

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA NA ENGENHARIA DO VENTO  
INCLUINDO EFEITOS DE INTERAÇÃO FLUIDO-  
ESTRUTURA**

**Alexandre Luis Braun**

Porto Alegre  
Abril de 2007

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**ALEXANDRE LUIS BRAUN**

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA NA ENGENHARIA DO VENTO  
INCLUINDO EFEITOS DE INTERAÇÃO FLUIDO-  
ESTRUTURA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia

Porto Alegre

Abril de 2007

B825s Braun, Alexandre Luís  
Simulação numérica na engenharia do vento incluindo efeitos de interação fluido-estrutura / Alexandre Luis Braun. -- 2007.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Porto Alegre, BR-RS, 2007.

Orientador : Prof. Dr. Armando Miguel Awruch

1. Simulação numérica. 2. Elementos finitos. 3. Vento – Estruturas. 4. Interação fluido-estrutura. I. Awruch, Armando Miguel, orient. II. Título.

CDU-624.042.4(043)

**ALEXANDRE LUIS BRAUN**

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA NA ENGENHARIA DO VENTO  
INCLUINDO EFEITOS DE INTERAÇÃO FLUIDO-  
ESTRUTURA**

Esta tese de Doutorado foi julgada adequada para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 20 de Abril de 2007

Prof. Armando Miguel Awruch  
Dr. pela COPPE/UFRJ  
Orientador

Prof. Fernando Schnaid  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Adriane Prisco Petry (PROMEC/UFRGS)**  
Dra. Pelo PROMEC/UFRGS

**Prof. Marcelo Maia Rocha (PPGEC/UFRGS)**  
Dr. Techn. pela Universität Innsbruck

**Prof. Paulo Roberto de Freitas Teixeira (FURG)**  
Dr. pelo PPGEC/UFRGS

**Prof. Sérgio Luiz Frey (PROMEC/UFRGS)**  
Dr. pela PUC/RJ

Este trabalho é dedicado à  
memória de meus pais, Décio e  
Ivone Braun.

## AGRADECIMENTOS

Não poderia deixar de iniciar os meus agradecimentos sem citar o Prof. Armando Miguel Awruch, orientador desta tese, tanto pelo inestimável auxílio prestado, como também pelo convívio e pela sua amizade. Quero também agradecer de forma especial ao Prof. João Ricardo Masuero pela preciosa ajuda no processo de otimização do código numérico para a sua utilização em computadores pessoais, sem a qual seria impossível o tratamento dos problemas de grande porte aqui analisados.

Agradeço ao Prof. Acir Mércio Loredou-Souza pelo incentivo desde os tempos da graduação e por ser uma das poucas pessoas que depositaram em mim um voto de confiança quando do meu ingresso na pós-graduação. Agradeço também ao Prof. Joaquim Blessmann, que embora não tenha dado uma contribuição direta para a realização deste trabalho, enriqueceu-me enormemente com seu exemplo de vida e com os livros por ele cedidos gentilmente a mim em uma visita que lhe fiz durante a realização desta tese.

Tenho muito a agradecer ainda ao pessoal do Centro Nacional de Supercomputação (CESUP/UFRGS) pelo suporte e assistência prestados durante todos estes anos em que utilizei o CrayT94 e aos colegas do CEMACOM pelo agradável convívio.

Agradeço e dedico este trabalho aos meus pais, Décio e Ivone, que infelizmente não estão mais conosco para compartilhar esta alegria, mas tenho certeza que onde eles estejam agora estão também muito felizes por mais esta conquista. Também agradeço a minha irmã Daiane, por todo o suporte e companheirismo, e a pequena Júlia, pela alegria que trouxe à nossa casa neste último ano.

E por fim, o mais importante de tudo, agradeço a Deus por conceder a mim forças e capacidade para a concretização deste sonho. Gostaria de finalizar com algumas palavras de N.S. Jesus Cristo, as quais sempre me servem de grande alento: “Bem-aventurados os pobres, porque deles é o reino dos céus; Bem-aventurados os que choram, porque serão consolados; Bem-aventurados os mansos, porque herdarão a terra; Bem-aventurados os que têm fome de justiça, porque serão fartos; Bem-aventurados os misericordiosos, porque alcançarão misericórdia; Bem-aventurados os limpos de coração, porque eles verão a Deus; Bem-aventurados os pacificadores, porque eles serão chamados filhos de Deus; Bem-aventurado os que sofrem perseguição por causa da justiça, porque deles é o reino dos céus; Bem-aventurados sois vós, quando vos injuriarem e perseguirem, e mentindo, disserem todo o mal contra vós por minha causa.” (S. Mateus 5, 3-11).

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS .....	viii
LISTA DE TABELAS .....	xii
RESUMO .....	xiv
ABSTRACT .....	xv
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 ASPECTOS GERAIS.....	1
1.2 A ENGENHARIA DO VENTO COMPUTACIONAL E SUAS APLICAÇÕES.....	1
1.3 A DINÂMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL NA EVC .....	6
1.4 A DINÂMICA DAS ESTRUTURAS COMPUTACIONAL (DEC).....	13
1.5 A SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA (IFE) .....	20
1.6 OBJETIVOS E METODOLOGIA DO PRESENTE TRABALHO .....	24
1.7 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO .....	26
2 A MECÂNICA DOS FLUIDOS .....	28
2.1 A UNIVERSALIDADE DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES .....	28
2.2 AS EQUAÇÕES PARA A ANÁLISE DA DINÂMICA DOS ESCOAMENTOS .....	29
2.2.1 Equações de Conservação .....	29
2.2.2 Equações Constitutivas.....	30
2.2.3 Relações Termodinâmicas.....	31
2.3 A HIPÓTESE DE PSEUDO-COMPRESSIBILIDADE PARA A EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DE MASSA .....	32
2.4 ANÁLISE DE ESCOAMENTOS TURBULENTOS .....	33
2.4.1 A aplicação de modelos de turbulência em escoamentos da EVC.....	33
2.4.2 A Simulação de Grandes Vórtices (“Large Eddy Simulation – LES”) .....	39
2.4.2.1 O modelo clássico de Smagorinsky.....	43
2.4.2.2 O modelo dinâmico .....	43
2.5 AS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO EMPREGANDO UMA FORMULAÇÃO ARBITRÁRIA LAGRANGEANA-EULERIANA (ALE) .....	45
3 OS MODELOS NUMÉRICOS PARA A ANÁLISE DO ESCOAMENTO .....	50
3.1 A SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS DE VENTO .....	50
3.2 DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL USANDO	

3.6.2	Condição de convergência para problemas permanentes .....	74
3.6.3	Condição de convergência para o processo iterativo do esquema explícito-iterativo .....	75
4	A MECÂNICA DOS SÓLIDOS .....	76
4.1	AS EQUAÇÕES PARA A ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS .....	76
4.1.1	Equação de conservação de momentum (Eq. de equilíbrio dinâmico).....	76
4.1.2	Equação de conservação de massa .....	77
4.1.3	Equação constitutiva para materiais elásticos em pequenas deformações .....	78
4.2	A ABORDAGEM CO-ROTACIONAL NA ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA .....	80
4.2.1	Medidas de tensão e deformação no sistema co-rotacional.....	81
4.2.2	O incremento de deformações no sistema co-rotacional – a taxa de deformação co-rotacional .....	82
4.2.3	A equação constitutiva incremental.....	86
5	O MODELO NUMÉRICO PARA A ANÁLISE DA ESTRUTURA.....	90
5.1	A FORMA FRACA DA EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DE MOMENTUM: O PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS .....	90
5.2	A FORMULAÇÃO PARA O ELEMENTO HEXAÉDRICO ISOPARAMÉTRICO TRILINEAR .....	91
5.3	A TÉCNICA DE INTEGRAÇÃO REDUZIDA COM CONTROLE DE MODOS ESPÚRIOS .....	94
5.3.1	Estabilização dos modos espúrios .....	95
5.3.2	A matriz de rigidez de estabilização.....	101
5.4	A NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA .....	107
5.4.1	A matriz de rigidez tangente.....	107
5.4.2	Determinação da matriz de rotação ao sistema co-rotacional .....	109
5.5	O ESQUEMA DE AVANÇO NO TEMPO PARA A ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR .....	110
5.5.1	O esquema implícito de Newmark .....	110
5.5.2	O método $\alpha$ -Generalizado e a estabilização do processo de integração temporal para problemas altamente não-lineares.....	113
5.5.3	O esquema de controle algorítmico de energia .....	115
6	O MODELO NUMÉRICO PARA O ACOPLAMENTO FLUIDO-ESTRUTURA.....	117
6.1	INTRODUÇÃO.....	117
6.1.1	Terminologia para algoritmos de interação fluido-estrutura .....	117
6.1.2	Esquemas particionados versus esquemas monolíticos.....	120
6.1.3	Os esquemas particionados existentes.....	124
6.1.4	A transferência de informações através de interfaces com malhas não conformes .....	135
6.1.5	A técnica de subciclos .....	147
6.2	O ALGORITMO PARA A ANÁLISE DE PROBLEMAS DE IFE.....	150
6.2.1	O algoritmo de emparelhamento entre as interfaces fluido-estrutura.....	153
6.2.2	A transferência de dados através da interface .....	158
6.3	ATUALIZAÇÃO AUTOMÁTICA DA MALHA .....	161
7	ASPECTOS GERAIS SOBRE AS ETAPAS DE ANÁLISE .....	163
7.1	INTRODUÇÃO.....	163
7.2	PRÉ-PROCESSAMENTO DE DADOS .....	164
7.2.1	Determinação de vetores normais a faces de contorno.....	165
7.2.2	Determinação das áreas de faces de contorno .....	168
7.3	PÓS-PROCESSAMENTO DE DADOS .....	169

7.3.1	Visualização de resultados .....	169
7.3.2	Suavização do campo de pressões do escoamento .....	169
7.3.3	Suavização das componentes de tensão da estrutura.....	171
7.3.4	Determinação dos coeficientes aerodinâmicos.....	172
8	APLICAÇÕES DE VERIFICAÇÃO .....	176
8.1	INTRODUÇÃO.....	176
8.2	ANÁLISE DE ESCOAMENTOS .....	177
8.2.1	Escoamento em cavidade 3D.....	177
8.2.2	Escoamento sobre um cilindro 2D .....	186
8.2.3	Escoamento turbulento sobre um prisma quadrado 2D.....	194
8.2.4	Conclusões parciais sobre os algoritmos desenvolvidos para a análise de escoamentos.....	199
8.3	ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS.....	201
8.3.1	Viga em balanço sujeita a uma carga de pressão.....	201
8.3.2	Casca esférica engastada sujeita a uma carga concentrada .....	206
8.3.3	Casca retangular sem restrição sujeita a cargas iniciais uniformemente distribuídas aplicadas no plano x-z .....	211
8.3.4	Casca retangular sem restrição sujeita a cargas iniciais uniformemente distribuídas aplicadas nas três direções Cartesianas .....	214
8.3.5	Conclusões parciais sobre os algoritmos desenvolvidos para a análise de estruturas .....	217
8.4	ANÁLISE DE PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA.....	219
8.4.1	Painel flexível sob a ação de vórtices gerados por um prisma de seção quadrada	219
8.4.2	Conclusões parciais sobre os algoritmos desenvolvidos para a análise da interação fluido-estrutura .....	229
9	APLICAÇÕES DE VALIDAÇÃO .....	230
9.1	INTRODUÇÃO.....	230
9.2	ANÁLISE AERODINÂMICA DE PONTES .....	231
9.2.1	Ponte de Tacoma .....	231
9.3	ANÁLISE AERODINÂMICA DE EDIFÍCIOS .....	237
9.3.1	Configuração com um edifício .....	237
9.3.2	Configuração com dois edifícios em paralelo .....	241
9.4	ANÁLISE DA AÇÃO DO VENTO SOBRE ZONAS URBANAS .....	246
9.4.1	Ação do vento sobre um bloco de prédios na região central de Montreal, Canadá .....	246
9.5	ANÁLISE DA CIRCULAÇÃO DO VENTO EM EDIFICAÇÕES .....	252
9.5.1	Ventilação interna e externa em um modelo de edificação .....	252
9.6	ANÁLISE AEROELÁSTICA DE EDIFICAÇÕES .....	258
9.6.1	Resposta estrutural de uma edificação com cobertura em membrana elástica sob a ação do vento .....	258
10	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	265
11	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	269

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Métodos de simulação numérica em escoamentos da EVC.....	39
Figura 2.2: Formação do filtro teste para o processo de segunda filtragem do modelo dinâmico empregado no presente trabalho.....	45
Figura 3.1: Transformação do sistema de referência para o processo de integração numérica.....	64
Figura 4.1: Configurações nos instantes $t = t_n$ , $t = t_{n+1/2}$ e $t = t_{n+1}$ .....	84
Figura 4.2: Decomposição do incremento de deslocamento.....	85
Figura 5.1: Definições para o elemento hexaédrico no sistema local.....	92
Figura 6.1: Algoritmo para análise de problemas de interação fluido-estrutura através de um modelo particionado convencional.....	125
Figura 6.2: Algoritmo para análise de problemas de interação fluido-estrutura através de um modelo particionado iterativo.....	127
Figura 6.3: Algoritmo para análise de problemas de interação fluido-estrutura através de um modelo particionado conservativo.....	129
Figura 6.4: Determinação da defasagem no tempo entre os subsistemas fluido e estrutural em função dos parâmetros $\alpha$ e $\delta$ do método de Newmark.....	132
Figura 6.5: Esquema de transferência de dados baseado em projeção de nós.....	136
Figura 6.6: Esquema de transferência de dados baseado em projeção dos pontos de Gauss.....	138
Figura 6.7: Esquema de transferência de dados baseado no método de refinamento em comum.....	140
Figura 6.8: Emparelhamento entre os nós do fluido e pontos sobre faces de elementos da estrutura sobre a interface.....	143
Figura 6.9: Exemplo ilustrativo sobre o equilíbrio de cargas em malhas não coincidentes...	145
Figura 6.10: Tipos de discretização em interfaces não conformes: (a) discretização hierárquica; (b) discretização não hierárquica.....	146
Figura 6.11: Modelo de acoplamento equipado com subciclos.....	148
Figura 6.12: Modelo de acoplamento utilizado neste trabalho.....	153
Figura 6.13: Projeção de um nó do fluido localizado na interface sobre o plano que contém a face de um elemento próximo da estrutura.....	154
Figura 6.14: Verificação da localização do nó projetado do fluido sobre a face de um elemento da estrutura: (a) nó pertencente à face; (b) nó não pertencente à face.....	156
Figura 6.15: Definições geométricas para o elemento hexaédrico trilinear isoparamétrico.....	157
Figura 6.16: Definição de parâmetros para o esquema de movimento de malha.....	162
Figura 7.1: As etapas de processamento realizadas em análises numéricas.....	163
Figura 7.2: Numeração local de um elemento de contorno.....	166
Figura 7.3: Vetores característicos da face $j$ no nó A.....	166
Figura 7.4: Obtenção do vetor normal unitário no nó A.....	167
Figura 7.5: Cálculo das áreas das faces de contorno.....	168
Figura 7.6: Convenções para a determinação dos coeficientes aerodinâmicos.....	172
Figura 8.1: Características geométricas, condições de contorno e malhas de elementos finitos usadas nas análises do escoamento em uma cavidade 3D: (a) configuração empregada para $Re = 10^3$ e $Re = 3.2 \times 10^3$ ; (b) configuração empregada para $Re = 10^4$ .....	178
Figura 8.2: Perfis de velocidade em uma cavidade 3D ao longo do eixo $x_2$ , medidos nos planos médios das cavidades.....	179
Figura 8.3: Perfis de velocidade em uma cavidade 3D ao longo do eixo $x_1$ , medidos nos planos médios das cavidades.....	180

Figura 8.4: Perfis de velocidade obtidos em uma cavidade 3D para $Re = 10^4$ : (a) perfil de $v_1$ ; (b) perfil de $v_2$ .....	181
Figura 8.5: Perfis de velocidade RMS obtidos no plano médio da cavidade 3D para $Re = 10^4$ : (a) perfil de $v_1^{RMS}$ ; (b) perfil de $v_2^{RMS}$ .....	182
Figura 8.6: Perfis de UV obtidos no plano médio da cavidade 3D para $Re = 10^4$ : (a) perfil ao longo do eixo $x_1$ ; (b) perfil ao longo do eixo $x_2$ .....	182
Figura 8.7: Campos de pressão obtidos na cavidade 3D: coluna da esquerda – esquema explícito de dois passos; coluna da direita – esquema explícito-iterativo.....	184
Figura 8.8: Campos de pressão obtidos na cavidade 3D: (a) modelo clássico de Smagorinsky; (b) modelo dinâmico.....	184
Figura 8.9: Comportamento do resíduo para os escoamentos analisados em uma cavidade 3D segundo o modelo numérico utilizado.....	185
Figura 8.10: Características geométricas, condições de contorno e malha de elementos finitos usadas nas análises do escoamento sobre um prisma de seção circular 2D.....	187
Figura 8.11: Campos de pressão e linhas de corrente na região vizinha ao cilindro obtidos para o caso $Re = 40$ . ....	188
Figura 8.12: Campos de pressão e linhas de corrente na região vizinha ao cilindro obtidos para o caso $Re = 10^3$ . ....	190
Figura 8.13: Históricos de coeficiente de arrasto ( $C_D$ ) e de sustentação ( $C_L$ ) obtidos pelos esquemas explícito de dois passos e explícito-iterativo na análise do escoamento sobre um cilindro 2D.....	191
Figura 8.14: Distribuições do coeficiente de pressão ( $C_p$ ) obtidos pelos esquemas explícito de dois passos e explícito-iterativo na análise do escoamento sobre um cilindro 2D.....	191
Figura 8.15: Comportamento do resíduo nas análises do escoamento sobre um cilindro 2D de acordo com os casos analisados e o modelo numérico utilizado.....	193
Figura 8.16: Características geométricas, condições de contorno e malha de elementos finitos usadas nas análises do escoamento turbulento sobre um prisma quadrado 2D. ....	195
Figura 8.17: Históricos de coeficiente de arrasto ( $C_D$ ) e sustentação ( $C_L$ ) obtidos pelos esquemas explícito de dois passos e explícito-iterativo na análise do escoamento turbulento sobre um prisma quadrado 2D. ....	196
Figura 8.18: Perfis de velocidade média $v_1$ ao longo de uma linha horizontal desde a parede lateral posterior do prisma em direção à esteira em $Y = 7$ m. ....	197
Figura 8.19: Perfis de velocidades médias $v_1$ e $v_2$ ao longo de uma linha vertical desde a parede superior do prisma em $X = 8$ m. ....	197
Figura 8.20: Campos de pressão e linhas de corrente instantâneos obtidos na análise do escoamento turbulento sobre um prisma quadrado 2D. ....	198
Figura 8.21: Características geométricas e função de carga para a análise da viga em balanço. .....	201
Figura 8.22: Resposta dinâmica obtida para a análise da viga em balanço.....	204
Figura 8.23: Resposta em energia obtida para a análise da viga em balanço.....	205
Figura 8.24: Configurações deformadas obtidas na análise da viga em balanço. ....	206
Figura 8.25: Características geométricas e função de carga para a análise da casca esférica.....	207
Figura 8.26: Resposta dinâmica obtida na análise da casca esférica.....	208
Figura 8.27: Resposta em energia obtida na análise da casca esférica.....	209
Figura 8.28: Configurações deformadas obtidas na análise da casca esférica. ....	210
Figura 8.29: Características geométricas e função de carga para a análise da casca não restringida com movimento 2D. ....	211
Figura 8.30: Resposta em energia obtida na análise da casca não restringida com movimento 2D. ....	213

Figura 8.31: Configurações deformadas obtidas na análise da casca não restringida com movimento no plano x-z. ....	214
Figura 8.32: Características geométricas e função de carga para a análise da casca não restringida com movimento 3D. ....	214
Figura 8.33: Resposta em energia obtida na análise da casca não restringida com movimento 3D. ....	216
Figura 8.34: Configurações deformadas obtidas na análise da casca não restringida com movimento 3D. ....	217
Figura 8.35: Características geométricas, condições de contorno e malha de elementos finitos empregados para o escoamento na análise de interação fluido-estrutura em um painel flexível. ....	220
Figura 8.36: Características geométricas, condições de contorno e malhas de elementos finitos empregadas para a estrutura na análise de interação fluido-estrutura em um painel flexível: (a) Malha coincidente; (b) Malha parcialmente não coincidente; (c) Malha totalmente não coincidente. ....	221
Figura 8.37: Históricos de deslocamentos verticais na extremidade livre do painel obtidos pelo modelo de acoplamento conservativo para diferentes números de subciclos e malha coincidente. ....	223
Figura 8.38: Históricos de deslocamentos verticais na extremidade livre do painel obtidos pelos modelos de acoplamento conservativo e convencional para diferentes condições de malha e de número de subciclos. ....	224
Figura 8.39: Históricos de deslocamentos verticais na extremidade livre do painel obtidos pelo	

Figura 9.12: Campos médios de vetores de velocidade na região dos prédios tomados em $Z = 2\text{m}$ : (a) presente trabalho; (b) Tutar e Oguz (2002). .....	244
Figura 9.13: Campos médios de pressão nas imediações de dois edifícios em paralelo.....	245
Figura 9.14: Linhas de corrente instantâneas integradas no espaço para dois edifícios em paralelo. ....	246
Figura 9.15: Análise da ação do vento sobre um bloco de prédios: (a) características geométricas e condições de contorno; (b) detalhe da malha de elementos finitos.....	247
Figura 9.16: Históricos dos coeficientes de força e momento $C_{Fx}$ , $C_{Fy}$ , $C_{Fz}$ , $C_{Mx}$ , $C_{My}$ e $C_{Mz}$ para cada um dos edifícios em bloco avaliados.....	248
Figura 9.17: Campo vetorial médio $\mathbf{v}$ ( $v_1, v_2$ ) no plano $Z = 2\text{m}$ para a região do quarteirão de prédios: (a) presente trabalho; (b) Stathopoulos e Baskaran (1996). ....	249
Figura 9.18: Campos de pressão médios nas imediações do bloco de edifícios. ....	250
Figura 9.19: Linhas de corrente instantâneas integradas no espaço sobre o bloco de edifícios. ....	251
Figura 9.20: Análise da circulação do vento em uma edificação: (a) características geométricas e condições de contorno; (b) detalhe da malha de elementos finitos.....	253
Figura 9.21: Perfis médios de velocidade para diferentes posições no domínio de análise para uma edificação com abertura: (a) $v_1/V_{ref}$ ; (b) $v_3/V_{ref}$ . Linhas contínuas indicam valores obtidos pelo presente trabalho; pontos indicam valores experimentais. ....	255
Figura 9.22: Campos médios de vetores de velocidade e pressão na região de uma edificação com abertura – plano $Y = 21.25\text{ m}$ : (a) Jiang et al. (2003) – experimental; (b) Jiang et al. (2003) – numérico; (c) presente trabalho. ....	256
Figura 9.23: Coeficientes de pressão médios ( $C_p$ ) sobre as paredes externas da seção intermediária ( $Y = 21.25\text{ m}$ ) de uma edificação com abertura. Linhas contínuas indicam valores obtidos pelo presente trabalho; pontos indicam valores experimentais obtidos por Jiang et al. (2003). ....	257
Figura 9.24: Campos de pressão instantâneos nas imediações de uma edificação com abertura. ....	258
Figura 9.25: Linhas de corrente instantâneas integradas no espaço sobre uma edificação com abertura. ....	258
Figura 9.26: Características geométricas, condições de contorno e malha de elementos finitos empregadas para o escoamento na análise de interação fluido-estrutura sobre uma cobertura em membrana. ....	259
Figura 9.27: Características geométricas, condições de contorno e malha de elementos finitos empregadas para a estrutura na análise de interação fluido-estrutura sobre uma cobertura em membrana. ....	260
Figura 9.28: Históricos de deslocamentos verticais no centro da cobertura obtidos pelos modelos de acoplamento conservativo e convencional.....	261
Figura 9.29: Malha de elementos finitos e campos de pressão obtidos em diferentes instantes de tempo para a análise de interação fluido-estrutura em uma cobertura flexível. ....	262
Figura 9.30: Configurações deformadas da cobertura e vetor de força do escoamento em diferentes instantes de tempo.....	264

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1: Desempenho dos modelos LES e $\kappa$ - $\epsilon$ para diferentes situações de escoamento. ...	36
Tabela 5.1: Permutação para os números nodais na geração das componentes $\underline{b}_{1a}$ . . . . .	106
Tabela 5.2: Permutação para as coordenadas globais na geração de $\underline{b}_i$ . . . . .	107
Tabela 6.1: Comparação entre os modelos particionado e monolítico para um conjunto de características encontradas em algoritmos de interação fluido-estrutura. . . . .	123
Tabela 6.2: Condições de contorno para a solução do sistema (6.79). . . . .	158
Tabela 7.1: Identificação das faces de contorno e as respectivas conectividades em elementos de contorno. . . . .	166
Tabela 8.1: Propriedades geométricas e de discretização para as análises do escoamento em uma cavidade 3D. . . . .	178
Tabela 8.2: Constantes físicas e geométricas utilizadas nas análises do escoamento em uma cavidade 3D. . . . .	179
Tabela 8.3: Desempenho computacional obtido pelos esquemas numéricos utilizados na análise da cavidade tridimensional. . . . .	185
Tabela 8.4: Constantes físicas e geométricas utilizadas nas análises do escoamento sobre um prisma de seção circular 2D. . . . .	187
Tabela 8.5: Parâmetros geométricos dos vórtices para $Re = 40$ . . . . .	189
Tabela 8.6: Resultados de coeficiente de arrasto médio para um prisma de seção circular 2D. . . . .	190
Tabela 8.7: Desempenho computacional obtido pelos esquemas numéricos na análise de escoamento laminar bidimensional sobre um prisma de seção circular. . . . .	193
Tabela 8.8: Constantes físicas e geométricas utilizadas nas análises do escoamento turbulento sobre um prisma quadrado 2D. . . . .	195
Tabela 8.9: Resultados para os coeficientes aerodinâmicos na análise do escoamento turbulento sobre um prisma quadrado 2D. . . . .	196
Tabela 8.10: Constantes empregadas na análise da viga em balanço. . . . .	201
Tabela 8.11: Constantes empregadas na análise da casca esférica. . . . .	207
Tabela 8.12: Constantes empregadas na análise da casca não restringida com movimento 2D. . . . .	211
Tabela 8.13: Constantes empregadas na análise da casca não restringida com movimento 3D. . . . .	215
Tabela 8.14: Dados computacionais das análises efetuadas para a estrutura. . . . .	218
Tabela 8.15: Constantes empregadas na análise de interação fluido-estrutura em um painel flexível. . . . .	222
Tabela 8.16: Resultados referentes à análise dinâmica de um painel flexível sujeito aos efeitos de interação fluido-estrutura. . . . .	226
Tabela 8.17: Tempos de processamento em segundos obtidos na análise de interação fluido-estrutura em um painel flexível. . . . .	229
Tabela 9.1: Constantes físicas e geométricas utilizadas nas análises da ação do vento sobre a ponte de Tacoma. . . . .	232
Tabela 9.2: Constantes físicas e geométricas utilizadas na análise da ação do vento sobre um edifício. . . . .	238
Tabela 9.3: Valores médios dos coeficientes de força e momento para um edifício. . . . .	239
Tabela 9.4: Constantes físicas e geométricas utilizadas nas análises da ação do vento sobre dois edifícios em paralelo. . . . .	243
Tabela 9.5: Resultados médios de coeficientes aerodinâmicos para cada um dos prédios em paralelo analisados. . . . .	244

Tabela 9.6: Constantes físicas e geométricas utilizadas nas análises da ação do vento sobre um bloco de prédios.....	248
Tabela 9.7: Resultados médios de coeficientes aerodinâmicos para cada um dos prédios em bloco analisados.....	249
Tabela 9.8: Resultados médios de $V_1/V_0$ para diferentes locais na região do bloco de prédios. ....	252
Tabela 9.9: Constantes físicas e geométricas utilizadas na análise de circulação de vento sobre uma edificação.....	254
Tabela 9.10: Constantes empregadas na análise de interação fluido-estrutura sobre uma cobertura em membrana. ....	260
Tabela 9.11: Resultados referentes à análise dinâmica de uma cobertura flexível sob a ação do escoamento. ....	261

## RESUMO

BRAUN, A.L. Simulação Numérica na Engenharia do Vento Incluindo Efeitos de Interação Fluido-Estrutura. 2007. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

O objetivo deste trabalho é estudar e desenvolver procedimentos numéricos adequados para a análise de problemas da Engenharia do Vento Computacional (EVC). O escoamento é analisado a partir das equações de Navier-Stokes para um fluido Newtoniano e de uma equação de conservação de massa considerando a hipótese de pseudo-compressibilidade, ambas em um processo isotérmico. Na presença de escoamentos turbulentos emprega-se a Simulação de Grandes Escalas (“LES”) com os modelos clássico e dinâmico de Smagorinsky para as escalas inferiores à resolução da malha. Dois modelos numéricos de Taylor-Galerkin para a análise do escoamento são estudados: o esquema explícito de dois passos e o esquema explícito-iterativo. O Método dos Elementos Finitos (MEF) é empregado para a discretização do domínio espacial utilizando o elemento hexaédrico trilinear isoparamétrico com integração reduzida das matrizes em nível de elemento. Em problemas envolvendo efeitos de interação fluido-estrutura emprega-se um esquema de acoplamento particionado com características superiores de conservação, permitindo, inclusive, o uso de subciclos entre as análises do fluido e da estrutura e de malhas não compatíveis na interface. A estrutura é considerada como um corpo deformável constituído de um material elástico linear com a presença de não-linearidade geométrica. O MEF é também usado para a discretização da estrutura, empregando-se para tanto o elemento hexaédrico trilinear isoparamétrico com integração reduzida e controle de modos espúrios. A equação de equilíbrio dinâmico é integrada no tempo utilizando o método implícito de Newmark no contexto do método de estabilização  $\alpha$ -Generalizado. Na presença de estruturas deformáveis, o escoamento é descrito através de uma formulação arbitrária Lagrangeana-Euleriana (ALE). Ao final, comparações com exemplos numéricos e experimentais são apresentadas para demonstrar a viabilidade dos algoritmos desenvolvidos, seguindo-se com as conclusões do trabalho e as sugestões para trabalhos futuros.

**Palavras-chave:** Engenharia do Vento Computacional; Método dos Elementos Finitos; Interação Fluido-Estrutura; Turbulência; Elastodinâmica Não-linear.

## ABSTRACT

BRAUN, A.L. Simulação Numérica na Engenharia do Vento Incluindo Efeitos de Interação Fluido-Estrutura. 2007. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Analysis and development of numerical tools to simulate Computational Wind Engineering (CWE) problems is the main goal of the present work. The isothermal flow is analyzed using the Navier-Stokes equations for viscous fluids and a mass conservation equation obtained according to the pseudo-compressibility assumption. Turbulent flows are simulated employing Large Eddy Simulation (LES) with the classical and dynamic Smagorinsky's models for subgrid scales. Two Taylor-Galerkin models for the flow analysis are investigated: the explicit two-step scheme and the explicit-iterative scheme. The Finite Element Method (MEF) is employed for spatial discretizations using the eight-node hexahedral isoparametric element with one-point quadrature. Fluid-structure interaction problems are analyzed with a coupling model based on a conservative partitioned scheme. Subcycling and nonmatching meshes for independent discretizations of the fluid and structure domains are also available. The structure is considered as a deformable body constituted by a linear elastic material with geometrically nonlinear effects. The FEM is used for the spatial discretization of the structure as well. Eight-node hexahedral isoparametric elements with one-point quadrature and hourglass control are adopted in this process. The implicit Newmark algorithm within the framework of the  $\alpha$ -Generalized method is employed for the numerical integration of the dynamic equilibrium equation. An arbitrary Lagrangean-Eulerian (ALE) description is adopted for the kinematic description of the flow when deformable structures are analyzed. Numerical and experimental examples are simulated in order to demonstrate the accuracy of the developed algorithms. Concluding remarks and suggestions for future works are pointed out in the last chapter of the present work.

**Key-words:** Computational Wind Engineering; Finite Element Method; Fluid-Structure Interaction; Turbulence; Nonlinear Elastodynamics.

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 ASPECTOS GERAIS

A Engenharia do Vento Computacional (EVC) trata basicamente da solução dos problemas clássicos da Engenharia do Vento (EV), que até pouco tempo atrás só eram possíveis de se analisar por meio de técnicas experimentais em túneis de vento, empregando ferramentas numéricas desenvolvidas pelas áreas da Dinâmica de Fluidos Computacional (DFC) e da Dinâmica de Estruturas Computacional (DEC), tendo como principal objetivo a determinação dos efeitos causados pela ação do vento sobre estruturas e em meio-ambientes. A EVC é um campo de pesquisa relativamente recente, cujo início se deu em meados da década de 80, e o seu rápido crescimento na comunidade científica ocorreu principalmente em virtude do amadurecimento dos modelos numéricos e do avanço na tecnologia dos computadores. Além disso, as dificuldades inerentes aos ensaios realizados em túneis de vento, como os altos custos, o tempo de análise e o risco de falha, tornaram a EVC uma alternativa mais viável e segura para a análise de estruturas submetidas a cargas de vento. (TJ-18.73 -1.725 T)

em três grandes subáreas de aplicação: avaliação das condições ambientais devidas à circulação de vento, determinação das forças induzidas pelo vento sobre estruturas e resposta estrutural sob a ação do vento.

A análise de problemas sobre condições ambientais provocadas pela circulação de vento envolve elementos teóricos relacionados à meteorologia, micrometeorologia e climatologia. Questões como o desenvolvimento da camada limite atmosférica e da turbulência atmosférica estão intimamente ligadas a estes temas. Exemplos típicos de aplicação podem ser encontrados na análise de dispersão de poluentes e estudos de microclima em zonas urbanas, análise de conforto térmico em ambientes internos e externos, estudos sobre o conforto de pedestres em regiões próximas a prédios de grande porte e análise de circulação do vento sobre terrenos abertos.

Quando uma estrutura encontra-se imersa em um escoamento de ar, as forças que o escoamento exerce sobre ela podem ser determinadas através de ensaios aerodinâmicos. Através da análise aerodinâmica são avaliados os coeficientes aerodinâmicos (arrasto, sustentação e momento), os quais fornecem as variações das forças atuantes sobre a estrutura segundo as diferentes direções de incidência ao longo do tempo de análise. Exemplos clássicos de aplicação encontram-se na análise aerodinâmica de prédios, pontes, automóveis, aviões e de corpos rombudos em geral.

Na medida em que as forças aerodinâmicas são dependentes do tempo, os métodos da Dinâmica das Estruturas devem ser empregados para a avaliação da resposta estrutural induzida pela ação do vento. Além disso, devido à forte interação entre as forças aerodinâmicas e as forças de inércia, de amortecimento e elásticas da estrutura, uma estimativa de cargas feita exclusivamente pela análise aerodinâmica não é mais possível, devendo-se proceder com a análise aeroelástica, através da qual realiza-se um estudo acoplado entre os dois meios, fluido e estrutura. Através da análise aeroelástica é possível também acessar informações relativas à estabilidade da estrutura frente a fenômenos de instabilidade dinâmica. Como exemplos de aplicação pode-se citar a análise da resposta estrutural em prédios, pontes, asas de aviões e pára-quedas, além de estudos de instabilidade por “flutter”, fenômeno usualmente encontrado em pontes e aviões.

A primeira publicação dedicada ao tema da EVC aparece no volume 35 do “*Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*”, editado por Murakamy (1990), onde são apresentados 14 trabalhos representando o estado-da-arte na época. Boa parte destes trabalhos

é direcionada ao estudo e aplicação dos modelos de turbulência na simulação de escoamentos sobre corpos rombudos, evidenciando a importância deste aspecto na elaboração dos algoritmos. Mais tarde, em 1992, realiza-se na cidade de Tóquio, Japão, o primeiro *Simpósio Internacional sobre Engenharia do Vento Computacional*, criado com o objetivo de facilitar o intercâmbio de informações científicas entre pesquisadores das diferentes áreas da DFC aplicada à Engenharia do Vento. Os principais trabalhos deste congresso foram selecionados e compilados em um volume especial (46&47) do “*Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*”, sendo editado por Murakami et al. (1993). O trabalho é dividido em seções voltadas aos fundamentos sobre modelagem da turbulência e métodos numéricos, além de aplicações relativas à determinação de cargas devidas ao vento sobre prédios e edifícios, investigações sobre vibrações e instabilidades aeroelásticas induzidas pelo vento em pontes e prismas de diferentes seções e a simulação das condições ambientais e conforto de pedestres sob a ação do vento.

O segundo *Simpósio Internacional sobre Engenharia do Vento Computacional* foi realizado em Fort Collins, nos EUA, em 1996. Mais uma vez, os principais trabalhos acabaram sendo apresentados em uma publicação abrangendo os volumes 67&68 do “*Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*”, editado por Meroney e Bienkiewicz (1997). Entre as aplicações destacam-se trabalhos nas áreas da aerodinâmica de corpos rombudos, análises aerodinâmica e aeroelástica de pontes, aerodinâmica de edifícios, dispersão de poluentes e circulação de vento em prédios. Nesta publicação podem ser encontrados os trabalhos de Murakami (1997) e de Stathopoulos (1997), leituras obrigatórias para os pesquisadores da área, onde é fornecida uma visão detalhada sobre os diferentes aspectos da Engenharia do Vento Computacional.

No ano de 2000, na cidade de Birmingham, Inglaterra, realizou-se o terceiro *Simpósio Internacional sobre Engenharia do Vento Computacional*, presidido por C. Baker. Os principais trabalhos foram selecionados e acabaram sendo apresentados em uma publicação especial do periódico *Wind & Structures* (Baker, 2002). Entre os artigos destacam-se os trabalhos dedicados à análise aerodinâmica e aeroelástica de seções de ponte, métodos numéricos para a geração de camadas limites turbulentas em simulações empregando LES, simulação de escoamentos sobre complexos de prédios e simulação da ação do vento sobre cúpulas imersas em um escoamento de camada limite. A última edição do simpósio foi realizada recentemente (julho de 2006) na cidade de Yokohama, Japão, e atualmente, é

considerado um dos eventos mais importantes da IAWE (“*International Association of Wind Engineering*”).

A aerodinâmica de prédios e edifícios é seguramente uma das áreas de aplicação que reúne o maior número de publicações dentro da EVC. Um dos primeiros trabalhos se deve a Hanson et al. (1982), no qual é simulado numericamente um escoamento de vento ao redor de diferentes tipos de edifícios. Mais tarde, Summers et al. (1986) apresenta em seu trabalho a validação de uma simulação numérica da ação do vento sobre um modelo de um prédio. No mesmo ano, Hanson et al. (1986) publicam um dos primeiros resultados para uma simulação numérica tridimensional da ação do vento nesta área. Em Murakami et al. (1987) são apresentados resultados numéricos relativos à distribuição de pressão e de velocidade em torno de alguns modelos de prédios e no trabalho de Murakami e Mochida (1989) é mostrada a aplicação do modelo de turbulência  $\kappa$ - $\epsilon$  em escoamentos turbulentos tridimensionais sobre edifícios.

A partir do início da década de 90, trabalhos de maior porte começam a aparecer em razão da maior capacidade computacional das máquinas. Em Selvam (1992) e Selvam (1996), o autor realiza a simulação da ação do vento sobre o “*Texas Tech Building*”, determinando a distribuição de pressões e os padrões de circulação existentes em torno do prédio. Nestes trabalhos, o esquema numérico é baseado em elementos finitos com o modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  para a turbulência. Baskaran e Kashef (1996) empregam um código comercial baseado no Método dos Volumes Finitos para a análise de modelos com vários edifícios, determinando os campos de velocidade na sua vizinhança. Este mesmo código é empregado por Stathopoulos e Baskaran (1996) na simulação das condições ambientais devidas ao vento em um bloco de prédios representando um quarteirão da zona central na cidade de Montreal, no Canadá. He e Song (1999) utilizam o Método dos Volumes Finitos e LES para a avaliação da ação do vento sobre pedestres em áreas urbanas. É apresentada também uma breve análise sobre critérios de classificação para o nível de conforto sobre pedestres a partir da velocidade de vento. Mais recentemente, Tutar e Oguz (2002) empregam o Método dos Volumes Finitos e os modelos LES e  $\kappa$ - $\epsilon$  na simulação de escoamentos de vento sobre prédios dispostos paralelamente e com diferentes configurações.

A análise aerodinâmica/aeroelástica de pontes de grande vão tem atraído também a atenção de vários pesquisadores da EVC. Kawahara et al. (1984) estão entre os primeiros autores a analisar numericamente a ação do vento sobre uma seção de ponte. O Método dos

Elementos Finitos (MEF) é empregado, obtendo-se como resultado os coeficientes aerodinâmicos em função do ângulo de ataque e o número de Strouhal. Entretanto, é a partir de meados da década de 90 que ocorre uma explosão no número de publicações voltadas à análise numérica da ação do vento em pontes. Uma revisão abrangente sobre o tema pode ser encontrada em Braun (2002) e Braun e Awruch (2003).

Com o crescente desenvolvimento na tecnologia dos computadores, a simulação numérica tem se constituído na principal ferramenta para a avaliação da circulação de ar em ambientes internos. Segundo Posner et al. (2003), há uma surpreendente carência de dados obtidos experimentalmente para este tipo de análise, inclusive para uma melhor apreciação da validade dos modelos numéricos. Nos trabalhos de Nielsen (1988) e Murakami e Kato (1988) é encontrada uma revisão sobre os métodos numéricos utilizados nas primeiras simulações numéricas sobre circulação de ar em ambientes internos.

O uso de métodos numéricos para a simulação de problemas aeroelásticos tem uma história relativamente recente dentro da EVC, cujo início coincide com as primeiras simulações feitas em seções de pontes. Os primeiros modelos desenvolvidos apresentavam uma descrição simplificada para a estrutura, considerando-a através de um modelo estrutural de corpo rígido com apoios elásticos (Larsen e Walther, 1997; Selvam et al., 2002; Braun, 2002). Esta filosofia de análise tem sido empregada até os dias atuais, sendo aplicada em problemas onde a magnitude dos deslocamentos é muito maior do que as deformações, como é o caso das análises feitas em pontes.

Mais recentemente, no entanto, modelos com um maior grau de complexidade têm sido desenvolvidos, envolvendo efeitos de não-linearidade para a estrutura e modelos de acoplamento fluido-estrutura com propriedades conservativas mais robustas. Em Farhat et al. (1995) e Farhat et al. (1997) é empregado um modelo numérico de acoplamento particionado baseado no MVF e utilizando uma formulação ALE para a análise de problemas aeroelásticos em asas e painéis. Gluck et al. (2003) apresentam um modelo de acoplamento particionado empregando volumes finitos e a descrição ALE para a análise de estruturas civis com um modelo estrutural para cascas e membranas não-lineares.

Portanto, como se pode aferir a partir da exposição feita acima, um modelo numérico para a análise de problemas da Engenharia do Vento Computacional abrange, simultaneamente, áreas importantes da Mecânica Aplicada Computacional, como é o caso da

Dinâmica de Fluidos Computacional, da Dinâmica de Estruturas Computacional e da Interação Fluido-Estrutura. Sendo assim, nas próximas seções é feita uma revisão sobre os principais aspectos de cada uma destas áreas e a sua relação com a EVC.

### 1.3 A DINÂMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL NA EVC

A Dinâmica de Fluidos Computacional (DFC) foi criada com o objetivo de resolver as equações que governam o movimento e a transferência de calor nos fluidos em geral através de métodos numéricos, as quais possuem solução analítica para apenas poucos casos. Com o passar dos anos, as técnicas numéricas alcançaram um nível tão alto de desenvolvimento que nos dias atuais os modelos numéricos têm sido utilizados de forma natural nas mais variadas áreas de aplicação da Engenharia.

A Engenharia do Vento Computacional caracteriza-se como uma das áreas de aplicação mais promissoras e ao mesmo tempo mais desafiadoras da DFC. Devido à complexidade inerente dos escoamentos presentes nos problemas tratados pela EVC (presença de recirculação, separação e recolamento sobre corpos rombudos, incompressibilidade, tridimensionalidade, existência de escoamentos turbulentos, interações entre fluido e estrutura, deformável ou com movimentos de corpo rígido), constitui-se uma tarefa bastante complicada a simulação numérica dos mesmos, pois uma malha extremamente refinada é uma condição essencial para a obtenção de resultados satisfatórios.

Como se sabe, a simulação numérica de escoamentos incompressíveis apresenta uma série de dificuldades devido à forma na qual se reduz a equação de conservação de massa em razão da restrição imposta pela incompressibilidade (o divergente do campo de velocidades deve anular-se). Uma alternativa interessante para o tratamento numérico deste tipo de problema é dada através do enfoque da pseudo-compressibilidade, cujos princípios foram apresentados inicialmente por Chorin (1967), na qual considera-se a presença de uma leve compressibilidade no escoamento. Esta hipótese é justificada observando-se o que ocorre nos escoamentos naturais, onde a propagação da velocidade do som no meio fluido se dá com um valor finito ( $c_{ar} \cong 330 \text{ m/s}$ ), ao contrário do que é previsto pela expressão clássica da continuidade para escoamentos incompressíveis. Deste modo, através da pseudo-compressibilidade é possível obter-se uma equação de conservação de massa que tenha um termo explícito para a pressão, simplificando enormemente a solução do sistema de equações

governantes. Esta forma de abordagem tem sido empregada por vários autores, tais como Kawahara e Hirano (1983), He e Song (1999), Braun e Awruch (2003), <sup>a</sup>Braun e Awruch (2005) e <sup>a</sup>Zienkiewicz et al. (2005).

Na medida em que as equações de Navier-Stokes (N-S) são universais, ou seja, têm validade para qualquer regime de escoamento, elas independem da utilização de parâmetros empíricos para a análise de todas as escalas da turbulência. Portanto, ao empregar-se diretamente estas equações para a solução de um dado escoamento, realiza-se na verdade a Simulação Direta da Turbulência (SDT), o que implica na utilização de malhas cada vez mais refinadas à medida que se aumenta o número de Reynolds. Como os problemas que envolvem a EVC requerem o emprego de níveis de refinamento muito superiores à capacidade atual dos computadores mais avançados, deve-se recorrer à utilização de modelos de turbulência.

Segundo Ferziger et al. (1981), os modelos de turbulência podem ser divididos em seis categorias: modelos baseados em correlações, modelos baseados em métodos integrais, modelos de fechamento de um ponto, modelos de fechamento de dois pontos, modelos LES e simulação direta. Os modelos baseados em correlações e em métodos integrais são de difícil aplicabilidade na EVC, sendo os primeiros em razão do excesso de parâmetros exigidos para determinar-se as correlações e os últimos devido à inadequação do seu uso em escoamentos com separação. O mesmo vale para a SDT, cuja justificativa de sua não utilização já foi dada no parágrafo anterior. Os modelos de fechamento de dois pontos estão ainda em fase de desenvolvimento, sendo aplicáveis somente para turbulência homogênea e isotrópica. Assim, restam somente duas categorias a serem utilizadas na EVC: os modelos com um ponto de fechamento e os modelos LES.

Os modelos de fechamento de um ponto estão baseados na hipótese da decomposição de Reynolds (ver Hinze, 1975; Schlichting, 1979), a qual resulta nas equações médias de Reynolds – RANS (“*Reynolds Averaged Navier-Stokes*”), tendo o modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  (Harlow e Nakayama, 1968; Launder e Spalding, 1972) como o mais popular desta categoria. Embora este modelo tenha sido empregado nas primeiras aplicações da EVC, mais em função dos altos custos computacionais relacionados aos modelos LES, sabe-se que o seu uso em determinados escoamentos apresenta sérias limitações. Algumas das situações em que o modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  expõe as suas deficiências podem ser encontradas em escoamentos que apresentam linhas de corrente curvas, escoamentos sob a ação de gradientes adversos de pressão e em escoamentos com regiões de separação. Variantes do modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  têm sido

apresentadas com a finalidade de melhorar o desempenho do modelo, podendo-se citar o trabalho de Launder e Kato (1993), o modelo RNG  $\kappa$ - $\epsilon$ , proposto por Orszag et al. (1993) e o modelo  $\kappa$ - $\omega$  apresentado por Wilcox (1988). Entre as publicações mais recentes da EVC que empregam o modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  tem-se os trabalhos de Ferreira et al. (2002) e Tutar e Oguz (2002).

Apesar das exigências inerentes quanto ao nível de discretização em regiões próximas a contornos sólidos, os modelos LES caracterizam-se como a melhor alternativa para a simulação dos escoamentos presentes na EVC. Os modelos LES utilizam as idéias da decomposição de Reynolds sob uma diferente filosofia de modelagem, onde a separação é feita no domínio das frequências de flutuação dos vórtices, separando as frequências em altas e baixas através de um processo de filtragem espacial baseado na malha existente. A Simulação de Grandes Escalas teve seu início através do trabalho de Smagorinsky (1963), sendo que a primeira aplicação em problemas da Engenharia se deve a Deardorff (1970). Na EVC, o modelo LES foi utilizado pela primeira vez no trabalho de Murakami et al. (1987), sendo largamente empregado a partir da última década (Murakami et al., 1999; Kim et al., 2004). Estudos comparativos entre os diferentes modelos de turbulência existentes para problemas característicos da EVC foram apresentados nos trabalhos de Murakami et al. (1990), Murakami (1993), Rodi (1993) e Murakami (1997), de onde se pode constatar a superioridade dos modelos LES.

Tradicionalmente, a grande maioria dos modelos numéricos desenvolvidos pela DFC empregam algum dos seguintes métodos de discretização: o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Volumes Finitos (MVF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF). Outro método que vem ganhando espaço na DFC recentemente é o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Na EVC, no entanto, verifica-se atualmente uma predominância na utilização do MVF e do MEF.

O MDF (Chung, 2002) foi a primeira técnica numérica utilizada por analistas da Mecânica dos Fluidos, sendo que até o final da década de 60 do século passado, o método era empregado de forma unânime. A predominância do MDF se dava em virtude da simplicidade de programação, além de uma exigência mínima de memória computacional e um baixo custo em termos de tempo de processamento. No entanto, algumas limitações restringiam uma maior aplicabilidade do método desde as primeiras análises, podendo-se citar a exigência de domínios com geometrias regulares e dificuldades para a imposição de condições de contorno

mais complexas. A utilização do MDF em problemas da EVC tem sido raramente observada nos trabalhos mais recentes, podendo-se citar a publicação de Shimada et al. (1999).

O MVF (Pantakar, 1980, Maliska, 2004) surgiu inicialmente com o objetivo de resolver problemas de convecção dominante. Assim como o MDF, ele limitava-se no princípio ao uso de coordenadas ortogonais, sobretudo cartesianas, sendo que em meados da década de 70 inicia-se a utilização de sistemas de coordenadas generalizadas coincidentes com as fronteiras do domínio, permitindo assim resolver problemas com geometrias irregulares. No entanto, persistem ainda as dificuldades com relação à imposição de condições de contorno naturais. Exemplos de utilização do método na EVC podem ser encontrados nos trabalhos de Slone et al. (2001) e Slone et al. (2004).

O MEC (Brebbia e Domingues, 1989) tem uma história recente na DFC. Mesmo que em alguns casos esta técnica mostre-se mais adequada, ela não possui uma maturidade suficiente e, portanto, não tem ainda uma grande aplicabilidade como os demais métodos numéricos existentes.

O MEF (<sup>b</sup>Zienkiewicz et al, 2005) tem sua origem na década de 50 a partir de aplicações em problemas na área da Elasticidade, sendo que o início de sua utilização em problemas da Mecânica de Fluidos se dá no começo da década de 70. As grandes vantagens proporcionadas pelo método em relação aos demais são verificadas no tratamento de problemas com geometrias complexas e na aplicação de condições de contorno não convencionais. Porém, o MEF tem a desvantagem de necessitar maiores quantidades de memória computacional e um maior tempo de processamento. Três importantes publicações dedicadas ao emprego do MEF na análise de escoamentos de fluidos são encontradas em Reddy e Gartling (1994), Gresho e Sani (1999) e <sup>a</sup>Zienkiewicz et al. (2005). Na EVC pode-se citar os trabalhos de Hughes e Jansen (1993) e Knopp et al. (2005).

No contexto do MEF, os esquemas baseados no modelo de Taylor-Galerkin (T-G) possuem uma enorme popularidade entre os métodos numéricos empregados na solução das equações governantes para escoamentos incompressíveis (ver, por exemplo, Donea, 1984). Ao empregar-se o método de T-G, os termos com derivadas temporais são substituídos pelas respectivas aproximações dadas por expansões em séries de Taylor dentro do intervalo de tempo, seguidas, geralmente, da discretização espacial e a aplicação do Princípio dos

Resíduos Ponderados de Bubnov-Galerkin, que equivale a minimizar o resíduo que surge da utilização de funções de aproximação para o domínio e para as variáveis do problema.

Entretanto, nos dias atuais já está bastante evidente que modelos numéricos que utilizam o esquema de Bubnov-Galerkin, assim como os modelos que empregam a forma convencional de discretização do Método das Diferenças Finitas, produzem soluções que sofrem a ação de oscilações espúrias no campo de velocidades do fluido em problemas com advecção dominante. A razão disto vem do fato de que ao resolver-se as equações de N-S através de esquemas numéricos com aproximações espaciais dadas em diferenças centradas, torna-se necessária a adição de algum tipo de dissipação numérica, uma vez que a viscosidade natural do fluido é incapaz de eliminar as oscilações espúrias, as quais têm origem na forte não-linearidade presente nos escoamentos com alta advecção.

Com o objetivo de remover estas oscilações, os métodos baseados em diferenças finitas desenvolveram um tratamento especial para os termos advectivos das equações de N-S, os chamados métodos de estabilização ou “*upwind*”, cuja idéia principal é a de adicionar-se uma difusão artificial no modelo numérico a fim de controlar as oscilações espúrias. A técnica de “*upwind*” foi estendida posteriormente ao MEF, sendo que uma das primeiras propostas que surgiram foi através dos modelos Petrov-Galerkin (ver Heirich et al., 1977; Griffiths e Lorenz, 1978), onde as funções de forma são modificadas com o objetivo de produzir termos adicionais com propriedades dissipativas. Embora estes esquemas proporcionem a redução das oscilações espúrias para altos números de Peclet, eles apresentam resultados pouco precisos devido à falta de consistência das equações obtidas em razão dos termos extra adicionados. Esta falta de consistência é resolvida a partir do trabalho de Brooks e Hughes (1982), onde é apresentado o esquema SUPG (“*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*”), no qual os termos de difusão artificial são adicionados segundo a direção das linhas de corrente através de uma modificação consistente das funções de peso. Mais recentemente, novas propostas têm surgido, como por exemplo, o método “*Galerkin Least Square - GLS*”, proposto por Hughes et al. (1989), no qual os termos de estabilização resultam de um processo de minimização por mínimos quadrados de um operador residual da forma fraca das equações. É possível mostrar que a única diferen

Entre os esquemas baseados no modelo de Taylor-Galerkin, o problema das oscilações espúrias para escoamentos convectivos foi resolvido a partir do trabalho de Donea (1984), onde é proposta a utilização de expansões com termos de mais alta ordem para as séries de Taylor. Neste mesmo sentido, Gresho et al. (1984) propõem o emprego de um tensor de balanço difusivo (BTD – “*Balancing Diffusive Tensor*”), criado a partir de aproximações temporais de ordem mais elevada, através do qual é compensada a falta de viscosidade artificial do esquema numérico. Na verdade, procedimentos de discretização temporal tais como os apresentados acima já haviam sido empregados no MDF, como, por exemplo, no trabalho de Lax e Wendroff (1964), que sugerem a utilização de séries de Taylor para as aproximações no tempo com o objetivo de obter-se modelos com precisão de segunda ordem.

De acordo com a forma empregada para o processo de avanço no tempo, os esquemas de Taylor-Galerkin podem ser ainda classificados em explícitos, implícitos e semi-implícitos, como é mostrado, por exemplo, no trabalho de Yoon et al. (1998), onde esta classificação é feita a partir de parâmetros utilizados nas expansões em séries de Taylor, sendo que a natureza do esquema fica definida conforme os valores atribuídos a estes parâmetros.

Os esquemas implícitos (Behr et al., 1993) sabidamente não são os mais adequados para problemas altamente transientes. Além disso, eles apresentam importantes limitações relativas à memória de armazenamento. Já os modelos semi-implícitos (Tabarrok e Su, 1994) foram originalmente criados com o objetivo de reunir em um mesmo algoritmo as principais vantagens apresentadas pelos métodos implícitos e explícitos. Neste sentido, observa-se que os termos difusivos da equação de N-S são tratados implicitamente para evitar as restrições de estabilidade características dos processos explícitos. Como resultado, a pressão deve ser resolvida a partir de uma equação de conservação de massa na forma de uma equação de Poisson, a qual impossibilita a solução de maneira desacoplada. No entanto, tem-se observado que este tipo de esquema mostra-se eficiente apenas para números de Reynolds moderados. Braun e Awruch (2004) estudaram recentemente este método obtendo bons resultados em análises de escoamentos de fluidos Newtonianos em uma cavidade, inclusive em regime turbulento. Contudo, verificou-se mais tarde que em escoamentos com contornos naturais e números de Reynolds mais elevados o modelo apresentava restrições de estabilidade similares aos esquemas explícitos. Por fim, os algoritmos explícitos (Kawahara e Hirano, 1983; Gresho et al., 1984), que embora sejam modelos com exigências mínimas de memória, apresentam fortes restrições de estabilidade numérica, limitando severamente, em determinados casos, o passo de tempo adotado. Entretanto, os escoamentos de vento reais se dão em regime

turbulento e altamente transiente, fazendo com que haja uma limitação natural, devido à natureza da turbulência, para o incremento de tempo utilizado na integração temporal. Conseqüentemente, verifica-se que os esquemas explícitos são os que apresentam as melhores características para o tipo de estudo ao qual se propõe este trabalho.

Entre os esquemas explícitos de Taylor-Galerkin existentes, o modelo explícito de dois passos, proposto por Kawahara e Hirano (1983) e utilizado em Petry (1993) e Braun (2002), é uma das formas clássicas de se resolver as equações que governam a dinâmica de fluidos. Em outro modelo, empregado recentemente por <sup>b</sup>Braun e Awruch (2005), um esquema explícito-iterativo é usado. Neste algoritmo, o qual é uma versão modificada de um código semi-implícito utilizado por Braun e Awruch (2004), a pressão é resolvida explicitamente em um único passo e as equações de Navier-Stokes através de um procedimento explícito-iterativo. Com isso, espera-se que haja uma redução significativa no tempo de processamento quando comparado ao esquema de dois passos.

Uma questão fundamental que envolve os modelos numéricos baseados no MEF está relacionada ao processo de integração numérica das matrizes em nível de elemento. Como consequência da aplicação do Método dos Resíduos Ponderados de Galerkin, as equações governantes do problema passam a ser descritas por termos matriciais, cujos elementos são obtidos a partir de integrais sobre o volume e a superfície dos elementos finitos, envolvendo produtos de funções de interpolação e suas derivadas. Para o processo de integração numérica, emprega-se usualmente a quadratura de Gauss-Legendre, através da qual as integrais são avaliadas em pontos discretos, denominados de pontos de Gauss, em um domínio transformado do respectivo elemento, o domínio computacional.

A quadratura mínima exigida, por exemplo, para um elemento hexaédrico trilinear são de pelo menos oito pontos de integração a fim de que o volume do elemento seja avaliado exatamente. Isto obviamente demanda um esforço computacional inadmissível para problemas envolvendo milhões de graus de liberdade. Em razão disto, foi desenvolvida a chamada integração reduzida (Gresho et al. 1984; Kawamoto e Tanahashi, 1994), através da qual utiliza-se apenas um único ponto de integração, geralmente no centro do elemento, permitindo assim que o processo de integração seja realizado analiticamente. No entanto, em consequência do uso desta técnica de integração, podem surgir instabilidades na malha, conhecidas como modos espúrios ou “*hourglass modes*”, que acabam por danificar a análise.

Para contornar este problema deve-se empregar um esquema de controle de modos espúrios (“*hourglass control*”) com a finalidade de estabilizar estas oscilações (Christon, 1997).

#### 1.4 A DINÂMICA DAS ESTRUTURAS COMPUTACIONAL (DEC)

Ao contrário do que ocorre na DFC, o MEF tem sido usado sistematicamente na DEC desde a compilação dos fundamentos gerais do método, apresentada no trabalho clássico de Zienkiewicz (1967). Inicialmente, o MEF foi empregado em problemas da Mecânica Estrutural utilizando elementos clássicos tais como triângulos e quadriláteros, baseados em uma formulação em deslocamentos. Paralelamente, outros tipos de elementos foram sendo desenvolvidos a partir das teorias tradicionais da Mecânica dos Sólidos, tais como elementos de viga, elementos de placas e elementos de cascas, com o objetivo de tornar as análises mais eficientes. Muitos dos algoritmos de interação fluido-estrutura atuais empregam elementos deste tipo para a análise de estruturas deformáveis. Entretanto, tais formulações não são adequadas a uma filosofia de criação de modelos numéricos de ampla aplicação, uma vez que o seu uso torna-se restrito a determinados tipos de estruturas.

Elementos baseados nas teorias de viga existentes são geralmente utilizados quando a estrutura apresenta apenas uma dimensão significativa em relação às demais. Na teoria de Euler-Bernoulli são consideradas as deformações de flexão, sendo a sua aplicação restrita a problemas onde a dimensão relativa ao eixo da viga é pelo menos dez vezes maior que as dimensões da seção. Já através da teoria de Timoshenko, além das deformações de flexão são ainda consideradas as deformações de corte. Esta teoria é aplicável quando o comprimento da peça é em torno de cinco vezes maior que as dimensões da seção. Muitos modelos ainda adicionam efeitos axiais e de torção, combinando-os às teorias clássicas apresentadas acima. As teorias de viga são muito empregadas em problemas de IFE (interação fluido-estrutura) envolvendo análises aeroelásticas em asas, onde as características geométricas favorecem o seu emprego. No PPGEC, a teoria de Timoshenko foi empregada por Vaz dos Santos (1993) na análise de problemas de interação fluido-estrutura bidimensionais.

O tema da flexão de placas e sua extensão a problemas de cascas estão entre os primeiros assuntos tratados pelo MEF no começo da década de 60. As placas e as cascas são, na verdade, uma forma particular de um sólido tridimensional, cuja simplificação remove em grande parte as dificuldades teóricas presentes nestes casos, pelo menos no caso da

Elasticidade. Devido ao fato de que tais estruturas apresentam uma espessura muito reduzida em relação às demais dimensões, um tratamento numérico completo através de modelos tridimensionais exige o uso de técnicas de estabilização contra o surgimento de problemas numéricos relacionados a questões de condicionamento, o que em alguns casos pode vir a ser contraproducente. Para facilitar a solução de tais problemas, realiza-se uma abordagem numérica das teorias clássicas desenvolvidas para a representação do comportamento mecânico de placas e cascas.

A teoria de placas finas é baseada nos princípios formalizados por Kirchhoff (1850), cujo nome é justamente associado a esta teoria, a qual declara que toda linha reta definida perpendicularmente ao plano médio de uma placa permanece reta após a deformação e perpendicular ao plano médio deformado da placa. Uma relaxação para a hipótese de Kirchhoff foi proposta por Reissner (1945) e, mais tarde, de uma forma um pouco diferente, por Mindlin (1951). Estas modificações tornaram possível a extensão da teoria para o caso de placas espessas, constituindo-se na denominada teoria de Reissner-Mindlin. Exemplos de aplicações da teoria de placas em problemas de interação fluido-estrutura podem ser encontrados em Wall e Ramm (1998). No PPGEC a teoria de placa foi usada por Teixeira (2001) na análise de problemas de interação fluido-estrutura tridimensionais.

Uma casca pode ser considerada, em essência, uma estrutura deduzida a partir de uma placa cujo plano médio é formado por uma superfície curva. As mesmas suposições feitas para o caso das placas finas no que diz respeito à distribuição transversal de tensões e deformações permanecem válidas. No entanto, a forma como as estruturas em casca suportam as cargas aplicadas é bem diferente, de maneira que as tensões resultantes no plano médio apresentam agora componentes normais e tangenciais. Para maiores detalhes sobre a teoria clássica de cascas pode-se recorrer à publicação de Timoshenko e Woinowski-Krieger (1959). Em problemas de interação fluido-estrutura a teoria de casca foi utilizada recentemente em trabalhos como Gluck et al. (2001) e Gluck et al. (2003), onde são apresentadas aplicações referentes à análise da ação do vento sobre coberturas de membrana.

No entanto, como já pôde ser vislumbrado no primeiro parágrafo desta seção, no presente trabalho deseja-se trabalhar com elementos finitos tridimensionais com o objetivo de proporcionar ao algoritmo de interação fluido-estrutura uma maior aplicabilidade. Neste sentido, a consideração da hipótese de não-linearidade geométrica é outro fator importante na construção de algoritmos mais realistas para a análise de problemas da EVC, uma vez que

nestes casos é observada geralmente a presença de estruturas altamente deformáveis. Modelos numéricos empregando elementos tridimensionais baseados em formulações em deslocamentos para a análise de estruturas com não-linearidade geométrica foram utilizadas anteriormente no PPGEC através dos trabalhos de Azevedo (1999) e Duarte Filho (2002).

Os elementos tridimensionais mais empregados na análise não-linear geométrica de estruturas são o tetraedro de quatro nós e o hexaedro de oito nós. A razão do uso de elementos de baixa ordem nestes casos reside no fato de que elementos com ordem mais alta não conseguem reproduzir exatamente um campo de deslocamentos quadrático quando os seus lados não são retos. O desempenho destes elementos diminui substancialmente a partir do momento em que os nós localizados no meio dos lados começam a mover-se muito, o que é comum nos problemas com grandes deslocamentos e grandes rotações. No que diz respeito aos elementos de baixa ordem, segundo Belytschko et al. (2000), os tetraedros não apresentam um bom desempenho em problemas envolvendo materiais incompressíveis, restando, portanto, os elementos hexaédricos como a melhor alternativa para análise de problemas não-lineares.

Uma forma de se avaliar preliminarmente o desempenho de um elemento é através do cálculo de seu posto ou “*rank*”. Quando um elemento apresenta um posto baixo demais, a matriz de rigidez global pode ser singular ou aproximadamente singular, exibindo, neste caso, modos espúrios. Por outro lado, quando o posto é muito alto, o elemento deformará de uma forma extremamente rígida, dificultando o processo de convergência. No caso do elemento hexaédrico trilinear, o posto correto é 18, ou seja, 24 graus de liberdade menos 6 modos de corpo rígido, sendo garantida a sua obtenção através de uma quadratura de Gauss com 2x2x2 pontos de integração. No entanto, ao empregar-se a integração reduzida obtém-se uma matriz de posto 6, com 12 modos de energia nula, ou seja, 24 graus de liberdade menos 6 modos de corpo rígido e menos as 6 componentes do tensor de tensões avaliadas no ponto central, necessitando, por isso, a utilização de algum processo eficiente de estabilização dos modos espúrios. Na maioria dos esquemas de estabilização existentes sugere-se a adição de uma matriz de correção à matriz de rigidez obtida a partir de integração reduzida a fim de retificar a deficiência de posto.

Embora o uso de elementos finitos tridimensionais com integração completa garantida, em geral, a convergência e a estabilidade do processo numérico à medida que se aumenta o nível de discretização da malha, o uso desta técnica de integração apresenta fatores limitantes

como o excessivo esforço computacional envolvido na avaliação da matriz de rigidez e do vetor de forças internas, além da possibilidade do surgimento de travamento volumétrico (“*volumetric locking*”) em materiais incompressíveis ou aproximadamente incompressíveis e travamento de cisalhamento (“*shear locking*”) em estruturas finas sujeitas à flexão. Uma alternativa é a utilização de elementos finitos com integração reduzida uniforme, com apenas um único ponto de integração. No entanto, pode ocorrer nestes casos o aparecimento de modos espúrios associados a deformações não constantes no interior do elemento (“*hourglass modes*”), embora nulas nos pontos de integração, as quais conduzem a singularidades na matriz de rigidez global (Oñate, 1995). Com isso, verifica-se que o uso de elementos com integração reduzida requer um esquema eficiente de estabilização para remover estes modos.

O fenômeno de travamento volumétrico ou “*volumetric locking*” é uma anomalia de origem numérica que surge na análise de materiais incompressíveis através do MEF, ocorrendo, sobretudo, em problemas onde haja restrições de deformação. Uma alternativa eficiente para evitar este fenômeno é sugerida por Zhu e Cescotto (1996), a qual consiste na utilização de integração reduzida ou ainda seletiva para a avaliação das componentes volumétrica e desviadora do tensor de tensões. Por outro lado, o travamento de cisalhamento ou “*shear locking*” ocorre geralmente em problemas de flexão e torção pura. Nos casos de flexão pura pode ocorrer o surgimento de esforços de cisalhamento quando utiliza-se o campo de deformações de cisalhamento completo em elementos de baixa ordem. Segundo Zhu e Cescotto (1996) este problema pode ser eliminado suprimindo-se a parte não constante do campo de deformações de cisalhamento. No entanto, este procedimento deve ser realizado cuidadosamente uma vez que em análises tridimensionais envolvendo torção pura ele pode induzir ao travamento.

Recentemente, Hu e Nagy (1997) propuseram o uso de um elemento hexaédrico com um ponto de integração e um processo de estabilização seguro. Neste modelo, os vetores de deformações e de tensões são expandidos em séries de Taylor avaliadas no centro do elemento até termos bi-lineares, seguindo o que já havia sido apresentado por Liu et al. (1985). Os termos não constantes são usados no cálculo do vetor de forças internas do elemento, sendo os termos lineares e não-lineares utilizados para formar o vetor de forças de estabilização de modos espúrios. Além disso, a matriz gradiente recebe um tratamento especial, onde remove-se de forma seletiva os modos associados aos travamentos volumétrico e de cisalhamento sem afetar a estabilidade do elemento. Este mesmo procedimento foi utilizado anteriormente por Liu et al. (1994). Por fim, são adotados ainda os vetores gradiente

uniformes propostos por Belytschko e Bindeman (1991) ao invés daqueles avaliados no ponto central do elemento, o que garante, desta forma, que o elemento resultante consiga passar pelo “*patch test*”. Um modelo numérico para análise de problemas com não-linearidade geométrica semelhante a este foi empregado por Duarte Filho e Awruch (2004) e será também utilizado pelo presente trabalho.

Dois modelos numéricos bastante empregados na discretização temporal da equação de equilíbrio dinâmico são o método explícito de Taylor-Galerkin (Azevedo, 1999) e o método implícito de Newmark (Bathe, 1996). O uso do esquema explícito de Taylor-Galerkin, assim com de todos os esquemas explícitos existentes, apresenta grandes vantagens em aspectos relacionados a facilidades de programação e vetorização para ambientes de supercomputação, redução no consumo de memória e rapidez de processamento dentro do intervalo de tempo, principalmente em problemas não-lineares. No entanto, as restrições impostas para a manutenção da estabilidade numérica reduzem de forma proibitiva o incremento de tempo a ser adotado para a estrutura em problemas de IFE, sendo que estas restrições se devem substancialmente à alta velocidade de propagação da onda elástica geralmente encontrada em materiais sólidos, a qual é muito maior que a observada nos fluidos, por exemplo. No que se refere ao método implícito de Newmark, as principais vantagens são o uso de incrementos de tempo bem maiores associados à possibilidade de estabilidade numérica incondicional. As desvantagens estão na necessidade da montagem e solução de sistemas de equações e um maior consumo de memória computacional. Entretanto, como a resposta dinâmica das estruturas encontradas nos problemas da EVC é dominada por vibrações de baixa frequência, o uso de esquemas implícitos mostra-se como a alternativa mais eficiente para estes casos.

