Sobre Composições de Imersões Isométricas

Nazira Hanna Harb

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Departamento de Matemática Centro de Ciências Exatas

Universidade Estadual de Maringá

(Mestrado)

Orientador: Prof. Dr. Armando Caputi

Co-orientador: Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka

Maringá - Pr

2007

Sobre Composições de Imersões Isométricas

Nazira Hanna Harb

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-Pr, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Prof. Dr. Armando Caputi - UEM ....
(Orientador)

Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka - UEM ....
(Co-orientador)

Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Jr. - Ufscar ....

Prof. Dr. Alexandre José Santana - UEM ....

Maringá

Janeiro, 2007

A todos aqueles que fizeram parte do meu caminho para que eu chegasse até aqui....

Agradecimentos

A Deus pela força.

Ao meu orientador Prof. Dr. Armando Caputi pela paciência, dedicação, pelos sermões, pelos elogios e principalmente por fazer jus ao título de professor.

Ao meu co-orientador Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka pela atenção despendida sempre que precisei.

À minha querida família pelo apoio, encorajamento, pelos conselhos e principalmente por acreditarem em mim.

Ao meu grande companheiro de todas as horas Michel Silvério. E também à sua família pelo apoio.

A todos os meus amigos e amigas que contribuiram, de uma forma ou de outra, para a realização deste trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática da UEM, que colaboraram para minha formação acadêmica.

Aos funcionários do departamento, responsáveis pela secretaria, pela limpeza, pelo cafezinho, que também fizeram parte do meu dia-a-dia acadêmico.

À Capes, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos um estudo sobre composições de imersões isométricas, seguindo o artigo "On Compositions of Isometric Immersions" de Marcos Dajczer e Ruy Tojeiro (cf. [DT1]). O problema consiste em determinar condições suficientes sobre duas imersões isométricas $f : M^n \to Q_c^{n+1}$ e $g : M^n \to Q_c^{n+p}$ dadas, de modo que a imersão g seja uma composição, num sentido que será esclarecido adiante. Ainda seguindo o artigo [DT1], apresentamos uma aplicação ao problema de determinar quando uma variedade riemanniana pode ser imersa isometricamente em duas formas espaciais de curvaturas seccionais distintas.

Abstract

In this work we deal with compositions of isometric immersions, following the paper

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho foi estudar o artigo: "On Compositions of Isometric Immersions", de Marcos Dajczer e Ruy Tojeiro (cf.[DT1]). A motivação, para este artigo, foi entender as imersões isométricas de baixa codimensão da esfera redonda S^n no espaço euclideano $\mathbb{R}^{n+p}$. Como se tem uma família de imersões isométricas de S^n em $\mathbb{R}^{n+p}$ que podem ser obtidas compondo a inclusão $i : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ com uma imersão $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+p}$, levantou-se a questão: quando que uma imersão isométrica de S^n em $\mathbb{R}^{n+p}$ poderia ser composição dessa maneira. Em 1972 Erbacher provou, para $p = 2$ e $n \geq 4$, que numa vizinhança de pontos não umbílicos uma imersão de S^n em $\mathbb{R}^{n+p}$ é necessariamente uma composição do tipo acima. Num trabalho posterior, O'Neill sugere que um resultado similar ao de Erbacher deveria valer para codimensão $p = n - 2$, sob algumas condições. E durante o processo para obter uma solução a esse problema, os autores Marcos Dajczer e Ruy Tojeiro levantaram a seguinte questão mais geral: dada uma imersão isométrica $g : M^n \to Q_c^{n+p}$, $p \geq 2$ e $n \geq 4$, quando esta é uma composição de imersões isométricas? Essa questão tem sido abordada da seguinte maneira, dadas imersões isométricas $f : M^n \to Q_c^{n+q}$ e $g : M^n \to Q_c^{n+p}$, $q \leq p$, quais condições sobre f e g irão implicar que g é uma composição? O artigo [DT1] aborda essa questão para codimensão de f igual a 1 e nos fornece um resultado que garante quando g é uma composição.

O artigo também estuda outro problema que pode ser relacionado com aquele de composição de imersões isométricas. Trata-se de determinar quando uma variedade riemanniana pode ser isometricamente imersa em duas formas espaciais de curvaturas seccionais distintas. O resultado obtido em [1] para esse problema permite interpretar geometricamente essas imersões, caso existam.

Este trabalho está dividido em cinco capítulos. No Capítulo 1, apresentamos conceitos básicos sobre variedades riemannianas, fibrados vetoriais e espaço de Lorentz, com o intuito de fixar notações e apresentar resultados e propriedades que serão utilizados em seguida.

Como a teoria de formas bilineares planas foi importante no decorrer do trabalho, dedicamos o Capítulo 2 somente a ela. Começamos pelos conceitos básicos e alguns exemplos, seguidos pelos principais resultados que serão utilizados mais adiante.

Já no Capítulo 3 descrevemos o problema da composição de imersões isométricas, estudamos os teoremas e resultados auxiliares, para depois abordar o Teorema principal do artigo [DT_1] (cf. Teorema 3.7).

No Capítulo 4, apresentamos o problema da imersão de uma variedade riemanniana em duas formas espaciais distintas, relacionado com o problema de composição de imersões isométricas, como citado acima.

E finalmente no Capítulo 5, expomos alguns resultados posteriores fornecidos pelos artigos [DT_2] e [DF] e apresentamos a relação entre o problema de composição de imersões isométricas com os problemas de rigidez e redução de codimensão.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduzimos conceitos básicos da teoria de subvariedades que serão usados no decorrer do trabalho. Inicialmente, apresentamos algumas definições e fatos de variedades riemannianas, fibrados vetoriais, imersões isométricas, as fórmulas de Gauss e Weingarten, e a partir delas, as equações fundamentais de uma imersão isométrica. Fazemos também um breve estudo sobre o espaço de Lorentz. Em geral omitimos as demonstrações, as quais podem ser encontradas em [D$_1$], [dC] , [O'N$_1$].

1.1 Conceitos Básicos

Uma *métrica riemanniana* em uma variedade diferenciável[1] M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M uma forma bilinear simétrica definida positiva $\ ,\ _p$ no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente, no seguinte sentido: para todo par X, Y de campos vetoriais diferenciáveis em uma vizinhança U de M, a função X, Y é diferenciável em U.

Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos tangentes de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathtt{C}^\infty(M)$ o conjunto das funções reais de classe C^∞ definidas em M.

Uma *conexão afim* em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

[1] No decorrer do trabalho, sempre que nos referirmos a "diferenciável", estamos querendo dizer de classe C^∞

denotada por $\nabla(X,Y) = \nabla_X Y$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1) $\nabla_{(fX+gY)}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

2) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

3) $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$.

Uma conexão afim ∇ em uma variedade riemanniana M é chamada de *conexão de Levi-Civita (ou riemanniana)* se satisfaz as seguintes condições:

4) ∇ é simétrica, ou seja, $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

5) ∇ é compatível com a métrica riemanniana de M, ou seja, $X\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

É sabido que ∇ está univocamente determinada pela métrica $\langle\ ,\ \rangle$.

O *operador de curvatura* R de uma variedade riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \quad \forall Z \in \mathfrak{X}(M)$$

onde ∇ é a conexão riemanniana de M.

O *tensor de curvatura* $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ de uma variedade riemanniana M é definido por $R(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle$ onde $\langle\ ,\ \rangle$ é a métrica riemanniana de M.

Intimamente relacionada com o tensor de curvatura está a *curvatura seccional*, que passamos a definir. Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $V \subset T_pM$, a curvatura seccional de M relativa a V é o número real

$$K(X,Y) = K(V) = \frac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle}{|X \wedge Y|^2}$$

onde $\{X, Y\}$ é uma base qualquer de V e $|X \wedge Y|^2 = |X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2$.

Pode-se mostrar que se M_c^n denota uma variedade riemanniana de curvatura seccional constante c o operador de curvatura R de M é dado por

$$R(X,Y) = c(X \wedge Y)$$

onde $(X \wedge Y)Z = \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y$ para todo $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$.

A seguir vamos apresentar alguns conceitos sobre *Fibrados Vetoriais*.

Sejam E e M variedades diferenciáveis e $\pi : E \to M$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que (E,π,M) é um *fibrado vetorial diferenciável de posto* k sobre M, ou simplesmente um *fibrado vetorial* sobre M, quando para cada $x \in M$ temos:

(i) $\pi^{-1}(x)$ é um espaço vetorial de dimensão k;

(ii) existe uma vizinhança aberta U de x em M e um difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ cuja restrição a $\pi^{-1}(y)$ é um isomorfismo sobre $\{y\} \times \mathbb{R}^k$ para cada $y \in U$. Chamamos a variedade E de *espaço total*, π *a projeção* e M o *espaço base*. No que segue denotamos o fibrado (E,π,M) por $\pi : E \to M$ ou até mesmo por E.

Para cada $x \in M$ denotamos por $E_x = \pi^{-1}(x)$ a *fibra* de E sobre x. Uma *seção local* de E sobre um aberto $U \subset M$ é uma aplicação diferenciável $\xi : U \to E$ tal que $\pi \circ \xi = id_U$, ou seja, para cada $y \in U$, $\xi(y) \in E_y$. Se $U = M$ dizemos que ξ é uma *seção global*, ou simplesmente uma *seção* de π. Denotamos por $\Gamma(E)$ o conjunto das seções de E. Temos que para cada $e \in E$ existe uma seção local (ou global) ξ tal que $\xi(\pi(e)) = e$. Em particular, isto mostra que o conjunto $\Gamma(E)$ das seções de π é não vazio. Com um certo abuso de linguagem, vamos nos referir a uma seção ξ em $\Gamma(E)$, como $\xi \in E$.

Dado um fibrado vetorial (E,π,M) e um subconjunto $F \subset E$ tal que a restrição $\pi_{|_F} : F \to M$ seja ainda um fibrado vetorial, dizemos que F é um *subfibrado vetorial* de E se a inclusão $i : F \to E$ leva $(\pi_{|_F})^{-1}(x)$ linearmente em $\pi^{-1}(x)$ para todo $x \in M$. Isso significa, em particular, que $(\pi_{|_F})^{-1}(x)$ é um subespaço vetorial de $\pi^{-1}(x)$.

Seja (E, π, M) um fibrado vetorial e seja U uma subvariedade[2] de M. Definimos o seguinte fibrado vetorial

$$E_{|_U} = \{(x, Z) : x \quad U, Z \quad E_x\}.$$

Como exemplo de fibrado vetorial temos o fibrado tangente

$$TM = \{(p, X);\ p \quad M, \quad T_pM\}$$

de uma variedade diferenciável M^n é um fibrado vetorial de posto n sobre M. Nesse caso, um campo tangente $X : M \to TM$ é uma seção de TM. Mais adiante veremos outros exemplos, como o fibrado normal $TM^{\perp}$ de uma imersão isométrica $f : M^n \to N^{n+p}$, que é um subfibrado de $TN_{|_{f(M)}}$.

A *soma de Whitney* dos fibrados vetoriais (E_1, π_1, M) e (E_2, π_2, M) é definido como o fibrado

$$\pi_1 \quad _W \pi_2 : E_1 \quad _W E_2 \to M$$

onde

$$E_1 \quad _W E_2 = \{(e_1, e_2) \quad E_1 \times E_2 : \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)\}$$

e a projeção é dada por $\pi_1 \quad _W \pi_2((e_1, e_2)) = \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)$. No que segue, a soma de Whitney será denotada simplesmente por   .

Dados (E_1, π_1, M_1) e (E_2, π_2, M_2) fibrados vetoriais e um difeomorfismo $\phi : M_1 \to M_2$. Dizemos que uma aplicação diferenciável $\widetilde{\phi} : E_1 \to E_2$ é um *isomorfismo de fibrados vetoriais ao longo de* ϕ se, para todo $x \quad M_1$ temos:

(i) $\pi_2 \circ \widetilde{\phi} = \phi \circ \pi_1$ e $\widetilde{\phi}(\pi_1^{-1}(x)) = \pi_2^{-1}(\phi(x))$;

(ii) a restrição $\widetilde{\phi}_{|_{\pi_1^{-1}(x)}} : \pi_1^{-1}(x) \to \pi_2(\phi(x))$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Uma *métrica riemanniana* g sobre um fibrado vetorial (E, π, M) é uma aplicação

$$g : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to C^{\infty}(M)$$

[2]definimos mais adiante na seção 1.2

$C^\infty(M)$-bilinear, simétrica e definida positiva. Um fibrado vetorial (E, π, M) munido com uma métrica riemanniana é chamado *fibrado vetorial riemanniano.* Se g for $C^\infty(M)$-bilinear, simétrica, indefinida de assinatura 1 essa métrica é chamada *métrica lorentziana* e um fibrado munido com essa métrica é chamado de *fibrado vetorial lorentziano.* Uma *isometria* de fibrados vetoriais riemannianos é um isomorfismo de fibrados $\tau : (E_1, g_1) \to (E_2, g_2)$ tal que $g_1(\xi, \eta) = g_2(\tau(\xi), \tau(\eta))$ $\quad \xi, \eta \quad \Gamma(E_1)$.

Dado um fibrado vetorial E, definimos uma *conexão linear* em E como uma aplicação $\mathbb{R}$-bilinear $\quad : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ definida por $\quad (X, \xi) = \quad {}_X\xi$, satisfazendo para cada $f \quad C^\infty(M)$, $X \quad \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \quad \Gamma(E)$, as seguintes propriedades:

(i) $\quad {}_{fX}\xi = f \quad {}_X\xi$

(ii) $\quad {}_X(f\xi) = X(f)\xi + f \quad {}_X\xi.$

Seja (E, π, M) um fibrado vetorial com uma conexão linear . Dizemos que uma seção $\xi \quad \Gamma(E)$ é *paralela* se $\quad {}_X\xi = 0$ para todo $X \quad \mathfrak{X}(M)$. Um subfibrado $F \quad E$ é chamado *paralelo* se, para toda seção $\eta \quad \Gamma(F)$ e todo $X \quad \mathfrak{X}(M)$ temos $\quad {}_X\eta \quad \Gamma(F)$.

Consideremos agora um fibrado vetorial riemanniano E. Uma conexão linear é *compatível* com a métrica g se

$$Xg(\xi, \eta) = g(\quad {}_X\xi, \eta) + g(\xi, \quad {}_X\eta) \qquad X \quad \mathfrak{X}(M), \qquad \xi, \eta \quad \Gamma(E).$$

1.2 Imersões Isométricas

Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis de dimensões m, n respectivamente. Uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ é uma *imersão* se a diferencial $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ é injetora para todo $p \quad M$. Se f é uma imersão e, ainda, um homeomorfismo sobre $f(M) \quad N$, onde $f(M)$ tem a topologia induzida por N, diz-se que f é um *mergulho.*

Anunciamos um resultado a seguir cuja demonstração segue usando o teorema da função inversa.

Proposição 1.1 *Seja $f : M^m \to N^n$, uma imersão de uma variedade diferenciável M*

em uma variedade diferenciável N. Para todo ponto $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que a restrição $f_{|U}$ é um mergulho.

Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \to N$ é um mergulho , diz-se que M é uma *subvariedade* de N.

Observemos que se $f : M^m \to N^n$ é uma imersão, então $m \leq n$. A diferença $n - m$ é chamada a *codimensão* da imersão f. Em particular, se a codimensão é 1 dizemos que M (ou f) é uma *hipersuperfície* de N.

Sejam agora M, N variedades riemannianas. Dada $f : M \to N$ uma imersão, dizemos que f é uma *imersão isométrica* se para todo $p \in M$ e $X, Y \in T_pM$ temos $\langle X, Y \rangle_p = \langle df_p(X), df_p(Y) \rangle_{f(p)}$. Em particular, se, além disso, $f : M \to N$ é um difeomorfismo, dizemos que f é uma *isometria*.

Observemos que se M, N são variedades diferenciáveis, $f : M \to N$ é uma imersão e N possui uma estrutura riemanniana então f induz uma estrutura riemanniana em M da seguinte forma

$$\langle X, Y \rangle_p := \langle df_p(X), df_p(Y) \rangle_{f(p)}$$

com $X, Y \in T_pM$. Assim a métrica de M é chamada métrica *induzida* por f e com essa métrica f é uma *imersão isométrica*.

Dada $f : M \to N$ uma imersão isométrica, pelo que foi dito acima, f é localmente um mergulho, logo em torno de cada ponto de M existe um vizinhança $U \subset M$ tal que a restrição de f a U é um mergulho sobre $f(U)$. No decorrer do trabalho, identificamos U com $f(U)$ e campos $X \in TU$ com $df(X) \in Tf(U)$ e consequentemente, podemos considerar o espaço tangente de M em $q \in U$ como subespaço do espaço tangente a N em $f(q) \in f(U)$.

Escrevemos

$$T_qN = T_qM \oplus T_qM^{\perp}$$

onde $T_qM^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_qM em T_qN, chamado de espaço normal a M em q. Desta decomposição obtemos o fibrado vetorial

$$TM^{\perp} = \dot{\bigcup_{q\in M}} T_q M^{\perp}$$

chamado de *fibrado normal* a M. Observamos que o posto desse fibrado é igual a codimensão de f. Desta forma, o fibrado vetorial $TN_{|_{f(M)}}$ é a soma de Whitney do fibrado tangente TM com o fibrado normal $TM^{\perp}$, isto é,

$$TN_{|_{f(M)}} = TM \quad {}_W\, TM^{\perp}.$$

Com respeito a essa decomposição, temos as projeções

$$(\ )^{\top} : TN_{|_{f(M)}} \to TM$$

$$(\ )^{\perp} : TN_{|_{f(M)}} \to TM^{\perp}$$

as quais são chamadas de tangencial e normal, respectivamente.

1.3 Equações Fundamentais

Sejam M^n e N^{n+p} variedades riemannianas com conexões de Levi-Civita $\ $ e $\tilde{\ }$, respectivamente, e seja $f : M^n \to N^{n+p}$ uma imersão isométrica. Dados campos vetoriais $X, Y \quad TM$, e já assumindo as identificações feitas na seção anterior, segue-se que

$$\tilde{\ }_X Y = (\tilde{\ }_X Y)^{\top} + (\tilde{\ }_X Y)^{\perp}.$$

Observamos que $\tilde{\ }_X Y$ faz sentido, pois dados campos $X, Y \quad \mathfrak{X}(M)$ existem extensões $\tilde{X}, \tilde{Y}$ de X, Y e ainda como $\tilde{\ }_{\tilde{X}} \tilde{Y}$ depende pontualmente de $\tilde{X}$, localmente de $\tilde{Y}$ e $\tilde{\ }_X \tilde{Y}$ não depende da extensão de Y podemos denotar $\tilde{\ }_{\tilde{X}} \tilde{Y}$ por $\tilde{\ }_X Y$.

