**Universidade Federal de Goiás**
**Instituto de Matemática e Estatística**
**Coordenação de Pós-Graduação em Matemática**

# O Problema da Navegação de Zermelo em Variedades Riemannianas

**por**

**Fernanda Rocha Gomes da Silva**

Área de Concentração: **Geometria**

Orientador: **Prof. Dr Marcelo Almeida de Souza**

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Conselho Diretor do Instituto de Matemática e Estatística, como parte dos requisito necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Goiânia
2007

*Aos meus pais e*

*a minha filha*

*Alana Carolina.*

# Agradecimentos

Primeiro gostaria de agradecer a Deus, sem ele nada disso seria possível.

A minha familia que sempre estiveram presentes de alguma forma.

Ao Franklin pelo seu apoio, companhia, carinho e horas de estudos, sem ele eu não teria concluído esse mestrado.

Ao Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza pela paciência, por sua disponibilidade e por tudo o que aprendi com ele.

A todos aqueles colegas que, de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho monográfico.

A Capes pelo apoio financeiro.

# Sumário

# Resumo

Nesta dissertação, estudamos o Problema da Navegação de Zermelo em Variedades Riemannianas, este assunto foi retirado de um artigo dos autores David Bao, Collen Robles e Zhongmin Shen, do Journal of Differential Geometry. O objetivo de Zermelo era encontrar as curvas que minimizam o tempo de viagem no ambiente Riemanniano $(M, h)$, com a influência de uma corrente de ar (brisa) que é representado pelo campo de vetores $W$ em $M$, com comprimento $|W| := \sqrt{h(W, W)} < 1$. Mostraremos que as curvas são geodésicas na métrica de Finsler $F$ do tipo Randers. $F$ é não-Riemanniana a menos que $W$ seja Nulo.

# Abstract

In this dissertation, we study Zermelo's Navigation Problem in Riemannian Manifolds. This material was extracted from an article by David Bao, Collen Robles and Zhongmin Shen, published in the Journal of Differential Geometry. The main goal is to find the curves which minimize travelling time in a Riemannian structure $(M, h)$, disturbed by an air flow (breeze), represented by the vector field $W$ in $M$, with length $|W| := \sqrt{h(W, W)} < 1$. We show that the curves are geodesics in the Finsler metric $F$ of Randers type such that $F$ is non-Riemannian unless $W$ vanishes.

# Introdução

Nesta dissertação, estudaremos o Problema da Navegação de Zermelo em Variedades Riemannianas, [2]. O objetivo de Zermelo era encontrar as curvas que minimizam o tempo de viagem no ambiente Riemanniano $(M, h)$, com a influência de uma corrente de ar (brisa) que é representado pelo campo de vetores $W$ em $M$, com comprimento $|W| := \sqrt{h(W,W)} < 1$. Mostraremos que as curvas são geodésicas na métrica de Finsler $F$ do tipo Randers. $F$ é não-Riemanniana a menos que $W$ seja Nulo.

Para $\mathbb{R}^2$, este fenômeno foi tratado por Carathéodory [Ca]. Z. Shen mostra alguns exemplos em variedades Riemannianas em todas dimensões.

Métrica de Randers são interessantes não só na solução do Problema da Navegação de Zermelo, pois elas formam uma classe onipresente de métricas com uma forte presença em teorias e aplicações na geometria de Finsler. Um interesse particular são as métricas de Randers com curvatura Flag constante, este é um invariante análogo à curvatura Seccional na Geometria Riemanniana. Em [2] os autores resolveram o problema da classificação das métricas de Randers com curvatura flag constante via Navegação de Zermelo.

Nas preliminares apresentaremos os conceitos e resultados que serão úteis no decorrer desta dissertação.

No Capítulo 1 encontraremos uma nova forma de calcular a métrica de Randers através da métrica dada. Conseqüentemente, mostraremos construtivamente que toda métrica de Randers fortemente convexa surge como solução do Problema da Navegação de Zermelo em algum ambiente riemanniano $(M, h)$ sob a influência de uma brisa adequada $W$ em $M$, com $|W| < 1$. Este é o conteúdo da Proposição 1.1 da Seção 1.3.

Finalmente no Capítulo 2 descreveremos a métrica de Randers fortemente convexa de curvatura Flag constante via Navegação de Zermelo.

# Preliminares

**Definição 1.** Uma *variedade diferenciável* de dimensão $n$ é um conjunto não vazio $M$ e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos $U_\alpha$ de $\mathbb{R}^n$ em $M$ tais que:

(1) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$.

(2) Para todo par $\alpha$, $\beta$, com $x_\alpha(U_\alpha) \bigcap x_\beta(U_\beta) = W \neq 0$, com os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis.

(3) A Família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições (1) e (2).

**Definição 2.** (M,F) é chamado um *espaço de Finsler* se o comprimento $l_F(\alpha)$ da curva diferenciável por partes

$$\alpha : [a, b] \to M$$

$$t \mapsto x(t)$$

é dado pela integral

$$l_F(\alpha) := \int_a^b F(x, y) dt,$$

onde $(x, y)$ tem coordenadas $(x^i, y^i)$, com $y^i = \frac{dx^i}{dt}$, e $F : TM \to [0, \infty)$ é uma função que satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $F$ é estritamente positiva para todo $y \neq 0$, e se anula, se e somente se, quando $y^i = 0$, para todo $i$;

(2) $F$ é $C^\infty$ sobre $TM \setminus \{0\}$;

(3) $F$ é positiva homogênea de grau um em $y$, isto é, $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, para todo

$\lambda > 0$;

(4) A matriz Hessiana $n \times n$

$$g_{\mathbf{ij}}(y) := (\frac{1}{2}F^2)_{\mathbf{y}^i\mathbf{y}^j}(y)$$

é positiva definida em todo $TM \setminus \{0\}$.

A função assim definida é chamado métrica de Finsler.

Veremos alguns exemplos importantes de espaços de Finsler.

**Exemplos.** A restrição de uma estrutura de Finsler $F$ a um espaço tangente específico $T_{\mathbf{x}}M$, $x \in M$, é o que chamamos de *norma de Minkowski.* Portanto, uma estrutura de Finsler $(M, F)$ pode ser vista como uma família de normas de Minkowski variando diferencialmente em $TM$.

Todo espaço vetorial n-dimensional é linearmente isomórfico a $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, cujos elementos tem a forma $(y^1, ..., y^{\mathbf{n}})$. Assim, não há perda de generalidade em restringirmos nossa discussão a normas de Minkowski em $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$.

**Definição 3.** Uma *norma de Minkowski* é uma função não negativa definida em um espaco vetorial $V$, $F : V \to [0, \infty)$ a qual tem as seguintes propriedades:

(1) $F$ é $C^\infty$ sobre $V \setminus \{0\}$;

(2) $F(\lambda y) = \lambda F(y)$, para todo $\lambda > 0$ e $y \in V$;

(3) Para todo $y \in V \setminus \{0\}$, a forma bilinear simétrica $(g_{\mathbf{ij}})$ sobre $V$ é definida positiva, onde

$$g_{\mathbf{ij}}(y) := (\frac{1}{2}F^2)_{\mathbf{y}^i\mathbf{y}^j}(y).$$

O par $(F, V)$ é chamado um *espaço de Minkowski.*

Uma norma de Minkowski $F$ em $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ é dita *euclidiana* se provém de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$, através de $F(y) = \sqrt{\langle y, y\rangle}$.

**Exemplos.** Seja $M$ uma variedade diferenciável n-dimensional. Uma *métrica Riemanniana* diferenciável $g$ em $M$ é uma família $\{g_{\mathbf{x}}\}_{\mathbf{x}\in \mathbf{M}}$ de produtos internos, em cada espaço tangente $T_{\mathbf{x}}M$, tal que as funções $g_{\mathbf{ij}}(x) := g_{\mathbf{x}}(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^j})$ são $C^\infty$. Como cada $g_{\mathbf{x}}$ é um produto interno, a matriz $(g_{\mathbf{ij}})$ é positiva definida para todo $x \in M$. Podemos então escrever

$$g = g_{\mathbf{ij}}(x)dx^{\mathbf{i}} \otimes dx^{\mathbf{j}}$$

e definir uma estrutura de Finsler simétrica $F$ em $TM$ pelo mecanismo

$$F(x, y) := \sqrt{g_{\mathbf{x}}(y, y)}.$$

Uma estrutura de Finsler é dita *Riemanniana* se vem de uma métrica Riemanniana $g$ como descrita acima. Assim, espaços Riemannianos são espaços de Finsler onde

$$F(x^1, ..., x^{\mathbf{n}}; y^1, ..., y^{\mathbf{n}}) = \sqrt{g_{\mathbf{ij}}(x)y^{\mathbf{i}}y^{\mathbf{j}}},$$

isto é, a função de Finsler tem uma restrição quadrática em $y$, e as funções $g_{\mathbf{ij}} = g_{\mathbf{ij}}(x)$ não dependem de $y$.

**Exemplos.** Uma estrutura de Finsler $F$ em $TM$ é chamada *métrica de Randers* se tem a forma

$$F(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y),$$

com

$$\alpha(x, y) := \sqrt{a_{\mathbf{ij}}(x)y^{\mathbf{i}}y^{\mathbf{j}}}$$

e

$$\beta(x, y) := b_{\mathbf{i}}(x)y^{\mathbf{i}},$$

onde os $a'_{\mathbf{ij}}s$ são componentes de uma métrica Riemanniana e os $b'_{\mathbf{i}}s$ são componentes de uma 1-forma.

**Definição 4.** Sejam $M$ uma variedade Riemanniana e $X \in \chi(M)$. $X$ é chamado um *campo de Killing* se e somente se

$$\langle \nabla_{\mathbf{Y}} X, Z \rangle + \langle \nabla_{\mathbf{Z}} X, Y \rangle = 0$$

para todo $Y, Z \in \chi(M)$. A equação acima é chamada *equação de Killing*.

Comecemos com a noção de uma *flag* (bandeira, em inglês) na variedade diferenciável M. Para instalarmos uma *flag* em $x \in M$, precisamos de um vetor $y \in T_{\mathbf{x}}M$, não nulo, que servirá de *flagpole*. Tal *flag* se descreve por um lado (por exemplo a secção distinta $l$) ao longo do *flagpole* e outro lado transverso, digamos $V := V^{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i}$, como mostra a figura 1. A curvatura *flag* não depende do "comprimento"do lado ao longo do *flagpole*, como veremos a seguir.
Agora que temos uma *flag*, podemos associar a ela um número $K(y, V)$.

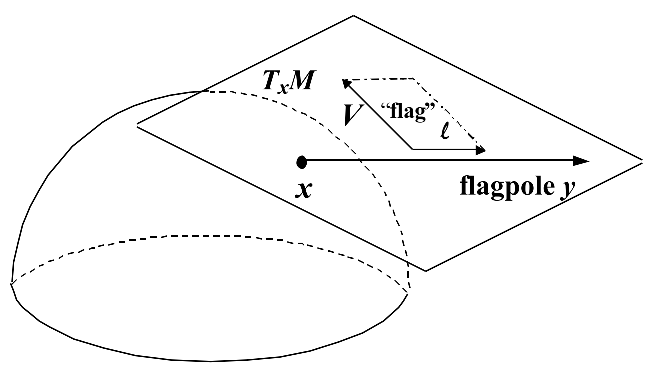


Figura 1: *Curvatura flag*

**Definição 5.** O número $K(y, V) := \frac{\mathbf{V}^i(\mathbf{y}^j \mathbf{R}_{ijkl} \mathbf{y}^l)\mathbf{V}^k}{\mathbf{g}(\mathbf{y},\mathbf{y})\mathbf{g}(\mathbf{V},\mathbf{V}) - [\mathbf{g}(\mathbf{y},\mathbf{V})]^2}$ é obtido realizando os seguintes cálculos no ponto $(x, y) \in TM \setminus \{0\}$, e considerando $y$ e $V$ como secções do fibrado tangente *pulled-back* $\pi^*TM$.

