Universidade Estadual de Maringá

PROBLEMA MISTO PARA AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES DE FLUIDOS HOMOGÊNEOS E INCOMPRESSÍVEIS.

Fernando Pereira de Souza

Centro de Ciências Exatas

Universidade Estadual de Maringá

Programa de Pós-Graduação em Matemática

(Mestrado)

Orientador: Cícero Lopes Frota

Maringá - PR

2007

Agradecimentos

Ao professor Dr. Cícero Lopes Frota, pela excelente orientação, por compartilhar seus conhecimentos de uma forma clara e convincente.

Ao professor Gleb Germanovitch Doronin, pelas sugestões e críticas construtivas que me ajudaram na realização deste trabalho.

Ao professor da banca Dr. Marko Antonio Rojas Medar, pelas sugestões e comentarios.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Matemática da UEM.

Aos meus pais que me ensinaram a dar os primeiros passos para que hoje eu pudesse realizar esta conquista, e a todos meus familiares pela ótima convivência que temos.

Ao programa CAPES, pelo apoio financeiro durante os dois anos de estudo.

Aos meus amigos, pela agradável convivência durante esta jornada, em especial três grandes amigas Raquel, Priscila e Mariana.

A minha esposa, que com muito carinho tem sido uma ótima companheira.

Preciso

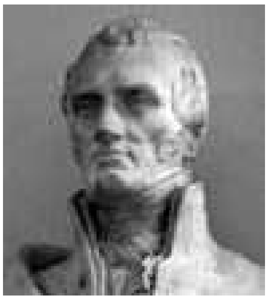
“ Preciso das pequenas coisas,
preciso das pequenas alegrias,
dessas que os felizes jogam fora,
dessas que de repente chegam
e também de repente vão embora”

Conteúdo

Introdução

As equações de Navier-Stokes foram assim denominadas após Claude Louis Marie Henri Navier e George Gabriel Stokes desenvolverem um conjunto de equações que descreveriam o movimento de fluídos e gases.

Claude Louis Marie Henri Navier



Nasceu em 10/02/1785 em Dijon, França e faleceu em 21/08/1836 em Paris, França. Em 1802, Navier entrou para École Polytechnique onde teve Fourier como professor de Análise. Em 1804 continuou seus estudos na École Nationale des Ponts et Chaussées. Após estudar alguns problemas de engenharia tratando de construção de pontes em Grã Bretanha, entre 1821 e 1823, escreveu um tratado sobre o assunto, onde usando "métodos matemáticos modernos", apresentou um projeto com cálculos precisos sem a necessidade de se exagerar nas estruturas para compensar aproximações e erros típicos da engenharia. Ao mesmo tempo estava publicando suas famosas equações de fluídos (agora conhecidas como equações de Navier-Stokes). Navier projetou a primeira ponte suspensa a ser construída em Paris, entretanto sua ponte desenvolveu uma rachadura mesmo antes de ser inaugurada, o que depois de guerras políticas resultou na remoção da mesma.

Foram feitas acusações de que Navier era ótimo matemático teórico e não prático. Este debate foi uma versão de mais uma disputa entre franceses e britânicos. Hoje Navier é lembrado não apenas como um construtor famoso de pontes, mas principalmente pelas suas equações de fluidos, as quais tem uma imensa importância tanto nas engenharias de construção civil, hidráulica, aeronáutica e outras, como também nas ciências exatas como física e matemática.

George Gabriel Stokes

Nasceu em 13/08/1819 em Skreenn, Irlanda e faleceu em 01/02/1903 em Cambridge, Inglaterra. Estudou em Trinity College Dublin e em 1835 mudou-se para a Inglaterra e entrou na Faculdade de Bristol em Bristol. Os dois anos em Bristol eram importante para os estudos em Cambridge. Teve como orientador William Hopkins que o incentivou a fazer pesquisa em hidrodinâmica. Além dos conselhos de Hopkins, Stokes foi inspirado a entrar neste campo pelo recente trabalho de George Green. Stokes foi um matemático e físico Irlandês que se distinguiu pelas suas contribuições na dinâmica dos fluidos.

A primeira descrição matemática para o movimento de um fluido ideal foi formulada em 1755 por Euler [5]. Esta formulação foi obtida aplicando-se a segunda lei de movimento de Newton em um fluido que se move sobre a ação de uma força interna conhecida como gradiente de pressão. Restringindo nossa atenção para fluidos homogêneos e incompressíveis, isto é, com densidade de massa constante, ocupando todo $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou $n = 3$, as equações de Euler descrevendo a evolução no tempo do campo de velocidades $u = u(x,t)$ e a pressão $p = p(x,t)$ de um fluido incompressível tinham a forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p, \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0) \tag{1}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{2}$$

com condição inicial $u(x,0) = u_0(x)$.

Estas equações, embora teoricamente importante, omitem os efeitos de forças de atrito. Para incorporar estas forças, Navier, publicou em 1822 um artigo [20] com a dedução de equações de movimento para fluidos viscosos no qual ele incluiu os efeitos de atração e repulsão entre as moléculas. Destas considerações ele deduziu a seguinte modificação da equação de Euler:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = \epsilon \triangle u - \nabla p, \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0) \tag{3}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{4}$$

com condição inicial $u(x,0) = u_0(x)$.

Para Navier, ϵ era uma simples função do meio molécular para a qual ele não atribuiu significado físico algum. A apresentação de seu artigo [20] foi bem aceita pela academia de ciências da França. Navier foi eleito membro da academia em Janeiro de 1824.

As equações de movimento de fluidos viscosos foi novamente deduzida por Cauchy em 1828 e por Poisson em 1829. Em 1843 Barré de Saint-Venant publicou, com maior embasamento físico, uma dedução destas equações que se aplicam não somente para fluxos laminares (considerado por Navier) mas também para fluxos turbulentos.

Entretanto, o nome da pessoa que é agora anexado as equações de Navier é o George Stokes. Em 1845 ele publicou uma dedução de equações para o movimento de fluidos viscosos numa forma que é usada nos textos correntes. Diferente de Navier, Stokes tornou claro que o parâmetro ϵ tem um importante significado físico; a saber: ϵ mede a viscosidade do fluido.

Desde que as equações de Navier-Stokes incorporam os efeitos do atrito, elas são fisicamente mais realistas do que as equações de Euler. Entretanto, por razões físicas e matemáticas ambas são importantes.

As equações de Navier-Stokes são usadas para modelar fenômenos climáticos, correntes oceânicas, fluxos de água em canais, fluxos de gás em canos e turbinas, entre outros. Estas equações, não procuram estabelecer relação entre as variáveis de interesse (por exemplo, velocidade e pressão); em vez disto, elas estabelecem relações entre as taxas de variação ou fluxos destas quantidades. Além disso, é necessário, em geral, levar em conta a compressividade de gás ou mesmo de um líquido. As vezes é preciso considerar que o meio apesar de ser contínuo, não seja homogêneo, que o fluxo consiste em duas (ou mais) fases, etc. As equações neste caso podem ser obtidas de príncipios básicos de conservação da massa, momentos e energia.

A conservação da massa é descrita como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho u) = 0, \tag{5}$$

onde ρ é a densidade do fluido (massa por unidade de volume) e u é a velocidade do fluxo correspondente.

A forma geral das equações para a conservação do momento é

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u\right)+\nabla p=\mu\triangle u+(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot u)+\rho f.$$

onde λ e μ são parâmetros de viscosidade o qual consideraremos constantes positivas. No caso onde o fluido é homogêneo (ocupa mesmo espaço durante todo o tempo) e imcompressível (densidade é constante, $\rho=\rho_0>0$), as equações ficam

$$\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u\right)+\nabla p=\mu\triangle u+\rho_0 f, \tag{6}$$

$$\nabla\cdot u=0. \tag{7}$$

Dividindo a equação por ρ_0 e substituindo $\dfrac{p}{\rho_0}$ por P e $\dfrac{\mu}{\rho_0}$ por ν obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\nu\triangle u+(u\cdot\nabla)u+\nabla P=f,$$

$$\nabla\cdot u=0.$$

onde u é o vetor velocidade, P é a pressão cinemática, f é a densidade das forças de volume e ν é a constante de viscosidade cinemática. Considerando que o sistema é isotermico, não se faz necessário a lei de conservação de Energia.

Nas situações práticas, o fluido (ou gás) nunca ocupa todo o espaço $\mathbb{R}^n$ e sim uma região limitada, digamos $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Para determinar o fluxo completamente, algumas condições na fronteira dessa região devem ser explicitadas. No presente trabalho nos vamos considerar uma forma fisicamente mais simples destas condições, representando a hipótese que o fluxo possui velocidade zero na fronteira Γ da região $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Matematicamente, isso significa que

$$u(x,t)=0,\quad \text{em }\ \Gamma\times(0,T). \tag{8}$$

Finalmente, para retratar o início do processo de evolução, temos que impor os dados iniciais

$$u(x,0)=u_0(x),\quad \text{em }\ \Omega. \tag{9}$$

Assim a formulação clássica do problema de valores inicias e de fronteira para as equações de Navier-Stokes de um fluido homogêneo incompressível é a seguinte:

Dados $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado, conexo com fronteira Γ bem regular, $\nu > 0$, $f : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^n$ e $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Encontrar uma função vetorial $u = (u_1, \cdots, u_n) : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^n$ e uma função escalar $P : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{aligned}
&u' - \nu \triangle u + (u \cdot \nabla)u + \nabla P = f && \text{em } \Omega \times (0,T),\\
&\nabla \cdot u = 0 && \text{em } \Omega \times (0,T),\\
&u = 0 && \text{em } \Gamma \times (0,T),\\
&u(x,0) = u_0(x) && \text{em } \Omega.
\end{aligned}$$

Do ponto de vista matemático, os estudos de J. Leray (1933) [14] marcaram o início do tratamento matematicamente rigoroso das equações de Navier-Stokes. Posteriormente, veio o trabalho de E. Hopf (1951) [11], almejando um tratamento menos heurístico. Um tratamento mais completo, porém, só teve início com os trabalhos de C. Foias e G. Prodi (1967) [9], C. Foias (1973) [7], C. Foias e R. Temam (1989) [8], Ladyzhenskaya [13], entre outros.

Neste trabalho, apresentamos um estudo introdutório sobre a existência, unicidade e decaimento das soluções de problemas mistos associados as equações de Navier-Stokes nos casos Estacionário Linear, Estacionário não Linear, Evolução Linear e Evolução não Linear. Nosso estudo busca dar uma introdução ao assunto e é bastante restrito se levado em conta a abrangência total dos métodos, técnicas e artigos relacionados ao estudo matemático das equações de Navier-Stokes. Entretanto é o possível de ser feito tendo como pré requisito um primeiro curso de Análise Funcional. Baseamos nossa dissertação nos resultados contidos em [10], [22] e [23]. Ainda nesta direção e por ser um método construtivo, o qual facilita a implementação numérica, usamos o método de Faedo-Galerkin na demonstração da existência de solução, exceto no problema estacionário linear onde usamos o teorema de Lax-Milgram.

No Capítulo 2, apresentamos notações e resultados necessários para o estudo feito. No Capítulo 3, provamos a existência e unicidade de solução fraca para os casos Estacionário Linear e Evolução Linear, quando a dimensão do espaço é $n \geq 2$. No caso Estacionário não Linear provamos a existência de solução fraca para $n \geq 2$ e a unicidade para $2 \leq n \leq 4$. No caso de Evolução não Linear provamos a existência de solução fraca quando $2 \leq n \leq 4$ e a unicidade quando $n = 2$ e $n = 3$. No Capítulo 4, aprensentamos algumas propriedades de regularidades e decaimento da solução para o caso de Evolução não Linear, no sentido de que $u(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Capítulo 1

Notações e Resultados Preliminares

Neste capítulo fixamos as notações e apresentamos alguns resultados técnicos que serão utilizados no decorrer do trabalho.

1.1 Espaços Funcionais

Representamos por Ω um subconjunto aberto, limitado e conexo do $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ com fronteira Γ bem regular. Por $\mathbb{L}^p(\Omega)$ denotamos o espaço de Banach das funções vetoriais $u = (u_1, \cdots, u_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ tais que $u_i \in L^p(\Omega)$, $\forall\, i = 1, \cdots, n$, isto é: $\mathbb{L}^p(\Omega) = (L^p(\Omega))^n$, munido da norma

$$\|u\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se} \quad 1 \leq p < \infty \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{se} \quad p = \infty \end{cases}$$

No caso particular $p = 2$, temos o espaço de Hilbert $\mathbb{L}^2(\Omega)$ cuja norma e produto interno denotamos, respectivamente, por

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |u_i(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1}$$

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} (u_i, v_i)_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_i(x) v_i(x) dx. \tag{1.2}$$

Por $\mathcal{D}(\Omega)$ denotamos o espaço das funções testes sobre Ω e, dado um natural m, $H^m(\Omega)$ representa o espaço de Sobolev usual de ordem m. Desde que Ω é limitado, o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$ é um subespaço próprio de $H^m(\Omega)$ o qual denotamos por $H_0^m(\Omega)$.

De modo análogo aos espaços $\mathbb{L}^p(\Omega)$, denotamos os seguintes espaços de funções vetoriais:

$$\mathbb{D}(\Omega) = (\mathcal{D}(\Omega))^n, \ \mathbb{H}^m(\Omega) = (H^m(\Omega))^n \ \text{ e } \ \mathbb{H}_0^1(\Omega) = \left(H_0^1(\Omega)\right)^n.$$

Note que se $T = (T_1, \cdots, T_n) \in \mathbb{D}^{'}(\Omega)$ e $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \in \mathbb{D}(\Omega)$ então

$$\langle T, \varphi \rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \langle T_i, \varphi_i \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}.$$

Em $\mathbb{H}^m(\Omega)$ a norma e o produto interno são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathbb{H}^m(\Omega)} &= \left(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2_{H^m(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{|j|\leq m} \|D^j u_i\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{|j|\leq m} \int_\Omega \left| D^j u_i(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} (u, v)_{\mathbb{H}^m(\Omega)} &= \sum_{i=1}^{n} (u_i, v_i)_{H^m(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{|j|\leq m} (D^j u_i, D^j v_i)_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{|j|\leq m} \int_\Omega D^j u_i(x) D^j v_i(x) dx, \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde $j = (j_1, \cdots, j_n)$ é um multi-índice, $|j| = j_1 + \cdots + j_n$, $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ para $i = 1, \cdots, n$ e D^j é o operador diferencial definido por

$$D^j = D_1^{j_1} ... D_n^{j_n} = \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}}.$$

Em particular, como Ω é limitado, vale a desigualdade de Poincaré em $H_0^1(\Omega)$. Neste caso, denotamos a norma e o produto interno em $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, respectivamente, por:

$$\|u\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2_{H_0^1(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} ((u,v)) &= \sum_{i=1}^{n} ((u_i, v_i))_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) dx. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Para um estudo detalhado sobre os espaços de Sobolev veja [2], [18]. No estudo das equações de Navier-Stokes existem alguns espaços funcionais que desempenham papel fundamental. Representaremos por $\mathcal{V}$ o subespaço vetorial de $\mathbb{D}(\Omega)$ constituido pelos campos vetoriais com divergência nula, isto é

$$\mathcal{V} = \{\varphi \in \mathbb{D}(\Omega) \text{ tal que } div(\varphi) = 0\},$$

onde $div(\varphi) = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}$. O fecho de $\mathcal{V}$ em $\mathbb{L}^2(\Omega)$, $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ e em $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{L}^n(\Omega)$ são três espaços básicos para nosso estudo, os quais serão denotados por H , V e $\widetilde{V}$, respectivamente, isto é:

$$H = \overline{\mathcal{V}}^{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad V = \overline{\mathcal{V}}^{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \quad \text{e} \quad \widetilde{V} = \overline{\mathcal{V}}^{\mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{L}^n(\Omega)}.$$

Da teoria dos espaços de Sobolev, sabemos que:

$i)$ Se $n = 2 \Rightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall\, q \in [2, \infty)$,

$ii)$ Se $n \geq 3 \Rightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$,

portanto, $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{L}^n(\Omega) = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ se $2 \leq n \leq 4$, o que nos mostra que nestes casos $(2 \leq n \leq 4)$ temos $\widetilde{V} = V$.

Com o objetivo de formularmos uma caracterização para os espaços H e V, introduzimos o espaço

$$\mathbb{E}(\Omega) = \{u \in \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ tais que } div(u) \in L^2(\Omega)\},$$

o qual é um espaço de Hilbert munido do produto interno e norma dados, respectivamente, por:

$$(u,v)_{\mathbb{E}(\Omega)} = (u,v) + (div(u), div(v))_{L^2(\Omega)},$$

$$\|u\|_{\mathbb{E}(\Omega)} = \left(\|u\|_2^2 + \|div(u)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Podemos então, construir um operador linear e contínuo (operador tipo traço) $\gamma_\nu \in \mathcal{L}\left(\mathbb{E}(\Omega), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)$, $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ representa o dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, tal que:

i) $\gamma_\nu(u) = (u \cdot \nu)_{|\Gamma}$, $\forall\, u \in \mathbb{D}(\overline{\Omega})$, aqui ν é o vetor normal unitário à fronteira Γ.

ii) $\langle \gamma_\nu(u), \gamma_0(w)\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = (u, \nabla w) + (div(u), w)_{L^2(\Omega)}$, $\forall\; u \in \mathbb{E}(\Omega)$ e $w \in H^1(\Omega)$, aqui $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ é a aplicação traço de ordem zero usual.

Desta forma, é possível obter (veja [22]) a seguinte caracterização para os espaços H e V:

$$H = \{u \in \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ tal que } div(u) = 0 \text{ e } \gamma_\nu(u) = 0\}, \tag{1.7}$$

$$V = \{u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \text{ tal que } div(u) = 0\}. \tag{1.8}$$

As equações de Navier-Stokes, conforme veremos nos capítulos seguintes, terão uma formulação variacional. A interpretação adequada destas formulações variacionais dependem diretamente dos lemas a seguir.

1.2 Lemas Técnicos

Lema 1.1 *Seja* $T = (T_1, \cdots, T_n) \in \mathbb{D}'(\Omega)$. *Então* $\langle T, \varphi\rangle = 0$, *para toda* $\varphi \in \mathcal{V}$ *se, e somente se, existe* $Q \in D'(\Omega)$ *tal que* $T = \nabla Q$.

Dem: Ver [22] p. 14.

Lema 1.2 *Se* $P \in D'(\Omega)$ *e todas as primeiras derivadas* $D_i P \in H^{-1}(\Omega)$ *então* $P \in L^2(\Omega)$.

Dem: Ver [22] p. 15.

Lema 1.3 *Se* $n = 2$, *então*

$$\|u\|_{L^4(\Omega)}^2 \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|u\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)},\ \forall\, u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.9}$$

Se $n = 3$, então existe uma constante C tal que

$$\|u\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{3}{2}}, \forall\, u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.10}$$

Dem: Inicialmente provamos (1.9) para $\varphi \in D(\Omega)$. De fato, considerando

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se} \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega \end{cases}$$

então

$$\widetilde{\varphi}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_1}(s, x_2)ds = -\int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_1}(s, x_2)ds,$$

o que nos leva a

$$2\widetilde{\varphi}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_1}(s, x_2)ds - \int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_1}(s, x_2)ds.$$

Assim,

$$2\,|\widetilde{\varphi}(x_1, x_2)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_1}(s, x_2) \right| ds. \tag{1.11}$$

De modo análogo,

$$\widetilde{\varphi}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_2}(x_1, s)ds = -\int_{x_2}^{\infty} \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_2}(x_1, s)ds,$$

o que implica

$$2\,|\widetilde{\varphi}(x_1, x_2)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_2}(x_1, s) \right| ds. \tag{1.12}$$

Multiplicando membro a membro as desigualdades (1.11) e (1.12) temos:

$$4\,|\widetilde{\varphi}(x_1, x_2)|^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_1}(s, x_2) \right| ds \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_2}(x_1, s) \right| ds \right),$$

a qual após integração sobre o $\mathbb{R}^2$ nos conduz a:

$$\begin{aligned}
&4 \int_{\mathbb{R}^2} |\widetilde{\varphi}(x_1, x_2)|^2 \, dx_1 dx_2 \\
&\quad \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_1}(s, x_2) \right| ds \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_2}(x_1, s) \right| ds \right) dx_1 dx_2 \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_2}(x_1, s) \right| ds \right) dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_1}(s, x_2) \right| ds \right) dx_2 \\
&\quad = \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_2}(x) \right| dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_1}(x) \right| dx \right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\widetilde{\varphi}(x_1, x_2)|^2 \, dx \leq \frac{1}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_1}(x) \right| dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_2}(x) \right| dx \right).$$

Como $\widetilde{\varphi}$ é zero fora de Ω, resulta que

$$\int_{\Omega} |\varphi(x_1, x_2)|^2 \, dx \leq \frac{1}{4} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \right| dx \right) \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \right| dx \right), \ \forall \varphi \in D(\Omega). \quad (1.13)$$

Em particular considerando $\psi = \varphi^2$ com $\varphi \in D(\Omega)$ teremos $\psi \in D(\Omega)$ e de (1.13) vemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\psi(x)|^2 dx &\leq \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x) \right| dx \right) \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x) \right| dx \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x) \right| dx \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x) \right| dx \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} 2|\varphi(x)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \right| dx \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} 2|\varphi(x)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \right| dx \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |\varphi(x)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \right| dx \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |\varphi(x)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \right| dx \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \frac{1}{2} \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \left(\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|\varphi\|^4_{L^4(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)}$, ou ainda $\|\varphi\|^2_{L^4(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}$, para toda $\varphi \in D(\Omega)$.

Considerando que $\overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, pois $n = 2$, por densidade segue a desigualdade (1.9).

Vamos agora provar (1.10) para $\varphi \in D(\Omega)$. De fato, de (1.9) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^4 dx_1 dx_2 \leq \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^2 dx_1 dx_2 \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{2} |D_i \varphi(x)|^2 dx_1 dx_2 \right).$$

Integrando

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x)|^4 dx \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^2 dx_1 dx_2 \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{2} |D_i \varphi(x)|^2 dx_1 dx_2 \right) \right\} dx_3$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\sup_{x_3}\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x_1,x_2,x_3)|^2 dx_1dx_2\right)\left(\sum_{i=1}^{2}\|D_i\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right).$$

Mas

$$\begin{aligned}
|\varphi(x)|^2 &= \left|\int_{-\infty}^{x_3} D_3\left(\varphi(x_1,x_2,\xi)\right)^2 d\xi\right| \\
&= \left|2\int_{-\infty}^{x_3} \varphi(x_1,x_2,\xi)D_3\varphi(x_1,x_2,\xi)d\xi\right| \\
&\leq 2\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x_1,x_2,\xi)||D_3\varphi(x_1,x_2,\xi)|d\xi
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\sup_{x_3}\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x_1,x_2,x_3)|^2dx_1dx_2 &\leq 2\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x)||D_3\varphi(x)|dx \\
&\leq 2\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|D_3\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3}|\varphi(x)|^4dx &\leq \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|D_3\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\left(\sum_{i=1}^{2}\|D_i\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right) \\
&\leq \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\left(\sum_{i=1}^{3}\|D_i\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{3}\|D_i\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right) \\
&\leq \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\left(\sum_{i=1}^{3}\|D_i\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Portanto temos o desejado. ■

Lema 1.4 *Sejam ϕ, ψ, g funções não negativas definidas em $[0,\infty)$, g Lipshitziana; α,β números reais positivos. Suponhamos que*

$\phi'(t)+\psi(t)\leq g(\phi(t)),\ \ t\geq 0;$

$\phi(0)=\phi_0;$

$g(\phi)\leq \alpha\,\phi^2$ *para toda* $\phi\leq\beta;$

$E=\displaystyle\int_0^\infty \phi(t)dt<\infty.$

Então tem-se que

$$\phi(t)\leq\frac{e^{\alpha E}-1}{\alpha t},\qquad \int_t^\infty\psi(s)ds\leq\frac{e^{2\alpha E}-e^{\alpha E}}{\alpha t},\quad \textit{para todo } t\geq\frac{E}{\beta}e^{\alpha E}.$$

Dem: Ver [10] p. 656.

1.3 Teorema de Lax-Milgram

Sejam V um espaço de Hilbert com produto interno e norma dados, respectivamente, por $(\cdot\,,\cdot)$, $\|\cdot\|$ e $a : V \times V \to \mathbb{R}$ uma função real definida em $V \times V$.

Dizemos que $a(u,v)$ é uma forma bilinear em $V \times V$ quando $a : V \times V \to \mathbb{R}$ é linear em cada coordenada.