Embora o método de Newmark seja incondicionalmente estável para problemas envolvendo estruturas lineares, esta característica não é observada em alguns casos onde há a presença de não-linearidade, principalmente nos casos altamente não-lineares. Como consequência, há o surgimento de instabilidades numéricas que acabam inviabilizando a análise. A causa do aparecimento destas instabilidades reside no fato de que o método de Newmark clássico não é capaz de conservar energia, além de perder o seu caráter dissipativo em problemas com não-linearidade. Esta constatação motivou o desenvolvimento de pesquisas, a partir da década de 80, com o objetivo de obter algoritmos mais robustos para a análise dinâmica de sistemas não-lineares, com um interesse particular em esquemas estáveis e que ao mesmo tempo mantivessem uma precisão de segunda ordem para o processo de

integração no tempo. Neste sentido, verifica-se atualmente que uma condição suficiente para garantir a estabilidade numérica nestes casos é dada através da garantia de conservação ou redução da energia total em cada intervalo de tempo do processo de integração, onde as atualizações do tensor de tensões exercem um papel fundamental na obtenção de um algoritmo conservativo.

Um dos primeiros trabalhos a tratar sobre a questão da perda de estabilidade no processo de integração temporal em análises dinâmicas não-lineares se deve a Hughes et al. (1978). Nesta publicação é apresentado um método (“*Constrained Energy Method*”) que consiste em uma extensão da regra trapezoidal (“*Trapezoidal Rule*”), introduzida por Newmark (1959), com a conservação de energia sendo forçada através do método dos multiplicadores de Lagrange.

Uma outra metodologia para assegurar um processo de integração estável foi apresentada mais tarde por Simo e Tarnow (1992), onde a conservação de energia é verificada de uma forma algorítmica. Este método, conhecido como “*Energy-Momentum Method*”, é obtido a partir de uma simples modificação da forma clássica referente à Regra do Ponto Médio ou “*Mid-Point Rule*”, de tal forma que o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff na configuração relativa ao ponto médio do intervalo de tempo seja substituído por uma média entre os valores de tensão apresentados pelas configurações correspondentes ao início e ao fim do passo de tempo.

Esquemas de estabilização baseados em dissipação numérica já eram conhecidos desde o trabalho pioneiro de Newmark (1959), onde havia sido incluída uma certa quantidade de dissipação para o controle dos modos de vibração mais altos em problemas lineares. As deficiências quanto à dissipação numérica dos algoritmos de Newmark (perda de precisão) foram resolvidas por Hilber et al. (1977), através do método  $\alpha$ -Hilber, o qual combina a propriedade de estabilidade incondicional, precisão de segunda ordem e dissipação numérica para os modos mais elevados. Outros algoritmos baseados em dissipação numérica e que mantêm as propriedades apresentadas pelo método  $\alpha$ -Hilber foram criados na seqüência, como por exemplo, o método  $\alpha$ -Bossak (Wood et al., 1981). Com o objetivo de obter um esquema com um nível de precisão de segunda ordem e que apresente uma dissipação numérica mínima dos modos de vibração mais baixos e uma dissipação máxima dos modos mais altos em problemas lineares, Chung e Hulbert (1993) propuseram o método  $\alpha$ -

Generalizado, no qual estão incluídos os esquemas de dissipação numérica e não dissipativos mais populares (Newmark,  $\alpha$ -Hilbert e  $\alpha$ -Bossak).

Khul e Ramm (1996) desenvolveram uma formulação para a obtenção de parâmetros otimizados para os métodos  $\alpha$  com a intenção de estender o método para problemas não-lineares. Estes parâmetros levam a um processo de integração numérica caracterizado por uma menor dissipação numérica das frequências mais baixas e uma maior dissipação para as frequências mais altas. Além disso, os autores propõem ainda a utilização de uma combinação algorítmica dos valores de força interna avaliados no início e no fim de cada passo de tempo. Khul e Crisfield (1999) apresentam um modelo geral onde as idéias baseadas no trabalho de Simo e Tarnow (1992) são introduzidas na estrutura do método  $\alpha$ -Generalizado, obtendo um esquema geral onde os métodos originais tornam-se casos especiais do algoritmo desenvolvido.

Mais recentemente, Bathe e Baig (2005) apresentam um procedimento de integração numérica para a análise dinâmica não-linear baseado na idéia de esquemas compostos, utilizado inicialmente em problemas da mecânica estrutural por Baig e Bathe (2005), onde o método de Newmark trapezoidal é utilizado juntamente com aproximações em diferenças finitas. No entanto, este método leva a um processo de solução no qual o tempo de processamento é de pelo menos duas vezes o tempo gasto em uma análise através do método de Newmark convencional.

No presente trabalho será utilizado o método  $\alpha$ -Generalizado levando em conta as modificações propostas por Khul e Ramm (1996), as quais foram usadas também no trabalho de Khul e Crisfield (1999), e uma nova alternativa para o controle de energia durante o processo de integração no tempo. A escolha por este modelo se deve ao fato de o mesmo apresentar a melhor relação custo-benefício, onde propriedades tais como a manutenção da simetria da matriz de rigidez tangente e uma precisão de segunda ordem são observadas para um custo computacional equivalente aos esquemas de integração baseados no método de Newmark tradicional. Neste trabalho serão consideradas apenas as não-linearidades de natureza geométrica.

## 1.5 A SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA (IFE)

A simulação numérica de fenômenos de interação fluido-estrutura pode ser encontrada em diversas áreas do conhecimento científico, como por exemplo, na circulação do fluxo sanguíneo em artérias (Gerbeau e Vidrascu, 2003), na aerodinâmica de pára-quedas e aerofólios (Tezduyar e Osawa, 2001), nas instabilidades aeroelásticas que ocorrem em pontes (Braun e Awruch, 2003), edifícios, torres, linhas de transmissão de energia (Braun e Awruch, 2005) e em asas de aviões (Slone et al., 2004). Mais precisamente nos casos que envolvem a ação do vento sobre estruturas, modelos experimentais e semi-empíricos baseados em dados obtidos em túneis de vento têm sido tradicionalmente empregados nas pesquisas das áreas da Aerodinâmica e da Aeroelasticidade (ver Simiu e Scanlan, 1996). No entanto, estes modelos possuem severas limitações relacionadas a dispêndios de tempo e de dinheiro envolvidos nos experimentos. Com isso, há uma demanda cada vez maior por algoritmos desenvolvidos a partir de técnicas numéricas existentes na DFC, na DEC e na IFEC (Interação Fluido-Estrutura Computacional) para a solução de muitos dos problemas da Engenharia do Vento.

Uma questão de fundamental importância nos algoritmos de IFE está relacionada à descrição cinemática dos problemas. Na Dinâmica dos Fluidos tem-se utilizado tradicionalmente a descrição Euleriana, na qual a malha é tratada como um referencial fixo através da qual o fluido escoar. Por outro lado, na Mecânica dos Sólidos é empregada a descrição Lagrangeana, na qual a malha move-se juntamente com os deslocamentos da matéria. No entanto, em problemas de IFE o uso de uma descrição puramente Euleriana para o fluido restringe a análise a casos onde a estrutura apresente pequenos deslocamentos. Logo, deve-se utilizar um tratamento especial para a descrição do fluido de forma que os movimentos apresentados pela estrutura ao vibrar sob a ação do escoamento sejam percebidos e computados na análise do fluido. Entre as técnicas existentes para a solução deste tipo de problema pode-se citar, por exemplo, o método de malhas dinâmicas (Batina, 1989), as abordagens co-rotacionais (Farhat e Lin, 1993), as formulações espaço-tempo baseadas no MEF (Tezduyar et al., 1992) e as formulações ALE (arbitrária Lagrangeana-Euleriana), descritas a seguir.

O esquema de descrição ALE foi originalmente desenvolvido no contexto do MDF (Hirt et al., 1974) e estendido mais tarde ao MEF, podendo ser considerado atualmente como uma das técnicas mais populares. Entre as primeiras aplicações no MEF pode-se citar os

trabalhos de Hughes et al. (1981) e Donea et al. (1982). A idéia básica desta formulação está na introdução de um domínio de referência que se move arbitrariamente e de forma independente aos pontos espaciais e materiais, sendo que as equações da Mecânica do Contínuo passam a ser descritas a partir de pontos fixos definidos no domínio de referência.

numéricos utilizando este tipo de abordagem podem ser encontrados, por exemplo, nos trabalhos de Kawahara et al. (1984) e Petry (1993).

Modelos de acoplamento mais abrangentes, na forma como atualmente são conhecidos, passaram a ser criados a partir do desenvolvimento das técnicas de movimento de malha, possibilitando o tratamento de problemas com maior complexidade. No que se refere ao movimento da estrutura, considerava-se nos primeiros modelos que a mesma apresentava deslocamentos segundo um movimento de corpo rígido com restrições elásticas (ver González, 1993). Esta hipótese ainda é amplamente considerada em vários casos onde os deslocamentos são muito maiores em magnitude em relação às deformações, como por exemplo, em simulações numéricas de análise aeroelástica de pontes (ver Braun, 2002; Selvam et al., 2002). Atualmente, com uma maior capacidade computacional em termos de memória e processamento, modelos cada vez mais sofisticados têm sido apresentados. Formulações envolvendo modelos de análise de estruturas flexíveis com não-linearidades têm-se tornado uma característica padrão dos algoritmos de IFE mais modernos, conferindo ao esquema numérico um elevado grau de precisão (ver Teixeira, 2001; Farhat et al., 2005). Nestes modelos, além da imposição das condições de equilíbrio de forças e da compatibilidade cinemática sobre a interface, são consideradas questões relativas à conservação geométrica e de energia na troca de informações entre os meios (ver Farhat e Lesoinne, 2000).

Ao considerar-se a deformabilidade do corpo em problemas de interação fluido-estrutura existem, basicamente, duas formas de abordagem no que se refere ao processo de acoplamento: o *tratamento simultâneo* ou *monolítico* e o *tratamento particionado*. No *acoplamento monolítico* todo o problema é tratado como uma única entidade, sendo todos os subsistemas integrados no tempo simultaneamente. Exemplos da aplicação de algoritmos de IFE empregando um acoplamento monolítico podem ser encontrados nos trabalhos de Azevedo (1999) e Hübner et al. (2004).

No caso do *acoplamento particionado*, os subsistemas são tratados computacionalmente como entidades isoladas que são integradas no tempo de uma forma seqüencial. Os efeitos de interação são comunicados através da interface usando técnicas de sincronização. Nos esquemas particionados há a possibilidade do uso de “*solvers*” distintos e mais sofisticados para a análise de cada um dos meios, além da possibilidade do uso de malhas de elementos finitos não conformes na interface sólido-fluido e de subciclos entre as

análises do fluido e da estrutura (Farhat et al., 1995). O acoplamento particionado é empregado nos trabalhos de Felippa et al. (2001), Teixeira (2001) e Pipperno e Farhat (2001).

Outra denominação frequentemente encontrada em algoritmos de IFE diz respeito às características de conservação do tipo de acoplamento empregado, podendo ser um *acoplamento fraco* (“*weak coupling*” ou “*loose coupling*”) ou um *acoplamento forte* (“*strong coupling*”). O acoplamento forte se dá quando as condições de compatibilidade e de equilíbrio são impostas simultaneamente para o fluido e para a estrutura no mesmo ponto no tempo. Por definição, todos os modelos monolíticos apresentam um acoplamento forte e todos os modelos particionados apresentam um acoplamento fraco, uma vez que neste caso as condições descritas acima não são satisfeitas exatamente, pois a solução dos meios é dada de forma seqüencial. Nos trabalhos de Michler et al. (2003) e de Zhang e Hisada (2004) são abordadas questões importantes sobre a relação entre os esquemas de acoplamento utilizados e aspectos referentes à conservação de energia na interface e, conseqüentemente, a precisão e estabilidade dos respectivos modelos numéricos.

Quando os domínios computacionais referentes ao fluido e à estrutura possuem interfaces fluido-estrutura com discretizações espaciais coincidentes (“*matching interfaces*”), o fluxo de informações entre os diferentes meios é direto. No entanto, na maioria das aplicações, as exigências de resolução para as malhas do fluido são tipicamente muito maiores em relação às exigências para a estrutura. Conseqüentemente, as malhas do fluido e da estrutura serão incompatíveis ao longo da superfície de interface e um tratamento cuidadoso deve ser prestado na transferência de dados de forma que seja garantida a conservação de momentum e energia. Os principais esquemas existentes para a transferência de dados entre interfaces com malhas não coincidentes podem ser encontrados no artigo de Jiao e Heath (2004), entre os quais destaca-se o trabalho de Farhat et al. (1998), no qual é apresentado um modelo numérico eficiente baseado em interpolações dadas pelo MEF para a transferência de cargas e condições cinemáticas em problemas de IFE com interfaces apresentando discretizações não coincidentes. Neste modelo é estabelecida uma relação unívoca entre os nós do fluido na interface e pontos de Gauss nos elementos de contorno da estrutura em um procedimento preliminar à análise (Maman e Farhat, 1995).

## 1.6 OBJETIVOS E METODOLOGIA DO PRESENTE TRABALHO

O objetivo deste trabalho é estudar e desenvolver procedimentos numéricos adequados para serem utilizados em pesquisas no campo da Engenharia do Vento Computacional. Esta tese tem por motivação a abertura de um campo de estudos bastante promissor, possibilitando inclusive o emprego do código desenvolvido em parceria com estudos experimentais realizados no túnel de vento Joaquim Blessmann do Laboratório de Aerodinâmica das Construções (LAC) – PPGEC/UFRGS.

No presente trabalho será estudada, dentro do tema da Engenharia do Vento Computacional, a ação do vento sobre edifícios e sobre grupos de edifícios com suas implicações sobre questões relativas ao desempenho aerodinâmico e aeroelástico, onde são utilizadas ferramentas numéricas da área da Interação Fluido-Estrutura, tendo como objetivo a determinação da resposta dinâmica em estruturas deformáveis sob a ação do vento. Será também estudado o assunto da aerodinâmica aplicada a uma seção de ponte de grande vão submetida à ação do vento. Outro assunto abordado no presente trabalho refere-se aos efeitos causados pela circulação de ar nos meios interno e externo de um modelo idealizado de edificação.

Algumas contribuições importantes realizadas pela presente tese relacionadas à abordagem do tema da EVC e ao desenvolvimento de novos algoritmos para a análise de escoamentos incompressíveis, para a análise dinâmica não-linear de estruturas e de modelos de acoplamento para o estudo de problemas de interação fluido-estrutura podem ser citadas. Uma revisão completa sobre EVC é apresentada incluindo questões relevantes como o desenvolvimento de um modelo numérico para problemas da EVC a partir da identificação das principais características físicas presentes em cada tipo de análise. No que se refere à simulação de escoamentos incompressíveis, é realizado um estudo comparativo entre os esquemas explícito de dois passos e explícito-iterativo, ambos baseados no modelo de Taylor-Galerkin, com o intuito de determinar-se o esquema mais adequado para os estudos no campo da EVC. Também são comparados os modelos submalha de Smagorinsky e dinâmico para a análise de escoamentos turbulentos empregando a Simulação de Grandes Vórtices (“Large Eddy Simulation – LES”), onde se deseja verificar as diferenças apresentadas entre os modelos e a validação do esquema dinâmico proposto neste trabalho.

No campo da DEC destaca-se o estudo realizado sobre o impacto da falta de conservação de energia inerente ao método de Newmark quando da análise de problemas não-lineares. Uma breve revisão sobre os métodos de estabilização existentes é apresentada, sendo implementado o método  $\alpha$ -Generalizado. Nesta área é apresentado um novo algoritmo com o intuito de remover o excesso de dissipação existente nos modelos  $\alpha$ -Generalizado, além de garantir a conservação de energia em cada passo de tempo através da adição de um termo de amortecimento fictício na equação de equilíbrio dinâmico.

Outro aspecto importante do trabalho é o estudo e desenvolvimento de um novo modelo de acoplamento, do tipo particionado, com características conservativas para a análise de problemas de IFE envolvendo estruturas altamente deformáveis, onde considera-se a questão do uso de subciclos entre as análises do escoamento e da estrutura com o objetivo de reduzir o esforço computacional em problemas deste tipo. Também é estudado e implementado um algoritmo de sincronização para a análise de problemas com discretizações independentes da interface para os subdomínios fluido e estrutural, flexibilizando assim o tratamento de ambos os meios analisados, os quais têm exigências diferenciadas para as aproximações de suas variáveis. Destaca-se também o caráter inovador do modelo numérico para a análise de problemas de interação fluido-estrutura, onde emprega-se o mesmo elemento finito para ambos os meios, considerando-se ainda a técnica de integração reduzida, o que torna o algoritmo desenvolvido extremamente eficiente.

No modelo numérico utilizado neste trabalho, o escoamento é governado pelas equações de Navier-Stokes e pela equação de conservação de massa, considerando-se a hipótese de pseudo-compressibilidade para problemas isotérmicos. Para o caso de escoamentos turbulentos emprega-se a Simulação de Grandes Escalas (LES) com os modelos clássico de Smagorinsky e dinâmico para as escalas de turbulência inferiores à resolução da malha. Dois esquemas numéricos para a análise do escoamento são estudados: os modelos de Taylor-Galerkin explícito de dois passos e explícito-iterativo. Emprega-se o Método dos Elementos Finitos para a discretização espacial do domínio de análise, utilizando-se o elemento hexaédrico trilinear com integração analítica das matrizes em nível de elemento e controle de modos espúrios.

A estrutura é tratada como um corpo deformável constituído de um material elástico linear considerando-se a presença de não-linearidade geométrica. A não-linearidade geométrica é analisada através de uma abordagem co-rotacional para pequenas deformações e

grandes deslocamentos e rotações, sendo usada a taxa de Truesdell para a equação constitutiva incremental. O modelo numérico é construído a partir da equação que descreve o Princípio dos Trabalhos Virtuais, obtido através da aplicação do Método dos Resíduos Ponderados de Bubnov-Galerkin à equação de conservação de momentum. O Método dos Elementos finitos é usado para a discretização espacial do domínio da estrutura empregando o elemento hexaédrico trilinear com integração reduzida e um esquema eficiente para o controle e estabilização de modos espúrios. A discretização no tempo é realizada empregando-se o esquema implícito de Newmark e o método  $\alpha$ -Generalizado com controle de energia para a estabilização do processo de integração em problemas transientes com alta não-linearidade. O problema não-linear é resolvido através de uma linearização, dentro do intervalo de tempo, dada pelo método de Newton-Raphson.

A análise de interação fluido-estrutura é feita através de um esquema de acoplamento particionado com características de conservação similares aos modelos com acoplamento forte. O código desenvolvido permite o uso de subciclos entre as análises do fluido e da estrutura e a existência de malhas incompatíveis entre o fluido e a estrutura nas superfícies de interface, onde emprega-se um algoritmo baseado em um método de interpolação consistente para a transferência de cargas e de condições cinemáticas através da interface. Para a análise do escoamento na presença de estruturas deformáveis, os movimentos das partículas de fluido são descritos através de uma formulação arbitrária Lagrangeana-Euleriana (ALE) e um esquema robusto para o movimento de malha.

## 1.7 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Esta tese está organizada da seguinte forma:

- No presente capítulo é apresentada uma introdução onde estão colocados os principais aspectos que envolvem o tema da Engenharia do Vento Computacional. Paralelamente, é apresentada também uma relação de bibliografias relevantes sobre os principais tópicos desenvolvidos neste trabalho.
- No Capítulo 2 trata-se da Dinâmica dos Fluidos, onde são apresentadas as equações que governam a análise de escoamentos segundo a abordagem proposta para este trabalho, abrangendo a análise de escoamentos incompressíveis, turbulentos e

isotérmicos. É introduzida também a descrição arbitrária Lagrangeana-Euleriana para o estudo de problemas envolvendo estruturas deformáveis.

- No Capítulo 3 são desenvolvidos os modelos numéricos utilizados nesta tese para a simulação de escoamentos de fluidos, apresentando o Princípio dos Resíduos Ponderados no contexto do Método dos Elementos Finitos.
- O Capítulo 4 traz as equações da Mecânica dos Sólidos empregadas na análise dinâmica de estruturas deformáveis, apresentando a questão da não-linearidade geométrica estuda a partir de uma abordagem co-rotacional.
- O Capítulo 5 é dedicado ao desenvolvimento do modelo numérico para a análise dinâmica de estruturas através da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais conjuntamente ao Método dos Elementos Finitos. É apresentada também a técnica de integração reduzida para o elemento empregado e um esquema de estabilização de modos espúrios. Por fim, um esquema de avanço no tempo é desenvolvido usando-se o esquema implícito de Newmark a partir da formulação do método  $\alpha$ -Generalizado com controle de energia para a análise transiente não-linear.
- No Capítulo 6 é apresentado o modelo numérico usado neste trabalho para a análise de problemas de interação fluido-estrutura. São desenvolvidos o esquema de acoplamento, os algoritmos de transferência de dados em interfaces não conformes e a técnica de subciclos entre fluido e estrutura.
- O Capítulo 7 traz um resumo sobre os principais aspectos numéricos envolvidos nas diferentes etapas de processamento apresentadas pelo código criado para este trabalho, como o cálculo de áreas e vetores normais aos elementos de contorno, esquemas de suavização de tensões e pressões e obtenção dos coeficientes aerodinâmicos.
- No Capítulo 8 são mostrados os resultados das aplicações de verificação dos diferentes módulos do programa desenvolvido.
- No Capítulo 9 são apresentados os resultados das aplicações de validação relativas às análises propostas para esta tese.
- No Capítulo 10 são indicadas as conclusões para o presente trabalho bem como as sugestões para trabalhos futuros.

## 2 A MECÂNICA DOS FLUIDOS

### 2.1 A UNIVERSALIDADE DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

A análise de qualquer problema envolvendo o escoamento de fluidos viscosos requer a solução das equações que governam a Dinâmica dos Fluidos: as equações de Navier-Stokes. Além disso, a conservação de massa deve ser respeitada através da equação da continuidade. Nos casos em que há uma variação significativa no campo de temperatura do escoamento, deve-se considerar também a equação de conservação de energia a fim de levar em conta a influência desta variável sobre as propriedades do fluido e, conseqüentemente, sobre o próprio escoamento. Ao serem empregadas as equações de Navier-Stokes, pressupõe-se que o comportamento e a relação entre os estados de tensão e deformação no interior do fluido são dados através da equação constitutiva clássica para fluidos Newtonianos, hipótese que enquadra-se bem para a representação de escoamentos de ar. Portanto, todos os fenômenos que envolvem os escoamentos de fluidos viscosos são descritos matematicamente por estas equações, as quais caracterizam-se como um conjunto de equações diferenciais parciais acopladas e não-lineares, sendo derivadas, basicamente, a partir de princípios de conservação de certas propriedades como a massa, a energia e a quantidade de movimento ou momentum linear.

Em teoria, é possível resolver todos os aspectos que envolvem o escoamento de um fluido, incluindo todas as escalas de turbulência, através de uma simulação numérica direta. Nesta técnica, o domínio de análise é discretizado através, por exemplo, de elementos finitos com dimensões inferiores ao tamanho dos menores vórtices existentes no escoamento, os quais estão relacionados à menor escala de turbulência, a chamada escala de Kolmogorov.

Infelizmente, a simulação direta de escoamentos turbulentos encontrados em escoamentos naturais está além da capacidade atual dos mais poderosos computadores. Isto se deve ao fato de que o tempo de processamento necessário para este tipo de análise é altamente dependente do grau de resolução das escalas inferiores da turbulência. Para se ter uma idéia, segundo Murakami (1997), os menores vórtices encontrados em escoamentos de vento em regime turbulento possuem dimensões na ordem de 0.1 a 1 mm. Desta forma, a única alternativa razoável existente para a solução de problemas envolvendo escoamentos

turbulentos é através do emprego de equações governantes estatisticamente modificadas para a representação do escoamento médio. Modelos de turbulência são então utilizados para realizar o fechamento das equações através de uma representação da ação das tensões criadas no fluido devido à turbulência sobre este campo médio.

## 2.2 AS EQUAÇÕES PARA A ANÁLISE DA DINÂMICA DOS ESCOAMENTOS

O conjunto de expressões utilizadas na análise de escoamentos constituídos de um fluido qualquer é formado de equações de conservação, de uma equação constitutiva do fluido estudado e de algumas relações termodinâmicas.

### 2.2.1 Equações de Conservação

As equações que regem o comportamento no espaço e no tempo das variáveis do escoamento são obtidas através das seguintes equações de conservação: equação de conservação de momentum (Segunda Lei de Newton), equação de conservação de massa (Equação da Continuidade) e equação de conservação de energia (Primeira Lei da Termodinâmica). Para um escoamento genérico formado por um fluido newtoniano, estas equações adquirem a seguinte forma em um sistema de coordenadas cartesiano (veja, por exemplo, Schlichting, 1979 e White, 1991):

a) Equação de conservação de momentum:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = X_i - \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right\} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

b) Equação de conservação de massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.2)$$

c) Equação de conservação de energia:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e v_j)}{\partial x_j} + p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \mu \Phi + Q \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.3)$$

Nas equações acima, as variáveis do escoamento são: as componentes  $v_i$  do vetor de velocidades  $\mathbf{v}$ , a pressão termodinâmica  $p$ , a temperatura  $T$  e a energia total específica  $e$ . Estas variáveis são dadas em função de suas coordenadas cartesianas no espaço segundo a direção dos eixos  $x_i$  e em função do tempo  $t$ . As propriedades físicas do fluido são representadas através da massa específica  $\rho$ , da viscosidade dinâmica  $\mu$ , da viscosidade volumétrica  $\lambda$  e das componentes do tensor de condutibilidade térmica  $K_{ij}$ . No caso de um processo de condução isotrópica da temperatura, este tensor transforma-se na constante de condutibilidade térmica  $k$ .  $Q$  é o termo de fonte de calor,  $X_i$  são as componentes do vetor de forças de volume,  $\delta_{ij}$  são as componentes do delta de Kroenecker ( $\delta_{ij} = 1$  para  $i = j$  e  $\delta_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ ) e  $\mu\Phi$  é o termo de dissipação viscosa, podendo ser expresso como:

$$\begin{aligned} \mu\Phi = & 2\mu \left[ \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)^2 + \\ & \mu \left[ \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

### 2.2.2 Equações Constitutivas

Para o desenvolvimento das equações de conservação na forma apresentada acima, foi levada em conta a existência de um fluido Newtoniano. Para este tipo de fluido, as relações entre tensão e taxa de deformação em um ponto qualquer do espaço são dadas conforme as seguintes expressões:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.5)$$

sendo:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (2.6)$$

onde  $\sigma_{ij}$  são as componentes do tensor de tensões totais e  $\tau_{ij}$  são as componentes do tensor de tensões viscosas. A viscosidade volumétrica  $\lambda$  pode ser obtida com o auxílio da hipótese de Stokes, a qual resulta na seguinte equação:

$$3\lambda + 2\mu = 0 \quad (2.7)$$

Define-se ainda o tensor taxa de deformação do fluido  $S_{ij}$  como sendo:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.8)$$

### 2.2.3 Relações Termodinâmicas

Para o caso de escoamentos compressíveis, emprega-se para a obtenção da pressão a Equação de Estado de Gás Ideal, dada por:

$$p = \rho u (\gamma - 1) \quad (2.9)$$

onde  $u$  é a energia interna específica e  $\gamma$  a razão de calores específicos, que vem dada por:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (2.10)$$

sendo  $c_p$  e  $c_v$  os calores específicos a pressão e a volume constante, respectivamente.

A energia interna específica  $u$  relaciona-se com a energia total específica  $e$  e a temperatura  $T$  através das seguintes expressões:

$$u = e - \frac{1}{2} v_i v_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.11)$$

$$u = c_v T \quad (2.12)$$

onde o termo  $\frac{1}{2} v_i v_i$  corresponde à energia cinética específica.

A dependência entre as propriedades físicas do fluido e a variação de temperatura pode ser representada através da Lei de Sutherland (ver White, 1991). Por exemplo, para o caso da viscosidade dinâmica, esta lei assume a seguinte forma:

$$\mu = \mu_{\text{ref}} \frac{S_s + T_{\text{ref}}}{S_s + T} \left( \frac{T}{T_{\text{ref}}} \right)^{3/2} \quad (2.13)$$

onde o subíndice “ref” significa valores de referência para a viscosidade dinâmica  $\mu$  e a temperatura  $T$  e  $S_s$  é uma propriedade do fluido ( $S_s^{\text{ar}} = 110.4^\circ \text{ K}$ ). Entretanto, esta lei é útil para escoamentos compressíveis, onde os gradientes de temperatura são mais elevados. Para escoamentos incompressíveis, assume-se que os efeitos da variação de temperatura são considerados no termo de forças de volume  $X_i$  na forma de forças de flutuação, de acordo com a aproximação de Boussinesq:

$$X_i = \beta g_i \rho_\infty (T - T_\infty) \quad (2.14)$$

onde  $\beta$  é o coeficiente de expansão volumétrica do fluido,  $g_i$  são as componentes do vetor de gravidade segundo as direções dos eixos coordenados  $x_i$  e  $\rho_\infty$  e  $T_\infty$  são os valores de massa específica e de temperatura na região não perturbada.

No presente trabalho serão considerados apenas escoamentos isotérmicos, desprezando-se qualquer variação de temperatura que ocorra no fluido, fazendo com que não seja mais necessária a utilização da equação de conservação de energia e das relações termodinâmicas apresentadas acima. Portanto, as equações que regem o escoamento serão dadas pelas equações de conservação de momentum e de massa, além da equação constitutiva do fluido.

### 2.3 A HIPÓTESE DE PSEUDO-COMPRESSIBILIDADE PARA A EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DE MASSA

Uma equação de massa contendo um termo explícito de pressão pode ser obtido ao considerar-se a hipótese de pseudo-compressibilidade, formulada por Chorin (1967). Esta hipótese é empregada especialmente para a solução de escoamentos incompressíveis e baseia-se na idéia de que a velocidade de propagação do som no fluido apresenta um valor finito nos escoamentos naturais, ao contrário do que se supõe usualmente através da condição de incompressibilidade, a qual resulta na seguinte expressão para a equação da continuidade:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j=1,2,3) \quad (2.15)$$

O modelo pseudo-compressível é construído considerando-se inicialmente a expressão correspondente à equação de conservação de massa para escoamentos compressíveis (Equação 2.2), levando em conta que:

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial x_j} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \quad (j=1,2,3) \quad (2.16)$$

onde  $c$  é a velocidade de propagação do som no fluido. Ao substituir-se os termos de derivada de massa pelas expressões fornecidas pela Equação (2.16), tem-se a nova equação de conservação de massa para um escoamento incompressível:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho c^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j=1,2,3) \quad (2.17)$$

De trabalhos anteriores realizados no PPGEC/UFRGS e no PROMEC/UFRGS, tem-se verificado que o termo de advecção de pressão da expressão (2.17) pode ser desprezado sem perdas de precisão. Neste caso, a equação de conservação de massa fica expressa da seguinte maneira:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j=1,2,3) \quad (2.18)$$

## 2.4 ANÁLISE DE ESCOAMENTOS TURBULENTOS

### 2.4.1 A aplicação de modelos de turbulência em escoamentos da EVC

Um dos obstáculos mais importantes para o uso de técnicas numéricas da DFC em problemas da Engenharia do Vento está relacionado à modelagem da turbulência. Devido à presença de corpos imersos no escoamento, ocorrem fenômenos considerados difíceis de se resolver na Dinâmica dos Fluidos, como é o caso dos processos de separação e recolamento, despreendimento de vórtices, recirculação, entre outros. A principal consequência da ação

destes fenômenos sobre o escoamento se dá na distribuição espacial das componentes do tensor taxa de deformação, o qual torna-se altamente anisotrópico e varia significativamente dependendo da posição das partículas do fluido relativamente ao corpo imerso. Esta característica traz enormes dificuldades, uma vez que o tensor de tensões de Reynolds é determinado a partir do tensor taxa de deformação. Tradicionalmente, os modelos  $\kappa$ - $\epsilon$  e LES têm sido os mais empregados na simulação numérica de problemas da Engenharia do Vento.

Embora a grande popularidade conferida aos modelos  $\kappa$ - $\epsilon$ , sabe-se hoje em dia que a análise de problemas envolvendo escoamentos turbulentos sobre corpos rombudos empregando este modelo apresenta enormes restrições. As dificuldades existentes são causadas fundamentalmente por limitações dos modelos baseados no conceito da viscosidade turbulenta quando aplicados ao modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  em escoamentos com obstáculos, resultando em uma superprodução de energia cinética turbulenta nas regiões frontais de corpos rombudos, junto às arestas. Os modelos de turbulência baseados em equações médias obtidas a partir da decomposição de Reynolds e no conceito de viscosidade turbulenta isotrópica, como é o caso dos modelos  $\kappa$ - $\epsilon$ , são usados com muito sucesso em aplicações aeronáuticas, onde o escoamento se dá regularmente sem separação. No entanto, o mesmo não pode ser verificado nos problemas da Engenharia do Vento, onde os campos de escoamento apresentam características altamente complexas, como a presença de várias zonas de recirculação, separação e recolamento simultaneamente. A existência de linhas de corrente curvas e de gradientes de pressão favoráveis e adversos no escoamento leva ao aparecimento de estruturas e de escalas de turbulência bastante diferenciadas em um mesmo problema.

O modelo de turbulência  $\kappa$ - $\epsilon$  foi proposto inicialmente por Harlow e Nakayama (1968) e implementado numericamente através dos trabalhos de Jones e Launder (1972) e Launder e Spalding (1972). A base teórica do modelo está fundamentada sobre a aproximação de Boussinesq e o conceito de viscosidade turbulenta. Um fechamento simples é obtido a partir de um sistema de equações que envolve as expressões para o transporte de energia cinética de turbulência  $\kappa$  e para a dissipação viscosa  $\epsilon$ , além da relação de Prandtl-Kolmogorov para a viscosidade turbulenta, como mostrado abaixo:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + v_j \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + v_t / \sigma_\kappa) \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \right] + P_\kappa - \epsilon \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + \nu_t / \sigma_\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{\kappa} P_\kappa - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{\kappa} \quad (2.20)$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{\kappa^2}{\varepsilon} \quad (2.21)$$

sendo  $\sigma_\kappa$ ,  $\sigma_\varepsilon$ ,  $P_\kappa$ ,  $C_{\varepsilon 1}$  e  $C_{\varepsilon 2}$  as constantes do modelo,  $\mathbf{U}$  o vetor de componentes de velocidade do escoamento,  $\nu$  a viscosidade cinemática molecular,  $\nu_t$  a viscosidade turbulenta e  $\nabla$  o operador gradiente.

Embora matematicamente coerente, o conceito de viscosidade turbulenta, no entanto, pressupõe um alinhamento entre os eixos principais do tensor de Reynolds e do tensor taxa de deformação, o que em várias situações físicas não é observado. Em escoamentos onde as tensões tendem a apresentar um comportamento anisotrópico (escoamentos com forte curvatura nas linhas de corrente, em zonas de recirculação) os resultados obtidos mostram discordâncias importantes em relação às medições experimentais. Com o intuito de melhorar o desempenho dos modelos  $\kappa$ - $\varepsilon$ , várias modificações têm sido propostas por diversos autores para a sua aplicação na EVC.

Uma das primeiras modificações apresentadas deve-se a Launder e Kato (1993), onde é feita uma alteração no termo de produção da equação de transporte de energia turbulenta  $\kappa$ . Embora neste modelo o problema da superprodução de  $\kappa$  em torno de arestas de corpos rombudos fique bastante reduzido, há uma inconsistência matemática entre o termo de produção e o tensor de tensões de Reynolds. Mais tarde, Tsuchiya et al. (1997) propuseram um novo modelo no qual é removida a inconsistência observada no trabalho de Launder e Kato (1993), proporcionando uma melhora considerável nos resultados apresentados. Kawamoto (1995) apresenta em seu trabalho o modelo  $\kappa$ - $\varepsilon$ - $\phi$  no qual é introduzida uma nova variável chamada “*helicity*” –  $\phi$ . Com o modelo  $\kappa$ - $\varepsilon$ - $\phi$  foi possível reproduzir vórtices cônicos junto às arestas de teto de modelos geométricos cúbicos, o que é considerado extremamente difícil para esquemas baseados na média de Reynolds.

Atualmente, o modelo RNG  $\kappa$ - $\varepsilon$ , proposto inicialmente por Yakhot e Orszag (1986), tem sido largamente empregado. Neste método, as equações de transporte para  $\kappa$  e  $\varepsilon$  são obtidas a partir da teoria do grupo de renormalização. Outro modelo que tem se tornado cada

vez mais popular nos últimos anos é o modelo  $\kappa\text{-}\omega$ , desenvolvido por Wilcox (1988). As principais vantagens dos modelos  $\kappa\text{-}\omega$  em relação aos modelos  $\kappa\text{-}\epsilon$  residem no fato de serem mais precisos em escoamentos com camada limite sujeitos a gradientes de pressão adversos, além de serem mais flexíveis.

Tabela 2.1: Desempenho dos modelos LES e  $\kappa\text{-}\epsilon$  para diferentes situações de escoamento.

Condições de escoamento	Modelos de Turbulência		
	$\kappa\text{-}\epsilon$ convencional	LES convencional	LES dinâmico
Escoamentos simples (canais, dutos, etc.)			

turbulento pode ser tratado como sendo constituído por uma superposição de vórtices. Os grandes vórtices interagem com o escoamento principal extraindo energia cinética do mesmo, transferindo-a para vórtices de escala imediatamente inferior e destes para os vórtices correspondentes à próxima escala, sucessivamente, até que uma dada escala é atingida onde as forças viscosas tornam-se dominantes e dissipam a energia dos vórtices.

As grandes escalas da turbulência, as quais são associadas aos vórtices maiores do escoamento e que são responsáveis pela maior parte do transporte de energia e de quantidade de movimento, são resolvidas diretamente pelas equações de Navier-Stokes filtradas, sendo que as escalas inferiores à resolução da malha são representadas através de modelos de turbulência submalha que reproduzem o processo físico de transferência de energia entre as escalas resolvidas e as pequenas escalas. Nas pequenas escalas as estruturas turbulentas tendem a ser mais homogêneas e isotrópicas, favorecendo a obtenção de modelos de turbulência mais universais e independentes dos diferentes tipos de escoamento.

A diferenciação entre as grandes e as pequenas escalas é feita por meio de um processo de filtragem aplicado sobre as equações de conservação em uma forma similar à decomposição de Reynolds, onde as dimensões dos elementos funcionam como operadores de média espacial. Como resultado, obtém-se as equações que governam o escoamento em termos das variáveis associadas às grandes escalas, além de termos não resolvidos pela resolução da malha, chamados de tensões de Reynolds submalha, e que devem ser modelados. As tensões de Reynolds submalha são geralmente representadas através da hipótese de Boussinesq associada ao conceito de viscosidade turbulenta, onde é estabelecida uma relação linear com a taxa de deformação gerada pelo campo de velocidades filtrado (ver a expressão 2.36), sendo a constante de proporcionalidade conhecida como viscosidade turbulenta, a qual é definida de acordo com o modelo de turbulência utilizado.

Desde o trabalho pioneiro de Deardorff (1970) o modelo submalha convencional de Smagorinsky (Smagorinsky, 1963) tem sido largamente empregado nas simulações numéricas da turbulência baseadas na Simulação de Grandes Escalas. A equação que representa o modelo de Smagorinsky é dada pela expressão (2.38), de onde observa-se que  $C_S$  é a conhecida constante de Smagorinsky, a qual assume valores que vão desde 0.1 a 0.25, de acordo com os diferentes tipos de escoamento. A principal deficiência deste modelo aparece na análise de determinados escoamentos com a presença de fenômenos mais complexos, como aqueles observados sobre corpos rombudos com geometrias diferenciadas, onde há uma

clara dificuldade em selecionar-se um único valor para a constante de Smagorinsky a fim de representar apropriadamente as diferentes condições de escoamento que são observadas em torno destes corpos.

Vários modelos têm sido apresentados com o objetivo de contornar a limitação de um valor constante para  $C_s$ , entre os quais destaca-se o modelo dinâmico proposto por Germano et al. (1991) e revisto por Lilly (1992). No modelo dinâmico a constante de Smagorinsky passa a ser considerada como uma variável dependente do tempo e do espaço, denominada de constante de proporcionalidade ou coeficiente dinâmico  $C(\vec{x}, t)$ , sendo obtida a partir de um processo de dupla filtragem. Além disso, o modelo apresenta outras vantagens como a possibilidade de considerar-se o fenômeno de “*back-scattering*” (transferência de energia das pequenas para as grandes escalas) e um comportamento assintótico da constante de proporcionalidade no sentido de anular-se na subcamada laminar, junto aos contornos sólidos. A grande desvantagem do modelo dinâmico está na dificuldade de manter o processo numérico estável devido às grandes flutuações apresentadas pelo coeficiente  $C(\vec{x}, t)$ , sendo mais pronunciado em problemas envolvendo corpos rombudos imersos no escoamento. Neste sentido, em Meneveau et al. (1996) é apresentado um modelo, denominado de modelo dinâmico Lagrangeano, no qual um processo de estabilização é introduzido através de uma operação de média para  $C(\vec{x}, t)$  ao longo da linha de trajetória do escoamento, ao invés de uma média homogênea, como é feito nos modelos dinâmicos convencionais.

Portanto, a Simulação de Grandes Escalas mostra-se a alternativa mais adequada para a análise de escoamentos turbulentos e altamente transientes, principalmente na presença fenômenos mais complexos como a separação de camada limite e a interação com corpos imersos, deformáveis ou não. Este aspecto é de fundamental importância para a obtenção de um modelo numérico confiável para o estudo de problemas da EVC, razão pela qual a Simulação de Grandes Escalas será utilizada neste trabalho. A formulação completa sobre o modelo LES e os respectivos modelos submalha empregados nesta tese são apresentados na próxima seção.

Na Figura 2.1 é apresentado um esquema onde são mostradas as diferentes formas de análise de escoamentos na EVC, com as respectivas limitações de cada método em termos de representação das escalas de comprimento característico do problema.

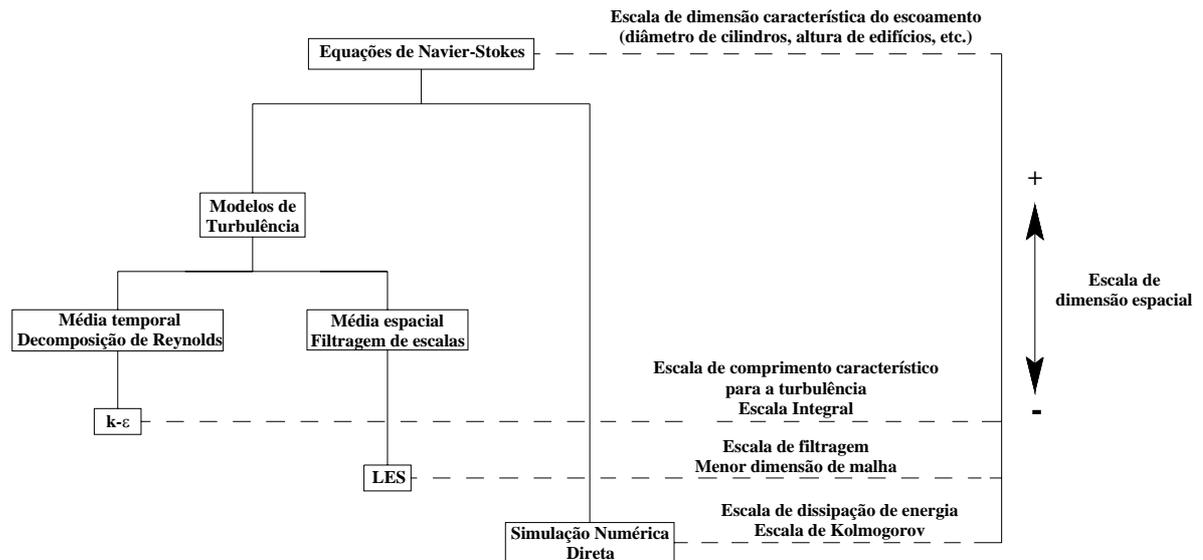


Figura 2.1: Métodos de simulação numérica em escoamentos da EVC.

#### 2.4.2 A Simulação de Grandes Vórtices (“Large Eddy Simulation – LES”)

No presente trabalho, a análise numérica de escoamentos turbulentos é feita por meio da Simulação Direta de Grandes Vórtices (“LES – Large Eddy Simulation”) com modelos submalha de fechamento. Em um modelo numérico baseado em LES, os grandes vórtices ou as grandes escalas da turbulência, com frequências de flutuação mais baixas, são resolvidas diretamente a partir da resolução de malha existente. Para os vórtices ou escalas inferiores à malha são empregados modelos de turbulência que vão representar os efeitos das pequenas escalas sobre o escoamento. Nesta tese são usados dois modelos submalha distintos: o modelo clássico de Smagorinsky (1963) e modelo dinâmico proposto por Germano et al. (1991) e corrigido posteriormente por Lilly (1992).

A formulação é iniciada efetuando-se uma decomposição sobre as variáveis de campo do problema, separando-as em uma parcela referente às grandes escalas e outra referente às pequenas escalas, como segue:

$$\begin{aligned} v_i &= \bar{v}_i + v'_i \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned} \quad (2.22)$$

sendo  $v_i$ , e  $p$  as componentes de velocidade segundo o eixo  $x_i$  e a pressão, respectivamente. O símbolo de barra indica as grandes escalas e o símbolo de apóstrofe indica as pequenas escalas.

Segundo Leonard (1974), a parcela de grandes escalas de uma variável  $f$  qualquer pode ser obtida através da convolução da mesma com uma função filtro  $G(x_i)$ , ou seja:

$$\bar{f}(x_i) = \int G(x_i - x'_i) f(x'_i) dx'_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.23)$$

Findikakis e Street (1982) demonstraram, através de uma série de testes realizados usando diferentes tipos de filtro, a superioridade do filtro do tipo “*box*” em relação aos demais. Neste caso, a função filtro  $G$  é definida como:

$$G(x_i - x'_i) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\Delta_i} & \text{para } |x_i - x'_i| < \frac{\Delta_i}{2} \\ 0 & \text{para } |x_i - x'_i| > \frac{\Delta_i}{2} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.24)$$

onde  $\Delta_i$  são as dimensões do filtro segundo a direção do eixo  $x_i$  e  $n$  é o número de dimensões

boxplot em R. No conteúdo do Método dos Elementos Finitos do pópn(toc(onsitu)67.2i-sd)518(e)-0.7( )TJ- u

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{v_i v_j})}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right\} = \frac{1}{\rho} \bar{X}_i \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \rho c^2 \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.28)$$

onde foram desprezados os termos submalha que surgiram na equação de conservação de massa, Equação (2.28). A parcela advectiva da equação de conservação de momentum vem dada pela seguinte expressão:

$$\overline{v_i v_j} = (\overline{\bar{v}_i \bar{v}_j} + \overline{\bar{v}_i v'_j} + \overline{v'_i \bar{v}_j} + \overline{v'_i v'_j}) \quad (2.29)$$

Uma vez que as variáveis filtradas não são constantes no espaço, o filtrado do produto de duas variáveis é diferente do produto dessas duas variáveis filtradas separadamente (ver Eq. 2.26). Esta conclusão foi feita primeiramente por Leonard (1974), o qual propôs então uma aproximação para o termo  $\overline{\bar{v}_i \bar{v}_j}$  de (2.29). Mais tarde, Clark et al. (1979) propuseram uma aproximação para os termos cruzados, ou seja, termos que envolvem uma filtragem do produto de variáveis de pequenas e de grandes escalas (termos restantes de 2.29). A combinação deste dois trabalhos conduz à seguinte expressão para o termo advectivo:

$$\overline{v_i v_j} = (\overline{\bar{v}_i \bar{v}_j} + L_{ij} + C_{ij} + \overline{v'_i v'_j}) \quad (2.30)$$

onde:

$$L_{ij} + C_{ij} = \frac{\Delta_k^2}{2\gamma} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} \quad (2.31)$$

sendo a expressão acima válida para um filtro do tipo “box”, quando  $\gamma = 6$ .

Petry e Awruch (1997) demonstram que os termos de Leonard e cruzados, além de aumentar o tempo de processamento em torno de 20%, exercem pouca influência nos resultados e, por esta razão, podem ser desprezados. Desta forma, a expressão (2.30) reduz-se a:

$$\overline{v_i v_j} = (\overline{\bar{v}_i \bar{v}_j} + \overline{v'_i v'_j}) \quad (2.32)$$

A forma final para as equações de conservação é obtida, então, substituindo a aproximação (2.32) no termo advectivo correspondente em (2.27), chegando-se a:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \bar{\tau}_{ij}^{\text{SGS}} \right\} = \frac{1}{\rho} \bar{X}_i \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \rho c^2 \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.34)$$

onde  $\bar{\tau}_{ij}^{\text{SGS}}$  são as componentes do tensor de tensões submalha na equação de conservação de momentum (Eq. 2.33), sendo expressas por:

$$\bar{\tau}_{ij}^{\text{SGS}} = \rho \left( \overline{v'_i v'_j} \right) \quad (2.35)$$

as quais são o resultado do movimento das escalas inferiores à resolução da malha, devendo ser modeladas através de um modelo de fechamento para a turbulência.

Os modelos de fechamento estão usualmente baseados na hipótese de Boussinesq (ver Schlichting, 1979), a qual estabelece uma analogia com a lei da viscosidade de Stokes, válida em escoamentos laminares, para descrever as tensões de Reynolds em escoamentos turbulentos. No contexto da Simulação de Grandes Vórtices (“LES”), tem-se que o tensor de Reynolds submalha pode ser expresso na seguinte forma:

$$\bar{\tau}_{ij}^{\text{SGS}} = \rho \left( \overline{v'_i v'_j} \right) = 2\mu_t \bar{S}_{ij} \quad (2.36)$$

sendo  $\mu_t$  a viscosidade turbulenta e  $\bar{S}_{ij}$  as componentes do tensor taxa de deformação, expressas através de:

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.37)$$

A viscosidade turbulenta  $\mu_t$  deve ser então determinada por meio de um modelo submalha que descreva os efeitos das escalas inferiores à resolução da malha sobre as grandes escalas. Abaixo, são apresentados os dois modelos de viscosidade turbulenta submalha empregados neste trabalho.

#### 2.4.2.1 O modelo clássico de Smagorinsky

Pelo modelo clássico de Smagorinsky (1963), a viscosidade turbulenta  $\mu_t$  é obtida através da seguinte expressão:

$$\mu_t = \rho (C_s \bar{\Delta})^2 |\bar{S}| \quad (2.38)$$

sendo:

$$|\bar{S}| = (2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^{1/2} \quad (2.39)$$

com  $\bar{S}_{ij}$  dado pela expressão (2.37).  $C_s$  é a constante de Smagorinsky, assumindo valores usualmente entre 0.1 e 0.25 de acordo com as características dos escoamentos (ver Murakami, 1997), e  $\bar{\Delta}$  é a dimensão característica associada ao filtro empregado, dada em (2.25).

#### 2.4.2.2 O modelo dinâmico

Empregando o modelo submalha dinâmico, proposto por Germano et al. (1991) e ajustado posteriormente por Lilly (1992), a viscosidade turbulenta  $\mu_t$  fica definida como sendo:

$$\mu_t = \rho C(\vec{x}, t) \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \quad (2.40)$$

onde  $C(\vec{x}, t)$  é o coeficiente dinâmico, o qual é calculado automaticamente através da evolução do escoamento, variando em função da posição no espaço  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  e do tempo  $t$ . O coeficiente dinâmico é obtido através da seguinte expressão:

$$C(\vec{x}, t) = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_{ij} \mathcal{M}_{ij}}{\mathcal{M}_{ij} \mathcal{M}_{ij}} \quad (2.41)$$

onde:

$$\mathcal{L}_{ij} = \langle \bar{v}_i \bar{v}_j \rangle - \langle \bar{v}_i \rangle \langle \bar{v}_j \rangle \quad (2.42)$$

e:

$$\mathcal{M}_{ij} = \langle \bar{\Delta} \rangle^2 \langle \bar{S} \rangle \langle \bar{S}_{ij} \rangle - \langle \Delta^2 \bar{S} \bar{S}_{ij} \rangle \quad (2.43)$$

Sendo que o coeficiente dinâmico  $C(\bar{x}, t)$  é calculado nos nós da malha de elementos finitos, o valor usado na determinação da viscosidade turbulenta  $\mu_t$ , avaliada em nível local através da Equação (2.40), será definido pela média dos valores nodais do elemento em que se está efetuando o cálculo, conforme é sugerido por vários autores, tais como Zang et al. (1993), com o objetivo de evitar instabilidades no processo de solução. Além disso, quando o denominador da expressão (2.41) for nulo, assume-se  $C(\bar{x}, t) = 0$  para o nó em questão.

A Eq. (2.41) pressupõe a utilização de um duplo processo de filtragem sobre as equações de conservação. A primeira filtragem é obtida diretamente através da discretização do espaço de análise, exatamente como no modelo clássico de Smagorinsky. A dimensão característica do filtro vem dada pela expressão (2.25) e as variáveis associadas a esta primeira filtragem são definidas através da barra superior. Para a segunda filtragem utiliza-se um filtro de dimensão característica superior ao primeiro filtro, denominado filtro teste  $\langle \bar{\Delta} \rangle$ . As variáveis associadas a este segundo filtro são definidas pelo símbolo  $\langle \bullet \rangle$ .

Nas expressões acima,  $\mathcal{L}_{ij}$  é o *tensor de Leonard Global*, que representa as tensões resolvidas associadas às escalas de turbulência existentes entre os dois filtros, sendo que para escoamentos laminares e sobre contornos sólidos as componentes deste tensor são nulas.  $\mathcal{M}_{ij}$  é um tensor que representa a parte anisotrópica das tensões submalha de segundo filtro.

Neste trabalho é proposta uma técnica de segunda filtragem similar à apresentada por Padilla e Silveira-Neto (2003) onde, dada uma variável genérica  $\bar{k}$ , correspondente às grandes escalas do primeiro filtro, o seu valor  $\langle \bar{k} \rangle$  associado ao segundo filtro, em um nó  $i$ , é obtido através da seguinte fórmula:

$$\langle \bar{k} \rangle^i = \frac{\sum_{j=1}^n \left( \frac{\bar{k}^j}{d_i^j} \right)}{\sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{d_i^j} \right)} \quad (2.44)$$

sendo  $n$  o número de nós com conectividade direta ao nó  $i$ ,  $d_i^j$  a distância euclidiana entre os nós  $i$  e  $j$  e  $\bar{k}^j$  a variável associada ao primeiro filtro no nó  $j$ . Na Figura 2.2 é apresentada uma

ilustração onde a formação do segundo filtro pode ser melhor compreendida. A dimensão característica do filtro teste  $\langle \bar{\Delta} \rangle$ , referente a um nó  $i$ , é determinada por:

$$\langle \bar{\Delta} \rangle^i = \left( \sum_{p=1}^{NE} \text{Vol}(p) \right)^{1/3} \quad (2.45)$$

onde NE é o número de elementos comuns ao nó  $i$  e Vol(p) o volume do elemento p.

No presente trabalho utiliza-se um limite inferior para a soma das viscosidades molecular e turbulenta, como sendo:

$$\mu + \mu_t \geq 0 \quad (2.46)$$

conforme sugerido por Zang et al. (1993) e empregado por Petry (2002) e Popielek (2006).

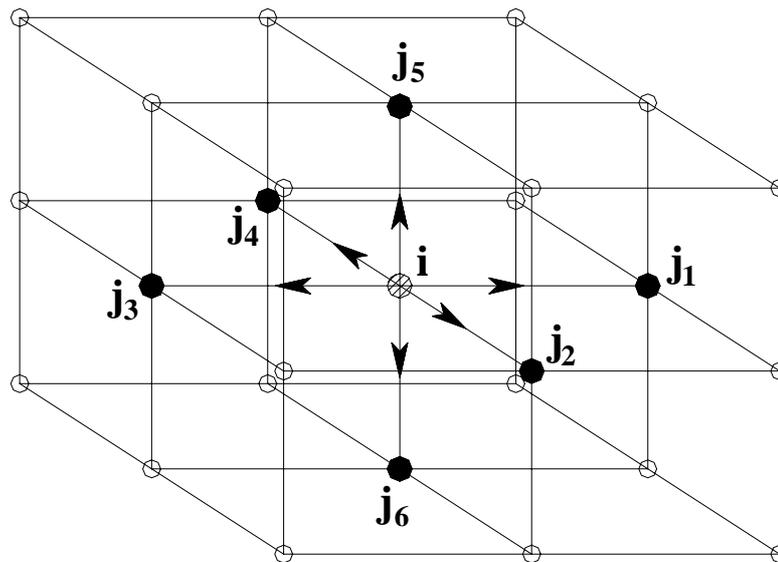


Figura 2.2: Formação do filtro teste para o processo de segunda filtragem do modelo dinâmico empregado no presente trabalho.

## 2.5 AS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO EMPREGANDO UMA FORMULAÇÃO ARBITRÁRIA LAGRANGEANA-EULERIANA (ALE)

Nesta seção são obtidas as equações que governam a Dinâmica de Fluidos descritas através de uma formulação arbitrária Lagrangeana-Euleriana (ALE) sem uma maior

preocupação com a colocação de conceitos fundamentais da Cinemática do Contínuo. Para maiores informações sobre o tema o leitor pode recorrer a referências clássicas como, por exemplo, Malvern (1969) e Mase (1970).

Primeiramente, expressando-se as equações de conservação que são empregadas neste trabalho na sua forma fundamental, tem-se que:

$$\frac{D(\rho v_i)}{Dt} = \sum f_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{conservação de momentum linear}) \quad (2.47)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{conservação de massa}) \quad (2.48)$$

onde  $D(\cdot)/Dt$  representa a derivada material da propriedade  $(\cdot)$ . Além disso, da Mecânica dos Fluidos tem-se que:

$$\sum f_i = -\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + X_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.49)$$

De acordo com o tratamento dado para a determinação da derivada material, as equações acima podem assumir as formas Euleriana, Lagrangeana ou arbitrária Lagrangeana-Euleriana de descrição. Na descrição Euleriana as variáveis do problema são avaliadas com relação às coordenadas espaciais  $x_j$ , resultando nas equações apresentadas no início deste capítulo. No entanto, ao empregar-se a descrição arbitrária Lagrangeana-Euleriana, as variáveis das equações governantes passam a ser dadas em relação às coordenadas referenciais do domínio ALE, o qual deforma-se arbitrariamente de acordo com os deslocamentos apresentados pelo corpo sólido.

A derivada material em uma descrição ALE vem dada por:

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + (v_j - w_j) \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.50)$$

onde  $w_j$  são as componentes do vetor de velocidade de malha  $\mathbf{w}$  segundo a direção do eixo  $x_j$ . Deve-se ter em mente que  $x_j$  representa aqui as componentes do vetor de coordenadas referenciais e que a derivada  $\partial(\cdot)/\partial t$  é calculada considerando-se estas mesmas coordenadas fixas.

Aplicando a definição de derivada material para uma descrição ALE (Equação 2.50) às equações (2.47) e (2.48), considerando-se a hipótese de pseudo-compressibilidade, obtém-se as seguintes expressões:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + (v_j - w_j) \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + X_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (v_j - w_j) \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho c^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.52)$$

As expressões acima representam as respectivas formas conservativas das equações governantes da Dinâmica dos Fluidos em uma descrição ALE. Estas equações são válidas para o domínio de referência, o qual acompanha a deformação arbitrária da malha, e que é descrito através das coordenadas referenciais. No entanto, a partir destas expressões generalizadas é possível obter-se os casos particulares das descrições Euleriana e Lagrangeana e da própria descrição ALE, de acordo com o esquema apresentado abaixo:

1. *Descrição puramente Euleriana*: Neste caso, tem-se  $\mathbf{w} = 0$  e o problema passa a ser descrito através das coordenadas espaciais  $x_j$ . Em uma descrição ALE esta situação ocorre em regiões afastadas do campo de deformação da estrutura imersa, onde os efeitos do movimento do corpo não são mais sentidos.
2. *Descrição puramente Lagrangeana*: Neste caso, tem-se  $\mathbf{w} = \mathbf{v}$  e o problema passa a ser descrito através das coordenadas materiais. Em uma descrição ALE esta situação ocorre na superfície de corpos deformáveis imersos no escoamento.
3. *Descrição arbitrária Lagrangeana-Euleriana (ALE)*: Neste caso, tem-se  $\mathbf{w} \neq \mathbf{v}$  e  $\mathbf{w} \neq 0$  e o problema é descrito através das coordenadas referenciais. Em uma descrição ALE esta situação ocorre na vizinhança de corpos deformáveis imersos no escoamento.

As equações governantes para um escoamento incompressível de um fluido viscoso em um processo isotérmico, utilizando uma descrição Arbitrária Lagrangeana-Euleriana, podem ser escritas em sua forma não conservativa da seguinte maneira:

- a) Equação de conservação de momentum (forma não conservativa):

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + (v_j - w_j) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \bar{\nu} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right\} = \frac{1}{\rho} X_i \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (2.53)$$

b) Equação de conservação de massa:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (v_j - w_j) \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho c^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.54)$$

onde  $\bar{\nu} = \nu + \nu_t$ , sendo  $\nu$  e  $\nu_t$  as viscosidades cinemáticas laminar e turbulenta, respectivamente. Assim como foi referido anteriormente, o termo advectivo da equação de conservação de massa é usualmente desprezado, resultando na forma apresentada pela Equação (2.18).

Para a solução das equações de conservação devem ser fornecidas ainda as condições iniciais e as condições de contorno das variáveis do problema. As condições iniciais são dadas por:

$$v_i [x_1, x_2, x_3, (t = 0)] = v_i^0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.55)$$

$$p [x_1, x_2, x_3, (t = 0)] = p^0 \quad (2.56)$$

sendo  $v_i^0$  e  $p^0$  os valores iniciais para as componentes de velocidade e para a pressão, respectivamente. As equações (2.53) e (2.54), assim como as condições iniciais, são válidas no domínio de análise  $\Omega$  e no intervalo  $[0, t_i]$ , sendo  $t_i$  o tempo total de análise.

As condições de contorno, por sua vez, são as seguintes:

$$v_i = v_i^* \quad \text{em } \Gamma_v \quad (2.57)$$

$$p = p^* \quad \text{em } \Gamma_p \quad (2.58)$$

$$\left[ -p \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] n_j = t_i^* \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (2.59)$$

onde  $v_i^*$  e  $p^*$  são os valores prescritos para as variáveis  $v_i$ , e  $p$  nas regiões  $\Gamma_v$  e  $\Gamma_p$  do contorno, respectivamente,  $t_i^*$  são as componentes do vetor de tensões prescritas na direção  $x_i$

agindo sobre a região  $\Gamma_\sigma$  do contorno e  $n_j$  são as componentes do vetor de co-senos diretores da normal a  $\Gamma_\sigma$  em um ponto qualquer deste contorno segundo a direção  $x_j$  dos eixos coordenados. As expressões (2.57) e (2.58) são conhecidas como condições de contorno essenciais ou forçadas (ou de Dirichlet), enquanto que a expressão (2.59) é a chamada condição de contorno natural (ou de Neumann).

As expressões apresentadas acima constituem-se em um conjunto completo de condições de contorno para as variáveis do problema em uma descrição Euleriana. No entanto, em uma descrição Arbitrária Lagrangeana-Euleriana, condições de contorno referentes às componentes de velocidade de malha  $w_j$  devem ser fornecidas conforme as seguintes expressões:

$$w_i = 0 \quad \text{em } \Gamma_{\text{ex}} \quad (2.60)$$

$$w_i = v_i^{*,\text{bd}} \quad \text{em } \Gamma_{\text{bd}} \quad (2.61)$$

onde  $v_i^{*,\text{bd}}$  são as componentes de velocidade do fluido nos pontos pertencentes a superfícies de corpos imersos  $\Gamma_{\text{bd}}$ .  $\Gamma_{\text{ex}}$  é o contorno externo do domínio ALE. Nas demais regiões do domínio a velocidade de malha apresentará valores obtidos conforme o esquema de movimento de malha utilizado.

### 3 OS MODELOS NUMÉRICOS PARA A ANÁLISE DO ESCOAMENTO

#### 3.1 A SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS DE VENTO

A determinação de um método numérico de análise ideal para um dado conjunto de problemas depende fundamentalmente da disponibilidade de conhecimentos científicos, da experiência e domínio do grupo de pesquisa sobre determinadas técnicas e da capacidade de memória computacional e de processamento disponíveis. Em um segundo plano, outros fatores são também importantes, os quais estão relacionados às características das equações que governam o problema a ser estudado, como por exemplo, o grau de não-linearidade do sistema de equações. Também é preponderante, em uma primeira abordagem, a identificação de hipóteses simplificativas e do campo de aplicações, a fim de definir claramente as limitações existentes para o modelo desenvolvido, facilitando assim o processo de escolha das técnicas numéricas. O comportamento do escoamento, por exemplo, pode ser linear ou altamente não-linear; as características geométricas do problema podem ser simples, como nos escoamentos bidimensionais, ou extremamente complexas, como nos escoamentos tridimensionais; o escoamento pode apresentar uma escala predominante ou ter várias escalas significativas, como no caso de escoamentos com números de Reynolds elevados. Todos estes aspectos devem ser levados em consideração no processo de desenvolvimento de um algoritmo.

Na análise dos problemas existentes na Engenharia do Vento através de algum modelo numérico, o esforço computacional é, em geral, bastante alto em razão do uso de uma discretização espacial extremamente refinada, da necessidade de se resolver sistemas de equações com propriedades fortemente não-lineares e com um número extremamente alto de graus de liberdade, além da exigência do uso de esquemas explícitos de avanço no tempo. Por isso, deve-se buscar o uso de técnicas numéricas com alto grau de eficiência e a utilização de ferramentas computacionais de alto desempenho (máquinas com processamento vetorial e/ou paralelo). Neste sentido, os processo de discretização espacial e temporal são fundamentais para a determinação das principais características do modelo numérico.

Para o processo de discretização espacial podem ser utilizados, a princípio, todos os métodos empregados usualmente na DFC. No entanto, a partir da observação das principais

características apresentadas pelos problemas existentes na EVC, verifica-se que apenas um pequeno número de esquemas numéricos pode ser usado de forma eficiente. Considerando-se o fato de que quase a totalidade dos modelos numéricos existentes para a análise de estruturas é construída utilizando o MEF, a escolha por um método deste tipo parece ser uma alternativa óbvia para o desenvolvimento de algoritmos de IFE versáteis, facilitando o gerenciamento de dados e a consistência entre as diferentes metodologias empregadas nas diferentes fases de processamento. Outro fator que influencia decisivamente a escolha feita neste trabalho pelo MEF é a larga experiência adquirida no PPGEC/UFRGS e no PROMEC/UFRGS com o uso deste método como ferramenta de análise de escoamentos.

No contexto do MEF a seleção do tipo de elemento empregado na discretização espacial exerce um papel importante nas características numéricas que irá apresentar o modelo. Os elementos hexaédricos trilineares isoparamétricos são os mais comumente usados em análises tridimensionais, apresentando a melhor relação custo-benefício entre as alternativas disponíveis. Este elemento é constituído de oito nós com arestas em linha reta e com funções de interpolação lineares. Quanto ao processo de integração numérica, utilizada na avaliação das matrizes em nível de elemento que surgem da aplicação do MEF, a quadratura mínima necessária para calcular exatamente o volume destes elementos exige o uso de pelo menos oito pontos de integração, o que torna a análise de problemas de grande porte totalmente inviável. A alternativa é lançar mão de técnicas de integração reduzida com esquemas de controle de modos espúrios, os quais dificilmente são excitados em descrições puramente Eulerianas, mas que podem aparecer em problemas de IFE, onde se usa geralmente uma descrição ALE (*arbitrária Lagrangeana-Euleriana*). Outro aspecto importante que deve ser considerado ao usar elementos com funções de interpolação de baixa ordem é a necessidade do uso da forma fraca das equações governantes, o que consiste, na verdade, em reduzir as exigências de continuidade para as funções de interpolação através da aplicação de processos de integração por partes sobre os termos com derivadas de mais alta ordem das equações. Como produto deste processo, podem surgir termos de contorno que muitas vezes não devem ser desprezados.

Quanto ao processo de discretização temporal, há também uma série de métodos que podem ser utilizados. As equações de Navier-Stokes e de conservação de massa, típicas equações diferenciais parciais, passam, no contexto do Método dos Elementos Finitos, por um processo chamado de semi-discretização, resultando em um sistema de equações diferenciais ordinárias discretas no tempo. Estas equações devem então ser integradas neste domínio por

meio de esquemas numéricos de avanço. Basicamente, todos os métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias podem ser empregados. No entanto, por razões práticas, apenas os métodos mais eficientes em termos de tempo de processamento e demanda de memória podem ser considerados em problemas de grandes proporções.

Entre o grupo de métodos baseados em diferenças finitas, encontram-se os esquemas “*Forward Euler*”, “*Backward-Euler*”, “*Adams-Bashforth*”, “*Crank-Nicholson*” e “*Runge-Kutta*” (ver Reddy e Gartling, 1994). O que se verifica na maioria destes modelos é que eles conduzem a um sistema acoplado de equações, mesmo usando uma matriz de massa discreta, necessitando por isso um grande esforço em termos de armazenamento de memória e de “*solvers*” iterativos para sistemas de grande porte. Por outro lado, o método explícito “*Forward Euler*” possui precisão apenas de primeira ordem no tempo, impróprio para problemas com forte não-linearidade, necessitando o uso de esquemas do tipo “*upwind*”.

Todos os esquemas baseados no MEF que utilizam expansões em séries de Taylor como aproximações para os termos temporais das equações governantes são denominados de modelos *Taylor-Galerkin*, cujos princípios foram desenvolvidos inicialmente por Donea et al. (1982). Originalmente, os modelos desenvolvidos utilizando esta mesma filosofia de discretização empregavam expansões em séries de Taylor truncadas nos termos de primeira ordem. Portanto, assim como os modelos clássicos de Galerkin, também conhecidos como *Bubnov-Galerkin*, estes esquemas de Taylor-Galerkin de baixa ordem produzem soluções afetadas por oscilações espúrias no campo de velocidades para problemas com advecção dominante. Métodos de estabilização que utilizam termos de mais alta ordem nas expansões em séries de Taylor (ver Donea, 1984 e Gresho et al., 1984) têm sido tradicionalmente empregados nos trabalhos produzidos pelo PPGEC/UFRGS e pelo PROMEC/UFRGS, o que favorece grandemente a sua escolha para esta tese. Comparativamente aos demais métodos, um modelo construído a partir de um esquema Taylor-Galerkin estabilizado mostra características superiores em termos de estabilidade com um amortecimento numérico mínimo.