Considere a métrica de Randers $F = \alpha + \beta$, na variedade $M$, onde

$\alpha(y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ é a métrica Riemanniana e $\beta(y) = b_i(x)y^i$ é a 1-forma. Os coeficientes geodésicos de $\alpha$ são expressos na seguinte forma

$$\bar{G}^i(y) = \frac{1}{2}\bar{\Gamma}^i_{jk}(x)y^i y^k,$$

onde $\bar{\Gamma}^i_{jk}(x) = \bar{\Gamma}^i_{kj}(x)$ são funções locais de $x \in M$. Defina $b_{i|j}$ por

$$b_{i|j}dx^j := db_i - b_j\bar{\Gamma}^i_{jk}dx^k,$$

onde

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} := g^{is}\frac{1}{2}(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^j}).$$

**Proposição 6.** Seja $F = \alpha+\beta$ a métrica de Randers, onde $\beta$ é Killing de comprimento constante. $F$ tem curvatura flag constante $\lambda$ se, e somente se, $\alpha$ e $\beta$ satisfazem

$(1) b_{p|k}b_{p|l} = \lambda(\|\beta\|^2\delta_{kl} - b_k b_l)$ e

$(2) \bar{R}^i_k = \lambda\{[(1-\|\beta\|^2)\alpha^2+\beta^2]\delta_{ij}+\alpha^2 b_i b_k-(1-\|\beta\|^2)y^i y^k-\beta(b_k y^i+b_i y^k)\}-3(b_{i|p}y^p)(b_{k|q}y^q)$.

Neste caso, $\lambda > 0$ ou $\lambda = 0$ (aqui $\alpha$ é flat e $\beta$ é paralelo). $\alpha$ é flat se $R = 0$ e $\beta$ é paralelo se $b_{i|j} = 0$.

# Capítulo 1

# Navegação de Zermelo

## 1.1 Métrica Riemanniana Perturbada por Campos de Vetores

### 1.1.1 Métrica conhecida e Campos vetoriais Perturbados

Nesta Seção apresentaremos um exemplo de como se dá a perturbação através de campo de vetores. Primeiro tomemos uma métrica Riemanniana e perturbemos através da mudança de curso dos vetores.

Dada qualquer métrica Riemanniana $h$ de uma variedade diferenciável $M$, denotamos o quadrado da norma do vetor tangente $y \in T_{\mathbf{x}}M$ por:

$$|y|^2 := h_{\mathbf{ij}} y^{\mathbf{i}} y^{\mathbf{j}} = h(y, y).$$

Consideremos o o d9128(e)18do

[illegible]$\psi TR\psi\psi TaATR\psi\psi T\psi T$desasedtenood$\psi T$do v.adsiŋia como vetor velocidade espacial no ambiente Riemanniano $(M, h)$.

Consideremos o conjunto $W$ agindo em uma viagem da base ao extremo de qualquer $u$, tomando 1 unidade de tempo, digamos 1 segundo. O efeito da brisa causa uma mudança de curso, ou simplesmente sair do objetivo se $u$ é colinear a $W$. Dentro do mesmo 1 segundo, não atravessamos $u$ mas sim a resultante $v = u + W$ no lugar.

Por exemplo, suponha que $|W| = \frac{1}{2}$. Se $u$ está posicionado ao longo de $W$, isto é, $u = 2W$, então $W = \frac{1}{2}u$, assim $v = u + \frac{1}{2}u = \frac{3}{2}u$. Alternativamente se está posicionado opostamente a $W$, a saber, $u = -2W$, neste caso $W = -\frac{1}{2}u$, assim $v = u - \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}u$. Nestes dois casos, $|v|$ é igual a $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{2}$ em vez de 1. Assim essa brisa presente não conserva o tempo de viagem ao longo dos vetores. Isso induz a introdução de uma função $F$ no fibrado tangente $TM$ na condição de conservar o tempo de viagem necessária para atravessar o vetor tangente $y$ sobre as condições ventosas.

Para todas as resultantes mencionadas anteriormente $v = u + W$ temos $F(v) = 1$. Em outras palavras, dentro de cada espaço tangente $T_{\mathbf{x}}M$, a esfera unitária de $F$ é simplesmente a esfera unitária de $h$ transladada por $W$. Como esta translação dada por $W$ não está simetricamente centralizada ao longo do tempo, $F$ pode não ser Riemanniana.

### 1.1.2 Fórmula para nova norma de Minkowski F

Nesta Seção através da métrica Riemanniana e da perturbação $W$, encontraremos a nova métrica, ou seja a métrica de Randers.

Começamos com o fato de $|u| = 1$, equivalentemente $h(u, u) = 1$. Substituímos $u = v - W$ e

$$h(v, W) = |v||W| \cos\theta.$$

Definimos

$$\lambda := 1 - |W|^2,$$

temos que

$$|u|^2 = |v - W|^2,$$

logo

$$|u|^2 = |v|^2 - 2h(v, W) + |W|^2,$$

daí temos

$$1 = |v|^2 - 2(|W| \cos \theta)|v| + 1 - \lambda,$$

ou seja

$$|v|^2 - 2(|W| \cos \theta)|v| - \lambda = 0.$$

Como $|W| < 1$, a resultante nunca é nula, conseqüentemente $|v| > 0$. Isto conduz a

$$|v| = \frac{2(|W| \cos \theta) + \sqrt{4|W|^2 \cos^2 \theta + 4\lambda}}{2},$$

ou seja

$$|v| = |W| \cos \theta + \sqrt{|W|^2 \cos^2 \theta + \lambda},$$

consideremos

$$p = |W| \cos \theta$$

e

$$q = \sqrt{|W|^2 \cos^2 \theta + \lambda}.$$

Como $F(v) = 1$, vemos que

$$F(v) = |v| \frac{1}{p + q} = |v| \frac{q - p}{q^2 - p^2} = \frac{|v|\sqrt{|W|^2 \cos^2 \theta + \lambda} - |v||W| \cos \theta}{|W|^2 \cos^2 \theta + \lambda - |W|^2 \cos^2 \theta},$$

daí

$$F(v) = \frac{\sqrt{|v|^2 |W|^2 \cos^2 \theta + |v|^2 \lambda}}{\lambda} - \frac{h(v, W)}{\lambda}.$$

Portanto para um $y \in TM$ arbitrário, temos:

$$F(y) = \frac{\sqrt{h(y, W)^2 + |y|^2 \lambda}}{\lambda} - \frac{h(y, W)}{\lambda}.$$

Agora é óbvio que em geral $F(y) \neq F(-y)$, de fato,

$$F(-y) = \frac{\sqrt{h(-y,W)^2 + |-y|^2\lambda}}{\lambda} - \frac{h(-y,W)}{\lambda} \neq \frac{\sqrt{h(y,W)^2 + |y|^2\lambda}}{\lambda} - \frac{h(y,W)}{\lambda} = F(y).$$

Por hipótese $|W| < 1$, disto segue que $\lambda > 0$. Vemos da fórmula de $F(y)$ que esta é positiva sempre que $y \neq 0$. Também, $F(0) = 0$ como esperávamos.

Mostraremos que $F$ é uma métrica de Randers.

Para mostrarmos isso, denotemos $y_{\mathbf{i}} = h_{\mathbf{ij}} y^{\mathbf{j}}$.

Seja $y = y^{\mathbf{j}} z_{\mathbf{j}}$ onde $z_{\mathbf{j}}$ é uma base ortonormal, em relação a $h$.

Assim, $y_{\mathbf{i}} = h(z_{\mathbf{i}}, y) = h(z_{\mathbf{i}}, z_{\mathbf{j}}) y^{\mathbf{j}} = h_{\mathbf{ij}} y^{\mathbf{j}}$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\mathbf{h}(\mathbf{y},\mathbf{W})^2 + |\mathbf{y}|^2\boldsymbol{\lambda}}}{\boldsymbol{\lambda}} &= \sqrt{\frac{\mathbf{h}(\mathbf{y},\mathbf{W})^2 + |\mathbf{y}|^2\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{\lambda}^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(\mathbf{h}_{ij}\mathbf{W}^i\mathbf{y}^j)^2}{\boldsymbol{\lambda}^2} + \frac{\mathbf{h}_{ij}\mathbf{y}^i\mathbf{y}^j}{\boldsymbol{\lambda}}} \\
&= \sqrt{\frac{(\mathbf{h}_{ij}\mathbf{W}^i\mathbf{y}^j)}{\boldsymbol{\lambda}}\frac{(\mathbf{h}_{ij}\mathbf{W}^j\mathbf{y}^i)}{\boldsymbol{\lambda}} + \frac{\mathbf{h}_{ij}\mathbf{y}^i\mathbf{y}^j}{\boldsymbol{\lambda}}} \\
&= \sqrt{\frac{(\mathbf{W}_j\mathbf{y}^j)}{\boldsymbol{\lambda}}\frac{(\mathbf{W}_i\mathbf{y}^i)}{\boldsymbol{\lambda}} + \frac{\mathbf{h}_{ij}\mathbf{y}^i\mathbf{y}^j}{\boldsymbol{\lambda}}} \\
&= \sqrt{((\frac{\mathbf{W}_j}{\boldsymbol{\lambda}})(\frac{\mathbf{W}_i}{\boldsymbol{\lambda}}) + (\frac{\mathbf{h}_{ij}}{\boldsymbol{\lambda}}))y^{\mathbf{i}}y^{\mathbf{j}}} \\
&= \sqrt{a_{\mathbf{ij}}y^{\mathbf{i}}y^{\mathbf{j}}} \\
&=: \alpha(x,y).
\end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathbf{h}(\mathbf{y},\mathbf{W})}{\boldsymbol{\lambda}} &= -\frac{(\mathbf{h}_{ij}\mathbf{W}^i)\mathbf{y}^j}{\boldsymbol{\lambda}} \\
&= \frac{\mathbf{W}_j}{\boldsymbol{\lambda}} y^{\mathbf{j}} \\
&=: b_{\mathbf{j}} y^{\mathbf{j}} \\
&=: \beta(x,y).
\end{aligned}$$

Daí obtemos a nova fórmula de $F = \alpha + \beta$ como veremos a seguir.

## 1.2 Métrica de Randers

Nesta Seção apresentamos a fórmula de Randers através da perturbação, o tensor fundamental e mostraremos a condição da métrica de Randers ser fortemente convexa.

A fórmula de $F$ tem duas partes.

O primeiro termo é a norma de $y$ com respeito a nova métrica Riemanniana

$$a_{\mathbf{ij}} = \frac{h_{\mathbf{ij}}}{\lambda} + \frac{W_{\mathbf{i}}}{\lambda}\frac{W_{\mathbf{j}}}{\lambda}, \quad onde \quad W_{\mathbf{i}} = h_{\mathbf{ij}} W^{\mathbf{j}} \quad e \quad \lambda = 1 - W^{\mathbf{i}} W_{\mathbf{i}}.$$

O segundo termo é o valor em $y$ da 1-forma

$$b_{\mathbf{i}} = \frac{-W_{\mathbf{i}}}{\lambda}.$$

Uma métrica $F$ derivada da perturbação $W$ tem uma forma simples $F := \alpha + \beta$, onde

$$\alpha(x, y) := \sqrt{a_{\mathbf{ij}}(x) y^{\mathbf{i}} y^{\mathbf{j}}}, \qquad \beta(x, y) := b_{\mathbf{i}}(x) y^{\mathbf{i}}.$$

Esta é a definição da métrica de Randers, a qual foi introduzida por Randers em 1941 em um contexto mais geral, e mais tarde nomeada por Ingarden.