Não é dificil verificar que $(\tilde{\ }\ \cdot)^{\top}$ satisfaz as 5 condições da conexão de Levi-Civita e pela unicidade desta segue que $(\tilde{\ }_X Y)^{\top} = \ {}_X Y$. Por outro lado, coloque $\alpha(X, Y) = (\tilde{\ }_X Y)^{\perp}$. Esta define uma aplicação $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, $C^{\infty}(M)$-bilinear simétrica chamada de segunda forma fundamental de f. Logo obtemos a ***Fórmula de Gauss***

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y) \qquad \forall X, Y \in TM. \tag{1.1}$$

Seja $f : M \to N$ uma imersão isométrica. Dizemos que f é *totalmente geodésica em* $x \in M$ se $\alpha(x)(X,Y) = 0$ para todo $X, Y \in T_xM$. Se isso ocorrer para todo $x \in M$, então dizemos que f é *totalmente geodésica*.

Dados $X \in TM$ e $\xi \in TM^\perp$, temos que

$$\tilde{\nabla}_X \xi = (\tilde{\nabla}_X \xi)^\top + (\tilde{\nabla}_X \xi)^\perp.$$

Defina $A_\xi X = -(\tilde{\nabla}_X \xi)^\top$. Para todo $Y \in TM$, das propriedades de $\tilde{\nabla}$ e da fórmula de Gauss segue que

$$\begin{aligned} 0 = X\langle \xi, Y\rangle &= \langle \tilde{\nabla}_X \xi, Y\rangle + \langle \xi, \tilde{\nabla}_X Y\rangle \\ &= \langle -A_\xi X + (\tilde{\nabla}_X \xi)^\perp, Y\rangle + \langle \xi, \nabla_X Y + \alpha(X,Y)\rangle \\ &= \langle -A_\xi X, Y\rangle + \langle \xi, \alpha(X,Y)\rangle. \end{aligned}$$

Portanto $\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle$ para todo $X, Y \in TM$. Fica então bem definida a aplicação $C^\infty(M)$-bilinear $A : TM \times TM^\perp \to TM$ dada por $A(X,\xi) = A_\xi X$. E ainda, o operador $A_\xi : TM \to TM$ é $C^\infty(M)$-linear e simétrico, ou seja, $\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle X, A_\xi Y\rangle$ para todo $X, Y \in TM$. O operador A_ξ é chamado *operador forma* ou *operador de Weingarten* ou também *a segunda forma fundamental na direção normal* ξ.

A componente normal de $\tilde{\nabla}_X \xi$, denotada por $\nabla^\perp_X \xi$, define uma conexão sobre o fibrado $TM^\perp$, compatível com a métrica, chamada *conexão normal* de f. Obtemos então a ***Fórmula de Weingarten***

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi \qquad \forall X \in TM, \quad \xi \in TM^\perp. \tag{1.2}$$

A partir das fórmulas de Gauss e Weingarten obtemos as chamadas equações fundamentais de uma imersão isométrica: equação de Gauss, equação de Codazzi e a equação de Ricci.

Com as notações acima, denotamos por R e $\widetilde{R}$ os tensores de curvatura de M e N, respectivamente. Dados $X, Y, Z \in TM$, pelas fórmulas de Gauss e Weingarten

$$\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y Z = \widetilde{\nabla}_X \nabla_Y Z + \widetilde{\nabla}_X \alpha(Y, Z) =$$

$$= \nabla_X \nabla_Y Z + \alpha(X, \nabla_Y Z) - A_{\alpha(Y,Z)} X + \nabla^{\perp}_X \alpha(Y, Z).$$

Similarmente temos

$$\widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X Z = \nabla_Y \nabla_X Z + \alpha(Y, \nabla_X Z) - A_{\alpha(X,Z)} Y + \nabla^{\perp}_Y \alpha(X, Z).$$

E novamente pela fórmula de Gauss

$$\widetilde{\nabla}_{[X,Y]} Z = \nabla_{[X,Y]} Z + \alpha([X, Y], Z).$$

Segue então para todo $X, Y, Z, W \in TM$ a ***Equação de Gauss***

$$\langle R(X, Y)Z, W\rangle = \langle \widetilde{R}(X, Y)Z, W\rangle + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z)\rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W)\rangle .$$

Em particular, se $K(X, Y) = \langle R(X, Y)Y, X\rangle$ e $\widetilde{K}(X, Y) = \langle \widetilde{R}(X, Y)Y, X\rangle$ denotam as curvaturas seccionais de M e N respectivamente, do plano gerado pelos campos ortonormais $X, Y \in TM$, temos

$$K(X, Y) = \widetilde{K}(X, Y) + \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y)\rangle - \|\alpha(X, Y)\|^2.$$

Por outro lado, tomando a componente normal de $\widetilde{R}(X, Y)Z$ das expressões acima, obtemos a ***Equação de Codazzi***

$$(\widetilde{R}(X, Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y, Z) - (\nabla^{\perp}_Y \alpha)(X, Z)$$

onde, por definição, $(\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y, Z) = \nabla^{\perp}_X \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$.

De forma equivalente, para todo $X, Y \in TM$ e $\xi \in TM^{\perp}$ e pelas fórmulas de Gauss e Weingarten temos

$$\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y \xi = \widetilde{\nabla}_X (-A_\xi Y + \nabla^{\perp}_Y \xi) =$$

$$= -\nabla_X A_\xi Y - \alpha(X, A_\xi Y) - A_{\nabla^\perp_Y \xi} X + \nabla^\perp_X \nabla^\perp_Y \xi.$$

Similarmente temos

$$\widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X \xi = -\nabla_Y A_\xi X - \alpha(Y, A_\xi X) - A_{\nabla^\perp_X \xi} Y + \nabla^\perp_Y \nabla^\perp_X \xi.$$

E pela fórmula de Weingarten

$$\widetilde{\nabla}_{[X,Y]} \xi = -A_\xi \nabla_X Y + A_\xi \nabla_Y X + \nabla^\perp_{[X,Y]} \xi.$$

Tomando a parte tangente do operador de curvatura obtemos:

$$(\widetilde{R}(X,Y)\xi)^\top = (\nabla_Y A)(X,\xi) - (\nabla_X A)(Y,\xi)$$

onde $(\nabla_Y A)(X,\xi) = \nabla_Y A_\xi X - A_\xi \nabla_Y X - A_{\nabla^\perp_Y \xi} X$. A equação acima também é chamada de equação de Codazzi por ser equivalente a equação de Codazzi expressa anteriormente.

Podemos definir um *operador normal de curvatura* $R^\perp$ no fibrado normal $TM^\perp$ como uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in TM$ uma aplicação $R^\perp(X,Y) : \mathfrak{X}(M)^\perp \to \mathfrak{X}(M)^\perp$ dada por

$$R^\perp(X,Y)\xi = \nabla^\perp_X \nabla^\perp_Y \xi - \nabla^\perp_Y \nabla^\perp_X \xi - \nabla^\perp_{[X,Y]} \xi.$$

Assim, tomando a componente normal de $\widetilde{R}(X,Y)\xi$ temos para todo $X, Y \in TM$ e $\xi \in TM^\perp$ a ***Equação de Ricci***

$$(\widetilde{R}(X,Y)\xi)^\perp = R^\perp(X,Y)\xi + \alpha(A_\xi X, Y) - \alpha(X, A_\xi Y).$$

Como vamos trabalhar com imersões isométricas em variedades riemannianas de curvatura seccional constante, é interessante ver como as equações fundamentais ficam nesse caso. Dada $f : M^n \to N_c^{n+p}$ temos para todo $X, Y, Z, W \in TM$ e $\xi, \eta \in TM^\perp$ que

Equação de Gauss

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = c\,\langle (X \wedge Y)Z, W\rangle + \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle.$$

Equação Codazzi

$$(\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z) = (\nabla^{\perp}_Y\alpha)(X,Z)$$

ou ainda

$$(\nabla_X A)(Y,\xi) = (\nabla_Y A)(X,\xi).$$

Equação de Ricci

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \alpha(X, A_\xi Y) - \alpha(A_\xi X, Y)$$

ou ainda

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle.$$

Vamos explicitar também as equacões fundamentais para o caso de hipersuperfícies. Seja $f : M^n \to N^{n+1}$ uma imersão isométrica. Dados ξ um campo unitário de $TM^{\perp}$ e $X, Y \in TM$ a ***fórmula de Gauss*** para esse caso será

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle A_\xi X, Y\rangle \xi.$$

Por outro lado, como ξ é unitário, temos que $\langle\widetilde{\nabla}_X \xi, \xi\rangle = 0$ logo $\nabla^{\perp}_X \xi = 0$ para todo $X \in TM$. Portanto a ***fórmula de Weingarten*** será

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X.$$

Usando o fato que $\alpha(X,Y) = \langle A_\xi X, Y\rangle \xi$, vemos que a ***equação de Gauss*** pode ser escrita da seguinte maneira

$$R(X,Y)Z = (\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\top} + (A_\xi X \wedge A_\xi Y)Z.$$

E a ***equação de Codazzi*** agora será

$$(\widetilde{R}(X,Y)\xi)^{\top} = (\nabla_Y A_\xi)X - (\nabla_X A_\xi)Y$$

onde por definição $(\nabla_X A_\xi)Y = \nabla_X(A_\xi Y) - A_\xi \nabla_X Y$.

Observamos que, para hipersuperfícies, a equação de Ricci perde interesse pois ambos os lados da equação se anulam.

E finalmente, para o caso em que a variedade ambiente N^{n+1} possui curvatura seccional constante igual a c as equações de Gauss e Codazzi são, respectivamente, para todo $X, Y \quad TM$ e $\xi \quad TM^{\perp}$

$$R(X,Y) = c(X \quad Y) + A_{\xi}X \quad A_{\xi}Y$$

e

$$(\quad _X A_{\xi})Y = (\quad _Y A_{\xi})X.$$

A partir de agora, Q_c^{n+p} denota uma variedade Riemanniana $(n+p)$-dimensional, completa e simplesmente conexa com curvatura seccional constante c (formas espaciais), isto é, a *esfera euclideana* S_c^{n+p}, o *espaço euclideano* $\mathbb{R}^{n+p}$ ou o *espaço hiperbólico* $\mathbb{H}_c^{n+p}$.

Para finalizarmos esta seção apresentaremos o ***Teorema Fundamental para Subvariedades***.

Teorema 1.2 *(i) Seja M^n uma variedade riemanniana simplesmente conexa, (E, π, M) um fibrado riemanniano de posto p com uma conexão $\quad '$ compatível com a métrica, e seja α uma seção simétrica do fibrado de homomorfismo $Hom(TM \times TM, E)$. Defina, para cada seção local ξ de E, uma aplicação $A_{\xi} : TM \to TM$ por $\; A_{\xi}X, Y \; = \; \alpha(X,Y), \xi \;$ para $X, Y \quad TM$. Se α e $\quad '$ satisfazem as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para o caso de curvatura seccional constante c então existe uma imersão isométrica $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ e um isomorfismo de fibrado vetorial $\widetilde{f} : E \to TM^{\perp}$ ao longo de f tal que para todo $X, Y \quad TM$ e todas as seções locais η, ξ de E*

$$\widetilde{f}(\xi), \widetilde{f}(\eta) \;=\; \xi, \eta$$

$$\widetilde{f}\alpha(X,Y) = \widetilde{\alpha}(X,Y)$$

$$\widetilde{f} \quad '_X \xi = \quad ^{\perp}_X \widetilde{f}(\xi)$$

onde $\widetilde{\alpha}$ e $\quad ^{\perp}$ são a segunda forma fundamental e a conexão normal de f, respectivamente.

(ii) Suponha que f e g são imersões isométricas de uma variedade conexa M^n em Q_c^{n+p}. Sejam $T^fM^\perp$, α_f e $\;{}^{\perp}_{f}$ denotando o fibrado normal, a segunda forma fundamental e a conexão normal de f, respectivamente, e seja $T_gM^\perp$, α_g e $\;{}^{\perp}_{g}$ o fibrado normal, a segunda forma fundamental e a conexão normal de g respectivamente. Se existe um isomorfismo de fibrado $\phi : T_fM^\perp \to T_gM^\perp$ tal que, para todo $X, Y \quad TM$ e todo $\xi, \eta \quad T_fM^\perp$

$$\phi(\xi), \phi(\eta) \;=\; \xi, \eta$$

$$\phi\alpha_f(X, Y) = \alpha_g(X, Y)$$

$$\phi \;\; {}^{\perp}_{fX}\xi = \;\; {}^{\perp}_{gX}\phi(\xi),$$

então existe uma isometria $\tau : Q_c^{n+p} \to Q_c^{n+p}$ tal que

$$g = \tau \circ f \quad \text{e} \quad d\tau_{|_{T_fM^\perp}} = \phi.$$

1.4 Distribuições e Folheações

A seguir vamos definir mais alguns conceitos que são utilizados nos próximos capítulos.

Uma *distribuição* D de dimensão k em uma variedade M^n, $(k \leq n)$ é uma escolha, para cada $p \quad M$, de um subespaço vetorial D_p, de dimensão k, de T_pM. Dizemos que D é diferenciável se para cada $p \quad M$ existe uma vizinhança U_p e campos diferenciáveis em U_p que geram D, no sentido que, para cada q em U_p, $X_1(q), \ldots, X_k(q)$ geram D_q. Se $X \quad \mathfrak{X}(M)$ dizemos que $X \quad \mathsf{D}$ se $X(p) \quad \mathsf{D}_p$ para todo $p \quad M$. Se $[X, Y] \quad \mathsf{D}$ sempre que $X, Y \quad \mathsf{D}$ então D é dita involutiva (ou completamente integrável).

Uma subvariedade N de M é chamada de *variedade integral* da distribuição D sobre M se

$$T_pN = \mathsf{D}_p \qquad p \quad N.$$

Agora apresentaremos alguns resultados mas omitiremos suas demonstrações. Para maiores detalhes indicamos [Wa].

Proposição 1.3 *Seja D uma distribuição diferenciável tal que em cada $p \quad M$ passa uma variedade integral de D. Então D é involutiva.*

Dizemos que o par (U, φ) é um *sistemas de coordenadas cúbicas* se $\varphi(U)$ é um cubo aberto centrado na origem em $\mathbb{R}^n$. Se $x \quad U$ e $\varphi(x) = 0$, então o sistema de coordenadas está centrado em x.

Teorema 1.4 *Se D é uma distribuição, k-dimensional, diferenciável e involutiva sobre M^n, então para cada $p \quad M$ existe uma variedade integral de D passando por p. De fato, existe um sistema de coordenadas cúbicas (U, φ), centrada em p com funções coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ tal que as fatias $x_i =$ constante para todo $i \quad \{k+1, \ldots, n\}$ são variedades integrais da distribuição D. Além disso, se N é uma variedade integral conexa de D tal que $N \quad U$, então N está contida numa dessas fatias.*

Seja M^n uma variedade diferenciável e seja N^k uma subvariedade (geralmente desconexa) de M. Dizemos que N é uma *folheação* de M se todo ponto de M está em (alguma componente conexa de) N e se em torno de todo ponto $p \quad M$ existem sistema de coordenadas (U, φ) com $\varphi(U) = (-\varepsilon, \varepsilon) \times \ldots \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que as componentes conexas de $N \cap U$ são conjuntos da forma $\{q \quad U : \varphi_{k+1}(q) = a_{k+1}, \ldots, \varphi_n(q) = a_n\}$ com $|a_i| \leq \varepsilon$. Cada componente conexa de N é uma *folha* da folheação N.

Teorema 1.5 *Seja D uma distribuição integrável k-dimensional sobre M. Então as variedades integrais de D constituem uma foheação de M.*

1.5 Espaço de Lorentz

Dados um $\mathbb{R}$-espaço vetorial V de dimensão finita e uma forma bilinear simétrica não-degenerada $g : V \times V \to \mathbb{R}$, ou seja, se $g(X, Y) = 0$ para todo $Y \quad V$ então $X = 0$, definimos o *índice* ν de g como a dimensão máxima de um subespaço $W \quad V$ tal que $g_{|W}$ é definida negativa.

Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de V e $g(e_i, e_j) = \pm\delta_{ij}$ para todo $i = 1, \ldots, n$ dizemos que essa é uma base ortonormal de V e então a matriz de g relativa a essa base será $(g_{ij}) = (g(e_i, e_j)) = (\delta_{ij}\varepsilon_j)$, onde $\varepsilon_j = g(e_j, e_j)$. Ordenamos os vetores de uma base ortonormal de maneira que os sinais negativos ε_j, se houver algum, apareçam primeiro em $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Chamamos essa n-upla $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de *assinatura* da forma g.

Por exemplo em $\mathbb{R}^3$ tome a seguinte forma bilinear simétrica não-degenerada $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $g(X, Y) = x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3$. É fácil ver que g possui assinatura $(-, -, +)$.

Dada g uma forma bilinear simétrica não-degenerada dizemos que um vetor $X = 0 \quad V$ é um *vetor nulo* se $g(X, X) = 0$.

Dizemos que um espaço vetorial V é *degenerado* se existe $X = 0$ tal que $g(X, Y) = 0$ para todo $Y \quad V$.

Definimos o espaço de Lorentz $\mathbb{L}^n$, como sendo o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ munido com a forma bilinear simétrica não-degenerada $\ ,\ $ dada por $\ x, y\ = -x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$. Pode-se mostrar que $\ ,\ $ é uma forma bilinear simétrica não-degenerada de índice 1.

Em geral, dizemos que uma forma bilinear simétrica tem assinatura de Lorentz quando for não-degenerada de índice 1.

Seja $v \quad \mathbb{L}^n$, definimos a *norma lorentziana* de v por

$$||v|| = \sqrt{\ v, v\ }.$$

Se W é um subespaço de $\mathbb{L}^n$ de dimensão k e $W^\perp = \{X \quad \mathbb{L}^n \mid \ X, Y\ = 0 \quad Y \quad W\}$, então $dimW + dimW^\perp = n$ e $(W^\perp)^\perp = W$. Apesar disso não teremos necessariamente que $\mathbb{L}^n = W \quad W^\perp$. Por exemplo, em $\mathbb{L}^2$ tome o subespaço W gerado pelo vetor $(1, 1)$, então $W^\perp = W$.

Vamos ver algumas proposições que nos auxiliarão, mais adiante, ao trabalharmos com subespaços degenerados.

Proposição 1.6 *Seja* $Z \quad \mathbb{L}^n$ *tal que* $\ Z, Z \ < 0$ *então:*

(i) $\ ,\ |_{span\{Z\}}$ *é não-degenerada de índice* 1 *e* $\mathbb{L}^n = span\{Z\} \quad (span\{Z\})^{\perp}$*;*

(ii) $\ ,\ |_{(span\{Z\})^{\perp}}$ *é definida positiva.*

Demonstração: É imediato que se $\ Z, Z \ < 0$, então $\ ,\ |_{(span\{Z\})}$ é não-degenerada de índice 1.

Seja $S \quad span\{Z\} \cap (span\{Z\})^{\perp}$. Temos que existe $a \quad \mathbb{R}$ tal que $S = aZ$, e ainda, que $\ S, Z \ = 0$. Portanto $0 = \ S, Z \ = a \ Z, Z \$ mas como $\ Z, Z \ < 0$ isso implica que $a = 0$, logo $S = 0$. Então $dim(span\{Z\} + (span\{Z\})^{\perp}) = dim(span\{Z\}) + dim(span\{Z\})^{\perp} = n$ e assim provamos (i).

