a finalidade de obter uma curva com aparência estética agradável para a gola. Deverá, também, ajustar a translação vertical e horizontal de seu agrado. E, finalmente, ajustar o intervalo no qual a representação da parábola será construída.

Pode-se, por exemplo, começar fazendo uma translação vertical e uma mudança na inclinação da curva que está representando a gola chegando à função: $f(x)=\frac{1}{9}x^2+3$ cujo domínio poderá ser o intervalo $[-3,3]$.

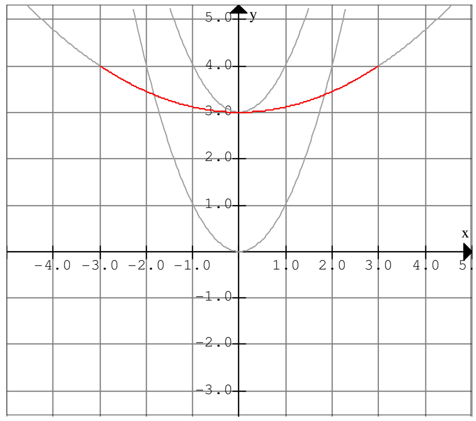


Figura 4.14 – “Gola”

A partir da gola, com os mesmos passos, constroem-se gráficos consecutivos para a definição dos ombros, das mangas e do restante da camiseta. Vale lembrar que as translações verticais e horizontais e os intervalos, agora, dependem da representação da função que determinou a parte anterior, ou seja, a representação para o ombro depende do intervalo dado à gola, a representação para a manga depende do intervalo dado ao ombro, e assim sucessivamente. Por exemplo, a função $f(x)=-\frac{1}{10}(x+3)^2+4$, cujo domínio é o intervalo $[-6,5;-3]$.

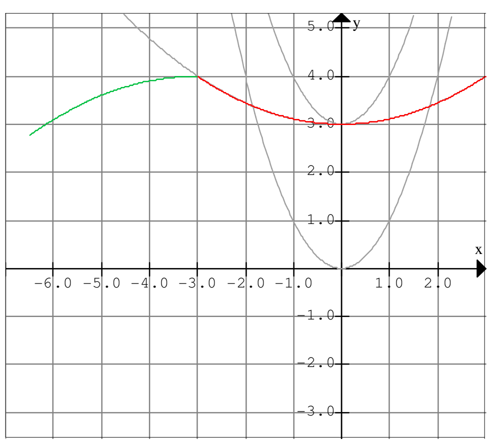


Figura 4.15 – “Ombro”

Na situação de referência (S-2), os objetos da situação objetiva (S-3) com os quais E-3 estabelece uma relação, tornam-se o meio (M-2). Estamos na fase de formulação na qual o aluno fará conjecturas sobre a simetria das “mangas” e “lateral”, podendo ou não utilizar o eixo **y** como eixo de simetria da “camiseta”. O professor espera que eles empreguem os conhecimentos sobre os parâmetros da forma canônica da função quadrática como ferramentas para a resolução do problema.

Na situação de aprendizagem (S-1), o meio de referência (M-1) é formado pelas funções do segundo grau que representam um dos lados da “camiseta”. O aluno (E-1) deve buscar um modo de finalizá-la utilizando as noções de simetria e intervalo da função. Na situação de aprendizagem o aluno aprendiz (E-1) busca a melhor maneira de construir a camiseta. O professor espera que os alunos empreguem seus conhecimentos e socializem oralmente suas justificativas a fim de fazer evoluir sua produção.

Uma das soluções possíveis seria:

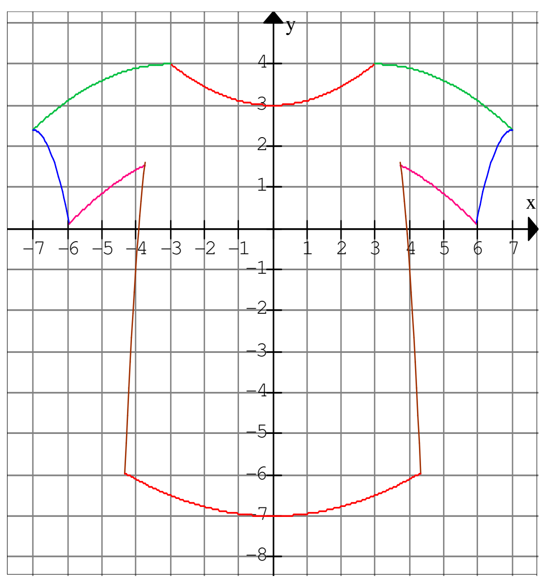


Figura 4.16 – “Camiseta”

A partir da gola no sentido anti-horário:

1 - $f(x) = \dfrac{x^2}{9} + 3$ $[-3,3]$

2 - $f(x) = -\dfrac{1}{10}(x+3)^2 + 4$ $[-7,-3]$

3 - $f(x) = -2(x+7)^2 + 2{,}39$ $[-7,-5{,}9]$

4 - $f(x) = -\frac{1}{10}(x+1,6)^2 + 2$ $[-5,9;-3,7]$

5 - $f(x) = -10(x+3,4)^2 + 2,8$ $[-4,3;-3,7]$

6 - $f(x) = \frac{x^2}{18} - 7$ $[-4,3; 4,3]$

7 - $f(x) = -10(x-3,4)^2 + 2,8$ $[3,7; 4,3]$

8 - $f(x) = -\frac{1}{10}(x-1,6)^2 + 2$ $[3,7; 5,9]$

9 - $f(x) = -2(x-7)^2 + 2,39$ $[5,9;7]$

10 - $f(x) = -\frac{1}{10}(x-3)^2 + 4$ $[3,7]$

Observe que as funções 2 e 6; 3 e 7; 4 e 8; 5 e 9 são simétricas entre si em relação ao eixo das ordenadas e a definição do intervalo da primeira função utilizada pode ser feita visualmente no *Winplot*, e os demais o aluno deve perceber que dependem sempre do anterior.

Na situação didática (S0), fase de institucionalização, o aluno (E0) apropria-se do saber envolvido na situação de aprendizagem (S-1). E, então o professor articula a questão da simetria entre as curvas em relação a um eixo e a própria simetria da parábola.

4.2 EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI

Faremos nesta sessão o relato da experimentação conjuntamente com a análise a posteriori a luz de nosso referencial teórico.

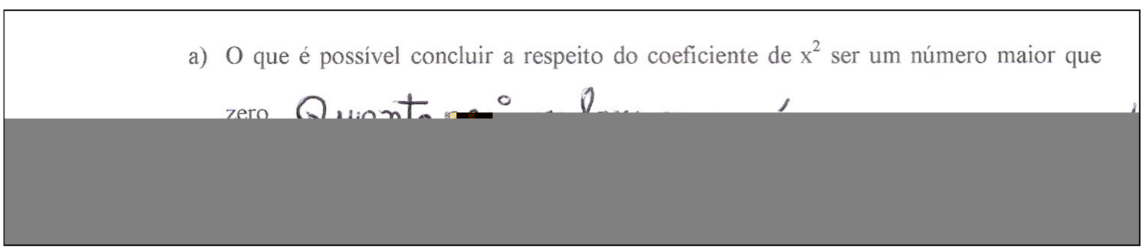
4.2.1. PRIMEIRA SESSÃO

Nesta primeira sessão, a professora iniciou a aula estabelecendo algumas regras com os alunos, ou seja, as atividades seriam realizadas em duplas, e não seria permitida a comunicação entre as mesmas. Todos deveriam anotar suas respostas nas folhas fornecidas e, ao final de cada atividade, seriam recolhidas as folhas e a classe discutiria suas respostas e a professora faria o fechamento. Apresentou a pesquisadora, explicou que todas as aulas seriam filmadas e que teria uma pessoa observando uma das duplas até o final das atividades.

A professora distribuiu a primeira atividade, pediu para que os alunos lessem, e perguntou se reconheciam algo. Eles disseram que reconheciam f(x) como uma função de x. E, ainda, que todas as funções da atividade representavam funções do 2º grau.

Os alunos, então, começaram a realizar a atividade. Primeiramente construíram com o auxílio do *software* os gráficos pedidos, e posteriormente responderam as questões.