Quanto à natureza do esquema de avanço no tempo a ser empregado, dependendo da forma em que são feitas as expansões em séries de Taylor, o algoritmo poderá ser implícito, explícito ou ainda semi-implícito. Como já foi mencionado anteriormente, os esquemas implícitos necessitam de grandes quantidades de memória computacional, sendo mais recomendáveis para modelos numéricos que tratam a pressão de uma forma implícita em escoamentos incompressíveis, como nos métodos de penalidade. Mas, além disso, a maior

dificuldade deste tipo de esquema encontra-se na análise de escoamentos turbulentos, onde as altas frequências de flutuação observadas para as variáveis do escoamento obrigam a utilização de passos de tempo menores, o que anula a maior vantagem dos métodos implícitos. Já os métodos semi-implícitos tem-se mostrado bastante eficientes apenas para a análise de escoamentos com contornos fechados, apresentando restrições de estabilidade em escoamentos com contornos abertos a partir de números de Reynolds moderados ( $Re \cong 1000$ ).

Os algoritmos explícitos apresentam como grande obstáculo as restrições de estabilidade, exigindo muitas vezes o uso de incrementos de tempo bastante baixos. No entanto, para capturar com precisão os fenômenos verificados nos escoamentos reais da EVC, geralmente com números de Reynolds elevados, é essencial a utilização de passos de tempo reduzidos. No que diz respeito ao consumo de memória computacional, os gastos são mínimos em comparação, por exemplo, aos esquemas implícitos, o que para problemas com malhas extremamente refinadas resulta em um aumento significativo na eficiência por passo de tempo. Com isso, pode-se concluir que os esquemas explícitos são evidentemente a escolha mais apropriada para as análises a serem feitas.

No presente trabalho serão estudados primeiramente dois esquemas explícitos de Taylor-Galerkin, determinando-se o mais apropriado a partir da observação de aspectos numéricos tais como o tempo de processamento, estabilidade e qualidade dos resultados. O primeiro deles é o modelo explícito de dois passos, proposto por Kawahara e Hirano (1983) e utilizado em Braun (2002). Este esquema tem sido empregado com sucesso em várias análises efetuadas no PPGEC/UFRGS e no PROMEC/UFRGS (Petry, 1993; Teixeira, 2001; <sup>a</sup>Braun e Awruch, 2005), atingindo um alto nível de desenvolvimento. As suas principais características são uma alta estabilidade numérica e, em alguns casos, a presença de um excesso de dissipação numérica, o que para escoamentos turbulentos não deixa de ser uma vantagem. O segundo modelo é o chamado esquema explícito-iterativo, empregado recentemente por <sup>b</sup>Braun e Awruch (2005). Neste algoritmo as equações de Navier-Stokes são resolvidas a partir de uma operação de decomposição, separando-as em duas parcelas, sendo que na primeira delas os campos incrementais de velocidade são obtidos através de um processo iterativo. O campo de pressões é então resolvido explicitamente em um único passo, a partir daqueles valores, seguido do processo de solução, também explícita, de uma segunda equação para os incrementos de velocidade, contendo apenas termos de pressão. Este esquema é uma adaptação de um código semi-implícito desenvolvido por Rossa (2000). Com

este modelo, espera-se que haja uma redução no tempo de processamento em relação ao esquema explícito de dois passos.

Na seqüência, são apresentados os dois esquemas de avanço no tempo propostos para cada uma das equações de conservação. Logo após, é introduzido o modelo de discretização espacial de acordo com o MEF e o princípio dos Resíduos Ponderados de Galerkin, obtendo-se como resultado as respectivas equações matriciais em elementos finitos. Ao final do capítulo são mostrados os algoritmos de solução para os modelos desenvolvidos e alguns aspectos computacionais importantes relacionados ao processo de análise.

### 3.2 DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL USANDO O MÉTODO EXPLÍCITO DE DOIS PASSOS

Uma variável genérica  $\theta(\vec{x}, t)$ , onde  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  são as coordenadas de um ponto qualquer do domínio espacial de análise  $\Omega$  e  $t$  a sua posição no domínio do tempo, pode ser expandida em série de Taylor na seguinte forma (Braun, 2002):

$$\theta(\vec{x}, t + \Delta t) - \theta(\vec{x}, t) = \Delta t \frac{\partial \theta(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 \theta(\vec{x}, t)}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \quad (3.1)$$

onde  $\Delta t$  é o incremento de tempo. O esquema de avanço no tempo para as variáveis das equações governantes é obtido empregando a expansão (3.1), como é demonstrado a seguir.

#### 3.2.1 Equações de conservação de momentum (Navier-Stokes):

Isolando o termo temporal da Equação (2.53), obtém-se que:

$$\frac{\partial v_i^n}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{\rho} X_i - (v_j - w_j) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + v_t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right\}^n \quad (3.2)$$

onde o super-índice  $n$  indica o ponto  $t$  no tempo.

Derivando a expressão (3.2) em relação ao tempo, chega-se a:

$$\frac{\partial^2 v_i^n}{\partial t^2} = \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial X_i}{\partial t} - (v_j - w_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + v_t) \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial t} \right) + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial t} \delta_{ij} \right] \right\}^n \quad (3.3)$$

Na expressão (3.3) foi desconsiderado o termo  $\frac{\partial}{\partial t} (v_j - w_j) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  por motivos de simplificação. Esta abstração, no entanto, não traz qualquer prejuízo quanto à precisão do modelo, como pode ser aferido em Braun (2002).

Substituindo as expressões (3.2) e (3.3) em seus respectivos termos na expansão (3.1), considerando como variável as componentes de velocidade  $v_i$ , obtém-se a seguinte equação incremental:

$$\Delta v_i = \Delta t \left\{ \frac{1}{\rho} X_i - (v_j - w_j) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + v_t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right\}^n + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{1}{\rho} \Delta X_i - (v_j - w_j) \frac{\partial \Delta v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Delta p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + v_t) \left( \frac{\partial \Delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial \Delta v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right\}^{n+1} \quad (3.4)$$

sendo  $\Delta v_i = v_i^{n+1} - v_i^n$ ,  $\Delta X_i = X_i^{n+1} - X_i^n$  e  $\Delta p = p^{n+1} - p^n$ , onde  $n$  e  $n+1$  representam os pontos  $t$  e  $t+\Delta t$  no domínio do tempo. Uma linearização das derivadas temporais em (3.3) foi adotada de acordo com a seguinte expressão:

$$\frac{\partial \theta^n}{\partial t} = \frac{\Delta \theta^{n+1}}{\Delta t} = \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\Delta t} \quad (3.5)$$

sendo  $\theta$  uma variável genérica.

Ao observar a Equação (3.4), verifica-se que ela pode ser re-escrita da seguinte maneira:

$$\Delta v_i^{n+1/2} = \Delta t \left\{ \frac{1}{\rho} X_i - (v_j - w_j) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + v_t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right\}^{n+1/2} \quad (3.6)$$

onde  $n+1/2 = t+\Delta t/2$ .

O avanço no tempo para as componentes de velocidade  $v_i$  fica, portanto, definido pela expressão abaixo:

$$v_i^{n+1} = v_i^n + \Delta v_i^{n+1/2} \quad (3.7)$$

onde o incremento  $\Delta v_i^{n+1/2}$  deve ser calculado considerando todas as variáveis da expressão (3.7) avaliadas em  $n+1/2$ . Para isso, utiliza-se novamente uma expansão em séries de Taylor da seguinte forma:

$$\theta(\vec{x}, t + \Delta t/2) - \theta(\vec{x}, t) = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \theta(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{(\Delta t/2)^2}{2!} \frac{\partial^2 \theta(\vec{x}, t)}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \quad (3.8)$$

O termo correspondente à derivada de primeira ordem na expansão (3.8) é obtido através da expressão (3.2). Já o termo referente à derivada de segunda ordem é determinado ao inserir a expressão (3.2) nas parcelas referentes às derivadas temporais das componentes de velocidade  $v_i$  em (3.3). As derivadas de terceira ordem ou superiores de  $v_i$  e derivadas de segunda ordem ou superiores da pressão  $p$  são desprezadas. Além disso, a parcela contendo a derivada temporal das forças de volume  $X_i$  em (3.3) é posteriormente desconsiderada a fim de evitar um processo iterativo para a solução do sistema. Obtém-se então a seguinte expressão final para a derivada de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 v_i^n}{\partial t^2} = \left\{ (v_j - w_j)(v_k - w_k) \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{1}{\rho} (v_j - w_j) \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} \right\}^n \quad (3.9)$$

onde o termo  $(v_j - w_j)(v_k - w_k) \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k}$  é uma aproximação de mais alta ordem para a parcela advectiva. Esta parcela é também conhecida como Tensor de Balanço Difusivo e representa uma difusão artificial inserida no modelo (Selvam, 1997).

Substituindo então a expressão (3.2) e a expressão (3.9) na expansão (3.8), descontada do termo de pressão e considerando-se ainda  $\theta = v_i$ , obtém-se as componentes de velocidade  $v_i$  em  $t + \Delta t/2$  a partir de:

$$v_i^{n+1/2} = v_i^n + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{1}{\rho} X_i - (v_j - w_j) \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\Delta t}{4\rho} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + v_i) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] + \frac{\Delta t}{4} (v_j - w_j) (v_k - w_k) \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} \right\}^n \quad (3.10)$$

O campo de velocidades deve ainda ser corrigido com o termo de pressão da Equação (3.9), que foi omitido em (3.10), a partir do campo de pressões obtido em  $t + \Delta t/2$  e cuja expressão é dada mais adiante. A correção é dada através de:

$$v_i^{n+1/2} = v_i^{n+1/2} - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta t^2}{8} \frac{\partial \Delta p^{n+1/2}}{\partial x_j} \delta_{ij} \quad (3.11)$$

onde a mesma linearização dada em (3.5) foi aplicada para o termo de derivada temporal de pressão.

### 3.2.2 Equação de conservação de massa (Eq. da Continuidade):

Isolando o termo temporal da equação de conservação de massa (Eq. 2.54) na mesma forma efetuada em (3.2), obtém-se:

$$\frac{\partial p^n}{\partial t} = - \left[ (v_j - w_j) \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho c^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right]^n \quad (3.12)$$

Deriva-se, então, a expressão (3.12) com relação ao tempo, obtendo:

$$\frac{\partial^2 p^n}{\partial t^2} = - \left[ (v_j - w_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial t} \right]^n \quad (3.13)$$

As expressões (3.12) e (3.13) são substituídas em seus respectivos termos na expansão (3.1), considerando agora a pressão como variável e adotando a linearização (3.5) para as derivadas temporais, obtendo-se a seguinte equação incremental:

$$\Delta p^n = -\Delta t \left[ (v_j - w_j) \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho c^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right]^n - \frac{\Delta t}{2} \left[ (v_j - w_j) \frac{\partial \Delta p}{\partial x_j} + \rho c^2 \frac{\partial \Delta v_j}{\partial x_j} \right]^{n+1} \quad (3.14)$$

Esta equação pode, por sua vez, ser ainda expressa da seguinte maneira:

$$\Delta p^{n+1/2} = -\Delta t \left[ (v_j - w_j) \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho c^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right]^{n+1/2} \quad (3.15)$$

O avanço no tempo para a pressão é definido pela expressão abaixo:

$$p^{n+1} = p^n + \Delta p^{n+1/2} \quad (3.16)$$

Para a obtenção do incremento de pressão em  $n+1/2$  emprega-se a expansão (3.8), considerando desta vez a pressão  $p$  como variável. A derivada de primeira ordem no tempo é obtida diretamente de (3.12), enquanto que a derivada de segunda ordem é obtida inserindo a expressão (3.12) nos termos correspondentes em (3.13), resultando na seguinte expressão:

$$\frac{\partial^2 p^n}{\partial t^2} = \left[ (v_j - w_j)(v_k - w_k) \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_k} \right]^n \quad (3.17)$$

Utilizando as expressões (3.12) e (3.17) na expansão (3.8), considerando a pressão como variável, obtém-se a seguinte equação para a determinação da pressão em  $n + 1/2$ :

$$p^{n+1/2} = p^n - \frac{\Delta t}{2} \left[ (v_j - w_j) \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho c^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - \frac{\Delta t}{4} (v_j - w_j)(v_k - w_k) \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_k} \right]^n \quad (3.18)$$

A partir desta expressão é possível realizar a correção do campo de velocidades (Eq. 3.11) com o incremento de pressão  $\Delta p^{n+1/2} = p^{n+1/2} - p^n$ . Caso seja desconsiderada a advecção de pressão na equação da continuidade, todos os termos envolvendo produtos entre componentes de velocidade e derivadas de pressão devem ser removidos das equações (3.12) a (3.18). Neste trabalho, a advecção na pressão será desprezada.

### 3.3 DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL USANDO O MÉTODO EXPLÍCITO-ITERATIVO

De acordo com Yoon et al. (1998), uma variável genérica  $\theta$  pode ser expandida em uma série de Taylor da seguinte forma:

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \Delta t \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^{n+s_1} + \frac{\Delta t^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right)^{n+s_2} + O(\Delta t^3) \quad (3.19)$$

onde os super-índices  $n$  e  $n+1$  indicam as posições  $t$  e  $t + \Delta t$  no domínio do tempo e  $\Delta t$  é o incremento de tempo. As variáveis  $s_1$  e  $s_2$  são conhecidos como “*implicitness parameters*” e definem a forma de avanço no tempo através de esquemas implícitos, semi-implícitos ou explícitos, de acordo com os valores adotados. No presente trabalho, utiliza-se  $s_1 = s_2 = 1/2$  resultando nas seguintes aproximações para as derivadas em (3.19):

$$\frac{\partial \theta^{n+1/2}}{\partial t} = \frac{\partial \theta^n}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta \theta^{n+1}}{\partial t} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial^2 \theta^{n+1/2}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \theta^n}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta \theta^{n+1}}{\partial t^2} \quad (3.21)$$

Substituindo estas duas expressões em (3.19), resulta a seguinte expansão:

$$\Delta \theta^{n+1} = \Delta t \left( \frac{\partial \theta^n}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta \theta^{n+1}}{\partial t} \right) + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \theta^n}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta \theta^{n+1}}{\partial t^2} \right) \quad (3.22)$$

a qual é utilizada pelo presente modelo na construção dos esquemas de avanço no tempo das equações governantes.

### 3.3.1 Equações de conservação de momentum (Navier-Stokes):

A expressão representando as equações de conservação de quantidade de movimento na forma conservativa pode ser apresentada na seguinte maneira:

$$\frac{\partial U_i^n}{\partial t} = X_i^n - \frac{\partial f_{ij}^n}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} - \frac{\partial p^n}{\partial x_j} \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.23)$$

onde os super-índices  $n$  indicam um ponto  $t$  no tempo,  $f_{ij} = \rho v_i(v_j - w_j)$  e  $U_i = \rho v_i$  representam as componentes do vetor de momentum linear.

A derivada temporal do incremento  $\Delta U_i$  é obtida analogamente de (3.23) como segue:

$$\frac{\partial \Delta U_i^{n+1}}{\partial t} = \Delta X_i^{n+1} - \frac{\partial \Delta f_{ij}^{n+1}}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta \tau_{ij}^{n+1}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Delta p^{n+1}}{\partial x_j} \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.24)$$

A derivada temporal de segunda ordem de  $U_i$  é obtida a partir da derivação em relação ao tempo da Equação (3.23), resultando em:

$$\frac{\partial^2 U_i^n}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( X_i^n - \frac{\partial f_{ij}^n}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} - \frac{\partial p^n}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial t} - \frac{\partial f_{ij}^n}{\partial t} - \frac{\partial p^n}{\partial t} \delta_{ij} \right) + \frac{\partial X_i^n}{\partial t} \quad (3.25)$$

Empregando a regra da cadeia na expressão (3.25) e observando que  $\partial f_{ij} / \partial U_i = v_j - w_j$ , verifica-se que:

$$\frac{\partial^2 U_i^n}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial U_i^n} \frac{\partial U_i^n}{\partial t} - (v_j^n - w_j^n) \frac{\partial U_i^n}{\partial t} - \frac{\partial p^n}{\partial t} \delta_{ij} \right) + \frac{\partial X_i^n}{\partial t} \quad (3.26)$$

Substituindo a expressão (3.23) na Equação (3.26) e adotando uma linearização semelhante a (3.5) para as derivadas temporais de pressão e força de volume, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 U_i^n}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial U_i^n} - (v_j^n - w_j^n) \right) \left( \frac{\partial \tau_{ik}^n}{\partial x_k} - \frac{\partial f_{ik}^n}{\partial x_k} - \frac{\partial p^n}{\partial x_k} \delta_{ik} + X_i^n \right) - \frac{(\Delta p)^{n+1}}{\Delta t} \delta_{ij} \right] + \frac{(\Delta X_i)^{n+1}}{\Delta t} \quad (3.27)$$

Analogamente, a partir de (3.27) obtém-se a derivada de segunda ordem em relação ao tempo para o incremento  $\Delta U_i$  como sendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta U_i^{n+1}}{\partial t^2} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\partial \Delta \tau_{ij}^{n+1}}{\partial \Delta U_i^{n+1}} - (v_j^n - w_j^n) \right) \left( \frac{\partial \Delta \tau_{ik}^{n+1}}{\partial x_k} - \frac{\partial \Delta f_{ik}^{n+1}}{\partial x_k} - \frac{\partial \Delta p^{n+1}}{\partial x_k} \delta_{ik} + \Delta X_i^{n+1} \right) - \right. \\ & \left. \frac{\Delta (\Delta p)^{n+1}}{\Delta t} \delta_{ij} \right] + \frac{\Delta (\Delta X_i)^{n+1}}{\Delta t} \end{aligned} \quad (3.28)$$

A expressão que representa o esquema de avanço no tempo para as equações de momentum é obtida, finalmente, introduzindo as expressões (3.23), (3.24), (3.27) e (3.28) nos termos correspondentes da expansão (3.22), tomando-se  $\theta = U_i$ . Neste processo, considera-se que  $\partial \tau_{ij}^n / \partial U_i^n \ll (v_j^n - w_j^n)$  e  $\partial \Delta \tau_{ij}^{n+1} / \partial \Delta U_i^{n+1} \ll (v_j^n - w_j^n)$ . Além disso, termos com derivadas de ordem superior e incrementos de forças de volume  $\Delta X_i$  são desprezados. Com isso, obtém-se que:

$$\Delta U_i^{n+1} = \Delta t \left\{ X_i^n - \frac{\partial f_{ij}^n}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} - \frac{\partial p^n}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v_j^n - w_j^n) \left( \frac{\partial f_{ik}^n}{\partial x_k} + \frac{\partial p^n}{\partial x_k} \delta_{ik} - X_i^n \right) \right] \right\} + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{\partial \Delta \tau_{ij}^{n+1}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Delta f_{ij}^{n+1}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Delta p^{n+1}}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v_j^n - w_j^n) \left( \frac{\partial \Delta f_{ik}^{n+1}}{\partial x_k} + \frac{\partial \Delta p^{n+1}}{\partial x_k} \delta_{ik} \right) \right] \right\} \quad (3.29)$$

Neste momento, é realizada uma operação de separação sobre o vetor de componentes de momentum linear, produzindo uma divisão da Equação (3.29) em duas parcelas. Este procedimento (“*operator-splitting scheme*”) é usualmente empregado em esquemas semi-implícitos (Rossa, 2000; Braun e Awruch, 2004), possibilitando que as equações de Navier-Stokes possam ser resolvidas de forma explícito-iterativa e a equação da continuidade através de uma equação de Poisson, o que possibilita uma diminuição significativa das restrições de estabilidade no que se refere ao incremento de tempo adotado. No presente trabalho, este mesmo procedimento é realizado com exceção feita à equação de massa, que por sua vez recebe um tratamento diferenciado, como será apresentado na próxima seção, resultando em uma equação explícita para a obtenção do campo de pressões. Mais informações sobre o processo de separação podem ser encontradas em Tabarrok e Su (1994).

A operação de separação de  $\Delta U_i$  é expressa por:

$$\Delta U_i^{n+1} = (\Delta U_i^{n+1})^* + (\Delta U_i^{n+1})^{**} \quad (3.30)$$

onde  $(\Delta U_i^{n+1})^{**}$  reúne os termos incrementais de pressão da Equação (3.29) e  $(\Delta U_i^{n+1})^*$  reúne os termos restantes, como se pode verificar abaixo:

$$\begin{aligned} (\Delta U_i^{n+1})^* \Big|_{l+1} = & \Delta t \left\{ X_i^n - \frac{\partial f_{ij}^n}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} - \frac{\partial p^n}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v_j^n - w_j^n) \left( \frac{\partial f_{ik}^n}{\partial x_k} + \frac{\partial p^n}{\partial x_k} \delta_{ik} - X_i^n \right) \right] \right\} + \\ & \frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{\partial \Delta \tau_{ij}^{n+1}}{\partial x_j} \Big|_l - \frac{\partial \Delta f_{ij}^{n+1}}{\partial x_j} \Big|_l + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v_j^n - w_j^n) \left( \frac{\partial \Delta f_{ik}^{n+1}}{\partial x_k} \right) \right] \Big|_l \right\} \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$(\Delta U_i^{n+1})^{**} = \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (v_j^n - w_j^n) \frac{\partial \Delta p^{n+1}}{\partial x_k} \delta_{ik} \right) - \frac{\partial \Delta p^{n+1}}{\partial x_j} \delta_{ij} \right] \quad (3.32)$$

onde os símbolos  $\Big|_{l+1}$  e  $\Big|_l$  representam as iterações atual e anterior do processo iterativo para as parcelas correspondentes.

Portanto, no processo de solução das equações de Navier-Stokes tem-se primeiramente um procedimento explícito-iterativo de solução e, posteriormente, uma adição de termos correspondentes a incrementos de pressão obtidos no mesmo passo de tempo  $n+1$ , os quais são determinados de acordo com o esquema demonstrado a seguir.

### 3.3.2 Equação de conservação de massa (Eq. da Continuidade):

O esquema de avanço no tempo é determinado a partir de uma expansão em série de Taylor como em (3.22), considerando-se  $\theta = p$ . A primeira derivada de  $p$  em relação ao tempo é obtida diretamente tomando a equação da continuidade, obtida a partir da hipótese de pseudo-compressibilidade – Equação (2.18) – (lembrando que na forma conservativa considera-se que  $U_i = \rho v_i$ ), e isolando o termo de pressão, como mostrado abaixo:

$$\frac{\partial p^n}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial U_i^n}{\partial x_i} \quad (3.33)$$

A derivada do incremento de pressão  $\Delta p$  é determinada analogamente:

$$\frac{\partial \Delta p^{n+1}}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial \Delta U_i^{n+1}}{\partial x_i} \quad (3.34)$$

Derivando a expressão (3.33) em relação ao tempo, obtém-se que:

$$\frac{\partial^2 p^n}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial U_i^n}{\partial t} \quad (3.35)$$

Substituindo a expressão (3.23) em (3.35), desprezando o termo de forças de volume e termos com derivadas de ordem superior, chega-se a:

$$\frac{\partial^2 p^n}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i^2} \quad (3.36)$$

Analogamente, obtém-se a derivada segunda em relação ao tempo para o incremento de pressão  $\Delta p$  como sendo:

$$\frac{\partial^2 \Delta p^{n+1}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Delta p^{n+1}}{\partial x_i^2} \quad (3.37)$$

Introduzindo as expressões (3.33), (3.34), (3.36) e (3.37) na expansão (3.22), considerando-se  $\theta = p$ , chega-se à seguinte equação:

$$\frac{1}{c^2} \Delta p^{n+1} = \Delta t \left[ \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left( p^n + \frac{1}{2} \Delta p^{n+1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( U_i^n + \frac{1}{2} \Delta U_i^{n+1} \right) \right] \quad (3.38)$$

Para a parcela correspondente ao incremento de momentum linear  $\Delta U_i$ , considera-se a decomposição feita em (3.30) e toma-se apenas o termo  $\left( \Delta U_i^{n+1} \right)^* \Big|_{I+1}$ , correspondente ao vetor contendo as componentes de momentum linear que convergiram no processo iterativo de (3.31). O termo restante da decomposição é desconsiderado, uma vez que resulta em derivadas com valores desprezíveis. Logo, a expressão (3.38) é re-escrita na seguinte forma:

$$\frac{1}{c^2} \Delta p^{n+1} = \Delta t \left\{ \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[ p^n + \frac{1}{2} \Delta p^{n+1} \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ U_i^n + \frac{1}{2} \left( \Delta U_i^{n+1} \right)^* \Big|_{I+1} \right] \right\} \quad (3.39)$$

A Equação (3.39), na forma apresentada acima, acaba resultando em um esquema implícito similar ao utilizado por Rossa (2000) e Braun e Awruch (2004), propiciando o uso de incrementos de tempo mais altos no processo de avanço no tempo. No entanto, pelas razões apontadas anteriormente, será adotada no presente trabalho uma equação explícita para a determinação da pressão, sendo que para isso desconsidera-se o termo de incremento de pressão do lado direito da igualdade. Portanto, o esquema de avanço no tempo para a equação da continuidade fica expresso na seguinte forma:

$$\frac{1}{c^2} \Delta p^{n+1} = \Delta t \left\{ \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ U_i^n + \frac{1}{2} \left( \Delta U_i^{n+1} \right)^* \Big|_{I+1} \right] \right\} \quad (3.40)$$

### 3.4 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL: O PRINCÍPIO DOS RESÍDUOS PONDERADOS DE GALERKIN APLICADO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

No Método dos Elementos Finitos o domínio contínuo de análise é dividido em subdomínios, os chamados elementos finitos, onde as variáveis do problema, bem como a sua geometria, são aproximadas por meio de funções de interpolação constituídas de polinômios. Estas funções têm o papel de mapear as variáveis e a geometria no interior de cada elemento a

partir dos seus valores nos nós, que localizam-se geralmente nos vértices dos mesmos (elementos “serendipity”). Maiores informações sobre o método podem ser encontradas em <sup>b</sup>Zienckiewicz et al. (2005).

No presente trabalho emprega-se o elemento hexaédrico isoparamétrico trilinear (oito nós) para a discretização do domínio de análise e para a aproximação das variáveis do escoamento. Para este elemento são definidas as seguintes funções de interpolação:

$$\Phi_N = \frac{1}{8}(1 + \xi_{1N}\xi_1)(1 + \xi_{2N}\xi_2)(1 + \xi_{3N}\xi_3) \quad (N = 1, \dots, 8) \quad (3.41)$$

onde

<sub>1</sub> param14.6(e)-6.2(ttização

$$x_i = \sum_{N=1}^8 \Phi_N(\xi_1, \xi_2, \xi_3) x_{iN} \quad (i=1,2,3) \quad (3.43)$$

onde  $x_{iN}$  é a coordenada global do nó N segundo a direção do eixo  $i$ . Esta expressão é válida para elementos isoparamétricos, onde as mesmas funções de interpolação são usadas tanto para a geometria quanto para as variáveis do problema.

Para uma variável genérica  $\theta(\vec{x}, t)$ , sendo  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , tem-se a seguinte aproximação em elemento finitos:

$$\theta(\vec{x}, t) = \sum_{N=1}^8 \Phi_N(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \theta_N(\vec{x}, t) \quad (i=1,2,3) \quad (3.44)$$

onde  $\theta_N(\vec{x}, t)$  são os valores nodais da variável.

Uma vez aplicado o MEF é necessário o uso de algum critério matemático para assegurar que as aproximações realizadas no problema estejam o mais próximo possível de seus valores reais. No Princípio dos Resíduos Ponderados, o resíduo, diferença entre valores aproximados e reais, é minimizado ortogonalizando-o em relação a uma função de peso escolhida apropriadamente. Como exemplo ilustrativo, considera-se a seguinte equação diferencial:

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \text{em } \Omega \quad (3.45)$$

onde  $\mathcal{L}(\bullet)$  é um operador diferencial qualquer,  $\mathbf{u}$  é o vetor representado a solução exata do sistema,  $\mathbf{p}$  é o vetor de constantes e  $\Omega$  é o domínio de análise. Ao empregar-se uma aproximação para o vetor  $\mathbf{u}$ , que por sua vez deve também satisfazer as condições de contorno do problema, a Equação (3.45) torna-se:

$$\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}) + \mathbf{p} = \mathbf{R} \quad (3.46)$$

onde  $\mathbf{R}$  é o vetor resíduo que surge ao utilizar-se o valor aproximado  $\tilde{\mathbf{u}}$  ao invés do valor exato  $\mathbf{u}$ . A aproximação  $\tilde{\mathbf{u}}$  é obtida pelo MEF a partir da seguinte expressão:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n N_i \tilde{\mathbf{u}}_i \quad (3.47)$$

onde  $N_i$  são as funções de interpolação nodais,  $\tilde{\mathbf{u}}_i$  são os valores nodais da aproximação  $\tilde{\mathbf{u}}$  e  $i$  é um identificador de números de nó, que vai de 1 até  $n$ , sendo  $n$  o número de nós do elemento finito.

Segundo o Princípio dos Resíduos Ponderados, uma ortogonalização do resíduo deve ser efetuada em relação a uma função de peso, aqui denominada  $\mathbf{W}$ , em todo o domínio de análise  $\Omega$ . Assim sendo, tem-se:

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{W}^T [\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}) + \mathbf{p}] d\Omega = \int_{\Omega_e} \mathbf{W}^T \mathbf{R} d\Omega = 0 \quad (3.48)$$

Dentre os diferentes modelos de resíduos ponderados destaca-se o Método de Galerkin, onde a variação das variáveis do problema é utilizada como função de peso. Emprega-se o termo Bubnov-Galerkin quando a função de peso é simplesmente a variação da variável independente aproximada da equação analisada (<sup>b</sup>Zienkiewicz et al., 2005), ou seja,  $\mathbf{W} = \delta\tilde{\mathbf{u}}(N_i)$ . Por outro lado, a expressão Petrov-Galerkin é empregada quando a função de peso é formada por um termo padrão do método de Galerkin ( $\delta\tilde{\mathbf{u}}(N_i)$ ) e um termo adicional, geralmente constituído de derivadas espaciais da função de peso (ver Belytschko et al., 2000), ou seja,  $\mathbf{w} = \delta\tilde{\mathbf{u}}(N_i) + \gamma$ . No presente trabalho é empregado o método de Bubnov-Galerkin, através do qual obtém-se a seguinte expressão para a Equação (3.48):

$$[\delta\tilde{\mathbf{u}}_i]^T \int_{\Omega} [N_i]^T [\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}) + \mathbf{p}] d\Omega = [\delta\tilde{\mathbf{u}}_i]^T \int_{\Omega} [N_i]^T \mathbf{R} d\Omega = 0 \quad (3.49)$$

onde o termo  $[\delta\tilde{\mathbf{u}}_i]^T$  pode ser eliminado por se tratar de um parâmetro arbitrário.

No que se refere às aproximações das variáveis do problema, exige-se que elas sejam contínuas até a ordem de derivação mais alta existente na equação estudada. Isto, evidentemente, restringe grandemente o uso de funções de interpolação com polinômios de ordem mais baixa. No entanto, pode-se diminuir as restrições de continuidade com o uso de integrações por partes das integrais que contenham derivadas de mais alta ordem. Com isso, as funções de aproximação devem então ser  $(n-1)$ -contínuas, onde  $n$  é a ordem de derivação mais alta existente no problema. Como resultado deste processo, obtém-se a chamada forma fraca (“*weak form*”) da equação analisada.

Na seqüência são apresentadas as expressões matriciais em nível de elemento obtidas através da aplicação do Método de Bubnov-Galerkin, conjuntamente ao MEF, às equações governantes discretizadas temporalmente na seção anterior para cada um dos modelos de avanço no tempo propostos.

### 3.4.1 O modelo explícito de dois passos de Taylor-Galerkin:

Para o modelo explícito de dois passos de Taylor-Galerkin, são identificadas as seguintes variáveis primárias: as componentes de velocidade  $v_i$  e a pressão  $p$ . As suas respectivas aproximações em elementos finitos são dadas, segundo a Equação (3.44), pelas seguintes expressões:

$$v_i = [\Phi] \mathbf{v}_i \quad (3.50)$$

$$p = [\Phi] \mathbf{p} \quad (3.51)$$

onde  $\mathbf{v}_i$  e  $\mathbf{p}$  são vetores que contém os valores nodais das componentes de velocidade e de pressão, respectivamente, e  $[\Phi]$  é uma matriz linha que contém as oito funções de interpolação do elemento empregado (hexaedro isoparamétrico trilinear), disposta na seguinte forma:

$$[\Phi] = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3 \quad \Phi_4 \quad \Phi_5 \quad \Phi_6 \quad \Phi_7 \quad \Phi_8] \quad (3.52)$$

Substituindo as aproximações (3.50) e (3.51) e aplicando o Método de Bubnov-Galerkin às equações (3.10) e (3.18), obtém-se, respectivamente, as equações de conservação para a obtenção das componentes de velocidade  $v_i$  e para a obtenção da pressão  $p$  em  $n + 1/2$ :

$$[\mathbf{M}] \mathbf{v}_i^{n+1/2} = [\mathbf{M}] \mathbf{v}_i^n + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{1}{\rho} \{ \hat{X}_i \} - ([\mathbf{AD}] + [\mathbf{BD}]) \mathbf{v}_i + \frac{1}{\rho} [\mathbf{G}]_j \delta_{ij} \mathbf{p} - [\mathbf{D}]_{ij}^{2p} \mathbf{v}_j + \{ \tilde{t}_i \} + \{ \tilde{b}_{dv} \}_i \right\}^n \quad (3.53)$$

$$[\mathbf{M}] \mathbf{p}^{n+1/2} = [\mathbf{M}] \mathbf{p}^n - \frac{\Delta t}{2} \left\{ ([\mathbf{AD}] + [\mathbf{BD}]) \mathbf{p} + \rho c^2 [\mathbf{G}]_j^T \mathbf{v}_j - \{ \tilde{b}_{dp} \} \right\}^n \quad (3.54)$$

A correção para a velocidade (Eq. 3.11), fica na seguinte forma:

$$\mathbf{v}_i^{n+1/2} = \mathbf{v}_i^{n+1/2} - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta t^2}{8} \int_{\Omega_e} [\Phi]^T \frac{\partial [\Phi]}{\partial x_j} \delta_{ij} d\Omega (\mathbf{p}^{n+1/2} - \mathbf{p}^n) \quad (3.55)$$

Realizando o mesmo processo para as equações (3.6) e (3.15), obtém-se, respectivamente, as equações de conservação para a obtenção dos incrementos das componentes de velocidade  $\Delta v_i$  e de pressão  $\Delta p$  em  $n + 1/2$ :

$$[\mathbf{M}] \mathbf{v}_i^{n+1/2} = [\mathbf{M}] \mathbf{v}_i^n + \Delta t \left\{ \frac{1}{\rho} \{X_i\} - [\mathbf{AD}] \mathbf{v}_i + \frac{1}{\rho} [\mathbf{G}]_j \delta_{ij} \mathbf{p} - [\mathbf{D}]_{ij}^{2p} \mathbf{v}_j + \{\tilde{t}_i\} \right\}^{n+1/2} \quad (3.56)$$

$$[\mathbf{M}] \mathbf{p}^{n+1/2} = [\mathbf{M}] \mathbf{p}^n - \Delta t \left\{ [\mathbf{AD}] \mathbf{p} + \rho c^2 [\mathbf{G}]_j^T \mathbf{v}_j \right\}^{n+1/2} \quad (3.57)$$

As matrizes e vetores apresentados acima são definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}] &= \int_{\Omega_e} [\Phi]^T [\Phi] d\Omega & [\mathbf{AD}] &= \int_{\Omega_e} ([\Phi](\mathbf{v}_j^n - \mathbf{w}_j^n)) [\Phi]^T \frac{\partial [\Phi]}{\partial x_j} d\Omega \\ [\mathbf{G}]_j &= \int_{\Omega_e} \frac{\partial [\Phi]}{\partial x_j} [\Phi] d\Omega & [\mathbf{G}]_j^T &= \int_{\Omega_e} [\Phi]^T \frac{\partial [\Phi]}{\partial x_j} d\Omega \\ [\mathbf{BD}] &= \frac{\Delta t}{4} \int_{\Omega_e} ([\Phi](\mathbf{v}_j^n - \mathbf{w}_j^n)) ([\Phi](\mathbf{v}_k^n - \mathbf{w}_k^n)) \frac{\partial [\Phi]^T}{\partial x_j} \frac{\partial [\Phi]}{\partial x_k} d\Omega \\ \{\tilde{b}_{dv_i}\} &= \frac{\Delta t}{4} \int_{\Gamma_E} [\Phi^*]^T \left[ ([\Phi](\mathbf{v}_j^n - \mathbf{w}_j^n)) ([\Phi](\mathbf{v}_k^n - \mathbf{w}_k^n)) \frac{\partial [\Phi]}{\partial x_k} \mathbf{v}_i^n \right] n_j d\Gamma \\ \{\tilde{b}_{dp}\} &= \frac{\Delta t}{4} \int_{\Gamma_E} [\Phi^*]^T \left[ ([\Phi](\mathbf{v}_j^n - \mathbf{w}_j^n)) ([\Phi](\mathbf{v}_k^n - \mathbf{w}_k^n)) \frac{\partial [\Phi]}{\partial x_k} \mathbf{p}^n \right] n_j d\Gamma \\ \{X_i\} &= \int_{\Omega_e} [\Phi]^T ([\Phi] \mathbf{X}_i^n) d\Omega & \{\hat{X}_i\} &= \{X_i\} - \frac{\Delta t}{4} \int_{\Omega_e} ([\Phi](\mathbf{v}_j^n - \mathbf{w}_j^n)) [\Phi]^T \frac{\partial [\Phi]}{\partial x_j} \mathbf{X}_i^n d\Omega \\ \{\tilde{t}_i\} &= \int_{\Gamma_E} [\Phi^*]^T \left[ (\mathbf{v} + \mathbf{v}_t) \left( \frac{\partial [\Phi]}{\partial x_j} \mathbf{v}_i^n + \frac{\partial [\Phi]}{\partial x_i} \mathbf{v}_j^n \right) + \frac{\lambda}{\rho} \left( \frac{\partial [\Phi]}{\partial x_k} \mathbf{v}_k^n \right) \delta_{ij} - \frac{1}{\rho} [\Phi] \mathbf{p}^n \right] n_j d\Gamma \\ [\mathbf{D}]_{ij}^{2p} &= \begin{cases} \text{se } i = j \text{ (k = valores restantes):} \\ \int_{\Omega_e} \left[ 2(\mathbf{v} + \mathbf{v}_t) + \frac{\lambda}{\rho} \right] \frac{\partial [\Phi]^T}{\partial x_i} \frac{\partial [\Phi]}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega_e} (\mathbf{v} + \mathbf{v}_t) \frac{\partial [\Phi]^T}{\partial x_k} \frac{\partial [\Phi]}{\partial x_k} d\Omega \\ \text{se } i \neq j: \\ \int_{\Omega_e} (\mathbf{v} + \mathbf{v}_t) \frac{\partial [\Phi]^T}{\partial x_i} \frac{\partial [\Phi]}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega_e} \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial [\Phi]^T}{\partial x_j} \frac{\partial [\Phi]}{\partial x_i} d\Omega \end{cases} \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde  $\mathbf{X}_i$  é o vetor contendo os valores nodais das componentes de forças de volume segundo a direção do eixo  $x_i$ ,  $\mathbf{w}_j$  é o vetor contendo os valores nodais das componentes de velocidade de malha na direção do eixo  $x_j$ ,  $n_j$  são os co-senos diretores da normal ao contorno  $\Gamma_E$  de acordo

com a direção de  $x_j$  e  $[\Phi^*]$  é uma matriz contendo as funções de interpolação avaliadas sobre o contorno  $\Gamma_E$ .

Como se pode observar, foram realizadas integrações por partes nos termos com derivadas de segunda ordem (utilizando o teorema de Gauss-Green) para reduzir as exigências de continuidade. O termo de pressão na equação de conservação de momentum também foi integrado por partes com o intuito de produzir um termo de contorno com significado físico.

Todas as matrizes definidas em (3.58) são calculadas através de integração numérica, utilizando o método de Gauss-Legendre. No presente trabalho emprega-se a técnica da integração reduzida, onde as matrizes são integradas analiticamente. Para maiores informações sobre o processo de integração numérica pode ser consultado o trabalho de Burbridge (1999).

Para resolver o problema em elementos finitos deve-se, finalmente, proceder com a montagem das equações matriciais acima, que estão em nível de elemento, formando um sistema global onde são aplicadas as condições iniciais e de contorno. Com o objetivo de obter-se um sistema de equações explícito desacoplado, emprega-se a matriz de massa discreta (ou diagonal)  $[M_D]$  no lugar de massa consistente  $[M]$ . A matriz  $[M_D]$  é determinada da seguinte maneira:

$$[M_D] = [m_{ij}] = \frac{\Omega_E}{8} \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, 8) \quad (3.59)$$

onde  $\Omega_E$  é o volume do elemento E.

Kawahara e Hirano (1983) propõem ainda o uso de uma matriz de massa modificada com o objetivo de controlar o amortecimento e a estabilidade numérica do método. Esta massa é empregada nos termos correspondentes à direita da igualdade das equações de continuidade (3.54 e 3.57), sendo dada de acordo com a expressão abaixo:

$$[\tilde{M}] = e[M_D] + (1-e)[M] \quad (3.60)$$

onde  $e$  é o parâmetro de diagonalização seletiva, o qual tem a finalidade de controlar o amortecimento numérico e a estabilidade do processo, assumindo valores dentro do intervalo  $[0,1]$ . O uso deste parâmetro e as suas implicações sobre os resultados serão estudados no Capítulo 8.

### 3.4.2 O modelo explícito-iterativo de Taylor-Galerkin:

Para o modelo explícito-iterativo de Taylor-Galerkin identificam-se as seguintes variáveis primárias: as componentes de momentum linear  $U_i$  e a pressão  $p$ . As suas respectivas aproximações em elementos finitos são dadas, segundo a Equação (3.44), pelas seguintes expressões:

$$U_i = [\Phi] \mathbf{U}_i \quad (3.61)$$

$$p = [\Phi] \mathbf{p} \quad (3.62)$$

onde  $\mathbf{U}_i$  e  $\mathbf{p}$  são vetores que contêm os valores nodais das componentes de momentum linear segundo a direção dos eixos globais  $x_i$ , e de pressão, respectivamente.

Aplicando-se o Método de Bubnov-Galerkin juntamente com as aproximações (3.61) e (3.62) às equações (3.31), (3.32) e (3.40), obtém-se o conjunto de equações de conservação discretizadas para a obtenção das componentes de momentum linear  $U_i$  e da pressão  $p$ , respectivamente:

$$[\mathbf{M}](\Delta \mathbf{U}_i^{n+1})^* \Big|_{I+1} = \Delta t \left( \{s_i\}^n + \frac{\Delta t}{2} \{g_U\}_i^n + \{b_U\}_i^n - [\mathbf{B}^C]_j (\mathbf{f}_{ij}^n + \mathbf{p}^n \delta_{ij}) - [\mathbf{D}]_{ij}^{\text{ite}} \mathbf{v}_j^n \right) - \frac{\Delta t}{2} \left( [\mathbf{B}^C]_j \Delta \mathbf{f}_{ij}^{n+1} \Big|_I + [\mathbf{D}]_{ij}^{\text{ite}} \Delta \mathbf{v}_j^{n+1} \Big|_I \right) \quad (3.63)$$

$$[\mathbf{M}](\Delta \mathbf{U}_i^{n+1})^{**} = -\frac{\Delta t}{2} \left( [\mathbf{B}^C]_j \Delta \mathbf{p}^{n+1} \delta_{ij} \right) \quad (3.64)$$

$$[\mathbf{M}] \Delta \mathbf{p}^{n+1} = -c^2 \Delta t \left\{ \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{K}] \mathbf{p}^n + [\mathbf{B}]_i \left[ \mathbf{U}_i^n + \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{U}_i^{n+1})^* \Big|_{I+1} \right] \right\} \quad (3.65)$$

O sistema de equações matriciais mostrado acima é montado globalmente segundo a forma usual do MEF, onde são aplicadas as condições iniciais e de contorno do problema. A matriz de massa discreta (ou diagonal)  $[\mathbf{M}_D]$  – Equação (3.59) – é usada no lugar da massa consistente  $[\mathbf{M}]$  para desacoplar o sistema de equações e obter a solução explicitamente. As matrizes são calculadas analiticamente através de integração reduzida, a exemplo das matrizes em (3.58). Informações sobre o processo de integração analítica são encontradas em Burbridge (1999).

As matrizes e vetores apresentados nas equações (3.63), (3.64) e (3.65) são definidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{M}] &= \int_{\Omega_E} [\Phi]^T [\Phi] d\Omega & [\mathbf{C}]_i &= \int_{\Omega_E} ([\Phi](\mathbf{v}_k^n - \mathbf{w}_k^n)) \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial x_k} \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_i} d\Omega \\
[\mathbf{B}]_i &= \int_{\Omega_E} [\Phi]^T \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_i} d\Omega & [\mathbf{B}^c]_i &= [\mathbf{B}]_i + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{C}]_i & [\mathbf{K}] &= \int_{\Omega_E} \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial x_i} \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_i} d\Omega \\
\{g_U\}_i^n &= \int_{\Gamma_E} [\Phi^*]^T ([\Phi](\mathbf{v}_k^n - \mathbf{w}_k^n)) n_k \left( \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_j} \mathbf{f}_{ij}^n \right) d\Gamma \\
\{s_i\}^n &= \int_{\Gamma_E} [\Phi^*]^T \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_j} \mathbf{v}_i^n + \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_i} \mathbf{v}_j^n \right) + \lambda \left( \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_k} \mathbf{v}_k^n \right) \delta_{ij} \right] n_j d\Gamma \\
\{b_U\}_i^n &= \int_{\Omega_E} [\Phi]^T ([\Phi] \mathbf{X}_i^n) d\Omega + \int_{\Omega_E} ([\Phi](\mathbf{v}_k^n - \mathbf{w}_k^n)) [\Phi]^T \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_k} \mathbf{X}_i^n d\Omega \\
[\mathbf{D}]_{ij}^{\text{ite}} &= \begin{cases} \text{se } i = j \text{ ( } k = \text{ valores restantes):} \\ \int_{\Omega_E} [2(\mu + \mu_t) + \lambda] \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial x_i} \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega_E} (\mu + \mu_t) \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial x_k} \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_k} d\Omega \\ \text{se } i \neq j : \\ \int_{\Omega_E} (\mu + \mu_t) \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial x_i} \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega_E} \lambda \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial x_j} \frac{\partial[\Phi]}{\partial x_i} d\Omega \end{cases} \quad (3.66)
\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{X}_i$  é o vetor contendo os valores nodais das componentes de forças de volume segundo a direção dos eixos globais  $x_i$ ,  $\mathbf{w}_j$  é o vetor contendo os valores nodais das componentes de velocidade de malha na direção dos eixos globais  $x_j$ ,  $n_j$  são os co-senos diretores da normal ao contorno  $\Gamma_E$ , de acordo com a direção de  $x_j$ .  $[\Phi^*]$  é a matriz contendo as funções de interpolação avaliadas sobre o contorno  $\Gamma_E$ . Integrações por partes foram efetuadas nos termos com derivadas de segunda ordem e alguns termos de contorno de pressão e de forças de volume foram desprezados (ver seções 3.3.1 e 3.3.2).

## 3.5 OS ALGORITMOS DE SOLUÇÃO PARA A ANÁLISE DO ESCOAMENTO

### 3.5.1 Esquema explícito de dois passos de Taylor-Galerkin

Os principais passos para a análise do escoamento empregando o esquema explícito de dois passos são os seguintes:

- Obter as condições iniciais para as variáveis do problema:  $v_i$  e  $p$ .
- Armazenar as matrizes de elementos em (3.58) constantes no tempo.

**Início do laço no tempo:  $t = t + \Delta t$**

A) Primeiro passo:

A.1.) Calcular as matrizes (3.58) que variam no tempo.

*Se o escoamento for turbulento:*

A.1.1) Calcular a viscosidade cinemática turbulenta  $\nu_t$ .

A.2) Calcular  $\mathbf{v}_i^{n+1/2}$  através da Equação (3.53).

A.3) Calcular  $\mathbf{p}^{n+1/2}$  através da Equação (3.54).

A.4) Corrigir o campo de velocidades  $\mathbf{v}_i^{n+1/2}$  através da Equação (3.55).

A.5) Aplicar as condições de contorno em  $\mathbf{v}_i^{n+1/2}$  e  $\mathbf{p}^{n+1/2}$ .

B) Segundo passo:

B.1) Atualizar as matrizes (3.58) que variam no tempo.

B.2) Calcular  $\Delta \mathbf{v}_i^{n+1/2}$  através da Equação (3.56).

B.3) Calcular  $\Delta \mathbf{p}^{n+1/2}$  através da Equação (3.57).

B.4) Atualizar os campos de velocidade e pressão: 
$$\begin{cases} \mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n + \Delta \mathbf{v}_i^{n+1/2} \\ \mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p}^n + \Delta \mathbf{p}^{n+1/2} \end{cases}.$$

B.5) Aplicar as condições de contorno em  $\mathbf{v}_i^{n+1}$  e  $\mathbf{p}^{n+1}$ .

B.6) Verificar a convergência do processo: Se  $\begin{cases} \Psi \leq \text{tolerância: vai p/ D)} \\ \Psi > \text{tolerância e } t < t_{\text{final}}: \text{ vai p/ C) } \end{cases}$ , onde  $\Psi$  representa um critério de convergência qualquer e  $t_{\text{final}}$  é o tempo limite de análise.

**C) Fim do laço no tempo – retornar p/ A).**

**D) Fim da análise:  $t = t_{\text{final}}$  ou  $t = t_{\text{converge}}$ , sendo  $t_{\text{converge}}$  o tempo correspondente à obtenção da convergência do processo.**

### 3.5.2 Esquema explícito-iterativo de Taylor-Galerkin

Os principais passos para a análise do escoamento empregando o esquema explícito-iterativo são os seguintes:

- Obter as condições iniciais para as variáveis do problema:  $U_i$  e  $p$ .
- Armazenar as matrizes de elementos (3.66) constantes no tempo.

**Início do laço no tempo:  $t = t + \Delta t$**

1) Calcular as matrizes (3.66) que variam no tempo.

*Se o escoamento for turbulento:*

- 1.1) Calcular a viscosidade dinâmica turbulenta  $\mu_t$ .
- 2) Calcular os termos não iterativos da Equação (3.63).
  - A) Início do ciclo iterativo:  $iter = iter + 1$ 
    - A.1) Calcular os termos iterativos da Equação (3.63).
    - A.2) Calcular  $(\Delta \mathbf{U}_i^{n+1})^* \Big|_{I+1}$  através da Equação (3.63).
    - A.3) Aplicar as condições de contorno em  $(\Delta \mathbf{U}_i^{n+1})^* \Big|_{I+1}$ .
    - A.4) Verificar a convergência do processo iterativo: Se  $\begin{cases} \Psi \leq \text{tolerância: vai p/B)} \\ \Psi > \text{tolerância: vai p/A) \end{cases}$ , onde  $\Psi$  representa um critério de convergência qualquer para  $(\Delta \mathbf{U}_i^{n+1})^* \Big|_{I+1}$ .
  - B) Fim do ciclo iterativo:
    - 3) Calcular  $\Delta \mathbf{p}^{n+1}$  através da Equação (3.65).
    - 4) Aplicar as condições de contorno em  $\Delta \mathbf{p}^{n+1}$ .
    - 5) Calcular  $(\Delta \mathbf{U}_i^{n+1})^{**}$  através da Equação (3.64).
    - 6) Aplicar as condições de contorno em  $(\Delta \mathbf{U}_i^{n+1})^{**}$ .
    - 7) Atualizar as componentes de momentum linear:  $\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + (\Delta \mathbf{U}_i^{n+1})^* \Big|_{I+1} + (\Delta \mathbf{U}_i^{n+1})^{**}$ .
    - 8) Verificar a convergência do processo: Se  $\begin{cases} \Psi \leq \text{tolerância: vai p/ F)} \\ \Psi > \text{tolerância e } t < t_{\text{final}}: \text{ vai p/ E) \end{cases}$ , onde  $\Psi$  representa um critério de convergência qualquer e  $t_{\text{final}}$  é o tempo limite de análise.
- E) **Fim do laço no tempo – retornar p/ 1).**
- F) **Fim da análise:  $t = t_{\text{final}}$  ou  $t = t_{\text{converge}}$ , sendo  $t_{\text{converge}}$  o tempo correspondente a obtenção da convergência do processo.**

## 3.6 ASPECTOS COMPUTACIONAIS RELATIVOS AO PROCESSO DE ANÁLISE

### 3.6.1 Condição de estabilidade

Em ambos os modelos numéricos acima apresentados o sistema de equações resultante possui uma natureza explícita, uma vez que o mesmo está disposto em uma forma não

acoplada. Os esquemas explícitos são condicionalmente estáveis, sendo o incremento de tempo  $\Delta t$  adotado para o avanço no tempo limitado por considerações físicas relacionadas à propagação do som no meio em estudo. A condição de Courant é geralmente empregada para a determinação do valor crítico para o incremento de tempo  $\Delta t_{\text{crit}}$ , sendo aqui expressa na seguinte forma:

$$(\Delta t)_E = \varphi_s (\Delta t)_E^{\text{crit}} = \varphi_s \frac{(\Delta x)_E}{c + V_E} \quad (3.67)$$

onde  $(\Delta x)_E$  é a dimensão característica do elemento E (geralmente a sua menor dimensão),  $V_E$  o módulo da velocidade característica do escoamento no elemento E,  $c$  é a velocidade de propagação do som no meio e  $\varphi_s$  é um coeficiente de segurança tal que  $\varphi_s \leq 1$ .

Através da expressão (3.67) são definidos os incrementos de tempo locais para cada um dos elementos da malha de elementos finitos. Neste sentido, pode-se empregar a técnica de subciclos (Teixeira e Awruch, 2001), onde os elementos são divididos em conjuntos com intervalos de tempo semelhantes. No presente trabalho, é tomado simplesmente o menor valor obtido para  $(\Delta t)_E^{\text{crit}}$  dentre todos os elementos existentes, multiplicando-o por um coeficiente de segurança  $\varphi_s$  adequado ao tipo de análise (neste trabalho emprega-se  $\varphi_s = 0.85$ ).

### 3.6.2 Condição de convergência para problemas permanentes

Em exemplos onde há um estado permanente para o escoamento utiliza-se geralmente alguma forma de medida sobre o resíduo de uma ou mais variáveis primárias para estabelecer-se numericamente a obtenção deste estado. Esta medida é feita ao longo do processo de análise comparando-a a um valor de tolerância pré-determinado. No presente trabalho, emprega-se a norma euclidiana como medida para a determinação numérica do estado permanente. Em análises isotérmicas considera-se que:

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{NTN} (p_i^{n+1} - p_i^n)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{NTN} (p_i^n)^2}} \leq \text{TOL} \quad (3.68)$$

onde os superíndices  $n$  e  $n + 1$  significam os pontos  $t$  e  $t + \Delta t$  no tempo, o subíndice  $i$  é um indicador de número de nó valendo de 1 até NTN, sendo NTN o número total de nós da malha de elementos finitos, TOL é o valor para a tolerância, tomando-se neste trabalho usualmente o valor  $TOL = 10^{-5}$ , e  $p$  é a pressão no nó.

### 3.6.3 Condição de convergência para o processo iterativo do esquema explícito-iterativo

Como pode-se identificar através do algoritmo apresentado na Seção 3.5.2, o modelo explícito-iterativo apresenta um processo iterativo no seu esquema de solução para a determinação do incremento das componentes de momentum linear  $\Delta U_i$ , onde considera-se a seguinte condição de convergência:

$$\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{NTN} [(\Delta U_i)_j^{I+1} - (\Delta U_i)_j^I]^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{NTN} (U_i^n)_j^2}} \leq tol \quad (3.69)$$

onde os superíndices  $I$  e  $I + 1$  significam as iterações anterior e atual do processo iterativo,  $n$  é um ponto  $t$  no tempo,  $j$  é um subíndice que indica o número de nó valendo de 1 até NTN, sendo NTN o número total de nós da malha de elementos finitos, e  $tol$  é o valor para a tolerância, tomando-se neste trabalho usualmente o valor  $tol = 10^{-3}$ .

## 4 A MECÂNICA DOS SÓLIDOS

### 4.1 AS EQUAÇÕES PARA A ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS

O conjunto de fórmulas utilizadas na análise dinâmica de estruturas em um processo isotérmico consiste nas seguintes equações: a equação de conservação de momentum (Segunda Lei de Newton), a equação de conservação de massa e uma equação constitutiva que descreva o comportamento do material e relacione a medida de deformação com uma medida de tensão energeticamente conjugada.

#### 4.1.1 Equação de conservação de momentum (Eq. de equilíbrio dinâmico)

A equação de equilíbrio dinâmico, que descreve a conservação de quantidade de movimento em todos os pontos de um contínuo, pode ser escrita em um sistema de coordenadas cartesiano da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4.1)$$

onde  $\sigma_{ij}$  são as componentes do tensor de tensões no corpo,  $\rho$  é a massa específica do material,  $b_i$  e  $v_i$  são as componentes do vetor de forças de volume e do vetor de velocidades do corpo, respectivamente, segundo a direção do eixo  $x_i$  e  $D/Dt$  representa a derivada material. Dependendo do tipo de descrição do contínuo, podendo ser esta Euleriana ou Lagrangeana, a Equação (4.1) assume formas diferentes. Em uma descrição Lagrangeana, utilizada tradicionalmente na Mecânica dos Sólidos, a equação de equilíbrio dinâmico vem dada por:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial X_j} + \rho b_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4.2)$$

ou ainda por:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4.3)$$

onde as equações (4.2) e (4.3) referem-se, respectivamente, a uma descrição Lagrangeana total e a uma descrição Lagrangeana atualizada, sendo  $X_j$  e  $x_j$  os eixos coordenados nas configurações indeformada e instantânea do corpo, respectivamente.

Considerando-se a adição de um termo de amortecimento viscoso como uma parcela de força resistiva nas equações (4.2) e (4.3), tem-se que:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial X_j} + \rho b_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \chi v_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4.4)$$

e:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \chi v_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4.5)$$

onde  $\chi$  é o coeficiente de amortecimento.

As equações acima podem ainda ser descritas em termos dos deslocamentos do corpo, ficando então na seguinte forma:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial X_j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i + \chi \dot{u}_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4.6)$$

e:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i + \chi \dot{u}_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4.7)$$

sendo  $\dot{u}_i$  e  $\ddot{u}_i$  as componentes dos vetores de primeira e segunda derivadas do vetor de deslocamentos  $u_i$  com relação ao tempo, respectivamente, segundo a direção dos eixos globais  $x_i$ .

#### 4.1.2 Equação de conservação de massa

A equação de conservação de massa para uma formulação Lagrangeana pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \rho \, d\Omega = \int_{\Omega_0} \rho_0 \, d\Omega_0 = \text{constante} \quad (4.8)$$

onde  $\rho_0$  e  $\rho$  são as massas específicas inicial e atual do corpo e  $\Omega_0$  e  $\Omega$  representam os domínios inicial e atual do corpo. Transformando a integral à esquerda da primeira igualdade para o domínio inicial obtém-se:

$$\int_{\Omega_0} (\rho \det \mathbf{J} - \rho_0) \, d\Omega_0 = 0 \quad (4.9)$$

onde  $\mathbf{J}$  é a matriz jacobiana da transformação dada por:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (4.10)$$

sendo  $\mathbf{x}$  o vetor de coordenadas atuais e  $\mathbf{X}$  o vetor de coordenadas iniciais.

Como  $d\Omega_0$  é arbitrário, obtém-se que:

$$\rho \det \mathbf{J} = \rho_0 \quad \Rightarrow \quad \rho \Omega = \rho_0 \Omega_0 \quad (4.11)$$

A expressão acima representa o princípio de conservação da matéria para descrições Lagrangeanas, tão somente. Como consequência, tem-se que a matriz de massa dos modelos numéricos necessita ser calculada apenas uma única vez ao início da análise. No caso de uma descrição Euleriana, a conservação de massa deve ser garantida através de uma equação diferencial como é feito na Mecânica dos Fluidos.

#### 4.1.3 Equação constitutiva para materiais elásticos em pequenas deformações

Para o presente trabalho são considerados materiais elásticos que obedeçam a Lei de Hooke, dentro do regime de pequenas deformações, cuja equação constitutiva vem expressa pela seguinte relação hipo-elástica:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (i,j,k,l = 1, 2, 3) \quad (4.12)$$

onde  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$  são as componentes dos tensores de tensão de Cauchy e de pequenas deformações, o qual é dado pela seguinte equação:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i,j = 1, 2, 3) \quad (4.13)$$

$C_{ijkl}$  é um tensor de constantes elásticas de quarta ordem, o qual possui 81 elementos na sua forma mais geral. Considerando um material isótropo, como é feito ao longo deste trabalho, o número de constantes para  $C_{ijkl}$  reduz-se a dois, sendo dado de acordo com a seguinte expressão (Malvern, 1969):

$$C_{ijkl} = \mu_e \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\lambda_e \left( \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \quad (i,j,k,l = 1, 2, 3) \quad (4.14)$$

onde  $\mu_e$  é o módulo de incompressibilidade do material e  $\lambda_e$  é o módulo de corte ou de elasticidade transversal, também conhecidos como as constantes de Lamé. Estas grandezas são obtidas a partir de relações empíricas expressas em termos do módulo de elasticidade longitudinal  $E$  e do coeficiente de Poisson  $\nu$  através das seguintes fórmulas:

$$\mu_e = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (4.15)$$

$$\lambda_e = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.16)$$

Substituindo a expressão (4.14) em (4.12) e realizando as operações com o delta de Kroenecker, obtém-se que:

$$\sigma_{ij} = \mu_e \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\lambda_e \varepsilon_{ij} - \frac{2}{3} \lambda_e \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (i,j,k = 1, 2, 3) \quad (4.17)$$

A partir da equação acima é possível também estabelecer a relação entre as componentes desviadora  $s_{ij}$  e hidrostática  $p$  do tensor de tensões, como sendo:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \delta_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij} \quad (4.18)$$

As componentes desviadora  $s_{ij}$  e hidrostática  $p$  podem ser calculadas utilizando as expressões abaixo:

$$\begin{aligned}
s_{ij} &= 2\lambda_e \varepsilon_{ij}^d \\
p &= \mu_e \varepsilon_{kk}
\end{aligned}
\tag{4.19}$$

onde  $\varepsilon_{ij}^d$  são as componentes do tensor de deformações desviadoras, dadas por:

$$\varepsilon_{ij}^d = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (i,j,k = 1,2,3)
\tag{4.20}$$

Finalmente, a relação constitutiva (4.12) pode ser ainda apresentada na sua forma matricial, aproveitando as propriedades de simetria apresentadas pelos tensores de tensão e de deformação, os quais são expressos na forma de vetores, como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned}
& \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \\
\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3131} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.21}$$

cujas posições do tensor  $C_{ijkl}$  são dadas conforme abaixo:

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} \lambda_e + \frac{4}{3} \mu_e & \lambda_e - \frac{2}{3} \mu_e & \lambda_e - \frac{2}{3} \mu_e & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_e - \frac{2}{3} \mu_e & \lambda_e + \frac{4}{3} \mu_e & \lambda_e - \frac{2}{3} \mu_e & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_e - \frac{2}{3} \mu_e & \lambda_e - \frac{2}{3} \mu_e & \lambda_e + \frac{4}{3} \mu_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_e \end{bmatrix}
\tag{4.22}$$

## 4.2 A ABORDAGEM CO-ROTACIONAL NA ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA

Embora as descrições Lagrangeana Total e Lagrangeana Atualizada sejam duas formulações cinemáticas bastante usadas na análise de estruturas geometricamente não-

lineares, no presente trabalho emprega-se uma formulação co-rotacional, considerando pequenas deformações e grandes deslocamentos e rotações. Segundo Liu et al. (1998), o uso do sistema co-rotacional mostra-se bastante eficiente em análises não-lineares, apresentando propriedades superiores em termos de precisão e convergência, além de contribuir para a eliminação do travamento de cisalhamento, como será mostrado no próximo capítulo.

Teoricamente, qualquer movimento realizado por um meio contínuo pode ser decomposto, através da decomposição polar, em um movimento de corpo rígido seguido de uma deformação pura. Uma vez que a discretização em elementos finitos do meio contínuo seja adequada, esta decomposição pode ser realizada em nível de elemento. Assim, se os movimentos de corpo rígido forem eliminados do campo de deslocamentos total, o qual envolve grandes deslocamentos e rotações e pequenas deformações, a deformação pura será sempre uma pequena quantidade em relação às dimensões do elemento.

Convém salientar que a formulação co-rotacional é usada somente para a obtenção do vetor de forças internas e da matriz de rigidez geométrica. Uma vez obtidas estas grandezas, o problema volta a ser descrito no sistema global, onde são avaliadas as matrizes de massa e amortecimento e o vetor de forças externas.

#### 4.2.1 Medidas de tensão e deformação no sistema co-rotacional

Na abordagem co-rotacional (ver Belytschko et al., 2000), um sistema coordenado que rota juntamente com a matéria é construído para cada ponto do corpo. Em modelos numéricos, porém, este sistema coordenado é definido para cada elemento que constitui a discretização do contínuo.

O tensor de tensões de Cauchy  $\sigma$ , calculado no sistema co-rotacional, denominado de tensor de tensões de Cauchy co-rotacionais  $\sigma^c$ , é uma grandeza objetiva, uma vez que não muda com a rotação ou translação do corpo, o que garante a sua invariância frente a uma mudança de referencial. Portanto, é possível utilizar-se a equação constitutiva elástica dada pela expressão (4.12), redefinido a mesma para o sistema co-rotacional, como mostrado abaixo:

$$\sigma_{ij}^c = C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^c \quad (4.23)$$

onde  $\sigma_{ij}^c$  e  $\varepsilon_{ij}^c$  são os tensores de tensão de Cauchy e de pequenas deformações no sistema co-rotacional, respectivamente. Na expressão acima, a matriz constitutiva  $C_{ijkl}$  é a mesma empregada em (4.12), uma vez que ela é constituída de grandezas escalares que permanecem imutáveis diante de uma mudança de referencial.

Os tensores  $\sigma^c$  e  $\varepsilon^c$  podem ser obtidos a partir dos respectivos tensores globais,  $\sigma$  e  $\varepsilon$ , seguindo as seguintes transformações objetivas:

$$\begin{aligned}\sigma^c &= \mathbf{R}\sigma\mathbf{R}^T \\ \varepsilon^c &= \mathbf{R}\varepsilon\mathbf{R}^T\end{aligned}\quad (4.24)$$

onde  $\mathbf{R}$  é uma matriz ortogonal de rotação do sistema global ao co-rotacional.

As componentes do tensor de deformação co-rotacional  $\varepsilon_{ij}^c$  também podem ser obtidas a partir do campo de deslocamentos no sistema co-rotacional  $u_i^c$ , como mostrado abaixo:

$$\varepsilon_{ij}^c = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^c}{\partial x_j^c} + \frac{\partial u_j^c}{\partial x_i^c} \right) \quad (i,j=1,2,3) \quad (4.25)$$

onde  $x_i^c$  são as coordenadas co-rotacionais segundo a direção  $i$  dos eixos locais.

#### 4.2.2 O incremento de deformações no sistema co-rotacional – a taxa de deformação co-rotacional

As componentes do tensor taxa de deformação, definidas no sistema co-rotacional,  $\dot{\varepsilon}^c$ , vêm expressas através da seguinte fórmula:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial (\dot{u}_i^c)^{\text{def}}}{\partial x_j^c} + \frac{\partial (\dot{u}_j^c)^{\text{def}}}{\partial x_i^c} \right) \quad (i,j=1,2,3) \quad (4.26)$$

sendo  $(\dot{u}_i^c)^{\text{def}}$  as componentes do vetor de velocidades referentes à parcela de deformação do campo de deslocamentos (já descontada a rotação de corpo rígido), calculadas no sistema co-rotacional.

Quando a deformação inicial  $\boldsymbol{\varepsilon}^c(\mathbf{X}, t_n)$  é conhecida, o tensor de deformação pode ser expresso, de acordo com Liu et al. (1998), como sendo:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^c(\mathbf{X}, t_{n+1}) = \boldsymbol{\varepsilon}^c(\mathbf{X}, t_n) + \int \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c(\mathbf{X}, \tau) d\tau \quad (4.27)$$

Para o cálculo de integração do tensor taxa de deformação é necessário o uso de alguma forma de aproximação, assumindo algumas hipóteses quanto ao processo de evolução de  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c$  ao longo do tempo. No presente trabalho, é empregado o método de Hughes (ver Hughes, 1987), que consiste em considerar a velocidade de deformação co-rotacional  $(\dot{u}_i^c)^{\text{def}}$  constante e igual à velocidade em uma configuração intermediária entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$ , ou seja:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^c = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c d\tau \doteq \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(\Delta u_i^c)^{\text{def}}}{\partial(x_j^c)_{n+1/2}} + \frac{\partial(\Delta u_j^c)^{\text{def}}}{\partial(x_i^c)_{n+1/2}} \right) \quad (4.28)$$

Assim, tem-se que a atualização da deformação no sistema co-rotacional é dada pela seguinte expressão:

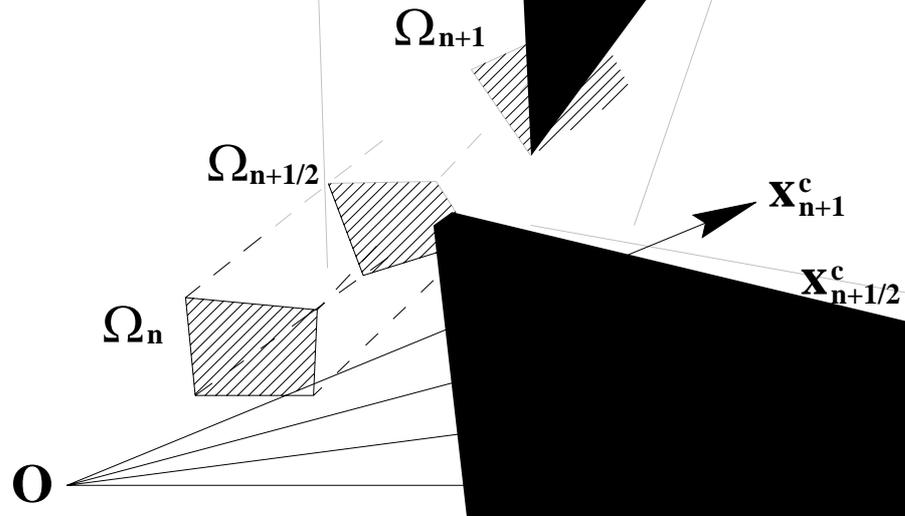
$$\boldsymbol{\varepsilon}^c(\mathbf{X}, t_{n+1}) = \boldsymbol{\varepsilon}^c(\mathbf{X}, t_n) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(\Delta u_i^c)^{\text{def}}}{\partial(x_j^c)_{n+1/2}} + \frac{\partial(\Delta u_j^c)^{\text{def}}}{\partial(x_i^c)_{n+1/2}} \right) \quad (4.29)$$

Para uma melhor compreensão do processo de atualização das deformações considere-se a Figura 4.1, na qual são apresentadas as diferentes configurações apresentadas por um corpo que se move dentro do intervalo de tempo  $[t_n, t_{n+1}]$ . A partir das coordenadas espaciais  $\mathbf{x}_n$  e  $\mathbf{x}_{n+1}$ , as quais referem-se respectivamente às configurações  $\Omega_n$  e  $\Omega_{n+1}$ , dadas em um sistema de coordenadas cartesiano fixo  $\mathbf{Ox}$ , pode-se obter as respectivas coordenadas co-rotacionais,  $\mathbf{Ox}_n^c$  e  $\mathbf{Ox}_{n+1}^c$ , através das seguintes transformações:

$$\mathbf{x}_n^c = \mathbf{R}_n \mathbf{x}_n \quad (4.30)$$

$$\mathbf{x}_{n+1}^c = \mathbf{R}_{n+1} \mathbf{x}_{n+1} \quad (4.31)$$

onde  $\mathbf{R}_n$  e  $\mathbf{R}_{n+1}$  são matrizes ortogonais que fazem a rotação das coordenadas globais para os respectivos sistemas co-rotacionais.



configurações  $\Omega_n$  e  $\Omega_{n+1}$  ao sistema co-rotacional  $\mathbf{Ox}_{n+1/2}^c$ . Sendo  $\hat{\mathbf{x}}_n^c$  e  $\hat{\mathbf{x}}_{n+1}^c$  as coordenadas das configurações  $\hat{\Omega}_n$  e  $\hat{\Omega}_{n+1}$  no sistema co-rotacional  $\mathbf{Ox}_{n+1/2}^c$ , observa-se que:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_n^c &= \mathbf{x}_n^c \\ \hat{\mathbf{x}}_{n+1}^c &= \mathbf{x}_{n+1}^c\end{aligned}\quad (4.35)$$

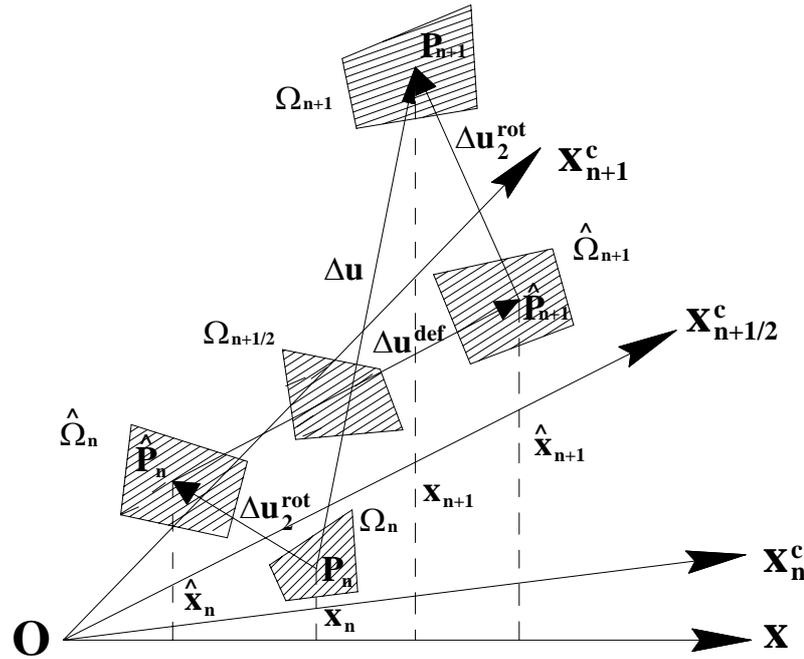


Figura 4.2: Decomposição do incremento de deslocamento.