Para provarmos (ii), primeiro mostraremos que $\ ,\ |_{(span\{Z\})^{\perp}}$ é semi-definida positiva. Por absurdo, suponhamos que existe $S \quad (span\{Z\})^{\perp}$ tal que $\ S, S \ < 0$. Como $\ S, Z \ = 0$ segue que $\ ,\ |_{span\{S,Z\}}$ é definida negativa e $dimspan\{S, Z\} = 2 > 1$ (índice de $\mathbb{L}^n$). Absurdo. Portanto $\ S, S \ \geq 0$ para todo $S \quad (span\{Z\})^{\perp}$.

Não é dificil ver que vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz (pois $\ ,\ |_{(span\{Z\})^{\perp}}$ é semi-definida positiva)

$$\ X, Y \ ^2 \leq \ X, X \ \ Y, Y \qquad X, Y \quad (span\{Z\})^{\perp}.$$

E finalmente, como $\ ,\ |_{(span\{Z\})^{\perp}}$ é semi-definida positiva, basta verificarmos que se $X \quad (span\{Z\})^{\perp}, X = 0$ implica que $\ X, X \ = 0$. Suponhamos $X \quad (span\{Z\})^{\perp}$ e $\ X, X \ = 0$. Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, para todo $Y \quad (span\{Z\})^{\perp}$

$$\ X, Y \ ^2 \leq \ X, X \ \ Y, Y \ = 0$$

$$\ X, Y \ = 0 \qquad Y \quad (span\{Z\})^{\perp}$$

logo $X \quad span\{Z\}$ o que implica que $X = 0$. E assim provamos (ii). □

Proposição 1.7 *Se* W *é um subespaço de* $\mathbb{L}^n$*, então* $\ ,\ |_W$ *é não-degenerada de índice 1, se e somente se,* $\ ,\ |_{W^{\perp}}$ *é definida positiva.*

Demonstração: Suponhamos que $\ ,\ |_W$ seja não-degenerada de índice 1. Então existe $S = 0 \quad W$ tal que $\ S, S \ < 0$. Pela proposição 1.6 $\ ,\ |_{(span\{S\})^\perp}$ é definida positiva e para todo $Z \quad W^\perp \quad (span\{S\})^\perp$ temos $\ Z, Z \ > 0$. Logo $\ ,\ |_{W^\perp}$ é definida positiva.

Agora, suponhamos que $\ ,\ |_{W^\perp}$ é definida positiva. Se $S \quad W$ é tal que $\ S, Z \ = 0$ para todo $Z \quad W$, então $S \quad W^\perp$ e $\ S, S \ = 0$. Mas como $\ ,\ |_{W^\perp}$ é definida positiva temos que $S = 0$. Portanto $\ ,\ |_W$ é não-degenerada. Observamos que $n = dimW + dimW^\perp$, e ainda, $W \cap W^\perp = \{0\}$, pois W é não-degenerado. Logo temos que $\mathbb{L}^n = W \quad W^\perp$. Como o índice de $\ ,\ $ em $\mathbb{L}^n$ é 1, existe $\widetilde{Z} = 0 \quad \mathbb{L}^n$ tal que $\ \widetilde{Z}, \widetilde{Z} \ < 0$, mas $\widetilde{Z} = Z_W + Z_{W^\perp}$ logo $0 > \ Z_W + Z_{W^\perp}, Z_W + Z_{W^\perp} \ = \ Z_W, Z_W \ + \ Z_{W^\perp}, Z_{W^\perp}$ o que implica que $\ Z_W, Z_W \ < 0$. Logo $\ ,\ |_W$ possui índice maior ou igual a 1. Mas por outro lado o índice de $\ ,\ |_W$ é menor ou igual ao índice de $\ ,\ |_{\mathbb{L}^n}$ que é 1. Portanto $\ ,\ |_W$ possui índice 1. □

Cristina - pg 5

Proposição 1.8 *Seja W um subespaço, de dimensão k, de $\mathbb{L}^n$, sendo $k \geq 2$. São equivalentes*

(i) $\ ,\ |_W$ é não-degenerada de índice 1;

(ii) W contém dois vetores nulos, linearmente independentes;

(iii) existe $Z \quad W$, $Z = 0$ tal que $\ Z, Z \ < 0$.

Demonstração: $(i) \quad (ii)$

Sendo $\ ,\ |_W$ não-degenerada de índice 1 temos que existe uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_k\}$ de W tal que $\ e_1, e_1 \ = -1$ e $\ e_i, e_j \ = \delta_{ij}$, $i = 1$. Então é imediato verificar $e_1 - e_2$ e $e_1 + e_2$ são vetores nulos linearmente independentes.

$(ii) \quad (iii)$

Sejam X e Y vetores nulos linearmente independentes de W. Como e_1 é um vetor unitário em $\mathbb{L}^n$ tal que $\ e_1, e_1 \ = -1 < 0$ então pela Proposição 1.6 existem $a, b \quad \mathbb{R}$

(podemos supor sem perda de generalidade que ambos são positivos) tais que $X = ae_1 + X'$ e $Y = be_1 + Y'$ com $X', Y' \quad (span\{e_1\})^{\perp}$. Observamos que $X', X' = a^2$ e $Y', Y' = b^2$. Temos ainda que a desigualdade de Cauchy-Schwarz vale para $, \; |_{(span\{e_1\})^{\perp}}$ pois essa é definida positiva. Logo $| \; X', Y' \; | \leq ||X'||||Y'|| = ab$. Se $X', Y' = ab$, então existe $c \quad \mathbb{R}$ tal que $X' = cY'$ o que implica $c = a/b$ logo $X = cY$ o que é um absurdo. Portanto $X', Y' < ab$. Temos então que $X, Y = -ab + X', Y' < 0$. Agora, tomando $Z = X + Y$ temos

$$X + Y, X + Y = 2 \; X, Y < 0.$$

$(iii) \quad (i)$

Seja $Z \quad W$ tal que $Z, Z < 0$, então $W^{\perp} \quad (span\{Z\})^{\perp}$. Como $, \; |_{(span\{Z\})^{\perp}}$ é definida positiva então $, \; |_{W^{\perp}}$ também é definida positiva. Então como $W = (W^{\perp})^{\perp}$ e pela proposição 1.7 $, \; |_W$ é não-degenerada de índice 1. □

Corolário 1.9 *Seja W um subespaço de $\mathbb{L}^n$ degenerado. Então $dim(W \cap W^{\perp}) = 1$.*

Demonstração: Como W é degenerado temos que $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ e $W \cap W^{\perp}$ é um subespaço degenerado. Suponhamos que $dim(W \cap W^{\perp}) \geq 2$. Como temos que exitem dois vetores nulos l.i em $W \cap W^{\perp}$ pela proposição 1.8 (i) temos que $, \; |_{W \cap W^{\perp}}$ é não-degenerada de índice 1. Absurdo. □

Capítulo 2

Formas Bilineares Planas

Neste capítulo, apresentaremos resultados básicos sobre a teoria de formas bilineares planas, bastante importante para o desenvolvimento deste trabalho. A teoria de formas bilineares planas aqui apresentada é um desenvolvimento natural da teoria de Cartan sobre formas quadráticas exteriormente ortogonais [Ca]. Para este estudo, foram consultados [D1] e [Mo].

2.1 Conceitos Básicos

Sejam V e W espaços vetoriais reais n-dimensionais e seja $\beta : V \times V \to W$ uma forma bilinear. Denotamos por $S(\beta)$ o subespaço de W gerado pela imagem de β, isto é, $S(\beta) = span\{\beta(X,Y) : X, Y \in V\}$ e denotamos por $N(\beta)$ o subespaço $N(\beta) = \{X \in V : \beta(Y,X) = 0, \ \forall Y \in V\}$ chamado de núcleo direito de β, ou ainda, chamado de *espaço de nulidade de* β. Da mesma forma podemos definir o núcleo esquerdo de β. Se β é simétrica os núcleos direito e esquerdo coincidem.

Dizemos que uma forma bilinear β é *plana*[1] com respeito a uma forma bilinear simétrica $\langle \, , \, \rangle : W \times W \to \mathbb{R}$ se, e somente se,

$$\langle \beta(X,Y), \beta(Z,U) \rangle = \langle \beta(X,U), \beta(Z,Y) \rangle$$

para todo $X, Y, Z, U \in V$.

[1]Na literatura (em português) é usual encontramos o termo flat ao invés de plana(s)

A seguir apresentamos exemplos geométricos onde aparecem formas bilineares planas de maneira natural, ou ainda, como ferramenta para auxiliar a resolver um certo tipo de problema.

1) Seja $f : M^m \to N^n$ uma imersão isométrica totalmente geodésica. Nesse caso sua segunda forma fundamental é identicamente nula, e portanto, trivialmente uma forma bilinear plana.

2) Dada $f : M_c^m \to N_c^n$ uma imersão isométrica, entre variedades de curvatura seccional constante c, podemos verificar que sua segunda forma fundamental é plana usando a equação de Gauss.

3) Seja $f : M_c^m \to N_{\tilde{c}}^n$ imersão isométrica entre variedades de curvaturas seccionais constantes distintas c e $\tilde{c}$. colunas Ponha $V = T_pM$ e $W = T_p^fM^\perp \quad \mathbb{R}$ e defina $\beta : V \times V \to W$ por

$$\beta(X,Y) = (\alpha^f(p)(X,Y), \sqrt{c - \tilde{c}} \;\; X,Y \;\;)$$

onde $\;\;,\;\;$ é uma forma bilinear simétrica definida positiva sobre V e $\alpha^f(p) : T_pM \times T_pM \to T_pM^\perp$. Defina uma forma bilinear simétrica $\;\;,\;\; : W \times W \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$(x,y),(s,t) \;\; = \;\; x,s \;\; - yt.$$

A equação de Gauss para f mostra que β é plana com respeito a $\;\;,\;\;$. De fato, da equação de Gauss para f temos

$$R_M(X,Y)Z,W \;\; = \;\; R_N(X,Y)Z,W \;\; + \;\; \alpha^f(X,W),\alpha^f(Y,Z) \;\; - \;\; \alpha^f(X,Z),\alpha^f(Y,W)$$

$$c(X \quad Y)Z,W \;\; = \;\; \tilde{c}(X \quad Y)Z,W \quad \alpha^f(X,W),\alpha^f(Y,Z) \;\; - \;\; \alpha^f(X,Z),\alpha^f(Y,W)$$

desenvolvendo obtemos

$$(c - \tilde{c})(\;\; Y,Z \quad X,W \;\; - \;\; X,Z \quad Y,W \;\;) = \;\; \alpha^f(X,W),\alpha^f(Y,Z) \;\; - \;\; \alpha^f(X,Z),\alpha^f(Y,W) \;\; .$$

E a propriedade de β ser plana sai de

$$\beta(X,Y),\beta(S,T) \quad - \quad \beta(X,T),\beta(S,Y) \quad =$$

$$\alpha^f(X,Y),\alpha^f(S,T) \ -(c-\widetilde{c})\ X,Y \quad S,T\ -\ \alpha^f(X,T),\alpha^f(S,Y)\ +(c-\widetilde{c})\ X,T \quad S,Y \ = 0$$

Notemos que $\ ,\ $ possui assinatura de Lorentz $(1, N-n)$.

4) Considere ainda a imersão f do exemplo anterior e tome uma imersão isométrica umbílica $g : N^n_{\widetilde{c}} \to \overline{N}^{n+1}_{\overline{c}}$, com $\overline{c} = 2\widetilde{c} - c$. A forma bilinear plana β definida acima pode então ser vista como a segunda forma fundamental da composição $(g \circ f)$.

Antes do próximo exemplo definiremos o seguinte: uma forma bilinear β é *nula* com respeito a uma forma bilinear simétrica $\ ,\ $ se, e somente se, $\beta(X,Y),\beta(S,U) \ = 0$ para todo $X,Y,S,U \quad V$. Claramente, toda forma nula é plana.

5) As formas bilineares planas podem ser úteis em problemas de rigidez para subvariedades. Antes disso seja M^n uma variedade riemanniana e $f, \widetilde{f} : M^n \to Q^N_c$ imersões isométricas cujas segundas formas fundamentais são α_f e $\alpha_{\widetilde{f}}$. Ponha $V = T_pM$ e $W = T^f_pM^\perp \quad T^{\widetilde{f}}_pM^\perp$, $p \quad M$, e defina $\beta : V \times V \to W$ por

$$\beta(X,Y) = (\alpha_f(X,Y), \alpha_{\widetilde{f}}(X,Y)).$$

Defina $\ ,\ : W \times W \to \mathbb{R}$ da seguinte maneira: dados $X,Y \quad W$ podemos decompor $X = X' + X''$ e $Y = Y' + Y''$ com $X',Y' \quad T^f_pM^\perp$ e $X'',Y'' \quad T^{\widetilde{f}}_pM^\perp$, defina então

$$X,Y \ = \ X',Y' \ - \ X'',Y'' \ .$$

Temos que β é plana com respeito a $\ ,\ $. De fato,

$$\begin{aligned}
& \beta(X,Y),\beta(S,T) \ - \ \beta(X,T),\beta(S,Y) \\
= \ & (\alpha_f(X,Y),\alpha_{\widetilde{f}}(X,Y)),(\alpha_f(S,T),\alpha_{\widetilde{f}}(S,T)) \\
- \ & (\alpha_f(X,T),\alpha_{\widetilde{f}}(X,T)),(\alpha_f(S,Y),\alpha_{\widetilde{f}}(S,Y)) \\
= \ & \alpha_f(X,Y),\alpha_f(S,T) \ - \ \alpha_{\widetilde{f}}(X,Y),\alpha_{\widetilde{f}}(S,T) \\
- \ & \alpha_f(X,T),\alpha_f(S,Y) \ + \ \alpha_{\widetilde{f}}(X,T),\alpha_{\widetilde{f}}(S,Y)
\end{aligned}$$

e o último termo se anula pelas equações de Gauss de f e $\widetilde{f}$.

Lembramos que uma imersão isométrica $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ é *rígida* se dada qualquer outra imersão isométrica $g : M^n \to Q_c^{n+p}$, existe uma isometria $\tau : Q_c^{n+p} \to Q_c^{n+p}$ tal que $g = \tau \circ f$.

Para ver como a teoria das formas bilineares planas se relaciona com o problema de rigidez de subvariedades, usaremos o teorema fundamental das subvariedades. Suponhamos que queremos mostrar que existe uma isometria $\tau : \mathbb{Q}_c^N \to \mathbb{Q}_c^N$ tal que $\widetilde{f} = \tau \circ f$. O teorema fundamental nos diz que é suficiente mostrar:

(i) em cada ponto $p \quad M$, existe um isomorfismo linear isométrico $L_p : T_p^f M^\perp \to T_p^{\widetilde{f}} M^\perp$ tal que $\alpha_{\widetilde{f}} = L_p \circ \alpha_f$;

(ii) estas isometrias lineares formam juntas um isomorfismo de fibrado vetorial

$$L : TM_f^\perp \to TM_{\widetilde{f}}^\perp$$

tal que $L(\ {}_X^{f^\perp} \xi) = \ {}_X^{\widetilde{f}^\perp} L(\xi)$.

A teoria das formas bilineares planas nos ajudará a resolver (i) trazendo a questão de quando uma forma bilinear plana é nula. Pois com um argumento simples temos que se β é nula então existe uma isometria linear L_p tal que $\alpha_{\widetilde{f}} = L_p \circ \alpha_f$. De fato podemos escolher $X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_k$ tais que, definindo $\xi_i = \alpha_f(X_i, Y_i)$, para todo $i = 1, \ldots, k$, temos que $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ é uma base de $S(\alpha_f)$. Defina $\eta_i = \alpha_{\widetilde{f}}(X_i, Y_i)$. Como β é nula temos

$$0 = \ \beta(X_i, Y_i), \beta(X_j, Y_j) \ = \ (\xi_i, \eta_i), (\xi_j, \eta_j) \ = \ \xi_i, \xi_j \ - \ \eta_i, \eta_j$$

logo $\ \xi_i, \xi_j \ = \ \eta_i, \eta_j \ $. Portanto se $\sum_{i=1}^k a_i \eta_i = 0$ temos para todo $j = 1, \ldots, k$

$$0 = \ \sum_{i=1}^k a_i \eta_i, \eta_j \ = \sum_{i=1}^k a_i \ \eta_i, \eta_j \ = \sum_{i=1}^k a_i \ \xi_i, \xi_j \ = \ \sum_{i=1}^k a_i \xi_i, \xi_j$$

$$\sum_{i=1}^k a_i \xi_i = 0$$

o que implica que $a_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Logo, $\eta_1, \ldots, \eta_k$ são l.i. Então $dim S(\alpha_{\widetilde{f}}) \geq dim S(\alpha_f)$. De maneira análoga mostramos a outra desigualdade e então

$dimS(\alpha_{\tilde{f}}) = dimS(\alpha_f)$. Agora defina $L_p(\xi_j) = \eta_j$. Então L_p é um isomorfismo e pelo que vimos acima temos

$$\xi_i, \xi_j \ = \ L_p(\xi_i), L_p(\xi_j) \ .$$

2.2 Propriedades Principais

Os resultados que apresentamos a seguir serão usados em demonstrações de teoremas nos capítulos posteriores.

teoflat1

Teorema 2.1 *Suponha que $\beta : V \times V \to W$ é uma forma bilinear plana com respeito a uma forma bilinear simétrica não-degenerada $\ ,\ : W \times W \to \mathbb{R}$. Então existe um subespaço $V_0 \quad V$ e um subespaço $W_0 \quad W$ tais que:*

(a) $dimV_0 \geq dimV - dimW + dimW_0$;

(b) W_0 é um subespaço nulo, ou seja, a restrição de $\ ,\ _{|W_0}$ é zero;

(c) $\beta(V, V_0) \quad W_0$.

Para a demonstração do Teorema 2.1 precisamos de dois lemas e mais alguns conceitos. Se $\beta : V \times V \to W$ é uma forma bilinear e $X \quad V$, definimos uma transformação linear $\beta_X : V \to W$ por $\beta_X(Y) = \beta(X, Y)$.

Dizemos que um elemento X é *regular* para β se, e somente se,

$$dim\beta_X(V) = max\{dim\beta_Y(V);\ Y \quad V\}.$$

Denotaremos o conjunto dos elementos regulares de β por RE(β).