Nessa primeira atividade os alunos perceberam que o coeficiente de x^2, implicava na mudança de abertura da parábola. O que podemos perceber nas seguintes respostas:



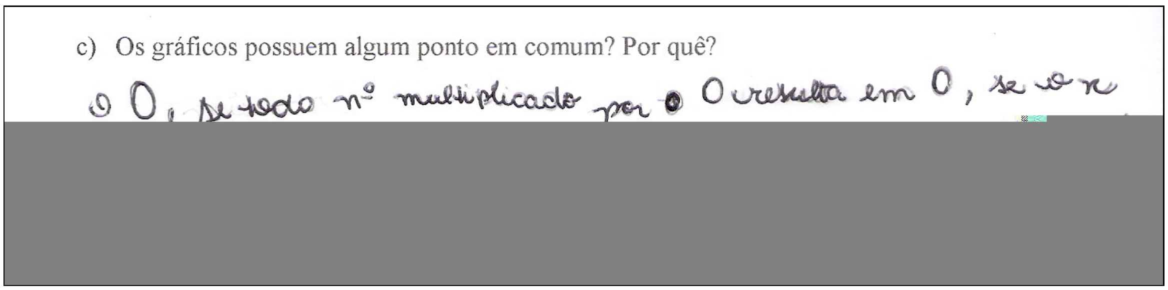
Protocolo 1 – Resposta da questão 2a (Adriana e Fátima)

"Quando o coeficiente de x^2 é negativo o arco é para baixo e quando é positivo é para cima. Quanto maior o coeficiente menor o arco e quanto menor o coeficiente maior o arco". (Comentário anotado pelo observador da dupla: André e Renato)

A dupla observada, antes mesmo de começar a responder as perguntas, quando construiu o gráfico da função $f_6 = -x^2$, percebeu que seu gráfico era simétrico ao da função $f_1 = x^2$, em relação ao eixo das abscissas. Como relato da observadora - "é igual, mas ao contrário, pois é negativo" (diz o aluno que estava sendo observado).

Essa atividade provocou uma indagação a respeito das raízes da função: “Todas as funções de 2º grau têm raiz zero?”. Não havíamos previsto que os alunos se preocupariam com as raízes das funções, no entanto, percebemos a preocupação de relacionar o que aprendiam na aula regular com o que estavam aprendendo nas aulas extras.

Outro item a se destacar, foi com relação à questão 2c que perguntava a respeito de os gráficos possuírem algum ponto em comum, pois, os alunos não enxergavam o ponto tendo duas coordenadas, e respondiam simplesmente o ponto zero.


c) Os gráficos possuem algum ponto em comum? Por quê?

o 0, se todo nº multiplicado por 0 resulta em 0, se o x

Protocolo 2 – Resposta da questão 2c (Adriana e Fátima)

Vemos a dificuldade de representar o ponto com duas coordenadas, os alunos são levados a colocar o ponto (0,0) somente como zero, pois ao olharem para os eixos eles vêem somente um zero, não entendendo que o zero representa a origem dos eixos. Porém se percebe que a dupla entende que para encontrar esse ponto é necessário substituir o valor zero na expressão algébrica encontrando seu valor correspondente da função.

Os alunos responderam as questões rapidamente e a professora promoveu um debate sobre as respostas dadas visando à socialização das produções das duplas. Percebemos nas falas e gestos dos alunos a compreensão das duas primeiras variáveis visuais e como elas atuam na representação algébrica, ou seja, os alunos ao discutirem sobre a atividade indicam com a mão o movimento de abrir ou fechar, virar para baixo ou para cima, dizendo que isso é devido ao “número que multiplica o x^2” e complementam dizendo “quanto maior for esse número, mais fechada a parábola fica”.

Então a professora sistematiza esse conhecimento utilizando o quadro branco para fazer algumas anotações e o recurso de animação do *Winplot* para que os alunos verifiquem o comportamento da função $f(x) = ax^2$. Neste momento os alunos perceberam que o valor de **a** deveria ser diferente de zero, pois ao utilizarem o recurso de animação visualizaram uma reta (função nula), e logo disseram: “quando **a** é igual a zero não temos mais a parábola”.

A partir destas explorações feitas com a animação no *software*, a professora pôde institucionalizar a propriedade do parâmetro **a**, lembrou aos alunos a forma desenvolvida da função quadrática ($f(x)=ax^2+bx+c$) e prosseguiu, quando a>0, b=0 e c=0, a parábola tem a concavidade voltada para cima e quando a<0, b=0 e c=0, a parábola tem a concavidade voltada para baixo. Observamos também que quando a>1, a curva é mais fechada e quando 0<a<1, a curva é mais aberta do que a parábola representada pela função $f(x)=x^2$, considerando o valor de **a,** absoluto.

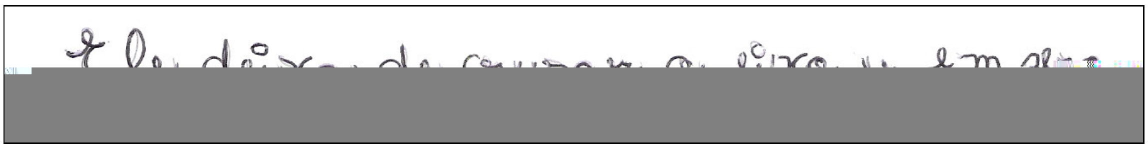
4.2.2 SEGUNDA SESSÃO

A sessão foi iniciada com uma revisão da atividade 1, a professora questionou os alunos a respeito dos gráficos desta atividade. E, aproveitou para recordar raiz de uma função. Os alunos responderam que uma função do 2º grau tem sempre duas raízes – podem ser reais e distintas, reais e iguais, ou não reais. E, então os alunos perceberam que as funções tratadas na primeira atividade eram funções cujas raízes eram iguais e que no caso eram iguais a zero.

A professora explicou sobre coordenadas de um ponto, que este possui duas coordenadas: uma relativa à abscissa e outra à ordenada, representado pelo par ordenado (x,y), pois, os alunos tiveram dificuldades em representá-lo na sessão anterior. A atividade 2 foi distribuída, os alunos construíram os gráficos pedidos e responderam as questões.

Na resposta da questão sobre o que acontece com o gráfico da função inicial $f(x)=x^2$, quando se soma ou subtrai uma constante, percebemos claramente que os alunos identificaram a terceira variável visual e a relacionaram com a escrita algébrica, o que pode ser constatado nas seguintes respostas:

Protocolo 3 – Resposta da questão 2 (Silvia e Rosana)

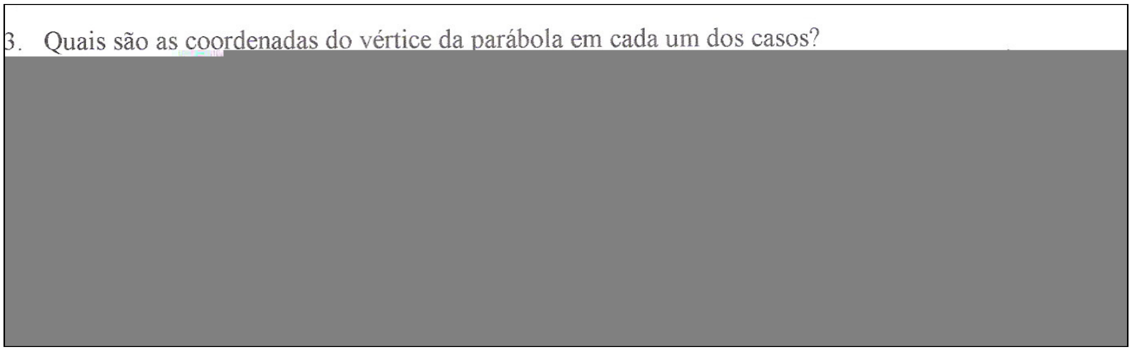


Protocolo 4 – Resposta da questão 2 (Adriano e Bruna)

Protocolo 5 – Resposta da questão 2 (André e Renato)

Os alunos André e Renato quando questionados sobre o que seria “não ter função em comum”, explicaram dizendo “as parábolas não são do mesmo jeito da outra atividade, não passam mais no zero”.

Percebemos pelas respostas das duplas Silvia/Rosana e André/Renato, que eles relacionaram o número somado ou subtraído com a posição do vértice da parábola. A resposta da Adriano/Bruna também está correta e não era prevista em nossa análise a priori. Porém, quando esta dupla respondeu a questão 3, relacionou esta constante com a ordenada do vértice. O que pode ser observado a seguir.


3. Quais são as coordenadas do vértice da parábola em cada um dos casos?

Protocolo 6 – Resposta da questão 3 (Adriano e Bruna)

Verificamos, também, que os alunos querem relacionar o que aprenderam sobre função polinomial de 1º grau, no que diz respeito ao nome dos coeficientes e ao paralelismo entre retas.