Dizemos que uma forma bilinear em $V \times V$ $a(u,v)$ é contínua em $V \times V$ se existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\|, \quad \forall\, u, v \in V.$$

Dizemos que uma forma bilinear e contínua em $V \times V$ $a(u,v)$ é coerciva quando existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2, \quad \forall\, v \in V.$$

Lema 1.5 (*Teorema de Lax-Milgram*) *Sejam V é um espaço de Hilbert separável e $a(u,v)$ é uma forma bilinear, contínua e coerciva em $V \times V$, então para cada $L \in V'$ existe um único $u \in V$ tal que*

$$a(u,v) = L(v), \ \forall\, v \in V. \tag{1.14}$$

Dem: Seja $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma base Hilbertiana de V. Para cada $m \in \mathbb{N}$ consideremos $V_m = [w_1, \cdots, w_m]$ o subespaço de dimensão finita gerado pelos m primeiros elementos da base $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Por meio do seguinte problema aproximado projetamos a equação variacional (1.14) em V_m:

<u>Problema Aproximado</u>

Existe $u_m \in V_m$ tal que $a(u_m, v) = L(v)$, $\forall\, v \in V_m$. Equivalentemente, existem escalares $\xi_{1m}, \cdots, \xi_{mm}$ tais que $u_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_{im} w_i$ satisfaz

$$a(u_m, w_j) = L(w_j), \ \ 1 \leq j \leq m.$$

Para verificarmos que o problema aproximado possui solução, note que

$$a(u_m, w_j) = a\left(\sum_{i=1}^{m} \xi_{im} w_i, w_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \xi_{im} a(w_i, w_j).$$

Logo, como j varia de 1 até m, temos o sistema:

$$\begin{cases} a(w_1,w_1)\xi_{1m} \ + a(w_2,w_1)\xi_{2m} \ + \cdots + a(w_m,w_1)\xi_{mm} \ = L(w_1) \\ a(w_1,w_2)\xi_{1m} \ + a(w_2,w_2)\xi_{2m} \ + \cdots + a(w_m,w_2)\xi_{mm} \ = L(w_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a(w_1,w_m)\xi_{1m} + a(w_2,w_m)\xi_{2m} + \cdots + a(w_m,w_m)\xi_{mm} = L(w_m) \end{cases}$$

que na forma matricial é dado por

$$\begin{bmatrix} a(w_1,w_1) & a(w_2,w_1) & \cdots & a(w_m,w_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ a(w_1,w_m) & a(w_2,w_m) & \cdots & a(w_m,w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{1m} \\ \vdots \\ \xi_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(w_1) \\ \vdots \\ L(w_m) \end{bmatrix},$$

ou ainda

$$A \cdot X = B.$$

Pela coercividade de $a(u,v)$ resulta que a matriz A é inversível. Com efeito, consideremos o operador

$$\begin{array}{rccc} A: & \mathbb{R}^m & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ & x & \mapsto & A \cdot x \end{array}$$

Seja $x = (x_1, \cdots, x_n) \in$ Ker A, então

$$0 = \langle A \cdot x, x \rangle_{\mathbb{R}^m} = x \cdot A \cdot x^t = a(u,u),$$

onde $u = x_1 w_1 + \cdots + x_m w_m$.

Desta igualdade e a coercividade de $a(u,v)$ temos

$$0 = a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad (\alpha > 0).$$

Portanto $u = 0$, o que implica $x_1 w_1 + \cdots + x_m w_m = 0$, ou seja, $x_1 = \cdots = x_m = 0$ pois $\{w_1, \cdots, w_m\}$ é L.I.. Logo $x = 0$, e consequentemente $Ker\, A = \{0\}$, o que mostra a injetividade do operador A.

Concluímos com isto que o problema aproximado possui uma única solução.

Estimativa

Fazendo $v = u_m \in V_m$ no problema aproximado e usando a coercividade de $a(u,v)$ obtemos:

$$\begin{aligned} \|u_m\|^2 &\leq \frac{1}{\alpha}a(u_m,u_m) = \frac{1}{\alpha}L(u_m) \\ &\leq \frac{1}{\alpha}\|L\|_{V'}\|u_m\|, \end{aligned}$$

ou seja

$$\|u_m\| \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{V'}, \ \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Portanto $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em V. Logo existem uma subsequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e $u \in V$ tais que

$$u_k \rightharpoonup u \text{ em } V.$$

<u>Passagem ao Limite</u>

Desde que $a(u,v)$ é uma forma bilinear e contínua temos que para $v \in V$, fixado arbitrariamente, a aplicação

$$\begin{aligned} a(\cdot,v): \ V &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto a(u,v) \end{aligned}$$

é linear e contínua, isto é $a(\cdot,v) \in V'$. Deste fato e a convergência fraca acima temos que

$$a(u_k,v) \rightarrow a(u,v), \quad \forall\, v \in V. \tag{1.15}$$

Por outro lado, se $v \in V$, existe uma sequência $(v_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset V_m$ tal que $v_m \rightarrow v$ em V. Para $k \geq m$ temos $V_m \subset V_k$ e portanto

$$a(u_k,v_m) = L(v_m).$$

Fixado m e tomando o limite nesta igualdade quando $k \rightarrow \infty$, de (1.15) temos

$$a(u,v_m) = L(v_m).$$

Agora tomando o limite quando $m \to \infty$ temos que u satisfaz (1.14), o que prova a existência.

Unicidade

Suponhamos que dado $L \in V'$ existam $u_1, u_2 \in V$ tais que

$$a(u_1, v) = L(v), \quad \forall\, v \in V,$$

$$a(u_2, v) = L(v), \quad \forall\, v \in V.$$

Logo $a(u_1 - u_2, v) = 0,\ \forall\, v \in V$. Fazendo $v = u_1 - u_2$ teremos

$$0 = a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq \alpha \|u_1 - u_2\|^2$$

onde na última desigualdade usamos a coercividade de $a(u, v)$. Como $\alpha > 0$ temos que $\|u_1 - u_2\| = 0$ e portanto $u_1 = u_2$, provando a unicidade. ■

1.4 Lema do Ângulo Agudo

Lema 1.6 *Seja X um espaço de Hilbert de dimensão finita com produto interno e norma denotado, respectivamente por $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ e $\| \cdot \|_X$. Se $P : X \to X$ é uma aplicação contínua e existe uma constante $\rho > 0$ tal que $\langle P(\xi), \xi \rangle > 0, \quad \forall\ \|\xi\|_X = \rho$, então existe $\xi_0 \in X$ com $\|\xi_0\|_X \leq \rho$ tal que $P(\xi_0) = 0$.*

Dem: Suponhamos que $P(\xi) \neq 0, \quad \forall\, \xi \in \overline{B_\rho(0)}$. Considere a seguinte aplicação $S : \overline{B_\rho(0)} \to \overline{B_\rho(0)}$ definida por $S(\xi) = -\rho \dfrac{P(\xi)}{\|P(\xi)\|_X}$. Desta forma, temos que S é contínua e pelo teorema do ponto fixo de Brower (veja [12]) existe $\xi_1 \in \overline{B_\rho(0)}$ tal que $S(\xi_1) = \xi_1$.

Deste modo temos:

$$-\rho \frac{P(\xi_1)}{\|P(\xi_1)\|_X} = \xi_1 \Rightarrow \|\xi_1\|_X = \rho.$$

Mas

$$\|\xi_1\|_X^2 \quad = \quad \langle \xi_1, \xi_1 \rangle = \left\langle -\rho \frac{P(\xi_1)}{\|P(\xi_1\|_X}, \xi_1 \right\rangle$$

$$= \quad -\frac{\rho}{\|P(\xi_1\|_X}\langle P(\xi_1), \xi_1\rangle,$$

ou seja

$$\langle P(\xi_1), \xi_1\rangle = -\|P(\xi_1)\|_X\|\xi_1\|_X < 0,$$

o que é um absurdo. Logo existe $\xi_0 \in X$ tal que $\|\xi_0\|_X \leq \rho$ e $P(\xi_0) = 0$. ■

1.5 A Integral de Bochner

Sejam Ω um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$ e $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Banach. Dizemos que $f : \Omega \to X$ é uma função vetorial simples se assume um número finito de valores, ou seja, f é simples se existem $\Omega_1, \cdots, \Omega_n$ subconjuntos mensuráveis de Ω, dois a dois disjuntos, $\Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_n = \Omega$, cada qual tendo medida finita e existem $x_1, \cdots, x_n$ pontos não nulos correspondentes em X tais que:

$$f(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \chi_{\Omega_j}(\xi)x_j$$

onde χ_{Ω_j} é a função característica de Ω_j.

Define-se a integral da função simples $f : \Omega \to X$ por:

$$\sum_{j=1}^{n} med(\Omega_j)x_j,$$

e denota-se

$$\int_\Omega f(\xi)d\xi = \sum_{j=1}^{n} med(\Omega_j)x_j.$$

Uma função $f : \Omega \to X$ é dita integrável à Bochner se existe uma sequência de funções simples $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$f_n(\xi) \to f(\xi) \text{ em } X, \text{ q.s. em } \Omega,$$

e além disso

$$\int_\Omega f(\xi)d\xi = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(\xi)d\xi.$$

Apresentamos a seguir, uma caracterização para as funções integráveis à Bochner, assim como alguns resultados interessantes que preservam o "espírito"da integral de Lebesgue. Um estudo detalhado sobre a integral de Bochner, bem como a demonstração destes resultados podem ser encontrados em [23].

Teorema 1.7 *Uma função $f : \Omega \to X$ é Bochner-Integrável se, e somente se, a aplicação numérica $\xi \mapsto \|f(\xi)\|_X$ é integrável a Lebesgue e*

$$\left\|\int_\Omega f(\xi)d\xi\right\|_X \leq \int_\Omega \|f(\xi)\|_X d\xi.$$

Teorema 1.8 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear limitado. Se $f : \Omega \to X$ é uma aplicação Bochner-Integrável, então $T \circ f : \Omega \to Y$ é Bochner-Integrável e*

$$\int_\Omega T(f(\xi))d\xi = T\left(\int_\Omega f(\xi)d\xi\right).$$

1.6 Distribuições Vetoriais

Seja X um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{D}(0,T;X)$ o espaço vetorial das funções vetoriais $\varphi : (0,T) \to X$ indefinidamente diferenciáveis com suporte compacto contido em $(0,T)$. O suporte de φ é denotado por $supp(\varphi)$. Diremos que uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathcal{D}(0,T;X)$ à uma função $\varphi \in \mathcal{D}(0,T;X)$ e escrevemos

$$\varphi_\nu \to \varphi \text{ em } \mathcal{D}(0,T;X)$$

se:

i) existe um compacto $K \subset (0,T)$ tal que $supp(\varphi_\nu)$ e $supp(\varphi)$ estão todos contidos em K,

$ii)$ Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_\nu^{(k)} \to \varphi^{(k)}$ em $C([0,T];X)$.

Todos espaços vetoriais aqui considerados serão reais bem como os escalares. $\mathcal{D}(0,T)$ é o espaço das funções testes sobre o intervalo $(0,T)$. Dizemos que uma aplicação $T : \mathcal{D}(0,T) \to X$ é contínua quando para toda sequência $(\theta_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(0,T)$ tal que $\theta_\mu \to \theta$ em $\mathcal{D}(0,T)$ tem-se que $\langle T,\theta_\mu\rangle \to \langle T,\theta\rangle$ em X. Por $\mathcal{D}'(0,T;X)$ representamos o espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X, isto é:

$$\mathcal{D}'(0,T;X) = \{T : \mathcal{D}(0,T) \to X;\ T \text{ é linear e contínua }\}.$$

Diremos que uma sequência $(T_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathcal{D}'(0,T;X)$ a um elemento $T \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ e escrevemos:

$$T_\mu \to T \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;X),$$

se

$$\langle T_\mu,\theta\rangle \to \langle T,\theta\rangle \text{ em } X,\ \ \forall\, \theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

O espaço $\mathcal{D}'(0,T;X)$ equipado com esta noção de convergência é denominado espaço das distribuições vetoriais de $\mathcal{D}(0,T)$ com valores em X.

Para $T \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ definimos a sua derivada de ordem k, $T^{(k)}$, da seguinte forma:

$$\langle T^{(k)},\theta\rangle = (-1)^k\langle T,\theta^{(k)}\rangle,\ \ \forall\, \theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

Com esta definição temos que $T^{(k)} \in \mathcal{D}'(0,T;X)$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, e o operador derivação é contínuo em $\mathcal{D}'(0,T;X)$, ou seja, se $T_\mu \to T$ em $\mathcal{D}'(0,T;X)$ então $T^{(k)} \to T^{(k)}$ em $\mathcal{D}'(0,T;X)$, $\forall\, k$. Para uma abordagem completa sobre o espaço das distribuições vetoriais consulte [16].

1.7 Resultados de Compacidade

Denotaremos por $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções vetoriais $u:(0,T) \to X$ tais que a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável a Lebesgue em $(0,T)$. A norma em $L^p(0,T;X)$ é dada por

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

O caso $p=\infty$, $L^\infty(0,T;X)$ é o espaço de Banach das funções vetoriais $u:(0,T) \to X$ tais que a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X$ é essencialmente limitada em $(0,T)$. A norma em $L^\infty(0,T;X)$ é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in(0,T)} ess \, \|u(t)\|_X.$$

Se X é um espaço de Hilbert então $L^2(0,T;X)$ é também um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X dt.$$

Para $\gamma > 0$, consideremos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R},X_0,X_1) = \{v \in L^2(\mathbb{R},X_0),\ D_t^\gamma v \in L^2(\mathbb{R},X_1)\}$$

com norma definida por

$$\|v\|_{\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R},X_0,X_1)} = \left\{\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R},X_0)} + \||\tau|^\gamma \widehat{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R},X_1)}\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{1.16}$$

onde $D_t^\gamma v$ é a derivada fracionária de ordem γ de v e $\widehat{v}$ denota a transformada de Fourier de v, conforme [22] e [16].

Para qualquer conjunto $K \subset \mathbb{R}$, associamos o subespaço $\mathcal{H}_K^\gamma$ de $\mathcal{H}^\gamma$ definido como sendo o conjunto das funções $u \in \mathcal{H}^\gamma$ com suporte contido em K, ou seja,

$$\mathcal{H}_K^\gamma(\mathbb{R},X_0,X_1) = \{u \in \mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R},X_0,X_1),\ supp(u) \subset K\}.$$

Um teorema de compacidade pode ser agora enunciado.

Teorema 1.9 *Sejam X_0, X e X_1 espaços de Hilbert com $X_0 \overset{c}{\hookrightarrow} X \hookrightarrow X_1$. Então para qualquer conjunto limitado $K \subset \mathbb{R}$ e qualquer $\gamma > 0$ temos*

$$\mathcal{H}^{\gamma}_{K}(\mathbb{R}, X_0, X_1) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\mathbb{R}; X).$$

Dem: Ver [21] p. 274.

Dados X_0, X e X_1 como no Teorema 1.9, denotamos por

$$W(0,T) = \{v; v \in L^p(0,T;X_0),\ v' \in L^q(0,T;X_1), 1 < p, q < \infty\},$$

o qual é um espaço de Banach munido da norma

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^p(0,T;X_0)} + \|v'\|_{L^q(0,T;X_1)}.$$

Desta forma, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.10 (*Teorema de Aubin-Lions*) $W(0,T) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(0,T;X)$.

Dem: Ver [21] p. 271.

Lema 1.11 *Sejam X um espaço de Banach, X' o dual de X e $u, g \in L^1(0,T;X)$. Então são equivalentes:*

i) $u(t) = \xi + \displaystyle\int_0^t g(s)ds$, *q.s. em* $[0,T]$, $\xi \in X$, *isto é, u é igual q.s. em $[0,T]$ a uma primitiva de g.*

ii) $\displaystyle\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^T g(t)\varphi(t), \quad \forall\, \varphi \in D(0,T).$

iii) $\dfrac{d}{dt}\langle \eta, u\rangle_{X'\times X} = \langle \eta, g\rangle_{X'\times X} \quad \forall\, \eta \in X'$ *no sentido das distribuições escalares sobre* $(0,T)$.

Dem:

i) $\Rightarrow$ *ii)* Suponhamos que $u(t) = \xi + \displaystyle\int_0^t g(s)ds$. Então para toda $\varphi \in D(0,T)$

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = \int_0^T \left(\xi + \int_0^t g(s)ds\right)\varphi'(t)dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^T \xi\varphi^{'}(t)dt + \int_0^T \left(\int_0^t g(s)ds\right)\varphi'(t)dt \\
&= \xi\left(\int_0^T \varphi^{'}(t)dt\right) + \int_0^T \left(\int_0^t g(s)ds\right)\varphi'(t)dt \\
&= \left(\int_0^t g(s)ds\right)\varphi(t)\Big|_0^T - \int_0^T g(t)\varphi(t)dt \\
&= -\int_0^T g(t)\varphi(t)dt.
\end{aligned}
$$

$ii) \Rightarrow iii)$ Desde que $u, g \in L^1(0,T;X)$ então para toda $\eta \in X'$ temos que as funções

$$
t \mapsto \langle \eta, u(t)\rangle_{X'\times X} \ \text{ e } \ t \mapsto \langle \eta, g(t)\rangle_{X'\times X}
$$

pertencem a $L^1(0,T)$. Logo ambas definem distribuições em $D^{'}(0,T)$ e

$$
\langle\langle \eta, u(t)\rangle_{X'\times X}, \varphi\rangle = \int_0^T \langle \eta, u(t)\rangle_{X'\times X}\varphi(t)dt, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0,T),
$$

$$
\langle\langle \eta, g(t)\rangle_{X'\times X}, \varphi\rangle = \int_0^T \langle \eta, g(t)\rangle_{X'\times X}\varphi(t)dt, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0,T).
$$

Portanto, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ temos que

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dt}\langle \eta, u(t)\rangle_{X'\times X}, \varphi \right\rangle &= -\langle\langle \eta, u(t)\rangle_{X'\times X}, \varphi'\rangle \\
&= -\int_0^T \langle \eta, u(t)\rangle_{X'\times X}\varphi'(t)dt = -\int_0^T \langle \eta, \varphi'(t)u(t)\rangle_{X'\times X}dt \\
&= -\langle \eta, \int_0^T \varphi'(t)u(t)dt\rangle = -\langle \eta, -\int_0^T \varphi(t)g(t)dt\rangle \\
&= \int_0^T \langle \eta, g(t)\rangle\varphi(t)dt = \langle\langle \eta, g(t)\rangle, \varphi\rangle,
\end{aligned}
$$

ou seja

$$
\frac{d}{dt}\langle \eta, u(t)\rangle_{X'\times X} = \langle \eta, g(t)\rangle_{X'\times X} \text{ no sentido de } D'(0,T).
$$

Note que aqui usamos propriedade da integral de Bochner e a hipótese (ii).

$iii) \Rightarrow ii)$ Suponhamos que $\dfrac{d}{dt}\langle \eta, u(t)\rangle_{X'\times X} = \langle \eta, g(t)\rangle_{X'\times X}$ no sentido de $D'(0,T)$, então

$$
-\langle\langle \eta, u(t)\rangle_{X'\times X}, \varphi'\rangle = \langle\langle \eta, g(t)\rangle_{X'\times X}, \varphi\rangle, \quad \forall\, \varphi \in D(0,T),
$$

ou ainda

$$\langle\langle \eta, u(t)\rangle_{X'\times X}, \varphi'\rangle + \langle\langle \eta, g(t)\rangle_{X'\times X}, \varphi\rangle = 0 \ \ \forall\, \varphi \in D(0,T),$$

$$\int_0^T \langle \eta, u(t)\rangle_{X'\times X}\varphi'(t)dt + \int_0^T \langle \eta, g(t)\rangle_{X'\times X}\varphi(t)dt = 0,$$

ou seja

$$\left\langle \eta, \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt + \int_0^T g(t)\varphi(t)dt \right\rangle_{X'\times X} = 0 \ \ \forall\, \eta \in X'.$$

Logo,

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt + \int_0^T g(t)\varphi(t)dt = 0 \ \text{ em } \ X,$$

ou então

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^T g(t)\varphi(t)dt \quad \forall\, \varphi \in D(0,T).$$

ii) $\Rightarrow$ *i*) Queremos mostrar que existe $\xi \in X$ tal que $u(t) = \xi + \int_0^t g(s)ds$ q.s. em $[0,T]$, equivalentemente

$$u(t) - \int_0^t g(s)ds = \xi \text{ q.s. em } [0,T].$$

Logo, consideremos $u_0(t) = \int_0^t g(s)ds$ e $v(t) = u(t) - u_0(t)$ e vamos provar que $v(t) = \xi$, $\xi \in X$ q.s. em $[0,T]$.

De fato, para $\varphi \in D(0,T)$ tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^T v(t)\varphi'(t)dt &= \int_0^T u(t)\varphi'(t)dt - \int_0^T u_0(t)\varphi'(t)dt \\
&= -\int_0^T g(t)\varphi(t)dt - \int_0^T u_0(t)\varphi'(t)dt \\
&= -\int_0^T g(t)\varphi(t)dt + \int_0^T g(t)\varphi(t)dt
\end{aligned}$$

onde usamos a hipótese e integração por partes. Logo

$$\int_0^T v(t)\varphi'(t)dt = 0, \ \ \forall\, \varphi \in D(0,T). \tag{1.17}$$

A seguir vamos considerar uma função teste ψ conveniente. Dada $\varphi \in D(0,T)$ denotamos $\lambda = \int_0^T \varphi(t)dt$ e seja $\varphi_0 \in D(0,T)$ tal que $\int_0^T \varphi_0(t)dt = 1$. Assim definimos

$$\psi(t) = \int_0^t (\varphi(s) - \lambda\varphi_0(s))\, ds.$$

Claramente $\psi \in C^\infty(0,T)$ e $\psi^{'}(t) = \varphi(t) - \lambda\varphi_0(t)$. Logo para concluírmos que $\psi \in D(0,T)$ resta-nos provar que ψ possui suporte compacto em $(0,T)$. Com efeito, Como $\varphi, \varphi_0 \in D(0,T)$, existe $\delta > 0$ tal que $\varphi = \varphi_0 = 0$ em $(0,\delta) \cup (T-\delta, T)$. Assim é óbvio que $\psi(t) = 0$ em $(0,\delta)$. Além disso se $t \in (T-\delta, T)$ então

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \int_0^t (\varphi(s) - \lambda\varphi_0(s))\, ds = \int_0^t \varphi(s)ds - \int_0^t \lambda\varphi_0(s)ds \\
&= \int_0^t \varphi(s)ds + \int_t^T \varphi(s)ds - \lambda\int_0^t \varphi_0(s)ds + \lambda\int_t^T \varphi_0(t)dt \\
&= \int_0^T \varphi(t)dt - \lambda\int_0^T \varphi_0(t)dt \\
&= \int_0^T \varphi(t)dt - \lambda \cdot 1 = 0.
\end{aligned}$$

Na segunda igualdade uasamos o fato de que $\varphi = \varphi_0 = 0$ em $(T-\delta, T)$. Portanto concluímos que $\psi = 0$ em $(0,\delta) \cup (T-\delta, T)$ e assim $supp(\psi)$ é um compacto contido em $(0,T)$. Tendo $\psi \in D(0,T)$ por (1.17) temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^T v(t)\psi'(t)dt = \int_0^T v(t)(\varphi(t) - \lambda\varphi_0(t))dt \\
&= \int_0^T v(t)\varphi(t)dt - \lambda\int_0^T v(t)\varphi_0(t)dt = \int_0^T v(t)\varphi(t)dt - \lambda\xi \\
&= \int_0^T v(t)\varphi(t)dt - \left(\int_0^T \varphi(t)dt\right)\xi = \int_0^T v(t)\varphi(t)dt - \int_0^T \xi\varphi(t)dt \\
&= \int_0^T (v(t) - \xi)\varphi(t)dt,
\end{aligned}$$

onde $\xi = \displaystyle\int_0^T v(t)\varphi_0(t)dt$, logo

$$\int_0^T (v(t) - \xi)\varphi(t)dt = 0, \forall \varphi(t) \in D(0,T).$$

Portanto

$$\langle \eta, \int_0^T (v(t) - \xi)\varphi(t)dt\rangle_{X'X} = 0, \forall \eta \in X',$$

ou ainda

$$\int_0^T \langle \eta, (v(t)-\xi)\rangle_{X'\times X}\varphi(t)dt = 0, \forall \eta \in X'.$$

Como $\langle \eta, v(t)-\xi\rangle_{X'\times X} \in L^1(0,T)$, temos pelo Lema de Du Bois Raymond que $\langle \eta, v(t)-\xi\rangle_{X'\times X} = 0$ q.s. em $[0,T]$ para toda $\eta \in X'$, logo

$$v(t) \;\; = \;\; \xi \text{ em } X \text{ q.s. em } [0,T],$$

o que completa a demonstração do Lema 1.11. ■

1.8 Uma forma trilinear e suas propriedades

Agora vamos introduzir uma aplicação importante para o estudo das equações de Navier-Stokes. Observamos que se $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ e $w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{L}^n(\Omega)$ então temos que $\left(u_j \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i\right) \in L^1(\Omega)$ para todo $i,j = 1,\cdots,n$. De fato, se $n=2$ então $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$. Com isto, fixados arbitrariamente i e j temos que $u_j \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$, $w_i \in H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega) = H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ e $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = 1$. Logo pela desigualdade de Hölder generalizada temos que $\left(u_j \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i\right) \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega \left| u_j(x) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) w_i(x)\right| dx \leq \|u_j\|_{L^4(\Omega)} \left\|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{L^4(\Omega)}. \tag{1.18}$$

Se $n \geq 3$ então $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$. Desta forma, fixados arbitrariamente i e j resulta que

$$u_j \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega), \;\; \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega), \;\; w_i \in H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega) \hookrightarrow L^n(\Omega)$$

e $\dfrac{n-2}{2n} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} = 1$. Portanto, pela desigualdade de Holder generalizada segue que $\left(u_j \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i\right) \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega \left| u_j(x) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) w_i(x)\right| dx \leq \|u_j\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \left\|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{L^n(\Omega)}, \tag{1.19}$$

o que prova nossa afirmação.