A função $F$ é positiva na variedade $TM$ cujos pontos são da forma $(x, y)$, com $0 \neq y \in T_{\mathbf{x}}M$. $g_{\mathbf{ij}} := \frac{1}{2}(F^2)_{\mathbf{y}^i \mathbf{y}^j}$ é a forma canônica, bilinear simétrica definida nas fibras de $\pi^* TM$. Os subscritos $y^{\mathbf{i}}$, $y^{\mathbf{j}}$ em $F^2$ significam diferenciação parcial, e a matriz $(g_{\mathbf{ij}})$ é conhecida como tensor fundamental. A métrica de Finsler é dita *fortemente convexa* se a forma bilinear é positiva definida.

A métrica de Randers é fortemente convexa se, e somente se, temos $\|b\| := \sqrt{b_{\mathbf{i}} b^{\mathbf{i}}} < 1$, onde $b^{\mathbf{i}} := a^{\mathbf{ij}} b_{\mathbf{j}}$.

De fato,

Primeiramente mostraremos que $a^{ij} = \lambda(h^{ij} - W^iW^j)$.

Para isso, consideremos

$$\left( A_{js} \right) = \left( a_{ji} \right)\left( a^{is} \right),$$

onde

$$A_{js} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}a^{is}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
A_{js} &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}(\frac{h_{ji}}{\lambda} + \frac{W_jW_i}{\lambda^2})(\lambda(h^{is} - W^iW^s)) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n}(h_{ji} + \frac{W_jW_i}{\lambda})(h^{is} - W^iW^s) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} h_{ji}h^{is} - h_{ji}W^iW^j + h^{is}\frac{W_jW_i}{\lambda} - \frac{W_jW_iW^iW^s}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\lambda}\textstyle\sum_{i=1}^{n} h^{is}W_jW_i &= \tfrac{1}{\lambda}\textstyle\sum_{i=1}^{n} h^{is}(\sum_{k=1}^{n} h_{jk}W^k)(\sum_{k=1}^{n} h_{jk}W^k) \\
&= \tfrac{1}{\lambda}\textstyle\sum_{k=1}^{n} h_{jk}W^k(\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} h^{is}h_{ik}W^k)) \\
&= \tfrac{1}{\lambda}\textstyle\sum_{k=1}^{n} h_{jk}W^kW^s, \ \text{pois} \ \sum_{k=1}^{n} h^{is}h_{ik} = 1 \ \text{se} \ s=k \ \text{ou} \ 0 \ \text{se} \ s \neq k.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\lambda}\textstyle\sum_{i=1}^{n} W_jW_iW^iW^s &= \tfrac{1}{\lambda}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} h_{jk}W^k)(\sum_{k=1}^{n} h_{jk}W^k)W^iW^s \\
&= \tfrac{1}{\lambda}\textstyle\sum_{k=1}^{n} h_{jk}W^kW^s\sum_{i=1}^{n} h_{ik}W^kW^i \\
&= \tfrac{|W|^2}{\lambda}\textstyle\sum_{k=1}^{n} h_{jk}W^kW^s.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$A_{js} = \sum_{i=1}^{n}(h_{ji}h^{is} - h_{ji}W^iW^j + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} h_{jk}W^kW^s - \frac{|W|^2}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} h_{jk}W^kW^s)$$

$$A_{js} = \sum_{i=1}^{n} h_{ji}h^{is} + (\frac{1-\lambda-|W|^2}{\lambda})\sum_{k=1}^{n} h_{jk}W^kW^s = \sum_{i=1}^{n} h_{ji}h^{is}.$$

Portanto $A=$ identidade.

Mostraremos agora que $b^i = -\lambda W^i$.

$$b^{i} := a^{ij}b_{j} = \lambda(h^{ij} - W^{i}W^{j})(\frac{-h_{ij}W^{i}}{\lambda}) = -h^{ij}h_{ij}W^{i} + W^{i}W^{j}(h_{ij}W^{i})$$

$$b^{i} = (-h^{ij}h_{ij} + W^{i}W^{j}h_{ij})W^{i} = (-1 + |W|^2)W^{i} = -\lambda W^{i}.$$

Logo,

$$|b|^2 = a^{ij}b_{i}b_{j} = b^{i}b_{i} = (-\lambda W^{i})(\frac{-W_{i}}{\lambda}) = W_{i}W^{i} = h_{ij}W^{j}W^{i} = |W|^2 < 1.$$

Por essa razão, escrevemos a perturbação da métrica Riemanniana $h$ pelo campo de vetores $W$, com $|W| < 1$, produzindo sempre métricas de Randers fortemente convexas.

## 1.3 Um problema inverso

Uma questão surge naturalmente: Toda métrica de Randers fortemente convexa realiza satisfatoriamente a perturbação de alguma métrica Riemanniana $h$ por algum campo de vetores $W$ satisfazendo $|W| < 1$? Felizmente, a resposta a esta questão é sim. Vejamos a proposição a seguir.

**Proposição 7.** Uma métrica de Finsler $F$ fortemente convexa é do tipo Randers se, e somente se, ela resolve o Problema da navegação de Zermelo em uma variedade Riemanniana $(M, h)$, com a influência de uma brisa $W$, que satisfaz $h(W, W) < 1$. Além disso $F$ é Riemanniana se, e somente se, $W = 0$.

**Demonstração.** $\Rightarrow$)

Dada $F = a + b$ uma métrica de Randers, onde $a$ é a métrica Riemanniana e $b$ é a 1-forma diferenciável, tal que $|b|^2 = a^{ij}b_{i}b_{j} < 1$, por definição $b^{i} := a^{ij}b_{j}$ e defina $\epsilon = 1 - |b|^2$, considere $h_{ij} = \epsilon(a_{ij} - b_{i}b_{j})$ e $W^{i} = -\frac{b^{i}}{\epsilon}$. Assim,

$W_{i} := h_{ij}W^{j} = -\epsilon(a_{ij} - b_{i}b_{j})\frac{b^{i}}{\epsilon} = -a_{ij}b^{j} + b_{i}b_{j}b^{j} = -a_{ij}a^{jk}b_{k} + b_{i}b_{j}a^{jk}b_{k} = -(a_{ij}a^{jk})b_{k} + (a^{jk}b_{j}b_{k})b_{i} = -b_{i} + |b|^2 b_{i} = -(1 - |b|^2)b_{i} = -\epsilon b_{i}$.

Logo,

$|W|^2 = h_{\mathbf{ij}} W^{\mathbf{i}} W^{\mathbf{j}} = \epsilon(a_{\mathbf{ij}} - b_{\mathbf{i}} b_{\mathbf{j}})(-\frac{\mathbf{b}^i}{\epsilon})(-\frac{\mathbf{b}^j}{\epsilon}) = (a_{\mathbf{ij}} - b_{\mathbf{i}} b_{\mathbf{j}})(a^{\mathbf{ik}} b_{\mathbf{k}})(\frac{\mathbf{a}^{jk}\mathbf{b}_k}{\epsilon}) = (a_{\mathbf{ij}} a^{\mathbf{jk}} - a^{\mathbf{ik}} b_{\mathbf{i}} b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{j}})(\frac{\mathbf{a}^{ik}\mathbf{b}_k}{\epsilon}) = \frac{1}{\epsilon}(b_{\mathbf{j}} - |b|^2 b_{\mathbf{j}}) a^{\mathbf{jk}} b_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\epsilon}(1 - |b|^2) a^{\mathbf{jk}} b_{\mathbf{j}} b_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\epsilon}\epsilon|b|^2 = |b|^2 < 1.$

Logo, $\epsilon = \lambda$.

Portanto, $h_{\mathbf{ij}} = \epsilon(a_{\mathbf{ij}} - b_{\mathbf{i}} b_{\mathbf{j}})$ o que implica

$a_{\mathbf{ij}} = \frac{\mathbf{h}_{ij}}{\epsilon} + b_{\mathbf{i}} b_{\mathbf{j}} = \frac{\mathbf{h}_{ij}}{\boldsymbol{\lambda}} + \frac{\mathbf{W}_i \mathbf{W}_j}{\boldsymbol{\lambda}^2}$ e $b_{\mathbf{i}} = -\frac{\mathbf{W}_i}{\boldsymbol{\lambda}}$.

Desta forma $F$ soluciona o Problema da Navegação de Zermelo.

$\Leftarrow$)

Temos que encontrar o valor de $\alpha$ e $\beta$, dado $W$.

Defina $\epsilon = 1 - |b|^2 =: \lambda$, onde $|b|^2 = |W|^2$.

Sabemos que, $b_{\mathbf{i}} = -\frac{\mathbf{W}_i}{\boldsymbol{\lambda}}$ como $\epsilon = \lambda$ então $W_{\mathbf{i}} = -\epsilon b_{\mathbf{i}}$.

Assim, $a_{\mathbf{ij}} = \frac{\mathbf{h}_{ij}}{\boldsymbol{\lambda}} + \frac{\mathbf{W}_i \mathbf{W}_j}{\boldsymbol{\lambda}^2}$, então $h_{\mathbf{ij}} = \lambda a_{\mathbf{ij}} - \lambda \frac{\mathbf{W}_i \mathbf{W}_j}{\boldsymbol{\lambda}^2} = \epsilon a_{\mathbf{ij}} - \epsilon \frac{(-\epsilon\mathbf{b}_i)(-\epsilon\mathbf{b}_j)}{\epsilon^2} = \epsilon(a_{\mathbf{ij}} - b_{\mathbf{i}} b_{\mathbf{j}})$.

Logo, $b^{\mathbf{i}} = -\lambda W^{\mathbf{i}}$, como $\epsilon = \lambda$ então, $W^{\mathbf{i}} = \frac{\mathbf{b}^i}{\epsilon}$.

$F$ é Riemanniana $\Leftrightarrow W = 0$.

$F = \alpha + \beta$ Riemanniana $\Leftrightarrow \beta = b_{\mathbf{i}} y^{\mathbf{i}} = 0 \Leftrightarrow b_{\mathbf{i}} = 0 \;\; \forall i = 1, ..., n \Leftrightarrow W^{\mathbf{i}} = -\frac{\mathbf{b}^i}{\epsilon} = -\frac{\mathbf{a}^{ij}\mathbf{b}_j}{\epsilon} = 0 \;\; \forall i = 1, ..., n \Leftrightarrow W = 0$.

# Capítulo 2

# Navegação de Zermelo nas Formas Espaciais

Nesta seção ilustraremos a variação da perturbação em dimensão 3 nas formas espaciais. Em cada exemplo, com excessão da perturbação radial na métrica euclidiana, $W$ é uma isometria infinitesimal de $h$. Em todos os resultados a métrica de Randers fortemente convexa possui curvatura Flag constante (será denotada por $K$). O conceito de curvatura Flag é uma extensão natural da curvatura Riemanniana Seccional para o domínio Finsleriano.

Todos os nossos exemplos são em dimensão três, sejam $(x, y, z)$ coordenadas positivas, e $u\partial x + v\partial y + w\partial z$ um vetor tangente arbitrário. Expressamos a norma como $\alpha := \sqrt{a(x, y)}$ em vez de $a_{\mathsf{ij}}$ porque a anterior é mais compacta. A métrica Riemanniana é vista como $a_{\mathsf{ij}} = (\frac{1}{2}\alpha^2)_{\mathsf{y}_i\mathsf{y}_j}$. Seja $\mathbf{x} = (x, y, z)$ o ponto e $\mathbf{y} = (u, v, w)$ o vetor.

## 2.1 Curvatura Flag constante positiva

### 2.1.1 Perturbação rotacional de $S^3$

Seja $S^3$ a esfera unitária em $\mathbb{R}^4$, isto é, $S^3 = \{(x, y, z, w) : \alpha(x, y, z, w) = 1\}$. Usando o espaço tangente dos pólos leste e oeste, parametrizamos a esfera por

$$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}}(s, x, y, z);$$

onde, $s = \pm 1$, respectivamente para o hemisfério leste e oeste. Note que o equador corresponde à assíntota infinita do espaço tangente acima.