Verifica-se que de  $\Omega_n$  para  $\hat{\Omega}_n$  e de  $\hat{\Omega}_{n+1}$  para  $\Omega_{n+1}$  o corpo sofre duas rotações de corpo rígido, sendo os respectivos deslocamentos de rotação expressos a partir das seguintes equações:

$$\Delta \mathbf{u}_1^{\text{rot}} = \hat{\mathbf{x}}_n - \mathbf{x}_n = \mathbf{R}_{n+1/2}^T \hat{\mathbf{x}}_n^c - \mathbf{x}_n = \mathbf{R}_{n+1/2}^T \mathbf{x}_n^c - \mathbf{x}_n \quad (4.36)$$

$$\Delta \mathbf{u}_2^{\text{rot}} = \mathbf{x}_{n+1} - \hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{R}_{n+1/2}^T \hat{\mathbf{x}}_{n+1}^c = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{R}_{n+1/2}^T \mathbf{x}_{n+1}^c \quad (4.37)$$

Portanto, o incremento de deslocamentos de rotação total pode ser colocado como sendo:

$$\Delta \mathbf{u}^{\text{rot}} = \Delta \mathbf{u}_1^{\text{rot}} + \Delta \mathbf{u}_2^{\text{rot}} = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n - \mathbf{R}_{n+1/2}^T (\mathbf{x}_{n+1}^c - \mathbf{x}_n^c) = \Delta \mathbf{u} - \mathbf{R}_{n+1/2}^T (\mathbf{x}_{n+1}^c - \mathbf{x}_n^c) \quad (4.38)$$

Finalmente, a parcela de deformação referente à configuração  $\Omega_{n+1/2}$  vem dada por:

$$\Delta \mathbf{u}^{\text{def}} = \Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}^{\text{rot}} = \mathbf{R}_{n+1/2}^T (\mathbf{x}_{n+1}^c - \mathbf{x}_n^c) \quad (4.39)$$

O incremento de deslocamentos de deformação no sistema co-rotacional  $\mathbf{Ox}_{n+1/2}^c$  é obtido através de uma transformação objetiva de vetores, como mostrado abaixo:

$$\Delta \mathbf{u}_{\text{def}}^c = \mathbf{R}_{n+1/2} \Delta \mathbf{u}^{\text{def}} = \mathbf{x}_{n+1}^c - \mathbf{x}_n^c \quad (4.40)$$

Uma vez calculado o incremento de deformação (Eq. 4.30), as atualizações para os tensores de deformação e de tensão, referenciados à configuração intermediária  $\Omega_{n+1/2}$ , são determinadas pelas seguintes expressões:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^c = \boldsymbol{\varepsilon}_n^c + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/2}^c \quad (4.41)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^c = \boldsymbol{\sigma}_n^c + \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/2}^c \quad (4.42)$$

Os tensores de deformação e de tensão no sistema global são obtidos a partir de uma transformação objetiva de tensores do sistema co-rotacional para o sistema global, ou seja:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma}^c \mathbf{R} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{R}^T \boldsymbol{\varepsilon}^c \mathbf{R} \end{aligned} \quad (4.43)$$

### 4.2.3 A equação constitutiva incremental

Para garantir a utilização de uma medida de taxa de tensão que obedeça aos axiomas da objetividade, ou invariância referencial, emprega-se neste trabalho a taxa de tensões de Truesdell  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{Tr}}$ , a qual vem expressa por:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{Tr}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{L} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}^T + \boldsymbol{\sigma} \text{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.44)$$

sendo  $\mathbf{L}$  o gradiente espacial de velocidade, que pode ser decomposto na seguinte forma:

$$\mathbf{L} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (4.45)$$

onde  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  é o tensor taxa de deformação, a parte simétrica de  $\mathbf{L}$ , e  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  é o tensor taxa de rotação, a parte anti-simétrica de  $\mathbf{L}$ . Em forma indicial, estes tensores podem ser escritos como:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.46)$$

$$\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.47)$$

Empregando-se as definições dadas pelas expressões (4.45), (4.46) e (4.47) na equação (4.44), obtém-se a seguinte forma indicial para a taxa de Truesdell:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} + \sigma_{im} \dot{\omega}_{jm} + \sigma_{jm} \dot{\omega}_{im} + \sigma_{ik} \dot{\epsilon}_{jk} + \sigma_{jk} \dot{\epsilon}_{ik} - \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{kk} \quad (i,j,k,l,m = 1, 2, 3) \quad (4.48)$$

sendo  $C_{ijkl}$  a matriz constitutiva de constantes elástica, definida previamente em (4.14).

Hughes e Winget (1980) apresentam uma forma mais compacta para a expressão (4.48), na qual é desprezado termo  $\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{kk}$ , sendo escrita da seguinte maneira:

$$\dot{\sigma}_{ij} = (C_{ijkl} + \hat{C}_{ijkl}) \dot{\epsilon}_{kl} + V_{ijkl} \dot{\omega}_{kl} \quad (i,j,k,l = 1, 2, 3) \quad (4.49)$$

onde:

$$\hat{C}_{ijkl} = -\sigma_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} (\sigma_{il} \delta_{jk} + \sigma_{jl} \delta_{ik} + \sigma_{ik} \delta_{jl} + \sigma_{jk} \delta_{il}) \quad (i,j,k,l = 1, 2, 3) \quad (4.50)$$

e:

$$V_{ijkl} = \frac{1}{2} (\sigma_{il} \delta_{jk} + \sigma_{jl} \delta_{ik} - \sigma_{ik} \delta_{jl} - \sigma_{jk} \delta_{il}) \quad (i,j,k,l = 1, 2, 3) \quad (4.51)$$

Ao desconsiderar-se o último termo da expressão (4.48), a matriz  $\hat{C}$  torna-se simétrica, ficando a forma matricial da taxa de Truesdell, empregada neste trabalho, dada como abaixo:

$$\dot{\sigma} = (\mathbf{C} + \hat{\mathbf{C}}) \dot{\epsilon} + \mathbf{V} \dot{\omega} = \begin{bmatrix} (\mathbf{C} + \hat{\mathbf{C}}) & \mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon} \\ \dot{\omega} \end{Bmatrix} \quad (4.52)$$

sendo:

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 2\sigma_{22} & 0 & \sigma_{12} & \sigma_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma_{33} & 0 & \sigma_{23} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{12} & 0 & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} & \frac{\sigma_{13}}{2} & \frac{\sigma_{23}}{2} \\ 0 & \sigma_{23} & \sigma_{23} & \frac{\sigma_{13}}{2} & \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} & \frac{\sigma_{12}}{2} \\ \sigma_{13} & 0 & \sigma_{13} & \frac{\sigma_{23}}{2} & \frac{\sigma_{12}}{2} & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{2} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

e:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sigma_{12} & 0 & -\sigma_{13} \\ -\sigma_{12} & \sigma_{23} & 0 \\ 0 & -\sigma_{23} & \sigma_{13} \\ \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} & \frac{\sigma_{13}}{2} & -\frac{\sigma_{23}}{2} \\ -\frac{\sigma_{13}}{2} & \frac{\sigma_{33} - \sigma_{22}}{2} & \frac{\sigma_{12}}{2} \\ \frac{\sigma_{23}}{2} & -\frac{\sigma_{12}}{2} & \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Para a expressão (4.52) segue-se o seguinte ordenamento para os vetores de taxa de deformação e de taxa de rotação:

$$\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}\}^T = \{ \dot{\varepsilon}_{11} \quad \dot{\varepsilon}_{22} \quad \dot{\varepsilon}_{33} \quad 2\dot{\varepsilon}_{12} \quad 2\dot{\varepsilon}_{23} \quad 2\dot{\varepsilon}_{31} \quad 2\dot{\omega}_{12} \quad 2\dot{\omega}_{23} \quad 2\dot{\omega}_{31} \} \quad (4.55)$$

Desta forma, o trabalho interno específico variacional  $\delta \mathbf{W}^{\text{int}}$  vem expresso da seguinte forma:

$$\delta \mathbf{W}^{\text{int}} = \{ \delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad \delta \dot{\boldsymbol{\omega}} \}_{(1 \times 9)}^T \begin{bmatrix} (\mathbf{C} + \hat{\mathbf{C}})_{(6 \times 6)} & \frac{1}{2} \mathbf{V}_{(6 \times 3)} \\ \frac{1}{2} \mathbf{V}_{(3 \times 6)}^T & \bar{\mathbf{C}}_{(3 \times 3)} \end{bmatrix}_{(9 \times 9)} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \Delta \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{Bmatrix}_{(9 \times 1)} = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma}) \Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.56)$$

sendo:

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} & -\frac{\sigma_{13}}{2} & -\frac{\sigma_{23}}{2} \\ -\frac{\sigma_{13}}{2} & \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} & -\frac{\sigma_{12}}{2} \\ -\frac{\sigma_{23}}{2} & -\frac{\sigma_{12}}{2} & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{2} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Na expressão (4.56),  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  é um vetor que engloba a taxa de deformação  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  e a taxa de rotação  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ , sendo  $\mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma})$  uma matriz que relaciona incrementos de tensões com incrementos de deformações e rotações, definida por:

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{(6 \times 6)} & \mathbf{0}_{(6 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{(3 \times 6)} & \mathbf{0}_{(3 \times 3)} \end{bmatrix} + \hat{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (4.58)$$

onde  $\hat{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\sigma})$  é a matriz de tensões iniciais, dada por:

$$\hat{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 & \sigma_{13} & \frac{\sigma_{12}}{2} & 0 & -\frac{\sigma_{13}}{2} \\ 0 & 2\sigma_{22} & 0 & \sigma_{12} & \sigma_{23} & 0 & -\frac{\sigma_{12}}{2} & \frac{\sigma_{23}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma_{33} & 0 & \sigma_{23} & \sigma_{13} & 0 & -\frac{\sigma_{23}}{2} & \frac{\sigma_{13}}{2} \\ \sigma_{12} & \sigma_{12} & 0 & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} & \frac{\sigma_{13}}{2} & \frac{\sigma_{23}}{2} & \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{4} & \frac{\sigma_{13}}{4} & -\frac{\sigma_{23}}{4} \\ 0 & \sigma_{23} & \sigma_{23} & \frac{\sigma_{13}}{2} & \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} & \frac{\sigma_{12}}{2} & -\frac{\sigma_{13}}{4} & \frac{\sigma_{33} - \sigma_{22}}{4} & \frac{\sigma_{12}}{4} \\ \sigma_{13} & 0 & \sigma_{13} & \frac{\sigma_{23}}{2} & \frac{\sigma_{12}}{2} & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{2} & \frac{\sigma_{23}}{4} & -\frac{\sigma_{12}}{4} & \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{4} \\ \frac{\sigma_{12}}{2} & -\frac{\sigma_{12}}{2} & 0 & \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{4} & -\frac{\sigma_{13}}{4} & \frac{\sigma_{23}}{4} & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{4} & -\frac{\sigma_{13}}{4} & -\frac{\sigma_{23}}{4} \\ 0 & \frac{\sigma_{23}}{2} & -\frac{\sigma_{23}}{2} & \frac{\sigma_{13}}{4} & \frac{\sigma_{33} - \sigma_{22}}{4} & -\frac{\sigma_{12}}{4} & -\frac{\sigma_{13}}{4} & \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{4} & -\frac{\sigma_{12}}{4} \\ -\frac{\sigma_{13}}{2} & 0 & \frac{\sigma_{13}}{2} & -\frac{\sigma_{23}}{4} & \frac{\sigma_{12}}{4} & \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{4} & -\frac{\sigma_{23}}{4} & -\frac{\sigma_{12}}{4} & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{4} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Formulações similares foram empregadas anteriormente no PROMEC/UFRGS e no PPGEC/UFRGS através dos trabalhos de Schultz (1997) e Duarte Filho (2002).

## 5 O MODELO NUMÉRICO PARA A ANÁLISE DA ESTRUTURA

### 5.1 A FORMA FRACA DA EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DE MOMENTUM: O PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Aplicando o Método dos Resíduos Ponderados de Galerkin (ver Capítulo 3) no contexto do Método dos Elementos Finitos – MEF (Zienkiewicz e Taylor, 2005) à Equação (4.7), considerando-se uma descrição Lagrangeana atualizada, tem-se que:

$$\int_{\Omega_E} \delta u_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} d\Omega_E + \int_{\Omega_E} \delta u_j \rho b_i d\Omega_E = \int_{\Omega_E} \delta u_j \rho \ddot{u}_i d\Omega_E + \int_{\Omega_E} \delta u_j \chi \dot{u}_i d\Omega_E \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (5.1)$$

onde  $\delta u_j$  são as componentes do vetor de deslocamentos virtuais segundo a direção dos eixos globais  $x_j$  e  $\Omega_E$  é o domínio do elemento E. Os demais termos encontram-se definidos no capítulo anterior.

Integrando por partes o primeiro termo da equação acima, resulta em:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_E} \frac{\partial(\delta u_j \sigma_{ij})}{\partial x_i} d\Omega_E - \int_{\Omega_E} \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \sigma_{ij} d\Omega_E + \int_{\Omega_E} \delta u_j \rho b_i d\Omega_E = \\ \int_{\Omega_E} \delta u_j \rho \ddot{u}_i d\Omega_E + \int_{\Omega_E} \delta u_j \chi \dot{u}_i d\Omega_E \quad (i, j = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Ao empregar-se o teorema do divergente de Gauss sobre o primeiro termo da Equação (5.2), obtém-se que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_E} \delta u_j \rho \ddot{u}_i d\Omega_E + \int_{\Omega_E} \delta u_j \chi \dot{u}_i d\Omega_E + \int_{\Omega_E} \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \sigma_{ij} d\Omega_E = \\ \int_{\Gamma_E} \delta u_j \sigma_{ij} n_i d\Gamma_E + \int_{\Omega_E} \delta u_j \rho b_i d\Omega_E \quad (i, j = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (5.3)$$

sendo  $\Gamma_E$  a superfície de contorno do elemento E.

Considerando-se a equação de Cauchy, tem-se que:

$$\int_{\Omega_E} \delta u_j \rho \ddot{u}_i d\Omega_E + \int_{\Omega_E} \delta u_j \chi \dot{u}_i d\Omega_E + \int_{\Omega_E} \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \sigma_{ij} d\Omega_E =$$

$$\int_{\Gamma_E} \delta u_j t_j d\Gamma_E + \int_{\Omega_E} \delta u_j \rho b_i d\Omega_E \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (5.4)$$

onde:

$$\sigma_{ij} n_i = t_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (5.5)$$

A Equação (5.4) é a conhecida forma fraca da equação de conservação de momentum, que equivale à expressão do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Cada termo desta equação representa uma parcela de trabalho virtual realizado pelos deslocamentos virtuais  $\delta u_j$ . O trabalho virtual devido às forças de volume  $b_i$  e ao vetor de tração  $t_j$  é chamado de trabalho virtual externo  $\delta W^{\text{ext}}$ . Por outro lado, o termo que contém as tensões do material é conhecido como trabalho virtual interno  $\delta W^{\text{int}}$ . Os demais termos representam o trabalho realizado pelas forças de d'Alembert.

## 5.2 A FORMULAÇÃO PARA O ELEMENTO HEXAÉDRICO ISOPARAMÉTRICO TRILINEAR

Neste trabalho emprega-se o elemento hexaédrico isoparamétrico trilinear para a discretização espacial da estrutura. Desta forma, tem-se as seguintes aproximações para as componentes dos vetores de deslocamento  $u_i$ , velocidades  $\dot{u}_i$  e acelerações  $\ddot{u}_i$ , bem como para as coordenadas espaciais  $x_i$ :

$$u_i = \sum_{n=1}^8 N_n (u_i)_n \quad (5.6)$$

$$\dot{u}_i = \sum_{n=1}^8 N_n (\dot{u}_i)_n \quad (5.7)$$

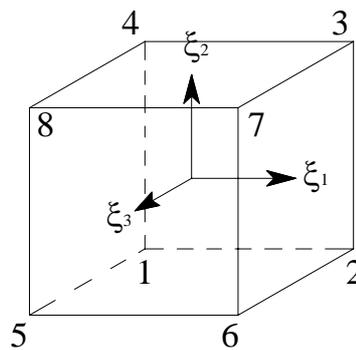
$$\ddot{u}_i = \sum_{n=1}^8 N_n (\ddot{u}_i)_n \quad (5.8)$$

$$x_i = \sum_{n=1}^8 N_n (x_i)_n \quad (5.9)$$

onde  $(u_i)_n$ ,  $(\dot{u}_i)_n$ ,  $(\ddot{u}_i)_n$  e  $(x_i)_n$  são os valores nodais para deslocamentos, velocidades, acelerações e coordenadas do elemento, dados segundo a direção  $i$  dos eixos coordenados globais, variando de 1 a 3, e  $N_n$  são as funções de interpolação do elemento hexaédrico trilinear, dadas por:

$$N_n(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{8}(1 + \xi_{1n}\xi_1)(1 + \xi_{2n}\xi_2)(1 + \xi_{3n}\xi_3) \quad (n = 1, \dots, 8) \quad (5.10)$$

sendo  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$  as coordenadas naturais segundo os eixos locais e  $\xi_{1n}$ ,  $\xi_{2n}$  e  $\xi_{3n}$  são os respectivos valores nodais (ver Figura 5.1).



### Espaço Computacional

Figura 5.1: Definições para o elemento hexaédrico no sistema local.

As aproximações apresentadas acima podem ser escritas em forma matricial, obtendo-se as seguintes expressões:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{U}^{(e)} \quad ; \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{U}}^{(e)} \quad ; \quad \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\ddot{\mathbf{U}}^{(e)} \quad (5.11)$$

sendo:

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \quad N_7 \quad N_8] \quad (5.12)$$

Recorrendo-se à Equação (5.4), o trabalho virtual interno  $\delta\mathbf{W}_e^{\text{int}}$ , em nível de elemento, pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\delta \mathbf{W}_e^{\text{int}} = \int_{\Omega_E} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_E \quad (5.13)$$

O tensor de deformação  $\boldsymbol{\varepsilon}$  pode ser interpolado a partir do vetor de deslocamentos nodais do elemento  $\mathbf{U}^{(e)}$ , como mostrado abaixo:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{U}^{(e)} \quad (5.14)$$

de onde define-se a matriz gradiente  $\bar{\mathbf{B}}$ , a qual contém as derivadas das funções de interpolação  $\mathbf{N}$  do elemento, armazenadas da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{Bmatrix} \partial/\partial \mathbf{x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \partial/\partial \mathbf{y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \partial/\partial \mathbf{z} \\ \partial/\partial \mathbf{x} & \partial/\partial \mathbf{y} & \mathbf{0} \\ \partial/\partial \mathbf{x} & \mathbf{0} & \partial/\partial \mathbf{z} \\ \mathbf{0} & \partial/\partial \mathbf{y} & \partial/\partial \mathbf{z} \end{Bmatrix}_{(24 \times 6)} \quad (5.15)$$

Através da expressão (5.14) e da forma matricial da equação constitutiva, dada em (4.21), o trabalho virtual interno pode ser escrito como sendo:

$$\delta \mathbf{W}_e^{\text{int}} = \delta \mathbf{U}^{(e)T} \int_{\Omega_E} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega_E \quad (5.16)$$

onde foi considerado que:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T = \bar{\mathbf{B}}^T \delta \mathbf{U}^{(e)T} \quad ; \quad \delta \mathbf{u}^T = \mathbf{N}^T \delta \mathbf{U}^{(e)T} \quad (5.17)$$

Empregando-se as aproximações (5.11) sobre os respectivos termos na Equação (5.4), obtém-se a expressão abaixo:

$$\begin{aligned} & \delta \mathbf{U}^{(e)T} \int_{\Omega_E} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_E \ddot{\mathbf{U}}^{(e)} + \delta \mathbf{U}^{(e)T} \int_{\Omega_E} \chi \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_E \dot{\mathbf{U}}^{(e)} + \delta \mathbf{U}^{(e)T} \int_{\Omega_E} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega_E \mathbf{U}^{(e)} = \\ & \delta \mathbf{U}^{(e)T} \int_{\Gamma_E} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma_E + \delta \mathbf{U}^{(e)T} \int_{\Omega_E} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{b} d\Omega_E \end{aligned} \quad (5.18)$$

que resulta na bem conhecida equação de equilíbrio dinâmico, em nível de elemento:

$$\mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{U}}^{(e)} + \mathbf{D}^{(e)} \dot{\mathbf{U}}^{(e)} + \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{U}^{(e)} = \mathbf{P}^{(e)} \quad (5.19)$$

onde:

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{\Omega_E} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_E \quad (5.20)$$

$$\mathbf{D}^{(e)} = \int_{\Omega_E} \chi \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_E \quad (5.21)$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega_E} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega_E \quad (5.22)$$

$$\mathbf{P}^{(e)} = \int_{\Gamma_E} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma_E + \int_{\Omega_E} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{b} d\Omega_E \quad (5.23)$$

sendo  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  as matrizes de massa, amortecimento e de rigidez, respectivamente, e  $\mathbf{P}$  o vetor de forças externas.

### 5.3 A TÉCNICA DE INTEGRAÇÃO REDUZIDA COM CONTROLE DE MODOS ESPÚRIOS

No presente trabalho emprega-se a técnica de integração reduzida para a determinação das integrais que compõem as matrizes da equação de equilíbrio dinâmico. O uso desta técnica traz como vantagem uma enorme economia em termos de esforço computacional quando comparada ao uso de quadratura completa no método de Gauss-Legendre. Além disso, ela contribui também para uma estabilização do fenômeno de travamento volumétrico em materiais incompressíveis ou aproximadamente incompressíveis (Zhu e Cescotto, 1996). No entanto, ao utilizar-se a integração reduzida pode ocorrer o surgimento de modos espúrios, que são modos associados a campos de deslocamento de deformação nula. Problemas relacionados ao fenômeno de travamento por cisalhamento também podem ocorrer devido à utilização de elementos com funções de forma de baixa ordem (Zhu e Cescotto, 1996).

Portanto, para que se possa adotar a quadratura reduzida (um ponto de integração) é necessário empregar uma técnica eficiente de estabilização para o cálculo, principalmente, da matriz de rigidez e do vetor de forças internas dos elementos.

### 5.3.1 Estabilização dos modos espúrios

Com o objetivo de identificar os diferentes padrões de modos espúrios resultantes da integração reduzida, são definidas as submatrizes gradiente  $\mathbf{B}_a(0)$ , avaliadas no centro do elemento ( $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ ), como sendo:

$$\mathbf{B}_a(0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a(0)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_a(0)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_a(0)}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1a} \\ b_{2a} \\ b_{3a} \end{bmatrix} \quad (a = 1, \dots, 8) \quad (5.24)$$

sendo  $\xi_i$  os vetores de coordenadas nodais segundo a direção  $i$  dos eixos naturais locais. O determinante do Jacobiano vem dado por:

$$\det \mathbf{J} = \frac{1}{8} \Omega_E \quad (5.28)$$

onde  $\Omega_E$  é o volume do elemento E.

As derivadas de primeira ordem das funções de forma em relação às coordenadas naturais são expressas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi_1} &= \frac{1}{8} (\xi_1^T + \xi_2 \mathbf{h}_1^T + \xi_3 \mathbf{h}_2^T + \xi_2 \xi_3 \mathbf{h}_4^T) \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi_2} &= \frac{1}{8} (\xi_2^T + \xi_1 \mathbf{h}_1^T + \xi_3 \mathbf{h}_3^T + \xi_1 \xi_3 \mathbf{h}_4^T) \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi_3} &= \frac{1}{8} (\xi_3^T + \xi_1 \mathbf{h}_2^T + \xi_2 \mathbf{h}_3^T + \xi_1 \xi_2 \mathbf{h}_4^T) \end{aligned} \quad (5.29)$$

e as respectivas derivadas de segunda e de terceira ordens não nulas são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} &= \frac{1}{8} (\mathbf{h}_1^T + \xi_3 \mathbf{h}_4^T) \quad ; \quad \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} = \frac{1}{8} (\mathbf{h}_3^T + \xi_1 \mathbf{h}_4^T) \quad ; \quad \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial \xi_3 \partial \xi_1} = \frac{1}{8} (\mathbf{h}_2^T + \xi_2 \mathbf{h}_4^T) \\ \frac{\partial^3 \mathbf{N}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \partial \xi_3} &= \frac{1}{8} \mathbf{h}_4^T \end{aligned} \quad (5.30)$$

Nas derivadas apresentadas acima, os vetores  $\mathbf{h}_i$ , com  $i$  de 1 a 4, são dados de acordo com os valores abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1^T &= [+1 \quad -1 \quad +1 \quad -1 \quad +1 \quad -1 \quad +1 \quad -1] \\ \mathbf{h}_2^T &= [+1 \quad -1 \quad -1 \quad +1 \quad -1 \quad +1 \quad +1 \quad -1] \\ \mathbf{h}_3^T &= [+1 \quad +1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad +1 \quad +1] \\ \mathbf{h}_4^T &= [-1 \quad +1 \quad -1 \quad +1 \quad +1 \quad -1 \quad +1 \quad -1] \end{aligned} \quad (5.31)$$

A partir destes vetores são formados os doze modos de energia nula associados a um elemento hexaédrico com um ponto de integração, os quais são caracterizados através de:

$$\{\mathbf{h}_i^T \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}\} \quad ; \quad \{\mathbf{0} \quad \mathbf{h}_i^T \quad \mathbf{0}\} \quad ; \quad \{\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{h}_i^T\} \quad (i=1,2,3,4) \quad (5.32)$$

Assim, os vetores gradiente calculados no centro do elemento podem ser escritos como sendo:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \mathbf{N}(0)}{\partial x_1} = \left( \frac{\partial \mathbf{N}(0)}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{N}(0)}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{N}(0)}{\partial \xi_3} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{8} \left( I_{11}^J \xi_1 + I_{12}^J \xi_2 + I_{13}^J \xi_3 \right) \quad (5.33)$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{\partial \mathbf{N}(0)}{\partial x_2} = \left( \frac{\partial \mathbf{N}(0)}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{N}(0)}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{N}(0)}{\partial \xi_3} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{8} \left( I_{21}^J \xi_1 + I_{22}^J \xi_2 + I_{23}^J \xi_3 \right) \quad (5.34)$$

$$\mathbf{b}_3 = \frac{\partial \mathbf{N}(0)}{\partial x_3} = \left( \frac{\partial \mathbf{N}(0)}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \mathbf{N}(0)}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \mathbf{N}(0)}{\partial \xi_3} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{8} \left( I_{31}^J \xi_1 + I_{32}^J \xi_2 + I_{33}^J \xi_3 \right) \quad (5.35)$$

onde  $I_{ij}^J$ , com  $i$  e  $j$  de 1 a 3, são os termos da inversa da matriz Jacobiana calculada no ponto central do elemento.

Para evitar o aparecimento do fenômeno de travamento volumétrico, resultante do uso de quadratura completa na integração do trabalho virtual interno (Eq. 5.16), utiliza-se aqui a idéia de integração reduzida proposta por Hughes (1980), a partir da qual a matriz gradiente  $\bar{\mathbf{B}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  fica decomposta na seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{B}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \tilde{\mathbf{B}}(0) + \hat{\mathbf{B}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (5.36)$$

onde  $\tilde{\mathbf{B}}(0)$  e  $\hat{\mathbf{B}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  são as parcelas da matriz gradiente correspondentes às partes volumétrica, avaliada no centro do elemento, e desviadora do vetor de deformações, respectivamente.

Através da expressão (5.36) o trabalho virtual interno pode ser re-escrito como sendo:

$$\delta \mathbf{W}_e^{\text{int}} = \delta \mathbf{U}^{(e)T} \int_{\Omega_E} \left[ \tilde{\mathbf{B}}^T(0) + \hat{\mathbf{B}}^T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \right] \boldsymbol{\sigma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\Omega_E \quad (5.37)$$

Expandindo o vetor de deformações, avaliado no centro do elemento, em uma série de Taylor até os termos bi-lineares, obtém-se que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = & \boldsymbol{\varepsilon}(0) + \boldsymbol{\varepsilon}_{,\xi_1}(0) \xi_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_{,\xi_2}(0) \xi_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_{,\xi_3}(0) \xi_3 + \\ & 2\boldsymbol{\varepsilon}_{,\xi_1\xi_2}(0) \xi_1 \xi_2 + 2\boldsymbol{\varepsilon}_{,\xi_2\xi_3}(0) \xi_2 \xi_3 + 2\boldsymbol{\varepsilon}_{,\xi_1\xi_3}(0) \xi_1 \xi_3 \end{aligned} \quad (5.38)$$

estando o primeiro termo relacionado ao vetor de deformações constantes, avaliado no centro do elemento, e os demais relativos aos termos lineares e bi-lineares do vetor de deformações. Na Equação (5.38) e nas que seguem, são utilizadas as seguintes notações:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{,\alpha}(0) = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(0)}{\partial \alpha} \quad ; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{,\alpha\beta}(0) = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(0)}{\partial \alpha \partial \beta} \quad (5.39)$$

Observa-se que a parte volumétrica do vetor de deformações é sempre avaliada no centro do elemento, de onde se conclui que os termos lineares e bi-lineares correspondem apenas à parte desviadora do vetor de deformações. Assim, considerando-se a expressão (5.14), tem-se que:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = & \mathbf{B}(0) + \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_1}(0)\xi_1 + \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_2}(0)\xi_2 + \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_3}(0)\xi_3 + \\ & 2\hat{\mathbf{B}}_{,\xi_1\xi_2}(0)\xi_1\xi_2 + 2\hat{\mathbf{B}}_{,\xi_2\xi_3}(0)\xi_2\xi_3 + 2\hat{\mathbf{B}}_{,\xi_1\xi_3}(0)\xi_1\xi_3 \end{aligned} \quad (5.40)$$

sendo:

$$\mathbf{B}(0) = \tilde{\mathbf{B}}(0) + \hat{\mathbf{B}}(0) \quad (5.41)$$

onde  $\tilde{\mathbf{B}}(0)$  e  $\hat{\mathbf{B}}(0)$  são as contribuições das partes volumétrica e desviadora da matriz gradiente, avaliadas através de integração reduzida.

No trabalho de Liu et al. (1998) é mostrado como são calculadas as derivadas de primeira e de segunda ordens dos vetores gradiente com respeito às coordenadas naturais, calculadas no centro do elemento. A partir das expressões obtidas, as componentes das matrizes gradiente podem ser escritas como sendo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{xx}(0) \\ \mathbf{B}_{yy}(0) \\ \mathbf{B}_{zz}(0) \\ \mathbf{B}_{xy}(0) \\ \mathbf{B}_{yz}(0) \\ \mathbf{B}_{xz}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_2^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_3^T \\ \mathbf{b}_2^T & \mathbf{b}_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_3^T & \mathbf{b}_2^T \\ \mathbf{b}_3^T & \mathbf{0} & \mathbf{b}_1^T \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_{xx,\xi_1}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yy,\xi_1}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{zz,\xi_1}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi_1}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi_1}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi_1}(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\frac{1}{3}D_{22}\boldsymbol{\gamma}_1^T & -\frac{1}{3}D_{33}\boldsymbol{\gamma}_2^T \\ \mathbf{0} & \frac{2}{3}D_{22}\boldsymbol{\gamma}_1^T & -\frac{1}{3}D_{33}\boldsymbol{\gamma}_2^T \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{3}D_{22}\boldsymbol{\gamma}_1^T & \frac{2}{3}D_{33}\boldsymbol{\gamma}_2^T \\ D_{22}\boldsymbol{\gamma}_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_{33}\boldsymbol{\gamma}_2^T & D_{22}\boldsymbol{\gamma}_1^T \\ D_{33}\boldsymbol{\gamma}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_{xx,\xi_2}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yy,\xi_2}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{zz,\xi_2}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi_2}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi_2}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi_2}(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}D_{11}\boldsymbol{\gamma}_1^T & \mathbf{0} & -\frac{1}{3}D_{33}\boldsymbol{\gamma}_3^T \\ -\frac{1}{3}D_{11}\boldsymbol{\gamma}_1^T & \mathbf{0} & -\frac{1}{3}D_{33}\boldsymbol{\gamma}_3^T \\ -\frac{1}{3}D_{11}\boldsymbol{\gamma}_1^T & \mathbf{0} & \frac{2}{3}D_{33}\boldsymbol{\gamma}_3^T \\ \mathbf{0} & D_{11}\boldsymbol{\gamma}_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_{33}\boldsymbol{\gamma}_3^T & \mathbf{0} \\ D_{33}\boldsymbol{\gamma}_3^T & \mathbf{0} & D_{11}\boldsymbol{\gamma}_1^T \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_{xx,\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yy,\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{zz,\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi_3}(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}D_{11}\boldsymbol{\gamma}_2^T & -\frac{1}{3}D_{22}\boldsymbol{\gamma}_3^T & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{3}D_{11}\boldsymbol{\gamma}_2^T & \frac{2}{3}D_{22}\boldsymbol{\gamma}_3^T & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{3}D_{11}\boldsymbol{\gamma}_2^T & -\frac{1}{3}D_{22}\boldsymbol{\gamma}_3^T & \mathbf{0} \\ D_{22}\boldsymbol{\gamma}_3^T & D_{11}\boldsymbol{\gamma}_2^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{22}\boldsymbol{\gamma}_3^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{11}\boldsymbol{\gamma}_2^T \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_{xx,\xi_1\xi_2}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yy,\xi_1\xi_2}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{zz,\xi_1\xi_2}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi_1\xi_2}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi_1\xi_2}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi_1\xi_2}(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{3}D_{33}\boldsymbol{\gamma}_4^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{3}D_{33}\boldsymbol{\gamma}_4^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{2}{3}D_{33}\boldsymbol{\gamma}_4^T \\ \mathbf{0} & D_{33}\boldsymbol{\gamma}_4^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ D_{33}\boldsymbol{\gamma}_4^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_{xx,\xi_2\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yy,\xi_2\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{zz,\xi_2\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi_2\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi_2\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi_2\xi_3}(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}D_{11}\boldsymbol{\gamma}_4^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{3}D_{11}\boldsymbol{\gamma}_4^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{3}D_{11}\boldsymbol{\gamma}_4^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_{11}\boldsymbol{\gamma}_4^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{11}\boldsymbol{\gamma}_4^T \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_{xx,\xi_1\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yy,\xi_1\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{zz,\xi_1\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi_1\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi_1\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi_1\xi_3}(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\frac{1}{3}D_{22}\boldsymbol{\gamma}_4^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{2}{3}D_{22}\boldsymbol{\gamma}_4^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{3}D_{22}\boldsymbol{\gamma}_4^T & \mathbf{0} \\ D_{22}\boldsymbol{\gamma}_4^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{22}\boldsymbol{\gamma}_4^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

onde  $\boldsymbol{\gamma}_\alpha$  são vetores de estabilização, propostos por Flanagan e Belytschko (1981), cuja utilização é necessária para suprimir os modos espúrios. Estes vetores são construídos de tal forma que eles se apresentam ortogonais em relação ao campo de deslocamentos linear, fornecendo uma consistente estabilização para o elemento, sendo dados por:

$$\boldsymbol{\gamma}_\alpha = \mathbf{h}_\alpha - (\mathbf{h}_\alpha^T \mathbf{x}_i) \mathbf{b}_i \quad (\alpha = 1, \dots, 4 \quad ; \quad i = 1, 2, 3) \quad (5.49)$$

O vetor de tensões é também submetido ao mesmo processo de expansão em séries de Taylor feito para o vetor de deformações, obtendo-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = & \boldsymbol{\sigma}(0) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_1}(0)\xi_1 + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_2}(0)\xi_2 + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_3}(0)\xi_3 + \\ & 2\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_1\xi_2}(0)\xi_1\xi_2 + 2\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_2\xi_3}(0)\xi_2\xi_3 + 2\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_1\xi_3}(0)\xi_1\xi_3 \end{aligned} \quad (5.50)$$

Substituindo-se as expressões (5.40) e (5.50) na Equação (5.37), que descreve o trabalho virtual interno, e realizando a integração, obtém-se:

$$\delta \mathbf{W}_e^{\text{int}} = \delta \mathbf{U}^{(\text{e})\text{T}} \left[ \mathbf{B}^{\text{T}}(0) \boldsymbol{\sigma}(0) + \frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_1}^{\text{T}}(0) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_1}(0) + \frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_2}^{\text{T}}(0) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_2}(0) + \frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_3}^{\text{T}}(0) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_3}(0) + \right. \\ \left. \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_1 \xi_2}^{\text{T}}(0) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_1 \xi_2}(0) + \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_2 \xi_3}^{\text{T}}(0) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_2 \xi_3}(0) + \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_1 \xi_3}^{\text{T}}(0) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_1 \xi_3}(0) \right] \Omega_E \quad (5.51)$$

sendo  $\Omega_E$  o volume do elemento E.

Observando a equação acima, verifica-se que o primeiro termo refere-se ao trabalho interno virtual calculado empregando-se um ponto de integração, enquanto que os demais termos, também avaliados no centro do elemento, realizam a estabilização do mesmo.

### 5.3.2 A matriz de rigidez de estabilização

Na medida em que os vetores de tensões e de deformações são avaliados no centro do elemento, o vetor de forças internas  $\mathbf{f}^c$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{f}^c = \bar{\mathbf{B}}^{\text{T}}(0) \boldsymbol{\sigma}(0) \Omega_E \quad (5.52)$$

Recorrendo-se à equação constitutiva dada no capítulo anterior, avaliada no ponto central do elemento, tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma}(0) = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(0) \quad (5.53)$$

O vetor de forças internas pode então ser re-escrito como sendo:

$$\mathbf{f}^c(0) = \mathbf{K}^c \mathbf{U} \quad (5.54)$$

sendo  $\mathbf{K}^c$  a matriz de rigidez do elemento, dada por:

$$\mathbf{K}^c = \bar{\mathbf{B}}^{\text{T}}(0) \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}}(0) \Omega_E \quad (5.55)$$

Com o intuito de eliminar os modos espúrios, Hu e Nagy (1997) propõem a adição de uma componente de força resistente aos modos espúrios  $\mathbf{f}^{\text{hg}}$  ao vetor de forças internas do elemento  $\mathbf{f}^{\text{int}}$ . Este mesmo artifício é empregado neste trabalho, de tal forma que o vetor de forças internas fica escrito como abaixo:

$$\mathbf{f}^{\text{int}} = \mathbf{f}^c + \mathbf{f}^{\text{hg}} \quad (5.56)$$

sendo  $\mathbf{f}^{\text{hg}}$  definido, a partir da Equação (5.51), pela seguinte expressão:

$$\mathbf{f}^{\text{hg}} = \left[ \frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_1}^{\text{T}}(0) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_1}(0) + \frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_2}^{\text{T}}(0) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_2}(0) + \frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_3}^{\text{T}}(0) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_3}(0) + \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_1\xi_2}^{\text{T}}(0) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_1\xi_2}(0) + \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_2\xi_3}^{\text{T}}(0) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_2\xi_3}(0) + \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_1\xi_3}^{\text{T}}(0) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_1\xi_3}(0) \right] \Omega_{\text{E}} \quad (5.57)$$

Uma vez que as derivadas de primeira e de segunda ordens do vetor de tensões possam ser obtidas a partir da equação constitutiva do material, é possível definir a matriz de rigidez de estabilização  $\mathbf{K}^{\text{stab}}$  como sendo:

$$\mathbf{f}^{\text{hg}}(0) = \mathbf{K}^{\text{stab}} \mathbf{U} \quad (5.58)$$

Como o emprego de relações constitutivas do material para o cálculo das derivadas de tensões pode levar a um excesso de tarefas computacionais para determinados materiais, emprega-se aqui a mesma técnica utilizada por Hu e Nagy (1997), a qual consiste em tomar as seguintes relações constitutivas:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_1} = \mathbf{E} \hat{\mathbf{e}}_{,\xi_1} ; \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_2} = \mathbf{E} \hat{\mathbf{e}}_{,\xi_2} ; \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_3} = \mathbf{E} \hat{\mathbf{e}}_{,\xi_3} ; \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_1\xi_2} = \mathbf{E} \hat{\mathbf{e}}_{,\xi_1\xi_2} ; \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_2\xi_3} = \mathbf{E} \hat{\mathbf{e}}_{,\xi_2\xi_3} ; \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi_1\xi_3} = \mathbf{E} \hat{\mathbf{e}}_{,\xi_1\xi_3} \quad (5.59)$$

onde:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e} \end{bmatrix}_{(6 \times 6)} ; \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 2\lambda_e & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_e & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda_e \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

sendo  $\lambda_e$  o módulo de corte. Como se pode verificar, com este procedimento evita-se o surgimento de travamento volumétrico em materiais incompressíveis, pois a matriz de estabilização  $\mathbf{E}$  não depende do módulo de incompressibilidade  $\mu_e$ .

É importante ressaltar que a performance do elemento depende muito da matriz de estabilização  $\mathbf{E}$ , a qual é empregada no cálculo das tensões resistentes aos modos espúrios (Eq. 5.59). As seguintes características devem estar presentes nesta matriz: (a) a matriz de rigidez resultante em nível de elemento deve ter posto suficiente; (b) o travamento volumétrico e o travamento de cisalhamento devem ser evitados e (c) não deve ser necessária a utilização de parâmetros especificados pelo usuário.

Finalmente, substituindo-se as expressões dadas em (5.59) na Equação (5.57), obtém-se a matriz de rigidez de estabilização, dada na seguinte forma:

$$\mathbf{K}^{\text{stab}} = \left[ \frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_1}^T(0) \mathbf{E} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_1}(0) + \frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_2}^T(0) \mathbf{E} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_2}(0) + \frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_3}^T(0) \mathbf{E} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_3}(0) + \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_1\xi_2}^T(0) \mathbf{E} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_1\xi_2}(0) + \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_2\xi_3}^T(0) \mathbf{E} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_2\xi_3}(0) + \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_1\xi_3}^T(0) \mathbf{E} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi_1\xi_3}(0) \right] \Omega_E \quad (5.61)$$

Quando utiliza-se um ponto de integração, o vetor de forças internas não é adequadamente avaliado em elementos bastante distorcidos. Além disso, os modos associados ao travamento por cisalhamento em flexão não encontram-se ainda totalmente removidos. Para contornar estes problemas, emprega-se o mesmo procedimento proposto por Liu et al. (1994), que consiste em adotar um sistema de coordenadas co-rotacional, que gira com o elemento, tomando, além disso, as seguintes medidas:

1. Substituir os vetores gradiente  $\mathbf{b}_i$  (equações 5.33 – 5.35), avaliados no centro do elemento, por vetores gradiente uniformes, dados de acordo com Flanagan e Belytschko (1981):

$$\tilde{\mathbf{b}}_i = \frac{1}{\Omega_E} \int_{\Omega_E} \mathbf{N}_{,i}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\Omega_E \quad (5.62)$$

2. Cada componente de deformação de cisalhamento deve ser interpolada linearmente em apenas uma direção do sistema de coordenadas referencial. Assim, tem-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{xy}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \boldsymbol{\varepsilon}_{xy}(0) + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{xy,\xi_3}(0) \xi_3 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yz}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \boldsymbol{\varepsilon}_{yz}(0) + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{yz,\xi_1}(0) \xi_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xz}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \boldsymbol{\varepsilon}_{xz}(0) + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{xz,\xi_2}(0) \xi_2 \end{aligned} \quad (5.63)$$

o que resulta em:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi_1}(0) &= \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi_2}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi_1\xi_2}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi_2\xi_3}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi_1\xi_3}(0) = 0 \\ \hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi_2}(0) &= \hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi_3}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi_1\xi_2}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi_2\xi_3}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi_1\xi_3}(0) = 0 \\ \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi_1}(0) &= \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi_3}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi_1\xi_2}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi_2\xi_3}(0) = \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi_1\xi_3}(0) = 0 \end{aligned} \quad (5.64)$$

sendo  $\hat{\mathbf{B}}_{xy}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}_{yz}$  e  $\hat{\mathbf{B}}_{xz}$  as matrizes gradiente correspondentes às componentes desviadoras  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{xy}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{yz}$  e  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{xz}$ , respectivamente.

O resultado destas duas alterações reflete-se na composição das matrizes gradiente, as quais passam a ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{xx}(0) \\ \mathbf{B}_{yy}(0) \\ \mathbf{B}_{zz}(0) \\ \mathbf{B}_{xy}(0) \\ \mathbf{B}_{yz}(0) \\ \mathbf{B}_{xz}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_2^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^T \\ \tilde{\mathbf{b}}_2^T & \tilde{\mathbf{b}}_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_3^T & \tilde{\mathbf{b}}_2^T \\ \tilde{\mathbf{b}}_3^T & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{b}}_1^T \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_{xx,\xi_1}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yy,\xi_1}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{zz,\xi_1}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi_1}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi_1}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi_1}(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\frac{1}{3}D_{22}\boldsymbol{\gamma}_1^T & -\frac{1}{3}D_{33}\boldsymbol{\gamma}_2^T \\ \mathbf{0} & \frac{2}{3}D_{22}\boldsymbol{\gamma}_1^T & -\frac{1}{3}D_{33}\boldsymbol{\gamma}_2^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_{33}\boldsymbol{\gamma}_2^T & D_{22}\boldsymbol{\gamma}_1^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_{xx,\xi_2}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yy,\xi_2}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{zz,\xi_2}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi_2}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi_2}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi_2}(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}D_{11}\boldsymbol{\gamma}_1^T & \mathbf{0} & -\frac{1}{3}D_{33}\boldsymbol{\gamma}_3^T \\ -\frac{1}{3}D_{11}\boldsymbol{\gamma}_1^T & \mathbf{0} & -\frac{1}{3}D_{33}\boldsymbol{\gamma}_3^T \\ -\frac{1}{3}D_{11}\boldsymbol{\gamma}_1^T & \mathbf{0} & \frac{2}{3}D_{33}\boldsymbol{\gamma}_3^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ D_{33}\boldsymbol{\gamma}_3^T & \mathbf{0} & D_{11}\boldsymbol{\gamma}_1^T \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_{xx,\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yy,\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{zz,\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi_3}(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}D_{11}\boldsymbol{\gamma}_2^T & -\frac{1}{3}D_{22}\boldsymbol{\gamma}_3^T & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{3}D_{11}\boldsymbol{\gamma}_2^T & \frac{2}{3}D_{22}\boldsymbol{\gamma}_3^T & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{3}D_{11}\boldsymbol{\gamma}_2^T & -\frac{1}{3}D_{22}\boldsymbol{\gamma}_3^T & \mathbf{0} \\ D_{22}\boldsymbol{\gamma}_3^T & D_{11}\boldsymbol{\gamma}_2^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_{xx,\xi_1\xi_2}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yy,\xi_1\xi_2}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{zz,\xi_1\xi_2}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi_1\xi_2}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi_1\xi_2}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi_1\xi_2}(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{3}D_{33}\boldsymbol{\gamma}_4^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{3}D_{33}\boldsymbol{\gamma}_4^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{2}{3}D_{33}\boldsymbol{\gamma}_4^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_{xx,\xi_2\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yy,\xi_2\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{zz,\xi_2\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi_2\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi_2\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi_2\xi_3}(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}D_{11}\boldsymbol{\gamma}_4^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{3}D_{11}\boldsymbol{\gamma}_4^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{3}D_{11}\boldsymbol{\gamma}_4^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_{xx,\xi_1\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yy,\xi_1\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{zz,\xi_1\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi_1\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi_1\xi_3}(0) \\ \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi_1\xi_3}(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\frac{1}{3}D_{22}\boldsymbol{\gamma}_4^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{2}{3}D_{22}\boldsymbol{\gamma}_4^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{3}D_{22}\boldsymbol{\gamma}_4^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

As componentes dos vetores  $\tilde{\mathbf{b}}_i$  são obtidos da seguinte forma:

$$\tilde{b}_{ia} = \frac{b_{ia}}{12\Omega_E} \quad (5.72)$$

sendo  $\Omega_E$  o volume do elemento, obtido fazendo-se:

$$\Omega_E = \frac{1}{12} \sum_{a=1}^8 \underline{b}_{ia} x_{ia} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.73)$$

onde não se emprega a notação de Einstein em  $i$ .

As componentes do vetor auxiliar  $\underline{\mathbf{b}}_i$  são determinados de tal forma que para a sua primeira componente, ou seja,  $i = 1$  e  $a = 1$ , valha a seguinte expressão:

$$\underline{b}_{11} = 12\Omega_E \tilde{b}_{11} = y_2 [(z_6 - z_3) - (z_4 - z_5)] + y_3 (z_2 - z_4) + y_4 [(z_3 - z_8) - (z_5 - z_2)] + y_5 [(z_8 - z_6) - (z_2 - z_4)] + y_6 (z_5 - z_2) + y_8 (z_4 - z_5) \quad (5.74)$$

onde considera-se  $x = x_1$ ,  $y = x_2$  e  $z = x_3$ . Os subíndices colocados em  $x$ ,  $y$  e  $z$  referem-se ao número local dos nós do elemento.

As outras componentes do vetor  $\underline{\mathbf{b}}_i$  são obtidas a partir da seqüência dada em  $\underline{b}_{11}$ , realizando-se a permutação de coordenadas nodais de acordo com a Tabela 5.1 abaixo.

Tabela 5.1: Permutação para os números nodais na geração das componentes  $\underline{b}_{1a}$ .

Índice $a$	Coordenadas $y$ e $z$					
1	2	3	4	5	6	8
2	3	4	1	6	7	5
3	4	1	2	7	8	6
4	1	2	3	8	5	7
5	8	7	6	1	4	2
6	5	8	7	2	1	3
7	6	5	8	3	2	4
8	7	6	5	4	3	1

Assim, por exemplo, para a componente  $\underline{b}_{12}$ , tem-se:

$$\underline{b}_{12} = 12V\tilde{b}_{12} = y_3 [(z_7 - z_4) - (z_1 - z_6)] + y_4 (z_3 - z_1) + y_1 [(z_4 - z_5) - (z_6 - z_3)] + y_6 [(z_5 - z_7) - (z_3 - z_1)] + y_7 (z_6 - z_3) + y_5 (z_1 - z_6) \quad (5.75)$$

Para obter-se as componentes dos vetores  $\underline{b}_2$  e  $\underline{b}_3$ , deve-se trocar as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  de acordo com a Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Permutação para as coordenadas globais na geração de  $\underline{b}_i$ .

Índice $i$	Coordenadas	
1	$y$	$z$
2	$z$	$x$
3	$x$	$y$

Assim, para a componente  $\underline{b}_{32}$  tem-se a seguinte expressão:

$$\underline{b}_{32} = 12\Omega_E\tilde{b}_{32} = x_3 [(y_7 - y_4) - (y_1 - y_6)] + x_4 (y_3 - y_1) + x_1 [(y_4 - y_5) - (y_6 - y_3)] + x_6 [(y_5 - y_7) - (y_3 - y_1)] + x_7 (y_6 - y_3) + x_5 (y_1 - y_6) \quad (5.76)$$

## 5.4 A NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA

### 5.4.1 A matriz de rigidez tangente

Quando considera-se a hipótese de pequenos deslocamentos as matrizes e vetores que constituem a equação de equilíbrio são avaliados sobre a configuração original dos elementos, assim como a matriz gradiente, a qual é assumida como sendo constante e independente dos deslocamentos. Entretanto, quando há a presença de não-linearidade geométrica, o equilíbrio deve ser satisfeito de forma incremental para cada intervalo ou passo de tempo, sendo que a matriz de rigidez e o vetor de forças internas são dados em função dos deslocamentos.

Na análise incremental considera-se que a solução em um ponto discreto  $t$  no domínio do tempo é conhecida e a solução para o instante  $t + \Delta t$  é requerida. Desta forma, a condição de equilíbrio em elementos finitos pode ser dada pela seguinte expressão:

$$[\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}]_{t+\Delta t} = \mathbf{P}_{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{t+\Delta t}^{\text{int}} \quad (5.77)$$

onde  $\mathbf{P}_{t+\Delta t}$  e  $\mathbf{f}_{t+\Delta t}^{\text{int}}$  são os vetores de forças externas e de forças internas em  $t + \Delta t$ , respectivamente.

De acordo com Mondkar e Powell (1977), a equação de equilíbrio dinâmico na sua forma incremental pode ser escrita como sendo:

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D}\Delta\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_t^{\text{tang}}\Delta\mathbf{U} = \mathbf{P}_{t+\Delta t} - [\mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{U}) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}]_t \quad (5.78)$$

sendo  $\Delta\ddot{\mathbf{U}}$ ,  $\Delta\dot{\mathbf{U}}$  e  $\Delta\mathbf{U}$  os vetores contendo os valores incrementais nodais de deslocamentos, velocidades e acelerações, respectivamente. Na expressão acima é empregado o Método de Newton-Raphson (Bathe, 1996) para a linearização do problema não-linear dentro do intervalo de tempo  $[t, t + \Delta t]$ , onde considera-se que o vetor de forças internas é submetido a uma expansão em séries de Taylor da seguinte maneira:

$$\mathbf{f}_{t+\Delta t}^{\text{int}} = \mathbf{f}_t^{\text{int}} + \frac{\partial \mathbf{f}_t^{\text{int}}}{\partial \mathbf{U}_t} \Delta\mathbf{U} \quad (5.79)$$

de onde é definida a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_t^{\text{tang}}$  como sendo:

$$\mathbf{K}_t^{\text{tang}} = \frac{\partial \mathbf{f}_t^{\text{int}}}{\partial \mathbf{U}_t} \quad (5.80)$$

A partir da solução  $\Delta\mathbf{U}$  obtida através da Equação (5.78), realiza-se a aproximação para o campo de deslocamentos em  $t + \Delta t$ :

$$\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{U}_t + \Delta\mathbf{U} \quad (5.81)$$

Um processo iterativo deve ser usado até que o incremento  $\Delta\mathbf{U}$  produza uma aproximação  $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$  capaz de satisfazer o equilíbrio para a Equação (5.78) com um dado nível de tolerância.

No presente trabalho, como foi mencionado anteriormente, a matriz de rigidez tangente e o vetor de forças internas são avaliados em um sistema co-rotacional. Assim, no instante de tempo  $t$  e para a iteração  $j$ , tem-se que:

$$\mathbf{K}_t^{\text{tang,c}} \Big|_j = \int_{\Omega_j^c} \bar{\mathbf{B}}^T (\mathbf{C} + \hat{\mathbf{T}}_j^c) \bar{\mathbf{B}} d\Omega_j^c \quad (5.82)$$

$$\mathbf{f}_t^{\text{int,c}} \Big|_j = \int_{\Omega_j^c} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma}_j^c d\Omega_j^c \quad (5.83)$$

onde  $\Omega_j^c$  refere-se à configuração do corpo na iteração  $j$  no sistema co-rotacional e  $\hat{\mathbf{T}}_j^c$  e  $\boldsymbol{\sigma}_j^c$  são a matriz de tensões relacionadas à taxa de Truesdell e o tensor de tensões de Cauchy co-rotacionais, respectivamente, ambas definidas na iteração  $j$  e no sistema co-rotacional.

A matriz de rigidez tangente e o vetor de forças internas no sistema global são obtidas através de uma transformação objetiva do sistema co-rotacional ao sistema global, ou seja:

$$\mathbf{K}^{\text{tang}} = \mathbf{R}^T \mathbf{K}^{\text{tang,c}} \mathbf{R} \quad (5.84)$$

$$\mathbf{f}^{\text{int}} = \mathbf{R}^T \mathbf{f}^{\text{int,c}} \quad (5.85)$$

onde  $\mathbf{R}$  é uma matriz ortogonal de rotação.

#### 5.4.2 Determinação da matriz de rotação ao sistema co-rotacional

Para este trabalho, o sistema de coordenadas co-rotacional é estabelecido através de uma transformação a partir do sistema de coordenadas global  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  ao sistema co-rotacional  $x_1^c$ ,  $x_2^c$  e  $x_3^c$  empregando uma matriz ortogonal de rotação  $\mathbf{R}$  de tal forma que os vetores de base, que definem o sistema co-rotacional, devem estar alinhados aos eixos locais de referência do elemento,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$ . Entretanto, como verifica-se através do trabalho de Belytschko e Bindemann (1993), quando os lados do elemento não permanecem paralelos após a deformação a rotação é feita apenas de forma aproximada.

Inicialmente são definidos os vetores  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ , dados no sistema global e coincidentes com os eixos locais  $\xi_1$  e  $\xi_2$  do elemento, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1i} &\equiv \xi_1^T \mathbf{x}_i & (i = 1, 2, 3) \\ \mathbf{r}_{2i} &\equiv \xi_2^T \mathbf{x}_i & (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (5.86)$$

Um termo de correção  $\mathbf{r}_c$  deve ser adicionado ao vetor  $\mathbf{r}_2$  de forma a garantir a ortogonalidade entre  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ , ou seja:

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_c) = 0 \quad (5.87)$$

o que se obtém através da seguinte expressão:

$$\mathbf{r}_c = -\frac{\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2}{\mathbf{r}_1\mathbf{r}_1}\mathbf{r}_1 \quad (5.88)$$

A base ortogonal é construída fazendo-se o seguinte produto vetorial:

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_c) \quad (5.89)$$

Finalmente, as componentes da matriz de rotação  $\mathbf{R}$  são obtidas através da normalização dos vetores de base, ou seja:

$$R_{1i} = \frac{r_{1i}}{\|\mathbf{r}_1\|} \quad ; \quad R_{2i} = \frac{r_{2i} + r_{ci}}{\|\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_c\|} \quad ; \quad R_{3i} = \frac{r_{3i}}{\|\mathbf{r}_3\|} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.90)$$

## 5.5 O ESQUEMA DE AVANÇO NO TEMPO PARA A ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR

### 5.5.1 O esquema implícito de Newmark

No método de Newmark considera-se, inicialmente, que a aceleração tem uma variação linear dentro do intervalo de tempo  $[t, t + \Delta t]$ . A partir disso, é possível obter-se as atualizações para os campos de acelerações e velocidades a partir das seguintes expressões (ver Bathe, 1996):

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}_t + \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_t + \delta \Delta t (\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{U}}_t) \quad (5.91)$$

$$\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{U}_t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{U}}_t + \alpha \Delta t^2 (\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{U}}_t) \quad (5.92)$$

sendo:

$$\delta \geq \frac{1}{2} \quad ; \quad \alpha \geq \frac{1}{4} \left( \delta + \frac{1}{4} \right)^2 \quad (5.93)$$

Aplicando-se o método de Newmark à forma incremental da equação de equilíbrio dinâmico (5.78), obtém-se a seguinte fórmula:

$$\mathbf{K}_t^* \Delta \mathbf{U} = \mathbf{P}_{t+\Delta t}^* \quad (5.94)$$

sendo  $\mathbf{K}_t^*$  e  $\mathbf{P}_t^*$  a matriz de rigidez e o vetor de cargas efetivos, respectivamente, dados por:

$$\mathbf{K}_t^* = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \mathbf{D} + \mathbf{K}_t^{\text{tang}} \quad (5.95)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{t+\Delta t}^* = & \mathbf{P}_{t+\Delta t} - \left[ \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}_t + \mathbf{D} \dot{\mathbf{U}}_t + \mathbf{f}_t^{\text{int}}(\mathbf{U}_t) \right] + \\ & \mathbf{M} \left[ \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{U}}_t + \frac{1}{2\alpha} \ddot{\mathbf{U}}_t \right] + \mathbf{D} \left[ \frac{\delta}{\alpha} \dot{\mathbf{U}}_t + \Delta t \left( \frac{\delta}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\mathbf{U}}_t \right] \end{aligned} \quad (5.96)$$

Para que o método seja incondicionalmente estável, pelo menos para análises lineares, propõe-se a forma trapezoidal do esquema, ou seja:  $\alpha = 1/4$  e  $\delta = 1/2$ .

O algoritmo empregado para a análise dinâmica não-linear, usando o método implícito de Newmark, pode ser resumido nos passos apresentados abaixo:

#### A. Procedimentos de inicialização:

- A.1 Determinar as condições iniciais para as variáveis do problema:  $\mathbf{U}_0$ ,  $\dot{\mathbf{U}}_0$  e  $\ddot{\mathbf{U}}_0$
- A.2 Especificar o incremento de tempo  $\Delta t$  e a tolerância TOL para o critério de convergência.
- A.3 Computar as constantes do Método de Newmark a partir dos parâmetros  $\alpha$  e  $\delta$ :

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \quad ; \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \quad ; \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t} \\ a_3 = \frac{1}{2\alpha} \quad ; \quad a_4 = \frac{\delta}{\alpha} \quad ; \quad a_5 = \Delta t \left( \frac{\delta}{2\alpha} - 1 \right) \end{aligned}$$

- A.4 Armazenar as matrizes de massa e de amortecimento, constantes no tempo.

#### B. Início do laço no tempo: $t = t + \Delta t$

- B.1 Calcular a matriz de rigidez efetiva  $\mathbf{K}_t^*$  (Equação 5.95);
- B.2 Calcular o vetor de cargas efetivo  $\mathbf{P}_{t+\Delta t}^*$  (Equação 5.96);
- B.3 Resolver o sistema  $\mathbf{K}_t^* \Delta \mathbf{U} = \mathbf{P}_{t+\Delta t}^*$

B.4 Atualizar os campos de acelerações, velocidades e deslocamentos:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} &= \ddot{\mathbf{U}}_t - a_2 \dot{\mathbf{U}}_t - a_3 \ddot{\mathbf{U}}_t + a_0 \Delta \mathbf{U} \\ \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{U}}_t - a_4 \dot{\mathbf{U}}_t - a_5 \ddot{\mathbf{U}}_t + a_1 \Delta \mathbf{U} \\ \mathbf{U}_{t+\Delta t} &= \mathbf{U}_t + \Delta \mathbf{U}\end{aligned}$$

B.5 Calcular o vetor de cargas residual:

$$\mathbf{r}(\mathbf{P}_{t+\Delta t}, \mathbf{U}_{t+\Delta t}) = \mathbf{P}_{t+\Delta t} - [\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{U}_{t+\Delta t})]$$

sendo:  $\mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{U}_{t+\Delta t}) = \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{U}_t) + \Delta \mathbf{f}^{\text{int}}$

B.6 Checar a convergência para a configuração atual ( $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ ):

$$\|\mathbf{r}(\mathbf{P}_{t+\Delta t}, \mathbf{U}_{t+\Delta t})\| / \|\mathbf{P}_{t+\Delta t}\| \leq \text{TOL?} \Rightarrow \begin{cases} \text{Sim: segue para o passo de tempo seguinte (item B)} \\ \text{Não: segue para o item C} \end{cases}$$

### C. Início do laço iterativo: $k = k + 1$

C.1 Atualizar a matriz de rigidez efetiva  $\mathbf{K}_t^*$  para a última configuração ( $\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{k+1} = \mathbf{U}_{t+\Delta t}^k + \delta \mathbf{U}$ );

C.2 Resolver o sistema  $\mathbf{K}_t^*(\mathbf{U}_{t+\Delta t})\delta \mathbf{U} = \mathbf{r}(\mathbf{P}_{t+\Delta t}, \mathbf{U}_{t+\Delta t})$

C.3 Atualizar os campos de acelerações, velocidades e deslocamentos:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{k+1} &= \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^k + a_0 \delta \mathbf{U} \\ \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{k+1} &= \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^k + a_1 \delta \mathbf{U} \\ \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{k+1} &= \mathbf{U}_{t+\Delta t}^k + \delta \mathbf{U}\end{aligned}$$

C.4 Calcular o vetor de cargas residual:

$$\mathbf{r}(\mathbf{P}_{t+\Delta t}, \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{k+1}) = \mathbf{P}_{t+\Delta t} - [\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{k+1} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^{k+1} + \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{k+1})]$$

C.5 Checar a convergência para a configuração atual ( $\mathbf{U}_{t+\Delta t}^{k+1}$ ):

$$\|\mathbf{r}(\mathbf{P}_{t+\Delta t}, \mathbf{U}_{t+\Delta t}^{k+1})\| / \|\mathbf{P}_{t+\Delta t}\| \leq \text{TOL?} \Rightarrow \begin{cases} \text{Sim: segue para o passo de tempo seguinte (item B)} \\ \text{Não: segue para o passo iterativo seguinte (item C.1)} \end{cases}$$

**Fim do laço iterativo.**

**Fim do laço de tempo.**

Para a solução dos sistemas  $\mathbf{K}_t^* \Delta \mathbf{U} = \mathbf{P}_{t+\Delta t}^*$  e  $\mathbf{K}_t^*(\mathbf{U}_{t+\Delta t})\delta \mathbf{U} = \mathbf{r}(\mathbf{P}_{t+\Delta t}, \mathbf{U}_{t+\Delta t})$  é empregado o método da decomposição de Cholesky utilizando a propriedade de banda simétrica, a qual é otimizada pelo próprio gerador de malha (ver Capítulo 7) através do método de Cuthill e McKee (1969).

### 5.5.2 O método $\alpha$ -Generalizado e a estabilização do processo de integração temporal para problemas altamente não-lineares

Um esquema numérico baseado no método  $\alpha$ -Generalizado é empregado neste trabalho para a estabilização do processo de integração no tempo da equação de equilíbrio dinâmico em problemas altamente não-lineares. Neste esquema a equação de equilíbrio dinâmico para o caso linear (Eq. 5.19) é modificada da seguinte forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{n+1-\alpha_m} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}_{n+1-\alpha_f} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{n+1-\alpha_f} = \mathbf{P}_{n+1-\alpha_f} \quad (5.97)$$

sendo:

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1-\alpha_m} = (1-\alpha_m)\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} + \alpha_m\ddot{\mathbf{U}}_n \quad (5.98)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1-\alpha_f} = (1-\alpha_f)\dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \alpha_f\dot{\mathbf{U}}_n \quad (5.99)$$

$$\mathbf{U}_{n+1-\alpha_f} = (1-\alpha_f)\mathbf{U}_{n+1} + \alpha_f\mathbf{U}_n \quad (5.100)$$

$$\mathbf{P}_{n+1-\alpha_f} = (1-\alpha_f)\mathbf{P}_{n+1} + \alpha_f\mathbf{P}_n \quad (5.101)$$

onde  $n$  e  $n+1$  são os pontos inicial e final, respectivamente, dentro do passo de tempo  $\Delta t$ , e  $\alpha_m$  e  $\alpha_f$  são parâmetros do método.