A argumentação acima nos permite definir a aplicação
$b : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times (\mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{L}^n(\Omega)) \to \mathbb{R}$ dada por

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j(x) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) w_i(x) dx. \tag{1.20}$$

Com relação a aplicação b temos o seguinte resultado.

Lema 1.12 *A aplicação b é uma forma trilinear e contínua. Além disso, satisfaz:*
(i) Para todo $u \in V$ e $v \in \widetilde{V}$ tem-se $b(u, v, v) = 0$.
(ii) Para todo $u \in V$ e $v, w \in \widetilde{V}$ tem-se $b(u, v, w) = -b(u, w, v)$.
(iii) Se $n = 2$ então $|b(u, v, w)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u\|_2^{\frac{1}{2}} \|u\|^{\frac{1}{2}} \|v\| \|w\|_2^{\frac{1}{2}} \|w\|^{\frac{1}{2}}$, $\forall\, u, v, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

Dem: É imediato que b é uma forma trilinear. Para provarmos a continuidade consideremos 2 casos:

<u>1° Caso, $n = 2$:</u> Neste caso, de (1.18)

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega u_j(x) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) w_i(x) dx \right| &\leq \|u_j\|_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq C \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$. Logo

$$\begin{aligned} |b(u, v, w)| &\leq C \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &= C \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq C \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{2} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &= C \|u\| \sum_{i=1}^{2} \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)} \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\|u\|\left(\sum_{i=1}^{n}\|v_i\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{2}\|w_i\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= C\|u\|\|v\|\|w\|\\
&\leq C\|u\|\|v\|\|w\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbb{L}^n(\Omega)}
\end{aligned}
$$

o que prova a continuidade de b, quando $n = 2$.

<u>2° Caso, $n \geq 3$:</u> Se $n \geq 3$ então de (1.19) resulta que

$$
\begin{aligned}
|b(u,v,w)| &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\int_\Omega u_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}w_i dx\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\|u_j\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}\left\|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega)}\|w_i\|_{L^n(\Omega)}\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\|u_j\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}\left\|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega)}\right)\|w_i\|_{L^n(\Omega)}\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\|u_j\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\|w_i\|_{L^n(\Omega)}\\
&\leq \sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}\|u\|_{\mathbb{L}^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}\|v_i\|_{H_0^1(\Omega)}\|w_i\|_{L^n(\Omega)}\\
&\leq \sqrt{n}\|u\|_{\mathbb{L}^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}\sum_{i=1}^{n}\|v\|\|w\|_{L^n(\Omega)}\\
&= n\sqrt{n}\|u\|_{\mathbb{L}^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}\|v\|\|w\|_{\mathbb{L}^n(\Omega)}\\
&\leq C\|u\|\|v\|\|w\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbb{L}^n(\Omega)}
\end{aligned}
$$

usamos o fato de que $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$. Isto completa a prova da continuidade da forma b.

Para provarmos (i), sejam $\varphi, \theta \in \mathcal{V}$. Então temos que

$$
\begin{aligned}
b(\varphi,\theta,\theta) &= \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \varphi_j(x)\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}(x)\theta_i(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \varphi_j(x)\frac{\partial\theta_i^2}{\partial x_j}(x)dx\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_j}(x)\theta_i^2(x)dx = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_j}(x)\right)\theta_i^2(x)dx\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega div(\varphi)(x)\theta_i^2(x)dx = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
b(\varphi,\theta,\theta) = 0, \quad \forall\, \varphi,\theta \in \mathcal{V}. \tag{1.21}
$$

Dados $u \in V$ e $v \in \widetilde{V}$, pela própria definição dos espaços V e $\widetilde{V}$, existem sequências (φ_n) e (θ_n) em $\mathcal{V}$ tais que $\varphi_n \to u$ em V e $\theta_n \to v$ em $\widetilde{V}$. Pela continuidade de b e (1.21) temos que

$$b(\varphi_n, \theta_n, \theta_n) = 0, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ b(\varphi_n, \theta_n, \theta_n) \to b(u, v, v) \text{ em } \mathbb{R},$$

donde

$$b(u, v, v) = 0, \ \ \forall\, u \in V \ \text{ e } v \in \widetilde{V}.$$

Agora vamos provar (ii). Por (i), dados $u \in V$ e $v, w \in \widetilde{V}$ temos que

$$b(u, v + w, v + w) = 0,$$

este fato e a linearidade da aplicação b nos levam a

$$b(u, v, v) + b(u, v, w) + b(u, w, v) + b(u, w, w) = 0.$$

Usando novamente (i) obtemos

$$b(u, v, w) = -b(u, w, v),$$

o que prova (ii). Provaremos a seguir (iii). Como $n = 2$ temos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$. Assim, levando em conta esta imersão, a desigualdade de Hölder e (1.9) obtemos

$$\begin{aligned}
|b(u, v, w)| &\leq \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega |u_j(x)| \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) \right| |w_i(x)| dx \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{2} \|u_j\|_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{L^4(\Omega)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} \|u_j\|_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \|w_i\|_{L^4(\Omega)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} \|u_j\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{2} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w_i\|_{L^4(\Omega)} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{2} \|u_j\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w_i\|_{L^4(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{j=1}^{2}\|u_j\|^2_{L^4(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left\|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{2}\|w_i\|^2_{L^4(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \|v\|\left(\sum_{j=1}^{2}\|u_j\|^2_{L^4(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{2}\|w_i\|^2_{L^4(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \|v\|\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\|u_j\|_{L^2(\Omega)}\|u_j\|_{H^1_0(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\|w_i\|_{L^2(\Omega)}\|w_i\|_{H^1_0(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \|v\|\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}\left[\left(\sum_{j=1}^{2}\|u_j\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{2}\|u_j\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}\\
&\qquad\left[\left(\sum_{j=1}^{2}\|w_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{2}\|w_i\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|v\|\|u\|_2^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}\|w\|_2^{\frac{1}{2}}\|w\|^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$|b(u,v,w)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|u\|_2^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}\|v\|\|w\|_2^{\frac{1}{2}}\|w\|^{\frac{1}{2}}, \ \ \forall\, u,v,w \in \mathbb{H}^1_0(\Omega),$$

o que demonstra o Lema.■

De acordo com a definição da forma b e suas propriedades, se $2 \leq n \leq 4$ temos $V = \widetilde{V}$ e podemos para cada $u \in V$ considerar a aplicação

$$
\begin{aligned}
Bu: \ & V \ \rightarrow \mathbb{R}\\
& v \ \mapsto \langle Bu, v\rangle = b(u,u,v)
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

Obviamente,

$$(Bu) \in V' \text{ e } \|Bu\|_{V'} = \sup_{\|v\|\leq 1}|b(u,u,v)|.$$

Como V é subespaço vetorial de H, temos pelo Teorema de Hahn-Banach (veja [2]) que existe $\widetilde{Bu} \in H'$ tal que:

$$\langle\widetilde{Bu}, v\rangle_{H'\times H} = \langle Bu, v\rangle_{V'\times V}, \ \forall\, v \in V \ \text{ e } \ \|\widetilde{Bu}\|_{H'} = \|Bu\|_{V'}.$$

Do Teorema de Riesz (veja [2]) temos que existe um único $\xi_u \in H$ tal que:

$$(\xi_u, v) = \langle \widetilde{Bu}, v\rangle_{H'\times H},\ \forall v \in H \ \text{ e } \ \|\xi_u\|_2 = \|\widetilde{Bu}\|_{H'} = \|Bu\|_{V'} = \sup_{\|v\|\leq 1} |b(u,u,v)|.$$

Lema 1.13 *(i) Se $2 \leq n \leq 4$ e $u \in L^2(0,T,V)$, então $Bu \in L^1(0,T,V')$.*

(ii) Se $n = 2$ e $u \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T;H)$, então $Bu \in L^2(0,T,V')$.

(iii) Se $n = 3$ e $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$, então $u \in L^{\frac{8}{3}}(0,T;\mathbb{L}^4)$ e $Bu \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;V')$.

Dem: Vamos mostrar (i). Note que

$$\begin{aligned}
\|Bu(t)\|_{V'} &= \sup_{\|v\|\leq 1} |\langle Bu(t), v\rangle| = \sup_{\|v\|\leq 1} |b(u(t),u(t),v)| \\
&\leq \sup_{\|v\|\leq 1} C\|u(t)\|^2\|v\| \\
&\leq C\|u(t)\|^2.
\end{aligned}$$

Como $u \in L^2(0,T;V)$, temos que a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|^2$ é integrável sobre $(0,T)$. Logo $Bu \in L^1(0,T;V')$.

Vamos mostrar (ii). Dado $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$, usando o Lema 1.12, temos

$$\begin{aligned}
|b(u(t),v,w)| &= |-b(u(t),w,v)| = |b(u(t),w,v)| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|u(t)\|_2^{\frac{1}{2}}\|u(t)\|^{\frac{1}{2}}\|w\|\|v\|_2^{\frac{1}{2}}\|v\|^{\frac{1}{2}},\ \ \forall\, v,w \in V.
\end{aligned}$$

Em particular, fazendo $v = u(t)$ e notando que $u \in L^\infty(0,T;H)$ teremos:

$$|b(u(t),u(t),w)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|u(t)\|_2\|u(t)\|\|w\| \leq C_1\|u(t)\|\|w\|.$$

Disto segue que

$$\begin{aligned}
\|Bu(t)\|_{V'} &= \sup_{\|w\|\leq 1} |\langle Bu(t), w\rangle_{V'\times V}| \\
&\leq C_1\|u(t)\|,
\end{aligned}$$

ou seja

$$\|Bu(t)\|_{V'}^2 \ \leq\ C_1^2\|u(t)\|^2,$$

o que nos mostra que $Bu \in L^2(0,T;V')$ e, além disso,

$$\|Bu\|_{L^2(0,T;V')} \leq C_1^2 \|u\|_{L^2(0,T;V)}. \tag{1.23}$$

Vamos agora mostrar (iii). Seja $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$, de (1.10) temos que para quase todo $t \in (0,T)$

$$\|u(t)\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)} \leq C_2 \|u(t)\|_2^{\frac{1}{4}} \|u(t)\|^{\frac{3}{4}},$$

o que nos dá

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}^{\frac{8}{3}} &\leq C_2^{\frac{8}{3}} \|u(t)\|_2^{\frac{2}{3}} \|u(t)\|^2 \\ &\leq C_3 \|u(t)\|^2. \end{aligned}$$

Mostrando que $u \in L^{\frac{8}{3}}(0,T;\mathbb{L}^4(\Omega))$. Notemos que do Lema 1.12

$$|b(u(t),u(t),v)| = |b(u(t),v,u(t))| \leq C_4 \|u(t)\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}^2 \|v\|, \ \forall\, v \in V.$$

Portanto, desde que $u \in L^\infty(0,T;H)$, temos

$$\begin{aligned} \|Bu(t)\|_{V'} &\leq C_4 \|u(t)\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}^2 \\ &\leq C_5 \|u(t)\|_2^{\frac{1}{2}} \|u(t)\|^{\frac{3}{2}} \\ &\leq C_6 \|u(t)\|^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

ou seja

$$\|Bu(t)\|_{V'}^{\frac{4}{3}} \leq C_7 \|u(t)\|^2,$$

o que demonstra o Lema. ■

Análogo ao Lema 1.13 temos:

Lema 1.14 *(i) Se $2 \leq n \leq 4$ e $u \in L^2(0,T,V)$ então $\xi_u \in L^1(0,T,H)$.*
(ii) Se $n = 2$ e $u \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T;H)$ então $\xi_u \in L^2(0,T,H)$.
(iii) Se $n = 3$ e $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$, então $\xi_u \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;H)$.

Dem: Para demonstrar este lema basta observar que para quase todo $t \in (0,T)$ temos

$$\|\xi_{u(t)}\|_2 = \|\widetilde{Bu(t)}\|_{H'} = \|Bu(t)\|_{V'}.\blacksquare$$

Lema 1.15 *Seja* $u \in V \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$*. Então*

(i) $\|\xi_u\|_2 \le c_1 \|u\|_2^{\frac{1}{2}} \|u\| \|\triangle u\|_2^{\frac{1}{2}}$, *se* $n = 2$,

(ii) $\|\xi_u\|_2 \le c_2 \|u\|^{\frac{3}{2}} \|\triangle u\|_2^{\frac{1}{2}}$, *se* $n = 3$.

Dem: (i) Sejam $n = 2$ e $u \in V \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$. Pela desigualdade de Hölder temos

$$\left| \int_\Omega u_j(x) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) v_i(x) dx \right| \le \|u_j\|_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \|v_i\|_{L^4(\Omega)}, \ \ \forall\, v \in V.$$

Por (1.9), o lado direito desta desigualdade é limitado por

$$C_1 \|u_j\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|v_i\|_{L^4(\Omega)}.$$

Consequentemente, usando (1.20)

$$|b(u,u,v)| \le C_2 \|u\|_2^{\frac{1}{2}} \|u\| \|u\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|v\|.$$

Portanto

$$\|\xi_u\|_2 = \sup_{\|v\| \le 1} |b(u,u,v)| \le c \|u\|_2^{\frac{1}{2}} \|u\| \|\triangle u\|_2^{\frac{1}{2}}.$$

(ii) Sejam $n = 3$ e $u \in V \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$. Pela desigualdade de Hölder temos

$$\left| \int_\Omega u_j(x) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) v_i(x) dx \right| \le \|u_j\|_{L^6(\Omega)} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^6(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|v_i\|_{L^2(\Omega)}.$$

Da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ temos que o lado direito desta desigualdade é limitado por

$$\|u_j\|_{H_0^1(\Omega)} \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Consequentemente

$$|b(u,u,v)| \le c \|u\|^{\frac{3}{2}} \|u\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|v\|, \ \ \forall\, v \in V.$$

Portanto

$$\|\xi_u\|_2 \le c \|u\|_2^{\frac{3}{2}} \|\triangle u\|_2^{\frac{1}{2}}. \ \blacksquare$$

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Soluções Fracas

2.1 Problema Estacionário Linear: Problema de Stokes

Lembramos que se $u = (u_1, \cdots, u_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, então $\triangle u$ é o vetor dado por

$$\triangle u = (\triangle u_1, \cdots, \triangle u_n)$$

Teorema 2.1 *Dados $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ e $\nu > 0$, existe uma única função vetorial $u = (u_1, \cdots, u_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ e uma função escalar $P : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:*

$$u \in V, \quad P \in L^2(\Omega), \tag{2.1}$$

$$-\nu \triangle u + \nabla P = f \quad em \quad \mathbb{D}^{'}(\Omega). \tag{2.2}$$

Dem: Inicialmente observamos que a formulação variacional

$$u \in V \;\text{ tal que }\; \nu((u, v)) = (f, v), \;\; \forall\, v \in V, \tag{2.3}$$

é equivalente a (2.1),(2.2) para algum $P \in L^2(\Omega)$. De fato, seja u satisfazendo (2.3). Então, em particular,

$$\nu((u, \varphi)) = (f, \varphi), \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{V}. \tag{2.4}$$

Note que

$$\begin{aligned}((u,\varphi)) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}dx = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)\left\langle \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}, \varphi_i\right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n}\langle -\triangle u_i, \varphi_i\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} \\ &= \langle -\triangle u, \varphi\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

e

$$(f,\varphi) = \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} f_i(x)\varphi_i(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\langle f_i, \varphi_i\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} = \langle f, \varphi\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)}. \tag{2.6}$$

De $(2.4)-(2.6)$ temos

$$\langle -\nu\triangle u, \varphi\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} = \langle f, \varphi\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)}, \ \ \forall\, \varphi \in \mathcal{V},$$

ou ainda

$$\langle -\nu\triangle u - f, \varphi\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} = 0, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{V}. \tag{2.7}$$

Desta forma, pelo Lema 1.1, existe $Q \in D'(\Omega)$ tal que

$$-\nu\triangle u - f = \nabla Q \text{ em } \mathbb{D}'(\Omega),$$

ou seja

$$-\nu\triangle u + \nabla(-Q) = f.$$

Considerando $P = -Q$ temos que existe $P \in D'(\Omega)$ tal que

$$-\nu\triangle u + \nabla P = f \text{ em } \mathbb{D}'(\Omega).$$

Pelo Lema 1.2, conclui-se que $P \in L^2(\Omega)$, e assim u e P satisfazem (2.1) e (2.2).

Reciprocamente, suponhamos que u e P satisfazem (2.1) e (2.2). Então para $\varphi \in \mathcal{V}$ temos

$$\nu\langle -\triangle u, \varphi\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} + \langle \nabla P, \varphi\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} = \langle f, \varphi\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)}. \tag{2.8}$$

Observamos que

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla P, \varphi \rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial P}{\partial x_i}, \varphi_i \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} - \left\langle P, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} - \int_\Omega P(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(x) dx = - \int_\Omega P(x) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(x) \right) dx \\
&= - \int_\Omega P(x) div(\varphi)(x) dx = 0. \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

Logo, de (2.5), (2.6), (2.8) e (2.9) temos que

$$\nu((u,\varphi)) = (f,\varphi), \ \ \forall\, \varphi \in \mathcal{V}.$$

Como $V = \overline{\mathcal{V}}^{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}$ por densidade segue que u satisfaz (2.3).

Levando-se em conta a equivalência dos problemas basta então mostrarmos que o problema (2.3) possui uma única solução. Definindo

$$a(u,v) = \nu((u,v)), \ \ \forall\, u, v \in V,$$

temos claramente que a é uma forma bilinear, contínua e coerciva em $V \times V$. Além disso, dada $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ temos que $L : V \to \mathbb{R}$ definida por

$$L(v) = (f, v)$$

é uma forma linear e contínua em V. Então pelo Teorema de Lax-Milgram (Lema 1.5) existe um único $u \in V$ tal que $a(u,v) = L(v), \forall\, v \in V$, isto é, existe um único $u \in V$ satisfazendo (2.3). ■

Observação 2.2 *O Teorema 2.1 pode também ser demonstrado usando o método de Galerkin. Este método será usado nos próximos resultados como veremos.*

2.2 Problema Estacionário não Linear

Lembramos que $(u \cdot \nabla)u$ denota o vetor

$$
\begin{aligned}
(u \cdot \nabla)u &= ((u, \nabla u_1)_{\mathbb{R}^n}, \cdots, (u, \nabla u_n)_{\mathbb{R}^n}) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j}, \cdots, \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \right).
\end{aligned}
$$

Teorema 2.3 *Dados $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ e $\nu > 0$ existe uma função vetorial $u = (u_1, \cdots, u_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ e uma função escalar $P : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que:*

$$u \in V, \quad P \in L^2(\Omega), \tag{2.10}$$

$$-\nu \triangle u + (u \cdot \nabla)u + \nabla P \;=\; f \text{ em } \mathbb{D}^{'}(\Omega). \tag{2.11}$$

Dem: Observamos que a formulação variacional

$$u \in V \text{ tal que } \nu((u,v)) + b(u,u,v) = (f,v), \;\; \forall\, v \in \widetilde{V}, \tag{2.12}$$

onde b é a forma trilinear definida em (1.20) é equivalente a (2.10),(2.11) para algum $P \in L^2(\Omega)$. De fato, seja u satisfazendo (2.12). Então, em particular,

$$\nu((u,\varphi)) + b(u,u,\varphi) = (f,\varphi), \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{V}. \tag{2.13}$$

Note que

$$\begin{aligned} b(u,u,\varphi) &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \varphi_i \, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \varphi_i \, dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \varphi_i \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} \\ &= \langle (u\cdot\nabla)u, \varphi \rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Logo, de (2.5), (2.6), (2.13) e (2.14) resulta que

$$\langle -\nu\triangle u, \varphi\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} + \langle (u\cdot\nabla)u, \varphi\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} = \langle f, \varphi\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} \;\; \forall\, \varphi \in \mathcal{V}, \tag{2.15}$$

ou ainda

$$\langle -\nu\triangle u + (u\cdot\nabla)u - f, \varphi\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}. \tag{2.16}$$

Pelo Lema 1.1, existe $Q \in D'(\Omega)$ tal que

$$-\nu\triangle u + u\cdot\nabla u - f = \nabla Q \;\text{ em }\; \mathbb{D}'(\Omega).$$

Considerando $P = -Q$, conclui-se que existe $P \in D'(\Omega)$ tal que

$$-\nu\triangle u + (u\cdot\nabla)u + \nabla P = f \quad \text{em} \;\; \mathbb{D}'(\Omega).$$

Desde que $\triangle u \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ e $(u \cdot \nabla)u \in \mathbb{L}^{n'}(\Omega)$ onde $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n'} = 1$, o Lema 1.2 garante que $P \in L^2(\Omega)$, e portanto $(2.10) - (2.11)$ se verificam.

Reciprocamente, suponhamos que u e P satisfazem $(2.10) - (2.11)$. Então para $\varphi \in \mathcal{V}$ segue-se que

$$\langle -\nu\triangle u + (u \cdot \nabla)u + \nabla P, \varphi\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} = \langle f, \varphi\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)},$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \nu\langle -\triangle u, \varphi\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} &+ \langle (u \cdot \nabla)u, \varphi\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} \\ &+\langle \nabla P, \varphi\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} = \langle f, \varphi\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Usando (2.5), (2.6), (2.9), (2.14) e (2.17), temos

$$\nu((u, \varphi)) + b(u, u, \varphi) = (f, \varphi), \ \ \forall\, \varphi \in \mathcal{V}.$$

Por densidade temos (2.12).

Desta forma, para provarmos o teorema, vamos verificar que existe uma função u satisfazendo (2.12). Para isto, seja $(w_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ um sistema de funções linearmente independente e completo em $\widetilde{V}$. Esta sequência existe pois $\widetilde{V} \subset V \subset \mathbb{H}^1_0(\Omega)$ é um subespaço separável.

Seja $\widetilde{V}_m = [w_1, \cdots, w_m]$ o subespaço gerado pelos vetores $w_1, \cdots, w_m$ e consideremos o problema aproximado

$$u_m \in \widetilde{V}_m \ \text{ tal que } \ \nu((u_m, w_j)) + b(u_m, u_m, w_j) = \langle f, w_j\rangle, \ \ 1 \leq j \leq m. \tag{2.18}$$

Para garantir a existência de solução de (2.18), para cada $m \in \mathbb{N}$, vamos construir uma aplicação P_m a qual se aplica o Lema 1.6 . Observamos que qualquer que seja $u \in \widetilde{V}_m$ temos que a aplicação $L_u : \widetilde{V}_m \to \mathbb{R}$ dada por

$$L_u(w) = \nu((u, w)) + b(u, u, w) - \langle f, w\rangle,$$

é um funcional linear no espaço de dimensão finita $\widetilde{V}_m$. Então existe um único $\eta \in \widetilde{V}_m$ tal que

$$L_u(w) = ((\eta, w)), \ \ \forall\, w \in \widetilde{V}_m.$$

Assim temos o seguinte esquema

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{V}_m & \rightarrow & \mathcal{L}(\widetilde{V}_m) & \rightarrow & \widetilde{V}_m \\ u & \mapsto & L_u & \mapsto & \eta \end{array}$$

o qual define $P_m : \widetilde{V}_m \rightarrow \widetilde{V}_m$ por $P_m(u) = \eta$. Logo

$$((P_m(u), w)) = \nu((u, w)) + b(u, u, w) - \langle f, w \rangle, \ \ \forall\, u, w \in \widetilde{V}_m.$$

A aplicação P_m é contínua. Com efeito, seja $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \widetilde{V}_m$ e $u \in \widetilde{V}_m$ tal que $u_k \rightarrow u$ em $\widetilde{V}_m$, então

$$((P_m(u_k), w)) = \nu((u_k, w)) + b(u_k, u_k, w) - \langle f, w \rangle.$$

Tomando-se o limite quando $k \rightarrow \infty$ nesta igualdade obtemos

$$((P_m(u_k), w)) \rightarrow ((P_m(u), w)), \ \forall\, w \in \widetilde{V}_m,$$

ou seja

$$P_m(u_k) \rightharpoonup P_m(u) \ \text{ em } \ \widetilde{V}_m.$$

Como $dim(\widetilde{V}_m) < \infty$, temos que em $\widetilde{V}_m$ as topologias fraca e forte coincidem.