Fixe uma constante $0 < \tau < 1$ e perturbe por rotação infinitesimal

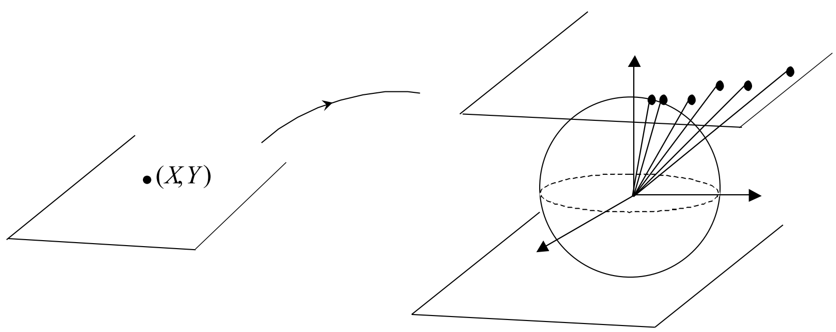


Figura 2.1: *Correspondência assintótica do espaço tangente.*

$$W(x, y, z) = \tau(y, -x, 0).$$

Vamos calcular a norma de $W$.

Primeiramente vamos calcular a métrica Riemanniana da esfera

$$h_{\mathbf{ij}} = \langle \frac{\partial}{\partial x_{\mathbf{i}}}, \frac{\partial}{\partial x_{\mathbf{j}}} \rangle.$$

Primeiro temos

$$\frac{\partial}{\partial x}=\left(\frac{-sx}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{1+y^2+z^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{-xy}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{-xz}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\left(\frac{-sy}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{-xy}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{1+x^2+z^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{-yz}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\left(\frac{-sz}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{-xz}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{-yz}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{1+x^2+y^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
h_{11} &= \frac{s^2x^2+(1+y^2+z^2)^2+x^2y^2+x^2z^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}\\
&= \frac{x^2(1+y^2+z^2)+(1+y^2+z^2)^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}\\
&= \frac{(1+y^2+z^2)(1+x^2+y^2+z^2)}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}\\
&= \frac{(1+y^2+z^2)}{(1+x^2+y^2+z^2)^2},\\
h_{22} &= \frac{s^2y^2+x^2y^2+(1+x^2+z^2)^2+y^2z^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}\\
&= \frac{y^2(1+x^2+z^2)+(1+x^2+z^2)^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}\\
&= \frac{(1+x^2+z^2)(1+x^2+y^2+z^2)}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}\\
&= \frac{(1+x^2+z^2)}{(1+x^2+y^2+z^2)^2},\\
h_{33} &= \frac{s^2z^2+x^2z^2+y^2z^2+(1+x^2+y^2)^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}\\
&= \frac{z^2(1+x^2+y^2)+(1+x^2+y^2)^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}\\
&= \frac{(1+x^2+y^2)(1+x^2+y^2+z^2)}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}\\
&= \frac{(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2+z^2)^2},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
h_{12} &= \frac{s^2xy - xy(1+y^2+z^2) - xy(1+x^2+z^2) + xyz^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^3} \\
&= \frac{xy(1-1-y^2-z^2-1-x^2-z^2+z^2)}{(1+x^2+y^2+z^2)^3} \\
&= \frac{-xy(1+x^2+y^2+z^2)}{(1+x^2+y^2+z^2)^3} \\
&= \frac{-xy}{(1+x^2+y^2+z^2)^2} \\
h_{13} &= \frac{s^2xz - xz(1+y^2+z^2) + xy^2z - xz(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2+z^2)^3} \\
&= \frac{xz(1-1-y^2-z^2+y^2-1-x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2+z^2)^3} \\
&= \frac{-xz(1+x^2+y^2+z^2)}{(1+x^2+y^2+z^2)^3} \\
&= \frac{-xz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}, \\
h_{23} &= \frac{s^2yz + x^2yz - yz(1+x^2+z^2) - yz(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2+z^2)^3} \\
&= \frac{yz(1+x^2-1-x^2-z^2-1-x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2+z^2)^3} \\
&= \frac{-yz(1+x^2+y^2+z^2)}{(1+x^2+y^2+z^2)^3} \\
&= \frac{-yz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}.
\end{aligned}
$$

Considere $\rho := 1 + x^2 + y^2 + z^2$. Assim de, $|W|^2 = h_{\mathbf{ij}} W^{\mathbf{i}} W^{\mathbf{j}}$, vsqTd[581.229j]28(s)$\psi T\psi\psi T d T R\psi\psi T\psi$

Portanto

$$
\begin{aligned}
|W|^2 &= \frac{\tau^2(y^2(1+y^2+z^2)+x^2y^2+x^2y^2+x^2(1+x^2+z^2))}{\rho^2} \\
&= \frac{\tau^2(y^2((1+y^2+z^2)+x^2)+x^2(y^2+(1+x^2+z^2)))}{\rho^2} \\
&= \frac{\tau^2(y^2+x^2)(1x^2+y^2+z^2)}{\rho^2} \\
&= \tau\sqrt{\frac{x^2+y^2}{\rho}}.
\end{aligned}
$$

Note que,

$$|W| = \tau\sqrt{\frac{x^2+y^2}{\rho}} < 1.$$

O intervalo de $\tau$ é devido à condição $|W| < 1$ globalmente em $S^3$.

Agora calcularemos a métrica de Randers $F = \alpha + \beta$.

Primeiramente encontraremos o valor de $\beta$.

Sabemos que,

$$\beta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = b_{\mathbf{i}}(x)y^{\mathbf{i}} \quad e \quad b_{\mathbf{i}}(x) = \frac{-W_{\mathbf{i}}}{\lambda}, \quad \text{onde}$$

$$W_{\mathbf{i}} = h_{\mathbf{ij}}W^{\mathbf{j}} \quad e \quad \lambda = 1 - W^{\mathbf{i}}W_{\mathbf{i}} = 1 - W^{\mathbf{i}}h_{\mathbf{ij}}W^{\mathbf{j}}.$$

Assim,

$$
\begin{pmatrix} W_{\mathbf{i}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{\mathbf{ij}}W^{\mathbf{j}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix} 1+y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & 1+x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & 1+x^2+y^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau y \\ -\tau x \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix} \tau(y(1+y^2+z^2)+x^2) \\ \tau(-x(y^2+(1+x^2+z^2))) \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Logo,

$$h_{\mathbf{ij}}W^{\mathbf{j}} = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \tau y \\ -\tau x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} W^{\mathbf{i}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_{\mathbf{i}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \tau y & -\tau x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau y \\ -\tau x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} W^{\mathbf{i}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_{\mathbf{i}} \end{pmatrix} = \frac{\tau^2(x^2+y^2)}{\rho}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\lambda =& 1 + W^{\mathbf{i}}W_{\mathbf{i}} \\
=& 1 + \frac{\tau^2(x^2+y^2)}{\rho} \\
=& \frac{1+x^2+y^2+z^2+\tau^2(x^2+y^2)}{\rho} \\
=& \frac{1+(1+\tau^2)(x^2+y^2)+z^2}{\rho}.
\end{aligned}$$

Consideremos novamente $\eta := 1 + (1+\tau^2)(x^2+y^2) + z^2$.

Portanto, $\lambda = \frac{\boldsymbol{\eta}}{\boldsymbol{\rho}}$ daí,

$$\begin{pmatrix} b_{\mathbf{i}}(x) \end{pmatrix} = -\frac{\begin{pmatrix} W_{\mathbf{i}} \end{pmatrix}}{\lambda} = -\frac{\rho}{\eta}\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \tau y \\ -\tau x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\tau}{\eta}\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\beta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = b_{\mathbf{i}}(x)y^{\mathbf{i}} = \frac{\tau}{\eta}\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\beta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\tau(-yu+xv)}{\eta}.$$

Agora calcularemos $\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Temos que,

$$\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{a_{\mathbf{ij}}y^{\mathbf{i}}y^{\mathbf{j}}} \quad e \quad a_{\mathbf{ij}} = \frac{h_{\mathbf{ij}}}{\lambda} + \frac{W_{\mathbf{i}}}{\lambda}\frac{W_{\mathbf{j}}}{\lambda}.$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{h}_{ij}}{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \frac{\rho}{\eta}\frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix} 1+y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & 1+x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & 1+x^2+y^2 \end{pmatrix},$$

dai,

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{h}_{ij}}{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho\eta}\begin{pmatrix} 1+y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & 1+x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & 1+x^2+y^2 \end{pmatrix},$$

portanto,

$$\frac{h_{\mathbf{ij}}}{\lambda} = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{h}_{ij}}{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\rho\eta}\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & 1+x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & 1+x^2+y^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\rho\eta}\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1+y^2+z^2)u - xyv - xzw \\ -xyu + (1+x^2+z^2)v - yzw \\ -xzu - yzv + (1+x^2+y^2)w \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\rho\eta}((1+y^2+z^2)u^2 + (1+x^2+z^2)v^2 + (1+x^2+y^2)w^2 - 2xyuv - 2xzuw - yzvw)$$

e

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{W}_i}{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{W}_j}{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \frac{\rho^2}{\eta^2}\frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix} \tau y \\ -\tau x \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau y & -\tau x & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\tau^2}{\eta^2}\begin{pmatrix} y^2 & -xy & 0 \\ -xy & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\frac{W_{\mathbf{i}}}{\lambda}\frac{W_{\mathbf{j}}}{\lambda}y^{\mathbf{i}}y^{\mathbf{j}} = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{W}_i}{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{W}_j}{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\tau^2}{\eta^2}\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^2 & -xy & 0 \\ -xy & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\tau^2}{\eta^2}\begin{pmatrix} y^2u - xyv & -xyu + x^2v & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\tau^2}{\eta^2}(y^2u^2 - xyuv - xyuv + x^2v^2)$$
$$= \frac{\tau^2}{\eta^2}(-yu + xv)^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\alpha^2(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \tfrac{1}{\rho\eta}\{(1+x^2+y^2+z^2)u^2 - 2xyuv + (1+x^2+y^2+z^2)v^2 - 2xzuw \\
&\quad +(1+x^2+y^2)w^2\} - \tfrac{1}{\rho\eta}2yzvw + \tfrac{\tau^2}{\eta^2}(-yu+xv)^2 \\
&= \tfrac{1}{\rho\eta}\{(1+x^2+y^2+z^2)u^2 - x^2u^2 + (1+x^2+y^2+z^2)v^2 - v^2y^2 - 2xyuv - 2xzuw\} \\
&\quad +\tfrac{1}{\rho\eta}\{(1+x^2+y^2+z^2-z^2)w^2 - 2yzvw\} + \tfrac{1}{\eta^2}\{(1+(x^2+y^2)(1-\tau^2)+z^2)^2\} \\
&= \tfrac{1}{\rho\eta}\{(1+x^2+y^2+z^2)(u^2+v^2) - (xu+vy)^2 - 2zw(xu+yv) + (\rho - z^2)w^2\} \\
&\quad +\tfrac{1}{\eta^2}\{\tau^2(-yu+xv)^2\}.
\end{aligned}$$