Após todos os alunos entregarem as atividades, a professora indaga sobre o que acontece com o gráfico da função inicial com o intuito de socializar as conclusões dos alunos, e estes respondem que quando é somado um número a parábola fica acima do eixo x e quando é subtraído um número ela fica abaixo do eixo y. E, ainda dizem, “quando ela está acima do eixo x, não possui raiz real, e quando está abaixo, possui duas raízes reais”.

Em nossa análise, em nenhum momento previmos que os alunos iriam relacionar a representação gráfica e a discriminação das raízes da função, ou seja, eles identificaram mais uma variável visual, quando voltada para cima e somada uma constante a função não possui raízes reais e quando subtraída uma constante a função possui duas raízes distintas.

Um fato interessante ocorreu quando a professora questionou os alunos a respeito do que seria vértice da parábola, pois, ela não tinha falado sobre isso nas aulas regulares. Um dos alunos comentou que tinha feito uma comparação com o que tinha aprendido sobre vértices de polígonos. Segue o diálogo:

P: Como assim?

Adriano: O vértice é a união de dois lados. O cantinho, professora.

P: Mas, onde você viu cantinho na parábola?

Adriano: Não tem cantinho...

Bruna: Mas, posso dizer que é o ponto que divide a parábola em duas partes.

P: Isso, e o que mais vocês percebem?

Bruna: (apontando para os gráficos) O eixo y divide

4.2.3. TERCEIRA E QUARTA SESSÕES

Contamos com a presença de 7 alunos, a aluna que ficou sem sua dupla, realizou a atividade sozinha. Realizamos a terceira atividade e seu fechamento em duas sessões de 50 minutos. Preferimos analisá-las conjuntamente, pois a quarta sessão complementou a terceira.

A professora, então distribuiu a atividade 3. Da mesma forma como nas atividades anteriores, os alunos construíram os gráficos pedidos com o auxílio do *software* e responderam as perguntas.

Os alunos atingiram o objetivo desta atividade e conseguiram perceber a quarta variável visual e relacioná-la com a expressão algébrica, ou seja, verificaram a translação horizontal do vértice da parábola, seguem as respostas:

> 2) A parábola se movimenta dessa vez no eixo x, para os lados.

Protocolo 7 – Resposta da questão 2 (Adriano e Bruna)

Destacamos que a dupla Adriano e Bruna, ao construir os gráficos pedidos suspirou “Agora conseguimos fazer o mundo, já aprendemos a abrir, fechar, virar, subir e descer, só faltava esquerda e direita”. Esta fala indica claramente que as propriedades dos parâmetros foram aprendidas, e a importância de utilizarmos as representações separadamente.

> 2. Quando somamos o gráfico cruza do lado negativo da abcissa, e quando subtraímos cruza do lado positivo

Protocolo 8 – Resposta da questão 2 (Rosana e Silvia)

> 2- se subtraimos vamos para a direita e se somamos ela ira para a esquerda.

Protocolo 9 – Resposta da questão 2 (André e Renato)

Já as duplas Rosana/Silvia e André/Renato percebem que ao somar uma constante a variável independente, a parábola estará à esquerda do eixo y enquanto que subtrair, a parábola estará à direita.

Somente a dupla Adriano/Bruna e a aluna Adriana expressam corretamente as coordenadas do vértice apontando a abscissa de valor zero, e a ordenada com o sinal oposto ao indicado na função. A dupla André/Renato indicaram somente a abscissa, e a dupla Rosana/Silvia trocaram a abscissa pela ordenada.

Depois de entregarem a atividade, a professora pediu que cada dupla comentasse sobre a realização da mesma, e foi possível corrigir os erros cometidos a respeito das coordenadas do vértice.

Ao devolverem a atividade 3, a professora pediu para que os alunos se lembrassem do que tinham visto até o momento. E os alunos, responderam que na primeira atividade eles tinham percebido que o coeficiente que multiplicava o x^2 na função controlava a abertura da parábola, ou seja, quando o número era maior do que um, a concavidade é mais fechada, quando estava entre 0 e 1 é mais aberta, e ainda quando temos um número negativo a concavidade é para baixo.

Já na segunda atividade, eles disseram que aprenderam a controlar o vértice na vertical, ou seja, quando se subtrai um número de x^2, o vértice desce e quando se soma o vértice sobe. E, por último na terceira atividade, eles aprenderam a controlar o vértice na horizontal, ou seja, subtraindo dentro dos parênteses o vértice vai para a direita e somando vai para a esquerda.

A professora perguntou aos alunos por que todas as atividades começavam com $f(x) = x^2$. E obteve as seguintes respostas (transcritas da filmagem):

Bruna: Para saber se a parábola abre, fecha, inverte, vai para esquerda, para direita, para cima ou para baixo, temos que partir de um começo.

Adriano: É, podemos dizer que esta fórmula $f(x) = x^2$ é uma fórmula "padrão", ela é simétrica ao eixo y, cruza no ponto zero. Ela é "certinha".

Silvia: Ela é como um ponto de referência.

Vemos nas afirmações dos alunos que eles perceberam que para conseguir fazer o gráfico de qualquer outra função quadrática é necessário ter uma função como referência e a partir destas construir outras. É um indício de que os alunos estão compreendendo o gráfico como um todo e não estão se prendendo a pontos isolados.

Continuando o debate sobre as atividades a aluna Silvia indagou sobre as raízes da função, perguntando: "*A raiz da função está em cima do eixo x, então quer dizer que se a parábola não cruzar o eixo x, ela não tem raiz?*".

A professora questionou sobre como eles faziam algebricamente para descobrir as raízes da função quadrática, e os alunos responderam que dependendo do valor do discriminante, conseguiam saber se existiam duas raízes reais distintas ou iguais, ou se não existiam raízes reais. E a partir deste momento eles entenderam o significado dos gráficos. E concluíram: "*quando o gráfico cruza em somente um ponto no eixo das abscissas significa que a função tem duas raízes reais e iguais, quando cruza em dois, tem duas raízes distintas, e quando não cruza, as raízes não são reais*."

O aluno André completa dizendo: "*Se o gráfico for simétrico ao eixo y e cruzar em dois pontos, temos duas raízes com o mesmo valor e sinais contrários*."

Percebemos que os alunos além de observarem as características que relacionam a escrita algébrica com a representação gráfica, estão também relacionando o gráfico com a discriminação das raízes, ou seja, conseguem por meio da observação do gráfico, verificar a existência das raízes.

Após esse breve resumo das atividades os alunos sugeriram colocar junto tudo o que tinham aprendido até o momento, e então a professora pediu para que eles falassem como ficaria a nova função. Uma aluna foi até a lousa e escreveu: $f(x) = (x+1)^2 + 3$.

Segue a discussão relatada pelo observador:

P: O que acontece com o gráfico dessa função?

Alunos: O vértice vai deslocar para esquerda até o -1 e depois vai subir até o 3.

P: O que eu faço para colocar a concavidade para baixo?

A: Coloque o sinal negativo do lado de fora dos parênteses.

P: Por que do lado de fora?

A: Porque podemos aplicar a propriedade distributiva depois de resolver o trinômio, porque se o sinal estiver dentro dos parênteses, quando resolvermos o trinômio ele vai ficar positivo e não vai inverter.

P: E como faz para abrir e fechar a concavidade da parábola?

A: Coloca um número na frente dos parênteses?

E, então os alunos fizeram alguns testes utilizando o *software* e o recurso de animação. E perceberam que quando atribuíam o valor zero para o coeficiente de x^2, o gráfico não era mais uma parábola, e sim, uma reta paralela ao eixo x ou o próprio eixo x, e reforçando a idéia de que para ser uma função do 2º grau, este coeficiente tem uma restrição, ou seja, ele tem que ser diferente de zero.

4.2.4. QUINTA SESSÃO

Os alunos, como de costume receberam a atividade e começaram a resolvê-la. Como esta atividade exigia que eles esboçassem os gráficos sem a ajuda do *software*, eles sentiram algumas dificuldades no começo e fizeram vários questionamentos com relação aos enunciados das questões.

A professora pediu para que eles resolvessem o máximo de questões que pudessem e anotassem suas dúvidas. E, então adotou a seguinte estratégia, leu cada uma das questões e começou a questionar os alunos, novamente sobre o que haviam aprendido até o momento e colocou na lousa a função representada no item (a) da primeira questão - $f(x) = 2(x+3)^2 - 4$. Então, pediu para que um aluno fosse até a lousa e começou a questioná-los a respeito desta função. Segue o diálogo transcrito da filmagem e de algumas anotações do observador.