Então $P_m(u_k) \rightarrow P_m(u)$ em $\widetilde{V}_m$ quando $k \rightarrow \infty$, provando-se que P_m é contínua. Além disso,

$$\begin{aligned} ((P_m(u), u)) &= \nu\|u\|^2 + b(u, u, u) - (f, u) \\ &\geq \nu\|u\|^2 - \|f\|_{V'}\|u\| \\ &= \|u\|(\nu\|u\| - \|f\|_{V'}). \end{aligned}$$

Observe que $\nu\|u\| - \|f\|_{V'} > 0 \Leftrightarrow \|u\| > \dfrac{1}{\nu}\|f\|_{V'}$. Então tome $\rho > \dfrac{1}{\nu}\|f\|_{V'}$ e teremos que

$$((P_m(u), u)) > 0, \ \ \forall\, \|u\| = \rho.$$

Portanto, pelo Lema 1.6, existe $u_m \in \widetilde{V}_m$, $\|u_m\| \leq \rho$ tal que $P_m(u_m) = 0$. Provamos então que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $u_m \in \widetilde{V}_m$ tal que

$$\nu((u_m, w)) + b(u_m, u_m, w) = (f, w), \forall\, w \in \widetilde{V}_m, \tag{2.19}$$

provando que u_m é solução de (2.18).

Estimativa

Fazendo $w = u_m$ em (2.19) e usando (i) do Lema 1.12 teremos

$$\begin{aligned} \nu\|u_m\|^2 + b(u_m, u_m, u_m) &= \langle f, u_m\rangle \\ \nu\|u_m\|^2 &= \langle f, u_m\rangle \\ \nu\|u_m\|^2 &\leq \|f\|_{V'}\|u_m\|, \end{aligned}$$

ou seja

$$\|u_m\| \leq \frac{1}{\nu}\|f\|_{V'},$$

e portanto, $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em V. Então existe uma subsequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e uma função $u \in V$ tal que

$$u_k \rightharpoonup u \text{ em } V \tag{2.20}$$

Além disso, como $V \hookrightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} \mathbb{L}^2(\Omega)$, temos que existe uma subsequência de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, que ainda denotaremos por $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, tal que

$$u_k \to u \text{ em } \mathbb{L}^2(\Omega). \tag{2.21}$$

Passagem ao Limite

Inicialmente provemos que

$$b(u_k, \varphi, u_k) \to b(u, \varphi, u), \quad \text{em} \quad \mathbb{R}, \ \forall\, \varphi \in \mathcal{V}.$$

De fato, fixados arbitrariamente $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, temos

$$\begin{aligned} &\left|\int_\Omega u_{k_j}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}u_{k_i}dx - \int_\Omega u_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}u_i dx\right| = \left|\int_\Omega \left(u_{k_j}u_{k_i} - u_j u_i\right)\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dx\right| \\ &\leq \int_\Omega \left|u_{k_j}u_{k_i} - u_j u_i\right| \left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right| dx \\ &\leq \max_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right| \int_\Omega \left|u_{k_j}u_{k_i} - u_j u_i\right| dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \max_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right| \int_\Omega \left|u_{k_j}u_{k_i} - u_{k_j}u_i + u_{k_j}u_i - u_j u_i\right| dx \\
&\leq \max_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right| \left(\int_\Omega |u_{k_j}||u_{k_i} - u_i| dx + \int_\Omega |u_i||u_{k_j} - u_j| dx\right) \\
&\leq \max_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right| \left(\|u_{k_j}\|_{L^2(\Omega)}\|u_{k_i} - u_i\|_{L^2(\Omega)} + \|u_i\|_{L^2(\Omega)}\|u_{k_j} - u_j\|_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned}
$$

Desta desigualdade e (2.21), temos que o lado direito tende a zero. Portanto

$$\int_\Omega u_{k_j}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}u_{k_i}dx \to \int_\Omega u_j\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}u_i dx, \quad \text{em } \mathbb{R} \qquad 1 \leq i,j \leq n.$$

Somando em i e j resulta que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega u_{k_j}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}u_{k_i}dx \to \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega u_j\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}u_i dx, \quad \text{em } \mathbb{R},$$

ou seja

$$b(u_k,\varphi,u_k) \to b(u,\varphi,u), \quad \text{em } \mathbb{R}, \ \forall\, \varphi \in \mathcal{V}.$$

Pelo Lema 1.12

$$b(u_k,u_k,\varphi) = -b(u_k,\varphi,u_k),$$

então

$$b(u_k,u_k,\varphi) \to b(u,u,\varphi), \quad \text{em } \mathbb{R}, \ \forall\, \varphi \in \mathcal{V}. \tag{2.22}$$

Agora, fixado $j \in \mathbb{N}$ na equação aproximada (2.18), tomando o limite quando $k \to \infty$, pelas convergências (2.20) e (2.22) obtemos

$$\nu((u,w_j)) + b(u,u,w_j) = \langle f, w_j\rangle, \ \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Desde que $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é um sistema completo em $\widetilde{V}$, por densidade concluímos que u é solução de (2.12), o que demonstra o teorema 2.3. ■

No caso estacionário linear, Teorema 2.1, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tinhamos a existência e unicidade de solução fraca. Por outro lado, no caso estacionário não linear, Teorema 2.3, em geral não se pode afirmar coisa alguma sobre a unicidade de solução. Mas se $2 \leq n \leq 4$ e o coeficiente ν for suficientemente grande ou $\|f\|_{V'}$ for suficientemente pequena, podemos provar a unicidade de solução.

Teorema 2.4 *Nas hipóteses do teorema* 2.3*, suponha adicionalmente que* $2 \leq n \leq 4$ *e que* f *satisfaz*

$$\nu^2 > C\|f\|_{V'} \tag{2.23}$$

onde C *é a constante de continuidade da forma trilinear* $b(b(u,v,w) \leq C\|u\|\|v\|\|w\|)$*. Então a solução* u *de* $(2.10) - (2.11)$ *é única.*

Dem: De fato, como $2 \leq n \leq 4$ segue-se que $\widetilde{V} = V$ e portanto temos que

$$\nu((u,w)) + b(u,u,w) = \langle f, w\rangle, \ \forall\, w \in V. \tag{2.24}$$

Em particular para $w = u$ em (2.24) obtemos

$$\begin{aligned} \nu\|u\|^2 + b(u,u,u) &= \langle f, u\rangle \\ \nu\|u\|^2 &\leq \|f\|_{V'}\|u\| \\ \|u\| &\leq \frac{1}{\nu}\|f\|_{V'}. \end{aligned}$$

Portanto qualquer solução do problema (2.12) satisfaz a desigualdade acima. Sejam u_1, u_2 soluções do problema (2.12) e considere $u = u_1 - u_2$. Então

$$\nu((u_1,w)) + b(u_1,u_1,w) = \langle f, w\rangle, \ \ \forall\, w \in V, \tag{2.25}$$

$$\nu((u_2,w)) + b(u_2,u_2,w) = \langle f, w\rangle, \ \ \forall\, w \in V. \tag{2.26}$$

Subtraindo (2.26) de (2.25) e somando e subtraindo o termo $b(u_2,u_1,w)$ teremos

$$\nu((u,w)) + b(u,u_1,w) + b(u_2,u,w) = 0, \ \ \forall\, w \in V. \tag{2.27}$$

Fazendo $w = u$ em (2.27) resulta

$$\nu((u,u)) + b(u,u_1,u) + b(u_2,u,u) = 0,$$

e, pelo Lema 1.12, temos

$$\nu\|u\|^2 = -b(u,u_1,u).$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\nu\|u\|^2 &\leq |b(u,u_1,u)| \\
&\leq C\|u\|\|u_1\|\|u\| \\
&\leq \frac{C}{\nu}\|f\|_{V'}\|u\|^2,
\end{aligned}
$$

ou seja

$$\left(\nu - \frac{C}{\nu}\|f\|_{V'}\right)\|u\|^2 \leq 0.$$

Desta desigualdade e da hipótese (2.23) concluímos que $\|u\| = 0$. Logo $u_1 = u_2$, e o Teorema 2.4 está provado. ■

2.3 Problema de Evolução Linear

Teorema 2.5 *Dados* $f \in L^2(0,T;V')$, $u_0 \in H$ *e* $\nu > 0$ *, existe uma única função vetorial* $u = (u_1, \cdots, u_n) : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ *e uma distribuição* $P : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$u \in L^2(0,T;V) \cap C([0,T];H),\ u' \in L^2(0,T;V') \tag{2.28}$$

$$u' - \nu\triangle u + \nabla P = f \text{ em } L^2(0,T;V') \tag{2.29}$$

$$u(0) = u_0. \tag{2.30}$$

Dem: Inicialmente vamos verificar que o problema (2.28) − (2.30) é equivalente a seguinte formulação variacional

$$u \in L^2(0,T;V),\ u' \in L^2(0,T;V') \tag{2.31}$$

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + \nu((u(t),v)) = \langle f(t),v\rangle_{V'\times V}, \text{ em } \mathcal{D}'(0,T), \forall\, v \in V \tag{2.32}$$

$$u(0) = u_0 \text{ em } H. \tag{2.33}$$

De fato, suponhamos que u satisfaz (2.28) − (2.30). De (2.29) temos que

$$\langle u'(t) - \nu\triangle u(t) + \nabla P(t), v\rangle_{V'\times V} = \langle f(t),v\rangle_{V'\times V} \text{ q.s. em } (0,T),\ \forall\, v \in V. \tag{2.34}$$

A aplicação $-\triangle : L^2(0,T;V) \to L^2(0,T;V')$, onde $\langle -\triangle u(t), v\rangle_{V'\times V} = ((u(t),v))$, para todo $v \in V$, é linear, contínua e injetiva. Como no caso estacionário tem-se

$$\langle \nabla P(t), v\rangle_{V'\times V} = 0.$$

Também vemos que $V \hookrightarrow H \approx H' \hookrightarrow V'$, então $u(t) \in V'$ com

$$\langle u(t), v\rangle_{V'\times V} = (u(t),v),\ \forall\, v \in V.$$

Como $u' \in L^2(0,T;V')$ vemos que para todo $v \in V$ a aplicação $t \mapsto \langle u'(t), v\rangle_{V\times V'}$ é $L^2(0,T)$. Logo define uma distribuição sobre $(0,T)$ e para toda $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ temos

$$\begin{aligned}
\langle\langle u'(t), v\rangle_{V'\times V}, \theta\rangle_{\mathcal{D}'(0,T)\times\mathcal{D}(0,T)} &= \int_0^T \langle u'(t), v\rangle_{V'\times V}\theta(t)dt = \int_0^T \langle u'(t)\theta(t), v\rangle_{V'\times V}dt \\
&= \left\langle \int_0^T u'(t)\theta(t)dt, v\right\rangle_{V'\times V} = \left\langle -\int_0^T u(t)\theta'(t)dt, v\right\rangle_{V'\times V} \\
&= -\int_0^T \langle u(t)\theta'(t), v\rangle_{V'\times V}dt = -\int_0^T \langle u(t), v\rangle_{V'\times V}\theta'(t)dt \\
&= -\int_0^T (u(t),v)\theta'(t)dt = -\langle (u(t),v), \theta'(t)\rangle_{\mathcal{D}'(0,T)\times\mathcal{D}(0,T)} \\
&= \left\langle \frac{d}{dt}(u(t),v), \theta\right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T)\times\mathcal{D}(0,T)},
\end{aligned}$$

ou seja

$$\langle u'(t), v\rangle_{V'\times V} = \frac{d}{dt}(u(t),v) \quad \text{em } \ \mathcal{D}'(0,T),\ \forall\, v \in V. \tag{2.35}$$

Usando estes fatos em (2.34) obtemos (2.32).

Reciprocamente suponhamos que u satisfaz (2.31) – (2.33). Então, desde que $u \in L^2(0,T,V)$ e $u' \in L^2(0,T;V')$, segue $u \in C([0,T];H)$ (veja [15]), ou seja, u satisfaz (2.28) e faz sentido calcular $u(0)$. Observe que

$$\begin{aligned}
|\langle f(t), v\rangle_{V'\times V}| &\leq \|f(t)\|_{V'}\|v\| \\
&\leq \|f(t)\|_{V'}^2 + \|v\|^2,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\nu((u(t),v)) &\leq \nu\|u(t)\|\|v\| \\
&\leq \|u(t)\|^2 + \|v\|^2,
\end{aligned}$$

como $u \in L^2(0,T;V)$ e $f \in L^2(0,T;V')$ podemos integrar (2.32) de 0 a t obtendo

$$(u(t),v)-(u_0,v)+\nu\int_0^t((u(s),v))ds=\int_0^t\langle f(s),v\rangle_{V'\times V}ds \tag{2.36}$$

Definindo $U(t)=\displaystyle\int_0^t u(s)ds$ e $F(t)=\displaystyle\int_0^t f(s)ds$, temos $U \in C([0,T];V)$ e $F \in C([0,T];V^{'})$. Do fato que

$$\begin{aligned}\langle \triangle U(t),v\rangle_{V'\times V} &= \left\langle \triangle\int_0^t u(s)ds,v\right\rangle_{V'\times V}=\left\langle\int_0^t \triangle u(s)ds,v\right\rangle_{V'\times V}\\ &= \int_0^t \langle \triangle u(s),v\rangle_{V'\times V}\,ds=-\int_0^t((u(s),v))ds,\end{aligned}$$

e

$$\langle F(t),v\rangle_{V'\times V} = \left\langle\int_0^t f(s)ds,v\right\rangle_{V'\times V}=\int_0^t\langle f(s),v\rangle_{V'\times V}\,ds.$$

de (2.36) obtemos

$$\langle u(t),v\rangle_{V'\times V}-\langle u_0,v\rangle_{V'\times V}-\nu\langle\triangle U(t),v\rangle_{V'\times V}=\langle F(t),v\rangle_{V'\times V},$$

ou ainda,

$$\langle u(t)-u_0-\nu\triangle U(t)-F(t),v\rangle_{V'\times V}=0,\ \forall\, v\in V. \tag{2.37}$$

Definimos

$$g(t)=u(t)-u_0-\nu\triangle U(t)-F(t)\in V'.$$

Desta forma temos $g\in C([0,T],V')$. Pelo fato de V ser subespaço fechado de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ podemos, pelo Teorema de Hahn-Banach [2] para cada $t\in[0,T]$ estender $g(t)$ a um funcional $T(t)\in\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ tal que

$$\langle T(t),v\rangle_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbb{H}_0^1(\Omega)}=\langle g(t),v\rangle_{V'\times V},\ \forall\, v\in V\ \text{ e }\ \|T(t)\|_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)}=\|g(t)\|_{V'}. \tag{2.38}$$

Assim $T\in C([0,T],\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ e de (2.37) concluímos que

$$\langle T(t),\varphi\rangle_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbb{H}_0^1(\Omega)}=0,\ \forall\,\varphi\in\mathcal{V}.$$

Pelo Lema 1.1 e Lema 1.2 resulta que existe $Q(t) \in L^2(\Omega)$ satisfazendo

$$T(t) = \nabla Q(t) \text{ em } \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Logo $\nabla Q \in C([0,T], \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ e pelo isomorfismo $\nabla : L^2(\Omega)/_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ temos que $Q \in C([0,T], L^2(\Omega))$. De (2.38) conclui-se

$$\nabla Q(t) = g(t) \text{ em } V', \forall\, t \in [0,T],$$

ou seja

$$\nabla Q(t) = u(t) - u_0 - \nu \triangle U(t) - F(t) \text{ em } V', \forall\, t \in [0,T].$$

Derivando a equação acima no sentido das distribuições obtemos

$$\nabla Q' = u' - \nu \triangle U' - F' \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;V'),$$

que nos dá,

$$\nabla Q' = u' - \nu \triangle u - f \text{ em } L^2(0,T;V').$$

Consequêntemente a igualdade acima se verifica quase sempre em $[0,T]$. Pondo

$$P = -Q',$$

resulta que

$$u' - \nu \triangle u + \nabla P = f \text{ em } L^2(0,T;V').$$

Concluímos assim a equivalência dos problemas $(2.28)-(2.30)$ e $(2.31)-(2.33)$. No que segue provaremos a existência e unicidade de solução u para o problema $(2.31)-(2.33)$.

Seja $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma base de V e, para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $V_m = [w_1, \cdots, w_m]$ o subespaço gerado pelos vetores $w_1, \cdots, w_m$. Em V_m consideremos o problema aproximado:

Para cada $m \in \mathbb{N}$ encontrar

$$\begin{aligned} u_m : [0,T] &\rightarrow V_m \\ t &\mapsto u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j \end{aligned} \tag{2.39}$$

tal que

$$(u_m'(t), w_j) + \nu((u_m(t), w_j)) = \langle f(t), w_j\rangle_{V'\times V}, \quad 1 \le j \le m \tag{2.40}$$

$$u_m(0) = u_{0m} = \sum_{j=1}^{m}(u_0, w_j)w_j \to u_0 \text{ em } H. \tag{2.41}$$

Observamos que o problema aproximado $(2.40) - (2.41)$ é equivalente ao seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$A\,Y_m'(t) + \nu\,B\,Y_m(t) = F_m(t) \tag{2.42}$$

$$Y_m(0) = \alpha_m \tag{2.43}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} (w_1, w_1) & \cdots & (w_m, w_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1, w_m) & \cdots & (w_m, w_m) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ((w_1, w_1)) & \cdots & ((w_m, w_1)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ((w_1, w_m)) & \cdots & ((w_m, w_m)) \end{bmatrix}$$

$$Y_m(t) = \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix}, F_m(t) = \begin{bmatrix} \langle f(t), w_1\rangle_{V'\times V} \\ \vdots \\ \langle f(t), w_m\rangle_{V'\times V} \end{bmatrix}, \alpha_m = \begin{bmatrix} (u_0, w_1) \\ \vdots \\ (u_0, w_m) \end{bmatrix}$$

Desde que a matriz A é inversível, o sistema de EDO, $(2.42)-(2.43)$ é um sistema linear de EDO's na forma normal e, portanto, pelo Teorema de Caratheodory [3], possui uma única solução definida em todo intervalo $[0, T]$, o que mostra a existência e unicidade de solução aproximada u_m na forma (2.39), satisfazendo $(2.40) - (2.41)$.

De (2.40) temos a seguinte equação aproximada

$$(u_m'(t), v) + \nu((u_m(t), v)) = \langle f(t), v\rangle_{V'\times V}, \ \ \forall\, v \in V_m. \tag{2.44}$$

Estimativa

Tomando $v = 2u_m(t)$ em (2.44) temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + 2\nu\|u_m(t)\|^2 &= 2\langle f(t), u_m(t)\rangle_{V'\times V} \\ &\le 2\|f(t)\|_{V'}\|u_m(t)\| \\ &= \frac{2}{\sqrt{\nu}}\|f(t)\|_{V'}\sqrt{\nu}\|u_m(t)\| \\ &\le \frac{1}{\nu}\|f(t)\|_{V'}^2 + \nu\|u_m(t)\|^2. \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + \nu\|u_m(t)\|^2 \leq \frac{1}{\nu}\|f(t)\|_{V'}^2. \tag{2.45}$$

Integrando (2.45) de 0 à t obtemos

$$\|u_m(t)\|_2^2 + \nu \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{\nu}\int_0^t \|f(s)\|_{V'}^2 ds + \|u_{0m}\|_2^2 \leq \frac{1}{\nu}\|f\|_{L^2(0,T;V')} + \|u_0\|_2^2.$$

Assim obtemos que $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0,T;H)$ e em $L^2(0,T;V)$. Portanto existem uma subsequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e uma função vetorial $u \in L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T:H)$ tal que

$$u_k \overset{\star}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;H), \tag{2.46}$$

$$u_k \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0,T;V). \tag{2.47}$$

<u>Passagem ao limite</u>

Fixando $j \in \mathbb{N}$, multiplicando a equação (2.40) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 à T obtemos:

$$\int_0^T (u_k'(t), w_j)\theta(t)dt + \nu\int_0^T ((u_k(t), w_j))\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle_{V'\times V}\theta(t)dt,$$

ou ainda

$$-\int_0^T (u_k(t), w_j)\theta'(t)dt + \nu\int_0^T ((u_k(t), w_j))\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle_{V'\times V}\theta(t)dt.$$

Considerando as convergências (2.46) e (2.47), passando o limite nesta última igualdade quando $k \to \infty$ obtemos:

$$-\int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt + \nu\int_0^T ((u(t), w_j))\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle_{V'\times V}\theta(t)dt.$$

Como $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é base para V, por densidade, obtemos:

$$-\int_0^T (u(t), v)\theta'(t)dt + \nu\int_0^T ((u(t), v))\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), v\rangle_{V'\times V}\theta(t)dt \tag{2.48}$$

para todo $v \in V$. Isto significa que

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + \nu((u(t), v)) = \langle f(t), v\rangle_{V'\times V}, \quad \text{em } D'(0,T),\ \forall\, v \in V.$$

Condição inicial

Fixamos $j \in \mathbb{N}$ na equação aproximada, multiplicando-a por $\theta \in C^1([0,T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$ e integrando de 0 a t, temos

$$\int_0^T (u_k'(t), w_j)\theta(t)dt + \nu \int_0^T ((u_k(t), w_j))\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle_{V' \times V} \theta(t)dt,$$

ou ainda

$$-(u_k(0), w_j) - \int_0^T (u_k(t), w_j)\theta'(t)dt + \nu \int_0^T ((u_k(t), w_j))\theta(t)dt$$
$$= \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle_{V' \times V} \theta(t)dt.$$

Levando em conta as convergências (2.41), (2.46) e (2.47), tomando o limite quando $k \to \infty$, na igualdade acima, obtemos

$$-(u_0, w_j) - \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt + \nu \int_0^T ((u(t), w_j))\theta(t)dt$$
$$= \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle_{V' \times V} \theta(t)dt. \tag{2.49}$$

Por outro lado de (2.29) temos que

$$u'(t) - \nu \triangle u(t) + \nabla P(t) = f(t) \text{ em } V', \quad \text{q.s. em } (0,T).$$

Multiplicando esta equação pela função $\theta \in C^1([0,T])$, tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$, e integrando (integral de Bochner) de 0 a T, resulta

$$\int_0^T u'(t)\theta(t)dt - \nu \int_0^T \triangle u(t)\theta(t)dt + \int_0^T \nabla P(t)\theta(t)dt = \int_0^T f(t)\theta(t)dt \text{ em } V',$$

ou ainda, integrando por partes o 1°, termo temos

$$-u(0) - \int_0^T u(t)\theta'(t)dt - \nu \int_0^T \triangle u(t)\theta(t)dt + \int_0^T \nabla P(t)\theta(t)dt$$
$$= \int_0^T f(t)\theta(t)dt \text{ em } V',$$

aplicando em $w_j \in V$, concluímos

$$-\langle u(0), w_j\rangle_{V'\times V} - \int_0^T \langle u(t), w_j\rangle_{V'\times V}\theta'(t)dt - \nu \int_0^T \langle \triangle u(t), w_j\rangle_{V'\times V}\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T \langle \nabla P(t), w_j\rangle_{V'\times V}\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle_{V'\times V}\theta(t)dt,$$

ou seja

$$-(u(0), w_j) - \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt + \nu \int_0^T ((u(t), w_j))\theta(t)dt$$
$$= \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle_{V'\times V}\theta(t)dt. \tag{2.50}$$

Comparando (2.49) e (2.50), concluímos que

$$(u(0), w_j) = (u_0, w_j), \quad \forall\, j \in \mathbb{N}$$

donde resulta $u(0) = u_0$ em H.

<u>Unicidade</u>

Seja u_1 e u_2 duas soluções do problema (2.28) – (2.30) e definimos $w = u_1 - u_2$. Então $w' - \nu\triangle w = 0$ em $L^2(0,T;V')$ e $w(0) = 0$.

