Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística

Superfícies com fibrado normal plano:

uma construção explícita

Por

Franciane José da Silva

Orientador(a): Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro

Dissertação de Mestrado em Matemática

Goiânia, Goiás

2007

Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Coordenação de Pós-Graduação em Matemática

Superfícies com fibrado normal plano: uma construção explícita

por

Franciane José da Silva

Área de concentração: Geometria Diferencial

Orientador(a): Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Conselho Diretor do Instituto de Matemática e Estatística, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Goiânia-GO

2007

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela oportunidade dos estudos e ajuda nos momentos difícies.

Ao meu orientador e professor Dr. Armando Mauro Vasquez Corro, pela dedicação, competência e paciência que me ajudaram a melhorar meus conhecimentos. E também aos outros professores do IME, sempre dispostos a ajudar.

Aos meus amigos e colegas, pelo apóio e auxílio no decorrer do curso e também nos trabalhos de digitação.

À minha família, em especial à minha filha Jhuly, pela compreensão e incentivo.

E ao CNPq pelo apóio financeiro.

Sumário

Resumo

Neste trabalho estudamos alguns resultados do artigo de Ferapontov, E.V., *Surfaces with flat normal bundle: an explicit construction*, [10], onde é apresentada uma construção explícita de superfícies com fibrado normal plano na esfera unitária S^n em termos de soluções de um sistema de equações diferenciais. Uma construção similar é proposta para subvariedades de $\mathbb{R}^n$ com fibrado normal plano.

No caso particular de superfícies em S^3, usando a projeção estereográfica de S^3 em $\mathbb{R}^3$, as superfícies obtidas são localmente transformadas de Ribaucour de um subconjunto do plano.

Abstract

In this work we study some results Ferapontov´s paper, *Surfaces with flat normal bundle: an explicit construction*, [10], where is presented an explicit construction of surfaces with flat normal bundle in the unit sphere S^n in terms of solutions of a system of differential equations. A similar construction is proposed for submanifolds of $\mathbb{R}^n$ with flat normal bundle.

In the particular case of surfaces in S^3, using the stereographic projection of S^3 in $\mathbb{R}^3$, the surfaces obtained are locally transformation of Ribaucour of a flat subset.

Introdução

Propomos a construção direta de superfícies $M^2 \subset S^{m+1} \subset \mathbb{R}^{m+2}$ com fibrado normal plano em termos de uma matriz W de ordem $(m+2) \times m$ satisfazendo a equação

$$W^t W = I_m,$$

que depende de m soluções arbitrárias $(k^1, s^1), \ldots, (k^m, s^m)$ do sistema linear

$$\begin{aligned} k_{u^1} &= \tan\varphi s_{u^1} \\ k_{u^2} &= -\cot\varphi s_{u^2}, \end{aligned}$$

onde φ é uma função arbitrária de $u^1,\ u^2$. Cada coluna da matriz W pode ser considerada como uma parametrização da superfície com fibrado normal plano. As colunas restantes são as $m-1$ normais que são paralelas no fibrado normal. A matriz W é dada de tal forma que W_{u^i} é de posto um, implicando que as coordenadas u^i são coordenadas de linhas de curvatura. Provaremos que uma superfície qualquer com fibrado normal plano pode ser obtida localmente usando esta construção.

Generalizamos de forma análoga uma construção de subvariedades M^n holonômicas, com fibrado normal plano em S^{m+n-1}, em termos de uma matriz W de ordem

$(m+n) \times m$ satisfazendo a equação

$$W^t W = I_m,$$

que depende de m sistemas de coordenadas de $\mathbb{R}^n$. Cada coluna da matriz W pode ser considerada como a parametrização da subvariedade com fibrado normal plano. As colunas restantes são as $m-1$ normais que são paralelas no fibrado normal. A matriz W é dada de tal forma que W_{u^i} é de posto um, implicando que as coordenadas u^i são coordenadas de linhas de curvatura.

A construção feita no trabalho de Ferapontov, E. V., [10] é baseada no artigo de Liu, Q. P., Manas, M., [14].

Apresentamos a teoria de transformada de Ribaucour entre superfícies de $\mathbb{R}^3$. Provamos que a projeção estereográfica de S^3 em $\mathbb{R}^3$ leva uma superfície de S^3 obtida pela construção acima em uma superfície de $\mathbb{R}^3$ a qual é localmente a transformada de Ribaucour de um subconjunto do plano.

No Capítulo 1 apresentamos alguns tópicos de Variedades Riemannianas e propriedades de matrizes, que serão usados ao longo do trabalho. Depois introduzimos subvariedades com fibrado normal plano e a teoria de transformada de Ribaucour entre superfícies de $\mathbb{R}^3$. No Capítulo 2 apresentamos a construção de superfícies com fibrado normal plano na esfera S^m, aplicamos para um caso particular de superfícies em $\mathbb{R}^3$ e fazemos a construção de subvariedades M^n holonômicas com fibrado normal plano na esfera S^{m+n-1}.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Variedades Riemannianas

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos e resultados de geometria Riemanniana que serão utilizados neste trabalho.

Definição 1.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$, de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M, $\alpha \in I$, I um conjunto de índices, tais que:*

1. $\cup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$.

2. *Para todo par α, β com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis.*

O par (U_α, x_α) (ou a aplicação x_α), com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$, é dito **parametrização** (ou sistema de coordenadas) de M em p; $x_\alpha(U_\alpha)$ é uma vizinhança coordenada em p. Uma família (U_α, x_α) satisfazendo 1 e 2 da definição acima é uma estrutura diferenciável em M.

Definição 1.2. *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M \longrightarrow N$ é diferenciável em $p \in M$ se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow N$ em $\varphi(p)$existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow M$ em p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação*

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$.

Decorre da condição (2) da Definição 1.1, que a Definição 1.2 não depende da escolha das parametrizações.

Definição 1.3. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é chamada uma **curva** (diferenciável) em M. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja $\mathcal{D}(M)$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p. O **vetor tangente** à curva α, em $t = 0$, é a função $\alpha^{'}(0) : \mathcal{D}(M) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha^{'}(0) = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} |_{t=0}, f \in \mathcal{D}(M).$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por T_pM.

Se escolhermos uma parametrização $x : U \to M^n$ em $p \in M$, o vetor $\alpha^{'}(0)$ poderá ser expresso nesta parametrização por

$$\alpha^{'}(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0, \tag{1.1}$$

onde $(\frac{\partial}{\partial x_i})_0$ é o vetor tangente em p à curva coordenada $x_i \mapsto X(0, ..., x_i, ..., 0)$.

A expressão (1.2) mostra que o vetor tangente 97.937507(n)-36711222(a)0.245s74(o)-2842133(d)-367112

Definição 1.5. *Seja M^n uma variedade diferenciável e seja $TM = \{(p, v) : p \in M$ e $v \in T_pM\}$. Pode-se introduzir em TM uma estrutura diferenciável (de dimensão $2n$); com tal estrutura TM será chamado* fibrado tangente *de M.*

Definição 1.6. *Um* campo de vetores *X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicação, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM. O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \to TM$ é diferenciável.*

Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.2}$$

onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função em U e $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ é a base associada a x, i=1,...,n. O campo X é diferenciável se, e somente se, as funções a_i são diferenciáveis para alguma parametrização. Às vezes é conveniente pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X : \mathcal{D}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ do conjunto $\mathcal{D}(M)$ da funções diferenciáveis em M no conjunto $\mathfrak{F}(M)$ das funções em M, definida do seguinte modo

$$(Xf)(p) = \sum_{i} a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p). \tag{1.3}$$

A função Xf, definida acima, não depende da escolha da parametrização x.

Se X e Y são campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M. Então, $[X, Y] = XY - YX$ é um campo vetorial chamado o colchete de X e Y.

Definição 1.7. *Uma* métrica Riemanniana *é um sistema de coordenadas locais em torno de* p*, com* $x(x_1, x_2, ...x_n) = q \in x(U)$ *e* $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, ..., 1, ..., 0)$*, então* $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_{ij}(x_1, x_2, ...x_n)$ *é uma função diferenciável em* U*.*

Uma variedade diferenciável com uma métrica Riemanniana é chamada variedade Riemanniana.

Definição 1.8. *Sejam* M *e* N *variedades Riemannianas. Um difeomorfismo* $f : M \to N$ *(isto é,* f *é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é chamado uma* isometria *se*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)} \quad \text{para todo } p \in M, u, v \in T_pM.$$

Seja então, $f : M^n \to N^{n+k}$ uma imersão. Se N tem uma estrutura Riemanniana, f induz uma estrutura Riemanniana em M por

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \ u, v \in T_pM.$$

A métrica de M é chamada então a métrica induzida por f, e f é uma imersão isométrica.

No que se segue, $\mathcal{X}(M)$ denotará o conjunto de campos de vetores de classe $\mathcal{C}^\infty$ em M.

Definição 1.9. *Uma* conexão afim ∇ *em uma variedade diferenciável* M *é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ *e que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde X, Y, $Z \in \mathcal{X}(M)$ *e* f, $g \in \mathcal{D}(M)$.

Dizemos que uma conexão afim ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se,

$$X < Y, Z > = < \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z >,$$

e simétrica quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

onde X, Y, $Z \in \mathcal{X}(M)$.

Em um sistema de coordenadas (U, x), o fato da conexão ser simétrica implica que para todo $i, j = 1, ..., n$,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.4}$$

Teorema 1.1 (Levi Civita). *Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

1. *∇ é simétrica;*

2. *∇ é compatível com a métrica Riemanniana.*

Observação 1.1. *A conexão ∇ dada pelo Teorema* (1.1) *é denominada conexão Riemanniana de M ou* conexão de Levi Civita, *e caracterizada pela* Fórmula de Koszul,

$$\begin{aligned} \langle Z, \nabla_Y X \rangle &= \frac{1}{2}\{X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle + \\ &\quad \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle\}. \end{aligned}$$

Escolhendo um sistema de coordenadas (U, X) em torno de p, escrevendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ os Γ_{ij}^k são chamados os símbolos de Christoffel da conexão, temos pela Fórmula de Koszul que

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\right\},$$

onde $g_{ij} =< X_i, X_j >,\ i, j, k = 1, ..., n.$

Como a matriz (g_{km}) admite uma inversa (g^{km}),

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\sum_k \left\{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\right\} g^{km}. \tag{1.5}$$

Em seguida definiremos a curvatura em uma variedade Riemanniana M.

Definição 1.10. *A* curvatura *R, de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par X, $Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,\ \ Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Observe que se $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X, Y)Z = 0,\ \ \forall\ X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$.

Em um sistema de coordenadas (U, x) em torno de $p \in M$, denotamos

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R_{ijk}^l X_l,$$

temos que os R_{ijk}^l se expressam em termos dos símbolos de Christoffell Γ_{ij}^k por

$$R_{ijk}^s = \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_{ik}^s - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_{jk}^s. \tag{1.6}$$

Relacionada com o operador R, está a curvatura seccional que será definida a seguir.

Definição 1.11. *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$, o número real*

No que se segue, M será uma variedade Riemanniana munida de sua conexão Riemanniana. Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+m=k}$ uma imersão. Então, para cada $p \in M$, existe a vizinhança $U \subset M$ de p, tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Isto quer dizer que existe uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \to V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto V do $\mathbb{R}^k$, tais que φ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$. Para simplificar a notação, identificaremos U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)}\bar{M}$.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\bar{M}$.

A conexão Riemanniana de $\bar{M}$ será indicada por $\bar{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M, e $\bar{X}, \bar{Y}$ são extensões locais a $\bar{M}$, a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de M é dada por,

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T.$$

Vamos definir a segunda forma fundamental da imersão $f : M \to \bar{M}$. Indicaremos por $\mathcal{X}(U)^{\perp}$ o conjunto dos campos diferenciáveis em U de vetores normais a $f(U) \approx U$. Sejam X e Y campos locais em M. A aplicação $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \to \mathcal{X}(U)^{\perp}$ dada por

$$B(X,Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^N$$

é uma forma bilinear e simétrica chamada a segunda forma fundamental de f. Exprimindo B em um sistema de coordenadas concluímos que o valor de $B(X,Y)_{(p)}$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$. Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. À aplicação bilinear B fica associada uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_pM \to T_pM$ dada por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = \langle B(x,y), \eta \rangle.$$

A proposição seguinte nos dá uma expressão da aplicação linear associada à segunda forma fundamental em termos da derivada covariante.