Lema 2.2 *RE(β) é um subconjunto aberto e denso de V.*

Demonstração: Primeiramente observamos que RE(β) = . Seja X um elemento regular para β e sejam $Z_1, \ldots, Z_r \quad V$ tais que $\beta(X, Z_1), \ldots, \beta(X, Z_r)$ sejam l.i., e $\beta(X, V) = span\{\beta(X, Z_i),\ 1 \leq i \leq r\}$. Para todo Y numa vizinhança de $0 \quad V$, por continuidade, os vetores $\beta(X+Y, Z_j)$, $1 \leq j \leq r$, são l.i.. Isto implica que RE(β) é aberto. Dado $Y \quad V$, como $\beta(Y+tX, Z_j) = \beta(Y, Z_j) + t\beta(X, Z_j)$, podemos escolher uma sequência $\{t_k\}$ de números reais, convergindo para 0, tal que para todo k teremos $Y + t_k X \quad$ RE(β). Portanto RE(β) é denso. □

Lema 2.3 *Seja $X \quad V$ um elemento regular para a forma bilinear β. Então*

$$\beta(Y,N) \quad \beta_X(V) \qquad Y \quad V \qquad N \quad ker(\beta_X) \tag{2.1}$$

Demonstração: Seja a função $\varphi_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi_Y(t) = dim\beta_{X+tY}(V)$. Temos que esta função é semi-continua inferiormente. Se $\beta_{X+tY}(Z_1), \ldots, \beta_{X+tY}(Z_k)$ são linearmente independendentes quando $t = t_0$ esses vão ser ainda l.i quando t estiver próximo de t_0. Quando $t = 0$, φ_Y assume seu valor máximo q, pois X é regular. Portanto quando t estiver próximo de 0, $\varphi_Y(t) = q$ e $\beta_{X+tY}(V)$ é um subespaço q-dimensional de W variando continuamente com t.

Se $N \quad ker(\beta_X)$ então $\beta_X(N) = 0$. Temos que $t\beta(Y,N) = \beta_X(N) + t\beta_Y(N) = \beta_{X+tY}(N) \quad \beta_{X+tY}(V)$. Se $t = 0$ então $\beta(Y,N) \quad \beta_{X+tY}(V)$. Por continuidade, $\beta(Y,N) \quad \beta_X(V)$. Como Y pode ser escolhido arbitrariamente, concluimos que $\beta(Y,N) \quad \beta_X(V)$ para todo $Y \quad V$. □

Demonstração: (do teorema 2.1)

Seja X um elemento regular para β e seja $N \quad ker(\beta_X)$. Como β é plana temos

$$\beta(X,Y), \beta(Z,N) \; = \; \beta(X,N), \beta(Z,Y) \; = 0$$

logo moore

$$\beta_X(Y), \beta(S,N) \; = 0 \qquad Y,S \quad V, \qquad N \quad ker(\beta_X). \tag{2.2}$$

Fixe X um elemento regular de V. Defina

$$V_0 = ker(\beta_X)$$

e

$$W_0 = \{S \quad \beta_X(V) : \;\; S, Y \;\; = 0 \qquad Y \quad \beta_X(V)\} = \beta_X(V) \cap (\beta_X(V))^{\perp}.$$

Então

(a)

$$dimV_0 \geq dimV - dimW + dimW_0$$

pois, $dimW_0 \leq dim(\beta_X(V))^{\perp} = dimW - dim\beta_X(V) = dimW - dimV + dimV_0$.

(b) A restrição $\;\; , \;\; |_{W_0}$ é zero. De fato, para todo $S \quad W_0$ temos $\;\; S, Y \;\; = 0$ para todo $Y \quad \beta_X(V)$, em particular, para todo $Y \quad W_0$.

(c) Dado $S = \beta(Y, N)$ com $Y \quad V$ e $N \quad V_0$. Pela equação (2.2) segue que $\;\; S, \beta_X(V) \;\; = 0$. E pela equação (2.1) $S \quad \beta_X(V)$. Logo $S \quad W_0$. □

Corolário 2.4 *Se $\beta : V \times V \to W$ é plana com respeito a uma forma bilinear simétrica definida positiva $\;\; , \;\;$ sobre W, então $dimN(\beta) \geq dimV - dimW$. Além disso, se $dimN(\beta) = dimV - dimW$, então existe $X \quad V$ tal que β_X é sobrejetora.*

Demonstração: Tome X, W_0 e V_0 como na demonstração do Teorema 2.1. Como $\;\; , \;\;$ é definido positivo, então $W_0 = \{0\}$. Logo $dimV_0 \geq dimV - dimW$. E ainda temos que $V_0 = N(\beta)$. De fato, já temos que $N(\beta) \quad V_0$. Por outro lado, seja $N \quad V_0$ e seja $Y \quad V$ qualquer, segue da demonstração do Teorema 2.1 que $\beta(Y, N) \quad W_0$, pois X é regular. Logo $N \quad N(\beta)$. Portanto $dimN(\beta) \geq dimV - dimW$.

Agora se $dimN(\beta) = dimV - dimW$, pelo teorema do núcleo e da imagem para β_X, temos $dimV = dimker\beta_X + dim\beta_X(V)$ e daí segue que $\beta_X(V) = W$. □

O corolário a seguir é a versão lorentziana do corolário acima.

Corolário 2.5 *Suponha que $\beta : V \times V \to W$ é plana com respeito a uma forma bilinear simétrica $\;\; , \;\; : W \times W \to \mathbb{R}$ com assinatura de Lorentz, e que $S(\beta) = W$.*

Então $dimN(\beta) \geq dimV - dimW$. Além disso, se vale a igualdade existe $X \in V$ tal que β_X é sobrejetora.

Demonstração: Se existir um elemento regular $X \in V$ tal que a restrição $\langle\, , \rangle|_{\beta_X(V)\times\beta_X(V)}$ é não-degenerada, então segue que $ker(\beta_X) = N(\beta)$. De fato, como já temos que $N(\beta) \subset ker(\beta_X)$, resta mostrarmos a outra inclusão. Seja $N \in ker(\beta_X)$ e $Y \in V$, então por (2.1) $\beta(Y,N) \in \beta(X,V)$ e por (2.2) temos $\langle \beta(Y,N), \beta_X(V) \rangle = 0$ logo $\beta(N,Y) = 0$. Portanto $N(\beta) = ker(\beta_X)$. E disso obtemos $dimN(\beta) = dimker(\beta_X) = dimV - dim\beta_X(V) \geq dimV - dimW$. Portanto

$$dimN(\beta) \geq dimV - dimW.$$

E se a igualdade valer, teremos $\beta_X(V) = W$. Então o corolário fica demonstrado para o caso em que existe X regular tal que a restrição $\langle\, , \rangle|_{\beta_X(V)\times\beta_X(V)}$ é não-degenerada.

Observamos que o caso complementar do caso acima é: para todo X regular a restrição $\langle\, , \rangle|_{\beta_X(V)\times\beta_X(V)}$ é degenerada. Dentro disso temos ainda dois subcasos:

1) existe X_0 não-regular tal que $\langle\, , \rangle|_{\beta_{X_0}(V)\times\beta_{X_0}(V)}$ é não-degenerada;

2) para todo $X \in V$, $\langle\, , \rangle|_{\beta_X(V)\times\beta_X(V)}$ é degenerada.

Mas a condição (1) é vazia pelo fato do conjunto de elementos regulares ser denso em V.

Assumamos que essa forma é degenerada para todo $X \in V$. Dado um elemento regular $X \in V$, tomemos $W_0 = \beta_X(V) \cap \beta_X(V)^{\perp}$ como na demonstracão do Teorema 2.1. Como $\langle\, , \rangle$ possui assinatura de Lorentz, W_0, pelo Corolário 1.9, é um subespaço unidimensional de $\beta_X(V)$ consistindo de vetores nulos.

Lembramos que queremos mostrar a desigualdade $dimN(\beta) \geq dimV - dimW$.

Como $S(\beta) = W$, existem vetores $U, U' \in V$ tais que

$$\langle \beta(U,U'), W_0 \rangle = 0.$$

Agora seja $K = ker(\beta_U) \cap ker(\beta_X)$. O primeiro passo é mostrarmos que $K = N(\beta)$.

Já temos que $N(\beta) \quad K$ então resta mostrarmos a outra inclusão: se $N \quad K$ e da propriedade de β ser plana segue que

$$\beta(Y,N), \beta(U,U') \;=\; \beta(Y,U'), \beta(U,N) \;= 0 \qquad Y \quad V$$

e junto do fato de $\beta(Y,N) \quad W_0$ (Teorema 2.1 (c)) e pela escolha de U e U' teremos $\beta(Y,N) = 0 \qquad Y \quad V$ e daí $N \quad N(\beta)$.

O segundo passo é definirmos a aplicação linear $\psi : ker(\beta_X) \to W_0$ como $\psi(N) = \beta(U,N)$. Segue então que $dimK \geq dimker(\beta_X) - 1$. De fato, observe que $ker\psi = K$, e usando o teorema do núcleo e da imagem temos $dimker(\beta_X) = dimker\psi + dimIm(\psi) = dimK + dimIm(\psi)$ e como $Im(\psi) \quad W_0$, lembrando que W_0 é unidimensional, concluimos a desigualdade.

Agora como $dimK \geq dimker(\beta_X) - 1 = dimV - dim\beta_X(V) - 1$, logo

$$dimN(\beta) \geq dimV - (dim\beta_X(V) + 1).$$

Como a restrição de $\;,\;$ a $\beta_X(V)$ é degenerada, então $dim\beta_X(V) + 1 \leq dimW$. Portanto

$$dimN(\beta) \geq dimV - dimW.$$

Vamos supor que $dimN(\beta) = dimV - dimW$. Suponhamos por absurdo que não existe $X \quad V$ tal que β_X seja sobrejetora. Segue, do parágrafo anterior, se X é um elemento regular de V então

$$dim\beta_X(V) = dimW - 1.$$

A hipótese $S(\beta) = W$ implica que existem elementos regulares $X_1, X_2 \quad V$ tais que W é gerado por $\beta_{X_1}(V)$ e $\beta_{X_2}(V)$. Notemos que se $N \quad ker(\beta_{X_1}) \cap ker(\beta_{X_2})$ e da propriedade de β ser plana temos

$$\beta(Y,N), \beta(X_i,Z) \;=\; \beta(Y,Z), \beta(X_i,N) \;= 0 \qquad Y,Z \quad V \quad i = 1,2.$$

E portanto $\;\beta(Y,N), Y' \;= 0$ para todo $Y' \quad W$, pois W é gerado pelos $\beta_{X_i}(V)$. Então $\beta(Y,N) = 0$ para todo $Y \quad V$, daí $N \quad N(\beta)$, ou seja, $N(\beta) = ker(\beta_{X_1}) \cap$

$ker(\beta_{X_2})$. Portanto, como $ker(\beta_{X_1})$ e $ker(\beta_{X_2})$ têm dimensão estritamente maior que $N(\beta)$, existem elementos $N_i \quad ker(\beta_{X_i})\setminus N(\beta)$ que satisfazem

$$\begin{array}{ll} \beta(X_1, N_1) = 0 & \beta(X_1, N_2) = 0 \\ \beta(X_2, N_1) = 0 & \beta(X_2, N_2) = 0. \end{array}$$

E segue da propriedade de β ser plana que

$$0 = \;\beta(X_1, N_1), \beta(X_2, N_2) \;\; = \;\; \beta(X_1, N_2), \beta(X_2, N_1) \; .$$

Note que $\beta(X_1, N_2)$ e $\beta(X_2, N_1)$ são vetores nulos diferentes de zero. De fato, por (2.1) temos $\beta(X_1, N_2) \quad \beta_{X_2}(V)$ e por (2.2) segue $\;\beta_{X_2}(V), \beta(V, ker(\beta_{X_2}))\; = 0$. Logo concluimos $\;\beta(X_1, N_2), \beta(X_1, N_2)\; = 0$. Da mesma maneira concluimos para $\beta(X_2, N_1)$.

Como estamos num espaço munido de produto interno de Lorentz o fato do produto interno de dois vetores nulos ser zero implica que esses vetores são l.d (Proposição 1.8), ou seja, existe $\alpha = 0$ tal que $\beta(X_1, N_2) = \alpha\beta(X_2, N_1)$. Por (2.2) segue

$$\beta(X_1, N_2), \beta(X_1, Y) \;\; = \;\; \alpha\beta(X_2, N_1), \beta(X_1, Y) \;\; = 0 \qquad Y \quad V.$$

Portanto $\beta(X_1, N_2)$ é ortogonal a $\beta_{X_1}(Y)$ para todo $Y \quad V$. Da mesma maneira, teremos que $\beta(X_1, N_2)$ é ortogonal a $\beta_{X_2}(Y)$ para todo $Y \quad V$. E como W é gerado por $\beta_{X_1}(V)$ e $\beta_{X_2}(V)$ temos que $\beta(X_1, N_2)$ é ortogonal a W, logo, $\beta(X_1, N_2) = 0$, pois $\;,\;$ é não degenerado. Uma contradição, pois $\beta(X_1, N_2)$ é diferente de zero.

$\square$

Enfraquecendo a hipótese $S(\beta) = W$ no corolário (2.5), obtemos o seguinte resultado:

Corolário 2.6 *Suponha que $\beta : V \times V \to W$ é plana com respeito a uma forma bilinear simétrica $\;,\; : W \times W \to \mathbb{R}$ com assinatura de Lorentz. Então W possui uma decomposição em soma direta*

$$W = W_1 \quad W_2$$

tal que W_1 e W_2 são não-degenerados, e se β_1 e β_2 são as W_1 e W_2-componentes de β. Então *(i)* β_1 *é nula;*

(ii) $S(\beta_2) = W_2$ *e* $dimN(\beta_2) \geq dimV - dimW_2$.

Demonstração: Seja

$$S(\beta)_0 = \{Z \quad S(\beta);\ Z, \widetilde{Z} \ = 0, \ \ \widetilde{Z} \quad S(\beta)\} = S(\beta) \cap S(\beta)^{\perp}$$

e seja W_2 um complemento de $S(\beta)_0$ em $S(\beta)$, isto é, $S(\beta) = W_2 \quad S(\beta)_0$. A restrição $\ , \ |_{W_2 \times W_2}$ é não-degenerada. De fato, seja $X \quad W_2$ tal que $\ X, Y \ = 0 \qquad Y \quad W_2$. Para todo $U = U_{W_2} + U_{S(\beta)_0} \quad S(\beta)$ temos $\ U, X \ = \ U_{W_2}, X \ + \ U_{S(\beta)_0}, X \ = 0$. Logo $X \quad S(\beta)_0$, ou seja, $X = 0$.

Seja W_1

se existem subespaços W_1 e W_2 de W tais que $W = W_1 \quad W_2$ e

(a) $dimW_i \geq 1$ para $i = 1, 2$;

(b) $S(\beta_1) \quad W_1$ e $S(\beta_2) \quad W_2$;

(c) $\beta(X, Y) = \beta_1(X, Y) + \beta_2(X, Y) \quad X, Y \quad V$.

Se, além disso, W estiver munido de uma forma bilinear simétrica não-degenerada $\;,\;$ e $W_1 \quad W_2$ dizemos que essa decomposição é *ortogonal*.

No decorrer do trabalho, diremos que uma forma bilinear plana β é *redutível* se β admitir uma decomposição ortogonal $\beta = \beta_1 + \beta_2$, com β_1 e β_2 planas.

Se β é simétrica, ponha $V' = V/N(\beta)$ e $W' = S(\beta)$ então β induz uma aplicação bilinear simétrica $\beta' : V' \times V' \to W'$ da seguinte maneira

$$(\overline{X}, \overline{Y}) \to \beta'(\overline{X}, \overline{Y}) = \beta(X, Y)$$

onde $\overline{X} = \{X + N(\beta); X \quad V\}$ e $\overline{Y} = \{Y + N(\beta); Y \quad V\}$. Observamos que β' está bem definida. De fato, sejam $(\overline{X}, \overline{Y}) = (\overline{U}, \overline{S})$ logo $X = U + N_1$ e $Y = S + N_2$ com $N_1, N_2 \quad N(\beta)$, então $\beta(X, Y) = \beta(U + N_1, S + N_2) = \beta(U, S)$. Portanto $\beta'(\overline{X}, \overline{Y}) = \beta'(\overline{U}, \overline{S})$.

Segue que $N(\beta') = \overline{0}$ e $S(\beta') = W'$. Se, ainda, β é plana com respeito à forma bilinear simétrica $\;,\;$ sobre W então β' será plana com respeito a $\;,\; |_{W' \times W'}$.

Observemos que se $\;,\;$ é não-degenerado sobre W, sua restrição a W' não necessariamente será não-degenerada. Por exemplo, ponha $W = \mathbb{L}^2$, tome o subespaço $W' = span\{(1, 1)\}$, segue que se $\;(1, 1), (w, w)\; = 0 \quad (w, w) \quad W'$, mas $(1, 1) = 0$, portanto $\;,\; |_W$ é degenerada.

Teorema 2.7 *Seja $\beta : V \times V \to W$ uma forma bilinear simétrica plana com respeito a $\;,\;$, onde $\;,\;$ é uma forma bilinear simétrica definida positiva ou possui assinatura de Lorentz, $dimN(\beta) = dimV - dimW$ e $S(\beta) = W$. Suponha também que no caso de*

, possuir assinatura de Lorentz existe e W tal que β, e é positiva definida. Então β se decompõe como

$$\beta = \beta_1 \quad \ldots \quad \beta_l, \quad l = dimW$$

onde $S(\beta_i) = W_i$ é unidimensional e não-degenerado, W_i W_j se $i = j$, e cada β_i é plana. Além do mais os subespaços W_i são unicamente determinados a menos de permutações.

Demonstração: Nos limitamos ao caso em que , é definida positiva. Para o caso de Lorentz remetemos ao artigo [Mo].

Sem perda de generalidade assumimos que $N(\beta) = 0$ e $dimV = dimW$. Pois, caso

Portanto existe uma base $\{\xi_1, \ldots, \xi_l\}$ ortonormal de W que diagonaliza simultaneamente B_Y para todo $Y \quad V$. Seja $W_i = span\{\xi_i\}$ e seja β_i a W_i-componente de β, isto é,

$$\beta_i(X,Y) = (\beta(X,Y))_{W_i} \qquad X, Y \quad V$$

onde $(\cdot)_{W_i}$ é a projeção ortogonal em W_i. Existem funcionais lineares μ_i sobre V tais que

$$(B_Y)_{|W_i} = \mu_i(Y)Id.$$

E ainda temos $\beta_i(Y,Z) = (\beta(Y,Z))_{W_i} = (\beta_Y(Z))_{W_i} = (\beta_Y \circ \beta_X^{-1} \circ \beta_X(Z))_{W_i} = (B_Y(\beta_X(Z)))_{W_i} = B_Y(\beta_X(Z))_{W_i} = B_Y(\beta_i(X,Z)) = \mu_i(Y)\beta_i(X,Z)$. Segue facilmente que cada β_i é plana e $\beta = \beta_1 \quad \ldots \quad \beta_l$.

Para demonstrarmos a unicidade dos W_i é suficiente mostrarmos a existência de um elemento $Y_0 \quad V$ para o qual $\mu_i(Y_0) = \mu_j(Y_0) \qquad i = j$, pois nesse caso os W_i serão autoespaços unidimensionais associados aos distintos autovalores de B_{Y_0}.

Se $\mu_i = \mu_j$ para todo $i = j$ então podemos escolher um elemento Y_0 que não pertence a $\bigcup_{i,j} ker(\mu_i - \mu_j)$, pois para cada par (i,j) com $i = j$ temos que $ker(\mu_i - \mu_j)$ é um hiperplano.