Logo

$$2\langle w'(t), w(t)\rangle - 2\nu\langle \triangle w(t), w(t)\rangle = 0,$$

e portanto

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|_2^2 + 2\nu\|w(t)\|^2 = 0. \tag{2.51}$$

Integrando (2.51) de 0 até t obtemos

$$\|w(t)\|_2^2 + 2\nu \int_0^t \|w(s)\|^2 ds = \|w(0)\|_2^2 = 0.$$

Portanto $\|w(t)\|_2 = 0 \Rightarrow w(x,t) = 0 \Rightarrow u_1(x,t) = u_2(x,t)$ para todo $t \in [0,T]$ e para quase todo $x \in \Omega$. ■

2.4 Problema de Evolução não Linear

Teorema 2.6 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(2 \leq n \leq 4)$, $f \in L^2(0,T;V')$, $u_0 \in H$ *e* $\nu > 0$ *então existe uma função vetorial* $u = (u_1, \cdots, u_n) : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^n$ *e uma distribuição* $P : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ *tais que*

$$u \in L^2(0,T;V) \cap C([0,T];H), \; u' \in L^1(0,T;V') \tag{2.52}$$

$$u' - \nu \triangle u + (u \cdot \nabla)u + \nabla P = f \; \text{em} \; L^1(0,T;V') \tag{2.53}$$

$$u(0) = u_0. \tag{2.54}$$

Dem: Desde que $2 \leq n \leq 4$, temos $\widetilde{V} = V$. Inicialmente vamos verificar que o problema $(2.52) - (2.54)$ é equivalente a seguinte formulação variacional:

$$u \in L^2(0,T;V), \; u' \in L^1(0,T;V'), \tag{2.55}$$

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + \nu((u(t),v)) + b(u(t),u(t),v) = \langle f(t),v \rangle, \forall\, v \in V \text{ em } D'(0,T), \tag{2.56}$$

$$u(0) = u_0. \tag{2.57}$$

De fato, suponhamos que u satisfaz $(2.52) - (2.54)$. De (2.53) e do fato de que

$$\langle Bu, v \rangle_{V' \times V} = b(u,u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j(x) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i(x) dx = \langle (u \cdot \nabla)u, v \rangle_{V' \times V}, \quad \forall v \in V$$

temos

$$\langle u'(t) - \nu \triangle u(t) + Bu + \nabla P(t), v \rangle_{V' \times V} = \langle f(t), v \rangle_{V' \times V} \tag{2.58}$$

quase sempre em $(0,T)$ para todo $v \in V$.
A aplicação $-\triangle : L^2(0,T;V) \to L^2(0,T;V')$, onde $\langle -\triangle u(t), v \rangle_{V' \times V} = ((u(t),v))$, para todo $v \in V$, é linear, contínua e injetiva. Como no caso estacionário tem-se

$$\langle \nabla P(t), v \rangle_{V' \times V} = 0.$$

De (2.35) conclue-se

$$\langle u'(t), v \rangle_{V' \times V} = \frac{d}{dt}(u(t),v) \quad \text{em} \;\; \mathcal{D}'(0,T), \; \forall\, v \in V.$$

Usando estes fatos em (2.58) obtemos (2.56).

Reciprocamente suponhamos que u satisfaz (2.55) $-$ (2.57). Então desde que $u \in L^2(0,T,V)$ e $u' \in L^1(0,T;V')$ segue $u \in C([0,T];H)$, ou seja, u satisfaz (2.52) e faz sentido calcular $u(0)$. Observe que

$$|b(u,u,v)| \leq C\|u\|\|u\|\|v\| = C\|u\|^2\|v\|.$$

Como $u \in L^2(0,T;V)$ e $f \in L^2(0,T;V')$, podemos integrar (2.56) de 0 a t obtendo

$$(u(t),v) - (u_0,v) + \nu \int_0^t ((u(s),v))ds + \int_0^t b(u(s),u(s),v)ds = \int_0^t \langle f(s),v\rangle_{V'\times V} ds,$$

ou ainda

$$\begin{aligned}\langle u(t),v\rangle_{V'\times V} - \langle u_0,v\rangle_{V'\times V} - \nu \int_0^t \langle \triangle u(s),v\rangle_{V'\times V} ds + \int_0^t \langle Bu(s),v\rangle_{V'\times V} ds \\ = \int_0^t \langle f(s),v\rangle_{V'\times V} ds.\end{aligned}$$

Definindo $U(t) = \displaystyle\int_0^t u(s)ds$, $\beta(t) = \displaystyle\int_0^t Bu(s)ds$ e $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)ds$, temos que $U \in C([0,T];V)$ e $\beta, F \in C([0,T];V')$. Logo

$$\langle u(t),v\rangle_{V'\times V} - \langle u_0,v\rangle_{V'\times V} - \nu\langle \triangle U(t),v\rangle_{V'\times V} + \langle \beta(t),v\rangle_{V'\times V} = \langle F(t),v\rangle_{V'\times V},$$

ou ainda

$$\langle u(t) - u_0 - \nu\triangle U(t) + \beta(t) - F(t), v\rangle_{V'\times V} = 0, \ \forall\, v \in V. \tag{2.59}$$

Definimos

$$g(t) = u(t) - u_0 - \nu\triangle U(t) + \beta(t) - F(t) \in V'.$$

Desta forma temos $g \in C([0,T],V')$. Pelo fato de V ser subespaço fechado de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ podemos, graças ao Teorema de Hahn-Banach, e para cada $t \in [0,T]$, estender $g(t)$ a um funcional $T(t) \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ tal que

$$\langle T(t),v\rangle_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbb{H}_0^1(\Omega)} = \langle g(t),v\rangle_{V'\times V}, \ \forall\, v \in V \quad \text{e} \quad \|T(t)\|_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)} = \|g(t)\|_{V'}, \tag{2.60}$$

assim $T \in C([0,T],\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ e de (2.59) concluímos que

$$\langle T(t), \varphi\rangle_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbb{H}_0^1(\Omega)} = 0,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{V}.$$

Pelo Lema 1.1 e Lema 1.2 resulta que existe $Q(t) \in L^2(\Omega)$ satisfazendo

$$T(t) = \nabla Q(t) \text{ em } \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Logo $\nabla Q \in C([0,T],\mathbb{H}^{-1})$ e pelo isomorfismo $\nabla : L^2(\Omega)/_{\mathbb{R}} \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ temos que $Q \in C([0,T],L^2(\Omega))$. Aqui usamos a notação $L^2(\Omega)/_{\mathbb{R}}$ de grupo quociente. De (2.60) conclue-se

$$\nabla Q(t) = g(t) \text{ em } V', \forall\, t \in [0,T],$$

ou seja

$$\nabla Q(t) = u(t) - u_0 - \nu\triangle U(t) + \beta(t) - F(t) \text{ em } V', \forall\, t \in [0,T].$$

Derivando a equação acima no sentido das distribuições obtemos

$$\nabla Q' = u' - \nu\triangle U' + \beta'(t) - F' \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;V'),$$

que nos dá

$$\nabla Q' = u' - \nu\triangle u + Bu - f \text{ em } L^1(0,T;V').$$

Consequêntemente a igualdade acima se verifica quase sempre em $[0,T]$. Pondo

$$P = -Q'$$

resulta que

$$u' - \nu\triangle u + Bu + \nabla P = f \text{ em } L^1(0,T;V')$$

Mas como $Bu = (u\cdot\nabla)u$ em V', concluímos a equivalência dos problemas (2.52) $-$ (2.54) e (2.55) $-$ (2.57). No que segue provaremos a existência de solução u para o problema (2.55) $-$ (2.57).

Seja $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma base de V e, para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $V_m = [w_1,\cdots,w_m]$ o subespaço gerado pelos vetores $w_1,\cdots,w_m$. Em V_m consideremos o problema aproximado:

Para cada $m \in \mathbb{N}$ encontrar

$$\begin{aligned} u_m : [0,T] &\rightarrow V_m \\ t &\mapsto u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j \end{aligned} \tag{2.61}$$

tal que

$$(u_m'(t), w_j) + \nu((u_m(t), w_j)) + b(u_m(t), u_m(t), w_j) = \langle f(t), w_j \rangle_{V' \times V}, \quad 1 \leq j \leq m \tag{2.62}$$

$$u_m(0) = u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} (u_0, w_j) w_j \rightarrow u_0 \text{ em } H. \tag{2.63}$$

Observamos que o problema aproximado $(2.62) - (2.63)$ é equivalente ao seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$A\, Y_m'(t) + \nu\, B\, Y_m(t) + C_m(t) = F_m(t), \tag{2.64}$$

$$Y_m(0) = \alpha_m, \tag{2.65}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} (w_1, w_1) & \cdots & (w_m, w_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1, w_m) & \cdots & (w_m, w_m) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} ((w_1, w_1)) & \cdots & ((w_m, w_1)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ((w_1, w_m)) & \cdots & ((w_m, w_m)) \end{bmatrix}$$

$$Y_m(t) = \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix} \quad F_m(t) = \begin{bmatrix} \langle f(t), w_1 \rangle_{V' \times V} \\ \vdots \\ \langle f(t), w_m \rangle_{V' \times V} \end{bmatrix}$$

$$C_m(t) = \begin{bmatrix} b(u_m(t), u_m(t), w_1) \\ \vdots \\ b(u_m(t), u_m(t), w_m) \end{bmatrix} \quad \alpha_m = \begin{bmatrix} (u_0, w_1) \\ \vdots \\ (u_0, w_m) \end{bmatrix}$$

Desde que a matriz A é inversível, pelo teorema de Caratheodory [3], o sistema de EDO, não linear, $(2.64) - (2.65)$ possui uma única solução definida em um intervalo $[0, T_m]$, o que mostra a existência e unicidade de solução aproximada u_m na forma (2.61), satisfazendo $(2.62) - (2.63)$ para todo $t \in [0, T_m]$ (veja [3]). A seguir faremos estimativas para podermos extender a solução u_m a todo intervalo $[0, T]$ e para passarmos o limite.

De (2.62) temos a seguinte equação aproximada

$$(u_m'(t), v) + \nu((u_m(t), v)) + b(u_m(t), u_m(t), v) = \langle f(t), v \rangle_{V' \times V}, \quad \forall\, v \in V_m. \tag{2.66}$$

Estimativa 1.

Tomando $v = 2u_m(t)$ em (2.66) e observando que $b(u_m(t), u_m(t), u_m(t)) = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + 2\nu||u_m(t)||^2 &= 2\langle f(t), u_m(t)\rangle_{V'\times V} \\
&\leq 2\|f(t)\|_{V'}||u_m(t)|| \\
&= \frac{2}{\sqrt{\nu}}\|f(t)\|_{V'}\sqrt{\nu}||u_m(t)|| \\
&\leq \frac{1}{\nu}\|f(t)\|_{V'}^2 + \nu||u_m(t)||^2.
\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + \nu\|u_m(t)\|^2 \leq \frac{1}{\nu}\|f(t)\|_{V'}^2.$$

Integrando esta desigualdade de 0 à t obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_m(t)\|_2^2 + \nu\int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds &\leq \frac{1}{\nu}\int_0^t \|f(s)\|_{V'}^2 ds + \|u_{0m}\|_2^2 \\
&\leq \frac{1}{\nu}\|f\|_{L^2(0,T;V')}^2 + \|u_0\|_2^2. \qquad (2.67)
\end{aligned}$$

Estimativa 2.

Sejam

$$\widetilde{u}_m(t) = \begin{cases} u_m(t) & \text{se} \quad t \in [0,T] \\ 0 & \text{se} \quad t \in \mathbb{R}\backslash[0,T] \end{cases}$$

e $\widehat{u}_m$ a transformada de Fourier de $\widetilde{u}_m$. Vamos mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{2\gamma}\|\widehat{u}_m(\tau)\|_2^2 dt < C_2, \quad \text{para } 0 < \gamma < \frac{1}{4}. \qquad (2.68)$$

De fato, primeiro observemos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dt}\widetilde{u}_m(t), \theta(t)\right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})\times\mathcal{D}(\mathbb{R})} &= -\langle \widetilde{u}_m(t), \theta'(t)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})\times\mathcal{D}(\mathbb{R})} \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{u}_m(t)\theta'(t)dt = -\int_0^T u_m(t)\theta'(t)dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -u_m(T)\theta(T) + u_m(0)\theta(0) + \int_0^T u_m'(t)\theta(t)dt \\
&= -u_m(T)\theta(T) + u_m(0)\theta(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{u}_m'(t)\theta(t)dt \\
&= \langle -u_m(T)\delta_T + u_m(0)\delta_0 + \widetilde{u}_m'(t), \theta(t)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})\times\mathcal{D}(\mathbb{R})},
\end{aligned}
$$

onde δ_0 e δ_T são as distribuições de Dirac em 0 e T. Desta forma, denotando $\widetilde{f}_m = \widetilde{f} + \nu\widetilde{\triangle u_m} - \widetilde{Bu_m}$ podemos reescrever (2.62) como

$$
\frac{d}{dt}(\widetilde{u}_m(t), w_j) = \langle \widetilde{f}_m(t), w_j\rangle_{V'\times V} + (u_{0m}, w_j)\delta_0 - (u_m(T), w_j)\delta_T,\ 1 \leq j \leq m.
$$

Desta igualdade e da propriedade da transformada de Fourier que $\widehat{D_t u} = 2\pi i\tau u$, obtemos

$$
2\pi i\tau(\widehat{u}_m(\tau), v) = \langle \widehat{f}_m(\tau), v\rangle_{V'\times V} + (u_{0m}, v) - (u_m(T), v)e^{-2\pi i T\tau},\ \forall\, v \in V_m.
$$

Tomando $v = \widehat{u}_m(\tau)$ na equação anterior temos

$$
2\pi i\tau\|\widehat{u}_m(\tau)\|_2^2 = \langle \widehat{f}_m(\tau), \widehat{u}_m(\tau)\rangle_{V'\times V} + (u_{0m}, \widehat{u}_m(\tau)) - (u_m(T), \widehat{u}_m(\tau))e^{-2\pi i T\tau}.
$$

Vamos limitar o lado direito de (2.69). Note que $\|Bu\|_{V'} \leq C_3\|u\|^2$ para todo $u \in V$, logo

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \|f_m(t)\|_{V'}dt &= \int_0^T \|f(t) + \nu\triangle u_m(t) - Bu_m(t)\|_{V'}dt \\
&\leq \int_0^T \|f(t)\|_{V'} + \nu\|\triangle u_m(t)\|_{V'} + \|Bu_m(t)\|_{V'}dt \\
&\leq \int_0^T \|f(t)\|_{V'} + \nu\|u_m(t)\| + C_3\|u_m(t)\|^2 dt.
\end{aligned}
$$

Levando em conta esta desigualdade e a estimativa (2.67), temos que

$$
\int_0^T \|f_m(t)\|_{V'}dt \leq C_4,\ \ \forall\, m \in \mathbb{N},
$$

donde resulta

$$
\begin{aligned}
\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|\widehat{f}_m(\tau)\|_{V'} &\leq \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} \|\widetilde{f}_m(t)\|_{V'}dt \\
&= \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \int_0^T \|f_m(t)\|_{V'}dt \leq C_4,\quad \forall\, m. \qquad (2.69)
\end{aligned}
$$

Da Estimativa 1 (ver 2.67), temos que

$$\|u_m(0)\|_2 \leq C_5, \quad \|u_m(T)\|_2 \leq C_5. \tag{2.70}$$

De (2.69), (2.69) e (2.70) temos

$$\begin{aligned}
|\tau|\|\widehat{u}_m(\tau)\|_2^2 &\leq \frac{1}{2\pi}\Big(\|\widehat{f}_m(\tau)\|_{V'}\|\widehat{u}_m(\tau)\| + \|u_{0m}\|_2\|\widehat{u}_m(\tau)\|_2 \\
&\qquad + \|u_m(T)\|_2\|\widehat{u}_m(\tau)\|_2\left|e^{-2\pi i T\tau}\right|\Big) \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left(C_4\|\widehat{u}_m(\tau)\| + C_5\|\widehat{u}_m(\tau)\|_2 + C_5\|\widehat{u}_m(\tau)\|_2\right) \\
&\leq C_6\|\widehat{u}_m(\tau)\|. \qquad (2.71)
\end{aligned}$$

Para $0 < \gamma < \dfrac{1}{4}$ afirmamos que

$$|\tau|^{2\gamma} \leq C_\gamma \frac{1+|\tau|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}, \quad \forall\, \tau \in \mathbb{R}. \tag{2.72}$$

De fato, considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{|x|^{2\gamma}\left(1+|x|^{1-2\gamma}\right)}{1+|x|}$. Deste modo temos que f é contínua em $\mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|^{2\gamma}\left(1+|x|^{1-2\gamma}\right)}{1+|x|} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|^{2\gamma}+|x|}{1+|x|} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|^{2\gamma-1}+1}{\frac{1}{|x|}+1}.
\end{aligned}$$

Como $\gamma < \dfrac{1}{4}$ temos que $2\gamma - 1 < 0$, logo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|^{2\gamma-1}+1}{\frac{1}{|x|}+1} = 1.$$

Do mesmo modo $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$. Portanto concluímos que f é limitada em $\mathbb{R}$ e segue (2.72).

Assim de (2.71) e (2.72) temos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{2\gamma}\|\widehat{u}_m(\tau)\|_2^2 d\tau &\leq C_\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+|\tau|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}\|\widehat{u}_m(\tau)\|_2^2 d\tau \\
&\leq C_\gamma\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\|\widehat{u}_m(\tau)\|_2^2}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} + \frac{|\tau|\|\widehat{u}_m(\tau)\|_2^2}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} d\tau\right) \\
&\leq C_8 \int_{-\infty}^{\infty} \|\widehat{u}_m(\tau)\|^2 d\tau + C_9 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\|\widehat{u}_m(\tau)\|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} d\tau. \qquad (2.73)
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que o lado direito desta desigualdade é limitado. Da identidade de Parseval e da Estimativa 1 vemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\widehat{u}_m(\tau)\|^2 d\tau = \int_0^T \|u_m(t)\|^2 dt \leq C_1. \tag{2.74}$$

Da desigualdade de Schwarz e da identidade de Parseval temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\|\widehat{u}_m(\tau)\|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} d\tau \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{(1+|\tau|^{1-2\gamma})^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|u_m(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.75}$$

Para obtermos (2.68) devemos mostrar então que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{(1+|\tau|^{1-2\gamma})^2} \leq C_{10}$. De fato, note que $f(\tau) = \dfrac{1}{(1+|\tau|^{1-2\gamma})^2}$ é uma função par, logo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{(1+|\tau|^{1-2\gamma})^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{d\tau}{(1+\tau^{1-2\gamma})^2}.$$

Para $0 < \tau < 1$ temos que $\tau^{1-2\gamma} = \dfrac{\tau}{\tau^{2\gamma}} > \tau$, logo

$$\int_0^1 \frac{d\tau}{(1+\tau^{1-2\gamma})^2} \leq \int_0^1 \frac{d\tau}{(1+\tau)^2} = \frac{1}{2}.$$

Para $\tau > 1$ temos

$$\int_1^{\infty} \frac{d\tau}{(1+\tau^{1-2\gamma})^2} = \int_1^{\infty} \frac{\tau^{4\gamma}}{(\tau^{2\gamma}+\tau)^2},$$

e

$$\frac{\tau^{4\gamma}}{(\tau^{2\gamma}+\tau)^2} = \frac{1}{\tau^{-4\gamma}(\tau^{2\gamma}+\tau)^2} = \frac{1}{(1+\tau^{1-2\gamma})^2} < \frac{1}{(\tau^{1-2\gamma})^2} = \frac{1}{\tau^{2-4\gamma}}.$$

Disto segue que

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{\tau^{4\gamma}}{(\tau^{2\gamma}+\tau)^2} &= \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{\tau^{4\gamma}}{(\tau^{2\gamma}+\tau)^2} \\
&\leq \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{d\tau}{\tau^{2-4\gamma}} \\
&= \lim_{A\to\infty} \left(\frac{\tau^{4\gamma-1}}{4\gamma-1}\bigg|_1^A \right) \\
&= \lim_{A\to\infty} \left(\frac{A^{4\gamma-1}}{4\gamma-1} - \frac{1}{4\gamma-1} \right) \\
&= -\frac{1}{4\gamma-1},
\end{aligned}$$

pois $4\gamma - 1 < 0$. Portanto a integral é limitada e de (2.73), (2.74) e (2.75) obtemos (2.68). Consequentemente, de (2.67) e (2.68) temos que

$$\|\widetilde{u}_m\|_{\mathcal{H}^\gamma_K(\mathbb{R},V,H)} \leq C_{11}, \tag{2.76}$$

onde $K = [0, T]$, o que completa a Estimativa 2.

De (2.67) e (2.76) concluímos que

$$\begin{aligned}
&(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;H),\\
&(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0,T;V),\\
&(\widetilde{u}_m)_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é limitada em} \quad \mathcal{H}^\gamma_K(\mathbb{R},V,H).
\end{aligned}$$

Portanto, do Teorema 1.9 temos que existem uma subsequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e uma função $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ tais que

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H), \tag{2.77}$$

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad L^2(0,T;V), \tag{2.78}$$

$$u_m \to u \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H). \tag{2.79}$$

<u>Passagem ao limite</u>

Fixando $j \in \mathbb{N}$, multiplicando a equação (2.62) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 à T obtemos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (u_k'(t), w_j)\theta(t)dt + \nu \int_0^T ((u_k(t), w_j))\theta(t)dt\\
&\qquad + \int_0^T b(u_k(t), u_k(t), w_j)\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle_{V'\times V}\theta(t)dt,
\end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T (u_k(t), w_j)\theta'(t)dt + \nu \int_0^T ((u_k(t), w_j))\theta(t)dt\\
&\qquad + \int_0^T b(u_k(t), u_k(t), w_j)\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle_{V'\times V}\theta(t)dt.
\end{aligned}$$

Considerando as convergências (2.77) $-$ (2.79) e passando o limite nesta última igualdade quando $k \to \infty$, obtemos:

$$-\int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt + \nu \int_0^T ((u(t), w_j))\theta(t)dt$$
$$+\int_0^T b(u(t), u(t), w_j)\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle_{V'\times V}\theta(t)dt.$$

Como $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é base para V, por densidade conclui-se

$$-\int_0^T (u(t), v)\theta'(t)dt + \nu \int_0^T ((u(t), v))\theta(t)dt$$
$$+\int_0^T b(u(t), u(t), v)\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), v\rangle_{V'\times V}\theta(t)dt,$$

para todo $v \in V$. Isto significa que

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + \nu((u(t), v)) + b(u(t), u(t), v) = \langle f(t), v\rangle_{V'\times V}, \quad \text{em } D'(0, T),\ \forall\, v \in V.$$

<u>Condição Inicial</u>

Fixamos $j \in \mathbb{N}$ na equação aproximada. Multiplicando-a por $\theta \in C^1([0, T])$ tal que $\theta(0) = 1$, $\theta(T) = 0$ e integrando de 0 a t, temos

$$\int_0^T (u_k'(t), w_j)\theta(t)dt + \nu \int_0^T ((u_k(t), w_j))\theta(t)dt$$
$$+\int_0^T b(u_k(t), u_k(t), w_j)\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle_{V'\times V}\theta(t)dt,$$

ou ainda

$$-(u_k(0), w_j) - \int_0^T (u_k(t), w_j)\theta'(t)dt + \nu \int_0^T ((u_k(t), w_j))\theta(t)dt$$
$$+\int_0^T b(u_k(t), u_k(t), w_j)\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle_{V'\times V}\theta(t)dt.$$

Levando em conta as convergências (2.63), (2.77) $-$ (2.79), tomando o limite quando $k \to \infty$, na igualdade acima, obtemos

$$-(u_0, w_j) - \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt + \nu \int_0^T ((u(t), w_j))\theta(t)dt$$
$$+\int_0^T b(u(t), u(t), w_j)\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle_{V'\times V}\theta(t)dt. \tag{2.80}$$

Por outro lado de (2.53) temos

$$u^{'}(t) - \nu \triangle u(t) + (u \cdot \nabla)u(t) + \nabla P(t) = f(t) \text{ em } V', \quad \text{q.s. em } \ (0,T).$$

Multiplicando esta equação pela função $\theta \in C^1([0,T])$, tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$, e integrando de 0 a T, resulta

$$\int_0^T u'(t)\theta(t)dt - \nu \int_0^T \triangle u(t)\theta(t)dt + \int_0^T (u \cdot \nabla)u(t)\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T \nabla P(t)\theta(t)dt = \int_0^T f(t)\theta(t)dt \ \text{ em } \ V'$$

ou ainda, integrando por partes o 1° termo, temos

$$-u(0) - \int_0^T u(t)\theta^{'}(t)dt - \nu \int_0^T \triangle u(t)\theta(t)dt + \int_0^T (u \cdot \nabla)u(t)\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T \nabla P(t)\theta(t)dt = \int_0^T f(t)\theta(t)dt \ \text{ em } \ V'.$$

Aplicando membro a membro em $w_j \in V$, concluímos que

$$-\langle u(0), w_j\rangle_{V'\times V} - \int_0^T \langle u(t), w_j\rangle_{V'\times V}\theta'(t)dt - \nu \int_0^T \langle \triangle u(t), w_j\rangle_{V'\times V}\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T \langle (u \cdot \nabla)u(t), w_j\rangle_{V'\times V}\theta(t)dt + \int_0^T \langle \nabla P(t), w_j\rangle_{V'\times V}\theta(t)dt$$
$$= \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle_{V'\times V}\theta(t)dt,$$

ou seja

$$-(u(0), w_j) - \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt + \nu \int_0^T ((u(t), w_j))\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T b(u(t), u(t), w_j)\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle_{V'\times V}\theta(t)dt. \tag{2.81}$$

Comparando (2.80) e (2.81) verifica-se

$$(u(0), w_j) = (u_0, w_j), \ \ \forall\, j \in \mathbb{N},$$

donde resulta que $u(0) = u_0$ em H.■

Podemos mostrar a unicidade de solução fraca para o problema de evolução não linear quando $n = 2$ e $n = 3$. No caso $n = 2$ temos a existência e unicidade na mesma classe, ja no caso $n = 3$ a unicidade está em uma classe onde a existência não é conhecida. Vejamos.