Proposição 1.2. *Seja $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. Seja N uma extensão local de η normal a M. Então*

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

Relacionaremos agora a curvatura de M com a curvatura de $\overline{M}$ e as segundas formas fundamentais. Se $x, y \in T_pM \subset T_p\overline{M}$, são linearmente independentes, indicaremos por $K(x,y)$ e $\overline{K}(x,y)$ as curvaturas seccionais de M em $\overline{M}$, respectivamente, no plano gerado por x e y.

Teorema 1.2 (Gauss). *Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de T_pM. Então*

$$K(x,y) - \overline{K}(x,y) = \langle B(x,x), B(y,y)\rangle - |B(x,y)|^2.$$

Em seguida apresentaremos as equações fundamentais de uma imersão isométrica. Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ uma imersão isométrica. Localmente, a parte do fibrado tangente $T\bar{M}$ que se projeta sobre M se decompõe em um fibrado tangente TM e em um fibrado normal $TM^{\perp}$. No que se segue, usaremos sistematicamente as letras latinas X, Y, Z, etc., para indicar os campos diferenciáveis de vetores tangentes e as letras gregas ξ, η, ζ, etc., para indicar os campos diferenciáveis de vetores normais.

Dados X e η, já vimos que a componente tangente de $\bar{\nabla}_X \eta$ é dada por $(\bar{\nabla}_X \eta)^T = -S_\eta(X)$. Passaremos agora a estudar a componente normal de $\bar{\nabla}_X \eta$, que será chamada a conexão normal $\nabla^{\perp}$ da imersão. Explicitamente,

$$\nabla^{\perp}_X \eta = (\bar{\nabla}_X \eta)^N = \bar{\nabla}_X \eta - (\bar{\nabla}_X \eta)^T = \bar{\nabla}_X \eta + S_\eta(X).$$

Verifica-se que a conexão normal $\nabla^{\perp}$ possui as propriedades usuais de uma conexão.

De maneira análoga ao caso do fibrado tangente, introduz-se a partir de $\nabla^\perp$ uma notação de curvatura no fibrado normal que é chamada curvatura normal $R^\perp$ da imersão e definida por

$$R^\perp(X,Y)\eta = \nabla^\perp_Y \nabla^\perp_X \eta - \nabla^\perp_X \nabla^\perp_Y \eta + \nabla^\perp_{[X,Y]}\eta.$$

Proposição 1.3. *As seguintes equações se verificam:*

1. *Equação de Gauss*

$$\begin{aligned}\langle \bar{R}(X,Y)Z,W\rangle &= \langle R(X,Y)Z,W\rangle - \langle B(Y,W),B(X,Z)\rangle \\ &\quad + \langle B(X,W),B(Y,Z)\rangle.\end{aligned}$$

2. *Equação de Ricci*

$$\langle \bar{R}(X,Y)\eta,\zeta\rangle - \langle R^\perp(X,Y)\eta,\zeta\rangle = \langle [S_\eta,S_\zeta]X,Y\rangle,$$

onde $[S_\eta,S_\zeta]$ *indica o operador* $S_\eta \circ S_\zeta - S_\zeta \circ S_\eta$.

A segunda forma fundamental da imersão pode então ser considerada como um tensor

$$B : \mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)^\perp \to \mathcal{D}(M)$$

definido por

$$B(X,Y,\eta) = \langle B(X,Y),\eta\rangle.$$

A definição de derivada covariante se estende a esse tipo de tensor de maneira natural:

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta) &= X(B(Y,Z,\eta)) - B(\nabla_X Y,Z,\eta) \\ &\quad - B(Y,\nabla_X Z,\eta) - B(Y,Z,\nabla^\perp_X \eta).\end{aligned}$$

Proposição 1.4 (Equação de Codazzi). *Com a notação acima,*

$$\langle \bar{R}(X,Y),Z,\eta\rangle = (\bar{\nabla}_Y B)(X,Z,\eta) - (\bar{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta).$$

Observação 1.2. *Se o espaço ambiente $\bar{M}$ tem curvatura seccional constante, a equação de Codazzi se reduz a*

$$(\bar{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta) = (\bar{\nabla}_Y B)(X,Z,\eta).$$

Se, além disso, a codimensão da imersão é 1, $\nabla^{\perp}_X \eta = 0$, donde,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X B(Y,Z,\eta) &= X\langle S_\eta(Y), Z\rangle - \langle S_\eta(\nabla_X Y), Z\rangle - \langle S_\eta(Y), \nabla_X Z\rangle \\ &= \langle \nabla_X(S_\eta(Y)), Z\rangle - \langle S_\eta(\nabla_X Y), Z\rangle.\end{aligned}$$

Portanto, neste caso, a equação de Codazzi se escreve da forma

$$\nabla_X(S_\eta(Y)) - \nabla_Y(S_\eta(X)) = S_\eta([X,Y]).$$

A importância das equações de Gauss, Codazzi e Ricci é que, *Demonstração.* Considere o subespaço

$$R_\lambda = \{x;\ Ax = \lambda x\}.$$

Queremos mostrar que se $x \in R_\lambda$, então $Bx \in R_\lambda$, isto é, $ABx = \lambda Bx$. Como $AB = BA$, temos

$$ABx = BAx = B\lambda x = \lambda Bx,$$

que prova o lema.

$\square$

Lema 1.2. *Quaisquer duas transformações lineares que comutam têm em comum um autovetor.*

Demonstração. Seja $AB = BA$ e seja λ um autovalor de A. Pelo Lema 1.1 R_λ é invariante por B. Assim R_λ contém um vetor x_0 que é um autovetor de B. Mas x_0 também é um autovetor de A, pois todos vetores de R_λ são autovetores de A. $\square$

Proposição 1.6. *Sejam A e B duas transformações auto-adjuntas definidas em um espaço vetorial n-dimensional R. Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma base ortogonal em R relativa a qual as transformações A e B são representadas por matrizes diagonais é que A e B comutam.*

Demonstração. Suponha que $AB = BA$. Então, pelo Lema 1.2, existe um vetor e_1 que é um autovetor de A e B, isto é,

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1, \quad Be_1 = \mu_1 e_1.$$

Vamos mostrar que o subespaço (n-1)-dimensional R_1 ortogonal a e_1 é invariante por A e B. Seja $x \in R_1$

$$\langle Ax, e_1 \rangle = \langle x, Ae_1 \rangle = \lambda_1 \langle x, e_1 \rangle = 0$$

assim $Ax \in R_1$, portanto R_1 é invariante por A. De maneira análoga mostra-se que R_1 é invariante por B. Agora considere A e B somente em R_1. Pelo Lema 1.2, existe um vetor e_2 em R_1 que é um autovetor de A e B,

$$Ae_2 = \lambda_2 e_2, \quad Be_2 = \mu_2 e_2.$$

Todos vetores de R_1 que são ortogonais a e_2 formam um subespaço (n-2)-dimensional invariante por A e B. Procedendo desta maneira encontramos n autovetores ortogonais $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \quad Be_i = \mu_i e_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Relativa a base $\{e_i\}$ as matrizes de A e B são diagonais.

Assuma que as matrizes de A e B são diagonais relativa a alguma base ortogonal. Segue que estas matrizes comutam. Mas então as transformações também comutam.

□

1.3 Subvariedades de R^n com fibrado normal plano

Vamos definir subvariedades com fibrado normal plano e em seguida encontrar as equações de Gauss e Codazzi para subvariedades de $\mathbb{R}^n$. Considere M^n uma subvariedade de $\mathbb{R}^{n+m}$ e $X : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ um sistema de coordenadas de M.

Definição 1.15. *Dizemos que M tem fibrado normal plano se existe uma base ortonormal de $TM^{\perp}$, $\{N^\alpha\}$ $1 \leq \alpha \leq m$, para a qual*

$$dN^\alpha \in TM, \text{ para todo } \alpha.$$

Os campos N^α são chamados campos paralelos na conexão normal plana.

Observação 1.3. *Admita que o espaço ambiente $\bar{M}$ tem curvatura seccional constante. Então, a equação de Ricci se escreve*

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\zeta\rangle = -\langle [S_\eta, S_\zeta]X, Y\rangle.$$

Decorre daí que $R^{\perp} = 0$ se, e somente se, $[S_\eta, S_\zeta] = 0$ para todo η, ζ.

Proposição 1.7. *$M^n \subset \mathbb{R}^{n+m}$ tem fibrado normal plano se,e somente se, existe, $\{N^\alpha\}$, $1 \leq \alpha \leq m$, base de $TM^{\perp}$ e $\{w_i\}$, $1 \leq i \leq n$, base de TM, tal que*

$$dN^\alpha(w_i) = \lambda^{\alpha_i} w_i, \;\; 1 \leq i \leq n, \; 1 \leq \alpha \leq m.$$

Neste caso os w_i são chamados de direções principais e λ^{α_i} são as curvaturas principais.

Demonstração. Suponha que M tem fibrado normal plano, então existe uma base, $\{N^\alpha\}$, do fibrado normal tal que $dN^\alpha \in TM$. Assim,

$$R^{\perp}(X_{,i}, X_{,j})N^\alpha = 0, \quad 1 \leq i, \; j \leq n, \; 1 \leq \alpha \leq m,$$

onde $\{X_{,i}\}$, $1 \leq i \leq n$, é uma base de TM. Portanto, $R^{\perp} = 0$, pela Observação 1.3 temos que $[S_\eta, S_\zeta] = 0$. Usando a Proposição 1.6 existe uma base $\{w_i\}$ de TM que diagonaliza simultaneamente todos S_η, $\eta \in \mathcal{X}^{\perp}(M)$. Temos,

$$S_{N^\alpha}(w_i) = -(dN^\alpha(w_i))^{\top} = -dN^\alpha(w_i) = -\lambda^{\alpha_i} w_i.$$

Reciprocamente, se $dN^\alpha(w_i) = \lambda^{\alpha_i} w_i$, então $dN^\alpha \in TM$. $\square$

Definição 1.16. *Uma subvariedade com fibrado normal plano é chamada* **holonômica** *se localmente admite parametrizações cujas curvas coordenadas são linhas de curvatura.*

Vamos considerar $M^n \subset \mathbb{R}^{n+m}$ holonômica e $X : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$ uma parametrização cujas curvas coordenadas são linhas de curvatura ortogonais. Assim podemos escrever

$$dN^\alpha(X_{,i}) = \lambda^{\alpha_i} X_{,i}, \;\; 1 \leq i \leq n, \; 1 \leq \alpha \leq m,$$

onde $X_{,i} = \partial X/\partial u^i$. Seja $g_{ij} = \langle X_{,i}, X_{,j}\rangle$ a métrica de M.

Observação 1.4. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$ uma subvariedade cujas curvas coordenadas são ortogonais. Então, por* (1.5)*, temos*

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^k &= 0, \quad i \neq j \neq k,\\
\Gamma_{ij}^i &= \frac{1}{2g_{ii}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial u^j}, \quad i,\ j \text{ qualquer},\\
\Gamma_{ii}^j &= -\frac{1}{2g_{jj}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial u^j} = -\frac{g_{ii}}{g_{jj}}\Gamma_{ij}^i, \ \ i \neq j,
\end{aligned}
$$

onde, $1 \leq i,\ j,\ k \leq n$.

Introduza as funções

$$H_i = \sqrt{g_{ii}},$$

β_{ij} dada pela fórmula

$$\partial_i H_j = \beta_{ij} H_i, \ \ i \neq j$$

e H_i^α satisfazendo

$$\lambda^{\alpha_i} = \frac{H_i^\alpha}{H_i}.$$

Usando que $H_i = \sqrt{g_{ii}}$, os símbolos de Christoffel são dados por

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{ii}^i &= \frac{1}{H_i}\partial_i H_i,\\
\Gamma_{ij}^i &= \frac{H_j}{H_i}\beta_{ji},\\
\Gamma_{ii}^j &= -\frac{H_i}{H_j}\beta_{ji}.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Usando as notações introduzidas acima vamos escrever as equações de Gauss e Codazzi de M.