Suponhamos por absurdo que $\mu_i \equiv \mu_j$ para algum $i = j$. Sejam Z_i, Z_j tais que $\xi_i = \beta_X(Z_i)$ e $\xi_j = \beta_X(Z_j)$. Usando que β é plana, temos

$$\mu_i(Y) = \ B_Y\xi_i, \xi_i \ = \ \beta_Y \circ \beta_X^{-1}\xi_i, \xi_i$$

$$= \ \beta_Y(Z_i), \beta_X(Z_i) \ = \ \beta(Y, Z_i), \beta(X, Z_i) \ = \ \beta(X,Y), \beta(Z_i, Z_i) \ .$$

Portanto

$$0 = \mu_i(Y) - \mu_j(Y) = \ \beta(X,Y), \beta(Z_i, Z_i) \ - \ \beta(X,Y), \beta(Z_j, Z_j)$$

$$= \ \beta(X,Y), \beta(Z_i, Z_i) - \beta(Z_j, Z_j) \ = \ \beta_X(Y), \beta(Z_i, Z_i) - \beta(Z_j, Z_j) \qquad Y \quad V.$$

Como β_X é bijetora temos $\beta(Z_i, Z_i) = \beta(Z_j, Z_j)$. Mas $\beta(Z_i, Z_i) = \beta_{Z_i}(Z_i) = \beta_{Z_i} \circ \beta_X^{-1}(\xi_i) = B_{Z_i}(\xi_i) = \mu_i(Z_i)\xi_i$ e analogamente $\beta(Z_j, Z_j) = \mu_j(Z_j)\xi_j$. Logo concluimos que $\beta(Z_i, Z_i) = \beta(Z_j, Z_j) = 0$. Mas isso é um absurdo, pois

$$\beta(Z_i, Z_i), \beta(X, X) \;=\; \beta(X, Z_i), \beta(X, Z_i) \;=\; \beta_X(Z_i), \beta_X(Z_i) \;=\; \xi_i, \xi_i \;= 1.$$

$\square$

Capítulo 3

Composições de Imersões Isométricas

Nesse capítulo apresentamos o resultado principal (Teorema 3.7) e sua demonstração. Mas antes veremos alguns resultados auxiliares também interessantes por si mesmos.

3.1 Descrição do Problema

Sejam $f : M^n \to Q_c^{n+1}$ e $g : M^n \to Q_c^{n+p}$, $p \geq 2$ imersões isométricas. Dizemos que a imersão g é uma *composição* se existe uma imersão isométrica $h : U \quad Q_c^{n+1} \to Q_c^{n+p}$, onde U é um aberto contendo $f(M)$, tal que $g = h \circ f$.

Uma questão estudada por Marcos Dajczer e Ruy Tojeiro em [DT₁] foi encontrar condições sobre as imersões isométricas $f : M^n \to Q_c^{n+1}$ e $g : M^n \to Q_c^{n+p}$, $p \geq 2$, que garantam que g seja uma composição (local ou global).

No decorrer deste capítulo, apresentamos alguns resultados que nos auxiliarão a resolver o problema citado acima e demonstrar o resultado principal. A partir daqui M^n será uma variedade riemanniana conexa e Q_c^N uma forma espacial, ou seja, uma variedade riemanniana completa, conexa, simplesmente conexa de curvatura seccional constante c.

3.2 Teoremas Auxiliares

Seja $f : M^n \to N^{n+p}$ uma imersão isométrica. Definimos o *primeiro espaço normal da f em x* como sendo o subespaço de $T_xM^\perp$ gerado pela segunda forma fundamental da imersão f, e denotado por $N_1^f(x)$, e pode-se verificar que $N_1^f(x)$ também pode ser o seguinte conjunto

$$N_1^f(x) = \{\xi \in T_xM^\perp; A_\xi = 0\}^\perp.$$

A imersão f é chamada de 1-regular se $s_f := dimN_1^f$ =constante em toda M, neste caso, observamos que N_1^f é subfibrado de $T^fM^\perp$.

Dadas $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ e $g : M^n \to Q_c^{n+p+q}$, $q \geq 1$ imersões isométricas. Dizemos que α_g se decompõe como $\alpha_g = \alpha_f \oplus \gamma$ se existe uma isometria de fibrados $\tau : T^fM^\perp \to L \subset T^gM^\perp$ tal que α_g se decompõe ortogonalmente como $\alpha_g = \tau \circ \alpha_f \quad \gamma$, onde γ é diferenciável.

Um exemplo para ilustrar a definição acima: sejam $f : (M_1, \nabla) \to (M_2, \bar{\nabla})$ e $h : (M_2, \bar{\nabla}) \to (M_3, \tilde{\nabla})$ imersões isométricas, onde $\nabla, \bar{\nabla}$ e $\tilde{\nabla}$ são as conexões riemannianas de M_1, M_2 e M_3 respectivamente. Tome $g = h \circ f$. Observe que a segunda forma fundamental da g se decompõe. De fato, usando a equação de Gauss para h e f temos

$$\alpha_g(X,Y) = (\tilde{\nabla}_X Y)^\perp = (\bar{\nabla}_X Y + \alpha_h(X,Y))^\perp$$

$$= (\bar{\nabla}_X Y)^\perp + (\alpha_h(X,Y))^\perp = h_*(\alpha_f(X,Y)) + \alpha_h(X,Y)$$

onde $h_* : TM_2 \to TM_3$ faz o papel da τ na definição acima.

Antes de enunciarmos o primeiro teorema, vamos ver mais algumas definições que serão úteis durante sua demonstração. Seja N uma variedade diferenciável de dimensão n e $M \subset N$ uma subvariedade. Seja $TM^\perp$ o fibrado normal a M. Vamos identificar M com a 0-seção em $TM^\perp$. Uma vizinhança U_0 de M em $TM^\perp$ diz-se *convexa* se, para qualquer $u \in U_0$, temos $tu \in U_0$, para todo $t \in [0,1]$. Uma *vizinhança tubular* de M em N é um mergulho $\Phi : U_0 \to N$ de uma vizinhança convexa $U_0 \subset TM^\perp$ de M, tal que $\Phi_{|_M} = Id$. Por vezes também se chama à imagem $U \equiv \Phi(U_0)$ uma vizinhança tubular de M em N.

Segue o teorema da vizinhança tubular.

Teorema 3.1 *Qualquer subvariedade mergulhada $M \quad N$ possui vizinhança tubular.*

O teorema abaixo é o primeiro resultado que nos garante quando uma imersão isométrica $g : M^n \to Q_c^{n+p+q}$ é uma composição global. Observamos que a codimensão da f é maior do que a exigida na questão estudada em [DT1].

Teorema 3.2 *Sejam $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ um mergulho isométrico, $g : M^n \to Q_c^{n+p+q}$, $q \geq 1$, uma imersão isométrica cuja segunda forma fundamental se decompõe como $\alpha_g = \tau \circ \alpha_f \quad \gamma$. Assuma ainda que τ é paralelo[1] com respeito a conexão induzida sobre L e que existe um subfibrado vetorial de posto p, $\Sigma \quad TM \quad L$ com $\Sigma \cap TM = \{0\}$ tal que $\tilde{\ }_Z\mu \quad TM \quad L$ para todo $\mu \quad \Sigma$ e $Z \quad TM$. Então g é uma composição.*

Demonstração: Consideramos o caso $c = 0$. Considere a isometria de fibrado vetorial

$$T = Id \quad \tau : TM \quad T^f M^\perp \to TM \quad L,$$

onde Id é o endomorfismo identidade em TM e $\tau : T^f M^\perp \to L \quad T_g M^\perp$. Seja o conjunto $\Omega = T^{-1}(\Sigma)$.

Ω é transversal a TM. De fato, $\Omega_x + T_x M \quad T_x M \quad T_x^f M^\perp$ e $dim\Omega_x = p$, $dimT_x M = n$ e como $\Omega_x \cap T_x M = \{0\}$, então $dim(\Omega_x + T_x M) = n + p$. Logo $\Omega_x + T_x M = T_x M \quad T_x^f M^\perp$.

Portanto a aplicação $F : \Omega \to \mathbb{R}^{n+p}$ definida por

$$F(\xi(x)) = f(x) + \xi(x)$$

[1] Isto é, para todo $X \quad TM$ e $\xi \quad T^f M^\perp$ temos $\tau(\ {}^{\perp f}_X \xi) = (\ {}^{\perp g}_X \tau(\xi))_L$.

onde ξ uma seção local, parametriza uma vizinhança tubular de $f(M)$ se restrita a uma vizinhança U da 0-seção de Ω. Observamos que $\xi(x)$ não será tangente a $f(x)$ pois $\Omega \overline{\pitchfork} TM$. E a existência da vizinhança tubular é garantida pelo Teorema 3.1.

Seja a aplicação $G : \Omega \to \mathbb{R}^{n+p+q}$ definida por

$$G(\xi(x)) = g(x) + T(\xi(x)).$$

G é uma isometria sobre U com respeito à métrica induzida por F. De fato, seja uma seção local $\xi \in \Omega$ e coloque $\xi = X + \delta$ com $X \in TM$ e $\delta \in T^f M^\perp$. Por hipótese se $\xi \in \Omega = T^{-1}(\Sigma)$ e $Z \in TM$ então $\tilde{\nabla}_Z T(\xi) \in TM \oplus L$. Segue que

$$G_*(\xi)Z = g_*Z + \tilde{\nabla}_Z T(\xi)$$

$$= g_*Z + \tilde{\nabla}_Z T(X + \delta)$$

$$= g_*Z + (\tilde{\nabla}_Z X + \tilde{\nabla}_Z \tau(\delta))_{TM\oplus L}$$

$$= g_*Z + g_*(\nabla_Z X) + \alpha_g(X, Z) + \nabla^{g\perp}_Z \tau(\delta) + g_*(-A^g_{\tau(\delta)}Z)$$

$$= g_*(Z + \nabla_Z X - A^g_{\tau(\delta)}Z) + (\alpha_g(X, Z) + \nabla^{g\perp}_Z \tau(\delta))_L$$

$$= g_*(Z + \nabla_Z X - A^g_{\tau(\delta)}Z) + \tau \circ \alpha_f(X, Z) + \nabla^{g\perp}_Z \tau(\delta)$$

$$= g_*(Z + \nabla_Z X - A^g_{\tau(\delta)}Z) + \tau(\alpha_f(X, Z) + \nabla^{f\perp}_Z \delta)$$

e como $A^g_{\tau(\delta)}Z = A^f_\delta Z$, pois

$$\langle A^g_{\tau(\delta)}Z, X\rangle = \langle \alpha_g(X, Z), \tau(\delta)\rangle$$

$$= \langle \tau \circ \alpha_f(X, Z) + \gamma(X, Z), \tau(\delta)\rangle$$

$$= \langle \tau \circ \alpha_f(X, Z), \tau(\delta)\rangle$$

$$= \langle \alpha_f(X, Z), \delta\rangle = \langle A^f_\delta Z, X\rangle$$

obtemos

$$G_*(\xi)Z = (g \circ f^{-1})_*(f_*(Z + \nabla_Z X - A^f_\delta Z)) + \tau(\alpha_f(X, Z) + \nabla^{f\perp}_Z \delta)$$

Como a primeira e a segunda parcela são isometrias concluimos que G é isometria. Portanto

$$h : (G|_U) \circ (F|_U)^{-1} : F(U) \to \mathbb{R}^{n+p+q}$$

é uma imersão isométrica tal que $g = h \circ f$.

A prova dos outros casos é similar. A idéia é usarmos a aplicação exponencial para explicitar as aplicações F e G e o cálculo da diferencial de G será similar, levando em conta que a diferencial da exponencial é a identidade.

□

Seja (E, π, M) um fibrado vetorial de posto s sobre uma variedade M^n diferenciável. O fibrado vetorial sobre M cuja fibra $\pi^{-1}(x)$ em $x \quad M$ é o espaço vetorial de todas as aplicações simétricas r-lineares $T : T_xM \times \ldots \times T_xM \to E_x$ será denotado por $S^r(M; E)$. Se $E = M \times \mathbb{R}$ simplesmente, escreveremos $S^r(M)$.

pois é necessário Sejam V, W espaços vetoriais munidos de uma forma bilinear simétrica definida positiva. Seja $\gamma : V \times V \to W$ forma bilinear simétrica, e ainda, para todo $\xi \quad W$ definimos o operador $B_\xi : V \to V$ por $\ B_\xi X, Y\ _V = \ \gamma(X, Y), \xi\ _W$. Temos que o posto de B_ξ é

$$rk(B_\xi) = dimIm(B_\xi)$$

define-se o *posto de* γ como sendo

$$\rho := min\{rk(B_\xi); \xi \quad W, \xi = 0\}$$

Proposição 3.3 *Seja (E, π, M) um fibrado riemanniano ou lorentziano de posto s e seja $\beta \quad \Gamma(S^2(M; E))$ tal que $S(\beta_x) = E_x$ para todo $x \quad M$. Assuma ainda que para todo $x \quad M$, β_x é plana, $dimN(\beta_x) = n - s$ e no caso de Lorentz, existe $e \quad \Gamma(E)$, não necessariamente diferenciável, tal que $\ \beta_x, e\ $ é definido positivo. Então existem $\xi_1, \cdots, \xi_s \quad \Gamma(E)$, localmente, ortonormais tais que cada $\ \beta, \xi_j\ $ possui posto 1 em M.*

Demonstração: Fixamos $x \quad M$. Vemos que $\beta_x : T_xM \times T_xM \to E_x$ satistaz as condições do Teorema 2.7. Logo estendendo Y_0, da demonstração do Teorema 2.7, numa vizinhança de x obtemos o resultado localmente, ou seja, garantimos a existência das seções $\xi_1, \ldots, \xi_s$ nessa vizinhança de x.

E o posto de β, ξ_j ser 1 sai da propriedade de β_x ser plana, pois da decomposição de $\beta_x = \beta_x^1 \quad \ldots \quad \beta_x^s$ temos que cada componente é plana, logo pelos Corolários 2.4 e 2.5 segue que $dim N(\beta_x^j) \geq n - 1$ o que implica que a dimensão da imagem do operador associado é no máximo igual a 1, como esse operador não pode ser nulo concluímos que seu posto é igual a 1. $\square$

Dado um mergulho isométrico $f : M^n \to N^{n+p}$, dizemos que $f(M)$ é uma subvariedade *k-regrada* se admite uma folheação contínua k-dimensional por subvariedades totalmente geodésicas do espaço ambiente.

Lembramos que dada uma hipersuperfície $f : M^n \to N^{n+1}$, chamamos de *curvaturas principais* e *direções principais* os autovalores e autovetores, respectivamente, de seu operador forma. Denotamos por $\rho_f(x)$ o número de curvaturas principais não nulas da hipersuperfície f.

A seguir mais um resultado que nos garante quando uma imersão isométrica $g : M^n \to Q_c^{n+p}$ é uma composição global. Agora observamos que as codimensões de f e g, no teorema, são as exigidas na questão estudada por Marcos Dajczer e Ruy Tojeiro. Na demonstração do teorema a seguir usaremos o Teorema 3.2 e a Proposição 3.3.

Teorema 3.4 *Sejam $f : M^n \to Q_c^{n+1}$ um mergulho isométrico não totalmente geodésico em todo $x \quad M$ e $g : M^n \to Q_c^{n+p}$ uma imersão isométrica 1-regular tal que α_g se decompõe como $\alpha_f \quad \gamma$ com $dim(N(\gamma)) = k$ uma constante positiva. Assuma ainda que:*

i) N_1^g é paralelo;

ou uma das seguintes condições acontece para todo $x \quad M$:

ii) $\rho_f(x) \geq n - k + 2$;

iii) $\rho_f(x) \geq s_g + 1$;

iv) $k \geq 2$ *e o índice de nulidade relativa* $\nu_g(x) := dim(N(\alpha_g(x))) \leq k - 2$*;*

Se $s_g \geq 4$ *e* $k \geq n - s_g + 2$*, suponha ainda que* M^n *não contém um subconjunto aberto* k*-regrado para ambas* f *e* g*. Então* g *é uma composição.*

Demonstração: Para todo $x \quad M$, temos das equações de Gauss para f e g $\quad X, Y, Z, W \quad TM$ que

$$R(X,Y)Z,W \;= c\;(X \quad Y)Z,W \;+\; \alpha_f(X,W), \alpha_f(Y,Z) \;-\; \alpha_f(X,Z), \alpha_f(Y,W)$$

$$= c\;(X \quad Y)Z,W \;+\; \alpha_g(X,W), \alpha_g(Y,Z) \;-\; \alpha_g(X,Z), \alpha_g(Y,W)$$

restando

$$\alpha_f(X,W), \alpha_f(Y,Z) - \alpha_f(X,Z), \alpha_f(Y,W) \;=\; \alpha_g(X,W), \alpha_g(Y,Z) - \alpha_g(X,Z), \alpha_g(Y,W)\;.$$

Como α_g se decompõe

$$\alpha_f(X,W), \alpha_f(Y,Z) \;-\; \alpha_f(X,Z), \alpha_f(Y,W)$$

$$= \;\alpha_f(X,W) + \gamma(X,W), \alpha_f(Y,Z) + \gamma(Y,Z)$$

$$-\; \alpha_f(X,Z) + \gamma(X,Z), \alpha_f(Y,W) + \gamma(Y,W)$$

segue

$$\gamma(X,W), \gamma(Y,Z) \;-\; \gamma(X,Z), \gamma(Y,W) \;= 0$$

Logo γ é plana.

Do Corolário 2.4 temos que $dimN(\gamma(x)) \geq dimT_xM - dimS(\gamma(x)) = n - dimS(\gamma(x)) = n - s_g + 1$. Portanto

$$k \geq n - s_g + 1 \tag{3.1}$$

Seja $L = S(\alpha_f) = N_1^f$, que pelas nossas hipóteses é unidimensional e seja η uma seção local de L tal que $\|\eta\| = 1$.