P: O que é necessário para construir o gráfico desta função?

Alunos: Precisamos dos eixos cartesianos.

P: O que mais?

Alunos: Precisamos saber as coordenadas do vértice.

O aluno constrói o gráfico da função f(x) = x^2.

P: Com relação a este gráfico como podemos fazer o gráfico pedido?

Alunos: O que vem antes do x^2 *controla a abertura. O número dois vai fechar a parábola.*

Nesse momento os alunos estão se sentindo um pouco angustiados e dizem que com o *software* era mais fácil falar porque estavam com o gráfico pronto. Então a professora diz olhem para a função que está na lousa e tentem dizer o que são os outros números que aparecem.

Adriano: O x + 3 fala onde cruza na abscissa, e o outro -4 na ordenada. (pede para o aluno que está na lousa colocar o ponto (-3,-4)).

André: O -4 controla a altura – ordenada. E a abscissa é o -3.

P: Dá pra saber onde cruza no eixo y? Qual a abscissa deste ponto?

Alunos: Zero.

P: Então como fazemos para achar a ordenada deste ponto?

Bruna: Coloca no lugar do x. Fazendo a conta dá 14.

P: Ótimo, então qual é o ponto?

Alunos: (0,14).

Alunos: Mas ainda tem que colocar as raízes.

P: Como faz?

Alunos: Iguala a zero. (O aluno que está anotando na lousa, com a ajuda dos demais, faz o seguinte).

$$0 = 2(x+3)^2 - 4$$
$$4 = 2(x+3)^2$$
$$4/2 = (x+3)^2$$
$$\pm\sqrt{2} = \sqrt{(x+3)^2}$$
$$\pm\sqrt{2} = x+3 \Rightarrow -3 \pm \sqrt{2} = x \Rightarrow \begin{cases} x = -3+\sqrt{2} \\ x = -3-\sqrt{2} \end{cases}$$

Alunos: Agora temos como saber exatamente onde o gráfico cruza no eixo x.

Os alunos então continuaram em duplas e terminaram a atividade proposta.

Notamos que os alunos têm um pouco de dificuldades em enxergar o gráfico como um todo quando estão sem o *software* e tentam aplicar o que estão aprendendo na aula regular, ou seja, os “pontos notáveis” estão muito arraigados no seu dia-a-dia. Apesar de eles claramente conseguirem se expressar quanto aos parâmetros dados nas funções, isto é, falam sobre a abertura e translações, observamos que eles têm dificuldades em esboçar os gráficos sem colocar exatamente os pontos.

Para tentar solucionar este problema a professora pediu para que os alunos realizassem os procedimentos por eles citados na realização da questão 1 utilizando o *Winplot*, e observassem o que estava acontecendo com todos os pontos. Ou seja, eles começaram com $f(x)=x^2$, e depois colocaram $f(x)=2x^2$, observando que, por exemplo o ponto (1,1) da primeira função passou para (1,2) na segunda e assim todos as ordenadas dos pontos da primeira estavam multiplicados por 2 na segunda função. Ao fazerem $f(x)=2(x+3)^2$, observaram que todos os pontos em relação a segunda função se deslocaram para a esquerda três unidades. E, finalmente que na função pedida todos os pontos se deslocaram quatro unidades para baixo em relação à função anterior.

Ao responderem à terceira questão da atividade: “Você consegue prever o gráfico de $g(x)=x^2+6x+4$?” Os alunos responderam que não conseguiam, e escreveram: *“não dá para saber as coordenadas do vértice e nem pra onde ela vai”*. Quando eles construíram o gráfico utilizando o *Winplot*, perceberam que era o mesmo gráfico da função da questão anterior, $f(x)=(x+3)^2-5$. Ficaram surpresos, e a professora pediu para que eles desenvolvessem o trinômio, e então disseram: “chegamos na g(x)!” A professora conclui dizendo que eram duas representações algébricas para a mesma função, a f(x) chamamos de forma canônica e a g(x) forma desenvolvida.

Para resolverem a quarta e a quinta questão da atividade os alunos não tiveram nenhuma dificuldade e agiram como o previsto. Já a última questão somente uma dupla conseguiu resolver e as outras duplas nem tentaram fazer.

A professora então resolveu a última questão na lousa fazendo a comparação das duas formas (canônica e desenvolvida) algébricas da função quadrática, mostrando que os parâmetros **m** e **n**

A estratégia utilizada pela professora para solucionar o problema de visualização do gráfico, foi de grande contribuição para que os alunos olhassem o gráfico como um todo, não se prendendo a pontos particulares. E isto pode ser comprovado, na próxima atividade quando ao serem questionados sobre como começaram a realizar a tarefa, e eles explicaram que sempre tomavam como base a função f(x)=x^2 como referência para construir as outras.

4.2.5. SEXTA SESSÃO

É importante salientar que esta sessão foi realizada sem a presença da professora, estavam presentes somente a pesquisadora e a observadora. Os alunos como de costume receberam a atividade e logo começaram a fazê-la. Por meio da reprodução de desenhos, temos como objetivos observar os tipos de números utilizados pelos alunos, verificar a apreensão da forma canônica da função quadrática e por último verificar como os alunos iriam trabalhar com a noção de intervalo.

Vamos descrever a resolução de duas duplas (Adriana e Fátima, Adriano e Bruna), a primeira por ter sido filmada e apresentar características semelhantes às outras duas não descritas e a segunda por ter alguns detalhes não previstos em nossa análise a priori. Destacamos que as figuras a seguir foram retiradas dos arquivos salvos em disquete pelas duplas.

A primeira dupla escolhida iniciou o trabalho utilizando as linhas de grade com escala começando com a função $y = x^2$,

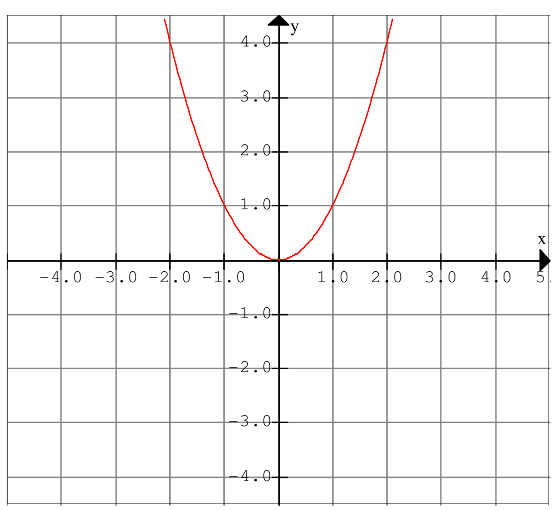


Figura 4.17 – Início da atividade (Adriana e Fátima)

Um dos alunos apontando para as linhas de grade, diz: "*quero que a parábola cruze com os pontos (-2,1) e (2,1)*".

Mudam então para $y = \frac{1}{2}x^2$, e logo em seguida para $y = \frac{1}{4}x^2$. (Estão fazendo a parte que representa a cabeça). Começam, então a levantar hipóteses de como desenhar só uma parte do gráfico, e lembram de uma atividade que foi desenvolvida em sala de aula, quando estavam aprendendo função polinomial de 1.º grau, na qual foi pedido para desenhar um quadrado.

Podemos perceber que a dupla, muda o parâmetro **a,** a fim de aumentar a concavidade da parábola. E, também, já se preocupam com a limitação da função.

Adriana:(apontando para a tela): Em qual lugar do Winplot eu coloco que o limite é esse (aponta para (-2,1)) e esse (aponta para (2,1)).

Pesquisadora: Selecione a função no inventário e clica em editar. O que vocês podem observar?

Dupla: Ah, tem x máximo e x mínimo. (E colocam x mín = -2 e x máx = 2).

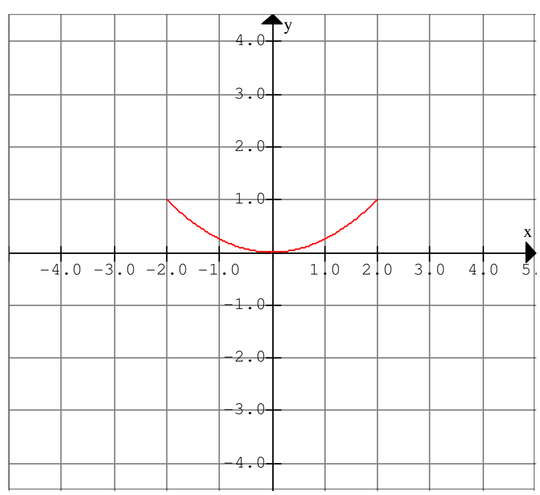


Figura 4.18 – "Cabeça da máscara" (Adriana e Fátima)

Apontando novamente para a tela, a dupla decide que precisa de uma função para o "rosto" que tenha os mesmos limites da primeira. Tentam $y = 3x^2$, e percebem que precisam abrir mais a concavidade e tinham que "descer" a parábola.