Considere $xu + yv = \psi$

$$\begin{aligned}
\alpha^2(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \tfrac{1}{\rho\eta}\{(1+(x^2+y^2)(1-\tau^2)+z^2)[\rho(u^2+v^2) - \psi^2 - 2zw\psi + (\rho-z^2)w^2]\} \\
&\quad +\tfrac{1}{\rho\eta}\{(1+(x^2+y^2)(1-\tau^2)+z^2)[\tau^2(-yu+xv)^2\rho]\} \\
&= \tfrac{1}{\rho\eta}\{\rho(u^2+v^2) - \psi^2 + (x^2+y^2)(1-\tau^2)(1+y^2+z^2)(u^2+v^2) - (1-\tau^2)(x^2+y^2)\psi^2\} \\
&\quad +\tfrac{1}{\rho\eta}\{+z^2(1+y^2+z^2)(u^2+v^2) - z^2\psi^2 - 2zw\psi + (\rho-z^2)w^2 + \tau^2(-yu+xv)^2\rho\} \\
&= \tfrac{1}{\rho\eta}\{\rho(u^2+v^2) - \psi^2 + (x^2+y^2)(1+y^2+z^2)(u^2+v^2) - (x^2+y^2)\psi^2 + \tau^2(x^2+y^2)\psi^2\} \\
&\quad +\tfrac{1}{\rho\eta}\{-\tau^2(x^2+y^2)(1+y^2+z^2)(u^2+v^2) + z^2(1+y^2+z^2)(u^2+v^2) - z^2\psi^2 - 2zw\psi\} \\
&\quad +\tfrac{1}{\rho\eta}\{(\rho-z^2)w^2 + \tau^2(-yu+xv)^2\rho\} \\
&= \tfrac{1}{\rho\eta}\{\rho(u^2+v^2) + \rho(x^2+y^2)(u^2+v^2) - \psi^2 + z^2\rho(u^2+v^2) - (x^2+y^2)\psi^2 - z^2\psi^2\} \\
&\quad +\tfrac{1}{\rho\eta}\{-\tau^2\rho(x^2+y^2)(u^2+v^2) + \tau^2\psi^2(x^2+y^2) + \tau^2\rho(-yu+xv)^2 - 2zw\psi + (\rho-z^2)w^2\} \\
&= \tfrac{1}{\rho\eta}\{\rho(u^2+v^2) + \rho - \psi^2\rho + \tau^2\rho(x^2v^2 - 2xvyu + y^2u^2) - 2zw\psi + (\rho-z^2)w^2\} \\
&\quad +\tfrac{1}{\rho\eta}\{\tau^2(x^2+y^2)(-u^2 - x^2u^2 - y^2u^2 - z^2u^2 - v^2 - x^2v^2 - y^2v^2 - z^2v^2 + x^2u^2)\} \\
&\quad +\tfrac{1}{\rho\eta}\{\tau^2(x^2+y^2)(2xuyv + y^2v^2)\} \\
&= \tfrac{1}{\rho\eta}\{\rho^2(u^2+v^2) - \psi^2\rho + \tau^2(x^2+y^2)(-u^2 - x^2u^2 - y^2u^2 - z^2u^2 - v^2 - x^2v^2 - y^2v^2)\} \\
&\quad +\tfrac{1}{\rho\eta}\{\tau^2(x^2+y^2)(-z^2v^2 + x^2u^2 + 2xuyv + y^2v^2) + \tau^2(x^2v^2 - 2xvyu + y^2u^2 + x^4v^2)\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\tfrac{1}{\rho\eta}\{\tau^2(-2x^3vyu+y^2x^2u^2+y^2x^2v^2-2xvy^3u+y^4u^2+x^2z^2v^2-2xvyuz^2+y^2z^2u^2)\}\\
&+\tfrac{1}{\rho\eta}\{-2zw\psi+(\rho-z^2)w^2\}\\
=\;&\tfrac{1}{\rho\eta}\{\rho^2(u^2+v^2)-\psi^2\rho+\tau^2(x^2+y^2)(-u^2-x^2u^2-y^2u^2-z^2u^2-v^2-x^2v^2-y^2v^2)\}\\
&+\tfrac{1}{\rho\eta}\{\tau^2(x^2+y^2)(-z^2v^2+x^2u^2+2xuyv+y^2v^2)+\tau^2(x^2v^2-2xvyu+y^2u^2+x^4v^2)\}\\
&+\tfrac{1}{\rho\eta}\{\tau^2(-2x^3vyu+y^2x^2u^2+y^2x^2v^2-2xvy^3u+y^4u^2+x^2z^2v^2)+\tau^2(-2xvyuz^2+y^2z^2u^2)\}\\
&+\tfrac{1}{\rho\eta}\{-2zw\psi+(\rho-z^2)w^2\}\\
=\;&\tfrac{1}{\rho\eta}\{\rho^2(u^2+v^2)-\psi^2\rho+\tau^2(-x^2u^2-x^2z^2u^2-y^2v^2-y^2z^2v^2-2xyuv-2xyuvz^2)\}\\
&+\tfrac{1}{\rho\eta}\{-2zw\psi+(\rho-z^2)w^2\}\\
=\;&\tfrac{1}{\rho\eta}\{\rho^2(u^2+v^2)-\psi^2(1+x^2+y^2+z^2)+\tau^2\psi^2+z^2\psi^2-2zw\psi+(\rho-z^2)w^2\}\\
=\;&\tfrac{1}{\rho\eta}\{\rho^2(u^2+v^2)-\psi^2\rho+\tau^2(1+z^2)\psi^2-2zw\psi+(\rho-z^2)w^2\}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\alpha^2(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{1}{\rho\eta}\{\rho^2\psi-[\rho+\tau^2(1+z^2)]\psi^2+\eta^2[(\rho-z^2)w^2-2zw\psi\}.$$

Podemos verificar que $F=\alpha+\beta$ tem curvatura Flag constante $K=1$.

Para isso vamos usar o Teorema de Yasuda Shimada (Proposição 7), primeiro vamos analisar se $W$ é um campo de Killing.

$W$ é Killing $\Leftrightarrow \langle\nabla_{\mathbf{Y}}W,Z\rangle+\langle\nabla_{\mathbf{Z}}W,Y\rangle=0$.

Temos que

$$W=\tau(y,x,0)$$

é a perturbação, ou seja,

$$W=\tau(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}+0\frac{\partial}{\partial z}).$$

Assim:

$W=\frac{\tau}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(y(-sx,1+y^2+z^2,-xy,-xz)-x(-sy,-xy,1+x^2+z^2,-yz)+0(-sz,-xz,-yz,1+x^2+y^2))$

$=\frac{\tau}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(-sxy,y(1+y^2+z^2),-xy^2,-xyz)+(sxy,x^2y,-x(1+x^2+z^2),xyz)$

$=\frac{\tau}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(0,y(1+x^2+y^2+z^2),-x(1+x^2+y^2+z^2),0$

$= \frac{\tau}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}(0, y, -x, 0).$
Então:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\tau}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(0, -xy, -(1+y^2+z^2), 0)$$
$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\tau}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(0, 1+x^2+z^2, xy, 0)$$
$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\tau}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(0, -yz, xz, 0).$$

Temos que

$$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}(s, x, y, z)$$

é a parametrização da esfera, logo

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(-sx, 1+y^2+z^2, -xy, -xz)$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(-sy, -xy, 1+x^2+z^2, -yz)$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(-sz, -xz, -yz, 1+x^2+y^2).$$

Portanto:

$\langle \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle + \langle \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \rangle =$

$\frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}(x^2y^2 - (1+y^2+z^2)(1+x^2+z^2) + (1+y^2+z^2)(1+x^2+z^2) - x^2y^2) = 0.$

$\langle \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle + \langle \frac{\partial W}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \rangle =$

$\frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}(x^2yz + yz(1+y^2+z^2) - yz(1+y^2+z^2) - x^2yz) = 0.$

$\langle \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle + \langle \frac{\partial W}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle =$

$\frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}(-xz(1+x^2+z^2) - xy^2z + xy^2z + xz(1+x^2+z^2)) = 0.$

Usando a proposição 7, pode-se verificar que a curvatura flag é K=1.

### 2.1.2 Perturbação de um campo de Killing em $S^3$

Agora, começamos com a esfera $S^3$ de $\mathbb{R}^4$, parametrizada como anteriormente. Para toda constante $K > 1$, temos que $h$ é $\frac{1}{\mathbf{K}}$ vezes a norma da métrica Riemanniana induzida em $S^3$. A mudança na escala métrica tem curvatura seccional $K$.

Perturbe $h$ pelo campo de vetores de Killing

$$W(x, y, z) = \sqrt{K-1}(-s(1+x^2), z - sxy, -y - sxz),$$

vamos mostrar que $W$ é um campo de Killing.

$W$ é Killing $\Leftrightarrow \langle \nabla_{\mathbf{Y}} W, Z\rangle + \langle \nabla_{\mathbf{Z}} W, Y\rangle = 0.$

Temos que

$$W(x, y, z) = \sqrt{K-1}(-s(1+x^2), z - sxy, -y - sxz),$$

ou seja,

$$W(x, y, z) = \sqrt{K-1}(-s(1+x^2)\frac{\partial}{\partial x} + (z - sxy)\frac{\partial}{\partial y} + (-y - sxz)\frac{\partial}{\partial z})$$

$W = \frac{\sqrt{\mathbf{K}-1}}{(1+\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2+\mathbf{z}^2)^{\frac{3}{2}}}(-s(1+x^2)(-sx, 1+y^2+z^2, -xy, -xz) + (z - sxy)(-sy, -xy, 1 + x^2+z^2, -yz) + (-y - sxz)(-sz, -xz, -yz, 1+x^2+y^2))$

$W = \frac{\sqrt{\mathbf{K}-1}}{(1+\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2+\mathbf{z}^2)^{\frac{3}{2}}}(sx^2 + s^2x^3 - szy + s^2xy^2 + syz + s^2xz^2, -s(1+y^2+z^2+x^2+x^2y^2 + x^2z^2) - xyz - sx^2y^2 + xyz + sx^2z^2, -s(xy - x^3y) + z + zx^2 + z^3 - sxy - sx^3y - sxyz^2 + y^2z + sxyz^2, -s(-xz - x^3z)(-yz^2 + sxy^2z - y, -yx^2 - y^3 - sx^3z - sxz - sxy^2z))$

$W = \frac{\sqrt{\mathbf{K}-1}}{(1+\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2+\mathbf{z}^2)^{\frac{3}{2}}}(x(1+x^2+y^2+z^2), -s(1+x^2+y^2+z^2), z(1+x^2+y^2+z^2), -y(1+x^2+y^2+z^2))$

$W = \frac{\sqrt{\mathbf{K}-1}}{\sqrt{1+\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2+\mathbf{z}^2}}(x, -s, z, -y).$

Logo,

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\sqrt{K-1}}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}(1+y^2+z^2, -sx, -xz, xy)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\sqrt{K-1}}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}(-xy, sy, -yz, -(1+x^2+z^2))$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\sqrt{K-1}}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}(-xz, sz, 1+x^2+y^2, yz).$$

Temos que

$$(x,y,z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}(s,x,y,z)$$

é a parametrização da esfera, logo

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(-sx, 1+y^2+z^2, -xy, -xz)$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(-sy, -xy, 1+x^2+z^2, -yz)$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(-sz, -xz, -yz, 1+x^2+y^2).$$

Portanto:

$\langle \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \rangle + \langle \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{y}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \rangle =$
$\frac{\sqrt{\mathbf{K}-1}}{(1+\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2+\mathbf{z}^2)^2}(-sy(1+y^2+z^2) - sx^2y - xz(1+x^2+z^2) - xy^2z + sx^2y + sy(1+y^2+z^2) + xy^2z + xz(1+x^2+z^2)) = 0.$

$\langle \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \rangle + \langle \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{z}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \rangle =$
$\frac{\sqrt{\mathbf{K}-1}}{(1+\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2+\mathbf{z}^2)^2}(-sz(1+y^2+z^2) - sx^2z + xyz^2 + xy(1+x^2+y^2) + sx^2z + sz(1+y^2+z^2) - xy(1+x^2+y^2) - xyz^2) = 0.$

$\langle \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{y}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \rangle + \langle \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{z}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \rangle =$
$\frac{\sqrt{\mathbf{K}-1}}{(1+\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2+\mathbf{z}^2)^2}(sxyz - sxyz + y^2z^2 - (1+x^2+y^2)(1+x^2+z^2) + sxyz - sxyz + (1+x^2+y^2)(1+x^2+z^2) - y^2z^2) = 0.$

Agora encontraremos a norma de $W$ na métrica $F$.

Tomemos novamnte $\rho := 1+x^2+y^2+z^2$.