No caso não-linear o método  $\alpha$ -Generalizado assume a seguinte forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{n+1-\alpha_m} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}_{n+1-\alpha_f} + \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{\text{int}} = \mathbf{P}_{n+1-\alpha_f} \quad (5.102)$$

No presente trabalho, o vetor de forças internas é desenvolvido de uma forma similar àquela feita para o vetor de forças externas, ou seja:

$$\mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{\text{int}} = (1-\alpha_f)\mathbf{f}_{n+1}^{\text{int}} + \alpha_f\mathbf{f}_n^{\text{int}} = (1-\alpha_f)\mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{U}_{n+1}) + \alpha_f\mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{U}_n) \quad (5.103)$$

Com o objetivo de reduzir o conjunto de variáveis dadas pela Equação (5.102) a apenas uma única incógnita, o vetor de deslocamentos  $\mathbf{U}_{n+1}$ , as aproximações de Newmark são usadas para a descrição dos vetores de velocidade e aceleração dados em (5.98) e (5.99), ou seja:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} (\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n) - \frac{\delta - \alpha}{\alpha} \dot{\mathbf{U}}_n - \frac{\delta - 2\alpha}{2\alpha} \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_n \quad (5.104)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} (\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{U}}_n - \frac{1 - 2\alpha}{2\alpha} \ddot{\mathbf{U}}_n \quad (5.105)$$

Desta forma, substituindo-se as expressões (5.104) e (5.105) nas posições correspondentes das equações (5.98) e (5.99), obtém-se que:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \frac{(1 - \alpha_f) \delta}{\alpha \Delta t} (\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n) - \frac{(1 - \alpha_f) \delta - \alpha}{\alpha} \dot{\mathbf{U}}_n - \frac{(\delta - 2\alpha)(1 - \alpha_f)}{2\alpha} \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_n \quad (5.106)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \frac{1 - \alpha_m}{\alpha \Delta t^2} (\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n) - \frac{1 - \alpha_m}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{U}}_n - \frac{1 - \alpha_m - 2\alpha}{2\alpha} \ddot{\mathbf{U}}_n \quad (5.107)$$

A forma efetiva da equação de equilíbrio dinâmico é obtida substituindo-se as expressões (5.106) e (5.107) na Equação (5.102), considerando a equação de equilíbrio incremental apresentada em (5.78), resultando na seguinte expressão:

$$\left\{ \left[ \frac{1 - \alpha_m}{\alpha \Delta t^2} \right] \mathbf{M} + \left[ \frac{(1 - \alpha_f) \delta}{\alpha \Delta t} \right] \mathbf{D} + \mathbf{K}_{n+1-\alpha_f}^{\text{tang}} \right\} \Delta \mathbf{U} = \mathbf{P}_{n+1-\alpha_f} - \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{\text{int}} (\mathbf{U}_{n+1}^k) - \mathbf{M} \left[ \frac{1 - \alpha_m}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{U}}_n + \frac{1 - \alpha_m - 2\alpha}{2\alpha} \ddot{\mathbf{U}}_n \right] - \mathbf{D} \left\{ \frac{(1 - \alpha_f) \delta - \alpha}{\alpha} \dot{\mathbf{U}}_n + \frac{(\delta - 2\alpha)(1 - \alpha_f)}{2\alpha} \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_n \right\} \quad (5.108)$$

onde considera-se que a matriz de rigidez tangente vem expressa por (ver Khul e Crisfield, 1999):

$$\mathbf{K}_{n+1-\alpha_f}^{\text{tang}} = (1 - \alpha_f) \mathbf{K}_{n+1}^{\text{tang}} (\mathbf{U}_{n+1}^k) \quad (5.109)$$

No método de estabilização empregado neste trabalho os parâmetros  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\alpha_m$  e  $\alpha_f$  são definidos em função do raio espectral  $r$

$$\alpha_m = \frac{2r_\alpha - 1}{r_\alpha + 1} \quad (5.112)$$

$$\alpha_f = \frac{r_\alpha}{r_\alpha + 1} \quad (5.113)$$

O raio espectral representa o valor máximo em módulo dos autovalores da matriz de amplificação dinâmica, a qual é empregada no processo de avaliação das propriedades de precisão e estabilidade dos algoritmos por meio de uma análise de autovalores e autovetores (ver, por exemplo, Hilber et al., 1977), sendo constituída de elementos formados a partir das constantes físicas da estrutura. Geralmente, a matriz de amplificação dinâmica apresenta três autovalores não nulos, situação na qual a estabilidade da solução numérica será garantida sempre que  $r_\alpha \leq 1$ . No entanto, é importante ressaltar que esta garantia só tem sentido em sistemas dinâmicos lineares.

Para a solução de um problema através do método desenvolvido nesta seção utiliza-se o mesmo algoritmo apresentado na seção anterior, respectivo ao método de Newmark, levando em conta que neste caso a equação de equilíbrio dinâmico (5.94) é substituída pela expressão (5.108), considerando-se os parâmetros definidos pelas equações (5.110) a (5.113) em função do raio espectral  $r_\alpha$ , cujos valores atribuídos devem estar dentro do intervalo  $[0,1]$ .

### 5.5.3 O esquema de controle algorítmico de energia

Com o objetivo de obter um esquema de integração no tempo para a estrutura com propriedades conservativas e numericamente estável, nesta tese é proposta uma nova formulação na qual a energia do sistema dinâmico é mantida a partir de um controle de dissipação numérica dado em função do equilíbrio termodinâmico do sistema estrutural. Segundo Kuhl e Crisfield (1999), uma condição suficiente para manter o processo de integração no tempo estável no regime não-linear é que haja a conservação ou ainda a queda da energia total dentro de cada passo de tempo. Este critério de energia é representado pela seguinte inequação:

$$\Delta U + \Delta K - W_{\text{ext}} \leq 0 \quad (5.114)$$

onde  $W_{\text{ext}}$  é o trabalho realizado pelas forças externas dentro do passo de tempo,  $\Delta U = U_{n+1} - U_n$  e  $\Delta K = K_{n+1} - K_n$ , sendo  $U_n$  e  $U_{n+1}$  a energia de deformação no início e no

fim do passo de tempo e  $K_n$  e  $K_{n+1}$  são os valores correspondentes para a energia cinética. Considera-se aqui que nenhuma forma de calor é criada ou dissipada no sistema pela ação do trabalho mecânico.

Para que o critério de energia dado em (5.114) seja perfeitamente satisfeito, o trabalho realizado pelas forças externas deve ser exatamente igual à soma dos incrementos das energias de deformação e cinética. Caso contrário, um resíduo de energia  $R$  irá existir, o qual é expresso pela seguinte equação:

$$R = W_{\text{ext}} - (\Delta U + \Delta K) \quad (5.115)$$

onde  $R$ , que pode ser tanto a falta ou o excesso de energia do sistema estrutural, deve ser minimizado. No presente trabalho propõe-se que a energia a ser adicionada ou removida do sistema com o objetivo de satisfazer a restrição de energia (5.114) de forma exata seja aproximada pelo trabalho mecânico realizado por uma força viscosa fictícia, como mostrado abaixo:

$$R = \mathbf{U}_{n+1}^T (\beta \mathbf{M}) \dot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{R}{\mathbf{U}_{n+1}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}_{n+1}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}^f = \beta \mathbf{M} \quad (5.116)$$

onde  $\mathbf{D}^f$  é uma matriz de amortecimento artificial, sendo aproximada através do produto da matriz de massa  $\mathbf{M}$  e de um escalar  $\beta$ , o qual é obtido de forma a igualar o resíduo de energia. A matriz  $\mathbf{D}^f$  é somada ao termo de amortecimento da equação de equilíbrio dinâmico e é continuamente modificada ao longo do processo iterativo a fim de obter a condição de balanço de energia no passo de tempo correspondente. O esquema de controle de energia apresentado acima é utilizado apenas na formulação do método  $\alpha$ -Generalizado.

## 6 O MODELO NUMÉRICO PARA O ACOPLAMENTO FLUIDO-ESTRUTURA

### 6.1 INTRODUÇÃO

#### 6.1.1 Terminologia para algoritmos de interação fluido-estrutura

Nesta seção é apresentada uma resenha sobre a terminologia comumente empregada na classificação e caracterização dos modelos numéricos de interação fluido-estrutura com o objetivo de elucidar o significado dos principais termos utilizados nas diferentes formulações, facilitando assim uma melhor compreensão e evitando conflitos de interpretação. As definições mostradas a seguir são baseadas na revisão apresentada no trabalho de Felippa et al. (2001).

O termo *sistema* refere-se a um conjunto de componentes que apresentam uma relação funcional entre si, formando uma única entidade de natureza coletiva. Nesta definição, o termo componente pode ser atribuído a um elemento ou parte do sistema, ou ainda a um subsistema pertencente ao sistema principal. No presente trabalho, a atenção estará restrita ao estudo de sistemas mecânicos, em especial àqueles presentes nos problemas de IFE relacionados à EVC.

Um *sistema acoplado* é aquele no qual componentes mecânicos com características físicas ou computacionais heterogêneas interagem dinamicamente. Basicamente, existem duas formas de abordagem para a análise de problemas acoplados: *Tratamento simultâneo ou monolítico* (“*monolithic approach*”) – neste caso, todo o problema é tratado como uma entidade monolítica, sendo todos os subsistemas integrados no tempo simultaneamente; *Tratamento particionado* (“*partitioned, staggered approach*”) – neste caso, os subsistemas são tratados computacionalmente como entidades isoladas que são integradas no tempo de uma forma seqüencial, sendo os efeitos de interação comunicados através da interface, usando técnicas de sincronização.

No que se refere às propriedades de conservação presentes no processo de interação, um modelo pode ser classificado ainda como sendo um *acoplamento fraco* (“*loose*” ou “*weak coupling*”) ou um *acoplamento forte* (“*strong coupling*”). Estas denominações são freqüentemente confundidas com a classificação dada para o tipo de acoplamento realizado, não fazendo qualquer distinção entre acoplamento fraco e tratamento particionado e acoplamento forte e tratamento monolítico. No entanto, um acoplamento é considerado forte quando as condições de compatibilidade e de equilíbrio são impostas simultaneamente no fluido e na estrutura. Por outro lado, o acoplamento é fraco devido ao fato de que estas condições são satisfeitas apenas aproximadamente, em forma seqüencial. Com isso, em uma primeira análise, apenas os modelos monolíticos podem realmente satisfazer as condições de equilíbrio e compatibilidade exatamente. Porém, ao empregar um esquema iterativo em cada passo de tempo para o processo de acoplamento, por exemplo, um modelo particionado pode ser considerado como possuindo um acoplamento forte. Outra alternativa freqüentemente utilizada para produzir um acoplamento mais forte em esquemas particionados consiste em utilizar termos adicionais de inércia e, inclusive, de amortecimento do fluido na equação de conservação de momentum da estrutura a partir da imposição das condições de acoplamento simultaneamente para os dois meios sobre as superfícies de interface. Este tipo de acoplamento é por vezes classificado como *acoplamento fraco consistente* (ver Braun, 2002; Zhang e Hisada, 2004).

De acordo com Zhang e Hisada, os esquemas de acoplamento fraco em problemas de interação fluido-estrutura podem ser classificados ainda em: *acoplamento fraco na solução da estrutura com interfaces*, *acoplamento fraco na solução do escoamento com interfaces* e *acoplamento fraco na solução do escoamento e da estrutura com interfaces*. No *acoplamento fraco para a solução da estrutura*, a interface é tratada com variáveis de contorno naturais na solução do sistema estrutural e com variáveis de contorno essenciais na análise do escoamento. Ou seja, vetores de forças e termos adicionais de matrizes de massa e amortecimento devidos ao escoamento são transferidas ao programa de solução da estrutura, que por sua vez transfere ao programa de solução do escoamento novas componentes de aceleração, velocidade e deslocamento para a interface. No *acoplamento fraco para a solução do escoamento* ocorre o inverso: o escoamento é resolvido considerando-se a interface como um contorno natural enquanto que a estrutura a considera um contorno essencial. A grande vantagem deste esquema está no fato de que o número de graus de liberdade da estrutura é, em geral, bem menor que o do fluido, facilitando o processo de acoplamento das matrizes e

reduzindo os custos computacionais. Por outro lado, estruturas com características não-lineares tendem a reduzir a taxa de convergência. Por fim, há ainda a alternativa de utilizar-se um *acoplamento fraco para a estrutura e para o escoamento com interfaces*, onde ambos os meios são resolvidos considerando-se a interface

particionamentos algébricos, onde forçosamente deve haver uma conformidade de discretizações nas superfícies de contato entre os meios.

### 6.1.2 Esquemas particionados versus esquemas monolíticos

Entre os diferentes grupos de pesquisa dedicados ao estudo e desenvolvimento de técnicas numéricas para a análise de problemas de interação fluido-estrutura é possível encontrar posições favoráveis e contrárias tanto para os esquemas de acoplamento monolítico como também para os esquemas de acoplamento particionado. Porém, o que se pode concluir, na verdade, é que ambos os tratamentos devem ser considerados de aplicação geral, em um primeiro momento, e que nenhum argumento técnico deve ser aceito de forma definitiva sobre a superioridade de algum deles até que alguma característica ou conjunto de características físicas, numéricas e/ou computacionais venha a depor definitivamente a favor ou contra algum dos esquemas. A adequação de cada método, portanto, se deve não só ao tipo de problema a ser analisado, como também a outros fatores como a disponibilidade e domínio sobre determinadas técnicas numéricas de solução, além de limitações de ordem computacional como a capacidade de armazenamento de memória e a velocidade de processamento. Inerentemente, cada modelo apresenta uma série de vantagens e desvantagens que devem ser analisadas, comparando-as à finalidade do modelo a ser desenvolvido, a fim de determinar-se o esquema mais adequado.

Os modelos de acoplamento monolítico têm por característica principal a utilização de esquemas totalmente explícitos ou totalmente implícitos para a solução simultânea no domínio do tempo dos meios físicos discretos referentes ao fluido e à estrutura. Neste tipo de abordagem as equações governantes são reformuladas combinando as equações de movimento relativas ao fluido e à estrutura, formando assim um único sistema.

Embora os modelos monolíticos caracterizam-se por um processo de acoplamento perfeito em termos de propriedades de conservação, esta alternativa resulta em uma série de dificuldades sob o ponto de vista numérico. Isto se deve ao fato de que a maioria dos problemas de interação fluido-estrutura é tratada como três problemas simultaneamente: a análise do escoamento do fluido, a análise do movimento da estrutura e a análise do movimento de malha. Cada um destes subsistemas apresenta propriedades matemáticas e numéricas distintas, o que dificulta enormemente uma análise simultânea. Ao empregar-se,

por exemplo, um esquema totalmente implícito, obtém-se como resultado um sistema de equações mal condicionado devido às diferenças observadas entre as rigidezes do fluido e da estrutura. Outro inconveniente é encontrado no fato de que em modelos monolíticos o passo de tempo adotado tem de ser igual em ambos os meios, o que torna o esquema ineficiente se escalas de tempo muito diferenciadas são observadas entre o fluido e a estrutura. Desta forma, ao utilizar-se um esquema totalmente explícito, esta desvantagem torna-se bastante evidente, pois como os passos de tempo adotados são geralmente determinados pela estrutura, onde as condições de estabilidade são muito mais restritivas em relação ao fluido, obtém-se sempre incrementos de tempo bastante reduzidos.

Nos modelos de acoplamento particionado a solução do problema de interação fluido-estrutura é obtida de forma seqüencial, analisando isoladamente cada um dos subsistemas correspondentes à estrutura e ao fluido. A interação entre os meios é feita através dos efeitos que cada subsistema exerce sobre o outro (condições de compatibilidade, condições de equilíbrio, leis de conservação). Nos esquemas particionados o processo de avanço no domínio do tempo é feito com os passos de tempo individuais para a estrutura e para o fluido, sendo que a troca de informações entre os meios é feita apenas em pontos de sincronização, facilitando assim o uso de um tratamento misto explícito/implícito para o fluido e para a estrutura, respectivamente.

As principais vantagens no uso de esquemas particionados são: *capacidade de modelar cada meio físico independentemente* – a abordagem particionada facilita o uso de malhas não conformes, onde as malhas não coincidem nas interfaces, possibilitando uma discretização mais racional de cada um dos subsistemas; *construir códigos customizados* – isto significa tratar cada um dos meios usando técnicas de discretização e solução mais adequadas a cada um dos subsistemas isoladamente. Espera-se sempre obter um algoritmo particionado que possa manter no problema acoplado a mesma eficiência observada nos subsistemas analisados isoladamente, considerando-se que os efeitos de interação possam ser tratados igualmente com eficiência; *modularidade* – novos métodos e modelos podem ser facilmente incorporados ao algoritmo existente, possibilitando uma fácil implementação e validação do mesmo de uma forma modular. Este aspecto é bastante importante para fins acadêmicos, onde várias linhas de pesquisa avançam independentemente, podendo-se mais tarde integrar novos módulos ao código de acoplamento já existente.

Apesar das várias vantagens apontadas acima, os esquemas particionados exigem sempre uma formulação e uma implementação mais criteriosa do modelo numérico para evitar o surgimento de degradações na precisão e na estabilidade do processo. Em algoritmos baseados em um acoplamento particionado há uma possibilidade muito maior do surgimento de instabilidades numéricas, particularmente quando as densidades do fluido e da estrutura são comparáveis. A razão para o aparecimento destas instabilidades está no fato de que os modelos particionados conservam energia, massa e momentum na interface fluido-estrutura apenas de forma assintótica, à medida que se aumentam os níveis de discretização temporal e espacial, ao contrário dos modelos monolíticos, onde a condição de conservação de energia é observada de forma exata. Geralmente, o nível de precisão dos modelos particionados sofre uma degradação em relação aos modelos monolíticos se a questão de conservação não é bem tratada. Além disso, devido ao fato dos efeitos inerciais e de amortecimento produzidos pelo fluido circundante à estrutura serem ignorados, a resposta estrutural tende a ser superestimada na presença de fortes interações entre fluido e estrutura. Conseqüentemente, no processo de solução do escoamento, as forças geradas sobre o fluido através da interface serão também superestimadas. Esta situação ocorre apenas quando as massas específicas do fluido e da estrutura são similares. Neste caso, recorre-se geralmente a uma formulação onde as equações de movimento relativas ao fluido e à estrutura são combinadas na interface, resultando em termos adicionais de inércia e amortecimento para a estrutura. Procedimentos similares foram utilizados por Cebral e Löhner (1998) e Braun (2002). Zhan e Hisada (2004) classificaram recentemente este tipo de acoplamento com a denominação de *acoplamento fraco consistente*. Porém, através desta metodologia são perdidas as propriedades de modularidade e customização presentes nos algoritmos particionados convencionais.

Conclusivamente, verifica-se que os modelos baseados em um acoplamento monolítico são os únicos que conseguem satisfazer exatamente as condições de compatibilidade e equilíbrio na interface, mantendo assim as propriedades de conservação. Contudo, os modelos com um acoplamento monolítico são indicados apenas em análises onde há uma forte interação entre o fluido e a estrutura e, principalmente, em casos onde as escalas de tempo e/ou dimensão são similares entre os subsistemas, condição que resulta em níveis de discretização espacial e temporal equivalentes entre os meios. Por outro lado, pode-se verificar também que os modelos de acoplamento particionado podem ser empregados com segurança desde que haja um tratamento consistente para as variáveis de interface. De uma forma geral, o uso de esquemas particionados para análise de problemas de IFE não prejudica

as propriedades numéricas referentes à estabilidade e à precisão desde que os valores preditos nos procedimentos de acoplamento sejam adequados e próximos de seus verdadeiros valores. Os esquemas particionados funcionam bem em problemas onde a interação entre fluido e estrutura, em termos inerciais, não é tão significativa e em casos onde o número de graus de liberdade da estrutura é bem menor em comparação com o fluido, podendo ser usada então uma discretização independente da interface em cada um dos meios, sendo as condições de compatibilidade e equilíbrio na interface aplicadas através de técnicas de sincronização. Na Tabela 6.1 encontram-se resumidas comparativamente as principais características apresentadas pelos modelos de acoplamento.

Tabela 6.1: Comparação entre os modelos particionado e monolítico para um conjunto de características encontradas em algoritmos de interação fluido-estrutura.

Características	Modelo de acoplamento	
	Particionado	Monolítico
Conservação na interface	Aproximada	Total
Discretização independente dos meios	É possível	Não é possível
Customização de códigos	É possível	Não é possível
Modularidade do algoritmo	É possível	Difícil
Estabilidade numérica	Condicionada	Garantida
Nível de precisão	Bom, mas condicionado	Excelente
Uso de subciclos	É possível	Não é possível

Em problemas da EVC observam-se algumas características que levam à utilização de esquemas particionados para a análise de problemas envolvendo a interação fluido-estrutura. Uma das primeiras observações feitas está no fato de que a massa específica do ar ser bastante menor que a massa específica das estruturas analisadas, o que resulta em uma interação fraca entre os meios. Outra particularidade é a exigência de estabilidade da estrutura ser bem mais rigorosa que a condição de estabilidade para o fluido. Além disso, a grande maioria dos problemas analisados apresenta estruturas com baixa frequência, o que torna muito ineficiente o uso de esquemas explícitos. Por fim, na medida em que o nível de discretização espacial exigido para descrever o comportamento da estrutura ser muito inferior ao do fluido, o emprego de um esquema particionado de acoplamento possibilita a utilização de malhas com níveis de discretização distintos para os diferentes domínios.

### 6.1.3 Os esquemas particionados existentes

O uso de modelos de acoplamento particionados para a solução de problemas de interação fluido-estrutura pressupõe a utilização de algoritmos distintos para a análise do fluido e da estrutura, sendo muito comum o emprego de esquemas mistos explícitos/implícitos para a análise do escoamento e do movimento da estrutura, respectivamente. Na medida em que esta metodologia será empregada neste trabalho, será inicialmente apresentado na seqüência um resumo sobre as características dos principais modelos de acoplamento particionado existentes que utilizam o enfoque misto.

Os algoritmos de solução para problemas de interação fluido-estrutura usando modelos de acoplamento particionados podem ser descritos, genericamente, através dos seguintes passos: (1) transferir o movimento dos contornos da estrutura em contato com o fluido ao sistema de equações do escoamento; (2) atualizar os dados referentes à malha do fluido; (3) avançar a análise do escoamento e computar a carga devido à ação do escoamento sobre os contornos da estrutura em contato com o fluido; (4) avançar a análise da estrutura considerando a ação da carga devida ao escoamento, calculada no passo (3). Os procedimentos apresentados acima caracterizam um algoritmo de solução baseado em um acoplamento fraco. No entanto, para que o mesmo possa ser denominado como acoplamento forte é necessário, por exemplo, a inclusão de um processo iterativo do tipo preditor/corretor dentro de cada ciclo de acoplamento (passos 1 a 4).

As condições necessárias para que o acoplamento fluido-estrutura seja realizado corretamente são dadas através de equações de equilíbrio de forças e de compatibilidade de deslocamentos na interface sólido-fluido entre os sistemas estrutural e fluido. Além disso, é necessário também garantir a condição de continuidade entre os movimentos das malhas relativas ao escoamento e à estrutura sobre a superfície de contato. Para um fluido viscoso, as condições de equilíbrio de forças e compatibilidade de deslocamentos são dadas pelas seguintes expressões:

$$\boldsymbol{\sigma}_S \mathbf{n} = -p \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_F \mathbf{n} \quad \text{em } \Gamma_{FS} \quad (6.1)$$

$$\mathbf{u}_S = \mathbf{u}_F \quad \text{em } \Gamma_{FS} \quad (6.2)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}_s$  é o tensor de tensões da estrutura,  $\boldsymbol{\tau}_F$  é o tensor de tensões viscosas do fluido,  $\mathbf{p}$  é o vetor de pressões do fluido,  $\mathbf{n}$  é o vetor contendo as componentes das normais sobre os pontos discretos do contorno de interface  $\Gamma_{FS}$  e  $\mathbf{u}_s$  e  $\mathbf{u}_F$  são os vetores de deslocamentos da estrutura e do fluido, respectivamente.

As condições de continuidade entre a estrutura e a malha do fluido são dadas por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}_s \quad \text{em } \Gamma_{FS} \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} \quad \text{em } \Gamma_{FS} \quad (6.4)$$

sendo  $\mathbf{x}$  o vetor de deslocamentos ou de posição dos nós da malha do fluido (de acordo com a formulação do esquema de movimento de malha).

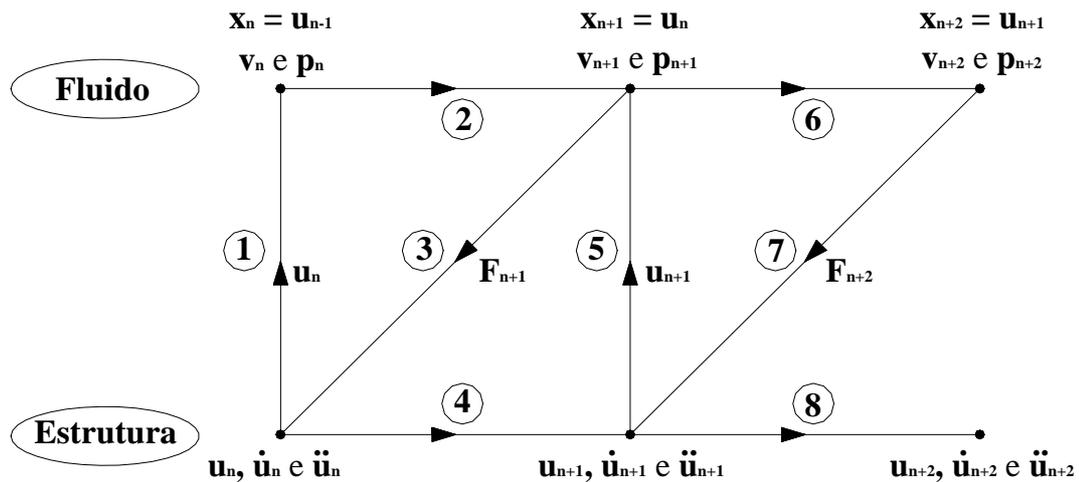


Figura 6.1: Algoritmo para análise de problemas de interação fluido-estrutura através de um modelo particionado convencional.

O esquema mais simples existente para o processo de avanço no tempo em um problema de IFE, empregando um modelo de acoplamento particionado, é descrito com a ajuda da Figura 6.1, o qual é denominado de *acoplamento particionado convencional*. Nesta e nas figuras seguintes,  $\mathbf{u}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$  e  $\ddot{\mathbf{u}}$  representam os vetores de deslocamento, velocidade e aceleração relativos à estrutura,  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{v}$  são os vetores de pressão e de velocidade referentes ao fluido e  $\mathbf{x}$  representa o vetor de posição da malha do fluido. As expressões localizadas no topo da figura representam as equações de compatibilidade de deslocamentos, as quais são válidas apenas sobre a interface  $\Gamma_{FS}$ . O subscrito  $n$  designa a posição no domínio do tempo. Neste

esquema verifica-se que a posição da estrutura está sempre atrasada um passo de tempo em relação à posição do fluido, fazendo com que as condições de compatibilidade e de equilíbrio sejam impostas apenas de forma aproximada. Embora o modelo particionado convencional tenha atingido uma enorme popularidade em problemas de IFE, muito devido à simplicidade do método, é possível demonstrar que ele apresenta um nível de precisão apenas de primeira ordem, mesmo quando os esquemas de solução do escoamento e da estrutura sejam ambos de segunda ordem.

Com o objetivo de melhorar as propriedades de precisão e estabilidade numérica, muitos autores empregam um processo iterativo entre os passos 1 a 5 do algoritmo convencional, resultando em um esquema de acoplamento que será aqui denominado de *modelo particionado iterativo*. Neste esquema, a defasagem entre fluido e estrutura é eliminada avançando simultaneamente os sistemas estrutural e fluido através um processo iterativo, o qual é baseado em critérios de convergência para as condições de compatibilidade e equilíbrio na interface. Para cada intervalo de tempo, o processo iterativo é iniciado através de uma projeção para o vetor de deslocamentos da estrutura ( $\bar{\mathbf{u}}_p$ ) – passo 1 da Figura 6.2. Este valor de projeção é empregado para atualizar a malha referente ao fluido e avançar a análise do escoamento, determinando-se, por fim, a carga referente à ação do escoamento sobre a estrutura – passos 2 e 3. Com esta carga é efetuada a análise da estrutura, obtendo-se os novos campos de deslocamento, velocidade e aceleração – passo 4. Neste momento é verificada a condição de convergência do processo, a qual é atingida quando o valor projetado para os deslocamentos da estrutura ( $\bar{\mathbf{u}}_p$ ) é igual ao resultado obtido na última análise ( $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}$ ), considerando-se um determinado valor de tolerância. Caso a convergência não tenha sido obtida, a configuração de malha retorna ao estado inicial ( $\mathbf{x}_n$ ) e é atualizada com o último campo de deslocamentos obtido pela estrutura  $\bar{\mathbf{u}}_{n+1}$ , o qual é considerado agora como o valor de projeção  $\bar{\mathbf{u}}_p$ . Uma vez obtida a convergência, a última configuração referente à malha do fluido e aos campos de deslocamento, velocidade e aceleração são mantidos – passo 6.

Embora o emprego de um processo iterativo resolva definitivamente os problemas relativos a falta de precisão e estabilidade numérica, observada em modelos particionados convencionais, observa-se que os custos computacionais associados ao uso desta metodologia acabam levando a um algoritmo bastante ineficiente.

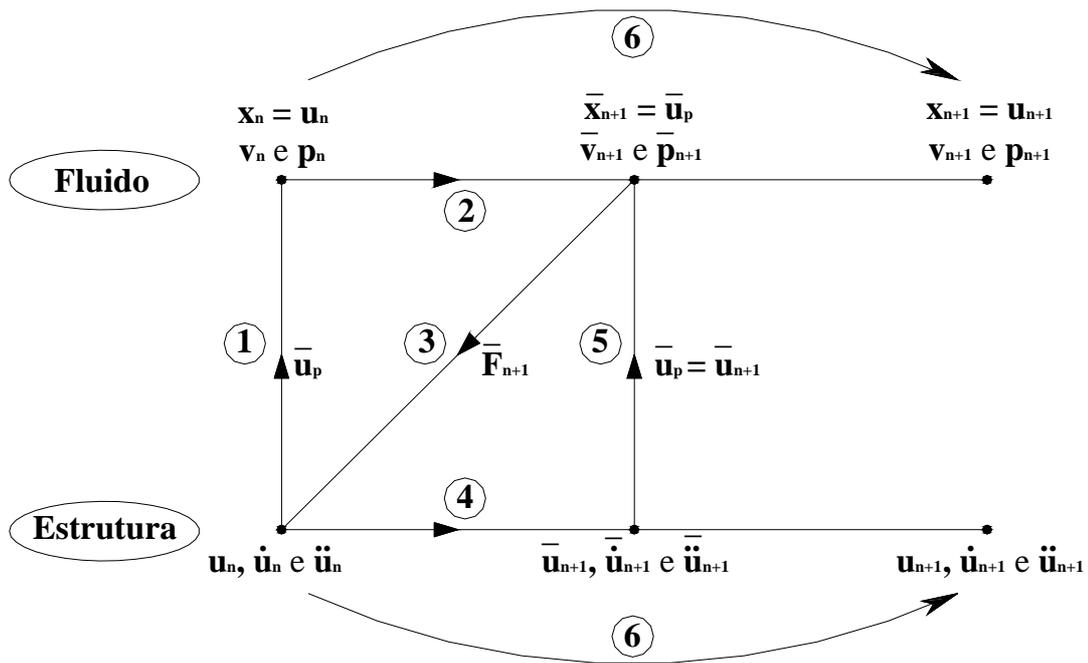


Figura 6.2: Algoritmo para análise de problemas de interação fluido-estrutura através de um modelo particionado iterativo.

A condição básica para que um algoritmo empregado na análise de escoamentos sobre uma malha móvel seja matematicamente consistente é de que ele seja capaz de reproduzir com exatidão um escoamento uniforme. De acordo com Lesoinne e Farhat (1996), esta condição é satisfeita somente quando o modelo numérico empregado na análise do escoamento e o esquema de movimento de malha utilizado satisfazem em uma forma discreta a *Lei de Conservação Geométrica* (LCG), cujos princípios teóricos foram apresentados inicialmente por Thomas e Lombard (1979). Lesoinne e Farhat (1996) demonstram que a LCG é satisfeita para formulações baseadas no MEF e em uma descrição ALE desde que a velocidade de malha seja calculada da seguinte maneira:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{\Delta t} \quad (6.5)$$

Embora a expressão (6.5) seja empregada naturalmente nos algoritmos de acoplamento fluido-estrutura, independentemente de qualquer consideração sobre a LCG, a sua utilização produz um impacto significativo na solução do problema acoplado. Referindo-se à análise da estrutura, ao utilizar-se a forma clássica trapezoidal do método de Newmark para a obtenção da resposta dinâmica, verifica-se a seguinte desigualdade:

$$\dot{\mathbf{u}} \neq \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} \quad (6.6)$$

Conseqüentemente, um esquema de acoplamento particionado qualquer, ao satisfazer a LCG (Eq. 6.5) e a equação de compatibilidade de deslocamentos (Eq. 6.3), viola a equação de compatibilidade de velocidades (Eq. 6.4). De fato, se  $\mathbf{x} = \mathbf{u}$  é imposta sobre a interface  $\Gamma_{FS}$  e a velocidade de malha em  $\Gamma_{FS}$  é calculada através de (6.5), tem-se que:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{\Delta t} = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} \neq \dot{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Gamma_{FS} \quad (6.7)$$

Desta forma, verifica-se que os esquemas particionados que respeitam a LCG e empregam um esquema de integração no tempo de segunda ordem para a estrutura acabam introduzindo um erro de predição no montante de energia cinética trocada entre os meios fluido e estrutural através da interface, o que limita severamente os passos de tempo empregados para manter um certo nível de precisão.

Com o objetivo de remover esta inconsistência dos modelos de acoplamento particionados, Lesoinne e Farhat (1998) propuseram o uso de um novo esquema, o qual será aqui chamado de *esquema particionado conservativo*, onde o processo de integração no tempo para o fluido e para a estrutura é feito com uma defasagem de meio passo de tempo entre os dois meios. Através deste algoritmo é possível satisfazer a LCG sem violar as condições de continuidade na interface (equações 6.3 e 6.4), fazendo com que os erros na troca de energia entre fluido e estrutura pela interface sejam eliminados. Com isso, obtém-se um modelo com propriedades numéricas superior

Para  $n = 1, \dots$

(1) Atualizar a malha do fluido a partir das seguintes expressões:

$$\dot{\mathbf{x}}_n = \dot{\mathbf{u}}_n \quad \text{em } \Gamma_{FS} \quad (6.9)$$

$$\mathbf{x}_{n+1/2} = \mathbf{x}_{n-1/2} + \Delta t \dot{\mathbf{x}}_n \quad \text{em } \Gamma_{FS} \quad (6.10)$$

(2) Avançar a análise do escoamento para obter as condições de escoamento em  $n + 1/2$ :  $\mathbf{v}_{n+1/2}$

e  $\mathbf{p}_{n+1/2}$ .

(3) Computar a carga produzida pela ação do escoamento sobre os contornos da estrutura em contato com o fluido:  $\mathbf{F}_{n+1/2}$ .

(4) Avançar a análise da estrutura considerando a ação da carga gerada pelo escoamento, calculada no passo (3), e usando um esquema de integração no tempo de segunda ordem (método de Newmark trapezoidal ou “*midpoint rule*”), obtendo o novo estado da estrutura:  $\mathbf{u}_{n+1}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$  e  $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$ .

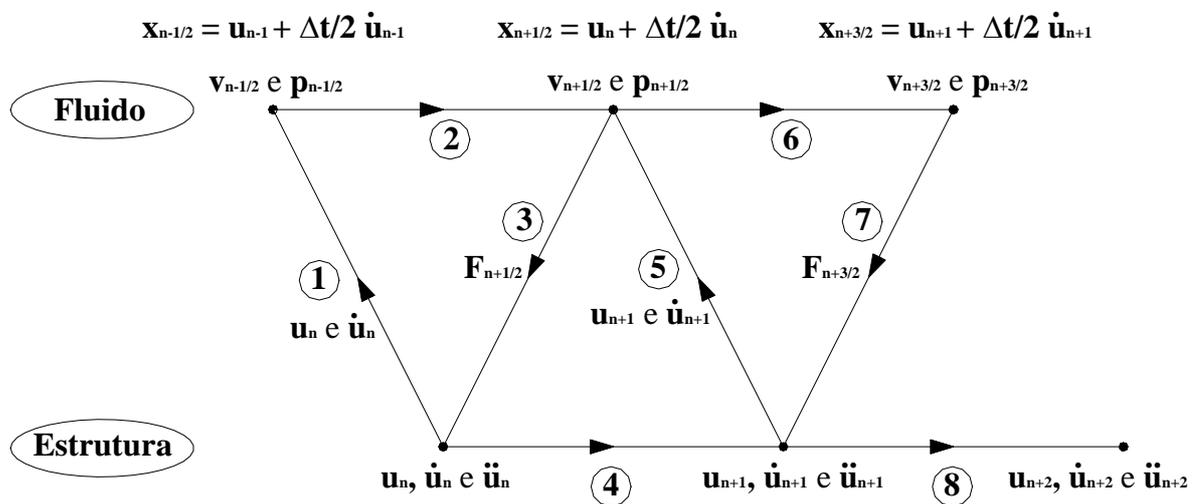


Figura 6.3: Algoritmo para análise de problemas de interação fluido-estrutura através de um modelo particionado conservativo.

As características numéricas de conservação apresentadas pelo modelo particionado conservativo podem ser facilmente comprovadas. Ao empregar-se este esquema, a seguinte relação deve ser mantida na interface:

$$\mathbf{x}_{n-1/2} = \mathbf{u}_n - \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{u}}_n \quad \text{em } \Gamma_{FS} \quad (6.11)$$

Considerando-se  $n = 0$  para a Equação (6.11), obtém-se diretamente a expressão (6.8). Para um  $n$  qualquer, substituindo-se as equações (6.9) e (6.11) na expressão (6.10), obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1/2} &= \mathbf{x}_{n-1/2} + \Delta t \dot{\mathbf{x}}_n \\ &= \mathbf{u}_n - \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n \\ &= \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{u}}_n \quad \text{em } \Gamma_{FS} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Na medida em que a análise estrutural é realizada utilizando-se o método de Newmark, tem-se as seguintes aproximações:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_n + \alpha \Delta t^2 (\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} - \ddot{\mathbf{u}}_n) \quad (6.13)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} - \ddot{\mathbf{u}}_n = \frac{1}{\delta \Delta t} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} - \dot{\mathbf{u}}_n) - \frac{1}{\delta} \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (6.14)$$

onde  $\alpha$  e  $\delta$  são parâmetros do método, escolhidos pelo usuário (ver Capítulo 5).

Substituindo-se (6.14) em (6.13), obtém-se que:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \left[ \dot{\mathbf{u}}_n \left( 1 - \frac{\alpha}{\delta} \right) + \dot{\mathbf{u}}_{n+1} \left( \frac{\alpha}{\delta} \right) \right] + \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\delta} \right) \quad (6.15)$$

No desenvolvimento do modelo particionado conservativo pressupõe-se o uso de um esquema de integração temporal de segunda ordem, como é o caso da forma clássica do método de Newmark, onde considera-se  $\alpha = 1/4$  e  $\delta = 1/2$ . Neste caso, a expressão (6.15) reduz-se a:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2} (\dot{\mathbf{u}}_n + \dot{\mathbf{u}}_{n+1}) \quad (6.16)$$

Portanto, através das expressões (6.12) e (6.16) é possível chegar à seguinte equação:

$$\mathbf{x}_{n+1/2} = \mathbf{u}_{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad \text{em } \Gamma_{FS} \quad (6.17)$$

a qual comprova por indução a relação (6.11).

Para comprovar que o modelo particionado descrito acima é realmente conservativo é necessário que o mesmo respeite as condições de continuidade na interface (equações 6.3 e 6.4) sem violar a LCG (Eq. 6.5). Definindo-se:

$$\mathbf{x}_n = \frac{\mathbf{x}_{n-1/2} + \mathbf{x}_{n+1/2}}{2} \quad (6.18)$$

ao substituir-se a Equação (6.10) em (6.18), tem-se que:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n-1/2} + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{x}}_n \quad \text{em } \Gamma_{FS} \quad (6.19)$$

Por fim, substituindo-se as equações (6.9) e (6.11) em (6.19), obtém-se:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n \quad \text{em } \Gamma_{FS}$$

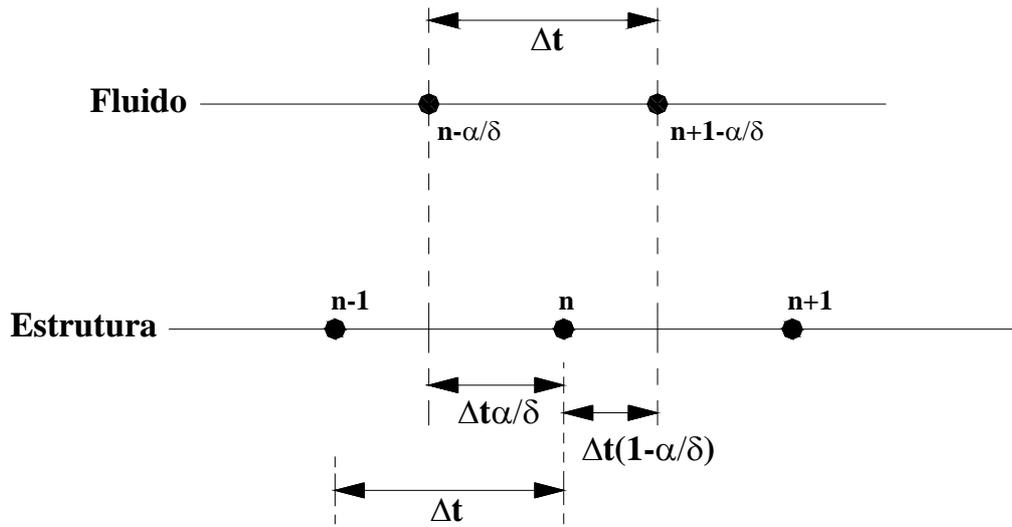


Figura 6.4: Determinação da defasagem no tempo entre os subsistemas fluido e estrutural em função dos parâmetros  $\alpha$  e  $\delta$  do método de Newmark.

Com a utilização do método  $\alpha$ -Generalizado para a análise da estrutura, a defasagem entre os subsistemas fluido e estrutural fica definida em função da razão  $\alpha / \delta$ , como pode ser observado através da Figura 6.4 acima. Com isso, obtém-se a seguinte forma para o novo algoritmo de análise:

(0) A partir das condições iniciais da estrutura,  $\mathbf{u}_0$  e  $\dot{\mathbf{u}}_0$ , ajustar a malha do fluido de acordo com a seguinte expressão:

$$\mathbf{x}_{-\alpha/\delta} = \mathbf{u}_0 - \Delta t \frac{\alpha}{\delta} \dot{\mathbf{u}}_0 \quad \text{em } \Gamma_{\text{FS}} \quad (6.21)$$

Para  $n = 1, \dots$

(1) Atualizar a malha do fluido a partir das seguintes expressões:

$$\dot{\mathbf{x}}_n = \dot{\mathbf{u}}_n \quad \text{em } \Gamma_{\text{FS}} \quad (6.22)$$

$$\mathbf{x}_{n+1-\alpha/\delta} = \mathbf{x}_{n-\alpha/\delta} + \Delta t \dot{\mathbf{x}}_n \quad \text{em } \Gamma_{\text{FS}} \quad (6.23)$$

(2) Avançar a análise do escoamento para obter as condições de escoamento em  $n+1-\alpha/\delta$ :

$$\mathbf{v}_{n+1-\alpha/\delta} \text{ e } \mathbf{p}_{n+1-\alpha/\delta}.$$

(3) Computar a carga produzida pela ação do escoamento sobre os contornos da estrutura em contato com o fluido:  $\mathbf{F}_{n+1-\alpha/\delta}$ .

(4) Avançar a análise da estrutura considerando a ação da carga gerada pelo escoamento, calculada no passo (3), e usando como esquema de integração no tempo o método  $\alpha$ -Generalizado, obtendo o novo estado da estrutura:  $\mathbf{u}_{n+1}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$  e  $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$ .

Procedendo-se com as mesmas verificações para a comprovação das características de conservação realizadas para o método particionado conservativo, inicia-se com a seguinte expressão:

/ —

$\alpha/\delta \cong 0.52$  e considerando-se  $\Delta t = 10^{-3}$ , tem-se que  $\Delta t^2 (1/2 - \alpha/\delta) \cong 10^{-8}$ . Sendo assim, tem-se que:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \left[ \dot{\mathbf{u}}_n \left( 1 - \frac{\alpha}{\delta} \right) + \dot{\mathbf{u}}_{n+1} \left( \frac{\alpha}{\delta} \right) \right] \quad (6.27)$$

Portanto, através das expressões (6.25) e (6.27) é possível obter-se a seguinte equação:

$$\mathbf{x}_{n+1-\alpha/\delta} = \mathbf{u}_{n+1} - \Delta t \frac{\alpha}{\delta} \dot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad \text{em } \Gamma_{\text{FS}} \quad (6.28)$$

a qual comprova por indução a relação (6.24).

Para comprovar que o presente modelo particionado, descrito acima, é realmente conservativo é necessário que o mesmo respeite as condições de continuidade na interface (equações 6.3 e 6.4) sem violar a LCG (Eq. 6.5). Definindo-se:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n-\alpha/\delta} + \frac{\alpha}{\delta} (\mathbf{x}_{n+1-\alpha/\delta} - \mathbf{x}_{n-\alpha/\delta}) \quad \text{em } \Gamma_{\text{FS}} \quad (6.29)$$

ao substituir-se a Equação (6.23) em (6.29), tem-se que:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n-\alpha/\delta} + \frac{\alpha}{\delta} \Delta t \dot{\mathbf{x}}_n \quad \text{em } \Gamma_{\text{FS}} \quad (6.30)$$

Por fim, substituindo-se as equações (6.22) e (6.24) em (6.30), obtém-se:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{u}_n \quad \text{em } \Gamma_{\text{FS}} \quad (6.31)$$

a qual conclui, juntamente com a Equação (6.22), a comprovação da conservação de energia sobre a interface  $\Gamma_{\text{FS}}$ .

Assim, através da formulação apresentada acima, é possível obter-se um algoritmo que preserva as propriedades conservativas na interface e seja capaz de analisar estruturas com alta não-linearidade. Além disso, com esta nova formulação obtém-se também uma formulação geral com a qual é possível, inclusive, obter-se a forma apresentada pelo modelo particionado conservativo, utilizando para isso os valores apropriados para os parâmetros  $\alpha$  e  $\delta$ .

#### 6.1.4 A transferência de informações através de interfaces com malhas não conformes

O uso de esquemas de acoplamento fluido-estrutura particionados baseados em uma decomposição do tipo diferencial (ver Seção 6.1.1) possibilita a discretização espacial dos subsistemas referentes ao fluido e à estrutura de uma forma totalmente independente, podendo resultar em descontinuidades entre os elementos do fluido e da estrutura sobre a interface. Quando os domínios computacionais referentes ao fluido e à estrutura possuem interfaces com discretizações espaciais coincidentes (“*matching interfaces*”), o fluxo de informações entre os diferentes meios é direto. No entanto, na maioria das aplicações, as exigências de resolução para as malhas do fluido são tipicamente muito maiores em relação às exigências para a estrutura. Conseqüentemente, as malhas do fluido e da estrutura serão incompatíveis (“*nonmatching interfaces*”) ao longo da superfície de contato e um tratamento cuidadoso deve ser prestado na transferência de dados de forma que sejam garantidas a conservação de momentum e energia e o equilíbrio de forças. Ou seja, em qualquer instante de tempo, a reação da estrutura deve ser igual à ação do fluido e a energia liberada ou absorvida pela estrutura deve ser a mesma que a energia ganha ou liberada pelo fluido.

Uma vez que o fluido e a estrutura apresentem interfaces com malhas não coincidentes, não fica garantido o equilíbrio perfeito de forças discretas obtidas em ambos os lados da interface. No entanto, isto não significa que não se possa obter um algoritmo com um nível de precisão satisfatório. Algumas técnicas numéricas têm sido apresentadas procurando oferecer um algoritmo capaz de garantir, pelo menos aproximadamente, as propriedades de conservação em problemas com malhas não conformes. A seguir são apresentadas, resumidamente, as técnicas de sincronização mais populares utilizadas em análises de IFE. Nas discussões que seguem considera-se que os subdomínios referentes ao fluido e à estrutura são discretizados através do MEF.

Os métodos mais populares de transferência de dados entre malhas não conformes estão baseados no uso de funções de interpolação para a determinação de variáveis em pontos não coincidentes, sobre a interface, entre uma malha designada como fonte e outra denominada de malha alvo, sendo denominados de métodos de interpolação consistente. Nestes esquemas, pontos representativos da malha fonte, localizados sobre a superfície de interface, são projetados sobre a malha alvo obtendo-se pontos que geralmente estão localizados no interior da face de algum elemento de contorno da malha alvo e cujos valores

referentes às variáveis do problema devem ser obtidas por interpolação a partir dos valores nodais daquela face. Em problemas de IFE utiliza-se, geralmente, a malha referente ao escoamento como sendo a malha fonte e a malha referente à estrutura é escolhida como a malha alvo.

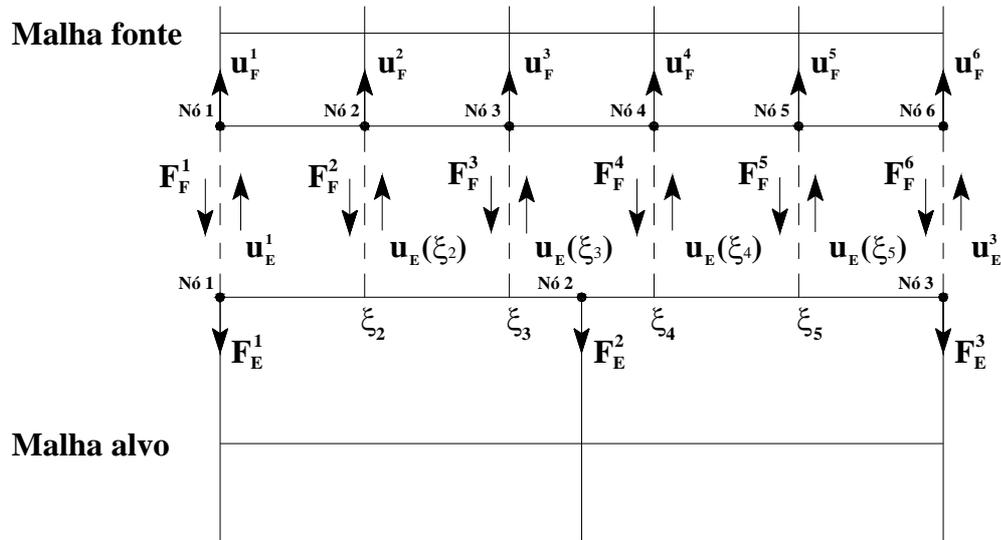


Figura 6.5: Esquema de transferência de dados baseado em projeção de nós.

Duas formas distintas podem ser empregadas no processo de projeção de pontos. Na primeira, a qual foi proposta inicialmente por Farhat et al. (1998), os nós da malha do fluido localizados sobre a interface são projetados sobre os elementos da estrutura em contato com o escoamento, como é mostrado na Figura 6.5. O método pode ser resumido da seguinte maneira: (1) associar cada nó do fluido localizado sobre a interface com uma face de elemento da estrutura mais próxima; (2) determinar os pontos de projeção dos nós referentes ao fluido sobre as respectivas faces de elementos da estrutura; (3) obter as coordenadas naturais dos nós projetados através de mapeamento inverso. Desta forma, a carga que é transferida do fluido para a estrutura fica definida através da seguinte expressão:

$$\mathbf{F}_E^j = \sum_{i=1}^{n_f} N_E^j(\xi_i) \mathbf{F}_F^i \quad \text{em } \Gamma_E \quad (6.32)$$

onde  $\Gamma_E$  representa a face de contorno do elemento E da estrutura em contato com o fluido,  $\mathbf{F}_E^j$  é o vetor de carga devido à ação do escoamento avaliado sobre a superfície de interface da estrutura no ponto  $j$ ,  $N_E^j(\xi_i)$  é a função de interpolação do nó  $j$  do elemento E da estrutura

que contém sobre uma de suas faces a projeção do nó  $i$  do fluido, sendo  $\xi_i$  o vetor de coordenadas naturais em um ponto interno da face de contato (que corresponde ao ponto de projeção do nó  $i$  do fluido sobre esta face) onde a função de interpolação é avaliada.  $\mathbf{F}_F^i$  é o vetor de carga devido à ação do escoamento calculado sobre a superfície de interface do fluido no ponto  $i$  (ver Capítulo 7 para a determinação destas cargas) e  $n_f$  é o número total de nós do fluido projetados sobre as faces de contato da estrutura. O vetor de cargas totais avaliadas sobre a interface da estrutura é dado por:

$$\mathbf{F}_E = \sum_{j=1}^{n_e} \mathbf{F}_E^j \quad (6.33)$$

sendo  $n_e$  o número total de nós da estrutura sobre a superfície de interface. Portanto, para que seja respeitada a condição de conservação de cargas, a seguinte expressão deve ser observada:

$$\mathbf{F}_E = \sum_{j=1}^{n_e} \mathbf{F}_E^j = \sum_{i=1}^{n_f} \mathbf{F}_F^i = \mathbf{F}_F \quad (6.34)$$

onde  $\mathbf{F}_F$  representa o vetor de cargas totais sobre a interface do fluido.

Por outro lado, a transferência das condições cinemáticas da estrutura para o fluido é realizada de forma direta, através das aproximações existentes para as variáveis da estrutura, dadas segundo a forma usual do MEF, ou seja:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_F^i &= \sum_{j=1}^{n_{el}} N_E^j(\xi_i) \mathbf{u}_E^j \\ \dot{\mathbf{u}}_F^i &= \sum_{j=1}^{n_{el}} N_E^j(\xi_i) \dot{\mathbf{u}}_E^j \\ \ddot{\mathbf{u}}_F^i &= \sum_{j=1}^{n_{el}} N_E^j(\xi_i) \ddot{\mathbf{u}}_E^j \end{aligned} \quad (6.35)$$

onde  $\mathbf{u}_F^i$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_F^i$  e  $\ddot{\mathbf{u}}_F^i$  são vetores de deslocamento, velocidade e aceleração do fluido no nó  $i$ ,  $\mathbf{u}_E^j$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_E^j$  e  $\ddot{\mathbf{u}}_E^j$  são os vetores de deslocamento, velocidade e aceleração obtidos no nó  $j$  do elemento da estrutura que contém em uma de suas faces a projeção do nó  $i$  do fluido,  $N_E^j$  é a função de interpolação do nó  $j$ , sendo  $\xi_i$  o vetor de coordenadas naturais do ponto de projeção

do nó do fluido  $i$ , e  $nnel$  é o número de nós do elemento empregado na discretização da estrutura.

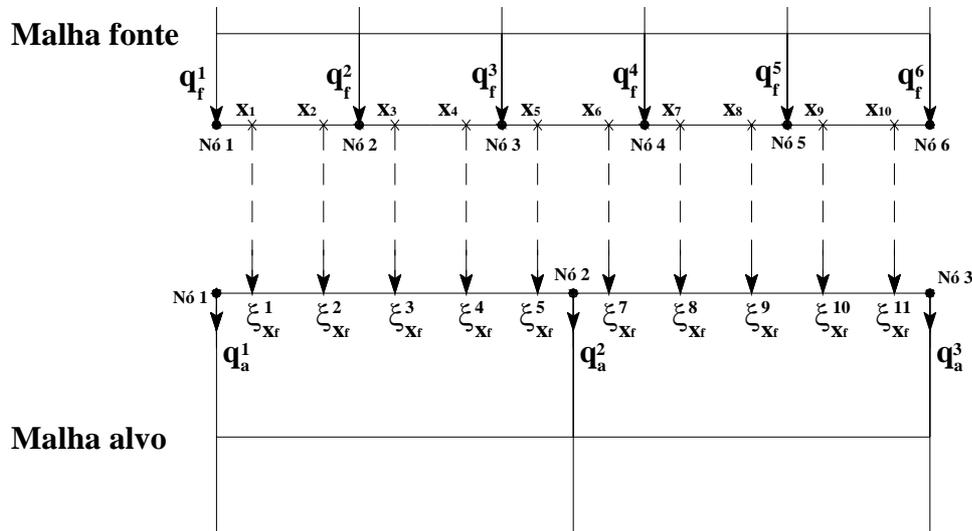


Figura 6.6: Esquema de transferência de dados baseado em projeção dos pontos de Gauss.

Uma segunda forma de projeção utilizada em esquemas baseados na interpolação de dados consiste em projetar os pontos de Gauss da malha fonte sobre as faces dos elementos de contato da malha alvo, como mostra a Figura 6.6. Esquemas deste tipo são também conhecidos como “*mortar methods*” (Cezbral e Löhner, 1998), cuja principal característica é a introdução do conceito de resíduos ponderados para a obtenção de um esquema de interpolação estritamente conservativo. Com o objetivo de elucidar o método, supõe-se que seja necessária a obtenção de uma quantidade vetorial qualquer  $\mathbf{q}_a(\mathbf{x})$  sobre a interface da malha alvo a partir de seus valores obtidos sobre a interface da malha fonte,  $\mathbf{q}_f(\mathbf{x})$ . Para que o processo de transmissão de dados seja conservativo é necessário que:

$$\mathbf{q}_a(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_f(\mathbf{x}) \quad (6.36)$$

A expressão acima pode ser satisfeita de uma forma aproximada através do método dos resíduos ponderados. Multiplicando ambos os lados da equação por uma função de peso  $\mathbf{W}^i$  e integrando sobre as respectivas superfícies de contato,  $\Gamma_a$  e  $\Gamma_f$ , obtém-se a seguinte expressão:

$$\int_{\Gamma_a} \mathbf{W}^i \mathbf{q}_a d\Gamma_a = \int_{\Gamma_f} \mathbf{W}^i \mathbf{q}_f d\Gamma_f \quad (6.37)$$

As quantidades vetoriais são aproximadas através da forma usual empregada no MEF da seguinte forma:

$$\mathbf{q}_a(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{nne} \mathbf{N}_a^j(\xi_x) \mathbf{q}_a^j, \quad \mathbf{q}_f(\mathbf{x}_f) = \sum_{j=1}^{nne} \mathbf{N}_f^j(\xi_{x_f}) \mathbf{q}_f^j \quad (6.38)$$

onde  $\mathbf{q}_a^j$  e  $\mathbf{q}_f^j$  são os valores nodais para os vetores  $\mathbf{q}_a$  e  $\mathbf{q}_f$ , respectivamente,  $\mathbf{N}_a^j$  e  $\mathbf{N}_f^j$  são as funções de forma dos elementos empregados na malha alvo e na malha fonte, respectivamente, sendo  $nne$  o número de nós do mesmo. É importante observar que as funções de forma são avaliadas na malha alvo em pontos  $\xi_{x_f}$  que representam a projeção dos pontos de Gauss definidos na malha fonte (ver Figura 6.6). Aplicando o método de Galerkin, a Equação (6.37) resulta na seguinte expressão:

$$\int_{\Gamma_a} \mathbf{N}_a^i \mathbf{N}_a^j \mathbf{q}_a^j d\Gamma_a = \int_{\Gamma_f} \mathbf{N}_a^i \mathbf{N}_f^j \mathbf{q}_f^j d\Gamma_f \quad (6.39)$$

a qual pode também ser escrita como:

$$\mathbf{M}_a^{ij} \mathbf{q}_a^j = \mathbf{R}^i \quad (6.40)$$

Portanto, ao realizar-se a transferência de carga do fluido para a estrutura, considera-se a malha do fluido como a malha fonte e a malha da estrutura como a malha alvo e ao transferir-se as condições cinemáticas da estrutura para o fluido a situação é invertida. Assim, as matrizes  $\mathbf{M}_a^{ij}$  e  $\mathbf{R}^i$  assumem as suas respectivas formas de acordo com a escolha do papel exercido pelas malhas referentes ao fluido e à estrutura.

Um dos métodos de transferência de dados criados mais recentemente é o método de refinamento em comum (“*Common-Refinement Method*”), proposto por Jiao e Heath (2004). Neste esquema é empregada uma malha de interface auxiliar composta pela interseção das malhas verificadas no fluido e na estrutura sobre a superfície de contato, como é possível observar através da Figura 6.7. A malha auxiliar é composta por subelementos sobre os quais o processo de integração de forças e a transferência de condições cinemáticas são efetuados. O esquema numérico do método pode ser descrito da seguinte maneira: (1) projetar os nós de interface do fluido sobre a malha de interface da estrutura ao longo das normais avaliadas nos nós; (2) definir através dos nós projetados do fluido e dos nós existentes da estrutura os

subelementos que compõe a malha auxiliar de interface e as respectivas projeções inversas dos nós da malha auxiliar sobre a malha do fluido; (3) integrar forças e deslocamentos sobre os subelementos.

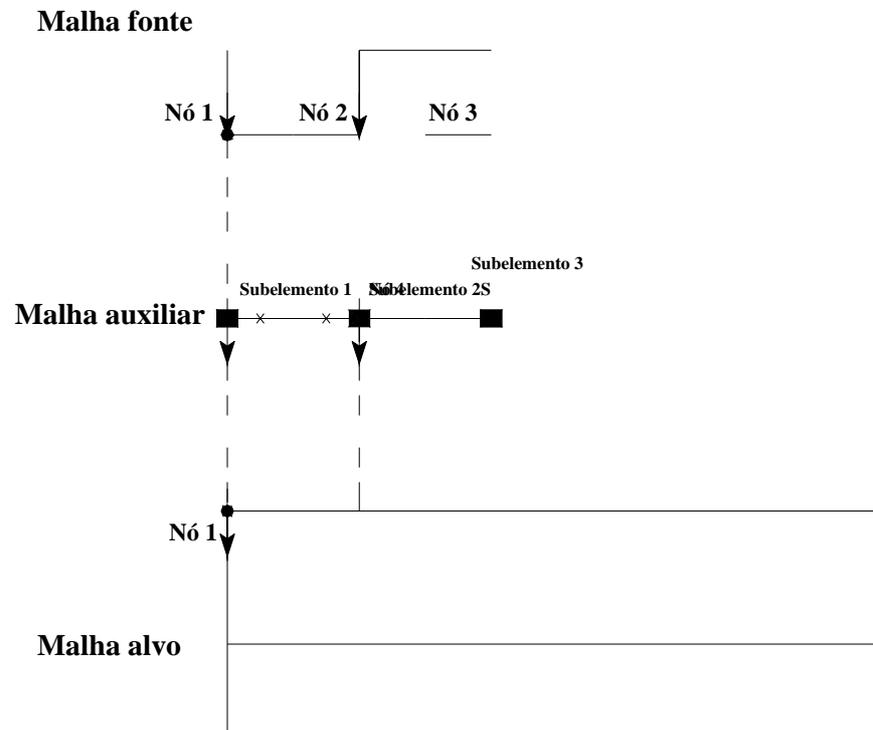


Figura 6 7: Esq

*nse*

*j*

$\Gamma_i$

do

precisão similares aos esquemas mais precisos com um esforço computacional inferior, desde que sejam respeitadas algumas condições quanto à discretização das superfícies de contato entre fluido e estrutura, como será mostrado mais adiante. Além disso, com o uso da técnica de mapeamento inverso isoparamétrico, proposto por Murti e Valippan (1986), obtém-se um modelo numérico com o maior nível de precisão possível entre todos os métodos de interpolação existentes.

No trabalho de Farhat et al. (1998) é apresentado um esquema baseado em interpolações com características conservativas, cujos princípios serão empregados também nesta tese. Na seqüência é apresentada uma prova das propriedades de conservação deste modelo.

Inicialmente, considera-se que  $\delta\hat{\mathbf{u}}_F$  e  $\delta\hat{\mathbf{u}}_E$  representam os vetores de deslocamento virtual admissível no fluido e na estrutura, respectivamente, onde o termo admissível significa dizer que os traços de  $\delta\hat{\mathbf{u}}_F$  e  $\delta\hat{\mathbf{u}}_E$  satisfazem, na interface fluido-estrutura, a seguinte expressão:

$$\delta\hat{\mathbf{u}}_F = \delta\hat{\mathbf{u}}_E \quad \text{em } \Gamma_{FE} \quad (6.42)$$

onde  $\Gamma_{FE}$  representa a superfície de interface.

Independentemente do método de discretização escolhido para as aproximações do domínio geométrico, a condição de compatibilidade de deslocamentos virtuais ou reais sobre a interface  $\Gamma_{FE}$  pode ser formulada da seguinte forma:

$$\delta\hat{\mathbf{u}}_{F_j} = \sum_{i=1}^{i_E} c_{ji} \delta\hat{\mathbf{u}}_{E_i} \quad j \in \Gamma_F, i \in \Gamma_E \quad (6.43)$$

sendo  $\delta\hat{\mathbf{u}}_{F_j}$  os valores discretos de  $\delta\hat{\mathbf{u}}_F$  em um nó  $j$  do fluido,  $\delta\hat{\mathbf{u}}_{E_i}$  é o valor discreto de  $\delta\hat{\mathbf{u}}_E$  em um nó  $i$  da estrutura e  $i_E$  e  $c_{ji}$  são constantes que dependem do método de discretização utilizado. Os contornos  $\Gamma_F$  e  $\Gamma_E$  representam as superfícies de interface observadas no fluido e na estrutura, respectivamente.

Considerando-se que  $\delta\hat{\mathbf{u}}_F$  represente agora um campo de deslocamentos virtuais onde existam valores não nulos apenas nos graus de liberdade que pertençam à superfície de

contorno  $\Gamma_F$ , qualquer que seja o método de discretização empregado para as aproximações do domínio geométrico referente ao fluido, o vetor  $\delta \hat{\mathbf{u}}_F$  poderá ser expresso como:

$$\delta \hat{\mathbf{u}}_F = \sum_{j=1}^{j_F} D_j \delta \hat{u}_{F_j} \quad j \in \Gamma_F \quad (6.44)$$

onde  $D_j$  é uma função local ou global com base no contorno  $\Gamma_F$ .

O trabalho virtual realizado pelo vetor de tração do fluido  $\mathbf{t}_F$  agindo sobre  $\Gamma_F$  pode ser

Para que a energia seja conservada na interface fluido-estrutura é necessário que  $\delta\mathbf{W}^F = \delta\mathbf{W}^E$ . Portanto, a partir das equações (6.48) e (6.49) é possível concluir que:

$$F_{E_i} = \sum_{j=1}^{j_F} F_{F_j} c_{ji} \quad (6.50)$$

Da expressão acima verifica-se que para a obtenção de um esquema conservativo de transmissão de dados entre malhas não coincidentes é necessário que a carga atuante na estrutura seja computada através de uma expressão como (6.50), a qual depende exclusivamente do método de avaliação de cargas no código do fluido,  $F_{F_j}$ , e do método

onde  $i_e$  é o número de nós do elemento finito empregado, considerando-se que as funções de forma  $N_i$  assumem valores nulos para os nós do elemento  $e$  que não pertençam à interface  $\Gamma_E^{(e)}$ .

No presente caso, a equação de compatibilidade de deslocamentos para malhas não conformes, na sua forma discreta, é satisfeita da seguinte maneira (ver Figura 6.8): (1) relacionar cada ponto nodal da malha do fluido  $x_j$  sobre a superfície  $\Gamma_F$  com o ponto mais próximo localizado sobre a face de um elemento da estrutura  $\Gamma_E^{(e)}$  pertencente à superfície  $\Gamma_E$ ; (2) determinar as coordenadas naturais  $\xi_j$  da projeção do nó  $x_j$  do fluido sobre a superfície  $\Gamma_E^{(e)}$  através de mapeamento inverso; (3) satisfazer a condição de compatibilidade por interpolação, como mostrado abaixo:

$$u_{F_j} = \mathbf{u}_F(x_j) = \mathbf{u}_E(\xi_j) = \sum_{i=1}^{i_E} N_i(\xi_j) u_{E_i} \quad j \in \Gamma_F, i \in \Gamma_E \quad (6.52)$$

Comparando-se as equações (6.43) e (6.52), observa-se que através de uma discretização através do MEF tem-se que:

$$c_{ji} = N_i(\xi_j) \quad (6.53)$$

e, portanto:

$$F_{E_i} = \sum_{j=1}^{j_F} F_{F_j} N_i(\xi_j) \quad (6.54)$$

Sabendo-se que no MEF é observada a seguinte propriedade para as funções de forma:

$$\sum_{i=1}^{i_e} N_i = 1 \quad (6.55)$$

verifica-se claramente que a expressão (6.54) satisfaz o equilíbrio de forças na interface e prova, com isso, as características conservativas do presente algoritmo, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{i_E} F_{E_i} = \sum_{i=1}^{i_E} \sum_{j=1}^{j_F} F_{F_j} N_i(\xi_j) = \sum_{j=1}^{j_F} F_{F_j} \quad (6.56)$$

Com o objetivo de ilustrar o esquema apresentado acima, considera-se um exemplo contendo uma situação simples de incompatibilidade de malhas na interface fluido-estrutura, como é mostrado na Figura 6.9. Empregando a Equação (6.54), tem-se que as cargas induzidas pela ação do escoamento sobre a interface da estrutura são dadas por:

$$\begin{aligned} F_{E_1} &= F_{F_1} N_1(\xi_1) + F_{F_2} N_1(\xi_2) + F_{F_3} N_1(\xi_3) + F_{F_4} N_1(\xi_4) = F_{F_1} + F_{F_2} N_1(\xi_2) + F_{F_3} N_1(\xi_3) \\ F_{E_2} &= F_{F_1} N_2(\xi_1) + F_{F_2} N_2(\xi_2) + F_{F_3} N_2(\xi_3) + F_{F_4} N_2(\xi_4) = F_{F_2} N_2(\xi_2) + F_{F_3} N_2(\xi_3) + F_{F_4} \end{aligned} \quad (6.57)$$

Logo, a soma de cargas agindo sobre a estrutura é dada por:

$$F_{E_1} + F_{E_2} = F_{F_1} + F_{F_2} [N_1(\xi_2) + N_2(\xi_2)] + F_{F_3} [N_1(\xi_3) + N_2(\xi_3)] + F_{F_4} = F_{F_1} + F_{F_2} + F_{F_3} + F_{F_4} \quad (6.58)$$

o que prova novamente a propriedade de conservação sobre a interface.

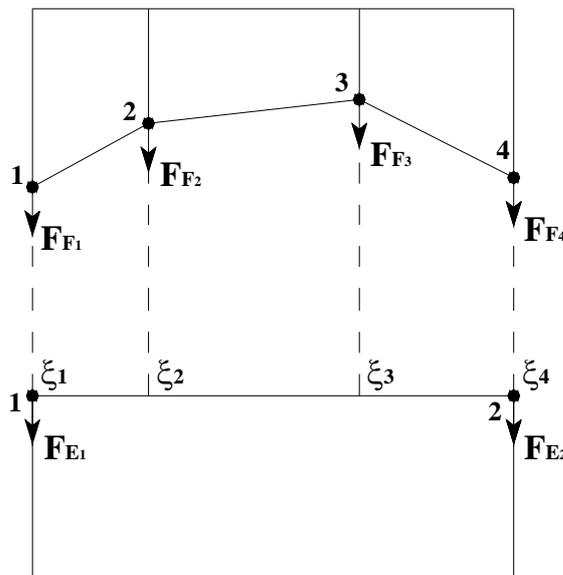


Figura 6.9: Exemplo ilustrativo sobre o equilíbrio de cargas em malhas não coincidentes.

Como havia sido dito anteriormente, para que um esquema de transferência de dados entre interfaces com malhas não conformes, baseado no método de interpolação consistente, forneça resultados precisos é necessário que o processo de discretização seja realizado tomando-se alguns cuidados. O nível de precisão obtido depende fundamentalmente da distribuição relativa das malhas do fluido e da estrutura sobre as respectivas superfícies de contato e da ordem das funções de interpolação utilizadas nas aproximações sobre as interfaces. Como neste trabalho serão empregadas funções de interpolação lineares para as

aproximações das variáveis no espaço, os cuidados serão dedicados a aspectos referentes à composição das malhas sobre a interface.

No trabalho de Casadei e Potapov (2004) são abordadas algumas questões relevantes sobre a forma de discretização empregada em interfaces com malhas não coincidentes, as quais serão aqui reproduzidas. Na Figura 6.10 são apresentadas duas situações verificadas em interfaces com malhas não conformes. Como a malha do fluido é, geralmente, mais refinada que a malha da estrutura nos problemas estudados neste trabalho, será considerada apenas esta hipótese. Na situação (a) verifica-se que existe a conformidade de nós quando os dados são transferidos da estrutura para o fluido, mas que não se repete quando o escoamento de informações é invertido. Esta condição é conhecida como discretização hierárquica e embora retire muitas vezes a flexibilidade no processo de construção da malha, ela deve ser empregada sempre que possível. Na situação (b), por outro lado, as malhas são construídas com total liberdade, sem conformidade entre os nós do fluido e da estrutura. Neste caso, verifica-se o surgimento de espaços entre as interfaces discretas que geralmente levam a erros de projeção e que acabam danificando o processo de interpolação. Outro fator importante observado é que quando o nível de refinamento da superfície de interface do fluido é maior que o nível de refinamento da estrutura, o método de interpolação consistente apresenta, em via de regra, resultados com muito boa precisão.