Adriana: Onde ela "anda" no eixo y, mesmo? Qual era a atividade?

Fátima: Era a atividade 2, e digita $y = x^2 - 3$*, com o mesmo intervalo da função anterior.*

Percebemos novamente a utilização do parâmetro **a**, e também a utilização do parâmetro **n**, que revela a translação vertical do vértice da parábola. Nota-se também que a dupla escolheu trabalhar com o eixo y como eixo de simetria da parábola.

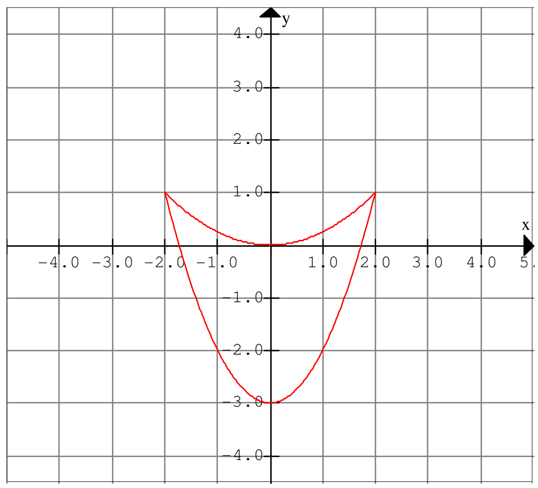


Figura 4.19 – "Rosto" (Adriana e Fátima)

Agora, fazem a boca, utilizando a mesma função do rosto, porém fazendo a translação vertical para cima e mudando o intervalo. E digitam: $y = x^2 - 2{,}5$ com o intervalo de -0,5 até 0,5.

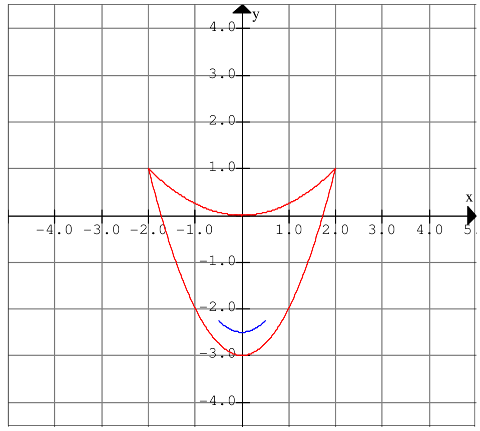


Figura 4.20 – “Boca” (Adriana e Fátima)

A seguir, fazem conjecturas de como construir os “olhos”, e novamente apontando para as linhas de grade:

Adriana: Temos que posicionar o vértice aqui (aponta para (-1, 0,5)) e o outro vértice aqui (aponta para (-1, 0,5)) E pergunta: O que faz mesmo ela ir para a direita ou para a esquerda?

P: Qual das atividades anteriores fazia isso?

Dupla: A primeira mexia com a abertura, a segunda era pra cima e pra baixo. Ah, então era a terceira!

P: Qual era a representação utilizada na terceira?

Adriana: Era a que tinha os parênteses... (E abrem a atividade 3)

Dupla: É isso mesmo que a gente precisa! E tentam: $y = 2(x-1)^2$.

Adriana (olhando para o gráfico): O que fizemos de errado?

Fátima: É isso mesmo, só que temos que colocar mais pra baixo.

Adriana: Segunda atividade!

E digitam: $y = 2(x-1)^2 - 1$, e verificam que não está muito bom, e apontando para o 1 que está dentro dos parênteses, e para as linhas de grade, decidem trocar para meio. E digitam: $y = 2(x-1/2)^2 - 1$.

Adriana: Agora temos que travar o intervalo.

A Fátima coloca x mínimo = -1 e x máximo = 1.

Adriana: Não, tem que colocar zero. Aqui (aponta para o gráfico) o x vale zero.

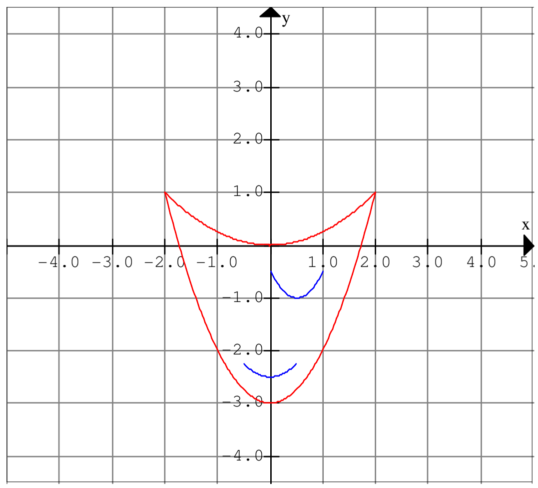


Figura 4.21 – "Olho direito" (Adriana e Fátima)

Adriana: Agora vamos fazer o outro olho, mas eles vão ficar grudados, pode?

P: Olhem para a tarefa pedida.

Adriana: É, não pode.

Fátima: $y = 2(x - 1/4)^2 - 1$*, não ficou bom.*

Adriana: Tem que ser mais pra direita. (preocupada em encontrar uma fração).

P: Não tem outro jeito de representar?

Adriana: Coloca 0,75, então.

Fátima: $y = 2(x - 0{,}75)^2 - 1$ *e o intervalo vai de 0,25 até 1,25.*

Adriana: Para o outro olho e só trocar... $y = 2(x + 0{,}75)^2 - 1$ *e o intervalo vai de -1,25 até -0,25.*

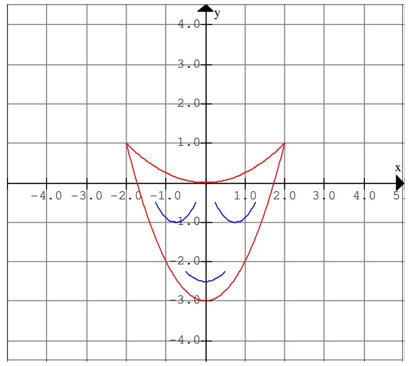


Figura 4.22 – “Olho esquerdo” (Adriana e Fátima)

Vemos até aqui, que para a construção dos “olhos” a dupla começa a utilizar o parâmetro **m**, para realizar a translação horizontal do vértice da parábola.

Dupla: Para a outra máscara, vamos utilizar o mesmo desenho, porém para fazer a boca, mudamos o coeficiente antes do x^2 *e subimos um pouco. E colocam:* $y = -x^2 - 2$.

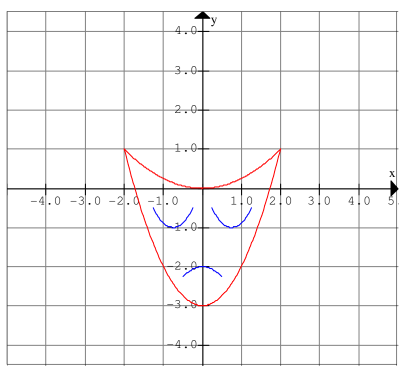
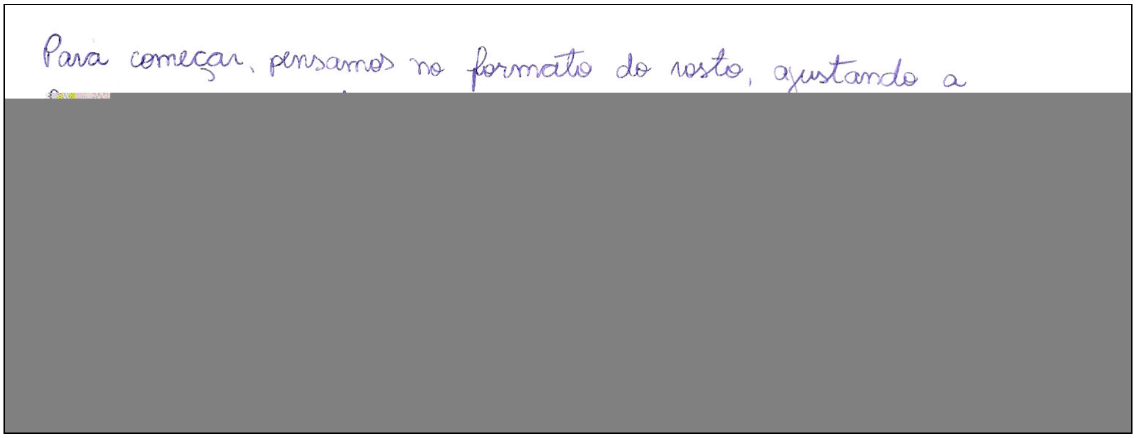


Figura 4.23 – “Outra máscara” (Adriana e Fátima)

Observamos que a dupla, percebeu que para a construção da segunda máscara, poderia utilizar a primeira como base, e fazer uma reflexão da “boca”, e ainda uma translação vertical para cima do vértice. E para isso utilizaram a variável visual – concavidade da parábola voltada para baixo e a unidade simbólica correspondente – parâmetro a < 0, ou seja, presença do símbolo (-).