Temos que $h_{\mathbf{ij}} = \frac{1}{\mathbf{K}}g_{\mathbf{ij}}$, e pelo exemplo anterior

$$g_{\mathbf{ij}} = \frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix} 1+y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & 1+x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & 1+x^2+y^2 \end{pmatrix}.$$

Como $|W|^2 = h_{\mathbf{ij}}WW^{\mathbf{j}}$, segue que

$$|W|^2 = \frac{K-1}{K}\frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix} -s(1+x^2) & z-sxy & -y-sxz \end{pmatrix}\times$$
$$\begin{pmatrix} 1+y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & 1+x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & 1+x^2+y^2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -s(1+x^2) \\ z-sxy \\ -y-sxz \end{pmatrix}.$$

Sejam

$$\begin{aligned}
A &= -s(1+x^2)(1+y^2+z^2) - xy(z-sxy) + xz(y+sxz) \\
&= -s(1+y^2+z^2+x^2+x^2y^2+x^2z^2) - xyz + sx^2y^2 + xyz + sx^2z^2 \\
&= -s(1+x^2+y^2+z^2) \\
B &= sxy(1+x^2) + (1+x^2+z^2)(z-sxy) + yz(y+sxz) \\
&= sxy + sx^3y + z - sxy - x^2z - sx^3y + z^3 - sxyz^2 + y^2z + sxyz^2 \\
&= z(1+x^2+y^2+z^2) \\
C &= sxz(1+x^2) - yz(z-sxy) - (y+sxz)(1+x^2+y^2) \\
&= sxz + sx^3z - yz^2 - sxy^2z - y - yx^2 - y^3 - sxz - sx^3z - sxy^2 \\
&= -y(1+x^2+y^2+z^2).
\end{aligned}$$

Temos que

$$|W|^2 = \frac{(K-1)}{K}\frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -s(1+x^2) \\ z-sxy \\ -y-sxz \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(K-1)}{K}\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} -s & z & -y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -s(1+x^2) \\ z-sxy \\ -y-sxz \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(K-1)}{K\rho}(s^2(1+x^2)+z^2-sxyz+y^2+sxyz)$$

$$= \frac{(K-1)}{K\rho}(1+x^2+y^2+z^2).$$

Então,

$$|W| = \sqrt{\frac{K-1}{K}}.$$

Encontraremos a métrica de Randers $F = \alpha + \beta$. Primeiro encontraremos o valor de $\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Temos que

$$h_{\mathbf{ij}}W^{\mathbf{j}} = \frac{\sqrt{K-1}}{K\rho^2}\begin{pmatrix} 1+y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & 1+x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & 1+x^2+y^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -s(1+x^2) \\ z-sxy \\ -y-sxz \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{K-1}}{K\rho^2}\begin{pmatrix} -s(1+x^2)(1+y^2+z^2)-xy(z-sxy)+xz(y+sxz) \\ sxy(1+x^2)+(1+x^2+z^2)(z-sxy)+yz(y+sxz) \\ sxz(1+x^2)-yz(z-sxy)-(y+sxz)(1+x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{K-1}}{K\rho^2}\begin{pmatrix} -s(1+y^2+z^2+x^2y^2+x^2z^2)-xyz+sx^2y^2+xyz+sx^2y^2 \\ sxy+sx^3y)+z+x^2z+z^3-sx^3y-sxyz^2+y^2z+sxyz^2 \\ sxz+sx^3z-yz^2-sxy^2z-y-x^2y-y^3-sxy-sx^3y-sxy^2z \end{pmatrix}.$$

Portando,

$$h_{\mathbf{ij}}W^{\mathbf{j}} = \frac{\sqrt{K-1}}{K\rho^2}\begin{pmatrix} -s(1+x^2+y^2+z^2) \\ z(1+x^2+y^2z+z^2) \\ -y(1+x^2+y^2+z^2) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{K-1}}{K\rho^2}\begin{pmatrix} -s \\ z \\ -y \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$b_{\mathsf{i}} = -\frac{h_{\mathsf{ij}}W^{\mathsf{j}}}{1 - h_{\mathsf{ij}}W^{\mathsf{j}}W} = -\frac{\sqrt{K-1}}{}$$

Ou seja

$$\frac{h_{\mathbf{ij}}}{\lambda}y^{\mathbf{i}}y^{\mathbf{j}} = \frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & 1+x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & 1+x^2+y^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Daí

$$\frac{h_{\mathbf{ij}}}{\lambda}y^{\mathbf{i}}y^{\mathbf{j}} = \frac{1}{\rho^2}(u^2(1+y^2+z^2)+v^2(1+x^2+z^2)+w^2(1+x^2+y^2)-2uwxz-2uvxy-2vwyz).$$

A segunda é

$$\frac{W^{\mathbf{i}}}{\lambda}\frac{W^{\mathbf{j}}}{\lambda} = \frac{\sqrt{K-1}}{K\rho}\begin{pmatrix} -s \\ z \\ -y \end{pmatrix}\frac{\sqrt{K-1}}{K\rho}\begin{pmatrix} -s & z & -y \end{pmatrix}.$$

$$\frac{W^{\mathbf{i}}}{\lambda}\frac{W^{\mathbf{j}}}{\lambda}y^{\mathbf{i}}y^{\mathbf{j}} = K^2\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}\frac{\sqrt{K-1}}{K\rho}\begin{pmatrix} -s \\ z \\ -y \end{pmatrix}\frac{\sqrt{K-1}}{K\rho}\begin{pmatrix} -s & z & -y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Daí

$$\frac{W^{\mathbf{i}}}{\lambda}\frac{W^{\mathbf{j}}}{\lambda}y^{\mathbf{i}}y^{\mathbf{j}} = \frac{K-1}{\rho^2}\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s^2 & -sz & sy \\ -sz & z^2 & -yz \\ sy & -yz & y^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

De onde vem que

$$\frac{W^{\mathbf{i}}}{\lambda}\frac{W^{\mathbf{j}}}{\lambda}y^{\mathbf{i}}y^{\mathbf{j}} = \frac{K-1}{\rho^2}(u^2s^2$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\alpha^2(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{(1+\mathbf{y}^2+\mathbf{z}^2)\mathbf{u}^2-2\mathbf{xyuv}-2\mathbf{xzuw}+(1+\mathbf{x}^2+\mathbf{z}^2)\mathbf{v}^2-2\mathbf{yzvw}+(1+\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2)\mathbf{w}^2}{\boldsymbol{\rho}^2} \\
&+\frac{(\mathbf{K}-1)(\mathbf{su}-\mathbf{zv}+\mathbf{yw})^2}{\boldsymbol{\rho}^2} \\
&= \frac{\mathbf{u}^2+\mathbf{u}^2\mathbf{y}^2+\mathbf{u}^2\mathbf{z}^2-2\mathbf{xyuv}-2\mathbf{xzuw}+\mathbf{v}^2+\mathbf{v}^2\mathbf{x}^2+\mathbf{v}^2\mathbf{z}^2-2\mathbf{yzvw}+\mathbf{w}^2+\mathbf{w}^2\mathbf{x}^2+\mathbf{w}^2\mathbf{y}^2}{\boldsymbol{\rho}^2} \\
&+\frac{\mathbf{K}(\mathbf{su}-\mathbf{zv}+\mathbf{yw})^2-(\mathbf{su}-\mathbf{zv}+\mathbf{yw})^2}{\boldsymbol{\rho}^2} \\
&= \frac{\mathbf{u}^2+\mathbf{u}^2\mathbf{y}^2+\mathbf{u}^2\mathbf{z}^2-2\mathbf{xyuv}-2\mathbf{xzuw}+\mathbf{v}^2+\mathbf{v}^2\mathbf{x}^2+\mathbf{v}^2\mathbf{z}^2-2\mathbf{yzvw}+\mathbf{w}^2+\mathbf{w}^2\mathbf{x}^2+\mathbf{w}^2\mathbf{y}^2}{\boldsymbol{\rho}^2} \\
&+\frac{\mathbf{K}(\mathbf{su}-\mathbf{zv}+\mathbf{yw})^2-\mathbf{s}^2\mathbf{u}^2+\mathbf{z}^2\mathbf{v}^2+\mathbf{y}^2\mathbf{w}^2-2\mathbf{suzv}-2\mathbf{zvyw}+2\mathbf{suyw}+2\mathbf{xvsw}-2\mathbf{xvsw}}{\boldsymbol{\rho}^2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{\frac{K(su-zv+yw)^2+(zu+sv-xw)^2+(-xu+xv+sw)^2}{\rho}}.$$

Também podemos verificar que a métrica de Randers $F$ resultante tem curvatura Flag constante $K$, de fato, como vimos no início que $\beta$ é killing e verificando as condições (1) e (2) do Teorema de Yasuda Shimada (Proposição 7), podemos ver que a curvatura flag é $K$.

## 2.2 Curvatura Flag zero

### 2.2.1 Perturbando $\mathbb{R}^3$ por uma translação

Considere a métrica Riemanniana $h$ como sendo a métrica Euclidiana $(\delta_{\mathbf{ij}})$ de $\mathbb{R}^3$. Escolha três constantes $p$, $q$, $r$, satisfazendo $p^2+q^2+r^2<1$. E perturbe $h$ pelo campo de vetores $W=(p,q,r)$.

Temos que $|W| = \sqrt{p^2+q^2+r^2}$, pois a matriz da norma euclidiana na base canônica de $\mathbb{R}^3$ é

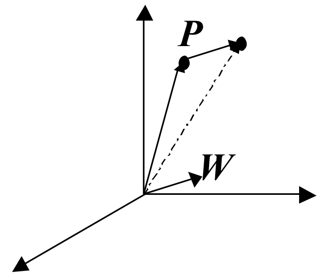


Figura 2.2: *Perturbação por uma Translação*

$$\begin{pmatrix} \delta_{\mathbf{ij}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim temos que

$$|W|^2 = \begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$

Logo,

$|W| = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$.

Vamos agora calcular a métrica de Randers resultante, para isso calcularemos o valor de $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e $\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Primeiramente calcularemos $\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Temos que

$$b_{\mathbf{i}} = \frac{-W_{\mathbf{i}}}{\lambda} = \frac{-h_{\mathbf{ij}} W^{\mathbf{j}}}{1 - h_{\mathbf{ij}} W^{\mathbf{i}} W^{\mathbf{j}}}$$

$$\begin{pmatrix} b_{\mathbf{i}} \end{pmatrix} = -\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}}{1 - (p^2 + q^2 + r^2)}.$$

Logo

$$\begin{pmatrix} b_{\mathbf{i}} \end{pmatrix} = -\frac{\begin{pmatrix} -p \\ -q \\ -r \end{pmatrix}}{1-(p^2+q^2+r^2)}.$$

O que nos dá

$$\beta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = b_{\mathbf{i}}(x)y^{\mathbf{i}} = \frac{1}{1-(p^2+q^2+r^2)}\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -p \\ -q \\ -r \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\beta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{(pu+qv+rw)}{1-(p^2+q^2+r^2)}.$$

Agora vamos obter o valor de $\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Como

$$a_{\mathbf{ij}} = \frac{\delta_{\mathbf{ij}}}{\lambda} + \frac{W_{\mathbf{i}}}{\lambda}\frac{W_{\mathbf{j}}}{\lambda},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\delta}_{ij}}{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1-(p^2+q^2+r^2)}$$

$$\frac{\delta_{\mathbf{ij}}}{\lambda}y^{\mathbf{i}}y^{\mathbf{j}} = \frac{1}{1-(p^2+q^2+r^2)}\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\frac{\delta_{\mathbf{ij}}}{\lambda}y^{\mathbf{i}}y^{\mathbf{j}} = \frac{u^2+v^2+w^2}{1-(p^2+q^2+r^2)}.$$

Segue que

$$\alpha^2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{(u^2+v^2+w^2)}{1-(p^2+q^2+r^2)} + \frac{(pu+qv+rw)^2}{1-(p^2+q^2+r^2))^2}.$$

Portanto,

$$\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\sqrt{(pu+qv+rw)^2+(u^2+v^2+w^2)[1-(p^2+q^2+r^2)]}}{1-(p^2+q^2+r^2)}.$$

Podemos verificar que $F$ é uma métrica de Minkowski, pois não depende do ponto $p=(x,y,z)$.