Da equação de Codazzi de g temos:

$$(\ {}_X A^g)(Y,\eta) = (\ {}_Y A^g)(X,\eta)$$

$${}_X A^g_\eta Y - A^g_\eta \ {}_X Y - A^g_{\nabla^\perp_X \eta} Y = \ {}_Y A^g_\eta X - A^g_\eta \ {}_Y X - A^g_{\nabla^\perp_Y \eta} X$$

e da equação de Codazzi de f

$$(\ {}_X A^f_\eta) Y = (\ {}_Y A^f_\eta) X$$

$${}_X A^f_\eta Y - A^f_\eta \ {}_X Y = \ {}_Y A^f_\eta X - A^f_\eta \ {}_Y X.$$

Comparando as duas equações acima e observando que $A^f_\eta = A^g_\eta = A_\eta$ obtemos

$$A_{\nabla^\perp_Y \eta} X = A_{\nabla^\perp_X \eta} Y \qquad X, Y \quad TM. \tag{3.2}$$

Observe que para todo $X, W \quad TM$ e $Y \quad N(\gamma)$, por (3.2) obtemos:

$${}^\perp_Y \eta, \alpha_g(X,W) \ = \ A_{\nabla^\perp_Y \eta} X, W$$

$$= \ A_{\nabla^\perp_X \eta} Y, W \ = \ \ {}^\perp_X \eta, \alpha_g(Y,W) \ = \ \ {}^\perp_X \eta, \alpha_f(Y,W) \ = 0.$$

Logo para todo $Z \quad N^g_1$

$${}^\perp_Y \eta, Z \ = 0.$$

Portanto

$$(\ {}^\perp_Y \eta)_{N^g_1} = 0 \qquad Y \quad N(\gamma). \tag{3.3}$$

Queremos mostrar que

$${}^\perp_X \eta \quad N^g_1 \qquad X \quad TM \tag{3.4}$$

que será trivial se valer a condição (i). Caso contrário, suponhamos que existe um campo vetorial normal $\delta \quad N^{g\perp}_1$ tal que $\ {}^\perp_{X_0} \eta, \delta \ = 0$ para algum $X_0 \quad T_x M$. Da equação de Codazzi para $A_\delta (= 0)$, temos

$$(\ {}_X A)(Y,\delta) = (\ {}_Y A)(X,\delta)$$

$${}_X A_\delta Y - A_\delta \ {}_X Y - A_{\nabla^\perp_X \delta} Y = \ {}_Y A_\delta X - A_\delta \ {}_Y X - A_{\nabla^\perp_Y \delta} X.$$

Logo

$$A_{\nabla^{\perp}_{X}\delta}Y = A_{\nabla^{\perp}_{Y}\delta}X \qquad X, Y \quad TM.$$

Mas do fato de

$$0 = \; A_{\nabla^{\perp}_{X}\delta}Y, Z \; - \; A_{\nabla^{\perp}_{Y}\delta}X, Z$$

$$= \quad {}^{\perp}_{X}\delta, \alpha_f(Y, Z) \; - \quad {}^{\perp}_{Y}\delta, \alpha_f(X, Z) \qquad Z \quad N(\gamma),$$

ou seja,

$$ {}^{\perp}_{X}\delta, \alpha_f(Y, Z) \; = \quad {}^{\perp}_{Y}\delta, \alpha_f(X, Z) \qquad Z \quad N(\gamma)$$

temos para todo $Z \quad N(\gamma), \quad X, Y \quad TM$

$$ {}^{\perp}_{X}\delta, \eta \quad A_\eta Y, Z \; = \quad {}^{\perp}_{X}\delta, \eta \quad \eta, \alpha_f(Y, Z) \; = \quad {}^{\perp}_{X}\delta, \eta \; \eta, \alpha_f(Y, Z)$$

$$= \; (\; {}^{\perp}_{X}\delta)_{N_1^f}, \alpha_f(Y, Z) \; = \; (\; {}^{\perp}_{Y}\delta)_{N_1^f}, \alpha_f(X, Z)$$

$$= \quad {}^{\perp}_{Y}\delta, \eta \; \eta, \alpha_f(X, Z) \; = \quad {}^{\perp}_{Y}\delta, \eta \quad A_\eta X, Z \; ,$$

portanto para todo $Z \quad N(\gamma)$

$$ {}^{\perp}_{X}\delta, \eta \quad A_\eta Y, Z \; - \quad {}^{\perp}_{Y}\delta, \eta \quad A_\eta X, Z \; = 0.$$

Logo segue a condição

$$ {}^{\perp}_{X}\delta, \eta \; A_\eta Y - \quad {}^{\perp}_{Y}\delta, \eta \; A_\eta X \quad N(\gamma)^{\perp} \qquad X, Y \quad TM. \tag{3.5}$$

E ainda de (3.5)

$$ {}^{\perp}_{X}\eta, \delta \; A_\eta Y - \quad {}^{\perp}_{Y}\eta, \delta \; A_\eta X \quad N(\gamma)^{\perp} \qquad X, Y \quad TM. \tag{3.6}$$

Defina para todo $x \quad M$, $B : T_xM \to \mathbb{R}$ por $B(Z) = \quad {}^{\perp}_{Z}\eta, \delta$. Logo, se $Z \quad kerB$ temos de (3.6)

$$ {}^{\perp}_{X_0}\eta, \delta \; A_\eta Z \quad N(\gamma)^{\perp}$$

e como $\quad {}^{\perp}_{X_0}\eta, \delta \quad = 0$ segue que $A_\eta Z \quad N(\gamma)^\perp$. Portanto

$$A_\eta Z \quad N(\gamma)^\perp \qquad Z \quad kerB.$$

Isso implica que

$$\rho_f(x) \leq dimN(\gamma(x))^\perp + 1 = n - k + 1$$

pois $dimN(\gamma(x))^\perp \geq dimspan\{A_\eta Z\} \geq \rho_f(x) - 1$. O que contradiz (ii). E ainda como $k \geq n - s_g + 1$ temos $\rho_f(x) \leq n - (n - s_g + 1) + 1 = s_g \leq s_g + 1$, o que contradiz (iii).

Finalmente, se $N(\alpha_g) = N(\alpha_f) \cap N(\gamma)$, $N(\alpha_f) = kerA_\eta$, $A_\eta Z \quad N(\gamma)^\perp$ para todo $Z \quad kerB$, logo se $Y \quad N(\gamma)$, temos $\quad A_\eta Y, Z \quad = \quad Y, A_\eta Z \quad = 0$ para todo $Z \quad kerB$, ou seja, $A_\eta Y \quad (kerB)^\perp$. Tome o operador $A = A_\eta|_{N(\gamma)} : N(\gamma) \to (kerB)^\perp$. Então $kerA = kerA_\eta \cap N(\gamma) = N(\alpha_g)$. Portanto

$$dimkerA = dimN(\gamma) - dimA(N(\gamma)) \geq dimN(\gamma) - 1 = k - 1.$$

Logo

$$\nu_g(x) \geq k - 1$$

o que contradiz a condição (iv). E assim provamos a afirmação (3.4) de que $\quad {}^{\perp}_{X}\eta \quad N_1^g$ para todo $X \quad TM$.

Observamos que dessa afirmação e de (3.3) obtemos

$$ {}^{\perp}_{Y}\eta = 0 \qquad Y \quad N(\gamma). \tag{3.7}$$

Da equação de Codazzi da g para $\xi \quad T^gM^\perp \cap L^\perp$, $Y \quad N(\gamma)$ e todo $X \quad TM$, temos

$$(\quad {}_X A^g)(Y, \xi) = (\quad {}_Y A^g)(X, \xi)$$

$$ {}_X A_\xi Y - A_\xi \quad {}_X Y - A_{\nabla^\perp_X \xi} Y = \quad {}_Y A_\xi X - A_\xi \quad {}_Y X - A_{\nabla^\perp_Y \xi} X.$$

observando que $A_\xi Y = 0$ temos

$$ {}_Y A_\xi X + A_\xi [X, Y] + A_{\nabla^\perp_X \xi} Y - A_{\nabla^\perp_Y \xi} X = 0 \tag{3.8}$$

Observamos que $\;{}^{\perp}_{Y}\xi, \alpha_g(X,Z) \;=\; (\;{}^{\perp}_{Y}\xi)_{N_1^g}, \alpha_g(X,Z) \;=\; (\;{}^{\perp}_{Y}\xi)_{N_1^g}, \alpha_f(X,Z) \;=\; (\;{}^{\perp}_{Y}\xi)_{N_1^f}, \alpha_f(X,Z) \;=\; \;{}^{\perp}_{Y}\xi, \eta \;\; \eta, \alpha_f(X,Z)$, e esse último termo se anula usando (3.7). Portanto

$$\;{}^{\perp}_{Y}\xi, \alpha_g(X,Z) \;= 0. \tag{3.9}$$

E ainda

$\alpha_g(Y,Z), \;\; {}^{\perp}_{X}\xi \;=\; \alpha_g(Y,Z), (\;{}^{\perp}_{X}\xi)_{N_1^g} \;=\; \alpha_f(Y,Z), (\;{}^{\perp}_{X}\xi)_{N_1^f} \;=\; \;{}^{\perp}_{X}\xi, \eta \;\; \eta, \alpha_f(Y,Z)$,

ou seja,

$$\alpha_g(Y,Z), \;\; {}^{\perp}_{X}\xi \;=\; \;{}^{\perp}_{X}\xi, \eta \;\; \eta, \alpha_f(Y,Z) \;. \tag{3.10}$$

Tomando o produto interno de (3.8) com $Z \quad N(\gamma)$ e usando (3.3) e (3.4) temos:

$$\begin{aligned} 0 = & \;\; {}_{Y}A_\xi X + A_\xi[X,Y] + A_{\nabla^{\perp}_{X}\xi}Y - A_{\nabla^{\perp}_{Y}\xi}X, Z \\ = & \;\; {}_{Y}A_\xi X, Z \;+\; A_\xi[X,Y], Z \;+\; A_{\nabla^{\perp}_{X}\xi}Y, Z \;-\; A_{\nabla^{\perp}_{Y}\xi}X, Z \\ = & \;\; {}_{Y}A_\xi X, Z \;+\; \alpha_g(Y,Z), \;\; {}^{\perp}_{X}\xi \;-\; \;{}^{\perp}_{Y}\xi, \alpha_g(X,Z) \;. \end{aligned}$$

E por (3.9) e (3.10) concluimos que

$$\;{}_{Y}A_\xi X, Z \;+\; \;{}^{\perp}_{X}\xi, \eta \;\; \alpha_g(Y,Z), \eta \;= 0$$

o que é equivalente a

$$\tilde{\;}_{Y}Z, -A_\xi X + \;{}^{\perp}_{X}\xi, \eta \;\eta \;= 0 \tag{3.11}$$

pois $\;{}_{Y}Z + \alpha_g(Y,Z), -A_\xi X + \;{}^{\perp}_{X}\xi, \eta\;\eta \;=\; \;{}_{Y}Z, -A_\xi X \;+\; \;{}_{Y}Z, \;\;{}^{\perp}_{X}\xi, \eta\;\eta \;+\; \alpha_g(Y,Z), \;\;{}^{\perp}_{X}\xi, \eta\;\eta \;+\; \alpha_g(Y,Z), -A_\xi X \;=\; \;{}_{Y}Z, -A_\xi X \;+\; \;{}^{\perp}_{X}\xi, \eta \;\; \alpha_g(Y,Z), \eta$. E ainda, como $A_\xi X, Z \;=\; \alpha_f(X,Z), \xi \;= 0$, logo $0 = Y \;\; A_\xi X, Z \;=\; \;{}_{Y}A_\xi X, Z \;+\; A_\xi X, \;\;{}_{Y}Z$. Então segue que $\;{}_{Y}Z, -A_\xi X \;+\; \;{}^{\perp}_{X}\xi, \eta \;\; \alpha_g(Y,Z), \eta \;=\; \;{}_{Y}A_\xi X, Z \;+\; \;{}^{\perp}_{X}\xi, \eta \;\; \alpha_g(Y,Z), \eta$.

Assuma temporariamente que M^n não contém um aberto k-regrado, ou seja, nenhum aberto de M admite uma folheação k-dimensional contínua por subvariedades totalmente geodésicas do espaço ambiente.

Para cada $x \quad M$, defina o subespaço

$$W(x) = span\{(\tilde{\ }_X\xi)_{TM\oplus L} : X \quad TM, \xi \quad TM^{\perp} \cap L^{\perp}\}.$$

Para facilitar a notação, vamos denotar

$$span\{(\tilde{\ }_X\xi)_{TM} : X \quad TM, \xi \quad TM^{\perp} \cap L^{\perp}\} =: V.$$

Temos que $V = N(\gamma)^{\perp}$. De fato:

$$Z \quad V^{\perp} \Leftrightarrow \ Z, (\tilde{\ }_X\xi)_{TM} \ = 0 \qquad X, \xi \ \Leftrightarrow \ Z, A_{\xi}X \ = 0 \qquad X, \xi$$

$$\Leftrightarrow \ \alpha_g(X, Z), \xi \ = 0 \qquad X, \xi \ \Leftrightarrow \ \gamma(X, Z), \xi \ = 0 \qquad X, \xi$$

$$\Leftrightarrow \gamma(X, Z) = 0 \qquad X \ \Leftrightarrow Z \quad N(\gamma).$$

Resulta então que $W(x) \quad N(\gamma(x))^{\perp} \quad L(x)$ para todo $x \quad M$ e também que $dimW(x) \geq dimN(\gamma)^{\perp}$.

Queremos que os subespaços $W(x)$ formem um subfibrado de codimensão 1 de $N(\gamma)^{\perp} \quad L$. Para isso, basta mostrar que $L \not\subseteq W$, o que, nesse caso, significa que L é transversal a W.

Se $L(y) \quad W(y)$ em algum ponto $y \quad M$, então $W(y) = N(\gamma(y))^{\perp} \quad L(y)$, e o mesmo se verifica em uma vizinhança U de y. Segue de (3.11) que

$$\tilde{\ }_Y Z, \eta \ = \ A_{\eta}Y, Z \ = 0 \quad \text{e} \qquad _Y Z, X \ = 0 \qquad Y, Z \quad N(\gamma), \quad X \quad (N(\gamma))^{\perp}.$$

De fato, como $\eta \quad L \quad W$ então existem $\overline{\xi} \quad TM^{\perp} \cap L^{\perp}$ e $\overline{X} \quad TM$ tais que $\eta = (\tilde{\ }_{\overline{X}}\overline{\xi})_{TM\oplus L}$. Assim, $0 = (\tilde{\ }_{\overline{X}}\overline{\xi})_{TM} = -A_{\overline{\xi}}\overline{X}$ e $(\tilde{\ }_{\overline{X}}\overline{\xi})_L, \eta \ = 0$. Portanto em (3.11), para esses $\overline{\xi}$ e $\overline{X}$, temos

$$\tilde{\ }_Y Z, -A_{\overline{\xi}}\overline{X} + \quad {}^{\perp}_{\overline{X}}\overline{\xi}, \eta \ \eta \ = \quad {}^{\perp}_{\overline{X}}\overline{\xi}, \eta \quad \tilde{\ }_Y Z, \eta \ = 0,$$

isto é,

$$\tilde{\ }_Y Z, \eta \ = 0.$$

E ainda, para qualquer $\xi \quad L^\perp$ e para todo $X \quad TM$, por (3.11) segue que

$$0 = \ \tilde{}_Y Z, A_\xi X \ = \ \ _Y Z, A_\xi X \ = \ \alpha_g(\ _Y Z, X), \xi \ .$$

Logo $\alpha_g(\ _Y Z, X) \quad L$, isto é, $\gamma(\ _Y Z, X) = 0$ para todo $X \quad M$ e isso implica que $\ _Y Z \quad N(\gamma)$.

Conseqüentemente $[Y, Z]$ está em $N(\gamma)$. Logo $N(\gamma)$ é completamente integrável. E da igualdade $\ \tilde{}_Y Z, \eta \ = \ A_\eta Y, Z \ = 0$ temos que $\ \alpha_g(Y, Z), \eta \ = \ \alpha_f(Y, Z), \eta \ = 0$ o que resulta que $\alpha_f|_{N(\gamma)\times N(\gamma)} = 0$. E também temos $(\alpha_g(Y, Z))_{N_1^f} = 0$ então $\alpha_g(Y, Z) = \gamma(Y, Z) = 0$ e portanto $\alpha_g|_{N(\gamma)\times N(\gamma)} = 0$. Portanto as folhas são totalmente geodésicas em Q_c^{n+1} e Q_c^{n+p}. Absurdo.

Para concluir a prova, nesse caso, a partir do Teorema 3.2 basta tomarmos Σ como o complemento ortogonal de W em $N(\gamma)^\perp \quad L$ e verificarmos a condição $\ \tilde{}_Z \mu \quad TM \quad L$ para todo $\mu \quad \Sigma$ e $Z \quad TM$, pois as outras hipóteses do teorema estão claramente satisfeitas. Se $\mu \quad \Sigma \quad N(\gamma)^\perp \quad L \quad TM \quad L$ e $\xi \quad L^\perp \cap T^g M^\perp = (TM \quad L)^\perp$ temos $0 = X \ \mu, \eta \ = \ \ \tilde{}_X \mu, \xi \ + \ \mu, \tilde{}_X \xi \ $ logo $\ \tilde{}_X \mu, \xi \ = - \ \mu, \tilde{}_X \xi \ = - \ \mu, (\tilde{}_X \xi)_{TM\oplus L} \ = 0$.

Assim, provamos o teorema com a hipótese adicional de que M não contém um aberto k-regrado. Agora precisamos mostrar que essa hipótese pode ser retirada se $s_g < 4$ ou $k < n - s_g + 2$. Mas observe que se $k \geq n - s_g + 2$ por

$$dimN_1^g = dimN_1^f + dimS(\gamma)$$

segue que

$$s_g = 1 + dimS(\gamma) \leq 1 + 1/2(n-k)(n-k+1)$$

logo $s_g \geq 4$.

Ou seja, é suficiente mostrarmos (lembrando (3.1)) que a hipótese adicional pode ser retirada se $dimN(\gamma(x))$ tem seu valor mínimo igual a $n - s_g + 1$.

Assumindo então $dim(N(\gamma)) = n - s_g + 1$, a proposição (3.3), tomando $E = S(\gamma)$, implica que γ se decompõe ortogonalmente e diferenciavelmente como uma soma direta

$$\gamma = \gamma_1 \quad \cdots \quad \gamma_{s_g-1}$$

com posto$\gamma_j = 1$ para $1 \leq j \leq s_g - 1$.

Considere um referencial ortonormal $\xi_1, \ldots, \xi_{s_g-1}$ tal que $S(\gamma_j) = span\{\xi_j\}$. Sejam $X_1, \ldots, X_{s_g-1}$ campos tangentes locais unitários tais que

$$A_{\xi_j}(X_j) = \lambda_j X_j.$$

Como γ_j tem posto 1 e $\gamma_j(X,Y), \xi_j \; = \; \gamma(X,Y), \xi_j \; = \; A_{\xi_j}X, Y$ implica que A_{ξ_j} tem posto 1, logo λ_j é o único autovalor não-nulo de A_{ξ_j}. Por hipótese $X_1, \ldots, X_{s_g-1}$ são linearmente independentes, pois geram $N(\gamma)^{\perp}$ e $dim N(\gamma)^{\perp} = s_g - 1$.

Agora temos o seguinte: para todo $X, Z \quad TM$

$$\,^{\perp}_{X}\eta = \sum_{k=1}^{s_g-1} \quad ^{\perp}_{X}\eta, \xi_k \;\; \xi_k$$

e portanto

$$A_{\nabla^{\perp}_{X}\eta}Y = \sum_{k=1}^{s_g-1} \quad ^{\perp}_{X}\eta, \xi_k \;\; A_{\xi_k}Y.$$

Mas $A_{\xi_k}Y = \; A_{\xi_k}Y, X_k \;\; X_k$, pois a imagem de A_{ξ_k} é gerada por X_k e este é unitário. Logo

$$A_{\xi_k}Y = \lambda_k \;\; Y, X_k \;\; X_k.$$

Tomando então, na equação (3.2), $X = X_i$ e $Y = X_j$, obtemos

$$\sum_{k=1}^{s_g-1} \lambda_k \{ \quad ^{\perp}_{X_i}\eta, \xi_k \quad X_j, X_k \; - \quad ^{\perp}_{X_j}\eta, \xi_k \quad X_i, X_k \; \} X_k = 0$$

O que implica que para $j = k$

$$^{\perp}_{X_i}\eta, \xi_k \;\; = \quad ^{\perp}_{X_k}\eta, \xi_k \quad X_i, X_k$$

logo

$$\eta, \quad ^{\perp}_{X_i}\xi_k \;\; = \;\; \eta, \quad ^{\perp}_{X_k}\xi_k \quad X_i, X_k \;\; .$$

E portanto temos

$$ {}^{\perp}_{Z}\xi_k, \eta \;\; = 0 \quad \text{sempre que} \quad Z \;\; X_k. $$

E segue que

$$ W = span\{-A_{\xi_j} X_j + \quad {}^{\perp}_{X_j}\xi_j, \eta \;\, \eta : 1 \leq j \leq s_g - 1\} $$

o que implica novamente que W tem codimensão 1 em $N(\gamma)^{\perp} \quad L$. O que conclui a demonstração.