Acreditamos que as escolhas feitas pela dupla para os parâmetros **a**, **m** e **n**, devem-se pela escala adotada.

Já a segunda dupla, não utilizou linhas de grades e a escala utilizada nos eixos era 1X10. Os alunos descreveram suas ações da seguinte maneira:


Para começar, pensamos no formato do rosto, ajustando a

Protocolo 10 – Descrição da Atividade 5 (Adriano e Bruna)

Depois de entregarem esta atividade, os alunos foram questionados a respeito do que seria uma "boa concavidade", e responderam: "*Como começamos com a função padrão, achamos que ela deveria ficar mais aberta para se parecer com o rosto*". E, também sobre o quer seria "usamos apenas funções", eles comentaram que queriam ter dito as mesmas funções da primeira carinha.

O produto final desta dupla foi,

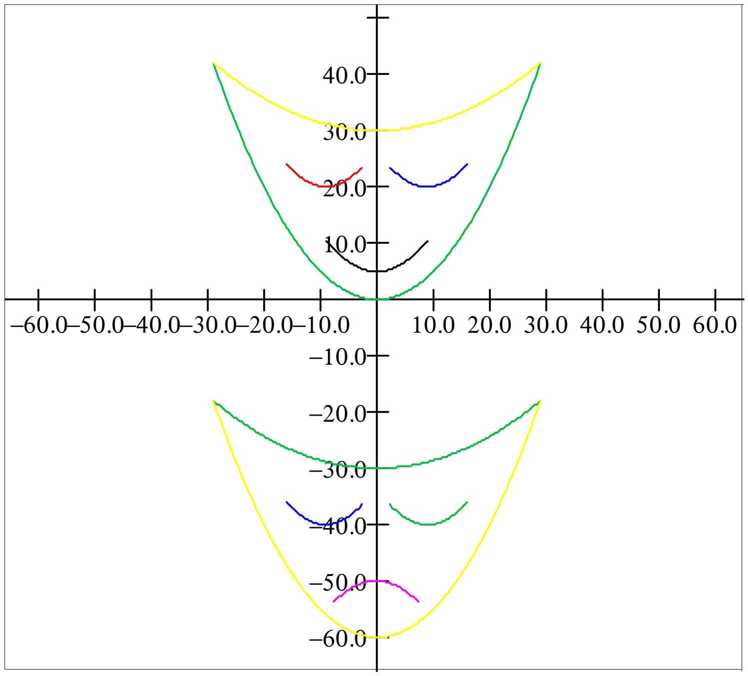


Figura 4.24 – Atividade 5 (Adriano e Bruna)

Funções e os intervalos utilizados pela dupla:

y = 1/20x^2; -29.000000 <= x <= 29.000000
y = 1/70x^2+30; -29.000000 <= x <= 29.000000
y = 1/15x^2+5; -9.000000 <= x <= 9.000000
y = 1/12(x-9)^2+20; 2.500000 <= x <= 16.000000
y = 1/70x^2-30; -29.000000 <= x <= 29.000000
y = 1/20x^2-60; -29.000000 <= x <= 29.000000
y = -1/15x^2-50; -7.500000 <= x <= 7.500000
y = 1/12(x+9)^2+20; -16.000000 <= x <= -2.500000
y = 1/12(x+9)^2-40; -16.000000 <= x <= -2.500000
y = 1/12(x-9)^2-40; 2.500000 <= x <= 16.000000

Protocolo 11 – Inventário atividade 5 (Adriano e Bruna)

Por não utilizarem as linhas de grade, e sim uma escala de 1:10, e por escolherem trabalhar com funções cujo coeficiente de x^2 é um número fracionário, a dupla utilizou um recurso do *Winplot* para determinar o intervalo de suas funções, ou seja, clicando sobre qualquer ponto na tela do gráfico obtêm-se as coordenadas deste ponto.

Pudemos perceber que os alunos entenderam a noção de intervalo de função, visto que as duplas ao iniciarem o trabalho utilizaram a palavra “limitar” quando se referiam a fazer “cortes” no gráfico para poder concretizar o desenho pedido. E também ao fato de olharem uma das ferramentas do *Winplot* – editar função –caracterizando esse intervalo como valores mínimos e máximos que o domínio poderia assumir.

4.2.6 SÉTIMA SESSÃO

Antes de iniciar a atividade a professora questionou os alunos a respeito da atividade anterior, pois como ela não estava presente, quis saber o que eles fizeram. Os alunos contaram que para começar a realizar a atividade partiram da função $f(x)=x^2$ e que utilizaram o eixo y como simetria do rosto, visto que esta era a referência que eles tinham para construir todas as outras funções. Concluíram dizendo que para fazer a máscara “triste” utilizaram a “feliz” e mudaram o sinal da função que representava a boca, ou seja, colocaram o sinal negativo, alguns ainda disseram que colocaram a boca mais para cima porque estava muito perto do “queixo”.

Foram questionados também, a respeito da possibilidade de construir as duas máscaras no mesmo arquivo, e a dupla, Adriano e Bruna, disse que bastava deslocar todas as funções para baixo ou para cima, variando o parâmetro **n**. A professora, ainda perguntou se era possível fazer com outro eixo de simetria, ou mesmo utilizando o eixo y como eixo de simetria entre as duas máscaras. Os alunos responderam: “Isso é fácil, basta pegar o desenho que temos pronto e deslocar as funções variando o **m**”.

Depois desta discussão os alunos começaram a realizar a última atividade. Havia três duplas nessa sessão, elas começaram a desenvolver o trabalho utilizando uma camiseta que uma das alunas havia trazido dentro da bolsa, colocaram a camiseta no chão e iniciaram uma discussão de quantos “pedaços” de gráfico eles iriam precisar. Percebe-se que ao se referirem a “pedaços” de gráficos, os alunos interiorizaram o que aprenderem na atividade anterior quando precisaram limitar o domínio das funções quadráticas, e ainda eles discutiram que as laterais da camiseta eram parecidas com retas, e então não poderia ser função, pois estavam na vertical, mas, no entanto perceberam que se utilizassem um dos ramos da parábola para fazer esta parte e limitasse o domínio, então conseguiriam fazer.

Segue o resultado final das duplas:

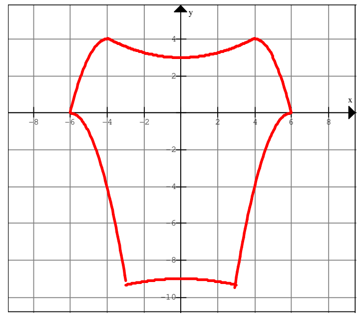


Figura 4.25 – Atividade 6 (Adriana e Fátima)

y = -(x+6)^2 ; -6.000000 <= x <= -2.950000
y = -(x-6)^2; 2.950000 <= x <= 6.000000
y = -(4+x)^2+4; -6.000000 <= x <= -4.000000
y = -(4-x)^2+4; 4.000000 <= x <= 6.000000
y = 1/15x^2+3; -4.000000 <= x <= 4.000000
y = -1/27x^2-9; -3.000000 <= x <= 3.000000

Protocolo 12 – Inventário atividade 6 (Adriana e Fátima)