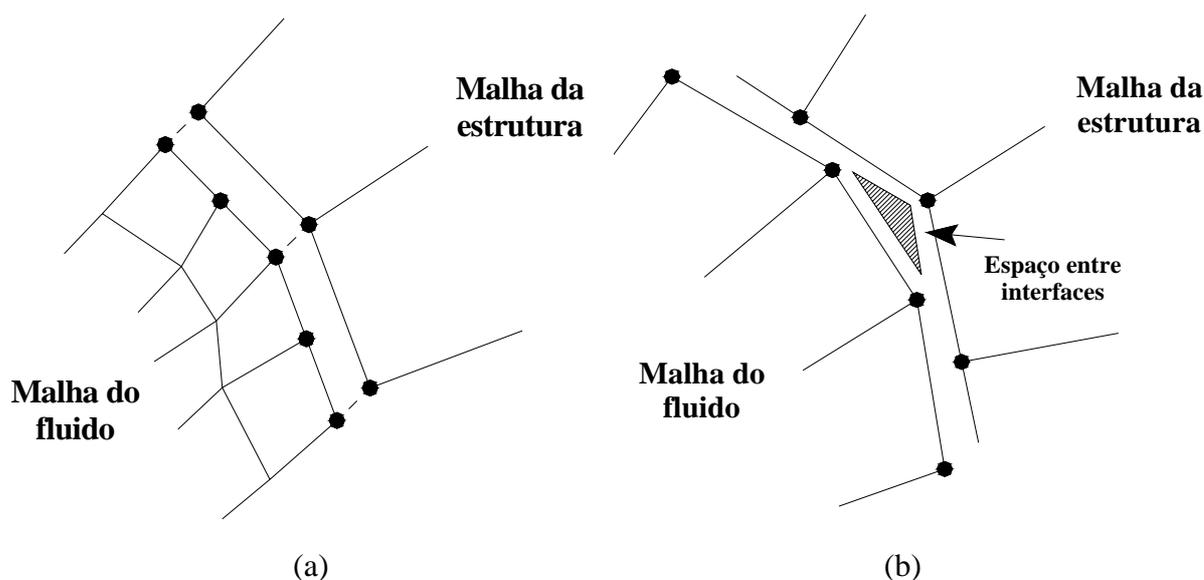


Figura 6.10: Tipos de discretização em interfaces não conformes: (a) discretização hierárquica; (b) discretização não hierárquica.

No trabalho de Jaiman et al. (2005) são comparados diversos métodos de transferência de dados em malhas não coincidentes. O que pode ser observado nos resultados apresentados é que um método baseado em interpolações com projeção de nós, similar ao utilizado nesta tese, conseguiu obter resultados com nível de precisão similar ao método de refinamento em comum quando era respeitada a discretização hierárquica. Em casos onde a discretização não era hierárquica, o nível de precisão do primeiro método distanciava-se do último, embora mantivesse ainda um nível de precisão aceitável.

Portanto, o que se pode concluir é que ao ser realizada a construção das malhas nas respectivas interfaces de contato, deve-se procurar sempre que possível a utilização de discretizações hierárquicas e fazer com que haja a coincidência de nós sobre arestas para evitar o aparecimento de espaços indesejáveis entre as diferentes interfaces. Logicamente, quanto mais bem discretizadas as interfaces de contato, melhor serão as aproximações efetuadas nos processos de interpolação e melhor representadas serão as geometrias das respectivas superfícies.

### 6.1.5 A técnica de subciclos

Os meios relativos à estrutura e ao fluido apresentam geralmente propriedades físicas bastante diferenciadas entre si. As características dinâmicas observadas em estruturas presentes em problemas aeroelásticos da EVC, por exemplo, são tipicamente dominadas por modos de vibração de baixa frequência. Por outro lado, os escoamentos de vento são usualmente analisados em escalas de tempo bastante baixas devido à presença de efeitos altamente transientes e não-lineares como a turbulência e o fenômeno de desprendimento de vórtices. Neste trabalho será considerada a situação onde o fluido e a estrutura são analisados através de um esquema explícito e de um esquema implícito, respectivamente. Portanto, a princípio deve-se considerar que a condição de estabilidade numérica do processo seja ditada pelo passo de tempo empregado para a integração das equações que regem o escoamento  $\Delta t_F$  e não o passo de tempo  $\Delta t_E$  ( $\Delta t_E > \Delta t_F$ ), o qual satisfaz apenas os requerimentos de precisão para a análise do subsistema estrutural.

Ao empregar-se um mesmo passo de tempo para o fluido e para a estrutura obtém-se um algoritmo extremamente ineficiente em relação à análise do subsistema estrutural. Com o uso de esquemas implícitos para a integração no tempo da equação de movimento da

estrutura, o incremento de tempo adotado é escolhido apenas em função do período de vibração do corpo analisado, sendo geralmente muito superior ao passo de tempo usado no fluido. Além disso, há ainda o inconveniente de se resolver o sistema de equações a cada passo de tempo, o que torna-se ainda pior no caso da inclusão de efeitos não-lineares, onde processos de linearização iterativos são geralmente empregados. Por outro lado, com a utilização da técnica de subciclos é possível uma economia significativa no tempo de processamento devido a reduções no número de vezes em que a estrutura é analisada e no número de processos de sincronização e transferência de dados através da interface.

Em uma análise com subciclos, em cada passo de tempo realizado pela estrutura ( $\Delta t_E$ ) dentro do intervalo  $t^n$  e  $t^{n+1}$  o fluido é analisado em um número de vezes correspondente ao fator  $n_{F/E} = \Delta t_E / \Delta t_F$ , que equivale ao número de subciclos, como é mostrado na Figura 6.11. Portanto, a troca de dados através da interface é efetuada apenas em um ponto no tempo ( $t^{n+1}$ ) onde ocorre a sincronia entre os processos de integração da estrutura e do fluido.

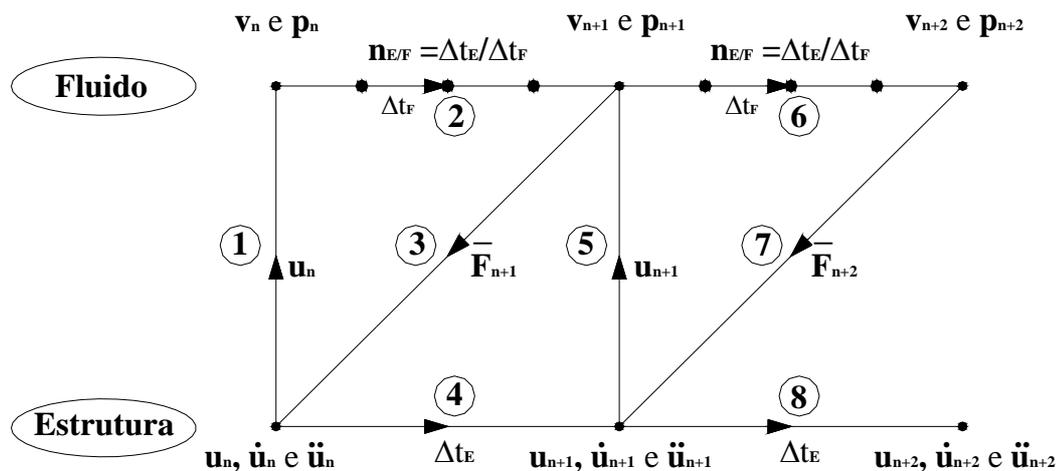


Figura 6.11: Modelo de acoplamento equipado com subciclos.

As vantagens trazidas pela implementação da técnica de subciclos em um algoritmo para a solução de problemas de IFE só serão efetivas na medida em que não haja uma ação prejudicial da técnica empregada sobre a estabilidade numérica do conjunto. Neste sentido, algumas medidas devem ser tomadas a fim de que o passo de tempo crítico do problema acoplado ( $\Delta t_c$ ) não esteja abaixo da restrição de estabilidade imposta pelo fluido ( $\Delta t_F$ ), fazendo com que seja necessária uma redução no passo de tempo adotado para a análise do escoamento e, conseqüentemente, uma perda de eficiência do modelo numérico. De acordo com Piperno et al. (1995), o limite de estabilidade  $\Delta t_c$  é mantido dentro do intervalo de passos

de tempo adotados para a manutenção da estabilidade numérica no escoamento  $\Delta t_F$  desde que: (a) a deformação da malha do fluido seja distribuída ao longo dos subciclos do fluido ( $n_{F/E}$ ) e (b) a carga correspondente à ação do escoamento sobre o fluido que é transferida para a estrutura seja considerada como sendo uma média das cargas computadas durante os subciclos ( $\bar{\mathbf{F}}_{n+1}$ ).

A distribuição da deformação ou movimento imposto pela estrutura sobre a malha do fluido nas cercanias da superfície de interface deve ser realizada gradualmente, ao longo dos subciclos, na análise do escoamento. Além disso, em qualquer esquema empregado para a atualização da malha referente ao escoamento, uma nova posição  $\mathbf{x}^{n+1}$  deve satisfazer as equações de compatibilidade ( $\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1}$ ;  $\dot{\mathbf{x}}^{n+1} = \dot{\mathbf{u}}^{n+1}$ ) sobre a interface  $\Gamma_{FE}$  e não violar a Lei de Conservação Geométrica (ver Seção 6.1.3). Desta forma, a posição ocupada pela malha durante os subciclos pode ser descrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{(0)}^{n+1} &= \mathbf{u}^n && \text{em } \Gamma_{FE} \\ \mathbf{x}_{(s)}^{n+1} &= f^d(\mathbf{x}_{(s-1)}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}, \dot{\mathbf{u}}^{n+1}, \Delta t) && (s = 1, \dots, n_{F/E} - 1) \quad \text{em } \Gamma_{FE} \\ \mathbf{x}_{(n_{F/E})}^{n+1} &= \mathbf{u}^{n+1} && \text{em } \Gamma_{FE} \end{aligned} \quad (6.59)$$

onde  $f^d$  representa a função de interpolação empregada e  $d$  é a ordem da função, sendo  $d = 0, 1$  ou  $2$ . O subíndice colocado entre parênteses indica o número do subciclo atual. De acordo com a ordem empregada na função de interpolação, os três esquemas existentes são definidos como sendo:

$$\mathbf{x}_{(s)}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1} \quad (d = 0) \quad \text{em } \Gamma_{FE} \quad (6.60)$$

$$\mathbf{x}_{(s)}^{n+1} = \mathbf{x}_{(s-1)}^{n+1} + \frac{(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{x}_{(s-1)}^{n+1})}{n_{F/E} - s + 1} \quad (d = 1) \quad \text{em } \Gamma_{FE} \quad (6.61)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{(s)}^{n+1} &= \mathbf{x}_{(s-1)}^{n+1} + \frac{2\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{x}_{(s-1)}^{n+1} - (n_{F/E} - s + 1)\Delta t \dot{\mathbf{u}}^{n+1}}{n_{F/E} - s + 1} + \\ &\frac{\dot{\mathbf{u}}^{n+1} - (n_{F/E} - s + 1)\Delta t - \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{x}_{(s-1)}^{n+1}}{(n_{F/E} - s + 1)^2} \quad (d = 2) \quad \text{em } \Gamma_{FE} \end{aligned} \quad (6.62)$$

A partir de resultados obtidos em experimentos numéricos realizados por diversos autores, tem sido demonstrado que para valores baixos de  $n_{F/E}$  o limite de estabilidade do

processo mantém-se governado pelo escoamento. No entanto, a partir de um determinado valor adotado para o número de subciclos ( $n_{F/E}$ ) o processo torna-se instável. A razão entre os passos de tempo empregados para o fluido e para a estrutura varia entre 5:1 até 1000:1, dependendo das características do problema e do uso de esquemas explícitos ou implícitos para a análise do escoamento. Neste trabalho será adotada uma função de interpolação linear (Equação 6.61) em razão da facilidade de implementação e da efetividade do esquema, como pode ser comprovado através dos resultados apresentados por vários autores que utilizam esta mesma função.

## 6.2 O ALGORITMO PARA A ANÁLISE DE PROBLEMAS DE IFE

Neste trabalho será empregado um novo modelo numérico para a análise de problemas de IFE, desenvolvido especialmente para esta tese, o qual possibilita ainda o uso de subciclos entre as análises do fluido e da estrutura e a utilização de malhas não coincidentes na interface para os meios estrutural e fluido. O algoritmo pode ser resumido nos seguintes passos:

### A) Rotinas de pré-processamento:

- Obter as condições iniciais para as variáveis do escoamento:  $\mathbf{v}_0$  e  $\mathbf{p}_0$ .
- Obter as condições iniciais para as variáveis da estrutura:  $\mathbf{u}_0$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_0$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}_0$ ,  $\mathbf{f}_0^{\text{int}}$  e  $\boldsymbol{\sigma}_0$ .
- Determinar as condições de interface:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Malhas coincidentes ou} \\ \text{Malhas não coincidentes} \end{array} \right.$
- Determinar as relações entre os nós de interface do fluido e os nós ou elementos de interface da estrutura através do algoritmo de sincronização que será apresentado na Seção 6.2.1.
- Calcular e armazenar as matrizes de elemento respectivas ao fluido e à estrutura constantes no tempo.
- A partir das condições iniciais da estrutura, calcular as condições cinemáticas iniciais do fluido sobre a interface:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{-\alpha/\delta} &= \mathbf{u}_0 - \Delta t \frac{\alpha}{\delta} \dot{\mathbf{u}}_0 && \text{em } \Gamma_{FE} \\
\mathbf{w}_0 &= \dot{\mathbf{u}}_0 && \text{em } \Gamma_{FE} \\
\mathbf{x}_{1-\alpha/\delta} &= \mathbf{x}_{-\alpha/\delta} + \Delta t \mathbf{w}_0 && \text{em } \Gamma_{FE}
\end{aligned} \tag{6.63}$$

e a velocidade de malha para os nós pertencentes ao domínio ALE ( $\Omega_{ALE}$ ) – ver Equação 6.90.

### B) Início do laço no tempo: $t = t + \Delta t$

Se  $t \leq t_{fixo}$  (fase de desenvolvimento do escoamento), então:

- (B.1) Analisar o escoamento através do algoritmo apresentado na Seção 3.5.1 (esquema explícito de dois passos).
- (B.2) Aplicar as condições de contorno naturais e essenciais considerando-se a condição de não deslizamento para a superfície de contato fluido-estrutura.

Obs: Nesta fase inicial a estrutura é considerada fixa e indeformável com o objetivo de reduzir o esforço computacional em problemas de IFE com estruturas móveis ou deformáveis, não necessitando, em um determinado período de análise, a solução do sistema estrutural, a atualização da malha do escoamento e de todas os procedimentos concernentes ao processo de acoplamento. Durante este período, a superfície de interface fluido-estrutura é considerada como um contorno essencial onde condições de não deslizamento são consideradas.

Se  $t > t_{fixo}$ , então:

### C) Início do laço de subciclos: $s = s + 1$

- (C.1) Distribuir o movimento de malha dos nós do fluido dentro da região ALE a partir dos últimos valores de velocidade de malha calculados de acordo com o número do subciclo atual.

$$\mathbf{x}_{n+1-\alpha/\delta}^s = \mathbf{x}_{n+1-\alpha/\delta}^{s-1} + \frac{(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{x}_{n+1-\alpha/\delta}^{s-1})}{n_{F/E} - s + 1} \quad (n_{F/E} = \Delta t_E / \Delta t_F) \quad \text{em } \Gamma_{FE} \tag{6.64}$$

- (C.2) Atualizar os vetores normais e as áreas de contorno sólido dos elementos de interface do fluido (ver seções 7.2.1 e 7.2.2).

- (C.3) Atualizar todas as matrizes em nível de elemento do fluido pertencentes ao domínio ALE.
- (C.4) Analisar o escoamento usando o algoritmo da Seção 3.5.1, obtendo as condições de escoamento em  $n+1-\alpha/\delta$  a partir da configuração  $\mathbf{x}_{n+1-\alpha/\delta}^s$ :  
 $\mathbf{v}_{n+1-\alpha/\delta}$  e  $\mathbf{p}_{n+1-\alpha/\delta}$ .
- (C.5) Aplicar as condições de contorno naturais e essenciais para o escoamento considerando-se que a velocidade do fluido em cada nó localizado sobre a superfície de interface é igual à velocidade de malha daquele nó.
- (C.6) Caso seja o momento, calcular o vetor de forças devido à ação do escoamento sobre a estrutura (ver Equação 7.28).

#### D) Fim do laço de subciclos.

- (D.1) Transferir o vetor de cargas do fluido para a estrutura utilizando o algoritmo de sincronização de dados de acordo com as condições de interface (malhas coincidentes ou não coincidentes).
- (D.2) Analisar a estrutura utilizando a algoritmo apresentado nas seções 5.5.2 e 5.5.3 (Método  $\alpha$ -Generalizado com controle de energia), obtendo a nova configuração da estrutura:  $\mathbf{u}_{n+1}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$ .
- (D.3) Atualização das condições cinemáticas do fluido sobre a interface empregando o modelo de acoplamento proposto neste trabalho (ver Figura 6.12):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{n-\alpha/\delta} &= \mathbf{u}_n - \Delta t \frac{\alpha}{\delta} \dot{\mathbf{u}}_n && \text{em } \Gamma_{FE} \\
 \mathbf{w}_n &= \dot{\mathbf{u}}_n && \text{em } \Gamma_{FE} \\
 \mathbf{x}_{n+1-\alpha/\delta} &= \mathbf{x}_{n-\alpha/\delta} + \Delta t \mathbf{w}_n && \text{em } \Gamma_{FE}
 \end{aligned} \tag{6.65}$$

- (D.4) Cálculo da velocidade de malha para os nós do domínio ALE utilizando o esquema de movimento apresentado na Seção 6.3.

#### E) Fim do laço no tempo – retornar p/ B).

F) Fim da análise:  $t = t_{final}$ .

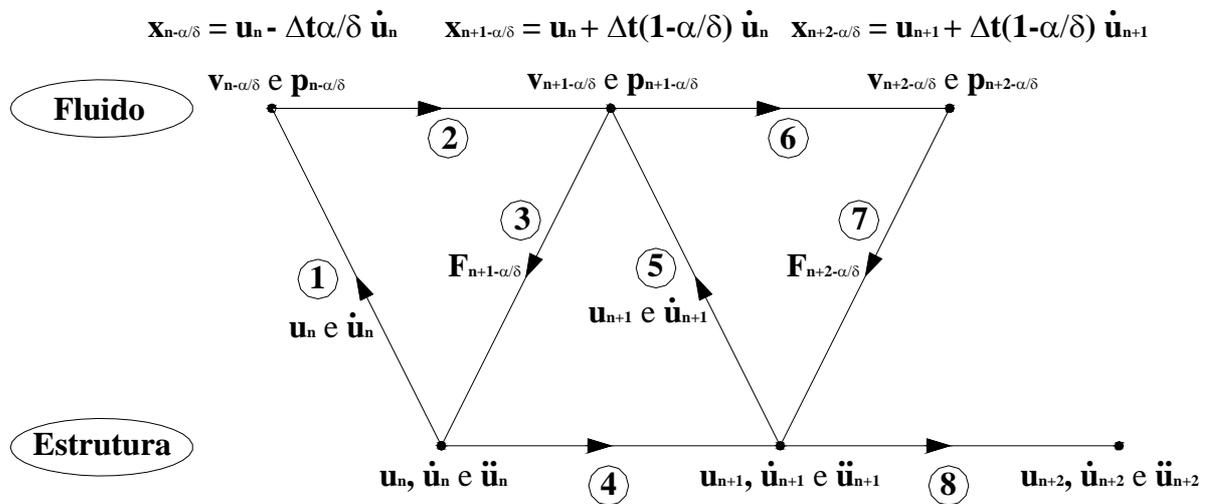


Figura 6.12: Modelo de acoplamento utilizado neste trabalho.

### 6.2.1 O algoritmo de emparelhamento entre as interfaces fluido-estrutura

O código numérico desenvolvido neste trabalho para o estudo de problemas de IFE possibilita a análise através de dois tratamentos distintos de discretização para a superfície de interface, podendo ser com malhas coincidentes ou com malhas não coincidentes para os subdomínios do fluido e da estrutura. No primeiro caso, a transferência de dados entre os meios é feita de modo direto, nó a nó, através de um processo de emparelhamento de cada nó de interface do fluido com o seu par correspondente na interface da estrutura. O emparelhamento é feito na fase de pré-processamento através de uma busca simples de pares de nós fluido-estrutura com coordenadas similares. Por outro lado, quando as discretizações do fluido e da estrutura são diferentes, é necessário um processo cuidadoso de emparelhamento entre os nós do fluido e pontos no interior de faces de elementos de contorno da estrutura. Na seqüência é apresentado o algoritmo desenvolvido neste trabalho para o processo de sincronização de informações entre malhas não conformes. Algoritmos similares podem ser encontrados em Löhner (1995) e Maman e Farhat (1995).

O algoritmo de sincronização pode ser resumido nos seguintes passos:

- (1) Laço sobre as faces de contorno de interface da estrutura;
- (2) Laço sobre os nós de interface do fluido;

(3) Verificar se o nó do fluido considerado está acima ou abaixo do plano da face da estrutura em questão. Com a ajuda da Figura 6.13, observa-se que a partir do ângulo formado entre a normal da face da estrutura ( $\vec{n}$ ), avaliada no seu ponto central ( $\mathbf{O}$ ), e um vetor que vai do ponto central da face até o nó do fluido analisado ( $\vec{p}$ ), é possível estabelecer-se as seguintes condições:

→ Se  $\theta > 90^\circ$  - Desconsidera-se este nó do fluido, pois ele está abaixo do plano da face – segue-se para o próximo nó de interface do fluido (passo 2);

→ Se  $\theta \leq 90^\circ$  - Segue-se para o próximo passo do algoritmo (passo 4).

O cálculo do ângulo  $\theta$  pode ser feito através da seguinte expressão:

$$\cos \theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{p}}{|\vec{n}| |\vec{p}|} \quad (6.66)$$

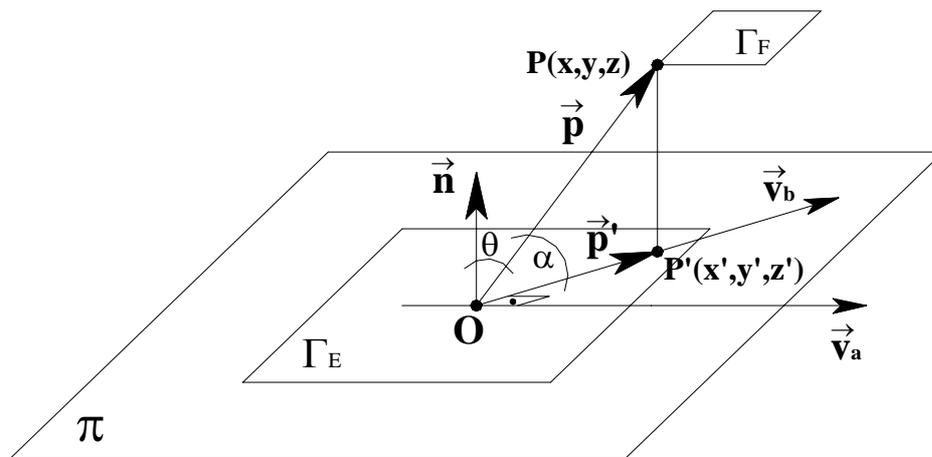


Figura 6.13: Projeção de um nó do fluido localizado na interface sobre o plano que contém a face de um elemento próximo da estrutura.

(4) Determinar as coordenadas do ponto  $\mathbf{P}'$ , que equivale à localização da projeção do ponto  $\mathbf{P}$ , o qual corresponde ao local do nó de interface do fluido analisado no espaço, sobre o plano que contém a face de interface da estrutura em questão ( $\pi$ ). O ponto  $\mathbf{P}'$  é obtido a partir da expressão abaixo:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{O} + \vec{p}' \Rightarrow \begin{Bmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} O_x \\ O_y \\ O_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{Bmatrix} \quad (6.67)$$

onde  $\mathbf{O}$  são as coordenadas do ponto central da face da estrutura em questão e  $\vec{\mathbf{p}}'$  é um vetor que representa a projeção do vetor  $\vec{\mathbf{p}}$  sobre o plano  $\pi$ , onde está contida a face da estrutura ( $\Gamma_E$ ). Com a ajuda da Figura 6.13, o vetor  $\vec{\mathbf{p}}'$  é definido da seguinte forma:

$$\vec{\mathbf{p}}' = \left\| \text{Proj}_{\vec{\mathbf{v}}_b}^{\vec{\mathbf{p}}} \right\| \frac{\vec{\mathbf{v}}_b}{|\vec{\mathbf{v}}_b|} \quad (6.68)$$

sendo:

$$\left\| \text{Proj}_{\vec{\mathbf{v}}_b}^{\vec{\mathbf{p}}} \right\| = |\vec{\mathbf{p}}| \cos \alpha \quad (6.69)$$

$$\vec{\mathbf{v}}_b = \vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{v}}_a \quad (6.70)$$

$$\vec{\mathbf{v}}_a = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{n}} \quad (6.71)$$

onde:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_b|}{|\vec{\mathbf{p}}| |\vec{\mathbf{v}}_b|} \quad (6.72)$$

Logo:

$$\vec{\mathbf{p}}' = |\vec{\mathbf{p}}| \frac{|\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_b|}{|\vec{\mathbf{p}}| |\vec{\mathbf{v}}_b|} \cdot \frac{\vec{\mathbf{v}}_b}{|\vec{\mathbf{v}}_b|} = \frac{|\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_b|}{|\vec{\mathbf{v}}_b| |\vec{\mathbf{v}}_b|} \vec{\mathbf{v}}_b = \frac{|\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_b|}{\vec{\mathbf{v}}_b \cdot \vec{\mathbf{v}}_b} \vec{\mathbf{v}}_b \quad (6.73)$$

- (5) Verificar se a projeção do ponto do fluido analisado sobre o plano  $\pi$ , onde está contida a face  $\Gamma_E$  da estrutura em questão, situa-se no interior ou fora dos limites da face. Esta verificação pode ser feita da seguinte maneira: quatro vetores são definidos inicialmente, ligando o ponto de projeção do fluido aos quatro nós da face da estrutura, como mostrado na Figura 6.14. Com estes quatro vetores é possível obter-se os quatro ângulos formados pelos quatro pares de vetores existentes, os quais são somados para que se observe a seguinte condição:

Se  $\sum_{i=1}^4 \beta_i = 360^\circ \Rightarrow$  Situação (a) da Figura 6.14: a projeção do nó está contida na face.

Segue-se para o próximo passo do algoritmo (passo 6).

Se  $\sum_{i=1}^4 \beta_i < 360^\circ \Rightarrow$  Situação (b) da Figura 6.14: a projeção do nó não está contida na face.

Retorna para o passo (2) ou para o passo (1), caso o laço de nós do fluido tenha se encerrado.

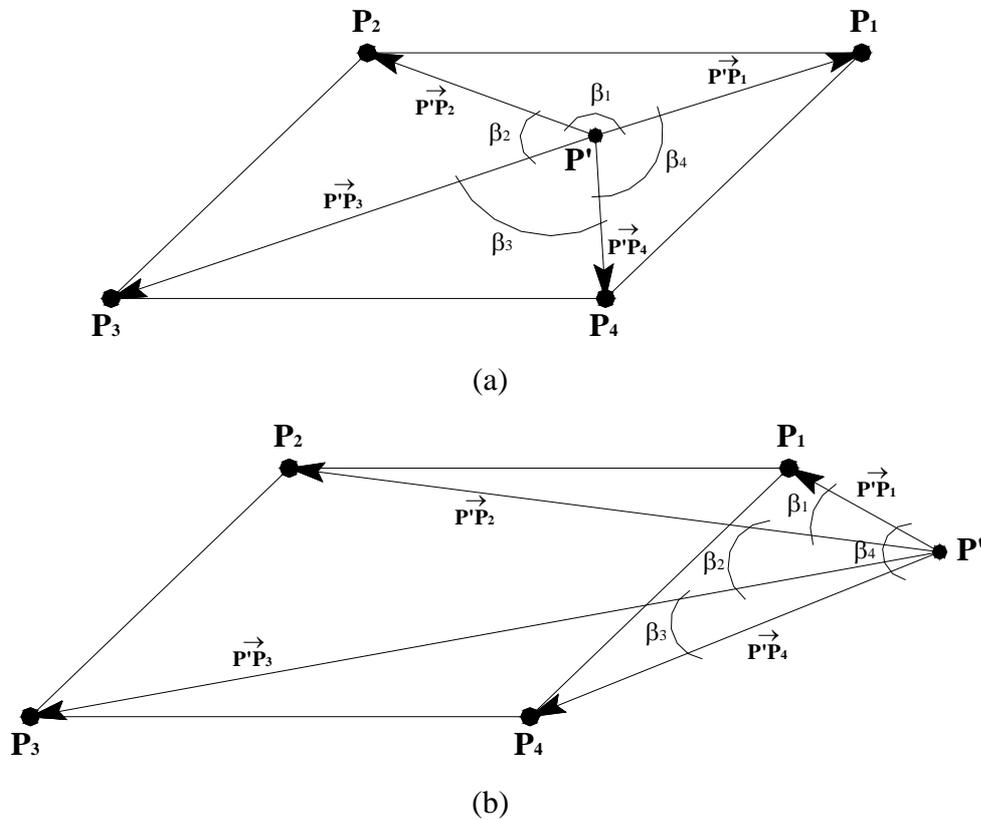


Figura 6.14: Verificação da localização do nó projetado do fluido sobre a face de um elemento da estrutura: (a) nó pertencente à face; (b) nó não pertencente à face.

Os quatro ângulos formados podem ser medidos, de acordo com a Figura 6.14, através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \cos \beta_1 &= \frac{\overline{P'P_1} \cdot \overline{P'P_2}}{|\overline{P'P_1}| |\overline{P'P_2}|} & ; & & \cos \beta_2 &= \frac{\overline{P'P_2} \cdot \overline{P'P_3}}{|\overline{P'P_2}| |\overline{P'P_3}|} \\ \cos \beta_3 &= \frac{\overline{P'P_3} \cdot \overline{P'P_4}}{|\overline{P'P_3}| |\overline{P'P_4}|} & ; & & \cos \beta_4 &= \frac{\overline{P'P_4} \cdot \overline{P'P_1}}{|\overline{P'P_4}| |\overline{P'P_1}|} \end{aligned} \quad (6.74)$$

- (6) Determinar as coordenadas naturais da projeção do nó do fluido sobre a face em questão da estrutura, através de mapeamento isoparamétrico inverso (Murti e Valliapan, 1986). Para um elemento hexaédrico trilinear isoparamétrico (ver Figura 6.15) são definidas as seguintes aproximações para as coordenadas cartesianas:

$$x = \sum_{i=1}^8 \Phi_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) x_i \quad ; \quad y = \sum_{i=1}^8 \Phi_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) y_i \quad ; \quad z = \sum_{i=1}^8 \Phi_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) z_i \quad (6.75)$$

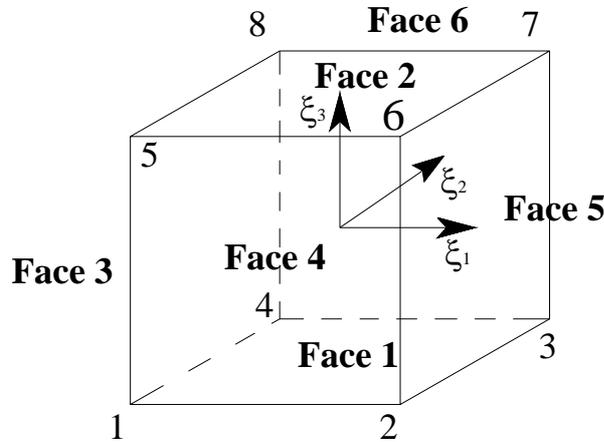


Figura 6.15: Definições geométricas para o elemento hexaédrico trilinear isoparamétrico.

Para obter-se as coordenadas naturais  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  do ponto de projeção, com coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , é necessária a solução de um sistema de equações não-lineares, expresso da seguinte forma:

$$\mathbf{A} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \quad (6.76)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (a_1 + a_4\xi_2 + a_5\xi_3 + a_7\xi_2\xi_3) & (a_2 + a_6\xi_3) & a_3 \\ b_1 & (b_2 + b_4\xi_1 + b_6\xi_3 + b_7\xi_1\xi_3) & (b_3 + b_5\xi_1) \\ (c_1 + c_4\xi_2) & c_2 & (c_3 + c_5\xi_1 + c_6\xi_2 + c_7\xi_1\xi_2) \end{bmatrix}$$

sendo:

$$\begin{aligned} a_1 &= (x_2 + x_3 + x_6 + x_7) - (x_1 + x_4 + x_5 + x_8) \\ a_2 &= (x_3 + x_4 + x_7 + x_8) - (x_1 + x_2 + x_5 + x_6) \\ a_3 &= (x_5 + x_6 + x_6 + x_7) - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ a_4 &= (x_1 + x_3 + x_5 + x_7) - (x_2 + x_4 + x_6 + x_8) \\ a_5 &= (x_1 + x_4 + x_6 + x_7) - (x_2 + x_3 + x_5 + x_8) \\ a_6 &= (x_1 + x_2 + x_7 + x_8) - (x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \\ a_7 &= (x_2 + x_4 + x_5 + x_7) - (x_1 + x_3 + x_6 + x_8) \end{aligned} \quad (6.77)$$

$$d_1 = 8x - \sum_{i=1}^8 x_i \quad ; \quad d_2 = 8y - \sum_{i=1}^8 y_i \quad ; \quad d_3 = 8z - \sum_{i=1}^8 z_i \quad (6.78)$$

onde  $x_i$ ,  $y_i$  e  $z_i$  são as coordenadas nodais cartesianas do elemento estrutural em questão. Para a obtenção dos coeficientes  $b_i$  e  $c_i$ , basta considerar os valores  $a_i$  correspondentes substituindo-se as coordenadas  $x_i$  por  $y_i$  e  $z_i$ , respectivamente. O sistema (6.76) é solucionado empregando-se o método de Newton-Raphson através da seguinte expressão:

$$\mathbf{A}^j \begin{Bmatrix} \Delta \xi_1^j \\ \Delta \xi_2^j \\ \Delta \xi_3^j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} - \mathbf{A}^j \begin{Bmatrix} \xi_1^j \\ \xi_2^j \\ \xi_3^j \end{Bmatrix} \quad (6.79)$$

sendo que o superíndice indica os valores referentes ao passo iterativo  $j$ . Como estimativa inicial para as coordenadas naturais considera-se  $\xi_1^0 = \xi_2^0 = \xi_3^0 = 0$ . A convergência é obtida quando a norma  $\sqrt{(\Delta \xi_i^j)^2 / (\xi_i^j)^2} \leq 10^{-3}$  é verificada simultaneamente para as três direções dos eixos naturais. Condições de contorno devem ser fornecidas para a solução do sistema de acordo com o número local de face do elemento da estrutura considerado, como é mostrado na Tabela 6.2 abaixo.

Tabela 6.2: Condições de contorno para a solução do sistema (6.79).

Nº Local da Face	Condições de Contorno		
	Coord. Naturais $\xi_i$	Termo Ind. $d_i$	Elem. da Matriz $\mathbf{A}$ ( $A_{ij}$ )
Face 1	$\xi_3 = -1.0$	$d_3 = 0.0$	$A_{33} = 1.0$ $A_{13} = A_{23} = A_{31} = A_{32} = 0$
Face 2	$\xi_3 = 1.0$	$d_3 = 0.0$	$A_{33} = 1.0$ $A_{13} = A_{23} = A_{31} = A_{32} = 0$
Face 3	$\xi_1 = -1.0$	$d_1 = 0.0$	$A_{11} = 1.0$ $A_{12} = A_{13} = A_{21} = A_{31} = 0$
Face 4	$\xi_2 = -1.0$	$d_2 = 0.0$	$A_{22} = 1.0$ $A_{21} = A_{23} = A_{12} = A_{32} = 0$
Face 5	$\xi_1 = 1.0$	$d_1 = 0.0$	$A_{11} = 1.0$ $A_{12} = A_{13} = A_{21} = A_{31} = 0$
Face 6	$\xi_2 = 1.0$	$d_2 = 0.0$	$A_{22} = 1.0$ $A_{21} = A_{23} = A_{12} = A_{32} = 0$

### 6.2.2 A transferência de dados através da interface

Uma vez que se tenha estabelecido as relações entre os nós de interface do fluido com os respectivos nós ou coordenadas naturais de elementos de interface da estrutura, na fase de

pré-processamento, o processo de transferência de dados através da superfície de contato pode ser feito ao longo de toda a análise utilizando as mesmas relações criadas anteriormente. Neste trabalho será utilizada uma técnica baseada em interpolações, apresentada na Seção 6.1.4, onde é possível identificar-se dois sentidos distintos de fluxo de informações: a transferência de cargas do fluido para os elementos de contorno da estrutura e a transferência de deslocamentos e velocidades da estrutura para os nós de interface do fluido.

A transferência de cargas devidas à ação do escoamento sobre a superfície de interface é feita da seguinte maneira (ver também a Seção 7.4.4):

(1) Primeiramente, as tensões viscosas calculadas no centro de elementos do fluido em contato com a estrutura são suavizadas aos nós de contorno. Deste modo é possível calcular-se as componentes  $t_i$  do vetor de tração agindo sobre cada um dos nós de interface, ou seja:

$$t_i = (-p\delta_{ij} + \tau_{ij}^s)n_j \quad \text{em } \Gamma_{FE} \quad (i,j=1,2,3) \quad (6.80)$$

onde  $p$  é a pressão no escoamento avaliada no nó considerado,  $\tau_{ij}^s$  as componentes suavizadas do tensor de tensões viscosas do fluido neste nó e  $n_j$  são as componentes da normal segundo a direção do eixo global  $x_j$  no nó.

(2) Multiplicar as componentes do vetor de tração  $t_i$  pela área suavizada do nó correspondente:  $F_{Fi} = t_i A_i^s$ . A área nodal  $A_i^s$ , tomada para o cálculo das componentes de força  $F_{Fi}$ , depende da configuração da malha do fluido sobre a interface no momento da avaliação das cargas.

(3) Transferir as cargas, devidas ao escoamento, dos nós de interface do fluido para os nós de interface da estrutura, por interpolação, utilizando as coordenadas naturais obtidas através das relações estabelecidas na fase de pré-processamento, ou seja:

$$\mathbf{f}_N^E = \sum_{j=1}^{NGF} \mathbf{F}_F^j \Phi_N^E(\xi^j) \quad \text{em } \Gamma_{FE} \quad (6.81)$$

sendo  $\mathbf{f}_N^E$  o vetor de forças da estrutura atuando no nó N do elemento E da estrutura,  $\mathbf{F}_F^j$  é o vetor de forças do fluido agindo sobre um ponto da superfície do elemento E definido pelo vetor de coordenadas naturais  $\xi^j$ ,  $\Phi_N^E$  é a função de interpolação no nó N do elemento E e

NFG é o número total de pontos de Gauss da estrutura, que correspondem aos pontos de aplicação de carga do fluido.

(4) Somar as contribuições nodais de carga para todos os elementos da estrutura localizados

na interface (NEI):  $\mathbf{f}_N = \sum_{E=1}^{NEI} \mathbf{f}_N^E$ .

A transferência de cargas é realizada sempre ao final dos subciclos do fluido, sendo que os valores tomados para o vetor de tração  $t_i$  podem ser uma média calculada segundo o número de subciclos, o valor correspondente ao último subciclo, o valor intermediário ou em qualquer outro ponto dentre os subciclos.

Em outro sentido, a transferência das condições cinemáticas de interface da estrutura para o fluido é realizada da seguinte forma:

(1) Uma vez obtidos os campos de deslocamento e velocidade da estrutura, os valores nodais de interface são interpolados em cada elemento, sendo avaliados em todos os pontos de Gauss existentes, os quais estabelecem a relação com os nós de interface do fluido contidos no respectivo elemento da estrutura. A expressão que caracteriza o processo descrito acima é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_F(\mathbf{x}^j) &= \sum_{i=1}^4 \mathbf{u}_E^i \Phi_E^i(\xi^j) && \text{em } \Gamma_{FE} \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}^j) &= \sum_{i=1}^4 \dot{\mathbf{u}}_E^i \Phi_E^i(\xi^j) && \text{em } \Gamma_{FE} \end{aligned} \quad (6.82)$$

onde  $\mathbf{x}^j$  o vetor de coordenadas cartesianas de um nó  $j$  de interface do fluido, o qual relaciona-se com um ponto sobre a face de um elemento  $E$  de interface da estrutura cujas coordenadas naturais são dadas por  $\xi^j$ . Os vetores  $\mathbf{u}_E^i$  e  $\dot{\mathbf{u}}_E^i$  representam os valores de deslocamento e velocidade da estrutura avaliados nos nós  $i$  da face de contorno do elemento  $E$  cujas funções de interpolação vêm dadas por  $\Phi_E^i$ , sendo avaliadas em  $\xi^j$ . O processo acima é efetuado para todos os elementos em contato com a interface.

### 6.3 ATUALIZAÇÃO AUTOMÁTICA DA MALHA

Em problemas de interação fluido-estrutura os deslocamentos ou deformações apresentados pela estrutura exigem a utilização de uma descrição arbitrária Lagrangeana-Euleriana para a região vizinha do corpo. Com isso, a malha nesta região deve mover-se segundo uma lei que estabeleça o campo de velocidades de malha  $w_j$  de tal forma que todos os elementos mantenham a sua integridade. Além disso, são estabelecidas as seguintes condições de contorno para o vetor de velocidade de malha  $\mathbf{w}$ :

$$\mathbf{w}|_{\Gamma_b} = \mathbf{w}_b \quad (6.83)$$

$$\mathbf{w}|_{\Gamma_e} = \mathbf{w}_e = 0 \quad (6.84)$$

onde  $\Gamma_b$  é a superfície de interface da malha do fluido em contato com contornos de corpos deslocáveis ou deformáveis e  $\Gamma_e$  é a superfície de interface entre as regiões ALE e Euleriana da malha do fluido. Os vetores  $\mathbf{w}_b$  e  $\mathbf{w}_e$  representam os valores prescritos de velocidade de malha nas regiões  $\Gamma_b$  e  $\Gamma_e$ , respectivamente.

Neste trabalho adota-se o mesmo esquema de movimento de malha empregado por Teixeira (2001) e posteriormente por Braun (2002). Neste modelo utiliza-se um procedimento de suavização das velocidades de malha a partir dos valores verificados na interface (ver Figura 6.16). A determinação é feita segundo a equação abaixo:

$$w_k^i = \frac{\sum_{j=1}^{NS} a_{ij} w_k^j}{\sum_{j=1}^{NS} a_{ij}} \quad (i = 1, \dots, NALE; k = 1, 2, 3) \quad (6.85)$$

onde NS e NALE são, respectivamente, o número total de superfícies de fronteira e o número de nós internos, ambos relativos ao domínio ALE. Os fatores  $a_{ij}$  são coeficientes de influência entre os pontos do interior do domínio  $i$  e os nós de fronteira  $j$ , dados pela seguinte expressão:

$$a_{ij} = (d_{ij})^{-n} \quad (6.86)$$

sendo  $d_{ij}$  a distância Euclidiana entre os nós  $i$  e  $j$  e  $n$  um valor arbitrário definido pelo usuário.

Como se pode observar,  $a_{ij}$  representa um fator de peso, ou influência, que os valores de velocidade dos nós de fronteira  $j$  exercem sobre os valores obtidos nos nós internos  $i$ . Logo, quando a distância  $d_{ij}$  é pequena,  $a_{ij}$  apresenta, conseqüentemente, um valor elevado, indicando uma maior influência de um determinado nó de fronteira  $j$  mais próximo. Por outro lado, quanto maior a distância  $d_{ij}$ , menor é a influência do nó de fronteira  $j$  sobre o nó interno  $i$ . Esta relação pode ser mais ou menos pronunciada de acordo com o valor atribuído ao expoente  $n$ . Um expoente menor indica uma menor influência dos nós de fronteira mais próximos em relação a um valor  $n$  mais alto. Usualmente, emprega-se  $n = 4$  como um valor padrão nas simulações. A determinação da área/volume de malha móvel (ver Figura 6.16) é feita diretamente pelo usuário a partir de experiências anteriores e de suposições sobre o campo de deslocamentos que a estrutura pode vir a apresentar.

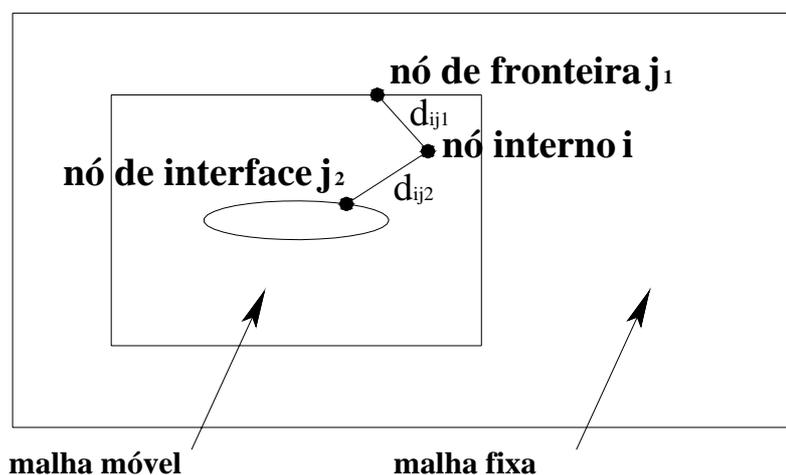


Figura 6.16: Definição de parâmetros para o esquema de movimento de malha.

## 7 ASPECTOS GERAIS SOBRE AS ETAPAS DE ANÁLISE

### 7.1 INTRODUÇÃO

A análise numérica de problemas da Mecânica do Contínuo consiste basicamente em um conjunto de processos divididos em três etapas bem definidas, como esquematizado na figura abaixo: a fase de pré-processamento de dados, a simulação numérica ou processamento em si e, por fim, o pós-processamento dos dados obtidos a partir da solução.

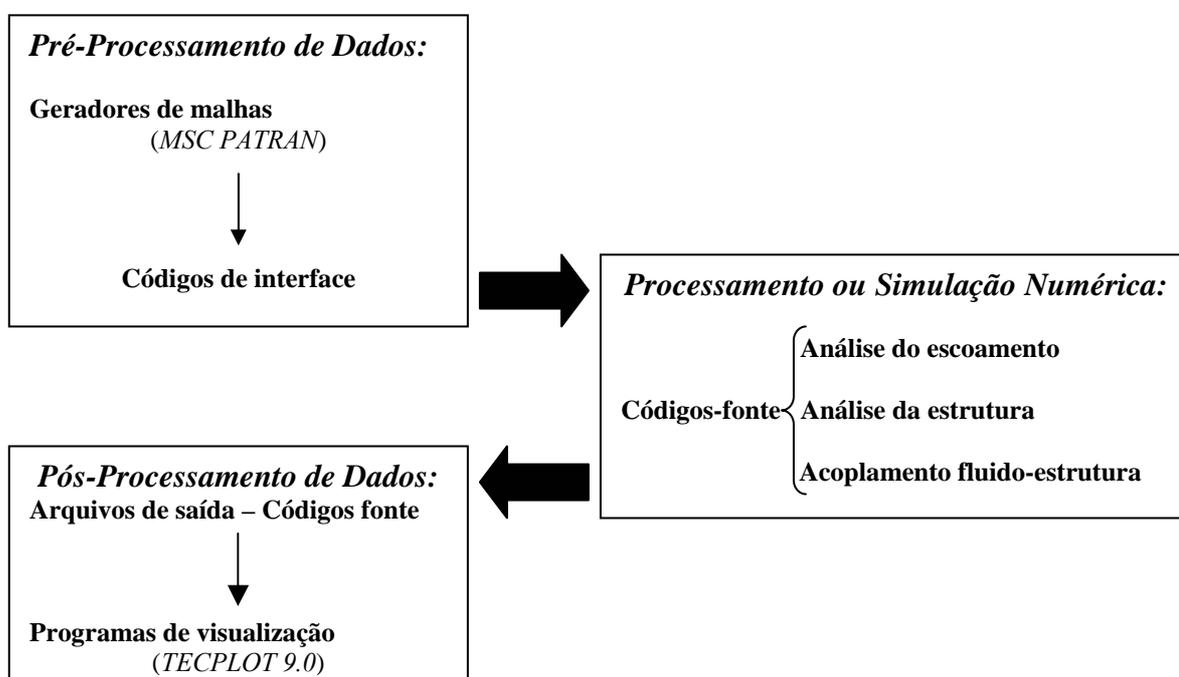


Figura 7.1: As etapas de processamento realizadas em análises numéricas.

Na fase de pré-processamento realiza-se, inicialmente, a modelagem geométrica do problema, que consiste em definir um domínio geométrico representativo no espaço, denominado de volume de controle, onde a análise será efetuada. A partir da modelagem geométrica é possível criar a malha de acordo com as exigências de discretização espacial ditadas pelo comportamento das variáveis do problema nas diferentes regiões do domínio. Sobre o volume de controle discretizado espacialmente (malha) é que são aplicadas finalmente as condições de contorno para as variáveis. Portanto, através de programas geradores de malhas são obtidos todos os dados relativos à geometria da malha, topologia do

elemento empregado e condições de contorno de variáveis. Dados relativos a constantes físicas da matéria são geralmente fornecidos aos códigos-fonte através de arquivos simples criados por meio de editores de texto. No presente trabalho emprega-se o programa MSC PATRAN (2001) como ferramenta de pré-processamento de dados.

Na fase de processamento ou simulação numérica são empregados os códigos-fonte, que consistem em um conjunto de rotinas representando as operações matemáticas necessárias para a solução das equações governantes do problema idealizadas pelo modelo numérico. Os códigos-fonte são geralmente inicializados a partir de dados de entrada gerados na fase de pré-processamento. Ao final da simulação tem-se como resultado uma série de arquivos de saída contendo as informações necessárias para a fase de pós-processamento. Os códigos aqui utilizados foram criados usando a linguagem de programação FORTRAN 90 e executados utilizando técnicas de vetorização, empregadas para o supercomputador CRAY T94 (3 CPU's de 2 Gflops de velocidade de pico e 2 Gb de memória RAM) do Centro Nacional de Supercomputação (CESUP/RS), sendo criadas ainda versões escalares para execução em PC's (processadores Athlon AMD de 3.4 GHz e 2 Gb de memória RAM) do Centro de Mecânica Aplicada Computacional (CEMACOM/PPGEC/UFRGS).

Por fim, na fase de pós-processamento são utilizados os resultados fornecidos pelos códigos-fonte na forma de arquivos de saída, os quais são processados através de programas de visualização. Alguns dados podem ser processados pelo próprio código-fonte, como é o caso da obtenção de campos suavizados de variáveis e obtenção de coeficientes aerodinâmicos (arrasto, sustentação, momento, coeficientes de pressão, etc.). O programa TECPLOT 8.0 (2000) da AMTEC ENGINEERING INC. é usado neste trabalho para a visualização e construção de gráficos de resultados.

## 7.2 PRÉ-PROCESSAMENTO DE DADOS

A partir do programa de geração de malhas MSC PATRAN é possível obter-se arquivos de saída contendo informações tais como o número total de nós e de elementos da malha, as coordenadas nodais, as conectividades dos elementos, condições de contorno de variáveis e ainda a seleção de determinados nós do domínio computacional. Estes arquivos de saída podem ser disponibilizados em um determinado formato padronizado, denominado de formato neutro ("*neutral files*"), com o qual se consegue identificar facilmente os dados

citados acima. Com isso, pode-se desenvolver um código de interface que faça a leitura dos arquivos fornecidos pelo gerador PATRAN e converta-os em arquivos no formato exigido pelos códigos-fonte deste trabalho. Para esta tese foi construído um programa de interface utilizando uma filosofia similar àquela proposta por Burbridge (1999) em sua dissertação.

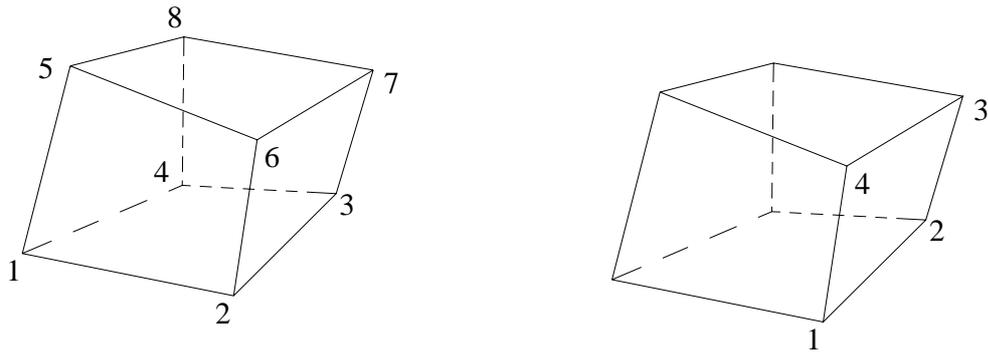
Algumas informações, no entanto, não podem ser obtidas diretamente através de um gerador de malhas como o PATRAN. No capítulo 3 são apresentadas algumas integrais de contorno onde se faz necessária a determinação de vetores de contorno unitários (co-senos diretores) e de áreas de faces de elementos do domínio do fluido que estão em contato com corpos imersos no escoamento, além de faces de elementos de contornos do fluido com integrais de contorno não desprezíveis. Estes dados devem ser fornecidos em arquivos de entrada aos códigos-fonte que analisam o escoamento, sendo obtidos através de rotinas de cálculo inseridas no código de interface, as quais identificam os nós e os elementos de contorno por meio de arquivos de saída do gerador de malhas.

Na seqüência são apresentados os respectivos esquemas utilizados neste trabalho para a obtenção dos vetores normais e áreas de faces de contorno. No caso de problemas de interação fluido-estrutura analisados com uma formulação arbitrária Lagrangeana-Euleriana, as rotinas a seguir devem ser incorporadas aos códigos-fonte de análise do escoamento de forma a atualizar estas grandezas em cada modificação efetuada na malha.

### 7.2.1 Determinação de vetores normais a faces de contorno

O cálculo dos vetores normais  $\mathbf{n}$  é feito considerando-se que os mesmos estão orientados de forma saliente à face de contorno dos elementos, ou seja, com o sentido apontando para fora dos elementos. Para isso, é preciso, inicialmente, definir-se as conectividades dos nós situados na face de contorno dos respectivos elementos.

A Figura 7.2 mostra um elemento genérico com a sua numeração local de nós e uma numeração local feita em uma face de contorno. Como se pode observar, esta última numeração é feita na face no sentido anti-horário sob um ponto de observação exterior ao elemento. Tomando-se a numeração dos nós locais do elemento genérico e levando em conta a ordem de numeração dada para os nós de uma face de contorno, é possível identificar-se a face de contorno de um elemento qualquer e as respectivas conectividades desta face, como mostra o esquema dado pela Tabela 7.1.



Nós locais de um elemento genérico

Nós locais de uma face de contorno

Figura 7.2: Numeração local de um elemento de contorno.

Tabela 7.1: Identificação das faces de contorno e as respectivas conectividades em elementos de contorno.

FACE	ORDEM DE NUMERAÇÃO NA FACE – CONECTIVIDADES
<b>I</b>	1 – 4 – 3 – 2
<b>II</b>	5 – 6 – 7 – 8
<b>III</b>	1 – 5 – 8 – 4
<b>IV</b>	1 – 2 – 6 – 5
<b>V</b>	2 – 3 – 7 – 6
<b>VI</b>	3 – 4 – 8 – 7

Desta forma, os vetores normais unitários apontando para fora do elemento podem ser determinados em cada nó das faces de contorno através de produtos vetoriais de vetores característicos da face. Estes produtos são efetuados sempre no sentido anti-horário com a ajuda da ordem de numeração local dos nós da face, como é ilustrado na Figura 7.3 abaixo.

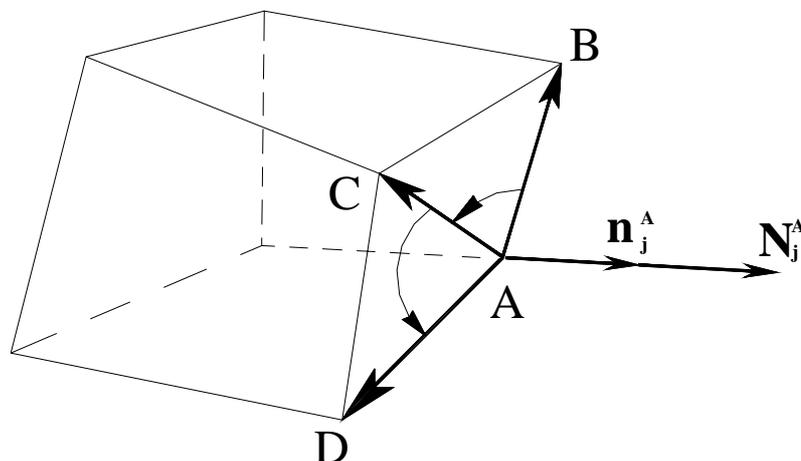


Figura 7.3: Vetores característicos da face  $j$  no nó A.

Devido ao fato de que as faces dos elementos finitos possam ser não co-planares, os vetores normais calculados nos nós são determinados de forma aproximada. Considerando a Figura 7.3, o vetor normal à face  $j$  no nó  $A$  é determinado através da seguinte expressão:

$$\mathbf{N}_j^A = \overline{\mathbf{AB}} \times \overline{\mathbf{AC}} + \overline{\mathbf{AC}} \times \overline{\mathbf{AD}} \quad (7.1)$$

onde  $\times$  representa o produto vetorial e  $\overline{\mathbf{IJ}}$  é um vetor definido na forma usual a partir dos pontos  $I$  e  $J$ . O vetor normal unitário no ponto  $A$  da face  $j$  é obtido como segue:

$$\mathbf{n}_j^A = \frac{\mathbf{N}_j^A}{|\mathbf{N}_j^A|} \quad (7.2)$$

sendo  $|\mathbf{N}_j^A|$  o módulo do vetor  $\mathbf{N}_j^A$ .

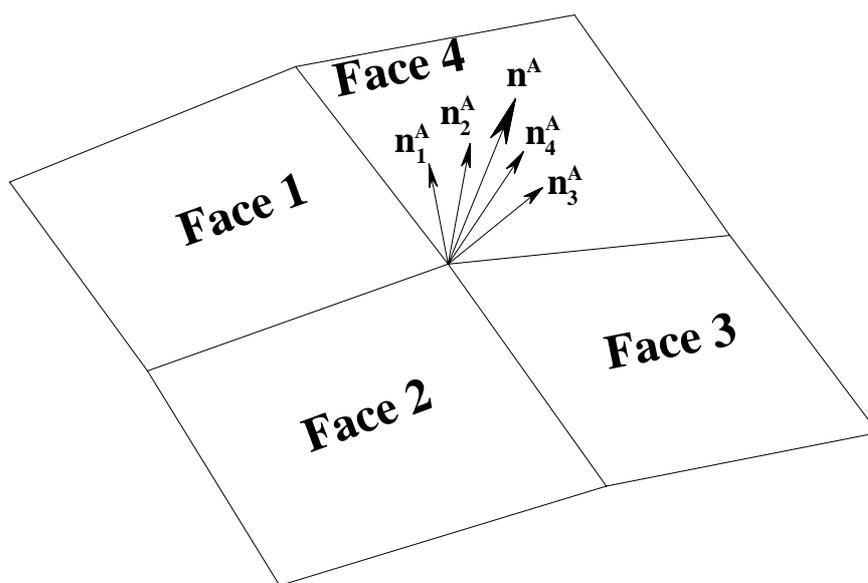


Figura 7.4: Obtenção do vetor normal unitário no nó  $A$ .

Uma vez obtido o vetor normal unitário no ponto  $A$  para a face  $j$  de um dado elemento de contorno, o mesmo deve ser feito para todas as faces de elementos de contorno concorrentes a este nó. Finalmente, o vetor normal unitário no nó  $A$  é obtido por meio de uma soma vetorial dos vetores normais unitários de cada uma das faces de elementos de contorno que tenham o nó  $A$  em comum (ver Figura 7.4), ou seja:

$$\mathbf{n}_j^A = \frac{\sum_{j=1}^{NTF} \mathbf{n}_j^A}{\left| \sum_{j=1}^{NTF} \mathbf{n}_j^A \right|} \quad (7.3)$$

onde  $j$  e NTF indicam uma face individualmente e o número total de faces concorrentes ao nó A, respectivamente. Este processo deve ser realizado para todos os nós de contorno sólido e para todos os nós onde ocorram integrais de contorno não desprezíveis.

### 7.2.2 Determinação das áreas de faces de contorno

O cálculo das áreas das faces de contorno é realizado de forma aproximada, devido à possibilidade de falta de co-planaridade das faces de alguns elementos, dividindo-se a face de contorno em duas subfaces triangulares,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , como indicado na Figura 7.5.

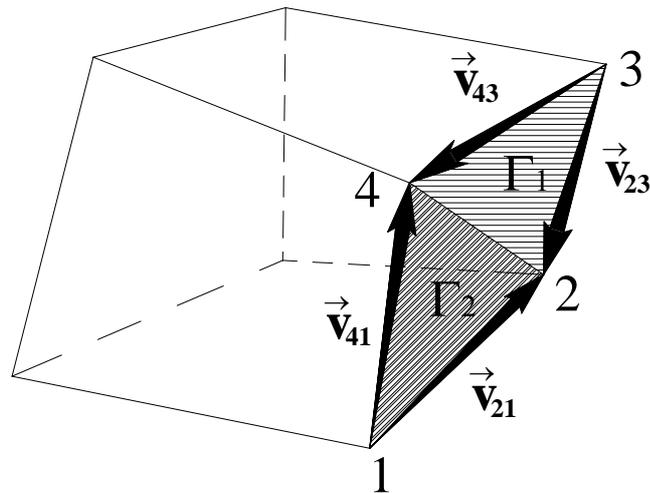


Figura 7.5: Cálculo das áreas das faces de contorno.

A área total da face  $\Gamma$  é obtida através da soma das áreas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , as quais são determinadas pelos módulos de produtos vetoriais realizados sobre a face, como mostrado abaixo:

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Gamma_1 = \frac{|\vec{v}_{21} \times \vec{v}_{41}|}{2} \\ \Gamma_2 = \frac{|\vec{v}_{43} \times \vec{v}_{23}|}{2} \end{cases} \quad (7.4)$$

## 7.3 PÓS-PROCESSAMENTO DE DADOS

### 7.3.1 Visualização de resultados

Os códigos-fonte desenvolvidos para este trabalho possibilitam que arquivos de saída contendo resultados sejam impressos em determinados instantes de tempo, segundo uma dada frequência, ao longo do processo de simulação. No caso do fluido são fornecidas as coordenadas da configuração atual da malha, os campos de velocidade e pressão e os coeficientes aerodinâmicos (arrasto, sustentação, momentos e pressão). Para a estrutura estão disponíveis as coordenadas da configuração atual, os campos de aceleração, velocidade e deslocamento e ainda a distribuição das componentes de tensão nodais. Uma vez obtidos estes arquivos, os dados são convertidos para um formato específico exigido pelo programa TECPLOT 9.0, com o qual são visualizados os resultados.

### 7.3.2 Suavização do campo de pressões do escoamento

A suavização do campo de pressões tem por finalidade eliminar oscilações ocasionais que possam ocorrer pelo domínio de análise do escoamento e melhorar, assim, a visualização e interpretação dos resultados obtidos.

Inicialmente, é obtida a pressão no centro de cada elemento a partir dos valores nodais não suavizados, ou seja:

$$p_0 = \frac{1}{8} \sum_{N=1}^8 p_N \quad (7.5)$$

sendo  $p_0$  a pressão no centro do elemento E e  $p_N$  os respectivos valores nodais não suavizados.

Através do método dos mínimos quadrados, obtém-se o seguinte funcional em nível local:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega_E} (p_s - p_0)^2 d\Omega \quad (7.6)$$

onde  $p_s$  são os valores nodais de pressão suavizados ainda não determinados.

Para minimizar o funcional dado em (7.6), os valores de  $p_s$  devem ser tais que a primeira variação de  $\pi$  seja nula, ou seja:

$$\delta\pi = \int_{\Omega_E} (p_s - p_0) \delta p_s d\Omega = 0 \quad (7.7)$$

Substituindo a expressão (7.5) em (7.7) e considerando a aproximação  $p_s = \Phi \mathbf{p}_s$ , a Equação (7.7) fica na seguinte forma:

$$\int_{\Omega_E} \Phi^T \left( \Phi \mathbf{p}_s - \frac{1}{8} \sum_{N=1}^8 p_N \right) d\Omega = 0 \quad (7.8)$$

de onde surge a expressão:

$$\mathbf{M} \mathbf{p}_s = \frac{1}{8} \sum_{N=1}^8 p_N \int_{\Omega_E} \Phi^T d\Omega \quad (7.9)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a já conhecida matriz de massa do fluido.

Para desacoplar a Equação (7.9) é necessário adotar a matriz de massa discreta  $\mathbf{M}_D$  no lugar da matriz de massa consistente  $\mathbf{M}$ . Assim, em nível local, tem-se que:

$$(\mathbf{p}_s)_E = \frac{1}{64} (\mathbf{M}_D)^{-1} \sum_{N=1}^8 p_N \Omega_E \quad (7.10)$$

sendo  $\Omega_E$  o volume do elemento E, o qual apresenta a seguinte relação:

$$\int_{\Omega_E} \Phi^T d\Omega = \frac{\Omega_E}{8} \quad (7.11)$$

A Equação (7.10) está definida em nível de elemento, devendo ser montada da maneira usual feita no Método dos Elementos Finitos para a obtenção dos valores globais de pressão suavizada, o que resulta na seguinte expressão:

$$(\mathbf{p}_s)_i = \frac{\sum_{E=1}^{NE} (p_0)_E \Omega_E}{\sum_{E=1}^{NE} \Omega_E} \quad (7.12)$$

onde E é um índice que vai de 1 até o número total de elementos concorrentes ao nó  $i$  (NE).

### 7.3.3 Suavização das componentes de tensão da estrutura

A suavização das componentes do tensor de tensões da estrutura é realizada com o intuito de obter-se os valores nodais destas variáveis, uma vez que as tensões são grandezas definidas em nível de elemento, apresentando, portanto, uma descontinuidade entre os elementos que compõe a malha. Para o processo de suavização adota-se o mesmo método empregado para a obtenção do campo de pressões suavizadas do fluido.

Seja  $\sigma_s$  o valor da tensão em um ponto do elemento E, obtido através da interpolação dos valores nodais de tensão  $\sigma_s$  usando as funções de interpolação  $\mathbf{N}$ , e seja  $\sigma_E$  o valor da tensão no elemento E, aplicando o princípio dos mínimos quadrados, tem-se que:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega_E} (\mathbf{N}\sigma_s - \sigma_E)^2 d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega_E} (\sigma_s - \sigma_E)^2 d\Omega \quad (7.13)$$

Minimizando  $\pi$ , obtém-se:

$$\delta\pi = \int_{\Omega_E} (\sigma_s - \sigma_E) \delta\sigma_s d\Omega = \delta\sigma_s^T \int_{\Omega_E} \mathbf{N}^T (\mathbf{N}\sigma_s - \sigma_E) d\Omega = 0 \quad (7.14)$$

A expressão acima resulta no seguinte sistema:

$$\mathbf{M}\sigma_s = \sigma \quad (7.15)$$

onde:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega_E} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad ; \quad \sigma = \int_{\Omega_E} \mathbf{N}^T \sigma_E d\Omega \quad (7.16)$$

Para evitar a solução de um sistema de equações acoplado, utiliza-se a forma discreta da matriz  $\mathbf{M}$ . Neste caso, para o nó N, tem-se que:

$$\sigma_N = \frac{\sum_{E=1}^{NEL} \sigma_E \Omega_E}{\sum_{E=1}^{NEL} \Omega_E} \quad (7.17)$$

onde NEL representa o número total de elementos concorrentes ao nó N.

### 7.3.4 Determinação dos coeficientes aerodinâmicos

O uso de coeficientes para a quantificação das características aerodinâmicas de corpos imersos em um escoamento de ar é uma prática bastante difundida em experimentos da Engenharia do Vento. Através dos históricos destes coeficientes é possível obter-se uma estimativa de carga produzida pelo vento sobre a estrutura, bem como projetar um corpo com uma forma otimizada frente às ações do escoamento, como é o caso dos aerofólios.

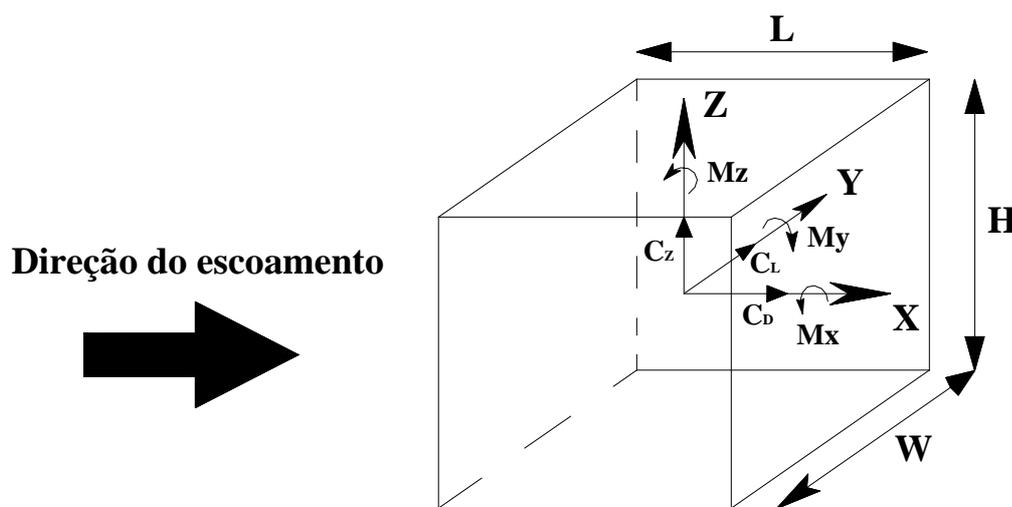


Figura 7.6: Convenções para a determinação dos coeficientes aerodinâmicos.

A Figura 7.6 acima apresenta uma convenção para a determinação das forças aerodinâmicas segundo a direção do escoamento. O *coeficiente de arrasto* ( $C_D$ ) está relacionado com as forças que atuam sobre a estrutura na direção do escoamento, enquanto que o *coeficiente de sustentação* ( $C_L$ ,  $C_Z$ ) diz respeito às forças que atuam sobre a estrutura na direção transversal. Os *coeficientes de momento aerodinâmico* ( $M_x$ ), ( $M_y$ ) e ( $M_z$ ), referem-se a cargas de momento produzidas segundo a direção dos eixos globais **X**, **Y** e **Z**

(correspondendo, respectivamente, aos eixos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  na notação indicial), cuja origem coincide com o centro de gravidade do corpo.

