

**ANÁLISE DE LAJES PLANAS PROTENDIDAS PELO
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Alexandre Caio Milani

Porto Alegre
Novembro de 2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

ALEXANDRE CAIO MILANI

**ANÁLISE DE LAJES PLANAS PROTENDIDAS PELO
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em
Engenharia na modalidade Acadêmico

Porto Alegre
Novembro de 2006

ALEXANDRE CAIO MILANI

**ANÁLISE DE LAJES PLANAS PROTENDIDAS PELO
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título
de Mestre em Engenharia na modalidade Acadêmico.

Porto Alegre, 21 de novembro de 2006

Prof. Eduardo Bittencourt
Dr. pela Univ. Federal do Rio Grande do Sul
Orientador

Profa. Virgínia Maria Rosito d`Avila
Dra. pela Univ. Federal do Rio Grande do Sul
Co-Orientador

Prof. Rubem C. Schwingel
Msc. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Colaborador

Prof. Fernando Schnaid
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Luiz Antônio Bragança da Cunda (UFP)
Dr. pelo PPGEC / Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Inácio Benvegnu Morsch (UFRGS)
Dr. pelo PPGEC / Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Roberto Domingo Rios (UFRGS)
Dr. pelo PPGEC / Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Dedico esta dissertação a todos que me ajudaram, me apoiaram ou pelo menos torceram por mim para que eu um dia obtivesse esta conquista tão árdua, mas tão recompensadora, que é se tornar um mestre.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à UFRGS, ao PPGEC e a CAPES pela bolsa de estudos que possibilitou a minha total dedicação aos meus estudos para alcançar os resultados objetivados no início deste trabalho.

Agradeço à Prof. Virgínia d'Ávila, minha paciente e esforçada co-orientadora como doutora em engenharia, pelo apoio e conhecimento nos momentos mais críticos, ao professor e grande mestre Eduardo Bittencourt, como doutor em engenharia, pela grande auxílio prestado, e ao sábio Prof. Rubem C. Schwingel, mestre em engenharia e referência quando se trata do assunto protensão, colaborador deste trabalho, pelos ensinamentos proferidos, e muitos outros professores que me ajudaram de maneira grandiosa.

Agradeço enormemente à minha esposa, Estéfani Sandmann de Deus, que agüentou meus medos, meus maus humores, meus fiascos e que me deu força, ânimo, entusiasmo, alegria e vontade de terminar este trabalho. Ela é a grande propulsora da minha vida!

Agradeço à família, aos meus irmãos Gabriel Milani e Rafael Milani, à minha irmã Adriana Milani, e aos verdadeiros mestres da minha vida, os meus pais Arielson Milani e Neiva Regina Rosa Milani pelo suporte e apoio em todos os momentos que eu precisei.

Agradeço aos meus colegas, em especial o Klaus Machado Theisen, grande e fiel amigo, pelas muitas horas de paciência e pela ajuda e informação na hora certa.

É certo que não posso colocar o nome de todos, mesmo querendo. Portanto, a todos aqueles que contribuíram com esta dissertação, meu muito obrigado.

“Lutar sempre, vencer se possível, desistir jamais.”

Desconhecido

RESUMO

MILANI, A.C. **Análise de Lajes Planas Protendidas pelo Método dos Elementos Finitos.** 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Na construção civil atual, existe uma tendência de crescimento da automatização do projeto, visando o desenvolvimento de soluções personalizadas a fim de fugir das indesejadas repetições arquitetônicas. Dentro desta tendência, as lajes planas protendidas proporcionam grande flexibilidade de *layout*, maior rapidez na execução da estrutura e diminuição do número de pilares, proporcionando ganhos de área útil. Um dos principais esquemas estruturais adotados para representar lajes planas protendidas é a laje lisa, com ou sem engrossamento na região dos pilares. As lajes lisas apresentam vantagens em relação às demais (nervuradas e outras), sobretudo do ponto de vista da facilidade de execução.

Esta dissertação apresenta um modelo numérico para o cálculo de lajes planas lisas protendidas via Método dos Elementos Finitos. O elemento finito empregado, isoparamétrico com 8 nós, possui 5 graus de liberdade por nó os 3 graus de liberdade referentes a teoria de Flexão de Placas de Reissner-Mindlin e os 2 graus de liberdade relativo ao Estado Plano de Tensões. A protensão é considerada através do Método de Equilíbrio de Cargas (criado por T. Y. Lin e utilizado por AALAMI (1990)), que consiste na transformação dos esforços devido aos cabos protendidos em um conjunto de cargas equivalentes. Também é proposto um modelo de cálculo para determinação da posição do cabo de protensão em elevação e das perdas imediatas da força de protensão (perdas por atrito e recuo das ancoragens). São analisadas as tensões de serviço, para verificação da deformação, e as tensões últimas a que a laje protendida pode estar submetida, para o dimensionamento das armaduras ativa e passiva.

Palavras-chave Elementos Finitos; Lajes Planas Lisas; Concreto Protendido

ABSTRACT

MILANI, A.C. **Analysis of pre-tensioned plates by the Finite Element Method**. 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

There is a recent trend, in Civil Engineering, toward automatized projects, aiming at the development of personal solutions, avoiding undesirable design repetitions. As an example, pre-tensioned plane plates give great layout flexibility, faster structural execution and reduction of the number and cross section of pillars, resulting in gains in the net area of the construction. One of the most common structures used as pre-tensioned plates is the flat slab, with or without enlargements near the pillars. The flat slab have advantages related to others (ribbed and others) mainly regarding its easier execution.

These work presents a numerical model to calculate pre-tensioned flat slab by the Finite Element Method. The finite element used, isoparametric with 8 nodes, has 5 degrees of freedom per node 3 degree of freedom regarding the Reissner-Mindlin's plate bending theory and the 2 remaining regarding the plane stress state. The pre-tension is considered through the Load Equilibrium Method (created by T. Y. Lin and used AALAMI (1990)). The method consists in the transformation of loads due to pre-tensioned cables in one assemble of equivalent loads. Also, it is proposed a calculus model to determine the pre-tensioned cable elevation and the instantaneous losses of the pre-tensioned forces (losses by friction and partial retreat of the anchorage). The stress and deformation in service are analyzed as well as the ultimate stresses of the pre-tensioned plate can be subjected are verified, in order to design active and passive reinforcements.

Key-words: Finite elements; Flat slab; reinforced concrete

SUMÁRIO

RESUMO	vii
ABSTRACT	viii
LISTA DE FIGURAS	xi
LISTA DE TABELAS	xiii
LISTA DE SÍMBOLOS	xiv
1 - Introdução	1
1.1 – Descrição do Trabalho	1
1.2 – Objetivos	2
1.3 – Revisão Bibliográfica	4
2 - Método dos Elementos Finitos (MEF)	6
2.1 – Elementos Finitos para Análise de Lajes	6
2.2 – Teoria do Elemento Empregado	9
2.2.1 – Teoria de Mindlin	9
2.2.2 - Elemento de Placa Reissner-Mindlin	15
2.2.3 – Inclusão dos Graus de Liberdade do EPT	27
2.3 – Inclusão dos Vínculos Elásticos	34
2.4 – Tensões na Armadura Passiva	36
3 - Considerações sobre a Protensão	37
3.1 – Introdução à Protensão	37
3.2 - Lajes Planas Protendidas	41
3.2.1 - Esbeltez das Lajes Protendidas	42
3.2.2 - Distribuição dos Cabos em Planta	42
3.2.3 - Traçado Vertical dos Cabos	44
3.2.4 – Graus de Protensão	46
3.2.5 - Dimensionamento e Verificações	47
3.3 – Formas de Considerar a Protensão e o Método de Equilíbrio de cargas	49
3.3.1 – Consideração da Protensão como Elementos Finitos de Armadura	49
3.3.2 – Consideração da Protensão como Carga (Método de Equilíbrio de Cargas)	51
3.4 – Determinação do Carregamento de Protensão	52

3.4.1 – Posição dos Cabos Protendidos	52
3.4.2 – Valor da Força de Protensão	60
3.4.3 – Perdas Imediatas da Força de Protensão	61
3.4.4 – Carregamento Final de Protensão no Instante Inicial do Ato da Protensão	64
3.4.4.1 – Determinação do Carregamento da Protensão na Malha de Elementos Finitos	66
3.5 – Análise das Tensões em Serviço	69
3.5.1 – Esforços Devidos à Carga Externa	69
3.5.2 – Esforços Devidos a Protensão	74
3.5.3 – Combinações de Carga Para os Estados Limites de Utilização	74
3.5.4 – Verificação das Tensões Normais de Borda	77
3.6 – Estado Limite de Utilização	77
3.6.1 – Calculo das Forças Hiperestáticas	80
3.6.2 – Determinação da Armadura Passiva	82
3.7 – Considerações Finais	86
4 - Resultados	90
4.1 – Placa Elástica Linear	90
4.2 – Deslocamentos e Tensões com Aplicação de Carga de Membrana	95
4.3 – Traçado do Cabo	99
4.4 – Laje Protendida	104
5 – Conclusões e Sugestões Para Trabalhos Futuros	119
5.1 – Sugestões Para Pesquisas Futuras	120
Referências	121

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Fluxograma de Análise de Lajes via MEF	06
Figura 2.2 – Geometria do elemento isoparamétrico quadrático	09
Figura 2.3 – Deslocamentos no plano da laje	10
Figura 2.4 - Convenção adotada para as tensões existentes	14
Figura 2.5 - Elemento de placa com forças atuando normalmente à sua superfície média e momentos atuando na mesma	16
Figura 2.6 - Componentes de tensão atuantes em um elemento infinitesimal de placa	17
Figura 2.7 - Sentidos positivos dos deslocamentos e das rotações do elemento de placa	18
Figura 2.8 – O elemento isoparamétrico empregado	19
Figura 2.9 – Numeração dos pontos de integração	20
Figura 2.10 - Representação das deformações e distorções ao longo da espessura	33
Figura 2.11 – Convenção de sinais para o momento e esforços cortantes	34
Figura 3.1 – Detalhe da placa de ancoragem utilizada para cordoalhas engraxadas	38
Figura 3.2 – Exemplo de distribuições das tensões em uma viga protendida	39
Figura 3.3 – Representação das faixas limitadas pelo esforço cortante nulo	41
Figura 3.4 – Distribuição dos Cabos de Protensão em uma laje plana	43
Figura 3.5 – Distribuição de cabos concentradas em faixas.	43
Figura 3.6– Distribuição de cabos utilizada neste trabalho	44
Figura 3.7– Traçado vertical do cabo em uma viga contínua esquemática	45
Figura 3.8 – Cálculo das coordenadas dos pontos de inflexão – concordância entre duas parábolas do 2º grau para cabos com declividade decrescente	45
Figura 3.9 – Cálculo das coordenadas dos pontos de inflexão – concordância entre duas parábolas do 2º grau para cabos com declividade crescente	46
Figura 3.10 – Representação da geometria de uma armadura discretizada pelo modelo incorporado	50
Figura 3.11– Esforços devidos ao cabo de protensão considerados como um carregamento ao longo de cada trecho de parábola	51
Figura 3.12 – Denominação das variáveis utilizadas para se definir a geometria	52
Figura 3.13 – Representação dos eixos x locais	55
Figura 3.14 – Cálculo da influência da cravação	63
Figura 3.15– Fluxograma do processo de carregamento dos elementos	68
Figura 3.16 – Exemplo da configuração de zonas de carregamento em uma laje	68
Figura 3.17 – Modelo de discretização de uma estrutura a ser analisada através da metodologia proposta	70

Figura 3.18 – Denominação das coordenadas dos pontos de integração	71
Figura 3.19 – Cortante Q_y em uma placa com carregamento uniforme	72
Figura 3.20 – Linhas sinuosas que unem pontos de esforço cortante Q_y igual à zero	72
Figura 3.21 – Linhas que representam regiões de obtenção de momentos para dimensionamento dos cabos de protensão	73
Figura 3.22 – Representação das resultantes atuantes em uma laje protendida	82
Figura 4.1 – Placa utilizada na comparação entre os programas	90
Figura 4.2 – Malhas utilizadas para a comparação dos esforços	93
Figura 4.3 – Comparação dos Esforços Cortantes Q_y	94
Figura 4.4 – Comparação dos Momentos Fletores M_y	94
Figura 4.5 – Representação da discretização da laje e nós analisados	95
Figura 4.6 – Resultados obtidos do SAP 2000 para o momento na direção y	96
Figura 4.7 – Resultados obtidos do modelo proposto para o momento na direção y	96
Figura 4.8 – Resultados obtidos do SAP 2000 para o momento na direção x	97
Figura 4.9 – Resultados obtidos do modelo proposto para o momento na direção x	97
Figura 4.10 – Resultados obtidos do SAP 2000 para o cortante na direção y	98
Figura 4.11 – Resultados obtidos do modelo proposto para o cortante na direção y	98
Figura 4.12 - Resultados obtidos do SAP 2000 para o cortante na direção x	99
Figura 4.13 – Resultados obtidos do modelo proposto para o cortante na direção x	99
Figura 4.14 – Laje considerada no terceiro exemplo	100
Figura 4.15 - Traçado do Cabo para a Laje TT. No eixo y estão representadas as ordenadas do cabo em metros e no eixo x, a escala numérica representa o comprimento da laje	103
Figura 4.16 – Perdas devidas ao atrito ao longo do cabo ($\Delta\sigma_p^m$). No eixo y aparecem as perdas em tf e no eixo x está representado o comprimento da laje	103
Figura 4.17 – Laje T	104
Figura 4.18 – Linha 3 de referência para a plotagem dos esforços	106
Figura 4.19 – Esforço Cortante na linha 3	106
Figura 4.20 – Momento Fletor (M_y) ao longo da linha 3	107
Figura 4.21 – Zonas de Carregamento ao longo da laje	109
Figura 4.22 – Plotagem dos M_y devidos aos cabos protendidos na laje T	110
Figura 4.23 – Pontos de onde foram extraídos os esforços combinados	113
Figura 4.24 – Ordenadas dos Cabos	117
Figura 4.25 – Perdas imediatas da força de protensão do cabo em tf	117
Figura 4.26 – Representação das faixas e zonas de carregamento distintas devidas à protensão	118

Figura 4.27 – Distribuição dos cabos protendidos paralelos ao eixo y

118

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 Espessuras de lajes lisas protendidas com cordoalhas engraxadas (Emerick, 1990)	42
Tabela 4.1 – Valores dos deslocamentos nodais	91
Tabela 4.2 – Correlação dos deslocamentos	92
Tabela 4.3 – Abscissas do cabo, derivadas acumuladas, perdas por atrito, ordenadas do cabo e derivadas das ordenadas do cabo	103
Tabela 4.4 – Carregamentos Devidos aos Cabos	109
Tabela 4.5 – Tensões em serviço para a quantidade de cabos escolhida	112
Tabela 4.6 – Deslocamentos cada carregamento	114
Tabela 4.7 – Esforços utilizados nas combinações no Estado Limite Último e tensões resultantes	114
Tabela 4.8– Obtenção da Armadura Passiva	114
Tabela 4.9 – Abscissas do cabo e as perdas imediatas totais	116

γ_p é o coeficiente de majoração das cargas devidas à protensão

γ_q é o coeficiente de majoração das cargas variáveis

γ_{xz} : componente das distorções em torno do eixo x devido ao esforço cortante

γ_{yz} : componente das distorções em torno do eixo y devido ao esforço cortante

μ : coeficiente de atrito

θ_x giro em torno do eixo y

θ_y giro em torno do eixo x

ρ_p é a taxa geométrica da armadura ativa;

σ_c matriz de tensões resultante do esforço cortante

σ_{cabo} tensão na seção de concreto em cada faixa de laje devida aos cabos

σ_{ept} matriz de tensões resultante do estado plano de tensões

σ_f tensões em uma faixa

σ_{hip} tensão devida ao momento hiperestático

σ_m matriz de tensões resultante do momento fletor

σ_{pu} tensão atuante na armadura ativa

σ_{xx} componente da tensão resultante da deformação ϵ_{xx} .

σ_{xz} componente da tensão resultante da distorção γ_{xz}

σ_{yy} componente da tensão resultante da deformação ϵ_{yy}

σ_{yz} componente da tensão resultante da distorção γ_{yz}

σ_{zz} componente da tensão resultante da deformação ϵ_{zz}

A_f área da seção de concreto de cada faixa

A_f área da seção de concreto de cada faixa

A_p é a área de armadura ativa

A_s é a área de armadura passiva

\mathbf{B} : matriz das relações deformação-deslocamento

b é a largura da seção de laje considerada

b_c é a largura da mesa de compressão;

\mathbf{B}_c matriz derivada das funções de interpolação para o esforço de corte

\mathbf{B}_{ept} matriz derivada das funções de interpolação para o estado plano de tensões

\mathbf{B}_m matriz derivada das funções de interpolação para a flexão

COB cobrimento da armadura de protensão

\mathbf{D} matriz das relações constitutivas

d ordenada dos pontos de inflexão do cabo

\mathbf{D}_c : matriz constitutiva de corte

\mathbf{D}_{ept} matriz constitutiva do estado plano de tensões

\mathbf{D}_m matriz constitutiva de flexão

d_p é a altura útil referida à armadura ativa.

E módulo de elasticidade do concreto

E_p módulo de elasticidade do aço de protensão

\mathbf{F} vetor de forças nodais da estrutura

\mathbf{F}^e vetor de forças nodais do elemento

F_i força nodal na direção do i -ésimo grau de liberdade

F_1, F_2 e F_3 flechas de um vão

FATORW porcentagem da carga total a equilibrar com a protensão

f_c é a tensão limite de compressão na área de concreto comprimido

$F_{d,ut}$ combinação de carregamento de utilização

$F_{elu,k}$ carregamento considerado para a análise no Estado Limite Último

F_g esforço que representa a solicitação permanente

$F_{g,k}$ combinação de carregamento permanente de cálculo

$f_{nó}$ é a força aplicada em cada nó indicado

F_p esforço que representa a solicitação devido à protensão

F_q :esforço que representa a solicitação variável

$F_{q,k}$ combinação de carregamento variável

f_{yd} é a tensão de escoamento da armadura passiva

h espessura da lajeou elemento considerado

I_s é o momento de inércia da seção da laje

J: matriz jacobiana para mudança de coordenadas

K matriz de rigidez da estrutura

\mathbf{K}^e matriz da rigidez do elemento

\mathbf{K}^g matriz de rigidez do elemento em relação aos eixos globais

\mathbf{K}_{cij}^e matriz de rigidez do esforço de corte

\mathbf{K}_{ept}^e matriz de rigidez do estado plano de tensões

\mathbf{K}_{mij}^e matriz de rigidez do momento fletor

K_{TX} componente da rigidez do grau de liberdade θ_x

K_{TY} componente da rigidez do grau de liberdade θ_y

K_U componente da rigidez do grau de liberdade u

K_V componente da rigidez do grau de liberdade v

K_W componente da rigidez do grau de liberdade w

$L_{11}, L_{12}, L_{13}, L_1, L_2, L_3, L_4, L_{U1}, L_{U2}$ e L_{U3} trechos ou partes de um vão

L_f = largura da faixa delimitada pelo esforço cortante nulo

L_f largura da faixa delimitada pelo esforço cortante nulo

$L_{INICIAL}$ e L_{FINAL} vão da laje entre pilares

L_x vãos de uma laje paralelos ao eixo x

L_y vãos de uma laje paralelos ao eixo y

M_i valor do momento integrado em uma faixa

M_p momento fletor devido a protensão

M_x momento fletor em torno do eixo y

M_{xx} momento obtido da integração da tensão σ_{xx} .

M_{xy} momento obtido da integração da tensão σ_{xy}

M_y momento fletor em torno do eixo x

M_{yy} momento obtido da integração da tensão σ_{yy}

N_i^e função de interpolação do elemento finito

NSV número de seções analisadas por vão

P : Força de protensão atuante no cabo

P força de protensão no cabo devido ao carregamento da laje à equilibrar

P_i vetor das forças atuantes na estrutura

q carregamento uniforme total atuante na laje

q Carregamento uniforme total atuante na laje

Q_{PIX} vetor que armazena o esforço cortante em uma linha definida por Y_{LIN}

Q_{PIY} vetor que armazena o esforço cortante em uma linha definida por X_{LIN}

Q_x esforço cortante na direção x

Q_y esforço cortante na direção y

R matriz de rotação do elemento, dependente de sua posição em relação ao sistema global de eixos

R_{cc} é a resultante de forças da área comprimida de concreto

R_{pt} é a resultante de forças da armadura ativa

R_{st} é a resultante de forças da armadura passiva

T_R trecho reto do cabo

U^e vetor de deslocamentos nodais do elemento

U vetor de deslocamentos nodais da estrutura

U_i^e vetor de deslocamentos nodais da estrutura ou laje

U_i energia de deformação

u_x deslocamento na direção do eixo x

u_y deslocamento na direção do eixo y

W_{ELE} armazena o valor da carga distribuída em todos elementos

W_{FAX} vetor que representa os carregamentos em uma faixa paralela a x

W_{FAY} vetor que representa os carregamentos em uma faixa paralela a y

W_i carregamento em cada trecho de laje de um vão intermediário

W_{ii} carregamento em cada trecho de laje de um vão inicial

W_{si} módulo resistente da seção de laje considerada

W_{ui} carregamento em cada trecho de laje de um vão final

X vetor que armazena a coordenada x de cada nó de coordenada $y = 0$

X_{acum} vetor das abscissas do cabo

X_{cz} é o vetor que armazena os pontos ao longo de uma linha onde o esforço cortante é nulo

X_i : vetor que armazena as abscissas do cabo em um vão intermediário

X_{ii} : vetor que armazena as abscissas do cabo em um vão inicial

X_L vetor que armazena as abscissas dos pontos de integração

X_{LIN} representa cada linha de pontos de integração paralela a y

x_{LN} é a posição da linha neutra em relação à borda comprimida da laje

X_{ui} : vetor que armazena as abscissas do cabo em um vão final

X_{ZON} matriz que armazena as coordenadas e os carregamentos de uma zona de cargas

Y'_{acum} vetor das derivadas da posição do cabo

Y'_i derivada da posição do cabo

Y_c ordenada do ponto de inflexão do cabo

Y_{CZ} : vetor que guarda a coordenada de um ponto onde o cortante vale zero

Y_i vetor que indica a posição vertical do cabo em um vão intermediário

Y_{ii} vetor que indica a posição vertical do cabo em um vão inicial

Y_{LIN} representa cada linha de pontos de integração paralela a y

Y_M vetor que armazena o valor dos momentos em uma linha definida por X_{LIN}

Y_{MAX}

Y

1 - Introdução

1.1 – Descrição do Trabalho

Nos últimos tempos, as lajes planas estão sendo cada vez mais empregadas na construção civil devido ao fato de permitirem um melhor aproveitamento dos espaços, já que as mesmas são apoiadas diretamente sobre os pilares, não necessitando de vigas. O correto emprego destas lajes vem sendo ampliado graças às modernas técnicas de análise estrutural, que tornam possível a correta determinação dos esforços, que são a base do dimensionamento destas estruturas.

Este trabalho apresenta um modelo numérico, via Método dos Elementos Finitos (MEF), capaz de simular o comportamento de lajes planas protendidas. A análise de lajes protendidas através do MEF é um assunto que, embora amplamente estudado, ainda necessita ser analisado. O elemento finito utilizado é o isoparamétrico de oito nós com cinco graus de liberdade nodais deslocamentos u e v (estado plano), o deslocamento w e as rotações θ_x e θ_y (flexão de placas). A protensão é considerada através do método de equilíbrio de cargas (ou cargas equivalentes) originalmente proposto por T. Y. Lin (1963) e utilizado por AALAMI (1990). A seguir, no item 1.2 expõe-se os objetivos deste trabalho. No item 1.3, são citados alguns modelos de cálculo utilizados para resolver o problema estrutural das lajes, de uma forma genérica.

No segundo título, faz-se uma revisão da parte tm

que ao se escolher um elemento, deve-se ter em conta as limitações e as potencialidades do mesmo.

No terceiro capítulo, apresentam-se os conceitos fundamentais no estudo da protensão. Inicia-se com uma simples descrição sobre o conceito da protensão em lajes, as vantagens do sistema protendido e algumas características inerentes a estas estruturas. São feitas considerações sobre o traçado dos cabos protendidos e as diretrizes de dimensionamento dos mesmos. As formas como considerar a protensão e sua relação com o MEF, explicando-se como a protensão pode ser considerada como uma combinação de carregamentos, através do método de equilíbrio de cargas. Na seqüência, apresenta-se o modelo proposto para analisar as lajes protendidas, desde a consideração do traçado dos cabos, bem como pela derivação das funções que indicam as ordenadas dos mesmos e o cálculo da força de protensão no cabo devido ao carregamento da laje a equilibrar. Será feito um detalhamento das tensões existentes e também das combinações de carregamento de serviço e das combinações últimas de cálculo. Os limites de tensões de norma para lajes protendidas, as perdas imediatas da força de protensão e a distribuição do carregamento da protensão na malha de elementos finitos são apresentados. Finalizando, explica-se sobre a obtenção dos momentos hiperestáticos da protensão.

No quarto capítulo apresentam-se os resultados obtidos pelo modelo implementado e, também, algumas comparações com outros programas. Mostra-se um exemplo sobre o

a) Primeira parte Implementação do elemento finito de placa com a consideração dos esforços na direção da superfície média. Dentro da primeira parte, foi implementado um elemento finito de placa para lajes planas. Este elemento foi implementado segundo a teoria de Mindlin para lajes espessas, que contempla 3 graus de liberdade nodais (uma translação perpendicular ao plano da laje e duas rotações). Para se considerar os esforços paralelos ao plano da placa implementou-se a formulação do elemento de Estado Plano de Tensões. O programa fornece, além dos deslocamentos nodais da superfície média, as tensões e deformações nos pontos de integração tanto na superfície média como ao longo da espessura da placa. É feita a consideração de vínculos elásticos.

b) Segunda parte Consideração dos esforços devido à protensão. A segunda parte consiste na implementação da protensão no elemento descrito na parte a), através da transformação dos esforços devido aos cabos protendidos em um conjunto de cargas. Em outras palavras, foi necessário implementar no programa o método de balanço ou equilíbrio de cargas criado por T. Y. Lin (1963) e desenvolvido por AALAMI (1990). Em uma etapa seguinte, foi implementado o cálculo iterativo das deformações e tensões do conjunto laje-cabos de protensão. Finalmente, fez-se a implantação das perdas imediatas da força de protensão, que são as perdas por atrito e por recuo de ancoragem. As perdas ao longo do tempo, como a perda por fluência do concreto ou ainda pela relaxação dos cabos de protensão não são analisadas.

Visando alcançar os objetivos expostos acima, foi implementado o elemento Mindlin conjugado com estado plano de tensões. Empregou-se integração seletiva com 3x3 pontos de Gauss para a flexão e 2x2 pontos de Gauss para o cortante. As tensões de membrana são integradas num esquema com 3x3 pontos de Gauss. Em relação à segunda parte do trabalho, foram desenvolvidas uma série de etapas que serão descritas a seguir. Inicialmente, percorre-se linhas de pontos de integração em busca dos valores de esforços cortantes e momentos fletores. Onde o esforço cortante se anula, é traçada uma linha imaginária que delimita as parcelas de carga que irão para cada apoio da estrutura, delimitando faixas. Cada faixa é analisada separadamente com o intuito de dimensionar o número de cabos de protensão necessários para equilibrar determinada parcela de carregamento aplicado. Após definido o número de cabos, testa-se a laje em relação ao estado limite de serviço e calculam-se as perdas do esforço de protensão. Posteriormente verifica-se a laje em relação ao estado limite último, através da análise dos momentos hiperestáticos de protensão conjugados com os demais carregamentos.

1.3 – Revisão Bibliográfica

Muitos trabalhos recentemente realizados contemplam o tema em estudo ou variações do mesmo. Uma introdução geral ao método é apresentada na dissertação de mestrado de SANTOS (1975) e nas notas de aula de JOUGLARD (2002). Uma importante referência sobre os possíveis métodos de cálculo e suas origens é apresentada na tese de doutorado de PINHEIRO (1988).

Como uma tentativa de solucionar o problema da enorme complexidade das soluções exatas para as lajes planas, foram surgindo os métodos que empregam funções aproximadas em substituição às soluções analíticas. Dentre os métodos aproximados existentes, pode-se citar

a) Cálculo por Diferenças Finitas: Surgiu em paralelo com os computadores, onde a aplicação é geral e conduz o problema à resolução de um sistema de equações lineares. Maiores detalhes sobre este método podem ser encontrados em trabalhos como o de COOK (1989).

b) Método da Variação da Energia Potencial Total: Este é outro método utilizado para o cálculo de deslocamento de placas. Através de séries duplas finitas de produtos de funções ortogonais desenvolvidas por VLASOV, que gera um sistema de equações desacopladas, de simples solução é possível obter os deslocamentos da estrutura analisada. Este método está exemplificado e detalhado por KULYSZ (1982).

c) Método da Série de Fourier: O cálculo de flechas em lajes maciças de concreto armado através da Transformada de Fourier e desenvolvido por CAMELO (1976).

d) Experimentação e Utilização de Modelos Reduzidos: Outra maneira, porém bastante cara, de obtenção de resultados de deformações e tensões em lajes, é o método da experimentação. Este método, que geralmente faz uso de modelos em escala reduzida, pode ser analisado e melhor entendido em uma enorme quantidade de trabalhos, tais como os de BATISTA (1984), BARTH (1984) e SELISTRE (2000).

e) **Outros Procedimentos:** PINHEIRO (1988) ainda aponta outros métodos utilizados para o cálculo de placas, tais como o Método de Marcus, o Método das Faixas Finitas, e o Processo dos Elementos de Contorno.

f) **Método dos Elementos Finitos:** O método dos elementos finitos, é amplamente utilizado na solução de placas. Como é o método empregado neste trabalho, será detalhado no capítulo 2. A seguir, apresentam-se alguns trabalhos desenvolvidos no PPGEC e que empregam este método.

A não linearidade física e geométrica conjugada à plasticidade é estudada por GOMES (1990). REAL (1990) implementou a não linearidade física no elemento quadrilátero Serendipity de oito nós. TAMAGNA (1982) concilia a teoria de elementos finitos de Mindlin com a dinâmica das estruturas. Modelos elastoplásticos para o Concreto são apresentados por MARTINELLI (2003) em sua dissertação de mestrado.

D'AVILA (1990) desenvolveu um modelo laminar para análise não-linear de cascas de concreto armado.

Atualmente calculam-se lajes protendidas através de softwares comerciais, como por exemplo o TQS e o ADAPT, que podem usar o modelo de grelhas e também elementos finitos. Estes são programas consagrados e complexos, tanto do ponto de vista da análise como no aspecto de demonstração de resultados gráficos e numéricos.

2 - Método dos Elementos Finitos (MEF)

2.1 – Elementos Finitos para Análise de Lajes

Dentro do MEF existe uma ampla gama de possíveis aplicações, variando o tipo de elemento a ser utilizado, (de acordo com o fluxograma apresentado na Figura 2.1) para resolver um mesmo tipo de placa ou laje.

A seguir se fará uma breve revisão sobre algum dos muitos tipos de elementos existentes na bibliografia.

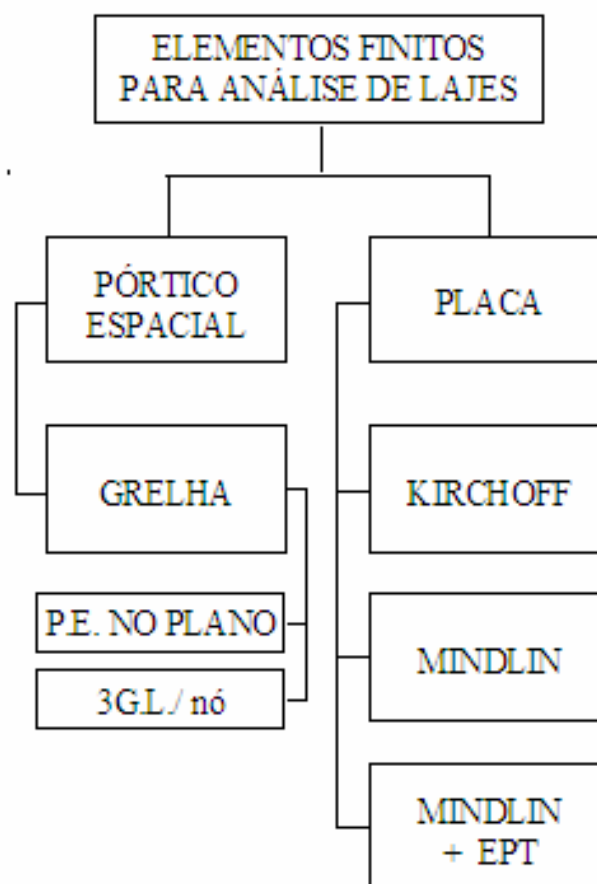


Figura 2.1 – Fluxograma de Análise de Lajes via MEF.

a) Pórtico Espacial no Plano: O pórtico espacial é o resultado da junção da grelha de 3 graus de liberdade nodais com o pórtico plano, que também apresenta 3 graus de liberdade nodais. A seguir se explicará melhor cada um destes modelos estruturais.

– **Grelha:** Modela-se a grelha com elementos isoparamétricos ou subparamétricos de barra, constituídas predominantemente de dois ou três nós por barra e com funções de interpolação lineares ou quadráticas. Os graus de liberdade que atuam em cada nó são duas rotações ao

redor dos eixos principais de inércia X e Y, que resultarão no momento fletor e torçor e uma translação no sentido perpendicular da grelha, que representa o deslocamento que ocasiona a flecha da estrutura. É possível modelar uma laje como se fosse uma grelha. A solução por grelha converge para a solução exata à medida que se aumenta o número de barras e se diminui a área de cada quadrado formado pelas barras da grelha dispostas nas duas direções.

– **Pórtico Espacial no Plano com Cinco Graus de Liberdade por Nó:** É análogo à grelha apresentada no tópico anterior. A estrutura está toda no mesmo plano, e os elementos utilizados são elementos finitos isoparamétricos ou subparamétricos de barra, constituídas predominantemente de 2 ou 3 nós por barra e com funções de interpolação lineares ou quadráticas. A diferença primordial é que esta “grelha” admite cargas no plano da laje, o que é essencial para a simulação da protensão, que através da tensão nas cordoalhas induz a laje a carregamentos no seu próprio plano. Os 5 graus de liberdade presentes, portanto, são 3 translações, uma para cada direção no espaço (x, y, z) e duas rotações em torno do eixo x e do eixo y.

b) Placa

Os elementos de placa podem ser genericamente divididos em 2 grandes grupos: os baseados na teoria de Kirchhoff e os baseados na teoria de Mindlin. A principal diferença entre as teorias é a consideração da deformação pelo esforço de corte na teoria de Mindlin. Pela teoria de Kirchhoff, não há giro na seção após a deformação da placa. Já na teoria de Mindlin, a seção inicialmente plana e perpendicular à superfície média, após a deformação permanece plana, mas não mais perpendicular à superfície média. Os elementos modernos, tais como o DKMT atendem as duas teorias. O elemento DKMT (discrete Kirchhoff Mindlin theory) é um elemento de placa transformado em um elemento finito de casca não linear, o qual se encontra referências em alguns artigos, por exemplo em LEVY (2006). O elemento DKT (Discrete Kirchhoff Triangle), conforme MESQUITA (2005), foi inicialmente publicado por STRICKLIN et al (1969). Reexaminado por mais de uma década, atualmente encontra-se entre os melhores elementos para análise de flexão em placas de sua classe. As funções de deslocamento do elemento são conformes, dessa forma, a continuidade de todas as variáveis essenciais ao longo dos lados do elemento e a convergência na solução de placas delgadas é garantida. O elemento de placa DKT possui geometria triangular, sendo constituído de 9 graus de liberdade (deslocamento transversal w e as rotações θ_x e θ_y nos vértices). Sua formulação tem como ponto de partida o elemento triangular com nós nos vértices e no meio dos lados.

A seguir, são apresentados alguns trabalhos que empregaram elementos de placa baseados nas teorias de Kirchoff e Mindlin.

- **Teoria de Kirchoff:** tanto pode ser aplicada a elementos triangulares como para elementos retangulares. O elemento triangular é o mais simples utilizado no estudo de placas ou lajes. O mais empregado é o elemento subparamétrico de três nós, com três graus de liberdade por nó (uma translação em w e duas rotações ou giros ao redor do eixo x e y). As hipóteses adotadas seguem a teoria de Kirchoff que está bem descrita na dissertação de HENNEMAN (1972). SHI (1990) utilizou o modelo de placa Kirchoff no seu trabalho. O elemento finito retangular linear isoparamétrico não conforme, com quatro nós por elemento, foi empregado por GOMES (1990).

- **Teoria de Mindlin:** Os modelos de placa propostos por MINDLIN (1951) e REISSNER (1944) são adequados para análise numérica de flexão de placas semi-espessas porque representam de modo mais realista o fenômeno real, em relação ao modelo clássico de Kirchoff. Elementos de placa lineares discretizados como elementos isoparamétricos quadráticos, onde se considera a influência da inércia rotacional e a deformação pelo esforço cortante, para utilização em placas moderadamente finas e grossas (com relação espessura/vão de $1/30$ a $1/10$), com excelente desempenho em frente a soluções analíticas disponíveis, são apresentados por TAMAGNA (1982). TAMAGNA ainda explica de maneira bastante completa a teoria de R. D. Mindlin usada para o elemento da dissertação aqui apresentado, debatendo ainda aspectos energéticos e variacionais da formulação. WESTPHAL JR. (1990) apresentou uma formulação integral para flexão linear estática de placas que unificava numericamente os modelos de Mindlin e Reissner. ANTES (1991) aborda análise estática e dinâmica de placas de Mindlin/Reissner. MARCZAK (2002) apresenta um histórico completo sobre essa teoria em sua dissertação de doutorado.

- **Mindlin conjugado com Estado Plano de Tensões:** VARELA (2000) apresenta uma formulação para esta conjugação das teorias de EPT com as teorias de Mindlin em um único elemento. Uma variação simplificada, mas muito parecida com o elemento adotado nesta dissertação, devido a não consideração da protensão, é detalhadamente descrita por REAL (1990), onde se utiliza o elemento isoparamétrico quadrático de oito nós, da família Serendipity, cuja geometria é igual à mostrada na Figura 2.2. Este elemento também apresenta

cinco graus de liberdade nodais (três translações e dois giros ou rotações), conjugando o estado plano de tensões com a teoria de Mindlin, que considera a deformação por corte. Adota-se um sistema de coordenadas curvilíneas ξ e η , possibilitando a criação de lajes com extremidade curvas.

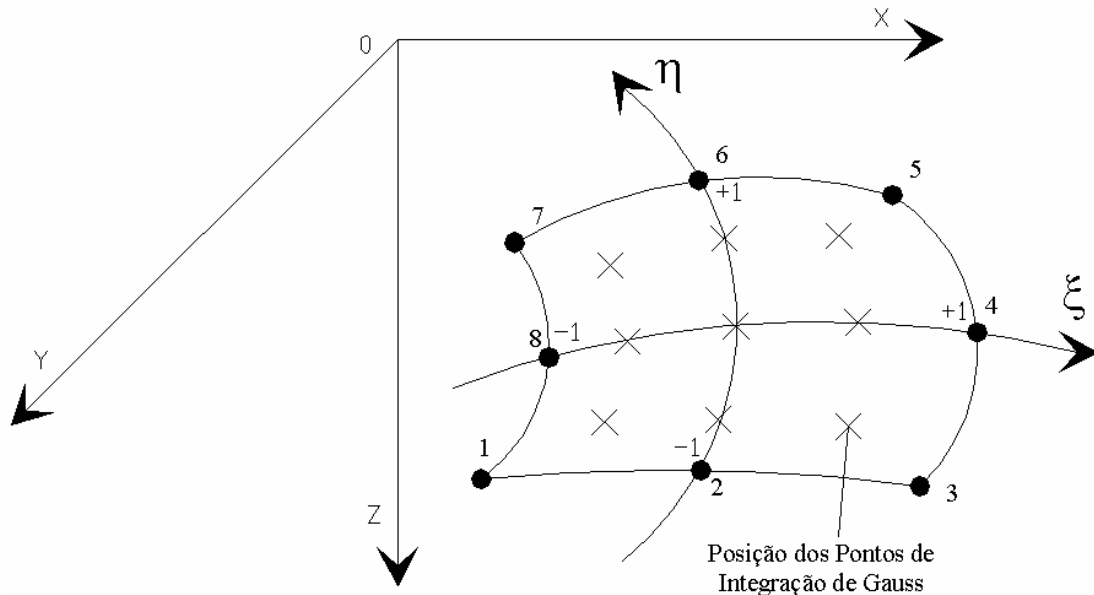


Figura 2.2 – Geometria do elemento isoparamétrico quadrático.

2.2 – Teoria do Elemento Empregado

2.2.1 – Teoria de Mindlin

A teoria de Mindlin considera efeito de corte nas deformações para placas medianamente finas e grossas. Esta teoria serviu como base para o desenvolvimento do elemento finito utilizado nesta dissertação. A seguir apresenta-se uma descrição genérica da teoria de Mindlin, baseada no trabalho de OWEN e HILTON (1984).

O campo de deslocamentos no plano da laje (x,y) , em qualquer ponto de uma linha perpendicular ao plano da laje (demonstrados na Figura 2.3, é dado pelas equações (2.1) e (2.2)

$$u_x = -z \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{xz} \right) = -z \cdot \psi_x \quad (\text{equação 2.1})$$

$$u_y = -z \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_{yz} \right) \quad (\text{equação 2.2})$$

sendo que z é a distância da linha média até a superfície, superior ou inferior da laje, w é o deslocamento na direção perpendicular ao plano da laje e γ_{xz} e γ_{yz} são as distorções angulares da linha perpendicular ao plano da laje.

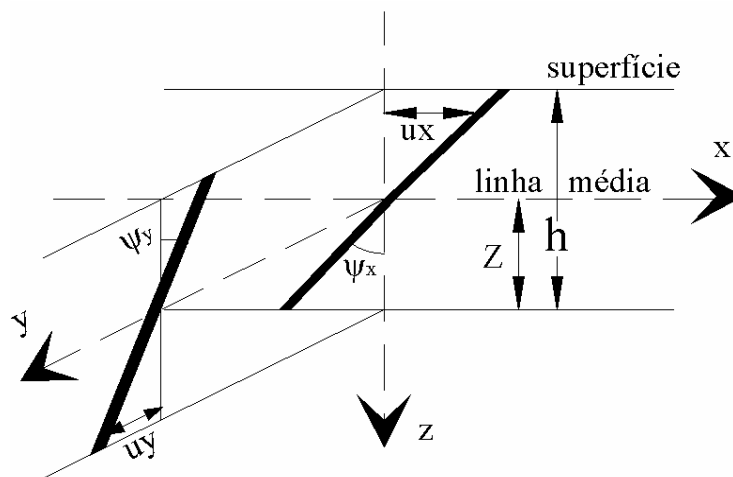


Figura 2.3 – Deslocamentos no plano da laje

As deformações nas mesmas direções dos deslocamentos u_x e u_y , ou seja, contidas no plano da laje, são dadas pelas fórmulas

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z \cdot \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \quad (\text{equação 2.3})$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -z \cdot \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} \quad (\text{equação 2.4})$$

A deformação perpendicular ao plano da laje vale

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{equação 2.5})$$

Na metodologia adotada nesta dissertação, a deformação ϵ_{zz} é considerada igual à zero.

Já a deformação transversal pode ser determinada por

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{-z}{2} \cdot \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} \right) \quad (\text{equação 2.6})$$

A consideração das deformações devido ao esforço cortante é introduzida através das distorções das seções, que apesar de continuarem planas, não são mais perpendiculares à linha média da placa. Essas distorções são determinadas pelas expressões

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \Psi_x \quad (\text{equação 2.7})$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \Psi_y \quad (\text{equação 2.8})$$

e as deformações devido à consideração do esforço cortante são dadas por

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} \quad (\text{equação 2.9})$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \gamma_{xz} \quad (\text{equação 2.10})$$

As tensões resultantes das seis deformações apresentadas anteriormente são calculadas pelas expressões

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \cdot \varepsilon_{yy}) = -\frac{E \cdot z}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \cdot \nu \right) \quad (\text{equação 2.11})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \cdot \varepsilon_{xx}) = -\frac{E \cdot z}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \cdot \nu \right) \quad (\text{equação 2.12})$$

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (\text{equação 2.13})$$

$$\sigma_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = -\frac{E \cdot z}{2 \cdot (1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \quad (\text{equação 2.14})$$

$$\sigma_{xz} = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \cdot \gamma_{xz} = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) \quad (\text{equação 2.15})$$

$$\sigma_{yz} = \frac{E}{2.(1+\nu)} \cdot \gamma_{yz} = \frac{E}{2.(1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) \quad (\text{equação 2.16})$$

sendo que E é o módulo de elasticidade do material, G é o módulo de corte do material, ν é o módulo de Poisson do material.

Os momentos fletores (M_{xx} e M_{yy}) e os momentos torçores (M_{xy} e M_{yx}) são obtidos da integração das tensões

$$M_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \cdot z \cdot dz = -\frac{E.h^3}{12.(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \cdot \nu \right) \quad (\text{equação 2.17})$$

$$M_{yy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} \cdot z \cdot dz = -\frac{E.h^3}{12.(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \cdot \nu \right) \quad (\text{equação 2.18})$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} \cdot z \cdot dz = -\frac{E.h^3}{12.(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \quad (\text{equação 2.19})$$

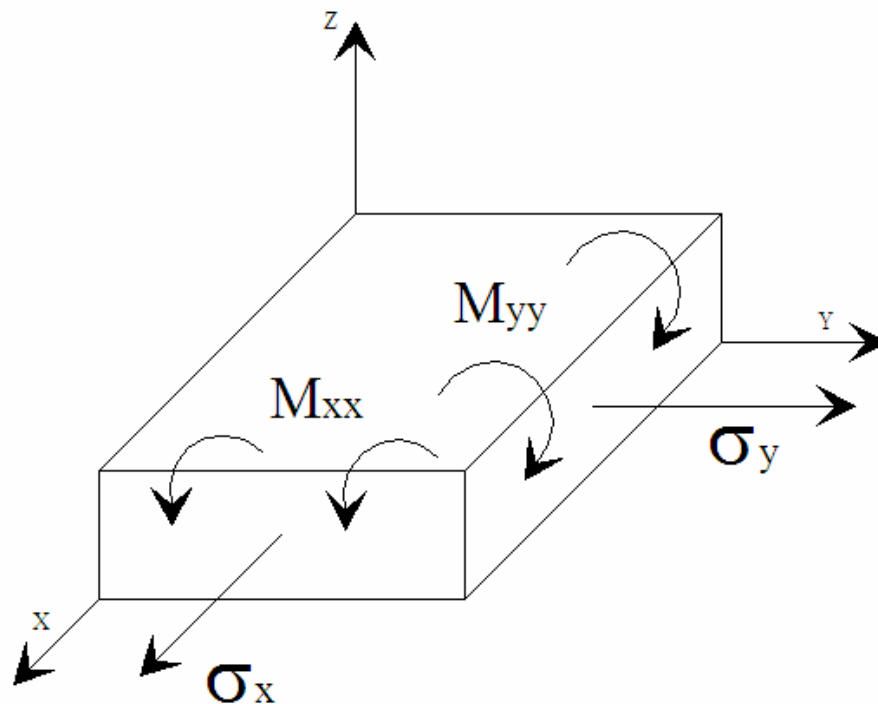


Figura 2.4 – Convenção adotada para as tensões existentes

Salienta-se que o momento M_{xx} (momento em torno do eixo “y”) causa a tensão σ_{xx} e M_{yy} (momento em torno do eixo “x”) causa a tensão σ_{yy} conforme figura 2.4. O esforço cortante é calculado em função das tensões provenientes das distorções angulares, conforme

$$\sigma_{xz} = 1,2 \cdot \frac{Q_{xx}}{h} \quad (\text{equação 2.20})$$

$$\sigma_{yz} = 1,2 \cdot \frac{Q_{yy}}{h} \quad (\text{equação 2.21})$$

em que 1,2 é o valor do denominado fator de forma (mesmo valor da teoria da Viga de TIMOSHENKO (1970)).

Os deslocamentos w (translação na direção z), ψ_x (giro ao redor do eixo y) e ψ_y (giro ao redor do eixo x) são calculados pela solução do seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} -a.\nabla^2 & a.\frac{\partial}{\partial x} & a.\frac{\partial}{\partial y} \\ a.\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b.\frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial x.\partial y} \\ a.\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x.\partial y} & b.\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a.\frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P(x, y) \\ R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{equação 2.22})$$

em que

$$a = 6.(1-\nu)/1,2.h^2 \quad (\text{equação 2.23})$$

$$b = 4.(1-\nu)^2 / 1,2.h^3 \quad (\text{equação 2.24})$$

$$R = \frac{E.h^3}{12.(1-\nu^2)} \quad (\text{equação 2.25})$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{equação 2.26})$$

$P(x,y)$ é o vetor das forças atuantes na estrutura.

2.2.2 - Elemento de Placa Reissner-Mindlin

Da necessidade de criar uma ferramenta de análise para lajes planas protendidas via método dos elementos finitos, foi proposta a presente implementação computacional. O trabalho teve início com a programação do elemento de placa quadrilátero quadrático com funções de

interpolação do tipo Serendipity, do tipo Mindlin, com oito nós por elemento. Esse elemento tem 3 graus de liberdade por nó, sendo um deslocamento na direção vertical ou perpendicular ao plano do elemento. O elemento implementado trabalha com carga nodal e carga distribuída de forma constante na superfície do elemento. O código foi escrito em Fortran 90. Define-se elemento de placa como sendo um elemento plano de dimensões da superfície muito maiores do que sua espessura, podendo estar sujeito a esforços normais ao seu plano médio e a momentos nele contidos, ver figura 2.5. A teoria de Reissner-Mindlin utiliza por base a interpolação não só do deslocamento transversal w , mas também das rotações θ_x e θ_y , obtendo assim as deformações de cisalhamento através do campo de deslocamento aproximado. A falha dessa abordagem se mostra quando do uso de placas de pequena espessura, provocando o trancamento por cortante.

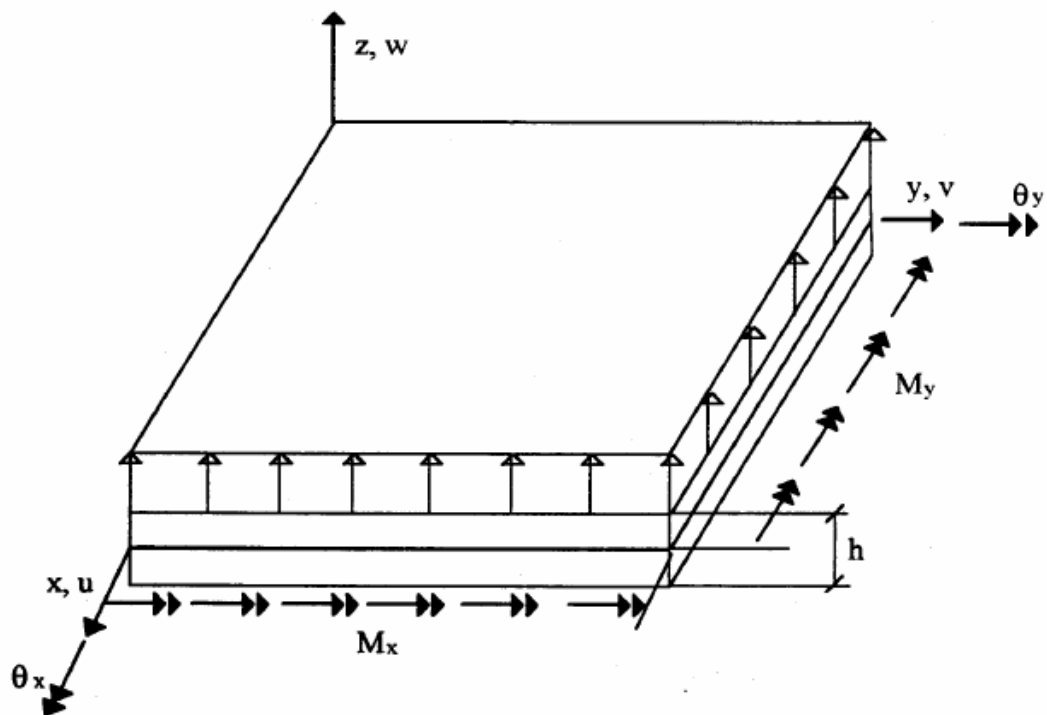


Figura 2.5 - Elemento de placa com forças atuando normalmente à sua superfície média e momentos atuando na mesma.

Este elemento foi desenvolvido para o uso em placas espessas e deve cumprir com as seguintes hipóteses, segundo OWEN & HILTON (1984)

- 1 – O elemento não deve ser utilizado em placas finas (ou seja, é um elemento criado para soluções otimizadas quando se trabalham com espessuras da ordem de 1/30 a 1/10 do vão da laje)
- 2 – O elemento não deve conter qualquer modo com energia zero;
- 3 – O elemento deve satisfazer a usual isotropia e critérios de convergência;
- 4 – A formulação não deve ser baseada em fatores numéricos de ajuste;
- 5 – O elemento deve ser capaz de fornecer deslocamentos, momentos fletores e esforços de corte precisos e ser relativamente insensível para a distorção dos elementos;
- 6 – O elemento deve ser fácil de utilizar e implementar;
- 7 – Os pontos integrantes da superfície média não se deslocam segundo as direções “x” e “y”;
- 8 – A componente de tensão normal por ser insignificante se comparada às demais, é considerada nula. Ver figura 2.6

Figura 2.6 - Componentes de tensão atuantes em um elemento infinitesimal de placa.

Cabe aqui salientar que algumas variáveis envolvidas não seguem a mesma representação adotada no item 2.2.1. Isto se deve ao fato de se querer manter a simbologia empregada nos trabalhos originais. Sendo assim, faz-se uma equiparação das simbologias empregadas no item 2.2.1. com o item atual. Dessa maneira, $u_x = u$ deslocamento na direção x, $u_y = v$ deslocamento na direção y, $\psi_x = \theta_y$ giro em torno do eixo y e $\psi_y = \theta_x$ giro em torno do eixo x, ver figura 2.7

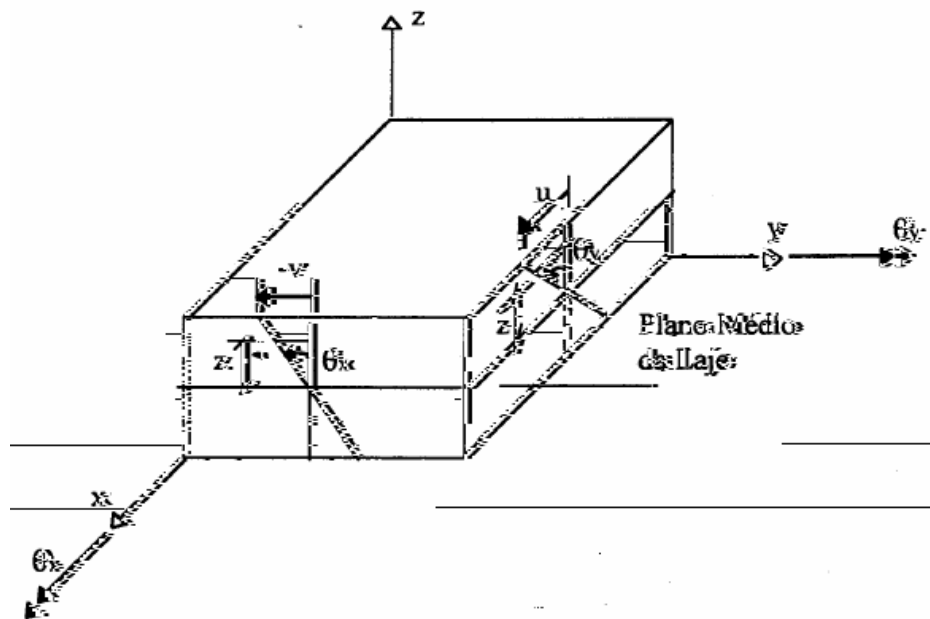


Figura 2.7 - Sentidos positivos dos deslocamentos e das rotações do elemento de placa.

A seguir será apresentado o formulário para o elemento programado.

Na Teoria de Reissner-Mindlin, considera-se, por hipótese, que os pontos pertencentes à placa que estão alinhados segundo uma reta normal à superfície média antes da deformação, continuam alinhados segundo uma reta não necessariamente normal à superfície média após a deformação. E mais, as rotações são supostas pequenas, de maneira a se confundirem com suas tangentes. Assim, o campo de deslocamentos é o representado pela Figura 2.7 e é regido pelas seguintes expressões

$$w = w(x, y) \quad (\text{equação 2.27})$$

$$u = z.\theta_y(x, y) \quad (\text{equação 2.28})$$

$$v = -z.\theta_x(x, y) \quad (\text{equação 2.29})$$

O elemento empregado está representado na figura 2.8.

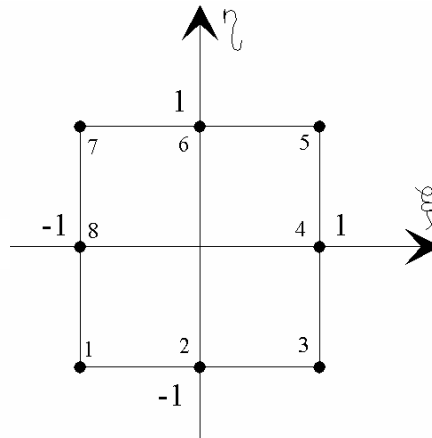


Figura 2.8 – O elemento isoparamétrico empregado

As funções de interpolação para o elemento são dadas pelas seguintes expressões

Para os nós de canto (1, 3, 5, 7)

$$\mathbf{N}_i^e = 0,25 \cdot (1 + \xi \xi_i) \cdot (1 + \eta \eta_i) \cdot (\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1) \quad (\text{equação 2.30})$$

Para os nós do meio (2, 4, 6, 8)

$$\mathbf{N}_i^e = \xi_i^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi \xi_i) \cdot (1 - \eta^2) + \eta_i^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \eta \eta_i) \cdot (1 - \xi^2) \quad (\text{equação 2.31})$$

Para obter-se as derivadas das funções de interpolação e encontrar as matrizes \mathbf{B} , tanto para o cortante como para o momento fletor, deve-se derivar as funções \mathbf{N}_i dadas por (2.30) e (2.31) em relação à η e à ξ . Os valores de η e ξ , são obtidos de forma explícita, tanto para os nós como para os pontos de Gauss, com base na figura 2.9, que posiciona os pontos de integração no interior do elemento

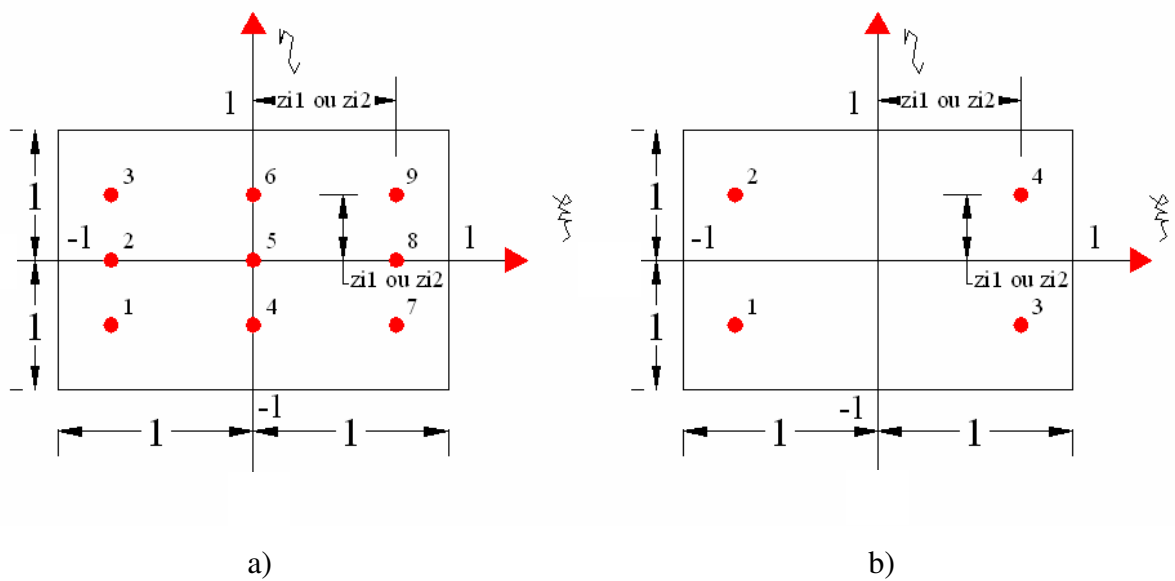


Figura 2.9 – Numeração dos pontos de integração

a) 3x3 pontos de Gauss

b) 2x2 pontos de Gauss

Para a integração **3x3** adota-se a combinação de z_{i1} e z_{i2} como as coordenadas ξ e η que cada ponto de integração pode assumir dentro do elemento

$$z_{i1} \text{ ou } z_{i2} = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{15} \quad (\text{equação 2.32})$$

$$z_{i2} \text{ ou } z_{i1} = 0 \quad (\text{equação 2.33})$$

e w_1 e w_2 , os pesos utilizados para a integração numérica

$$w_1 = 5/9 \quad (\text{equação 2.34})$$

$$w_2 = 8/9 \quad (\text{equação 2.35})$$

Para a integração **2x2**, adota-se a combinação de z_{i1} e z_{i2} como as coordenadas ξ e η que cada ponto de integração pode assumir dentro do elemento

$$z_{i1} \text{ ou } z_{i2} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \quad (\text{equação 2.36})$$

$$z_{i2} \text{ ou } z_{i1} = 0 \quad (\text{equação 2.37})$$

e w_1 , o peso utilizado para a integração numérica

$$w_1 = 1 \quad (\text{equação 2.38})$$

Na etapa seguinte é calculado o Jacobiano (ou matriz Jacobiana), para conversão das coordenadas η e ξ em coordenadas x e y para posterior integração na obtenção da matriz de rigidez . A matriz jacobiana do elemento e a sua inversa são dados por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (\text{equação 2.39})$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n N_i^e{}_{,\xi} x_i^e & \sum_{i=1}^n N_i^e{}_{,\xi} y_i^e \\ \sum_{i=1}^n N_i^e{}_{,\eta} x_i^e & \sum_{i=1}^n N_i^e{}_{,\eta} y_i^e \end{bmatrix} \quad (\text{equação 2.40})$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \xi_{,x} & \eta_{,x} \\ \xi_{,y} & \eta_{,y} \end{bmatrix} \quad (\text{equação 2.41})$$

A seguir, define-se as derivadas das funções de interpolação nas coordenadas x e y . Esta etapa é necessária para a montagem das matrizes B , uma vez que estas são compostas pelas derivadas das funções de interpolação nas coordenadas x e y . Portanto, de posse dos valores obtidos das funções de interpolação, devem-se determinar as matrizes das derivadas das funções de interpolação (B_m) para o momento fletor e (B_c) para o esforço de corte. Ambas são dadas, genericamente, pelas fórmulas

$$\mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} 0 & -Ni_{,x} & 0 \\ 0 & 0 & -Ni_{,y} \\ 0 & -Ni_{,y} & -Ni_{,x} \end{bmatrix}_{3 \times 24} \quad (\text{equação 2.42})$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} Ni_{,x} & -Ni & 0 \\ Ni_{,y} & 0 & -Ni \end{bmatrix}_{2 \times 24} \quad (\text{equação 2.43})$$

O próximo passo é determinar a Matriz constitutiva de flexão (D_m) e do esforço cortante (D_c), que são dadas respectivamente pelas expressões

$$\mathbf{D}_m = \frac{Eh^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{equação 2.44})$$

$$\mathbf{D}_c = \frac{Eh}{2.(1+\nu)X_\nu} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{equação 2.45})$$

sendo $X_\nu = 1,2$, conforme TIMOSHENKO (1970), h é a espessura da placa, ν é o coeficiente de Poisson e E é o módulo de elasticidade.

Pela Teoria de Placas, as tensões de cisalhamento variam quadraticamente ao longo da espessura. Na formulação aqui utilizada, as deformações cisalhantes definidas conduzem a tensões constantes ao longo da espessura. Para corrigir o erro na estimativa da energia de deformação decorrente dessa má distribuição de tensões, são introduzidos fatores de correção de cisalhamento transversal X_ν . Neste trabalho, adota-se $X_\nu = 1,2$.

De posse destes dados, parte-se para o cálculo das matrizes de rigidez para o esforço de corte e para o momento fletor do elemento dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{K}^e_{cij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}^e_{ci}]^T \mathbf{D}_c \cdot \mathbf{B}^e_{cj} \cdot \det \mathbf{J} \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (\text{equação 2.46})$$

$$\mathbf{K}^e_{mij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}^e_{mi}]^T \mathbf{D}_m \cdot \mathbf{B}^e_{mj} \cdot \det \mathbf{J} \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (\text{equação 2.47})$$

que também podem ser escritas de forma numérica

$$\mathbf{K}^e_{cij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p [\mathbf{B}^e_{ci}]^T \mathbf{D}_c \cdot \mathbf{B}^e_{cj} \cdot W_i \cdot W_j \quad (\text{equação 2.48})$$

$$\mathbf{K}^e_{mij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p [\mathbf{B}^e_{mi}]^T \mathbf{D}_m \cdot \mathbf{B}^e_{mi} \cdot w_i \cdot w_j \quad (\text{equação 2.49})$$

em que “n” e “p” são números de pontos de Gauss nas direções η e ξ , e w_i e w_j são os correspondentes pesos de interpolação. Pode-se usar tanto para a montagem da matriz de rigidez à flexão quanto para a matriz de rigidez ao cisalhamento nove ou quatro pontos de integração, sendo $n = p = 3$ (para 9 pontos de integração) ou 2 (para 4 pontos de integração). É recomendado pela literatura e utiliza-se neste trabalho, a integração seletiva, que utiliza 3x3 pontos de Gauss para a flexão e 2x2 pontos de Gauss para o esforço cortante. O superíndice “e” da matriz

em que \mathbf{K}_{cij} e \mathbf{K}_{mij} são as matrizes de rigidez global da estrutura, obtidas pela composição de cada matriz de rigidez, de cada elemento finito existente na estrutura. Com os deslocamentos nodais conhecidos, pode-se determinar as deformações e tensões nos elementos. As deformações específicas devidas ao esforço cortante e ao momento de flexão são dadas, respectivamente por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{cj} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}^e_{cj} \cdot \mathbf{U}^e_i \quad (\text{equação 2.52})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{mi} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}^e_{mi} \cdot \mathbf{U}^e_i \quad (\text{equação 2.53})$$

em que \mathbf{U}^e_i são os deslocamentos nodais.

É necessário calcular a deformação em cada um dos pontos de integração de cada elemento. Para cada ponto de integração, portanto, se faz necessário o cálculo da matriz B (B_m ou B_c). Assim, são obtidas 27 deformações específicas para cada elemento e depois convertidas em 27 tensões, no caso de integração com 3X3 pontos de Gauss ou 12 deformações específicas e 12 tensões ao se utilizar a integração com 2X2 pontos de Gauss (ou com 4 pontos de Gauss). Sendo $\mathbf{U}^e_i^*$ o vetor de deslocamentos nodais \mathbf{U}^e_i reorganizado de tal forma onde se tem os deslocamentos ordenados do nó 1 ao nó n da estrutura alocados respectivamente em w (deslocamento vertical), θ_x (giro em torno do eixo y), θ_y (giro em torno do eixo x), calcula-se para cada elemento, em cada ponto de integração as deformações específicas $\boldsymbol{\varepsilon}_m$, devidas ao momento fletor, e as deformações específicas $\boldsymbol{\varepsilon}_c$, devidas ao esforço cortante

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} = [\mathbf{B}^e_{mi}] [\mathbf{U}^e_i^*] \quad (\text{equação 2.54})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{,x} + \theta_x \\ w_{,y} + \theta_y \end{bmatrix} = [\mathbf{B}^e_{cj}] [\mathbf{U}_i^e]^* \quad (\text{equação 2.55})$$

sendo que as derivadas dos giros são dadas por $\theta_{x,x} = \delta\theta_x / \delta x$, $\theta_{y,y} = \delta\theta_y / \delta y$ e assim por diante.

Salienta-se aqui que as deformações $\boldsymbol{\varepsilon}_m (K_x, K_y \text{ e } K_z)$ são as chamadas curvaturas da peça e as deformações $\boldsymbol{\varepsilon}_c (\gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ são as distorções. E, finalmente, as solicitações (o momento fletor \mathbf{M}_m e o esforço cortante \mathbf{V}_c) são obtidas genericamente por

$$\mathbf{M}_m = \mathbf{D}_m \cdot \mathbf{B}^e_{mi} \cdot \mathbf{U}_i^e \quad (\text{equação 2.56})$$

$$\mathbf{V}_c = \mathbf{D}_c \cdot \mathbf{B}^e_{ci} \cdot \mathbf{U}_i^e \quad (\text{equação 2.57})$$

o que é equivalente a

$$\mathbf{M}_m = \mathbf{D}_m \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_m \quad (\text{equação 2.58})$$

$$\mathbf{V}_c = \mathbf{D}_c \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_c \quad (\text{equação 2.59})$$

As solicitações dadas pelas expressões (2.60) e (2.61) são as denominadas tensões generalizadas os momentos fletores e torçores são representados por $\boldsymbol{\sigma}_m$, e o esforço cortante é representado por $\boldsymbol{\sigma}_c$. Isto pode ser explicitado da seguinte forma

$$\sigma_m = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = [\mathbf{D}_m] \cdot [\epsilon_m] \quad (\text{equação 2.60})$$

$$\sigma_c = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = [\mathbf{D}_c] \cdot [\epsilon_c] \quad (\text{equação 2.61})$$

As equações (2.60) e (2.61) são aplicadas em cada um dos elementos, para cada ponto de integração do elemento, sendo que as matrizes \mathbf{B}^e_{mi} e \mathbf{B}^e_{cj} são recalculadas para cada ponto de integração. Quando tratamos de materiais homogêneos, as matrizes \mathbf{D}_m e \mathbf{D}_c são as mesmas para todos elementos, portanto para os problemas a que este programa se destina, elas não precisam ser recalculadas para cada ponto de integração da estrutura.

2.3.3 – Inclusão dos Graus de Liberdade do EPT

Para tornar possível o estudo da protensão devem ser consideradas as tensões normais nas lajes modeladas. Assim, o elemento finito empregado deve ter mais dois graus de liberdade, que representarão os esforços normais atuantes no plano da placa, os quais simulam as tensões devidas aos cabos protendidos. Para isto, foi necessária a modificação da matriz de rigidez do elemento. A matriz, que antes era de dimensões 24 x 24 teve que ser ampliada para 40x40. Na verdade, a nova matriz de rigidez é uma combinação da matriz de rigidez do próprio elemento Mindlin arranjada com a matriz de rigidez do elemento de estado plano de tensões (EPT). Este novo elemento pode ser considerado uma simplificação da casca espacial, com um extra de possuir três tipos diferentes de matrizes \mathbf{B} (\mathbf{B}_m , \mathbf{B}_c , \mathbf{B}_{ept}) e \mathbf{D} (\mathbf{D}_m , \mathbf{D}_c , \mathbf{D}_{ept}). Portanto, o novo elemento empregado apresenta a seguinte configuração de super-linhas e super-colunas (onde cada super-linha e super-coluna representa um nó) para sua matriz de rigidez a nível de elemento

$$\mathbf{Kg}^e = \begin{pmatrix} EPT & EPT & 0 & 0 & 0 \\ EPT & EPT & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Min & Min & Min \\ 0 & 0 & Min & Min & Min \\ 0 & 0 & Min & Min & Min \end{pmatrix} \quad (\text{equação 2.62})$$

em que *EPT* representa as partições ocupadas pela matriz de ri

A formulação para estado plano de tensões será dada a seguir. O procedimento é semelhante ao apresentado anteriormente para o elemento Mindlin. Porém, existem algumas diferenças importantes. Iniciando pelas funções de interpolação, vemos que para o estado plano de tensões e para a placa Mindlin elas são as mesmas

Para os nós de canto (1, 3, 5, 7)

$$\mathbf{N}_i^e = 0,25 \cdot (1 + \xi \xi_i) \cdot (1 + \eta \eta_i) \cdot (\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1) \quad (\text{equação 2.64})$$

Para os nós do meio (2, 4, 6, 8)

$$\mathbf{N}_i^e = \xi_i^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi \xi_i) \cdot (1 - \eta^2) + \eta_i^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \eta \eta_i) \cdot (1 - \xi^2) \quad (\text{equação 2.65})$$

O mesmo se repete para o cálculo da inversa do determinante Jacobiano, que serve para converter as coordenadas η e ξ nas coordenadas x e y

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (\text{equação 2.66})$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n N_{i,\xi}^e x_i^e & \sum_{i=1}^n N_{i,\xi}^e y_i^e \\ \sum_{i=1}^n N_{i,\eta}^e x_i^e & \sum_{i=1}^n N_{i,\eta}^e y_i^e \end{bmatrix} \quad (\text{equação 2.67})$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \xi_{,x} & \eta_{,x} \\ \xi_{,y} & \eta_{,y} \end{bmatrix} \quad (\text{equação 2.68})$$

A matriz \mathbf{B}_{ept} que é a derivada das funções de interpolação possui a mesma formulação da placa, com a diferença na ordem da matriz, ou seja, já não é uma matriz de ordem 3×24 , mas sim 3×16

$$\mathbf{B}_{\text{ept}} = \begin{bmatrix} 0 & -N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{i,y} \\ 0 & -N_{i,y} & -N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (\text{equação 2.69})$$

O próximo passo é determinar a matriz constitutiva para o estado plano de tensões (\mathbf{D}_{ept}) que se assemelha a matriz constitutiva para flexão da placa

$$\mathbf{D}_{\text{ept}} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{equação 2.70})$$

Com estas informações, é possível calcular as matrizes de rigidez do elemento para o estado plano de tensões, dada pela expressão

$$\mathbf{K}_{\text{ept},ij}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}_{\text{ept}i}^e]^T \mathbf{D}_{\text{ept}} \cdot \mathbf{B}_{\text{ept}j}^e \cdot \det \mathbf{J} \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (\text{equação 2.71})$$

ou também

$$\mathbf{K}_{\text{ept}ij}^e = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p [\mathbf{B}_{\text{ept}ij}^e]^T \mathbf{D}_{\text{ept}} \cdot \mathbf{B}_{\text{ept}ij}^e \cdot w_i \cdot w_j \quad (\text{equação 2.72})$$

em que “n” e “p” são números de pontos de quadratura nas direções η e ξ , ou pontos de Gauss, e w_i e w_j são os correspondentes pesos de interpolação. O superíndice “e” da matriz $\mathbf{K}_{\text{ept}ij}^e$ faz referência ao elemento e o subíndice “i” e “j” encontrado na matriz $\mathbf{K}_{\text{ept}ij}^e$ serve para diferenciar as nove matrizes \mathbf{B}_{ept} de cada um dos nove pontos de integração. Para a

resolução da integral que fornece \mathbf{K}^e_{eptij} foi utilizada a integração numérica denominada pela literatura como “reduzida” com quatro pontos de integração (tipo 2X2). Também existe a possibilidade de utilização da integração “cheia”, mas esta forma de integração foi posteriormente abandonada, por exigir maior esforço computacional.

É feita a solução do sistema de equações de forma análoga ao mostrado para a placa Mindlin.

As deformações específicas devidas ao estado plano de tensões são dadas por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ept} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}^e_{epti} \cdot \mathbf{U}^e_i \quad (\text{equação 2.73})$$

onde \mathbf{U}^e_i são os deslocamentos nodais (u e v) no plano da placa.

É necessário calcular a deformação em cada um dos pontos de integração de cada elemento. Para cada ponto de integração, portanto, se faz necessário o cálculo da matriz \mathbf{B}^e_{ept} . Assim, são obtidas 12 deformações específicas para cada elemento e depois convertidas em 12 tensões, ao utilizar-se a integração 2X2 (com quatro pontos de Gauss). De forma análoga à flexão de placas, sendo que $\mathbf{U}^e_i^{**}$ é o vetor de deslocamentos nodais \mathbf{U}^e_i reorganizado de tal forma onde se tem os deslocamentos ordenados do nó 1 ao nó n da estrutura alocados respectivamente em u (deslocamento na direção do eixo x) e v (deslocamento na direção do eixo y), calcula-se para cada elemento, em cada ponto de integração, as deformações específicas, representadas pelo vetor $\boldsymbol{\varepsilon}_{epti}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ept_i} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{uu} \\ \varepsilon_{vv} \\ \varepsilon_{uv} \end{bmatrix} = [\mathbf{B}^e_{epti}] [\mathbf{U}^e_i^{**}] \quad (\text{equação 2.74})$$

E finalmente, as tensões são obtidas pela fórmula

$$\boldsymbol{\sigma}_{epti} = [\mathbf{D}_{ept}] \cdot [\boldsymbol{\varepsilon}_{epti}] \quad (\text{equação 2.75})$$

Porém, a união de dois elementos distintos em um único elemento trouxe uma complicação a ser resolvida. Segundo formulação mostrada, tem-se um total de oito deformações. Mas deve-se chegar em apenas três deformações que de forma geral são ε_x , ε_y e ε_{xy} . A matriz global de deformações generalizadas ($\boldsymbol{\varepsilon}_{dg}$) que guarda as oito deformações é dada pela matriz

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{dg} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{uu} & \varepsilon_{uv} & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{vu} & \varepsilon_{vv} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{ww} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \\ 0 & 0 & \gamma_{xz} & \theta_{x,x} & \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \\ 0 & 0 & \gamma_{yz} & \theta_{x,y} + \theta_{y,x} & \theta_{y,yx} \end{bmatrix} \quad (\text{equação 2.76})$$

Para o caso estudado, a deformação perpendicular ao plano da laje (ε_{ww}), conforme teoria de Mindlin, deve ser igual a zero. A partir deste momento, para compatibilizar as deformações entre as diversas literaturas, definem-se as curvaturas

$$K_x = \theta_{x,x} \quad (\text{equação 2.77})$$

$$K_y = \theta_{y,y} \quad (\text{equação 2.78})$$

$$K_{xy} = \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \quad (\text{equação 2.79})$$

A solução adotada para reduzir o número de deformações para três é decompor as deformações existentes nas três direções principais e somar as partes. Têm-se, portanto

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{cam}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{uu} + K_x \cdot z \\ \varepsilon_{vv} + K_y \cdot z \\ \varepsilon_{uv} + K_{xy} \cdot z \end{bmatrix} \quad (\text{equação 2.80})$$

As curvaturas $K_{xy} = f(\gamma_{xz}, \gamma_{yz})$, mostradas na figura 2.10, são sempre as mesmas ao longo da espessura e não contribuem para a deformação da placa, somente para o cisalhamento. “z” é a distância da linha média da placa até um ponto onde se deseja saber o valor da deformação. A deformação ε_{vv} foi considerada igual a zero, em função de ser desprezível para este tipo de análise.

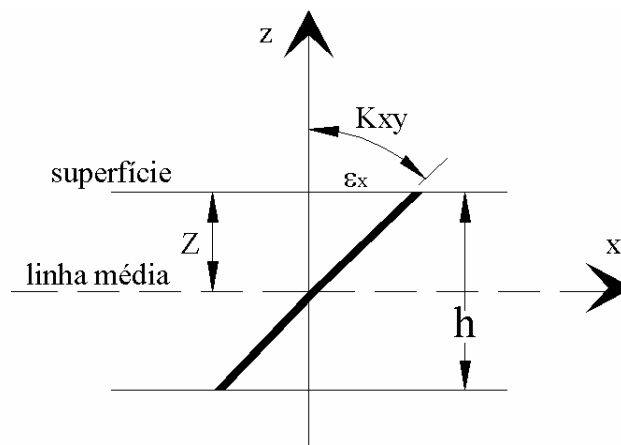


Figura 2.10 Representação das deformações e distorções ao longo da espessura.

E, as tensões totais em cada camada representada pela altura z ($\boldsymbol{\sigma}_{\text{cam}}$) são calculadas simplesmente multiplicando a matriz **Dept** pela matriz $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{cam}}$, resultando no vetor de tensões

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{cam}} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [\mathbf{D}_{\text{ept}}] \cdot [\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{cam}}] \quad (\text{equação 2.81})$$

Abaixo está representada a convenção de sinais adotada pela presente formulação

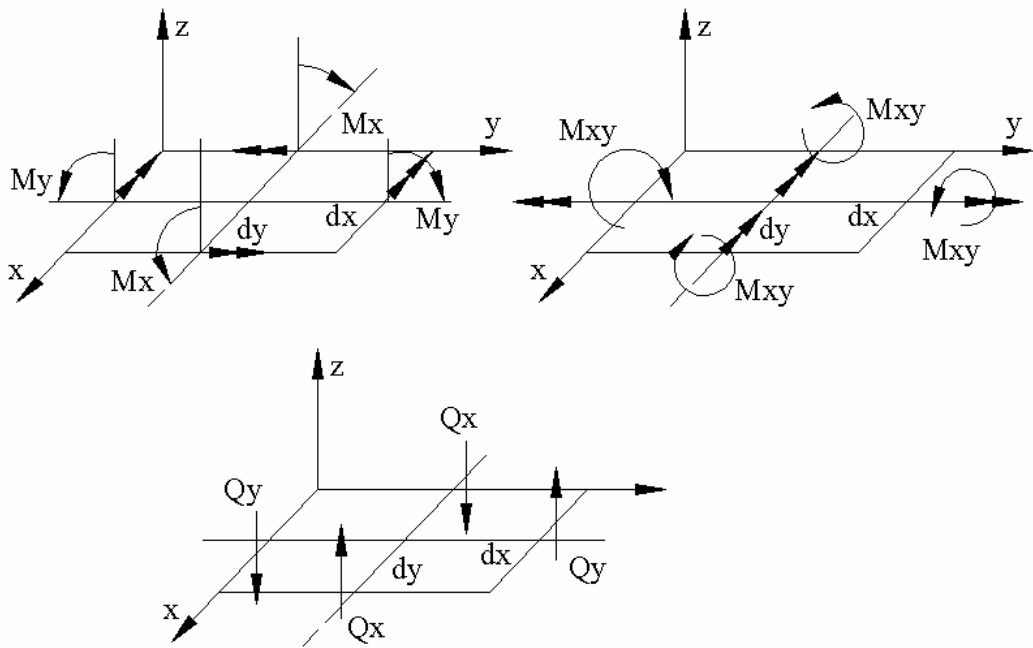


Figura 2.11 – Convenção de sinais para o momento e esforços cortantes.

2.4 – Inclusão dos Vínculos Elásticos

A inclusão dos vínculos elásticos, ou seja, uma tentativa de simular a elasticidade dos pilares que suportam a laje, é feita através da inclusão do coeficiente de rigidez de cada grau de liberdade (u (deslocamento horizontal em x), v (deslocamento horizontal em y), w (deslocamento vertical), θ_x (giro em torno do eixo y), θ_y (giro em torno do eixo x)) na diagonal principal da matriz de rigidez global do sistema mostrado na fórmula (2.62). Deve-se respeitar a posição correta de colocação na matriz de rigidez, que depende do número do nó vinculado. A obtenção do coeficiente de rigidez é função da geometria de cada vínculo. Denomina-se K_U a rigidez do grau de liberdade u , K_V a rigidez do grau de liberdade v , K_W a do grau de liberdade w , K_{TX} a do grau de liberdade θ_x e K_{TY} a do grau de liberdade θ_y . O valor de cada rigidez é obtido pelas expressões que se seguem e são adicionadas na matriz global

$$K_U = \frac{3 \cdot E_p \cdot L_y \cdot L_x^3}{L_z^3} \quad (\text{equação 2.82})$$

$$K_V = \frac{3.E_P.L_X.L_Y^3}{L_Z^3} / 12 \quad (\text{equação 2.83})$$

$$K_W = \frac{E_P.L_X.L_Y}{L_Z^2} \quad (\text{equação 2.84})$$

$$K_{TX} = \frac{2.E_P.L_Y.L_X^3}{L_Z^2} / 12 \quad (\text{equação 2.85})$$

$$K_{TY} = \frac{2.E_P.L_X.L_Y^3}{L_Z^2} / 12 \quad (\text{equação 2.86})$$

em que E_P é o módulo de elasticidade do concreto, L_X é a dimensão do pilar ao longo do eixo x, L_Y é a dimensão do pilar ao longo do eixo y e L_Z é a altura do pilar. Estes dados são fornecidos no arquivo de entrada de dados do programa.

As expressões (2.82) a (2.86) foram deduzidas a partir da integração da equação da linha elástica (ver expressão 2.87), considerando-se as condições de contorno às quais os pilares estão submetidos.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + q_x = 0 \quad (\text{equação 2.87})$$

em que w representa o deslocamento ou linha elástica e q_x é o carregamento solicitante.

Após a aplicação da expressão (2.87) encontram-se as expressões de deslocamento (2.88) e giro (2.89) mostradas a seguir.

$$w = \frac{PL^3}{3E_p I} \quad (\text{equação 2.88})$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{PL^2}{2.E_p I} \quad (\text{equação 2.89})$$

Como o carregamento P tem que ser unitário para se encontrar a rigidez, da sua substituição nas expressões (2.88) e (2.89), e sabendo que a rigidez é o inverso do deslocamento ou do giro, encontram-se as expressões de (2.82) a (2.86)

2.5 – Tensões na Armadura Passiva

As tensões que aparecem na armadura passiva são obtidas através da compatibilidade de deslocamentos entre o concreto e o aço. Como as deformações são as mesmas, basta utilizar a matriz de deformações ϵ_{cam} do concreto mostrada na expressão (2.80), com a substituição da altura z pela distância que vai do centróide da laje até o centro da armadura passiva. Resta portanto, multiplicar a ϵ_{cam} modificada pelo módulo de elasticidade (EA) da armadura. A matriz de tensões na armadura passiva é denominada σ_{camas} . Posteriormente se calculam os esforços na armadura, que são obtidos pela multiplicação das tensões obtidas em σ_{camas} pela área de aço escolhida pelo usuário, fornecida no arquivo de entrada do programa.

3 - Considerações Sobre a Protensão

3.1 – Introdução à Protensão

Conforme EMERICK (2005), a protensão pode ser entendida como a aplicação de tensões em um elemento estrutural com o objetivo de equilibrar tensões que prejudiquem o uso desejado. Um exemplo clássico de aplicação do conceito de protensão ocorre quando se deseja elevar um conjunto de livros justapostos. Para que seja possível a operação, é necessário aplicar uma força normal de modo que o atrito desenvolvido entre as capas dos livros seja suficiente para equilibrar seu peso próprio. As primeiras aplicações da protensão em elementos estruturais datam do início do século XX, sendo que foi com o francês Eugène Freyssinet que a tecnologia do concreto protendido foi se difundindo pelo mundo até se tornar uma tecnologia bem consolidada. Atualmente, existem basicamente dois sistemas, de acordo com o momento da aplicação da protensão o sistema com pré-tração, no qual os cabos são tensionados antes da concretagem do elemento estrutural e o sistema com pós-tração, em que o tensionamento dos cabos é feito após o concreto ter atingido uma resistência mínima especificada no projeto. O sistema de pré-tração é largamente utilizado na fabricação de pré-moldados de concreto. Esse sistema não será abordado neste trabalho. Com relação ao sistema de pós-tração, ele pode ser classificado quanto à aderência entre os cabos e o concreto em sistemas aderente e não aderente. No sistema com protensão aderente, os cabos são colocados dentro de bainhas metálicas, sendo injetada, nestas, nata de cimento após a operação de protensão. As cordoalhas aderem à pasta injetada e por meio das bainhas metálicas aderem ao concreto do elemento estrutural. O sistema abordado nesta dissertação é o sistema não aderente, onde as cordoalhas ficam envolvidas por uma camada de graxa e bainhas de polietileno. A ligação entre as cordoalhas e o elemento estrutural ocorre apenas nas ancoragens, conforme figura 3.1.

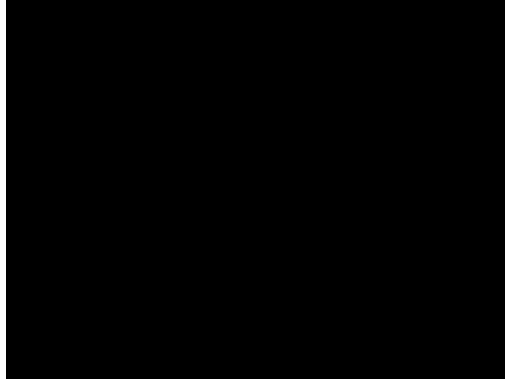


Figura 3.1 – Detalhe da placa de ancoragem utilizada para cordoalhas engraxadas

Como vantagens do sistema protendido pós-tração com cordoalhas engraxadas sobre o concreto convencional e lajes planas pode-se citar

- Possibilidade de vencer vãos maiores com lajes mais esbeltas, o que acarreta em maior liberdade arquitetônica e redução do número de pilares, com conseqüente aumento da área útil;
- Possibilidade de trabalhar com lajes de menor espessura, suprimindo o uso de vigas o que permite redução na altura total da edificação, e conseqüente diminuição da carga nas fundações ou maior número de pavimentos para uma mesma altura fixa;
- Maior velocidade na desforma e retirada de escoramentos, possibilitando ganhos significativos no tempo de execução da estrutura;
- Redução de flechas e fissuração nas lajes;
- Para lajes lisas ou cogumelo, o posicionamento dos cabos na região dos pilares gera um aumento da resistência ao cisalhamento (puncionamento);
- Economia, em relação às estruturas em concreto armado em vãos superiores a 7 metros.

As normas atuais definem como peças estruturais de concreto protendido aquelas que, por meio da aplicação de forças, tornam-se comprimidas de forma a eliminar total ou parcialmente as tensões de tração quando colocadas em serviço. A eliminação das tensões de

tração, que podem dar origem a fissuras, representava o principal objetivo da protensão, obtendo-se uma construção de maior qualidade, reduzindo-se por meio da protensão completa o perigo da corrosão. Modernamente, com o desenvolvimento da teoria de fissuração, tornou-se possível conviver com o controle da abertura de fissuras, obtendo-se construções satisfatórias com custos menores, admitindo-se os Estados Limites de Serviço. Conforme mostrado na figura 3.1, pode-se observar que a protensão serve para reduzir as tensões de tração devido à flexão, contribuindo para o melhor aproveitamento do material concreto, uma vez que este resiste muito bem à compressão e muito pouco à tração.

Considerando a viga da figura 3.2 e admitindo a mesma armada com uma barra de aço não aderente, dotada de dispositivos de extremidade que permitam a aplicação de esforços de tração que serão ancorados, por meio de placas especiais, no concreto da viga. A ação do esforço “P” sobre o concreto, devido à sua excentricidade, introduz tensões de compressão na borda tracionada da seção transversal e, se “P” está fora do núcleo central de inércia, tensões de tração na borda comprimida. A ação subsequente dos momentos fletores devido ao peso próprio e à carga atuante produz tensões de sentidos opostos às produzidas pela protensão, de modo que a superposição dos dois diagramas tem como resultado um diagrama de tensões normais que é basicamente de compressão.

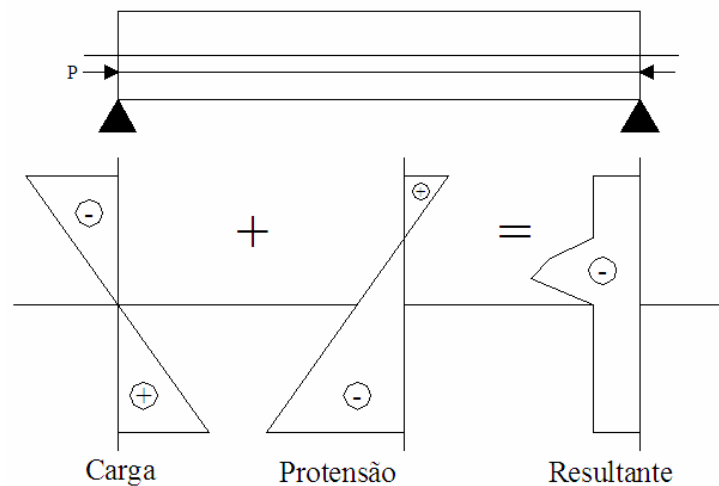


Figura 3.2 – Exemplo de distribuições das tensões em uma viga protendida

A seguir faz-se uma breve descrição da metodologia empregada para determinação da protensão sobre as lajes.

Neste trabalho, aplica-se a protensão em lajes planas e retangulares, com pilares alinhados localizados tanto na periferia da laje como no interior das mesmas. O tipo de protensão

considerado é a protensão não-aderente (cordoalha engraxada, podendo ser colocada isolada ou em feixes).

A distribuição dos cabos, que será vista com maiores detalhes adiante, consiste em distribuir os mesmos de forma regular ou quase-regular ao longo do comprimento da laje, nas duas direções x e y . O traçado dos cabos será definido em função dos cobrimentos previstos e do coeficiente α que, multiplicado pelos vãos entre pilares das lajes, determinará a posição dos pontos de inflexão dos cabos. O lançamento do traçado do cabo é então definido com base nos parâmetros supra-citados: cobrimento, coeficiente α , espessura da laje e distância entre apoios (vãos), e será detalhado mais adiante no item 3.2.3.

O dimensionamento dos cabos é feito a partir do carregamento aplicado na laje, que por sua vez é dividida em faixas. Essas faixas são obtidas através da análise de elementos finitos conforme descrição abaixo.

- a) Modela-se a laje, especificando o número de elementos finitos, as dimensões em planta, a espessura e a posição dos pilares e aplica-se o carregamento;
- b) Através de uma análise linear preliminar, determinam-se os deslocamentos em todos nós da estrutura e as deformações, tensões e solicitações (esforço cortante e momento fletor) nos pontos de integração;
- c) Estabelecem-se linhas ao longo da laje, que ligam pontos de integração alinhados ao longo das duas direções x e y , sendo limitada a malhas estruturadas;
- d) Determinam-se pontos sobre cada uma dessas linhas onde o esforço cortante se anula e entre cada dois pontos de esforço cortante nulo, define-se uma faixa, conforme figura 3.3;

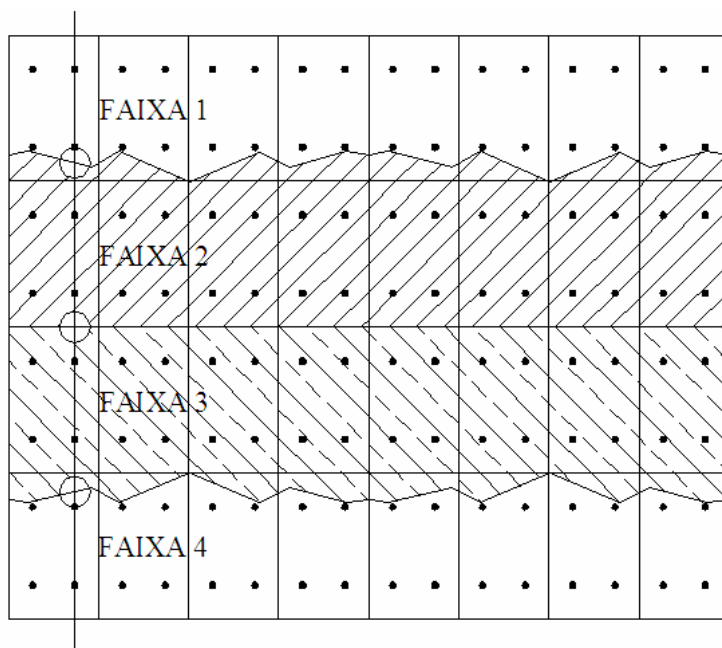


Figura 3.3 – Representação das faixas limitadas pelo esforço cortante nulo

O carregamento aplicado em cada faixa será utilizado para o dimensionamento dos cabos. No presente trabalho, usa-se a protensão para equilibrar apenas uma parte do carregamento total, geralmente entre 60% a 70%, sendo que este valor é arbitrado pelo projetista. O restante será absorvido por armaduras passivas. É feita a integração do momento fletor sobre cada faixa ao longo de cada linha transversal. Utiliza-se a integração trapezoidal. Este momento é obtido para cada carregamento em separado o peso-próprio, o revestimento, a sobrecarga e a protensão. Definido o número de cabos, obedecendo-se os limites de tensões para o Estado Limite de Serviço, parte-se para o dimensionamento da armadura passiva e resolve-se o problema.

3.2 - Lajes Planas Protendidas

Um dos principais esquemas estruturais adotados atualmente para lajes protendidas é a laje lisa, com ou sem engrossamento na região dos pilares. As lajes lisas apresentam vantagens em relação às demais (nervuradas e outras) sobretudo do ponto de vista da execução. Entretanto, sua resistência em geral é ditada pelo cisalhamento na região de ligação laje-pilar (puncionamento). A resistência ao puncionamento pode ser melhorada com o uso de engrossamento da laje na região do pilar, ou ainda com o uso de vigas faixa protendidas, ou seja, vigas embutidas na espessura da laje. Conforme EMERICK (2005), com o uso de lajes

planas protendidas a distância entre pilares pode ser mantida entre 6 a 8 metros sem grandes traumas para a estrutura. Obviamente, sem vigas os pilares perdem a necessidade de estarem alinhados e também de ficarem totalmente na parte externa do edifício, aumentando a flexibilidade no lançamento, com grandes vantagens na obtenção de varandas e fachadas mais simples para serem acabadas.

3.2.1 - Esbeltez das Lajes Protendidas

Para definir a espessura das lajes protendidas, segundo EMERICK (2005), pode-se adotar a seguinte relação

$$\text{- Para lajes com sobrecargas entre } 2\text{kN/m}^2 \text{ e } 3\text{kN/m}^2 \quad h = \frac{l}{40} a \frac{l}{45} ;$$

$$\text{- Para lajes de cobertura} \quad h = \frac{l}{45} a \frac{l}{48} ; \quad l = \text{vão entre apoios}$$

Entretanto, nada impede que sejam adotadas espessuras menores, desde que sejam verificadas as flechas máximas e o risco de vibrações excessivas. Estes limites foram estabelecidos na NBR-6118 (2004). Na prática, para o projeto de lajes protendidas com cordoalhas engraxadas, têm sido adotadas as espessuras apresentadas na Tabela 3.1

Tabela 3.1 Espessuras de lajes lisas protendidas com cordoalhas engraxadas

VÃO LIVRE ENTRE APOIOS (metros)	ESPESSURA MÍNIMA (cm)
até 7,0	16
de 7,0 até 8,0	18
de 8,0 até 9,0	20
de 9,0 até 10,0	22
de 10,0 até 11,0	24

Faixa econômica 7,0 a 9,0 metros (h = 18 a 20cm)

Emerick (2005)

3.2.2 - Distribuição dos Cabos em Planta

Os esforços em um painel de laje cogumelo concentram-se com maior intensidade nas regiões das faixas dos apoios. Dessa forma, é naturalmente recomendável que essas regiões apresentem uma maior concentração de cabos (ver figura 3.4). Conforme mostrado por EMERICK (2005), apresenta-se a seguinte recomendação para a distribuição dos cabos em

planta

- faixa dos apoios (parte externa das lajes) 65% a 75% dos cabos;
- faixa central (no vão ou interior das lajes) 35% a 25% dos cabos.

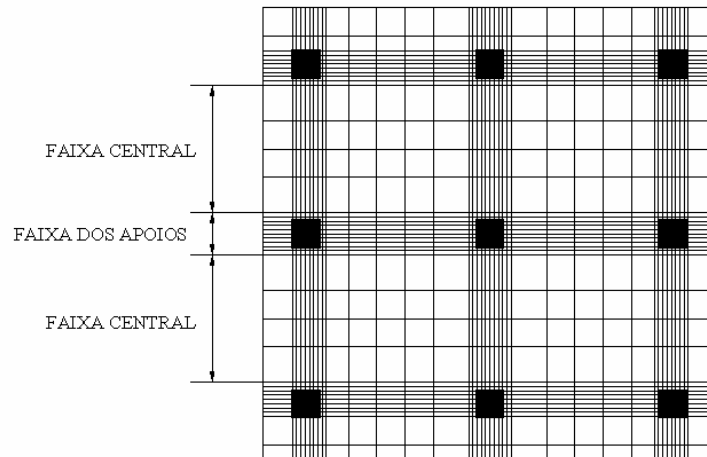


Figura 3.4 – Distribuição dos Cabos de Protensão em uma laje plana

As vantagens do uso de cabos concentrados nas faixas dos apoios, ao invés de uma distribuição uniforme são

- Uma maior aproximação com a distribuição de momentos na laje;
- Aumento da resistência à punção;
- Aumento da resistência próximo ao pilar para a transferência de momentos de ligação laje-pilar.

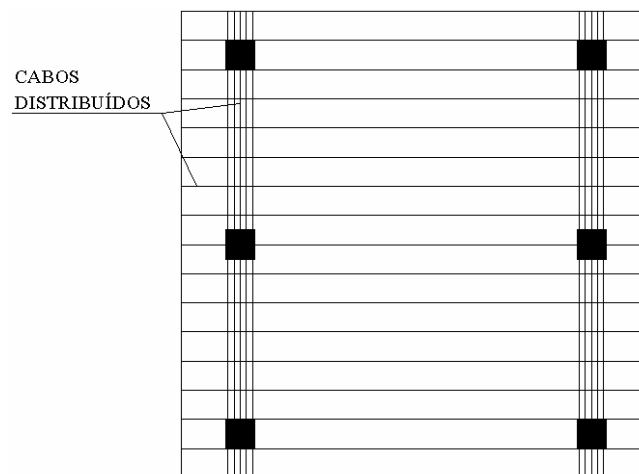


Figura 3.5 – Distribuição de cabos concentradas em faixas.

Existem outras maneiras de distribuir os cabos de protensão. Podem ser distribuídos de forma homogênea nas duas direções bem como serem concentrados em uma direção e distribuídos em outra, conforme figura 3.5. Adota-se o primeiro tipo de distribuição de cabos no presente trabalho. Consiste em distribuir os cabos igualmente nas duas direções, conforme figura 3.6. Isto simplifica bastante a análise, uma vez que em lajes simétricas o processamento pode ser feito em apenas uma direção.

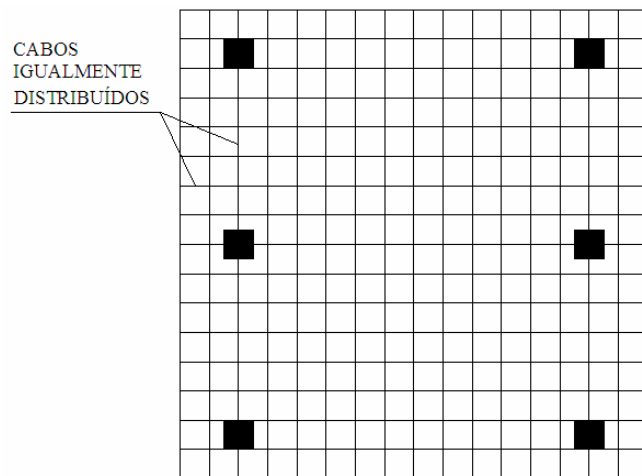


Figura 3.6 – Distribuição de cabos utilizada neste trabalho

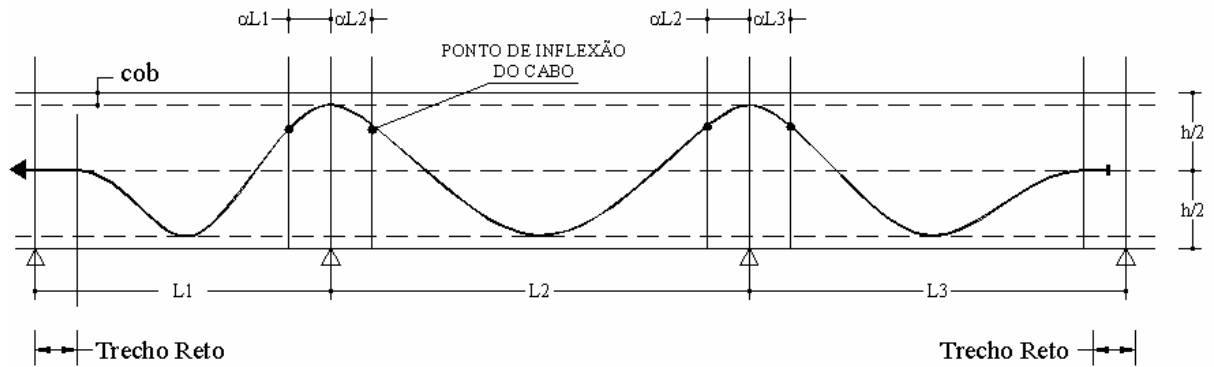


Figura 3.7 – Traçado vertical do cabo em uma viga contínua esquemática

Conforme se pode observar na figura 3.7, os cabos são ancorados nas extremidades passando pela semi-espessura da laje. Essa disposição dos cabos tem por objetivo não introduzir momentos fletores, devido à protensão nas seções de extremidade, onde os momentos devido ao carregamento externo também são nulos.

As coordenadas do ponto de inflexão podem ser calculadas, de maneira genérica, para o traçado da figura 3.8, usando as expressões

$$Y_c = Y_{\max} - \frac{d_2}{d} (Y_{\max} - Y_{\min}) \quad (\text{equação 3.1})$$

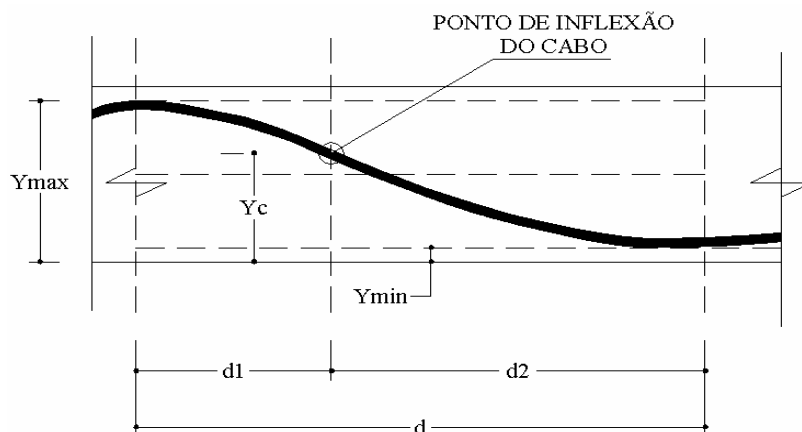


Figura 3.8 – Cálculo das coordenadas dos pontos de inflexão – concordância entre duas parábolas do 2º grau para cabos com declividade decrescente

Para o traçado da figura 3.9

$$Y_c = Y_{\min} + \frac{d_1}{d}(Y_{\max} - Y_{\min}) \quad (\text{equação 3.2})$$

Portanto, o traçado do cabo, bem como a posição do ponto de inflexão em função das alturas Y_c (ordenada do ponto de inflexão), Y_{MAX} (distância entre as forças resultantes de tração e compressão) e Y_{MIN} (cobrimento), e das distâncias d_1 e d_2 , pode ser visualizado nas figuras 3.8 e 3.9.

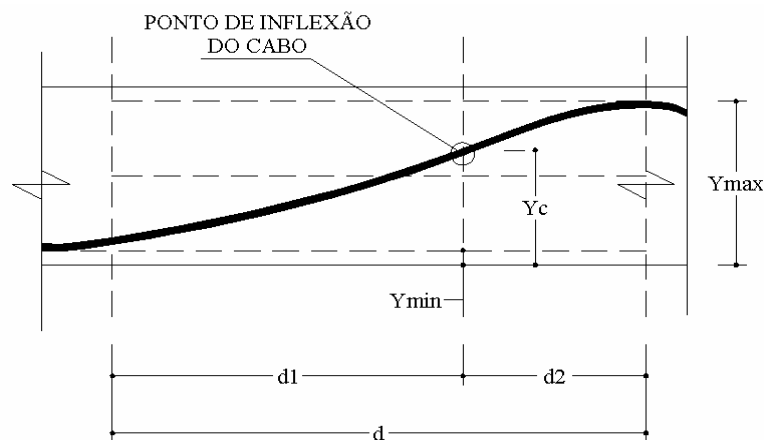


Figura 3.9 – Cálculo das coordenadas dos pontos de inflexão – concordância entre duas parábolas do 2º grau para cabos com declividade crescente

3.2.4 - Graus de Protensão

Os graus ou níveis de protensão estão relacionados com níveis de intensidade da força de protensão, que por sua vez é função da proporção de armadura ativa utilizada em relação à passiva. A protensão poderá ser então Completa, Limitada ou Parcial. No presente trabalho, é adotada apenas a protensão Limitada, sendo que a formação de fissuras não é abordada neste estudo.

a) Protensão Completa

A armadura de protensão é dimensionada visando o não aparecimento de tensões de tração no concreto. É recomendada para reservatórios. A armadura passiva é apenas construtiva, ou mínima. A protensão pode ser considerada completa quando se verificam as duas condições

seguintes

- Para as combinações freqüentes é respeitado o estado limite de descompressão.
- Para as combinações raras é respeitado o estado limite de formação de fissuras.

b) Protensão Limitada

A armadura ativa é preponderante. Não são permitidas fissuras em serviço e normalmente é necessária armadura passiva para atender a verificação à ruptura. É usada normalmente para lajes de edifícios. A protensão pode ser considerada como limitada quando se verificam as duas condições seguintes

- Para as combinações quase-permanentes é respeitado o estado limite de descompressão.
- Para as combinações freqüentes é respeitado o estado limite de formação de fissuras.

c) Protensão Parcial

Caracterizado pela combinação de armaduras ativas e passivas. Fissuras são permitidas e controladas em serviço. Admite-se sua utilização em vigas de edifícios. A protensão pode ser classificada como parcial quando se verificam as duas condições seguintes

- Para as combinações quase-permanentes é respeitado o estado limite de formação de fissuras e o de descompressão no eixo do cabo mais excêntrico.
- Para as combinações freqüentes é respeitado o estado limite de abertura de fissuras $w_k < w_{lim} = 0,2 \text{ mm}$

Os graus de protensão são meras classificações não garantindo de nenhuma forma a segurança da estrutura quanto aos outros estados limites. Os graus de protensão são normalmente utilizados pelas normas para orientar o projetista na escolha da quantidade de protensão em função da agressividade do ambiente, do sistema construtivo e da natureza das cargas variáveis.

3.2.5 - Dimensionamento e Verificações

Um dos métodos mais adequados para o cálculo de lajes protendidas é o denominado Método do Equilíbrio de Cargas, explicado posteriormente no item 3.3.2. Esse método consiste em calcular qual a força de protensão necessária e o traçado dos cabos em elevação para equilibrar uma determinada parcela do carregamento externo atuante.

Usualmente no dimensionamento de lajes protendidas a seqüência básica de cálculo é a seguinte

- *Determinação da carga a ser equilibrada com protensão* Em geral, adota-se o critério de que sobre a ação do carregamento quase permanente, a laje não apresente flechas acentuadas. Dessa forma, o carregamento de protensão utilizado deve equilibrar as cargas permanentes e mais uma parcela das cargas de utilização. Segundo EMERICK (2005) existem 3 critérios possíveis
 - caso em que sejam previstas paredes divisórias leves e sobrecargas, num total de cerca de 2,0 a 3,0 kN/m² equilibrar o peso próprio + 0,5kN/m²;
 - caso em que sejam previstas paredes de alvenaria equilibrar o peso próprio + 2/3 do peso das paredes;
 - O terceiro critério, bastante comum entre os projetistas é equilibrar o peso próprio mais 10% do carregamento total.

Em lajes, como observado, geralmente se trabalha com protensão parcial e os critérios apresentados enquadram-se nesta filosofia de trabalho.

No presente trabalho, é possível informar a porcentagem da carga total (peso próprio, peso do revestimento mais a sobrecarga) a equilibrar com protensão. Geralmente adota-se o valor de 60% ou 70%.

- *Determinação da força de protensão necessária e da excentricidade dos cabos* a determinação é feita pelo método de balanceamento de cargas explicado no item 3.4.
- *Cálculo da quantidade de cabos* obtida através do quociente entre a força de protensão atuante em determinada seção de laje pela tensão de serviço da armadura de protensão. Essa tensão de serviço pode ser inicialmente estimada como valendo 80% da tensão de ruptura da armadura de protensão.
- *Verificações das tensões em serviço (Estados Limites de Serviço)* seu cálculo é função das propriedades geométricas e dos esforços atuantes na seção de laje considerada e das perdas da força de protensão, que são as perdas imediatas (por atrito, por cravação

das ancoragens e por encurtamento elástico do concreto) e as perdas diferidas no tempo, devidas à fluência e à retração do concreto e à relaxação do aço. As perdas ao longo do tempo não são alvo desta dissertação, apesar de serem importantes no estudo. As perdas totais reduzem em aproximadamente 20% a força de protensão, sendo que as perdas imediatas representam uma redução de aproximadamente 5% da força de protensão.

- *Verificação da ruptura (Estados Limites Últimos):* análise da ruptura por funcionamento principalmente nos apoios e por flexão. O estudo do funcionamento não é abordado nesta dissertação, sendo feita apenas a verificação no estado último devido à flexão combinada com a protensão.

3.3 – Formas de Considerar a Protensão e o Método do Equilíbrio de Cargas

A protensão pode ser considerada, em análises numéricas via MEF, de duas formas distintas considerada como elementos finitos de armadura ou como cargas.

3.3.1 – Consideração da Protensão como Elementos Finitos de Armadura

É possível modelar a armadura de protensão como se fosse um elemento finito inserido em meio aos elementos finitos de concreto, contribuindo para o aumento da rigidez total da estrutura. A seguir, apresentam-se as maneiras de considerar a protensão através de elementos finitos.

a) Modelo Discreto: Quando se consideram as armaduras como elementos finitos independentes, dá-se o nome de forma discreta. Uma explanação rica em detalhes pode ser lida em MARTINELLI (2003) e nas anotações de aula de CAMPOS FILHO (2003). A armadura na forma discreta é representada por elementos unidimensionais do tipo treliça, cujas matrizes de rigidez são superpostas às dos elementos de concreto. Este modo de representação da armadura tem a desvantagem de oferecer uma limitação na escolha da malha de elementos, uma vez que os nós dos mesmos devem coincidir com os nós dos elementos finitos de concreto.

b) Modelo Distribuído: Chamado também de modelo contínuo equivalente. É conveniente no caso de placas e cascas com armadura densamente distribuída, onde se usa uma discretização em camadas. Na forma distribuída, segundo MARTINELLI (2003), o aço é distribuído uniformemente no elemento de concreto, através da substituição de uma camada bi-dimensional de concreto por camada de aço com espessura e área equivalente.

A consideração da protensão é feita através da modificação das propriedades de uma camada do elemento. Segundo BARBIERI (1999), em alguns casos é possível considerar a armadura de protensão através da superposição da matriz de rigidez da armadura com a matriz de rigidez dos elementos por ela interceptada.

Uma valiosa introdução a este tipo de modificação a nível de elemento para a consideração de armaduras protendidas ou não, através da criação de camadas de elementos com propriedades modificadas, pode ser estudada na tese de GOMES (1990).

c) Modelo Incorporado: Na forma incorporada, segundo MARTINELLI (2003), considera-se que as barras de armadura são linhas de um material mais rígido no interior dos elementos de concreto. Pode-se ter dentro de cada elemento quantas barras se desejar. Os deslocamentos ao longo da barra de armadura são expressos em função dos deslocamentos nodais do elemento de concreto. Com isto, obtém-se para a armadura uma matriz de rigidez das mesmas dimensões do que a matriz de rigidez do elemento de concreto. A matriz de rigidez do elemento de concreto armado será a soma das matrizes de rigidez da armadura, protendida ou não, e do concreto. É o mais versátil dos modelos, pois tem uma grande liberdade geométrica, como a mostra a figura 3.10.

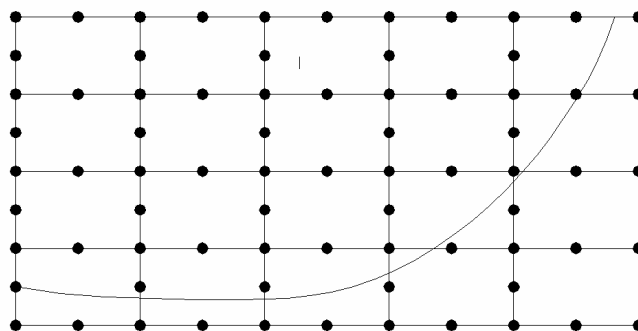


Figura 3.10 – Representação da geometria de uma armadura discretizada pelo modelo incorporado

3.3.2 – Consideração da Protensão como Carga (Método do Equilíbrio de Cargas)

A protensão como carga foi utilizada por AALAMI (1990) e parte da condição de equilíbrio entre carregamentos. Quando um cabo curvo de protensão é tracionado, ele pressiona o concreto que está em seu redor, deslocando a laje para cima ou para baixo. Assim, de forma simplificada, a consideração do cabo como um conjunto de carregamentos, vem da idéia de descobrir o carregamento que originaria o mesmo deslocamento que o cabo realiza na laje. Portanto, é possível a substituição do cabo por um carregamento equivalente desde que observadas a equivalência de deslocamentos. O equilíbrio de cargas foi introduzido por T. Y. Lin (1963 e 1981) como uma simples e poderosa alternativa para analisar peças protendidas.

O surgimento do equilíbrio de cargas como o principal método de análise de protensão em edifícios e os seus refinamentos quando aplicado a estruturas complexas, chama a atenção para um restabelecimento de conceitos no seu amplo contexto. AALAMI (1990) oferece um panorama consistente dos princípios e corolários do equilíbrio de cargas. A terminologia é clara e são revisados procedimentos para lidar com geometrias mais gerais e complexas. O equilíbrio de cargas é aplicado a ambos estados, tanto de serviço como de tensões últimas. Conforme o conceito inicialmente proposto, a protensão era vista como uma tentativa de equilibrar uma determinada porção de carregamento da estrutura, isso explica o nome “equilíbrio de cargas”. Entende-se pelo equilíbrio de cargas de uma estrutura como a representação da ação da protensão por um conjunto de cargas externas denominadas cargas equivalentes de protensão. As cargas equivalentes de protensão devem, portanto, ser tais que quando atuam na estrutura provocam esforços e deslocamentos idênticos aos gerados pela ação da protensão. Em outras palavras, a protensão pode ser considerada na modelagem do problema estrutural simplesmente pela aplicação de cargas superficiais, distribuídas em uma faixa de influência, em que um cabo protendido atua. O procedimento pode ser visualizado na figura 3.11.

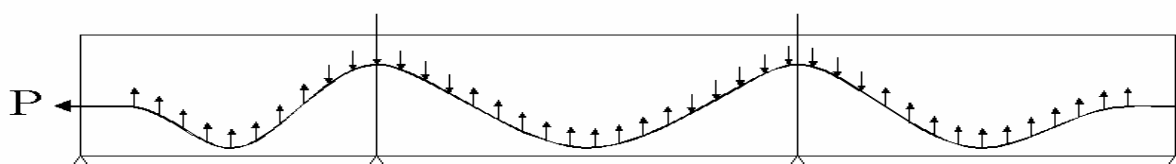


Figura 3.11 – Esforços devidos ao cabo de protensão considerados como um carregamento ao longo de cada trecho de parábola

Ao carregarmos a estrutura com a carga equivalente, obtemos diretamente em uma única análise os efeitos da protensão, deslocamentos e esforços seccionais, tanto para as estruturas isostáticas como para as hiperestáticas. Como o conjunto cabo-concreto encontra-se em equilíbrio estático, havendo ou não vinculação na estrutura, verifica-se que as cargas equivalentes devem resultar obrigatoriamente em um carregamento auto-equilibrado. Assim sendo, o carregamento da protensão não gera reações de apoio nas estruturas isostáticas e provocam reações auto-equilibradas nas estruturas hiperestáticas. Os esforços produzidos na estrutura apenas por estas reações auto-equilibradas constituem o que se chama na literatura de esforços secundários ou hiperestáticos de protensão. No caso de estruturas de edifícios que apresentam normalmente elevado grau de hiperestaticidade, tais como pórticos e lajes cogumelo, a representação da protensão via cargas equivalentes é, segundo AALAMI (1990), praticamente a única possível e de longe a mais recomendada.

3.4 – Determinação do Carregamento de Protensão

3.4.1 – Posição dos Cabos Protendidos

O objetivo principal deste item é demonstrar o cálculo da geometria do cabo de protensão em função de alguns parâmetros externos inerentes à geometria do problema. Os parâmetros externos são o cobrimento mínimo do cabo “COB”, o coeficiente α , o fator ou porcentagem de multiplicação de carga “FATORW” a ser equilibrado pela protensão, o trecho reto “TR” de cabo no início e fim da laje e o número de seções de análise em cada trecho, conforme figura 3.12

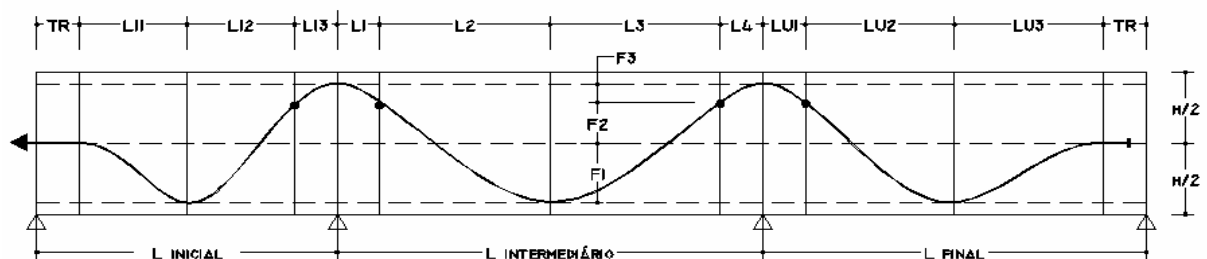


Figura 3.12 – Denominação das variáveis utilizadas para se definir a geometria

Posteriormente, é feita a derivação das funções que definem as ordenadas dos cabos, com o objetivo de se obter os ângulos de inflexão do cabo usados no cálculo das perdas devidas ao atrito e para a determinação dos esforços horizontais. As variáveis L_{11} , L_{12} , L_{13} , L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , L_{U1} , L_{U2} e L_{U3} são denominadas trechos ou partes do vão e são calculados pelas expressões a seguir

Para o vão inicial

Primeira parte do vão inicial

$$L_{11} = \frac{1}{2} L_{inicial} - T_R \quad (\text{equação 3.3})$$

Segunda parte do vão inicial

$$L_{12} = L_{inicial} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)\right) \quad (\text{equação 3.4})$$

Terceira parte do vão inicial

$$L_{13} = L_{inicial} \cdot \alpha \quad (\text{equação 3.5})$$

Para os vãos intermediários

Primeira parte do vão intermediário

$$L_1 = L_{\text{int. intermediário}} \cdot \alpha \quad (\text{equação 3.6})$$

Segunda parte do vão intermediário

$$L_2 = L_{\text{int intermediário}} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)\right) \quad (\text{equação 3.7})$$

Terceira parte do vão intermediário

$$L_3 = L_2 \quad (\text{equação 3.8})$$

E a quarta parte do vão intermediário

$$L_4 = L_1 \quad (\text{equação 3.9})$$

Para o vão final

Primeira parte do vão final

$$L_{U1} = L_{\text{final}} \cdot \alpha \quad (\text{equação 3.10})$$

Segunda parte do vão final

$$L_{U2} = L_{\text{final}} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)\right) \quad (\text{equação 3.11})$$

Terceira parte do vão final

$$L_{U3} = \frac{1}{2} L_{\text{final}} - T_R \quad (\text{equação 3.12})$$

As flechas F_1 , F_2 e F_3 são calculadas pelas fórmulas

$$F_1 = \frac{H}{2} - COB \quad (\text{equação 3.13})$$

$$F_3 = \frac{(H - 2.COB).L_{13}}{(L_{12} \cdot (1 + \frac{L_{13}}{L_{12}}))} \quad (\text{equação 3.14})$$

$$F_2 = (H - 2.COB) - F_3 \quad (\text{equação 3.15})$$

Como as flechas são as mesmas para todos os vãos, elas podem ser calculadas utilizando os dados apenas do primeiro vão ou do vão inicial. Cada trecho é dividido por um número “NSV” de seções de análise. Para cada seção calcula-se a posição do cabo (em x e y) e a derivada da posição do cabo. Para cada trecho existe um vetor genérico \mathbf{X} que guarda as abscissas a serem analisadas de acordo com o número de seções por vão (NSV) adotado. Funciona como um eixo x local, conforme a figura 3.13

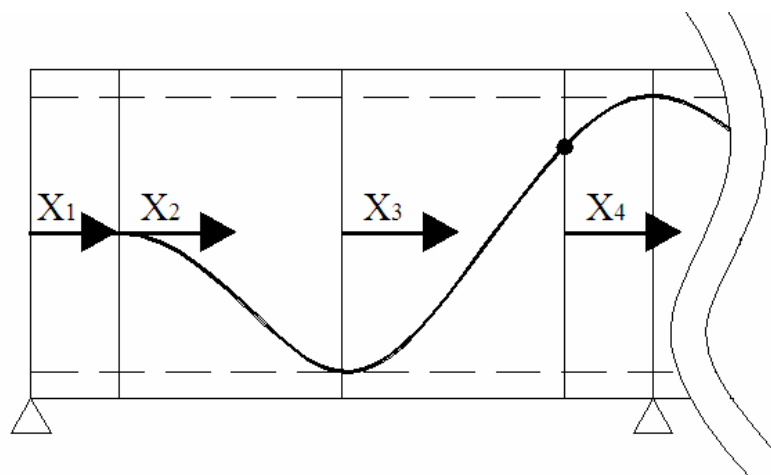


Figura 3.13 – Representação dos eixos x locais

Portanto, para o vão inicial que possui 3 trechos, existe o \mathbf{X}_{11} , o \mathbf{X}_{12} e o \mathbf{X}_{13} . Para o vão intermediário, com 4 trechos, existe o \mathbf{X}_1 , \mathbf{X}_2 , \mathbf{X}_3 e \mathbf{X}_4 .

X_{U3} . As posições do cabo em cada trecho e a derivada das mesmas (indicada por Y') para obtenção do coeficiente de perda de atrito " α_a " são dadas pela seguinte formulação

Para o vão inicial

- Posição do cabo no primeiro trecho do vão inicial

$$Y_{11} = \left(\frac{2.F_1}{L_{11}^3}\right).X_{11}^3 - \frac{3.F_1}{L_{11}^2}.X_{11}^2 \quad (\text{equação 3.16})$$

- Posição do cabo no primeiro trecho do vão inicial

$$Y_{12} = \left(\frac{F_2}{L_{12}^2}\right).X_{12}^2 - F_1 \quad (\text{equação 3.17})$$

- Posição do cabo no primeiro trecho do vão inicial

$$Y_{13} = \left(\frac{F_3}{L_{13}^2}\right).X_{13}^2 + \frac{2.F_3.X_{13}}{L_{13}} - F_3 + F_1 \quad (\text{equação 3.18})$$

- Derivadas da posição do cabo no vão inicial

- Derivada da posição do cabo no primeiro trecho do vão inicial

$$Y'_{11} = \left(\frac{6.F_1}{L_{11}^3}\right).X_{11}^2 - \frac{6.F_1}{L_{11}^2}.X_{11} \quad (\text{equação 3.19})$$

- Derivada da posição do cabo no segundo trecho do vão inicial

$$Y'_{12} = 2 \cdot \left(\frac{F_2}{L_{12}} \right) \cdot X_{12} \quad (\text{equação 3.20})$$

- Derivada da posição do cabo no terceiro trecho do vão inicial

$$Y'_{13} = 2 \cdot \left(\frac{F_3}{L_{13}} \right) \cdot \left(1 - \left(\frac{X_{13}}{L_{13}} \right) \right) \quad (\text{equação 3.21})$$

Para os vãos intermediários

- Posição do cabo no primeiro trecho do vão intermediário

$$Y_1 = - \left(\frac{F_3}{L_1} \right) \cdot X_1^2 + F_3 + F_2 - F_1 \quad (\text{equação 3.22})$$

- Posição do cabo no segundo trecho do vão intermediário

$$Y_2 = \left(\frac{F_2}{L_2} \right) \cdot X_2^2 - 2 \cdot \frac{F_2}{L_2} \cdot X_2 + F_2 - F_1 \quad (\text{equação 3.23})$$

- Posição do cabo no terceiro trecho do vão intermediário

$$Y_3 = \left(\frac{F_2}{L_2} \right) \cdot X_3^2 - F_1 \quad (\text{equação 3.24})$$

- Posição do cabo no quarto trecho do vão intermediário

$$Y_4 = \left(\frac{F_3}{L_4}\right).X_4^2 - 2.\frac{F_3}{L_4}.X_4 + F_2 - F_1 \quad (\text{equação 3.25})$$

- Derivadas da posição do cabo nos vãos intermediários

- Derivada da posição do cabo no primeiro trecho do vão intermediário

$$Y'_1 = -2.\left(\frac{F_3}{L_1}\right).X_1 \quad (\text{equação 3.26})$$

- Derivada da posição do cabo no segundo trecho do vão intermediário

$$Y'_2 = 2.\left(\frac{F_2}{L_2}\right).X_2 - 2.\frac{F_2}{L_2} \quad (\text{equação 3.27})$$

- Derivada da posição do cabo no terceiro trecho do vão intermediário

$$Y'_3 = 2.\left(\frac{F_2}{L_2}\right).X_3 \quad (\text{equação 3.28})$$

- Derivada da posição do cabo no quarto trecho do vão intermediário

$$Y'_4 = 2.\left(\frac{F_3}{L_4}\right).X_4 - 2.\frac{F_3}{L_4} \quad (\text{equação 3.29})$$

Para o vão final

- Posição do cabo no primeiro trecho do vão final

$$Y_{U1} = -\left(\frac{F_3}{L_{U1}^2}\right) \cdot X_{U1}^2 + F_3 + F_2 - F_1 \quad (\text{equação 3.30})$$

- Posição do cabo no segundo trecho do vão final

$$Y_{U2} = \left(\frac{F_2}{L_{U2}^2}\right) \cdot X_{U2}^2 - 2 \cdot \frac{F_2}{L_{U2}} \cdot X_{U2} + F_2 - F_1 \quad (\text{equação 3.31})$$

- Posição do cabo no terceiro trecho do vão final

$$Y_{U3} = -\left(\frac{2 \cdot F_1}{L_{U3}^3}\right) \cdot X_{U3}^3 + \frac{3 \cdot F_1}{L_{U3}^2} \cdot X_{U3}^2 - F_1 \quad (\text{equação 3.32})$$

- Derivadas da posição do cabo no vão final

- Derivada da posição do cabo no primeiro trecho do vão final

$$Y'_{U1} = -2 + \left(\frac{F_3}{L_{U1}^2}\right) \cdot X_{U1} \quad (\text{equação 3.33})$$

- Derivada da posição do cabo no segundo trecho do vão final

$$Y'_{U2} = 2 \cdot \left(\frac{F_2}{L_{U2}^2}\right) \cdot X_{U2} - 2 \cdot \frac{F_2}{L_{U2}} \quad (\text{equação 3.34})$$

- Derivada da posição do cabo no terceiro trecho do vão final

$$Y'_{U3} = -\left(\frac{6.F_1}{L_{U3}^3}\right).X_{U3}^2 + \frac{6.F_1}{L_{U3}^2}.X_{U3} \quad (\text{equação 3.35})$$

3.4.2 – Valor da Força de Protensão

De posse do traçado do cabo, o próximo passo é o cálculo da força de protensão “P” no cabo devido ao carregamento da laje a equilibrar. Cada vão tem um valor de “P”, por metro de faixa, que são obtidos pelas expressões a seguir. É importante salientar que as expressões (3.37), (3.38) e (3.39) são obtidas a partir da expressão original apresentada em (3.36), conforme as notas de aula de SCHWINGEL(2002)

$$P = \frac{q.L^2}{8.f} \quad (\text{equação 3.36})$$

Vão inicial

$$P_{11} = \frac{q.FATORW.(L_{INICIAL} - T_R).L_f}{4.(F_3 + F_2 + F_1)} \quad (\text{equação 3.37})$$

Vãos intermediários

$$P_1 = \frac{q.FATORW.(2.L_1 + L_2).L_f}{8.(F_3 + F_2)} \quad (\text{equação 3.38})$$

Vão final

$$P_{U1} = \frac{q \cdot \text{FATORW} \cdot (L_{\text{FINAL}} - T_R) \cdot L_f}{4 \cdot (F_3 + F_2 + F_1)} \quad (\text{equação 3.39})$$

em que

L_{INICIAL} e L_{FINAL} = Vão da laje entre pilares

L = Vão genérico

T_R = Trecho reto do cabo

FATORW = Porcentagem da carga total a equilibrar com a protensão

f , F_1 , F_2 e F_3 = Flechas do cabo

q = Carregamento uniforme total atuante na laje

P = Força de protensão atuante no cabo

L_f = largura da faixa delimitada pelo esforço cortante nulo (ver item 3.5.1)

Com o valor da força de protensão em cada cabo determinada pelas expressões de (3.37) a (3.39) pode-se calcular a quantidade de cabos necessária em cada faixa. Multiplicam-se os valores de P obtidos anteriormente pela largura da faixa analisada. Este valor obtido é então dividido pela capacidade de cada cabo para se obter o número de cabos necessários.

A capacidade de cada cabo é determinada como sendo no máximo 80% do valor da tensão de escoamento de uma cordoalha. Para uma cordoalha do tipo CP190RB é recomendado que na sua utilização não se ultrapasse o valor $0,8 \times 190\text{kN/cm}^2 = 152\text{kN/cm}^2$. Este valor de tensão é multiplicado pela área da cordoalha utilizada e são deduzidas as perdas calculadas. Determina-se, portanto, a capacidade de cada cabo.

3.4.3 – Perdas Imediatas da Força de Protensão

É necessário considerar as perdas da força de protensão, tanto por atrito entre a cordoalha e o concreto, como pelo recuo das ancoragens. As perdas imediatas são subtraídas da força “ P ” de protensão apresentadas nas expressões de (3.37) a (3.39). Os parâmetros considerados para o cálculo das perdas são o coeficiente de atrito “ μ ” e o ângulo de atrito involuntário “ γ ”.

Normalmente adotam-se os valores $\mu = 0,05 \text{ rd}^1$ (quando utilizadas cordoalhas em bainhas de prolipropileno lubrificadas) e $\gamma = 0,01 \text{ a } 0,03 \text{ rd/m}$. Inicia-se o procedimento com o agrupamento das derivadas $Y'_{11}, Y'_{12}, Y'_{13}, Y'_1, Y'_2, Y'_3, Y'_4, Y'_{U1}, Y'_{U2}, Y'_{U3}$ em um único vetor $\mathbf{Y}'_{\text{acum}}$. Depois se agrupam os vetores $X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_1, X_2, X_3, X_4, X_{U1}, X_{U2}, X_{U3}$ em um único vetor, denominado X_{GERAL} . Como o valor da derivada das funções “Y” no final de cada trecho, indicado na figura 3.12, deve ser somado ao valor da derivada do próximo trecho de cabo (as deflexões do cabo são cumulativas), pois as perdas por atrito são sempre somadas, é necessária a criação do vetor X_{GERAL} que soma as derivadas. Para cada trecho com inclinação inicial “ α_0 ” diferente de zero, deve-se mudar o valor da derivada “ α_x ” em cada ponto deste mesmo trecho através da fórmula a seguir

$$\alpha_a = \alpha_0 - \alpha_x \quad (\text{equação 3.40})$$

em que

α_a é o valor ajustado das derivadas das funções “Y”

α_0 representa as derivadas de “Y”, $\alpha_0 = Y'$

α_x é o valor da derivada das funções “Y” no início de cada trecho de cabo

O passo seguinte é acumular, seção a seção, o vetor X_{GERAL} em um outro vetor X_{acum} . Finalmente, a perda diferencial de tensão por atrito em cada seção, denominada $\Delta\sigma_{P\mu}$ é calculada pela expressão

$$\Delta\sigma_{P\mu} = 0,8.P.(1 - e^{(-\mu.(Y'_{\text{acum}} + \gamma.X_{\text{acum}}))}) \quad (\text{equação 3.41})$$

em que

P é a força de protensão atuante no cabo

μ é o coeficiente de atrito

γ é ângulo de atrito involuntário

X_{acum} é o vetor das abscissas do cabo

Y'_{acum} é o vetor das derivadas da posição do cabo

A outra perda imediata considerada é a perda por recuo de ancoragem. Este tipo de perda é proveniente da cravação das ancoragens nas faces da laje. A região de influência devida a perda por cravação da ancoragem (acomodação das cunhas) pode ser avaliada através de um cálculo iterativo simples, que consiste em cinco passos. O primeiro passo é fixar um valor para “x”, sendo “x” o comprimento da região de influência da cravação, conforme indicado na figura 3.14.

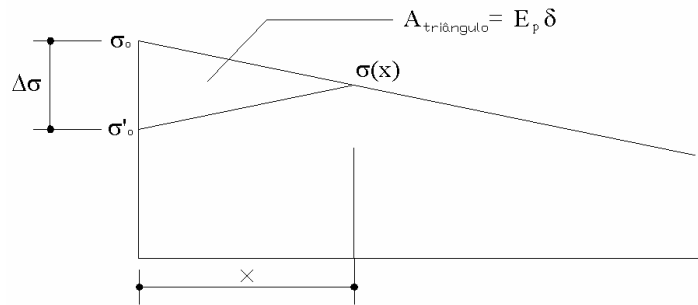


Figura 3.14– Cálculo da influência da cravação

O segundo passo consiste em calcular o valor da tensão $\sigma(x)$. Esse cálculo é feito por

$$\sigma(x) = \sigma_0 \cdot e^{-\mu \cdot (Y'_{acum} + \gamma \cdot x)} \quad (\text{equação 3.42})$$

O terceiro passo consiste em calcular o valor de $\Delta\sigma$, dado pela expressão

$$\Delta\sigma = 2 \cdot (\sigma_0 - \sigma(x)) \quad (\text{equação 3.43})$$

O quarto passo é verificar se

$$\delta \cdot E_p = A_{triângulo} = \frac{\Delta\sigma \cdot x}{2} \quad (\text{ver figura 3.10}) \quad (\text{equação 3.44})$$

em que

δ - cravação da ancoragem. Em geral $\delta = 5\text{mm}$ a 8mm

E_p - módulo de elasticidade do aço de protensão

O último passo é aplicado caso a igualdade mostrada em (3.44) não seja verificada. Assim, arbitra-se outro valor de x até que seja satisfeita a igualdade.

3.4.4 – Carregamento Final de Protensão no Instante Inicial do Ato da Protensão

A carga devido à protensão é obtida pelo método dos carregamentos equivalentes, introduzido por LIN (1963). Sucintamente, este procedimento consiste em um modelo matemático que substitui o cabo de protensão por um conjunto de carregamentos distribuídos ao longo de uma faixa. Existem outras formas de considerar a protensão, conforme abordagem apresentada no item 3.2. Porém, optou-se pelo método do equilíbrio de cargas pela sua simplicidade e eficiência frente aos outros métodos que modelam o cabo de protensão como um elemento finito ou como um artifício que modifica a matriz de rigidez de cada elemento finito por onde o cabo cruza.

Então, parte-se para a determinação do carregamento que os cabos aplicam na laje. Desta forma, torna-se possível determinar pelo método de equilíbrio de cargas, o carregamento “W” que o cabo impõe em cada trecho interno aos vãos. No valor de “P”, utilizado nas expressões a seguir, já estão deduzidas as perdas imediatas da força de protensão.

Vão inicial

- Carregamento na primeira parte do vão inicial

$$W_{11} = \frac{2.P.F_1}{FATORW.L_{11}^2} \quad (\text{equação 3.45})$$

- Carregamento na segunda parte do vão inicial

$$W_{12} = \frac{4.P.F_1}{FATORW.(1 - L_{11} / L_{V\tilde{A}O}).(L_{12} / L_{V\tilde{A}O}).L_{V\tilde{A}O}^2} \quad (\text{equação 3.46})$$

- Carregamento na terceira parte do vão inicial

$$W_{13} = \frac{-4.P.F_1}{FATORW.(1 / L_{V\tilde{A}O}).(1 - L_{11}).(L_{13}).L_{V\tilde{A}O}^2} \quad (\text{equação 3.47})$$

Vãos intermediários

- Carregamento na primeira parte do vão intermediário

$$W_1 = \frac{-4.P.(F_1 + F_2)}{FATORW.L_1.L_{V\tilde{A}O}} \quad (\text{equação 3.48})$$

- Carregamento na segunda parte do vão intermediário

$$W_2 = \frac{8.P.F_1}{FATORW.L_2.L_{V\tilde{A}O}} \quad (\text{equação 3.49})$$

- Carregamento na terceira parte do vão intermediário

$$W_3 = \frac{8.P.F_1}{FATORW.L_2.L_{V\tilde{A}O}} \quad (\text{equação 3.50})$$

- Carregamento na quarta parte do vão intermediário

$$W_4 = \frac{-4.P.(F_1 + F_2)}{FATORW.L_1.L_{V\tilde{A}O}} \quad (\text{equação 3.51})$$

Vão final

- Carregamento na primeira parte do vão final

$$W_{U1} = \frac{-4.P.F_1}{FATORW.(1/L_{V\tilde{A}O}).(1-L_{U3}).(L_{U1}).L_{V\tilde{A}O}^2} \quad (\text{equação 3.52})$$

- Carregamento na segunda parte do vão final

$$W_{U2} = \frac{4.P.F_1}{FATORW.(1-L_{U3}/L_{V\tilde{A}O}).(L_{12}/L_{V\tilde{A}O}).L_{V\tilde{A}O}^2} \quad (\text{equação 3.53})$$

- Carregamento na terceira parte do vão final

$$w = \frac{1}{3^2}$$

exemplo, para uma laje com 3 vãos, existirão 10 trechos com cargas distintas. Pode-se visualizar esta situação na figura 3.12. Cria-se, portanto, um vetor \mathbf{W}_{FAY} , que representa os carregamentos em cada faixa. Esse vetor é calculado dividindo cada valor de carregamento \mathbf{W} , calculado anteriormente pelas expressões de (3.45) a (3.54), pela largura da faixa limitada pelos valores de esforço cortante igual a zero. Por exemplo, para uma faixa paralela à direção “y”, \mathbf{W}_{FAY} é calculado pela expressão (3.55)

$$\mathbf{W}_{\text{FAY}} = \frac{\mathbf{W}}{X_{\text{CZ}}(\text{I}+1) - X_{\text{CZ}}(\text{I})} \quad (\text{equação 3.55})$$

em que $X_{\text{CZ}}(\text{I})$ é o ponto ao longo de uma linha onde o esforço cortante é nulo e $X_{\text{CZ}}(\text{I}+1)$ é o próximo ponto de esforço cortante nulo nesta mesma linha

O processo descrito a seguir, esquematizado no fluxograma abaixo se inicia encontrando-se as regiões com diferentes carregamentos.

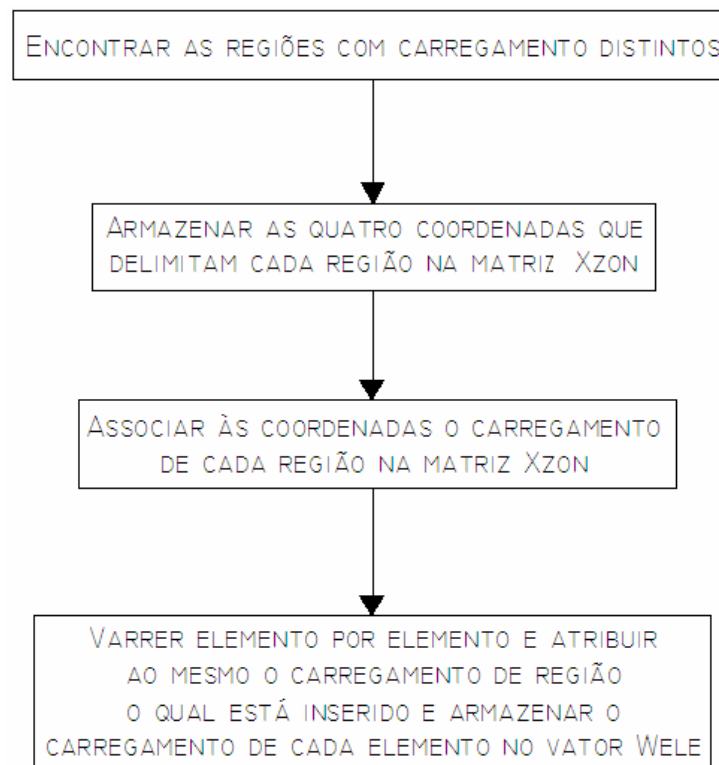


Figura 3.15 – Fluxograma do processo de carregamento dos elementos

Armazenam-se as coordenadas que delimitam estas zonas em uma matriz \mathbf{X}_{ZONY} ou \mathbf{X}_{ZONX} .

Essas matrizes possuem 3 colunas. A primeira coluna armazena a coordenada “x”, a segunda a coordenada “y” e a terceira o valor de carga da região. Cada região ocupa 4 linhas da matriz. Essa região é sempre quadrada. O número de regiões é dado pela multiplicação do número de faixas limitadas por linhas de cortante nulo pelo número de trechos de carregamento do cabo na direção considerada. Essas zonas serão obtidas através do cruzamento da largura das faixas delimitadas pelos esforços cortantes nulos pelo valor do carregamento “W” ocasionado pelo cabo, conforme exemplificado na figura 3.16.

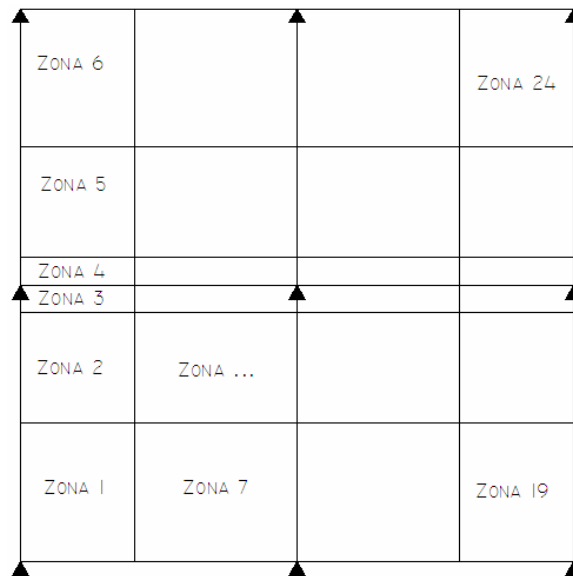


Figura 3.16 – Exemplo da configuração de zonas de carregamento em uma laje

Portanto, tem-se um mosaico quadriculado de carregamentos sobre a laje. Essa nova configuração de cargas deve ser analisada para obter-se as tensões na laje devidas puramente aos cabos protendidos. A seguir atribui-se a cada elemento finito da laje um carregamento devido exclusivamente aos cabos de protensão, sendo cada região delimitada pela largura de faixa com esforço cortante nulo em uma direção e pela largura dos trechos mostrados na figura 3.16 em outra. Faz-se o seguinte teste para cada elemento descobre-se, para cada um deles, em qual região armazenada na matriz \mathbf{X}_{ZONY} ou \mathbf{X}_{ZONX} o mesmo se encontra, e lhe é atribuído o valor de carregamento que consta na terceira coluna da matriz. O teste é feito considerando as coordenadas dos nós extremos de cada elemento em relação às coordenadas das zonas. Portanto, quanto maior o refinamento da malha, mais aproximado da carga verdadeira estará o modelo. Este é um ponto crítico do modelo proposto, uma vez que para obterem-se bons resultados, a malha deve ser modelada com um refinamento satisfatório, o que dependerá de cada problema a ser analisado. O vetor \mathbf{W}_{ELE} armazena o valor da carga

distribuída em todos elementos da estrutura devida à protensão.

3.5 – Análise das Tensões em Serviço

3.5.1 – Esforços Devidos à Carga Externa

Inicialmente, analisam-se linhas paralelas a “x” e “y” sobre os pontos de integração, com o intuito de buscar valores de esforços cortantes, nos mesmos, devidos ao carregamento externo. Ao longo de uma linha entre dois pontos de integração com sinais de esforço cortante contrários, faz-se uma interpolação linear entre estes pontos e retorna a posição sobre a linha onde o cortante se anula. Entre dois valores de esforço cortante iguais a zero, delimita-se uma faixa perpendicular à linha. Para cada ponto de integração interno a esta faixa, obtêm-se os valores de momento fletor e se integram os mesmos neste intervalo.

Cabe salientar que para o correto funcionamento do processo que será descrito a seguir, a laje discretizada deve ser retangular, a malha deve ter elementos finitos de mesma dimensão em cada direção e ser numerada (nós e elementos) conforme mostrado na figura 3.17

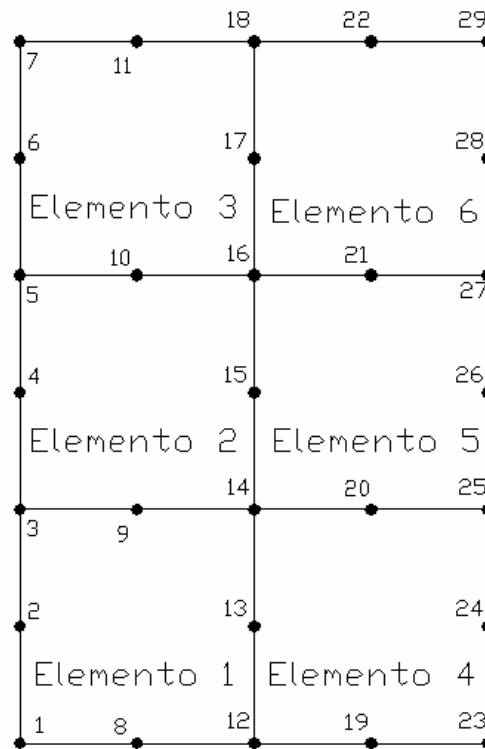


Figura 3.17 – Modelo de discretização de uma estrutura a ser analisada através da metodologia proposta

O procedimento será descrito para uma linha de análise vertical, ou paralela ao eixo “y”. O primeiro passo é analisar cada nó da laje, e determinar os que possuem coordenada “x” igual a zero. O vetor \mathbf{X} armazena a coordenada “x” de cada nó de coordenada $y = 0$. De posse das coordenadas dos nós da aresta horizontal inferior da laje, é possível determinar as abcissas dos pontos de integração, que são dadas pelas expressões (3.56) e (3.57), sendo estas armazenadas no vetor \mathbf{X}_L . A posição dos pontos de integração pode ser visualizada na figura 3.18.

Para o primeiro ponto de integração

$$\mathbf{X}_L = \mathbf{X}_L + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \quad (\text{equação 3.56})$$

Para o segundo ponto de integração

$$\mathbf{X}_{L2} = \mathbf{X}_2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \quad (\text{equação 3.57})$$

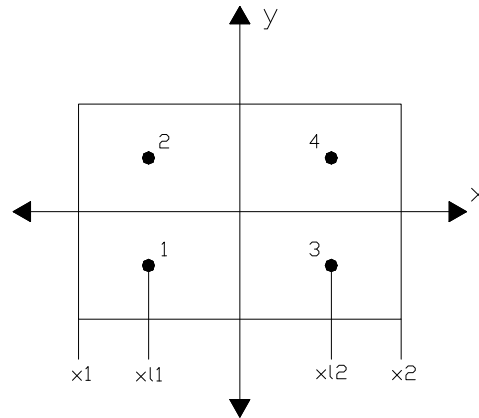


Figura 3.18 – Denominação das coordenadas dos pontos de integração

Posteriormente escolhe-se uma linha de análise paralela a “y”, que é referenciada de 1 até o dobro do número de elementos em “x”. Geralmente, é mais interessante escolher as linhas que estão no meio dos vãos da laje ou aquelas que estão próximas aos apoios, pois são nestes locais que aparecem os maiores esforços. O próximo passo é o cálculo do número de elementos em cada direção, com o objetivo de determinar o número de pontos de integração existentes na linha. A partir deste ponto determinam-se quais elementos são cruzados pela linha escolhida, de forma que se saiba em que elementos localizar as solicitações. Para cada ponto de integração contido na linha escolhida paralela ao eixo “y”, determinam-se o esforço cortante “ Q_y ” e o momento fletor “ M_x ”. Avaliam-se, então, os valores dos cortantes e indica-se a ordenada onde estes se anulam. Entre dois valores de cortante nulos, se delimita uma faixa. No interior de cada faixa, determina-se para cada ponto de integração o momento fletor “ M_x ” e integra-se o valor do mesmo entre os limites da faixa. A integração utilizada, para efeitos de simplificação, é a trapezoidal, e é mais precisa à medida que se aumentam o número de elementos finitos da malha.

A seguir exemplifica-se o processo de obtenção destes momentos integrados. Relembrando, a consideração da protensão inicia com uma busca, em cada ponto de integração da estrutura, por valores de esforços cortantes iguais a zero. Primeiro analisa-se os esforços cortantes “ Q_x ”

e “ Q_y ”. Para cada um deles, traça-se uma linha imaginária que conecta estes pontos e delimita uma região. Por exemplo, analisa-se o esforço cortante “ Q_y ” de uma laje qualquer, com apoios engastados nas quatro pontas e um apoio central, conforme Figuras 3.19 e 3.20

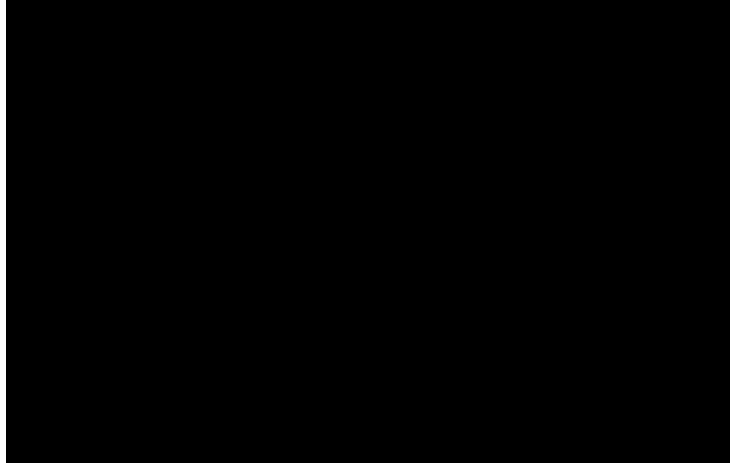


Figura 3.19 – Cortante Q_y em uma placa com carregamento uniforme

Agora, traça-se uma linha que liga pontos de esforço cortante igual a zero, representada na Figura 3.20. Os pontos pretos da figura representam os pontos de integração dos elementos e o valor zero de esforço cortante é obtido da interpolação linear entre dois pontos de integração próximos que possuem sinais de esforço cortante distintos.

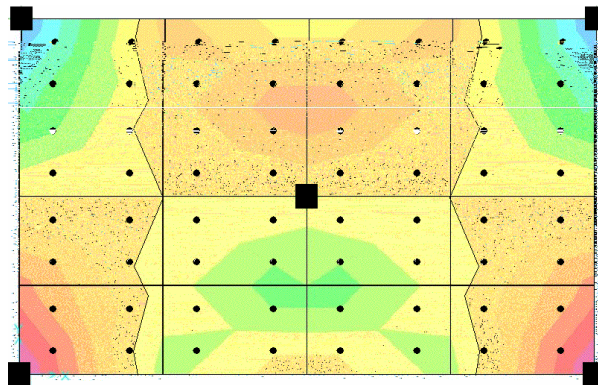


Figura 3.20 – Linhas sinuosas que unem pontos de esforço cortante Q_y igual à zero

Sabe-se que o carregamento atuante na laje delimitado por estas linhas é distribuído ao apoio interno a esta região. Deduz-se, intuitivamente, ao olhar a Figura 3.20 que o pilar central absorve uma quantidade de carga muito maior do que os pilares de borda. As linhas sinuosas da figura 3.20 delimitam as regiões cujos carregamentos são absorvidos pelos pilares internos a cada região.

O passo seguinte é determinar os valores de momento fletor em uma linha de pontos de integração que vai de uma borda à outra de uma região limitada por linhas de cortante de módulo igual a zero. Isto pode ser entendido olhando para as linhas vermelhas da Figura 3.21, que representam faixas de valores de momentos fletores. É para o maior valor destes momentos fletores que será verificado os Estado Limites de Serviço e Últimos da laje protendida.

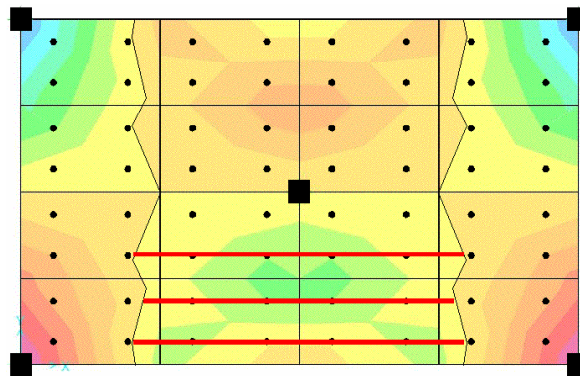


Figura 3.21 – Linhas que representam regiões de obtenção de momentos para dimensionamento dos cabos de protensão

A seguir, deve-se calcular as tensões em uma faixa, ou melhor, entre dois valores de cortantes nulos em uma linha, devidas ao momento fletor integrado ao longo deste intervalo.

A tensão é calculada por

$$\sigma_f = \frac{M_i}{I_s} \cdot y \quad (\text{equação 3.58})$$

em que σ_f é o valor da tensão na faixa, M_i é o valor do momento integrado nesta faixa, I_s é o momento de inércia da seção da laje delimitada pelo intervalo em análise e y é a altura do centróide de cada camada em relação ao centro geométrico da laje.

3.5.2 – Esforços Devidos à Protensão

Neste ponto sabe-se o valor de protensão necessário em cada vão para equilibrar a porcentagem FATORW da carga uniformemente distribuída atuante, “q”. Como um cabo só pode ser tensionado com uma mesma tensão, deve-se escolher qual dos valores de P_{11} , P_{U1} e P_I se adotará para a protensão final do cabo P . Portanto, deve-se fazer a transformação das forças P_{11} , P_{U1} e P_I em um equivalente de cordoalhas, que podem ser do tipo CP190RB 12.7mm ou a cordoalha do tipo CP190RB 15.2mm. Determina-se o número de cordoalhas a serem utilizadas e calcula-se a força final de protensão P no cabo (ver item 3.4.2). Definida a força que tensionará o cabo, calculam-se as combinações de carregamento e faz-se o teste das mesmas dentro dos limites de norma. Sabe-se que os cabos de protensão equilibrarão determinada porcentagem de carga. Assim, temos uma tensão em cada faixa da laje, devida à protensão, definida por

$$\sigma_p = \frac{P}{A_f} + \frac{Mp}{W_{si}} \quad (\text{equação 3.59})$$

em que

σ_p é a tensão na seção de concreto em cada faixa de laje devida à protensão;

P é a força final de protensão em cada faixa;

A_f é a área da seção de concreto de cada faixa;

Mp é o momento fletor devido a protensão, obtido da multiplicação da excentricidade do cabo multiplicada pela força P atuante no cabo mais o efeito hiperestático.

W_{si} é o módulo resistente da seção de laje considerada.

3.5.3 – Combinações de Carga para os Estados Limites de Utilização

Um carregamento é definido pela combinação das ações que tem probabilidade não desprezível de atuarem simultaneamente sobre a estrutura, durante um período de tempo pré-estabelecido. As combinações devem ser feitas de diferentes maneiras, de forma que possam ser determinados os efeitos mais desfavoráveis para a estrutura.

As combinações previstas para verificação dos estados limites de utilização são classificadas em quase-permanentes, freqüentes e raras, de acordo com a ordem de grandeza de permanência na estrutura.

Na formação das combinações, as cargas permanentes comparecem com seus valores característicos ($F_{gi,k}$) e as cargas variáveis com seus valores característicos multiplicados por um fator de redução ($\Psi F_{qi,k}$), onde os valores de Ψ acham-se definidos nas normas e dependem de cada tipo de combinação. São as seguintes combinações consideradas

a) Combinações Quase-Permanentes

Podem atuar durante grande parte do período de vida da estrutura. Utilizadas principalmente na verificação de deformações excessivas, abertura de fissuras, compressão excessiva.

b) Combinações Freqüentes

Se repetem muitas vezes durante o período de vida da estrutura. Utilizadas normalmente para verificação de formação ou abertura de fissuras e vibrações excessivas.

c) Combinações Raras

Podem ocorrer no máximo algumas vezes durante o período de vida da estrutura. São normalmente utilizadas para a verificação dos estados limites de formação de fissuras, abertura de fissuras e descompressão. Em geral, a força de protensão é considerada na combinação como carga permanente e com seu valor característico $P_k(x,t)$ já deduzido de todas as perdas de protensão.

A seguir, apresentam-se as combinações de serviço e tratam-se as fases mínimas para verificação.

i. Ato da Protensão Nesta situação, considera-se a carga permanente mobilizada (normalmente apenas o peso próprio), e a protensão apenas com as perdas imediatas. Verifica-se então se é respeitado o estado limite de formação de fissuras que podem surgir nas faces opostas à da ação da protensão. É uma fase temporária podendo a eventual fissuração ser controlada por armaduras passivas ou escalonamento das etapas de protensão. Verifica-se também a presença de compressão excessiva.

ii. Combinações Quase-Permanentes Nestas situações considera-se a força de protensão com seu valor após todas as perdas. Esta fase resume-se praticamente à seguinte combinação, conforme notas de BRÍGIDO (2000)

$$F_{d,ut} = F_{g,k} + 0,4 F_{q,k} \quad (\text{equação 3.60})$$

O objetivo é verificar se o estado limite de descompressão é respeitado, garantindo assim que para a carga quase permanente não se tenham tensões de tração no concreto. Isto é normalmente conseguido com o balanceamento da carga permanente.

iii. Combinações Frequentes Nestas situações considera-se a força de protensão com seu valor após todas as perdas. Nos casos usualmente encontrados, resume-se praticamente a seguinte combinação, conforme BRÍGIDO (2000)

$$F_{d,ut} = F_{g,k} + 0,6 F_{q,k} \quad (\text{equação 3.61})$$

O objetivo é verificar se o estado limite de formação de fissuras é respeitado, de forma a garantir que para combinação freqüente não se tenham fissuras no concreto, visando uma protensão limitada.

iv. Combinações Raras Nestas situações considera-se a força de protensão com seu valor após todas as perdas. Simplificadamente, resume-se a seguinte combinação

$$F_{d,ut} = F_{g,k} + F_{q,k} \quad (\text{equação 3.62})$$

em que

$F_{d,ut}$ é a carga de utilização;

$F_{g,k}$ é o carregamento permanente de cálculo;

$F_{q,k}$ é o carregamento variável.

O objetivo é verificar o estado de compressão excessiva (evitar fissuras longitudinais) e controlar a abertura máxima de fissuras.

3.5.4 – Verificação das Tensões Normais de Borda

Os estados limites de utilização (formação de fissuras, de descompressão e de compressão excessiva) podem ser verificados pela aplicação das fórmulas clássicas da Resistência dos Materiais, supondo regime elástico linear e considerando a seção bruta do concreto.

Trata-se de um processo aproximado, que não leva em conta a presença das armaduras passivas nem a variação da força de protensão com a deformação da estrutura, mas que é aceito pela maioria das normas.

Os limites de tensões no concreto, recomendados e definidos pelo ACI (2005) estão mostrados a seguir.

Valores recomendados de P/A

Limite mínimo 860kN/m^2

Limite máximo 3500kN/m^2

Valores recomendados para pré-compressão, após as perdas imediatas

Limite na zona de momento negativo $0,4.f_{ck}$

Limite na zona de momento positivo $0,6.f_{ck}$

As combinações devem ser comparadas com os limites de norma, tanto na borda inferior como na borda superior da laje. Determina-se um novo número de cabos caso alguma tensão de norma seja ultrapassada ou mantém-se o número de cabos caso tenham sido respeitados os limites.

3.6 – Estado Limite de Utilização

Da mesma maneira que no projeto de peças em concreto armado, no caso de elementos protendidos também se exige a verificação de que algum dos estados limites venha a ser atingido. As normas prevêm dois tipos básicos de estado limite os estados limites de

utilização e os estados limites últimos. Os estados limites de utilização referem-se ao comportamento das estruturas quando submetido às cargas normais de uso, ou seja, em situações de utilização (em "Regime de Serviço", como também são tratados na literatura). Estas verificações visam garantir as boas condições de comportamento da peça quanto à durabilidade, conforto e aparência. Os estados limites últimos referem-se a situações que, se atingidas, levariam a peça ao colapso, quer pelo esmagamento do concreto, quer pela deformação excessiva do aço (situações normalmente designadas como "Regime de Ruptura"). Na determinação das tensões relativas aos estados limites, aplica-se coeficientes de segurança (majoração para esforços e minoração para as resistências características dos materiais).

São os seguintes os estados limites que devem ser verificados em regime de serviço

a) Estado Limite de Formação de Fissuras

Estado em que se inicia a formação de fissuras. É uma situação particularmente importante, quando a utilização da estrutura requer a eliminação de fissuras para determinadas combinações de carregamentos. Por definição, este estado limite é atingido quando a máxima tensão de tração no concreto atinge o valor f_{ctk} .

b) Estado Limite de Abertura de Fissuras

Estado em que as fissuras se apresentam com aberturas iguais aos máximos especificados para a construção. Deve-se garantir, que a abertura de fissuras não prejudicará a utilização e durabilidade da estrutura. As normas fixam a abertura das fissuras em função do grau de agressividade do ambiente e da sensibilidade do aço.

c) Estado Limite de Deformações Excessivas

Estado em que as deformações atingem os limites estabelecidos para a utilização normal da construção. Os deslocamentos em serviço (flechas e rotações) devem ser limitados de forma a não comprometer a aparência da estrutura, a integridade de elementos não estruturais e o próprio funcionamento da estrutura ou de equipamentos. Geralmente as normas estabelecem limites para a relação L/f , em que L é o vão da viga ou laje, e f é o deslocamento máximo (flecha) desse vão.

Caso $L/f > 300$, ou $f < L/300$, considera-se verificado o E.L.D.E.

d) Estado Limite de Descompressão

Estado no qual em um ou mais pontos da seção transversal a tensão normal é nula, não havendo ação no restante da seção. Caracteriza a passagem da situação de uma seção totalmente comprimida para o surgimento de tensão de tração no concreto.

e) Estado Limite de Compressão Excessiva

Estado em que as tensões de compressão atingem um limite convencional estabelecido. Excessivas tensões de compressão no concreto em serviço podem gerar fissuras longitudinais além de uma elevada deformação por fluência, com significativas conseqüências para as perdas de protensão. O valor $0,6.f_{ck}$ tem sido recomendado por diversas normas como um limite que não deve ser atingido em peças protendidas, para qualquer combinação de carga.

Verificar os estados limites de utilização consiste, na prática, em comparar os níveis de carga para os quais estes estados limites são atingidos, com os valores de combinações de cargas de serviço previstos para a estrutura.

Segundo a própria definição de Concreto Protendido, o objetivo da protensão é impedir ou limitar a fissuração do concreto nas condições de serviço. Portanto, as verificações dos EL de Formação de Fissuras, Abertura de Fissuras e Compressão Excessiva são normalmente as primeiras verificações efetuadas nas peças protendidas, precedendo às verificações da peça dos Estados Limites Últimos.

Pode-se se dizer que de uma forma geral, são os Estados Limites de Utilização que governam o dimensionamento e o traçado dos cabos nas peças protendidas. Ao contrário do concreto armado convencional, onde normalmente o ELU é que é o determinante no projeto das peças.

A verificação de tensões feita através da consideração das hipóteses simplificadoras da Resistência dos Materiais é suficiente para avaliar, com bons resultados, as peças com protensão total ou limitada, situações em que não há fissuras.

A protensão parcial, contudo, exige a verificação de abertura de fissuras para as combinações freqüentes. Muitas normas admitem uma verificação indireta da abertura de fissuras através da limitação da tensão de tração no concreto. Estas tensões limites são maiores que a resistência à tração do concreto e são comparadas com tensões fictícias, calculadas

hipoteticamente com base na seção não fissurada. Este critério está baseado em resultados experimentais, que indicam que os limites de abertura de fissuras não serão ultrapassados se nas combinações de carga analisadas estas tensões hipotéticas calculadas no Estádio I não ultrapassarem os limites fixados. Desta forma, fica inclusive estabelecida uma correspondência entre aberturas de fissuras e valores limites de tensão de tração.

A filosofia do CEB/Eurocode (1993) ao contrário, não fixa limites de tensões de tração, nem no concreto e nem no aço, mas sim limites de abertura de fissuras sob cargas mais frequentes, estabelecendo condições para o cálculo das armaduras aderentes, escolha de diâmetro e disposição de barras, de modo a serem satisfeitas as exigências estabelecidas. Isso representa uma passagem, sem solução de continuidade, do concreto armado convencional através da protensão parcial até o concreto com protensão completa, exigindo em todos os casos, indistintamente, um mínimo de armadura aderente longitudinal de tração.

Pode-se dizer então, resumindo, que se as condições de utilização permitem acentuada fissuração sob cargas permanentes, a solução em concreto armado convencional é a indicada. Se, ao contrário, sob cargas totais de serviço, a fissuração é indesejável, é o caso de preferir-se a protensão completa. Todas as demais situações intermediárias entre estas citadas, constituem-se, sem dúvida, um vasto campo de exploração de pesquisa e projeto, com utilização da protensão parcial e limitada.

3.6.1 – Cálculo das Forças Hiperestáticas

A seguir, mostra-se a metodologia empregada para aplicar os carregamentos na laje, devidos à protensão, e refazer a análise estrutural.

Pode-se dividir esta etapa em cinco partes, explicadas sucintamente a seguir

Na primeira parte, conhecendo-se o valor do carregamento uniformemente distribuído para cada elemento, é feita a distribuição desse carregamento nos oito nós de cada elemento. Isso é feito multiplicando a área do elemento pelo valor da carga e posteriormente aplicando $1/12$ deste valor, com o sinal trocado, nos nós das extremidades, e $1/3$ do mesmo valor nos nós internos aos segmentos que definem o elemento, segundo as expressões $(x.x)$ e $(x.x)$

$$f_{\text{nó (1,3,5,7)}} = -W_{\text{ele}} \cdot (1/12) \quad (\text{equação 3.63})$$

$$f_{\text{nó (2,4,6,8)}} = W_{\text{ele}} \cdot (1/3) \quad (\text{equação 3.64})$$

em que

$f_{\text{nó}}$ é a força aplicada em cada nó indicado

W_{ele} é o carregamento distribuído em cada elemento

De posse dos valores de carregamentos de cada nó, a segunda parte consiste na montagem do vetor de cargas da estrutura.

Na terceira parte calcula-se as reações nos apoios devidas unicamente à protensão e também se alteram as condições de contorno do problema estudado. Essa alteração é feita analisando cada vínculo ou pilar, sendo que aqueles que estiverem submetidos a reações negativas, são eliminados. Assim, o valor da reação é aplicada como carga nodal no nó que antes estava vinculado e agora está livre.

A quarta parte consiste no zeramento das linhas e colunas correspondentes aos nós vinculados, com o cuidado de se manter o valor unitário na diagonal principal, para que seja feita a resolução do sistema.

E finalmente, na quinta parte, resolve-se o sistema linear, determinando-se os valores dos momentos hiperestáticos.

O carregamento para a verificação no estado limite último é calculado através da combinação $F_{\text{elu},k}$

$$F_{\text{elu},k} = \gamma_g \cdot F_g + \gamma_q \cdot F_q + \gamma_{hp} \cdot F_p \quad (\text{equação 3.65})$$

em que

$F_{elu,k}$ é a solicitação considerado para a análise no Estado Limite Último

F_g é a solicitação permanente

F_q é a solicitação variável

F_p é a solicitação devido às forças hiperestáticas

γ_g é o coeficiente de majoração das cargas permanentes, que no presente trabalho adota-se o valor 1,4

γ_q é o coeficiente de majoração das cargas variáveis, que no presente trabalho adota-se o valor 1,4

γ_p vale 1,2 quando o efeito do momento hiperestático de protensão é desfavorável e 0,9 quando o efeito do momento de protensão é favorável.

O valor destes coeficientes foram extraídos da NBR 6118 (2004).

3.6.2 – Determinação da Armadura Passiva

A armadura passiva é dimensionada através das expressões a seguir. As variáveis envolvidas estão mostradas na figura 3.22.

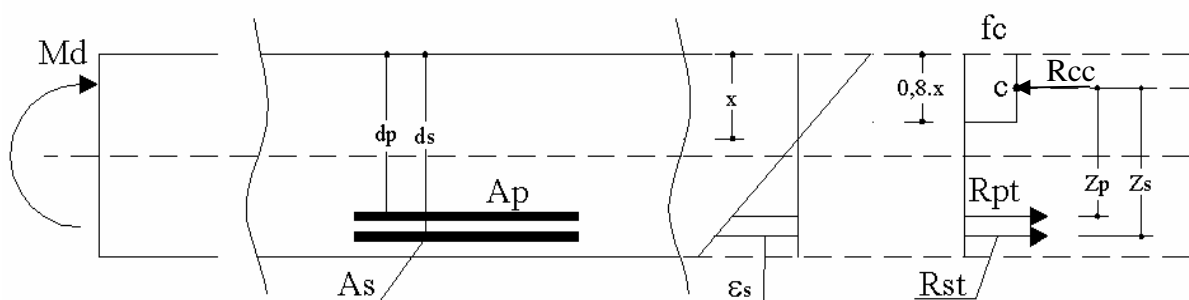


Figura 3.22 – Representação das resultantes atuantes em uma laje protendida

O momento de cálculo atuante na seção protendida de concreto é dado por

$$M_d = \gamma_g \cdot M_g + \gamma_q \cdot M_q + \gamma_p \cdot M_{hp} \quad (\text{equação 3.66})$$

em que

M_d é o momento fletor atuante na seção de laje;

M_g é o momento devido a carga permanente;

M_q é o momento devido as cargas variáveis;

M_{hp} é o momento hiperestático de protensão;

γ_g é o coeficiente de majoração das cargas permanentes, que no presente trabalho adota-se o valor 1,4

γ_q é o coeficiente de majoração das cargas variáveis, que no presente trabalho adota-se o valor 1,4

γ_p vale 1,2 quando o efeito do momento hiperestático de protensão é desfavorável e 0,9 quando o efeito do momento de protensão é favorável.

A equação de equilíbrio na direção das armaduras, ver figura 3.16, é dada por

$$R_{st} + R_{pt} - R_{cc} = 0 \quad (\text{equação 3.67})$$

em que

R_{st} é a resultante de forças da armadura passiva

R_{pt} é a resultante de forças da armadura ativa

R_{cc} é a resultante de forças da área comprimida de concreto

Cada uma das resultantes pode ser escrita como

Para a armadura passiva

$$R_{st} = f_{yd} \cdot A_s \quad (\text{equação 3.68})$$

em que

f_{yd} é a tensão de escoamento da armadura passiva

A_s é a área de armadura passiva

Para a armadura de protensão

$$R_{pt} = \sigma_{pu} \cdot A_p \quad (\text{equação 3.69})$$

σ_{pu} é a tensão existente na armadura ativa, $\sigma_{pu} = \sigma_p + \Delta\sigma$. Para elementos com relação vão/altura útil igual ou menor que 35

$\Delta\sigma_{pu} = 70 \text{ MPa} + f_{ck}/100\rho_p$, não podendo ultrapassar 420 MPa;

Para elementos com relação vão/altura útil maior que 35

$\Delta\sigma_{pu} = 70 \text{ MPa} + f_{ck}/300\rho_p$, não podendo ultrapassar 210 MPa;

sendo, conforme a NBR-6118 (2004)

$$\rho_p = \frac{A_p}{b_c \cdot d_p} \quad (\text{equação 3.70})$$

sendo

σ_{pu} e f_{ck} são dados em MPa;

ρ_p é a taxa geométrica da armadura ativa;

b_c é a largura da mesa de compressão;

d_p é a altura útil referida à armadura ativa.

A_p é a área de armadura ativa

E, para a seção de concreto, a resultante é dada por

$$R_{cc} = 0,8 \cdot b \cdot f_c \cdot x_{LN} \quad (\text{equação 3.71})$$

em que

b é a largura da seção de laje considerada

f_c é a tensão limite de compressão na área de concreto comprimido

x_{LN} é a posição da linha neutra em relação à borda comprimida da laje

Do somatório de momentos em torno do ponto C, ver figura 3.16, obtêm-se a seguinte expressão

$$R_{st} \cdot Z_s + R_{pt} \cdot Z_p - Md = 0 \quad (\text{equação 3.72})$$

Sabendo-se que os braços de alavanca das resultantes das armaduras são obtidos por

$$Z_s = ds - 0,4 \cdot x_{LN} \quad (\text{equação 3.73})$$

$$Z_p = dp - 0,4 \cdot x_{LN} \quad (\text{equação 3.74})$$

E, substituindo-se as expressões (3.68), (3.73) e (3.74) na expressão (3.72), obtêm-se, após alguns algebrismos a expressão (3.75), que determina a área de armadura passiva

$$A_s = \frac{0,8 \cdot b \cdot f_c \cdot x_{LN} - R_{pt}}{f_y d} \quad (\text{equação 3.75})$$

3.7 – Considerações Finais

Com o objetivo de resumir toda a metodologia exposta, faz-se necessário listar em tópicos o procedimento de análise e projeto de uma laje protendida através do modelo proposto

1 – Determinam-se os parâmetros de projeto baseado em alguns pressupostos específicos e básicos, tais como a consideração da relação entre o vão ideal e a espessura de laje requerida, modulação de pilares, etc., observando as recomendações do item 3.2.

- Introduz-se a geometria do problema através das coordenadas nodais, numeração dos elementos e conectividades, espessura da laje, módulos de Elasticidade e Poisson, número de camadas, dimensões dos pilares, além de indicar as condições de contorno e carregamento atuante.

- Determinam-se os fatores referentes à protensão trecho reto, cobrimento mínimo, porcentagem do carregamento a ser equilibrado e os coeficientes α , μ e γ .

- É equacionada a geometria dos cabos, de acordo com o item 3.4.1, e feita a derivação da mesma, com o objetivo de se calcular as perdas por atrito.

- São calculadas as perdas imediatas da força de protensão para o traçado de cabo escolhido (ver item 3.4.3) através dos parâmetros trecho reto, cobrimento e posição do cabo e α .

2 – Faz-se uma primeira análise linear da estrutura modelada em elementos finitos, seguindo-se a metodologia exposta no capítulo 2

- É feita uma análise linear da laje com o carregamento total com o objetivo de se determinar os esforços (ou solicitações) atuantes para, a partir dos esforços cortantes, definir-se as faixas de protensão (ver item 3.5.1).

- É feita uma análise linear para cada um dos carregamentos, com o objetivo de se determinarem os esforços devidos ao peso próprio, ao revestimento e a sobrecarga. Determinam-se, portanto, os momentos fletores internos a cada faixa ao longo de cada linha de pontos de integração perpendiculares às faixas. Faz-se isso para cada um dos

carregamentos em separado, para posterior utilização nas combinações de serviço, com o objetivo de fazer a verificação do Estado Limite de Serviço (ver item 3.5.1)

3 - Para cada faixa é calculado o número de cabos necessários para equilibrar a porcentagem escolhida de carga total. Isto é feito através do Método do Equilíbrio de Cargas, detalhado no item 3.4. O número de cabos é determinado seguindo-se metodologia exposta no item 3.4.2.

4 – Definido este número de cabos, faz-se uma segunda análise linear, considerando-se apenas as cargas provenientes da ação da protensão

- Ao se fazer esta análise, objetiva-se a obtenção dos esforços devidos à protensão, para se utilizar nas combinações de serviço.

5 - Combinam-se os esforços da protensão obtidos desta segunda análise, mais os esforços devidos ao carregamento (peso-próprio, revestimento e sobrecarga) obtidos na primeira análise, de acordo com as seguintes combinações de serviço (item 3.5.3)

a) Combinação Ato Protensão $F_{d,ut} = F_{g,k}$, sendo que $F_{g,k}$ representa os esforços devidos à protensão, ao peso próprio e ao revestimento.

b) Combinação Quase Permanente $F_{d,ut} = F_{g,k} + 0,4 F_{q,k}$, sendo que $F_{q,k}$ representa os esforços devidos à sobrecarga.

c) Combinação Frequente $F_{d,ut} = F_{g,k} + 0,6 F_{q,k}$

d) Combinação Rara $F_{d,ut} = F_{g,k} + F_{q,k}$

- Essas combinações são diretamente aplicadas na expressão generalizada 3.76, sendo que cada parcela desta expressão correspondente à respectiva parcela de cada uma das forças mostradas nas combinações acima. De posse dos esforços da primeira e segunda análise, do módulo resistente e da área de cada faixa, determinam-se as tensões existentes nas bordas inferiores e superiores da laje para os pontos mais solicitados.

$$\sigma_c = \frac{N_p}{A} \pm \frac{M_p}{W_{si}} \pm \frac{M_q}{W_{si}} \pm \frac{M_g}{W_{si}} \quad (\text{equação 3.76})$$

em que

σ_c são as tensões existentes

N_p é o esforço normal de protensão atuante

A é a área da seção transversal da faixa

M_p é o momento fletor devido à protensão (momento hiperestático mais o momento obtido da excentricidade do cabo multiplicado pela força P atuante no cabo)

W_{si} é o módulo resistente de cada seção

M_q é o momento devido às cargas variáveis

M_g é o momento devido às cargas permanentes

- Comparam-se estas tensões obtidas com as tensões recomendadas em norma

a) Limite na Zona de Momento Negativo = $0.4 \cdot f_{ck}$

b) Limite na Zona de Momento Positivo = $0.6 \cdot f_{ck}$

5 – Escolhe-se a quantidade de cabos, baseando-se nas tensões existentes (tensões obtidas para as combinações de serviço) e nas recomendações das normas referentes aos limites de tensões

- Caso o número de cabos escolhido venha a ultrapassar os limites de tensão recomendados (ver item 3.5.4), troca-se o número de cabos.

- Para o novo número de cabos, são refeitas a primeira e a segunda análise e, realiza-se nova comparação de tensões.

7 – De posse dos resultados obtidos na análise da estrutura sob a ação exclusiva da protensão, ou seja, da segunda análise, é feita uma terceira análise, eliminando-se os vínculos em que as reações oriundas da análise citada são negativas e aplicam-se, nestes pontos, as reações

referidas. O objetivo desta análise é a separação dos momentos hiperestáticos, necessários para as verificações no ELU (ver item 3.6.1).

8 – Aplica-se a combinação de esforços para a obtenção das tensões para a verificação do E.L.U., através da metodologia detalhada no item 3.6.

9 – Dimensiona-se a armadura passiva, através da formulação mostrada em 3.6.2.

Portanto, a seleção inicial dos parâmetros de projeto, tais como vãos adotados, dimensões dos elementos, porcentagens de carregamento, trecho reto, cobrimento, são de primordial importância para uma otimização de projeto, uma vez que a consideração correta destes parâmetros eliminaria a necessidade de re-análises, evitando a um processo lento e massante. Entra em jogo a experiência do projetista e o grau de conhecimento desejável para se projetar. É necessário um bom entendimento dos critérios de projeto para projetar de forma eficaz. Entre estes parâmetros, pode-se citar o cobrimento dos cabos, taxa mínima de compressão, porcentagens mínimas e máximas da carga permanente a equilibrar, tensão limite dos materiais a ser utilizados, fatores de carregamento, perfil dos cabos, características geométricas, entre outras.

4 - Resultados

A seguir, analisar-se-á uma série de exemplos com o intuito de verificar a metodologia proposta no item 3.4.

4.1 – Placa Elástica Linear

Como primeiro exemplo, é analisada uma placa quadrada, simplesmente apoiada nos bordos, com carregamento uniforme. O objetivo desse exemplo é verificar a eficácia do elemento de placa com inclusão dos graus de liberdade do Estado Plano.

A metodologia empregada é a de comparar os resultados obtidos pelo módulo proposto (ELEMIND) com os resultados obtidos por HINTON e OWEN (1984) (MINDLIN) e pelo software comercial SAP 2000.

Devido à simetria do problema, foi analisado somente um quarto da placa, ver figura 4.1._

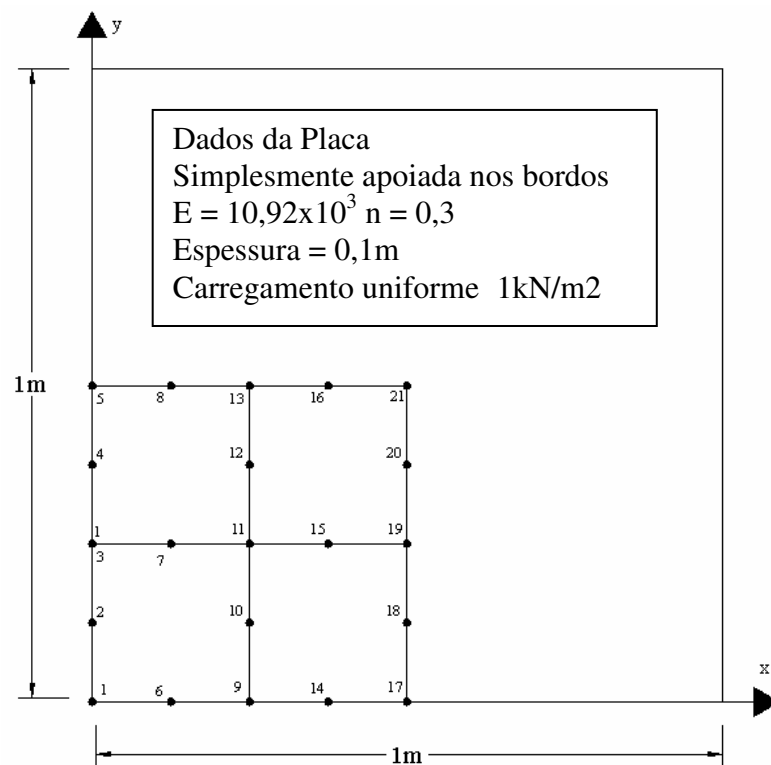


Figura 4.1 – Placa utilizada na comparação entre os programas

A comparação de resultados está mostrada nas tabelas que se seguem. Compararam-se os deslocamentos nodais (uma translação no sentido perpendicular ao da placa e duas rotações) e os esforços desenvolvidos na laje (momento na direção x, momento na direção y, momento transversal, cortante 1 e cortante 2)

Os valores obtidos pelas três metodologias para os deslocamentos nodais encontram-se na tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Valores dos deslocamentos nodais

NÓ	w	θ1	θ2
NUM.	metros	Radianos	Radianos
RESULTADOS DO SAP 2000			
1	0,000000	0,000000	0,000000
3	0,000000	0,000000	0,009178
5	0,000000	0,000000	0,012866
9	0,000000	0,009179	0,000000
11	0,002250	0,006245	0,006246
13	0,003114	0,000000	0,008805

Pela solução analítica (sem cortante) o deslocamento obtido no nó 21 é de 0,00406m. Na tabela 4.2 mostra-se a comparação dos valores obtidos pelo módulo proposto (ELEMIND) com os valores obtidos por HINTON e OWEN (1984) (MINDLIN) e pelo programa SAP 2000.

Tabela 4.2 – Correlação dos deslocamentos

NÓ	w	θ_1	θ_2
NUM.	metros	Radianos	Radianos
CORRELAÇÃO MINDLIN / ELEMIND			
1	-	-	-
3	-	-	1.006001
5	-	-	1.003415
9	-	1.006001	-
11	0.999557	1.003501	1.003501
13	0.999355	-	1.00389
17	-	1.003415	-
19	0.999355	1.00389	-
21	0.999766	-	-
CORRELAÇÃO SAP / ELEMIND			
1	-	-	-
3	-	-	0.933483
5	-	-	0.95516
9	-	0.933584	-
11	0.996457	0.993794	0.993953
13	1.004192	-	1.007437
17	-	0.954937	-
19	1.004192	1.007323	-
21	1.013115	-	-

Em termos de deslocamentos, os resultados obtidos pelo programa proposto neste trabalho são praticamente iguais aos resultados de OWEN E HINTON (1973) os do programa SAP 2000, ver Tabelas 4.1 e 4.2.

A seguir, será mostrada a comparação das tensões generalizadas de duas maneiras distintas

A primeira comparação consiste em analisar o resultado obtido no SAP 2000 e no programa MINDLIN e comparar com os valores calculados no programa ELEMIND. Tanto a malha de elementos finitos utilizada para a modelagem do problema no programa SAP 2000, bem como a malha utilizada no programa MINDLIN, possui 16 elementos finitos. Para as três malhas,

com 16 elementos finitos, utilizadas neste exemplo, as solicitações são obtidas nos pontos de integração.

A segunda comparação tem o objetivo de estudar a variação das solicitações ao se mudar o refinamento da malha de elementos finitos. Serão, portanto, utilizadas 3 malhas com 16, 64 e 256 elementos. As solicitações serão calculadas ao longo da Linha de Análise indicada na figura 4.2. Como estas linhas estão sobre os pontos de integração, automaticamente as solicitações são obtidas nos pontos de integração cruzados por estas linhas. A figura 4.2 apresenta os três tipos de malhas utilizadas para a comparação.

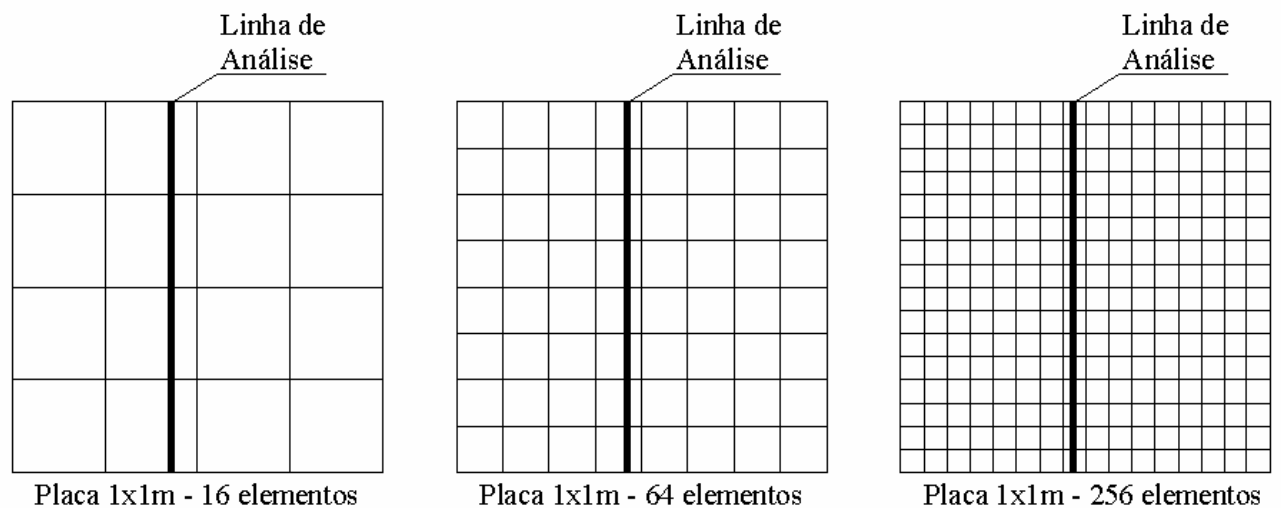


Figura 4.2 – Malhas utilizadas para a comparação dos esforços

A figura 4.3 mostra os esforços cortantes Q_y atuantes na laje do exemplo. Nesta figura, estão inseridas as duas comparações a comparação de resultados entre os programas, bem como o refinamento de malha dentro do programa ELEMIND.

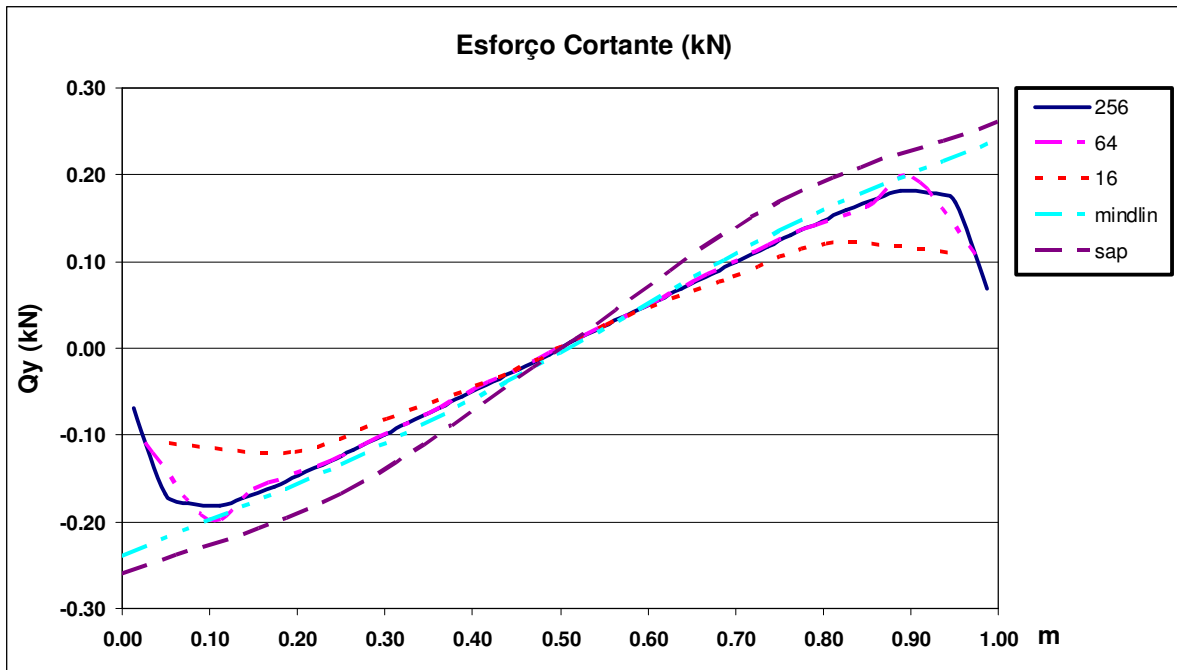


Figura 4.3 – Comparação dos Esforços Cortantes Q_y

A figura 4.4 apresenta a comparação para os Momentos Fletores M_y ao longo da laje.

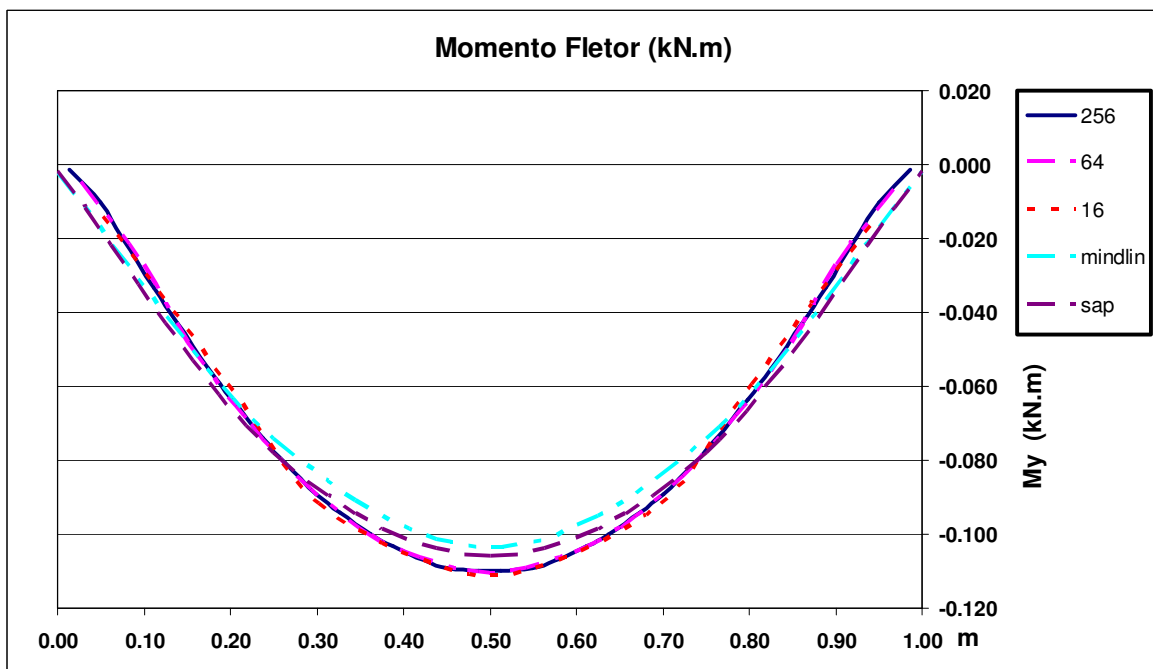


Figura 4.4 – Comparação dos Momentos Fletores M_y

4.2 – Deslocamentos e Tensões com Aplicação de Carga de Membrana

Neste segundo exemplo, o objetivo é verificar a eficácia do modelo proposto considerando a aplicação de cargas de membrana, ou seja, aplicadas no plano da laje. Descreve-se a laje analisada, mostrando a discretização da mesma e numerando os nós dos quais serão obtidos e comparados os deslocamentos e as tensões, conforme a figura 4.5

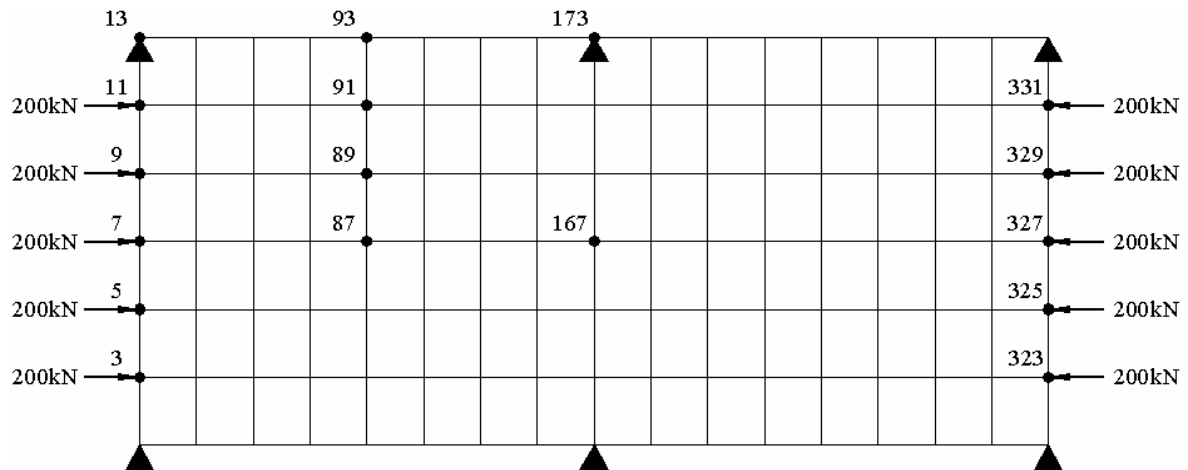


Figura 4.5 – Representação da discretização da laje e nós analisados

Parâmetros empregados

- Dimensões 10m x 4,5m
- Dimensões dos Apoios 0,25m x 0,25m, do tipo simplesmente apoiados
- Espessura 0,15m
- Módulos de Poisson e de Elasticidade 0,25 e 20.000.000kN/m²
- Número de elementos 48
- Número de nós 333
- Carregamento uniforme -6kN/m²

O mesmo exemplo foi desenvolvido no software comercial SAP 2000, utilizando o elemento do tipo Shell associado com a opção Thick Plate. Os resultados obtidos são comparados e demonstrados nas figuras a seguir. São comparadas as solicitações (momentos na direção y e x e cortantes x e y).

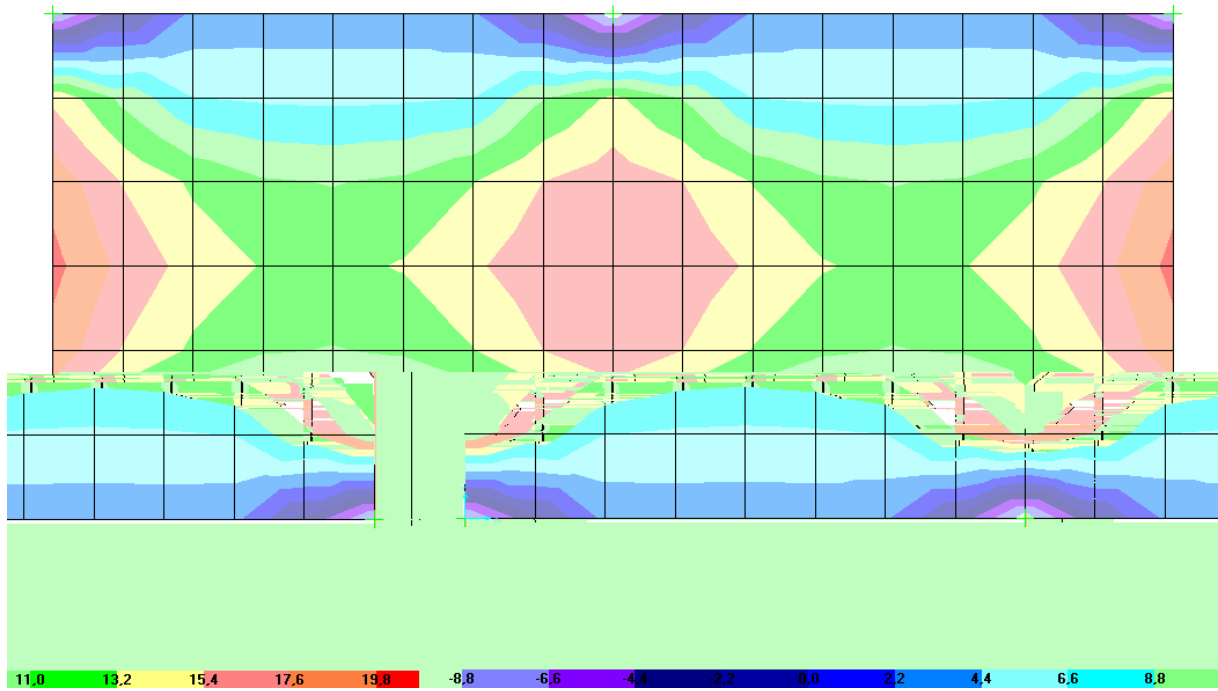


Figura 4.6 – Resultados obtidos do SAP 2000 para o momento na direção y

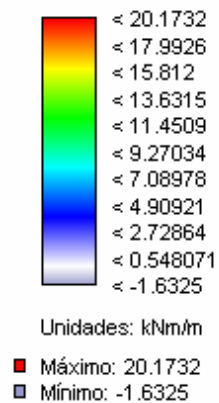
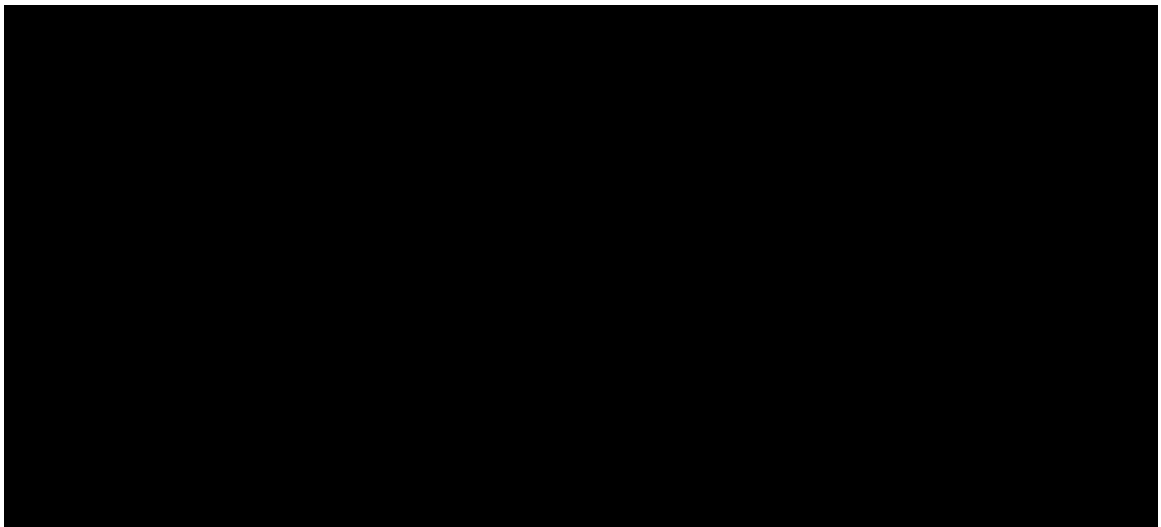


Figura 4.7 – Resultados obtidos do modelo proposto para o momento na direção y

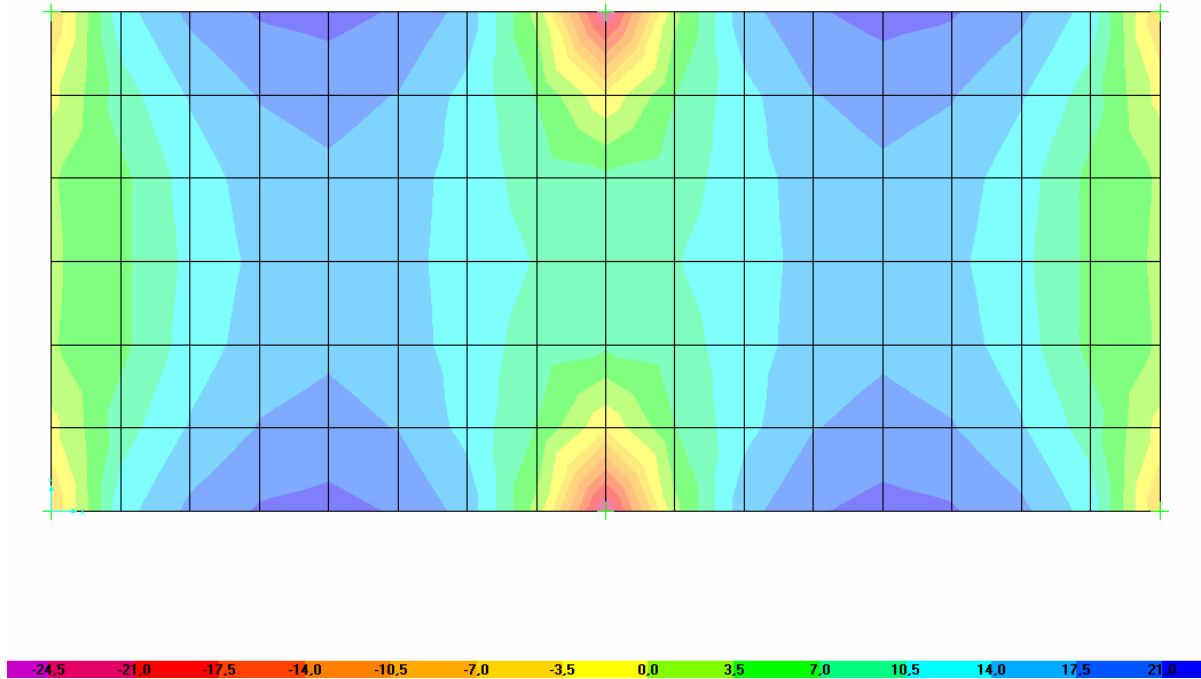


Figura 4.8 – Resultados obtidos do SAP 2000 para o momento na direção x

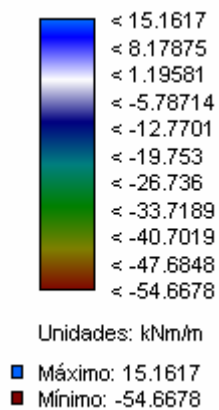
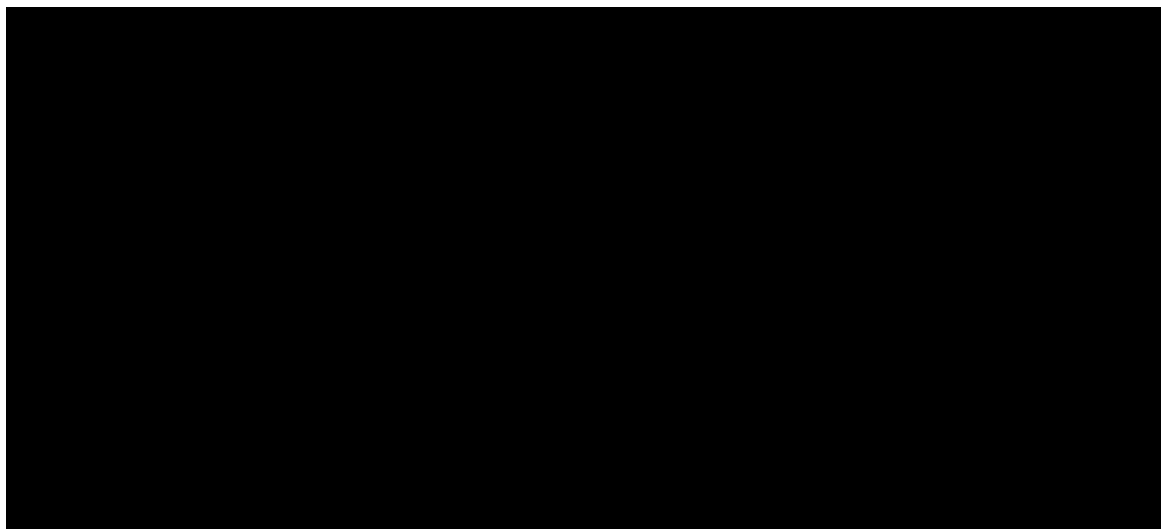


Figura 4.9 – Resultados obtidos do modelo proposto para o momento na direção x

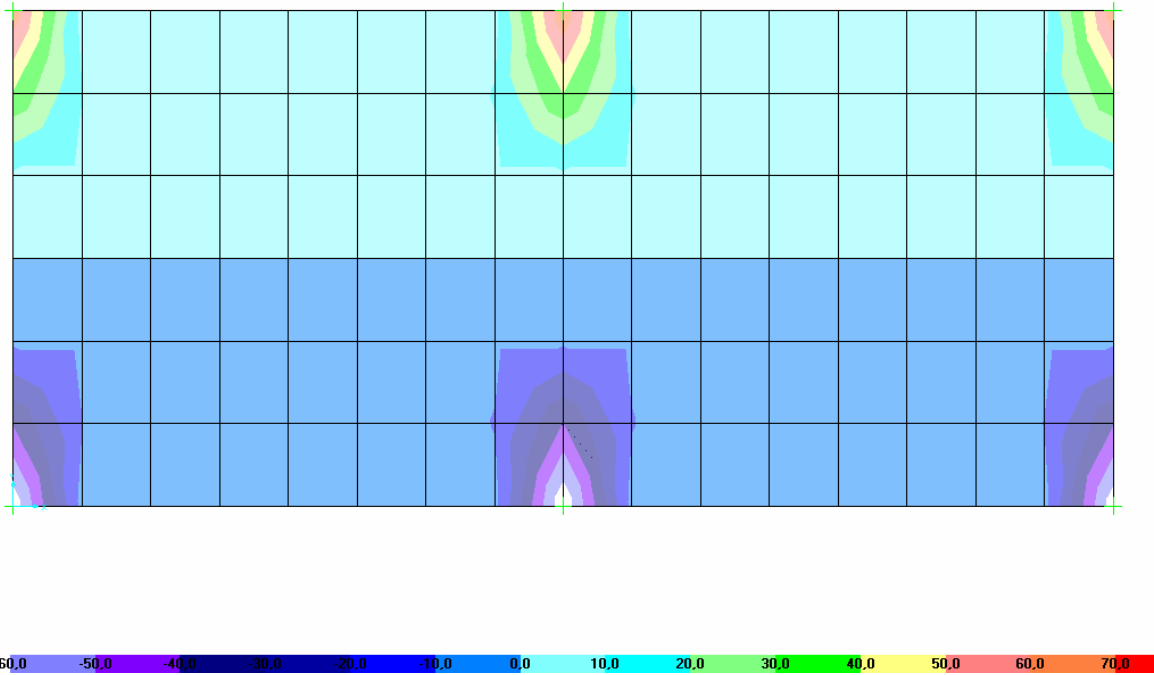
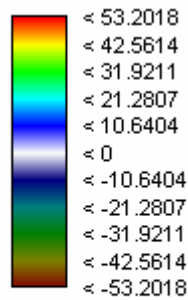
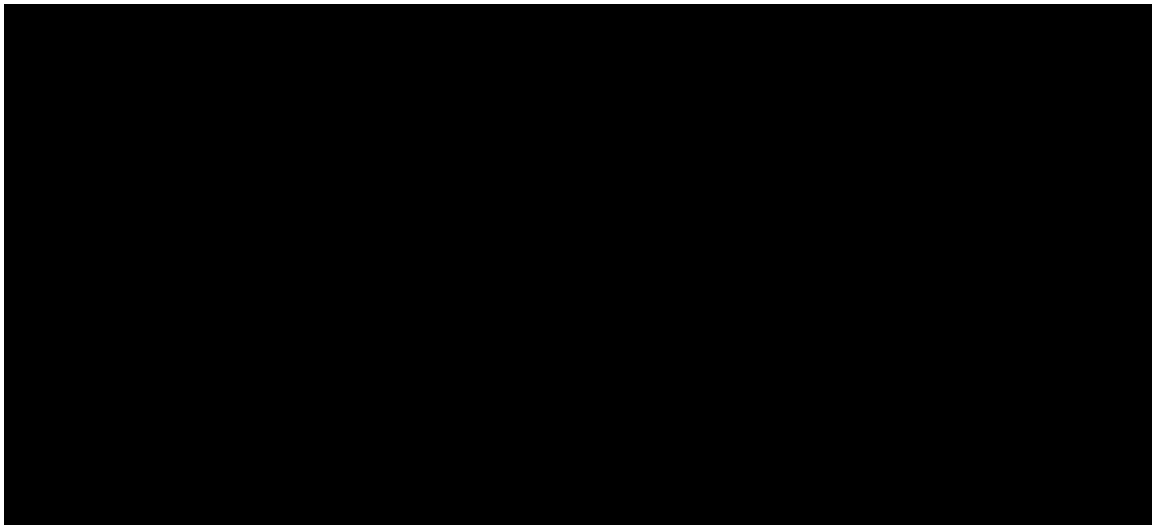


Figura 4.10 – Resultados obtidos do SAP 2000 para o cortante na direção y



Unidades: kN/m

- Máximo: 53.2018
- Mínimo: -53.2018

Figura 4.11 – Resultados obtidos do modelo proposto para o cortante na direção y

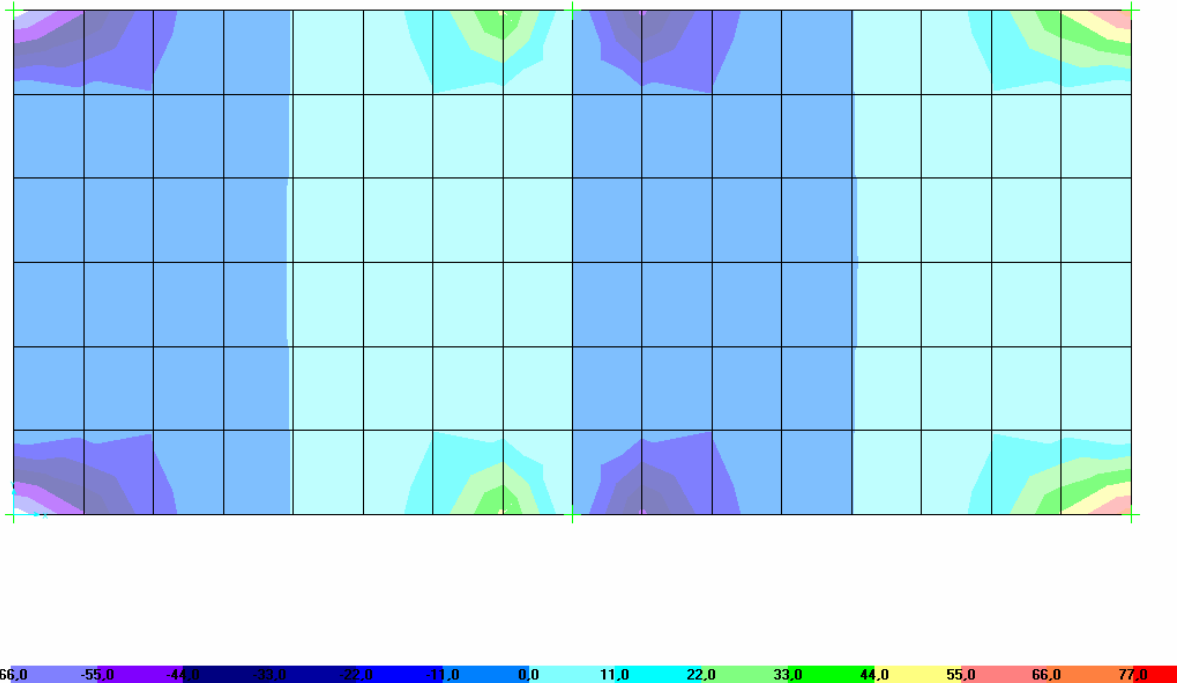
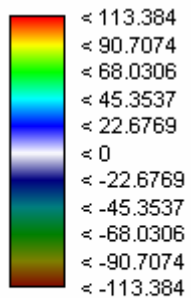
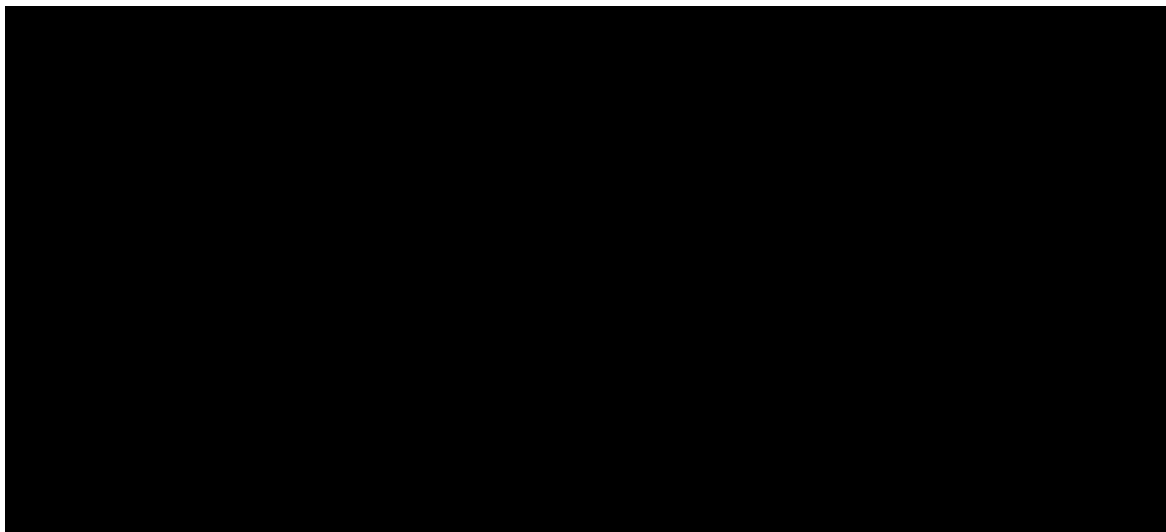


Figura 4.12 - Resultados obtidos do SAP 2000 para o cortante na direção x



Unidades: kN/m
 ■ Máximo: 113.384
 ■ Mínimo: -113.384

Figura 4.13 – Resultados obtidos do modelo proposto para o cortante na direção x

4.3 - Traçado do Cabo

Neste terceiro exemplo, o objetivo é verificar a eficácia do modelo proposto na geração da geometria do cabo e no cálculo das perdas devidas ao atrito no mesmo.

Analisa-se uma laje quadrada (16mx16m), de espessura 20cm e apoiada sobre 16 pilares, conforme mostra a figura 4.14.

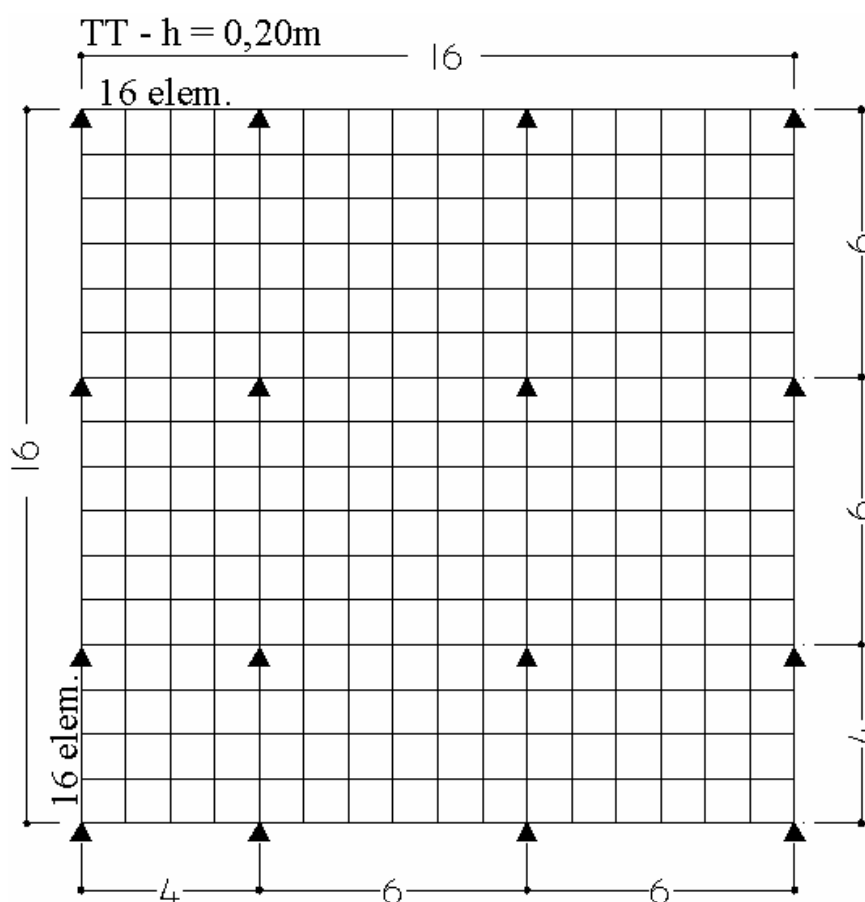


Figura 4.14 – Laje considerada no terceiro exemplo

Foram utilizados os seguintes valores para os parâmetros iniciais

- Trecho reto no início e no final do cabo 50cm
- Cobrimento 3cm
- Espessura 20cm
- O coeficiente α utilizado vale 0,1. Ele representa a porcentagem que multiplicada pelo vão resultará em uma distância que indica o ponto de inflexão do cabo.

- Vãos respectivamente com 4m, 6m e 6m
- Número de seções analisadas por vão (NSV) 10

Na tabela 4.3 encontram-se os valores obtidos para as coordenadas do cabo (X_{acum} e Y), a derivadas acumuladas da posição do cabo (α) (ver conceito no item 3.4.2.1), as perdas por atrito ($\Delta\sigma_p$) e as derivadas dos cabos DY .

Nas figuras 4.15 e 4.16 estão plotados, respectivamente, o traçado do cabo e as perdas por atrito ao longo da laje, com uma defasagem de 0,5m para a esquerda.

Os resultados graficados na figura 4.14 comprovam a eficácia da metodologia proposta na geração da geometria do cabo. Já em relação aos resultados mostrados na figura 4.15, verifica-se que as perdas são sempre crescentes, como era esperado. Também é possível visualizar que as perdas são mais significativas nos trechos onde a inclinação do cabo é maior.

Tabela 4.3 – Abscissas do cabo, derivadas acumuladas, perdas por atrito, ordenadas do cabo e derivadas das ordenadas do cabo

X_{ACUM} (m)	α	$\Delta\sigma_p^m$ (kN)	Y (m)	DY
0.15	2.52E-02	1.03E+00	-1.96E-03	2.52E-02
0.3	4.48E-02	1.85E+00	-7.28E-03	4.48E-02
0.45	5.88E-02	2.46E+00	-1.51E-02	5.88E-02
0.6	6.72E-02	2.85E+00	-2.46E-02	6.72E-02
0.75	7.00E-02	3.02E+00	-3.50E-02	7.00E-02
0.9	7.28E-02	3.19E+00	-4.54E-02	7.28E-02
1.05	8.12E-02	3.58E+00	-5.49E-02	8.12E-02
1.2	9.52E-02	4.13E+00	-6.27E-02	9.52E-02
1.35	1.15E-01	5.03E+00	-6.80E-02	1.15E-01
1.5	1.40E-01	6.09E+00	-7.00E-02	1.40E-01
1.66	1.54E-01	6.72E+00	-6.89E-02	1.40E-02
1.82	1.68E-01	7.35E+00	-6.55E-02	2.80E-02
1.98	1.82E-01	7.98E+00	-5.99E-02	4.20E-02
2.14	1.96E-01	8.61E+00	-5.21E-02	5.60E-02
2.3	2.10E-01	9.25E+00	-4.20E-02	7.00E-02
2.46	2.24E-01	9.89E+00	-2.97E-02	8.40E-02
2.62	2.38E-01	1.05E+01	-1.51E-02	9.80E-02
2.78	2.52E-01	1.12E+01	1.68E-03	1.12E-01
2.94	2.66E-01	1.18E+01	2.07E-02	1.26E-01
3.1	2.80E-01	1.25E+01	4.20E-02	1.40E-01
3.14	2.94E-01	1.31E+01	4.73E-02	1.40E-02
3.18	3.08E-01	1.37E+01	5.21E-02	2.80E-02
3.22	3.22E-01	1.43E+01	5.63E-02	4.20E-02
3.26	3.36E-01	1.49E+01	5.99E-02	5.60E-02
3.3	3.50E-01	1.55E+01	6.30E-02	7.00E-02
3.34	3.64E-01	1.61E+01	6.55E-02	8.40E-02
3.38	3.78E-01	1.67E+01	6.75E-02	9.80E-02
3.42	3.92E-01	1.73E+01	6.89E-02	1.12E-01
3.46	4.06E-01	1.80E+01	6.97E-02	1.26E-01
3.5	4.20E-01	1.86E+01	7.00E-02	1.40E-01
3.56	4.29E-01	1.90E+01	6.97E-02	9.33E-03
3.62	4.39E-01	1.94E+01	6.89E-02	1.87E-02
3.68	4.48E-01	1.99E+01	6.75E-02	2.80E-02
3.74	4.57E-01	2.03E+01	6.55E-02	3.73E-02
3.8	4.67E-01	2.07E+01	6.30E-02	4.67E-02
3.86	4.76E-01	2.12E+01	5.99E-02	5.60E-02
3.92	4.85E-01	2.16E+01	5.63E-02	6.53E-02
3.98	4.95E-01	2.20E+01	5.21E-02	7.47E-02
4.04	5.04E-01	2.25E+01	4.73E-02	8.40E-02
4.1	5.13E-01	2.29E+01	4.20E-02	9.33E-02
4.34	5.23E-01	2.34E+01	2.07E-02	9.33E-03
4.58	5.32E-01	2.40E+01	1.68E-03	1.87E-02
4.82	5.41E-01	2.45E+01	-1.51E-02	2.80E-02
5.06	5.51E-01	2.50E+01	-2.97E-02	3.73E-02
5.3	5.60E-01	2.55E+01	-4.20E-02	4.67E-02
5.54	5.69E-01	2.61E+01	-5.21E-02	5.60E-02
5.78	5.79E-01	2.66E+01	-5.99E-02	6.53E-02
6.02	5.88E-01	2.71E+01	-6.55E-02	7.47E-02
6.26	5.97E-01	2.77E+01	-6.89E-02	8.40E-02
6.5	6.07E-01	2.82E+01	-7.00E-02	9.33E-02
6.74	6.16E-01	2.87E+01	-6.89E-02	9.33E-03
6.98	6.25E-01	2.93E+01	-6.55E-02	1.87E-02
7.22	6.35E-01	2.98E+01	-5.99E-02	2.80E-02
7.46	6.44E-01	3.03E+01	-5.21E-02	3.73E-02
7.7	6.53E-01	3.09E+01	-4.20E-02	4.67E-02
7.94	6.63E-01	3.14E+01	-2.97E-02	5.60E-02
8.18	6.72E-01	3.20E+01	-1.51E-02	6.53E-02
8.42	6.81E-01	3.25E+01	1.68E-03	7.47E-02
8.66	6.91E-01	3.31E+01	2.07E-02	8.40E-02
8.9	7.00E-01	3.36E+01	4.20E-02	9.33E-02
8.96	7.09E-01	3.41E+01	4.73E-02	9.33E-03
9.02	7.19E-01	3.46E+01	5.21E-02	1.87E-02
9.08	7.28E-01	3.50E+01	5.63E-02	2.80E-02
9.14	7.37E-01	3.55E+01	5.99E-02	3.73E-02
9.2	7.47E-01	3.60E+01	6.30E-02	4.67E-02
9.26	7.56E-01	3.64E+01	6.55E-02	5.60E-02
9.32	7.65E-01	3.69E+01	6.75E-02	6.53E-02
9.38	7.75E-01	3.74E+01	6.89E-02	7.47E-02
9.44	7.84E-01	3.79E+01	6.97E-02	8.40E-02
9.5	7.93E-01	3.83E+01	7.00E-02	9.33E-02
9.56	8.03E-01	3.88E+01	6.97E-02	9.33E-03
9.62	8.12E-01	3.93E+01	6.89E-02	1.87E-02
9.68	8.21E-01	3.98E+01	6.75E-02	2.80E-02
9.74	8.31E-01	4.03E+01	6.55E-02	3.73E-02
9.8	8.40E-01	4.07E+01	6.30E-02	4.67E-02
9.86	8.49E-01	4.12E+01	5.99E-02	5.60E-02
9.92	8.59E-01	4.17E+01	5.63E-02	6.53E-02
9.98	8.68E-01	4.22E+01	5.21E-02	7.47E-02
10.04	8.77E-01	4.27E+01	4.73E-02	8.40E-02
10.1	8.87E-01	4.32E+01	4.20E-02	9.33E-02
10.34	9.45E-01	4.62E+01	2.07E-02	5.83E-02
10.58	9.49E-01	4.65E+01	1.68E-03	6.22E-02
10.82	9.53E-01	4.68E+01	-1.51E-02	6.61E-02
11.06	9.57E-01	4.71E+01	-2.97E-02	7.00E-02
11.3	9.61E-01	4.75E+01	-4.20E-02	7.39E-02
11.54	9.64E-01	4.78E+01	-5.21E-02	7.78E-02
11.78	9.68E-01	4.81E+01	-5.99E-02	8.17E-02
12.02	9.72E-01	4.84E+01	-6.55E-02	8.56E-02
12.26	9.76E-01	4.87E+01	-6.89E-02	8.94E-02
12.5	9.80E-01	4.91E+01	-7.00E-02	9.33E-02
12.75	9.95E-01	5.00E+01	-6.80E-02	1.51E-02
13	1.01E+00	5.07E+01	-6.27E-02	2.69E-02
13.25	1.02E+00	5.12E+01	-5.49E-02	3.53E-02
13.5	1.02E+00	5.16E+01	-4.54E-02	4.03E-02
13.75	1.02E+00	5.18E+01	-3.50E-02	4.20E-02
14	1.02E+00	5.21E+01	-2.46E-02	4.37E-02
14.25	1.03E+00	5.24E+01	-1.51E-02	4.87E-02
14.5	1.04E+00	5.30E+01	-7.28E-03	5.71E-02
14.75	1.05E+00	5.37E+01	-1.96E-03	6.89E-02
15	1.06E+00	5.47E+01	2.78E-17	5.60E-02

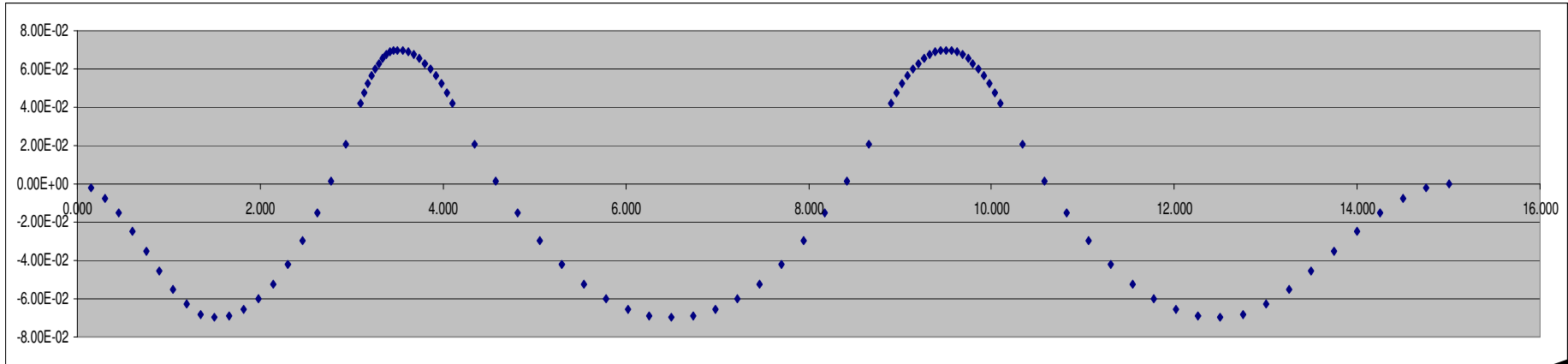
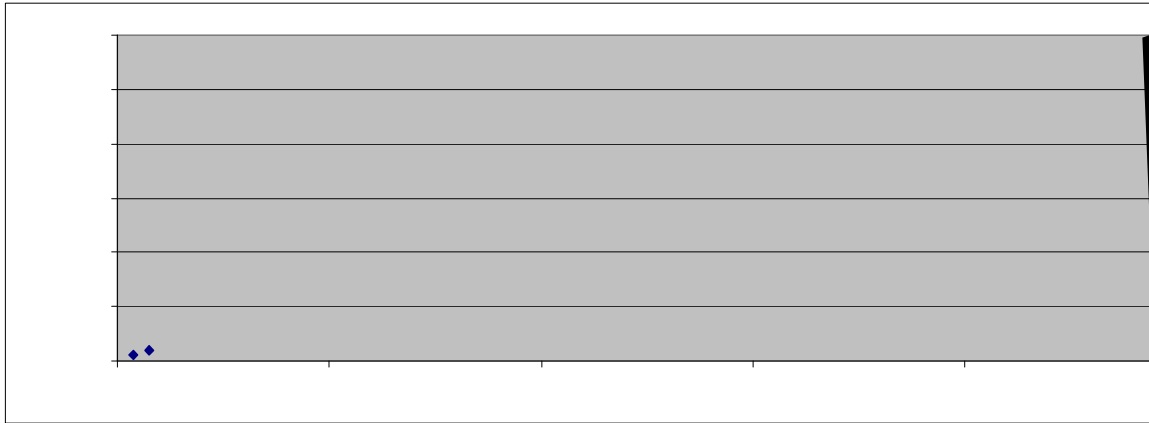


Figura 4.15 - Traçado do Cabo para a Laje TT. No eixo y estão representadas as ordenadas do cabo em metros e no eixo x, a ordenada numérica representa o comprimento da laje



4.4 – Laje Protendida

Finalmente, apresenta-se um exemplo de uma laje protendida. Trata-se de uma laje com 16m x 16m, 20cm de espessura e apoiada sobre 9 pilares. A geometria da laje, bem como a malha de elementos finitos empregada na análise é mostrada na figura 4.17.

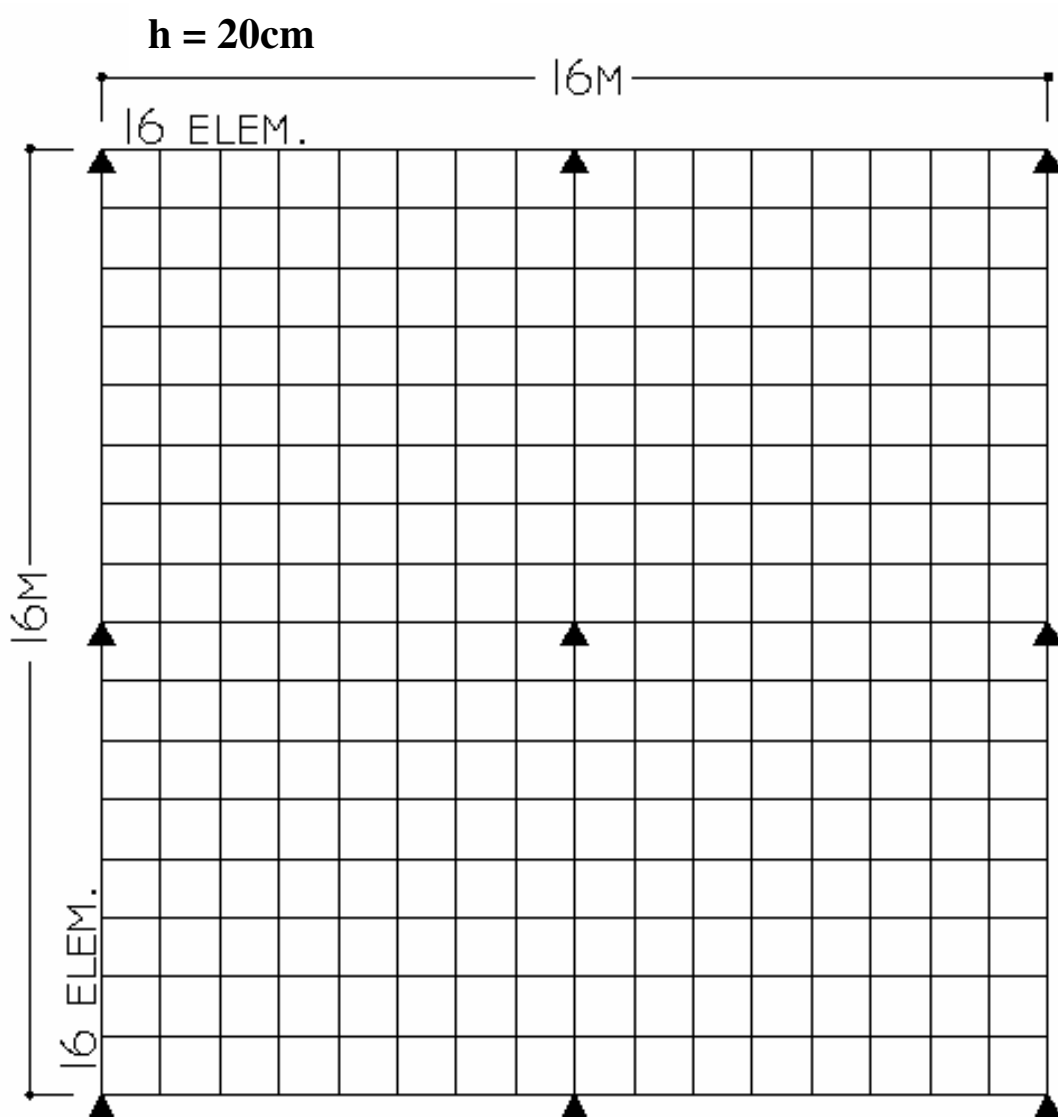


Figura 4.17 – Laje T

Os pilares têm dimensões 25x30cm e três metros de altura. Saliencia-se aqui que a deformabilidade dos apoios, ou seja, dos pilares, é considerada na análise.

O concreto foi considerado como um material de comportamento elástico-linear com módulo de elasticidade longitudinal $E = 30.000.000 \text{ kN/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$.

Como carregamento foi considerada uma carga uniformemente distribuída sobre a laje de valor 9 kN/m^2 , sendo 5 kN/m^2 de peso próprio, 1 kN/m^2 de revestimento e 3 kN/m^2 de sobrecarga. O fator da carga a ser absorvida pela protensão é de 0,7.

O cobrimento da armadura de protensão é de 3cm e da armadura passiva de 1,5cm.

Parâmetros empregados

- Protensão absorve 70% da carga
- Coeficiente de atrito $\mu = 0,05 \text{ rd}^{-1}$
- Ângulo de atrito involuntário $\gamma: 0,01 \text{ rd/m}$
- Tipo de Cordoalha CP190-RB 12,7mm, de baixa relaxação
- Trecho reto do cabo 25cm
- Números de seções de análise por vão (NSV) 10
- Número de camadas do cálculo de tensões 4
- Espessura da laje 20cm
- Dimensões da laje 16x16m
- Dimensões dos pilares 25x30cm
- Carregamento total 9 kN/m^2
- 256 elementos finitos, com 833 nós e 1024 pontos de Gauss
- Módulo de elasticidade do concreto das lajes e pilares $30.000.000 \text{ kN/m}^2$
- Coeficiente de Poisson 0,2

A seguir, visando dar uma visão global de todo procedimento realizado, se mostrará, além dos resultados finais da análise, toda a seqüência de procedimentos necessários para se chegar ao resultado final, utilizando o algoritmo numérico implementado.

O processo inicia-se com a análise dos esforços em linhas que ligam pontos de integração, com o objetivo de delimitar as faixas de protensão. A linha 3, paralela ao eixo x, mostrada na figura 4.18, pode ser utilizada para exemplificar o processo de obtenção das faixas

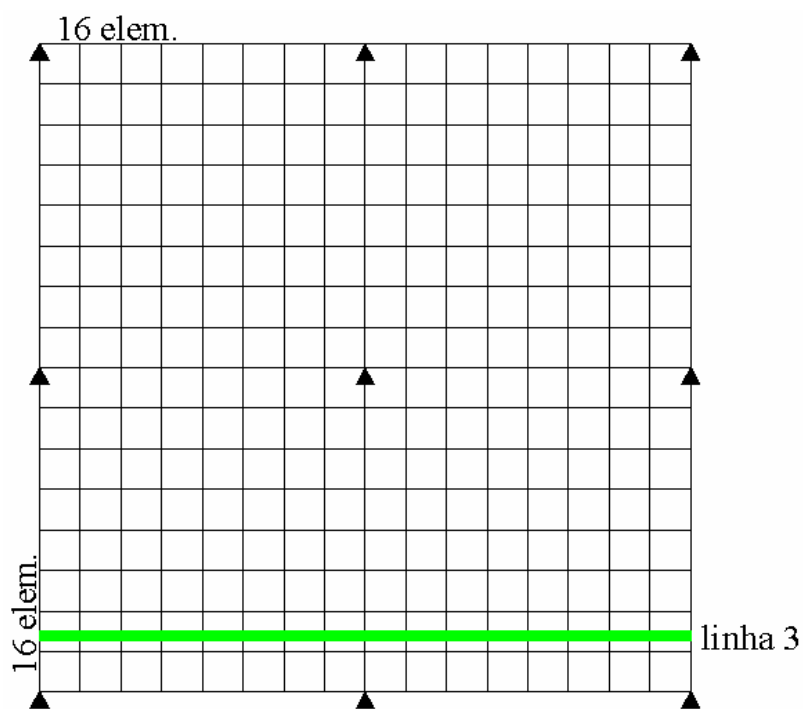
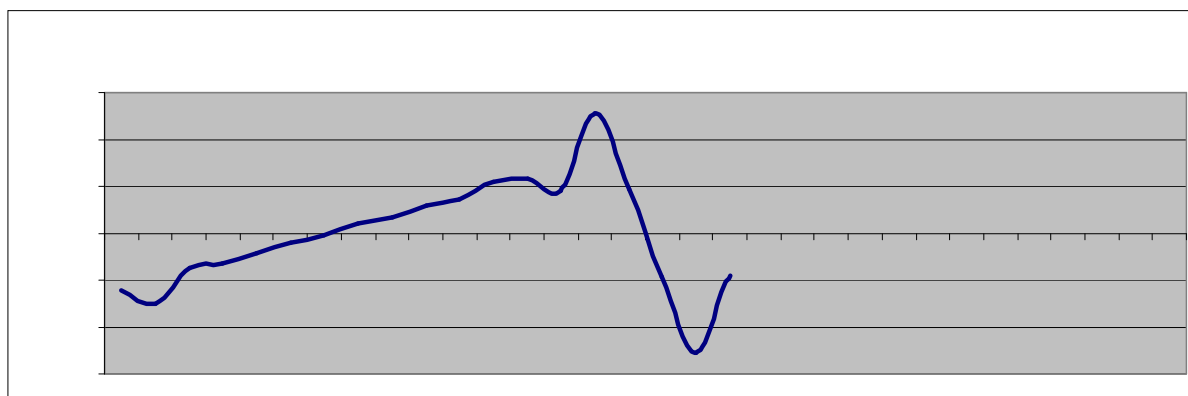


Figura 4.18 – Linha 3 de referência para a plotagem dos esforços

As solicitações ao longo desta linha, podem ser visualizadas nas figuras 4.19 e 4.20. Os esforços cortantes estão em kN e o momento fletor está expresso em kN.m.



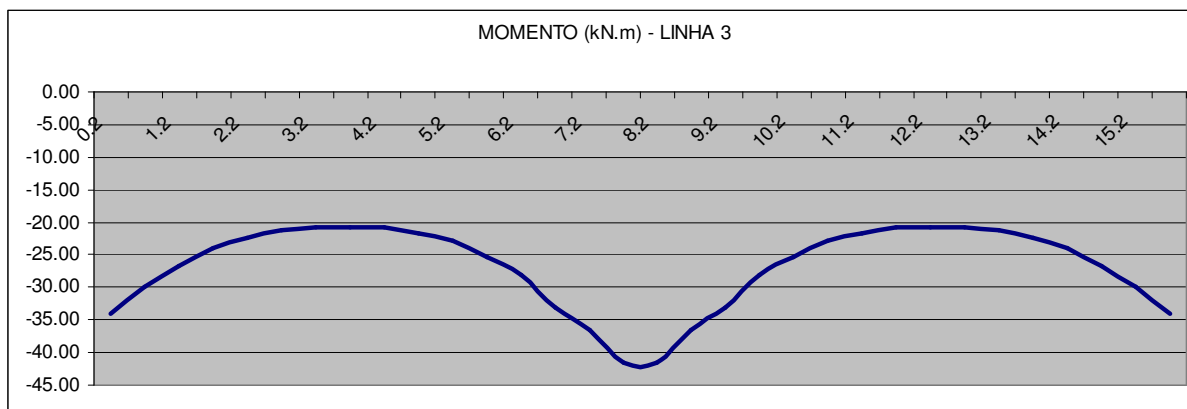


Figura 4.20 – Momento Fletor (My) ao longo da linha 3

É importante observar na figura 4.10 que onde o esforço cortante vale zero, se delimita o limite de uma faixa. Ainda olhando a figura, é possível averiguar que existem quatro faixas ao longo da linha 3.

Na seqüência, determina-se o quanto por cento da carga total da laje é devida ao peso próprio e ao revestimento. O complemento deste carregamento será considerado como sobrecarga. No exemplo, a carga total é de 9kN/m². Sendo que o peso próprio representa 55,55% deste valor e o revestimento equivale a 11,11% dos 9kN/m², a sobrecarga representa os 33,333%, que equivalem a 3kN/m².

A seguir solicita-se que tipo de cordoalha se quer utilizar. Pode-se utilizar 2 tipos de cordoalhas, sendo elas a CP190RB de diâmetro 12,7mm e a CP190RB de diâmetro 15,2mm, ambas de relaxação baixa.

A seguir é feito o cálculo do número de cordoalhas por faixa necessárias para equilibrar a porcentagem de carregamento escolhida no arquivo de entrada, que para o exemplo é de 70% do carregamento total. É mostrado um número teórico, que representa a relação entre as tensões a equilibrar, divididas pela tensão de escoamento da cordoalha multiplicada por um coeficiente de minoração de resistência. Este coeficiente vale 0,8. A tensão de escoamento multiplicada pelo coeficiente 0,8, chama-se tensão inicial de protensão, e vale 152kN/cm². Esse valor é multiplicado pela área de cada cordoalha utilizada. Dessa forma, encontra-se a força de protensão de cada cordoalha. Dessa força, são deduzidas as perdas imediatas calculadas. Obtém-se, portanto, a força de protensão que cada cabo suporta. Divide-se a força

de protensão necessária em cada faixa para equilibrar o carregamento externo pela força que cada cabo é capaz de resistir. Então o usuário deverá escolher um número inteiro de cordoalhas que será multiplicado pela força de protensão nominal de cada cordoalha, descontadas as perdas, para que seja feito um teste preliminar das tensões existentes. Estas tensões são função das combinações de carregamento no estado limite de serviço. É possível analisar as tensões devidas ao número de cabos existentes e caso elas venham a ultrapassar os limites de norma, ou mesmo por escolha do usuário, troca-se o número de cordoalhas.

Então é plotada a tensão devida ao esforço de protensão das cordoalhas escolhidas dividido pela seção transversal de concreto da faixa considerada, que no caso é a faixa 1. Pela figura 4.10 é possível observar que esta faixa tem aproximadamente a largura de 3,30m. Sendo a laje de espessura 0,20m, a seção comprimida de concreto, pelo esforço de protensão dos 4 cabos utilizados, têm 0,662m². De posse da área da faixa e do somatório dos esforços atuantes em cada cabo mais a excentricidade dos mesmos, é possível determinar a tensão total atuante devida à protensão., apenas se dividindo o valor dos esforços pela área da faixa.

O processo apresentado se repete faixa a faixa. Neste exemplo, demonstrou-se apenas para a primeira faixa, uma vez que o processo é análogo para as demais faixas.

A análise subsequente, ou seja, a segunda análise, tem como carregamento apenas as reações provenientes da protensão, obtidos pelo método do equilíbrio de cargas.

É sabido que os carregamentos devidos à protensão são auto equilibráveis e portanto a soma dos mesmos deveria ser zero. Observa-se que não é o que acontece. Explica-se esse valor diferente de zero pelo fato que as perdas ao longo do cabo não são constantes, sendo que parte do esforço de tração dos cabos é transferido paralelamente (ou no mesmo plano da superfície da laje). Outra razão para que o somatório das reações não seja igual a zero é por causa da forma adotada para distribuir os carregamentos nos elementos finitos, que é tão mais precisa quanto mais refinada for a malha. Mas, aceita-se esta diferença para título de exemplo, uma vez que ela é muito pequena frente a totalidade do carregamento aplicado. Este carregamento supera as 1600kN, o que representa um pouco mais de 1%. Os carregamentos devido aos cabos escolhidos, obtidos pelo método do equilíbrio de cargas e descontados as perdas

imediatas, podem ser visualizados na tabela 4.4 que utiliza como referência a figura 4.12 mostrada logo abaixo.

Tabela 4.4 – Carregamentos Devidos aos Cabos

Carregamento dos Cabos (kN/m ²)			
1	-6.20	7	-4.40
2	-12.60	8	-8.90
3	79.30	9	56.00
4	77.80	10	55.00
5	-12.20	11	-8.60
6	-6.00	12	-4.20

A figura 4.21 mostra as zonas de carregamentos distintos na laje, numeradas de 1 a 12. Como a laje é simétrica, optou-se por não indicar o lado direito da mesma.

6	12		
5	11		
4	10		
3	9		
2	8		
1	7		

Figura 4.21 – Zonas de Carregamento ao longo da laje

O momento fletor M_y é o momento perpendicular às linhas e paralelo às faixas analisadas. É bom lembrar que está se analisando os cabos paralelos ao eixo y , o que indica que as faixas analisadas também o estão. A variação dos momentos fletores devidos exclusivamente aos cabos de protensão ao longo da laje pode ser visualizada na figura 4.22.

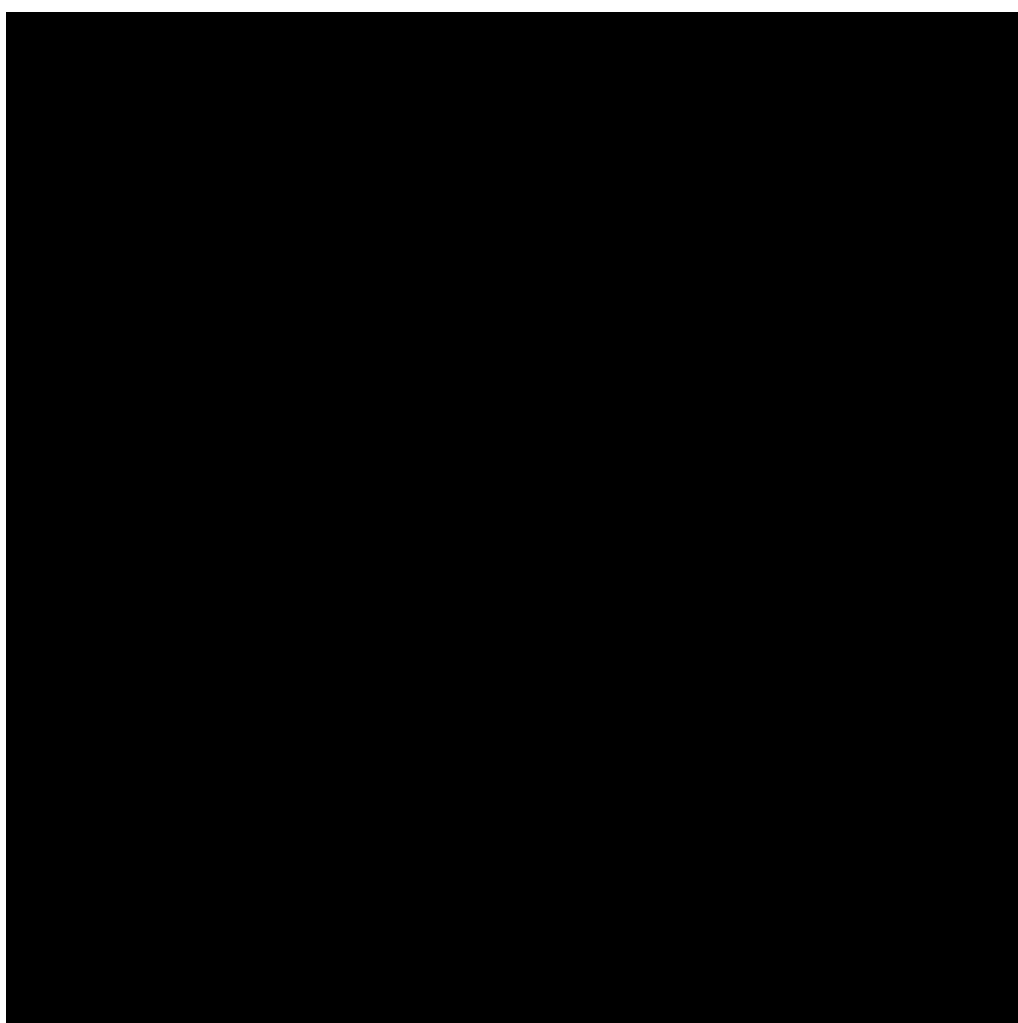
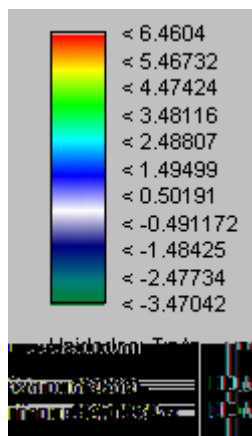


Figura 4.22 – Plotagem dos M_y devidos aos cabos protendidos na laje T

Observa-se tênue assimetria em relação ao eixo x, em função das perdas por atrito e recuo de ancoragem. É possível observar que as perdas imediatas afetam sensivelmente os esforços por serem baixas (algo em torno de 3,8%) nas cordoalhas engraxadas deste exemplo.

Os limites de norma são apresentados a seguir na tabela 4.5. O objetivo de se mostrar estes limites é para permitir que o usuário compare os mesmos com as tensões existentes. Caso as tensões existentes não cumpram as exigências de norma, é possível alterar o número de cordoalhas na faixa, até a compatibilização dos valores. O correto ajuste das tensões é feito de forma manual. É o usuário que determina um número “x” de cordoalhas que satisfaçam ou não os limites apresentados. O algoritmo apenas verifica se a escolha feita atende ou não o especificado nas normas. É claro que este procedimento dá margens a possíveis erros, no entanto, faz com que certas decisões de projeto possam ser tomadas quando se está muito próximo aos limites. Assim, a flexibilidade de escolha das cordoalhas em cada faixa, permite ao usuário testar várias possibilidades, buscando a solução mais eficaz.

O procedimento de escolha de cabos é feito faixa a faixa. No exemplo, existem 4 faixas, porém a laje é simétrica em relação ao eixo y. Portanto, optou-se por apenas mostrar os valores calculados de tensões provenientes das combinações de serviço nas faixas 1 e 2, conforme tabela 4.5

Tabela 4.5 – Tensões em serviço para a quantidade de cabos escolhida

Estados Limites de Serviço

	faixa 1		faixa 2	
Largura de Cada Faixa (m)	3.31		4.69	
Cabos por metro de Faixa	4		5	
Cabos Totais por Faixa	13.24		23.45	
N_p em cada faixa (kN)	1802.586		3192.647	
W_{si} (m ³)	0.022		0.031	
Área (m ²)	0.662		0.938	
Análise	Mf (P1)-kN.m	Mf (P2)-kN.m	Mf (P3)-kN.m	Mf (P4)-kN.m
Peso próprio	26.700	17.370	25.100	20.270
Revestimento	18.250	13.890	20.090	16.210
Sobrecarga	27.380	20.840	30.140	24.320
Protensão	59.500	28.300	49.100	23.700
Pontos (ver figura)	1	2	3	4
N_p/A_f (kN/m ²)	-2722.940		-3403.675	
Combinação Ato Protensão (kN/m ²) $F_{d,ut} = F_{g,k}$				
Face Inferior	-1236.535	-3218.257	-2636.084	-3513.376
Face Superior	-4209.345	-2227.623	-4171.266	-3293.974
Combinação Quase Permanente (kN/m ²) $F_{d,ut} = F_{g,k} + 0,4 F_{q,k}$				
Face Inferior	-2559.889	-2211.037	-3664.208	-2683.803
Face Superior	-2885.991	-3234.843	-3143.142	-4123.547
Combinação Frequente (kN/m ²) $F_{d,ut} = F_{g,k} + 0,6 F_{q,k}$				
Face Inferior	-2808.046	-2022.155	-3857.001	-2528.238
Face Superior	-2637.834	-3423.725	-2950.349	-4279.112
Combinação Rara (kN/m ²) $F_{d,ut} = F_{g,k} + F_{q,k}$				
Face Inferior	-3304.360	-1644.390	-4242.588	-2217.108
Face Superior	-2141.520	-3801.490	-2564.762	-4590.242
Limites de Tensões (kN/m ²)				
Limite na Zona de Momento (-) ($0.4 \cdot f_{ck}$)	14000		Obs. Nenhuma tensão existente ultrapassa o limite normatizado	
Limite na Zona de Momento (+) ($0.6 \cdot f_{ck}$)	21000			
N_p/A_f (entre 0.86 a 3.5Mpa)	860 e 3500			

Os pontos indicados na tabela 4.5 representam os pontos de onde foram obtidos os esforços utilizados nas combinações de serviço, e podem ser visualizados na figura 4.23.

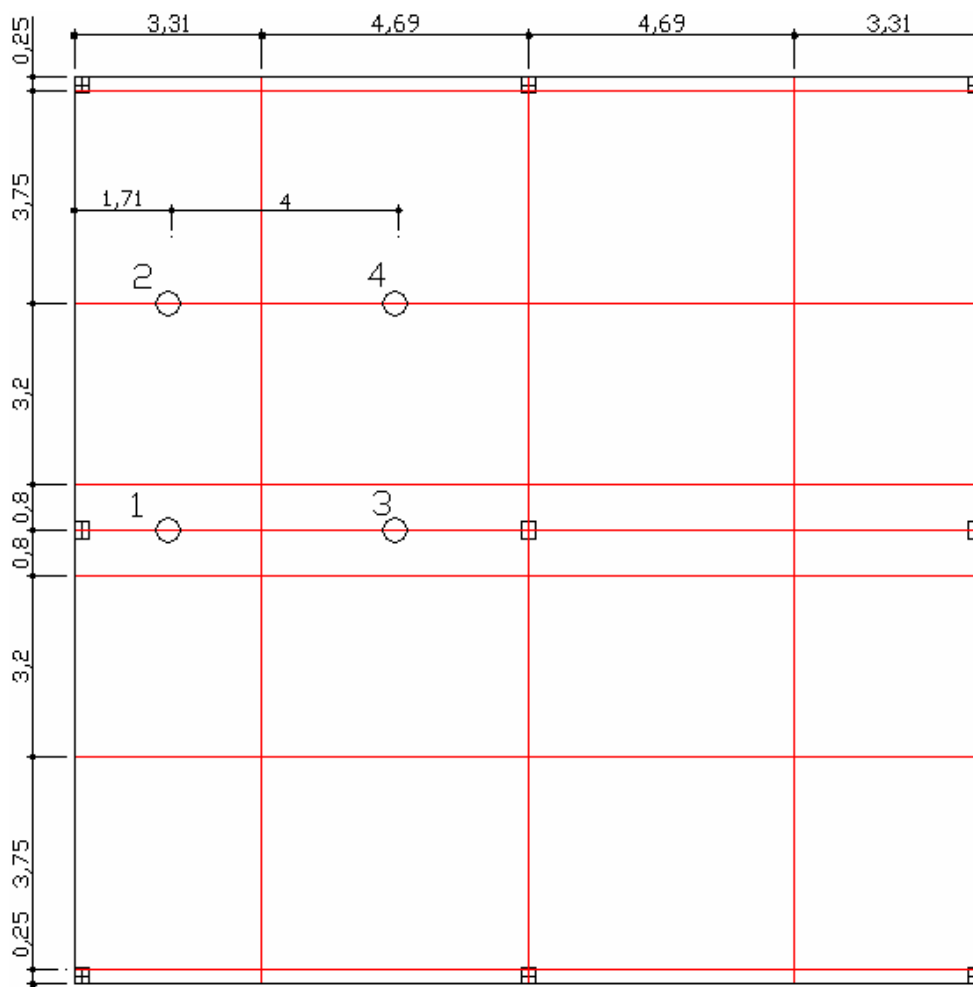


Figura 4.23 – Pontos de onde foram extraídos os esforços combinados

É possível observar que os valores limites não foram ultrapassados. Porém, este valor excedente será absorvido pela armadura passiva. É importante lembrar que as tensões apresentadas estão em kN/m^2 . Depois de mostradas as tensões existentes e os limites admissíveis, é perguntado, faixa a faixa, se deseja-se trocar o número de cordoalhas.

Neste ponto já estão definidos o tipo e o número de cordoalhas definitivos a serem utilizados para a análise dos esforços e momentos fletores devidos à protensão. Também já estão definidos o traçado dos cabos no interior da laje e as perdas imediatas. Resta agora determinar os momentos hiperestáticos que serão utilizados para a verificação da laje no Estado Limite Último.

Os deslocamentos para cada carregamento podem ser visualizados na tabela 4.6

Tabela 4.6 – Deslocamentos cada carregamento

Deslocamentos Máximos (mm)			
Peso próprio	Revestimento	Sobrecarga	Protensão
8.9433	7.1549	10.7317	-4.5490

Da eliminação dos vínculos onde a protensão ocasiona uma reação negativa e aplicação desta mesma reação na mesma direção, e se eliminando outras forças atuantes, obtêm-se os momentos hiperestáticos utilizados para a verificação do Estado Limite Último. A tabela 4.7 mostra os momentos hiperestáticos M_y atuante nesta laje

Tabela 4.7 – Esforços utilizados nas combinações no Estado Limite Último e tensões resultantes

Combinação ELU	$F_{elu,k} = \gamma_g \cdot F_g + \gamma_q \cdot F_q + \gamma_{fp} \cdot F_p$			
	1	2	3	4
Pontos				
Momento Hiperestático (kN.m)	18.280	9.040	17.455	9.455
Face Inferior (kN/m ²)	5582.991	3797.039	4042.900	3085.267
Face Superior (kN/m ²)	-5334.471	-3674.139	-3875.421	-2994.547

Com estes dados é possível determinar a armadura passiva conforme o item 3.6.2. O dimensionamento da armadura passiva está resumido na tabela 4.8

Tabela 4.8– Obtenção da Armadura Passiva

Armadura Negativa	
LN (cm)	10.229
Fs (kN/m ²)	71604.03
As (cm ² /m)	2.864
Equivale à ϕ 8 c/17.5cm	
Armadura Positiva	
LN (cm)	10.160
Fs (kN/m ²)	71126.00
As (cm ² /m)	2.845
Equivale à ϕ 8 c/17.5cm	

Recapitulando, após lido e processado o arquivo de entrada, é feita a escolha do número de cabos. O programa gera uma série de arquivos com diversas informações. Na seqüência listar-se-ão alguns dados importantes provenientes da saída de dados do programa. Estas

informações contemplam os deslocamentos, solicitações e reações nas 3 análises realizadas. Também é mostrado o traçado dos cabos, as perdas imediatas, entre outras informações.

Salienta-se aqui que são realizadas 3 análises. Na primeira são analisados os deslocamentos e as tensões devidos ao carregamento total da laje, proveniente do peso próprio, do revestimento e da sobrecarga. Na verdade, esta primeira análise pode ser dividida em três outras análises, uma vez que cada carregamento é analisado separadamente. É uma análise simples de uma laje pelo método dos elementos finitos, desconsiderando qualquer efeito da protensão. Esta análise tem o objetivo de gerar as faixas de laje onde atuará a protensão. Define-se as cordoalhas com base nos carregamentos existentes e se realiza a segunda análise com o objetivo de analisar apenas os esforços devidos à protensão. Esta análise tem o objetivo de determinar esforços que serão utilizados nas combinações de serviço. Serve também para averiguar se o carregamento da protensão está de fato auto-equilibrável. A terceira e última análise serve para a obtenção do momento hiperestático de protensão, utilizado para se averiguar o Estado Limite Último (ver item 3.62).

Na tabela 4.9 apresentam-se as abscissas do cabo e as perdas imediatas totais em cada ponto do mesmo. O número de pontos é função do número de seções por vão. Ao se arbitrar no arquivo de entrada o número de seções por vão, automaticamente se define o número de pontos utilizados para definir o traçado dos cabos. A figura 4.15 mostra o traçado do cabo, que é gerado pelo programa e plotado os valores em uma tabela. A figura 4.14 mostra as perdas imediatas em cada uma das cordoalhas, considerando-se as perdas por atrito dos cabos e as perdas por recuo das ancoragens.

Tabela 4.9 – Abscissas do cabo e as perdas imediatas totais

X (m)	Perdas (kN)		
	Atrito	Recuo	Total
0.000	0.000	-0.242	-0.242
0.400	-0.005	-0.233	-0.238
0.800	-0.010	-0.225	-0.235
1.200	-0.015	-0.216	-0.231
1.600	-0.019	-0.208	-0.227
2.000	-0.024	-0.199	-0.224
2.400	-0.029	-0.191	-0.220
2.800	-0.034	-0.182	-0.216
3.200	-0.037	-0.174	-0.211
3.600	-0.042	-0.165	-0.208
4.000	-0.047	-0.157	-0.203
4.320	-0.051	-0.150	-0.201
4.640	-0.056	-0.143	-0.199
4.960	-0.060	-0.136	-0.196
5.280	-0.065	-0.130	-0.194
5.600	-0.069	-0.123	-0.192
5.920	-0.073	-0.116	-0.189
6.240	-0.078	-0.109	-0.187
6.560	-0.083	-0.102	-0.185
6.880	-0.087	-0.095	-0.182
7.200	-0.090	-0.089	-0.179
7.280	-0.093	-0.087	-0.180
7.360	-0.096	-0.085	-0.182
7.440	-0.100	-0.084	-0.183
7.520	-0.103	-0.082	-0.184
7.600	-0.106	-0.080	-0.186
7.680	-0.109	-0.078	-0.187
7.760	-0.112	-0.077	-0.189
7.840	-0.115	-0.075	-0.190
7.920	-0.118	-0.073	-0.192
8.000	-0.122	-0.072	-0.193
8.080	-0.125	-0.070	-0.195
8.160	-0.128	-0.068	-0.196
8.240	-0.131	-0.066	-0.198
8.320	-0.134	-0.065	-0.199
8.400	-0.137	-0.063	-0.201
8.480	-0.141	-0.061	-0.202
8.560	-0.146	-0.060	-0.206
8.640	-0.152	-0.058	-0.210
8.720	-0.158	-0.056	-0.214
8.800	-0.163	-0.055	-0.218
9.120	-0.169	-0.048	-0.217
9.440	-0.175	-0.041	-0.215
9.760	-0.180	-0.034	-0.214
10.080	-0.183	-0.027	-0.210
10.400	-0.186	-0.020	-0.206
10.720	-0.189	-0.014	-0.202
11.040	-0.192	-0.007	-0.198
11.360	-0.194	0.000	-0.194
11.680	-0.197	0.000	-0.197
12.000	-0.203	0.000	-0.203
12.400	-0.209	0.000	-0.209
12.800	-0.213	0.000	-0.213
13.200	-0.217	0.000	-0.217
13.600	-0.220	0.000	-0.220
14.000	-0.223	0.000	-0.223
14.400	-0.227	0.000	-0.227
14.800	-0.231	0.000	-0.231
15.200	-0.237	0.000	-0.237
15.600	-0.243	0.000	-0.243
16.000	-0.243	0.000	-0.243

A figura 4.24 é a plotagem da posição do cabo ao longo da laje.

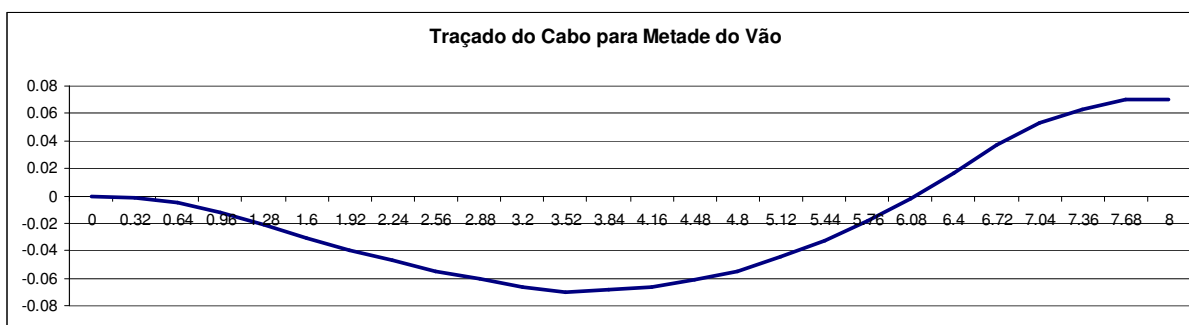


Figura 26 – Ordenadas dos Cabos

A figura 4.25 é a representação gráfica das perdas imediatas de protensão, representadas numericamente na tabela 4.11.

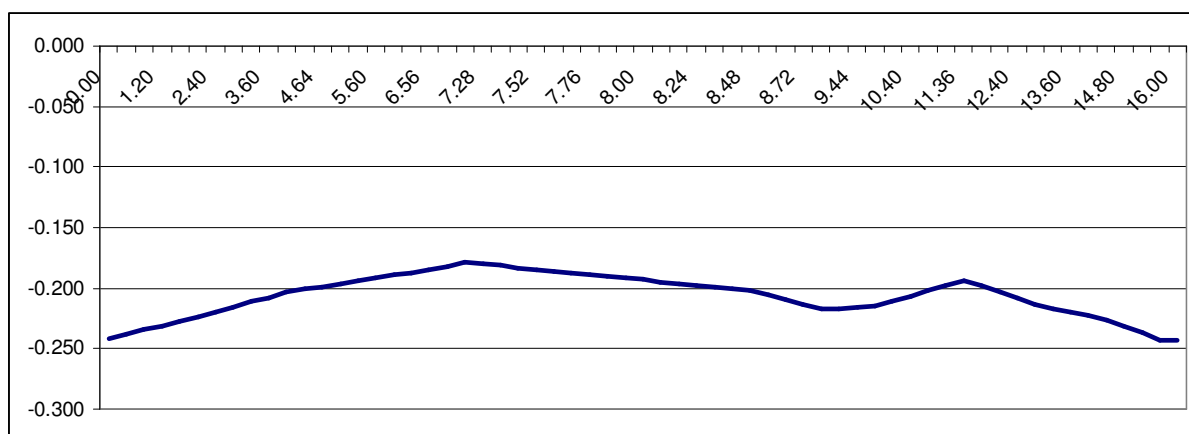


Figura 4.25 – Perdas imediatas da força de protensão do cabo em kN

A figura 4.26 mostra as zonas distintas de carregamento, delimitadas pelas linhas vermelhas. Em cada zona existe um valor de carregamento obtido pelo método do equilíbrio de cargas a partir do traçado do cabo e da força de protensão aplicada. Faz-se necessário lembrar que a existência de zonas distintas de carregamento é devido às diferentes curvaturas do cabo que está inserido na laje.

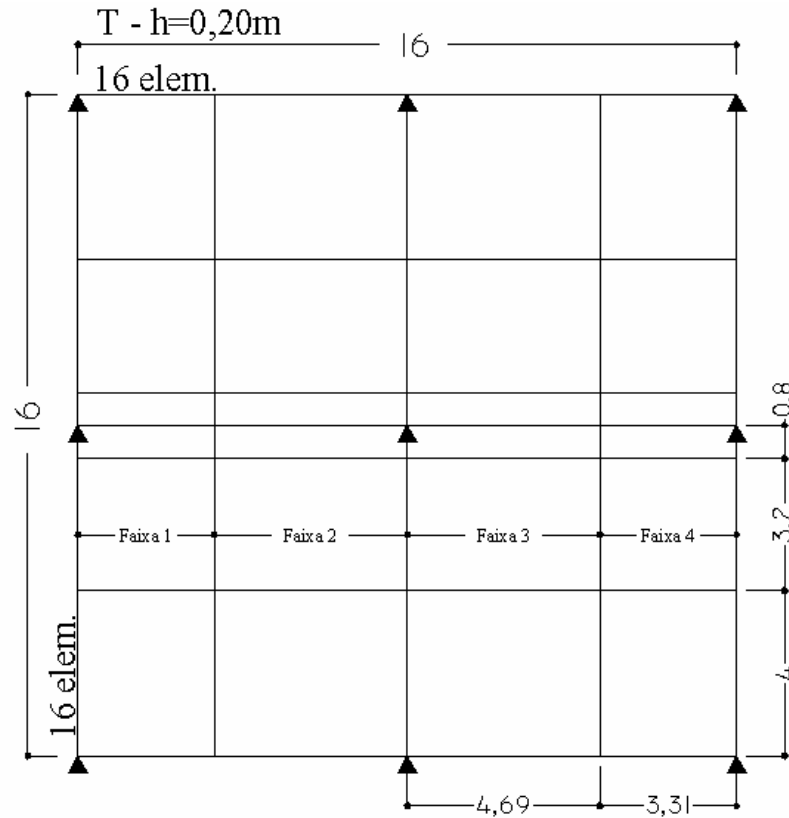


Figura 4.26 – Representação das faixas e zonas de carregamento distintas devidas à protensão

A figura 4.27 mostra a representação dos cabos distribuídos, paralelos à direção y . É mostrada apenas um quarto da laje em função da simetria em relação aos dois eixos.

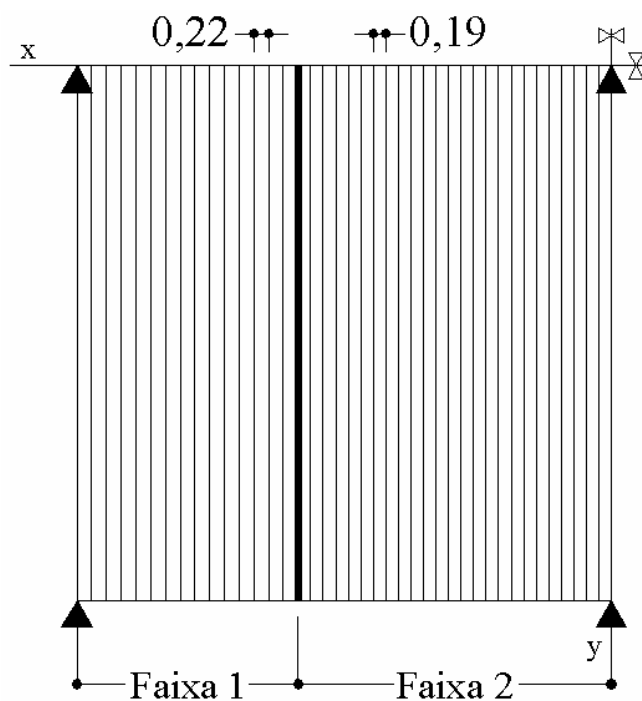


Figura 4.27 – Distribuição dos cabos protendidos paralelos ao eixo y

5 – Conclusões e Sugestões Para Trabalhos Futuros

Da análise dos resultados mostrados no capítulo 4, pode-se afirmar que a metodologia proposta nesta dissertação consegue fazer a verificação/dimensionamento de lajes planas protendidas de forma bastante satisfatória.

A incorporação da protensão em uma análise numérica de lajes planas pelo método dos elementos finitos pode ser simplificada pela utilização do método de equilíbrio de cargas. A maior dificuldade na aplicação deste método é a consideração das perdas, uma vez que devem ser arbitrados pontos de análise.

O elemento finito de placa utilizado (Mindlin, com oito nós) é apropriado para o estudo de deslocamentos e tensões, uma vez que as funções quadráticas de interpolação utilizadas possibilitam uma análise bastante precisa com a utilização de poucos elementos. É importante ressaltar que no estudo das lajes protendidas, as malhas devem ser muito refinadas para se obter bons resultados, por causa da forma utilizada para distribuir o carregamento na malha de elementos finitos.

A metodologia proposta apresenta diversas qualidades. Consegue-se gerar de forma satisfatória o traçado dos cabos, é bastante flexível e iterativa na consideração e escolha dos cabos de protensão, calcula os esforços solicitantes devidos aos cabos de protensão pelo Método do Equilíbrio de Cargas, considera um grande número de parâmetros e oferece a possibilidade de modelar lajes planas protendidas considerando a elasticidade dos apoios. Ainda permite a análise de tensões em várias camadas, faz o dimensionamento de armaduras passivas para uma laje qualquer e ainda fornece as perdas imediatas da força de protensão, em qualquer ponto escolhido ao longo do traçado do cabo.

O algoritmo proposto apresenta algumas limitações a malha de elementos finitos não permite áreas de refinamento toda malha deve ser refinada. São somente aceitas malhas regulares construídas por um gerador específico de malhas que não está incluído de forma direta no algoritmo implementado. Este gerador é um programa separado. O programa desenvolvido não apresenta nenhuma saída gráfica, tendo-se que utilizar outros softwares para visualização de tensões e deslocamentos. Os pilares devem ser alinhados em função do algoritmo que

trabalha e combina as tensões nas faixas. Não é possível o reajuste, pelo usuário, da excentricidade dos cabos; permite-se apenas que se ajuste a força de protensão aplicada. As lajes analisadas devem ter apenas cargas distribuídas. A metodologia proposta apenas analisa a protensão com cordoalhas engraxadas. Em termos de perdas, não se considera as perdas ao longo do tempo e não é possível simular a situação de perdas da força de protensão quando o cabo é tracionado pelas duas pontas.

5.1 – Sugestões Para Pesquisas Futuras

Devido às muitas limitações do algoritmo proposto, a análise de lajes planas protendidas pelo método dos elementos finitos, pode ainda ser explorada de diversas maneiras. Abaixo estarão listadas algumas sugestões para que trabalhos futuros

- a) Considerar as perdas ao longo do tempo, como por exemplo as perdas por fluência do concreto, relaxação dos cabos de protensão, e outras.
- b) Considerar a formulação exponencial para as perdas por recuo de ancoragem.
- c) Criar interfaces para os outros tipos de protensão e não somente com cordoalhas engraxadas.
- d) Implementar o algoritmo de equilíbrio de cargas e a distribuição das mesmas para malhas irregulares.
- e) Fazer a consideração de pilares desalinhados e capitéis.
- f) Fazer a consideração da punção na interface das lajes e pilares.
- g) Calcular as frequências naturais da laje protendida.

Referências

- AALAMI, B. O., “**Load Balancing: A Comprehensive Solution to Post-Tensioning**”, ACI Structural Journal, **Volume 87, no.6**, pp. 661-669, 1990.
- ACI Committee 318 & PCA - **Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-05) & PCA Notes on ACI 318-05(EB0705)**, 2005.
- ABNT - NBR-6118 (2004) – **Projeto e Execução de Estruturas de Concreto Armado e Protendido**, CB-2 – Comitê Brasileiro de Construção Civil, ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas.
- ALVES, E.V., **Métodos de Análise Estrutural de Tabuleiros de Pontes em Vigas Múltiplas de Concreto Protendido**, ENGEVISTA, v.6, n. 2., p. 48 – 58, agosto. 2004
- ANSYS Alternate Online Manual Set, Release 5.5
- ANTES, H., **Static and dynamic analysis of reissner-mindlin plates**, in D. E. Beskos, ed., ‘Boundary Element Analysis of Plates and Shells’, Springer-Verlag, pp. 312-340, 1991.
- AZEVEDO, R. F., **Aplicação do Método das Faixas Finitas ao Cálculo de Cascas Prismáticas de Eixo Reto ou Circular**, Lisboa LNEC, 1976. Ministério das Obras Públicas.
- BARBIERI, R. A., **Análise Numérico-Experimental de Elementos Pré-Moldados Protendidos com Continuidade Posterior por Adição de Armadura**, Porto Alegre CPGEC, 1999. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, UFRGS.
- BARTH, F., **Análise Experimental das Deformações em Lajes Retangulares de Concreto Armado sob Carregamento Linear**, Porto Alegre CPGEC, 1984. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, UFRGS.
- BATISTA, V.P., **Análise Experimental das Deformações em Lajes Retangulares de Concreto Armado Simplesmente Apoiado submetidas à Carga Uniformemente Distribuída**, Porto Alegre CPGEC, 1984. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, UFRGS.
- BRÍGIDO, J. R., **Estruturas de Concreto Protendido**, Fortaleza, 2000, Curso Introductório.
- CAMELO, M. R., **Placas Cogumelo Retangulares Simplesmente Apoiadas nos Quatro Bordos**, Rio de Janeiro Centro Técnico Científico, PUC-RJ, 1976. Dissertação de Mestrado.
- CAMPOS FILHO, A., **Fundamentos da Análise de Estruturas de Concreto pelo Método dos Elementos Finitos**, Porto Alegre PPGEC, 2003. Escola de Engenharia, UFRGS.
- CEB-FIP, **Model code 1990**, Lausanne, Switzerland, Thomas Telford, design code, 1993.
- COOK, R.D., **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**, 3rd ed., USA, John Wiley & Sons, 1989.
- D’AVILA, V. M. R., **Análise de Cascas pelo Método dos Elementos Finitos**, Porto Alegre CPGEC, 1990. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, UFRGS.

EMERICK, A.A. **Projeto e Execução de Lajes Protendidas**, 1ª ed., Brasil, Alexandre Emerick, 2005.

GILLIESPIE, P., MACKAY, H.M., LELUAU, C., “Report on the Strength of Ibeams Haunched in Concrete”, Engineering. Journal, 6, no 8, pp. 365-369, Montreal, 1923.

GOMES, I. R., **Análise Elastoplástica Laminar e Não-Laminar de Placas Finas pelo Método dos Elementos Finitos**, Porto Alegre CPGEC, 1990. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, UFRGS.

HENNEMAN, J. C. F., **Análise de Placas pelo Método dos Elementos Finitos**, Porto Alegre CPGEC, 1972. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, UFRGS.

JOUGLARD, I.C. , **Introdução al Método de Elementos Finitos – Formulação Variacional de Elementos Finitos**, Notas del Curso dictado en el 2º cuatrimestre de 2002, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional de Buenos Aires, 2002.

KULYSZ, P. M., **Cálculo de Flexão em Placas Retangulares sob a Ação de Carregamentos Quaisquer**, Porto Alegre CPGEC, 1982. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, UFRGS.

LIN, T. Y., **Design of Prestressed Concrete Structures**, New York, 3rd Edition, John Wiley & Sons, 646p., 1981

LIN, T. Y., **Load-Balancing Method for Design and Analysis of Prestressed Concrete Structures**,” ACI Journal, Proceedings V. 60, N° 6, 719-742 p., June 1963.

LEVY R. & GAL E., **The geometric stiffness of thick shell triangular finite elements for large rotations**, Wiley, Chichester, ROYAUME-UNI, International journal for numerical methods in engineering, ISSN 0029-598, vol. 65, n°9, pp. 1378-1402, 2006.

MARCZAK, R. J., Uma implementação Geral de Elementos do Contorno e sua Aplicação a Problemas de Flexão de Placas, Porto Alegre, CPGEC, 2002. Dissertação (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia, UFRGS.

MARQUES, D. C. S. C., **Análise Não Linear Estática e Dinâmica de Cascas Laminadas Anisótropas** , Porto Alegre CPGEC, 1994. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, UFRGS.

MARTINELLI, M., **Modelagem de Situações de Punção em Lajes de Concreto Armado através do Método dos Elementos Finitos**, Porto Alegre CPGEC, 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, UFRGS.

MESQUITA, A.D & CODA H.V., **Uma formulação do Método dos Elementos Finitos Aplicada à Análise Elastoplástica de Cascas**, Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v. 7, n. 22, p. 89-105, 2005

MINDLIN, R. D., **Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates**, Journal of Applied Mechanics 18, 31-38, 1951.

OWEN, D.R.J., HILTON, E., **Finite Element Software for Plate and Shells**, 1st. ed., Swansea, U.K., Pineridge Press Ltd, 1984.

PINHEIRO, L.M., **Análise Elástica e Plástica de Lajes Retangulares de Edifícios**, São Carlos, EESC-USP, 303p., 1988. (Tese de Doutorado).

REAL, M. V., **Análise Estática de Lajes de Concreto Armado incluindo Não-**

Linearidade Física e Geométrica, Porto Alegre CPGEC, 1990. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, UFRGS.

REISSNER, E., **On the theory of bending of elastic plates**, Journal of Mathematical Physics 23, 184-191, 1944.

SANTOS, M. I. G., **Implantação de Elementos para Cascas Axissimétricas na Linguagem LORANE**, Porto Alegre CPGEC, 1975. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, UFRGS.

SAP2000 – **Integrated Finite Element Analysis and Design of Structures**, Computers and Structures Inc., Berkeley, California, USA, 1996.

SCHWINGEL R.C., **Notas de Aula**, Porto Alegre, 2002

SELISTRE, S. L. C., **Análise Teórico Experimental de uma Laje Nervurada de Microconcreto Armado Submetida a um Carregamento Uniformemente Distribuído**, Porto Alegre CPGEC, 2000. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, UFRGS.

SHI, G., **Flexural vibration and buckling analysis of orthotropic plates by the boundary element method**, Int. J. Solids & Structures 26, 1351-1370, 1990.

STRICKLIN *et al.* **Rapidly converging triangular plate element**. AIAA Journal, v. 7, n°. 1, p.180-181, 1969.

TAMAGNA, A., **Análise Dinâmica de Placas Elásticas Sobre Apoios Discretos Não-Lineares**, Porto Alegre CPGEC, 1982. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, UFRGS.

TIMOSHENKO, S. P. & WOINOWSKY-KRIEGER, S., **Theory of Plates and Shells**, 2nd edn, McGraw-Hill, 1970.

VARELA, W. D., **Modelagens Simplificadas de Lajes Mistas em Grelha**, Rio de Janeiro, 2000, 131 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 2000)

WESTPHAL Jr., T., **Abordagem direta dos modelos de placa de reissner e mindlin pelo método dos elementos de contorno**, Master's thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1990.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)