□

Observemos que, na notação do Teorema 3.4, se a curvatura seccional de M satisfizer $K_M > c$, então f não pode ser regrada. De fato, se isso ocorresse teríamos, pela equação de Gauss

$$ K_M(X,Y) = c + \;\; \alpha_f(X,X), \alpha_f(Y,Y) \;\; - \|\alpha_f(X,Y)\|^2 $$

admitindo a folheação por subvariedades totalmente geodésicas do ambiente de dimensão n teríamos, que α_f restrita a essas folheações seria identicamente nula, resultando da equação acima

$$ K_M = c $$

o que seria um absurdo.

Se g possuir o fibrado normal flat, isto é, $R^{\perp} = 0$, então existe $\{X_1, \ldots, X_n\}$ base ortonormal que diagonaliza α_g tal que $N(\gamma)^{\perp} = span\{X_1, \ldots, X_{n-k}\}$. Então

$$ S(\gamma(x)) = span\{\gamma(x)(X_i, X_i) : 1 \leq i \leq n - k\} $$

e daí teremos que $k \leq n - s_g + 1$. Por outro lado, temos da corolário (2.4) que $k \geq n - s_g + 1$. Portanto $k = n - s_g + 1$.

Para a demonstração do próximo teorema, que será usado na demonstração do teorema principal, precisamos da proposição seguinte.

Proposição 3.5 *Sejam E fibrado vetorial riemanniano de posto s e $\beta \quad \Gamma(S^2(M;E))$ tal que $S(\beta_x) = E_x$ para todo $x \quad M$. Assuma ainda que β se decompõe ortogonalmente* *como* $\beta = \varphi\eta \quad \gamma$ *onde* $\varphi \quad \Gamma(S^2(M))$, $\eta \quad \Gamma(E)$ *com* $\|\eta\| = 1$, $\gamma \quad \Gamma(S^2(M;E))$ *onde* γ *e* η *não são necessariamente diferenciáveis. Se* φ *nunca se anula, então* $\eta \quad C^\infty(E)$ *e* $\gamma \quad C^\infty(S^2(M;E))$.

Demonstração: Fixado $x \quad M$. Seja (X_{i_k}, X_{j_k}) para $1 \leq k \leq s$ o conjunto de pares tal que

$$E_x = span\{\beta(X_{i_k}, X_{j_k}); 1 \leq k \leq s\}.$$

Estenda os pares (X_{i_k}, X_{j_k}) diferenciavelmente numa vizinhança U_x de x, de modo que $\beta(X_{i_k}, X_{j_k})$ continue gerando E_y para todo $y \quad U_x$.

Em particular, existem funções bem definidas f_k em U, para $1 \leq k \leq s$ tais que

$$\eta = \sum_{k=1}^{s} f_k \beta(X_{i_k}, X_{j_k})$$

pois $\eta \quad \Gamma(E)$.

Por outro lado, as funções

$$\varphi_k = \varphi(X_{i_k}, X_{j_k})$$

para $1 \leq k \leq s$ são C^∞ e não se anulam simultaneamente em nenhum ponto de U. Além disso

$$\begin{aligned} \beta(X_{i_k}, X_{j_k}), \eta \;&=\; \eta\varphi(X_{i_k}, X_{j_k}) + \gamma(X_{i_k}, X_{j_k}), \eta \\ &=\; \eta\varphi(X_{i_k}, X_{j_k}), \eta \;+\; \gamma(X_{i_k}, X_{j_k}), \eta \\ &= \varphi(X_{i_k}, X_{j_k}) \;\; \eta, \eta \;\; = \varphi(X_{i_k}, X_{j_k}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \varphi_r = \;\; \beta(X_{i_r}, X_{j_r}), \eta \;&=\; \beta(X_{i_r}, X_{j_r}), \sum_{k=1}^{s} f_k \beta(X_{i_k}, X_{j_k}) \\ &= \sum f_k \;\; \beta(X_{i_r}, X_{j_r}), \beta(X_{i_k}, X_{j_k}) \;\; = \sum_k f_k \psi_{rk} \end{aligned}$$

onde $\psi_{rk} = \;\; \beta(X_{i_r}, X_{j_r}), \beta(X_{i_k}, X_{j_k})$ para $1 \leq r, k \leq s$ são funções C^∞ pois β e $\cdot, \cdot$ o são. E ainda, como (ψ_{rk}) é a matriz associada ao produto $\cdot, \cdot$ e este produto é não-degenerado, temos que a matriz (ψ_{rk}) é não singular, ou seja, inversível em U_x. Portanto de

$$\varphi_r = \sum_k f_k \psi_{rk}$$

concluimos que f_k, para todo $1 \leq k \leq s$, é C^∞ como queríamos. □

3.3 Demonstração do Teorema Principal

Antes de enunciar e demonstrar o Teorema principal, precisamos do resultado a seguir.

Teorema 3.6 *Sejam $f : M^n \to Q_c^{n+1}$ e $g : M^n \to Q_c^{n+p}$, $p \geq 2$ imersões isométricas onde g é 1-regular e $\rho_f(x) \geq s_g + 2$ para todo $x \quad M$.*

(a) Então α_g se decompõe ortogonalmente e diferenciavelmente como $\alpha_g = \alpha_f \quad \gamma$, onde para todo $x \quad M$, o espaço nulidade de $\gamma(x)$ verifica $dim N(\gamma(x)) \geq n - s_g + 1$;

(b) Suponha agora que f é um mergulho e $dim(N(\gamma(x)) = k$ é constante. Se $s_g \geq 6$ e $k \geq n - s_g + 2$, assuma ainda que M^n não contém um subconjunto aberto k-regrado para ambas f e g. Então g é uma composição.

Demonstração: Em $x \quad M$ defina o produto interno lorentziano sobre $W = T_x^f M^\perp \quad N_1^g(x)$ por

$$(\xi_1, \xi_2), (\delta_1, \delta_2) \quad = - \; \xi_1, \delta_1 \;_{T^f M^\perp} + \; \xi_2, \delta_2 \;_{T^g M^\perp}$$

Defina a forma bilinear simétrica $\beta : T_x M \times T_x M \to W$ por

$$\beta(X, Y) = (\alpha_f(X, Y), \alpha_g(X, Y)).$$

Temos que β é plana com respeito ao $\quad , \quad$. De fato, pelas equações de Gauss para f e g temos

$$\beta(X, Y), \beta(W, Z) \quad = \quad (\alpha_f(X, Y), \alpha_g(X, Y)), (\alpha_f(W, Z), \alpha_g(W, Z))$$

$$= - \ \alpha_f(X,Y), \alpha_f(W,Z) \ + \ \alpha_g(X,Y), \alpha_g(W,Z)$$

$$= - \ \alpha_f(X,Z), \alpha_f(W,Y) \ + \ \alpha_g(X,Z), \alpha_g(W,Y)$$

$$= \quad (\alpha_f(X,Z), \alpha_g(X,Z)), (\alpha_f(W,Y), \alpha_g(W,Y))$$

$$= \quad \beta(X,Z), \beta(W,Y) \quad .$$

Observemos que

$$N(\beta) = \{X \quad T_xM; \beta(Y,X) = 0 \qquad Y \quad T_xM\}$$

$$= \{X \quad T_xM; (\alpha_f(X,Y), \alpha_g(X,Y)) = 0 \qquad Y \quad T_xM\}$$

$$= \{X \quad T_xM; \ \alpha_f(X,Y), \xi \ = 0 \qquad Y \quad T_xM, \xi \quad T_x^fM^\perp\} \cap N(\alpha_g)$$

$$= \{X \quad T_xM; \ A_\xi X, Y \ = 0 \qquad Y \quad T_xM\} \cap N(\alpha_g)$$

$$= ker(A_\xi) \cap N(\alpha_g).$$

Então $N(\beta) \quad ker(A_\xi)$ e pelo teorema do núcleo e da imagem teremos

$$dimN(\beta) \leq n - \rho_f(x).$$

Isso implica que $S(\beta)$ é degenerada, pois se não fosse, teríamos da nossa hipótese e do corolário 2.5 que

$$dimN(\beta) \geq dimT_xM - dimS(\beta) \geq n - s_g - 1 \geq n - \rho_f(x) + 1.$$

Portanto, existe um vetor unitário $\eta \quad N_1^g(x)$ tal que

$$(N, \eta) \quad S(\beta) \cap S(\beta)^\perp$$

onde N é um vetor normal unitário a f em x. Logo,

$$(N,\eta), \beta(X,Y) \quad = 0 \qquad \beta(X,Y) \quad S(\beta)$$

então segue que

$0 = \quad (N,\eta), (\alpha_f(X,Y), \alpha_g(X,Y)) \quad = - \ N, \alpha_f(X,Y) \ _{T^fM^\perp} + \ \eta, \alpha_g(X,Y) \ _{T^gM}$. Daí

$N, \alpha_f(X,Y)\ {}_{T^fM^\perp} = \ \eta, \alpha_g(X,Y)\ {}_{T^gM}$ e como o lado esquerdo da igualdade é igual a $A_N X, Y$ e ainda temos $\alpha_g(X,Y) = \ \alpha_g(X,Y), \eta\ \eta + (\alpha_g(X,Y))_{\{\eta\}^\perp}$ concluímos

$$\alpha_g(X,Y) = \ A_N X, Y\ \eta \quad \gamma(x)$$

onde $\gamma(x)$, a $\{\eta\}^\perp$-componente de $\alpha_g(x)$, é plana. De fato, das equações de Gauss para f e g segue que

$$\alpha_f(X,W), \alpha_f(Y,Z)\ - \ \alpha_f(X,Z), \alpha_f(Y,W)$$

$$= \ \alpha_g(X,W), \alpha_g(Y,Z)\ - \ \alpha_g(X,Z), \alpha_g(Y,W)$$

$$= \ \alpha_f(X,W), N \ \ \alpha_f(Y,Z), N \ + \ \gamma(X,W), \gamma(Y,Z)\ -$$

$$\alpha_f(X,Z), N \ \ \alpha_f(Y,W), N \ + \ \gamma(X,Z), \gamma(Y,W)$$

por outro lado $\alpha_f(\cdot,\cdot) = \ \alpha_f(\cdot,\cdot), N\ N$, logo concluimos

$$\gamma(X,W), \gamma(Y,Z)\ = \ \gamma(X,Z), \gamma(Y,W)\ .$$

Tendo que $\gamma(x)$ é plana e pelo corolário 2.5 segue

$$dimN(\gamma(x)) \geq n - dimS(\gamma(x)) = n - s_g + 1.$$

Até agora concluimos a decomposição ortogonal. Resta mostrarmos que essa decomposição é diferenciável, mas isso concluimos usando a proposição 3.5 pondo $\beta = \alpha_g$, $E = N_1^g$ e $\varphi = \ \ ,\ \ $.

Para mostrarmos a parte (b), ou seja, que g é uma composição, vamos utilizar o Teorema 3.4. Mas observe que o Teorema 3.4 para $s_g \geq 4$ exige uma hipótese a mais, e temos que verificá-la aqui. Se tivermos $s_g \geq 6$, nossas hipóteses garantem que M não é k-regrada. Mas se $s_g < 6$? Para responder a essa questão vamos analisar o que aconteceria se f fosse $(n - s_g + 2)$-regrada. Se isso ocorresse teríamos que

$$s_g + 2 \leq \rho_f \leq 2(n - n - s_g + 2).$$

O que só pode occorer se $s_g \geq$ 6. Então ... nt5Tf8.7661.7t43r2. s9550T˜2lcorer Gt4-1.794Td[(g)]TJF210F21

Agora apresentamos o principal resultado do artigo [DT1].

Teorema 3.7 *Sejam* $f : M \to Q_c^{n+1}$ *e* $g : M \to Q_c^{n+p}$ *imersões isométricas com* $\rho_f(x) \geq p+2$ *para todo* $x \quad M$. *Se* $p \geq 6$ *assuma ainda que* M^n *não contém um aberto* $(n-p+2)$*-regrado para* f *e* g. *Então existe um aberto denso,* $V \quad M$, *tal que* $g_{|V}$ *é localmente uma composição.*

Demonstração: Para demonstrarmos esse resultado vamos encaixar nossas hipóteses nas do Teorema 3.6. Mas antes, seja

$$V' = \{x \quad M; \quad \text{vizinhança } U_x : dimN_1^g(y) = cte \text{ em } U_x\}.$$

Afirmamos que V' é aberto e denso. De fato, V' é claramente aberto, pois para todo $x \quad V'$ existe aberto, o próprio U_x, inteiramente contido em V'. Agora seja $\varphi : M \to \{1, 2, \ldots, p\}$ definida por

$$\varphi(x) = dimN_1^g(x).$$

E seja $V_i' = \varphi^{-1}(i)$. Temos que $M = \bigcup_{i=1}^p V_i'$. Seja $x \quad M$.

- se $x \quad V_p'$ como φ é semi-contínua inferiormente e p é máximo temos que existe vizinhanca U_x tal que $\varphi_{|U_x}$ é constante. Logo $x \quad V' \quad \overline{V'}$.

- se $x \quad V_{p-1}'$ então $\varphi(x) = p-1$. Temos duas possibilidades ou que existe vizinhança U_x tal que $\varphi_{|U_x}$ é constante, ou para toda U_x, existe $y \quad U_x$ tal que $\varphi(y) = p$. Logo para toda vizinhança U_x existe $y \quad V'$, ou seja, $x \quad \overline{V'}$.

Procedendo, assim, indutivamente temos que V' é denso. Tome agora um subconjunto de V',

$$V = \{x \quad V' : \quad \text{vizinhança } U \text{ de } x \ / \ dimN(\gamma(y)) = cte \text{ em } U\}.$$

De modo análogo e observando que, nesse caso, a função $x \to dimN(\gamma(x))$ é semi-contínua superiormente, a como fizemos com o conjunto V', pode-se mostrar que V é aberto e denso em V', e portanto em M.

Seja x_0 V e seja M_0 uma vizinhança de x_0 tal que $f|_{M_0} : M_0 \to Q_c^{n+1}$ é um mergulho e $g|_{M_0} : M_0 \to Q_c^{n+p}$ 1-regular.

Temos $\rho_f(x) \geq p+2$ para todo x M_0. Do fato de $dimN_1^g(x) = s_g \leq p$ então $\rho_f(x) \geq s_g + 2$. Logo, pelo teorema 3.6(a) temos que $\alpha_g = \alpha_f$ γ e $dimN(\gamma(x)) \geq n - s_g + 1$.

Como temos que f é um mergulho e colocando $dimN(\gamma(x)) = k$, para concluirmos pelo 3.6(b), observemos que se f for l-regrada, esta também será l'-regrada para $l' \leq l$. Daí como

$$k \geq n - s_g + 2 \geq n - p + 2$$

segue o resultado. Pois se f não é $(n-p+2)$-regrada, essa não será k-regrada. □

É interessante observar que a hipótese $\rho(x) \geq p+2$ do teorema principal impõe uma restrição na codimensão da g, isto é, $p \leq n-2$. Tal restrição não pode ser enfraquecida. No artigo [DT3] encontra-se uma família de imersões isométricas de $\mathbb{S}^n$ em $\mathbb{R}^{2n-1}$ que não são composições.

A seguir apresentamos um teorema de [DT1] que estende às hipersuperfícies convexas um resultado provado por O'Neill para a esfera redonda (cf. Teo 3 [O'N2]).

Teorema 3.8 *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$, uma imersão isométrica de uma variedade compacta de curvatura seccional positiva. Então não existe imersão isométrica 1-regular de M^n em $\mathbb{R}^{n+2}$ além da trivial.*

Demonstração: Suponhamos que existe uma $g : M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ imersão isométrica 1-regular, e seja $h : U$ $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+2}$ uma imersão isométrica, dada pelo Teorema 3.6, tal que $g = h \circ f$. Temos que s_g será 1 ou 2. Observemos que $s_g = 0$, pois, caso contrário, pela equação de Gauss teríamos que a curvatura de M seria nula.

Suponhamos $s_g = 2$. Como $\alpha_g = \alpha_h$ α_f e ainda $s_f = 1$ então $s_h = 1$, o que implica que $h(U)$ não é plana. Portanto $\rho_h = 1$. E as folhas n-dimensionais da distribuição de nulidade relativa de h

$$x \to N(\alpha_h(x))$$

são transversais a $f(M)$, pois , caso contrário, teríamos que $T_x f(M) = N(\alpha_h(x))$ e como $\alpha_h(x) \equiv 0$ em $N(\alpha_h(x))$ teríamos $\alpha_g = \alpha_f$. Absurdo.

Consequentemente, suas interseções com $f(M)$ resultam numa folheação de codimensão 1 de M, cujas folhas são completas. O que é uma contradição. Portanto $s_g = 1$ e h é apenas a inclusão. □

Lembramos que a motivação para o artigo [DT1] foi o estudo das imersões isométricas de S^n em $\mathbb{R}^{n+p}$, levantando-se a questão de quando esta seria um composição de imersões isométricas. Com o que apresentamos até aqui podemos enunciar o seguinte corolário:

Corolário 3.9 *Dada uma imersão isométrica $g : S^n \to \mathbb{R}^{n+p}$, com $n \geq 4$ e $p \leq n-2$, então existe um aberto denso onde g é localmente composição.*

Demonstração: Vamos encaixar as hipóteses do corolário nas hipóteses do Teorema 3.7. Sejam $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão umbílica e $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ imersão isométrica. Como f é umbílica temos que $\rho_f(x) = n \geq p+2$ para todo x M. Logo, basta verificarmos a hipótese adicional exigida pelo Teorema principal caso $p \geq 6$.

Suponhamos que f (ou g) admite um aberto $(n-p+2)-$regrado, ou seja, esse aberto admite uma folheação $(n-p+2)-$dimensional por subvariedades totalmente geodésicas do ambiente. Mas se isso ocorrer, teremos subespaços bidimensionais do espaço tangente (à esfera) onde a curvatura seccional será nula. Portanto f (ou g) não admite um aberto $(n-p+2)-$ regrado. E assim concluimos. □

Observamos que a demonstração acima pode ser facilmente estendida para formas espaciais, obtendo o seguinte resultado:

Corolário 3.10 *Dada uma imersão isométrica $g : Q_c^n \to Q_{c'}^{n+p}$, $(c > c')$ com $n \geq 4$ e $p \leq n-2$, então existe um aberto denso onde g é localmente composição.*

E finalmente para destacar o caracter local do Corolário 3.9, apresentamos o seguinte exemplo devido a Henke [He].