Os coeficientes aerodinâmicos são usualmente avaliados numericamente através das seguintes expressões:

$$C_D = \frac{\sum_{i=1}^{NNI} (F_x)^i}{1/2 \rho V_\infty^2 HW} \quad (7.18)$$

$$C_L = \frac{\sum_{i=1}^{NNI} (F_y)^i}{1/2 \rho V_\infty^2 HL} \quad (7.19)$$

$$C_Z = \frac{\sum_{i=1}^{NNI} (F_z)^i}{1/2 \rho V_\infty^2 WL} \quad (7.20)$$

$$C_{M_z} = \frac{\sum_{i=1}^{NNI} (F_y \Delta_x - F_x \Delta_y)^i}{1/2 \rho V_\infty^2 HLW} \quad (7.21)$$

$$C_{M_x} = \frac{\sum_{i=1}^{NNI} (F_z \Delta_y - F_y \Delta_z)^i}{1/2 \rho V_\infty^2 H^2 L} \quad (7.22)$$

$$C_{M_y} = \frac{\sum_{i=1}^{NNI} (F_x \Delta_z - F_z \Delta_x)^i}{1/2 \rho V_\infty^2 H^2 W} \quad (7.23)$$

sendo:

$$\begin{aligned} (\Delta_x)^i &= X_i - X_g \\ (\Delta_y)^i &= Y_i - Y_g \\ (\Delta_z)^i &= Z_i - Z_g \end{aligned} \quad (7.24)$$

onde  $X_i$ ,  $Y_i$  e  $Z_i$  são as coordenadas do nó de interface  $i$  e  $X_g$ ,  $Y_g$  e  $Z_g$  são as coordenadas do centro de gravidade do corpo. Nas equações acima,  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $V_\infty$  é a

velocidade característica do escoamento e NNI é o número de nós de contorno do fluido sobre o corpo. As forças  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$  são obtidas a partir da integração numérica da expressão (2.59) sobre a superfície de interface sólido-fluido, como é demonstrado a seguir.

As forças por unidade de área exercidas pela ação do escoamento sobre um corpo imerso podem ser expressas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} F_x/A &= -t_1 = -\sigma_{1j}n_j \\ F_y/A &= -t_2 = -\sigma_{2j}n_j \\ F_z/A &= -t_3 = -\sigma_{3j}n_j \end{aligned} \quad (7.25)$$

onde  $\sigma_{ij}$  são as componentes do tensor de tensões do fluido, dadas em (2.5), sendo composto pelas componentes de tensão de cisalhamento  $\tau_{ij}$  e pela pressão  $p$ . De acordo com o modelo numérico empregado pelo presente trabalho, verifica-se que os vetores  $n_j$  e a pressão são calculados diretamente nos nós da malha, enquanto que a tensão de cisalhamento é dada em nível de elemento, necessitando, por isso, algum processo de suavização para a obtenção dos respectivos valores nodais. Além disso, a área da face de contato dos elementos de contorno também deve ser suavizada para obter-se um valor de influência nodal equivalente.

As tensões viscosas em um determinado nó de contorno são obtidas através de uma suavização feita por meio de uma ponderação das áreas das faces de contorno dos elementos ( $\Gamma_k$ ) concorrentes a este nó. As tensões atuantes no centro do elemento são consideradas as mesmas que atuam sobre a face de contorno. Logo, tem-se que:

$$\tau_{ij}^A = \frac{\sum_{k=1}^{NFC} (\tau_{ij})_k \Gamma_k}{\sum_{k=1}^{NFC} \Gamma_k} \quad (7.26)$$

sendo NFC o número de faces concorrentes a um nó genérico de interface A. As componentes de tensão de cisalhamento  $\tau_{ij}$  são calculadas no centro dos elementos de contorno do fluido com faces de contorno sólido. São empregadas para isso as mesmas técnicas de integração analítica usadas por Burbridge (1999), com as quais obtém-se para  $\tau_{ij}$  a expressão abaixo:

$$(\tau_{ij})_0 = (\mu + \mu_t) \frac{1}{8} \left[ \sum_{N=1}^8 I_{jm}^J (\xi_m)_N (v_i)_N + \sum_{N=1}^8 I_{im}^J (\xi_m)_N (v_j)_N \right] + \lambda \frac{1}{8} \left[ \sum_{N=1}^8 I_{km}^J (\xi_m)_N (v_k)_N \right] \quad (7.27)$$

onde  $I_{ij}^J$  são os elementos que compõe a inversa da matriz Jacobiana.

Portanto, as componentes do vetor de forças devidas à ação do escoamento sobre a estrutura em um dado nó  $i$  ficam expressas na seguinte forma:

$$\begin{aligned} (F_x)^i &= -(t_1)^i (A_s)^i = -\left[ (\tau_{1j})^i - (p)^i \delta_{1j} \right] (n_j)^i (A_s)^i \\ (F_y)^i &= -(t_2)^i (A_s)^i = -\left[ (\tau_{2j})^i - (p)^i \delta_{2j} \right] (n_j)^i (A_s)^i \\ (F_z)^i &= -(t_3)^i (A_s)^i = -\left[ (\tau_{3j})^i - (p)^i \delta_{3j} \right] (n_j)^i (A_s)^i \end{aligned} \quad (7.28)$$

sendo  $(A_s)^i$  a área de influência para o nó  $i$ . É importante lembrar que para as expressões acima não se aplica a notação de Einstein.

Outro coeficiente aerodinâmico importante é o *coeficiente de pressão* ( $C_p$ ), o qual mede a pressão exercida pelo escoamento sobre a superfície de corpos imersos. O coeficiente de pressão está geralmente relacionado a uma pressão de referência ( $p_0$ ), que pode ser a pressão em uma região não perturbada do escoamento ou ainda no ponto de estagnação sobre o corpo, e à pressão dinâmica ( $1/2 \rho V_\infty^2$ ) calculada em uma região afastada à montante do corpo. A expressão que define  $C_p$  para um nó  $i$  de interface é dada por:

$$(C_p)_i = \frac{p_i - p_0}{1/2 \rho V_\infty^2} \quad (7.29)$$

onde  $p_i$  é a pressão no nó  $i$ .

Um valor característico de escoamentos com corpos imersos é o *número de Strouhal* ( $St$ ), o qual está intimamente ligado ao fenômeno de formação e desprendimento de vórtices alternados, podendo ser calculado a partir da seguinte fórmula (Schlichting, 1979):

$$St = \frac{f_v D}{V_\infty} \quad (7.30)$$

sendo  $f_v$  a frequência de desprendimento de vórtices,  $D$  a dimensão característica do corpo e  $V_\infty$  a velocidade de referência do escoamento. A frequência de desprendimento de vórtices pode ser obtida a partir da frequência de oscilação apresentada por históricos de coeficiente de sustentação, como também a partir da frequência de oscilação obtida em históricos da componente de velocidade transversal ao escoamento em um ponto vizinho à jusante do corpo.

## 8 APLICAÇÕES DE VERIFICAÇÃO

### 8.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados os resultados referentes a análises realizadas para a verificação dos códigos desenvolvidos para esta tese. Inicialmente, os algoritmos numéricos para a análise de escoamentos são avaliados através de exemplos clássicos, onde se reproduz grande parte dos fenômenos observados em escoamentos da EVC, abrangendo tanto escoamentos em regime laminar como também turbulento. Deseja-se, neste caso, comparar os modelos explícito de dois passos e explícito-iterativo, determinando qual deles é o mais adequado para a finalidade a que se propõe o presente trabalho. Outro estudo que é feito está relacionado aos modelos submalha empregados em algoritmos baseados na Simulação de Grandes Escalas (“LES”) para a análise de escoamentos turbulentos, onde uma análise estatística da turbulência é também realizada para melhor avaliar o desempenho de cada modelo. Nesta tese são empregados os modelos clássico de Smagorinsky (1963) e dinâmico (Germano et al, 1991; Lilly, 1992). Quanto à estrutura, vários exemplos são estudados, abordando diferentes tipos estruturais e verificando a resposta dinâmica tanto em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações como também em termos das formas de energia envolvidas no processo de vibração, a fim de verificar o esquema de controle de energia proposto neste trabalho. Com isso, importantes aspectos sobre a questão da conservação de energia em problemas altamente não-lineares e o seu impacto sobre os resultados podem ser examinados. Por fim, o algoritmo de IFE é analisado estudando-se os efeitos do uso de subciclos e de malhas não coincidentes entre fluido e estrutura sobre a qualidade dos resultados. Além disso, deseja-se também verificar o esquema de acoplamento proposto, realizando uma comparação com um esquema de acoplamento particionado convencional. Todos os exemplos apresentados neste capítulo foram analisados usando o Supercomputador CrayT94, cujas informações sobre capacidade de memória e processamento podem ser encontradas no Capítulo 7.

## 8.2 ANÁLISE DE ESCOAMENTOS

### 8.2.1 escoamento em cavidade 3D

Nesta seção é estudado o problema da recirculação de um fluido viscoso no interior de uma cavidade tridimensional para três condições de escoamento distintas, as quais são caracterizadas pelos seguintes números de Reynolds ( $Re = \rho V D / \mu$ ):  $Re = 10^3$ ,  $Re = 3.2 \times 10^3$  e  $Re = 10^4$ . Com este exemplo são feitas, inicialmente, comparações entre os resultados apresentados pelos modelos explícito de dois passos e explícito-iterativo para a análise das diferentes condições de escoamento. Posteriormente, empregando somente o modelo explícito de dois passos, são comparados os resultados obtidos para o escoamento turbulento ( $Re = 10^4$ ) utilizando os modelos submalha clássico de Smagorinsky e dinâmico. Nas análises realizadas usando o esquema explícito de dois passos, foi considerado um valor de 0.0 para o parâmetro seletivo de massa  $e$  (ver Eq. 3.60).

As características geométricas e as condições de contorno empregadas neste exemplo são apresentadas juntamente com as suas respectivas malhas de elementos finitos na Figura 8.1. A primeira configuração (Fig. 8.1a) é utilizada para as análises relativas a  $Re = 10^3$  e  $Re = 3.2 \times 10^3$  e a segunda configuração (Fig. 8.1b) é usada para a análise com  $Re = 10^4$ . Como pode ser observado na Figura 8.1b, utiliza-se neste caso apenas a metade do domínio, o qual é caracterizado por uma razão de aspecto 1:1:0.5, com o objetivo de reduzir o esforço computacional. Uma aproximação idêntica para este problema foi usada recentemente por Petry (2002) sem conseqüências negativas sobre os resultados obtidos. Para a malha referente à primeira configuração geométrica (ver Fig. 8.1a), verifica-se uma dimensão mínima dos elementos no valor  $9 \times 10^{-3}$  m, localizada junto às paredes da cavidade. Na malha usada para a segunda configuração (Fig. 8.1b), a menor dimensão encontrada entre os elementos é  $5 \times 10^{-3}$  m, situada junto às paredes contidas no plano X-Y. Na Tabela 8.1 podem ser encontradas algumas informações com respeito aos níveis de discretização espacial e temporal empregados, assim como a razão de aspecto das cavidades para cada caso.

Na Tabela 8.2 encontram-se relacionadas as constantes físicas e geométricas usadas nas análises, sendo que o valor referente à constante de Smagorinsky é utilizado apenas nas análises com  $Re = 10^4$ , onde o modelo clássico é usado para a modelagem da turbulência. Como pode-se verificar, em razão dos valores atribuídos a determinadas constantes físicas, o

valor da viscosidade dinâmica a  
escoamento.

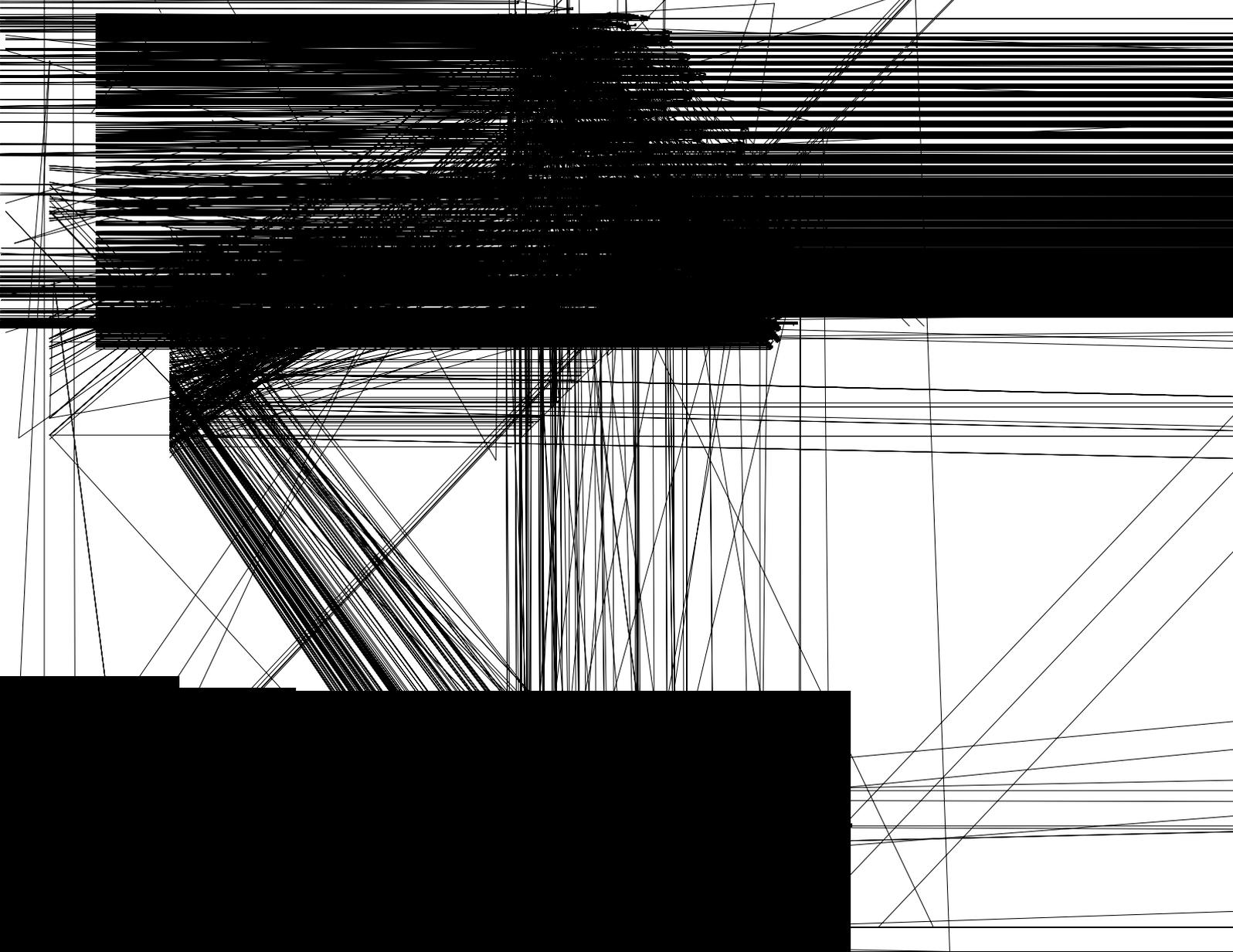


Tabela 8.2: Constantes físicas e geométricas utilizadas nas análises do escoamento em uma cavidade 3D.

Massa específica ( $\rho$ )	1.0 Kg/m <sup>3</sup>
Viscosidade dinâmica ( $\mu$ )	10/Re Ns/m <sup>2</sup>
Viscosidade volumétrica ( $\lambda$ )	0.0 Ns/m <sup>2</sup>
Velocidade do som no fluido ( $c$ )	50.0 m/s
Velocidade característica (vel. placa)	10.0 m/s
Dimensão característica (dim. seção)	1.0 m
Constante de Smagorinsky ( $C_S$ )	0.18

Resultados referentes aos perfis de velocidade segundo a direção dos eixos  $x_1$  e  $x_2$ , medidos no plano médio das respectivas cavidades ( $x_3 = 0.5$  m para  $Re = 10^3$  e  $Re = 3.2 \times 10^3$ , e  $x_3 = 0.25$  m para  $Re = 10^4$ ), são apresentados nas figuras 8.2 e 8.3, respectivamente. Os resultados são comparados com o trabalho de Tang et al. (1995) para  $Re = 10^3$  e com o trabalho de Prasad e Koseff (1989) para os números  $Re = 3.2 \times 10^3$  e  $Re = 10^4$ , devendo-se ressaltar que esta última referência trata-se de um trabalho experimental.

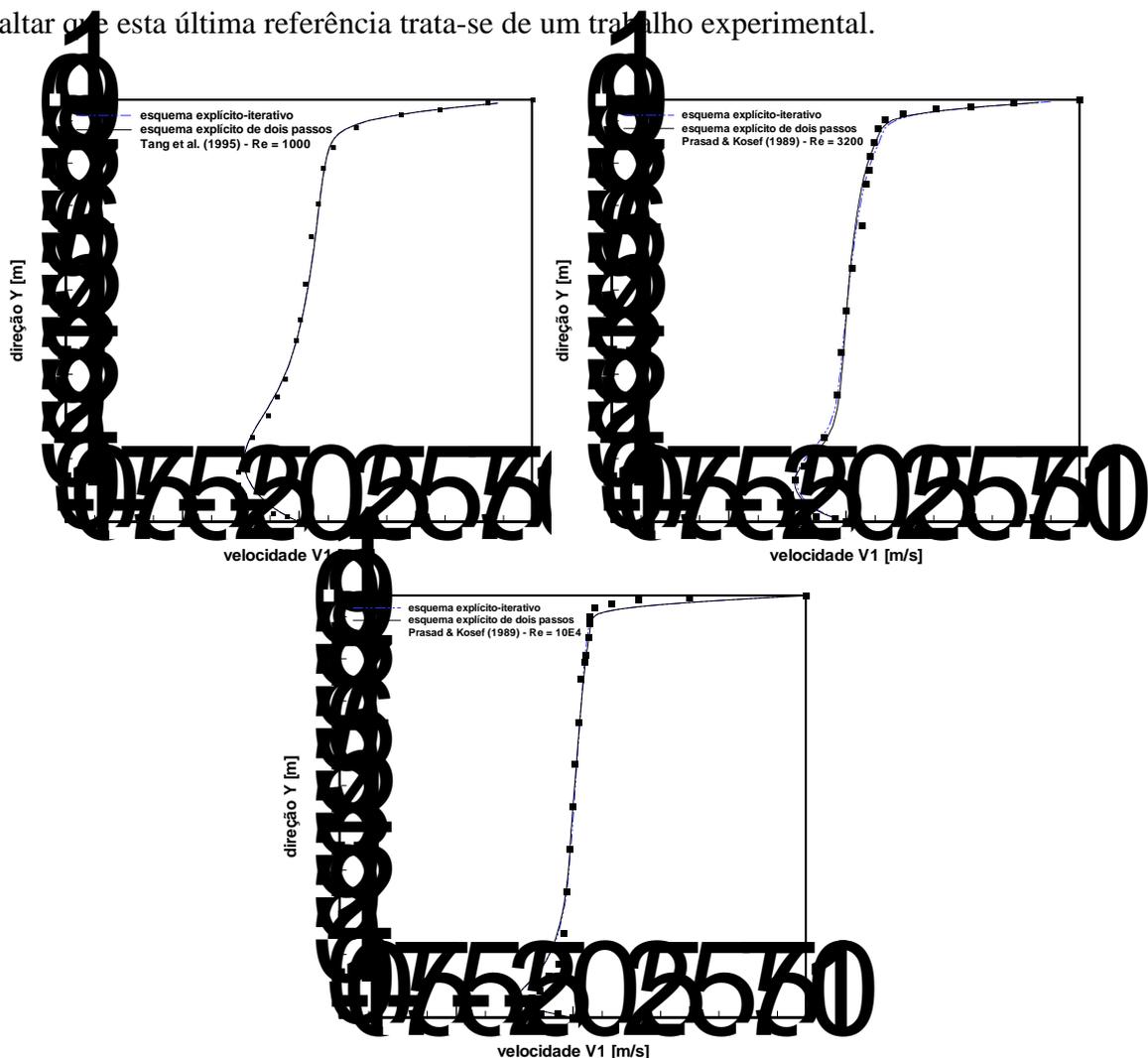


Figura 8.2: Perfis de velocidade em uma cavidade 3D ao longo do eixo  $x_2$ , medidos nos planos médios das cavidades.

Devido à presença da turbulência, os resultados referentes ao caso com  $Re = 10^4$  são valores médios, calculados em um intervalo de tempo que corresponde à metade final do tempo total de análise. Como se pode verificar, os dois esquemas de avanço no tempo aqui analisados apresentam resultados praticamente coincidentes entre si e próximos da referência.

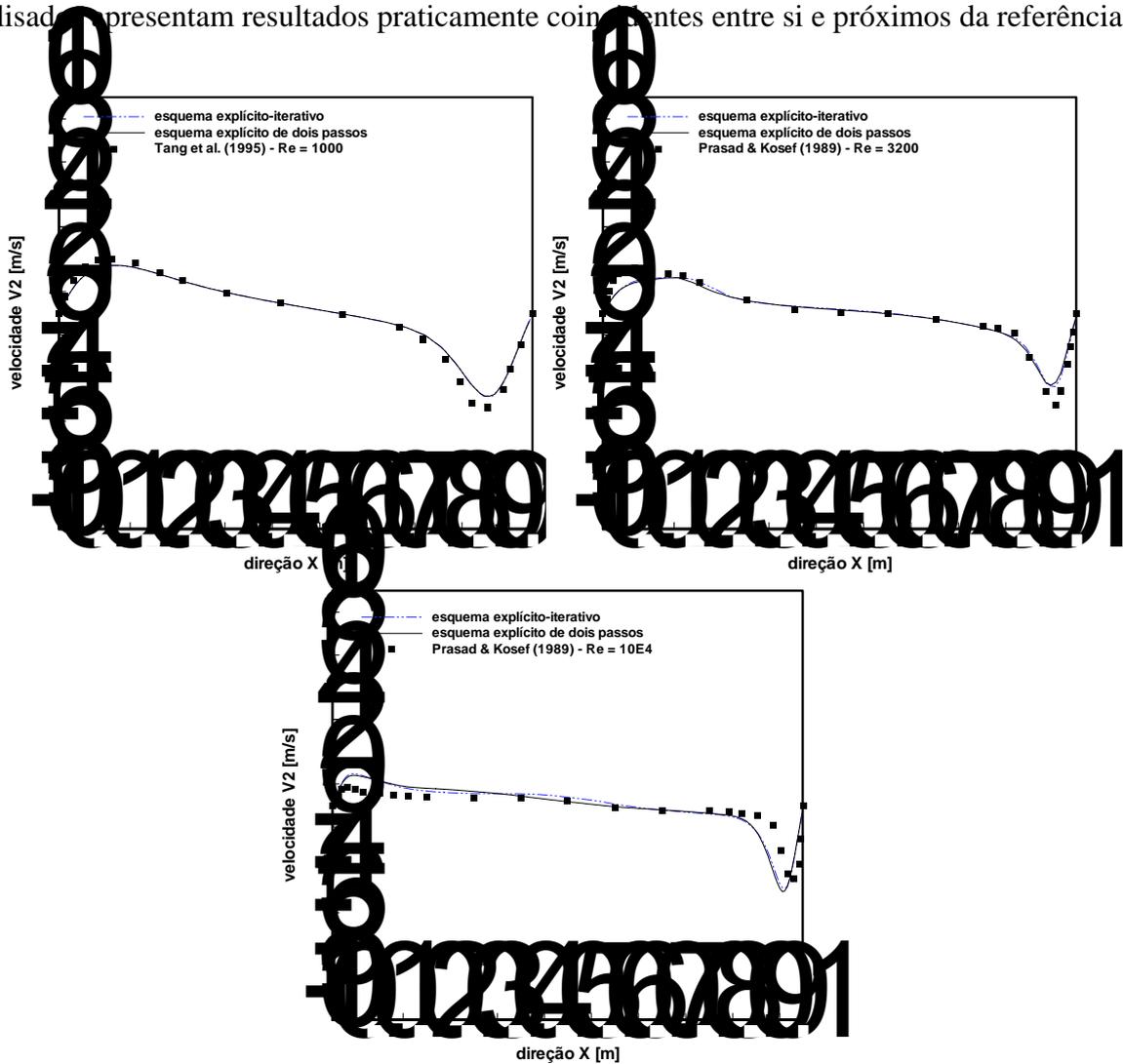


Figura 8.3: Perfis de velocidade em uma cavidade 3D ao longo do eixo  $x_1$ , medidos nos planos médios das cavidades.

Nos resultados acima é possível perceber que os perfis de velocidade  $v_2$  obtidos pelo esquema explícito-iterativo começam a apresentar uma certa oscilação a partir de  $Re = 3.2 \times 10^3$ , o que se evidencia ainda mais para  $Re = 10^4$ . A razão disso deve-se possivelmente a deficiências do modelo na estabilização de oscilações devidas à forte não-linearidade do escoamento, o que não se verifica, por exemplo, nos resultados referentes ao modelo de dois passos, o qual apresenta um esquema robusto de dissipação numérica.

Na Figura 8.4 são comparados os resultados em termos dos perfis de velocidade, como nas figuras 8.2 e 8.3, obtidos para o escoamento com  $Re = 10^4$ , empregando os modelos clássico de Smagorinsky e dinâmico para a modelagem das escalas de turbulência inferiores à resolução da malha. Como se pode observar, a utilização do modelo dinâmico resulta em uma melhor aproximação em relação ao trabalho experimental quando comparado ao resultado obtido com o modelo clássico. Provavelmente, uma redução no valor do coeficiente de Smagorinsky ( $C_s$ ) possa aproximar os perfis referentes ao modelo clássico à referência experimental. Quanto às diferenças observadas nos perfis de velocidade  $v_2$ , verifica-se, em geral, uma tendência de divergência de resultados entre os dados experimentais e as respostas obtidas numericamente, por diversos autores, na região junto à parede lateral direita da cavidade

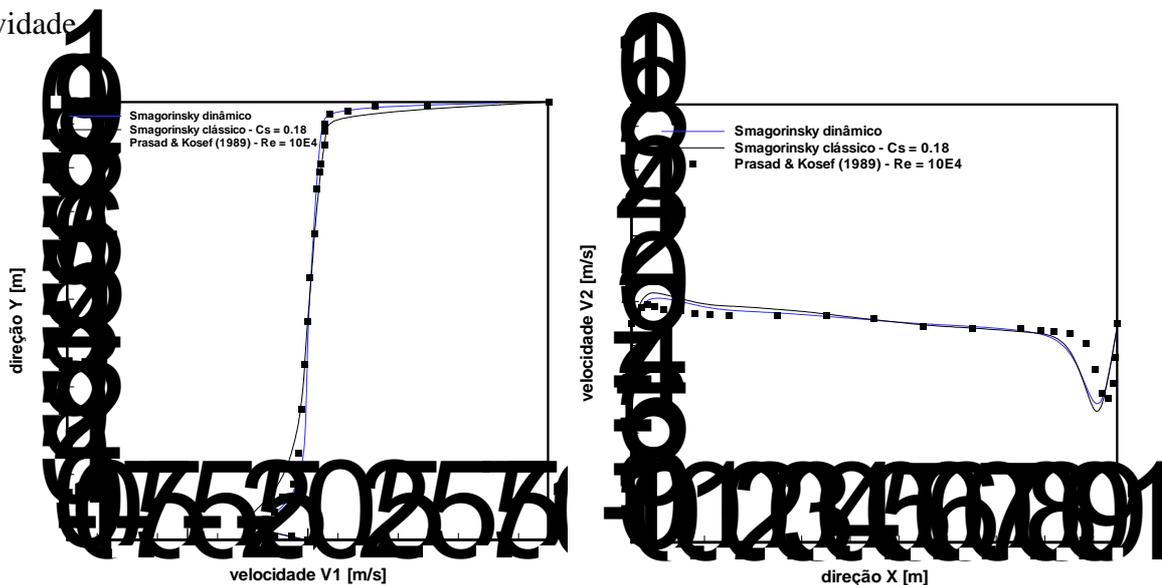


Figura 8.4: Perfis de velocidade obtidos em uma cavidade 3D para  $Re = 10^4$ : (a) perfil de  $v_1$ ; (b) perfil de  $v_2$ .

Com o objetivo de observar com mais clareza as diferenças apresentadas entre os modelos submalha estudados nesta tese, um estudo estatístico da turbulência foi realizado para o caso  $Re = 10^4$  em termos de correlações das flutuações das componentes de velocidade no plano médio da cavidade, cujos resultados encontram-se nas figuras 8.5 e 8.6. As correlações usadas são definidas da seguinte forma:

$$v_1^{\text{RMS}} = 10 \sqrt{\frac{\overline{(v_1'')^2}}{V^2}} \quad (8.1)$$

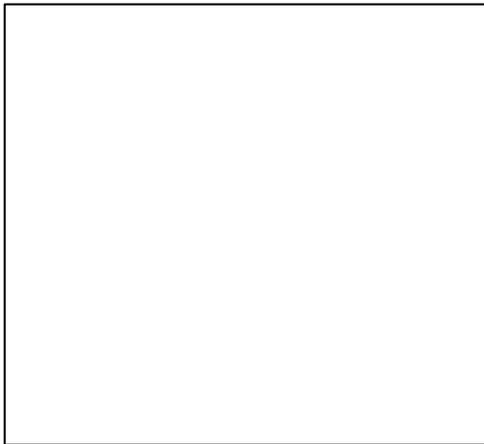
$$v_2^{\text{RMS}} = 10 \sqrt{\frac{\overline{(v_2'')^2}}{V^2}} \quad (8.2)$$

$$UV = 500 \frac{\overline{v_1'' v_2''}}{V^2} \quad (8.3)$$

onde as flutuações são definidas como sendo:

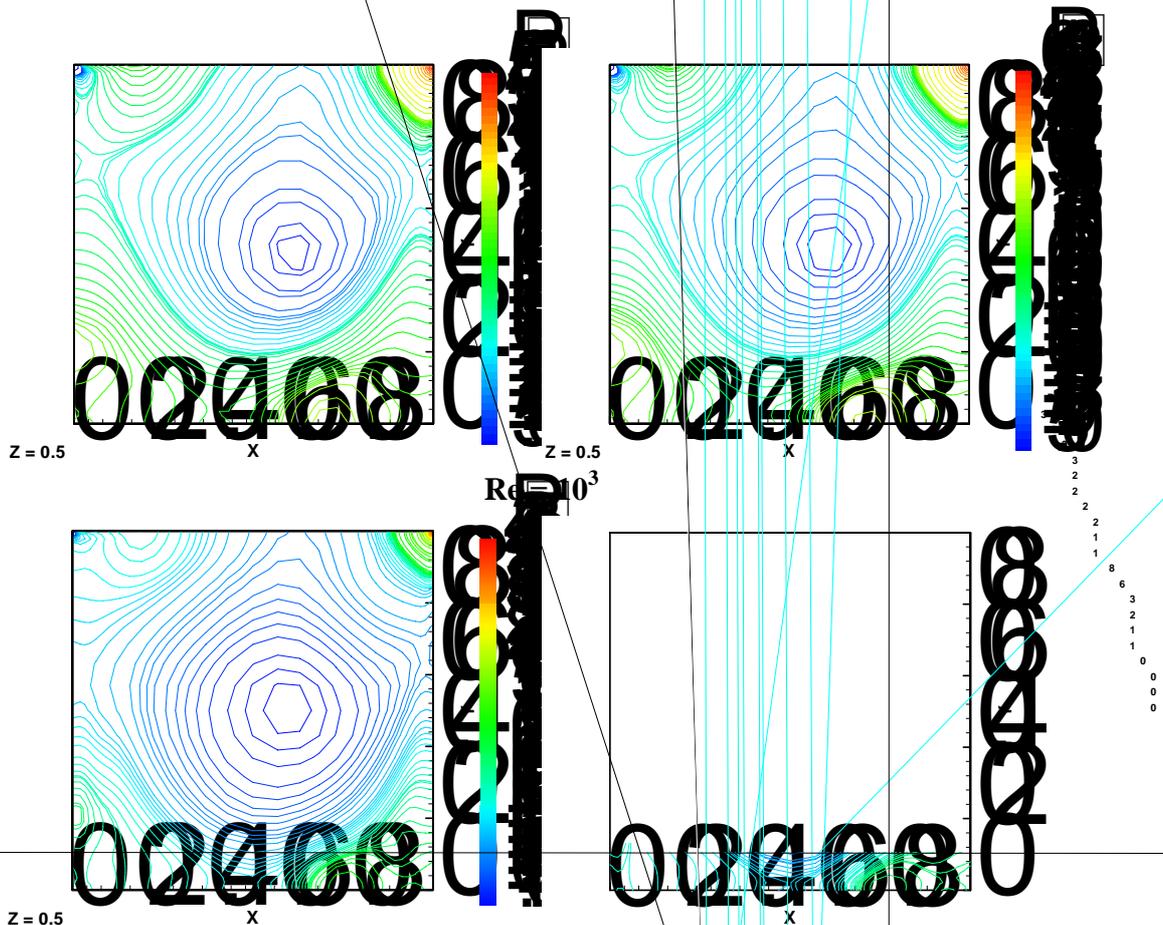
$$\begin{aligned} v_1'' &= v_1 - \overline{v_1} \\ v_2'' &= v_2 - \overline{v_2} \end{aligned} \quad (8.4)$$

sendo  $\overline{v_1}$  e  $\overline{v_2}$  as componentes do vetor de velocidades de campo médio do escoamento.



Nos resultados apresentados nas figuras 8.5 e 8.6, referentes ao estudo estatístico da turbulência, verifica-se que os perfis obtidos com o modelo dinâmico de turbulência juntamente com o esquema de dois passos foram aqueles que mais se aproximaram dos perfis experimentais alcançados por Prasad e Koseff (1989). Os perfis obtidos com o modelo de Smagorinsky e o esquema de dois passos conseguiram também uma boa aproximação em relação aos dados experimentais, com exceção à zona próxima à parede inferior da cavidade, onde o modelo não foi capaz de reproduzir os resultados experimentais, apresentando um perfil mais amortecido nesta região. Já com relação ao esquema iterativo, perfis horizontais bastante diferenciados dos demais resultados foram obtidos, diferentemente dos perfis verticais, onde a semelhança foi bem maior.

Na Figura 8.7 são mostrados os campos de pressão obtidos nos respectivos planos médios das cavidades ( $x_3 = 0.5$  m para  $Re = 10^3$  e  $Re = 3.2 \times 10^3$ , e  $x_3 = 0.25$  m para  $Re = 10^4$ ) para os números de Reynolds analisados. Maiores diferenças são observadas apenas para  $Re = 10^4$ , onde o vórtice central encontra-se mais distorcido no campo obtido pelo esquema explícito-iterativo em relação ao esquema explícito de dois passos.



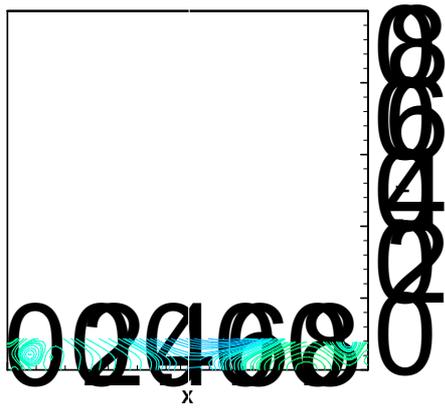


Tabela 8.3: Desempenho computacional obtido pelos esquemas numéricos utilizados na análise da cavidade tridimensional.

Análise	Tproc [s]	Desempenho [Mflops]	N° de iterações
Explícito de dois passos	Re = 1000	5416.19	881.72
	Re = 3200	26525.06	884.48
	Re = 10000	283447.51	827.88
Explícito-iterativo	Re = 1000	5984.28	843.62
	Re = 3200	18088.64	836.53
	Re = 10000	211617.32	773.26

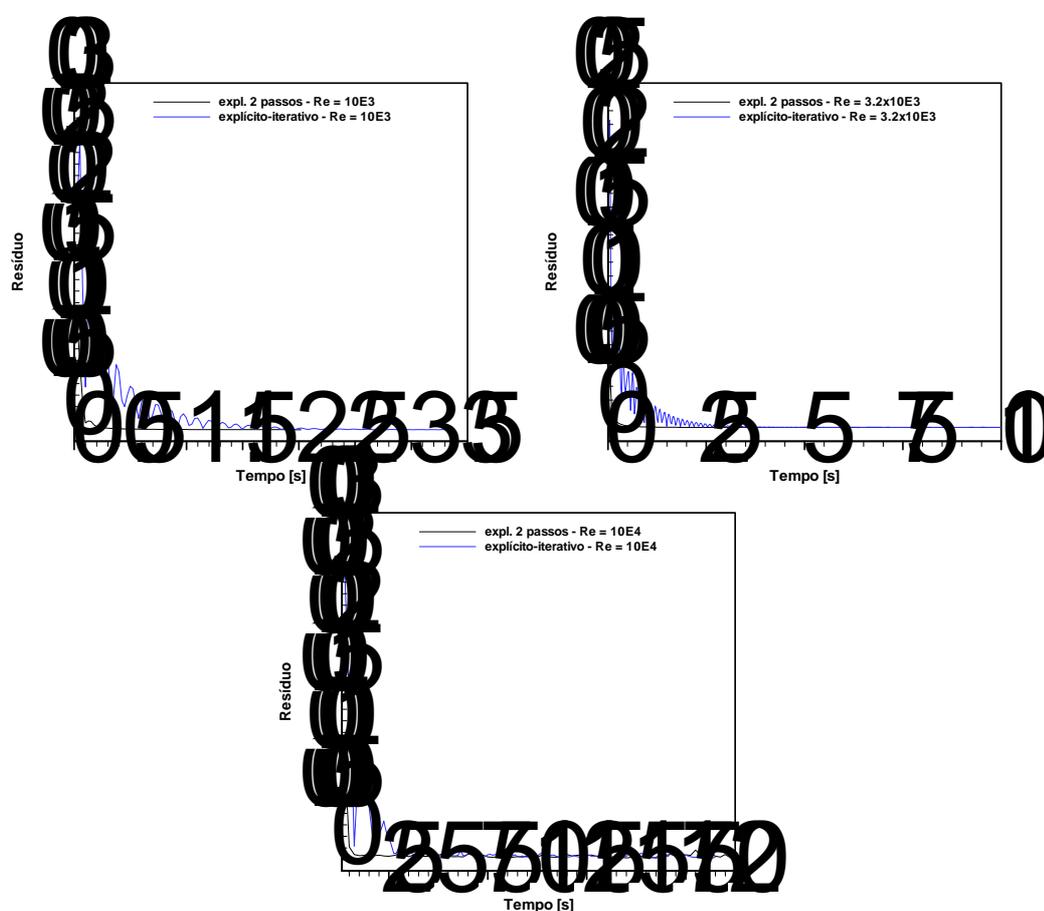


Figura 8.9: Comportamento do resíduo para os escoamentos analisados em uma cavidade 3D segundo o modelo numérico utilizado.

Como se observa, o esquema explícito-iterativo apresenta um número médio de iterações por passo de tempo bastante baixo. Apesar disso, foi verificado que na análise com  $Re = 10^3$  o esquema explícito de dois passos atingiu o estado estacionário de forma antecipada, o que explica o tempo de processamento menor, como pode ser observado através dos gráficos de comportamento do resíduo apresentados na Figura 8.9. Por outro lado, para

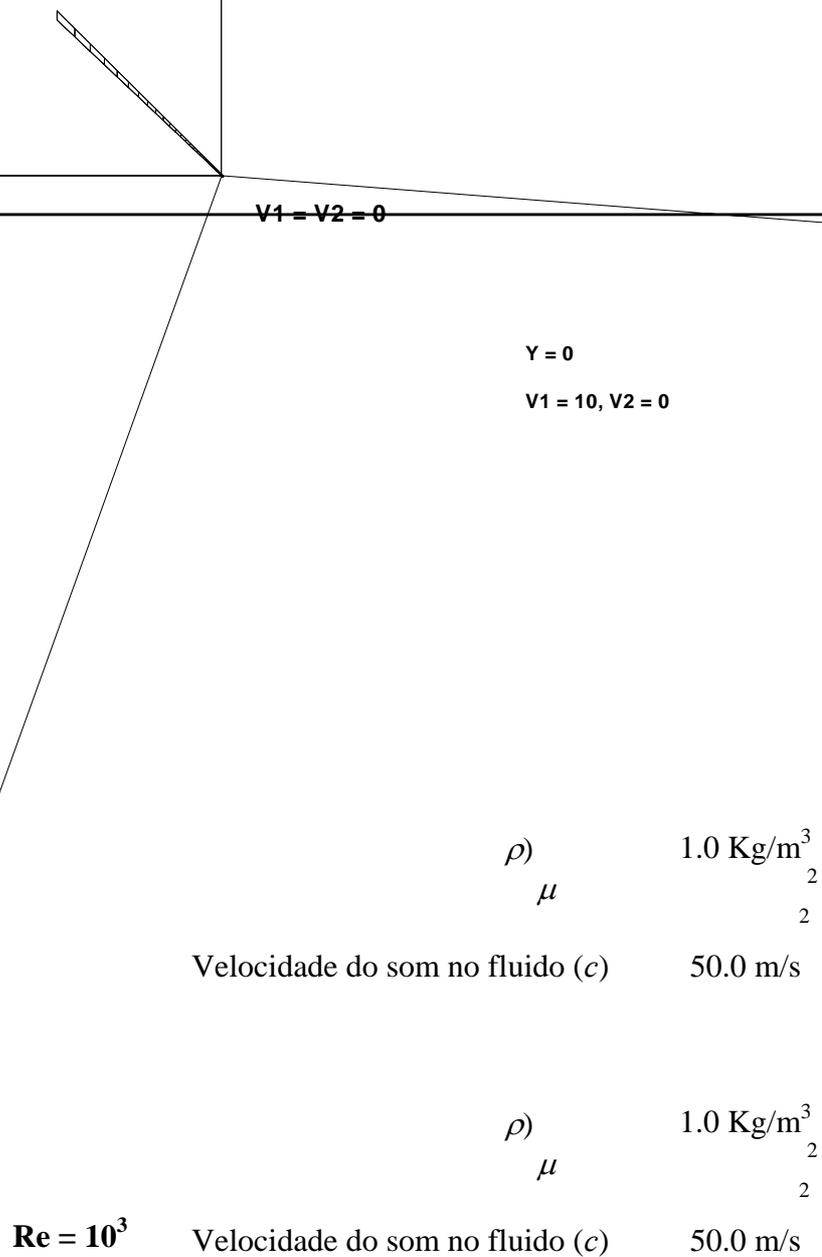
escoamentos com números de Reynolds mais elevados, o esquema explícito-iterativo apresentou uma redução no tempo de processamento de 32% e 21% para as análises com  $Re = 3.2 \times 10^3$  e  $Re = 10^4$ , respectivamente, em relação ao esquema explícito de dois passos, comprovando ser um esquema de maior eficiência. As análises realizadas com o modelo dinâmico de turbulência apresentaram um acréscimo de 24% em relação aos tempos obtidos com o modelo clássico de Smagorinsky, apresentados na Tabela 8.3.

## 8.2.2 Escoamento sobre um cilindro 2D

Neste problema é estudado o escoamento de um fluido viscoso incidindo sobre um prisma de seção circular, obtendo como resultado os coeficientes aerodinâmicos medidos ao longo do tempo de análise. Com este exemplo deseja-se verificar também se os modelos numéricos para a análise do escoamento são capazes de reproduzir os fenômenos relacionados à formação e desprendimento de vórtices encontrados em corpos rombudos. Particularmente no caso dos prismas cilíndricos, observa-se que para números de Reynolds até em torno de 40 há a formação de dois vórtices simétricos e estacionários na região de recirculação logo após o cilindro, com exceção feita aos escoamentos com números de Reynolds bastante baixos, onde o escoamento adere à superfície do corpo. Por outro lado, para números superiores ao acima mencionado, verifica-se o aparecimento de uma esteira de vórtices, os quais são desprendidos alternadamente dos pontos de separação do escoamento sobre a superfície do cilindro, prolongando-se à jusante por uma distância equivalente a vários diâmetros do mesmo.

Com este exemplo procura-se ainda avaliar os efeitos causados pela dissipação numérica sobre os resultados, principalmente no que se refere ao modelo de dois passos, onde o parâmetro seletivo de massa  $e$  (ver Eq. 3.60) tem um papel preponderante neste sentido.

No presente trabalho são estudados dois casos caracterizados pelos seguintes números de Reynolds ( $Re = \rho VD/\mu$ ):  $Re = 40$  e  $Re = 10^3$ . As características geométricas do problema e as condições de contorno, bem como a malha de elementos finitos empregada nas simulações, são encontradas na Figura 8.10. A malha é constituída de 6800 elementos e de 13980 nós, sendo que a menor dimensão encontrada refere-se aos elementos situados junto à superfície do cilindro, estando na ordem de  $10^{-2}$  m. Na Tabela 8.4 são relacionadas as constantes empregadas de acordo com as análises realizadas.



Na Figura 8.11 encontram-se os resultados referentes aos campos permanentes de pressão e linhas de corrente na região vizinha do cilindro, obtidos pelos modelos explícito de dois passos (em função do parâmetro seletivo de massa  $e$ ) e explícito-iterativo para  $Re = 40$ . Como se pode observar, o fenômeno relativo à formação de dois vórtices estacionários, descrito no segundo parágrafo desta seção, é reproduzido numericamente por ambos os esquemas numéricos utilizados. No entanto, verifica-se que as dimensões dos vórtices obtidas

os diversos

se  $e = 0$ .

ativo

2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60  
61  
62  
63  
64  
65  
66  
67  
68  
69  
70  
71  
72  
73  
74  
75  
76  
77  
78  
79  
80  
81  
82  
83  
84  
85  
86  
87  
88  
89  
90  
91  
92  
93  
94  
95  
96  
97  
98  
99  
100

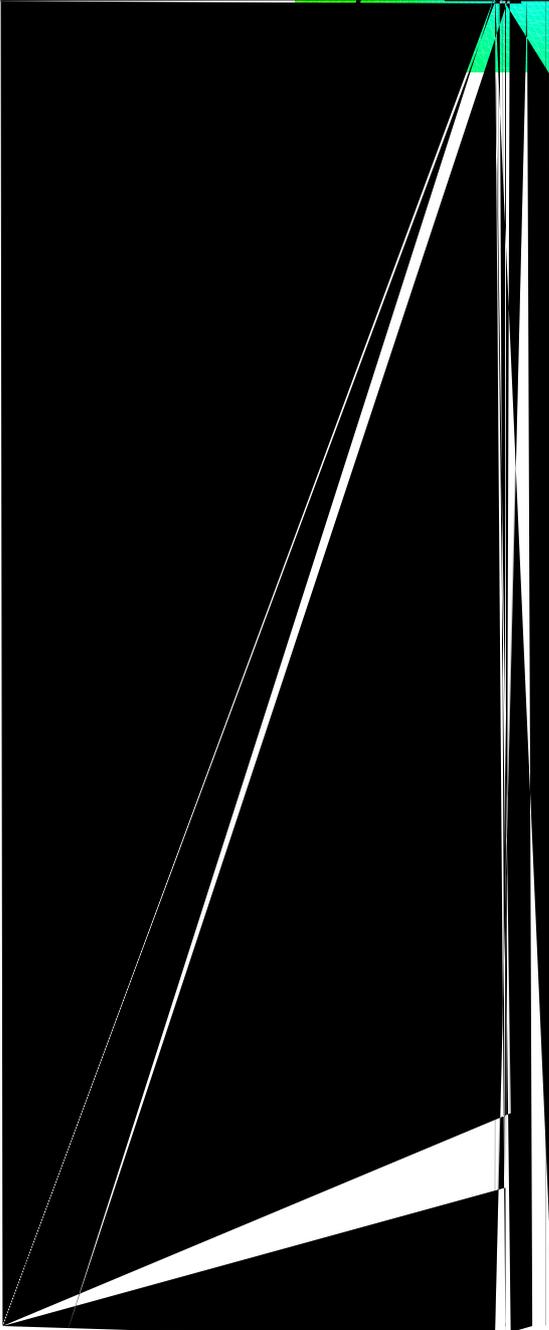
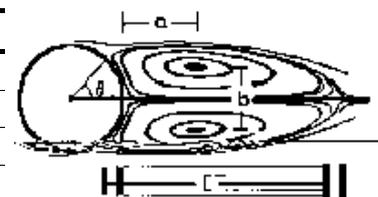


Tabela 8.5: Parâmetros geométricos dos vórtices para  $Re = 40$ .

Grandeza	Ref.*	Explícito-iterativo	Explícito de 2 passos			
			$e = 0$	$e = 0.3$	$e = 0.6$	$e = 0.9$
$C_D$	1.60	1.77	1.76	1.76	1.76	1.77
$L/D$	2.10	2.15	1.90	1.90	1.97	2.10
$a/D$	0.69	0.72	0.65	0.67	0.68	0.71
$b/D$	0.58	0.58	0.56	0.56	0.57	0.58
$\theta$	$53.2^\circ$	$52.5^\circ$	$51.5^\circ$	$52.4^\circ$	$53.1^\circ$	$53.2^\circ$



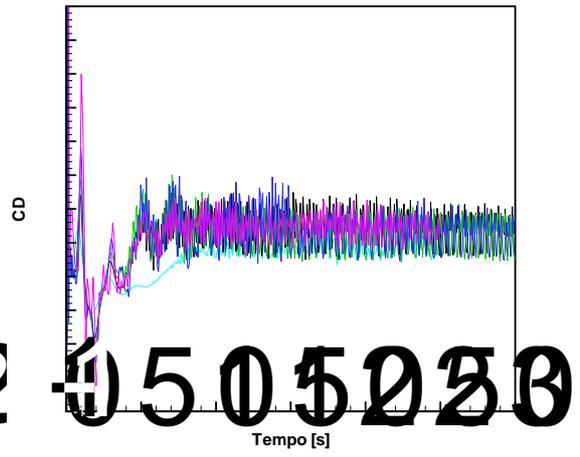
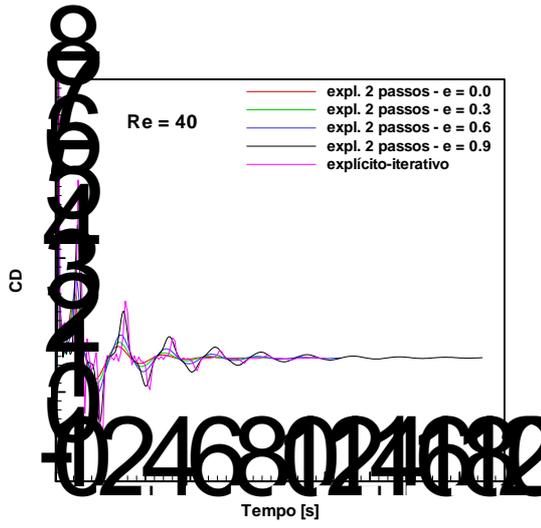
\* Wanderley e Levi (2002) – modelo numérico: método Beam-Warming; malha: 40000 elementos

Conclui-se claramente, através dos dados mostrados acima, que a razão das diferenças apresentadas pelo modelo de dois passos deve-se ao excesso de dissipação presente neste modelo numérico, o que é notado justamente em escoamentos com números de Reynolds mais reduzidos. Este excesso de dissipação faz com que o estado permanente de escoamento seja atingido antes que o mesmo esteja plenamente desenvolvido. No entanto, com o esquema de controle de amortecimento numérico empregado nesta tese (ver Kawahara e Hirano, 1983), por meio do chamado parâmetro seletivo de massa  $e$ , é possível ajustar esta deficiência, como verifica-se na Tabela 8.5, mostrada mais acima, onde o valor  $e = 0.9$  parece ser o mais adequado para o presente caso.

Na Figura 8.12 são apresentados agora os campos de pressão e as linhas de corrente instantâneos, referentes ao caso  $Re = 10^3$ , obtidos pelos modelos explícito de dois passos (em função do parâmetro seletivo de massa  $e$ ) e explícito-iterativo na região vizinha do cilindro e nos respectivos instantes finais de análise. Como se pode verificar, os resultados numéricos obtidos apontam que não há, neste caso, a formação dos vórtices estacionários logo atrás do cilindro mas, sim, a formação da chamada esteira de vórtices de Von Kármán, sendo os vórtices desprendidos de forma alternada das regiões superior e inferior

razão pela qual foi necessária, no presente exemplo, a utilização de um modelo de turbulência para estabilizar a análise.





Mais uma vez, pode-se observar aqui o caráter dissipativo do modelo de dois passos, no qual verifica-se que, para o caso  $Re = 40$ , as variações do coeficiente de arrasto são logo amortecidas em direção ao valor correspondente ao estado permanente quando considera-se  $e = 0$ , ou seja, com a maior quantidade de dissipação numérica possível. À medida que o parâmetro  $e$  é aumentado, há uma maior flutuação dos valores de arrasto em consequência do menor amortecimento numérico presente no modelo, sendo que para  $e = 0.9$  estas flutuações são similares às verificadas no modelo iterativo. Entretanto, este parâmetro parece ter uma influência muito pequena sobre o arrasto, uma vez que em todos os casos analisados obtém-se um valor permanente praticamente igual.

Já para  $Re = 10^3$ , observa-se que o uso do parâmetro seletivo de massa  $e$  no esquema explícito de dois passos exerce influência sobre a amplitude de variação de  $C_L$ , como é visto nos resultados “rms” apresentados pela Tabela 8.6, onde constata-se que o menor valor obtido refere-se a  $e = 0.0$ . O mesmo pode ser observado nos históricos de arrasto, onde as maiores flutuações são verificadas para valores mais altos de  $e$

que os vórtices estacionários se desenvolvam plenamente. Por outro lado, com o uso do parâmetro  $e$ , há uma maior flutuação no campo de pressões do escoamento, necessitando de um maior tempo de análise para que essas flutuações sejam dissipadas e obtenha-se, assim, o estado permanente.

Tabela 8.7: Desempenho computacional obtido pelos esquemas numéricos na análise de escoamento laminar bidimensional sobre um prisma de seção circular.

	Análise	Tproc [s]	Des [Mflops]	Niter
Explícito de dois passos	$Re = 40$			
	$e = 0.0$	5013.67	670.88	-
	$e = 0.3$	5812.99	654.81	-
	$e = 0.6$	7532.98	673.19	-
	$e = 0.9$	11704.58	649.59	-
	$Re = 10^3$			
	$e = 0.0$	16331.06	712.79	-
	$e = 0.7$	17161.76	697.64	-
Explícito- iterativo	$Re = 40$	6011.17	555.27	1.04
	$Re = 10^3$	21932.51	592.11	1.39

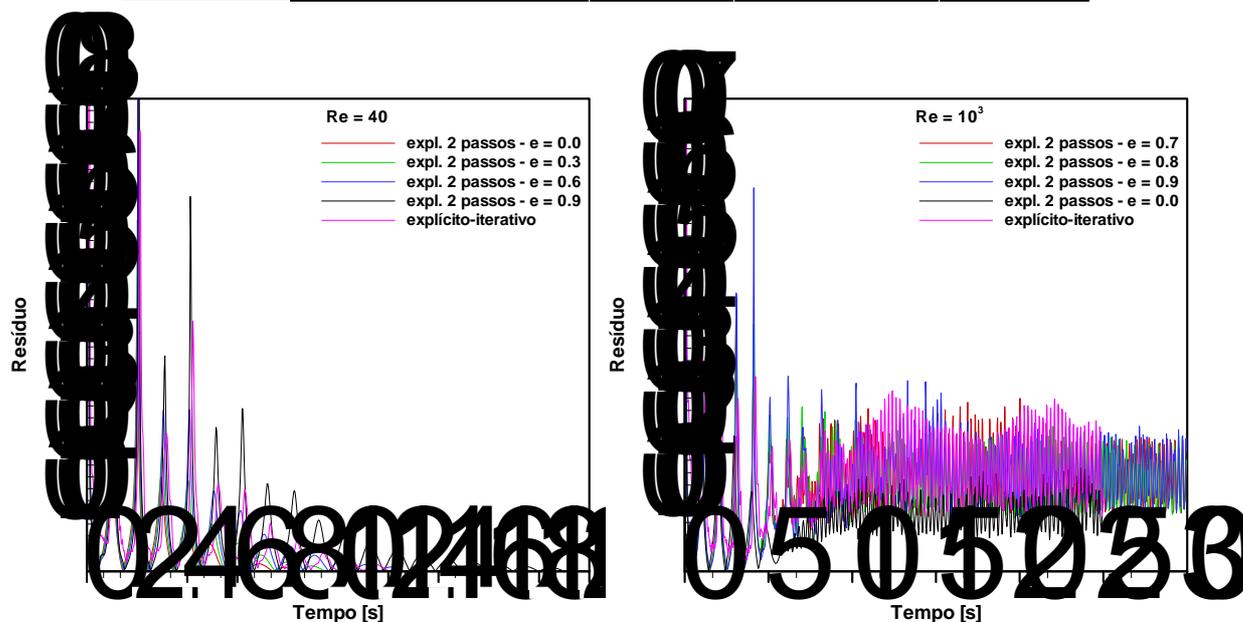


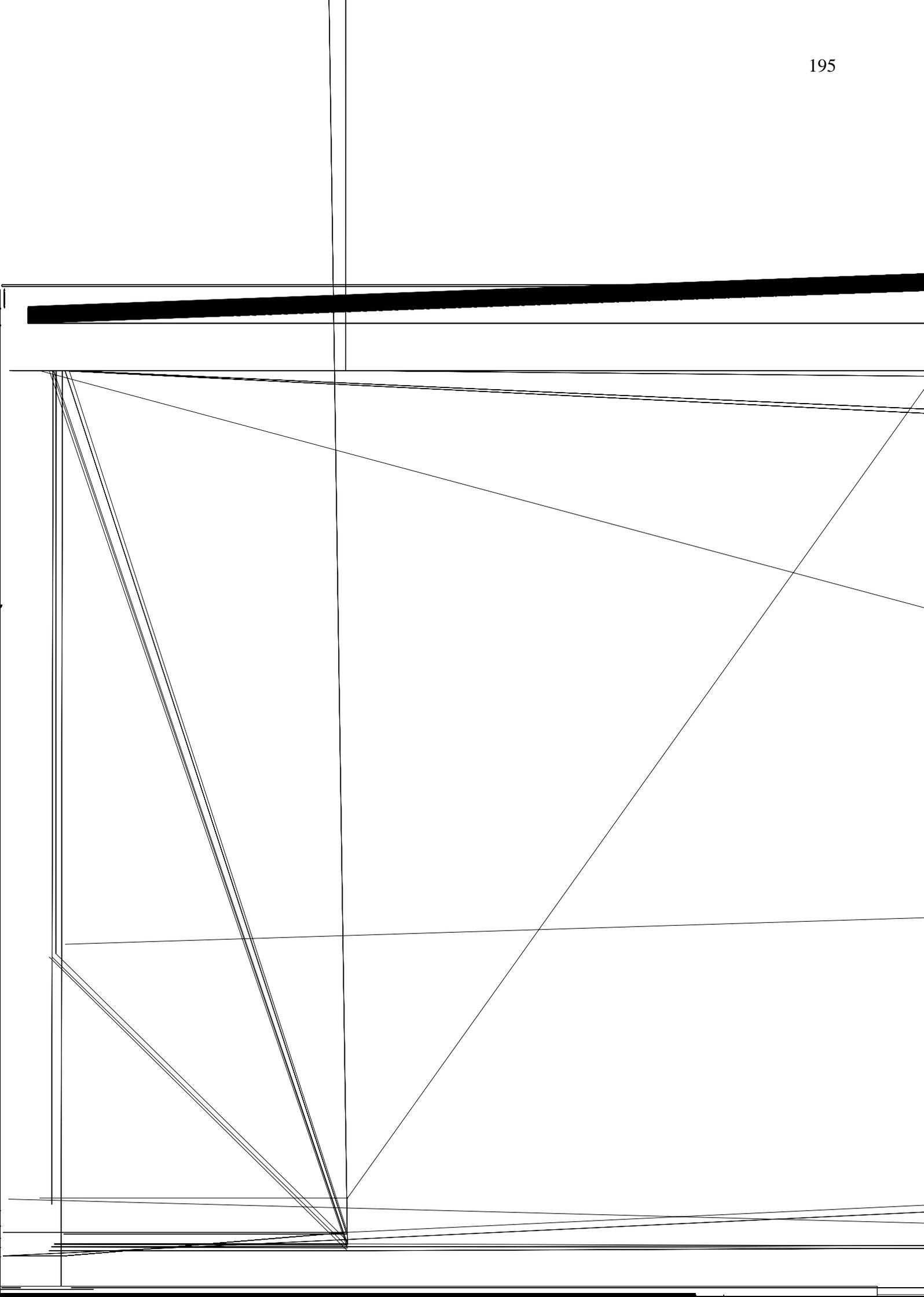
Figura 8.15: Comportamento do resíduo nas análises do escoamento sobre um cilindro 2D de acordo com os casos analisados e o modelo numérico utilizado.

Para o escoamento com  $Re = 10^3$ , o esquema explícito de dois passos com  $e = 0.0$  apresenta um processo de integração numérica mais estável, como pode ser observado através do histórico de resíduo. Com o aumento gradativo do parâmetro de massa  $e$ , observa-se que a amplitude de variação do resíduo vai também aumentando em consequência da redução do amortecimento numérico. Por sua vez, o esquema explícito-iterativo mostra um nível alto de flutuação do resíduo, evidenciando uma deficiência de dissipação do modelo. Em termos de tempo de processamento, o esquema iterativo apresenta uma eficiência similar ao esquema de dois passos para parâmetros de massa  $e$  próximos da unidade, levando em conta o desempenho computacional em Megaflops. Verifica-se também um aumento significativo no número médio de iterações para o esquema explícito-iterativo em virtude das características transientes do problema.

### 8.2.3 Escoamento turbulento sobre um prisma quadrado 2D

Neste exemplo são estudados os efeitos causados pela ação de um escoamento turbulento ( $Re = 2.2 \times 10^4$ ) ao entrar em contato com um prisma de seção quadrada e as implicações sobre o padrão de circulação nas imediações do mesmo. Mais uma vez são empregados os dois esquemas numéricos propostos nesta tese para a análise de escoamentos e os dois modelos submalha usados em simulações na presença de turbulência. O principal objetivo desta análise é verificar o comportamento dos esquemas numéricos desenvolvidos para um caso típico encontrado em simulações da EVC, cuja principal característica é a existência de escoamentos em regime turbulento agindo sobre obstáculos com arestas angulosas.

As características geométricas do problema e as condições de contorno, assim como a malha de elementos finitos empregada nas simulações, podem ser verificadas através da Figura 8.16. A malha é formada de 31125 elementos e de 63020 nós, sendo que as menores dimensões de elemento, encontradas junto às paredes do prisma, estão na ordem de  $3.5 \times 10^{-3}$  m. Na Tabela 8.8 são apresentadas as constantes físicas e geométricas utilizadas nas análises realizadas, caracterizando um escoamento com um número de Reynolds ( $Re = \rho V D / \mu$ ) de  $2.2 \times 10^4$ .



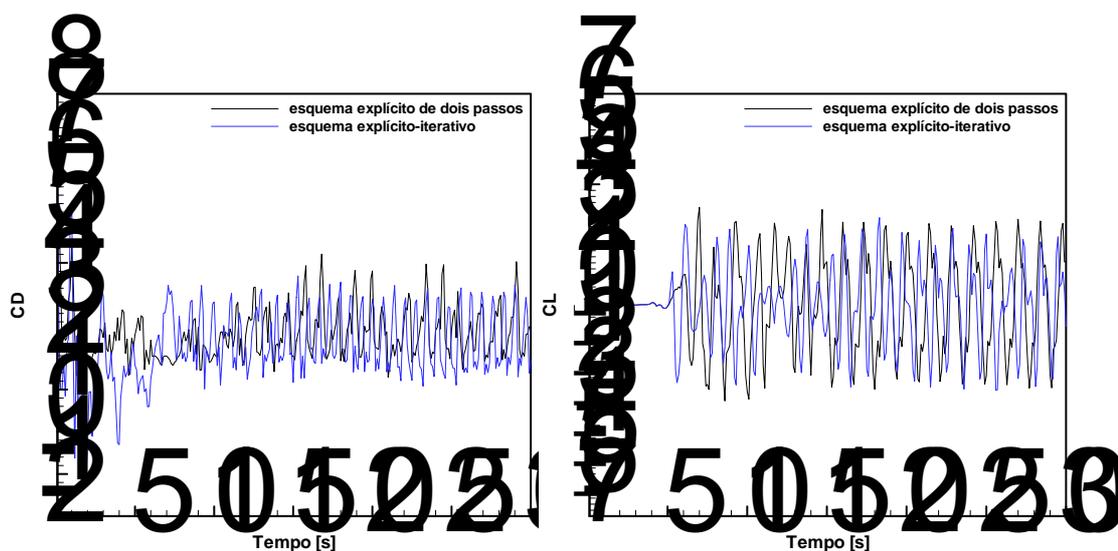


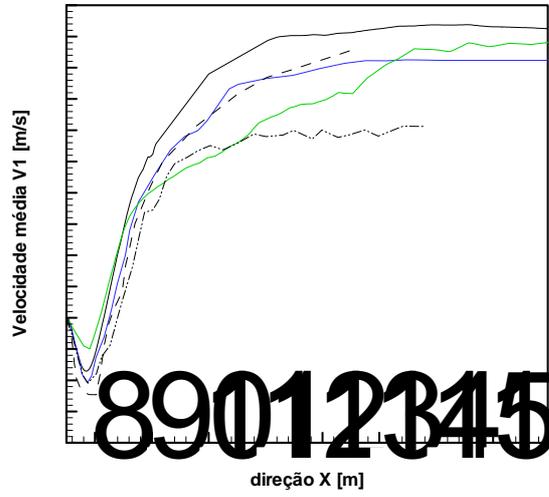
Figura 8.17: Históricos de coeficiente de arrasto ( $C_D$ ) e sustentação ( $C_L$ ) obtidos pelos esquemas explícito de dois passos e explícito-iterativo na análise do escoamento turbulento sobre um prisma quadrado 2D.

Tabela 8.9: Resultados para os coeficientes aerodinâmicos na análise do escoamento turbulento sobre um prisma quadrado 2D.

Trabalho	Resultados aerodinâmicos		
	$C_D$	$(C_L)_{rms}$	St
<b>Explícito de dois passos</b>	2.13	1.32	0.142
<b>Explícito-iterativo</b>	2.31	1.24	0.143
<b>Lee (1998) – num.</b>	2.15	1.6	0.134
<b>Lyn et al. (1995) – exp.</b>	2.1	-	0.134

Na Figura 8.18 é feita uma comparação em termos do perfil médio da componente  $v_1$  do vetor de velocidades do escoamento ao longo de uma linha horizontal sobre a coordenada  $Y = 7$  m, que se estende desde a parede lateral à jusante do prisma até a posição  $X = 16$  m. Os resultados são comparados com dois resultados experimentais obtidos por Durao et al. (1988) e Lyn et al. (1995). Como é possível observar, o esquema de dois passos juntamente com o modelo dinâmico de turbulência conseguem obter um perfil de velocidades bastante próximo aos perfis experimentais no intervalo  $7.5 < X < 9$ , apresentando uma convergência ao resultado obtido por Durao et al. (1988) após este intervalo. No que se refere ao modelo de Smagorinsky, os resultados mostram que no intervalo  $7.5 < X < 8.4$  os valores de velocidade são relativamente menores em comparação aos valores obtidos pelo modelo dinâmico, apresentando um perfil mais elevado a partir de  $X = 8.5$  m. Por fim, o perfil relativo ao esquema explícito-iterativo apresenta valores de velocidade menores aos demais resultados na região próxima ao prisma ( $7.5 < X < 8.4$ ), mostrando uma divergência significativa a partir de

X = 8.5 m, voltando a apresentar valores próximos às demais simulações realizadas após X = 13.5 m.



ativos junto a  $Y = 7.0$  m.  
o esquema de dois passos  
n o modelo clássico de S

o perfil em  $v_2$  é possível  
de dois passos foi a  
btido com o modelo  
na ótima convergê  
uma discordância

de acordo com o  
elo menos, rep  
na iterativo, v  
pelo esquem  
7.0. Portanto, para  
e os valore  
eis.

mente, r  
linhas  
dois  
de mais

## 8.2.4 Conclusões parciais sobre os algoritmos desenvolvidos para a análise de escoamentos

Nesta seção foram apresentados os resultados obtidos em vários exemplos de verificação analisados pelos modelos numéricos desenvolvidos nesta tese para a simulação de escoamentos incompressíveis de fluidos Newtonianos. A partir destes resultados, alguns comentários importantes podem ser feitos a respeito dos códigos estudados, os quais serão de fundamental importância para a determinação do algoritmo que melhor desempenho apresentou ao longo das análises realizadas e, assim, proceder com a escolha daquele que será empregado daqui por diante.

No desenvolvimento do modelo numérico para análise de escoamentos foram propostos para esta tese dois estudos comparativos: o primeiro refere-se ao processo de discretização temporal das equações governantes do escoamento, no qual são estudados os esquemas explícito-iterativo e explícito de dois passos; já o segundo está relacionado aos modelos sub-malha de turbulência empregados na Simulação de Grandes Vórtices (LES), onde são analisados o modelo clássico de Smagorinsky e o modelo dinâmico. As conclusões foram as seguintes:

Na comparação entre os esquemas iterativo e de dois passos ficou evidente a superioridade do último esquema, principalmente para casos onde o número de Reynolds é elevado. O código iterativo mostrou ser mais adequado para problemas com baixos números de Reynolds, onde as instabilidades geradas pela não-linearidade presente no termo de advecção podem ser estabilizadas pelo modelo numérico. No entanto, foi observado que para análises envolvendo domínios com contornos naturais e números de Reynolds moderados, se fez necessária a inclusão do modelo de turbulência, que serviu, na verdade, para adicionar uma viscosidade numérica ao esquema a fim de estabilizar o processo de integração. A razão disto provém, seguramente, de uma deficiência de dissipação numérica do modelo, a qual pode ter origem no processo iterativo existente na solução das equações de momentum, ou, ainda, no acoplamento entre as equações de momentum e a equação de conservação de massa, onde pode ser necessária a inclusão de um termo de mais alta ordem para a pressão, o que implicaria em um processo implícito para a equação da continuidade.

Por outro lado, o esquema de dois passos mostrou-se bastante robusto para a simulação de escoamentos com números de Reynolds elevados. Esta característica é, na

verdade, conseqüência da própria filosofia de desenvolvimento do esquema, o qual foi idealizado por seus autores (ver Kawahara e Hirano, 1983) justamente para analisar problemas com números de Reynolds bastante altos, o que explica o elevado nível de dissipação numérica presente. Entretanto, ao simular problemas com baixos números de Reynolds é preciso corrigir este excesso de dissipação com a inserção de um parâmetro seletivo de massa, através do qual é possível controlar o amortecimento numérico do esquema.

Na comparação entre os modelos clássico e dinâmico para a simulação das escalas de turbulência inferiores à resolução da malha ficou comprovada a superioridade do modelo dinâmico, como era esperado. Muito embora os resultados obtidos com o modelo de Smagorinsky tenham sido inferiores àqueles obtidos com o modelo dinâmico, eles não podem ser totalmente desprezados, como foi, por exemplo, o caso da cavidade 3D, onde as diferenças não foram tão significativas. A conclusão que pode ser tirada é de que as diferenças entre os modelos ficam mais evidentes em problemas onde haja uma maior complexidade e uma maior variabilidade de fenômenos físicos no escoamento. Entretanto, verificou-se também que ao contrário do modelo clássico, onde a constante de Smagorinsky permanece fixa no espaço e no tempo, o modelo dinâmico é bastante instável devido à grande variabilidade do coeficiente dinâmico  $C(\vec{x}, t)$  (ver Capítulo 2), o que exige um esquema de estabilização numérica bastante eficiente, como é o caso do esquema de dois passos com a inclusão do tensor de balanço difusivo (ver Capítulo 3).