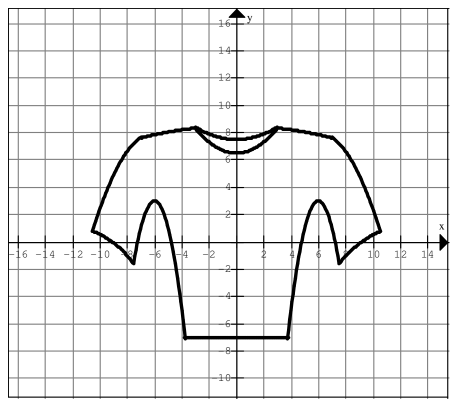


Figura 4.26 – Atividade 6 (André e Renato)

y = -2(x+6)^2+3; -7.500000 <= x <= -3.750000
y = -2(x-6)^2+3; 3.750000 <= x <= 7.500000
y = -0.003x^2-7; -3.800000 <= x <= 3.800000
y = -0.14(x-11.8)^2+1; 7.500000 <= x <= 10.500000
y = -0.14(x+11.8)^2+1; -10.500000 <= x <= -7.500000
y = -0.35(x+6)^2+8; -10.550000 <= x <= -7.000000
y = -0.35(x-6)^2+8; 7.000000 <= x <= 10.550000
y = 0.1x^2+7.5; -3.000000 <= x <= 3.000000
y = 0.2x^2+6.5; -3.000000 <= x <= 3.000000
y = -0.018x^2+8.5; 3.000000 <= x <= 7.000000
y = -0.018x^2+8.5; -7.000000 <= x <= -3.000000

Protocolo 13 – Inventário atividade 6 (André e Renato)

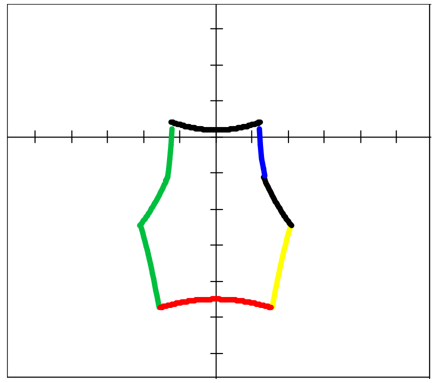


Figura 4.27 – Atividade 6 (Adriano e Bruna)

y = 1/700x^2+20; -125.000000 <= x <= 125.000000
y = -1/50(x+290)^2-112; -208.000000 <= x <= -156.000000
y = -1/50(x-290)^2-112; 156.000000 <= x <= 208.000000
y = -1/1000x^2-450; -154.000000 <= x <= 154.000000
y = 1/150(x+300)^2-300; -210.000000 <= x <= -132.000000
y = 1/2(x+138)^2-120; -139.000000 <= x <= -121.000000
y = 1/150(x-300)^2-300; 132.000000 <= x <= 210.000000
y = 1/2(x-139)^2-120; 122.000000 <= x <= 134.000000

Protocolo 14 – Inventário atividade 6 (Adriano e Bruna)

A dupla Adriano/Bruna percebeu a simetria das funções, porém não levou em consideração a dependência dos intervalos, apesar da dupla na atividade 5 ter observado esta questão. Acreditamos que isto se deve ao fato da escala adotada pela dupla.

Somente as duplas Adriana/Fátima e André/Renato fizeram um esboço da camiseta utilizando lápis e papel. A dupla Adriano/Bruna descreveu seus procedimentos da seguinte maneira: “Começamos pela parte de cima da camiseta, e pensamos fazer uma regata. Ajustamos as laterais, fizemos a parte de baixo e depois ajustamos as axilas. As axilas foram feitas com duas funções para que não ficasse muito reta”.

Ainda, observando o “inventário” da dupla Adriano/Bruna e a escala adotada (1:10), percebe-se que os alunos não tiveram dificuldades quanto a composição das representações algébricas das funções quadráticas para confeccionar sua “camiseta”, e isso também pode ser constatado nos “inventários” das outras duas duplas. Contribuindo para a resposta de nossa questão de pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao constatarmos em nossas análises prévias que para a construção de gráficos geralmente é privilegiado o procedimento ponto a ponto. Nosso trabalho teve por objetivo complementar outros estudos já realizados a respeito da função quadrática. Visando à análise de características dos gráficos destas funções, por meio da observação das construções realizadas em um *software* gráfico, introduzimos outro procedimento para estas construções, ou seja, elaboramos uma seqüência didática que permite ao aluno enxergar o gráfico como um conjunto de variáveis visuais que estão diretamente ligadas à escrita algébrica.

No capítulo IV analisamos as respostas de todos os alunos envolvidos na pesquisa, bem como seus comentários, anotações dos observadores e transcrições das filmagens. Isso nos forneceu elementos para obter algumas conclusões.

A participação dos alunos se mostrou efetiva, visto que os mesmos se sentiram muito a vontade na presença de outras pessoas. Percebemos que eles se mostravam muito interessados em descobrir algo novo a cada atividade da seqüência, pois ficavam empolgados quando digitavam a expressão algébrica de cada uma das funções e por meio das respostas dadas as questões, eles verificavam que o gráfico se modificava. E isto se mostrou claro, quando ao final da aplicação da terceira atividade uma das duplas relatou que conseguiriam construir qualquer gráfico, pois tinham aprendido a movimentar o gráfico modificando a expressão algébrica. A dinâmica do *software* propiciou aos alunos maior interação com os gráficos e suas respectivas fórmulas, pois, eles colocavam cores diferentes para cada uma das representações e conseguiam observar o que estava acontecendo com os gráficos quando modificavam a escrita algébrica.

Destacamos, também, que os alunos durante a primeira atividade mostravam-se preocupados em relacionar o que estavam aprendendo na aplicação da seqüência com suas aulas regulares. Olhando os gráficos obtidos nesta atividade, as respostas das questões propostas e as discussões realizadas, eles indagaram a respeito das raízes das funções, dizendo que **todas** as funções do 2º grau tinham raízes iguais a zero. A professora perguntou a eles se eram todas as funções ou se eram as desse caso particular ($f(x) = ax^2$), e os alunos concluíram que era o caso particular, e comparando a resposta dada a questão (c), verificaram que a raiz era zero, pois só tinham o coeficiente

a, e qualquer que fosse o valor de a, os alunos encontrariam sempre o par ordenado (0,0).

Além disso, os gestos dos alunos ao serem questionados a respeito do valor atribuído ao parâmetro **a**, indicam que eles conseguiam relacionar o mesmo com a variável visual no gráfico, isto é, indicavam com a mão (abrindo, fechando, virando para cima ou para baixo) o que observavam no gráfico quando mudavam os valores de **a**. É importante destacar, que eles descobriram, com o auxílio da animação feita no W*inplot*, que o único valor que não poderia ser atribuído ao **a** era zero, pois, o gráfico deixava de ser uma parábola e passava a ser uma reta. Este recurso do *software* permitiu que os alunos visualizassem esta passagem, garantindo a existência da função quadrática quando $a \neq 0$.

Na segunda atividade ressaltamos que os alunos além de perceberem outra variável visual – translação vertical – relacionaram o número somado ou subtraído de x^2 com a ordenada do vértice, e ainda relacionaram a existência ou não das raízes da função. Apesar da atividade só conter funções cujos gráficos eram parábolas com a concavidade voltada para cima, os alunos conseguiram generalizar para as que têm a concavidade voltada para baixo. Motivados pelos recursos do *software*, eles puderam testar suas hipóteses, o que seria perfeitamente possível realizar com lápis e papel, mas o tempo gasto com a construção, não permitiria tantas discussões. E a satisfação de mudar um elemento – unidade simbólica significativa – na expressão algébrica, vendo a mudança na representação gráfica tão rapidamente, e verificar que suas hipóteses estavam corretas, não seria a mesma.

Observamos que os alunos compreenderam o propósito da terceira atividade, ou seja, verificaram a translação horizontal. E, além disso, a idéia de relacionar as raízes das funções quadráticas com a representação gráfica foi reforçada, o que pode ser comprovado nas frases dos alunos: "*A raiz da função está em cima do eixo x, então quer dizer que se a parábola não cruzar o eixo x, ela não tem raiz?*" e "*quando o gráfico cruza em somente um ponto no eixo das abscissas significa que a função tem duas raízes reais e iguais, quando cruza em dois, tem duas raízes distintas, e quando não cruza, as raízes não são reais*."

A realização destas três primeiras atividades conseguiu atingir um dos nossos objetivos, mostrar o gráfico da função quadrática como um conjunto de variáveis visuais e que estas se modificam quando realizamos mudanças na escrita algébrica e vice-versa.

Notamos claramente, que isto foi possível ao final deste conjunto de atividades, pois os alunos foram questionados pela professora sobre como ficaria uma função quadrática que reunisse todas as características apresentadas. E no momento que eles foram à lousa "inventaram" uma função quadrática qualquer partindo da função inicial ($f(x)=x^2$), e dizendo como o gráfico iria se modificar quando começassem a colocar os parâmetros aprendidos.