Vamos mostrar que esta métrica $F$ tem curvatura Flag constante $K=0$.

Para isso vamos usar o Teorema de Yasuda Shimada (Proposição 7), primeiro vamos analisar se $W$ é um campo de Killing.

$W$ é Killing $\Leftrightarrow \langle \nabla_{\mathbf{Y}} W, Z\rangle + \langle \nabla_{\mathbf{Z}} W, Y\rangle = 0$.

Temos que

$$W = (p,q,r)$$

é a perturbação. Assim:

$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{x}} = 0$, $\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{y}} = 0$, $\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{z}} = 0$.

$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = (1,0,0)$, $\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} = (0,1,0)$, $\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} = (0,0,1)$.

Portanto,

$\langle \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\rangle + \langle \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{y}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\rangle = 0$

$\langle \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\rangle + \langle \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{z}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\rangle = 0$

$\langle \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{y}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\rangle + \langle \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{z}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\rangle = 0.$

Agora como vale as condições (1) e (2), pois $b_{\mathbf{i}|\mathbf{j}} = 0$ ($\beta$ é paralelo), do Teorema de Yasuda Shimada (Proposição 7), e como $\alpha$ é flat e $\beta$ é paralelo, então a curvatura flag é $K=0$.

### 2.2.2 Perturbação rotacional de $\mathbb{R}^3$

Como antes $h$ denota a métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^3$. A perturbação do campo é uma rotação infinitesimal $W(x,y,z) := y\partial x - x\partial y + 0\partial z$.

A métrica de Randers obtida pela perturbação de $W$ resolve o seguinte problema:

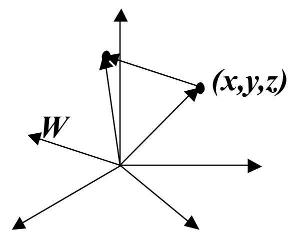


Figura 2.3: *Perturbação rotacional.*

Dado um tanque cilíndrico aberto, cheio de água com um peixe dentro e com duas pás giratórias em movimento, se uma pessoa joga o alimento na superfície do tanque, encontrar a trajetória no qual o peixe consegue chegar a superfície para se alimentar no menor tempo possível.

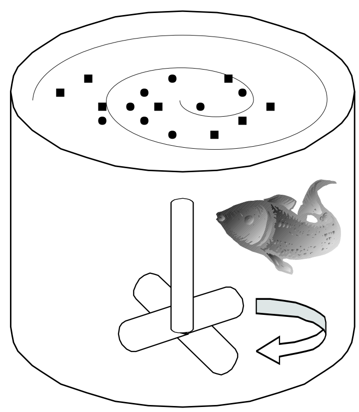

Figura 2.4: *Cilindro com o peixe dentro.*

$F$ é definida em um cilindro aberto $x^2 + y^2 < 1$ em $\mathbb{R}^3$, e tem curvatura Flag constante $K = 0$.

Vamos encontrar a norma de $W$. Temos que $W(x, y, z) = (y, -x, 0)$ e a norma euclidiana é

$$\begin{pmatrix} \delta_{\mathbf{ij}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$|W| = h_{\mathbf{ij}} W^{\mathbf{i}} W^{\mathbf{j}} = \begin{pmatrix} y & -x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $|W| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Agora,

$$b_{\mathbf{i}} = \frac{-W_{\mathbf{i}}}{\lambda} = \frac{-h_{\mathbf{ij}} W^{\mathbf{j}}}{1 - h_{\mathbf{ij}} W^{\mathbf{i}} W^{\mathbf{j}}}.$$

Logo

$$\begin{pmatrix} b_{\mathbf{i}} \end{pmatrix} = -\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}}{1 - (x^2 + y^2)} = \frac{\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}}{1 - x^2 - y^2}.$$

$$\beta(x, y) = \frac{1}{1 - x^2 - y^2} \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-yu + xv}{1 - x^2 - y^2}.$$

Temos que

$$a_{\mathbf{ij}} = \frac{\delta_{\mathbf{ij}}}{\lambda} + \frac{W_{\mathbf{i}}}{\lambda} \frac{W_{\mathbf{j}}}{\lambda}.$$

Logo

$$\left(\ \frac{\boldsymbol{\delta}_{ij}}{\boldsymbol{\lambda}}\ \right) = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{\delta_{\mathbf{ij}}}{\lambda} y^{\mathbf{i}} y^{\mathbf{j}} = \frac{1}{1 - x^2 - y^2} \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\frac{\delta_{\mathbf{ij}}}{\lambda} y^{\mathbf{i}} y^{\mathbf{j}} = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{1 - x^2 - y^2}.$$

E

$$\left(\ \frac{\mathbf{W}_i}{\boldsymbol{\lambda}}\ \right)\left(\ \frac{\mathbf{W}_j}{\boldsymbol{\lambda}}\ \right) = \frac{\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}}{1 - x^2 - y^2} \frac{\begin{pmatrix} y & -x & 0 \end{pmatrix}}{1 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{W_{\mathbf{i}}}{\lambda} \frac{W_{\mathbf{j}}}{\lambda} y^{\mathbf{i}} y^{\mathbf{j}} = \frac{1}{(1 - x^2 - y^2)^2} \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & -x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1 - x^2 - y^2)^2} \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^2 & -xy & 0 \\ -xy & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1 - x^2 - y^2)^2} \begin{pmatrix} uy^2 - xyv & -uxy + vx^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1 - x^2 - y^2)^2} (u^2y^2 - xyuv - uvxy + v^2x^2)$$

$$= \frac{(-yu + xv)^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

Logo,

$$\left(\ a_{\mathsf{ij}}\ \right) = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1-x^2-y^2} + \frac{(-yu+xv)}{(1-x^2-y^2)^2}.$$

Portanto,

$$\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\sqrt{(-yu+xv)^2+(u^2+v^2+w^2)(1-x^2-y^2)}}{1-x^2-y^2}.$$

Mostraremos que $F$ tem curvatura flag constante $K=0$. Para isso usaremos o Teorema de Yasuda Shimada (Proposição 7), primeiramente mostraremos que $W$ é um campo de Killing.

$W$ é Killing $\Leftrightarrow \langle \nabla_{\mathsf{Y}} W, Z\rangle + \langle \nabla_{\mathsf{Z}} W, Y\rangle = 0$.

Temos que

$$W = (y, -x, 0)$$

é a perturbação. Assim:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = (0,-1,0),$$
$$\frac{\partial W}{\partial y} = (1,0,0),$$
$$\frac{\partial W}{\partial z} = (0,0,0).$$
$$\frac{\partial}{\partial x} = (1,0,0),$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = (0,1,0),$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = (0,0,1).$$

Portanto,

$$\langle \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\rangle + \langle \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}\rangle = -1+1=0$$

$$\langle \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle + \langle \frac{\partial W}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \rangle = 0 + 0 = 0$$
$$\langle \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle + \langle \frac{\partial W}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle = 0 + 0 = 0.$$

Agora verificando as condições (1) e (2) do Teorema de Yasuda Shimada (Proposição 7), e verificando que $\alpha$ é flat e $\beta$ é paralelo, então a curvatura flag é $K = 0$.

## 2.3 Curvatura Flag constante negativa

### 2.3.1 Perturbação radial de $\mathbb{R}^3$

Agora, perturbamos a métrica Euclidiana, mas desta vez $M$ é uma bola aberta de raio $R$ em $\mathbb{R}^3$, centralizada na origem. A perturbação do campo de vetores é radial $W(x, y, z) = \tau(x\partial x + y\partial y + z\partial Z)$, onde $\tau$ é uma constante.

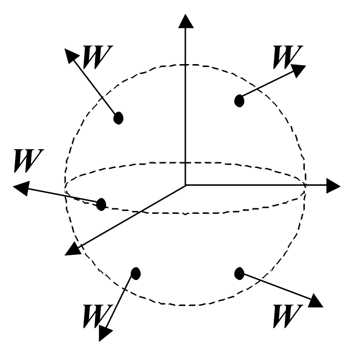


Figura 2.5: *Perturbação radial.*

Imponha a condição $|\tau| \leq \frac{1}{\mathbf{R}}$ para assegurar que $|W| < 1$ em $M$. A métrica de Randers resultante $F$ tem curvatura Flag constante $K = -\frac{1}{4}\tau^2$.

Vamos encontrar a norma de $W$. Temos que $W(x, y, z) = \tau(x, y, z)$ e a norma euclidiana é $\left( \ \delta_{\mathbf{ij}} \ \right)$. Assim,

$$|W| = h_{\mathsf{ij}}W^{\mathsf{i}}W^{\mathsf{j}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau x \\ \tau y \\ \tau z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau x & \tau y & \tau z \end{pmatrix}.$$

Portanto, $|W| = \sqrt{\tau^2(x^2+y^2+z^2)}$.

Agora,

$$b_{\mathsf{i}} = \frac{-W_{\mathsf{i}}}{\lambda} = \frac{-h_{\mathsf{ij}}W^{\mathsf{j}}}{1 - h_{\mathsf{ij}}W^{\mathsf{i}}W^{\mathsf{j}}}.$$

Daí

$$\begin{pmatrix} b_{\mathsf{i}} \end{pmatrix} = -\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau x \\ \tau y \\ \tau z \end{pmatrix}}{1-\tau^2(x^2+y^2+z^2)} = \frac{\begin{pmatrix} \tau x \\ \tau y \\ \tau z \end{pmatrix}}{1-\tau^2(x^2+y^2+z^2)}.$$

Logo,

$$\beta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{\tau}{1-\tau^2(x^2+y^2+z^2)} \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\beta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{-\tau(xu+yv+zw)}{1-\tau^2(x^2+y^2+z^2)}.$$

Temos que

$$a_{\mathsf{ij}} = \frac{\delta_{\mathsf{ij}}}{\lambda} + \frac{W_{\mathsf{i}}}{\lambda}\frac{W_{\mathsf{j}}}{\lambda},$$

logo

$$\begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\delta}_{ij}}{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1-\tau^2(x^2+y^2+z^2)}.$$

Assim

$$\frac{\delta_{\mathbf{ij}}}{\lambda}y^{\mathbf{i}}y^{\mathbf{j}} = \frac{1}{1-\tau^2(x^2+y^2+z^2)}\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Daí

$$\frac{\delta_{\mathbf{ij}}}{\lambda}y^{\mathbf{i}}y^{\mathbf{j}} = \frac{u^2+v^2+w^2}{1-\tau^2(x^2+y^2+z^2)},$$

e

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{W}_i}{\boldsymbol{\lambda}}\frac{\mathbf{W}_j}{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} \tau x & \tau y & \tau z \end{pmatrix}}{1-\tau^2(x^2+y^2+z^2)}\frac{\begin{pmatrix} \tau x \\ \tau y \\ \tau z \end{pmatrix}}{1-\tau^2(x^2+y^2+z^2)}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{W}_i}{\boldsymbol{\lambda}}\frac{\mathbf{W}_j}{\boldsymbol{\lambda}}y^{\mathbf{i}}y^{\mathbf{j}} &= \frac{\boldsymbol{\tau}^2}{(1-\boldsymbol{\tau}^2(\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2+\mathbf{z}^2))^2}\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\
&= \frac{\boldsymbol{\tau}^2}{(1-\boldsymbol{\tau}^2(\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2+\mathbf{z}^2))^2}\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\
&= \frac{\boldsymbol{\tau}^2}{(1-\boldsymbol{\tau}^2(\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2+\mathbf{z}^2))^2}\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2u+xyv+xzw \\ xyu+y^2v+yzw \\ xzu+yzv+z^2w \end{pmatrix} \\
&= \frac{\boldsymbol{\tau}^2}{(1-\boldsymbol{\tau}^2(\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2+\mathbf{z}^2))^2}(x^2u^2+2xyuv+2xzuw+y^2v^2+2yzvw+z^2w^2) \\
&= \frac{\boldsymbol{\tau}^2}{(1-\boldsymbol{\tau}^2(\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2+\mathbf{z}^2))^2}(xu+yv+zw)^2
\end{aligned}.$$

De onde vem que

$$\alpha^2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{u^2+v^2+w^2}{1-\tau^2(x^2+y^2+z^2)} + \frac{\tau^2(xu+yv+zw)^2}{(1-\tau^2(x^2+y^2+z^2))^2}.$$

Portanto,

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\sqrt{\tau^2(xu+yv+zw)^2 + (u^2+v^2+w^2)[1-\tau^2(x^2+y^2+z^2)]}}{1-\tau^2(x^2+y^2+z^2)}.$$

Pode-se verificar que $F$ tem curvatura flag constante $K = -\frac{1}{4}$.