Teorema 2.7 *Nas hipóteses do Teorema* 2.6*, suponha* $n = 2$*. Então a solução* u *de* $(2.52) - (2.54)$ *é única e* $u' \in L^2(0, T; V')$*.*

Dem: Desde que $n = 2$, pelo Lema 1.13 temos $Bu \in L^2(0, T; V')$. Como $\triangle u, f \in L^2(0, T; V')$ e $u' = \nu\triangle u - Bu + f$, concluímos que $u' \in L^2(0, T; V')$. Para mostrar a unicidade sejam u_1 e u_2 soluções do problema $(2.52) - (2.54)$ e $w = u_1 - u_2$. Então:

$$\begin{aligned} &w \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T; H), \\ &w' \in L^2(0, T; V'), \\ &w' - \nu\triangle w + Bu_1 - Bu_2 = 0 \text{ em } V', \\ &w(0) = 0. \end{aligned}$$

Como $w \in L^2(0, T; V)$, então $w(t) \in V$ q.s. em $[0, T]$, logo

$$\begin{aligned} \langle w'(t), w(t)\rangle_{V'\times V} - \nu\langle\triangle w(t), w(t)\rangle_{V'\times V} + \langle Bu_1(t), w(t)\rangle_{V'\times V} \\ -\langle Bu_2(t), w(t)\rangle_{V'\times V} = 0 \text{ q.s. em } [0, T], \end{aligned}$$

ou seja

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|_2^2 + 2\nu\|w(t)\|^2 + 2b(u_1(t), u_1(t), w(t)) - 2b(u_2(t), u_2(t), w(t)) = 0.$$

Mas observe que pela linearidade de b obtemos

$$\begin{aligned} b(w(t), u_2(t), w(t)) &= b(u_1(t) - u_2(t), u_2(t), w(t)) \\ &= b(u_1(t), u_2(t), w(t)) - b(u_2(t), u_2(t), w(t)), \end{aligned}$$

o que nos dá

$$-b(u_2(t), u_2(t), w(t)) = b(w(t), u_2(t), w(t)) - b(u_1(t), u_2(t), w(t)).$$

Logo

$$\begin{aligned} b(u_1(t), u_1(t), w(t)) - b(u_2(t), u_2(t), w(t)) &= b(u_1(t), u_1(t), w(t)) \\ &\quad + b(w(t), u_2(t), w(t)) - b(u_1(t), u_2(t), w(t)) \\ &= b(u_1(t), u_1 - u_2(t), w(t)) - b(w(t), u_2(t), w(t)) \\ &= -b(w(t), u_2(t), w(t)). \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|_2^2 + 2\nu\|w(t)\|^2 - 2b(w(t), u_2(t), w(t)) = 0,$$

Novamente considerando que $n = 2$, do Lema 1.12 concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + 2\nu\|w(t)\|^2 &= 2b(w(t), u_2(t), w(t)) \\
&\leq 2\|w(t)\|_2^{\frac{1}{2}}\|w(t)\|^{\frac{1}{2}}\|u_2(t)\|\|w(t)\|_2^{\frac{1}{2}}\|w(t)\|^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\|w(t)\|_2\|w(t)\|\|u_2(t)\| \\
&= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2\nu}}\|w(t)\|_2\|u_2(t)\|\right)\left(\sqrt{2\nu}\|w(t)\|\right) \\
&\leq \frac{1}{2\nu}\|w(t)\|_2^2\|u_2(t)\|^2 + 2\nu\|w(t)\|^2,
\end{aligned}$$

ou ainda

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|_2^2 \leq \frac{1}{2\nu}\|w(t)\|_2^2\,\|u_2(t)\|^2.$$

Integrando esta desigualdade de 0 até t e usando o fato de que $w(0) = 0$ temos

$$\|w(t)\|_2^2 \leq \frac{1}{2\nu}\int_0^t \|u_2(s)\|^2\|w(s)\|_2^2 ds.$$

Pela desigualdade de Gronwall temos:

$$\|w(t)\|_2^2 \leq 0 \Rightarrow w(x,t) = 0 \Rightarrow u_1(x,t) = u_2(x,t)$$

para todo $t \in [0,T]$ e para quase todo $x \in \Omega$. ■

Vejamos agora o caso $n = 3$.

Teorema 2.8 *Nas hipóteses do Teorema* 2.6*, suponhamos* $n = 3$ *e* $u \in L^8(0,T;L^4(\Omega))$. *Então a solução* u *de* (2.52) – (2.54) *é única e* $u' \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;V')$.

Dem: Desde que $n = 3$, pelo Lema 1.13 temos que $Bu \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;V')$. Como $\triangle u, f \in L^2(0,T;V')$ e $u' = \nu\triangle u - Bu + f$, concluímos que $u' \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;V')$. Ainda levando em conta que $n = 3$, temos $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$. Logo

$$|b(u,u,w)| \leq C_1\|u\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\|w\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\|u\|,$$

e o Lema 1.3 ($n = 3$) nos dá

$$|b(u, u, w)| \leq C_2 \|u\|_2^{\frac{1}{4}} \|u\|^{\frac{7}{4}} \|w\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}. \tag{2.82}$$

Sejam u_1, u_2 soluções de $(2.55) - (2.57)$ e $w = u_1 - u_2$. De modo análogo ao caso $n = 2$, visto no teorema anterior, temos

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|_2^2 + 2\nu\|w(t)\|^2 \;=\; 2b(w(t), w(t), u_2(t)).$$

Esta igualdade e (2.82) nos levam em

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|w(t)\|_2^2 + 2\nu\|w(t)\|^2 &\leq 2C_2\|w(t)\|_2^{\frac{1}{4}}\|w(t)\|^{\frac{7}{4}}\|u_2(t)\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)} \\
&\leq 2\left(\frac{C_2}{(2\nu)^{\frac{7}{8}}\left(\frac{8}{7}\right)^{\frac{7}{8}}}\|w(t)\|_2^{\frac{1}{4}}\|u_2(t)\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\right)\left(\left(\frac{8}{7}\right)^{\frac{7}{8}}(2\nu)^{\frac{7}{8}}\|w(t)\|^{\frac{7}{4}}\right) \\
&\leq C_3\|w(t)\|_2^2\|u_2(t)\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}^8 + 2\nu\|w(t)\|^2,
\end{aligned}$$

o que nos dá

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|_2^2 \;\leq\; C_3\|w(t)\|_2^2\|u_2(t)\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}^8.$$

Integrando esta desigualdade de 0 até t e usando o fato de que $w(0) = 0$ temos

$$\|w(t)\|_2^2 \leq C_3 \int_0^t \|w(s)\|_2^2\|u_2(s)\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}^8 ds.$$

Como $\|u_2(t)\|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}^8 \in L^1(0, T)$ podemos usar a desigualdade de Gronwall para obter

$$\|u(t)\|_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2. \;\blacksquare$$

Capítulo 3

Regularidade e Decaimento

3.1 Regularidade

Teorema 3.1 (*Auto funções do Problema de Stokes*) *Existem sequências* $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *em* V, $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathbb{R}$ *e* $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *em* $L^2(\Omega)$ *satisfazendo:*

(i) $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *é um sistema ortonormal e completo em* H,

(ii) $\left(\dfrac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ *é um sistema ortonormal e completo em* $V \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$,

(iii) $\|w_j\|^2 = \lambda_j$,

(iv) $\lim\limits_{j\to\infty} \lambda_j = \infty$,

(v) $\nu((v, w_j)) = \lambda_j(v, w_j), \ \forall\, v \in V$,

(vi) $-\nu\triangle w_j + \nabla P_j = \lambda_j w_j$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dem: O Teorema 2.1 nos garante que para cada $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ existe uma única função $u \in V$ tal que

$$\nu((u, v)) = (f, v), \ \ \forall\, v \in V.$$

Considere a função $G : H \to V$ definida por $G(f) = u$. Então G é linear e contínua. De fato, a linearidade é evidente. Para mostrarmos a continuidade observe que:

$$\|G(f)\|^2 \ = \ \|u\|^2 = \frac{1}{\nu}(f, u) \leq \frac{1}{\nu}\|f\|_2\|u\|_2 \leq \frac{c}{\nu}\|f\|_2\|u\| \leq \frac{c}{\nu}\|f\|_2\|G(f)\|,$$

ou seja,

$$\|G(f)\| \leq \frac{c}{\nu}\|f\|_2,$$

mostrando que G é contínua.

Temos também que $G : V \to V$ é um operador compacto. De fato, considere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em V. Como $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$, temos que existem uma subsequência $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $f \in H$ tais que $f_k \to f$ em H. Da continuidade da função G temos que $G(f_k) \to G(f)$ em V, mostrando que G é compacto.

G é um operador auto-adjunto. Com efeito, dados $f_1, f_2 \in V$, temos que

$$(G(f_1), f_2) = (u_1, f_2) = \frac{1}{\nu}(f_1, f_2),$$
$$(f_1, G(f_2)) = (f_1, u_2) = \frac{1}{\nu}(f_1, f_2),$$

o que nos mostra que $(G(f_1), f_2) = (f_1, G(f_2))$ para todo $f_1, f_2 \in V$, ou seja G é auto-adjunto.

Uma outra propriedade do operador G é que estritamente positivo. De fato, considere $f \in V$, então

$$((G(f), f)) = ((u, f)) = \frac{1}{\nu}(f, f) = \frac{1}{\nu}\|f\|_2 > 0 \text{ se } f \neq 0.$$

Desta forma temos que G é um operador nas condições do teorema spectral para operadores compactos em um espaço de Hilbert V, no caso simétrico estritamente positivo, veja [19]. Resulta do mencionado teorema, que existem sequências $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em V e $(\lambda_j)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ satisfazendo $(i) - (v)$. Desde que

$$\nu((w_j, v)) = \lambda_j(w_j, v), \ \ \forall\, v \in V,$$

o Teorema 2.1 garante a existência de uma função $P_j \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ tal que (vi) é satisfeito. ■

Observação 3.2 (*Auto funções do operador* $-\triangle$) *Análogo ao Teorema* 2.1 *temos que existem sequências* $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *em* V, $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathbb{R}$ *tais que as condições* $(i) - (iv)$ *do teorema* 2.1 *são satisfeitos e além disso* $-\triangle w_j = \lambda_j w_j$.

Teorema 3.3 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f, f' \in L^2(0,T;V')$, $f(0) \in H$ *e* $u_0 \in V \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$. *Então existe uma única função vetorial* $u = (u_1, u_2) : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^2$ *e uma distribuição* $P : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ *tais que:*

$$u, u' \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H), \tag{3.1}$$

$$u' - \nu \triangle u + (u \cdot \nabla)u + \nabla P = f \ \text{ em } L^2(0,T;V'), \tag{3.2}$$

$$u(0) = u_0. \tag{3.3}$$

Dem: Como na demonstração do Teorema 2.6 temos que a formulação variacional

$$u, u' \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) \tag{3.4}$$

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + \nu((u(t), v)) + b(u(t), u(t), v) = \langle f(t), v\rangle, \forall v \in V \text{ em } D'(0,T) \tag{3.5}$$

$$u(0) = u_0 \tag{3.6}$$

é equivalente a $(3.1) - (3.3)$. Vamos mostrar que

$(3.4) - (3.6)$ possui uma única solução. Para isto seja $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma base de $V \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$ e para cada $m \in \mathbb{N}$ seja $V_m = [w_1, \cdots, w_m]$. Conforme visto no Teorema 2.6 existe $u_m(t) \in V_m$ tal que

$$(u_m'(t), w_j) + \nu((u_m(t), w_j)) + b(u_m(t), u_m(t), w_j) = \langle f(t), w_j\rangle_{V'\times V},\ 1 \le j \le m, \tag{3.7}$$

$$u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \text{ em } V \cap \mathbb{H}^2(\Omega). \tag{3.8}$$

De (3.7) temos a seguinte equação aproximada

$$(u_m'(t), v) + \nu((u_m(t), v)) + b(u_m(t), u_m(t), v) = \langle f(t), v\rangle_{V'\times V},\ \forall\, v \in V_m. \tag{3.9}$$

<u>Estimativa 1.</u> De modo idêntico ao Teorema 2.6 (veja 2.67) temos:

$$\|u_m(t)\|_2^2 + \nu \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds \le \frac{1}{\nu}\|f\|^2_{L^2(0,T;V')} + \|u_0\|_2^2. \tag{3.10}$$

<u>Estimativa 2.</u> Tomando $v = u_m'(t)$ na equação (3.9) temos

$$(u_m'(t), u_m'(t)) + \nu((u_m(t), u_m'(t))) + b(u_m(t), u_m(t), u_m'(t)) = \langle f(t), u_m'(t)\rangle_{V'\times V},$$

ou seja,

$$\|u'_m(t)\|_2^2 + \nu((u_m(t), u'_m(t))) + b(u_m(t), u_m(t), u'_m(t)) = \langle f(t), u'_m(t)\rangle_{V'\times V},\ \forall\, t \in [0,T].$$

Em particular para $t = 0$,

$$\|u'_m(0)\|_2^2 \;=\; \langle f(0), u'_m(0)\rangle_{V'\times V} - \nu((u_m(0), u'_m(0))) - b(u_m(0), u_m(0), u'_m(0)).$$

Desta igualdade, da hipótese $f(0) \in H$ e da continuidade da forma $b(u, v, w)$ em $V \times V \times V$, resulta que

$$\begin{aligned}\|u'_m(0)\|_2^2 &= (f(0), u'_m(0)) + \nu(\triangle u_m(0), u'_m(0)) - b(u_m(0), u_m(0), u'_m(0))\\ &\leq \left(\|f(0)\|_2 + \nu\|\triangle u_m(0)\|_2 + C\|u_m(0)\|^2\right)\|u'_m(0)\|_2,\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\|u'_m(0)\|_2 \;\leq\; \|f(0)\|_2 + \nu\|\triangle u_m(0)\|_2 + C\|u_m(0)\|^2, \tag{3.11}$$

onde C é a constante dada na demonstração de que a forma $b(u, v, w)$ é contínua. Para limitar o membro direito desta desigualdade observe que $\|u_m(0)\| \leq C_1\|u_0\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}$, $\|\triangle u_m(0)\|_2 \leq C_2\|u_m(0)\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} \leq C_3\|u_0\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}$. Portanto $(u'_m(0))_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em H.

Derivando em relação a t a equação (3.9), temos:

$$(u''_m(t), v) + \nu((u'_m(t), v)) + b(u'_m(t), u_m(t), v) + b(u_m(t), u'_m(t), v) = \langle f'(t), v\rangle_{V'\times V}.$$

Fazendo $v = 2u'_m(t)$ obtemos

$$\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|_2^2 + 2\nu\|u'_m(t)\|^2 + 2b(u'_m(t), u_m(t), u'_m(t)) \;=\; 2\langle f'(t), u'_m(t)\rangle_{V'\times V},$$

Como $n = 2$, desta igualdade e o Lema 1.12 concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|_2^2 + 2\nu\|u'_m(t)\|^2 &= -2b(u'_m(t), u_m(t), u'_m(t)) + 2\langle f'(t), u'_m(t)\rangle_{V'\times V}\\ &\leq 2C_4\|u'_m(t)\|_2\|u_m(t)\|\|u'_m(t)\| + 2\|f'(t)\|_{V'}\|u'_m(t)\|\\ &= 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\nu}}\|f'(t)\|_{V'}\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}\|u'_m(t)\| + 2C_4\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}\|u'_m(t)\|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\nu}}\|u_m(t)\|\|u'_m(t)\|_2\\ &\leq \frac{2}{\nu}\|f'(t)\|_{V'}^2 + \frac{\nu}{2}\|u'_m(t)\|^2 + \frac{\nu}{2}\|u'_m(t)\|^2 + \frac{2C_4^2}{\nu}\|u_m(t)\|^2\|u'_m(t)\|_2^2.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|_2^2+\nu\|u_m'(t)\|^2\leq\frac{2}{\nu}\|f'(t)\|_{V'}^2+C_5\|u_m(t)\|^2\|u_m'(t)\|_2^2.$$

Integrando esta desigualdade de 0 a t e usando o fato de que $(u_m'(0))_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em H obtemos

$$\begin{aligned}\|u_m'(t)\|_2^2+\nu\int_0^t\|u_m'(s)\|^2ds\leq\|u_m'(0)\|_2^2+\frac{2}{\nu}\int_0^t\|f'(s)\|_{V'}^2ds\\ +C_5\int_0^t\|u_m(s)\|^2\|u_m'(s)\|_2^2ds\leq C_6+\frac{2}{\nu}\|f'\|_{L^2(0,T;V')}+C_5\int_0^t\|u_m'(s)\|_2^2\|u_m(s)\|^2ds.\end{aligned}$$

Levando em conta a Estimativa 1 podemos usar a desigualdade de Gronwall, para concluir que

$$\|u_m'(t)\|_2^2+\nu\int_0^t\|u_m'(s)\|^2ds\leq C_7, \tag{3.12}$$

e isto completa a Estimativa 2.

Das Estimativas 1 e 2 concluímos que

$$\begin{array}{lll}(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ e } (u_m')_{m\in\mathbb{N}} & \text{são limitadas em} & L^\infty(0,T;H),\\ (u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ e } (u_m')_{m\in\mathbb{N}} & \text{são limitadas em} & L^2(0,T;V).\end{array}$$

Portanto existem uma subsequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e $u\in L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)$ tais que

$$\begin{array}{lll}u_k\overset{*}{\rightharpoonup}u & \text{em} & L^\infty(0,T;H)\\ u_k'\overset{*}{\rightharpoonup}u' & \text{em} & L^\infty(0,T;H)\\ u_k\rightharpoonup u & \text{em} & L^2(0,T;V)\\ u_k'\rightharpoonup u' & \text{em} & L^2(0,T;V)\end{array}$$

De modo idêntico ao Teorema 2.6, passamos o limite no problema aproximado e concluímos que u satisafaz $(3.4)-(3.6)$. ■

Teorema 3.4 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\nu > 0$, $f \in L^\infty(0,T;H)$ *tal que* $f' \in L^1(0,T;H)$ *e* $u_0 \in V \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$, *satisfazendo*

$$\frac{c^2}{\nu}d_2^2 + (1+d_1^2)\left(\|u_0\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + \frac{Tc^2}{\nu}d_2^2\right)^{\frac{1}{2}} e^{\int_0^T \|f'(s)\|_2 ds} < \frac{\nu^3}{C^2} \tag{3.13}$$

onde C *é a constante de continuidade da forma* $b(u,v,w)$, $d_2 = \|f\|_{L^\infty(0,T;H)}$, $d_1 = \|f(0)\|_2 + \nu\ C_0\,\|u_0\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + C_3\,\|u_0\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}$ *dado no teorema anterior, e* c *é a constante de imersão* $V \hookrightarrow H$. *Então existe uma única função vetorial* $u = (u_1,u_2,u_3) : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^3$ *e uma distribuição* $P : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ *tais que*

$$u \in L^\infty(0,T;V), \tag{3.14}$$

$$u' \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) \tag{3.15}$$

$$u' - \nu\triangle u + (u\cdot\nabla)u + \nabla P = f \ \text{em}\ L^\infty(0,T;H) \tag{3.16}$$

$$u(0) = u_0 \tag{3.17}$$

Dem: De modo análogo ao Teorema 2.6 temos que a formulação variacional

$$u \in L^\infty(0,T;V),\ u' \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H), \tag{3.18}$$

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + \nu((u(t),v)) + b(u(t),u(t),v) = (f(t),v), \forall v \in V \text{ em } D'(0,T), \tag{3.19}$$

$$u(0) = u_0. \tag{3.20}$$

é equivalente a $(3.14)-(3.17)$. Vamos mostrar que $(3.18)-(3.20)$ possui uma única solução. Como no Teorema 3.3 seja $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ base para $V \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$, $V_m = [w_1,\cdots,w_m]$ e $u_m(t) \in V_m$ solução do problema aproximado

$$(u_m'(t),w_j) + \nu((u_m(t),w_j)) + b(u_m(t),u_m(t),w_j) = (f(t),w_j),\ 1 \le j \le m, \tag{3.21}$$

$$u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \text{ em } V \cap \mathbb{H}^2(\Omega). \tag{3.22}$$

De (3.21) segue a equação aproximada

$$(u_m'(t),v) + \nu((u_m(t),v)) + b(u_m(t),u_m(t),v) = (f(t),v),\ \forall\, v \in V_m. \tag{3.23}$$

Estimativa 1

Fazendo $v = 2u_m(t)$ em (3.23) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + 2\nu\|u_m(t)\|^2 &= 2(f(t), u_m(t))\\ &\leq 2\|f(t)\|_2\|u_m(t)\|_2\\ &\leq \frac{c^2}{\nu}\|f(t)\|_2^2 + \nu\|u_m(t)\|^2,\end{aligned}$$

ou ainda

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + \nu\|u_m(t)\|^2 \leq \frac{c^2}{\nu}\|f(t)\|_2^2,$$

onde c é a constante de imersão de $V \hookrightarrow H$. Integrando esta desigualdade de 0 a t temos

$$\|u_m(t)\|_2^2 + \nu\int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds \leq \|u_m(0)\|_2^2 + \frac{c^2}{\nu}\int_0^t \|f(s)\|_2^2 ds,$$

o que nos leva a

$$\|u_m(t)\|_2^2 + \nu\int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds \leq \|u_0\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}^2 + \frac{Tc^2}{\nu}\|f\|_{L^\infty(0,T;H)}^2. \tag{3.24}$$

Estimativa 2 De modo Análogo ao Teorema 3.3 temos que

$$\|u_m'(0)\|_2 \leq d_1 = \|f(0)\|_2 + \nu C_0\|u_0\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + C_3\|u_0\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)},\ \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{3.25}$$

Estimativa 3

Derivando a equação (3.23) e depois fazendo $v = 2u_m'(t)$ obtemos:

$$\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|_2^2 + 2\nu\|u_m'(t)\|^2 + 2b(u_m'(t), u_m(t), u_m'(t)) = 2(f'(t), u_m'(t)),$$

$$\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|_2^2 + 2\nu\|u_m'(t)\|^2 \leq 2\|f'(t)\|_2\|u_m'(t)\|_2 + 2C\|u_m'(t)\|^2\|u_m(t)\|,$$

ou ainda

$$\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|_2^2 + 2\left(\nu - C\|u_m(t)\|\right)\|u_m'(t)\|^2 \leq 2\|f'(t)\|_2\|u_m'(t)\|_2. \tag{3.26}$$

No que segue mostraremos que $(\nu - C\|u_m(t)\|) > 0$ para todo $t \in [0, T]$. De fato, fazendo $v = 2u_m(t)$ em (3.23) obtemos:

$$2(u_m^{'}(t), u_m(t)) + 2\nu\|u_m(t)\|^2 \;\; = \;\; 2(f(t), u_m(t)),$$

de onde podemos ver que

$$\begin{aligned} 2\nu\|u_m(t)\|^2 &= 2(f(t), u_m(t)) - 2(u_m'(t), u_m(t)) \\ &\leq 2\|f(t)\|_2\|u_m(t)\|_2 + 2\|u_m'(t)\|_2\|u_m(t)\|_2 \\ &\leq 2\|f(t)\|_2 c\|u_m(t)\| + 2\|u_m'(t)\|_2\|u_m(t)\|_2 \\ &\leq \frac{c^2}{\nu}\|f(t)\|_2^2 + \nu\|u_m(t)\|^2 + 2\|u_m'(t)\|_2\|u_m(t)\|_2, \end{aligned}$$

ou seja

$$\nu\|u_m(t)\|^2 \;\; \leq \;\; \frac{c^2}{\nu}\|f(t)\|_2^2 + 2\|u_m'(t)\|_2\|u_m(t)\|_2.$$

Usando a Estimativa 1 obtemos

$$\nu\|u_m(t)\|^2 \;\; \leq \;\; \frac{c^2}{\nu}\|f\|_{L^\infty(0,T;H)}^2 + 2\left(\|u_0\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}^2 + \frac{Tc^2}{\nu}\|f\|_{L^\infty(0,T;H)}^2\right)^{\frac{1}{2}}\|u_m'(t)\|_2.$$

Portanto

$$\nu\|u_m(t)\|^2 \leq \frac{c^2}{\nu}d_2^2 + 2\left(\|u_0\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}^2 + \frac{Tc^2}{\nu}d_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\|u_m'(t)\|_2. \tag{3.27}$$

Fazendo $t = 0$ em (3.27) e usando a Estimativa 2 resulta

$$\begin{aligned} \nu\|u_m(0)\|^2 &\leq \frac{c^2}{\nu}d_2^2 + 2\left(\|u_0\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}^2 + \frac{Tc^2}{\nu}d_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\|u_m'(0)\|_2 \\ &\leq \frac{c^2}{\nu}d_2^2 + 2d_1\left(\|u_0\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}^2 + \frac{Tc^2}{\nu}d_2^2\right)^{\frac{1}{2}} = d_3. \end{aligned}$$

Como $2d_1 \leq 1 + d_1^2$ e $e^{\int_0^T \|f'(s)\|_2 ds} \geq 1$, usando a hipótese (3.13) temos que

$$d_3 \leq d_4 = \frac{c^2}{\nu}d_2^2 + (1 + d_1^2)\left(\|u_0\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}^2 + \frac{Tc^2}{\nu}d_2^2\right)^{\frac{1}{2}} e^{\int_0^T \|f'(s)\|_2 ds} < \frac{\nu^3}{C^2}.$$

Disto segue que $\nu\|u_m(0)\|^2 \leq d_3 \leq d_4 < \dfrac{\nu^3}{C^2}$, ou seja, $\nu - C\|u_m(0)\| > 0$.