Salientamos, ainda, que os alunos conseguiram perceber o eixo de simetria da parábola, e a simetria e reflexão entre as parábolas, como por exemplo: $f(x)=x^2+2$ e $f(x)=-x^2-2$; $f(x)=5x^2$ e $f(x)=-5x^2$; $f(x)=(x+2)^2$ e $f(x)=-(x+2)^2$; $f(x)=(x+2)^2$ e $f(x)=(x-2)^2$.

Durante a aplicação da quarta atividade, encontramos alguns problemas, pois os alunos estavam com dificuldades em interpretar os enunciados e se sentindo incapazes e inseguros de realizar a atividade, pois não poderiam usar o *Winplot*, naquele momento. Porém, conseguimos contornar a situação, utilizando outra estratégia de aplicação. O que se mostrou muito satisfatório, pois as discussões envolvidas trouxeram mais elementos para a análise. Ao serem questionados pela professora em cada etapa do desenvolvimento da atividade, percebemos que eles queriam construir o gráfico pontualmente, da mesma forma que haviam aprendido nas aulas regulares.

A partir daí, vimos que apesar dos alunos entenderem as modificações ocorridas tanto na escrita algébrica quanto na gráfica, eles não estavam muito certos de como usar este procedimento para construir o gráfico, entretanto, quando pedimos que realizassem a atividade novamente, só que agora, utilizando o software, pedimos para que analisassem o que estava acontecendo com todos os pontos do gráfico. E, então perceberam que não só o vértice se movia x unidades (para esquerda, para direita, para cima, para baixo), mas como todos os outros pontos se moviam da mesma maneira.

Com relação à pergunta sobre previsão de gráficos: "Você consegue prever o gráfico de $g(x)=x^2+6x+4$?", os alunos responderam que ficava difícil fazer qualquer previsão, visto que não sabiam de imediato quais eram as coordenadas do vértice e nem tinham condições de falar sobre as translações em relação a função inicial $f(x)=x^2$. Ao digitarem a expressão no *software*, perceberam que o gráfico desta função era exatamente o gráfico feito anteriormente para $f(x)=(x+3)^2-5$, verificaram, então que ao desenvolverem o trinômio em f(x) chegariam a g(x). E assim, concluiu-se que poderíamos ter duas representações algébricas para a mesma função – forma desenvolvida ($f(x) = ax^2+bx+c$) e forma canônica ($f(x) = a(x+m)^2 +n$).

Quanto à questão da inserção do caráter lúdico em nossa seqüência, destacamos que os alunos ficaram muito motivados ao realizares as duas últimas atividades, levando a descoberta da utilização de intervalos para limitar o gráfico das funções necessárias para construir os desenhos pedidos. Eles, ainda relacionaram este intervalo com o domínio da função, dizendo que eram os valores que o **x** poderia assumir e assim sendo eles teriam apenas um "pedaço" do gráfico.

Outro aspecto que analisamos referente à utilização do *software*, é que mesmo durante estas últimas atividades, a primeira função a ser utilizada para começar o desenho, fosse feita por tentativa, quando os alunos começaram a completar o desenho, já não "chutavam" qualquer valor para os parâmetros e sim discutiam com seu parceiro, apontavam para a tela do computador, argumentando qual deveria ser a função para que ela se ajustasse ao desenho e se encaixasse perfeitamente.

Concluímos, de modo geral, que esta participação efetiva dos alunos na realização de todas as atividades, as discussões realizadas levaram a um crescimento na compreensão de construção e análise de gráficos de função quadrática. Deste modo, acreditamos que a abordagem por nós proposta, confirmou a nossa hipótese e respondeu à questão de pesquisa: "É possível que alunos de 8ª série do Ensino Fundamental se apropriem do processo de construção gráfica da função quadrática como um conjunto de variáveis visuais que implicam em unidades simbólicas significativas da escrita algébrica utilizando um ambiente computacional aliado ao caráter lúdico como uma das ferramentas de aprendizagem?"

O referencial teórico adotado está intimamente ligado aos resultados positivos obtidos nesta pesquisa, pois sem a Teoria dos Registros de Representação, não seria possível construir uma seqüência didática que permitisse observar que modificações na escrita algébrica acarretam mudanças na representação gráfica da função e vice-versa. E, além disso, ao estabelecermos as variáveis visuais e suas correspondentes unidades simbólicas significativas, proporcionamos aos alunos momentos de reflexão a respeito dos gráficos das funções quadráticas e suas respectivas expressões algébricas. Quanto a Teoria das Situações, foi um forte instrumento na análise e aplicação da seqüência, pois, por meio dela foi possível organizar o estudo detalhado da seqüência antes, durante e após a aplicação. A estruturação do *milieu* tornou possível caracterizar as ações dos alunos e do professor envolvidos em nossa pesquisa.

Esperamos que nosso trabalho contribua na área do ensino da Matemática, no que se refere à construção e interpretação de gráficos utilizando o recurso lúdico para este fim.

Sugerimos para trabalhos posteriores que se desenvolvam atividades que articulem a passagem de uma representação algébrica a outra (forma canônica para a forma desenvolvida e vice-versa), por não ter sido prioridade em nosso trabalho.

Finalizando, afirmamos que realizar este trabalho nos proporcionou grande satisfação tanto como pesquisadores quanto como educadores, pois permitiu mostrar a riqueza das discussões realizadas por alunos de 8ª série do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática - CEMA. São Paulo: PUC-SP, 2000.

_____________. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática - CEMA. São Paulo: PUC-SP, 2004.

BARUFI, M. C. B. LAURO, M. M. **Funções elementares, equações e inequações: uma abordagem utilizando o microcomputador**. São Paulo: CAEM-IME/USP, 2000.

BENEDETTI, F. C. **Funções, Software Gráfico e Coletivos Pensantes.** 327f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim.** 8ª série. São Paulo. FTD, 2000.

BLOCH, I. **L'Articulation du travail mathématique du professor et de l'élève dans l'enseigment de l'analyse en première scientifique. Détermination d'un milieu – connaissances et savoirs.**

DUVAL, R. Graphiques et équations: L'articulation de deux registres. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol.1, pp. 235-253.

___________. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In MACHADO, S. D. A. (org.) **Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica**. Campinas, SP. Papirus, 2003. p. 11-33.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. 3.ª ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2002.

FRIEDMANN, A. **Brincar – Crescer e Aprender**. São Paulo: Editora Moderna, 1996.

GOULART, M. C. Matemática no Ensino Médio. 1ª série. São Paulo: Scipione, 2004.

GUELLI, O. **Matemática: uma aventura do pensamento.** 8ª série. São Paulo: Ática, 2002.

IEZZI, G. (et al.) **Fundamentos da Matemática Elementar.** São Paulo: Atual, v.1, 1985.

JESUS, A. R. **Visualizando Funções: Famílias de Gráficos, Retas tangentes e Áreas de figuras planas com utilização de software livre**. Bahia, 2002. Disponível em: <http://ufpel.tche.br> Acesso em: 25 mar 2005.

____________. **Visualizando Funções com o Auxílio de Tecnologia Computacional**. Bahia, 2003. Disponível em <http://bruno.cesar.tripod.com/sitebuildercontent/sitebuilderfiles/adelmo_ribeiro_de_jsus.pdf> Acesso em: 9 set 2004.

KIERAN, C. The learning and teaching of school Algebra. in GROWS, D. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Project of the N.C.T.M., 1992, pp. 390-419.

KAMPFF, A.; MACHADO, J. C.; CAVEDINI, P. **Novas Tecnologias e Educação Matemática**. Bahia, 2003. Disponível em: <http://cinted.ufrgs.br/renote/nov2004/artigos/a12_tecnologias_matematica.pdf> Acesso em: 07 ago 2006.

LONGEN, A. **Matemática**. Ensino Médio. Curitiba: Positivo, v.1, 2004.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In MACHADO, S. D. A. et al. **Educação Matemática: Uma Introdução**. São Paulo: EDUC, 1999. p. 197-208.

MORETTI, M. T. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In MACHADO, S. D. A. (org.) **Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica**. Campinas, SP. Papirus, 2003. pp. 149-160.

MORI, I.; ONAGA, D. S. **Matemática: Idéias e desafios**, 8ª série, 10ª ed., São Paulo. Saraiva, 2001.

OLIVEIRA, N. **Conceito de função: Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem.** 137f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.