### 2.3.2 Perturbação rotacional do espaço Hiperbólico

Considere a métrica de Klein

$$h_{\mathsf{ij}}(x,y,z) = \frac{(1-x^2-y^2-z^2)\delta_{\mathsf{ij}} + x_{\mathsf{i}}x_{\mathsf{j}}}{(1-x^2-y^2-z^2)^2}$$

em uma bola unitária $\mathbb{B}^3 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1\}$, onde $x_{\mathsf{i}} := \delta_{\mathsf{is}}x^{\mathsf{s}}$.

Perturbando por rotação infinitesimal $W = (y, -x, 0)$.

Encontraremos o valor da métrica de Klein.

$$\begin{aligned}
h_{11} &= \frac{(1-x^2-y^2-z^2)+x^2}{(1-x^2-y^2-z^2)^2} = \frac{1-y^2-z^2}{(1-x^2-y^2-z^2)^2}\\
h_{22} &= \frac{(1-x^2-y^2-z^2)+y^2}{(1-x^2-y^2-z^2)^2} = \frac{1-x^2-z^2}{(1-x^2-y^2-z^2)^2}\\
h_{33} &= \frac{(1-x^2-y^2-z^2)+z^2}{(1-x^2-y^2-z^2)^2} = \frac{1-x^2-y^2}{(1-x^2-y^2-z^2)^2}\\
h_{12} &= \frac{xy}{(1-x^2-y^2-z^2)^2}\\
h_{13} &= \frac{xz}{(1-x^2-y^2-z^2)^2}\\
h_{23} &= \frac{yz}{(1-x^2-y^2-z^2)^2}.
\end{aligned}$$

Daí podemos escrever

$$\left( h_{\mathsf{ij}} \right) = \frac{1}{(1-x^2-y^2-z^2)^2} \begin{pmatrix} 1-y^2-z^2 & xy & xz \\ xy & 1-x^2-z^2 & yz \\ xz & yz & 1-x^2-y^2 \end{pmatrix}.$$

Donde temos $|W|^2 = h_{\mathbf{ij}} W^{\mathbf{i}} W^{\mathbf{j}}$,

logo

1

$|W|^2 =$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}}{1 - x^2 - y^2 - z^2 - y^2 - x^2}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}}{1 - 2x^2 - 2y^2 - z^2}.$$

Assim,

$$\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{1 - 2x^2 - 2y^2 - z^2} \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-yu + xv}{1 - 2x^2 - 2y^2 - z^2}.$$

Agora calcularemos $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Temos que,

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{a_{\mathbf{ij}} y^{\mathbf{i}} y^{\mathbf{j}}} \quad e \quad a_{\mathbf{ij}} = \frac{h_{\mathbf{ij}}}{\lambda} + \frac{W_{\mathbf{i}}}{\lambda} \frac{W_{\mathbf{j}}}{\lambda}.$$

Assim,

$$\frac{h_{\mathbf{ij}}}{\lambda} = \frac{1}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)(1 - 2x^2 - 2y^2 - z^2)} \begin{pmatrix} 1 - y^2 - z^2 & xy & xz \\ xy & 1 - x^2 - z^2 & yz \\ xz & yz & 1 - x^2 - y^2 \end{pmatrix},$$

consideremos $\varphi := 1 - 2x^2 - 2y^2 - z^2$.

Daí

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{h}_{ij}}{\boldsymbol{\lambda}} y^{\mathbf{i}} y^{\mathbf{j}} &= \tfrac{1}{(1-\mathbf{x}^2-\mathbf{y}^2-\mathbf{z}^2)\boldsymbol{\phi}} \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-y^2-z^2 & xy & xz \\ xy & 1-x^2-z^2 & yz \\ xz & yz & 1-x^2-y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{(1-\mathbf{x}^2-\mathbf{y}^2-\mathbf{z}^2)\boldsymbol{\phi}} \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-y^2-z^2)u + xyv + xzw \\ xyu + (1-x^2-z^2)v + yzw \\ xzu + yzv + (1-x^2-y^2)w \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{h}_{ij}}{\boldsymbol{\lambda}} y^{\mathbf{i}} y^{\mathbf{j}} &= \tfrac{1}{(1-\mathbf{x}^2-\mathbf{y}^2-\mathbf{z}^2)\boldsymbol{\phi}}((1-y^2-z^2)u^2 + 2xyuv + 2xzuw + (1-x^2-z^2)v^2 + 2yzvw \\
&\quad +(1-x^2-y^2)w^2)
\end{aligned}$$

$$\frac{W_{\mathbf{i}}}{\lambda}\frac{W_{\mathbf{j}}}{\lambda} = \frac{1}{\varphi}\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\varphi} \begin{pmatrix} y & -x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{W}_i}{\boldsymbol{\lambda}}\frac{\mathbf{W}_j}{\boldsymbol{\lambda}} y^{\mathbf{i}} y^{\mathbf{j}} &= \tfrac{1}{\boldsymbol{\phi}^2} \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & -x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{\boldsymbol{\phi}^2} \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^2 & -xy & 0 \\ -xy & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{\boldsymbol{\phi}^2} \begin{pmatrix} y^2u - xyv & -xyu + x^2v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{W}_i}{\boldsymbol{\lambda}}\frac{\mathbf{W}_j}{\boldsymbol{\lambda}} y^{\mathbf{i}} y^{\mathbf{j}} &= \tfrac{1}{\boldsymbol{\phi}^2}(y^2u^2 - 2xyuv + x^2v^2) \\
&= \tfrac{1}{\boldsymbol{\phi}^2}(yu - xv)^2.
\end{aligned}$$

De onde vem que

$$\begin{aligned}
\alpha^2(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{(1-\mathbf{y}^2-\mathbf{z}^2)\mathbf{u}^2+2\mathbf{xyuv}+(1-\mathbf{x}^2-\mathbf{z}^2)\mathbf{v}^2+2\mathbf{xzuw}+(1-\mathbf{x}^2-\mathbf{y}^2)\mathbf{w}^2+2\mathbf{yzvw}}{(1-\mathbf{x}^2-\mathbf{y}^2-\mathbf{z}^2)\boldsymbol{\phi}} \\
&\quad+\frac{(-\mathbf{yu}+\mathbf{xv})^2}{\boldsymbol{\phi}^2} \\
&= \frac{(1-\mathbf{z}^2)\mathbf{u}^2-\mathbf{y}^2\mathbf{u}^2+2\mathbf{xyuv}+(1-\mathbf{z}^2)\mathbf{v}^2-\mathbf{x}^2\mathbf{v}^2+2\mathbf{zw}(\mathbf{xu}+\mathbf{yv})+(1-\mathbf{x}^2-\mathbf{y}^2)\mathbf{w}^2}{(1-\mathbf{x}^2-\mathbf{y}^2-\mathbf{z}^2)\boldsymbol{\phi}} \\
&\quad+\frac{(-\mathbf{yu}+\mathbf{xv})^2}{\boldsymbol{\phi}^2} \\
&= \frac{(1-2\mathbf{x}^2-2\mathbf{y}^2-\mathbf{z}^2)[(1-\mathbf{z}^2)(\mathbf{u}^2+\mathbf{v}^2)-(\mathbf{yu}-\mathbf{xv})^2+2\mathbf{zw}(\mathbf{xu}+\mathbf{yv})+(1-\mathbf{x}^2-\mathbf{y}^2)\mathbf{w}^2]}{(1-\mathbf{x}^2-\mathbf{y}^2-\mathbf{z}^2)\boldsymbol{\phi}^2} \\
&\quad+\frac{(1-\mathbf{x}^2-\mathbf{y}^2-\mathbf{z}^2)(-\mathbf{yu}+\mathbf{xv})^2}{(1-\mathbf{x}^2-\mathbf{y}^2-\mathbf{z}^2)\boldsymbol{\phi}^2} \\
&= \frac{(1-2\mathbf{x}^2-2\mathbf{y}^2-\mathbf{z}^2)[(1-\mathbf{z}^2)(\mathbf{u}^2+\mathbf{v}^2)+(1-\mathbf{x}^2-\mathbf{y}^2)\mathbf{w}^2+2\mathbf{zw}(\mathbf{xu}+\mathbf{yv})]}{(1-\mathbf{x}^2-\mathbf{y}^2-\mathbf{z}^2)\boldsymbol{\phi}^2} \\
&\quad+\frac{(-\mathbf{yu}+\mathbf{xv})^2(1+2\mathbf{x}^2+2\mathbf{y}^2+\mathbf{z}^2+1-\mathbf{x}^2-\mathbf{y}^2-\mathbf{z}^2)}{(1-\mathbf{x}^2-\mathbf{y}^2-\mathbf{z}^2)\boldsymbol{\phi}^2}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\alpha^2(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{(1-2\mathbf{x}^2-2\mathbf{y}^2-\mathbf{z}^2)[(1-\mathbf{z}^2)(\mathbf{u}^2+\mathbf{v}^2)+(1-\mathbf{x}^2-\mathbf{y}^2)\mathbf{w}^2+2\mathbf{zw}(\mathbf{xu}+\mathbf{yv})]}{(1-\mathbf{x}^2-\mathbf{y}^2-\mathbf{z}^2)\boldsymbol{\phi}^2} \\
&\quad+\frac{(-\mathbf{yu}+\mathbf{xv})^2(\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2)}{(1-\mathbf{x}^2-\mathbf{y}^2-\mathbf{z}^2)\boldsymbol{\phi}^2}.
\end{aligned}$$

Pode-se verificar que $F$ tem curvatura flag constante $K=-1$.

# Conclusão

Estudamos tópicos que em, em geral, não são abordados no curso de graduação. Vimos que métricas de Randers resolvem um problema envolvendo métrica Riemanniana. Estudamos um assunto atual na pesquisa de Geometria mostrando que a métrica de Finsler tem implicações importantes. Fizemos o uso de conceitos e resultados que possibilitam um maior amadurecimento na métrica de Finsler, Randers e sobre curvatura flag constante. Esperamos que o detalhamento dos resultados possam facilitar a leitura de pessoas interessadas no assunto, cumprindo o papel proposto para uma dissertação de mestrado.

# Referências Bibliográficas

[1] Bao, D., Chern, S.S., Shen, Z., *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*, GTM **200** Springer-Verlag,(2000).

[2] Bao, D., Robles, C., Shen, Z., *Zermelo Navegation On Riemannian Manifolds*, J. Differential Geometry, **66**, (2004) $377 - 435$.

[3] do Carmo, M.P., *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice Hall.

[4] do Carmo, M.P., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides.

[5] Yasuda, H., Shimada, H., *On Randers spaces of scalar curvature*, Rep. on Math. Phys. **11** (1977), 347-360.

[6] Shen, Z., *Lectures on Finsler Geometry*, Department of Mathematical Sciences.

[7] Lima, E.L., *Análise no Espaço Rn*, Projeto Euclides.

[8] Lima, E.L., *Variedades Diferenciáveis*, Projeto Euclides.

[9] Robles, C., *Geodesics in Randers Spaces of Constants Curvature*, Department of Mathematical, Universit of Rochester.