Seja $T_m = \sup\{t > 0; \quad g(s) = \nu - C\|u_m(s)\| > 0, \forall\, 0 \leq s \leq t\}$. Deste modo $g(T_m) = 0$, de fato, note que $g \in C([0,T])$ e se $g(T_m) \neq 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $g(t) \neq 0$, para todo $t \in (T_m - \delta, T_m + \delta)$ o que contradiz a definição de T_m. Além disso $g(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, T_m]$.

Se $T_m \geq T$ então não há o que fazer. Suponhamos que $T_m < T$, então de (3.26) temos

$$\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|_2^2 + 2(\nu - c\|u_m(t)\|)\|u_m'(t)\|^2 \leq 2\|f(t)\|_2\|u_m'(t)\|_2$$

e do fato de que $\nu - C\|u_m(t)\| \geq 0 \ \ \forall\, t \in [0, T_m]$, temos

$$\frac{d}{dt}\|u_m^{'}(t)\|_2^2 \leq 2\|f(t)\|_2\|u_m^{'}(t)\|_2, \ \ \forall\, t \in [0, T_m]$$

e portanto,

$$\frac{d}{dt}(1 + \|u_m'(t)\|_2^2) \leq 2\|f(t)\|_2(1 + \|u_m'(t)\|_2), \ \ \forall\, t \in [0, T_m].$$

Multiplicando ambos os lados desta desigualdade por $e^{-\int_0^t \|f^{'}(s)\|_2 ds}$ obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left\{(1 + \|u_m^{'}(t)\|_2^2)e^{-\int_0^t \|f'(s)\|_2 ds}\right\} \leq 0, \ \ \forall\, t \in [0, T_m].$$

Integrando de 0 a $t \leq T_m$ temos:

$$(1 + \|u_m'(t)\|_2^2)e^{-\int_0^t \|f'(s)\|_2 ds} - (1 + \|u_m'(0)\|_2^2) \leq 0, \ \ \forall\, t \in [0, T_m],$$

ou seja

$$\begin{aligned}
(1 + \|u_m^{'}(t)\|_2^2) &\leq (1 + \|u_m'(0)\|_2^2)e^{\int_0^t \|f^{'}(s)\|_2 ds} \\
&\leq (1 + d_1^2)e^{\int_0^t \|f'(s)\|_2 ds} \\
&\leq (1 + d_1^2)e^{\int_0^T \|f'(s)\|_2 ds}. \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

De (3.27) e de $2\|u_m^{'}(t)\|_2 \leq 1 + \|u_m^{'}(t)\|^2$ temos

$$\nu\|u_m(t)\|^2 \leq \frac{c^2}{\nu}d_2^2 + \left(\|u_0\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}^2 + \frac{Tc^2}{\nu}d_2^2\right)^{\frac{1}{2}}(1 + \|u_m'(t)\|_2^2).$$

Agora de (3.28) obtemos

$$\nu\|u_m(t)\|^2 \leq \frac{c^2}{\nu}d_2^2 + (1+d_1^2)\left(\|u_0\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + \frac{Tc^2}{\nu}d_2^2\right)^{\frac{1}{2}} e^{\int_0^T \|f'(s)\|_2 ds} = d_4, \quad (3.29)$$

para todo $t \in [0, T_m]$. Mas como $d_4 < \dfrac{\nu^3}{C^2}$, concluímos que

$$\nu - C\|u_m(t)\| \geq \nu - C\sqrt{\frac{d_4}{\nu}} > 0, \quad \forall\, t \in [0, T_m], \quad (3.30)$$

o que é um absurdo pois $\nu - C\|u_m(T_m)\| = 0$. Portanto $T_m \geq T$ como queríamos. De (3.26) e (3.30) temos que

$$\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|_2^2 + 2\left(\nu - \sqrt{\frac{d_4}{\nu}}\right)\|u'_m(t)\|^2 \;\leq\; 2\|f'(t)\|_2\|u'_m(t)\|_2, \quad \forall\, t \in [0, T].$$

Integrando esta desigualdade de 0 a t obtemos:

$$\begin{aligned}\|u'_m(t)\|_2^2 + 2\left(\nu - \sqrt{\frac{d_4}{\nu}}\right)\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds &\leq 2\int_0^t \|f'(s)\|_2^2 ds + \int_0^t \|u'_m(s)\|_2^2 ds \\ &\quad + \|u'_m(0)\|_2^2 \\ &\leq 2\|f'\|_{L^1(0,T;H)} + \int_0^t \|u'_m(s)\|_2^2 ds + d_1,\end{aligned}$$

donde pela desigualdade de Gronwall temos que

$$\|u'_m(t)\|_2^2 + 2\left(\nu - \sqrt{\frac{d_4}{\nu}}\right)\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds \leq C_4. \quad (3.31)$$

Portanto de (3.29) e (3.31) conclue-se que

$$\begin{array}{lll} (u_m)_{m\in\mathbb{N}} & \text{é limitada em} & L^\infty(0,T;V) \\ (u'_m)_{m\in\mathbb{N}} & \text{é limitada em} & L^\infty(0,T;H) \\ (u'_m)_{m\in\mathbb{N}} & \text{é limitada em} & L^2(0,T;V) \end{array}$$

Portanto existem uma subsequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $u \in L^\infty(0,T;V)$ e $u' \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ tal que

$$\begin{array}{llll} u_k & \overset{\star}{\rightharpoonup} u & \text{em} & L^\infty(0,T;V) \\ u'_k & \overset{\star}{\rightharpoonup} u' & \text{em} & L^\infty(0,T;H) \\ u'_k & \rightharpoonup u' & \text{em} & L^2(0,T;V). \end{array}$$

Com estas convergências, de modo idêntico a demonstração do Teorema 2.6 podemos passar ao limite no problema aproximado, bem como, provar que u satisfaz a condição inicial.

Unicidade

Basta observar que $u \in L^\infty(0,T;V) \hookrightarrow L^\infty(0,T;\mathbb{L}^4(\Omega)) \hookrightarrow L^8(0,T;\mathbb{L}^4(\Omega))$ e o Teorema 2.6 caso $n=3$ garante a unicidade. ■

Teorema 3.5 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f \in L^2(0,T;H)$ *e* $u_0 \in V$, *então existe uma única função vetorial* $u=(u_1,u_2):\Omega\times(0,T)\to\mathbb{R}^2$ *e uma distribuição* $P:\Omega\times(0,T)\to\mathbb{R}$ *tais que*

$$u \in L^\infty(0,T;V)\cap L^2(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega)),\ \ u' \in L^2(0,T;H) \tag{3.32}$$

$$u' - \nu\triangle u + u\cdot\nabla u + \nabla P = f \ \ em\ L^2(0,T;H) \tag{3.33}$$

$$u(0)=u_0 \tag{3.34}$$

Dem: A demonstração de que a formulação variacional

$$u \in L^\infty(0,T;V)\cap L^2(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega))\, u' \in L^2(0,T;H) \tag{3.35}$$

$$(u'(t),v)+\nu((u(t),v))+b(u(t),u(t),v)=(f(t),v),\ \text{em}\ \mathcal{D}'(0,T)\ \ \forall\, v\in V \tag{3.36}$$

$$u(0)=u_0 \tag{3.37}$$

é equivalente ao problema $(3.32)-(3.34)$ é análogo ao Teorema 2.6. Vamos mostrar que o problema $(3.35)-(3.37)$ possui uma única solução, para isto seja $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ base para V dada como na Observação 3.2 e seja $V_m=[w_1,\cdots,w_m]$, então existe $u_m(t)\in V_m$ tal que

$$(u_m'(t),w_j)+\nu((u_m(t),w_j))+b(u_m(t),u_m(t),w_j)=(f(t),w_j),\ 1\le j\le m \tag{3.38}$$

$$u_m(0)=u_{0m}\to u_0 \text{ em } V. \tag{3.39}$$

Do fato que $(\xi_{u_m}(t),w_j)=b(u_m(t),u_m(t),w_j)$, $\forall\, j\in\mathbb{N}$, para obtermos uma melhor estimativa usaremos a equação equivalente a (3.38)

$$(u_m'(t),w_j)+\nu((u_m(t),w_j))+(\xi_{u_m}(t),w_j)=(f(t),w_j),\ 1\le j\le m. \tag{3.40}$$

Estimativa 1

Multiplicando (3.40) por λ_j obtemos

$$\lambda_j(u'_m(t), w_j) + \nu\lambda_j((u_m(t), w_j)) + \lambda_j(\xi_{u_m}(t), w_j) = \lambda_j(f(t), w_j). \tag{3.41}$$

Da Observação 3.2 temos que

$$((u'_m(t), w_j)) - \nu((u_m(t), \triangle w_j)) - (\xi_{u_m}(t), \triangle w_j) = -(f(t), \triangle w_j).$$

Desta igualdade temos a seguinte equação

$$(u'_m(t), v) + \nu((u_m(t), v)) + (\xi_{u_m}(t), v) = (f(t), v),\ \forall\, v \in V_m. \tag{3.42}$$

Tomando $v = 2u_m(t)$ em (3.42) conclue-se

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 - 2\nu((u_m(t), \triangle u_m(t))) - 2(\xi_{u_m}(t), \triangle u_m(t)) = -2(f(t), \triangle u_m(t)),$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + 2\nu\|\triangle u_m(t)\|_2^2 &= 2(\xi_{u_m}(t), \triangle u_m(t)) - 2(f(t), \triangle u_m(t)) \\ \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + 2\nu\|\triangle u_m(t)\|_2^2 &\leq 2\|\xi_{u_m}(t)\|_2\|\triangle u_m(t))\|_2 + 2\|f(t)\|_2\|\triangle u_m(t)\|_2. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Como $n = 2$ temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + 2\nu\|\triangle u_m(t)\|_2^2 \leq 2C_1\|u_m(t)\|_2^{\frac{1}{2}}\|u_m(t)\|\|\triangle u_m(t))\|_2^{\frac{3}{2}} \\ +2\|f(t)\|_2\|\triangle u_m(t)\|_2, \end{aligned}$$

usando a desigualdade de Young com $p = 4$ e $q = \frac{4}{3}$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + 2\nu\|\triangle u_m(t)\|_2^2 \leq C_2\|u_m(t)\|_2^2\|u_m(t)\|^4 + \frac{\nu}{2}\|\triangle u_m(t))\|_2^2 \\ +\frac{2}{\nu}\|f(t)\|_2^2 + \frac{\nu}{2}\|\triangle u_m(t)\|_2^2, \end{aligned}$$

o que nos dá

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + \nu\|\triangle u_m(t)\|_2^2 \leq \frac{2}{\nu}\|f(t)\|_2^2 + C_2\|u_m(t)\|_2^2\|u_m(t)\|^4.$$

Integrando esta desigualdade de 0 a t obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\triangle u_m(s)\|_2^2 ds &\leq \|u_m(0)\|^2 + \frac{2}{\nu}\int_0^t \|f(s)\|_2^2 ds \\
&\quad + C_2 \int_0^t \left(\|u_m(s)\|_2^2 \|u_m(s)\|^2\right) \|u_m(s)\|^2 ds \\
&\leq \|u_0\|^2 + \frac{2}{\nu}\|f\|_{L^2(0,T;H)} \\
&\quad + C_2 \int_0^t \left(\|u_m(s)\|_2^2 \|u_m(s)\|^2\right) \|u_m(s)\|^2 ds,
\end{aligned}$$

Desigualdade de Gronwall implica então que

$$\|u_m(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\triangle u_m(s)\|_2^2 ds \leq C_3. \tag{3.44}$$

<u>Estimativa 2</u>

Multiplicando (3.38) por $g_{jm}(t)$ e somando em j de 1 a n temos

$$\begin{aligned}
2\|u_m'(t)\|_2^2 &= -2\nu((u_m(t), u_m'(t))) - 2(\xi_{u_m}(t), u_m'(t)) + 2(f(t), u_m'(t)) \\
&\leq 2\nu\|u_m(t)\|\|u_m'\| + 2\|\xi_{u_m}(t)\|_2\|u_m'\|_2 + 2\|f(t)\|_2\|u_m'(t)\|_2 \\
&\leq C_4\nu^2\|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{3}\|u_m'(t)\|_2^2 + C_5\|\xi_{u_m}(t)\|_2^2 + \frac{1}{3}\|u_m'(t)\|_2^2 \\
&\quad + C_6\|f(t)\|_2^2 + \frac{1}{3}\|u_m'\|_2^2,
\end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
\|u_m'(t)\|_2^2 &\leq C_4\nu^2\|u_m(t)\|^2 + C_5\|\xi_{u_m}(t)\|_2^2 + C_6\|f(t)\|_2^2 \\
&\leq C_4\nu^2\|u_m(t)\|^2 + C_7\|u_m(t)\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}^2 + C_6\|f(t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Integrando esta desiguladade de 0 a t temos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|u_m'(s)\|_2^2 ds &\leq C_4\nu^2 \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds + C_7 \int_0^t \|u_m(s)\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}^2 ds + C_6 \int_0^t \|f(s)\|_2^2 ds \\
&\leq C_4\nu^2 C_3 t + C_7 C_3 + C_6\|f\|_{L^2(0,T;H)} = C_8. \qquad (3.45)
\end{aligned}$$

Portanto, de (3.44) e (3.45) concluímos que

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;V),$$

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega)),$$

$$(u'_m)_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0,T;H).$$

Logo existem uma subsequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $u \in L^\infty(0,T;V)\cap L^2(0,T;\mathbb{H}^2(\Omega))$ e $u' \in L^2(0,T;H)$ tal que

$$u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T:V), \tag{3.46}$$

$$u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^2(0,T:\mathbb{H}^2(\Omega)), \tag{3.47}$$

$$u'_k \rightharpoonup u' \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H). \tag{3.48}$$

Com estas convergências podemos passar o limite de modo idêntico ao Teorema 2.6.■

Teorema 3.6 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $f \in L^\infty(0,T;H)$, $\nu > 0$, $u_0 \in V$, $T_* = \min\{T, T_1\}$ onde $T_1 = \dfrac{3}{4C_4\mu^2}$, $C_4 = \dfrac{54C_2^4}{\nu^3}$, C_2 é a constante definida no Lema* 1.15*, $\mu = 4\max\left\{\|u_0\|^2, \dfrac{2}{C_3\nu^2}\|f\|^2_{L^\infty(0,T;H)}\right\}$ e C_3 é a constante tal que $C_3\|u\|^2 \leq \|\triangle u\|_2^2$. Então existe uma única função vetorial $u = (u_1, u_2) : \Omega\times(0,T) \to \mathbb{R}^2$ e uma função escalar $P : \Omega\times(0,T) \to \mathbb{R}$ tais que*

$$u \in L^\infty(0,T_*;V)\cap L^2(0,T_*;\mathbb{H}^2(\Omega)),\ \ u' \in L^2(0,T_*;H), \tag{3.49}$$

$$u' - \nu\triangle u + u\cdot\nabla u + \nabla P = f \ \ em \ L^2(0,T_*;H), \tag{3.50}$$

$$u(0) = u_0. \tag{3.51}$$

Dem: De modo análogo ao Teorema 2.6 temos que a formulação variacional

$$u \in L^\infty(0,T_*;V)\cap L^2(0,T_*;\mathbb{H}^2(\Omega)),\ u' \in L^2(0,T_*;H), \tag{3.52}$$

$$(u'(t),v) + \nu((u(t),v)) + (\xi_u(t),v) = (f(t),v),\ \text{em } \mathcal{D}'(0,T) \ \ \forall\, v \in V, \tag{3.53}$$

$$u(0) = u_0. \tag{3.54}$$

é equivalente ao problema $(3.49)-(3.51)$. Vamos mostrar que o problema $(3.52)-(3.54)$ possui uma única solução. Seja $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ base de V dada na observação

3.2, $V_m = [w_1, \cdots, w_m]$ e $u_m(t) \in V_m$ tal que

$$(u'_m(t), w_j) + \nu((u_m(t), w_j)) + (\xi_{u_m}(t), w_j) = (f(t), w_j),\ 1 \leq j \leq m \tag{3.55}$$

$$u_m(0) = u_{0m} \rightarrow u_0 \text{ em } V \tag{3.56}$$

De (3.55) temos a seguinte equação aproximada

$$(u'_m(t), v) + \nu((u_m(t), v)) + (\xi_{u_m}(t), v) = (f(t), v),\ \forall\, v \in V_m. \tag{3.57}$$

<u>Estimativa 1</u>

De (3.43) temos

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + 2\nu\|\triangle u_m(t)\|_2^2 \ \leq\ 2\|f(t)\|_2\|\triangle u_m(t)\|_2 + 2\|\xi_{u_m}(t)\|_2\|\triangle u_m(t))\|_2.$$

Considerando que $n = 3$, do Lema 1.15 temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + 2\nu\|\triangle u_m(t)\|_2^2 \ &\leq\ 2\|f(t)\|_2\|\triangle u_m(t)\|_2 + 2C_2\|u_m(t)\|^{\frac{3}{2}}\|\triangle u_m(t)\|_2^{\frac{3}{2}} \\ &=\ 2\|f(t)\|_2\|\triangle u_m(t)\|_2 \\ &\quad +2C_2\left(\frac{3}{2\nu}\right)^{\frac{3}{4}}\|u_m(t)\|^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2\nu}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\|\triangle u_m(t)\|_2^{\frac{3}{2}},\end{aligned}$$

donde, usando a desigualdade de young com $p = 4$ e $q = \dfrac{4}{3}$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + 2\nu\|\triangle u_m(t)\|_2^2 \ &\leq\ \frac{2}{\nu}\|f(t)\|_2^2 + \frac{\nu}{2}\|\triangle u_m(t)\|_2^2 \\ &\quad + C_4\|u_m(t)\|^6 + \frac{\nu}{2}\|\triangle u_m(t)\|_2^2,\end{aligned}$$

ou ainda

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + \nu\|\triangle u_m(t)\|_2^2 \ \leq\ \frac{2}{\nu}\|f(t)\|_2^2 + C_4\|u_m(t)\|^6, \tag{3.58}$$

onde $C_4 = \dfrac{54C_2^4}{\nu^3}$. Da definição de C_3 e de que $f \in L^\infty(0, T; H)$ temos que

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + C_3\nu\|u_m(t)\|^2 \ \leq\ \frac{2}{\nu}\|f(t)\|_{L^\infty(0,T;H)}^2 + C_4\|u_m(t)\|^6.$$

Afirmação:

$$\|u_m(t)\|^2 \leq \mu,\ \ 0 \leq t \leq T_1. \tag{3.59}$$

De fato, considere a função auxiliar $z(t) = \max\left\{\dfrac{\mu}{2}, \|u_m(t)\|^2\right\}$, logo

$$\frac{d}{dt}z(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \|u_m(t)\|^2 \leq \frac{\mu}{2} \\ \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 & \text{se } \|u_m(t)\|^2 > \frac{\mu}{2}. \end{cases}$$

Vamos mostrar que

$$\frac{d}{dt}z(t) \leq 2C_4 z^3 \tag{3.60}$$

$$z(0) = \frac{\mu}{2}. \tag{3.61}$$

De fato, temos $\|u_m(0)\|^2 \leq \|u_0\|^2 \leq \dfrac{\mu}{4} \leq \dfrac{\mu}{2}$, mostrando que $z(0) = \dfrac{\mu}{2}$. Agora note que se $\|u_m(t)\|^2 > \dfrac{\mu}{2}$ então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}z(t) + \frac{\mu}{2}C_3\nu &\leq \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + C_3\nu\|u_m(t)\|^2 \\ &\leq \frac{2}{\nu}\|f\|^2_{L^\infty(0,T;H)} + C_4\|u_m(t)\|^6, \end{aligned}$$

mas, $\dfrac{\mu}{2} \geq \dfrac{\mu}{4} \geq \dfrac{2}{C_3\nu^2}\|f\|_{L^\infty(0,T;H)}$ e disto temos $\dfrac{\mu}{2}C_3\nu \geq \dfrac{2}{\nu}\|f\|_{L^\infty(0,T;H)}$, portanto

$$\frac{d}{dt}z(t) \leq C_4\|u_m(t)\|^6 \leq 2C_4\|u_m(t)\|^6 = 2C_4 z(t)^3.$$

Se $\|u_m(t)\|^2 \leq \dfrac{\mu}{2}$ então $\dfrac{dz}{dt} = 0 \leq 2C_4\left(\dfrac{\mu}{2}\right)^3 = 2C_4 z(t)^3$, mostrando $(3.60) - (3.61)$. Note que $(3.60) - (3.61)$ é uma equação diferencial de primeira ordem não linear, para termos a solução de $(3.60) - (3.61)$ considere $y(t) = z(t)^{-2}$, logo

$$\frac{d}{dt}y(t) = -2z(t)^{-3}\frac{d}{dt}z(t)$$

multiplicando $-2z(t)^{-3}$ em (3.60) e usando esta desigualdade obtemos

$$\frac{d}{dt}y(t) \geq -2C_4.$$

Integrando esta desigualdade de 0 a t e usando (3.61) temos

$$y(t) \geq \frac{4}{\mu^2} - 2C_4 t \geq \frac{4}{\mu^2} - 4C_4 t,$$

o que nos dá

$$\frac{1}{z^2(t)} \geq \frac{4(1 - c_4 t\mu^2)}{\mu^2}. \tag{3.62}$$

Para $t \leq T_1$ temos

$$\frac{4(1 - c_4 t\mu^2)}{\mu^2} \geq \frac{1}{\mu^2}. \tag{3.63}$$

Comparando (3.62) e (3.63) temos que $\|u_m(t)\|^2 \leq \mu$, para todo $0 \leq t \leq T_1$, mostrando nossa afirmação.

Estimativa 2

Integrando (3.58) de 0 a $t \leq T_1$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^t \|\triangle u_m(s)\|_2^2 ds &\leq \frac{2}{\nu}\int_0^t \|f(s)\|_2^2 ds + C_4 \int_0^t \|u_m(s)\|^6 + \|u_m(0)\|^2 \\ &\leq \frac{2T_1}{\nu}\|f\|^2_{L^\infty(0,T;H)} + C_4\mu^3 T_1 + \|u_0\|^2 = C_5 \end{aligned} \tag{3.64}$$

Estimativa 3.