Exemplo 3.11 *O objetivo desse exemplo é apresentar uma imersão isométrica de* $\mathbb{S}^{n-1}$ *em* $\mathbb{R}^{n+1}$ *que não será globalmente uma composição.*

A imersão desejada será construida da seguinte maneira: tomamos o ponto fixado $P = (0, 0, \ldots, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad \mathbb{R}^n$ *e o semi-hiperplano fechado*

$$C = \{x \quad \mathbb{R}^n \mid x_{n-1} \geq \frac{\sqrt{2}}{2},\ x_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\}.$$

Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *uma curva plana parametrizada por comprimento de arco,* $\phi = (\phi_1, \phi_2)$*, de maneira que,* ϕ_1 *seja crescente e*

$$\phi_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\phi_2(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \quad (-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ > 0 & se \quad x \quad (\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty) \end{cases}$$

Definamos $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$*,* $i = 1, 2$ *por:*

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, \phi_1(x_n), \phi_2(x_n))$$
$$f_2(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, \phi_1(x_{n-1}), x_n, \phi_2(x_{n-1})).$$

Agora, definimos a imersão isométrica $f : \mathbb{R}^n \setminus C \to \mathbb{R}^{n+1}$ *da seguinte maneira:*

$$f(x) = \begin{cases} f_1 & se \quad x_n \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ f_2 & se \quad x_n < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Finalmente, estendendo f *ao ponto* P*, ou seja, definindo*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & se \quad x = P \\ (P, 0) & se \quad x = P \end{cases}.$$

Agora, restringindo $\widetilde{f}$ *à* $\mathbb{S}^{n-1}$ *obtemos uma imersão isométrica que não pode ser estendida para nenhuma vizinhança do ponto* P *em* $\mathbb{R}^n$*.*

Capítulo 4

Subvariedade de duas variedades

Até agora trabalhamos sobre o problema de determinar condições para que uma imersão isométrica g seja uma composição. Agora vamos apresentar a seguinte questão: quando uma variedade riemanianna M^n pode ser isometricamente imersa em duas formas espaciais de curvaturas seccionais diferentes. Não trabalharemos com a questão em si, mas veremos, por um resultado de [DT$_1$], como a questão de composição nos ajuda a construir localmente essas imersões de M nessas formas espaciais, caso elas existam.

4.1 Preliminares

Antes vamos ver algumas definições que usaremos a seguir.

Dada uma imersão isométrica $f : M^n \to N^{n+p}$, definimos o *vetor curvatura média* $H(x)$ de f em $x \in M$ como

$$H(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_x(X_j, X_j)$$

onde α é a segunda forma fundamental de f e $X_1, \ldots, X_n$ base ortonormal de T_xM. Observamos que essa definição não depende da escolha da base.

Uma imersão isométrica $f : M^n \to N^{n+p}$ é *umbílica* em $x_0 \in M$ se $A_\xi = \lambda_\xi I$ para todo $\xi \in T_{x_0}M^\perp$, onde $\lambda_\xi \in \mathbb{R}$ e I é a aplicação identidade em $T_{x_0}M$. E dizemos que f é uma *imersão umbílica* se é umbilica em toda M.

A seguir apresentamos dois lemas (cf. p. 11 de [D1]) que nos auxiliam na demonstração do Teorema 4.3.

Lema 4.1 *Dada $f : M^n \to N^{n+p}$ imersão isométrica, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) f é umbílica em $x \quad M$;

(ii) $A_\xi = \quad H(x), \xi \quad I$ para $\xi \quad T_xM^\perp$;

(iii) $\alpha_x(X, Y) = \quad X, Y \quad H(x)$ para $X, Y \quad T_xM$.

Lema 4.2 *Se $f : M^n \to N_c^{n+p}$ é uma imersão umbílica, $n \geq 2$, então:*

(i) $\|H\|$ é constante;

(ii) M tem curvatura seccional constante $c + \|H\|^2$;

(iii) $A_H = \|H\|^2 I$.

4.2 Aplicação

Se pudermos imergir isometricamente uma variedade riemanniana M^n em duas formas espaciais de curvaturas seccionais distintas, o teorema a seguir nos fornece uma ferramenta para enxergar localmente essas imersões como intersecção de imersões canônicas.

Teorema 4.3 *Suponha que M^n, $n \geq 4$, admite imersões isométricas $f : M^n \to Q_c^{n+1}$ e $g : M^n \to Q_{\tilde{c}}^{n+p}$, $c < \tilde{c}$, com $s_g(x) \leq n - 3$ para todo $x \quad M$. Ponha $G = i \circ g$, onde i é a inclusão umbilica de $Q_{\tilde{c}}^{n+p}$ em Q_c^{n+p+1}. Então existe um aberto denso $V \quad M$ tal que $G|_V$ é localmente uma composição.*

Demonstração: Seja

$$V = \{x \quad M; \quad \text{vizinhança } U_x : dimN_1^g(y) = cte \text{ e } dimN(\gamma(y)) = cte \text{ em } U_x\}.$$

Observamos que esse é o mesmo aberto e denso definido na demonstração do Teorema 3.7.

Primeiramente vamos mostrar que a forma bilinear simétrica plana, em $x \quad M$, $\beta_x = (\alpha_f(x), \alpha_G(x))$ satisfaz $N(\beta) = \{0\}$. Para vermos isso, tome δ um campo normal unitário da inclusão $i : Q_{\tilde{c}}^{n+p} \to Q_c^{n+p+1}$. Então de $G = i \circ g$ e do fato de i ser umbílica segue

$$\begin{aligned} \alpha_G(X,Y), \delta \;&=\; \alpha_i(X,Y) + \alpha_g(X,Y), \delta \;=\; \alpha_i(X,Y), \delta \;= \\ &=\; A_\delta X, Y \;=\; H, \delta \quad X, Y \end{aligned}$$

e pelo Lema 4.2 temos $\tilde{c} - c = ||H||^2 = \; H, H \;=\; H, \delta\ \delta,\ H, \delta\ \delta \;=\; H, \delta\ ^2$ e portanto

$$\alpha_G(X,Y), \delta \;=\; \sqrt{\tilde{c} - c}\ X, Y\ . \tag{4.1}$$

Em particular temos que o índice de nulidade relativa de α_G, $\nu_G(x) = 0$ para todo $x \quad M$, pois a nulidade de α_G está contida no espaço de nulidade de $\ ,\ $. Então $N(\beta) = N(\alpha_f) \cap N(\alpha_G) = \{0\}$.

Resta mostrar que, com isso, α_G se decompõe. Afirmamos que $S(\beta)$ é degenerada. Caso contrário, teríamos pela proposição 2.5

$$dimN(\beta) \geq n - dimS(\beta) \geq n - 1 - s_G$$

pois $S(\beta) \quad T^f M^\perp \quad N_1^G$. Como $\alpha_G = \alpha_i + \alpha_g$ temos que $s_G \leq 1 + s_g$ e pela hipótese sobre s_g segue que $dimN(\beta) \geq 1$. Absurdo, pois $N(\beta) = \{0\}$.

Agora defina o produto interno lorentziano sobre $T_x^f M^\perp \quad N_1^G(x)$ por

$$(\xi_1, \xi_2), (\delta_1, \delta_2) \quad = - \ \xi_1, \delta_1\ _{T^f M^\perp} + \ \xi_2, \delta_2\ _{T^G M^\perp}.$$

Como mostramos que $S(\beta)$ é degenerada, temos que existe um vetor unitário $\eta \quad N_1^G(x)$ tal que

$$(N, \eta) \quad S(\beta) \cap S(\beta)^\perp$$

onde N é um vetor normal unitário a f em x. E seguindo como a demonstração do Teorema 3.6 obtemos que α_G se decompõe como

$$\alpha_G(X,Y) = \alpha_f \quad \gamma(x)$$

onde $\gamma(x)$, a $\{\eta\}^{\perp}$-componente de $\alpha_g(x)$, pelas equações de Gauss para f e G, é plana.

E ainda temos que G é não regrada, pois, se fosse, de (4.1) teríamos que $\widetilde{c} = c$.

Para concluirmos a prova, observe que de $s_g \leq n - 3$ temos, como γ é plana,

$$dimN(\gamma(x)) \geq n - dimS(\gamma(x)).$$

Da decomposição de α_G temos $dimS(\gamma(x)) = s_G - 1$ e de $s_G \leq 1 + s_g \leq n - 2$, concluimos que

$$dimN(\gamma) \geq 3.$$

Logo, se $k = dim(N(\gamma))$ e $\nu_G \leq k - 1$ a condição (iv) do Teorema 3.4 é satisfeita. E daí segue o resultado. $\square$

Para concluir, como foi dito no início da seção, observamos que o resultado acima nos auxilia a construir as imersões f e g da seguinte maneira (tudo que se segue tem caráter local): como G é uma composição, temos que existe uma imersão isométrica $h : Q_c^{n+1} \to Q_c^{n+p+1}$ tal que $G = h \circ f$, e portanto a imagem de M pela f (ou pela g) será a intersecção da imagem de Q_c^{n+1} pela h com a imagem de $Q_{\widetilde{c}}^{n+p}$ pela i. O diagrama abaixo ilustra essa situação.

$$\begin{tikzcd}
M^n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\widetilde{g}"] & S^{n+p} \arrow[d, "i"] \\
\mathbb{R}^{n+1} \arrow[r, "h"] & \mathbb{R}^{n+p+1}
\end{tikzcd}$$

Capítulo 5

Conclusões e outros resultados

Nesse capítulo vamos apresentar alguns resultados posteriores ao artigo [DT₁] e relacionar o problema da composição de imersões isométricas com o problema de redução de codimensão e com o problema de rigidez.

5.1 Resultados Posteriores

Dadas $g : M^n \to Q_c^{n+p}$ e $f : M^n \to Q_c^{n+q}$ imersões isométricas, a questão levantada na Introdução foi determinar condições sobre f e g que implicam que g é uma composição.

No artigo [DT₁] essa questão foi abordada tomando a codimensão de f igual a 1. Artigos posteriores abordam essa questão para codimensão maior.

Em 1993, no artigo "On submanifolds of two manifolds"(cf.[DT₂]), Marcos Dajczer e Ruy Tojeiro consideram o caso da codimensão da f igual a 2, obtendo o resultado que apresentamos a seguir.

Teorema 5.1 *Sejam $f : M^n \to Q_c^{n+2}$ e $g : M^n \to Q_c^{n+p}$, $n \geq 5$ e $p \geq 2$ imersões isométricas com $s_g(x) \leq n - 3$ para todo x M. Assuma ainda que f é um mergulho, $\nu_f(x) \leq n - s_g(x) - 3$ e $\rho_f(x) \geq s_g(x) + 1$ para todo x M. Então existe um subconjunto aberto e denso U M^n tal que sobre cada componente conexa U_λ de U uma das seguintes condições se verifica:*

(1) Existe uma imersão isométrica local $h : Q_c^{n+2} \to Q_c^{n+p}$ tal que g é uma composição $g = h \circ f$;

(2) As imersões f e g são ambas k-regradas com as mesmas folhas, onde $k \geq n - s_g(x) + 3$;

(3) Existe uma variedade riemanniana N^{n+1}, uma imersão isométrica $i : U_\lambda \to N^{n+1}$ e imersões isométricas $F : N^{n+1} \to Q_c^{n+2}$ e $G : N^{n+1} \to Q_c^{n+p}$ k-regradas com as mesmas folhas, onde $k \geq n - s_g(x) + 4$ tais que $f = F \circ i$ e $g = G \circ i$.

Além disso, os casos (2) e (3) só podem ocorrer se $s_g(x) \geq 7$ sobre U_λ.

Já em 2001, no artigo "Compositions of isometric immersions in higher codimension" (cf.[DF]), Marcos Dajczer e Luis A. Florit demonstram um resultado análogo para codimensão da f menor ou igual a 5:

Teorema 5.2 *Sejam $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ e $g : M^n \to \mathbb{R}^{n+p+q}$, $q \geq 0$, imersões isométricas. Suponha $p \leq 5$, e assuma que f satisfaz para todo x M, a seguinte desigualdade:*

$$\nu_s^f \leq n - q - 2s - 1 \qquad 1 \leq s \leq p.$$

Quando $q \geq 5$, assuma ainda que $\nu_1^f \leq n - 2q + 1$. Então α_g se decompõe em toda M e g é uma composição se α_g se decompõe regularmente.

No teorema acima, dizer que a segunda forma fundamental α_g se *decompõe regularmente*, significa que, na decomposição $\alpha_g = \alpha_f \quad \gamma$ (como na seção (3.2)), os espaços $S(\gamma)$ e $N(\gamma)$ possuem ambos dimensões constantes.

E ainda, a afirmação de que g é uma composição tem aqui o seguinte sentido: existe um mergulho isométrico $f' : M^n \to N_0^{n+p}$ numa variedade flat N_0^{n+p}, uma imersão isométrica $j : N_0^{n+p} \to \mathbb{R}^{n+p}$ (isto é, uma isometria local) satisfazendo $f = j \circ f'$ e uma imersão isométrica $h : N_0^{n+p} \to \mathbb{R}^{n+p+q}$ tais que $g = h \circ f'$.

5.2 Problemas Relacionados

Dois problemas clássicos na teoria de subvariedades são o problema de rigidez e o problema de redução de codimenção. Vamos apresentar uma relação entre esses problemas com o problema da composição de imersões isométricas.

5.2.1 Redução de Codimensão

Uma imersão isométrica $g : M^n \to Q_c^{n+p}$ admite uma *redução de codimensão* para q se existir uma subvariedade totalmente geodésica $Q_c^{n+q} \quad Q_c^{n+p}$ com $q < p$ tal que $g(M) \quad Q_c^{n+q}$.

A título de ilustração apresentamos a seguir um resultado básico para redução de codimensão, cuja demonstração pode ser encontrada em [D₁] (Prop. 4.1 p. 54).

Teorema 5.3 (Erbacher) *Seja $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ uma imersão isométrica, e suponha que existe um subfibrado paralelo L do fibrado normal, de posto $q < p$ tal que $N_1(x) \quad L(x)$ para todo $x \quad M$. Então a codimensão de f pode ser reduzida a q.*

Vejamos o problema de redução de codimensão sob o enfoque de composição de imersões isométricas: se dadas $g : M^n \to Q_c^{n+p}$ e $f : M^n \to Q_c^{n+q}$, $q < p$ imersões isométricas tivermos que g é uma composição, então existe uma imersão isométrica $h : Q_c^{n+q} \to Q_c^{n+p}$ tal que $g = h \circ f$. Se h for um mergulho totalmente geodésico, então $h(Q_c^{n+q})$ é uma subvariedade totalmente geodésica de Q_c^{n+p} tal que $g(M) \quad h(Q_c^{n+q})$. Logo g admite redução de codimensão.

5.2.2 Rigidez

Dadas imersões isométricas $f, g : M^n \to Q_c^{n+p}$, se existir uma isometria $\tau : Q_c^{n+p} \to Q_c^{n+p}$ tal que $g = \tau \circ f$ dizemos que f e g são *congruentes* e denotamos por $g \equiv f$. Se g for congruente a f para qualquer imersão f então dizemos que g é *rígida*.

Para ilustrar apresentamos a seguir um resultado clássico de rigidez que pode ser encontrado em [D1] (Teo.6.7 p. 89).

Teorema 5.4 *Seja $f : M^n \to Q_c^{n+p}$ uma imersão isométrica com número tipo $\tau \geq 3$, em toda M. Então f é rígida.*

Lembramos que o número tipo, $\tau(x)$, de uma imersão isométrica $f : M^n \to N^{n+p}$ em x é o número tipo dos operadores $A_{\xi_1}, \dots, A_{\xi_p}$, onde $\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$ é uma base de $T_xM^\perp$. Isto é,

$$\tau(x) = max\{s \mid \ X_1, \dots, X_s \quad T_xM : A_{\xi_1}X_1, \dots, A_{\xi_1}X_s, \dots, A_{\xi_p}X_1, \dots, A_{\xi_p}X_s \text{ são l.i}\}.$$

Vejamos o problema de rigidez sob o enfoque de composição de imersões isométricas: dadas $f, g : M^n \to Q_c^{n+p}$ imersões isométricas, se g é uma composição temos que existe $h : Q_c^{n+p} \to Q_c^{n+p}$, uma imersão isométrica , tal que $g = h \circ f$. Portanto se h é um mergulho então g é congruente a f.

Nesse sentido temos que a noção de composição generaliza a noção de rigidez. Inclusive, Marcos Dajczer e Luis A. Florit, no artigo citado acima, sugerem que o estudo de resultados de rigidez dentro do contexto de composição de imersões isométricas pode levar a um entendimento mais profundo da teoria. Essa perspectiva abre caminho para novos resultados, tornando o problema de composição de imersões isométricas um campo fértil de pesquisa.

Bibliografia

[Ca] É. Cartan, *Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non-euclidien.* Bull. Soc. Math. France, 47:125–160, 1919 e 48:132–208, 1920.

[dC] M. P. do Carmo, Geometria riemanniana, volume 10, *Projeto Euclides.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2005.

[D_1] M. Dajczer, Submanifolds and Isometric Immersions, volume 13 de *Mathematics Lecture Series.* Publish or Perish Inc., Houston, TX, 1990. Baseado em notas preparadas por Mauricio Antonucci, Gilvan Oliveira, Paulo Lima-Filho e Ruy Tojeiro.

[D_2] M. Dajczer, *Rigidity of Isometric Immersions of Higher Codimension.* Bol. Soc. Bras. Mat., 23:67–77, 1992.

[DF] M. Dajczer e L. A. Florit, *Compositions of Isometric Immersions in Higher Codimension.* Manuscripta Math, 110:507–517, 2001.

[DT_1] M. Dajczer e R. Tojeiro, *On Compositions of Isometric Immersions.* J. Diff. Geometry, 36:1–18, 1992.

[DT_2] M. Dajczer e R. Tojeiro, *On Submanifolds of Two Manifolds.* Math. Z., 214:405–413, 1993.

[DT_3] M. Dajczer e R. Tojeiro, *Isometric Immersions and the Generalized Laplace and Sinh-Gordon Equations.* Mat. Contemporânea, 4: 99–104, 1993.

[He] W. Henke, *Über die isometrischer Fortsetzbarkeit isometrischer Immersionen der Standar-m-Sphäre* S^m $\mathbb{R}^{m+1}$ *in* $\mathbb{R}^{m+2}$. Math. Ann. 219 (1976) 261-276.

[Mo] J. D. Moore, *Submanifolds of Constant Positive Curvature I.* Duke Mathematical J, 44:449–484, 1977.

[O'N$_1$] B. O'Neill, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, volume 103 de *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, NewYork - London, 1983.

[O'N$_2$] B. O'Neill, *Umbilics of Constant Curvature Immersions*. Duke Math. J, 32:149–160, 1965.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois - London, 1971.