Proposição 1.8. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$ uma subvariedade com fibrado normal plano cujas curvas coordenadas são linhas de curvatura ortogonais. Então as equações* *de Gauss e Codazzi são dadas por*

$$\begin{aligned}
\partial_i H_j^\alpha &= \beta_{ij} H_i^\alpha, && (1.8)\\
\partial_k \beta_{ij} &= \beta_{ik}\beta_{kj}, \quad k \neq i, j, && (1.9)\\
\partial_i \beta_{ij} &+ \partial_j \beta_{ji} + \sum_{k\neq i,j} \beta_{ki}\beta_{kj} + \sum_{\alpha=1}^{m} H_i^\alpha H_j^\alpha = 0, && (1.10)
\end{aligned}$$

onde $(H_i)^2 =< X_{,i}, X_{,i} >$, $H_i^\alpha = H_i \lambda^{\alpha_i}$ *e* λ^{α_i} *são as curvaturas principais.*

Demonstração. Temos que $X_{,ij} \subset TM$, de fato, derivando $\langle X_{,i}, N^\alpha\rangle = 0$ em relação a $u^j \neq u^i$ ficamos com

$$\langle X_{,ij}, N^\alpha\rangle = -\langle X_{,i}, \partial_j N^\alpha\rangle = \langle X_{,i}, \lambda^{\alpha_j} X_{,j}\rangle = 0,$$

para todo $\alpha = 1, \ldots, m$. Assim podemos escrever

$$\begin{aligned}
X_{,ii} &= \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ii}^k X_{,k} + \sum_{\alpha=1}^{m} b_i^\alpha N^\alpha, && (1.11)\\
X_{,ij} &= \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k X_{,k}, \quad i \neq j, && (1.12)
\end{aligned}$$

onde os Γ_{ij}^k e b_i^α são funções de n variáveis $u^1, \ldots, u^n$ definidas em U e Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel. Como $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$, a condição de compatibilidade implica que $\partial_j X_{,ii} = \partial_i X_{,ij}$, substituindo (1.11) e (1.12)

$$\sum_{k=1}^{n}(\partial_j \Gamma_{ii}^k X_{,k} + \Gamma_{ii}^k X_{,kj}) + \sum_{\alpha=1}^{n}(\partial_j b_i^\alpha N^\alpha + b_i^\alpha \partial_j N^\alpha) = \sum_{k=1}^{n}(\partial_i \Gamma_{ij}^k X_{,k} + \Gamma_{ij}^k X_{,ki}).$$

Usando novamente (1.11), (1.12) e que $dN^\alpha(X_{,i}) = \lambda^{\alpha_i} X_{,i}$ a equação acima fica

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{n}[\partial_j \Gamma_{ii}^l - \partial_i \Gamma_{ij}^l + \Gamma_{ii}^j \Gamma_{jj}^l - \Gamma_{ij}^i \Gamma_{ii}^l + (\Gamma_{ii}^i - \Gamma_{ij}^j)\Gamma_{ij}^l + \sum_{k\neq i,j}(\Gamma_{ii}^k \Gamma_{kj}^l - \Gamma_{ij}^k \Gamma_{ki}^l)]X_{,l} +\\
&\sum_{\alpha=1}^{n} b_i^\alpha \lambda^{\alpha_j} X_{,j} + \sum_{\alpha=1}^{n}(\Gamma_{ii}^j b_j^\alpha - \Gamma_{ij}^i b_i^\alpha + \partial_j b_i^\alpha)N^\alpha = 0. \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

Os vetores $\{X_{,i}, N^\alpha\}$, $i = 1, \ldots, n$ e $\alpha = 1, \ldots, m$, formam uma base de $\mathbb{R}^{n+m}$. E como $\Gamma_{ij}^k = 0$, se $i \neq j \neq k$, tomando os coeficientes de $X_{,j}$, $X_{,l}$, $l \neq i, j$ e N^α, na equação (1.13) temos as seguintes equações respectivamente

$$\partial_j \Gamma_{ii}^j - \partial_i \Gamma_{ij}^j + (\Gamma_{jj}^j - \Gamma_{ij}^i)\Gamma_{ii}^j + (\Gamma_{ii}^i - \Gamma_{ij}^j)\Gamma_{ij}^j + \sum_{k \neq i,j} \Gamma_{ii}^k \Gamma_{kj}^j + \sum_{\alpha=1}^n b_i^\alpha \lambda^{\alpha_j} = 0,$$

$$\partial_j \Gamma_{ii}^l + \Gamma_{ii}^j \Gamma_{jj}^l - \Gamma_{ij}^i \Gamma_{ii}^l + \Gamma_{ii}^l \Gamma_{lj}^l = 0,$$

$$\Gamma_{ii}^j b_j^\alpha - \Gamma_{ij}^i b_i^\alpha + \partial_j b_i^\alpha = 0.$$

Derivando $\langle X_{,i}, N^\alpha \rangle = 0$ em relação a u^i temos

$$b_i^\alpha = -\langle X_{,i}, \partial_i N^\alpha \rangle = -\lambda^{\alpha i} g_{ii}, \tag{1.14}$$

usando nas equações acima, temos

$$\Gamma_{ii,j}^j - \Gamma_{ij,i}^j + (\Gamma_{jj}^j - \Gamma_{ij}^i)\Gamma_{ii}^j + (\Gamma_{ii}^i - \Gamma_{ij}^j)\Gamma_{ij}^j + \sum_{k \neq i,j} \Gamma_{ii}^k \Gamma_{kj}^j = \sum_{\alpha=1}^n \lambda^{\alpha_i} \lambda^{\alpha_j} g_{ii}, \tag{1.15}$$

$$\Gamma_{ii,j}^l + \Gamma_{ii}^j \Gamma_{jj}^l - \Gamma_{ij}^i \Gamma_{ii}^l + \Gamma_{ii}^l \Gamma_{lj}^l = 0, \tag{1.16}$$

$$\lambda_{,j}^{\alpha_i} = (\lambda^{\alpha_j} - \lambda^{\alpha_i})\Gamma_{ij}^i. \tag{1.17}$$

As equações (1.15) e (1.16) são as equações de Gauss e a equação (1.17) é a equação de Codazzi.

Usando que $\lambda^{\alpha_i} = \frac{H_i^\alpha}{H_i}$ e os símbolos de Christoffel (1.7), a equação de Codazzi (1.17) pode ser escrita na forma (1.8) e das equações de Gauss (1.15), (1.16) obtemos (1.10) e (1.9) respectivamente. □

1.4 Transformada de Ribaucour entre superfícies de R^3

Nesta seção, introduziremos a teoria de transformada de Ribaucour de superfícies. Para mais detalhes, ver [1], [4] e [5].

Uma congruência de esferas em $\mathbb{R}^3$ é uma família a 2-parâmetros de esferas, com uma função raio diferenciável, cujos centros encontram-se em uma superfície M_0 contida em $\mathbb{R}^3$. Uma involuta de uma congruência de esferas é uma superfície M de $\mathbb{R}^3$ tal que, em cada ponto, M é tangente a uma esfera da congruência de esferas. Duas superfícies M e $\tilde{M}$ são associadas por uma congruência de esferas se tem um difeomorfismo $\Psi : M \to \tilde{M}$ tal que, para pontos correspondentes p e $\Psi(p)$, as superfícies são tangentes à mesma esfera da congruência de esferas. Segue desta definição que as retas normais em pontos correspondentes interceptam em um ponto equidistante na superfície dos centros M_0. Um caso especial importante ocorre quando Ψ preserva direções principais.

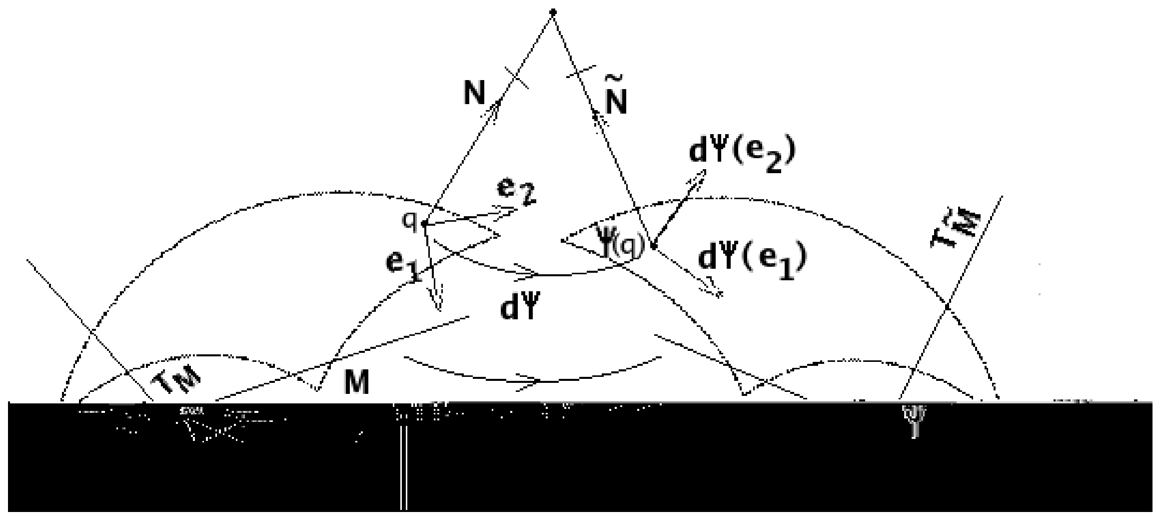
Definição 1.17. *Seja M^2 superfície em $\mathbb{R}^3$. Suponha que exista $e_1,\ e_2$ campos de vetores principais ortonormais definidos em M. Uma superfície $\tilde{M}^2 \subset \mathbb{R}^3$ é associada a M por uma transformada de Ribaucour, com relação a $e_1,\ e_2$ se existe um difeomorfismo $\psi : M \to \tilde{M}$ e uma função diferenciável $h : M \to \mathbb{R}$, tal que*

a) $q + h(q)N(q) = \psi(q) + h(q)\tilde{N}(\psi(q)),\ \forall q \in M$

b) *o subconjunto $q + h(q)N(q),\ q \in M$ é 2-dimensional*

c) *$d\psi(e_i)$ são direções principais ortogonais em $\tilde{M}$,*

onde N e $\tilde{N}$ são as aplicações normais de Gauss associadas a M e $\tilde{M}$, respectivamente.



Nos resultados seguintes vamos considerar $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ que localmente admite uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, cujas curvas coordenadas são linhas de curvatura ortogonais, N a aplicação normal de Gauss associada a M e $\lambda^1,\ \lambda^2$ as curvaturas principais de M. Considere também $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^3$ superfície com parametrização $\tilde{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e aplicação normal $\tilde{N}$. Sejam $X_{,1} = \frac{\partial X}{\partial u^1}, X_{,2} = \frac{\partial X}{\partial u^2}$, $u = (u^1, u^2) \in U$ e se f é uma função qualquer de $u^1,\ u^2$, $f_{,1} = \frac{\partial f}{\partial u^1}$ e $f_{,2} = \frac{\partial f}{\partial u^2}$.

Lema 1.3. *Sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma superfície cujas curvas coordenadas são linhas de curvatura ortogonais, N a aplicação normal de Gauss associada a X, $a_i^2 =< X_{,i}, X_{,i} >$, $1 \leq i \leq 2$ e $\{\lambda^i\}_{i=1}^2$ as curvaturas principais de X. $\tilde{X}$ é transformada de Ribaucour de X com relação a $X_{,1}/a_1,\ X_{,2}/a_2$ se, e somente se, existe uma função $h : U \subset R^2 \to R$ tal que $\tilde{X}$ é dado por*

$$\tilde{X} = X + h(N - \tilde{N}), \qquad (1.18)$$

$$\tilde{N} = \sum_{k=1}^{2} b^k X_{,k} + b^3 N, \qquad (1.19)$$

onde

$$
\begin{aligned}
b^i &= \frac{h_{,i}(1-b^3)}{g_{ii}(1+h\lambda^i)}, \quad 1 \leq i \leq 2, &(1.20)\\
b^3 &= \frac{\Delta - 1}{\Delta + 1}, &(1.21)\\
\Delta &= \sum_{k=1}^{2} \frac{(h_{,k})^2}{g_{kk}(1+h\lambda^k)^2} &(1.22)
\end{aligned}
$$

e as seguintes relações são satisfeitas

$$
\begin{gathered}
(1+h\lambda^j) < X_{,j}, N_{,i} > + h_{,j} < N, \tilde{N}_{,i} >= 0\\
< \tilde{N}_{,i}, \tilde{N} >= 0,\\
< \tilde{N}_{,i}, \tilde{N}_{,j} >= 0,\\
< \tilde{X}_{,i}, \tilde{X}_{,j} >= 0,
\end{gathered} \tag{1.23}
$$

para $1 \leq i, j \leq 2,\ i \neq j$.

Demonstração. Vamos tomar $\tilde{X}(U) = \psi(X(U))$. Suponha que $\tilde{X}$ é transformada de Ribaucour de X, então (1.18) é satisfeita. $\tilde{N}$ pode ser escrita na forma (1.19), tal que

$$
\begin{aligned}
< \tilde{N}, \tilde{N} > &= 1,\\
< \tilde{N}, \tilde{X}_{,i} > &= 0,\\
< \tilde{N}_{,i}, \tilde{N} > &= 0,\\
< \tilde{N}_{,i}, \tilde{X}_{,j} > &= 0,\\
< \tilde{X}_{,i}, \tilde{X}_{,j} > &= 0,
\end{aligned} \tag{1.24}
$$

e $1 \leq i, j \leq 2,\ i \neq j$.

Derivando (1.18), temos

$$\tilde{X}_{,i} = X_{,i} + h_{,i}(N - \tilde{N}) + h(N_{,i} - \tilde{N}_{,i})$$

usando que, $N_{,i} = \lambda^i X_{,i}$, obtemos

$$\tilde{X}_{,i} = (1+h\lambda^i)X_{,i} + h_{,i}(N - \tilde{N}) - h\tilde{N}_{,i}\,. \tag{1.25}$$

Substituindo (1.19) e (1.25) na segunda equação de (1.24), temos

$$(1 + h\lambda^i)g_{ii}b^i - (1 - b^3)h_{,i} = 0,$$

então (1.20) é satisfeita. Substituindo (1.19) na primeira equação de (1.24), conseguimos

$$\sum_{k=1}^{2}(b^k)^2 g_{kk} + (b^3)^2 = 1,$$

fazendo

$$\Delta = \sum_{k=1}^{2} \frac{(h_{,k})^2}{g_{kk}(1 + h\lambda^k)^2}$$

e usando (1.20) chegamos que b^3 satisfaz a equação

$$(1 + \Delta)(b^3)^2 - 2\Delta b^3 + (\Delta - 1) = 0.$$

Resolvendo a equação acima, obtemos

$$b^3 = \frac{\Delta \pm 1}{\Delta + 1},$$

então $b^3 = 1$, de onde segue que $X = \tilde{X}$, ou (1.21) é satisfeita. A quarta equação de (1.24) é equivalente à primeira equação de (1.23).

Segue diretamente das condições (1.18) $-$ (1.23) que a recíproca é verdadeira. $\square$

Lema 1.4. *Sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma superfície cujas curvas coordenadas são linhas de curvatura, N a aplicacão normal de X, $a_i^2 =< X_{,i}, X_{,i} >$, $1 \leq i \leq 2$ e $\{\lambda^i\}_{i=1}^2$ as curvaturas principais. Considere $\tilde{X}$ a transformada de Ribaucour de X com relação a $X_{,1}/a_1$, $X_{,2}/a_2$ e $\tilde{N}$ a aplicação normal de $\tilde{X}$. Então temos que:*

$$\tilde{N}_{,i} = \sum_j C_i^j X_{,j} + C_i^3 N, \tag{1.26}$$

onde

$$\begin{aligned} C_i^i &= b,_i^i + \sum_{l=1}^{2} b^l \Gamma_{li}^i + b^3 \lambda^i \\ C_i^j &= b,_i^j + b^i \Gamma_{ii}^j + b^j \Gamma_{ji}^j, \\ C_i^3 &= b,_i^3 - b^i \lambda^i g_{ii}, \end{aligned} \tag{1.27}$$

$g_{ii} =< X,_i , X,_i >$ *e* Γ_{ij}^k *são os símbolos de Cristoffel de* X.

Demonstração. Derivando (1.19) com relação a u^i

$$\tilde{N},_i = \sum_{k=1}^{2} (b^k,_i X,_k + b^k X,_{ki}) + b^3,_i N + b^3 N,_i , \tag{1.28}$$

Usando (1.11), (1.12) e (1.14), temos

$$\begin{aligned} X,_{ii} &= \Gamma_{ii}^i X,_i + \Gamma_{ii}^j X,_j - g_{ii} \lambda^i N \\ X,_{ji} &= \Gamma_{ji}^i X,_i + \Gamma_{ji}^j X,_j . \end{aligned}$$

Substituindo estas relações e $N,_i = \lambda^i X,_i$ em (1.28) obtemos os resultados. □

Teorema 1.3. *Sejam* $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *superfície cujas curvas coordenadas são linhas de curvatura,* N *a aplicação normal de* X *e* $\tilde{X}(u^1, u^2) = X(u^1, u^2) + h(u^1, u^2)(N(u^1, u^2) - \tilde{N}(u^1, u^2))$ *onde* $\tilde{N}$ *é a aplicação normal de* $\tilde{X}$ *dada por* (1.19) − (1.22). *Então* $\tilde{X}$ *é transformação de Ribaucour de* X *com relação a* $X,_1 / a_1$ $X,_2 / a_2$ *se, e somente se,* h *satisfaz*

$$h,_{ij} - \frac{(1 + h\lambda^j)}{1 + h\lambda^i} \Gamma_{ij}^i h,_i - \frac{(1 + h\lambda^i)}{1 + h\lambda^j} \Gamma_{ji}^j h,_j - \left[\frac{\lambda^i}{1 + h\lambda^i} + \frac{\lambda^j}{1 + h\lambda^j} \right] h,_i h,_j = 0 \tag{1.29}$$

Demonstração. Substituindo (1.26) chegamos que a primeira equação de (1.23) é equivalente a equação

$$(1 + h\lambda^j) g_{jj} C_i^j + h,_j C_i^3 = 0. \tag{1.30}$$

Esta equação é equivalente a equação (1.29), de fato, usando (1.27) ficamos com

$$(1+h\lambda^j)g_{jj}(b,_i^j+b^i\Gamma_{ii}^j+b^j\Gamma_{ji}^j)+h,_j(b,_i^3-b^i\lambda^i g_{ii})=0.$$

Substituindo (1.20), sua derivada e usando a equação de Codazzi $\lambda,_j^i=(\lambda^j-\lambda^i)\Gamma_{ij}^i$, temos

$$\left[h,_{ij}-2\Gamma_{ji}^j h,_j-\frac{\lambda^j h,_j h,_i}{1+h\lambda^j}-\frac{(\lambda^i-\lambda^j)\Gamma_{ji}^j hh,_j}{1+h\lambda^j}+\frac{(1+h\lambda^j)\Gamma_{ii}^j h,_i g_{jj}}{(1+h\lambda^i)g_{ii}}\right.$$
$$\left.+h,_j\Gamma_{ji}^j-\frac{h,_i h,_j\lambda^i}{1+h\lambda^i}\right](1-b^3)=0$$

usando que $\Gamma_{ii}^j=-g_{ii}/g_{jj}\Gamma_{ij}^i$ obtemos a equação (1.29).

Suponha que $\tilde{X}$ é transformação de Ribaucour de X com relação a $X,_1/a_1$ $X,_2/a_2$, logo pelo Lema (1.3), temos que o sistema (1.23) é satisfeito, então vale (1.29).

Reciprocamente, suponha que (1.29) é satisfeito, esta equação é equivalente a (1.30), usando esta equação verificamos que as condições suficientes do Lema (1.3) são satisfeitas. De fato, a primeira equação de (1.23) é satisfeita, então $<\tilde{N},_i,\tilde{X},_j>=0$, também temos que $<\tilde{N},_i,\tilde{N}>=0$, além disso usando (1.25), (1.20) e (1.30) obtemos

$$\begin{aligned}
<\tilde{X},_i,\tilde{X},_j> &= <(1+h\lambda^i)X,_i+h,_i(N-\tilde{N})-h\tilde{N},_i,\tilde{X},_j> \\
&= (1+h\lambda^i)<X,_i,\tilde{X},_j>+h,_i<N,\tilde{X}_j> \\
&= (1+h\lambda^i)<X,_i,(1+h\lambda^j)X,_j+h,_j(N-\tilde{N})-h\tilde{N},_j> \\
&\quad +h,_i<N,(1+h\lambda^j)X,_j+h,_j(N-\tilde{N})-h\tilde{N},_j> \\
&= -(1+h\lambda^i)g_{ii}b^ih,_j-(1+h\lambda^i)g_{ii}C_j^ih+h,_ih,_j(1-b^3)-C_j^3hh,_i \\
&= -h,_jh,_i(1-b^3)+h,_jh,_i(1-b^3)-h((1+h\lambda^i)g_{ii}C_j^i+C_j^3h,_i)=0.
\end{aligned}$$

O resultado segue do Lema (1.3). □

Lema 1.5. *Se h é solução de* (1.29), *então* $\psi=\sum_{i=1}^2 A^i du^i$, $A^i=\frac{h,_i}{(1+h\lambda^i)h}$, *é uma forma fechada.*

Demonstração. ψ é uma forma fechada se, e somente se, $A^1_{,2} = A^2_{,1}$. Derivando A^1, temos

$$A^1_{,2} = \frac{h_{,12}}{(1+h\lambda^1)h} - \frac{h_{,1}h_{,2}}{(1+h\lambda^1)h^2} - \frac{h_{,1}h_{,2}\lambda^1}{(1+h\lambda^1)^2 h} - \frac{h_{,1}\lambda^1_{,2}}{(1+h\lambda^1)^2},$$

usando (1.29) e a Equação de Codazzi (1.17), obtemos

$$A^1_{,2} = \frac{h_{,1}}{(1+h\lambda^1)h}\Gamma^1_{12} + \frac{h_{,2}}{(1+h\lambda^2)h}\Gamma^2_{12} - \frac{h_{,1}h_{,2}}{(1+h\lambda^1)(1+h\lambda^2)h^2},$$

logo $A^1_{,2} = A^2_{,1}$, de onde segue o resultado. □

Teorema 1.4. *Se h é uma solução de* (1.29)*, que não se anula em um domínio simplesmente conexo, então $h = \frac{\Omega}{W}$, onde Ω e W são funções não nulas que satisfazem*

$$\begin{aligned} \Omega,^i_j &= \frac{\Omega^j}{a_i}\frac{\partial a_j}{\partial u_i}, \quad i \neq j, \\ \Omega_{,i} &= a_i \Omega^i, \\ W,i &= -\lambda^i a_i \Omega^i, \end{aligned} \tag{1.31}$$

onde $a_i^2 = g_{ii}$. Reciprocamente, suponha (1.31) *satisfeito e $W(W + \Omega\lambda^i) \neq 0$, então $h = \frac{\Omega}{W}$ satisfaz* (1.29).

Demonstração. Suponha que h é solução de (1.29). Como ψ é uma forma fechada existe Ω tal que $d(\log \Omega) = \psi$. Defina $\Omega^i = \Omega_{,i}/a_i$ e $W = \Omega/h$, onde $a_i^2 = g_{ii}$. A segunda equação de (1.31) está satisfeita e

$$h_{,i} = \Omega_{,i}(1 + \lambda^i \Omega/W)/W = \frac{a_i \Omega^i}{W^2}(W + \lambda^i \Omega). \tag{1.32}$$

Derivando W obtemos a terceira equação de (1.31), de fato

$$W_{,i} = \frac{\Omega_{,i}}{h} - \frac{h_{,i}\Omega}{h^2} = \frac{a_i\Omega^i W}{\Omega} - \frac{a_i \Omega^i W}{\Omega}(1 + \lambda^i \Omega/W) = -a_i \Omega^i \lambda^i.$$

Derivando (1.32) com relação a u^j, temos

$$h_{,ij} = [(a_{i,j}\Omega^i + a_i\Omega^i_{,j})(W + \lambda^i\Omega) + a_i\Omega^i(-W_{,j} + \lambda^i_{,j}\Omega + \lambda^i a_j\Omega^j]/W^2 - [2W_{,j}a_i\Omega^i\Omega\lambda^i]/W^3.$$

Usando a terceira equação de (1.31) e (1.17), obtemos

$$\begin{aligned} h_{,ij} &= [(a_{i,j}\Omega^i + a_i\Omega^i_{,j})(W + \lambda^i\Omega) + a_i a_j\Omega^i\Omega^j(\lambda^i + \lambda^j) + a_i\Omega^i\Omega(\lambda^j - \lambda^i)\Gamma^i_{ij}]/W^2 \\ &\quad +2[a_i a_j\Omega^i\Omega^j\Omega\lambda^i\lambda^j]/W^3. \end{aligned}$$

Logo a equação (1.29) é equivalente a

$$[a_{i,j}\Omega^i + a_i\Omega^i_{,j} - a_i\Omega^i\Gamma^i_{ij} - a_j\Omega^j\Gamma^j_{ij}](W + \lambda^i\Omega)/W^2 = 0,$$

usando $a_{i,j} = \Gamma^i_{ij}a_i$, concluímos

$$a_i\Omega^i_{,j} - a_{j,i}\Omega^j = 0.$$

Portanto, (1.29) é equivalente à primeira equação de (1.31).

Reciprocamente se (1.31) é satisfeito, considerando $h_{,i} = \Omega_{,i}(1 + \lambda^i\Omega/W)/W$ concluímos que (1.29) é satisfeito. $\square$

Segue da prova acima que

$$h,i = \frac{a_i\Omega^i}{W}(1 + \lambda^i\Omega/W), \quad \Delta = \frac{\sum_j(\Omega^j)^2}{W^2} \tag{1.33}$$

Daí $h_{,i} \neq 0$ se, e somente se $\Omega^i \neq 0$. As transformações de Ribaucour de uma superfície são dadas em termos das soluções do sistema (1.31).

Teorema 1.5. *Sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma superfície cujas curvas coordenadas são linhas de curvatura, N a aplicação normal de X, $a_i^2 =< X_{,i}, X_{,i} >$, $1 \leq i \leq 2$ e $\{\lambda^i\}_{i=1}^2$ as curvaturas principais de X. A superfície $\tilde{X}$ é transformação de Ribaucour* *de X com relação a $X_{,1}/a_1$, $X_{,2}/a_2$ se, e somente se, existem funções diferenciáveis $W, \Omega, \Omega^i : V \subset U \to \mathbb{R}$, que satisfazem o sistema* (1.31) *e* $\tilde{X}$ *é dada por*

$$\tilde{X} = X - \frac{2\Omega}{S}\left(\sum_i \Omega^i \frac{X_{,i}}{a_i} - WN\right), \tag{1.34}$$

onde

$$S = \sum_i (\Omega^i)^2 + W^2.$$

Além disso, a aplicação normal de $\tilde{X}$ *é dada por*

$$\tilde{N} = N + \frac{2W}{S}\left(\sum_i \Omega^i \frac{X_{,i}}{a_i} - WN\right) \tag{1.35}$$

e a curvatura principal de $\tilde{X}$*, para todo* $1 \leq i \leq 2$*, é dada por*

$$\tilde{\lambda}^i = \frac{WT^i + \lambda^i S}{S - \Omega T^i}, \tag{1.36}$$

onde

$$T^i = 2\left(\frac{\Omega^i_{,i}}{a_i} + \frac{\Omega^j}{a_j}\Gamma^i_{ij} - \lambda^i W\right). \tag{1.37}$$

Demonstração. Usando (1.33) temos que (1.20) e (1.21) são dados por

$$b^3 = 1 - \frac{2W^2}{S}, \quad b^i = \frac{2W\Omega^i}{a_i S}, \tag{1.38}$$

então, (1.19) e (1.18) ficam da forma (1.35) e (1.34) respectivamente. Usando que $\tilde{N}_{,i} = \tilde{\lambda}^i \tilde{X}_{,i}$ em (1.25), temos

$$(1 + h\tilde{\lambda}^i)\tilde{X}_{,i} = (1 + h\lambda^i)X_{,i} + h_{,i}(N - \tilde{N}) \tag{1.39}$$

fazendo produto com N, obtemos

$$(1 + h\tilde{\lambda}^i) < \tilde{X}_{,i}\, , N >= h_{,i}\,(1 - b^3).$$

Usando novamente (1.25), concluímos que

$$(1 + h\tilde{\lambda}^i)(h_{,i}(1 - b^3) - hC^3_i) = h_{,i}\,(1 - b^3).$$

Se $\Omega^i \neq 0$, temos

$$\tilde{\lambda}^i = \frac{C_i^3}{h_{,i}\,(1-b^3) - hC_i^3}.$$

Usando (1.27), (1.38) e (1.31), obtemos

$$C_i^3 = -\frac{4WW_{,i}}{S} + \frac{2S_{,i}W^2}{S^2} - \frac{2\Omega^i W\lambda^i a_i}{S} = \frac{2W}{S^2}(S_{,i}W + a_i\lambda^i S\Omega^i)$$

e

$$h_{,i}(1-b^3) - hC_i^3 = \frac{2W}{S^2}(a_i S\Omega^i - \Omega S_{,i}).$$

Derivando S, usando (1.31) e $a_{i,j} = \Gamma_{ij}^i a_i$, temos

$$S_{,i} = 2(\Omega^i\Omega^i_{,i} + \Omega^j\Omega^j_{,i} + WW_{,i}) = 2a_i\Omega^i\left(\frac{\Omega^i_{,i}}{a_i} + \frac{\Omega^j}{a_j}\Gamma_{ij}^i - \lambda^i W\right).$$

Fazendo

$$T^i = 2\left(\frac{\Omega^i_{,i}}{a_i} + \frac{\Omega^j}{a_j}\Gamma_{ij}^i - \lambda^i W\right),$$

concluímos que (1.36) é satisfeito.

Se $\Omega^i = 0$, o produto de (1.39) com $X_{,i}$ é dado por

$$(1 + h\tilde{\lambda}^i) < \tilde{X}_{,i}, X_{,i} >= (1 + h\lambda^i)a_i^2,$$

usando (1.25), temos

$$\tilde{\lambda}^i = \frac{C_i^i}{1 + h(\lambda^i - C_i^i)}.$$

Usando que $\Omega^i = 0$, (1.27), (1.38) e (1.37), obtemos

$$C_i^i = \frac{1}{S}\left[2W\left(\frac{\Omega^j}{a_j}\Gamma_{ij}^i - \lambda^i W\right) + \lambda^i S\right] = \frac{1}{S}(WT^i + \lambda^i S)$$

e

$$1 + h(\lambda^i - C_i^i) = \frac{1}{S}(S - \Omega T^i),$$

portanto, (1.36) é satisfeito. $\square$

Capítulo 2

2.1 Construção de superfícies com fibrado normal plano na esfera S^m

Propomos a construção de superfícies $M^2 \subset S^{m+1} \subset \mathbb{R}^{m+2}$ com fibrado normal plano construindo uma matriz W, satisfazendo $W^tW = I_m$, em termos das soluções de um sistema linear. Além disso, uma superfície arbitrária M^2 com fibrado normal plano pode ser obtida localmente por esta construção.

Teorema 2.1. *Seja M uma superfície com fibrado normal plano em $S^{m+1} \subset \mathbb{R}^{m+2}$. Então existem funções φ, s^i, $k^i : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$, satisfazendo*

$$\begin{aligned} k^i_{,1} &= \tan\varphi\, s^i_{,1} \\ k^i_{,2} &= -\cot\varphi\, s^i_{,2}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$s_{,12} + \varphi_{,2}\tan\varphi\, s_{,1} - \varphi_{,1}\cot\varphi\, s_{,2} = 0, \tag{2.2}$$

onde $u = (u^1, u^2) \in U$, $k^i_{,j}$ denota $\frac{\partial k^i}{\partial u^j}$ e matrizes de funções U de ordem $2 \times m$, V de ordem $m \times m$ e W de ordem $(m+2) \times m$, definidas por

$$U = \begin{pmatrix} k^1 & \dots & k^m \\ s^1 & \dots & s^m \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

$$dV^{\alpha\beta} = k^\alpha dk^\beta + s^\alpha ds^\beta, \;\; 1 \leq \alpha, \; \beta \leq m, \tag{2.4}$$

$$W = \begin{pmatrix} UV^{-1} \\ V^{-1} - I_m \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

onde $|V| \neq 0$ *e* I_m *é a matriz identidade de ordem* $m \times m$. *Nestas condições,* M *é localmente parametrizada por uma coluna da matriz* W *e as colunas restantes são as* $m-1$ *normais que são paralelas no fibrado normal.*

Reciprocamente, dados φ, s^i, k^i, U, V *e* W, *satisfazendo* $(2.1)-(2.5)$ *e* $|V| \neq 0$, *cada coluna da matriz* W *pode ser considerada como a parametrização de uma superfície* $M^2 \subset S^{m+1}$ *com fibrado normal plano, parametrizada por coordenadas* u^1, u^2 *de linhas de curvatura. As colunas restantes são as* $m-1$ *normais que são paralelas no fibrado normal. A métrica e a segunda forma fundamental da superfície* M^2 *são dadas por*

$$dW^t dW = (V^t)^{-1} dU^t dU V^{-1}. \tag{2.6}$$

Demonstração. Sejam p_0 um ponto não-umbílico de $M^2 \subset S^{m+1} \subset \mathbb{R}^{m+2}$, w^1 uma parametrização na vizinhança de p_0 onde as curvas coordenadas são linhas de curvatura e w^α, $\alpha = 1, \ldots, m$, o conjunto dos campos paralelos da conexão normal. Tome $w^1, \ldots, w^m$ as colunas de uma matriz W de ordem $(m+2) \times m$, que satisfaz a equação

$$W^t W = I_m, \tag{2.7}$$

em vista da ortonormalidade de $w^1, \ldots, w^m$. Além disso, podemos mudar as coordenadas no espaço ambiente de tal modo que, no ponto p_0 a matriz W é da forma

$$W = \begin{pmatrix} 0 \\ I_m \end{pmatrix}.$$

Em uma vizinhança de p_0 a matriz W pode ser representada como (2.5),

$$W = \begin{pmatrix} UV^{-1} \\ V^{-1} - I_m \end{pmatrix},$$

onde U e V são matrizes de ordens $2 \times m$ e $m \times m$, respectivamente. No ponto p_0 nós temos $U = 0,\ V^{-1} = 2I_m$, de modo que, V é de fato invertível em uma vizinhança de p_0. A condição (2.7) implica

$$V + V^t = U^t U + I_m, \tag{2.8}$$

de fato,

$$\begin{aligned} W^t W &= (V^t)^{-1} U^t U V^{-1} + ((V^t)^{-1} - I_m)(V^{-1} - I_m) \\ &= (V^t)^{-1} U^t U V^{-1} + (V^t)^{-1} V^{-1} - (V^t)^{-1} - V^{-1} + I_m \\ &= (V^t)^{-1} [U^t U + I_m - V - (V^t)] V^{-1} + I_m, \end{aligned}$$

usando a equação (2.7) segue o resultado. Como $u^1,\ u^2$ são coordenadas de linhas de curvatura as matrizes $W_{,1}$ e $W_{,2}$ são de posto um. Derivando W com respeito a u^1 resulta em

$$W_{,1} = \begin{pmatrix} U_{,1} - UV^{-1}V_{,1} \\ -V^{-1}V_{,1} \end{pmatrix} V^{-1}.$$

Usando a Proposição 1.5 temos que $V_{,1}$ é de posto um e portanto pode ser representada na forma

$$V_{,1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1 & \dots & \theta^m \end{pmatrix},$$

vista como um produto de matrizes $m \times 1$ e $1 \times m$. Pela mesma razão,

$$U_{,1} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1 & \dots & \theta^m \end{pmatrix}.$$

Derivando (2.8) com respeito a u^1 temos

$$(V_{,1} - U^t U_{,1}) + (V_{,1} - U^t U_{,1})^t = 0,$$

implicando que $V_{,1} - U^t U_{,1}$ é anti-simétrica. Por um lado, ela é de posto um ou nula. Visto que o posto de matriz anti-simétrica é necessariamente par, nós concluímos que

$V_{,1} = U^t U_{,1}$. Similarmente, $V_{,2} = U^t U_{,2}$, deste modo

$$dV = U^t dU. \tag{2.9}$$

Podemos representar $U_{,1}$ na forma

$$U_{,1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1}{\beta_2} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_2\theta^1 & \dots & \beta_2\theta^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 & \dots & \xi^m \end{pmatrix}.$$

Similarmente,

$$U_{,2} = \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^1 & \dots & \eta^m \end{pmatrix}.$$

A condição de compatibilidade $U_{,12} = U_{,21}$ é dada por

$$\mu_{,1}\eta^i + \mu\eta^i_{,1} = \lambda_{,2}\xi^i + \lambda\xi^i_{,2}, \tag{2.10}$$

$$\eta^i_{,1} = \xi^i_{,2}. \tag{2.11}$$

Usando (2.11), temos que existem funções $s^i,\ k^i,\ 1 \leq i \leq m$, tal que $\xi^i = s^i_{,1},\ \eta^i = s^i_{,2}$ e

$$U = \begin{pmatrix} k^1 & \dots & k^m \\ s^1 & \dots & s^m \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} k^i_{,1} &= \lambda s^i_{,1}, \\ k^i_{,2} &= \mu s^i_{,2}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

A condição de compatibilidade $V_{,12} = V_{,21}$ do sistema (2.9) é dada por $U^t_{,2}U_{,1} = U^t_{,1}U_{,2}$, mas um (α, β)-elemento das matriz $U^t_{,2}U_{,1} - U^t_{,1}U_{,2}$ é da forma

$$\lambda\mu s^\alpha_{,2}s^\beta_{,1} + s^\alpha_{,2}s^\beta_{,1} - (\lambda\mu s^\alpha_{,1}s^\beta_{,2} + s^\alpha_{,1}s^\beta_{,2}) = (\lambda\mu + 1)(s^\alpha_{,2}s^\beta_{,1} - s^\alpha_{,1}s^\beta_{,2}).$$

Tomando $\lambda = \tan\varphi$ e $\mu = -\cot\varphi$, a condição de compatibilidade é satisfeita. Além disso, o sistema (2.12) é dado por (2.1) e a equação (2.10) é equivalente a (2.2). Esta equação é a equação de compatibilidade do sistema (2.1).

Reciprocamente, suponha que φ, s^i, k^i, U, V e W satisfazem (2.1)-(2.5). A condição de compatibilidade do sistema (2.4) é dada por (2.1), de fato

$$V^{\alpha\beta}_{,1} = k^\alpha k^\beta_{,1} + s^\alpha s^\beta_{,1},$$

$$V^{\alpha\beta}_{,2} = k^\alpha k^\beta_{,2} + s^\alpha s^\beta_{,2},$$

assim,

$$V^{\alpha\beta}_{,12} - V^{\alpha\beta}_{,21} = k^\alpha_{,2} k^\beta_{,1} - k^\alpha_{,1} k^\beta_{,2} + s^\alpha_{,2} s^\beta_{,1} - s^\alpha_{,1} s^\beta_{,2},$$

usando (2.1), concluímos que $V^{\alpha\beta}_{,12} = V^{\alpha\beta}_{,21}$, de modo que os elementos $V^{\alpha\beta}$ estão bem definidos a menos de constantes. Restringindo estas constantes temos

$$V^{\alpha\alpha} = \frac{(k^\alpha)^2 + (s^\alpha)^2 + 1}{2}, \tag{2.13}$$

$$V^{\alpha\beta} + V^{\beta\alpha} = k^\alpha k^\beta + s^\alpha s^\beta, \qquad \alpha \neq \beta. \tag{2.14}$$

Em forma matricial as condições (2.4), (2.13) e (2.14) podem ser reescritas como segue:

$$dV = U^t dU,$$

$$V + V^t = U^t U + I_m.$$

Usando (2.1), temos

$$U_{,1} = \begin{pmatrix} \tan\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^1_{,1} & \dots & s^m_{,1} \end{pmatrix},$$

$$U_{,2} = \begin{pmatrix} -\cot\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^1_{,2} & \dots & s^m_{,2} \end{pmatrix},$$

onde o lado direito é o produto de matrizes de ordens 2×1 e $1 \times m$. Conseqüentemente, $U_{,1}$ e $U_{,2}$ são matrizes de posto 1. Seja a matriz W de ordem $(m+2) \times m$ definida por

$$W = \begin{pmatrix} UV^{-1} \\ V^{-1} - I_m \end{pmatrix},$$

que consiste da submatriz superior UV^{-1} de ordem $2\times m$ e a submatriz inferior $V^{-1}-I_m$ de ordem $m \times m$, onde $|V| \neq 0$. A matriz W satisfaz a equação $W^t\, W = I_m$, de fato usando (2.8), temos

$$\begin{aligned} W^tW &= (V^t)^{-1}U^tUV^{-1} + ((V^t)^{-1} - I_m)(V^{-1} - I_m) \\ &= (V^t)^{-1}(V + V^t - I_m)V^{-1} + ((V^t)^{-1} - I_m)(V^{-1} - I_m) \\ &= I_m. \end{aligned}$$

Sejam $w^1, \ldots, w^m$ as m colunas da matriz W

$$W^tW = \begin{pmatrix} < w^1, w^1 > & \ldots & < w^1, w^m > \\ \vdots & & \vdots \\ < w^m, w^1 > & \ldots & < w^m, w^m > \end{pmatrix}.$$

Assim $w^1, \ldots, w^m$ são vetores unitários e ortogonais de $\mathbb{R}^{m+2}$. Escolha, por exemplo, w^1 como a parametrização de uma superfície M^2 que, por construção, está na esfera unitária $S^{m+1} \subset \mathbb{R}^{m+2}$. Os vetores restantes w^α, $\alpha = 2, \ldots, m$, são ortogonais a M^2 e

$dw^\alpha \in TM^2$, então a superfície M^2 tem fibrado normal plano. Além disso, u^1 e u^2 são coordenadas de linhas de curvatura. A métrica $< dw^1, dw^1 >$ e a segunda forma fundamental $< dw^1, dw^\alpha >$ da superfície são elementos da matriz $dW^t dW$

$$\begin{aligned} dW^t dW &= ((dV^t)^{-1}U^t + (V^t)^{-1}dU^t \vdots (dV^t)^{-1}) \begin{pmatrix} dUV^{-1} + UdV^{-1} \\ dV^{-1} \end{pmatrix} \\ &= (dV^t)^{-1}[dV\ V^{-1} + (V + (V^t) - I_m)dV^{-1} + dV^{-1}] + (V^t)^{-1}dU^t dUV^{-1} \\ &+ (V^t)^{-1}dV^t dV^{-1} = (dV^t)^{-1}dV\ V^{-1} + (dV^t)^{-1}VdV^{-1} + (dV^t)^{-1}V^t dV^{-1} \\ &+ (V^t)^{-1}dV^t dV^{-1} + (V^t)^{-1}dU^t dUV^{-1} \end{aligned}$$

segue de $VV^{-1} = I_m$ e $(V^t)^{-1}V^t = I_m$, que $dVV^{-1} = -VdV^{-1}$ e $d(V^t)^{-1}V^t = -(V^t)^{-1}dV^t$, então equação (2.6) é satisfeita. $\square$

Visto que um $(\alpha,\ \beta)$-elemento de $dU^t dU$ é da forma

$$\begin{aligned} &dk^\alpha dk^\beta + ds^\alpha ds^\beta = (\tan\varphi\ s^\alpha_{,1}du^1 - \cot\varphi\ s^\alpha_{,2}du^2)(\tan\varphi\ s^\beta_{,1}du^1 - \cot\varphi\ s^\beta_{,2}du^2) \\ &+(s^\alpha_{,1}du^1 + s^\alpha_{,2}du^2)(s^\beta_{,1}du^1 + s^\beta_{,2}du^2) = \tan^2\varphi\ s^\alpha_{,1}s^\beta_{,1}(du^1)^2 + \cot^2\varphi\ s^\alpha_{,2}s^\beta_{,2}(du^2)^2 \\ &+s^\alpha_{,1}s^\beta_{,1}(du^1)^2 + s^\alpha_{,2}s^\beta_{,2}(du^2)^2 = s^\alpha_{,1}s^\beta_{,1}\frac{(du^1)^2}{\cos^2\varphi} + s^\alpha_{,2}s^\beta_{,2}\frac{(du^2)^2}{\sin^2\varphi} \end{aligned}$$

a matriz $dW^t dW$ não contem termos misturados $du^1\ du^2$.

2.2 Caso particular: superfícies em R^3

Aqui nós damos uma construção direta de superfícies $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ em termos de duas soluções do sistema linear (2.1), usando os resultados da seção anterior e a projeção estereográfica $\pi : S^3 \to \mathbb{R}^3$. Dada por

$$\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{x_1}{1+x_4}, \frac{x_2}{1+x_4}, \frac{x_3}{1+x_4}\right),$$

onde $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3$.Considere $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

Proposição 2.1. *A projeção estereográfica $\pi : S^3 \to \mathbb{R}^3$ leva uma parametrização de uma superfície obtida no Teorema* 2.1 *em $\tilde{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por*

$$\tilde{X} = (k^2, s^2, 0) - \frac{A}{B}(k^1, s^1, 1), \tag{2.15}$$

onde A e B são funções de $U \subset \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, definidas por

$$dA = k^1 dk^2 + s^1 ds^2, \tag{2.16}$$

$$B = \frac{(k^1)^2 + (s^1)^2 + 1}{2}, \tag{2.17}$$

k^i, s^i são funções que satisfazem (2.1), (2.2) *e*

$$(s^2_{,1} B - s^1_{,1} A)(s^2_{,2} B - s^1_{,2} A) \neq 0 \tag{2.18}$$

Neste caso $\tilde{X}$ é uma superfície cujas curvas coordenadas são linhas de curvatura ortogonais. A aplicação normal de Gauss é

$$\tilde{N} = -e_3 + \frac{1}{B}(k^1, s^1, 1). \tag{2.19}$$

Demonstração. Sejam k^i, s^i, $1 \leq i \leq 2$, funções satisfazendo (2.1) e (2.2). Definimos as funções A e B pelas fórmulas (2.16) e (2.17). Pelo Teorema 2.1 a matriz U é dada por

$$U = \begin{pmatrix} k^1 & k^2 \\ s^1 & s^2 \end{pmatrix}$$

e utilizando (2.4) e (2.13), temos que V e V^{-1} são dadas por

$$V = \begin{pmatrix} B & A \\ V^{21} & V^{22} \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \frac{1}{\det(V)} \begin{pmatrix} V^{22} & -A \\ -V^{21} & B \end{pmatrix},$$

a matriz W é dada por

$$W = \frac{1}{\det(V)} \begin{pmatrix} V^{22}k^1 - V^{21}k^2 & -Ak^1 + Bk^2 \\ V^{22}s^1 - V^{21}s^2 & -As^1 + Bs^2 \\ V^{22} - \det(V) & -A \\ -V^{21} & B - \det(V) \end{pmatrix}$$

e

$$w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\det(V)}(-Ak^1 + Bk^2) \\ \frac{1}{\det(V)}(-As^1 + Bs^2) \\ \frac{-A}{\det(V)} \\ \frac{B}{\det(V)} - 1 \end{pmatrix}$$

é a parametrização de uma superfície de S^3. Aplicando a projeção estereográfica a w_2 temos a parametrização $\tilde{X}$ de uma superfície em $\mathbb{R}^3$ dada por (2.15)

$$\tilde{X} = \pi(w_2) = (k^2, s^2, 0) - \frac{A}{B}(k^1, s^1, 1)$$

Os vetores tangentes são

$$\tilde{X}_{,i} = \begin{pmatrix} k^2_{,i} - k^1_{,i}A/B - k^1A_{,i}/B + k^1AB_{,i}/B^2 \\ s^2_{,i} - s^1_{,i}A/B - s^1A_{,i}/B + s^1AB_{,i}/B^2 \\ -A_{,i}/B + AB_{,i}/B^2 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Segue que

$$\tilde{X}_{,1} \times \tilde{X}_{,2} = \theta \begin{pmatrix} k^1/B \\ s^1/B \\ 1/B - 1 \end{pmatrix},$$

onde

$$\theta = k^2_{,1}s^2_{,2} - k^2_{,2}s^2_{,1} + \frac{A}{B}(k^1_{,2}s^2_{,1} + k^2_{,2}s^1_{,1} - k^2_{,1}s^1_{,2} - k^1_{,1}s^2_{,2}) + \frac{A^2}{B^2}(k^1_{,1}s^1_{,2} - k^1_{,2}s^1_{,1}).$$

Usando (2.1), temos

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{(\tan\varphi + \cot\varphi)}{B^2}[B^2 s^2_{,1}s^2_{,2} - AB(s^1_{,2}s^2_{,1} + s^2_{,2}s^1_{,1}) + B^2 s^1_{,1}s^1_{,2}] \\ &= \frac{(\tan\varphi + \cot\varphi)}{B^2}[s^2_{,1}B - s^1_{,1}A][s^2_{,2}B - s^1_{,2}A]. \end{aligned}$$

Assim a condição de regularidade da superfície parametrizada $\tilde{X}$ é dada por (2.18).

A aplicação normal de Gauss $\tilde{N} = \frac{\tilde{X}_{,1}\times\tilde{X}_{,2}}{|\tilde{X}_{,1}\times\tilde{X}_{,2}|}$ é

$$\tilde{N} = -e_3 + \frac{1}{B}(k^1, s^1, 1).$$

Daí,

$$\tilde{N}_{,i} = \begin{pmatrix} k^1_{,i}/B - k^1 B_{,i}/B^2 \\ s^1_{,i}/B - s^1 B_{,i}/B^2 \\ -B_{,i}/B^2 \end{pmatrix}, \quad i = 1,\ 2.$$

Pelo sistema (2.1) chegamos que, $k^2_{,i} = k^1_{,i}s^2_{,i}/s^1_{,i}$, resultando nas equações de Weingarten

$$\tilde{X}_{,i} = \rho^i \tilde{N}_{,i}, \quad i = 1,\ 2, \tag{2.20}$$

onde $\rho^1,\ \rho^2$ são raios de curvatura principais da superfície M^2

$$\rho^i = \epsilon^i B - A\ ;$$

aqui $\epsilon^i = s^2_{,i}/s^1_{,i},\ i = 1,\ 2$. A fórmula (2.20) implica que $u^1,\ u^2$ são coordenadas de linhas de curvatura. □

Vamos relacionar esta construção com a transformada de Ribaucour de superfícies.

Proposição 2.2. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização local do plano dada por*

$$X(u^1, u^2) = (k^2(u^1, u^2), s^2(u^1, u^2), 0), \tag{2.21}$$

onde as funções $k^2, s^2 : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfazem (2.1) e (2.2). Então, as curvas coordenadas de X são ortogonais e a transformada de Ribaucour, $\tilde{X}$, de X com relação a $X_{,i}/a_i$, onde $(a_i)^2 =< X_{,i}, X_{,i} >$ é dada pela expressão (2.15)

$$\tilde{X} = (k^2, s^2, 0) - \frac{A}{B}(k^1, s^1, 1),$$

onde $k^1,\ s^1$ são funções que satisfazem (2.1), (2.2) e A e B são dadas por (2.16) e (2.17).

Demonstração. Derivando (2.21) e usando (2.1), temos

$$X_{,1} = (k^2_{,1}, s^2_{,1}, 0) = (\tan\varphi\, s^2_{,1}, s^2_{,1}, 0),$$

$$X_{,2} = (k^2_{,2}, s^2_{,2}, 0) = (-\cot\varphi\, s^2_{,2}, s^2_{,2}, 0),$$

então,

$$\begin{aligned}
(a_1)^2 &= g_{11} =< X_{,1}, X_{,1} >= ((\tan\varphi)^2 + 1)(s^2_{,1})^2,\\
(a_2)^2 &= g_{22} =< X_{,2}, X_{,2} >= ((\cot\varphi)^2 + 1)(s^2_{,2})^2,\\
g_{12} &= < X_{,1}, X_{,2} >= (-\cot\varphi\tan\varphi + 1)s^2_{,1}s^2_{,2} = 0,
\end{aligned}$$

logo as curvas coordenadas de X são ortogonais.

Considere $N = -e_3$ a aplicação normal de X. Pelo Teorema 1.5, temos que $\tilde{X}$ é transformada de Ribaucour de X com relação a $X_{,i}/a_i$ se existem funções W, Ω, Ω^i satisfazendo o sistema (1.31), que neste caso pode ser dado por

$$\begin{aligned}
\Omega^i_{,j} &= \frac{\Omega^j}{a_i}\frac{\partial a_j}{\partial u_i}, \quad i \neq j\\
\Omega_{,i} &= a_i\Omega^i,\\
W &= 1.
\end{aligned}$$

Além disso, $\tilde{X}$ é dada por (1.34) e a aplicação normal de Gauss de $\tilde{X}$, $\tilde{N}$, é dada por (1.35). Neste caso, temos

$$\tilde{X} = X - \frac{2\Omega}{S}\left(\Omega^1\frac{X_{,1}}{a_1} + \Omega^2\frac{X_{,2}}{a_2} + e_3\right), \tag{2.22}$$

$$\tilde{N} = -e_3 + \frac{2}{S}\left(\Omega^1\frac{X_{,1}}{a_1} + \Omega^2\frac{X_{,2}}{a_2} + e_3\right), \tag{2.23}$$

onde

$$S = (\Omega^1)^2 + (\Omega^2)^2 + 1.$$

Substituindo $X_{,i}$ em (2.22) e (2.23), obtemos

$$\tilde{X} = X - \frac{2\Omega}{S}\left(\Omega^1\frac{\tan\varphi\; s^2_{,1}}{a_1} - \Omega^2\frac{\cot\varphi\; s^2_{,2}}{a_2}, \Omega^1\frac{s^2_{,1}}{a_1} + \Omega^2\frac{s^2_{,2}}{a_2}, 1\right),$$
$$\tilde{N} = -e_3 + \frac{2}{S}\left(\Omega^1\frac{\tan\varphi\; s^2_{,1}}{a_1} - \Omega^2\frac{\cot\varphi\; s^2_{,2}}{a_2}, \Omega^1\frac{s^2_{,1}}{a_1} + \Omega^2\frac{s^2_{,2}}{a_2}, 1\right).$$

Fazendo

$$\begin{aligned} k^1 &= \Omega^1\frac{\tan\varphi\; s^2_{,1}}{a_1} - \Omega^2\frac{\cot\varphi\; s^2_{,2}}{a_2}, \\ s^1 &= \Omega^1\frac{s^2_{,1}}{a_1} + \Omega^2\frac{s^2_{,2}}{a_2} \end{aligned}$$

e usando (2.1), temos

$$\begin{aligned} (k^1)^2 + (s^1)^2 &= (\Omega^1)^2\frac{(\tan\varphi)^2(s^2_{,1})^2}{(a_1)^2} - 2\Omega^1\Omega^2\frac{\tan\varphi\ \cot\varphi\; s^2_{,1}s^2_{,2}}{a_1a_2} + (\Omega^2)^2\frac{(\cot\varphi)^2(s^2_{,2})^2}{(a_2)^2} \\ &\quad +(\Omega^1)^2\frac{(s^2_{,1})^2}{(a_1)^2} + 2\Omega^1\Omega^2\frac{s^2_{,1}s^2_{,2}}{a_1a_2} + (\Omega^2)^2\frac{(s^2_{,2})^2}{(a_2)^2} \\ &= (\Omega^1)^2\frac{((\tan\varphi)^2+1)(s^2_{,1})^2}{(a_1)^2} + (\Omega^2)^2\frac{((\cot\varphi)^2+1)(s^2_{,2})^2}{(a_2)^2} = (\Omega^1)^2 + (\Omega^2)^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} dA &= k^1dk^2 + s^1ds^2 = \left(\Omega^1\frac{\tan\varphi\; s^2_{,1}}{a_1} - \Omega^2\frac{\cot\varphi\; s^2_{,2}}{a_2}\right)(k^2_{,1}du^1 + k^2_{,2}du^2) \\ &\quad + \left(\Omega^1\frac{s^2_{,1}}{a_1} + \Omega^2\frac{s^2_{,2}}{a_2}\right)(s^2_{,1}du^1 + s^2_{,2}du^2) \\ &= \Omega^1\frac{((\tan\varphi)^2+1)(s^2_{,1})^2}{a_1} + \Omega^2\frac{((\cot\varphi)^2+1)(s^2_{,2})^2}{a_2} = \Omega_{,1}du^1 + \Omega_{,2}du^2 = d\Omega, \end{aligned}$$

portanto, $S = 2B$ e $\Omega = A$. De modo que, (2.22) e (2.23) são dados por (2.15) e (2.19).

Além disso,

$$A_{,1} = k^1k^2_{,1} + s^1s^2_{,1} = (\tan\varphi\; k^1 + s^1)s^2_{,1},$$

$$A_{,2} = k^1k^2_{,2} + s^1s^2_{,2} = (-\cot\varphi\; k^1 + s^1)s^2_{,2},$$

então,

$$A_{,12} = \sec\varphi\ \varphi_{,2}k^1 s^2_{,1} + (\tan\varphi\ k^1 + s^1)s^2_{,12},$$

$$A_{,21} = \csc\varphi\ \varphi_{,1}k^1 s^2_{,2} + (-\cot\varphi\ k^1 + s^1)s^2_{,21}.$$

Da condição de compatibilidade, $A_{,12} = A_{,21}$, segue

$$s^2_{,12} + \tan\varphi\ \varphi_{,2}s^2_{,1} - \cot\varphi\ \varphi_{,1}s^2_{,2} = 0.$$

□

2.3 Construção de subvariedades holonômicas com fibrado normal plano

O caso de subvariedades M^n de dimensão n requer certas modificações na construção da Seção 2.1. Começaremos com um operador de Dirac

$$\partial_i H_j = \beta_{ij} H_i, \qquad 1 \leq i,\ j \leq n,\ i \neq j, \tag{2.24}$$

onde os coeficientes H_i e β_{ij} são funções de n variáveis u^i, $\partial_i = \partial_{u^i}$. Queremos que a métrica

$$\sum_{i=1}^{n} (H_i)^2 du^i,$$

satisfaça a condição de curvatura zero

$$\begin{gathered} \partial_k \beta_{ij} = \beta_{ik}\beta_{kj}, \quad i \neq j \neq k, \\ \partial_i \beta_{ij} + \partial_j \beta_{ji} + \textstyle\sum_{k\neq i,j}^{n} \beta_{ki}\beta_{kj} = 0, \ \ i \neq j. \end{gathered} \tag{2.25}$$

Temos por (1.6), (1.9) e (1.10) que os coeficientes R^s_{ijk} da curvatura R são nulos

$$\begin{aligned}
R^s_{ijk} &= 0, \quad i \neq j \neq k,\ s = 1, \ldots, n \\
R^j_{iji} &= \partial_j \Gamma^j_{ii} - \partial_i \Gamma^j_{ij} + (\Gamma^j_{jj} - \Gamma^i_{ij})\Gamma^j_{ii} + (\Gamma^i_{ii} - \Gamma^j_{ij})\Gamma^j_{ij} + \sum_{k \neq i,j} \Gamma^k_{ii}\Gamma^j_{kj} \\
&= \partial_i \beta_{ij} + \partial_j \beta_{ji} + \sum_{k \neq i,j}^{n} \beta_{ki}\beta_{kj} = 0, \quad i \neq j \\
R^s_{iji} &= \partial_j \Gamma^s_{ii} + \Gamma^j_{ii}\Gamma^s_{jj} - \Gamma^i_{ij}\Gamma^s_{ii} + \Gamma^s_{ii}\Gamma^s_{sj} = \partial_s \beta_{ij} - \beta_{is}\beta_{sj}, \quad s \neq i \neq j,\ s = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

assim, a condição (2.25) implica que a curvatura é zero.

Sejam n vetores ortonormais $X_i = (X_{1i}, \ldots, X_{ni})$ satisfazendo as equações

$$\begin{aligned}
\partial_j X_i &= \beta_{ij} X_j, \\
\partial_i X_i &= -\textstyle\sum_{k \neq i}^{n} \beta_{ki} X_k.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

A condição de compatibilidade é satisfeita, de fato

$$\partial_{jk} X_i - \partial_{kj} X_i = \beta_{ik}\beta_{kj} X_j + \beta_{ij}\beta_{jk} X_k - \beta_{ij}\beta_{jk} X_k - \beta_{ik}\beta_{jk} X_j = 0, \quad i \neq j \neq k,$$

se $i = k$ ficamos com

$$\partial_{ji} X_i - \partial_{ij} X_i = \partial_i \beta_{ij} X_j + \beta_{ij}\beta_{ji} X_i + \partial_j \beta_{ji} X_j + \sum_{k \neq i,j}^{n} \beta_{ki}\beta_{kj} X_j = (\partial_i \beta_{ij} + \partial_j \beta_{ji} + \sum_{k \neq i,j}^{n} \beta_{ki}\beta_{kj}) X_j$$

onde usamos (2.26) e por (2.25) temos que $\partial_{ji} X_i = \partial_{ij} X_i$ e a $n \times n$ matriz (X_{ji}) é ortogonal.

Teorema 2.2. *São dadas as funções vetoriais* $H^\alpha = (H^\alpha_1, \ldots, H^\alpha_n),\ s^\alpha = (s^\alpha_1, \ldots, s^\alpha_n),\ 1 \leq \alpha \leq m$, *os vetores ortonormais* $X_i = (X_{1i}, \ldots, X_{ni})$, *as funções* $H^\alpha_i,\ s^\alpha_i,\ \beta_{ij},\ X_{ij} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ 1 \leq i,\ j \leq n$, *satisfazendo*

$$\partial_i H^\alpha_j = \beta_{ij} H^\alpha_i, \qquad i \neq j,$$

$$\partial_k \beta_{ij} = \beta_{ik}\beta_{kj}, \quad i \neq j \neq k,$$
$$\partial_i \beta_{ij} + \partial_j \beta_{ji} + \textstyle\sum_{k \neq i,j}^{n} \beta_{ki}\beta_{kj} = 0, \quad i \neq j,$$

$$
\begin{aligned}
\partial_j X_i &= \beta_{ij} X_j, \\
\partial_i X_i &= -\textstyle\sum_{k\neq i}^{n} \beta_{ki} X_k,
\end{aligned}
$$

$$
ds_i^\alpha = \sum_{k=1}^{n} X_{ik} H_k^\alpha du^k \tag{2.27}
$$

e as matrizes de funções U de ordem $n \times m$, V de ordem $m \times m$, $|V| \neq 0$ e W de ordem $(m+n) \times m$, definidas por

$$
U = \begin{pmatrix} s_1^1 & \dots & s_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ s_n^1 & \dots & s_n^m \end{pmatrix}, \tag{2.28}
$$

$$
dV^{\alpha\beta} = < s^\alpha, ds^\beta > = \sum_{i=1}^{n} s_i^\alpha ds_i^\beta, \quad 1 \leq \alpha,\ \beta \leq m, \tag{2.29}
$$

$$
W = \begin{pmatrix} UV^{-1} \\ V^{-1} - I_m \end{pmatrix}. \tag{2.30}
$$

Então, cada coluna da matriz W pode ser considerada como a parametrização de uma subvariedade M^n em $S^{m+n-1} \subset \mathbb{R}^{m+n}$, com fibrado normal plano, as colunas restantes são as $m-1$ normais que são paralelas no fibrado normal. Além disso, u^i são as coordenadas das linhas de curvatura.

Demonstração. Segue de (2.27) que $\partial_j s_i^\alpha = X_{ij} H_j^\alpha$, assim

$$
\begin{aligned}
\partial_{jk} s_i^\alpha - \partial_{kj} s_i^\alpha &= \partial_k X_{ij} H_j^\alpha + X_{ij} \partial_k H_j^\alpha - \partial_j X_{ik} H_k^\alpha - X_{ik} \partial_j H_k^\alpha \\
&= \beta_{jk} X_{ik} H_j^\alpha + \beta_{kj} X_{ij} H_k^\alpha - \beta_{kj} X_{ij} H_k^\alpha - \beta_{jk} H_j^\alpha X_{ik} = 0,
\end{aligned}
$$

então a condição de compatibilidade é satisfeita, nestes cálculos usamos (2.24) e (2.26).

A condição de compatibilidade dos elementos da matriz (2.29) é satisfeita em vista de (2.27), de modo que, os elementos $V^{\alpha\beta}$ estão bem definidos a menos de constantes.

Restringindo estas constantes temos

$$V^{\alpha\alpha} = \frac{< s^\alpha, s^\alpha > +1}{2} = \frac{\sum_{i=1}^n (s_i^\alpha)^2 + 1}{2}, \tag{2.31}$$

$$V^{\alpha\beta} + V^{\beta\alpha} =< s^\alpha, s^\beta >= \sum_{i=1}^n s_i^\alpha s_i^\beta, \quad \alpha \neq \beta. \tag{2.32}$$

Em forma matricial as condições (2.29), (2.31) e (2.32) podem ser reescritas como segue:

$$dV = U^t dU, \tag{2.33}$$

$$V + V^t = U^t U + I_m. \tag{2.34}$$

Por consequência de (2.27) a matriz $\partial_i U$ é dada por

$$\partial_i U = \begin{pmatrix} X_{1i}H_i^1 & \dots & X_{1i}H_i^m \\ \vdots & & \vdots \\ X_{ni}H_i^1 & \dots & X_{ni}H_i^m \end{pmatrix},$$

assim as m colunas da matriz $\partial_i U$ são $X_i H_i^1, \dots, X_i H_i^m$, portanto esta matriz é de posto um. Seja a matriz W, de ordem $(m+n) \times m$, (2.30)

$$W = \begin{pmatrix} UV^{-1} \\ V^{-1} - I_m \end{pmatrix},$$

que consiste da submatriz superior UV^{-1} de ordem $n \times m$ e a submatriz inferior $V^{-1} - I_m$ de ordem $m \times m$. Segue de (2.33) e (2.34) que

$$W^t W = I_m$$

e $\partial_i W$ tem posto um. Assim, as m colunas $w^1, \dots, w^m$ da matriz W são vetores unitários e ortogonais de $\mathbb{R}^{m+n}$. Escolha algum deles (por exemplo w^1) como a parametrização de uma subvariedade $M^n \subset S^{m+1} \subset \mathbb{R}^{m+n}$, os vetores restantes w^α, $\alpha = 2, \dots, m$, são ortogonais a M^n e são paralelos no fibrado normal. Além disso, u^i são as coordenadas das linhas de curvatura. A prova é análoga a feita no Teorema 2.1. $\square$

Levando em conta a ortonormalidade de X_{ji}

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(ds_i^\alpha)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(X_{ik})^2(H_k^\alpha)^2(du^k)^2 + \sum_{k,j=1}^{n} X_{ik}X_{ij}H_k^\alpha H_j^\alpha du^k du^j\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_{ik})^2\right)(H_k^\alpha)^2(du^k)^2 + \sum_{k,j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_{ik}X_{ij}\right) H_k^\alpha H_j^\alpha du^k du^j \\
&= \sum_{k=1}^{n}(H_k^\alpha)^2(du^k)^2,
\end{aligned}$$

implicando que $s^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_n^\alpha)$ é um sistema de coordenadas de curvatura nula com a métrica diagonal

$$\sum_{i=1}^{n}(H_i^\alpha)^2(du^i)^2.$$

É importante enfatizar que para $n > 2$ esta construção requer solução do sistema (2.25) não linear. No caso de superfície a equação (2.24) é da forma

$$\partial_1 H_2 = -\partial_2\varphi H_1, \quad \partial_2 H_1 = \partial_1\varphi H_2,$$

onde $\beta_{12} = -\partial_2\varphi,\ \beta_{21} = \partial_1\varphi$, como uma conseqüência de (2.25). Segue de (2.26) que

$$\begin{aligned}
\partial_1 X_1 &= -\beta_{21}X_2 \\
\partial_2 X_1 &= \beta_{12}X_2
\end{aligned}, \quad
\begin{aligned}
\partial_2 X_2 &= -\beta_{12}X_1 \\
\partial_1 X_2 &= \beta_{21}X_1,
\end{aligned}$$

então

$$X_1 = (\cos\varphi, -\sin\varphi), \quad X_2 = (\sin\varphi, \cos\varphi).$$

Assim, a equação (2.27) assume a forma

$$\begin{aligned}
ds_1 &= \cos\varphi\ H_1 du^1 + \sin\varphi\ H_2 du^2, \\
ds_2 &= -\sin\varphi\ H_1 du^1 + \cos\varphi\ H_2 du^2,
\end{aligned}$$

implicando que $s_1,\ s_2$ satisfazem o sistema linear

$$\begin{aligned}
\partial_2 s_1 &= \tan\varphi\ \partial_2 s_2, \\
\partial_1 s_1 &= -\cot\varphi\ \partial_1 s_2,
\end{aligned}$$

que coincide com (2.1). Assim, no caso $n = 2$, esta construção se reduz à da seção 2.1.

Conclusão

Fazemos a construção de superfícies com fibrado normal plano em $\mathbb{R}^n$ (esfera unitária S^n) definindo uma matriz W em função de outras matrizes U, V dadas em termos das soluções de um sistema equações diferenciais. As matrizes U e V satisfazem certas equações que são equivalentes a W satisfazer a equação $W^tW = I_m$ e ter derivadas parciais de posto um. Para subvariedades de dimensão n qualquer as matrizes U, V são dadas em termos de sistemas de coordenadas com curvatura zero. Quando $n = 2$, esta construção reduz a anterior para superfícies.

Relacionamos as superfícies de $\mathbb{R}^3$ dadas por essa construção com a teoria de transformações de Ribaucour de superfícies e concluímos que elas podem ser vistas como transformadas de Ribaucour de um subconjunto do plano. Calculamos a condição de regularidade para essas superfícies parametrizadas de $\mathbb{R}^3$. Os resultados apresentados de transformação de Ribaucour estudamos nos trabalhos de Corro, A. V., Tenenblat, K., [6], [7], [8].

O trabalho de Dajczer, M., Florit, L. A. e Tojeiro, R., [9], faz uma conexão entre os artigos, [10] e [14] e apresenta uma extensão dos resultados obtidos nestes trabalhos.

Referências Bibliográficas

[1] Bianchi, L. - *Lezioni di Geometria Differenciale*, Nicola Zanichelli (ed), Bologna 1927.

[2] Carmo, M. P. - *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, (1976).

[3] Carmo, M. P.- *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, (1988), (pp. 300).

[4] Corro, A. V.; Ferreira, W.; Tenenblat, K. - *On Ribaucour transformations for hypersurfaces,* Math. Contemp. 17 (1999), 137-160.

[5] Corro, A. V.; Ferreira, W.; Tenenblat, K. - *Minimal surfaces obtained by Ribaucour transformations,* Geom. Dedicata 96, (2003), 117-150.

[6] Corro, A. V.; Ferreira, W.; Tenenblat, K. - *Ribaucour transformations for constante mean curvature and linear Weingarten Surfaces,* Prentice-Hall, 1976.

[7] Corro, A. V. Tenenblat, K. - *Ribaucour transformations revisited*, Vol.12, **5** 2004.

[8] Corro, A. V. - *Transformações entre Subvariedades de Dupin,* tese de doutorado, UnB, Brasília-DF, 1998.

[9] Dajczer, M.; Florit, L. A.; Tojeiro, R.-*The vectorial Ribaucour transformations for submanifolds and applications* Preprint 2006.

[10] Ferapontov, E. V. - *Surfaces mith flat normal bundle: an explicit construction*, 14 (2001), 15-37.

[11] Gelfand, I. M. - *Lectures on Linear Algebra*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, Interscience Publishers, New York, 1961.

[12] Lima, E. L. -*Álgebra Linear,* IMPA, Coleção Matemática Universitária, 2001

[13] Lima, E. L. -*Curso de Análise,* Vol. 2, IMPA, Projeto Euclides, 1981

[14] Liu, Q. P.; Manas, M.-*Vectorial Ribaucour transformation for the Lamé equations,* J. Phys. A. 31 (1998), 193-200.