Fazendo $v = u_m^{'}(t)$ em (3.57) temos

$$\begin{aligned}\|u_m'(t)\|_2^2 &= \nu(\triangle u_m(t), u_m'(t)) - (\xi_{u_m}(t), u_m'(t)) + (f(t), u_m'(t)) \\ &\leq \nu C_6 \|u_m(t)\| \|u_m'(t)\|_2 + \|\xi_{u_m}(t)\|_2 \|u_m'(t)\|_2 + \|f(t)\|_2 \|u_m^{'}(t)\|_2 \\ &\leq 6\nu^2 C_6^2 \|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{6}\|u_m'(t)\|_2^2 + 6\|\xi_{u_m}(t)\|^2 + \frac{1}{6}\|u_m'(t)\|_2^2 \\ &\qquad + 6\|f(t)\|_2^2 + \frac{1}{6}\|u_m^{'}(t)\|_2^2,\end{aligned}$$

ou ainda, como $n = 3$ do Lema 1.12 obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_m^{'}(t)\|_2^2 &\leq 6\nu^2 C_6^2 \|u_m(t)\|^2 + 6\|\xi_{u_m}(t)\|^2 + 6\|f(t)\|_2^2 \\ &\leq 6\nu^2 C_6^2 \|u_m(t)\|^2 + 6C_2\|u_m(t)\|^3 \|u_m(t)\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + 6\|f(t)\|_2^2 \\ &\leq 6\nu^2 C_6^2 \|u_m(t)\|^2 + 36 C_2^2 \|u_m(t)\|^6 + \|u_m(t)\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + 6\|f(t)\|_2^2 \\ &\leq 6\|f\|^2_{L^\infty(0,T;H)} + 6\nu^2 C_6^2 \mu + 36 C_2^2 \mu^3 + \|u_m(t)\|^2_{\mathbb{H}^2(\Omega)},\end{aligned}$$

e de (3.64) temos que para $t \leq T_1$

$$\int_0^t \|u_m'(t)\|_2^2 \leq C_7. \tag{3.65}$$

De (3.59), (3.64) e (3.65) temos que

$$\begin{aligned} &(u_m)_{m\in\mathbb{N}} && \text{é limitada em} && L^\infty(0,T_*;V),\\ &(u_m)_{m\in\mathbb{N}} && \text{é limitada em} && L^2(0,T_*;\mathbb{H}^2(\Omega)),\\ &(u'_m)_{m\in\mathbb{N}} && \text{é limitada em} && L^2(0,T_*;H). \end{aligned}$$

Portanto existem uma subsequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $u \in L^\infty(0,T_*;V)\cap L^2(0,T_*;\mathbb{H}^2(\Omega))$ e $u' \in L^2(0,T_*;H)$ tal que

$$u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T_*:V), \tag{3.66}$$

$$u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^2(0,T_*:\mathbb{H}^2(\Omega)), \tag{3.67}$$

$$u'_k \rightharpoonup u' \quad \text{em} \quad L^2(0,T_*;H). \tag{3.68}$$

Com estas convergências podemos passar o limite de modo idêntico ao Teorema 2.6.■

Observação 3.7 *Fazendo* $v = 2u(t)$ *em* (3.36) *e* (3.53) *vemos facilmente que*

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu\|\triangle u(t)\|_2^2 \le \frac{2}{\nu}\|f(t)\|_2^2 + C_2\|u(t)\|_2^2\|u(t)\|^4$$
$$(n=2,\ 0<t<T), \tag{3.69}$$

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu\|\triangle u(t)\|_2^2 \le \frac{2}{\nu}\|f(t)\|_2^2 + C_4\|u(t)\|^6$$
$$(n=3,\ 0<t<T_*). \tag{3.70}$$

3.2 Solução Global e Decaimento

Teorema 3.8 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $u_0 \in V$ *e* $f = 0$. *Então existe uma única função vetorial* $u : \Omega\times(0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ *e uma função escalar* $P : \Omega\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ *tais que:*

$$u \in L^\infty(0,\infty;V)\cap L^2(0,\infty,\mathbb{H}^2(\Omega)),\ u' \in L^2(0,\infty,H), \tag{3.71}$$

$$u' - \nu\triangle u + (u\cdot\nabla)u + \nabla P = 0 \ \textit{em}\ L^2(0,\infty,H), \tag{3.72}$$

$$u(0) = u_0, \tag{3.73}$$

$$u(t) \to 0 \ \textit{em}\ V \ \textit{quando}\ t\to\infty. \tag{3.74}$$

Dem: De modo análogo ao Teorema 2.6 temos que a formulação variacional

$$u \in L^\infty(0,\infty;V) \cap L^2(0,\infty;\mathbb{H}^2(\Omega)),\ u' \in L^2(0,\infty;H), \tag{3.75}$$

$$(u'(t),v) + \nu((u(t),v)) + (\xi_u(t),v) = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0,T)\ \ \forall\, v \in V, \tag{3.76}$$

$$u(0) = u_0, \tag{3.77}$$

$$u(t) \to 0 \text{ em } V \text{ quando } t \to \infty, \tag{3.78}$$

é equivalente a (3.71) – (3.74). Seja $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dado na observação 3.2, $V_m = [w_1, \cdots, w_m]$ e $u_m(t) \in V_m$ tal que

$$(u_m'(t),w_j) + \nu((u_m(t),w_j)) + (\xi_{u_m}(t),w_j) = 0,\ \ 1 \le j \le m, \tag{3.79}$$

$$u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \text{ em } V. \tag{3.80}$$

De (3.79) temos a seguinte equação aproximada

$$(u_m'(t),v) + \nu((u_m(t),v)) + (\xi_{u_m}(t),v) = 0, \forall\, v \in V_m. \tag{3.81}$$

<u>Estimativa 1</u>

Fazendo $v = 2u_m(t)$ em (3.81), notando que $(\xi_{u_m}(t),u_m(t)) = 0$ temos

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + 2\nu\|u_m(t)\|^2 = 0,$$

integrando esta igualdade em $t > 0$ obtemos,

$$\|u_m(t)\|_2^2 + 2\nu\int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds = \|u_m(0)\|_2^2 \le \|u_0\|^2. \tag{3.82}$$

<u>Estimativa 2</u>

Multiplicando (3.79) por λ_j temos:

$$\lambda_j(u_m'(t),w_j) + \lambda_j\nu((u_m(t),w_j)) + \lambda_j(\xi_{u_m}(t),w_j) = 0,$$

o que nos dá

$$((u_m'(t),w_j)) - \nu((u_m(t),\triangle w_j)) - (\xi_{u_m}(t),\triangle w_j) = 0.$$

Multiplicando esta equação por $g_{jm}(t)$ e somando em j de 1 a m temos

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 - 2\nu((u_m(t), \triangle u_m(t))) \quad -2 \quad (\xi_{u_m}(t), \triangle u_m(t)) = 0,$$

ou ainda, como $n = 2$, do Lema 1.12 obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + 2\nu(\triangle u_m(t), \triangle u_m(t)) &\leq 2\|\xi_{u_m}(t)\|_2\|\triangle u_m(t)\|_2 \\ &\leq 2C_1\|u_m(t)\|_2^{\frac{1}{2}}\|u_m(t)\|\|\triangle u_m(t)\|_2^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Portanto, usando a desigualdade de Young com $p = 4$ e $q = \dfrac{4}{3}$ temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + 2\nu\|\triangle u_m(t)\|_2^2 &\leq 2C_1\left(\frac{3}{4\nu}\right)^{\frac{3}{4}}\|u_m(t)\|_2^{\frac{1}{2}}\|u_m(t)\|\left(\frac{4\nu}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\|\triangle u_m(t)\|_2^{\frac{3}{2}} \\ &\leq \frac{27C_1^4}{4\nu^3}\|u_m(t)\|_2^2\|u_m(t)\|^4 + \nu\|\triangle u_m(t)\|_2^2,\end{aligned}$$

usando a estimativa 1 concluímos que,

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + \nu\|\triangle u_m(t)\|^2 \leq C_2\|u_m(t)\|^4.$$

Integrando esta desigualdade de 0 a $t > 0$ obtemos:

$$\|u_m(t)\|^2 + \nu\int_0^t \|\triangle u_m(s)\|_2^2 ds \leq \|u_0\|^2 + C_2\int_0^t \|u_m(s)\|^2\|u_m(s)\|^2 ds,$$

mas $\|u_m(t)\|^2 \in L^1(0, \infty)$, então podemos usar a desigualdade de Gronwall obtendo

$$\|u_m(t)\|^2 + \nu\int_0^t \|\triangle u_m(s)\|_2^2 ds \quad \leq \quad \|u_0\|^2 e^{\frac{C_2}{2\nu}\|u_0\|_2^2} \tag{3.83}$$

Estimativa 3

Fazendo $v = 2u_m'(t)$ em (3.81) temos

$$\begin{aligned}2\|u_m'(t)\|_2^2 &= 2\nu(\triangle u_m(t), u_m'(t)) - 2(\xi_{u_m}(t), u_m'(t)) \\ &\leq 2\nu\|\triangle u_m(t)\|_2\|u_m'\|_2 + 2\|\xi_{u_m}(t)\|_2\|u_m'\|_2 \\ &\leq C_3\|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|u_m'(t)\|_2^2 + 2\|\xi_{u_m}(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_m'(t)\|_2^2,\end{aligned}$$

Considerando que $n = 2$, do Lema 1.12 obtemos

$$\begin{aligned}\|u_m'\|_2^2 &\leq C_3\|u_m(t)\|^2 + 2\|\xi_{u_m}(t)\|_2^2 \\ &\leq C_3\|u_m(t)\|^2 + C_4\|u_m(t)\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}^2,\end{aligned}$$

de (3.82) e (3.83) temos que

$$\int_0^t \|u_m'\|_2^2 \leq C_5. \tag{3.84}$$

De (3.83), (3.84) temos que

$$\begin{array}{lll} (u_m)_{m\in\mathbb{N}} & \text{é limitada em} & L^\infty(0,\infty;V), \\ (u_m)_{m\in\mathbb{N}} & \text{é limitada em} & L^2(0,\infty;\mathbb{H}^2(\Omega)), \\ (u_m')_{m\in\mathbb{N}} & \text{é limitada em} & L^2(0,\infty;H). \end{array}$$

Portanto existem uma subsequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $u \in L^\infty(0,\infty;V)\cap L^2(0,\infty;\mathbb{H}^2(\Omega))$ e $u' \in L^2(0,\infty;H)$ tal que

$$u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,\infty:V), \tag{3.85}$$

$$u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^2(0,\infty:\mathbb{H}^2(\Omega)), \tag{3.86}$$

$$u_k' \rightharpoonup u' \quad \text{em} \quad L^2(0,\infty;H). \tag{3.87}$$

Com estas convergências podemos passar o limite de modo idêntico ao Teorema 2.6.

Vamos mostrar que $u(t) \to 0$ em V quando $t \to \infty$. De fato, de (3.69) e que $C_5\|u\|^2 \leq \|\triangle u\|_2^2$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + C_5\nu\|u(t)\|^2 &\leq \frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu\|\triangle u(t)\|_2^2 \\ &\leq 2C_6\|u(t)\|_2^2\|u(t)\|^4 \\ &\leq 2C_6\|u_0\|_2^2\|u(t)\|^4 \\ &= \alpha\|u(t)\|^4. \end{aligned} \tag{3.88}$$

Vamos mostrar que existe t_1 tal que

$$\|u(t_1)\|^2 \leq \frac{\nu C_5}{2\alpha}. \tag{3.89}$$

De fato, suponhamos que (3.89) não acontece, então de (3.82) temos que

$$\|u_0\|_2^2 \geq \|u(t)\|_2^2 + 2\nu\int_0^t \|u(s)\|^2 ds$$

$$
\begin{aligned}
&\geq 2\nu \int_0^t \|u(s)\|^2 ds \geq 2\nu \int_0^t \frac{\nu C_5}{2\alpha} ds \\
&= \frac{\nu^2 C_5}{\alpha} t,
\end{aligned}
$$

o que é impossível para t suficientemente grande.

Denotando $y(t) = \|u(t)\|^2$ temos de (3.88) e (3.89) que

$$
y'(t) + C_5 \nu y(t) \leq \alpha y(t)^2, \tag{3.90}
$$

$$
y(t_1) \leq \frac{\nu C_5}{2\alpha}. \tag{3.91}
$$

Considere $z(t) = y(t)^{-1}$, então $z'(t) = -y(t)^{-2} y'(t)$. Multiplicando (3.90) por $-y^{-2}(t)$ obtemos

$$
\begin{aligned}
-y'(t) y^{-2}(t) - C_5 \nu y^{-2}(t) y(t) &\geq -\alpha y^{-2}(t) y^2(t) \\
z'(t) - C_5 \nu y^{-1}(t) &\geq -\alpha \\
z'(t) - C_5 \nu z(t) &\geq -\alpha.
\end{aligned}
$$

Multiplicando esta desigualdade por $e^{-C_5 \nu (t - t_1)}$ obtemos

$$
\frac{d}{dt}\left(z(t) e^{-C_5 \nu (t - t_1)} \right) \geq -\alpha e^{-C_5 \nu (t - t_1)}.
$$

Integrando esta desigualdade de t_1 a t temos

$$
z(t) e^{-C_5 \nu (t - t_1)} - z(t_1) \geq \frac{\alpha}{C_5 \nu} e^{-C_5 \nu (t - t_1)} - \frac{\alpha}{C_5 \nu} \geq -\frac{\alpha}{C_5 \nu},
$$

ou ainda de (3.91) temos que

$$
z(t) \geq e^{C_5 \nu (t - t_1)} \left(z(t_1) - \frac{\alpha}{C_5 \nu} \right) \geq e^{C_5 \nu (t - t_1)} \left(\frac{2\alpha}{C_5 \nu} - \frac{\alpha}{C_5 \nu} \right) = e^{C_5 \nu (t - t_1)} \frac{\alpha}{C_5 \nu},
$$

disto segue que

$$
\|u(t)\|^2 \leq e^{-C_5 \nu (t - t_1)} \frac{\nu C_5}{\alpha}.
$$

Passando o limite nesta desigualdade quando $t \to \infty$ temos que $\|u(t)\| \to 0$, ou seja, $u(t) \to 0$ em V quando $t \to \infty$. ■

Teorema 3.9 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$,$\nu > 0$, $u_0 \in V$ e $f = 0$. Então existem constantes $0 < T_2 \leq T_3$, uma única função vetorial $u : \Omega \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ e uma função escalar $P : \Omega \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ tais que:*

$$u \in L^\infty(0,T_2;V) \cap L^2(0,T_2,\mathbb{H}^2(\Omega)),\ u' \in L^2(0,T_2,H), \tag{3.92}$$

$$u \in L^\infty(T_3,\infty;V) \cap L^2(T_3,\infty,\mathbb{H}^2(\Omega)),\ u' \in L^2(T_3,\infty,H), \tag{3.93}$$

$$u' - \nu\triangle u + (u\cdot\nabla)u + \nabla P = 0 \ \textit{em}\ L^2(0,T_2,H) \cup L^2(T_3,\infty,H), \tag{3.94}$$

$$u(0) = u_0, \tag{3.95}$$

$$u(t) \to 0 \ \textit{em}\ V \ \textit{quando}\ t \to \infty. \tag{3.96}$$

Dem: De modo análogo ao Teorema 2.6 temos que a formulação variacional

$$u \in L^\infty(0,T_2;V) \cap L^2(0,T_2,\mathbb{H}^2(\Omega)),\ u' \in L^2(0,T_2,H), \tag{3.97}$$

$$u \in L^\infty(T_3,\infty;V) \cap L^2(T_3,\infty,\mathbb{H}^2(\Omega)),\ u^{'} \in L^2(T_3,\infty,H), \tag{3.98}$$

$$(u'(t),v) + \nu((u(t),v)) + (\xi_u(t),v) = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0,T) \ \ \forall\, v \in V, \tag{3.99}$$

$$u(0) = u_0, \tag{3.100}$$

$$u(t) \to 0 \text{ em } V \text{ quando } t \to \infty, \tag{3.101}$$

é equivalente a (3.92) – (3.96). Seja $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dado na observação 3.2, $V_m = [w_1, \cdots, w_m]$ e $u_m(t) \in V_m$ tal que

$$(u_m'(t),w_j) + \nu((u_m(t),w_j)) + (\xi_{u_m}(t),w_j) = 0, \ \ 1 \leq j \leq m, \tag{3.102}$$

$$u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \text{ em } V. \tag{3.103}$$

De (3.102) temos a seguinte equação aproximada

$$(u_m'(t),v) + \nu((u_m(t),v)) + (\xi_{u_m}(t),v) = 0, \forall\, v \in V_m \tag{3.104}$$

<u>Estimativa 1</u>

Tomando $T_2 = T_*$, o Teorema 3.6, garante que para todo $0 \leq t \leq T_2$

$$\|u_m(t)\|^2 \leq 4\|u_0\|^2, \tag{3.105}$$

$$\int_0^t \|\triangle u_m(s)\|_2^2 ds \leq C_1, \tag{3.106}$$

$$\int_0^t \|u_m^{'}(t)\|_2^2 \leq C_2. \tag{3.107}$$

Estimativa 2

Fazendo $v = 2u_m(t)$ em (3.104), notando que $(\xi_{u_m}(t), u_m(t)) = 0$ temos

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + 2\nu\|u_m(t)\|^2 = 0,$$

integrando esta igualdade em $t > 0$ obtemos,

$$\|u_m(t)\|_2^2 + 2\nu\int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds = \|u_m(0)\|_2^2 \leq \|u_0\|^2, \ \forall t > 0,$$

desta desigualdade obtemos que $E = \displaystyle\int_0^\infty \|u_m(t)\|^2 dt \leq \frac{1}{2\nu}\|u_0\|^2$. Multiplicando (3.104) por λ_j obtemos

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + \nu\|\triangle u_m(t)\|_2^2 \leq C_3\|u_m(t)\|^6. \tag{3.108}$$

Considere as seguintes funções: $\phi(t) = \|u_m(t)\|^2$, $\psi(t) = \nu\|\triangle u_m(t)\|_2^2$, $g(t) = C_3 t^3$, e os números reais $\alpha = \dfrac{\nu}{E}$, $\beta = \dfrac{\nu}{EC_3}$. Deste modo, para $\phi \leq \beta$, temos $g(\phi) \leq \alpha\phi^2$ e $\dfrac{d}{dt}\phi(t) + \psi(t) \leq g(\phi(t))$. Aplicando o Lema 1.4 temos que para $t \geq T_3 = \dfrac{E}{\beta}e^{\alpha E}$

$$\|u_m(t)\|^2 \leq \frac{e^{\alpha E} - 1}{\alpha t} = A^2 t^{-1}, \tag{3.109}$$

e

$$\nu\int_t^\infty \|\triangle u_m(s)\|_2^2 ds \leq \frac{e^{2\alpha E} - e^{\alpha E}}{\alpha t} = B^2 t^{-1}. \tag{3.110}$$

Estimativa 3

Fazendo $v = u_m^{'}(t)$ em (3.104) obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_m'(t)\|_2^2 &\leq \nu\|\triangle u_m(t)\|_2\|u_m'\|_2 + \|\xi_{u_m}(t)\|_2\|u_m'(t)\|_2 \\
&\leq 4\nu^2\|\triangle u_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{4}\|u_m'(t)\|_2^2 + 4\|\xi_{u_m}(t)\|_2^2 + \frac{1}{4}\|u_m'(t)\|_2^2,
\end{aligned}$$

ou ainda, como $n = 3$, do Lema 1.12 temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_m'(t)\|_2^2 &\le 4\nu^2\|\triangle u_m(t)\|_2^2 + 4\|\xi_{u_m}(t)\|_2^2\\ &\le 4\nu^2\|\triangle u_m(t)\|_2^2 + 4C_4\|u_m(t)\|^3\|\triangle u_m(t)\|_2\\ &\le 4\nu^2\|\triangle u_m(t)\|_2^2 + 16C_4\|u_m(t)\|^6 + \|\triangle u_m(t)\|_2^2\\ &\le (4\nu^2+1)\|\triangle u_m(t)\|_2^2 + 16C_4\|u_m(t)\|^6.\end{aligned}$$

Integrando esta desigualdade obtemos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_t^\infty \|u_m'(s)\|_2^2 ds &\le (4\nu^2+1)\int_t^\infty \|\triangle u_m(s)\|_2^2 ds + 16C_4\int_t^\infty \|u_m(s)\|^6 ds\\ &\le (4\nu^2+1)B^2t^{-1} + 16C_4\int_t^\infty A^6t^{-3}ds\\ &\le (4\nu^2+1)B^2t^{-1} + 8C_4A^6t^{-2}\\ &\le \left((4\nu^2+1)B^2 + 8C_4A^6t^{-1}\right)t^{-1},\end{aligned}$$

ou ainda

$$\int_t^\infty \|u_m'(s)\|_2^2 ds \le C_5t^{-1}. \tag{3.111}$$

De (3.105), (3.106), (3.107), (3.109), (3.110) e (3.111) tem-se

$$\begin{array}{lll}(u_m)_{m\in\mathbb{N}} & \text{é limitada em} & L^\infty(0,T_2,V),\\ (u_m)_{m\in\mathbb{N}} & \text{é limitada em} & L^2(0,T_2,\mathbb{H}^2(\Omega)),\\ (u_m')_{m\in\mathbb{N}} & \text{é limitada em} & L^2(0,T_2,H),\\ (u_m)_{m\in\mathbb{N}} & \text{é limitada em} & L^\infty(T_3,\infty,V),\\ (u_m)_{m\in\mathbb{N}} & \text{é limitada em} & L^2(T_3,\infty,\mathbb{H}^2(\Omega)),\\ (u_m')_{m\in\mathbb{N}} & \text{é limitada em} & L^2(T_3,\infty,H).\end{array}$$

Portanto existem uma subsequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $u \in L^\infty(0,T_2;V)\cap L^2(0,T_2;\mathbb{H}^2(\Omega))$, $u \in L^\infty(T_3,\infty;V)\cap L^2(T_3,\infty;\mathbb{H}^2(\Omega))$ e $u' \in L^2(0,T_2;H)\cap L^2(T_3,\infty;H)$ tais que

$$u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T_2:V), \tag{3.112}$$

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad L^2(0,T_2:\mathbb{H}^2(\Omega)), \tag{3.113}$$

$$u_k' \rightharpoonup u' \quad \text{em} \quad L^2(0,T_2;H), \tag{3.114}$$

$$u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(T_3,\infty;V), \tag{3.115}$$

$$u_k \rightharpoonup u' \quad \text{em} \quad L^2(T_3,\infty;\mathbb{H}^2(\Omega)), \tag{3.116}$$

$$u_k' \rightharpoonup u' \quad \text{em} \quad L^2(T_3,\infty;H). \tag{3.117}$$

Com estas convergências podemos passar o limite de modo idêntico ao Teorema 2.6. Tomando o limite em (3.109) quando $t \to \infty$ tem-se $u(t) \to 0$ em V, mostrando (3.96).

Bibliografia

[1] R. A. ADAMS, **Sobolev Spaces**, Academic Press, New York 1975.

[2] H. BRÉZIS, **Analyse Fonctionnelle - théorie et applications**, Masson, Paris, 1983.

[3] E. A. CODDINGTON e N. LEVINSON, **Theory of Ordinary Differential Equations**, McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.

[4] P. CONSTANTIN, **A few results and open problems regarding incompressible fluids**, Notices of the AMS, **42** (1995), 658-663.

[5] L. EULER, **Principes géneraux du mouvement des fluides**, Mém. Acad. Sci. Berlin **11** (1755), 274-315.

[6] C. L. FEFFERMAN, **Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation**, Clay Mathematics Institute, 2000.

[7] C. FOIAS, **Statistical study of the Navier-Stokes initial value problem**, I, Rend. Sem. Math. Un. Padova 48 (1973), 219-348.

[8] C. FOIAS e R. TEMAM, **Gevrey classregularity for the solutions of the Navier-Stokes equations**, J. Funct. Anal., 87 (1989), p. 359-369.

[9] C. FOIAS e G. PRODI, **Sur le comportement global des solutions non-stationnaries des équations de Navier-Stokes en dimension 2**, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **39** (1967), 1-34.

[10] J. G. HEYWOOD, **The Navier-Stokes Equations: On the Existence, Regularity and Decay of Solutions**, Indiana University Mathematics Journal ©, Vol. 29 N. 5(1980).

[11] E. HOPF, **Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen**, Math. Nachr. **4** (1951), 213-231.

[12] C. S. HÖNIG, **Aplicações da topologia à Análise**, IMPA, CNPq 1976.

[13] O. A. LADYZHENSKAYA, **Attactors for Semigroups and Evolution Equations**, Accademia Nazionale dei Lincei Series, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[14] J. LERAY, **Étude de diverses équations intégrales non linéares et de quelques problems que pose l'hydrodynamique**, J. Math. Pures Appl. (9) **12** (1933), 1-82.

[15] J. L. LIONS, **Quelques Méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires**, Dunod, Paris, 1969.

[16] J. L. LIONS e E. MAGENES **Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1972 Vol. 1.

[17] L. A. MEDEIROS, **Espaços de Sobolev**, Rio de Janeiro, IM-UFRJ, 2000.

[18] L. A. MEDEIROS, **A integral de Lebesgue**, Textos de Métodos Matemáticos 18, Rio de Janeiro, IM-UFRJ, 1989.

[19] M. M. Miranda, **Análise Espectral em Espaços de Hilbert**, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1990.

[20] C. L. M. H. NAVIER, **Mémoire sur les lois du mouvement des fluides**, Mém. Acad. Sci. Inst. France **6** (1822), 389-440.

[21] R. TEMAM, **Navier-Stokes Equations - Theory and Numerical Analysis**, North-Holland-Amsterdam, 1985.

[22] R. TEMAM, **Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis**, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2nd ed. 1995.

[23] K. YOSIDA, **Functional Analysis**, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[24] **Notices of the american Mathematical Society**, Volume 50, Number 1, January 2003, 7-13.

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo