

MODELO HIDRODINÂMICO PARA PLANÍCIES  
DE INUNDAÇÃO DA REGIÃO AMAZÔNICA

Blenda Araújo Saraiva

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS  
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM  
ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

---

Prof. Luiz Landau, D.Sc.

---

Prof. Audalio Rebelo Torres Jr., D.Sc.

---

Prof. Bruce Rider Forsberg, Ph.D.

---

Prof. Fernando Pellon de Miranda, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JULHO DE 2007

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

SARAIVA, BLEND A ARAÚJO

Modelo Hidrodinâmico para Planície  
de Inundação da Região Amazônica [Rio  
de Janeiro] 2007

XIV, 126 p., 29,7 cm (COPPE /  
UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 2007)

Dissertação – Universidade Federal  
do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Equações Governantes
2. Modelagem Hidrodinâmica
3. Planície de Inundação
4. Região Amazônia

I. COPPE/UFRJ      II. Título (série)

**Dedico este trabalho em especial à minha família com a qual compartilho esta incomensurável graça como forma de compensação pelos momentos que deixei de estar com ela para poder concluir esta tarefa, e à vida, que Deus Bem-aventurado, em Sua infinita e pura bondade, nos concedeu.**

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço Àquele a quem atribuo toda a responsabilidade por este feito em minha vida, DEUS, pois, além de outros atributos, Ele é a verdade e como tal toda e qualquer forma de conhecimento, inclusive a revelada a partir do uso exclusivo da razão mediante a inteligência humana, dirigida à pesquisa das causas, procede Dele.

Ao Professor Luiz Landau, meu orientador, não só pelo conhecimento que transmitiu, mas pelo amigo que pude contar em todos os momentos. Obrigada pela tranquilidade, confiança e dedicação imprescindíveis.

Ao Professor Audalio Rebelo, pelas suas orientações, apoio, dedicação constante, e ensinamentos além da confiança depositada em mim ao assumir incondicionalmente a responsabilidade para a realização deste trabalho.

Ao Projeto Piatam e seus membros pelo incentivo dado para o ingresso no curso de mestrado da COPPE assim como pela colaboração para viabilizar a validação do modelo a ser aplicado no rio Solimões, âmbito do projeto, além do apoio financeiro fornecido para a realização do mestrado.

Aos membros da banca pelos comentários que ajudaram a enriquecer este trabalho.

Aos professores e funcionários do Programa de Engenharia Civil e em particular aos Laboratórios LAMCE e CBRR, pelo suporte técnico disponibilizado para o desenvolvimento da dissertação. Aproveito para destacar os funcionários Rita, Jairo e Raul da secretaria do Programa que sempre me auxiliaram na resolução de problemas técnicos e administrativos.

Foram muitas as pessoas que estiveram ao meu lado nessa conquista, mas algumas foram fundamentais. Agradeço ao Fábio Lima que, por diversas vezes, dispôs do seu tempo para transmitir experiências e conhecimentos importantes inerentes à programação computacional das formulações desenvolvidas neste trabalho.

À amicíssima Hatsue, também da UFRJ, que foi fundamental no desenvolvimento desta dissertação, sempre acompanhando com aquele otimismo, serenidade e senso crítico que lhe são peculiares, mostrando, todavia, o seu grande espírito solidário nos momentos em que me defrontei com os desafios de ordem computacional, matemática e pessoal.

Aos amigos, conterrâneos e contemporâneos, que assim como eu, vieram ao Rio de Janeiro com o objetivo de ampliar seus conhecimentos e sempre se mostraram dispostos a ajudar uns aos outros.

Meu agradecimento especial ao Árlu, meu noivo, não só por compreender a necessidade que tive de tomar parte do tempo que deveria me dedicar a nós, em virtude deste trabalho, mas também pela relevância que têm em todos os aspectos da minha vida.

Especialmente também agradeço à amiga Daniela e sua família, Almir e Tamires, principalmente pela amizade, apoio e companheirismo que deram neste momento no aconchego de um lar.

Aos meus pais Ruth e Gilbey por terem me proporcionado a oportunidade de estudar, me ensinando o valor do conhecimento para o crescimento pessoal e serem juntos com minhas irmãs Blaise e Bruna, os maiores incentivadores não só durante a realização deste trabalho, mas também ao longo de toda minha vida.

E por fim, agradeço a todos aqueles que de alguma forma, por menor que tenha sido, contribuíram para a conclusão de mais esta etapa de minha carreira acadêmica.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

MODELO HIDRODINÂMICO PARA PLANÍCIE  
DE INUNDAÇÃO DA REGIÃO AMAZÔNICA

Blenda Araújo Saraiva

Julho / 2007

Orientador: Luiz Landau

Programa: Engenharia Civil

Neste trabalho é apresentada uma nova metodologia para um modelo hidrodinâmico, matemático, numérico e computacional de simulação espaço/temporal, voltada à aplicação no estudo dos efeitos da dinâmica do nível d'água em áreas inundáveis na região Amazônica.

Para isto, foram utilizadas as equações de Navier-Stokes e da continuidade numa forma bidimensional no espaço com hipóteses de incompressibilidade do fluido e aproximação hidrostática. Este conjunto de equações se tornou distinto por ser deduzido com base num sistema inclinado relativo a um nível de referência, para melhor representar a variação do fluxo na calha e na planície de inundação. Dessa forma pode-se modelar flutuações do nível d'água, em diferentes escalas de frequência (segundos até meses).

Portanto com essa dedução foi obtido um modelo robusto, consistente que resolve escoamentos que possam vir a ocorrer no meio físico natural Amazônico em qualquer domínio e em diferentes escalas temporais.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

HYDRODINAMIC MODEL FOR FLOODPLAIN  
IN THE AMAZON REGION

Blenda Araújo Saraiva.

July / 2007

Advisor: Luiz Landau.

Department: Civil Engineering

Hereby a new methodology for a model hydrodynamic, mathematical, numerical and computational is presented for space/time simulation, directed to the application in the study of the effect of the water level dynamics in Amazon rivers and floodplains.

The continuity and Navier-Stokes equations in a two-dimensional in space with incompressibility and hydrostatic hypotheses were applied. This new set of equations were deduced based on an inclined system relative to a reference level, better to represent the variation of the flow in the channel and in the floodplain. With this equations we can model diverse frequency scales (seconds to months) of water level fluctuations.

Therefore a robust, consistent model was obtained that solves flows in the Amazonian natural environment in any domain and different time scales.



## ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	01
1.1 Justificativa	04
1.2 Objetivos e Contribuições	08
1.3 Resultados Esperados	08
1.4 Organização do Texto	09
2. METODOLOGIA	11
2.1 Área de Estudo	11
2.2 O Modelo	13
2.3 Solução do Modelo	16
3. MODELO HIDRODINÂMICO	18
3.1 Leis Físicas do escoamento	18
3.2 Propriedades Gerais	20
3.2.1 Operador Derivada Material	20
3.2.2 Principais Propriedades de um Fluido	22
3.2.3 Principais Propriedades Transversais do Canal	23
3.2.4 Propriedades Longitudinais do Canal	26
3.3 Equações Governantes	29
3.3.1 Equação da Continuidade e da Quantidade de Movimento	30
3.3.2 Equações Promediadas no Tempo	32
3.4. Integração na Vertical das Equações	35

3.4.1 Referencial Plano Horizontal	37
3.4.1.1 Integração na Vertical da Equação da Continuidade	40
3.4.1.2 Integração na Vertical das Equações Dinâmicas	44
3.4.2 Referencial Plano Inclinado	54
3.4.3 Análise de Escalas dos Termos das Equações	65
4. MÉTODO NUMÉRICO	79
4.1 Método das Diferenças Finitas	80
4.2 Discretização das Equações pelo MDF	80
4.2.1 Discretização da Equação da Continuidade	81
4.2.2 Discretização da Equação de Movimento nas direções x e y	83
4.3 Solução do Sistema de Equações	84
4.4 Condições Iniciais	86
4.5 Condições de Contorno	87
4.6 Procedimento de Solução	88
5. RESULTADOS E DISCUSSAO	91
6. CONCLUSÕES	95
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	98
APÊNDICE A	103
APÊNDICE B	108
APÊNDICE C	116

## INDICE DE FIGURAS

### CAPITULO 1

### CAPITULO 2

- Figura 2. 1** – Localização da área de estudo. (Adaptado de MIRANDA *et al.*, 2005 e site <http://www.cdbrasil.cnpm.embrapa.br/>) 12
- Figura 2. 2** - Esquema do processo de perda lateral do volume de água do rio para a planície de inundação (Fonte: adaptado de FORSBURG, 2005) 13
- Figura 2. 3** - Esquema das propriedades da seção transversal de um canal 14

### CAPITULO 3

- Figura 3. 1** - Esquema das propriedades da seção transversal do canal sob forma de cotas 23
- Figura 3. 2** - Representação longitudinal do canal na forma de cotas 26
- Figura 3. 3** - Indicação do plano de referência e das variáveis do canal 36
- Figura 3. 4** - Esquema longitudinal de cotas do canal para o modelo bidimensional 41
- Figura 3. 5** - Representação da superfície livre com elevação e topografia 47
- Figura 3. 6** - Representação das forças atuantes no volume de controle em um referencial com inclinação nas direções x e y 55
- Figura 3. 7** - Representação do plano referencial com inclinação 57
- Figura 3. 8** - Esquema com superfície livre de escoamento com elevação  $\eta(x, y, t)$  e  $h_L(x, y)$ , medida da altura da topografia do fundo do canal em um referencial com inclinação 59

### CAPITULO 4

- Figura 4. 1** - Discretização do domínio ( espaço i,j) no tempo 85
- Figura 4. 2** - Esquematização da malha numérica com localização das variáveis no espaço (Fonte: Adaptado de Paz, 2003) 85
- Figura 4. 3** – Evolução da onda forçada gerada na seção transversal do canal. 90

## INDICE DE TABELAS

<b>Tabela 1</b> – Análise dimensional dos termos das equações para o canal	70
<b>Tabela 2</b> – Análise dimensional dos termos das equações para a planície inundada	71
<b>Tabela 3</b> – Análise dimensional dos termos das equações para um canal sem inclinação	73
<b>Tabela 4</b> – Análise dimensional dos termos das equações para o modelo do BATES	74

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A_m$	Área molhada
$B$	Largura superficial do canal
$C_d$	Coefficiente de arrasto
$C_h$	Coefficiente de Chézy
$c$	Celeridade
$D / Dt$	Derivada material
$E_l$	Energia dissipada pelo atrito com o leito
$F$	Força
$f_c$	Parâmetro de Coriolis
$g$	Gravidade
$H$	Profundidade média
$H_s$	Cota da superfície livre
$h$	Profundidade do escoamento
$h_L$	Cota do fundo ou do leito
$h_m$	Profundidade vertical do leito do rio até a profundidade média
$h_p$	Profundidade total da calha principal do canal a partir de um RN
$K$	Módulo de elasticidade volumétrica
$\kappa$	Constante de Von Kármán
$L$	Comprimento longitudinal do canal
$\vec{M}_v$	Quantidade de movimento
$m$	Massa
$n_m$	Coefficiente de rugosidade de Manning
$\vec{n}$	Vetor normal
$O$	Ordem de grandeza
$p$	Pressão
$\bar{p}$	Média temporal da componente da pressão.

$P_m$	Perímetro molhado
$p_s$	Pressão na superfície
$p_f$	Pressão no fundo
$qs_i$	Variável de elevação da superfície no tempo presente.
$R_H$	Raio hidráulico
RN	Nível de Referência
$S_0$	Declividade do leito ou fundo do canal
$\bar{S}_0$	Declividade média do leito do canal
$sc$	Superfície de controle
$S_f$	Declividade da perda de carga
$t$	Tempo
$u$	Componente horizontal da velocidade na direção x
$\bar{u}$	Média temporal da componente da velocidade $\bar{u}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$
$u_b$ e $u_f$	Velocidade na direção x no tempo anterior e futuro, respectivamente.
$u', v', w'$	Flutuações turbulentas das velocidades
$\vec{v} = (u, v, w)$	Vetor velocidade com componentes cartesianas $u, v, w$ .
$v$	Componente horizontal da velocidade na direção y
$v_b$ e $v_f$	Velocidade na direção y no tempo anterior e futuro, respectivamente.
$vc$	Volume de controle
$w$	Componente vertical da velocidade na direção z
$x$	Coordenada cartesiana horizontal
$y$	Coordenada cartesiana horizontal
$z$	Coordenada cartesiana vertical
$\alpha_x$	Ângulo de inclinação na direção x
$\alpha_y$	Ângulo de inclinação na direção y
$\alpha_z$	Ângulo de inclinação na direção z
$\gamma$	Peso específico da água
$\delta S$	Elemento infinitesimal de superfície
$\delta V$	Elemento infinitesimal de volume
$\delta t$	Infinitésimo de tempo

$\Delta$	Operador de Laplace
$ \nabla S $	Módulo da superfície
$\Delta t$	Intervalo de tempo
$\nabla$	Operador Nabla
$\varepsilon_t$	Viscosidade turbulenta
$\zeta$	Representa a variação do fluxo em qualquer escala de frequência.
$\eta$	Elevação da superfície livre a partir da elevação vertical média $H$
$\mu$	Coefficiente de viscosidade cinemática do fluido
$\nu$	Coefficiente de viscosidade dinâmica
$\nu_c$	Número de Courant
$\nu t$	Coefficiente de viscosidade turbulenta
$\rho$	Densidade ou massa específica do fluido
$\rho_{ar}$	Densidade ou massa específica do ar
$\tau$	Tensão de cisalhamento
$\tau_f$	Tensão tangencial no leito
$\tau_{V_x}^s$	Tensão na superfície livre na direção x
$\tau_{V_x}^f$	Tensão no fundo na direção x
$\Phi$	Latitude
$\chi$	Propriedade qualquer de um fluido por unidade de massa
$\omega_x$	Velocidade do vento na direção x
$\omega_y$	Velocidade do vento na direção y
$\Omega$	Velocidade angular de rotação da Terra
$\partial/\partial t$	Taxa de variação temporal
$\partial/\partial x$	Taxa de variação espacial na direção x

### *Índices*

$i, j$	Localização dos pontos da malha nas direções $x$ e $y$ respectivamente
$n$	Passo de tempo

## 1. INTRODUÇÃO

As questões ambientais estão entre as mais importantes com as quais tomadores de decisão se deparam atualmente. Os sistemas ambientais mostram-se fortemente inter-relacionados, dinamicamente e espacialmente. Desse modo, impactos ambientais em um determinado ponto geográfico têm, geralmente, efeito sobre outras posições geográficas. Para facilitar o monitoramento dos efeitos destes impactos, são propostos e implementados modelos matemáticos para melhor descrição da estrutura e dinâmica dos sistemas. Estes, aplicados aos processos do meio físico natural, espacialmente contínuos e com variações temporais, juntamente com tecnologias e ferramentas computacionais, têm alcançado considerável progresso no seu uso como ferramenta acessória, num esforço de se chegar a um melhor entendimento de processos ecológicos, dando assim base ao gerenciamento ambiental. Dentro dessa linha de estudo, a modelagem computacional tem sido utilizada com o objetivo de melhor representar a intrincada estrutura e dinâmica dos sistemas ambientais, assim como integrar e simular tais processos ambientais. Visa fornecer um conhecimento básico que poderá ser utilizado como parte de um sistema preditivo, tornando possível prever eventos, com certa segurança, e com base em princípios físicos. Atualmente, as pesquisas nesta área do conhecimento são voltadas, para a busca por modelos ambientais, isto é, modelos espaciais dinâmicos e temporais que permitam avaliações integradas sobre mudanças ocorridas no planeta, que combinem fatores econômicos, ecológicos, demográficos, hidrológicos e climáticos.

No Brasil, o número de grupos de pesquisa em meio ambiente e preservação da qualidade de vida do ponto de vista da modelagem computacional vem crescendo continuamente. Neste país, uma atenção é voltada para a região da Amazônia Legal, a qual consiste numa área que engloba vários estados brasileiros pertencentes à bacia amazônica, e ocupa, segundo o IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, disponível no dia 30/01/2007 em [http://www.ibge.gov.br/home/presidencia/noticias/noticia\\_visualiza.php?id\\_noticia=799](http://www.ibge.gov.br/home/presidencia/noticias/noticia_visualiza.php?id_noticia=799)), 59% da superfície do país, concentrando a maior biodiversidade do planeta, abrigando, de acordo com o Ministério da Educação (disponível no dia 30/01/2007 em <http://portal.mec.gov.br/sesu/index.php?option=content&task=view&id=653&Itemid=>



300>) cerca de 20% de seus recursos hídricos. Nesta região, o acelerado processo de ocupação dos ecossistemas inundáveis tem aumentado nas últimas décadas, sendo uma das causas o aumento da demanda por terras agricultáveis. Os ecossistemas inundáveis amazônicos, também denominados de região de várzea, são bastante diversos e incluem as unidades de paisagem temporária ou permanentemente inundáveis. As características biogeoquímicas da água, o tempo de permanência, e o regime hidrológico controlam, em grande parte, a produtividade e a biodiversidade desses diferentes tipos de ambientes inundáveis, e seu funcionamento é até agora pouco estudado (JUNK, 1989). Dado a importância destes sistemas fluviais tão complexos, são de grande relevância os estudos para a elaboração de modelos que melhor representem os processos dessa região de várzea, onde a circulação da água é comandada pelo “pulso de inundação” do rio, cíclico e, segundo FORSBERG *et al.* (1988), contribui para a alteração do funcionamento deste ambiente por onde estas águas circulam.

A palavra modelo possui muitas nuances em seu significado. De modo geral, pode ser compreendido como sendo “qualquer representação simplificada da realidade” ou de algum aspecto do mundo real que surja como de interesse para estudo, que possibilite reconstruir a realidade, prever um comportamento, uma transformação ou uma evolução. A definição apresentada por HAGGETT e CHORLEY (1967) ainda permanece como sendo mais adequada, assinalando que “modelo é uma estruturação simplificada da realidade que supostamente apresenta, de forma generalizada, características ou relações importantes. Os modelos são aproximações altamente subjetivas, por não incluírem todas as observações ou medidas associadas, mas são valiosos por obscurecerem detalhes acidentais e por permitirem o aparecimento dos aspectos fundamentais da realidade”. Nesse procedimento de transposição e elaboração de um esquema representativo, deve-se salientar que não é a realidade em si que se encontra representada, mas sim a nossa visão e a maneira de como se percebe e compreende-se essa realidade (CHRISTOFOLETTI, 1999).

Nos últimos anos, a sociedade brasileira vem assistindo a um grande número de ocorrências de acidentes ambientais, o que tem tornado as ações contra as agressões ao meio ambiente muito mais criteriosas. Neste novo contexto, os acidentes ambientais devem ser cuidadosamente diagnosticados e avaliados quanto aos impactos, através de estudos de natureza geoquímica, geofísica e da modelagem de fluxo e transporte de contaminantes em solos e águas subterrâneas, procurando descortinar medidas mitigadoras e alternativas para a correta implementação dessas ações junto aos órgãos

ambientais. Em busca de maior compreensão, avaliação e gerenciamento desses sistemas complexos qualificando assim os seus serviços, empresas como a Petrobras vem realizando parcerias para desenvolver pesquisa na área de modelagem, dado a importância da utilização desta técnica para melhor diagnose, previsão, controle e planejamento do uso adequado dos ambientes brasileiros.

Assim, projetos como o “Monitoramento das Áreas de Atuação da Petrobras: Potenciais Impactos e Riscos Ambientais da Indústria do Petróleo e Gás no Amazonas – Piatam” recebem financiamento e apoio da Petrobras e FINEP. O Projeto Piatam foi criado no ano de 2000 como um projeto de pesquisa da Universidade Federal do Amazonas – UFAM. Reúne cientistas e técnicos das maiores instituições de ensino e pesquisa do Estado do Amazonas, bem como pesquisadores do Centro de Pesquisa e Desenvolvimento da Petrobras (CENPES) e da Coordenação dos Programas de Pós-graduação de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro (COPPE/UFRJ), além de instituições norte-americanas como a “Washington and Lee University”, ver página web <[www.piatam.ufam.edu.br](http://www.piatam.ufam.edu.br)>. Constitui-se em uma rede de instituições que atua para gerar informações científicas de alta qualidade no campo das ciências naturais, ciências sociais aplicadas, modelagem ambiental, nanotecnologia, robótica e biologia molecular. Com isso, o Projeto vem se expandindo e ampliando suas relações institucionais e áreas de atuação, visando buscar a promoção do desenvolvimento sustentável na Amazônia. É um projeto multidisciplinar de pesquisa sócio-ambiental. Tem por objetivo, estruturar e disponibilizar informações sobre a produção, transporte e refino de petróleo e gás no Estado do Amazonas, em especial no eixo ao longo do Rio Solimões entre Coari e Manaus, por meio do monitoramento e da avaliação de riscos ambientais dessas atividades, visando à redução de danos ao ambiente e às populações urbanas, provocados por eventuais acidentes com petróleo, gás natural e derivados. O principal objetivo da área de Modelagem deste Projeto é prever a dinâmica das águas e de possíveis manchas de óleo decorrentes de derramamentos e a sensibilidade ambiental de habitats aquáticos no sistema fluvial entre Coari e Manaus.

Considerando os objetivos do projeto Piatam, o modelo a ser construído neste trabalho teve, como motivação inicial, um modelo hidrodinâmico bidimensional projetado especificamente para simular o fluxo durante a cheia em planícies de inundação denominado LISFLOOD-FP. Uma completa descrição deste modelo é encontrada em BATES e DE ROO (2000) e HUNTER *et al.* (2005). O Modelo pertence à categoria “preditivos”, ou seja, que prevêem a sua evolução quando se modificam

condições de contorno e iniciais e valores das variáveis de seus elementos e das relações (CHRISTOFOLETTI, 1999). A aproximação deste modelo não é nova no conceito e um método similar foi proposto primeiramente por CUNGE *et al.* (1980).

Em tais modelos, a planície é representada por uma seção composta junto com a calha principal do rio e se considera a existência de dinâmica do escoamento na planície acompanhando o canal. Este tipo de representação apresenta problemas principalmente para a região amazônica, já que o fluxo da planície segue caminhos que não são paralelos ao leito principal, com velocidades baixas e uma topografia complexa com profundidades rasas. Além disso, a extensão da largura da planície inundada é muito maior do que a do canal e a existência de vegetação alta e baixa bastante intrincadas altera os coeficientes de parametrização relevantes para o modelo. Será visto neste trabalho que, em se tratando de Amazônia, os termos das equações para planície inundada sofrem grande variação na análise de escalas em comparação com os termos para o fluxo do canal. Assim, é importante diferenciar o escoamento que ocorre ao longo da calha do rio (canal principal) e aquele da planície de inundação. Este último constitui um processo muito mais complexo e mais difícil de descrever completamente do que o escoamento no canal (CUNGE *et al.*, 1980).

### ***1.1 - Justificativa***

A avaliação de atividades antrópicas como exploração de água de mananciais, aporte de cargas poluentes, uso e ocupação da terra e estruturas que interceptam o curso do rio, entre outras, envolve os impactos ambientais sobre todo o ecossistema. Esta avaliação está submetida às ações humanas que têm um impacto significativo sobre as mudanças climáticas. A previsão dos impactos dentro dos cenários potenciais atuais e de alterações climáticas necessita de modelos que tentem de forma adequada melhor representar a complexa estrutura e dinâmica dos sistemas ambientais. O sistema hidrológico é fundamental para a manutenção e o funcionamento dos ecossistemas amazônicos, portanto sua modelação é imprescindível para o conhecimento e representação dos processos ocorridos nos mesmos. O estudo e compreensão dos fenômenos que provocam uma cheia, por exemplo, é fundamental para a segurança das populações e dos bens existentes em zonas ciclicamente inundáveis. Estes locais são

preferenciais para a fixação de população, tanto pela via de comunicação fluvial, como pela fertilidade dos solos aluvionares.

O ciclo hidrológico envolve fenômenos complexos cuja modelação matemática exata se torna impossível, devido à própria natureza dos fenômenos e à dificuldade na aquisição de dados. Assim, no âmbito desta dissertação de mestrado, desenvolveu-se um conjunto de equações para um modelo matemático computacional aplicado a escoamentos em cursos de água naturais, para estudo dos efeitos da cheia em áreas inundáveis de rios da região Amazônica.

Prever o comportamento do sistema hidrológico requer descrever seu funcionamento, com capacidade de reproduzi-lo de forma satisfatória conforme os objetivos do estudo, considerando-o sob determinadas condições iniciais e de contorno e hipóteses adotadas devido à característica da região, por exemplo, a Amazônica. Assim, aplicamos a modelagem matemática que vem sendo empregada há décadas, procurando representar o escoamento da água através de equações derivadas da mecânica dos fluidos (CUNGE *et al.*, 1980; CHOW, 1959). Simplificações na representação matemática são adotadas conforme a disponibilidade de dados, os objetivos do estudo, as características do sistema e a disponibilidade de recursos computacionais, de tempo e de material humano. Apesar das dificuldades na representação matemática de alguns processos físicos e da necessidade da discretização de processos contínuos, os modelos matemáticos têm a vantagem de permitir a geração de resultados para diferentes situações com alta velocidade de resposta (TUCCI, 1998).

A representação da dinâmica do fluxo em rios com grande planície de inundação é fundamental para avaliação de riscos, transporte de poluentes, transporte de sedimentos, estudos hidrogeológicos, previsão de vazões em tempo real, impacto de mudanças de uso e ocupação da terra e de impacto de modificações climáticas. Segundo JUNK *et al.* (1989), as planícies de inundação são áreas que recebem periodicamente o aporte das águas de rios, lagos, da precipitação direta ou de lençóis subterrâneos. A planície de inundação geralmente desempenha o papel de armazenar volume de água durante a propagação do escoamento, com lentas trocas de água entre uma parte da planície e outra (CUNGE *et al.*, 1980).

Para grande parte dos estudos envolvendo a modelagem do escoamento em rios, uma simples representação da planície constitui uma aproximação satisfatória – por exemplo, adoção de seções transversais compostas representando o canal e a planície, com coeficientes de rugosidade distintos. Contudo, dependendo do sistema modelado e

do propósito do estudo, é de fundamental importância uma representação melhor do processo de troca de volume entre o rio e a planície e do escoamento na planície. As cheias de um rio de grandes proporções como o Solimões são caracterizadas pela passagem de volumes mais significativos ocorrendo importantes perdas de volume de água em extensas planícies de inundação durante a passagem.

Considerando o balanço hidrológico no Rio Solimões, as zonas de inundação têm um papel de armazenamento temporário ou permanente do fluxo, onde tal volume pode ficar armazenado na planície e não retornar ao fluxo principal do rio dependendo da topografia da planície, ou retornar parcialmente com a passagem de uma nova onda de cheia. Esse pressuposto pode ser aceito em algumas circunstâncias, mas via de regra a topografia da várzea, como exemplo a da região amazônica, é complexa. Vale ressaltar também que esta topografia é fundamental para a circulação da água, sendo ao mesmo tempo fator condicionado por e condicionante dessa dinâmica (BARBOSA, 2005).

Os primeiros modelos representaram a planície apenas considerando efeitos de armazenamento no escoamento, sem levar em conta as trocas de quantidade de movimento (CHOW, 1959). Incorporando a equação de quantidade de movimento, foram aplicados os modelos de onda cinemática, de difusão e hidrodinâmico, os quais se diferenciam entre si quanto aos termos considerados ou desprezados na referida equação (TUCCI, 1998). Atualmente, modelos como o do BATES and DE ROO (2000) e HORRITT and BATES (2002) têm utilizado a metodologia de aplicar esses modelos de onda cinemática e de difusão para avaliar a potencialidades de seus modelos. Outras tentativas de modelar estas áreas foram realizadas, como o uso de rede de canais ou o uso de células de discretização na planície, apresentando melhores resultados práticos, pois respeitam as configurações físicas dos leitos (CUNGE *et al.*, 1980).

Nos últimos anos, modelos bidimensionais no espaço têm sido utilizados, mas com sucesso limitado devido à grande variabilidade das características físicas da área de estudo, em contraste à escassez de dados. Tais questões, aliadas ao grande esforço de preparação e simulação e aos problemas numéricos, dificultam a aplicação de modelos hidrodinâmicos bidimensionais para simular rios com grandes planícies de inundação (CUNGE *et al.*, 1980). Portanto, também na região amazônica, a maior dificuldade dos modelos para planícies inundáveis na realidade é resultante da falta de informações para uma discretização adequada dos processos envolvidos, e formalização matemática em relação à grande variabilidade física dos sistemas ambientais desta área.

Buscou-se com o modelo a ser apresentado levantar informações de caráter relevante para o melhor entendimento da evolução dos processos em cenários de áreas alagáveis da região amazônica, a fim de contribuir com diretrizes para um melhor gerenciamento desses ambientes.

Trata-se de tarefa complexa, especialmente na Amazônia, onde pouco se conhece sobre a resposta da floresta a fatores exógenos, antrópicos ou naturais. Segundo GOURLEY *et al.* (2001), o trabalho requer a elaboração de modelos matemáticos sofisticados e recursos computacionais de grande porte, com representações espaço-temporal.

Assim, este trabalho inseriu-se nos objetivos previstos pelo Projeto Piatam, o que futuramente permitirá uma aplicação melhor deste modelo para observação e controle das alterações da área devido ao acesso ao banco de dados. A modelagem matemática e hidrodinâmica do rio Solimões na região amazônica, assim como o estudo dos seus processos ambientais, fazem parte dos objetivos do citado projeto e, portanto, este trabalho pode contribuir para o alcance de suas metas. A área de estudo, escolhida para aplicar este modelo, constitui-se em uma das maiores extensões sujeita à mesma intensidade dos processos atuantes nos demais segmentos da planície fluvial.

Fica evidente a importância deste modelo, visto como um sistema de gestão e simulação de dados, voltado primordialmente para o levantamento e o monitoramento de recursos naturais e de alterações ambientais. Seu uso será fundamental, principalmente em extensas áreas florestadas de difícil acesso e reconhecida insalubridade, como é o caso dos frágeis e diversificados ecossistemas que compõem a Amazônia brasileira, vitimados nas últimas décadas por um rápido, descontrolado e predatório processo de ocupação. Estudos como o proposto são fundamentais para conservação, gerenciamento e análise de possíveis impactos futuros na região amazônica.

A extrema relevância deste modelo evidencia também a necessidade de seu contínuo desenvolvimento, a fim de alcançar resultados ainda mais precisos, com tempo computacional mais reduzido. Isso mostra que a modelação matemática e a simulação computacional tornaram-se atualmente uma parte integral do processo de tomada de decisão.

## ***1.2 - Objetivos e Contribuições***

O objetivo geral do trabalho foi desenvolver uma nova metodologia para representar a propagação do escoamento em rios com extensas planícies de inundação, onde ocorrem significativas trocas de volume entre o rio e a planície, como exemplo a da região amazônica. Metodologia esta diferenciada de qualquer outra aplicada na hidráulica, por se basear em um referencial num plano inclinado para melhor representar as variáveis sazonais da região.

Objetivo e contribuição, específicos:

- Modelar os processos hidrodinâmicos das inundações, propondo o desenvolvimento de um conjunto de equações para um modelo hidrodinâmico, matemático e computacional que represente a característica sazonal da região amazônica o mais realisticamente possível. Visando sua aplicação futura para avaliar a potencialidade do modelo na geração de informações.

## ***1.3 - Resultados esperados***

Com o desenvolvimento de uma nova formulação matemática e hidrodinâmica voltada para a região amazônica, através das hipóteses adotadas visando uma melhor representação em razão das características peculiares e dos processos que nela ocorrem, espera-se poder representar satisfatoriamente seu comportamento hidrodinâmico, fornecendo subsídios valiosos que auxiliem na melhor compreensão desses ambientes

Através do desenvolvimento futuro do sistema computacional, para análise e simulação do comportamento de fluxos hídricos na escala temporal sazonal dessas planícies inundadas, espera-se ainda, poder quantificar e avaliar se a sua parametrização e simplificação adequou-se o suficiente para ser utilizada na região amazônica.

#### *1.4 – Organização do Texto*

Com o intuito de tornar a apresentação, mais direcionada e objetiva, desta dissertação, organizou-a em 6 capítulos, além do capítulo referente às referências bibliográficas, descritos brevemente a seguir. Tal segmentação procurou proporcionar o entendimento e a assimilação do modo como a pesquisa foi desenvolvida, principalmente quanto aos procedimentos adotados e à direção dada ao estudo.

No capítulo 1, é apresentada uma visão geral a respeito de modelos matemáticos, visando motivar o leitor para o assunto através das aplicações que os modelos apresentam. Mostram-se ainda as justificativas envolvidas no estudo da dinâmica dos sistemas na região amazônica, os objetivos e contribuições deste modelo, assim como os resultados esperados com seu desenvolvimento.

No capítulo 2, é detalhada a metodologia desenvolvida para formular as equações adaptadas para o estudo da dinâmica de circulação de água do sistema de planície inundada na região amazônica. Expõe-se o método numérico utilizado para a solução dessas equações, que irá gerar um modelo numérico envolvendo matemática aplicada e mecânica dos fluidos, para embasar de forma clara e consistente aplicações na área de modelagem de ambientes inundáveis através da computação científica.

No capítulo 3, trata-se de uma série de conceitos básicos necessários à melhor compreensão deste trabalho. Em seguida, são apresentadas as deduções das equações da continuidade e da quantidade de movimento, a partir das leis físicas de conservação que regem o fluxo de um fluido em geral, utilizando o Teorema de Transporte de Reynolds. Descreve-se o método empregado para desenvolver o modelo matemático, o qual sempre recai na forma de uma ou mais equações diferenciais parciais lineares ou não-lineares, que precisam ser integradas no tempo e no espaço para mostrar o comportamento dinâmico do processo. Além disso, aborda a representação do modelo dinâmico dos processos através de equações gerais. Faz-se, ainda, uma análise de escala dos termos que aparecem na forma mais geral destas equações e, especialmente, quais os diferentes parâmetros utilizados para o cálculo, como se pode aproximar cada termo e quais podem ser desprezados para simplificar as equações ao máximo, sem que deixem de representar o melhor possível os fenômenos de propagação do fluxo em rios.

No capítulo 4, é exposto o método numérico utilizado na solução aproximada das equações governantes. Descreve-se também a implementação numérica das



equações através de uma discretização espacial e temporal, apresentando-se as equações resolvidas pelo modelo na sua forma discretizada.

No capítulo 5, são apresentados os resultados obtidos com o novo conjunto de equações e as discussões sobre o modelo matemático.

O capítulo 6 é dedicado às conclusões da dissertação e às recomendações ou sugestões para trabalhos futuros.

No apêndice A, é deduzida a equação da Continuidade. No apêndice B, é apresentada a dedução da equação de Quantidade de Movimento. No apêndice C, são mostradas as equações dos apêndices anteriores promediadas no tempo.

## **2. METODOLOGIA**

Com a intenção de propiciar uma compreensão melhor da proposta elaborada, será apresentada neste capítulo a metodologia aqui empregada. Além disso, serão discutidas a área de estudo e suas características peculiares, importantes para diferenciação do modelo voltado especificamente para a região amazônica.

Sobre o modelo a ser descrito, procurou-se relatar como foi formulado matematicamente com base nas equações da Continuidade e de Navier-Stokes. Mostrou-se também o seu desenvolvimento para a análise dos fluxos hídricos na escala temporal sazonal, voltado para a região amazônica, através das hipóteses adotadas em razão das características peculiares dos processos que nela ocorrem.

### **2.1 – Área de Estudo**

Neste trabalho, é contextualizada a análise espaço/temporal da dinâmica fluvial da planície de inundação amazônica, definida e delimitada pelo critério geomorfológico segundo o qual apresenta configuração topográfica específica, com formas de relevo e depósitos sedimentares relacionados com as águas fluviais, na fase do canal e na fase do transbordamento. Assim, não deve ser confundida nem caracterizada pelos processos e formas de relevo desenvolvidas no canal fluvial.

A região amazônica abrange as bacias hidrográficas do rio Amazonas, Araguaia-Tocantins, bacias costeiras do Norte e bacias costeiras do Nordeste Ocidental. A área de estudo é constituída pela planície fluvial Amazônica, no estado do Amazonas, mais especificamente no trecho Coari-Manaus (Figura 2.1), objeto de estudo do Projeto Piatam. Portanto, está compreendida entre as coordenadas 3° a 4° de latitudes sul e 60° a 63° de longitude oeste.

O acesso à região amazônica se dá principalmente através de transporte aéreo ou aquático, devido à influência da sazonalidade do ciclo hidrológico, que tem como consequência uma forte flutuação do nível dos rios. O clima é equatorial úmido e sub-úmido, controlado pela ação dos alísios, com a temperatura variando pouco durante o ano, em torno de 26°C e recebe uma precipitação média da ordem de 2.300 mm/ano

(FISCH *et al.*, 1996). É muito comum na região, os períodos de chuva provocados em grande parte pelo vapor d'água trazido do leste pelos ventos.

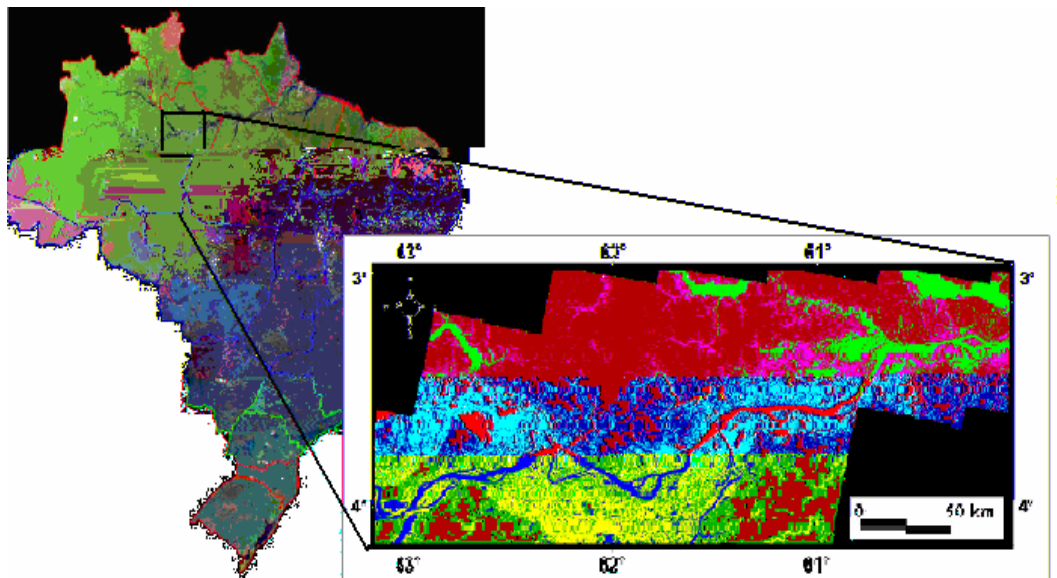
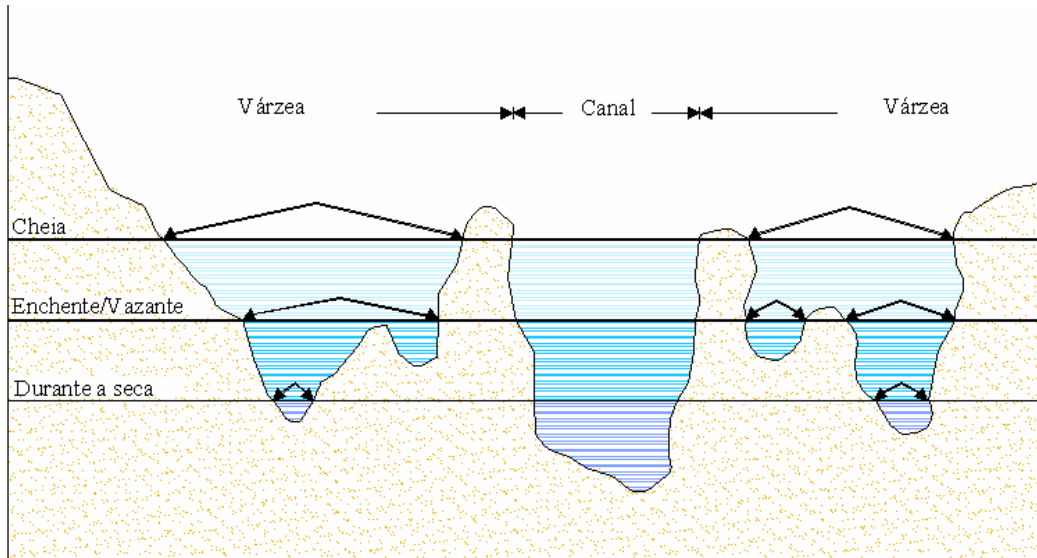


Figura 2.1 – Localização da área de estudo (Adaptado de MIRANDA *et al.*, 2005 e site <http://www.cdbrasil.cnpem.embrapa.br/>).

Esta área pode ser caracterizada como uma planície fluvial inundável sujeita ao forte regime sazonal de águas do rio. Tal planície fluvial inundável são as áreas alagadas, também denominada de área de várzea, abrange áreas que podem estar temporária ou permanentemente inundáveis. As oscilações do nível dos rios da região amazônica apresentam-se em geral como um ciclo de inundação, com um período regular de águas altas e outro de águas baixas (Junk, 1989).

Durante os meses de chuva, a partir de dezembro, as águas sobem em média 10 metros, podendo atingir 15 metros em algumas áreas. Isso significa que durante metade do tempo, grande parte da planície fica submersa, caracterizando a maior área de floresta inundada do planeta. A vegetação predominante nesta é constituída por grandes bancos de plantas aquáticas, arbustos e floresta. O rio Amazonas é um rio de planície, possuindo baixa declividade. Sua largura média é de 4 a 5 quilômetros, chegando em alguns trechos a mais de 50 quilômetros e profundidades em torno de 40 a 50m (SIOLI, 1985).

Nesta região, ocorrem importantes trocas de volumes de água entre o canal principal e a planície de inundação, (Figura 2.2), e os vários lagos que a compõem são interligados por canais de comunicação.



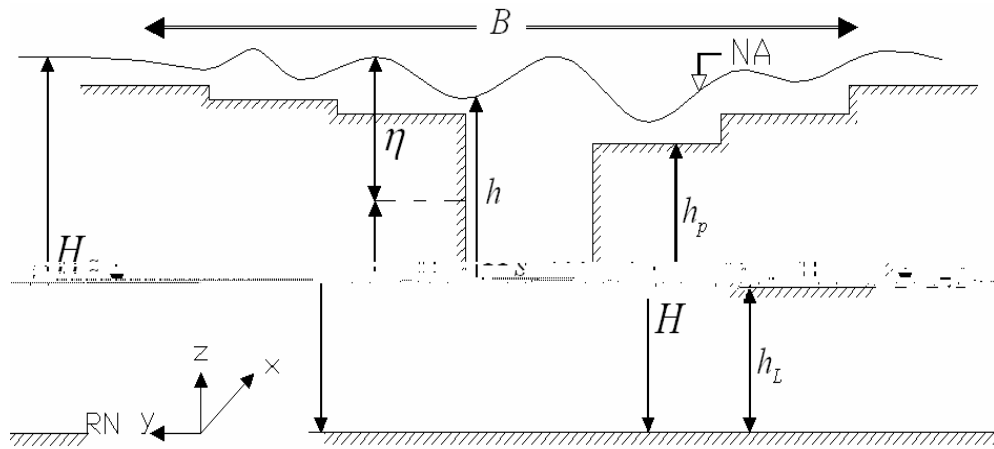
**Figura 2.2 - Esquema do processo de perda lateral do volume de água do rio para a planície de inundação (Fonte: adaptado de FORSBURG, *et al.* (2005), comunicação pessoal).**

A vasta extensão geográfica, sua riqueza biológica e a diversidade e complexidade de seus ecossistemas fazem com que a modelagem seja imprescindível para a ampliar os conhecimentos sobre a região.

## 2.2 – O Modelo

Para a obtenção de um modelo configurado para a região de estudo, optou-se por partir dos conceitos básicos da dinâmica dos fluidos, como as leis físicas e parâmetros geométricos e hidráulicos que caracterizam os fluxos em um corpo d'água. Para tanto é necessário uma representação aproximada da dinâmica e das formas topográficas da geomorfologia fluvial.

Seguiu-se como base, para melhor representar esses parâmetros geométricos e hidráulicos do escoamento, uma seção transversal (Figura 2.3).



**Figura 2.3 - Esquema das propriedades da seção transversal de um canal.**

A Figura 2.3 representa a seção transversal de um fluxo d' água, onde (B) é a largura superficial transversal do canal medida na superfície livre; (h) é a profundidade do escoamento, ou seja, é a distância vertical do talvegue do rio até a superfície livre; (H) é a profundidade média convencional para esta pesquisa, definida como a média das profundidades em diferentes cotas verticais numa mesma seção. Definida devido à característica sazonal na região amazônica de variar a cota d'água em cerca de 10 a 15 m entre as estações de seca e cheia, é sempre medida perpendicularmente ao fundo a partir de um nível de referência (RN); a elevação da superfície livre, a partir desta elevação vertical média H é ( $\eta$ ), ( $h_L$ ) é a cota do fundo do leito (topografia) medida a partir da altura do ponto mais baixo ou ponto de referência da base da seção transversal (talvegue) em relação a uma referência de nível, ( $H_s$ ) é a cota da superfície livre, medida desde o nível de referência até a superfície livre. A profundidade da calha principal do canal é definida por ( $h_p$ ), medida desde um nível de referência. Ultrapassando a margem da calha principal, a vazão atingirá a planície de inundação.

Neste trabalho, para melhor adequar as variáveis características da sazonalidade da região e a variação do fluxo no canal e na área de várzea, tornou-se necessário adotar um referencial (RN) abaixo das cotas. Através desse referencial é importante salientar, a existência de uma variável fundamental para os cálculos denominada  $\zeta$ , obtida pela soma das variáveis H (baixa frequência) e  $\eta$  (alta frequência). Esta, representa a variação sazonal do sistema e trabalha, portanto, em escalas de frequência diferentes (baixa e alta). Por exemplo, ao se trabalhar numa escala temporal da ordem de meses (baixa frequência)  $\zeta = H$ . De outra forma, se a escala temporal a ser trabalhada for da

ordem de segundos  $\zeta = \eta$ . A mudança do referencial do modelo, juntamente com a adição desta variável de diferentes escalas de frequência, o diferencia de outros encontrados na literatura.

Assim, partindo das leis físicas de conservação que regem o fluxo de um fluido, em geral assumindo este incompressível, isotrópico, bem como considerando as ações do campo gravitacional e de rotação terrestre, obteve-se uma formulação para o movimento tridimensional de um fluido viscoso newtoniano. Essas equações constituem, respectivamente, a equação da continuidade e as equações dinâmicas, também denominadas de equações de Navier-Stokes, e representam o balanço das forças de campo e de massa envolvidas no movimento do fluido, o qual é um processo distribuído no tempo e no espaço. Os modelos matemáticos que utilizam as equações dinâmicas e da continuidade são denominados de modelos hidrodinâmicos.

Como se deseja representar o escoamento em termos de valores médios temporais, sem as variabilidades ocasionadas pelas perturbações, costuma-se integrar no tempo essas equações deduzidas para um movimento instantâneo e obter equações para um escoamento médio. Utiliza-se, para isso, o método da separação introduzido por Reynolds, pelo qual cada variável é definida pela soma entre uma parte “média” ou de grande escala e uma parte de “flutuação” ou de pequena escala. Assim, foram obtidas as Equações de Reynolds.

Essas equações representam o escoamento na superfície terrestre descrito sobre as três dimensões espaciais, constituindo os chamados modelos tridimensionais, cuja aplicação requer grandes recursos computacionais. Neste trabalho, pretende-se simplificar essas equações no espaço, integrando-as na profundidade para eliminar nelas a dimensão vertical, obtendo um novo sistema de equações bidimensionais.

Outra consideração do modelo, com o intuito de tornar as equações mais gerais, é o de aplicá-las para um referencial plano inclinado nas direções  $x$  e  $y$ . Para tanto é necessária a dedução das mesmas num referencial plano horizontal, as quais se diferem das deduzidas para um plano inclinado devido à atuação das forças no volume de controle. Isto promove uma flexibilidade no modelo, para optar por qual sistema de referencia se deseja trabalhar. Esse diferencial contribui para melhor adaptar as equações ao domínio a ser resolvido, levando em conta a variação do fluxo na calha devido à direção do escoamento e à inclinação topográfica.

Um pouco mais de ênfase também foi dispensada aos termos das equações que envolvem resistência ao escoamento provocada pela vegetação e à ação de cisalhamento do vento sobre a superfície da água, por desempenharem um importante papel na circulação da região amazônica. A estes termos, foram aplicadas parametrizações. Desse modo, as equações gerais foram formuladas tanto para um escoamento bidimensional num plano horizontal quanto para um plano inclinado, considerando a hipótese de o escoamento ser rotacional e turbulento.

Após concluir a dedução das equações, fez-se uma análise de escala de cada termo, com valores típicos da região de estudo, tanto para o canal quanto para a planície inundada, a fim de avaliarmos a relevância de cada um na dinâmica do escoamento em cada situação. Obteve-se, através destas equações, um modelo matemático consistente, aplicado à região de planície inundada amazônica, diferente de qualquer outro já estudado, que engloba vários outros modelos, como, por exemplo, o de BATES *et al.* (2005) e do CUNGE *et al.* (1980), com as devidas simplificações.

### **2.3 – Solução do Modelo**

Para solucionar o conjunto de equações formuladas, estas serão discretizadas de forma explícita pelo Método de Diferenças Finitas (MDF), utilizando o esquema de Euler Centrado para todos os termos. Sendo assim, todas as derivadas serão aproximadas por diferenças resultantes de uma apresentação algébrica da equação diferencial parcial (EDP). Ao representar o domínio na forma computacional, será criada uma malha numérica. Nesse modelo, ela será regular, ou seja, composta de pontos equidistantes, na forma de quadrados. O espaçamento a ser escolhido será o que represente um limite prático decorrente do esforço computacional despendido, uma vez que um maior refinamento aumenta consideravelmente o tempo de cômputo na simulação. Será utilizada uma grade computacional onde, nas células, os pontos de elevação, valores de profundidade, parâmetros de resistência ao escoamento e as componentes da velocidade estarão dispostos no centro e em um só ponto.

Esse tipo de modelagem aplicado a rios com planícies de inundação pode apresentar problemas devido à intrincada topografia da planície de inundação, apresentando profundidades muito rasas e problemas de secagem/inundação. Além disso, tem-se que lidar com o dilema de aumentar a resolução da grade numérica para

conseguir representar a calha principal do rio sem tornar o custo computacional excessivamente alto devido à simulação da planície (BATES e DE ROO, 2000).

Como condição de contorno no fundo será utilizada a profundidade obtida através dos dados batimétricos, localizada, como explicado anteriormente, no centro da célula. Considerando a rápida dinâmica e velocidade das alterações processadas através da sedimentação e da erosão recentes ao longo da planície de inundação, bem como a carência de documentação cartográfica atualizada que registre as modificações tanto ao longo do canal fluvial quanto na planície, adotou-se como premissa que a calha do rio não se modifica com o tempo, o que equivale à hipótese de fundo fixo.

Para a resolução destas equações, torna-se necessário utilizar um programa de computador para o cálculo das características geométricas e hidráulicas fundamentais das seções transversais do rio e para o cálculo do escoamento propriamente dito através dos métodos de diferenças finitas (Método de Euler). Pretende-se desenvolver, na linguagem FORTRAN, um sistema computacional para simular integralmente o rio e as planícies inundáveis primeiramente num domínio hipotético. Tal sistema constituirá importante modelo para análise e simulação do comportamento de fluxos hidrodinâmicos fluviais de planícies inundadas.

Este trabalho se diferenciará por abordar uma representação da propagação do escoamento que simula a interação rio-planície e a própria propagação ao longo da planície, que muitas vezes se desvincula fortemente do canal principal e apresenta fluxos secundários, sob um novo referencial plano inclinado. Este referencial possibilitará inserir e melhor representar as variáveis características da sazonalidade da região amazônica. Assim, como também, permitirá trabalhar com o modelo em



### 3. MODELO HIDRODINAMICO

Neste capítulo, será apresentada a modelagem matemática das equações gerais de variação dinâmica do fluxo da água com superfície livre. Tais equações, depois de suas devidas simplificações, serão resolvidas para a modelação do escoamento em rios amazônicos com planícies alagáveis, objeto de estudo deste trabalho.

Com o intuito de fundamentar os tópicos posteriores, primeiramente será descrito um resumo de alguns conceitos da dinâmica dos fluidos, como as leis físicas e parâmetros geométricos e hidráulicos que caracterizam o escoamento em um curso de água. Logo após, serão mostradas as equações deduzidas a partir das leis físicas de conservação que governam o fluxo de um fluido em geral.

Particularizando essas equações a um fluido incompressível e isotrópico (as propriedades do fluido não mudam com a direção), se obtém as equações de Navier-Stokes para o movimento instantâneo e para o caso de fluxo tridimensional da água. Em seguida, essas equações serão integradas no tempo para mostrar o comportamento dinâmico do processo, originando um sistema de equações para um escoamento médio.

Nessa forma, sua resolução exigiria uma discretização tridimensional do domínio em estudo e o esquema numérico seria complexo, sobretudo muito caro computacionalmente, por isso a necessidade de simplificá-las no espaço. Para tal, empregou-se um método de integração na vertical. Primeiramente para um fundo plano horizontal e depois para um fundo plano inclinado. Por fim, será feita uma análise de escalas dos termos destas equações para avaliar a contribuição de cada um deles.

#### 3.1 - Leis Físicas do Escoamento

- Lei de Conservação da Massa:

Um sistema fechado é, por definição, uma porção arbitrária de matéria de identidade fixa, constituído da mesma quantidade de matéria em todos os instantes. A

conservação de massa exige que a massa do sistema  $m$ , que é o produto de sua massa específica,  $\rho$ , por seu volume  $\delta\mathcal{V}$ , seja constante.

$$\frac{D}{Dt}(m) = \rho \frac{D}{Dt} \delta\mathcal{V} = 0 \quad (3.1)$$

Onde a expressão  $D/Dt$  representa a derivada material, a ser definida na próxima seção.

- A Segunda Lei de Newton:

Para um sistema movendo-se em relação a uma estrutura inercial de referência, a segunda lei de Newton afirma que a soma de todas as forças externas atuando sobre o sistema é igual à taxa de variação com o tempo da sua quantidade de movimento linear.

$$\sum \vec{F}_i = \frac{D\vec{M}_v}{Dt} = \frac{D(m\vec{v}_i)}{Dt} = \rho \frac{D(\vec{v}_i)}{Dt} \delta\mathcal{V} \quad (3.2)$$

Onde a quantidade de movimento  $\vec{M}_v$  é representada pelo produto  $m\vec{v}_i$ , sendo  $\vec{v}_i$  o vetor velocidade numa direção, e  $\sum \vec{F}_i$  representa a soma das forças exteriores, que, em geral, são vetores de três componentes coincidentes com as três dimensões espaciais.

O movimento do fluido será representado mediante a lei de conservação da quantidade de movimento juntamente com a lei de conservação de massa, já que nelas aparecem as variáveis que descrevem o movimento explicitamente. Porém, o uso exclusivo destas é insuficiente para descrever todos os processos físicos que intervêm no movimento de um fluido (a partir unicamente dessas duas leis se obtém sistemas de equações com mais incógnitas que equações). Por isso, são necessárias condições adicionais dadas por outras leis ou propriedades.

Para fluidos em geral, se obtém as equações de estado que relacionam, por exemplo, pressão, densidade e temperatura absoluta, as quais freqüentemente são aproximações mais ou menos empíricas da realidade. Com as leis mencionadas, pode-se obter um sistema fechado de equações para fluidos. Entretanto, para fluxos complexos,

freqüentemente algumas condições são ignoradas ou elas estão baseadas em aproximações empíricas (BLADÉ, 2005).

## **3.2 – Propriedades Gerais**

### ***3.2.1 - Operador Derivada Material***

A razão da variação temporal de qualquer propriedade em um meio contínuo com respeito a partículas específicas do meio contínuo em movimento chama-se derivada material daquela propriedade. A derivada material pode ser interpretada como a taxa de variação temporal que um observador medirá acompanhando uma partícula específica (adota-se a notação  $D/Dt$ ). A variação com o tempo de uma variável de campo em um fluxo pode ser expressa em forma Lagrangiana e Euleriana.

A abordagem Lagrangiana consiste em fixar a atenção sobre uma porção muito pequena do fluido em escoamento. Neste caso, é descrito o comportamento de uma partícula fluida em particular, pois consiste em estabelecer equações que determinem a posição e as grandezas características correspondentes a cada partícula em escoamento, em função do tempo, tendo como parâmetro a sua posição inicial em um instante arbitrário.

Como a partícula está em movimento, sua posição é uma função do tempo, e, por conseguinte, cada uma de suas coordenadas é uma função da posição. Uma vez posicionada a partícula no espaço em um instante dado, pode-se indicar suas características nesse ponto no mesmo instante.

O método de Euler focaliza a atenção sobre as propriedades de um escoamento como velocidade, densidade, temperatura, etc., em um determinado ponto do espaço como função do tempo. Assim, esta função fornecerá os componentes destas características naquele ponto em cada momento.

Neste método de descrição euleriano, as propriedades do campo de escoamento são descritas como funções das coordenadas espaciais

porção material do fluido que estará sofrendo variação de uma propriedade em relação ao tempo, chamada de variação local, assim como em relação à posição da porção material, chamada de variação advectiva (PICKARD e POND, 1983).

Para a dedução das equações, essas taxas de variação de uma propriedade em relação ao tempo e às variáveis espaciais serão consideradas conjuntamente e então darão origem ao operador derivada total. Ao se considerar uma variável de campo  $\rho$ , que em uma especificação Euleriana tem a forma  $\rho = \rho(x, y, z, t)$ . Para saber a taxa de variação desta grandeza  $\rho$ , em um determinado ponto, pode-se usar a derivada material. Então, seguindo uma partícula, a variação de  $\rho$  em um tempo  $\delta t$  é  $(D\rho / Dt)\delta t$ . Neste tempo a partícula moveu-se a uma distância  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  nas direções x, y, z, respectivamente. Para saber como a grandeza varia em uma partícula, é necessário considerar o movimento desta. Do ponto de vista Euleriano, a variação de  $\rho$  é:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \rho}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \rho}{\partial z} \delta z \quad (3.3)$$

A variação em ambas as descrições é a mesma, por isso:

$$\frac{D\rho}{Dt} \delta t = \overbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} \delta t}^{\text{Variação Temporal}} + \overbrace{\frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \rho}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \rho}{\partial z} \delta z}^{\text{Variação Advectiva}} \quad (3.4)$$

Onde

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\rho}{t} + \frac{\rho}{x} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\rho}{y} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\delta z}{\delta t}$$

Em notação indicial (neste texto a notação indicial implica no uso de coordenadas cartesianas):

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial\rho}{\partial x_i} \quad (3.7)$$

E em notação vetorial:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\rho \quad (3.8)$$

Nas equações anteriores, o primeiro termo da direita significa a variação da velocidade em um ponto (derivada temporal ou local). Os outros termos representam a variação advectiva de  $\rho$  ou seja, a variação é consequência do movimento do fluido.

### 3.2.2 – Principais Propriedades de um Fluido

Um fluido é uma substância que se deforma continuamente sob a aplicação de uma tensão de cisalhamento (tangencial), não importando quão pequena ela possa ser. Embora os fluidos apresentem uma natureza molecular, estamos interessados nos efeitos médios ou macroscópicos de muitas moléculas. Assim, aqui será tratado como uma substância infinitamente divisível, um contínuo, hipotético para a maioria das finalidades práticas (FOX & MCDONALD, 2001). Fluidos reais geralmente apresentam alguma compressibilidade, definida pelo módulo de elasticidade volumétrica  $K$  (MELLO, 2003):

$$K = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial p} \quad (3.9)$$

Onde  $K$  é a variação da massa específica do fluido  $\partial\rho$  (massa/volume [kg/m<sup>3</sup>]) por unidade de variação da pressão  $p$  (força/área [Pa=N/m<sup>2</sup>]).

Para a maioria das aplicações, é razoável assumir que os líquidos são incompressíveis, isto é, eles não sofrem mudança de volume pela variação da pressão.

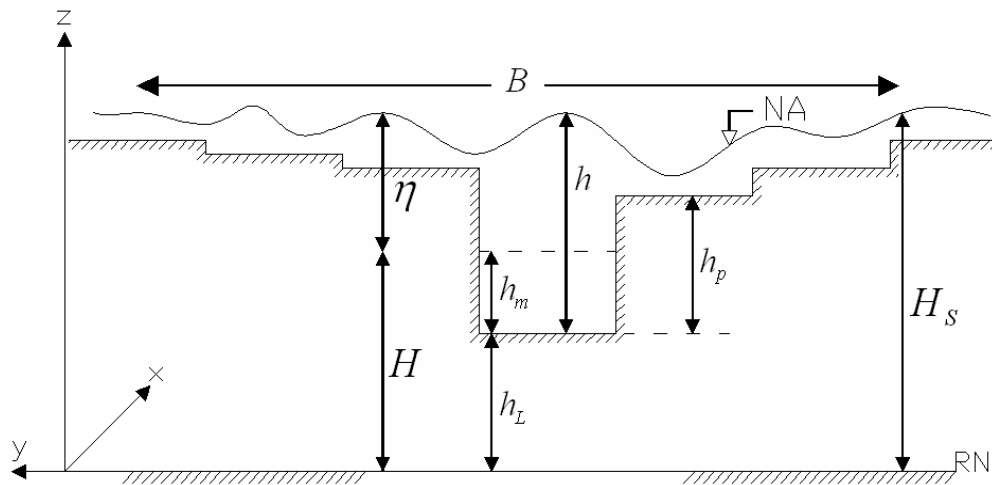
Assume-se aqui também que eles são homogêneos, ou seja, que a massa específica  $\rho$  é constante. O atrito (força de cisalhamento) em fluidos é caracterizado pela viscosidade, que é uma medida da resistência das forças de cisalhamento em escoamentos devido a gradientes de velocidade. As forças viscosas são importantes em muitos tipos de escoamentos, mas menos importantes em outros tipos. Para fins de análise, é feita frequentemente a hipótese de que um fluido é não-viscoso. Se o fluido é também considerado incompressível, ele é então chamado fluido perfeito, ou ideal, e esta será a hipótese aqui adotada.

### 3.2.3 – Principais Propriedades Transversais do Canal

As principais propriedades geométricas dos cursos d'água são descritas a seguir:

#### *Seção transversal do canal*

A propriedade geométrica mais utilizada como referência de um curso d'água é a sua seção transversal. Tomando como referência a **Figura 3.1**, que é a seção obtida pela intersecção da calha do rio com um plano perpendicular à direção principal do escoamento e seus elementos geométricos.



**Figura 3. 1 - Esquema das propriedades da seção transversal do canal sob forma de cotas.**

Ao contrário dos canais artificiais, as seções transversais dos rios têm formas irregulares que podem variar com o tempo, devido aos processos morfológicos naturais ou induzidas pelo homem, e dependem da interação entre o escoamento e o material do

leito e das margens. Para leitos aluvionares, ou seja, formados por material erodível, suas larguras costumam aumentar gradualmente do fundo até o topo. Estas seções são definidas topo-batimetricamente através de tabelas e gráficos, ou aproximadas, quando for possível, por seções geométricas equivalentes (com mesma área), freqüentemente retangulares.

As características geométricas das seções transversais podem variar continuamente ao longo do rio, o que faz com que eles sejam classificados como canais não-prismáticos, ou seja, não possuem paralelismo entre as faces e uma forma de seção transversal constante. Só excepcionalmente, em trechos onde essas variações não sejam significativas, ou em trechos canalizados, pode-se adotar a hipótese de canais prismáticos. A seção de um rio é caracterizada através de um conjunto de propriedades geométricas sendo as mais importantes definidas abaixo.

- **Seção molhada:** é a porção da seção transversal efetivamente ocupada pela água em escoamento. A seção molhada pode corresponder à parte ou totalidade da seção transversal, como no caso da vazão de margens plenas, e inclusive ultrapassar as margens da calha principal, ocupando a planície de inundação em eventos de cheias. A área desta seção é por sua vez denominada de **Área Molhada ( $A_m$ )**.

- **Largura Superficial ( $B$ ):** é a largura medida na superfície livre (NA – Nível da Água) transversal do canal. Esta grandeza é geralmente usada tendo em vista a dificuldade de se representar a variação da largura com a profundidade. Embora nas seções aluvionares esta variação seja sempre crescente a partir do leito, nos casos em que os taludes das margens apresentem ângulos pequenos, a largura superficial pode ser utilizada ao longo de toda profundidade. O comprimento na direção longitudinal do canal é representado por  $L$ .

- **Profundidade do escoamento ( $h$ ):** é a distância vertical do talvegue do rio até a superfície livre. Quando esta distância é medida perpendicularmente à direção do escoamento, é denominada de **profundidade da seção molhada**. Utilizou-se neste trabalho uma **profundidade sazonal média ( $H$ )**, definida como a média das profundidades em diferentes cotas verticais em uma mesma seção, sempre perpendicularmente ao fundo e a partir de um nível de referência (RN). A distância

vertical do leito do rio até a profundidade média  $H$  é dada por  $h_m$ . Ambas serão utilizadas para caracterizar a sazonalidade observada na região que, segundo BEVIS *et al.* (2005), apresenta uma variação de 10 a 15 metros entre as estações de seca e cheia. A elevação da superfície livre a partir desta elevação vertical média é  $\eta$ . A **profundidade da calha principal do canal** é definida por  $h_p$  e medida a partir do leito. Ultrapassando esta cota da margem da calha principal, a vazão atingirá a planície de inundação.

- **Perímetro molhado ( $P_m$ ):** é a porção do perímetro da seção molhada que se encontra em contato com o leito, excluindo, portanto, a superfície livre.

- **Raio hidráulico ( $R_H$ ):** é a relação entre a área molhada e o perímetro molhado, dada por:

$$R_H = A / P_m \quad (3.10)$$

Trata-se de uma grandeza que não pode ser medida diretamente, mas é de grande importância para o escoamento. É possível mostrar que, para seções em que a largura é muito maior do que a profundidade, o raio hidráulico pode ser aproximado pela profundidade média, dentro da precisão aceitável na prática hidrométrica.

- **Seção equivalente:** é a seção geométrica conhecida, da forma retangular, trapezoidal, triangular ou circular, tomada como representação de uma seção irregular.

- **Cota do fundo ou do leito ( $h_L$ ):** altura do ponto mais baixo ou ponto de referência da base da seção transversal, em relação a uma referência de nível.

- **Cota da superfície livre ou cota fluviométrica ( $H_S$ ):** é a altura da superfície da água acima de uma determinada referência de nível. Equivalente à soma da profundidade média com a elevação da superfície em relação a ela mesma:

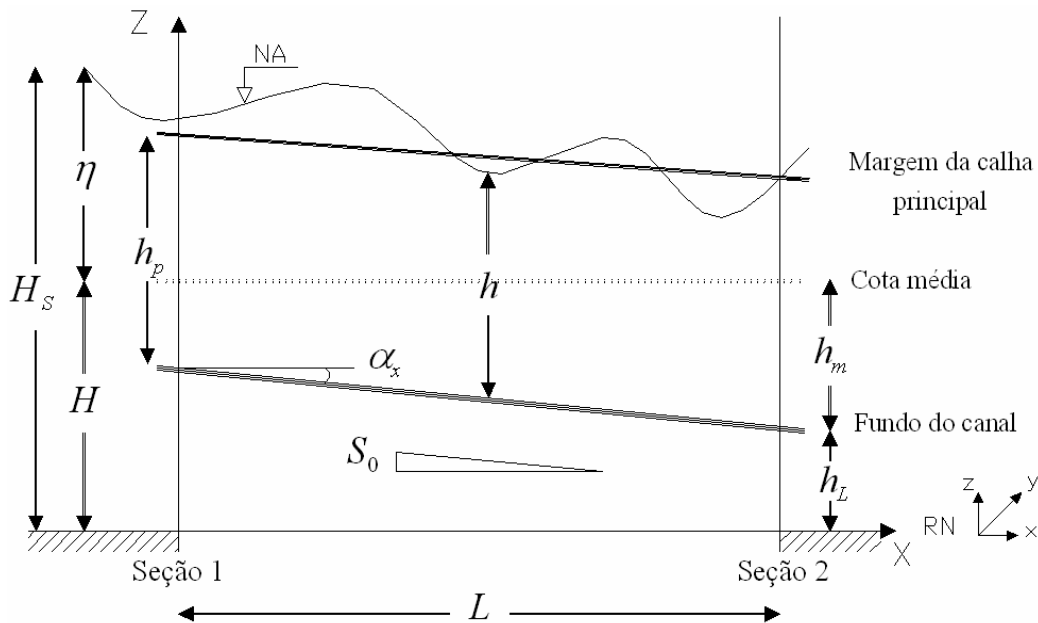
$$H_S = H + \eta \quad (3.11)$$



As referências de nível (RN) são marcos topográficos estabelecidos em relação às estações fluviométricas. Eles podem ser naturais ou artificiais, provisórios ou permanentes, e devem estar situados em uma cota conhecida em relação a um nível de referência fixo, de preferência o nível médio do mar definido pela sistemática proposta pelo IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

### 3.2.4 – Propriedades Longitudinais do Canal

As principais propriedades longitudinais no canal são mostradas na **Figura 3.2**:



**Figura 3.2 - Representação longitudinal do canal na forma de cotas.**

- **Declividade do leito ( $S_0$ ):** Trata-se de uma propriedade fundamental para caracterização do perfil longitudinal e transversal de um rio, pois representa a relação entre o desnível do rio e o seu comprimento para um determinado trecho. É definida a partir do ângulo formado por um plano correspondente ao leito do rio com um plano horizontal de referência.

Os ângulos correspondentes às direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, são  $\alpha_x$  e  $\alpha_y$ . A tangente desses ângulos é a medida desta declividade e o seu valor é determinado

pela diferença entre as cotas do leito de duas seções consecutivas, dividida pela distância entre elas, de forma que:

$$S_0^x = \operatorname{tg} \alpha_x = \frac{\partial h_L}{\partial x} \quad \text{e} \quad S_0^y = \operatorname{tg} \alpha_y = \frac{\partial h_L}{\partial y} \quad (3.12)$$

Para um caso tridimensional,

$$\bar{S}_0 = \operatorname{tg} \phi = \sqrt{\left(\frac{\partial h_L}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_L}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_L}{\partial z}\right)^2} \quad (3.13)$$

A cota no leito pode variar no espaço e no tempo devido à alternância dos processos de erosão e assoreamento. Todavia, de acordo com a hipótese de fundo fixo, a variação temporal não será considerada uma variável dependente, mas característica exclusiva da topografia do rio.

▪ ***Perda de carga devido ao atrito com o leito ( $S_f$ ):***

O atrito com o leito é produzido por um conjunto de fatores em função das características geométricas e físicas da calha fluvial, além do próprio escoamento. A energia dissipada pelo atrito com o leito ( $E_L$ ) por unidade de peso pode ser escrita como:

$$E_L = \frac{\tau_f}{\gamma \cdot h} \delta x \quad (3.14)$$

Onde  $S_f$  corresponde à inclinação da perda de carga por atrito por unidade de comprimento,  $\tau_f$  é a tensão tangencial no leito,  $\gamma$  é o peso específico da água (igual à  $\rho \cdot g$ ),  $\rho$  é a massa específica ou densidade absoluta da água e  $h$  é a profundidade.

A perda de energia  $E_L$  produz inclinação da linha de energia definida pelo ângulo  $S_f$ , que corresponde à perda por atrito por unidade de comprimento, ou seja:

$$E_L = S_f \delta x \quad (3.15)$$

Substituindo este valor na equação (3.14) obtém-se a seguinte expressão para a tensão tangencial no leito:

$$\tau_f = \gamma \cdot h \cdot S_f \quad (3.16)$$

Reescrevendo, substituindo  $\gamma = \rho g$ ,

$$\tau_f = \rho g h S_f \quad (3.17)$$

As fórmulas de perda de carga conhecidas têm em comum o fato de relacionarem a velocidade média do escoamento com as propriedades geométricas de uma seção com a natureza do material do leito e com a declividade da linha de energia. Elas foram desenvolvidas basicamente para escoamentos permanentes e uniformes.

Duas fórmulas da perda de carga são as mais encontradas na literatura e nas aplicações práticas em hidráulica fluvial: Chézy e a de Manning. Neste trabalho, aplica-se a fórmula de Chézy, dada por:

$$v = C_h \sqrt{R_H \cdot S_f} \quad (3.18)$$

Esta fórmula também pode ser deduzida combinando-se a equação (3.18) com a hipótese básica de proporcionalidade entre a tensão tangencial e o quadrado da velocidade média.

Tem-se assim sucessivamente:

$$\tau_f = \zeta v^2 = \gamma \cdot R_H \cdot S_f \Rightarrow v^2 = \left( \frac{\gamma}{\zeta} \right) \cdot R_H \cdot S_f \quad (3.19)$$

Sendo o coeficiente de Chézy  $C_h = (\gamma / \zeta)$ . O coeficiente de Chézy possui uma dimensão  $(m^{1/2} s^{-1})$ , sendo, portanto, uma função do tempo. Isto representa um ponto controverso em uma fórmula de perda de carga, pois uma propriedade física do material do leito não pode ser variável com o tempo.

Assim, fazendo a aproximação da profundidade pelo raio hidráulico,  $S_f$  pode ser dado por:

$$S_f = \left( \frac{\xi}{\gamma} \right) \frac{v^2}{h} = \frac{v^2}{C_h \cdot h} \quad (3.20)$$

O coeficiente  $C_h$  depende aparentemente apenas da rugosidade do material do leito, mas, de acordo com sua dimensão, deve depender também da forma da seção transversal.

### 3.3. As Equações Governantes

O escoamento da água sobre o solo é um processo distribuído, porque a vazão, velocidade e altura da lâmina de água variam no tempo e no espaço. As equações fundamentais que governam os escoamentos em rios e canais são deduzidas a partir da aplicação dos princípios básicos de conservação de três grandezas fundamentais na Mecânica do Contínuo: massa, quantidade de movimento e energia (SILVA *et al.*, 2003).

São apresentadas deduções com as duas primeiras grandezas, em sua forma diferencial, utilizando o Teorema de Transporte de Reynolds (WHITE, 1979), que estabelece para um volume de controle arbitrário e fixo a relação:

$$\left. \frac{DM}{Dt} \right|_{sist} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \chi \rho \delta \forall + \iint_{sc} \chi (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) \delta A \quad (3.21)$$

Onde  $\chi$  representa a propriedade  $M$  do fluido por unidade de massa  $m$ ,  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $\delta \forall$  é um volume infinitesimal de área  $\delta A$ ,  $\vec{v}$  é o vetor velocidade do escoamento,  $\vec{n}$  é um vetor normal à área do volume de controle, *sist* se refere ao sistema e *vc* e *sc* significam volume e superfície de controle, respectivamente.

### 3.3.1 - Equação da Continuidade e da Quantidade de Movimento

A dedução das equações que governam o movimento dos fluidos, no contexto deste trabalho, é inicialmente feita considerando uma área elementar, com as forças atuantes nas faces opostas, situada no interior da massa de um fluido em movimento. Em particular, para um fluido newtoniano e isotrópico, o conjunto de leis físicas universais como a lei de conservação de massa e a 2ª lei de Newton são aplicadas nas equações da continuidade (3.1) e do movimento (3.2), respectivamente, obtendo diretamente um sistema de equações.

A equação da continuidade de volume é diretamente a expressão da lei de conservação da massa, admitindo a incompressibilidade do fluido (ver **Apêndice A**). Ao aplicar esta lei, obtém-se a equação da continuidade, dada por:

$$\text{div} \vec{v} = \nabla \cdot (\vec{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.22)$$

Já a equação do movimento é obtida da análise da natureza das forças que agem no fluido por unidade de volume, ou seja, são, na sua forma mais fundamental, relações entre a taxa de variação do momento em uma porção selecionada do fluido e a soma de todas as forças que agem nesta porção (ver **Apêndice B**). Assim a aplicação da 2ª lei de Newton dá origem às equações de quantidade de movimento nas três direções:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_c v + \nu \nabla^2 u \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f_c u + \nu \nabla^2 v \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \nabla^2 w \quad (3.25)$$

Onde  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial t}$  e  $\frac{\partial w}{\partial t}$  são as variações temporais das componentes  $u$  e  $v$  respectivamente;  $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$  esses termos não lineares, nas equações, representam as taxas de variação advectivas;  $\rho$  é a densidade do fluido;  $(f_c)$  é o parâmetro de Coriolis expresso por  $f_c = 2\Omega \sin \Phi$ ;  $(\Omega)$  é a velocidade angular de rotação da Terra;  $(\Phi)$  é a latitude;  $\nu$  é coeficiente de viscosidade dinâmica do fluido expresso por  $\nu = \mu / \rho$  e  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  é o operador diferencial nãbla em coordenadas cartesianas.

Estas equações também são conhecidas como as Equações de Navier-Stokes.

Estes princípios são aplicados a parcelas de água que dependem da escala de interesse. A menor parcela de substância que pode ser referenciada é uma “partícula”, assim como suas propriedades, (e.g. massa, velocidade, temperatura, etc.). Na modelagem conceitual, a matéria é contínua, e os princípios a serem empregados são os da mecânica do meio contínuo. Uma partícula de “água” é definida por sua massa e seu volume, que pode ter qualquer forma. Imaginando que a partícula tenha dimensões  $\delta x$ ,  $\delta y$  e  $\delta z$ , sua massa,  $m$ , é o produto de sua massa específica,  $\rho$ , por seu volume.

$$m = \rho \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \quad (3.26)$$

As leis de Newton aplicadas a um sistema de partículas podem ser generalizadas para um contínuo; em particular, para as leis de conservação da quantidade de movimento. O escoamento de uma massa de fluido no espaço pode, portanto, ficar bem determinado ou pelo conhecimento do comportamento individual de cada uma de suas partículas constituintes, ou pelo conhecimento do comportamento local das partículas que passam sucessivamente pelos pontos do espaço.

Relações dinâmicas descrevendo o movimento de um fluido passam essencialmente pelas influências às quais é submetido um elemento de massa específica do fluido, presentes nas forças de superfície, como no gradiente da pressão e na força de atrito, assim como também na força de corpo exercida pela gravidade,  $g$ .

Aqui, por se tratar de um corpo de água homogêneo, assume-se que a densidade é constante. O objetivo é obter um sistema de equações capaz de descrever o

escoamento através da velocidade do fluido, a chamada representação Euleriana (BATCHELOR, 1970).

### 3.3.2 – *Equações Promediadas no Tempo*

Após todas essas considerações, foram obtidas as equações de Navier-Stokes e da Continuidade para um movimento instantâneo, ou seja, equações que descrevem o escoamento em termos de valores instantâneos das variáveis. No caso da água, as equações são válidas tanto para o caso de movimento laminar como para o movimento turbulento. No movimento laminar, as velocidades são pequenas e a viscosidade é suficiente para manter o fluxo ordenado, mas se a velocidade aumenta haverá um momento em que isto não ocorrerá, e qualquer pequena rugosidade do leito ou perturbação do fluxo tenderá a desordená-lo.

No entanto, apesar dos avanços tecnológicos, na prática, não há a possibilidade de se trabalhar com escalas de tempo e espaço adequadas para isso. Dessa forma, costuma-se integrar no tempo as equações instantâneas, obtendo as equações de escoamento médio ou Equações de Reynolds.

Os modelos matemáticos que utilizam as equações dinâmicas e da continuidade são denominados de modelos hidrodinâmicos, e, para representá-los, pode-se trabalhar com as equações instantâneas do escoamento ou com tais equações integradas no tempo. O último caso ocorre quando se deseja a representação do escoamento em termos de valores médios temporais, sem as variabilidades ocasionadas pelas perturbações em escalas de tempo inferiores às da integração. Para isso, utiliza-se o método da separação introduzido por Reynolds (WHITE, 1991; SCHLICHTING, 1979), pelo qual cada variável é definida pela soma entre uma parte “média” ou de grande escala ( $\bar{u}$ ) e uma parte de “flutuação” ou de pequena escala ( $u'$ ):  $u = \bar{u} + u'$ .

Para fluxos incompressíveis, a partir das equações de Navier-Stokes e promediando no tempo, obtêm-se as Equações de Reynolds. No **Apêndice C**, as equações de Navier-Stokes, juntamente com a equação da Continuidade, foram integradas no tempo resultando no seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f_c \bar{v} + \nu \nabla^2 \bar{u} - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'u'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}) \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f_c \bar{u} + \nu \nabla^2 \bar{v} - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'v'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'v'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v'w'}) \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g + \nu \nabla^2 \bar{w} - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'w'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'w'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w'w'}) \quad (3.30)$$

Onde  $\bar{u}$  é a média temporal da componente da velocidade e  $\bar{p}$  é a média temporal da componente da pressão.

Lembrando aqui que a barra acima das variáveis indica o termo médio e os termos  $\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'u'})$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'v'})$  e  $\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'w'})$  são relativos às flutuações turbulentas nas equações dinâmicas, os quais são conhecidos como tensões aparentes ou turbulentas de Reynolds e cuja definição se faz necessária a fim de tornar o sistema de equações matematicamente determinado.

O conceito de viscosidade turbulenta é a dissipação de energia e momento devido à turbulência, que ocorre de maneira análoga a ação da viscosidade molecular, porém em uma escala muito maior. O coeficiente de viscosidade turbulenta será representado por  $\nu_t$ . Frequentemente, faz-se uma analogia entre o movimento dos turbilhões e o movimento molecular, quantificando-se o transporte por difusão turbulenta de acordo com expressões do mesmo tipo que são utilizadas para a difusão molecular.

Assim, de acordo com a metodologia aplicada por PICKARD e POND (1983), para tensões como  $-\overline{\rho u'u'}$ ,  $-\overline{\rho u'v'}$  e  $-\overline{\rho u'w'}$  (e outros produtos médios quadráticos de  $u'$ ,  $v'$  e  $w'$ ), termos das tensões de Reynolds, por analogia com o caso molecular, pode-se supor que estejam relacionadas com os gradientes de velocidade média por algum tipo de viscosidade (uma tensão ou viscosidade turbulenta).

$$\text{Assim, podem ser escritas para cada termo como: } -\overline{u'u'} = \nu_t^x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x};$$

$$-\overline{u'v'} = \nu_t^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}; \quad -\overline{u'w'} = \nu_t^z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}.$$



Ao contrário do caso molecular, usamos diferentes valores da viscosidade turbulenta ( $\nu_T$ , etc.) para diferentes direções, desde que possam ser diferentes (particularmente entre as direções verticais e horizontais devido à estabilidade estática).

Então, um termo como  $-\partial(\overline{u'u'})/\partial x$  se torna  $\partial[\nu_T^x(\partial\bar{u}/\partial x)]/\partial x$ .

Assim, os termos de fricção turbulenta  $\nu_T$  tornam-se, na direção  $x$ ,

$$\nu_T^x \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \nu_T^y \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \nu_T^z \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}.$$

Os termos turbulentos têm uma importância maior que o atrito para descrever o escoamento.

Tomando apenas o fluxo de momento devido às perturbações na direção vertical, faz-se a aproximação  $-\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} = \nu_T^z \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\tau_{xz}}{\partial z}$  e as equações de momento terão agora um termo difusivo oriundo de processos turbulentos, e não de difusão molecular. Assim, considerando tal tratamento para as tensões aparentes de Reynolds (ver **Apêndice C**), têm-se as seguintes equações:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f_c \bar{v} + \nu_T^x \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \nu_T^y \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \nu_T^z \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f_c \bar{u} + \nu_T^x \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \nu_T^y \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \nu_T^z \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g + \nu_T^x \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \nu_T^y \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \nu_T^z \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \quad (3.34)$$

As equações de Reynolds na forma tridimensional e a equação da Continuidade estabelecidas em termos de valores médios  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  e  $\bar{p}$  são o ponto de partida para a representação de escoamentos reais. Constituem os chamados modelos tridimensionais, cuja aplicação requer grandes recursos computacionais e enfrenta certo tipo de restrição, embora se constate um aumento significativo no seu emprego.

Em domínios como as áreas fluviais de várzea, estas equações deverão sofrer as adaptações necessárias para a consideração das particularidades que lhes são inerentes: fundo pouco profundo predominante e consideração de outras forças aplicadas, como as forças de Coriolis devidas à rotação da Terra, variação da pressão atmosférica e atrito na superfície devido ao vento.

A partir da análise da ordem de grandeza dos termos verticais, pode-se simplificar o equacionamento, reduzindo-o a uma ou duas dimensões espaciais, resultando nos chamados modelos uni ou bidimensionais, respectivamente, conforme o interesse e o objetivo da modelagem.

Com relação aos modelos bidimensionais, eles podem ser resultantes da integração na vertical ou na horizontal. Os modelos bidimensionais verticais normalmente são aplicados a estuários fortemente estratificados com canal suficientemente regular ou a reservatórios com dimensões longitudinais muito maiores que as dimensões transversal e vertical.

Mais especificamente, os modelos bidimensionais horizontais, onde só têm dimensões  $(x, y, t)$ , constituem o foco deste trabalho e são empregados, por exemplo, para a representação da maioria dos corpos d'água rasos, desde que as escalas verticais do movimento sejam muito menores que as horizontais, e que a coluna d'água apresente pouca ou nenhuma estratificação vertical (ROSMAN, 1989).

A seguir, na próxima seção, descreve-se de forma mais detalhada a integração na vertical das equações de Navier-Stokes e da continuidade promediadas no tempo, a fim de obter as equações constituintes dos modelos hidrodinâmicos bidimensionais para um referencial plano inclinado.

### **3.4 – Integração na Vertical das Equações**

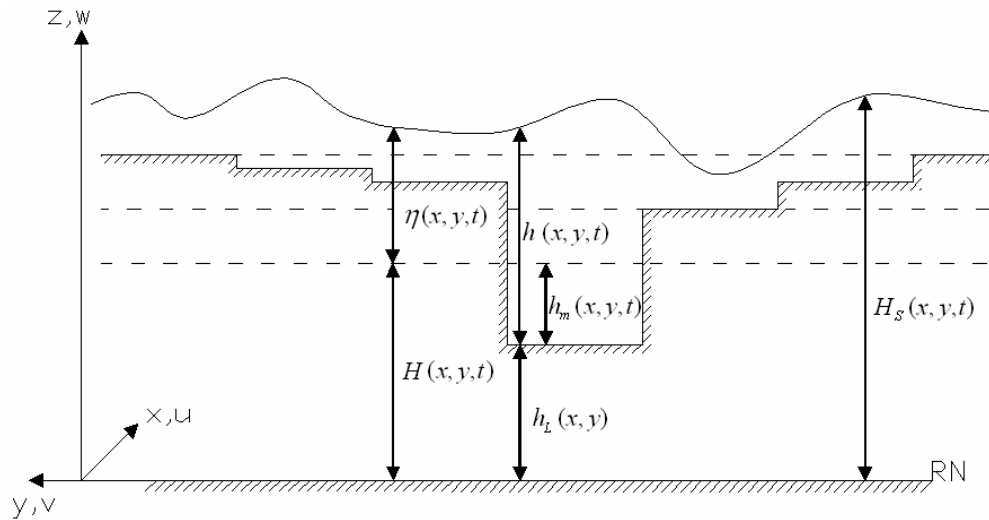
Nas seções anteriores, foram apresentadas as equações fundamentais, neste caso apenas a equação da continuidade e as equações dinâmicas, também denominadas de equações de Navier-Stokes. Em seguida, estas equações foram integradas no tempo, constituindo um sistema de equações em três dimensões espaciais. Aqui, será demonstrada a dedução destas equações para o emprego de um modelo bidimensional no espaço, cujo equacionamento é resultante da integração na direção vertical das

equações (3.31, 3.32, 3.33 e 3.34) integradas no tempo, tendo como limites de integração o fundo e a superfície livre da água.

Sendo um modelo integrado na vertical, portanto, aplica-se para as regiões em que o fluxo é predominantemente horizontal, e pela hipótese de homogeneidade (boa mistura vertical) ou onde as variações verticais no fluxo são insignificantes.

Para tanto, o sistema cartesiano é disposto conforme a **Figura 3.3**, onde o plano  $xy$  é tomado em relação a um nível de referência ( $RN$ ). Neste são definidas as profundidades fixas do plano topográfico em relação ao nível de referência ( $h_L$ ), os níveis de água variáveis em função do escoamento ( $\eta$ ) a partir de uma elevação vertical média ( $H$ ) se for a partir do nível referencial e ( $h_m$ ), a profundidade da superfície ( $H_s$ ) e a profundidade do escoamento ( $h$ ). A relação entre essas variáveis pode ser escrita da seguinte forma:

$$h(x, y, t) = H(x, y, t) + \eta(x, y, t) - h_L(x, y) = h_m(x, y, t) + \eta(x, y, t) \quad (3.35)$$



**Figura 3.3 – Indicação do plano de referência e das variáveis do canal.**

Como parte do processo de integração, considera-se as componentes da velocidade constituídas de duas parcelas: o valor médio na vertical e o desvio da média. Assim, para a direção  $x$ , por exemplo, tem-se que:

$$u(x, y, z, t) = \bar{u}(x, y, t) + u'(x, y, z, t) \quad (3.36)$$

Onde  $u'$  é o desvio da média da componente da velocidade  $u$  e o valor médio na vertical  $\bar{u}$  é definido por:

$$\bar{u}(x, y, t) = \frac{1}{h} \int_{h_L}^{H+\eta} u(x, y, z, t) dz \quad (3.37)$$

De (3.36) e (3.37), conclui-se que:

$$\int_{h_L}^{H+\eta} u'(x, y, z, t) dz = 0 \quad (3.38)$$

Para o processo de integração na vertical, cujo detalhamento pode ser visto também em outros trabalhos (ROSMAN, 1989; MOURA & LEMES, 2002), retirou-se aqui, para maior facilidade no tratamento e clareza das equações, a barra acima das variáveis indicando o termo médio. Sendo assim, as equações a serem integradas na vertical serão da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_c v + v_T^x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v_T^y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v_T^z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f_c u + v_T^x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v_T^y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v_T^z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + v_T^x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v_T^y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v_T^z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (3.42)$$

### 3.4.1 – Referencial Plano Horizontal

O movimento de um volume elementar de fluido incompressível e isotérmico, quando expresso em termos de valores instantâneos das componentes das velocidades  $u$ ,  $v$  e  $w$  da pressão  $p$ , é caracterizado aqui pelas equações de Navier-Stokes e da Continuidade apresentadas na seção 3.3.1 e desenvolvidas nesta seção. Na maioria das

vezes, o fluxo de água em canais naturais apresenta algumas características que permitem simplificar essas equações gerais e obter resultados suficientemente precisos com muito menos custo.

Como resultado da integração das equações de Navier-Stokes, incluindo a equação da continuidade, na profundidade, para simplificar nelas a dimensão vertical, é obtido um sistema de equações em sua forma bidimensional. Este poderá ser resolvido em termos das componentes horizontais da velocidade e dos níveis em cada ponto, válidas quando o fluxo que se quer representar tem também este caráter bidimensional, com velocidades verticais pequenas, declives de fundo suaves e, em geral, as dimensões horizontais predominantes na vertical (o que equivale à hipótese de águas rasas).

Segundo BLADÉ (2005), em grande parte dos fluxos com superfície livre, o valor das variáveis não varia tanto na vertical. Esta consideração permite simplificar as equações de Navier-Stokes e da Continuidade a duas dimensões. Para isto, se consideram as hipóteses abaixo.

- Admitir neste modelo para planícies inundadas, nas equações de movimento de Navier-Stokes, a aproximação da pressão em termos de uma pressão hidrostática, que assume, para o fluxo de água, velocidade identicamente nula na vertical (PEDLOSKY, 1987).
- Assumir que a aproximação da ordem de grandeza da dimensão vertical seja extremamente menor que a dimensão longitudinal e transversal (PEDLOSKY, 1987). Sendo  $Z$  valores na escala vertical do canal, e similarmente a variável  $L$  representando valores na escala horizontal do canal. A condição fundamental é de que

$$Z / L \ll 1 \tag{3.43}$$

Pela equação da Continuidade, tem-se que

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \tag{3.44}$$

Ou seja,

$$O \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) = O \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \tag{3.45}$$

isto é,

$$O(w) = O\left(\frac{uZ}{L}\right) \quad (3.46)$$

Mais precisamente,

$$O(w) \ll O(u) \quad (3.47)$$

Assumindo que  $\vec{v} = (u, v, 0)$ , sendo  $u$  e  $v$  independentes de  $z$ , (BATCHELOR, 1970) nas equações da Continuidade e de Navier-Stokes, e considerando  $u = u(t, x, y)$  e  $v = v(t, x, y)$ , tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - f_c v = 0 \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f_c u = 0 \quad (3.50)$$

- Admitiu-se também a hipótese de incompressibilidade do fluido, que assume que o volume de um elemento de fluido não varia com a pressão (BATCHELOR, 1970).
- O escoamento varia gradualmente ao longo do canal, podendo-se desprezar as acelerações verticais e considerar a distribuição hidrostática de pressões na vertical.
- O declive do fundo é pequeno e o mesmo não é móvel, ou seja, os efeitos do destacamento e deposição do sedimento não influenciam o escoamento. Os coeficientes de rugosidade para o regime permanente e uniforme são aplicáveis, sendo válida e utilizada a equação de Chézy para quantificá-los.

Para que se cumpra a hipótese de distribuição hidrostática de pressões, é necessário que a curva das linhas de corrente sejam pequenas, as quais são linhas tangentes em todos seus pontos ao campo velocidade, em um dado instante de tempo. Assim, o cumprimento dessas hipóteses implica também que as componentes da

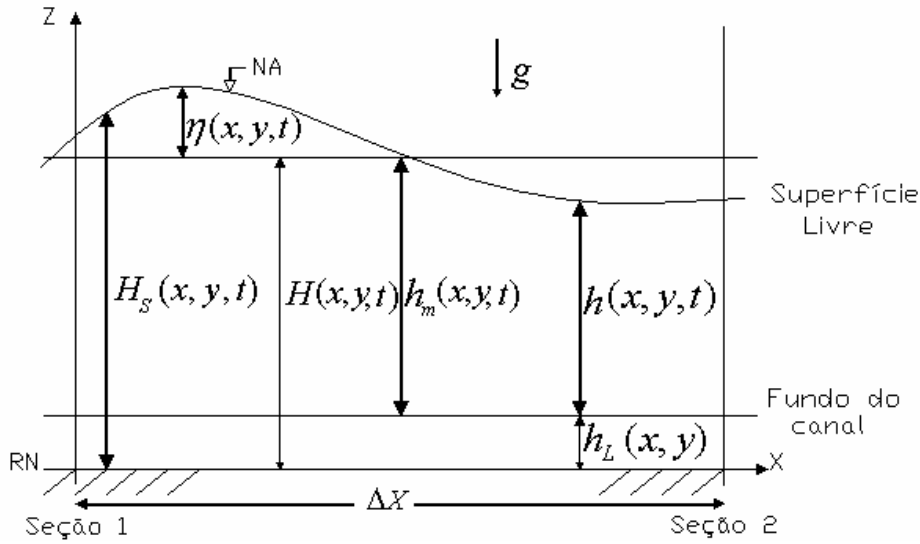
velocidade e aceleração na direção  $z$  são desprezíveis frente às componentes em outras direções, e também que estas últimas tenham uma marcada uniformidade vertical. Partiu-se do princípio que o fundo do canal é um plano horizontal e logo após serão revistos os termos referentes às forças que agem no fluido, para um referencial plano inclinado.

Após esta revisão, serão discutidos os termos que aparecem na forma mais geral das equações hidrodinâmicas, e especialmente como se pode aproximar e qual deles pode ser desprezado para simplificar as equações ao máximo, sem que elas deixem de representar o melhor possível o escoamento em rios e planícies de inundação que nos interessam.

Assim, integrando segundo a vertical as equações fundamentais da Mecânica dos Fluidos, incluindo a equação da continuidade, é possível eliminar os termos em que consta a componente vertical da velocidade. Poder-se á então obter um sistema de equações passível de resolução em termos das componentes horizontais da velocidade e dos níveis em cada ponto.

#### ***3.4.1.1 - Integração na Vertical da Equação da Continuidade***

A equação da continuidade para um fluido homogêneo (neste caso, a velocidade horizontal independe da coordenada vertical para escoamentos barotrópicos, ou seja, o gradiente de pressão é devido à inclinação da superfície livre), invíscido e incompressível pode ser integrada verticalmente de  $z = h_L$  (topografia de fundo) à  $z = H + \eta$  (superfície livre), como é mostrado na **Figura 3.4**.



**Figura 3.4 - Esquema longitudinal de cotas do canal para o modelo bidimensional.**

Na **Figura 3.4** tem-se um esquema vertical de um canal limitado em sua parte inferior por uma superfície  $h_L(x, y)$  e superior, por uma superfície livre  $H_S(x, y, t) = H(x, y, t) + \eta(x, y, t)$ . Onde  $h_L(x, y)$  é a altura da topografia e  $\eta(x, y, t)$  a elevação da superfície livre a partir de uma elevação vertical média  $H$ . A cota média  $h_m(x, y, t)$  representa a variação da profundidade do canal devido à sazonalidade da região. Considerando as escalas temporais, os períodos associados à variação de  $\eta$  serão da ordem de segundos e de  $H_S$  da ordem de meses. Logo quando  $\eta$  for modelado,  $H_S$  será um valor aproximadamente constante.

Re-presentando a equação da continuidade para a integração na vertical:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.39)$$

Aplicando a Regra de Leibnitz<sup>1</sup> aos dois primeiros termos e calculando o terceiro, pode-se escrever a integração na vertical do primeiro termo  $\partial u / \partial x$  da equação da continuidade como:

<sup>1</sup> A Regra de Leibnitz estabelece (KAPLAN, 1972), para uma função  $f(x, t)$  contínua e com derivada contínua:  $\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = f[b(t), t] \frac{\partial}{\partial t} b(t) - f[a(t), t] \frac{\partial}{\partial t} a(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx$ .



$$\int_{h_L}^{H+\eta} \frac{\partial}{\partial x} u(x, y, z, t) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_L}^{H+\eta} u(x, y, z, t) dz \left[ u(x, y, z, t) \frac{\partial(H+\eta)}{\partial x} \right]_{z=H+\eta} + \left[ u(x, y, z, t) \frac{\partial h_L}{\partial x} \right]_{z=h_L} \quad (3.51)$$

Então,

$$\int_{h_L}^H \frac{1}{x} u dz - \int_{h_L}^H \frac{1}{x} u dz = u \frac{(H - h_L)}{x} \quad u \frac{h_L}{x} \quad z=H \quad z=h_L$$

Na superfície livre  $S_1(x, y, z, t) = z - [H(x, y, t) + \eta(x, y, t)]$ , dada por  $z = H(x, y, t) + \eta(x, y, t)$ , a velocidade na vertical do elemento fluido na superfície é:

$$w(H + \eta) = \frac{D(H + \eta)}{Dt} = \frac{\partial(H + \eta)}{\partial t} + \left( u \frac{\partial(H + \eta)}{\partial x} \right)_{z=H+\eta} + \left( v \frac{\partial(H + \eta)}{\partial y} \right)_{z=H+\eta} \quad (3.56)$$

A equação (3.56) é a condição cinemática na superfície livre. E sendo a superfície do fundo  $S_2(x, y, z, t) = z - h_L(x, y)$  descrita por  $z = h_L(x, y)$ , tem-se:

$$w(h_L) = \frac{Dh_L}{Dt} = \left( u \frac{\partial h_L}{\partial x} \right)_{z=h_L} + \left( v \frac{\partial h_L}{\partial y} \right)_{z=h_L} \quad (3.57)$$

A equação 3.57 traduz que a velocidade é tangencial à superfície do fundo, ou, o que fisicamente é equivalente, a assumir um fundo impermeável.

Substituindo as expressões (3.56) e (3.57) na equação (3.55), resulta em:

$$\frac{\partial(H + \eta)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_L}^{H+\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{h_L}^{H+\eta} v dz = 0 \quad (3.58)$$

Resolvendo a integração, nos conduz finalmente a:

$$\frac{\partial(H + \eta)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uh) + \frac{\partial}{\partial y} (vh) = 0 \quad (3.59)$$

Onde  $h$  pode ser dado por:

$$h(x, y, t) = [H(x, y, t) + \eta(x, y, t)] - h_L(x, y) \quad (3.60)$$

A equação (3.59) constitui a equação da continuidade para os modelos hidrodinâmicos bidimensionais horizontais. Aplicando a regra da cadeia para derivadas (CIPOLATTI, 2000) na equação (3.59):

$$\frac{\partial(H + \eta)}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.61)$$

Substituindo a expressão (3.60) na equação (3.61), tem-se:

$$\frac{\partial(H+\eta)}{\partial t} + u \frac{\partial(H+\eta-h_L)}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial(H+\eta-h_L)}{\partial y} + h \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.62)$$

Reescrevendo:

$$\frac{\partial(H+\eta)}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} - u \frac{\partial h_L}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} - v \frac{\partial h_L}{\partial y} + h \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.63)$$

Agrupando os termos em função da elevação da superfície ( $\eta$ ) do lado direito:

$$\frac{\partial(H+\eta)}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} = -h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - u \frac{\partial H}{\partial x} + u \frac{\partial h_L}{\partial x} - v \frac{\partial H}{\partial y} + v \frac{\partial h_L}{\partial y} \quad (3.64)$$

Considerando, ainda, fundo impermeável e se não há termo fonte ou sumidouro, a velocidade na vertical é nula. Lembrando que  $H_s = H + \eta$ , sendo  $H$  uma profundidade constante, pela equação (3.60), obtém-se a Equação da Continuidade da seguinte forma:

$$\frac{\partial H_s}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} = -h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3.65)$$

#### 3.4.1.2 - Integração na vertical das equações dinâmicas

Ainda com as considerações iniciais mencionadas para a equação da continuidade, prossegue-se aqui com a integração das equações dinâmicas, re- apresentadas da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_c v + v_T^x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v_T^y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v_T^z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f_c u + v_T^x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v_T^y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v_T^z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu_T^x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_T^y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_T^z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (3.42)$$

A integração para as equações dinâmicas consiste também em aplicar a integral desde a cota de fundo até a de superfície livre. Procedendo-se agora à integração segundo a vertical das equações de quantidade de movimento, termo a termo, vem:

- *Termos da aceleração local e advectiva*

Inicialmente, procede-se à integração da parte esquerda das equações dinâmicas, referente aos termos de aceleração local e convectiva. Tomando os termos da equação na direção  $x$ , como exemplo, é possível reescrevê-los como abaixo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.66)$$

Expressão válida para escoamentos incompressíveis. E, portanto, seguindo com a integração, fazendo ainda  $\vec{v} = (u, v, 0)$  na equação de Navier-Stokes e considerando  $u = u(t, x, y)$  e  $v = v(t, x, y)$ , tem-se:

$$\int_{h_L}^{H+\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial t} uh + \frac{\partial}{\partial x} uuh + \frac{\partial}{\partial y} uvh \quad (3.67)$$

Reescrevendo os três últimos termos da equação anterior, tem-se:

$$\int_{h_L}^{H+\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz = h \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (3.68)$$

Seguindo o mesmo procedimento para os termos de inércia da equação dinâmica da direção  $y$ , tem-se:

$$\int_{h_L}^{H+\eta} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz = h \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (3.69)$$

- *Aceleração da gravidade*

Existente apenas na direção vertical  $z$ , para corpos d'água naturais, a força de campo considerada é a gravitacional, onde o peso da partícula decorrente da atração gravitacional da Terra no referencial sem inclinação é:

$$F_g = (0,0,-g) \quad (3.70)$$

- *Termos da força de pressão*

Para a variação horizontal de pressão será aplicada a regra de Leibnitz:

$$\int_{h_L}^{H+\eta} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz = -\frac{1}{\rho} \left[ \int_{h_L}^{H+\eta} \frac{\partial p}{\partial x} dz - p_s \left( \frac{\partial(H+\eta)}{\partial x} \right)_{H+\eta} + p_f \left( \frac{\partial h_L}{\partial x} \right)_{h_L} \right] \quad (3.71)$$

Simplificando,

$$\int_{h_L}^{H+\eta} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz = -\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (ph) - p_s \left( \frac{\partial(H+\eta)}{\partial x} \right)_{H+\eta} + p_f \left( \frac{\partial h_L}{\partial x} \right)_{h_L} \right] \quad (3.72)$$

De forma análoga para o termo da pressão na equação dinâmica na direção  $y$ .

$$\int_{h_L}^{H+\eta} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dz = -\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial y} (ph) - p_s \left( \frac{\partial(H+\eta)}{\partial y} \right)_{H+\eta} + p_f \left( \frac{\partial h_L}{\partial y} \right)_{h_L} \right] \quad (3.73)$$

Onde  $p$  será dado pelo valor médio da pressão na vertical,  $p_s$  e  $p_f$  são as pressões na superfície e no fundo, respectivamente.

No escoamento onde a escala vertical seja muito inferior à escala horizontal do movimento, pode-se proceder a uma simplificação da equação de movimento vertical, substituindo-a pela condição de equilíbrio hidrostático. As acelerações verticais e as tensões tangenciais, quando comparadas com o efeito da gravidade e com o gradiente vertical de pressões, poderão ser desprezadas. Adotando-se esta simplificação de distribuição hidrostática de pressões na vertical, tem-se que a equação dinâmica na vertical (direção  $z$ ) se reduz a:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = g \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (3.74)$$

Também conhecida como aproximação hidrostática.

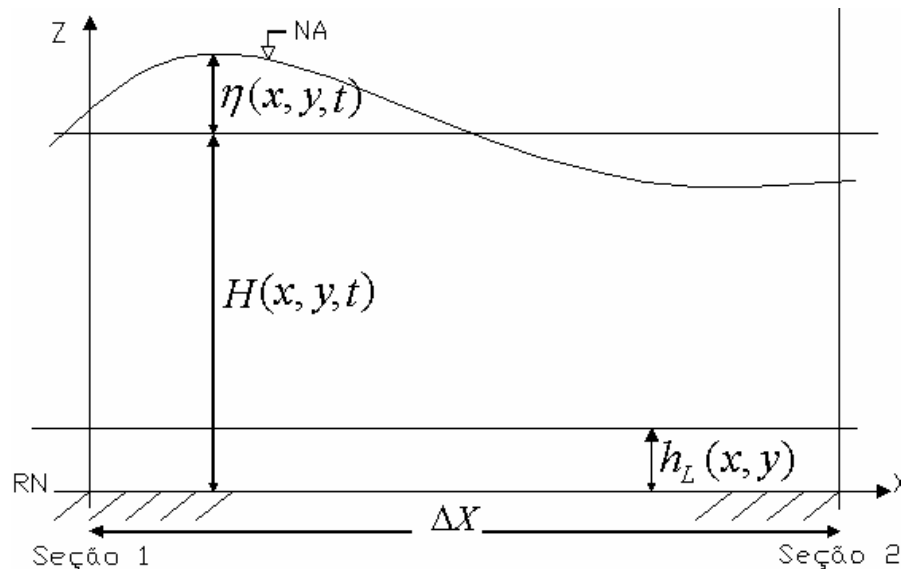
Aplicando a integração na vertical da equação hidrostática anterior, resulta em:

$$p_s - p_f = \int_{h_L}^{H+\eta} (-\rho g) dz \Rightarrow p_s = p_f - \rho g [(H + \eta) - h_L] \quad (3.75)$$

Considera-se a pressão, na superfície livre de escoamento, uniforme à pressão atmosférica na altitude em questão.

Lembrando que  $h = (H + \eta) - h_L$ , ver **Figura 3.5**, outra forma de apresentação da equação (3.75) é:

$$p_f = p_s + \rho gh \quad (3.76)$$



**Figura 3.5 – Representação da superfície livre com elevação e topografia.**

A variável  $p_f$  será obtida de acordo com a altitude do canal por onde corre o fluxo em questão (PEDLOSKY, 1987). Utilizando um ponto arbitrário  $z$  da profundidade, com a adoção da condição hidrostática e de acordo com a relação (3.75), tem-se que:

$$p(x, y, z) = p_f - \rho g z \quad (3.77)$$

De acordo com a equação anterior, pela adoção de condição hidrostática, obtém-se para o valor médio da pressão  $p$  na vertical a seguinte expressão:

$$p = p_s + \rho g \frac{h}{2} \quad (3.78)$$

Introduzindo as duas relações anteriores (3.76 e 3.78) na equação da variação horizontal da pressão, tem-se:

$$\int_{h_L}^{H+\eta} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz = -\frac{1}{\rho} \left[ p_s \frac{\partial h}{\partial x} + \rho g \frac{h}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial p_s}{\partial x} + \frac{\rho g h}{2} \frac{\partial h}{\partial x} - p_s \frac{\partial(H+\eta)}{\partial x} + \dots \right. \\ \left. \dots + p_s \frac{\partial h_L}{\partial x} + \rho g h \frac{\partial h_L}{\partial x} \right] \quad (3.79)$$

Lembrando que  $h(x, y, t) + h_L(x, y) = [H + \eta](x, y, t)$ , a expressão se reduz a:

$$\int_{h_L}^{H+\eta} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz = -\frac{1}{\rho} \left[ \rho g h \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial p_s}{\partial x} + \rho g h \frac{\partial h_L}{\partial x} \right] \quad (3.80)$$

Por fim, desprezando a variação espacial da pressão atmosférica na superfície da água, o que é aplicável na maioria dos casos, e lembrando que  $H_s = H + \eta$ , tem-se que:

$$\int_{h_L}^{H+\eta} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz = -gh \frac{\partial(H+\eta)}{\partial x} = -gh \frac{\partial H_s}{\partial x} \quad (3.81)$$

O termo de pressão da equação dinâmica em  $y$  é de forma análoga:

$$\int_{h_L}^{H+\eta} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dz = -gh \frac{\partial(H+\eta)}{\partial y} = -gh \frac{\partial H_s}{\partial y} \quad (3.82)$$

- *Termos da força de Coriolis*

A integração na vertical dos termos de Coriolis, na direção de  $x$ , resulta em:

$$\int_{h_L}^{H+\eta} f_C v dz = f_C v h \quad (3.83)$$

E, para a direção  $y$ ,

$$\int_{h_L}^{H+\eta} -f_C u dz = -f_C u h \quad (3.84)$$

Onde  $f_C = 2\Omega \sin \Phi$ , ( $\Omega$ ) é a velocidade angular de rotação da Terra; ( $\Phi$ ) é a latitude;

- *Termos referentes às forças viscosas*

Para a direção  $x$  tem-se, por analogia à equação **B.26** no **Apêndice B**, que:

$$v_T^x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v_T^y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v_T^z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right); \quad (3.85)$$

Fazendo a integração na vertical dos termos viscosos das equações dinâmicas na direção  $x$ , como exemplo, é possível reescrevê-los da seguinte forma:

$$\int_{h_L}^{H+\eta} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dz = \frac{1}{\rho} \left[ \int_{h_L}^{H+\eta} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dz + \int_{h_L}^{H+\eta} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dz + \int_{h_L}^{H+\eta} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right] \quad (3.86)$$

Aplicando a Regra de Leibnitz em cada termo da equação (3.86), tem-se:

$$\int_{h_L}^{H+\eta} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_L}^{H+\eta} \tau_{xx} dz - \left( \tau_{xx} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{H+\eta} + \left( \tau_{xx} \frac{\partial h_L}{\partial x} \right)_{h_L} \quad (3.87)$$

$$\int_{h_L}^{H+\eta} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{h_L}^{H+\eta} \tau_{xy} dz - \left( \tau_{xy} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{H+\eta} + \left( \tau_{xy} \frac{\partial h_L}{\partial x} \right)_{h_L} \quad (3.88)$$

$$\int_{h_L}^{H+\eta} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz = \left( \tau_{xz} \right)_{H+\eta} - \left( \tau_{xz} \right)_{h_L} \quad (3.89)$$



Substituindo as equações anteriores na integral da equação (3.86), então fica

$$\int_{h_L}^{H+\eta} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dz = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_L}^{H+\eta} \tau_{xx} dz - \left( \tau_{xx} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{H+\eta} + \left( \tau_{xx} \frac{\partial h_L}{\partial x} \right)_{h_L} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{h_L}^{H+\eta} \tau_{xy} dz - \dots \right. \\ \left. \dots - \left( \tau_{xy} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)_{H+\eta} + \left( \tau_{xy} \frac{\partial h_L}{\partial y} \right)_{h_L} + (\partial \tau_{xz})_{H+\eta} - (\partial \tau_{xz})_{h_L} \right] \quad (3.90)$$

Se a superfície livre de um fluido é dada por  $z = [H + \eta](x, y, t)$ , pode-se definir uma superfície  $S_1$  da seguinte forma (MOURA & LEMES, 2002):

$$S_1 = z - [H + \eta] = 0 \quad (3.91)$$

Um vetor unitário normal à superfície livre,  $\vec{n}_1$ , pode ser escrito em função da definição de superfície livre  $S_1$  dada em (3.91) da seguinte forma:

$$\vec{n}_1 = (n_{1x}, n_{1y}, n_{1z}) = \frac{\nabla S_1}{|\nabla S_1|} = \frac{1}{|\nabla S_1|} \left( -\frac{\partial(H + \eta)}{\partial x} \vec{i}, -\frac{\partial(H + \eta)}{\partial y} \vec{j}, \vec{k} \right) \quad (3.92)$$

A ação de forçantes na superfície livre, e. g. vento, é passada ao escoamento através da imposição de condições de contorno dinâmicas nesta.

A tensão na superfície livre na direção  $x$ ,  $(\tau_{V_x}^s)$ , pode ser escrita para  $z = H + \eta$  como:

$$\tau_{V_x}^s = \tau_{xx} n_{1x} + \tau_{xy} n_{1y} + \tau_{xz} n_{1z} \quad (3.93)$$

Ou de outra forma, a partir da equação (3.92), as componentes da tensão segundo as direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, na superfície livre  $[Pa]$  são:

$$\tau_{V_x}^s = \frac{1}{|\nabla S_1|} \left( -\tau_{xx} \frac{\partial(H + \eta)}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial(H + \eta)}{\partial y} + \tau_{xz} \right)_{z=H+\eta} \quad (3.94)$$

$$\tau_{V_y}^s = \frac{1}{|\nabla S_1|} \left( -\tau_{xy} \frac{\partial(H + \eta)}{\partial x} - \tau_{yy} \frac{\partial(H + \eta)}{\partial y} + \tau_{yz} \right)_{z=H+\eta} \quad (3.95)$$

Vale ressaltar que, para qualquer aplicação prática,  $|\nabla S_1| \cong 1$ .

De forma análoga, sabendo que, no fundo,  $z = h_L(x, y)$ , pode-se definir uma superfície  $S_2$  da seguinte maneira:

$$S_2 = z - h_L = 0 \quad (3.96)$$

A partir do vetor  $\vec{n}_2$ , pode-se escrever o versor normal à superfície  $S_2$ , como:

$$\vec{n}_2 = (n_{2x}, n_{2y}, n_{2z}) = \frac{\nabla S_2}{|\nabla S_2|} = \frac{1}{|\nabla S_2|} \left( -\frac{\partial h_L}{\partial x} \vec{i}, -\frac{\partial h_L}{\partial y} \vec{j}, \vec{k} \right) \quad (3.97)$$

Pode-se escrever a tensão no fundo, na direção  $x$ ,  $(\tau_{V_x}^f)$ , sob a forma:

$$\tau_{V_x}^f = \tau_{xx} n_{2x} + \tau_{xy} n_{2y} + \tau_{xz} n_{2z} \quad (3.98)$$

Então, as componentes da tensão, segundo as direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, no fundo  $[Pa]$  são:

$$\tau_{V_x}^f = \frac{1}{|\nabla S_2|} \left( -\tau_{xx} \frac{\partial h_L}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial h_L}{\partial y} + \tau_{xz} \right)_{z=h_L} \quad (3.99)$$

$$\tau_{V_y}^f = \frac{1}{|\nabla S_2|} \left( -\tau_{xy} \frac{\partial h_L}{\partial x} - \tau_{yy} \frac{\partial h_L}{\partial y} + \tau_{yz} \right)_{z=h_L} \quad (3.100)$$

Ressalta-se que, na prática,  $|\nabla S_2| \cong 1$ .

Substituindo as expressões das equações (3.94 e 3.99) na equação geral (3.85):

$$\int_{h_L}^{H+\eta} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dz = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_L}^{H+\eta} \tau_{xx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{h_L}^{H+\eta} \tau_{xy} dz + \tau_{V_x}^s |\nabla S_1| - \tau_{V_x}^f |\nabla S_2| \right]; \quad (3.101)$$

Assim a integral para a direção  $x$  fica:

$$\int_{h_L}^{H+\eta} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dz = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (h \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (h \tau_{xy}) \right] + \frac{\tau_{v,x}^s}{\rho} |\nabla S_1| - \frac{\tau_{v,x}^f}{\rho} |\nabla S_2|; \quad (3.102)$$

De forma análoga para a direção y, tem-se:

$$\int_{h_L}^{H+\eta} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) dz = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (h \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (h \tau_{yy}) \right] - \frac{\tau_{v,y}^s}{\rho} |\nabla S_1| + \frac{\tau_{v,y}^f}{\rho} |\nabla S_2| \quad (3.103)$$

Reunindo o resultado da integração na vertical de cada um dos termos da equação dinâmica, na direção  $x$ , conforme as expressões (3.68, 3.81, 3.83 e 3.102), na equação geral (3.40), tem-se:

$$\begin{aligned} & h \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (h \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (h \tau_{yx}) \right] - \frac{\tau_{v,x}^s}{\rho} |\nabla S_1| + \dots \\ & \dots + \frac{\tau_{v,x}^f}{\rho} |\nabla S_2| + gh \frac{\partial H_s}{\partial x} - f_c v h = 0 \end{aligned} \quad (3.104)$$

Dividindo por  $h$ , a expressão anterior fica:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\rho h} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (h \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (h \tau_{yx}) \right] - \frac{\tau_{v,x}^s}{\rho h} |\nabla S_1| + \dots \\ & \dots + \frac{\tau_{v,x}^f}{\rho h} |\nabla S_2| + g \frac{\partial H_s}{\partial x} - f_c v = 0 \end{aligned} \quad (3.105)$$

Fazendo uma analogia com a obtenção das equações de Navier-Stokes, pode-se considerar que:

$$\frac{1}{h} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (h \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (h \tau_{yx}) \right] \approx (\mu_T) \nabla^2 u \quad (3.106)$$

E, portanto, a equação (3.105) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \varepsilon \nabla^2 u - \frac{\tau_{v,x}^s}{\rho h} |\nabla S_1| + \frac{\tau_{v,x}^f}{\rho h} |\nabla S_2| + g \frac{\partial H_s}{\partial x} - f_c v = 0 \quad (3.107)$$

Onde é definida a variável  $\varepsilon = v_T = \frac{\mu_T}{\rho}$ .

De forma análoga, para a direção  $y$ , o resultado da integração na vertical da equação dinâmica correspondente é:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon \nabla^2 v - \frac{\tau_{v_y}^s}{\rho h} |\nabla S_1| + \frac{\tau_{v_y}^f}{\rho h} |\nabla S_2| + g \frac{\partial H_s}{\partial y} + f_c u = 0 \quad (3.108)$$

Finalmente, como resultado da integração na vertical para um referencial inercial sem inclinação, tem-se, do sistema composto pelas equações (3.39, 3.40, 3.41 e 3.42), as seguintes equações:

- Equação da Continuidade

$$\frac{\partial H_s}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} = -h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3.65)$$

- Equação da Quantidade de Movimento na direção  $x$  e  $y$ , respectivamente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \varepsilon \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \frac{\tau_{v_x}^s}{\rho h} |\nabla S_1| + \frac{\tau_{v_x}^f}{\rho h} |\nabla S_2| + g \frac{\partial H_s}{\partial x} - 2\Omega \sin \Phi v = 0 \quad (3.107)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \frac{\tau_{v_y}^s}{\rho h} |\nabla S_1| + \frac{\tau_{v_y}^f}{\rho h} |\nabla S_2| + g \frac{\partial H_s}{\partial y} + 2\Omega \sin \Phi u = 0 \quad (3.108)$$

Onde:

$u$  é a velocidades na direção  $x$

$v$  é a velocidade na direção  $y$

$t$  é o tempo

$g$  é a aceleração da gravidade

$\rho$  é massa específica

$h$  é profundidade a partir do fundo até a superfície

$H_s$  é a profundidade total até a superfície livre equivalente à  $H_s = H + \eta$ .

$H$  é a profundidade média a partir do nível de referência

$\eta$  é a elevação da superfície livre a partir da profundidade média.

$\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}$  são as tensões turbulentas promediadas na vertical.

$\tau_x^f, \tau_y^f$  são as tensões de atrito no fundo nas direções  $x$  e  $y$ .

$\tau_{vx}^s, \tau_{vy}^s$  são as tensões de atrito na superfície nas direções  $x$  e  $y$ .

$\varepsilon$  é a viscosidade do fluido

$\Omega$  é a velocidade angular de rotação da Terra no sistema de coordenadas local.

$\Phi$  é o ângulo de latitude

$|\nabla S|$  é o módulo da superfície livre.

Os termos  $\frac{\partial}{\partial x}(h\tau_{xx})$  e  $\frac{\partial}{\partial y}(h\tau_{xy})$  representam as tensões turbulentas laterais

médias segundo a vertical, que são fundamentais para a obtenção de modelos com boa capacidade previsiva.

### 3.4.2 – Referencial Plano Inclinado

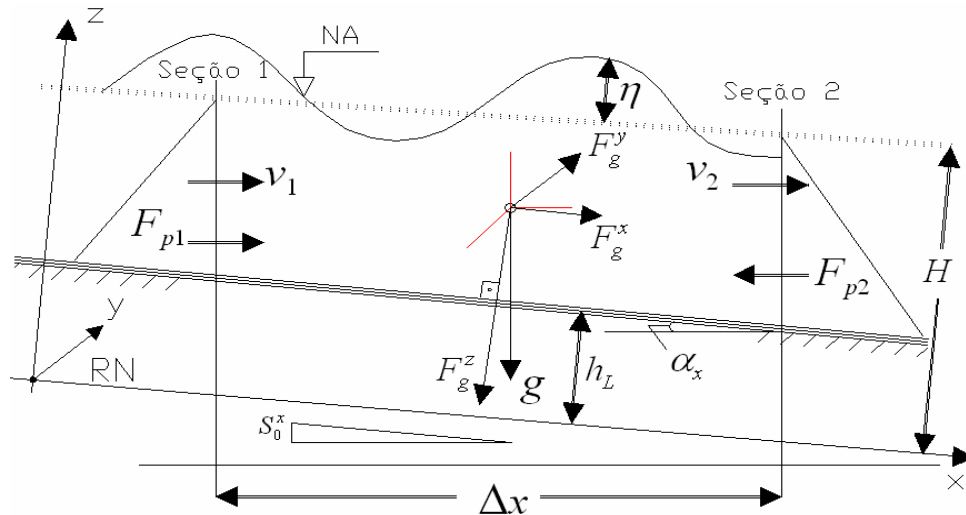
Para aplicar essas equações a um plano inclinado nas direções  $x$  e  $y$ , considerou-se um volume de controle onde as forças atuantes em um ponto qualquer deste fluido foram decompostas nas direções  $x, y, z$ .

As equações desenvolvidas para um referencial plano horizontal diferem das equações para um plano inclinado devido à atuação das forças no volume de controle considerado.

Para esta nova dedução com o referencial inclinado, as equações da Continuidade e de Navier-Stokes, serão integradas na vertical. Sendo que, no esquema vertical de um plano referencial inclinado, o canal hipotético é limitado na sua parte inferior por uma superfície  $h_L(x, y)\sin\alpha_z$  e superior, por uma superfície livre  $[H(x, y, t) + \eta(x, y, t)]\sin\alpha_z$ , ambas foram corrigidas devido a esta inclinação.

Portanto, serão corrigidos os termos referentes às forças atuantes no fluido, veja **Figura 3.6**, mais especificamente, termos referentes à força da gravidade, à força de Coriolis, à força do gradiente de pressão e à tensão de cisalhamento no fundo. Este

último é um termo resultante da integração das forças viscosas na vertical (3.102), o qual receberá um tratamento brevemente comentado. Quanto à força de Coriolis, o termo refere-se somente à mudança de referencial.



**Figura 3. 6 - Representação das forças atuantes no volume de controle em um referencial com inclinação na direção  $x$  e  $y$ .**

- *Aceleração da gravidade*

A força de gravidade  $F_g$  para um plano de inclinação  $\alpha_x$  e  $\alpha_y$ , respectivamente são ângulos na direção  $x$  e  $y$ , ver **Figura 3.7**, é definida pelas seguintes componentes, devido sua atuação nas três direções:

- Na direção  $x$  (longitudinal do canal) a força de gravidade é:

$$F_g^x = g \cos(90 - \alpha_x)$$

Aplicando a regra de subtração de arcos, onde  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são argumentos:

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2.$$

Tem-se que:

$$F_g^x = g(\cos 90 \cdot \cos \alpha_x + \sin 90 \cdot \sin \alpha_x) \Rightarrow F_g^x = g \sin \alpha_x$$

- Na direção  $y$  (transversal ao canal) a força de gravidade é:

$$F_g^y = g \cos(90 - \alpha_y)$$

Análogo à direção  $x$ , tem-se para a direção  $y$  que:

$$F_g^y = g(\cos 90 \cdot \cos \alpha_y + \sin 90 \cdot \sin \alpha_y) \Rightarrow F_g^y = g \sin \alpha_y$$

- Na direção  $z$  (perpendicular ao plano do canal) a força de gravidade é:

$$F_g^z = g \sin(180 - \alpha_z)$$

Aplicando a regra de subtração de arcos, onde  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são argumentos, tem-se:

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2$$

Substituindo a relação, obtém-se:

$$F_g^z = g(\sin 180 \cdot \cos \alpha_z + \cos 180 \cdot \sin \alpha_z) = -g \sin \alpha_z$$

Aplicando estas expressões ao módulo do vetor gravidade, tem-se:

$$g^2 = (F_g^x)^2 + (F_g^y)^2 + (F_g^z)^2$$

Substituindo os valores de cada vetor força por suas respectivas expressões:

$$g^2 = g^2[\cos(90 - \alpha_x)]^2 + g^2[\cos(90 - \alpha_y)]^2 + g^2[\sin(180 - \alpha_z)]^2$$

Em funções trigonométricas, é válida a abreviação  $\cos^2(x) = (\cos(x))^2$ , portanto:

$$1 = \cos^2(90 - \alpha_x) + \cos^2(90 - \alpha_y) + \sin^2(180 - \alpha_z)$$

Aplicando a regra do quadrado da diferença para a subtração de arcos, obtém-se:

$$\cos^2(90 - \alpha_x) = \sin^2 \alpha_x$$

$$\cos^2(90 - \alpha_y) = \sin^2 \alpha_y$$

e para

$$\sin^2(180 - \alpha_z) = \sin^2 \alpha_z$$

Substituindo estas, na formulação do módulo do vetor gravidade:

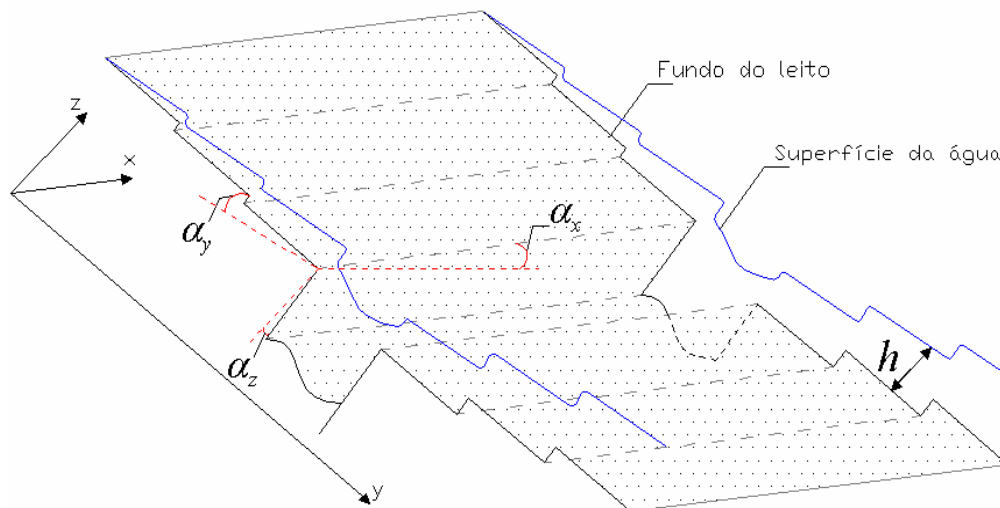
$$1 = \sin^2 \alpha_x + \sin^2 \alpha_y + \sin^2 \alpha_z,$$

Colocando em evidência o ângulo,  $\alpha_z$ :

$$\sin^2 \alpha_z = 1 - \sin^2 \alpha_x - \sin^2 \alpha_y \Rightarrow \alpha_z = \arcsin \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_x - \sin^2 \alpha_y}$$

Portanto o vetor gravidade decomposto nas três direções é:

$$F_g = [g \sin \alpha_x, g \sin \alpha_y, -g \sin \alpha_z] \quad (3.109)$$



**Figura 3.7 - Representação do plano referencial com inclinação.**

- *Força de Coriolis*

Em um sistema de referência em rotação uniforme, os corpos em movimento, tais que vistos por um observador no mesmo referencial, aparecem sujeitos a uma força perpendicular à direção do seu movimento.

A força de Coriolis  $F_C$  é perpendicular ao eixo de rotação do referencial e ao vetor da velocidade do corpo em movimento.

É dada por:  $F_C = f_c v = 2\Omega \sin \Phi \cdot v$  para um referencial fixo na Terra, onde  $\Omega$  é a velocidade angular de rotação do planeta,  $v$  é a velocidade. O ângulo  $\Phi$  é a latitude do lugar considerado, neste trabalho, situado no hemisfério Sul é de  $-4^\circ$ . No hemisfério sul, a Força de Coriolis faz com que o movimento dos corpos livres seja defletido para a esquerda.

Devido à mudança do referencial, o parâmetro de Coriolis  $f_c$  será ajustado para um referencial plano inclinado. Assim, para a direção  $x$ :



$$\int_{h_L \sin \alpha_z}^{(H+\eta) \sin \alpha_z} f_C v dz = f_C v h \sin \alpha_z \quad (3.110)$$

Para a direção  $y$ ,

$$\int_{h_L \sin \alpha_z}^{(H+\eta) \sin \alpha_z} -f_C u dz = -f_C u h \sin \alpha_z \quad (3.111)$$

- *Aproximação Hidrostática*

Pela aproximação hidrostática, na equação de Navier-Stokes tem-se então:

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p = F_g \Rightarrow \nabla p = -\rho \cdot F_g \quad (3.112)$$

isto é,

$$\int_{h_L \sin \alpha_z}^{(H+\eta) \sin \alpha_z} \frac{\partial p}{\partial x} dz = -\rho h \sin \alpha_z g \sin \alpha_x \quad (3.113)$$

$$\int_{h_L \sin \alpha_z}^{(H+\eta) \sin \alpha_z} \frac{\partial p}{\partial y} dz = -\rho h \sin \alpha_z g \sin \alpha_y \quad (3.114)$$

$$\int_{h_L \sin \alpha_z}^{(H+\eta) \sin \alpha_z} \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho h \sin \alpha_z g \sin \alpha_z \quad (3.115)$$

Tem-se, pois, fazendo analogia à equação (3.77):

$$p(x, y, z) = p_f + \rho g x \sin \alpha_x + \rho g y \sin \alpha_y - \rho g z \sin \alpha_z \quad (3.116)$$

- *Termos da força de pressão*

Por hipótese, assume-se que a pressão atmosférica na altitude  $h(x, y, t)$  em um plano inclinado,  $p(x, y, (H + \eta))$ , é dada pela relação:  $p(x, y, (H + \eta)) = p_0 - \rho_{ar} g h$ ,

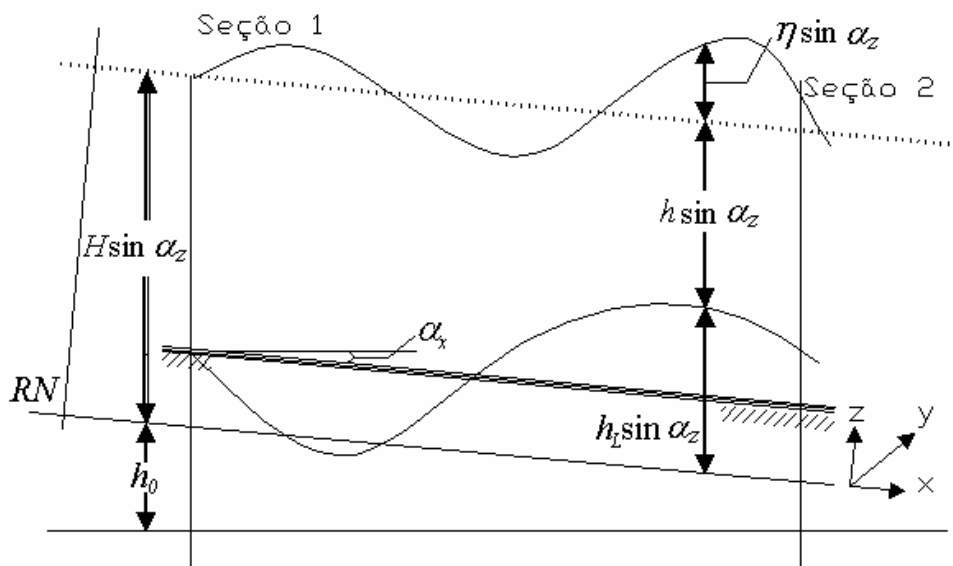
onde  $p_0$  é a pressão atmosférica ao nível do mar e  $\rho_{ar}$  é a densidade do ar aproximadamente ( $\cong 1,2 \text{ Kg.m}^{-3}$ ).

Esta expressão vem de uma aproximação hidrostática para a atmosfera similar a feita para a água. A condição de que  $p(x, y, (H + \eta)) = p_0 - \rho_{ar}gh$  é uma condição de continuidade entre as pressões do ar e da água na interface dos dois fluidos (SILVA, 2002).

Fazendo a superfície livre de escoamento com elevação  $\eta(x, y, t)$  e  $h_L(x, y)$  sendo a medida da altura da topografia do fundo do canal.

De acordo com a **Figura 3.8** tem-se, para um plano inclinado:

$$h = h_0 + [H + \eta(x, y, t)] - x \sin \alpha_x - y \sin \alpha_y \quad (3.117)$$



**Figura 3.8** – Esquema com superfície livre de escoamento com elevação  $\eta(x, y, t)$  e  $h_L(x, y)$ , medida da altura da topografia do fundo do canal em um referencial com inclinação.

e, portanto a pressão na superfície será:

$$p[x, y, (H + \eta)] = p_0 - \rho_{ar}g[h_0 + (H + \eta) - x \sin \alpha_x - y \sin \alpha_y] \quad (3.118)$$

Para um trecho de rio relativamente curto e/ou de pouca inclinação, tal que a variação na altitude e na pressão atmosférica correspondente seja desprezível, pode-se assumir que a pressão na superfície do rio é constante, igual a um valor  $p_s$ .

Mais uma vez, de acordo com a **Figura 3.8**:

$$p[x, y, (H + \eta)] = p_s \quad (3.119)$$

Relembrando a pressão na equação (3.116), então se tem analogamente para a pressão em  $p[x, y, (H + \eta)]$  que:

$$p[x, y, (H + \eta)] = p_f + \rho g x \sin \alpha_x + \rho g y \sin \alpha_y - \rho g [(H + \eta) \sin \alpha_z] \quad (3.120)$$

E, portanto substituindo (3.119) em (3.120), tem-se:

$$p_s = p_f + \rho g x \sin \alpha_x + \rho g y \sin \alpha_y - \rho g [(H + \eta) \sin \alpha_z] \quad (3.121)$$

Onde,

$$p_f = p_s - \rho g x \sin \alpha_x - \rho g y \sin \alpha_y + \rho g [(H + \eta) \sin \alpha_z] \quad (3.122)$$

Substituindo a equação (3.122) na equação (3.116):

$$\begin{aligned} p(x, y, z) &= p_s - \rho g x \sin \alpha_x - \rho g y \sin \alpha_y + \rho g [(H + \eta) \sin \alpha_z] + \dots \\ &\dots + \rho g x \sin \alpha_x + \rho g y \sin \alpha_y - \rho g z \sin \alpha_z \end{aligned} \quad (3.123)$$

Reescrevendo e lembrando que  $H_s = H + \eta$ :

$$p(x, y, z) = p_s + \rho g [H_s - z] \sin \alpha_z \quad (3.124)$$

Nesse caso, aplicando a integral em cada direção:

$$\int_{h_L \sin \alpha_z}^{(H+\eta) \sin \alpha_z} \frac{\partial p}{\partial x} dz = \rho g h \sin \alpha_z \frac{\partial H_s \sin \alpha_z}{\partial x} \quad (3.125)$$

$$\int_{h_L \sin \alpha_z}^{(H+\eta) \sin \alpha_z} \frac{\partial p}{\partial y} dz = \rho g h \sin \alpha_z \frac{\partial H_s \sin \alpha_z}{\partial y} \quad (3.126)$$

$$\int_{h_L \sin \alpha_z}^{(H+\eta) \sin \alpha_z} \frac{\partial p}{\partial z} dz = -\rho h \sin \alpha_z g \sin \alpha_z \quad (3.127)$$

Reunindo o resultado da integração na vertical dos termos da aceleração da gravidade (3.109), força de Coriolis expressões (3.110 e 3.111) e da pressão (3.125, 3.126 e 3.127) tem-se as equações para um escoamento de superfície livre com inclinação nas direções  $x$  e  $y$  em um sistema referencial inercial:

- *Tensão de Cisalhamento no fundo*  $(\tau_x^f; \tau_y^f)$

De acordo com as hipóteses feitas por Prandtl, de que a resistência ao escoamento por atrito no fundo é uma constante conhecida e de que a viscosidade turbulenta varia linearmente com a profundidade, e sabendo-se que o perfil de velocidades sobre uma vertical segue uma lei logarítmica, seria possível estimar  $t_f$  pela expressão,

$$\tau_f = \kappa \frac{U(H_s^1) - U(H_s^2)}{\log(H_s^2 - H_s^1)} \quad (3.130)$$

Caso se pudesse medir as velocidades em duas alturas  $H_s^1$  e  $H_s^2$  (sendo  $\kappa$  a constante de Von Kármán).

O termo  $\tau_f$  está relacionado com a resistência ao escoamento provocada pelo atrito no fundo. Em escoamentos permanentes o equilíbrio entre forças de gravidade e forças de resistência é dado por:

$$\tau_f = \rho g h S_f \quad (3.131)$$

Esta expressão constitui ainda uma boa aproximação no estudo de escoamentos gradualmente variados, como aqueles que se relacionam com a propagação de ondas em águas pouco profundas.

No entanto, como as tensões turbulentas no fundo ainda não são bem compreendidas e a distribuição vertical da velocidade horizontal não pode ser facilmente obtida, costuma-se estimar  $\tau_f$  com o emprego de equações empíricas ou semi-empíricas, tais como a equação de Chézy ou de Manning. Pondo em evidência o termo de declividade da linha de energia na fórmula de Chézy (3.19) que estabelece,  $v^2 = C_h^2 h S_f$ , obtém-se para  $S_f$ , nas direções x e y, a seguinte relação:

$$S_f = \frac{u^2}{C_h^2 h} = \frac{u|u|}{C_h^2 h} \quad (3.132)$$

Onde  $h$  é a profundidade em (m),  $S_f$  é a declividade da linha de energia (m/m),  $C_h$  o coeficiente de Chézy ( $m^{1/2}.s^{-1}$ ) e  $u^2$  ( $m.s^{-1}$ ) foi expresso como  $u|u|$  para se levar em conta a direção de  $S_f$ .

Chézy pode ser dado diretamente ou calculado em função da altura da água  $h$  como, por exemplo, através da fórmula:

$$C_h = \frac{(h)^{1/6}}{n_M} \quad (3.133)$$

Onde  $n_M$  é o coeficiente de Manning.

Para a situação bidimensional e usando a equação de Manning para o cálculo da declividade da linha de energia nas direções  $x$  ( $S_x^f$ ) e  $y$  ( $S_y^f$ ), tem-se para a tensão de cisalhamento no fundo:

$$\tau_x^f |\nabla S_2| = \rho g h S_x^f = \rho g h \frac{u \sqrt{u^2 + v^2}}{C_h^2 \cdot h} = \rho g \frac{n_M^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} \quad (3.134)$$

$$\tau_y^f |\nabla S_2| = \rho g h S_y^f = \rho g h \frac{v \sqrt{u^2 + v^2}}{C_h^2 \cdot h} = \rho g \frac{n_M^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} \quad (3.135)$$

Onde

$$S_f = \sqrt{(S_x^f)^2 + (S_y^f)^2} \quad (3.136)$$

Tais expressões são as comumente utilizadas para representar a tensão de cisalhamento no fundo em modelos bidimensionais horizontais.

Integrando este termo na vertical para um referencial inclinado, tem-se:

$$\int_{h_L \sin \alpha_z}^{(H+\eta) \sin \alpha_z} \frac{\tau_x^f}{\rho h} dz = \int_{h_L \sin \alpha_z}^{(H+\eta) \sin \alpha_z} \frac{\rho g n_M^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{\rho \cdot h^{4/3}} dz = \frac{g \sin \alpha_z n_M^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} \quad (3.137)$$

$$\int_{h_L \sin \alpha_z}^{(H+\eta) \sin \alpha_z} \frac{\tau_y^f}{\rho h} dz = \int_{h_L \sin \alpha_z}^{(H+\eta) \sin \alpha_z} \frac{\rho g n_M^2 \cdot v \sqrt{u^2 + v^2}}{\rho \cdot h^{4/3}} dz = \frac{g \sin \alpha_z n_M^2 \cdot v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} \quad (3.138)$$

- *Tensão de Cisalhamento na Superfície*  $\tau_x^s; \tau_y^s$

A tensão de cisalhamento do vento na superfície da água pode ser parametrizada, para as direções  $x$  e  $y$ , através de uma expressão onde a força de atrito na interface é proporcional ao quadrado da velocidade (aqui tomada como a velocidade do vento):

$$\tau_x^s |\nabla S_1| = \rho_{ar} C_d \omega_x |\omega| \quad (3.139)$$

$$\tau_y^s |\nabla S_1| = \rho_{ar} C_d \omega_y |\omega| \quad (3.140)$$

Onde  $\rho_{ar}$  [ $kg.m^{-3}$ ] é a massa específica do ar;  $\omega$  [ $m.s^{-1}$ ] é a velocidade do vento normalmente a uma altura de 10 [m] da superfície da água e  $C_d$  é o coeficiente de resistência ao escoamento  $1,2 \times 10^{-3}$  (TRENBERTH *et al.*, 1989) e  $\omega_x$  e  $\omega_y$  são as componentes da velocidade do vento  $\omega$  nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, medidas na altura de 10 m.

Portanto, utilizando-se as formulações para a tensão de cisalhamento no fundo baseada na equação de Manning equações (3.137 e 3.138) e para a tensão de cisalhamento na superfície equações (3.139 e 3.140) descritas anteriormente, e ainda escrevendo  $h$  sob a forma  $h(x, y, t) = H(x, y, t) + \eta(x, y, t)$ , o sistema de equações composto por (3.65, 3.128 e 3.129) torna-se:

- *Equação da Continuidade*

$$\frac{\partial H_s}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} = -(H + \eta) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3.65)$$

- Equação da Quantidade de Movimento

Na direção x:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \varepsilon \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \frac{\rho_{ar} C_d \omega_x \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}{\rho(H+\eta)} + \frac{g \sin \alpha_z n_M^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{(H+\eta)^{1/3}} + \dots \\ \dots + g \sin \alpha_z \frac{\partial H_s \sin \alpha_z}{\partial x} - g \sin \alpha_z \sin \alpha_x - f_c v \sin \alpha_z = 0 \end{aligned} \quad (3.141)$$

Na direção y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \frac{\rho_{ar} C_d \omega_y \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}{\rho(H+\eta)} + \frac{g \sin \alpha_z n_M^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{(H+\eta)^{1/3}} + \dots \\ \dots + g \sin \alpha_z \frac{\partial H_s \sin \alpha_z}{\partial y} - g \sin \alpha_z \sin \alpha_y + f_c u \sin \alpha_z = 0 \end{aligned} \quad (3.142)$$

### 3.4.3 - Análise de Escalas dos Termos das Equações

O objetivo nesta seção é analisar o que representa cada termo das equações da continuidade e do movimento na forma das equações (3.65) e (3.141), respectivamente, além de estimar a grandeza destes, numa situação de escoamento no canal (**Tabela 1**) e de escoamento na área de várzea (**Tabela 2**), a fim de avaliarmos quais termos são realmente relevantes na dinâmica do escoamento em cada sistema. E assim, a partir das hipóteses simplificativas consideradas para este trabalho, obter as equações que vão representar o mais realisticamente possível o fluxo na calha e em planícies de inundação.

Este processo de escalonamento ou ordenamento de termos é freqüentemente usado em mecânica dos fluidos dado à dificuldade de se resolver as equações completas. A partir das ordens de grandeza de cada uma das variáveis, pode-se comparar cada termo das equações em determinada situação e então decidir quais deles deverão estar presentes no processo de implementação, ou seja, quais deles podem ser negligenciados e assim simplificar a análise. Considerando as seguintes ordens de grandeza para as variáveis em questão em ambas as situações, valores típicos (em metros e segundos) de um escoamento na região do Rio Solimões:



$\bar{B} \sim 10^3 m$ , é a ordem de grandeza da largura do canal e  $\bar{B} \sim 10^4 m$ , é a ordem de grandeza da largura deste no momento após o transbordamento.

$\bar{L} \sim 100km = 10^5 m$ , ordem de grandeza do comprimento do canal.

$\bar{H} \sim 10 m$ , é a ordem de grandeza da profundidade média  $H$  a partir de um nível de referência. Assim como  $\bar{h}_m \sim 10 m$  que é a cota média do canal que vai do leito do canal até a profundidade  $H$ . Estas profundidades caracterizam a sazonalidade da região que segundo BEVIS, *et al.* (2005) tem uma variação de 10 a 15 metros.

Numa escala temporal trimestral (ocorrência de cada um dos períodos de enchente, cheia, vazante e seca, para a região amazônica), a variação desta profundidade  $H$ , é significativa para a equação, neste trabalho esse termo é denominado como sendo de baixa frequência. Em termos de uma análise temporal de segundos a meses, esta profundidade  $H$  não terá variações tão significativas.

$\bar{\eta} \sim 10^{-1} m$ , ordem de grandeza da elevação da superfície livre  $\eta$ . Numa análise de escala temporal de segundos, esse termo mostrará variações significativas, sendo denominado de alta frequência. Devido aos processos que envolvem a planície de inundação pertencer a uma escala temporal da ordem de segundos a meses, este termo não será significativo na frequência baixa.

$H_s \sim 10m$ , ordem de grandeza da profundidade que vai do nível de referência até a elevação da superfície, portanto  $\bar{H}_s = \bar{H} + \bar{\eta}$ .

Para este trabalho, considerou-se uma variável genérica  $\zeta$  que substituirá  $H$  ou  $\eta$ , dependendo da frequência a que estiver sendo tratada. Quando  $\zeta$  for associado a fenômenos da escala temporal da ordem de meses (baixa frequência),  $H_s$  será igual à  $H$ . Para  $\zeta$ , associado a fenômenos da escala temporal da ordem de segundos (alta frequência),  $H_s$  será igual à  $\eta$ .

$\bar{h}_L \sim 10 m$ , ordem de grandeza da topografia que vai do nível de referência até o leito do canal.

$\bar{h} \sim 10 \text{ m}$ , é a ordem de grandeza da profundidade do escoamento.

$\bar{U} \sim 1 \text{ m.s}^{-1}$ , é a ordem de grandeza da velocidade  $u$  na direção do fluxo. Para a planície de inundação, este valor será da ordem de  $\bar{U} \sim 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ , obtido através do cálculo de uma inundação de extensão de  $50 \text{ km}$  num período de três meses.

$\bar{V} \sim 10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$ , ordem de grandeza da velocidade  $v$  na direção transversal ao fluxo, estimada a partir da equação da continuidade (3.22), onde  $\frac{\partial w}{\partial z} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$ , fazendo o termo  $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ , então,  $\frac{U}{L} = \frac{V}{B}$ , assim  $V = \frac{UB}{L}$ , ou seja,  $V = \frac{1 \cdot 10^3}{10^5}$ . Para a planície de inundação é feita igual analogia para o cálculo.

$\bar{T} \sim 10^5 \text{ s}$ , é a ordem de grandeza do tempo  $t$ , obtido a partir do quociente do espaço pela velocidade na direção do fluxo, que representa quanto tempo uma partícula leva para percorrer todo o percurso.

$\bar{f}_c = 2\bar{\Omega} \sin \bar{\Phi} \sim 10^{-7}$ , é a ordem de grandeza para o parâmetro de Coriolis, onde a velocidade angular de rotação da Terra é de  $\bar{\Omega} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1} \sim 10^{-5}$ , numa latitude  $\Phi$  de aproximadamente  $-4^\circ$  de ordem  $\sin \bar{\Phi} = 10^{-2}$ .

$\bar{\varepsilon} = \bar{\nu}_t \sim 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , é a ordem de grandeza do coeficiente de viscosidade turbulenta do fluido.

Devido ao fato de todos os termos das equações serem termos médios, utilizou-se aqui a viscosidade turbulenta. Segundo POND E PICKARD (1983), valores estimados para os coeficientes turbulentos na direção horizontal  $\nu_t^x$  e  $\nu_t^y$  variam de 10 até  $10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Para  $\nu_t^z$ , as estimativas variam de  $10^{-5}$  até  $10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . O coeficiente de viscosidade turbulenta na direção horizontal ( $\nu_t^x$  e  $\nu_t^y$ ) é bem maior que na vertical ( $\nu_t^z$ ). Os altos valores de ( $\nu_t^x$  e  $\nu_t^y$ ) em relação a ( $\nu_t^z$ ) refletem as diferentes extensões nas quais a mistura pode ocorrer na horizontal ou na vertical. Portanto, para

este trabalho considerou-se o menor valor para este coeficiente de viscosidade turbulenta nas duas situações.

$\bar{\mu}_T \sim 10^4 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ , é a ordem de grandeza para o coeficiente de viscosidade molecular do fluido, obtido a partir do coeficiente de viscosidade turbulenta pela expressão  $\nu_T = \mu_T / \rho$ .

$\bar{G} \sim 10 \text{ m.s}^{-2}$ , é a ordem de grandeza para a gravidade  $g$ .

Assumindo que a declividade média do canal é  $S_0 \cong 3,0 \text{ cm/km}$  (BEVIS *et al.*, 2005), a declividade da calha será da ordem de  $S_0^x \sim 10^{-5} \text{ m.m}^{-1,2}$  para a direção  $x$ . Esta ordem de grandeza significa uma queda de 1 metro ao longo de 100.000 metros de extensão de rio. Assim pode-se escrever que  $S_0^x \sim 10^{-5} \text{ rad}$ . Considerando a mesma declividade para a direção  $y$ , admitindo a largura do canal sendo da ordem de  $10^3 \text{ m}$ , então  $S_0^y \sim 10^{-3} \text{ rad}$ , isto é, uma ordem de grandeza de queda de 1 m ao longo de 1.000 m de largura de rio. Este valor será recalculado para a planície de inundação. Assim, sendo  $\tan \alpha_x = S_0^x$  e  $\tan \alpha_y = S_0^y$ , tem-se que  $\alpha_x \sim 10^{-5} \text{ rad}$  e  $\alpha_y \sim 10^{-3} \text{ rad}$ . Como  $\alpha_z$  é obtido a partir de  $\alpha_x$  e  $\alpha_y$  pela expressão:  $\alpha_z = \arcsin \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_x - \sin^2 \alpha_y}$ , portanto, ele será da ordem de  $\alpha_z \sim 1 \text{ rad}$ .

$\bar{C}_h^2 \sim 10^4 \text{ m/m}$ , é a ordem de grandeza para o coeficiente de Chézy  $C_h$ , no canal, tanto na direção  $x$  quanto na  $y$ , obtido pela expressão (3.133), onde

$$C_h = \frac{h^6}{n_M} \sim 10^4$$

O valor do coeficiente de rugosidade de Manning ( $n_M$ ) utilizado na equação pode ser determinado com base nas características do leito e das margens dos rios, individualmente para cada célula. Entretanto, considerando que os resultados do modelo são pouco sensíveis a este parâmetro, ele pode ter um valor fixo para todo o canal e

<sup>2</sup> De acordo com o Sistema Internacional de Unidades (SI) a grandeza de um ângulo plano é dada em rad, onde:  $1 \text{ rad} = \text{m.m}^{-1} = 1$ .

outro valor diferenciado para a planície inundada. Nas aplicações apresentadas neste trabalho, o valor de Manning  $n_M$  será igual a 0,03 para o canal e 1 para a planície de inundação. Assim, considera-se o coeficiente de Manning  $\bar{n}_M$  da ordem de  $10^{-2}$  (STRASSER & RIBEIRO, 2003) para o canal e da ordem de 1 para a área alagada. Portanto, para a planície inundada, o valor do coeficiente de Chézy será de aproximadamente  $\bar{C}_h^2 \sim 10^2 \text{ m/m}$ .

$\bar{\rho}_{ar} \sim 1. \text{kg.m}^{-3}$ , é a ordem de grandeza para a densidade do ar  $\rho_{ar}$ .

$\bar{\rho} \sim 10^3 \text{kg.m}^{-3}$ , é a ordem de grandeza para a densidade da água  $\rho = 1000 \text{kg.m}^{-3}$  na pressão atmosférica.

$S_f^x \sim 10^{-6}$  e  $S_f^y \sim 10^{-10}$ , representam a ordem de grandeza para a declividade da linha de energia obtida a partir da fórmula de Chézy, ou seja,  $S_f^x = \frac{\bar{U}^2}{\bar{C}_h^2 \cdot \bar{h}} = \frac{1}{10^4 \cdot 10}$  e  $S_f^y = \frac{\bar{V}^2}{\bar{C}_h^2 \cdot \bar{h}} = \frac{10^{-2} \cdot 10^{-2}}{10^4 \cdot 10}$ . Também será recalculado para a planície de inundação.

$\bar{C}_d \sim 10^{-3}$ , ordem de grandeza do coeficiente de arrasto do vento  $C_d \cong 1.2 \times 10^{-3}$  (TRENBERTH *et al.*, 1989).

$\bar{\omega}_x$  e  $\bar{\omega}_y \sim 1 \text{m.s}^{-1}$ , correspondem à ordem de grandeza para a velocidade do vento,  $\omega$ , para o canal nas direções  $x$  e  $y$ , considerado de acordo com o projeto do NCEP/NCAR (National Centers for Environmental Prediction/Nacional Center for Atmospheric Research), denominado Reanalysis Project (KALNAY, 1996; KISTLER, 2001). Para a planície de inundação, segundo RAUPACH e THOM (1981), a ordem de grandeza passa a ser de  $\bar{\omega}_x$  e  $\bar{\omega}_y \sim 10^{-1} \text{m.s}^{-1}$ .

Analisando cada termo das equações, para a situação no canal e na área de várzea, tem-se para Tabela 1 e Tabela 2, respectivamente:

TABELA 1 - ANÁLISE DIMENSIONAL DOS TERMOS DAS EQUAÇÕES PARA O CANAL

TABELA 1 - ANÁLISE DIMENSIONAL DOS TERMOS DAS EQUAÇÕES PARA O CANAL												
<b>Dimensão dos Termos</b>												
$\bar{U} \sim$	1,00E+00	$\bar{\rho} \sim$	1,00E+03	$S_0^z \sim$	1,00E-05	$\bar{G} \sim$	1,00E+01	$\sin \bar{\Phi} \sim$	-6,98E-02			
$\bar{V} \sim$	1,00E-02	$\mu_T \sim$	1,00E+04	$S_0^y \sim$	1,00E-03	$\bar{\omega}_x \sim$	1,00E+00	$\cos \bar{\alpha}_z \sim$	1,00E-03			
$\bar{T} \sim$	1,00E+05	$\bar{\varepsilon} \sim$	1,00E+01	$S_f^x \sim$	4,64E-06	$\bar{\omega}_y \sim$	1,00E+00	$\sin \bar{\alpha}_x \sim$	1,00E-05			
$\bar{L} \sim$	1,00E+05	$\bar{U}_T \sim$	1,00E+01	$S_f^y \sim$	4,64E-10	$\bar{\Omega} \sim$	1,00E-05	$\sin \bar{\alpha}_y \sim$	1,00E-03			
$\bar{B} \sim$	1,00E+03	$\bar{h} \sim$	1,00E+01	$\bar{n}_M \sim$	1,00E-02	$\bar{\eta} \sim$	1,00E-01	$H_s =$	$H + \eta$			
$\bar{H} \sim$	1,00E+01	$\bar{\rho}_{ar} \sim$	1,00E+00	$\bar{C}_h^2 \sim$	2,15E+04	$\bar{C}_d \sim$	1,00E-03	$\sin \alpha_z \sim$	1,00E+00			
<b>Equação da Continuidade</b>												
Local	Advectivo											
$\frac{\partial H_s}{\partial t}$	$u \frac{\partial \eta}{\partial x}$	$v \frac{\partial \eta}{\partial y}$	$h \frac{\partial u}{\partial x}$	$h \frac{\partial v}{\partial y}$								
<b>Ordem Dimensional</b>												
$\frac{\bar{H}_s}{\bar{T}}$	$\bar{U} \frac{\bar{\eta}}{\bar{L}}$	$\bar{V} \frac{\bar{\eta}}{\bar{B}}$	$\bar{h} \frac{\bar{U}}{\bar{L}}$	$\bar{h} \frac{\bar{V}}{\bar{B}}$								
1,01E-04	1,00E-06	1,00E-06	1,00E-02	1,00E-04								
<b>Equação na direção X</b>												
Local	Advectivo	Tensões laterais		Tensões na superfície	Tensões no leito	Gradiente de pressão		Coriolis				
$\rho \frac{\partial u}{\partial x}$	$\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$	$\rho v \frac{\partial u}{\partial y}$	$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	$\rho g \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$\rho g \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$\frac{\partial H_s}{\partial x} \sin \alpha_z$	$\frac{\partial H_s}{\partial x} \sin \alpha_z$	$f_c u \sin \alpha_z$	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$			
Dimensional	$\frac{\bar{U}}{\bar{L}}$	$\frac{\bar{V}}{\bar{B}}$	$\frac{\bar{U}\bar{U}}{\bar{L}\bar{L}}$	$\frac{\bar{U}\bar{U}}{\bar{R}\bar{R}}$	$\frac{\bar{\rho}_{ar} \bar{C}_d \bar{\omega}_x \sqrt{\bar{\omega}_x^2 + \bar{\omega}_y^2}}{\bar{\rho} \bar{h}^2}$	$\frac{\bar{G} \cdot \sin \bar{\alpha}_z \cdot \bar{n}_M^2 \cdot \bar{U} \sqrt{\bar{U}^2 + \bar{V}^2}}{\bar{n}_M \bar{h}^{1/3}}$	$\bar{G} \sin \bar{\alpha}_z \frac{\bar{H}_s \sin \bar{\alpha}_z}{\bar{L}}$	$\sin \bar{\alpha}_z \bar{G} \sin \bar{\alpha}_z$	$f_c \bar{V} \sin \bar{\alpha}_z$	$\frac{\bar{U}}{\bar{T}}$		
1,00E-05	1,00E-05	1,00E-01	1,00E+01	1,41E-07	-4,64E-04	1,01E-03	1,00E-04	-1,40E-05	1,00E-05			
<b>Equação na direção Y</b>												
$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$	$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$	$\rho v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$	$\rho v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$	$\rho g \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$	$\rho g \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$	$\frac{\partial H_s}{\partial y} \sin \alpha_z$	$\frac{\partial H_s}{\partial y} \sin \alpha_z$	$\sin \alpha_z g \sin \alpha_y$	$f_c v \sin \alpha_z$	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$u \frac{\partial v}{\partial x}$	$v \frac{\partial v}{\partial y}$
Dimensional	$\frac{\bar{V}}{\bar{L}}$	$\frac{\bar{V}\bar{V}}{\bar{L}\bar{L}}$	$\frac{\bar{V}\bar{V}}{\bar{B}\bar{B}}$	$\frac{\bar{\rho}_{ar} \bar{C}_d \bar{\omega}_y \sqrt{\bar{\omega}_x^2 + \bar{\omega}_y^2}}{\bar{\rho} \bar{h}^2}$	$\frac{g \cdot \sin \bar{\alpha}_z \cdot \bar{n}_M^2 \cdot \bar{V} \sqrt{\bar{U}^2 + \bar{V}^2}}{\bar{n}_M \bar{h}^{1/3}}$	$\bar{G} \sin \bar{\alpha}_z \frac{\bar{H}_s \sin \bar{\alpha}_z}{\bar{L}}$	$\sin \bar{\alpha}_z \bar{G} \sin \bar{\alpha}_y$	$f_c \bar{U} \sin \bar{\alpha}_z$	$\frac{\bar{v}}{\bar{t}}$	$\bar{u} \frac{\bar{v}}{\bar{x}}$	$\bar{v} \frac{\bar{v}}{\bar{y}}$	
1,00E-07	1,00E-07	1,00E-07	1,00E-03	1,41E-07	4,64E-06	1,01E-04	1,00E-04	1,00E-05	1,00E-06	1,40E-06	1,40E-06	

TABELA 2 - ANÁLISE DIMENSIONAL DOS TERMOS DAS EQUAÇÕES PARA PLANÍCIE INUNDADA

TABELA 2 - ANÁLISE DIMENSIONAL DOS TERMOS DAS EQUAÇÕES PARA PLANÍCIE INUNDADA									
<b>Dimensão dos Termos</b>									
$\bar{U} \sim$	1,00E-03	$\bar{\rho} \sim$	1,00E+03	$S_b^x \sim$	1,00E-05	$\bar{G} \sim$	1,00E+01	$\sin \bar{\Phi} \sim$	-6,98E-02
$\bar{V} \sim$	1,00E-04	$\mu_T \sim$	1,00E+04	$S_b^{xy} \sim$	1,00E-04	$\bar{\omega}_x \sim$	1,00E-01	$\cos \bar{\alpha}_z \sim$	1,00E-04
$\bar{T} \sim$	1,00E+08	$\bar{\varepsilon} \sim$	1,00E+01	$S_f^y \sim$	1,00E-06	$\bar{\omega}_y \sim$	1,00E-01	$\sin \bar{\alpha}_x \sim$	1,00E-05
$\bar{L} \sim$	1,00E+05	$\bar{U}_T \sim$	1,00E+01	$S_f^x \sim$	1,00E-08	$\bar{\Omega} \sim$	1,00E-05	$\sin \bar{\alpha}_y \sim$	1,00E-04
$\bar{B} \sim$	1,00E+04	$\bar{h} \sim$	1,00E+00	$\bar{n}_M \sim$	1,00E+00	$\bar{\eta} \sim$	1,00E-01	$H_s =$	$H + \eta$
$\bar{H} \sim$	1,00E+01	$\bar{\rho}_{ar} \sim$	1,00E+00	$\bar{C}_h^2 \sim$	1,00E+00	$\bar{C}_d \sim$	1,00E-03	$\sin \alpha_z \sim$	1,00E+00
<b>Equação da Continuidade</b>									
Local	Advectivo								
$\frac{\partial H_s}{\partial t}$	$u \frac{\partial \eta}{\partial x}$	$v \frac{\partial \eta}{\partial y}$	$h \frac{\partial u}{\partial x}$	$h \frac{\partial v}{\partial y}$					
<b>Ordem Dimensional</b>									
$\frac{\bar{H}_s}{\bar{T}}$	$\bar{U} \frac{\bar{\eta}}{\bar{L}}$	$\bar{V} \frac{\bar{\eta}}{\bar{B}}$	$\bar{h} \frac{\bar{U}}{\bar{L}}$	$\bar{h} \frac{\bar{V}}{\bar{B}}$					
<b>1,01E-07</b>	<b>1,00E-09</b>	<b>1,00E-09</b>	<b>1,00E-07</b>	<b>1,00E-08</b>					
<b>Equação na direção X</b>									
Local	Advectivo		Tensões laterais		Tensões na superfície	Tensões no leito	Gradiente de pressão		Coriolis
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$u \frac{\partial u}{\partial x}$	$v \frac{\partial u}{\partial y}$	$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	$\frac{\rho_{ar} C_d \omega_x \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}{\rho h}$	$\frac{g \sin \alpha_z n_M^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}}$	$g \sin \alpha_z \frac{\partial H_s \sin \alpha_z}{\partial x}$	$\sin \alpha_z g \sin \alpha_x$	$f_c v \sin \alpha_z$
<b>Ordem Dimensional</b>									
$\frac{\bar{U}}{\bar{T}}$	$\bar{U} \frac{\bar{U}}{\bar{L}}$	$\bar{V} \frac{\bar{U}}{\bar{B}}$	$\bar{\varepsilon} \frac{\bar{U} \bar{U}}{\bar{L} \bar{L}}$	$\bar{\varepsilon} \frac{\bar{U} \bar{U}}{\bar{B} \bar{B}}$	$\frac{\bar{\rho}_{ar} \bar{C}_d \bar{\omega}_x \sqrt{\bar{\omega}_x^2 + \bar{\omega}_y^2}}{\bar{\rho} \bar{h}}$	$\frac{\bar{G} \cdot \sin \bar{\alpha}_z \bar{n}_M^2 \bar{U} \sqrt{\bar{U}^2 + \bar{V}^2}}{\bar{h}^{1/3}}$	$\bar{G} \sin \bar{\alpha}_z \frac{\bar{H}_s \sin \bar{\alpha}_z}{\bar{L}}$	$\sin \bar{\alpha}_z \bar{G} \sin \bar{\alpha}_x$	$\bar{f}_c \bar{v} \sin \bar{\alpha}_z$
<b>1,00E-11</b>	<b>1,00E-11</b>	<b>1,00E-11</b>	<b>1,00E-05</b>	<b>1,00E-05</b>	<b>1,41E-08</b>	<b>1,00E-05</b>	<b>1,01E-03</b>	<b>1,00E-04</b>	<b>-1,40E-10</b>
<b>Equação na direção Y</b>									
$\frac{\partial v}{\partial t}$	$u \frac{\partial v}{\partial x}$	$v \frac{\partial v}{\partial y}$	$\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$	$\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$	$\frac{\rho_{ar} C_d \omega_y \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}{\rho h}$	$\frac{g \sin \alpha_z n_M^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}}$	$g \sin \alpha_z \frac{\partial H_s \sin \alpha_z}{\partial y}$	$\sin \alpha_z g \sin \alpha_y$	$f_c u \sin \alpha_z$
<b>Ordem Dimensional</b>									
$\frac{\bar{V}}{\bar{T}}$	$\bar{U} \frac{\bar{V}}{\bar{L}}$	$\bar{V} \frac{\bar{V}}{\bar{B}}$	$\bar{\varepsilon} \frac{\bar{V} \bar{V}}{\bar{L} \bar{L}}$	$\bar{\varepsilon} \frac{\bar{V} \bar{V}}{\bar{B} \bar{B}}$	$\frac{\bar{\rho}_{ar} \bar{C}_d \bar{\omega}_y \sqrt{\bar{\omega}_x^2 + \bar{\omega}_y^2}}{\bar{\rho} \bar{h}}$	$\frac{\bar{G} \cdot \sin \bar{\alpha}_z \bar{n}_M^2 \bar{V} \sqrt{\bar{U}^2 + \bar{V}^2}}{\bar{h}^{1/3}}$	$\bar{G} \sin \bar{\alpha}_z \frac{\bar{H}_s \sin \bar{\alpha}_z}{\bar{B}}$	$\sin \bar{\alpha}_z \bar{G} \sin \bar{\alpha}_y$	$\bar{f}_c \bar{u} \sin \bar{\alpha}_z$
<b>1,00E-12</b>	<b>1,00E-12</b>	<b>1,00E-12</b>	<b>1,00E-07</b>	<b>1,00E-07</b>	<b>1,41E-08</b>	<b>1,00E-06</b>	<b>1,01E-02</b>	<b>1,00E-03</b>	<b>-1,40E-09</b>

Na análise dimensional dos termos das equações para o canal (Tabela 1), estes foram avaliados separadamente por meio da ordem de grandeza do termo de aceleração local na direção x, por ser a direção de maior intensidade do fluxo. Portanto, os termos da ordem de grandeza maior ou igual a este termo serão considerados de maior importância. No entanto na análise dimensional dos termos das equações para planície inundada (Tabela 2), a avaliação se deu por meio da ordem de grandeza do termo de aceleração local na direção y, por ser a direção do fluxo durante a variação do nível da água entre a seca e a cheia. Portanto, os termos da ordem de grandeza maior ou igual ao termos de aceleração local na direção y terão maior importância.

Com relação aos dados apresentados nas Tabelas 1 e 2, vale ressaltar as seguintes observações:

- Pela Tabela 1, todos os termos da equação da continuidade são importantes, por possuírem ordem de grandeza maior do que a do termo de advecção local na direção x. Para a equação do movimento na direção x, na mesma Tabela, somente os termos que representam a tensão na superfície e Coriolis não são relevantes. Para os termos na direção y, apesar das tensões laterais se mostrarem relevantes não apresentarão influência devido à distância entre as margens. E como observado, a força de gradiente de pressão domina o escoamento.
- Na Tabela 2, de maneira analoga à Tabela 1, avaliando pela ordem de grandeza, todos os termos inclusive o que representa a força de Coriolis (negativo) são relevantes. E como apresentado por esta tabela, os termos de tensão no leito e gradiente de pressão são os que se mostram dominantes.

Através das tabelas podemos testar as equações num referencial plano inclinado de vários modos, a fim de conhecer melhor a influência de cada termo na situação de canal ou planície inundada. Assim como, avaliar as forças em cada termo das equações em diferentes escalas de frequência e em qualquer momento do ciclo sazonal da região Amazônica. Pode-se mostrar também que retirando as inclinações dos termos das equações para um plano inclinado, ou seja, fazendo o referencial retornar ao eixo cartesiano normal é obtido novamente as equações para um referencial plano horizontal.

TABELA 3 - ANÁLISE DIMENSIONAL DOS TERMOS DAS EQUAÇÕES PARA O MODELO DO BATES (Canal)

TABELA 3 - ANÁLISE DIMENSIONAL DOS TERMOS DAS EQUAÇÕES PARA O MODELO DO BATES (Canal)									
<b>Dimensão dos Termos</b>									
$\bar{U} \sim$	1,00E+00	$\bar{\rho} \sim$	1,00E+03	$S_0^z \sim$	1,00E-04	$\bar{G} \sim$	1,00E+01	$\sin \bar{\Phi} \sim$	-6,98E-02
$\bar{V} \sim$	1,00E-02	$\mu_T \sim$	1,00E+04	$S_0^y \sim$	1,00E-02	$\bar{\omega}_x \sim$	1,00E+00	$\cos \bar{\alpha}_z \sim$	1,00E-02
$\bar{T} \sim$	1,00E+04	$\bar{\varepsilon} \sim$	1,00E+01	$S_f^x \sim$	1,00E-04	$\bar{\omega}_y \sim$	1,00E+00	$\sin \bar{\alpha}_x \sim$	1,00E-04
$\bar{L} \sim$	1,00E+04	$\bar{U}_T \sim$	1,00E+01	$S_f^y \sim$	1,00E-08	$\bar{\Omega} \sim$	1,00E-05	$\sin \bar{\alpha}_y \sim$	1,00E-02
$\bar{B} \sim$	1,00E+02	$\bar{h} \sim$	1,00E+00	$\bar{n}_M \sim$	1,00E-02	$\bar{\eta} \sim$	1,00E-01	$H_s =$	$H + \eta$
$\bar{H} \sim$	1,00E+00	$\bar{\rho}_{ar} \sim$	1,00E+00	$\bar{C}_h^2 \sim$	1,00E+04	$\bar{C}_d \sim$	1,00E-03	$\sin \alpha_z \sim$	1,00E+00
<b>Equação da Continuidade</b>									
Local	Advectivo								
$\frac{\partial H_s}{\partial t}$	$u \frac{\partial \eta}{\partial x}$	$v \frac{\partial \eta}{\partial y}$	$h \frac{\partial u}{\partial x}$	$h \frac{\partial v}{\partial y}$					
<b>Ordem Dimensional</b>									
$\frac{\bar{H}_s}{\bar{T}}$	$\bar{U} \frac{\bar{\eta}}{\bar{L}}$	$\bar{V} \frac{\bar{\eta}}{\bar{B}}$	$\bar{h} \frac{\bar{U}}{\bar{L}}$	$\bar{h} \frac{\bar{V}}{\bar{B}}$					
<b>1,10E-04</b>	<b>1,00E-05</b>	<b>1,00E-05</b>	<b>1,00E-02</b>	<b>1,00E-04</b>					
<b>Equação na direção X</b>									
Local	Advectivo		Tensões laterais		Tensões na superfície	Tensões no leito	Gradiente de pressão		Coriolis
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$u \frac{\partial u}{\partial x}$	$v \frac{\partial u}{\partial y}$	$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	$\frac{\rho_{ar} C_d \omega_x \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}{\rho h}$	$\frac{g \sin \alpha_z n_M^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}}$	$g \sin \alpha_z \frac{\partial H_s \sin \alpha_z}{\partial x}$	$\sin \alpha_z g \sin \alpha_x$	$f_c v \sin \alpha_z$
<b>Ordem Dimensional</b>									
$\frac{\bar{U}}{\bar{T}}$	$\bar{U} \frac{\bar{U}}{\bar{L}}$	$\bar{V} \frac{\bar{U}}{\bar{B}}$	$\bar{\varepsilon} \frac{\bar{U} \bar{U}}{\bar{L} \bar{L}}$	$\bar{\varepsilon} \frac{\bar{U} \bar{U}}{\bar{B} \bar{B}}$	$\frac{\bar{\rho}_{ar} \bar{C}_d \bar{\omega}_x \sqrt{\bar{\omega}_x^2 + \bar{\omega}_y^2}}{\bar{\rho} \bar{h}}$	$\frac{\bar{G} \cdot \sin \bar{\alpha}_z \bar{n}_M^2 \bar{U} \sqrt{\bar{U}^2 + \bar{V}^2}}{\bar{h}^{1/3}}$	$\bar{G} \sin \bar{\alpha}_z \frac{\bar{H}_s \sin \bar{\alpha}_z}{\bar{L}}$	$\sin \bar{\alpha}_z \bar{G} \sin \bar{\alpha}_x$	$\bar{f}_c \bar{V} \sin \bar{\alpha}_z$
<b>1,00E-04</b>	<b>1,00E-04</b>	<b>1,00E-04</b>	<b>1,00E+01</b>	<b>1,00E+01</b>	<b>1,41E-06</b>	<b>1,00E-03</b>	<b>1,10E-03</b>	<b>1,00E-03</b>	<b>-1,40E-08</b>
<b>Equação na direção Y</b>									
$\frac{\partial v}{\partial t}$	$u \frac{\partial v}{\partial x}$	$v \frac{\partial v}{\partial y}$	$\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$	$\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$	$\frac{\rho_{ar} C_d \omega_y \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}{\rho h}$	$\frac{g \sin \alpha_z n_M^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}}$	$g \sin \alpha_z \frac{\partial H_s \sin \alpha_z}{\partial y}$	$\sin \alpha_z g \sin \alpha_y$	$f_c u \sin \alpha_z$
<b>Ordem Dimensional</b>									
$\frac{\bar{V}}{\bar{T}}$	$\bar{U} \frac{\bar{V}}{\bar{L}}$	$\bar{V} \frac{\bar{V}}{\bar{B}}$	$\bar{\varepsilon} \frac{\bar{V} \bar{V}}{\bar{L} \bar{L}}$	$\bar{\varepsilon} \frac{\bar{V} \bar{V}}{\bar{B} \bar{B}}$	$\frac{\bar{\rho}_{ar} \bar{C}_d \bar{\omega}_y \sqrt{\bar{\omega}_x^2 + \bar{\omega}_y^2}}{\bar{\rho} \bar{h}}$	$\frac{\bar{G} \cdot \sin \bar{\alpha}_z \bar{n}_M^2 \bar{V} \sqrt{\bar{U}^2 + \bar{V}^2}}{\bar{h}^{1/3}}$	$\bar{G} \sin \bar{\alpha}_z \frac{\bar{H}_s \sin \bar{\alpha}_z}{\bar{B}}$	$\sin \bar{\alpha}_z \bar{G} \sin \bar{\alpha}_y$	$\bar{f}_c \bar{U} \sin \bar{\alpha}_z$
<b>1,00E-06</b>	<b>1,00E-06</b>	<b>1,00E-06</b>	<b>1,00E-03</b>	<b>1,00E-03</b>	<b>1,41E-06</b>	<b>1,00E-05</b>	<b>1,10E-01</b>	<b>1,00E-01</b>	<b>-1,40E-06</b>



TABELA 4 - ANÁLISE DIMENSIONAL DOS TERMOS DAS EQUAÇÕES PARA O MODELO DO BATES (Planície Inundada)									
<b>Dimensão dos Termos</b>									
$\bar{U} \sim$	1,00E+00	$\bar{\rho} \sim$	1,00E+03	$S_0^x \sim$	1,00E-04	$\bar{G} \sim$	1,00E+01	$\sin \bar{\Phi} \sim$	-6,98E-02
$\bar{V} \sim$	1,00E-01	$\mu_T \sim$	1,00E+04	$S_0^y \sim$	1,00E-03	$\bar{\omega}_x \sim$	1,00E-01	$\cos \bar{\alpha}_z \sim$	1,00E-03
$\bar{T} \sim$	1,00E+04	$\bar{\varepsilon} \sim$	1,00E+01	$S_f^x \sim$	1,00E-02	$\bar{\omega}_y \sim$	1,00E-01	$\sin \bar{\alpha}_x \sim$	1,00E-04
$\bar{L} \sim$	1,00E+04	$\bar{U}_T \sim$	1,00E+01	$S_f^y \sim$	1,00E-04	$\bar{\Omega} \sim$	1,00E-05	$\sin \bar{\alpha}_y \sim$	1,00E-03
$\bar{B} \sim$	1,00E+03	$\bar{h} \sim$	1,00E+00	$\bar{\eta}_M \sim$	1,00E-01	$\bar{\eta} \sim$	1,00E-01	$H_s =$	$H + \eta$
$\bar{H} \sim$	1,00E+00	$\bar{\rho}_{ar} \sim$	1,00E+00	$\bar{C}_h^2 \sim$	1,00E+02	$\bar{C}_d \sim$	1,00E-03	$\sin \alpha_z \sim$	1,00E+00
<b>Equação da Continuidade</b>									
Local	Advecivo								
$\frac{\partial H_s}{\partial t}$	$u \frac{\partial \eta}{\partial x}$	$v \frac{\partial \eta}{\partial y}$	$h \frac{\partial u}{\partial x}$	$h \frac{\partial v}{\partial y}$					
<b>Ordem Dimensional</b>									
$\frac{\bar{H}_s}{\bar{T}}$	$\bar{U} \frac{\bar{\eta}}{\bar{L}}$	$\bar{V} \frac{\bar{\eta}}{\bar{B}}$	$\bar{h} \frac{\bar{U}}{\bar{L}}$	$\bar{h} \frac{\bar{V}}{\bar{B}}$					
1,10E-04	1,00E-05	1,00E-05	1,00E-03	1,00E-04					
<b>Equação na direção X</b>									
Local	Advecivo		Tensões laterais		Tensões na superfície	Tensões no leito	Gradiente de pressão		Coriolis
$\frac{\partial u}{\partial t}$	$u \frac{\partial u}{\partial x}$	$v \frac{\partial u}{\partial y}$	$z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$z \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	$\frac{\rho_w C_d \omega_x \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}{\rho h}$	$\frac{g \sin \alpha_z u_M^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}}$	$g \sin \alpha_z \frac{\partial H_s \sin \alpha_z}{\partial x}$	$\sin \alpha_z g \sin \alpha_x$	$f_c v \sin \alpha_z$
<b>Ordem Dimensional</b>									
$\frac{\bar{U}}{\bar{T}}$	$\bar{U} \frac{\bar{U}}{\bar{L}}$	$\bar{V} \frac{\bar{U}}{\bar{B}}$	$z \frac{\bar{U} \bar{U}}{\bar{L} \bar{L}}$	$z \frac{\bar{U} \bar{U}}{\bar{B} \bar{B}}$	$\frac{\bar{\rho}_w \bar{C}_d \bar{\omega}_x \sqrt{\bar{\omega}_x^2 + \bar{\omega}_y^2}}{\bar{\rho} \bar{h}}$	$\frac{\bar{G} \sin \alpha_z \bar{u}_M^2 \bar{U} \sqrt{\bar{U}^2 + \bar{V}^2}}{\bar{h}^{1/3}}$	$\bar{G} \sin \alpha_z \frac{\bar{H}_s \sin \alpha_z}{\bar{L}}$	$\sin \alpha_z \bar{G} \sin \alpha_x$	$f_c \bar{V} \sin \alpha_z$
1,00E-04	1,00E-04	1,00E-04	1,00E+01	1,00E+01	1,41E-08	1,00E-01	1,10E-03	1,00E-03	-1,40E-07
<b>Equação na direção Y</b>									
$\frac{\partial v}{\partial t}$	$u \frac{\partial v}{\partial x}$	$v \frac{\partial v}{\partial y}$	$z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$	$z \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$	$\frac{\rho_w C_d \omega_y \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}{\rho h}$	$\frac{g \sin \alpha_z u_M^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}}$	$g \sin \alpha_z \frac{\partial H_s \sin \alpha_z}{\partial y}$	$\sin \alpha_z g \sin \alpha_y$	$f_c u \sin \alpha_z$
<b>Ordem Dimensional</b>									
$\frac{\bar{V}}{\bar{T}}$	$\bar{U} \frac{\bar{V}}{\bar{L}}$	$\bar{V} \frac{\bar{V}}{\bar{B}}$	$z \frac{\bar{V} \bar{V}}{\bar{L} \bar{L}}$	$z \frac{\bar{V} \bar{V}}{\bar{B} \bar{B}}$	$\frac{\bar{\rho}_w \bar{C}_d \bar{\omega}_y \sqrt{\bar{\omega}_x^2 + \bar{\omega}_y^2}}{\bar{\rho} \bar{h}}$	$\frac{\bar{G} \sin \alpha_z \bar{u}_M^2 \bar{V} \sqrt{\bar{U}^2 + \bar{V}^2}}{\bar{h}^{1/3}}$	$\bar{G} \sin \alpha_z \frac{\bar{H}_s \sin \alpha_z}{\bar{B}}$	$\sin \alpha_z \bar{G} \sin \alpha_y$	$f_c \bar{U} \sin \alpha_z$
1,00E-05	1,00E-05	1,00E-05	1,00E-01	1,00E-01	1,41E-08	1,00E-02	1,10E-02	1,00E-02	-1,40E-06

Avaliaram-se também as equações obtidas para este modelo em relação à escala de trabalho do modelo do BATES e DE ROO (2000) (Tabelas 3 e 4). Nesta escala de trabalho, os termos relevantes são os de aceleração local e advectiva, tensões no leito e gradiente de pressão. No entanto os termos de aceleração local e advectiva podem ser desconsiderados por se encontrarem uma ordem menor na escala de grandeza.

Para um melhor entendimento da importância de cada termo, estes serão definidos abaixo.

- Aceleração local

Os termos da aceleração local  $\frac{\partial u}{\partial t}$  e  $\frac{\partial v}{\partial t}$  representam a variação da velocidade com o tempo em um ponto fixo. São os responsáveis pela característica não permanente do fluxo.

- Aceleração Advectiva

São os termos  $u \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $v \frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $u \frac{\partial v}{\partial x}$ , e  $v \frac{\partial v}{\partial y}$ , que representam o efeito do transporte com o fluxo do gradiente de velocidade. Esses são responsáveis pela formação de vórtices, tendo seu efeito mais importante quanto maior o número de Reynolds  $R_e = \frac{vB}{\nu}$  (relação entre forças viscosas e forças de inércia), como se fora de uma análise adimensional das equações.

Na presença de velocidades altas ou viscosidade pequena, e do ponto de vista matemático, são os responsáveis pela não-linearidade do sistema de equações. A soma da aceleração local com a convectiva é a derivada material, que representa a aceleração total das partículas do fluido.

- Tensões Laterais

A expressão da equação (3.102) das tensões turbulentas laterais consiste de duas contribuições.

A primeira soma é o termo de tensões viscosas (ou tensões viscosas laminares)

$\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (h\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (h\tau_{xy}) \right]$ , o único dos dois que representa tensões reais, devido à

viscosidade do fluido.

O segundo e terceiro termo,  $\frac{\tau_{vx}^s}{\rho} |\nabla S_1|$ ,  $\frac{\tau_{vx}^f}{\rho} |\nabla S_2|$ , serão vistos separadamente abaixo como tensões no fundo e tangenciais na superfície.

- Tensões tangenciais na superfície livre

A presença de tensões tangenciais na superfície livre  $\frac{\tau_{vx}^s}{\rho} |\nabla S_1|$ , pode ser importante em grandes superfícies com ventos fortes. Existem diferentes fórmulas propostas para estimar este termo de tensões tangenciais na superfície livre a partir da velocidade do vento (CUNGE, 1980).

- Tensões no leito

Os termos devido à fricção contra o fundo  $\frac{\tau_{vx}^f}{\rho} |\nabla S_2|$ , têm um efeito não linear de retardo do fluxo, obtido através da equação (3.17)  $\tau_f = \rho g h S_f$ , onde  $S_f$  é a perda de carga no leito. Para o caso de fluxo bidimensional, uma expressão comumente usada para o cálculo da declividade é a fórmula de Manning.

- Termos da força do gradiente de pressão

São os termos, que multiplicados pela aceleração da gravidade  $g$ , representam a ação das forças gravitacionais,  $g \sin \alpha_z \frac{\partial H_s \sin \alpha_z}{\partial y}$  e  $g \sin \alpha_z \sin \alpha_y$ . São obtidos ao se integrar na vertical, para um plano de referencial inclinado, o termo  $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$  das equações de Reynolds, utilizando a hipótese de pressão hidrostática.

É o principal responsável pela não homogeneidade das equações, e sua presença aumenta a complexidade dos esquemas numéricos de resolução de forma considerável.

- Forças de Coriolis

As forças por unidade de massa que atuam sobre o fluido são, em geral, a força de gravidade e a força geostrófica ou de Coriolis. A primeira, na equação de Navier-Stokes, foi representada com o termo do gradiente de pressões, isto é, ao se realizar a integração na vertical. A segunda pode-se escrever como:

$$\vec{F}_{C_x} = f_c v \sin \alpha_z$$

$$\vec{F}_{C_y} = -f_c u \sin \alpha_z$$

Onde  $\vec{F}_C$  é o vetor de força de Coriolis e  $f_c = 2\Omega \sin \Phi$  é o coeficiente de Coriolis, com  $\omega$  sendo a velocidade angular de rotação da terra  $\Omega = 7,3.10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$  e  $\Phi$  a latitude de aproximadamente  $-4^\circ$ , portanto  $\sin \Phi \cong -6,98.10^{-2}$ .

Neste conjunto, também poderiam ser incluídos os efeitos de maré, que são também uma força por unidade de massa devido à atração da lua e do sol. Este termo teria um efeito não desprezível só para massas de água de tamanho muito grande, como os mares e oceanos, mas nem tanto em rios. O estudo destes não é o objeto deste trabalho e, portanto, não serão considerados nas equações.

Fazendo-se esta análise dimensional, observamos que, para satisfazer as duas situações (de canal e planície alagada), todos os termos são importantes em relação à ordem de grandeza dos termos de aceleração local.

Como, a princípio, a motivação deste trabalho foi o modelo denominado LISFLOOD-FP (BATES e DE ROO, 2000), o qual resolve os termos de tensão no leito e gradiente de pressão, partindo do pressuposto que se conhece a elevação inicial. Constatamos que, para a escala de trabalho do modelo dele, esses termos são os mais importantes nas equações.

Assim, para este trabalho, será considerado que todos os termos são relevantes para as equações da conservação da massa e quantidade de movimento na direção  $x$  e  $y$ , respectivamente, inclusive o termo que representa a força de Coriolis. Portanto, tais equações serão apresentadas na seguinte forma:

*- Equação da Continuidade*

$$\frac{\partial H_s}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} = -(H + \eta) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3.65)$$

- Equação da Quantidade de Movimento

Na direção x:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \varepsilon \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \frac{\rho_{ar} C_d \omega_x \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}{\rho(H + \eta)} + \frac{g \sin \alpha_z n_M^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{(H + \eta)^{4/3}} + \dots$$

$$\dots + g \sin \alpha_z \frac{\partial H_s \sin \alpha_z}{\partial x} - \sin \alpha_z g \sin \alpha_x - f_C v \sin \alpha_z = 0$$

## 4 – MÉTODO NUMÉRICO

Neste capítulo, serão apresentadas as formulações do método das diferenças finitas (MDF) para problemas em duas dimensões espaciais, bem como relatadas em detalhe as implementações computacionais de tais formulações.

Será abordada aqui uma primeira solução computacional através da aplicação de um método numérico no domínio discreto aos termos das equações diferenciais parciais obtidas no capítulo anterior.

Equações Diferenciais Parciais (EDPs) são utilizadas para estudar uma vasta gama de fenômenos da natureza, nas mais diversas áreas de aplicação. Para a resolução computacional, é necessário discretizar o domínio, com a criação de uma malha de pontos que expresse de forma adequada a região (domínio) a ser resolvido. Como usualmente não é possível obter soluções analíticas sobre o domínio devido às condições de contorno, inicialmente este é discretizado, isto é, substituído por um conjunto finito de pontos representativos. Somente nesses pontos é que as soluções serão obtidas.

Matematicamente, percebe-se que, quanto maior for o número de pontos da discretização, mais fiel será o resultado numérico obtido. Obviamente, maior também será o custo computacional.

A necessidade de se resolverem problemas com alta precisão, em tempo hábil (como previsão do tempo), tem levado a uma constante busca tanto por técnicas de solução mais eficiente, como por computadores com maior desempenho.

Os métodos de diferenças finitas consistem em substituir as derivadas parciais presentes na equação diferencial por aproximações em diferenças finitas. No método explícito, aplicado neste trabalho, as equações são independentes, permitindo, portanto, solução por cômputo direto. A utilização deste método implica em restrições com relação à estabilidade do cálculo. Tal estabilidade será uma função do espaçamento da grade e da celeridade da onda que se propaga no problema; esse critério de estabilidade é conhecido como Courant-Friedrichs-Lewy (CFL):

$$\Delta t \leq \frac{v_c \cdot \Delta x}{\sqrt{gh}}$$

Em que  $\Delta t$  é o espaço de tempo a ser utilizado no modelo,  $\Delta x$  o espaçamento da grade,  $g$  o módulo da aceleração da gravidade,  $h$  a profundidade da coluna d'água, e  $\nu_c$  é o número de Courant que deve ser menor ou igual a 1.

#### 4.1 – Método das Diferenças Finitas

O esquema escolhido foi o de Diferenças Finitas Centrais, o qual é apresentado na **seção 4.2**, que consiste em expandir as derivadas em séries de Taylor e considerar somente os termos de primeira e segunda ordem.

Tal método trata o domínio contínuo de forma que as variáveis dependentes são consideradas como existindo apenas em pontos discretos. Todas as derivadas são aproximadas por diferenças resultantes de uma representação algébrica da equação diferencial parcial (EDP).

#### 4.2 - Discretização das Equações pelo MDF

Nesta seção, não é abordada somente a solução espacial do sistema de equações, o objetivo é determinar a distribuição de potencial hidráulico ao longo do tempo. Para isso, é necessário discretizar, além do espaço, também a variável temporal. O eixo do tempo será dividido em intervalos de tempo  $\delta t$ .

No cálculo do fluxo hidrodinâmico num escoamento fluvial bidimensional no espaço, as três incógnitas a serem resolvidas são as velocidades médias na vertical ( $u$  e  $v$  nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente) e o nível da superfície livre ( $H_s$ ). As três equações usadas no modelo são reescritas abaixo:

- *Equação da continuidade (do volume) integrada ao longo da vertical:*

$$\frac{\partial H_s}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} = -(H + \eta) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (4.1)$$

- Equação de quantidade de movimento para um escoamento integrado na vertical, na direção  $x$ , num referencial plano inclinado:

$$\frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{2}{3} \sqrt{2} \frac{v^2}{g} \right) = \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{2}{3} \sqrt{2} \frac{v^2}{g} \right) \sin \theta \dots$$



Na expressão  $H_s = H + \eta$ , as variáveis  $H$  e  $\eta$  são variáveis de profundidade de escalas temporais diferentes.  $H$  é da ordem de meses, ou seja, possui valores significativos apenas nessa escala temporal e  $\eta$  da ordem de segundos. Portanto, as equações propostas podem ser trabalhadas em diferentes escalas de frequência de tempo.

Neste trabalho, considerou-se que a variável  $H_s$  é uma variável  $\zeta$ , a qual, numa análise de escala temporal trimestral, denominada de baixa frequência, equivale a  $\zeta = H$ , pois a variável  $\eta$ , numa análise desta escala, não apresenta valores significativos sendo considerada assim uma constante. Além disso, para uma análise temporal da ordem de segundos, considerada de alta frequência, é equivalente a  $\zeta = \eta$ , pois  $H$  também, neste caso, se mostrará constante. Escrevendo a equação da conservação da massa sob a forma de diferenças finitas centradas, discretizando cada um dos seus termos, obtemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & \frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n-1}}{2\delta t} + u_{i,j}^n \frac{\eta_{i+1,j}^n - \eta_{i-1,j}^n}{2\delta x} + v_{i,j}^n \frac{\eta_{i,j+1}^n - \eta_{i,j-1}^n}{2\delta y} + \dots \\ & \dots + (H_{i,j} + \eta_{i,j}^n) \left( \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\delta x} + \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\delta y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Colocando o termo avançado no tempo em evidência, teremos:

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = 2\delta \left[ -u_{i,j}^n \frac{\eta_{i+1,j}^n - \eta_{i-1,j}^n}{2\delta x} - v_{i,j}^n \frac{\eta_{i,j+1}^n - \eta_{i,j-1}^n}{2\delta y} - (H_{i,j} + \eta_{i,j}^n) \left( \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\delta x} + \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\delta y} \right) \right] + \zeta_{i,j}^{n-1} \quad (4.6)$$

Reescrevendo  
n

#### 4.2.2 - Discretização da Equação de Movimento nas Direções $x$ e $y$

Reapresentando novamente a equação da Quantidade de Movimento na direção  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \varepsilon \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \frac{\rho_{ar} C_d \omega_x \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}{\rho(H + \eta)} + \frac{g \sin \alpha_z n_M^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{(H + \eta)^{1/3}} + \dots \\ \dots + g \sin \alpha_z \frac{\partial H_s \sin \alpha_z}{\partial x} - \sin \alpha_z g \sin \alpha_x - f_C v \sin \alpha_z = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Escrevendo a equação Dinâmica na direção  $x$  sob a forma de diferenças finitas centradas, discretizando cada um dos seus termos, e fazendo uso das considerações feitas para a equação da continuidade, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n-1}}{2\delta t} + u_{i,j}^n \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\delta x} + v_{i,j}^n \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\delta y} - \varepsilon \left( \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\delta x^2} - \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\delta y^2} \right) - \dots \\ \dots - \frac{\rho_{ar} C_d \omega_x \sqrt{(\omega_x)^2 + (\omega_y)^2}}{\rho(H_{i,j} + \eta_{i,j}^n)} + \frac{g \cdot \sin \alpha_z \cdot (n_M)^2 \cdot u_{i,j}^n \sqrt{(u_{i,j}^n)^2 + (v_{i,j}^n)^2}}{(H_{i,j} + \eta_{i,j}^n)^{1/3}} + \dots \\ \dots + g \sin \alpha_z \frac{(\zeta_{i+1,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n) \sin \alpha_z}{2\delta x} - \sin \alpha_z g \sin \alpha_x - f_C v_{i,j}^n \sin \alpha_z = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Colocando o termo da velocidade avançado no tempo em evidência, teremos:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} = \frac{\delta t}{\delta x} (u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n) u_{i,j}^n - \frac{\delta t}{\delta y} (u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n) v_{i,j}^n + 2\varepsilon \left[ \frac{\delta t}{\delta x^2} (u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) + \frac{\delta t}{\delta y^2} (u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \right] + \dots \\ \dots + 2\delta t \frac{\rho_{ar} C_d \omega_x \sqrt{(\omega_x)^2 + (\omega_y)^2}}{\rho(H_{i,j} + \eta_{i,j}^n)} - 2\delta t \frac{g \cdot \sin \alpha_z \cdot (n_M)^2 \cdot u_{i,j}^n \sqrt{(u_{i,j}^n)^2 + (v_{i,j}^n)^2}}{(H_{i,j} + \eta_{i,j}^n)^{1/3}} - \dots \\ \dots - \frac{\delta t}{\delta x} g \sin \alpha_z (\zeta_{i+1,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n) \sin \alpha_z + 2\delta t \cdot \sin \alpha_z g \sin \alpha_x + 2\delta t \cdot f_C v_{i,j}^n \sin \alpha_z + u_{i,j}^{n-1} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Reapresentando novamente a equação da Quantidade de Movimento na direção  $y$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \frac{\rho_{ar} C_d \omega_y \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}{\rho(H_{i,j} + \eta_{i,j}^n)} + \sin \alpha_z \cdot g n_M^2 \cdot \frac{v \sqrt{u^2 + v^2}}{(H_{i,j} + \eta_{i,j}^n)^{1/3}} + \dots \\ \dots + g \sin \alpha_z \frac{\partial H_s \sin \alpha_z}{\partial y} - \sin \alpha_z g \sin \alpha_y + f_C u \sin \alpha_z = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Reescrevendo a equação na direção  $y$  sob a forma de diferenças finitas centradas, discretizando cada um dos seus termos, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n-1}}{2\delta t} + u_{i,j}^n \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\delta x} + v_{i,j}^n \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\delta y} - \varepsilon \left( \frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{\delta x^2} + \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{\delta y^2} \right) - \dots \\ \dots - \frac{\rho_{ar} C_d \omega_y \sqrt{(\omega_x)^2 + (\omega_y)^2}}{\rho \cdot (H_{i,j} + \eta_{i,j}^n)} + \frac{g \cdot \sin \alpha_z \cdot (n_M)^2 \cdot v_{i,j}^n \sqrt{(u_{i,j}^n)^2 + (v_{i,j}^n)^2}}{(H_{i,j} + \eta_{i,j}^n)^{1/3}} + \dots \\ \dots + g \sin \alpha_z \frac{(\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j-1}^n) \sin \alpha_z}{2\delta y} - g \sin \alpha_z \sin \alpha_y + f_C u_{i,j}^n \sin \alpha_z = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

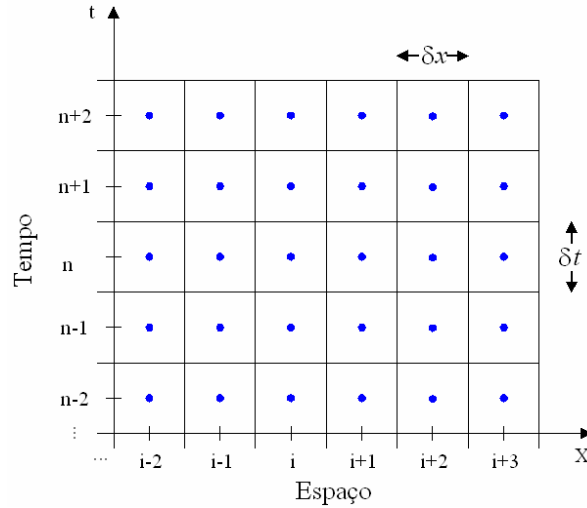
Colocando o termo da velocidade avançado no tempo em evidência, teremos:

$$\begin{aligned} v_{i,j}^{n+1} = -\frac{\delta t}{\delta x} (v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n) u_{i,j}^n - \frac{\delta t}{\delta y} (v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n) v_{i,j}^n + 2\varepsilon \left[ \frac{\delta t}{\delta x^2} (v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n) + \frac{\delta t}{\delta y^2} (v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n) \right] + \dots \\ \dots + 2\delta t \cdot \frac{\rho_{ar} C_d \omega_y \sqrt{(\omega_x)^2 + (\omega_y)^2}}{\rho \cdot (H_{i,j} + \eta_{i,j}^n)} + 2\delta t \cdot \frac{g \cdot \sin \alpha_z \cdot (n_M)^2 \cdot v_{i,j}^n \sqrt{(u_{i,j}^n)^2 + (v_{i,j}^n)^2}}{(H_{i,j} + \eta_{i,j}^n)^{1/3}} - \dots \\ \dots - \frac{\delta t}{\delta x} g \sin \alpha_z (\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j-1}^n) \sin \alpha_z + 2\delta t \cdot g \sin \alpha_z \sin \alpha_y - 2\delta t \cdot f_C u_{i,j}^n \sin \alpha_z + v_{i,j}^{n-1} \end{aligned} \quad (4.13)$$

### 4.3 – Solução do Sistema de Equações

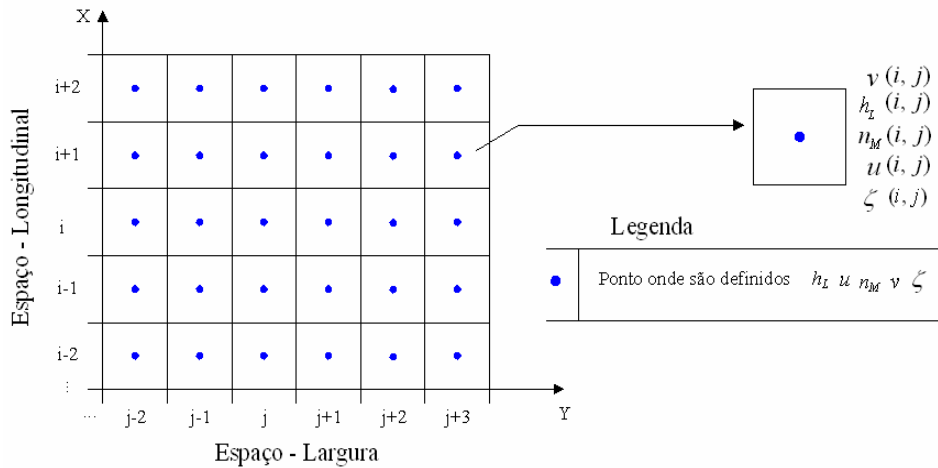
Para representação do domínio real na forma computacional, deve ser criada uma malha numérica. A malha deve ser regular, ou seja, composta de pontos equidistantes, na forma de quadrados. O espaçamento escolhido deve representar um

limite prático decorrente do esforço computacional despendido, uma vez que um maior refinamento aumentaria consideravelmente o tempo de cômputo na simulação. Considera-se o contínuo espaço tempo discretizado numa grade numérica de acordo com a **Figura 4.1**.



**Figura 4.1 - Discretização do domínio (espaço  $i, j$ ) no tempo.**

A **Figura 4.2** mostra um exemplo de malha numérica com a indicação, em detalhe, da localização das variáveis, para uma linha  $i$  e coluna  $j$  genéricas. Na malha de cálculo horizontal, a quadrícula é identificada pelo ponto central que contém todas as variáveis.



**Figura 4.2 - Esquematização da malha numérica com localização das variáveis no espaço.**

(Fonte: adaptado de PAZ (2003))

Portanto, de acordo com a **Figura 4.2**, as componentes de velocidade  $u$  e  $v$  estão associadas ao centro da quadrícula, tendo como sentido positivo a orientação das

direções  $x$  (para  $u$ ) e  $y$  (para  $v$ ). Também estão dispostos no centro os valores como a profundidade fixa  $h_L(x, y)$ , o coeficiente de Manning e o nível variável no tempo  $\zeta(x, y, t)$ .

Para referenciar os dados ao nível médio, os valores das profundidades nodais foram incrementados na ordem de  $10m$  em todo o domínio. Este valor foi adotado como um valor médio aproximado após análise da sazonalidade.

Portanto, discretizando o contínuo espaço tempo e representando-o como na **Figura 4.2**, obtém-se uma grade, cujos nós representam os pontos onde serão calculados os valores de  $\zeta$ ,  $u$  e  $v$ , para aplicar o método numérico de resolução das equações diferenciais de águas rasas.

De forma geral, na aplicação de um modelo hidrodinâmico, várias informações são necessárias para formar o modelo, como conhecer algumas condições físicas iniciais do domínio a ser analisado, do tipo contorno, topografia do fundo do terreno de toda região simulada e dados relativos às condições de contorno, além da definição de parâmetros como rugosidade, viscosidade, arrasto do vento. As seções posteriores irão abordar como tais condições foram trabalhadas para este modelo.

#### 4.4 - Condições Iniciais

A solução dessas equações para o modelo exige, além das condições de contorno em cada instante, também condições iniciais, que descrevem a distribuição do potencial ( $\zeta$ ) no instante ( $t = t_0$ ) em todos os nós do domínio.

Para a inicialização do modelo, é necessária a prescrição de condições iniciais para as variáveis que serão calculadas. As condições iniciais utilizadas em todos os pontos do domínio, exceto nas fronteiras, foram as seguintes:

- Campo de elevação  $qsi$  (elevação constante de  $10.0$  m em todo o domínio)
- Campo de velocidade  $u$  e  $v$  (velocidades nulas iniciais em todo o domínio no tempo presente)
- Campo de velocidade  $ub$  e  $vb$  (velocidades nulas iniciais em todo o domínio no tempo anterior)
- Campo de velocidade  $uf$  e  $vf$  (velocidades nulas iniciais em todo o domínio no tempo futuro)

#### 4.5 - Condições de Contorno

Em modelos dinâmicos, são geralmente aplicadas as condições de contorno abaixo para as fronteiras do domínio de solução.

##### - Na Superfície Livre

No desenvolvimento deste trabalho, considerou-se como condição de contorno, a elevação da superfície. O escoamento deve satisfazer determinadas condições de fronteira na superfície livre  $z = H + \eta(x, y, t)$ . Dado que esta é uma superfície material,  $S_1$  deverá satisfazer a relação:

$$S_1 = \frac{\partial(H + \eta)}{\partial t} + u \frac{\partial(H + \eta)}{\partial x} + v \frac{\partial(H + \eta)}{\partial y} = 0 \quad (4.14)$$

##### - No Fundo do leito

No fundo do rio,  $z = h_L(x, y)$ , não poderá existir qualquer fluxo de massa através dele.

$$S_2 = u \frac{\partial h_L}{\partial x} + v \frac{\partial h_L}{\partial y} \quad (4.15)$$

##### - Nas Fronteiras laterais

A condição mais apropriada para analisar as planícies de inundação é utilizar uma condição de contorno aberta radiacional nas laterais: norte, leste e sul. Esta condição deve permitir a passagem da onda através da fronteira sem afetar a solução do interior do domínio, e com mínima distorção e reflexão. Neste caso, pode-se utilizar uma aproximação amplamente aplicada em modelos que avaliam o comportamento do fluxo gerado por uma relaxação barotrópica, a condição radiacional de Orlanski (Orlanski, 1976), que possui a seguinte forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \pm c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (4.16)$$

Onde  $\phi$  é uma propriedade do fluido. O segundo termo da equação (4.16) é positivo na fronteira leste e norte do domínio e negativo na fronteira oeste e sul. A constante  $c$  é a celeridade, inicialmente estimada como sendo  $c = \sqrt{gh}$ , sendo  $g$  a gravidade e  $h$  a profundidade do fluxo.

Para estimativa das propriedades na fronteira norte e leste, utilizou-se a equação (4.16) com aproximação regressiva no tempo e no espaço. E na fronteira sul, esta mesma equação foi utilizada com aproximação regressiva no tempo e progressiva no espaço.

Contudo, nas fronteiras abertas, a influência da região exterior ao domínio do modelo terá de ser especificada. No entanto, o escoamento através da fronteiras tem que ser estabelecido como uma função do tempo. O requisito mais importante a satisfazer é o balanço de massa. Assim as condições de fronteira abertas terão que ser especificadas de forma a que não exista nenhuma alteração de massa durante um determinado intervalo de tempo.

Na seção de entrada (fronteira oeste), como condição de contorno, adotou-se uma velocidade fluvial imposta que representa uma situação de águas médias. Devido à falta de informação em relação à distribuição de vazões de entrada e saída do trecho escolhido, considerou-se uma igualdade hipotética da vazão entre as duas seções.

#### 4.6 - Procedimento de Solução

Realizada a modelagem numérica a partir da discretização das equações obtidas, diante da dificuldade de se resolver esse sistema de equações analiticamente, desenvolveu-se a implementação computacional do modelo numérico, num primeiro momento.

O sistema de equações a ser resolvido consiste de três equações diferenciais com três incógnitas,  $u$ ,  $v$  e  $\zeta$ . Estas três equações são acopladas e as equações da quantidade de movimento não são lineares. As não linearidades não precisam de tratamento, ou seja, não é necessário iterar dentro de um mesmo nível temporal, já que se resolvem as equações em forma explícita e num mesmo intervalo temporal. Como sugerido por CASULLI e CHENG (1992), para o problema de águas rasas, em cada intervalo temporal, será resolvido apenas uma vez em cada equação. Este procedimento

demonstra ter bons resultados e grande economia de tempo computacional. Ainda, pelo fato de serem substituídas as equações do movimento na forma completa, e não equações de correção, como nos métodos tradicionais preditivo-corretivos, a massa total se conserva exatamente para cada intervalo temporal sempre que a equação para  $\zeta$  seja resolvida até a convergência. Este fato foi comprovado através dos resultados numéricos.

O algoritmo utilizado para solução das equações, foi o seguinte:

1. Inicializar as variáveis: Em todos os casos, as velocidades iniciais foram consideradas nulas. Dependendo do teste, a profundidade, as velocidades e parâmetros do escoamento podem ter um valor inicial diferenciado;

2. Calcular os coeficientes das equações;

3. Calcular os campos de velocidades (componentes cartesianas) através das equações (4.7, 4.10 e 4.13). Este cálculo é explícito e nenhum sistema de equações deve ser resolvido.

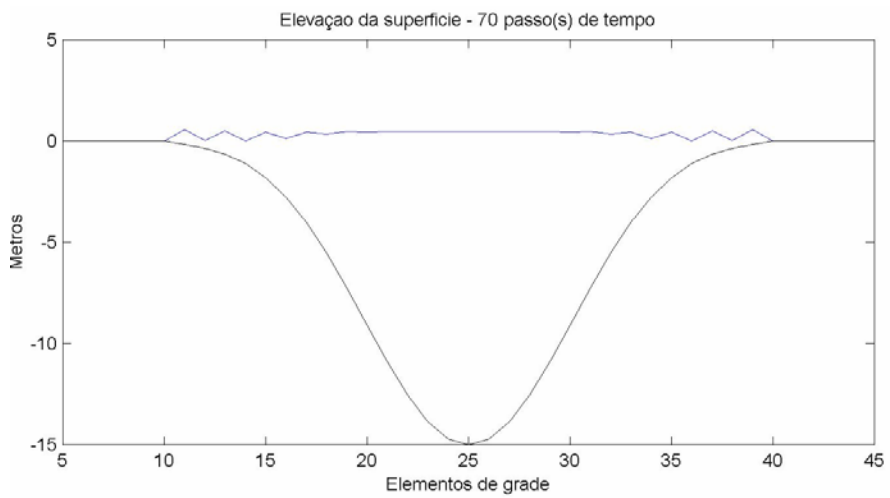
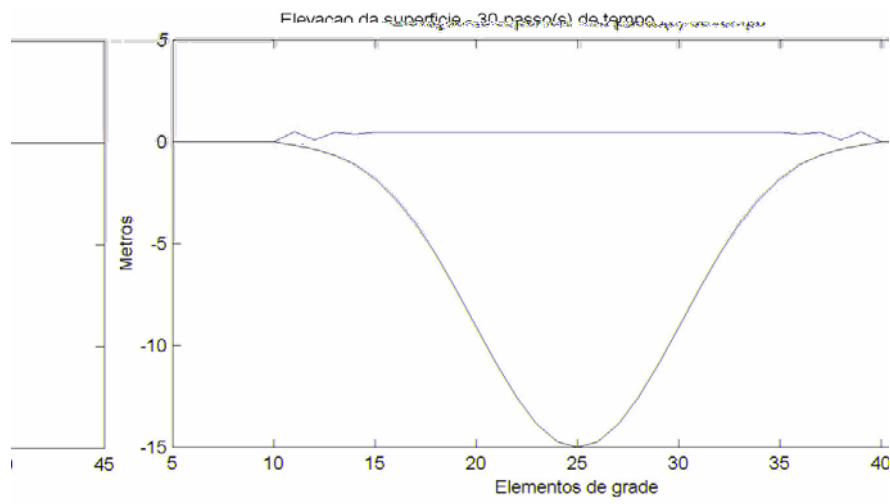
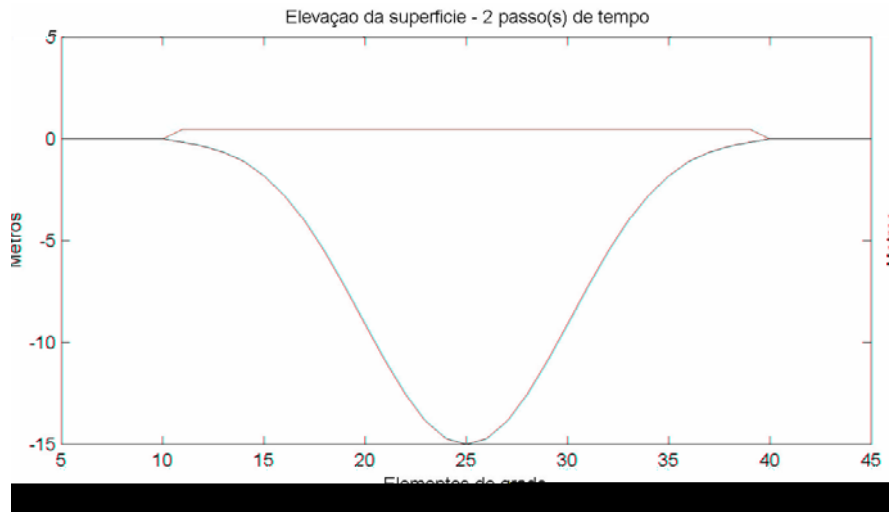
4. Calcular as entradas e saídas de massa do domínio de cálculo. Neste ponto são considerados todos os fatores como rugosidade, declividade, etc., que podem incrementar ou diminuir a massa total presente na superfície d'água.

7. Avançar no tempo de acordo com a expressão de critério de estabilidade Courant-Friedrichs-Lewy (CFL).

Mais uma vez salienta-se que, como primeira tentativa, estes foram os passos para gerar um código computacional que resolvem as equações obtidas. No entanto o mesmo não será exposto, neste trabalho, devido a esta primeira tentativa apresentar problemas de gradiente na fronteira entre o canal e área de planície. A partir deste fato, teve que ser inserido no código computacional uma nova solução para os termos das equações, somente nos pontos pertencentes a este limite entre calha e várzea. Todavia, o programa gerou ondas forçadas nesses pontos, o que se torna indispensável o desenvolvimento de filtros capazes de atenuar esta energia produzida.

Como ilustração dos resultados gerados pelo modelo computacional, apresentaremos uma seqüência de três passos de tempo.





**Figura 4.3 – Evolução da onda forçada gerada na seção transversal do canal.**

## 5 – RESULTADOS E DISCUSSÃO

Serão aqui discutidos alguns aspectos relevantes sobre o modelo matemático proposto onde foram resolvidas as equações da conservação de massa e quantidade de movimento para uma formulação hidrodinâmica unificada da calha do rio e suas áreas alagáveis adjacentes. Este conjunto final de equações, na forma completa, foi deduzido com base em um referencial plano inclinado adaptado à região Amazônica onde a planície de inundação chega até 50km de extensão. Por adotar este novo referencial, puderam-se adaptar as equações a qualquer domínio a ser resolvido, pois dessa forma considera-se a variação do fluxo conduzido pela topografia tanto na calha como na várzea. Por ser um modelo aplicado à região Amazônica, inseriu-se uma variável característica da sazonalidade da região, que permite modelar em escalas de frequência diferentes eventos ambientais que possam ocorrer desde tempestades locais, cheias e até as flutuações sazonais do nível das águas.

Desta forma, obteve-se um novo conjunto de equações que representam a propagação do escoamento em rios com extensas planícies de inundação. A partir destas equações desenvolveu-se um modelo hidrodinâmico, matemático e computacional que fisicamente representa os processos ambientais que ocorrem na região Amazônica. Este modelo pode ser aplicado tanto para o canal quanto para áreas de várzea, em qualquer período sazonal (seca, enchente, cheia e vazante), e em diferentes escalas de frequência temporal, podendo ir de segundos a meses, possibilitando sua aplicação para diversas condições ambientais.

De forma a modelar as várias flutuações (múltiplas escalas temporais) no nível das águas dos rios da região Amazônica, tornou-se necessário fazer uso de um sistema de referência distinto para melhor representá-las na calha e na planície inundada. O sistema de referência aplicado se situa no nível inferior à topografia do canal, e, portanto facilita a representação principalmente, da variável de profundidade média  $H$  sazonal e da topografia. Neste sistema esta variável  $H$  não é só evidenciada como uma cota média sazonal, que varia de 10 até 15 metros, mas que também é modelada nas equações entre as estações de seca e cheia, à qual irá influenciar diretamente na cota de elevação da superfície livre  $\eta$ .

O fluxo do canal é diferenciado do fluxo na planície devido a algumas características como profundidade e condições de contorno. Por ocorrer desta forma, inseriu-se uma variável denominada  $\zeta$ , equivalente à soma da profundidade média  $H$  e a elevação da superfície  $\eta$ . Quando se trabalhar na escala de frequência temporal baixa (meses),  $\zeta$  será igual à  $H$ . Portanto, ao trabalhar na escala de frequência temporal alta (segundos),  $\zeta$  é igual à  $\eta$ . Assim esta variável alternará o seu valor dependendo da escala temporal do evento a ser estudado.

Além de inserir no modelo a sazonalidade da região através de um sistema de referência abaixo da seção transversal do canal, foi necessário também adequá-lo à intrincada topografia presente na região ao se tratar de planície de inundação e calha, ainda para torná-lo mais generalizado. Para tanto, adotamos a hipótese da existência de inclinações nas direções  $x$  e  $y$ , e conseqüentemente uma inclinação na direção  $z$  em função destas. Assim as equações de origem, formuladas com base em um referencial plano horizontal, foram adaptadas para um novo sistema de referencia plano inclinado. Estas duas deduções, dependentes do referencial, se diferem pela atuação das forças no volume de controle considerado. Em razão disto os termos referentes às forças atuantes no volume, mais especificamente os termos referentes às forças gravitacionais, foram deduzidos e obteve-se com isto, mais um termo de gradiente de pressão e termos como tensão no fundo, na superfície e força de Coriolis foram corrigidos.

Ao fazer a análise de escalas dos termos destas equações para o canal com valores típicos da região Amazônica, pôde-se observar a grandeza de cada termo para esta situação, ver Tabela 1 no capítulo 3. O mesmo foi feito para os termos das equações na situação de planície inundada, ver Tabela 2 no capítulo 3. Assim ao comparar as duas situações nota-se que os termos das equações para o fluxo no canal sofrem grande variação em relação aos termos para o fluxo na planície inundada. Diferença esta de pelo menos duas ordens de grandeza, por exemplo, os termos de tensão na superfície, gradientes de pressão e força de coriolis, chegando até uma diferença da ordem de  $10^{-6}$ , como acontece com os termos de tensões laterais. Isto evidencia a diversidade de cada situação e explica a necessidade do modelo proposto em possuir variáveis que se adaptem melhor a essas diferenças.

Para verificar a consistência das equações obtidas, escalonamos seus termos, de modo que não incluíssem as inclinações nas direções  $x$  e  $y$ , ou seja, retornando o referencial inclinado ao eixo cartesiano normal. Fazendo estas modificações, as

equações retornaram para as equações em um referencial plano horizontal, tal quais as que foram obtidas matematicamente, ver Tabela 3 no capítulo 3. Portanto, equivalentes às equações de Navier-Stokes, procedendo às devidas simplificações.

- Equação da Quantidade de Movimento na direção  $x$

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{aceleração local}} + u \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{aceleração advectiva}} - \underbrace{\varepsilon \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]}_{\text{tensões laterais}} - \underbrace{\frac{\rho_{ar} \cdot C_d \cdot \omega_x \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}{\rho(H+\eta)}}_{\text{tensões na superfície}} + \underbrace{\frac{g n_M^2 \mu \sqrt{u^2 + v^2}}{(H+\eta)^{4/3}}}_{\text{tensões no leito}} + g \underbrace{\frac{\partial H_s}{\partial x}}_{\text{gradiente de pressão}} - \underbrace{f_c v}_{\text{Coriolis}} = 0 \quad (5.1)$$

Quando as equações do modelo proposto são escalonadas com base na escala de trabalho do modelo do BATES e DE ROO (2000), nota-se que as forças de tensão no fundo e de gradiente de pressão são dominantes, ver Tabela 4 no capítulo 3. Portanto, apesar de os termos de aceleração se mostrarem presentes, eles se encontram em uma escala de uma ordem menor em relação a esses termos dominantes podendo assim ser desconsiderados.

- Equação da Quantidade de Movimento na direção  $x$

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{aceleração local}} + u \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{acelerações advectivas}} + \underbrace{\frac{g \sin \alpha_z n_M^2 \mu \sqrt{u^2 + v^2}}{(H+\eta)^{2/3}}}_{\text{tensões no leito}} + g \sin \alpha_z \underbrace{\frac{\partial H_s \sin \alpha_z}{\partial x}}_{\text{gradiente de pressão}} = 0 \quad (5.2)$$

$$10^{-5} + 10^{-5} + 10^{-5} + 10^{-4} + 10^{-3} = 0$$

Este modelo foi aplicado inicialmente a um domínio hipotético, com o intuito de mostrar as potencialidades do mesmo. No momento se está na fase de testes do mesmo. Numa primeira simulação, ocorreram problemas computacionais quanto à solução das equações para os pontos da malha no limite entre a calha e a área alagada onde estão sendo geradas ondas forçadas devido ao termo de gradiente  $\left( g \sin \alpha_z \frac{\partial H_s \sin \alpha_z}{\partial x} \right)$  decomposto em duas direções ( $x$  e  $y$ ). Este problema está associado ao fato de

considerarmos no modelo matemático um referencial abaixo das cotas para inserir as variáveis características da topografia da região. Torna-se, portanto, necessário desenvolver filtros capazes de eliminar as ondas geradas.

## 6 - CONCLUSÕES

Neste capítulo são resumidas as principais contribuições e conclusões deste trabalho, bem como se apresentam algumas recomendações para futuros estudos nesse tema.

Como visto anteriormente, várias vantagens, entre elas a capacidade de realizar previsão do comportamento de processos diante de modificações no meio ambiente, tornam a modelagem matemática um excelente instrumento de análise das características e mudanças nos sistemas ambientais. Durante os estudos realizados neste trabalho foi desenvolvido um novo modelo matemático com intuito de contemplar as características da região amazônica. Além disso, observou-se que o modelo é robusto e consistente sendo capaz de representar as características de escoamentos em qualquer domínio e em diferentes escalas temporais, tornando-o inédito no campo da modelagem, fazendo com que fossem atendidas mais do que as perspectivas iniciais do trabalho, que tinha como objetivo principal apenas modelar os processos hidrodinâmicos nas planícies de inundação da região amazônica.

Em vista disso, este trabalho se inseriu em uma proposta para melhor compreender a estrutura e dinâmica dos sistemas em áreas alagadas através da formulação de um novo conjunto de equações para um modelo hidrodinâmico e matemático adaptado às características peculiares da região amazônica, ímpar em relação a qualquer outra metodologia aplicada na hidráulica.

O modelo matemático foi obtido através da integração, na direção vertical, das equações de conservação da massa e da quantidade de movimento com base em um referencial plano inclinado adotando-se algumas hipóteses. Neste modelo, foram considerados todos os termos: força de aceleração local e advectiva, tensões na superfície e no leito, gradientes de pressão e força de coriolis.

É um modelo, configurado para qualquer região de estudo, por constituir como base hipotética uma seção transversal, representando os parâmetros geométricos e hidráulicos de um escoamento, onde o sistema de referência assumiu um novo critério localizando-se na parte inferior da seção transversal do canal, devido à necessidade de melhor representar as variáveis em qualquer domínio, calha e várzea.

A dedução da formulação matemática também distinguiu a presente pesquisa por ser aplicada a um referencial plano inclinado partindo de um referencial plano horizontal, dando assim opção de se trabalhar com ambas e obter resultados em diferentes situações. Isto contribuiu para melhor adaptar as equações ao domínio a ser resolvido, levando em conta a variação do fluxo na calha devido à direção do escoamento e à inclinação topográfica.

Para que fossem modeladas as várias flutuações (múltiplas escalas temporais) do nível das águas dos rios e tornar o modelo aplicável a qualquer frequência temporal devido aos diversos processos ambientais que podem ocorrer, foi inserida nas equações formuladas para o modelo uma variável denominada  $\zeta$ , convencionada neste trabalho para descrever a variação do fluxo de acordo com a frequência de elevação da superfície livre em função das condições de contorno. Esta variável trabalha em diferentes escalas de frequência que vão de segundos a meses, o que permite analisar eventos que se processam no meio físico natural do canal e da planície de inundação, em escalas de tempo diferentes, por exemplo: para situações locais como tempestades, cheias e também em qualquer período sazonal (seca, enchente, cheia e vazante), proporcionando melhor compreensão dos mesmos.

Através do escalonamento com valores característicos da região amazônica, pôde-se verificar a influência das forças de cada termo das equações em situações de escoamento no canal e na planície inundada. Esta comparação mostrou uma diferença, entre os termos de cada situação, de pelo menos duas ordens de grandeza, por exemplo, entre os termos de tensão na superfície, gradientes de pressão e força de coriolis, chegando até uma diferença da ordem de  $10^{-6}$ , como acontece com os termos de tensões laterais.

Através das equações obtidas para este modelo, fez-se uma análise da escala de grandeza em que o modelo do BATES e DE ROO (2000) trabalha. Pôde-se comparar a grandeza de todos os termos e concluir que, para esta escala, os termos relevantes para as equações hidrodinâmicas são os que compõem as forças de aceleração local e advectiva, tensões no leito e de gradiente de pressão, podendo os de aceleração local e advectiva ser desprezados por se encontrarem uma escala de grandeza menor.

Na implementação computacional ocorreram problemas no limite entre o canal e a planície inundada. Nestes pontos de limite são gerados gradientes relacionados à utilização de um referencial plano inclinado para inserção de variáveis que caracterizem

o domínio. Isto torna necessário o uso de filtros capazes de eliminar as ondas forçadas que surgem na região de descontinuidade entre o canal e a planície inundada devido ao termo de gradiente, o que demandará tempo e esforço.

Visando contribuir para um melhor entendimento e avanço das técnicas em dinâmica computacional dos fluidos, para trabalhos futuros, recomenda-se o desenvolvimento de filtros que absorvam bem os problemas computacionais gerados, a fim de minimizar os problemas numéricos que dificultam a solução das equações diferenciais parciais obtidas para o modelo deste trabalho. Conseqüentemente da mesma forma, gerar um código computacional para este conjunto de equações do modelo numérico e promover sua aplicação, inicialmente em um domínio hipotético para avaliar sua potencialidade e depois em um campo realístico para validá-lo. Pretende-se obter um modelo desenvolvido que possa representar satisfatoriamente o comportamento hidrodinâmico, fornecendo subsídios valiosos que auxiliem ao planejamento e gerenciamento dos recursos hídricos da região amazônica.

Por fim, fica clara a contribuição deste trabalho ao se buscar com o modelo apresentado levantar informações de caráter relevante para o melhor entendimento da evolução dos processos em cenários de áreas alagáveis da região amazônica.

Dessa forma, este trabalho visa o seu aprimoramento contínuo para melhor representar e compreender os processos que envolvem os sistemas ambientais, ainda que em um estágio intermediário, mas com grandes perspectivas para o futuro.



## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, C.C.F., 2005, **Sensoriamento remoto da dinâmica de circulação da água do sistema planície de Curuai/rio Amazonas**. Tese de D.Sc., Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), São José dos Campos, SP, Brasil.

BATCHELOR, G. K., 1970, **An Introduction to Fluid Dynamics**. Cambridge, University Press.

BATES, P. D., DE ROO, A. P. J., 2000, “A Simple Raster-Based Model for Flood Inundation Simulation”. **Journal of Hydrology**, v.236, pp. 54–77.

BEVIS, M., ALSDORF, D., KENDRICK, E., et al., 2005, “Seasonal Fluctuations in the Mass of the Amazon River System and Earth's Elastic Response”. **Geophysical Research Letters**, v. 32, n. 16 (Aug). Disponível em <http://www.agu.org/pubs/crossref/2005.../2005GL023491.shtml>. Acesso em 20 de Janeiro de 2007.

BLADÉ, E., 2005, **Modelación Del Flujo En Lámina Libre Sobre Cauces Naturales. Análisis Integrado Con Esquemas En Volúmenes Finitos En Una Y Dos Dimensiones**. Tese de D.Sc., Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.

CASULLI, V., AND CHENG, R. T., 1992, “Semi-implicit finite difference methods for three-dimensional shallow water flow”. **Int. J. Numer. Methods Fluids**, v. 15, pp. 629–648.

CHOW, V. T., 1959, **Open Channel Hydraulics**, New York, McGraw-Hill.

CHRISTOFOLETTI, A., 1999, **Modelagem de Sistemas Ambientais**. São Paulo, Edgard Blücher.

CIPOLATTI, 2000, R.; **Textos de Matemática Aplicada**. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, UFRJ.

CUNGE, J. A., HOLLY, F. M. JR., VERWEY, A., 1980, **Practical Aspects of Computational River Hydraulics**. Pitman Advanced Publishing Program, Boston.

EMBRAPA: Coleção de CD-ROMs Brasil visto do espaço. Disponível em: <http://www.cdbrasil.cnpm.embrapa.br/>. Acesso em 15 de abril de 2007.

FISCH, G.; MARENGO, J.A.; NOBRE, C.A., 1996, Clima da Amazônia. **Boletim do Climanálise Especial - Comemoração dos 10 anos**. Disponível em: < <http://www.cptec.inpe.br/products/climanalise/cliesp10a>>. Acesso em: 22 de maio de 2007.

FOX, R. W. & MCDONALD, A. T., 2001, **Introdução à Mecânica dos Fluidos**, LTC Editora, Edição 5ª, Rio de Janeiro, RJ.

FORSBERG, B. R., DEVOL, A. H., RICKEY, J. E., MARTINELLI, L. A., SANTOS, H., 1988, **Factors Controlling Nutrient Concentrations in Amazon Floodplain Lakes**, *Limnology Oceanographic*, v. 33 (1), 41-56.

FORSBERG, B. R., BEISL, C. H., ARRUDA, W. C., MIRANDA, F. P., SILVA JR., U. L., 2005. Apresentação sobre: **Modelagem da Variação Espaço-Temporal da Inundação, de Habitas e de Manchas de Petróleo na Várzea do Rio Solimões**. Realizada no CCA-UFAM, Manaus Amazonas.

GOURLEY, S.A., CHAPLAIN, M.A.J., DAVIDSON, F.A., 2001, “Spatio-Temporal pattern formation in a nonlocal reaction-diffusion equation”, **Dynamical Systems**, v. 16, n. 2, pp 173-192.

HAGGETT, P. & CHORLEY, R. J., 1967, **Models, paradigms and the New Geography in Models in Geography**, CHORLEY, R. J. & HAGGETT, P. (Eds.). Londres, Methuen & Co.

HORRITT, M. S., BATES, P. D., 2002, “Evaluation of 1D and 2D Numerical Models for Predicting River Food Inundation”. **Journal of Hydrology** 268, 87–99.

HUNTER, N. M., HORRITT, M. S., BATES, P. D., WILSON, M. D., WERNER, M. G., 2005, “An Adaptative Time Step Solution for Raster-Based Storage Cell Modelling of Floodplain Inundation”. **Advances in Water Resources**, v. 28, p. 975-991.

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível no dia 30/01/2007 em <[http://www.ibge.gov.br/home/presidencia/noticias/noticia\\_visualiza.php?id\\_noticia=799](http://www.ibge.gov.br/home/presidencia/noticias/noticia_visualiza.php?id_noticia=799)>

JUNK, W. J., 1989, "Flood tolerance and tree distribution in central Amazônia". **In: HOLM-NIELSEN L. B.; NIELSEN I. C.; BALSLEV. H. (Eds.) Tropical Forest Botanical Dynamics. Speciation and Diversity.** London: Academic Press, 1989. p.47-64.

KALNAY, E., and Coauthors, 1996, "The NCEP/NCAR 40-Year Reanalysis Project". **Bull. Amer. Meteor. Soc.**, v. 77, n. 3, March, 437-471.

KAPLAN, W., 1972, **Cálculo Avançado.** Edgard Blücher, vol. 1.

KISTLER, R., and Coauthors, 2001, "The NCEP/NCAR 50-Year Reanalysis: Monthly Means CD-ROM and Documentation". **Bulletin American Meteorological Society**, v. 82, nº 02, February, 247-267.

MELLO, CARLOS EDUARDO FERRAZ, 2003. **Análise Numérica de Escoamentos em Comportas de Fundo e Vertedores pelo Método dos Elementos de Contorno.** Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Programa de Engenharia Civil, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Ministério da Educação. Disponível no dia 30/01/2007 em <http://portal.mec.gov.br/sesu/index.php?option=content&task=view&id=653&Itemid=300>

MIRANDA, F. P., BEISL, C. H., FORSBERG, B., ARRUDA, W., PEDROSO, E. C., 2005. "Application of Seasonal JERS-1 SAR Full Resolution Image Mosaics for Identification of Oil Spill Sensivity in Western Amazônia, Brazil". **In: Anais do 1º Congresso Internacional do Piatam, Manaus, Amazonas.** Editora da Universidade Federal do Amazonas - -EDUA, v. 1.

MOURA, A. D., LEMES, M. A. M., 2002, **Fundamentos de Dinâmica Aplicados à Meteorologia e Oceanografia.** 2º ed. Ribeirão Preto - SP: Ed. Holos, v. 1000. p. 296.

ORLANSKI, I., 1976, "A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows", **Journal of Computational Physics**, v. 21 - n. 3, pp. 251 - 269.

PAZ, A. R., 2003, **Análise dos Principais Fatores Intervenientes no Comportamento Hidrodinâmico do Banhado do Taim (RS).** Dissertação de M.Sc. - Programa de Pós-Graduação em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental, UFRS - Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

PEDLOSKY, J., 1987, **Geophysical fluid dynamics**. Second Edition, New York, Springer-Verlag.

PIATAM - Programa de Monitoramento das Áreas de Atuação da Petrobras: Potenciais Impactos e Riscos Ambientais da Indústria do Petróleo e Gás no Amazonas <http://www.piatam.ufam.edu.br/>. Consulta em 12.07.2006.

PICKARD, G. L., POND S., 1983 **Introductory Dynamical Oceanography**. Oxford, Pergamon Press.

RAUPACH, M. R., THOM, A. S., 1981, “Turbulence in and above Plant Canopies”. **Ann. Rev. Fluid Mech.**, v.13, p.97-129.

ROSMAN, P. C., 1989. “Modelos de circulação em corpos d’água rasos”. In: SILVA, R. V. (ed.). **Métodos Numéricos em Recursos Hídricos**, ABRH, v. 1, c. 3.

SPHAIER, S. H., 2005, **Hidrodinâmica I**. Programa de Engenharia Oceânica - COPPE/UFRJ.

SCHLICHTING, H., 1979, “Boundary-layer Theory”. In: **Mechanical Engineering, McGraw-Hill Series**, 7ª edição.

SILVA, L. S., 2002, **Solução Numérica para um Escoamento Geofísico Aplicado ao Rio Amazonas**, Dissertação de M.Sc., UFRJ/CCMN/IM, Rio de Janeiro, 65 p.

SILVA, R. C. V., MASCARENHAS, F. C. B., MIGUEZ, M. G., 2003, **Hidráulica Fluvial**, Volume I, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

SIOLI, H., 1985, **Amazônia – Fundamentos da Ecologia da Maior Região de Florestas Tropicais**. Editora Vozes. Petropolis-RJ.

STRASSER, M.A. & RIBEIRO, A. N., 2003, **Modelagem Hidrodinâmica do rio Amazonas e do rio Madeira**, Relatório Técnico do Laboratório de Hidráulica Computacional, COPPE, UFRJ.

TRENBERTH, K. E., W. G. LARGE, AND J. G. OLSON, 1989, “The effective drag coefficient for evaluating wind stress over oceans”, **J. Climate**, 2, 1507 - 1516.

TUCCI, C. E. M., 1998, **Modelos Hidrológicos**. 2ª edição, Editora da UFRGS, Porto Alegre.

WHITE, F. M., 1979, **Fluid Mechanics**. McGraw-Hill.

WHITE, F.M., 1991, **Viscous Fluid Flow**, 2nd ed., McGraw-Hill Int. Ed.

## APÊNDICE A – Equação da Continuidade

A relação matemática que expressa a conservação de massa para um fluido é chamada de Equação da Continuidade. Sua derivação é feita considerando-se um volume infinitesimal como mostra a Figura A1, comparando o fluxo de massa através deste volume de controle com a variação da densidade do fluido em seu interior. Ou seja, traduz o fato de que a diferença entre o volume de água que entra e o volume que sai do volume considerado, num dado intervalo de tempo, corresponde exatamente à variação do volume de água dentro deste trecho e no mesmo intervalo.

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Taxa de Acumulação} \\ \text{de Massa} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{Taxa de Entrada} \\ \text{de Massa} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \text{Taxa de Saída} \\ \text{de Massa} \end{array} \right] \quad (\text{A. 1})$$

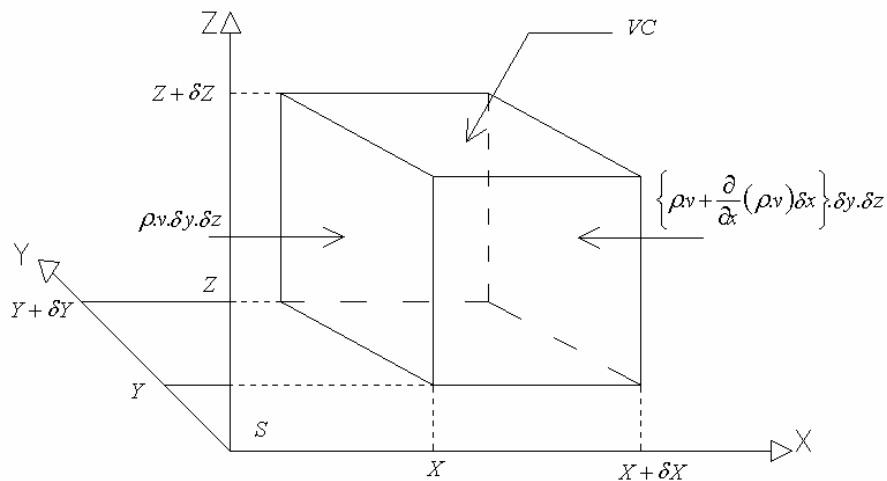


Figura A 1 - Esquema dos fluxos de vazão da massa na direção x em um volume de controle.

Entende-se por volume de controle uma região fixa no espaço onde pode existir fluxo de fluido através de suas fronteiras. Por esta razão, em diferentes instantes, podem-se ter diferentes partículas no interior do volume de controle. Em Mecânica dos Fluidos não há criação ou desaparecimento de massa e este princípio é conhecido como lei de conservação de massa. Neste Apêndice desenvolve-se a equação da continuidade usando-se um método alternativo baseado num volume de controle em um sistema Euleriano.

Considere uma superfície de controle  $S$  (ver Figura A.1) a qual confina um volume de controle  $VC$  inteiramente ocupado pelo fluido, cuja posição é fixa

relativamente a um eixo de coordenadas. O elemento  $\delta S$  tem  $\vec{n}$  como vetor unitário, normal exterior à superfície  $S$ . O elemento diferencial de área é  $\delta \vec{S} = \vec{n} \cdot \delta S$ . Sendo  $\rho$  a densidade do fluido na posição  $\vec{r} = (x, y, z)$  e no tempo  $t$ . O fluxo de massa contido no paralelepípedo que cruza, nesse tempo, através de um elemento infinitesimal de superfície  $\delta S$  e de orientação  $\vec{n}$  é:

$$\rho \vec{v} \cdot \vec{n} \delta A \quad (\text{A. 2})$$

A componente da velocidade  $v$ , levando material através da superfície é  $\vec{v} \cdot \vec{n}$ .

Então a taxa de massa total do fluido acumulada no elemento de volume  $\delta V$ , contido no paralelepípedo, confinado pela superfície  $S$  em qualquer instante é:

$$\iiint_{vc} \rho \delta V \quad (\text{A. 3})$$

E a taxa de fluxo total através da qual essa massa está fluindo para fora da superfície  $S$  é:

$$\iint_{sc} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \delta S \quad (\text{A. 4})$$

Esta, sendo positiva, indica a saída de mais massa do que a entrada na superfície de controle, e vice-versa sendo negativa.

Pelo princípio de conservação da massa, a soma da velocidade de variação da massa dentro do volume de controle e o fluxo de massa saindo através da superfície de controle do volume é zero. Portanto pode-se escrever a expressão para o balanço de massa no interior do elemento de volume sob a hipótese de conservação de massa do fluido a qual requer na forma integral (SPHAIER, 2005):

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \rho \delta V + \iint_{sc} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \delta A = 0 \quad (\text{A. 5})$$

Ou seja, a taxa de variação de massa no volume de controle é dada pela quantidade de massa que sai (ou entra, dependendo do sinal/fonte) pela superfície  $A$ , com a hipótese de não haver fontes ou sumidouros internamente à superfície de controle.

Transformando a segunda integral pelo Teorema de Gauss (ou da divergência) o qual permite transformar uma integral de superfície em uma integral de volume, e introduzindo a derivada dentro da primeira integral (o volume  $V$  é independente do tempo  $t$ ), temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \delta V = - \int_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \delta A = - \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \delta V \quad (\text{A. 6})$$

De maneira que, diferenciando sob o sinal da integral e lembrando que o volume  $V$  está fixo no espaço, temos (BATCHELOR, 1970):

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] \delta V = 0 \quad (\text{A. 7})$$

Para o cumprimento da equação anterior independente do volume de controle  $V$  escolhido, deve ser satisfeita em todos os pontos do espaço a identidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \vec{v}) \quad (\text{A. 8})$$

Esta é a forma diferencial da conservação de massa. A estas equações (diferencial e integral) se denomina a equação da continuidade.

Em notação indicial a equação pode ser escrita, como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (\text{A. 9})$$

Uma outra forma de vermos esse fato é observando o caminho percorrido  $\vec{r}(t)$  por uma partícula de água e a evolução da sua velocidade dada por  $\vec{v}(t, \vec{r}(t))$ . Assim de



acordo com a regra da cadeia para derivadas (CIPOLATTI, 2000) a taxa de variação da sua velocidade pode ser simplificada, pela equação (A.8) considerando:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\nabla \rho) + \rho (\nabla \cdot \vec{v}) \quad (\text{A. 10})$$

Então temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot (\nabla \rho) + \rho (\nabla \cdot \vec{v}) = 0 \quad (\text{A. 11})$$

E recordando a definição de operador derivada material, uma maneira equivalente de escrever esta relação é:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho (\nabla \cdot \vec{v}) = 0 \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0 \quad (\text{A. 12})$$

Esta também é a equação de conservação da massa em outra forma diferencial para um volume de controle infinitesimal, também conhecida como equação da continuidade, por exigir apenas que a massa específica e a velocidade sejam funções contínuas, podendo o escoamento ser permanente ou não, viscoso ou não-viscoso e compressível ou incompressível. Nesta forma a equação pode ser interpretada em termos das mudanças no volume de uma determinada massa de fluido. Esta equação afirma, portanto, que as taxas de mudança de densidade e volume de um elemento de fluido são iguais em magnitude e de sinais opostos. A expressão geral que traduz o princípio de conservação de massa para um escoamento de um fluido em três dimensões com relação a um volume de controle elementar (Figura A1) escrita da forma explícita, em coordenadas retangulares, utilizando a equação (A.12), para  $\vec{v} = (u, v, w)$  é:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{A. 13})$$

Na maioria dos problemas de engenharia, o escoamento é considerado incompressível. Um fluido é incompressível se sua densidade não é afetada pelas

mudanças na pressão, assim se o volume de um elemento de fluido é constante,  $\rho \neq \rho(x, t)$ . Da equação **A.12**, tem-se:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (\text{A. 14})$$

$$\text{div}\vec{v} = \nabla \cdot (\vec{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A. 15})$$

Segundo **BATCHELOR** (1970), a densidade pode também variar em consequência da condução interna do calor molecular; entretanto, circunstâncias nas qual o efeito da condução de calor no fluido é negligível são comuns.

## APÊNDICE B – Equação da Quantidade de Movimento

*Equação da Quantidade de Movimento, Dinâmica ou Momento:* representa o princípio da conservação da quantidade de movimento aplicado a um elemento de controle. Este princípio é definido pela Segunda Lei de Newton que traduz o fato de que a variação da quantidade de movimento por unidade de tempo deste elemento é igual ao somatório de todas as forças que atuam sobre ele. Assim, a equação de movimento para um fluido é, em sua forma mais fundamental, uma relação de comparação entre a taxa de mudança de momento de uma porção do fluido selecionada e a soma de todas as forças que agem naquela porção de fluido. O modelo matemático de tal princípio, considerando um volume de controle infinitesimal, pode ser escrito como:

$$\sum \vec{F}_i = \frac{D\vec{M}_v}{Dt} = \frac{D(m\vec{v}_i)}{Dt} = \rho \frac{D(\vec{v}_i)}{Dt} \delta\forall \quad (\text{B. 1})$$

Onde a quantidade de movimento é representada pelo produto  $m\vec{v}_i$ , e  $\sum \vec{F}_i$  representa o somatório das forças de campo e de contato que atuam sobre o elemento de controle.

As *forças de campo* também chamadas de *forças de volume* ou *de corpo* (dadas por massa unitária ou volume) são as que atuam sobre uma porção do fluido sem contato físico direto, serão consideradas aqui apenas a força gravitacional e a força de Coriolis.

E as *forças de contato* ou *superfície* (dadas por área unitária) são as que agregam as forças originadas pelo contato físico direto da porção do fluido considerado com o meio circundante.

### *i. Forças de Campo*

- *Força gravitacional:*  $\vec{F}_g$  é a força devido à gravidade. É caracterizada, em cada ponto da superfície do planeta, pela aceleração constante à qual qualquer corpo é submetido, resultante do campo gravitacional terrestre, com sentido orientado para o centro da Terra. Para o volume de controle é representada como:

$$d\vec{F}_g = -\rho\vec{g}\delta\forall \quad (\text{B. 2})$$

▪ *Força de Coriolis:*  $\vec{F}_C$  é a força à qual um corpo qualquer, que se desloca horizontalmente na superfície terrestre, está sujeito, devido à rotação terrestre. Tem as seguintes componentes:

$$d\vec{F}_{C_x} = \rho f_c \vec{v} \delta\forall \quad (\text{B. 3})$$

$$d\vec{F}_{C_y} = -\rho f_c \vec{u} \delta\forall \quad (\text{B. 4})$$

Sendo desprezível sua componente vertical, se comparada ao efeito gravitacional. O parâmetro de Coriolis ( $f_c$ ) é expresso por

$$f_c = 2\Omega \text{sen } \Phi \quad (\text{B. 5})$$

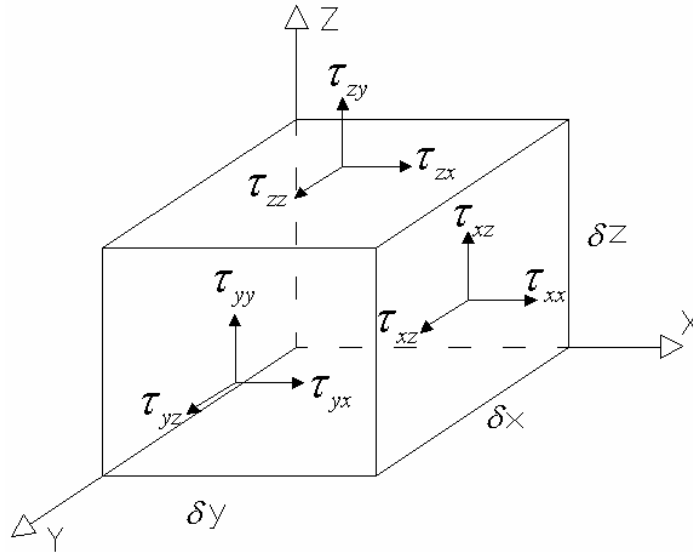
Onde  $\Omega$  é a velocidade angular de rotação da Terra  $\Omega = 7,3.10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$  e  $\Phi$  é a latitude, considerada positiva no hemisfério Norte e negativa no hemisfério Sul.

### ii. Forças de Contato

As forças de contato ou superfície dizem respeito àquelas aplicadas por tensões externas sobre as faces da superfície de controle, sendo representadas pelo tensor de tensões  $\tau_{i,j}$ , que é simétrico e definido como (SCHLICHTING, 1979):

$$\tau_{i,j} = \tau_{j,i} = \begin{pmatrix} \tau_{x,x} & \tau_{x,y} & \tau_{x,z} \\ \tau_{y,x} & \tau_{y,y} & \tau_{y,z} \\ \tau_{z,x} & \tau_{z,y} & \tau_{z,z} \end{pmatrix} \quad (\text{B. 6})$$

Considere um volume infinitesimal na forma de um paralelepípedo de lados  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  como é mostrado na Figura B1 abaixo:



**Figura B 1 – Representação das tensões no volume de controle considerado**

As forças de superfície atuantes sobre cada uma das seis faces podem se decompor nas três direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente  $\delta x$ ,  $\delta y$  e  $\delta z$ . Estas forças podem ser divididas entre a área correspondente, obtendo desta maneira os esforços que atuam em cada área. Estes esforços são mostrados na figura acima para as três faces. Nas três faces restantes a representação é similar. A nomenclatura usual adotada na Figura B1 é a seguinte: o primeiro índice refere-se ao plano de atuação do esforço, e o segundo a direção da tensão. Exemplo:  $\tau_{yx}$  indica tensão atuando no plano perpendicular ao eixo  $y$ , na direção  $x$ . Para especificar o estado de esforços num ponto do fluido necessita-se dos valores dos nove componentes  $\tau_{ij}$ , também representados na forma convencional de matriz.

Excluindo o efeito da pressão, que será considerado à parte no equacionamento, as tensões a que se refere o tensor da equação (B.6) são as chamadas tensões viscosas, resultantes do efeito da viscosidade do fluido. Para o eixo  $x$  e de acordo com a Figura B1, a força resultante de tais tensões é dada por:

$$dF_{vx} = \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \delta \nabla \quad (\text{B. 7})$$

Analogamente para os eixos  $y$  e  $z$ , tem-se:

$$dF_{V_y} = \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \delta V \quad (\text{B. 8})$$

$$dF_{V_z} = \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \delta V \quad (\text{B. 9})$$

De forma simplificada, pode-se escrever, então:

$$d\vec{F}_V = \nabla \vec{\tau}_{ij} \delta V \quad (\text{B. 10})$$

A força devido à pressão  $p$  pode ser obtida de maneira análoga à força de origem viscosa, conforme a Figura B2, para o caso da direção  $x$ .

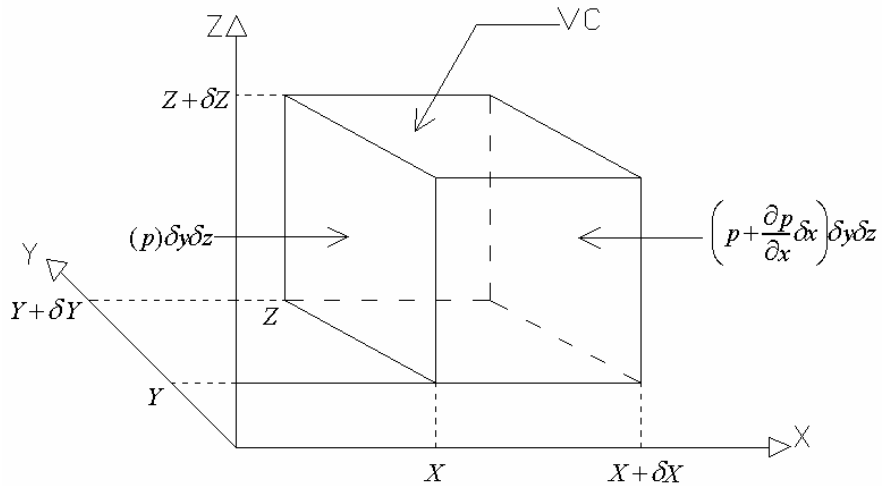


Figura B 2 – Indicação da ação da pressão sobre o volume de controle, na direção  $x$ .

Para o eixo  $y$ , a resultante da força de pressão é:

$$dF_{P_x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta V \quad (\text{B. 11})$$

E, de forma análoga:

$$dF_{P_y} = -\frac{\partial p}{\partial y} \delta V \quad (\text{B. 12})$$

$$dF_{p_z} = -\frac{\partial p}{\partial z} \delta V \quad (\text{B. 13})$$

Assim, a força de pressão atuando sobre o volume de controle em questão pode ser escrita de forma resumida como:

$$d\vec{F}_p = -\nabla \bar{p} \delta V \quad (\text{B. 14})$$

Substituindo-se os termos referentes às forças de campo e de contato na equação (B.1), tem-se:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \delta V = -\rho \vec{g} \delta V + d\vec{F}_C - \nabla \bar{p} \delta V + \nabla \vec{\tau}_{ij} \delta V \quad (\text{B. 15})$$

ou, de outra forma:

$$\rho \left[ \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot (\nabla \vec{v}) \right] = -\rho \vec{g} + \vec{F}_C - \nabla \bar{p} + \nabla \vec{\tau}_{ij} \quad (\text{B. 16})$$

Esta é a equação diferencial da conservação da quantidade de movimento, para um elemento infinitesimal, onde as componentes da força de Coriolis ( $\vec{F}_C$ ) são obtidas a partir das equações (B.3 e B.4).

Considerando fluidos newtonianos, para os quais as tensões viscosas são proporcionais às taxas de deformação do elemento, segundo um coeficiente de viscosidade (WHITE, 1979), Stokes estabeleceu as seguintes condições (WHITE, 1991):

- O fluido é contínuo, e seu tensor de tensões  $\tau_{ij}$  é uma função linear das taxas de deformação.

- O fluido é isotrópico, isto é, suas propriedades são independentes da direção e, portanto, a lei de deformação é independente dos eixos coordenados nos quais é expressa.

- Quando as taxas de deformação são nulas, a lei de deformação deve se reduzir à condição de pressão hidrostática:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (\text{B. 17})$$

Onde  $\delta_{ij}$  é o chamado delta de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$ , se  $i = j$  e  $\delta_{ij} = 0$ , se  $i \neq j$ ).

SCHLICHTING (1979) apresenta uma discussão sobre as tensões em um fluido e, seguindo as hipóteses de Reynolds, mostra que:

$$\tau_{ij} = \lambda \text{div} \bar{v} + 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \text{para } i = j \quad (\text{B. 18})$$

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \text{para } i \neq j \quad (\text{B. 19})$$

Onde  $\mu$  é o coeficiente de viscosidade cinemática do fluido e  $\lambda$  é um segundo coeficiente de viscosidade, sendo assumido que  $\lambda = (-2/3)\mu$ . Com isso e considerando um escoamento incompressível, tem-se:

$$\tau_{ij} = 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \text{para } i = j \quad (\text{B. 20})$$

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \text{para } i \neq j \quad (\text{B. 21})$$

Dessa forma, a equação da conservação da quantidade de movimento (**B. 16**), explicitada para cada eixo cartesiano, é:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \Omega v + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \dots \\ \dots + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B. 22})$$



$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho \Omega u + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \dots \\ \dots + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B. 23})$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \dots \\ \dots + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B. 24})$$

Baseado em evidências experimentais, Newton afirmou que as forças de fricção estão relacionadas com as taxas de variação da velocidade, o que mais tarde foi confirmado experimentalmente usando-se fluidos não-turbulentos. Pode-se mostrar que a força de fricção por unidade de massa na direção do escoamento em um pequeno elemento de massa do fluido é dada como:

Para a direção  $x$  fazendo as substituições das expressões (B. 20 e B. 21):

$$F_{vx} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \quad (\text{B. 25})$$

Reescrevendo,

$$F_{vx} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \nu \Delta(\vec{v}) = \nu \nabla^2(\vec{v}) \quad (\text{B. 26})$$

E esse termo representa a fricção molecular na equação dinâmica, onde:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{B. 27})$$

$\Delta$  é o operador Laplaciano,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  é o operador diferencial nabela em coordenadas cartesianas e  $\nu = \mu / \rho$  é coeficiente de viscosidade dinâmica do

fluido que assume diferentes valores de acordo com a natureza molecular do fluido em questão (POND E PICKARD, 1983). Tem-se que  $\mu=11,37.10^{-4} \text{ Kg/m.s}$  e  $\rho=999,1 \text{ Kg/m}^3$  para a água na pressão atmosférica à temperatura de  $15^\circ$  (BATCHELOR, 1970), e, portanto temos  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{seg}$ .

Considerando o coeficiente de viscosidade ( $\mu$ ) constante no espaço e com a variação de temperatura, usando a equação da continuidade (A.14) e re-arrumando os termos, obtém-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_C v + \nu \nabla^2 u \quad (\text{B. 28})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \underbrace{f_C u}_{\vec{F}_C} + \nu \nabla^2 v \quad (\text{B. 29})$$

$$\underbrace{\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}}_{\vec{F}_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \underbrace{g}_{\vec{F}_g} + \underbrace{\nu \nabla^2 w}_{\vec{F}_\nu} \quad (\text{B. 30})$$

Onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são as componentes do vetor velocidade nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente;  $\rho$  é a massa específica e  $\nu$  é o coeficiente de viscosidade do fluido;  $p$  é a pressão;  $g$  é a aceleração da gravidade;  $f_C$  é o parâmetro de Coriolis;  $\vec{F}_i$ ,  $\vec{F}_p$ ;  $\vec{F}_g$ ,  $\vec{F}_C$  e  $\vec{F}_\nu$  são as forças de inércia, pressão, gravidade, Coriolis e viscosidade, respectivamente.

## APÊNDICE C – Equações Hidrodinâmicas Promediadas no Tempo

As equações da continuidade e de quantidade de movimento foram deduzidas nos APÊNDICES A e B a partir das leis físicas de conservação que regem o fluxo de um fluido em geral. Os modelos matemáticos que utilizam as equações dinâmicas e da continuidade são denominados de modelos hidrodinâmicos, e, para representá-los, pode-se trabalhar com as equações instantâneas do escoamento ou com tais equações integradas no tempo. Neste Apêndice C apresentaremos as Equações de Reynolds a partir das equações de Navier-Stokes, considerando variáveis médias no tempo, assim como a equação da Continuidade.

Representaremos o escoamento em termos de valores médios temporais, sem as variabilidades ocasionadas pelas perturbações em escalas de tempo inferiores às da integração. Para isso, utilizou-se o método da separação introduzido por Reynolds, pelo qual cada variável é definida pela soma entre uma parte “média” ou de grande escala ( $\bar{u}$ ) e uma parte de “flutuação” ou de pequena escala ( $u'$ ), ou seja:

$$u = \bar{u} + u' \quad (\text{C. 1})$$

A média no tempo das equações (A.14, 3.24 a 3.26) é feita utilizando um intervalo de tempo considerado longo em termos das flutuações turbulentas, mas suficientemente pequeno para considerar as variações dos valores médios dos fenômenos cujas propriedades estão sendo estudadas. A parte média foi definida por Reynolds da seguinte forma:

$$\bar{u}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} u(t') \delta t' \quad (\text{C. 2})$$

Através de um método de relaxação, considerando um intervalo  $\Delta t$  grande, relativamente à escala temporal turbulenta, mas suficientemente pequeno em relação à escala de fluxo médio, a parte média é expressa por (ROSMAN, 1989):

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} u(t') \delta t' \quad (\text{C. 3})$$

Das equações (C.1) e (C.3), chega-se às seguintes relações (ROSMAN, 1989):

$$\overline{\bar{u}} = \bar{u}, \quad \overline{u'} = 0, \quad \overline{\bar{u}u'} = 0 \quad (\text{C. 4})$$

Utilizando-se as relações anteriores, apresenta-se, a seguir, a integração no tempo das equações da continuidade e dinâmicas, deduzidas nos Apêndice A e B e reproduzidas abaixo.

$$\text{div} \bar{v} = \nabla \cdot (\bar{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{C. 5})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_c v + \nu \nabla^2 u \quad (\text{C. 6})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f_c u + \nu \nabla^2 v \quad (\text{C. 7})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \nabla^2 w \quad (\text{C. 8})$$

Assim, ao promediar no tempo a equação da continuidade, aplicando a Regra de Leibnitz que estabelece (KAPLAN, 1972), para uma função  $f(x,t)$  contínua e com derivada contínua:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t) \delta x = f[b(t),t] \frac{\partial}{\partial t} b(t) - f[a(t),t] \frac{\partial}{\partial t} a(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \delta x \quad (\text{C. 9})$$

A integração do primeiro termo da equação da continuidade (C.5) fica:

$$\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \frac{\partial u}{\partial x} \delta t = \frac{\partial}{\partial x} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} u \delta t = \Delta t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad (\text{C. 10})$$

Analogamente,

$$\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \frac{\partial v}{\partial y} \delta t = \Delta t \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \quad (\text{C. 11})$$

e

$$\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \frac{\partial w}{\partial z} \delta t = \Delta t \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \quad (\text{C. 12})$$

Assim a equação da continuidade para escoamento incompressível promediada no tempo pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (\text{C. 13})$$

Promediando no tempo as equações dinâmicas, temos para cada termo:

- *Termo da Aceleração local*

Aplicando da mesma forma a Regra de Leibnitz, resulta em:

$$\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \frac{\partial u}{\partial t} \delta t = \Delta t \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad (\text{C. 14})$$

E para as direções  $y$  e  $z$ :

$$\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \frac{\partial v}{\partial t} \delta t = \Delta t \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \quad (\text{C. 15})$$

e

$$\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \frac{\partial w}{\partial t} \delta t = \Delta t \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \quad (\text{C. 16})$$

- *Termo da Aceleração Advectiva*

Fazendo uso da equação da continuidade (C.9), para promediar os termos referentes à aceleração advectiva, reescreve-os da seguinte forma:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = (u)^2 \frac{\partial}{\partial x} + (uv) \frac{\partial}{\partial y} + (uw) \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{C. 17})$$

Integrando um dos termos,

$$\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \frac{\partial}{\partial z} (uw) \delta t = \frac{\partial}{\partial z} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} (uw) \delta t \quad (\text{C. 18})$$

Fazendo uso do método da separação (C.1),

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} (uw) \delta t = \frac{\partial}{\partial z} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} (\overline{uw} + u' \bar{w} + \bar{u} w' + \overline{u' w'}) \delta t \quad (\text{C. 19})$$

Reescrevendo

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} (uw) \delta t = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \overline{uw} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \delta t + \bar{w} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} u' \delta t + \bar{u} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} w' \delta t + \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \overline{u' w'} \delta t \right] \quad (\text{C. 20})$$

Prosseguindo a integração e usando as relações (C.3) e (C.4):

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} (uw) \delta t = \Delta t \frac{\partial}{\partial z} (\overline{uw}) + \frac{\partial}{\partial z} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} u' w' \delta t = \Delta t \frac{\partial}{\partial z} (\overline{uw}) + \Delta t \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u' w'}) \quad (\text{C. 21})$$

Procedendo de maneira análoga para os demais termos da aceleração advectiva, no eixo  $x$ , resulta:

$$\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \frac{\partial}{\partial x} (u)^2 \delta t = \Delta t \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u^2}) + \Delta t \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u' u'}) \quad (\text{C. 22})$$

e

$$\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \frac{\partial}{\partial y} (uv) \delta t = \Delta t \frac{\partial}{\partial y} (\overline{uv}) + \Delta t \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) \quad (\text{C. 23})$$

Somando-se os termos da aceleração advectiva (C.21), (C.22) e (C.23), tem-se:

$$\begin{aligned} \Delta t \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u^2}) + \Delta t \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'u'}) + \Delta t \frac{\partial}{\partial y} (\overline{uv}) + \Delta t \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) + \Delta t \frac{\partial}{\partial z} (\overline{uw}) + \Delta t \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}) = \Delta t \left( \overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right) + \dots \\ \dots + \Delta t \overline{u} \left( \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} \right) + \Delta t \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'u'}) + \Delta t \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) + \Delta t \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}) \end{aligned} \quad (\text{C. 24})$$

Pela equação da continuidade (C.5), o segundo termo entre parênteses do lado direito da equação anterior é nulo e, portanto:

$$\begin{aligned} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \left( \overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right) \delta t = \Delta t \left( \overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right) + \dots \\ \dots + \Delta t \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'u'}) + \Delta t \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) + \Delta t \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}) \end{aligned} \quad (\text{C. 25})$$

Fazendo analogia para a integração dos termos da aceleração advectiva nos eixos y e z, teremos:

$$\begin{aligned} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \left( \overline{u} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{v}}{\partial z} \right) \delta t = \Delta t \left( \overline{u} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{v}}{\partial z} \right) + \dots \\ \dots + \Delta t \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'v'}) + \Delta t \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'v'}) + \Delta t \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v'w'}) \end{aligned} \quad (\text{C. 26})$$

$$\begin{aligned} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \left( \overline{u} \frac{\partial \overline{w}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{w}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} \right) \delta t = \Delta t \left( \overline{u} \frac{\partial \overline{w}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{w}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} \right) + \dots \\ \dots + \Delta t \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'w'}) + \Delta t \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'w'}) + \Delta t \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w'w'}) \end{aligned} \quad (\text{C. 27})$$

- *Termo da Força de Pressão*

Para o termo de pressão da equação dinâmica no eixo  $x$ , a promediação no tempo resulta em:

$$\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \delta t = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} p \delta t = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \Delta t \quad (\text{C. 28})$$

Analogamente para o eixo  $y$ :

$$\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \delta t = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \Delta t \quad (\text{C. 29})$$

E para o eixo  $z$ :

$$\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \delta t = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \Delta t \quad (\text{C. 30})$$

- *Termo da Força de Coriolis*

Para os termos da força de Coriolis, tem-se:

$$\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} f_c v \delta t = f_c \bar{v} \Delta t \quad (\text{C. 31})$$

$$\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} -f_c u \delta t = -f_c \bar{u} \Delta t \quad (\text{C. 32})$$

- *Termo da Força de Gravidade*

E, para o termo da força de gravidade na equação dinâmica no eixo  $z$ :

$$\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} g \delta t = g \Delta t \quad (\text{C. 33})$$



- *Termos referentes às Forças Viscosas*

Tomando o eixo  $x$  como exemplo, o termo referente às forças viscosas na equação (C.6) é dado por:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (\text{C. 34})$$

E sua integração resulta em, pela regra de Leibnitz, em:

$$\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \delta t = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} u \delta t \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} u \delta t \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} u \delta t \right) \quad (\text{C. 35})$$

E daí,

$$\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \delta t = \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \Delta t \quad (\text{C. 36})$$

Portanto,

$$\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \nabla^2 u \delta t = \Delta t \nabla^2 \bar{u} \quad (\text{C. 37})$$

E, da mesma forma, conclui-se que:

$$\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \nabla^2 v \delta t = \Delta t \nabla^2 \bar{v} \quad (\text{C. 38})$$

$$\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \nabla^2 w \delta t = \Delta t \nabla^2 \bar{w} \quad (\text{C. 39})$$

Em resumo, a integração no tempo das equações da continuidade (C.5) e dinâmicas (C.6, C.7 e C.8) é feita utilizando um intervalo de tempo considerado longo

em termos das flutuações turbulentas, mas suficientemente pequeno para considerar as variações dos valores médios dos fenômenos cujas propriedades estão sendo estudadas, isto resulta no seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (\text{C. 13})$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f_c \bar{v} + \nu \nabla^2 \bar{u} - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'u'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}) \quad (\text{C. 40})$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f_c \bar{u} + \nu \nabla^2 \bar{v} - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{v'u'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'v'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v'w'}) \quad (\text{C. 41})$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g + \nu \nabla^2 \bar{w} - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{w'u'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{w'v'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w'w'}) \quad (\text{C. 42})$$

Onde  $\bar{u}_{i,j,k}$  e  $u'_{i,j,k}$  são respectivamente a média temporal e as flutuações turbulentas das componentes da velocidade  $u_{i,j,k}$ . As equações de Reynolds são exatas tanto para o fluxo laminar como para o turbulento, porque nelas não foram introduzidas mais suposições como as equações de Navier-Stokes.

Convém ressaltar que, durante o processo de integração, surgem termos relativos às flutuações turbulentas nas equações dinâmicas, os quais são conhecidos como tensões

descrever de uma forma simples, a partir das variáveis do campo resolvido, as interações entre estes dois campos de propriedades.

Algumas vezes é conveniente considerar os termos das equações divididos pela densidade do fluido, neste caso, o coeficiente  $\mu/\rho$  é definido como coeficiente cinemático de viscosidade ( $\nu$ ). Assim, nos termos  $\nu \nabla^2 \bar{u}_i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)$  o termo de tensão (força / unidade de área)  $\mu(\partial \bar{u}_i / \partial x_j)$ , que pelas equações (B.20 e B.21) é equivalente a  $\tau_{ij}$ , normalmente é denominado de tensões laminares, enquanto os termos  $-\overline{\partial(u'_i u'_j)} / \partial x_j$  representam o transporte da quantidade de movimento devido às flutuações turbulentas, conhecido como tensões turbulentas ou tensões de Reynolds.

Quando o fluxo é laminar, a única forma de dissipação da energia é pelo atrito molecular. Já num fluxo turbulento, as flutuações irregulares das velocidades instantâneas permitem a transferência de energia das escalas de movimento maiores para os menores, onde são, então, dissipadas pelo atrito molecular.

Pode-se dizer que a turbulência se comporta como uma força viscosa, de modo que pode ser chamada de força pseudo-viscosa. Daí vem o conceito de viscosidade turbulenta, que é a dissipação de energia e momento devido à turbulência, que ocorre de maneira análoga a ação da viscosidade molecular, porém em uma escala muito maior.

O coeficiente de viscosidade turbulenta é representado por  $\nu_T$ . De acordo com metodologia aplicada por POND E PICKARD (1983), tensões como  $-\overline{\rho u' u'}$ ,  $-\overline{\rho u' v'}$  e  $-\overline{\rho u' w'}$  (e outros produtos médios quadráticos de  $u'$ ,  $v'$  e  $w'$ ), termos de Reynolds, por analogia com o caso molecular (ver equação B.26) pode-se supor que tais estão relacionadas com gradientes de velocidade média por algum tipo de viscosidade (tensão ou viscosidade turbulenta) e assim podem ser escritas para cada termo como:

$$-\overline{u' u'} = \nu_T^x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad (\text{C. 43})$$

$$-\overline{u' v'} = \nu_T^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (\text{C. 44})$$

$$-\overline{u'w'} = \nu_T^z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (\text{C. 45})$$

Ao contrário do caso molecular usamos diferentes valores da viscosidade turbulenta ( $\nu_T$ , etc.) para diferentes direções, desde que possam ser diferentes (particularmente entre as direções verticais e horizontais devido à estabilidade estática). Acima está a forma mais simples de definir a viscosidade turbulenta. Então um termo como  $-\partial(\overline{u'u'})/\partial x$  se torna  $\partial[\nu_T^x(\partial\bar{u}/\partial x)]/\partial x$ . Assim, os termos de fricção turbulenta  $\nu_T$  tornam-se, na direção x,

$$\nu_T^x \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \nu_T^y \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \nu_T^z \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \quad (\text{C. 46})$$

Note que eles são como  $\nu$ , cinemática (dimensões com unidades em  $[m^2 s^{-1}]$ ) e os termos na expressão (C.45) tem dimensões de força/ por unidade de massa, isto é, aceleração. Pode-se multiplicar o  $\nu_T$  por  $\rho$  para obter a viscosidade dinâmica que, quando multiplicada por  $\partial^2 \bar{u} / \partial x^2$ , resulta numa força atuando sobre a unidade de volume.

Diferente dos coeficientes da viscosidade molecular, os coeficientes da viscosidade turbulenta não são constantes para um fluido particular e temperatura, salinidade e pressão, mas variam com o movimento da partícula envolvida. Eles não são características do fluido, mas sim do escoamento. Os valores são acima de  $[10^{11}]$  dos de viscosidade cinemática molecular.

Assim, considerando tal tratamento para as tensões aparentes de Reynolds, o sistema de equações promediado no tempo, equações (C.13, C.40, C.41, C.42), se torna:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (\text{C. 13})$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f_c \bar{v} + \nu_T^x \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \nu_T^y \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \nu_T^z \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \quad (\text{C. 47})$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f_c \bar{u} + \nu_T^x \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \nu_T^y \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \nu_T^z \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \quad (\text{C. 48})$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g + \nu_T^x \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \nu_T^y \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \nu_T^z \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \quad (\text{C. 49})$$

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)