### 8.3 ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS

#### 8.3.1 Viga em balanço sujeita a uma carga de pressão

Neste exemplo é estudado um caso altamente não-linear onde os efeitos causados pela falta de conservação de energia do algoritmo de avanço no tempo sobre a resposta dinâmica da estrutura e sobre a estabilidade numérica do processo de integração são claramente observados. Considera-se nesta aplicação uma viga em balanço sujeita a uma carga de pressão aplicada apenas em uma etapa inicial da análise, como pode ser verificado através da Figura 8.21, onde são mostradas as características geométricas e a função de carga para o problema proposto.

A malha de elementos finitos considerada para este exemplo é formada por  $800 \times 4 \times 1$  elementos, distribuídos regularmente nas três direções da estrutura. Empregam-se neste caso os dois esquemas numéricos de integração no tempo propostos nesta tese para a estrutura, sendo tomados os seguintes valores de raio espectral para os algoritmos baseados no método  $\alpha$ -Generalizado com controle de energia:  $r_\alpha = 0.4$ ,  $r_\alpha = 0.3$ ,  $r_\alpha = 0.2$ ,  $r_\alpha = 0.1$  e  $r_\alpha = 0.0$ . As propriedades físicas da estrutura empregadas nas análises, bem como o incremento de tempo adotado para a integração temporal, são encontradas na Tabela 8.10.

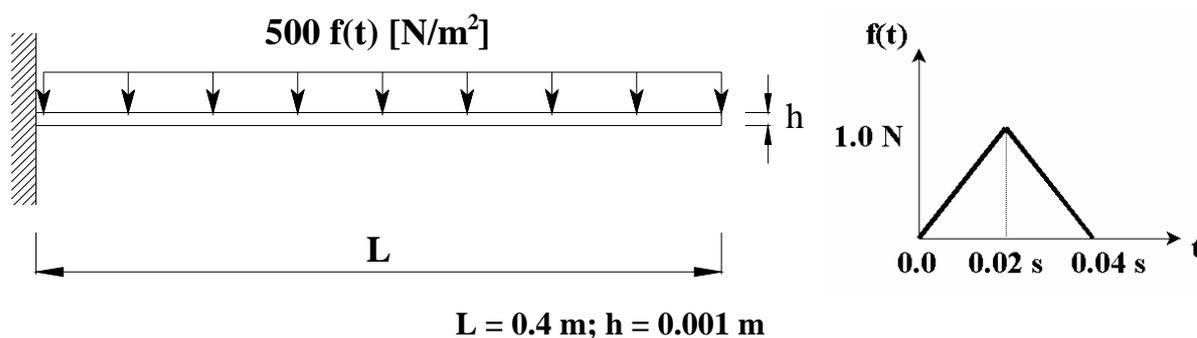
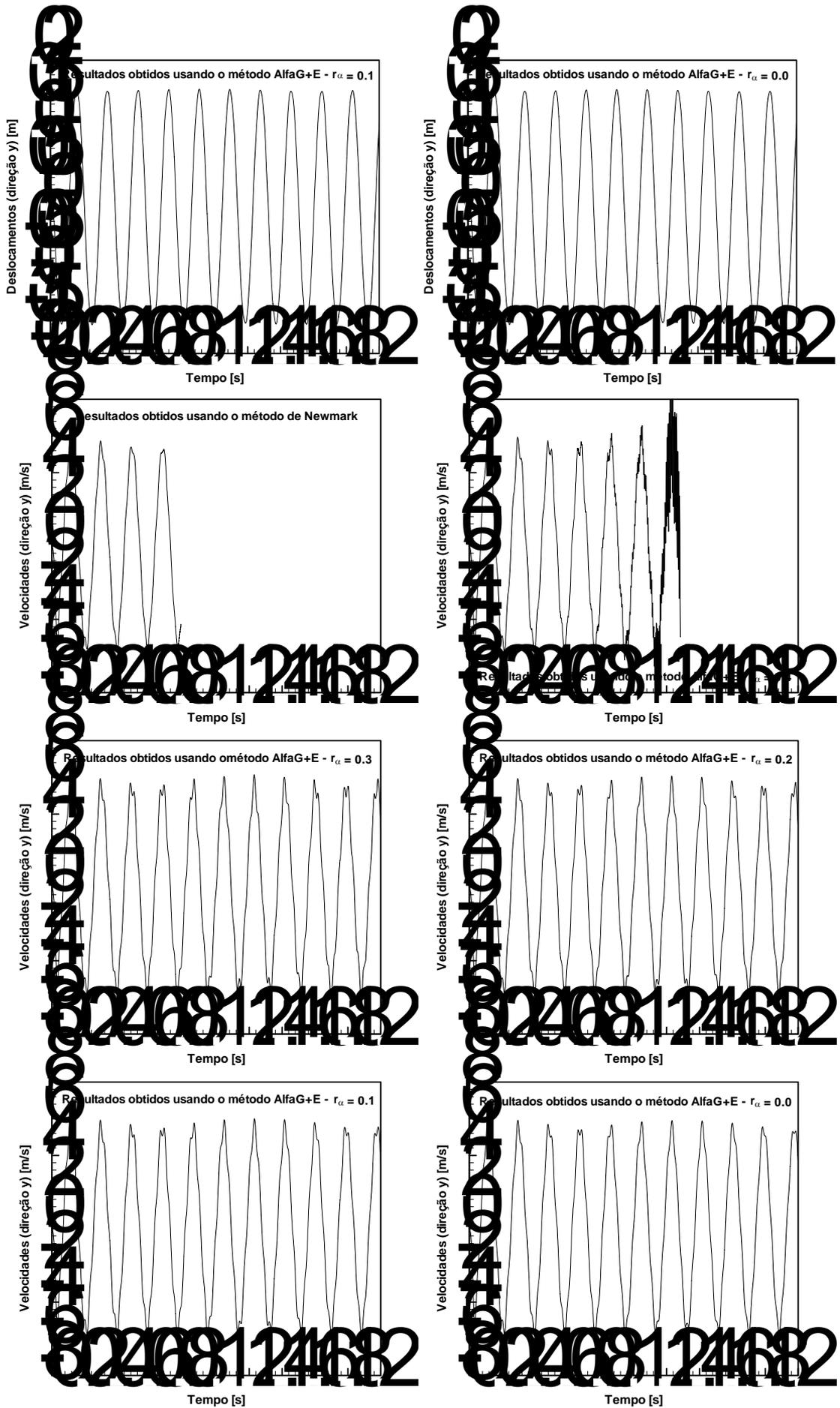


Figura 8.21: Características geométricas e função de carga para a análise da viga em balanço.

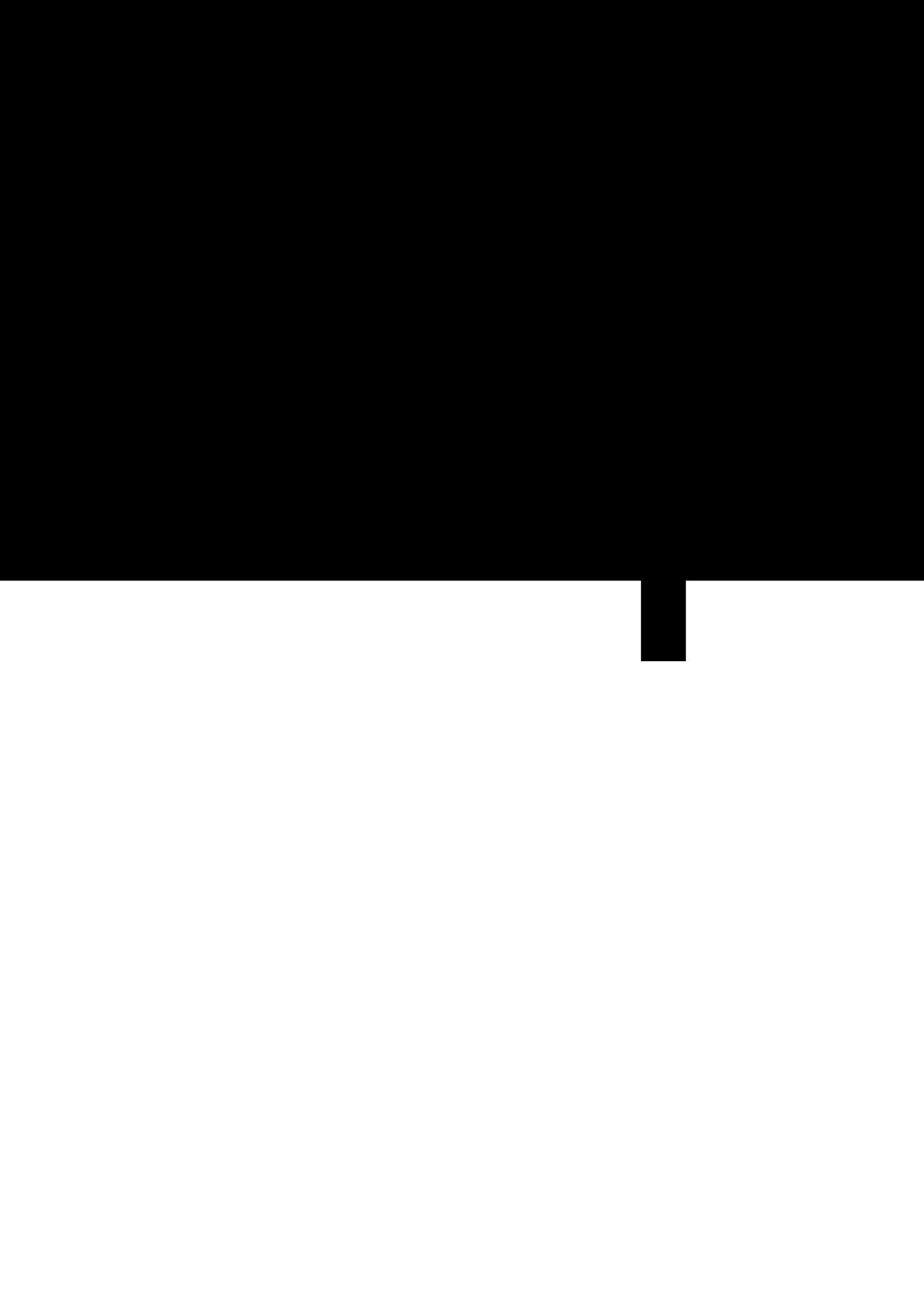
Tabela 8.10: Constantes empregadas na análise da viga em balanço.

Módulo de Elasticidade – $E$ [ $\text{N/m}^2$ ]	$7 \times 10^{10}$
Coefficiente de Poisson – $\nu$	0.33
Massa Específica – $\rho$ [ $\text{Kg/m}^3$ ]	$2.7 \times 10^3$
Coefficiente de Amortecimento – $\varphi$	0.0
Passo de Tempo – $\Delta t$ [s]	$5 \times 10^{-4}$





(continua na próxima página)

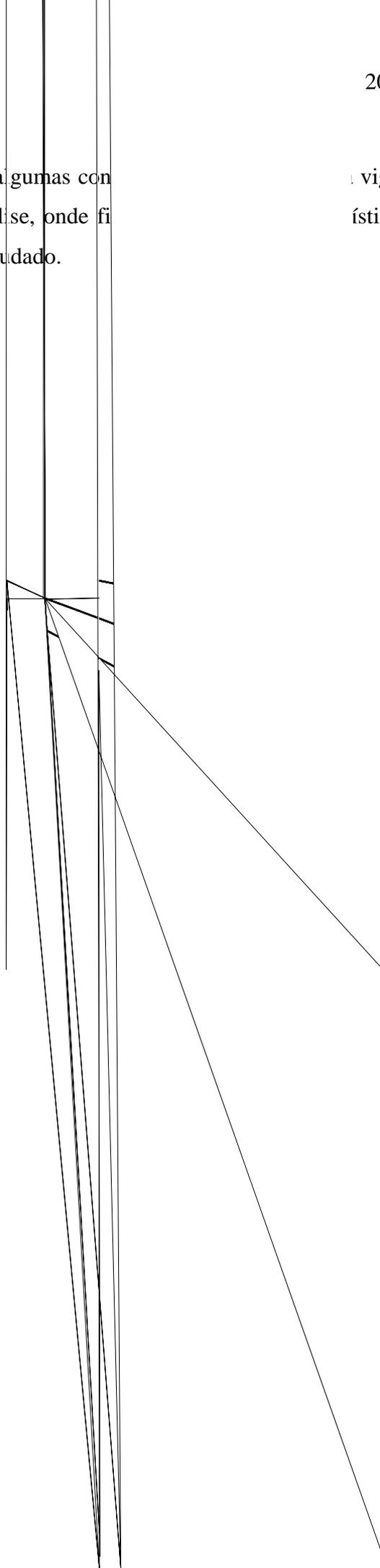


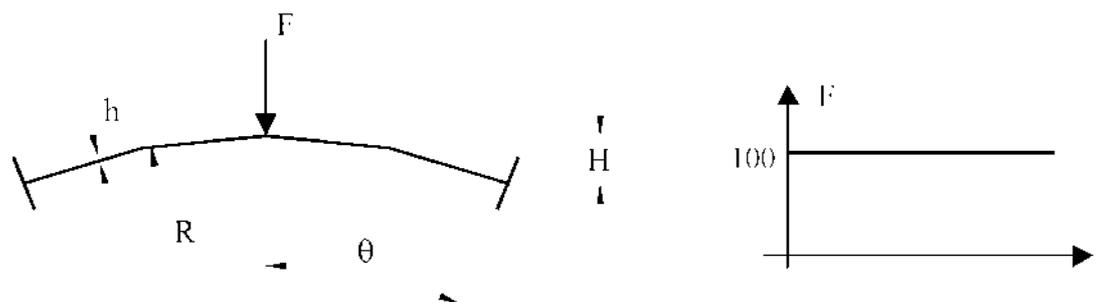
perfeitamente. Quando comparado com outros algoritmos que procuram manter a estabilidade do processo de integração em problemas não-lineares a partir de propriedades numéricas dissipativas, o modelo proposto neste trabalho não apresenta o característico amortecimento excessivo da resposta observado naqueles esquemas.



Finalmente, na Figura 8.24 são mostradas algumas curvas de deslocamento obtidas em diferentes instantes do período de análise, onde fica evidente a natureza altamente não-linear apresentada pelo problema estudado.

Figura 8.24  
Deslocamento da viga  
em função da carga  
aplicada





$$H = 0.0859 \text{ m}; h = 0.01576 \text{ m}; R = 4.76 \text{ m}; \theta = 10.9^\circ$$

Figura 8.25: Características geométricas e função de carga para a análise da casca esférica.

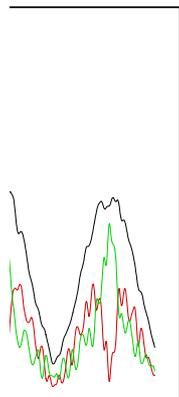
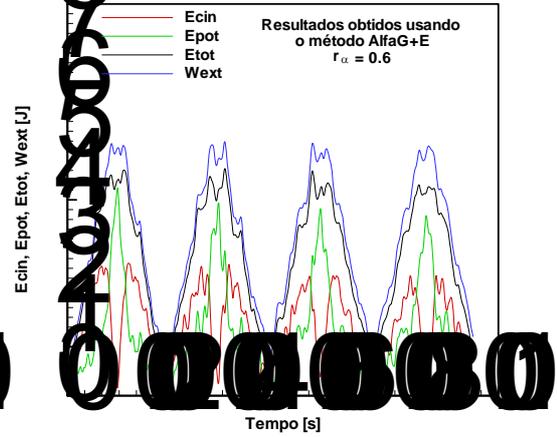
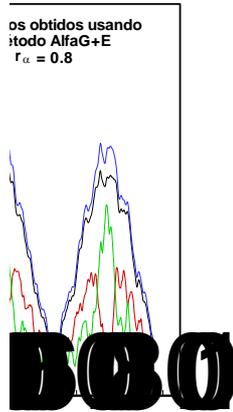
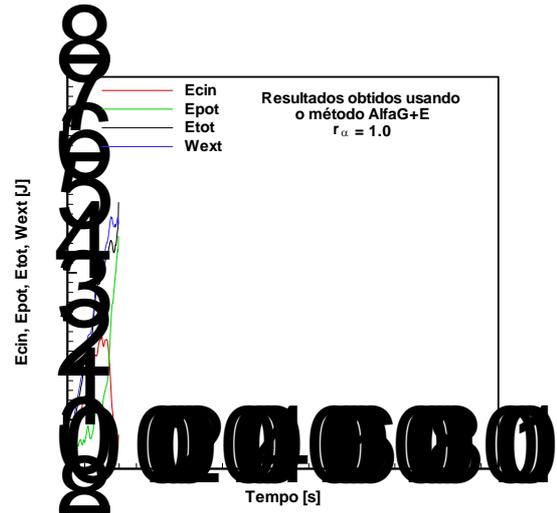
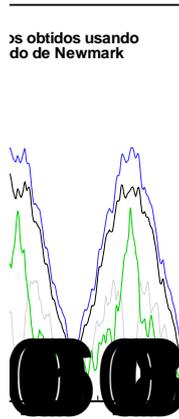
Tabela 8.11: Constantes empregadas na análise da casca esférica.

Módulo de Elasticidade – $E$ [ $\text{N/m}^2$ ]	$1 \times 10^7$
Coefficiente de Poisson – $\nu$	0.3
Massa Específica – $\rho$ [ $\text{Ns/cm}^4$ ]	$2.45 \times 10^{-4}$
Coefficiente de Amortecimento – $\phi$	0.0
Passo de Tempo – $\Delta t$ [s]	$1.25 \times 10^{-6}$

Os históricos de deslocamento, velocidade e aceleração avaliados no ápice da casca e na mesma direção de aplicação da carga, obtidos pelos esquemas usados, são mostrados na Figura 8.26. O número de períodos de vibração em relação à referência (Mondkar e Powell, 1977) é maior para verificar a questão da conservação de energia nos algoritmos estudados. Diante dos resultados apresentados abaixo, constata-se que embora o exemplo aqui analisado seja bastante complexo, onde os modos mais elevados têm uma contribuição importante na vibração da estrutura, o método de Newmark consegue manter a estabilidade durante o período estudado. Por outro lado, o método  $\alpha$ -Generalizado com controle de energia não consegue obter uma resposta estável para o caso  $r_\alpha = 1.0$ , onde não há qualquer quantidade de dissipação numérica adicionada ao esquema. No entanto, com a adição de uma pequena dissipação ( $r_\alpha = 0.8$ ), já é possível estabilizar o processo de integração. Para valores de  $r_\alpha$  mais baixos, verifica-se novamente um maior amortecimento numérico na resposta em deslocamentos nos últimos períodos de vibração.

Na Figura 8.27 são apresentados os resultados obtidos pelos algoritmos empregados em termos das grandezas de energia envolvidas no processo de vibração ( $E_{\text{cin}}$ ,  $E_{\text{pot}}$ ,  $E_{\text{tot}}$  e  $W_{\text{ext}}$ ). Observa-se uma resposta bastante perturbada para ambos os esquemas usados, onde o método  $\alpha$ -Generalizado com controle de energia no caso  $r_\alpha = 1.0$  perde a estabilidade em





2

urações de  
radas n  
ide

$t = 1.312e-4 \text{ s}$

### 8.3.3 Casca retangular sem restrição sujeita a cargas iniciais uniformemente distribuídas aplicadas no plano x-z

Neste exemplo é realizada a análise dinâmica não-linear de uma casca retangular sem restrições de deslocamento e sujeita a um conjunto de cargas distribuídas aplicadas em determinados pontos da peça com o objetivo de provocar um movimento no mesmo plano das cargas (plano x-z). As características geométricas do problema, bem como a forma de aplicação no tempo e a posição das cargas, são descritas através da Figura 8.29.

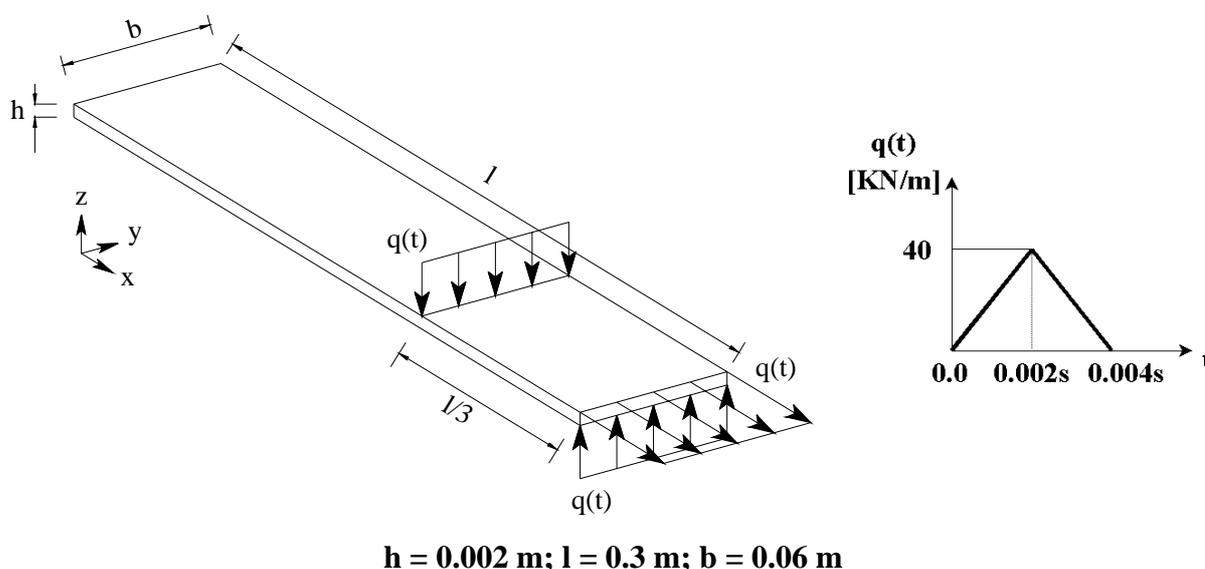


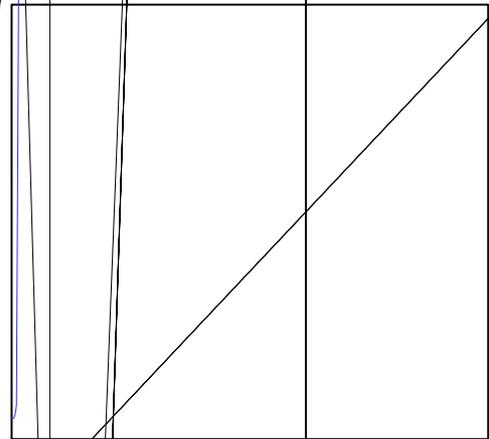
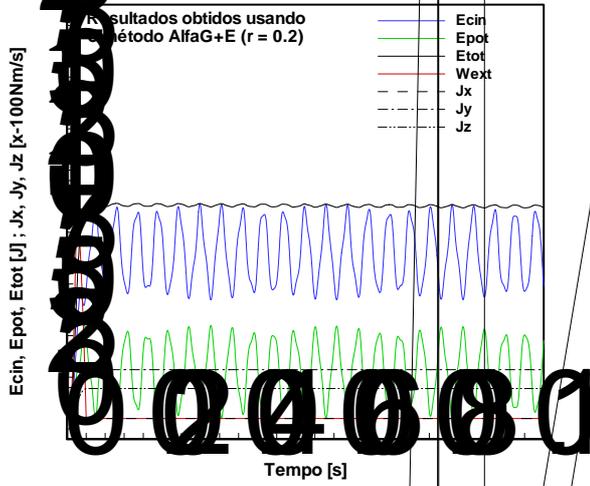
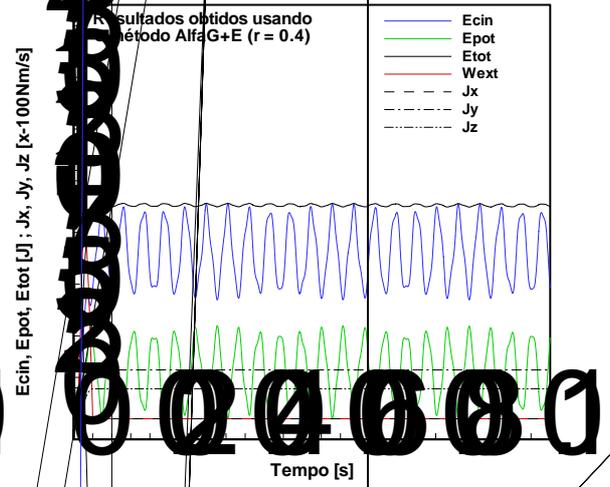
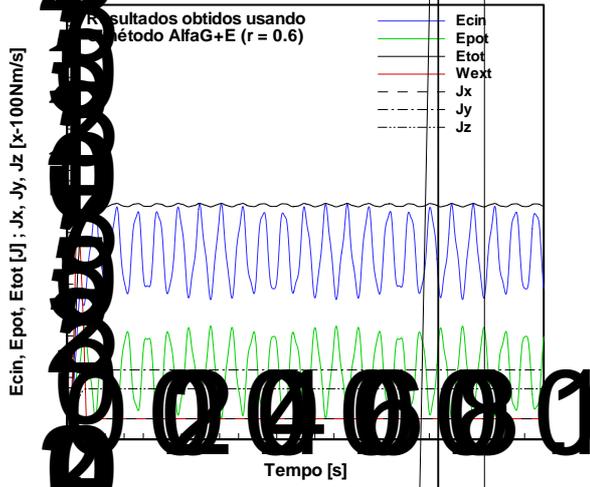
Figura 8.29: Características geométricas e função de carga para a análise da casca não restringida com movimento 2D.

A malha de elementos finitos empregada neste exemplo é constituída de  $30 \times 4 \times 4$  elementos distribuídos regularmente nas três direções da casca. As constantes físicas e o passo de tempo empregados nas simulações realizadas são apresentados na Tabela 8.12. Ambos os esquemas numéricos propostos para a análise da estrutura são empregados. São usados ainda os seguintes valores de raio espectral para o método  $\alpha$ -Generalizado com controle de energia:  $r_\alpha = 1.0$ ,  $r_\alpha = 0.9$ ,  $r_\alpha = 0.8$ ,  $r_\alpha = 0.6$ ,  $r_\alpha = 0.4$ ,  $r_\alpha = 0.2$  e  $r_\alpha = 0.0$ .

Tabela 8.12: Constantes empregadas na análise da casca não restringida com movimento 2D.

Módulo de Elasticidade – $E$ [ $\text{N/m}^2$ ]	$2.06 \times 10^{11}$
Coefficiente de Poisson – $\nu$	0.3
Massa Específica – $\rho$ [ $\text{Kg/m}^3$ ]	$7.8 \times 10^3$
Coefficiente de Amortecimento – $\varphi$	0.0
Passo de Tempo – $\Delta t$ [s]	$5 \times 10^{-5}$

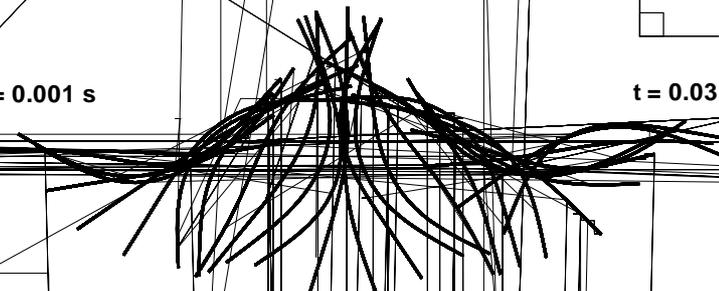
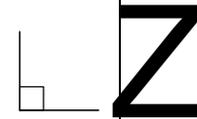




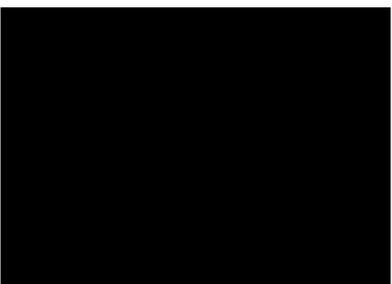
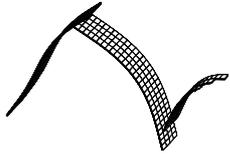
$\Delta T = 0.001 \text{ s}$

$t = 0.001 \text{ s}$

$t = 0.03 \text{ s}$



(continua na próxima página)

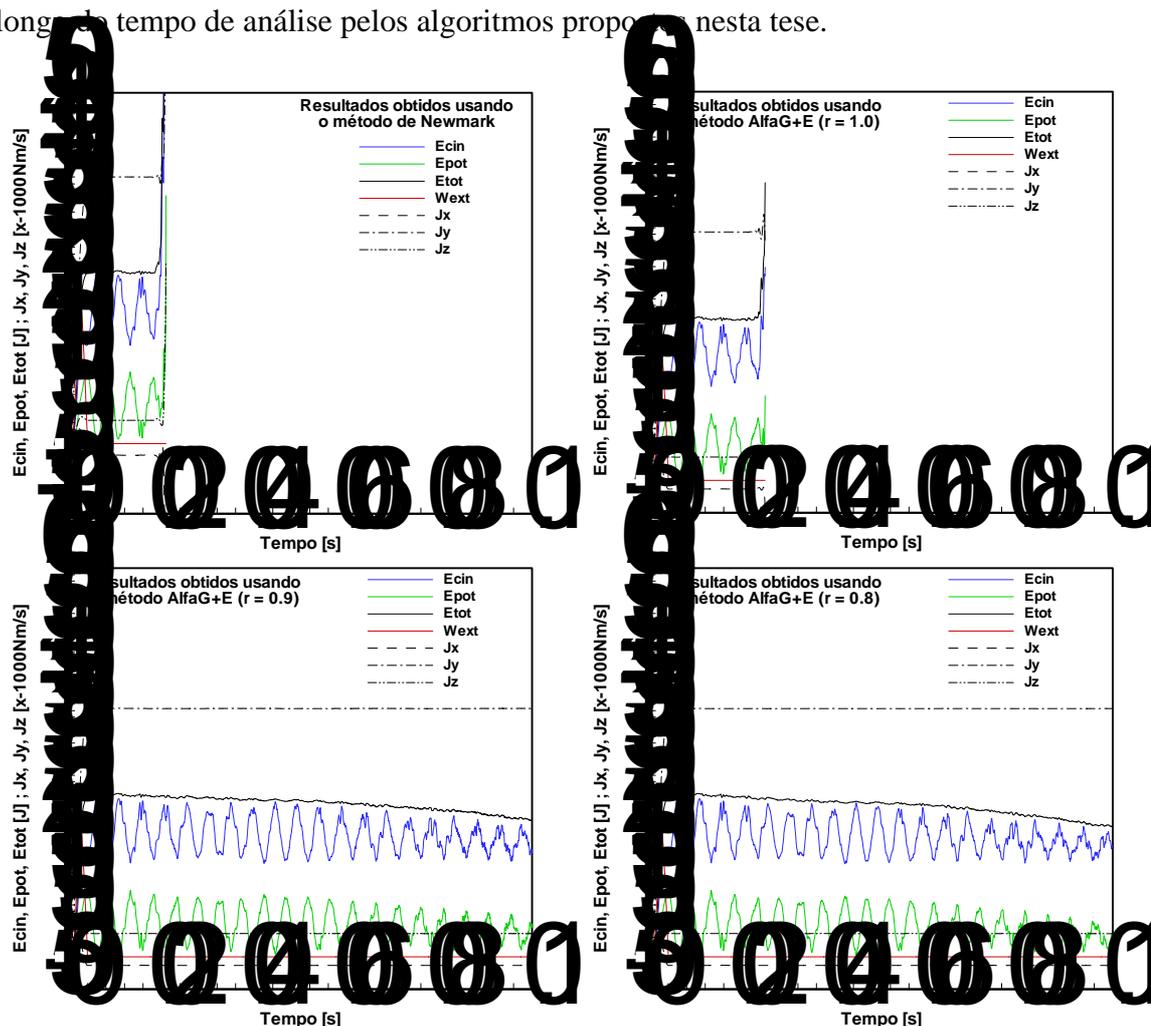


A malha de elementos finitos empregada neste exemplo é a mesma usada na seção anterior, assim como as propriedades físicas e de discretização temporal, as quais podem ser obtidas na Tabela 8.13. Os dois esquemas numéricos de integração no tempo propostos para a análise da estrutura são empregados, sendo usados os seguintes valores de raio espectral para o método  $\alpha$ -Generalizado:  $r_\alpha = 1.0$ ,  $r_\alpha = 0.9$ ,  $r_\alpha = 0.8$ ,  $r_\alpha = 0.6$ ,  $r_\alpha = 0.4$ ,  $r_\alpha = 0.2$  e  $r_\alpha = 0.0$ .

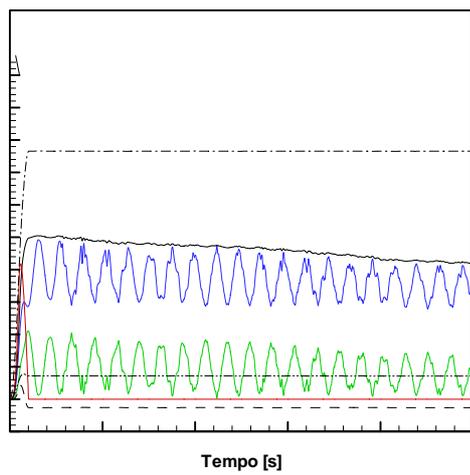
Tabela 8.13: Constantes empregadas na análise da casca não restringida com movimento 3D.

Módulo de Elasticidade – E [N/m <sup>2</sup> ]	$2.06 \times 10^{11}$
Coefficiente de Poisson – $\nu$	0.3
Massa Específica – $\rho$ [Kg/m <sup>3</sup> ]	$7.8 \times 10^3$
Coefficiente de Amortecimento – $\phi$	0.0
Passo de Tempo – $\Delta t$ [s]	$5 \times 10^{-5}$

Na Figura 8.33 tem-se os resultados referentes aos históricos de energia ( $E_{cin}$ ,  $E_{pot}$  e  $E_{tot}$ ), trabalho externo ( $W_{ext}$ ) e as componentes de momentum angular ( $J_x$ ,  $J_y$  e  $J_z$ ) computados ao longo do tempo de análise pelos algoritmos propostos nesta tese.



(continua na próxima página)



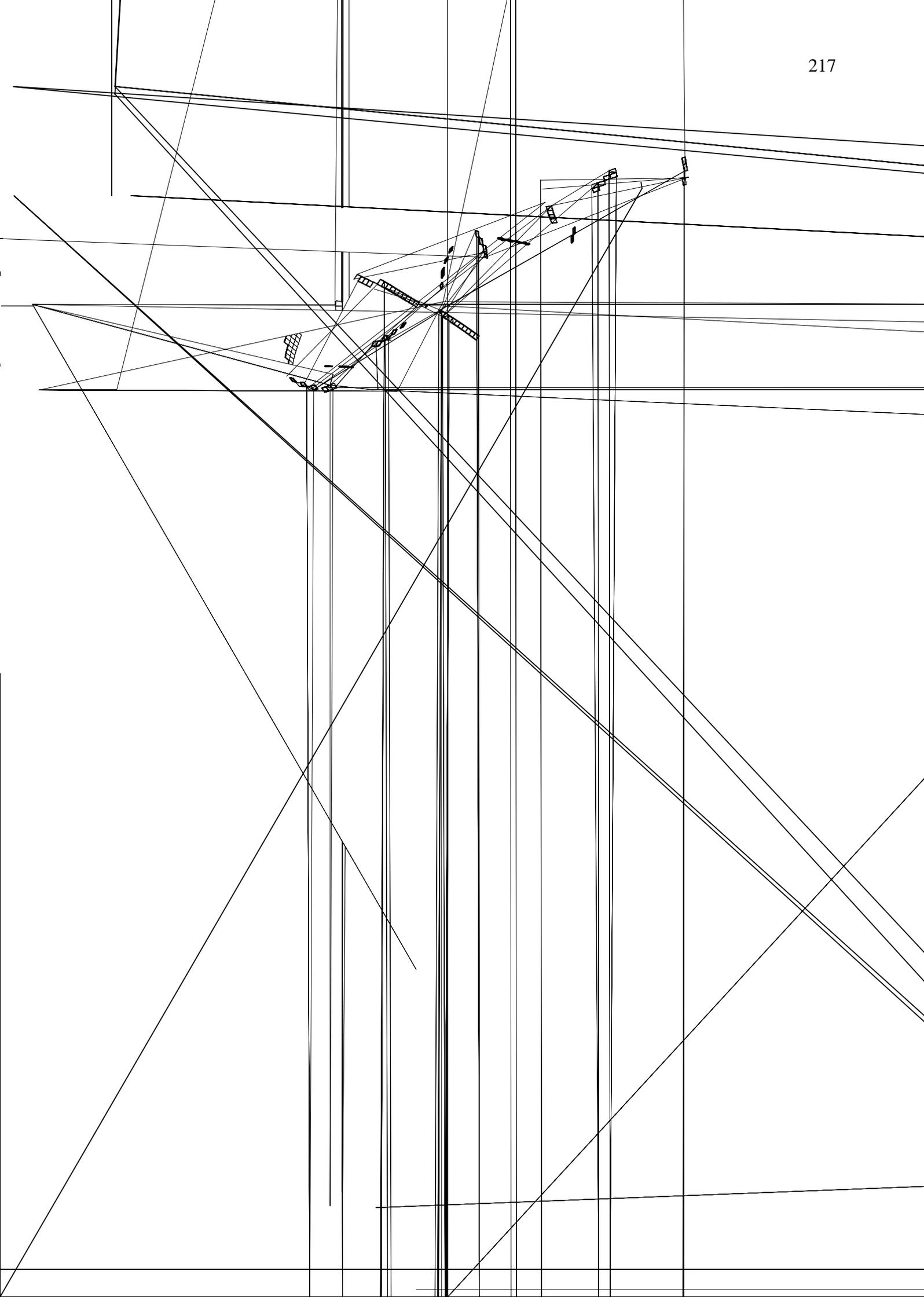


Tabela 8.14: Dados computacionais das análises efetuadas para a estrutura.

Exemplos	Tcpu*	MEM [Mw]	S-LB	ITER	
Viga em balanço	Newmark	Instável		-	
	AlfaG+E - $r_\alpha = 0.4$	Instável		-	
	AlfaG+E - $r_\alpha = 0.3$	67018.33	4.70	60	2.03
	AlfaG+E - $r_\alpha = 0.2$	66865.08			2.03
	AlfaG+E - $r_\alpha = 0.1$	66766.42			2.02
	AlfaG+E - $r_\alpha = 0.0$	66537.29			2.02
Casca esférica	Newmark	99352.12	27.44		2.04
	AlfaG+E - $r_\alpha = 1.0$	Instável			-
	AlfaG+E - $r_\alpha = 0.8$	114357.15			2.29
	AlfaG+E - $r_\alpha = 0.6$	104916.20	27.48	3705	2.07
	AlfaG+E - $r_\alpha = 0.4$	102212.17			2.01
	AlfaG+E - $r_\alpha = 0.2$	100650.18			2.01
	AlfaG+E - $r_\alpha = 0.0$	100283.69			2.01
Casca retangular: movimento no plano	Newmark	Instável	1.23		-
	AlfaG+E - $r_\alpha = 1.0$	Instável			-
	AlfaG+E - $r_\alpha = 0.9$	8268.00			3.13
	AlfaG+E - $r_\alpha = 0.8$	8236.41		147	3.12
	AlfaG+E - $r_\alpha = 0.6$	8211.60	1.27		3.11
	AlfaG+E - $r_\alpha = 0.4$	8267.88			3.13
	AlfaG+E - $r_\alpha = 0.2$	8301.67			3.14
	AlfaG+E - $r_\alpha = 0.0$	8355.08			3.14
Casca retangular: movimento no espaço	Newmark	Instável	1.23		-
	AlfaG+E - $r_\alpha = 1.0$	Instável			-
	AlfaG+E - $r_\alpha = 0.9$	11366.86			4.34
	AlfaG+E - $r_\alpha = 0.8$	10750.51		147	4.10
	AlfaG+E - $r_\alpha = 0.6$	10693.98	1.27		4.08
	AlfaG+E - $r_\alpha = 0.4$	10353.73			3.95
	AlfaG+E - $r_\alpha = 0.2$	10210.74			3.89
	AlfaG+E - $r_\alpha = 0.0$	10179.22			3.87

\* Para informações sobre as características numéricas da máquina usada, consultar o Capítulo 7.

No entanto, foi na questão relativa à discretização no tempo da equação de equilíbrio dinâmico que ocorreram as observações mais importantes. Verificou-se que o método de Newmark, na sua forma clássica, consegue analisar apenas exemplos levemente não-lineares, uma vez que para problemas altamente não-lineares o mesmo perde as suas características de estabilidade devido a deficiências no aspecto relativo à conservação de energia do algoritmo. Por outro lado, o método  $\alpha$ -Generalizado com controle de energia, proposto nesta tese, consegue obter soluções estáveis sempre que uma quantidade adequada de dissipação numérica é adicionada ao esquema de integração, a qual é controlada através do valor atribuído ao raio espectral. Outro ponto importante do algoritmo apresentado refere-se à conservação de momentum angular para problemas não restringidos, onde esta propriedade caracteriza-se como uma condição adicional para a manutenção da estabilidade numérica. A

desvantagem do esquema está na necessidade de se usar passos de tempo levemente menores que aqueles utilizados por outros algoritmos similares devido ao uso da técnica de integração reduzida, a qual tende a amplificar as oscilações espúrias, inerentes ao processo numérico de integração.

Uma vantagem significativa do presente esquema em relação aos demais esquemas conservativos e ao próprio método de Newmark está no reduzido custo computacional, como pode ser notado através da Tabela 8.14, onde encontram-se resumidos os dados computacionais das análises efetuadas em função do tempo de processamento ( $T_{cpu}$ ), a memória despendida (MEM), a semi-largura de banda do sistema de equações (S-LB) e o número médio de iterações do processo iterativo de solução (ITER). Os dados abaixo mostram que valores baixos atribuídos ao raio espectral ( $r_\alpha$ ) tendem a reduzir o número de iterações no processo de solução (ITER), uma vez que com uma maior dissipação numérica as oscilações espúrias são mais amortecidas, especialmente para problemas mais complexos. Por outro lado, ITER pode aumentar se uma quantidade excessiva de dissipação numérica for fornecida ao esquema, como observa-se no caso da casca retangular com movimento no plano.

## 8.4 ANÁLISE DE PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

### 8.4.1 Painel flexível sob a ação de vórtices gerados por um prisma de seção quadrada

Nesta análise são estudados os efeitos de interação fluido-estrutura existentes em um problema envolvendo um painel flexível submetido à ação do escoamento gerado a partir do contato de um escoamento não perturbado de um fluido viscoso com um prisma de seção quadrada rígido, no qual o painel encontra-se engastado. Através deste exemplo, deseja-se fazer uma abordagem detalhada sobre aspectos relativos ao uso de subciclos e de malhas com interfaces não coincidentes entre fluido e estrutura, observando a sua influência sobre os resultados. Serão estudados os casos com 2, 4, 8, 16, 32 e 64 subciclos e uma comparação dos resultados obtidos entre três malhas distintas para a estrutura é apresentada, sendo uma com nós coincidentes e duas com nós não coincidentes, das quais uma possui coincidência de nós

no sentido estrutura-fluido e a outra não possui qualquer conformidade entre nós. Em todas as simulações é empregado o modelo explícito de dois passos para a análise do escoamento. No caso da estrutura, utiliza-se o método de Newmark com o esquema de estabilização  $\alpha$ -Generalizado e controle de energia. Com o objetivo de avaliar comparativamente o esquema de acoplamento proposto neste trabalho, é utilizado também um modelo de acoplamento particionado convencional.

Na Figura 8.35 são apresentadas as características geométricas do problema estudado juntamente com as condições de contorno e a malha de elementos finitos para a análise do escoamento. Na Figura 8.36, estas mesmas informações são dadas em relação à análise da estrutura. A malha referente à discretização espacial do fluido é formada de 10450 elementos e 21472 nós, sendo que a menor dimensão está na ordem de  $2 \times 10^{-2}$  m, encontrada nos elementos localizados sobre a interface sólido-fluido. No que se refere à estrutura, os elementos da malha são uniformemente distribuídos da seguinte forma:  $80 \times 3 \times 1$  elementos para a malha coincidente,  $16 \times 3 \times 1$  e  $19 \times 3 \times 1$  para as malhas não coincidentes, todos de acordo com as direções dos eixos globais.

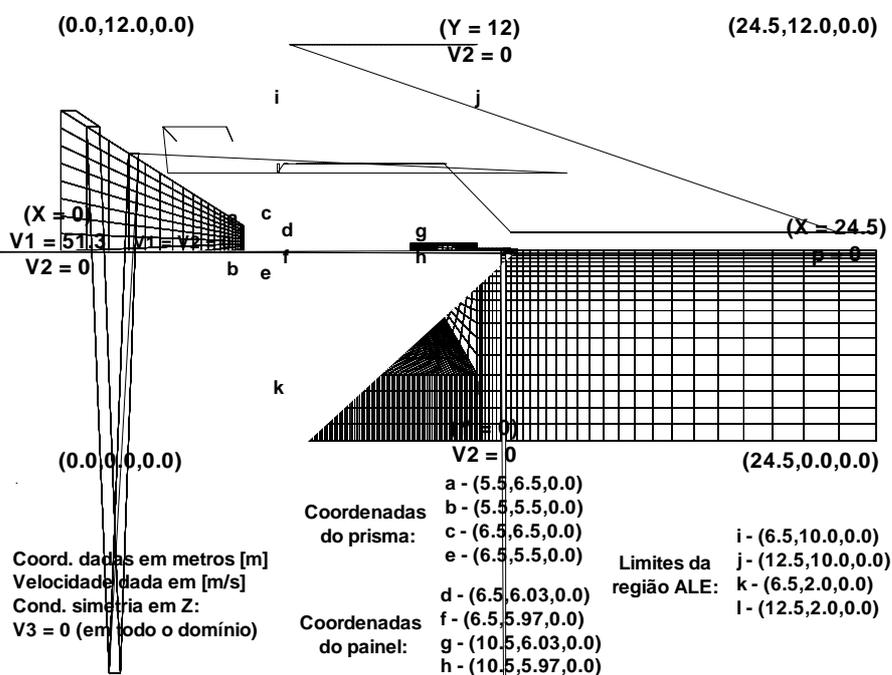
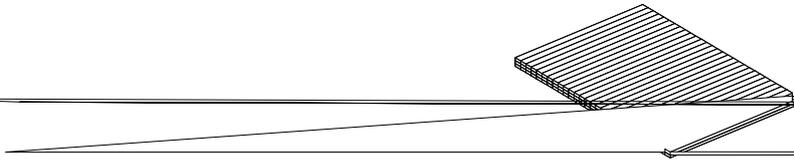


Figura 8.35: Características geométricas, condições de contorno e malha de elementos finitos empregados para o escoamento na análise de interação fluido-estrutura em um painel flexível.



Contorno de engaste ( $X = 0$ ):  $u_1 = u_2 = u_3 = 0$

(6.5,6.03,1.0)

(6.5,5.97,1.0)

(10.5,6.03,0.0)

(10.5,5.97,0.0)(10.5,6.03,1.0)(10.5,5.97,1.0)

(6.5,6.03,0)

Coordenadas dadas em metros [m] Condição de simetria na direção Z:  $u_3 = 0$  ( e

$X = 0$ ):  $u_1 = u_2 = 0$

(10.5,6.03,0.0)

(10.5,5.97,0.0)(10.5,6.03,1.0)(10.5,5.97,1.0)

(c) Figura 8.36: Características

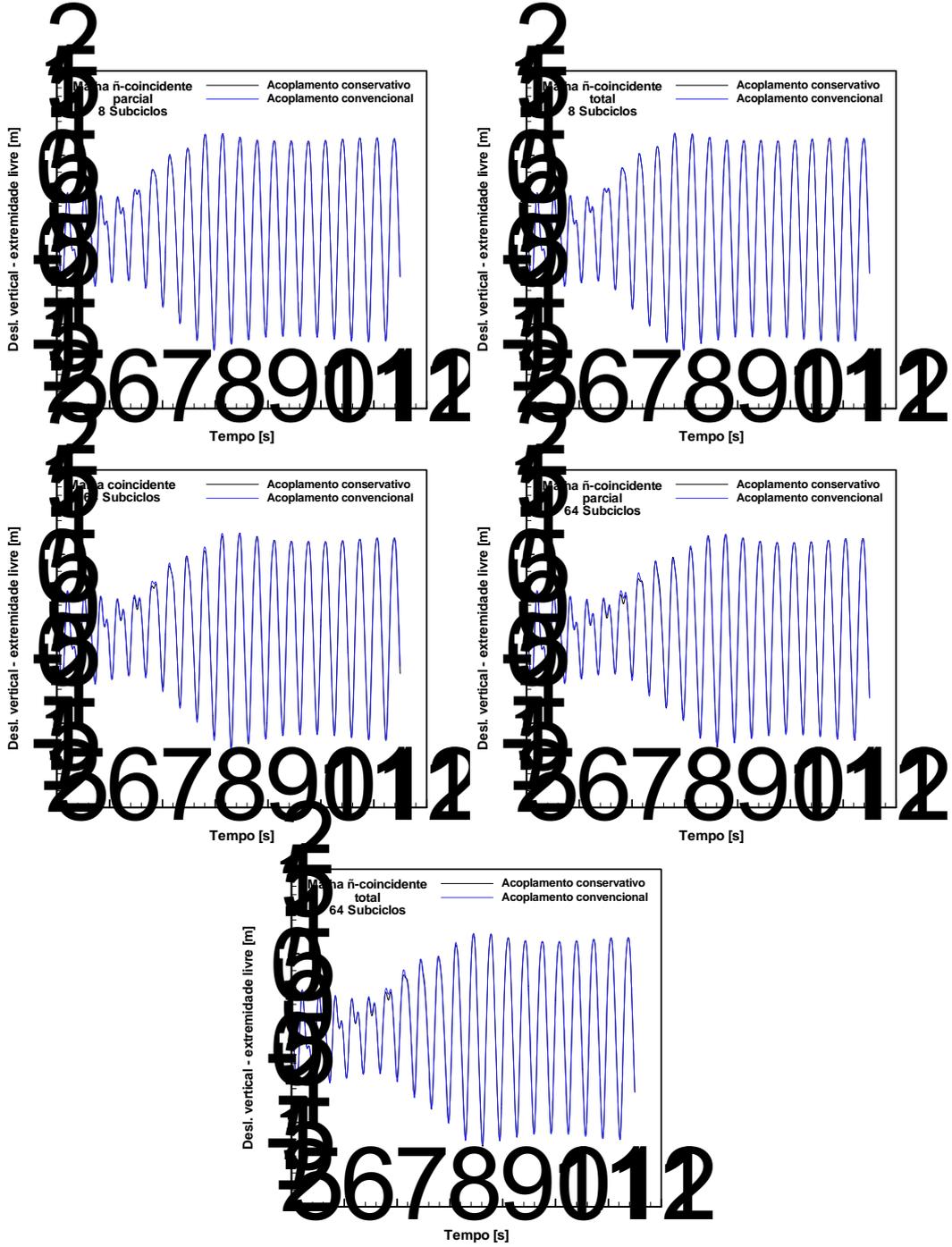
As constantes físicas e geométricas empregadas para as análises do escoamento e da estrutura são exibidas conjuntamente na Tabela 8.15. O escoamento é inicialmente desenvolvido considerando-se os campos de velocidade e pressão iniciais nulos e a estrutura rígida e indeslocável durante um determinado período de tempo. Após este período inicial o acoplamento fluido-estrutura é estabelecido através da imposição das equações de equilíbrio e compatibilidade na interface, levando a estrutura a deformar-se sob a ação do escoamento. O número de Reynolds para o escoamento é 332.6, tomando por base a velocidade de entrada e a dimensão característica do prisma.

Tabela 8.15: Constantes empregadas na análise de interação fluido-estrutura em um painel flexível.

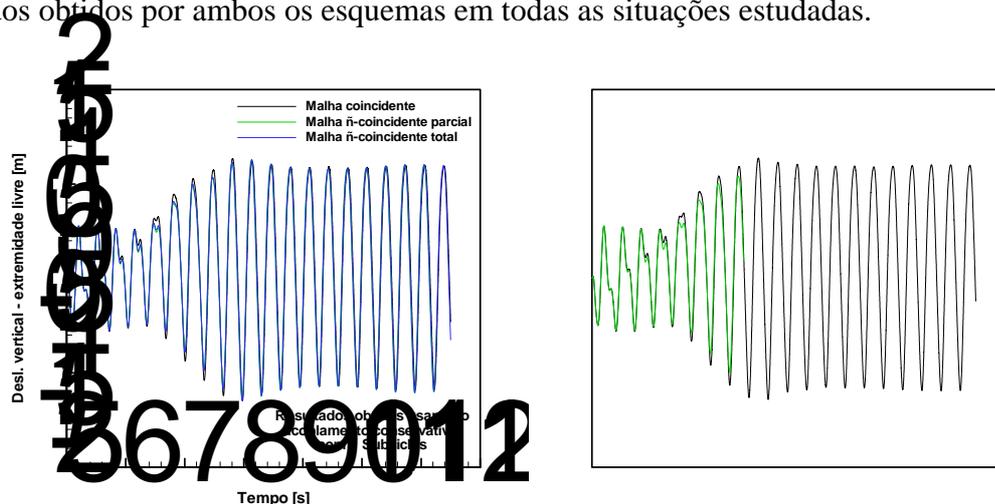
<b>Fluido</b>	Massa específica ( $\rho$ )	$1.18 \times 10^{-3} \text{ Kg/m}^3$
	Viscosidade dinâmica ( $\mu$ )	$1.82 \times 10^{-4} \text{ Ns/m}^2$
	Viscosidade volumétrica ( $\lambda$ )	$0.0 \text{ Ns/m}^2$
	Velocidade do som no fluido ©	$345.0 \text{ m/s}$
	Velocidade característica (entrada)	$51.3 \text{ m/s}$
	Dimensão característica (prisma)	$1.0 \text{ m}$
	Parâmetro seletivo de massa ( $e$ )	$0.9$
	Incremento de tempo ( $\Delta t$ )	$4 \times 10^{-5} \text{ s}$
	<b>Estrutura</b>	Massa específica ( $\rho$ )
Módulo de elasticidade (E)		$2.5 \times 10^6 \text{ N/m}^2$
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )		$0.35$
Coefficiente de amortecimento ( $\gamma$ )		$0.0 \text{ Ns/m}$
Raio espectral ( $r_a$ )		$0.6$
Incremento de tempo ( $\Delta t$ )		$n^\circ \text{ de subciclos} \times \Delta t$

Nas figuras 8.37 a 8.39 apresenta-se uma série de comparações efetuadas a partir dos resultados obtidos em termos de deslocamentos verticais na extremidade livre do painel, tomando como parâmetros de comparação o número de subciclos utilizados na integração temporal, o tipo de malha empregado para a estrutura e o esquema de acoplamento aplicado. Na Figura 8.37 a comparação é feita em relação aos diferentes números de subciclos empregados utilizando o modelo de acoplamento conservativo e a condição de malhas coincidentes na interface. Na Figura 8.38 são comparados os modelos de acoplamento conservativo e convencional, considerando-se 2, 8 e 64 subciclos e as três condições de interface propostas. Por fim, na Figura 8.39 comparam-se as diferentes condições de interface empregando o modelo de acoplamento conservativo com 2, 8 e 64 subciclos.





comparação feita entre as diferentes condições de discretização da interface (Figura 8.39), onde o emprego de malhas não conformes produz este mesmo efeito em relação aos resultados obtidos com malhas coincidentes. Por outro lado, uma vez que a estrutura atinja o nível máximo de deslocamentos, todos os subciclos e todas as condições de discretização de interface analisadas levam a resultados bastante similares. Na comparação feita entre os modelos de acoplamento (Figura 8.38), constata-se praticamente uma coincidência entre os resultados obtidos por ambos os esquemas em todas as situações estudadas.

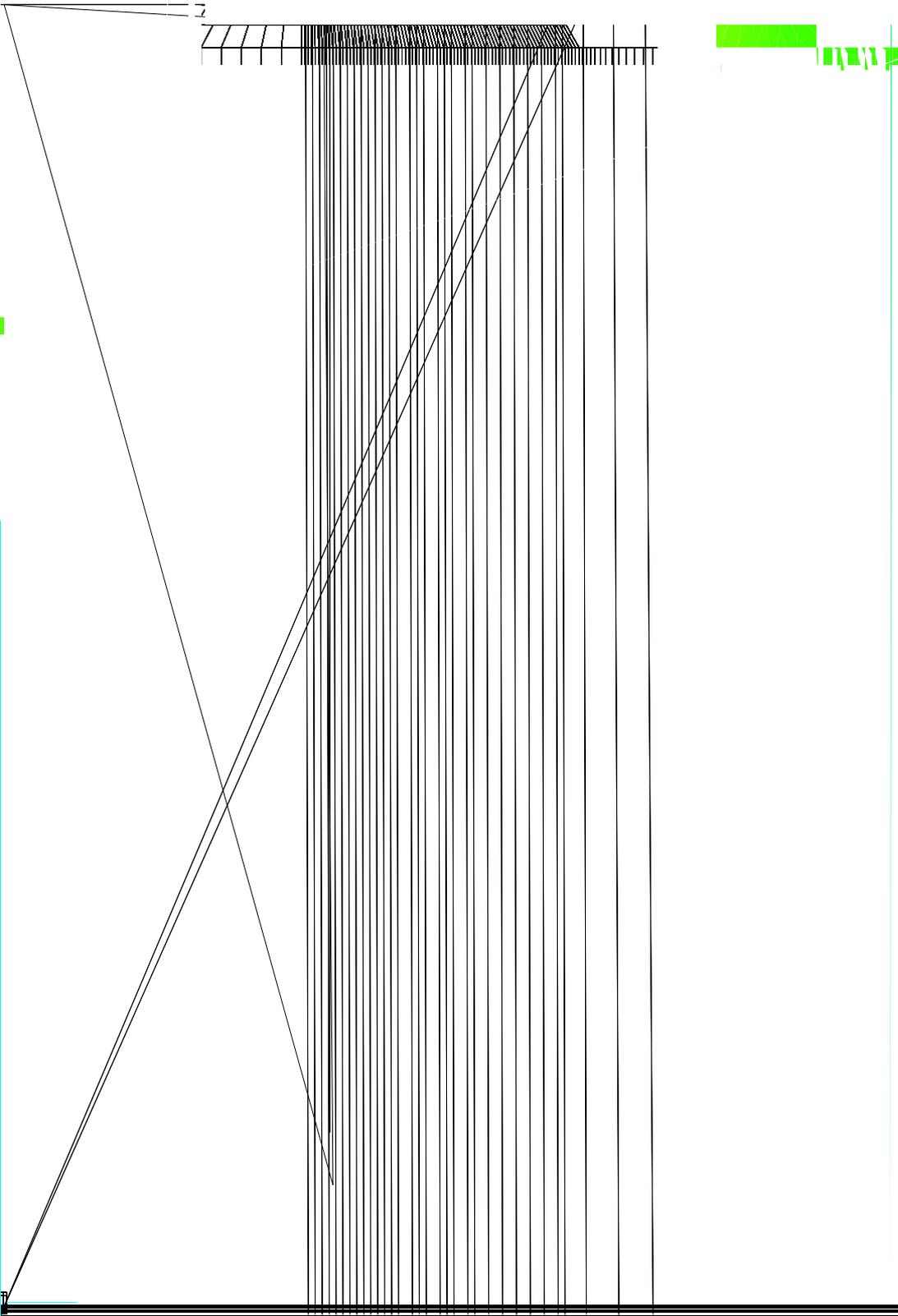
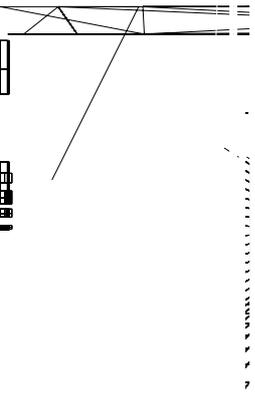


sido gerado um erro tão expressivo. Uma concordância mais nítida é observada para os resultados aqui obtidos em relação à referência de Wall e Ramm (1998), estando na ordem de 5% a maior diferença encontrada.

Tabela 8.16: Resultados referentes à análise dinâmica de um painel flexível sujeito aos efeitos de interação fluido-estrutura.

Referências		Resultados					
		Amplitude média [m]	Período médio [s]	Pico de deslocamento [m]			
Malha Coincidente	Acopl. Conservativo	2 Subciclos	1.189	0.326	1.294		
		4 Subciclos	1.203	0.325	1.294		
		8 Subciclos	1.201	0.325	1.283		
		16 Subciclos	1.195	0.326	1.305		
		32 Subciclos	1.194	0.326	1.303		
		64 Subciclos	1.188	0.326	1.295		
	Acopl. Convencional	2 Subciclos	1.194	0.325	1.295		
		8 Subciclos	1.199	0.326	1.283		
		64 Subciclos	1.187	0.325	1.303		
		Malha ã-coinc. Parcial	Acopl. Conservativo	2 Subciclos	1.193	0.325	1.290
				8 Subciclos	1.215	0.326	1.306
				64 Subciclos	1.181	0.326	1.283
Acopl. Convencional	2 Subciclos	1.192	0.326	1.290			
	8 Subciclos	1.197	0.325	1.308			
	64 Subciclos	1.181	0.326	1.271			
Malha ã-coinc. Total	Acopl. Conservativo	2 Subciclos	1.192	0.326	1.297		
		8 Subciclos	1.197	0.326	1.309		
		64 Subciclos	1.181	0.326	1.284		
	Acopl. Convencional	2 Subciclos	1.192	0.325	1.296		
		8 Subciclos	1.198	0.326	1.309		
		64 Subciclos	1.182	0.325	1.272		
Wall e Ramm (1998)		1.200	0.310	1.300			
Teixeira (2001)		1.364	0.346	1.500			

Na Figura 8.40 são apresentadas as diferentes situações da malha de elementos finitos referentes ao fluido na região próxima ao painel e ao prisma em diferentes instantes de tempo ao longo da análise. Também são mostrados os campos de pressão juntamente com as linhas de corrente nestes mesmos instantes. Como se observa, a malha consegue manter a sua integridade ao deformar-se, graças à efetividade do esquema de movimento de malha. No que se refere ao campo de pressões, verifica-se um intervalo de valores similar ao obtido por Teixeira (2001).



parcial, juntamente  
Como se pode verif  
distribuições de forç  
interface.

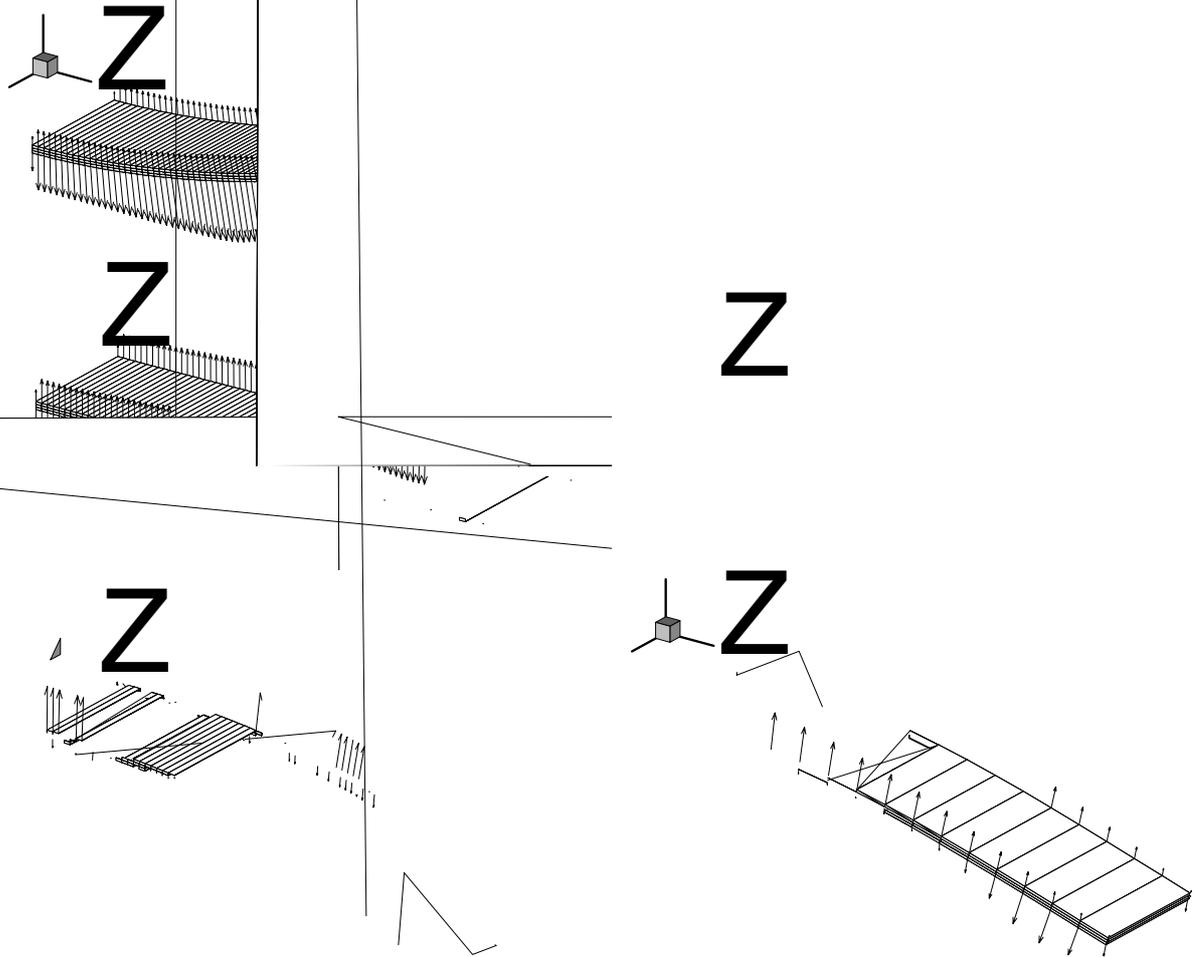


Figura 8.41: Configurações deformadas do painel e vetor de força do escoamento em diferentes instantes de tempo. Coluna esquerda: malha coincidente. Coluna direita: malha não coincidente.

Na Tabela 8.17 são apresentados os tempos de processamento obtidos na análise realizada em função das condições de discretização da interface e do número de subciclos usados na integração temporal. Como se observa, o aumento no número de subciclos faz com que haja uma redução significativa no tempo de processamento, principalmente para 64 subciclos, onde a redução é em torno de 30% em relação ao tempo obtido para 2 subciclos na condição de malha coincidente. No que se refere ao uso de malhas não coincidentes, ocorre uma redução de menor impacto, sendo de aproximadamente 40% quando comparam-se os casos com 2 e 64 subciclos. Verifica-se também que a influência da condição de discretização

da interface vai perdendo peso no tempo final de análise à medida que se aumenta o número de subciclos, uma vez que as rotinas referentes ao esquema de acoplamento vão sendo cada vez menos usadas pelo algoritmo.

Tabela 8.17: Tempos de processamento em segundos obtidos na análise de interação fluido-estrutura em um painel flexível.

Condição de interface	Número de subciclos					
	2	4	8	16	32	64
<b>Malha coincidente</b>	338540	221560	162512	132773	117641	110136
<b>Malha ã-coincidente parcial</b>	267638	-	146491	-	-	107484
<b>Malha ã-coincidente total</b>	280357	-	146782	-	-	107502

#### 8.4.2 Conclusões parciais sobre os algoritmos desenvolvidos para a análise da interação fluido-estrutura

Nesta seção foi analisado um exemplo numérico de interação fluido-estrutura para a verificação do algoritmo de acoplamento entre os códigos de simulação do escoamento e do movimento da estrutura, incluindo as rotinas de sincronização para a integração em subciclos e a utilização de malhas não conformes na interface. As principais conclusões extraídas desta análise são apresentadas abaixo.

Através dos resultados apresentados é possível afirmar que o esquema de acoplamento proposto nesta tese mostrou-se bastante eficiente e robusto para as várias situações de análise às quais foi submetido, incluindo diferentes números de subciclos e diferentes condições de compatibilidade das malhas sobre a interface. Mesmo para números relativamente altos de subciclos o modelo consegue obter respostas muito próximas às referências de comparação, graças à qualidade do esquema de acoplamento. Quanto às condições de compatibilidade entre as malhas do fluido e da estrutura sobre a interface, verificou-se uma ótima convergência de resultados entre os casos testados, de onde se pode aferir a qualidade do esquema de mapeamento e transferência de dados através da interface, desenvolvido neste trabalho. Não foi possível, porém, demonstrar a superioridade do esquema de acoplamento particionado conservativo, apresentado neste trabalho, em relação ao esquema particionado convencional, pelo menos a partir dos resultados obtidos no problema analisado nesta seção.

## 9 APLICAÇÕES DE VALIDAÇÃO

### 9.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é realizada a validação do modelo numérico desenvolvido nesta tese através da análise de vários problemas típicos da EVC. Como pode ser constatado através das conclusões apresentadas no capítulo anterior, ficou definido que os escoamentos de vento serão simulados empregando o esquema explícito de dois passos juntamente com o modelo dinâmico para as escalas de turbulência inferiores à resolução da malha. Para exemplos envolvendo estruturas deformáveis, o modelo numérico apresentado nos capítulos 4 e 5 é utilizado na determinação do movimento da estrutura sob a ação do escoamento. A interação entre os códigos relativos ao fluido e à estrutura é realizada através do esquema de acoplamento particionado proposto para esta tese, o qual garante uma transferência conservativa de dados através da interface, inclusive no caso do emprego de subciclos para a integração no tempo e, ainda, no uso de malhas não coincidentes entre os meios.

Os exemplos aqui analisados podem ser separados em dois grupos principais: no primeiro encontram-se as simulações da ação do vento sobre estruturas rígidas e indeformáveis, a chamada análise aerodinâmica, onde o principal objetivo é a obtenção de informações relativas a forças exercidas pelo vento sobre as estruturas e o padrão de circulação do vento no entorno e no interior de edificações, as quais podem ser expressas através de coeficientes de força, ou coeficientes aerodinâmicos, campos de pressão, linhas de corrente e perfis de velocidade. Nestes casos, é utilizada apenas a parte do código referente à simulação numérica de escoamentos, uma vez que são desprezados os efeitos aeroelásticos ao não considerar-se a deformabilidade da estrutura, não necessitando, por isso, a análise de interação fluido-estrutura. No segundo grupo são estudados exemplos onde considera-se que a estrutura é um corpo deformável que interage com o escoamento que a envolve. O principal objetivo destas análises é a determinação da resposta dinâmica da estrutura sob a ação do vento. Nestes casos, são empregadas todas as rotinas do código referentes à simulação de escoamentos, análise dinâmica de estruturas e o esquema de acoplamento fluido-estrutura, incluindo as técnicas de sincronização para subciclos e malhas não conformes. Todos os exemplos apresentados neste capítulo foram analisados usando uma versão escalar do código,

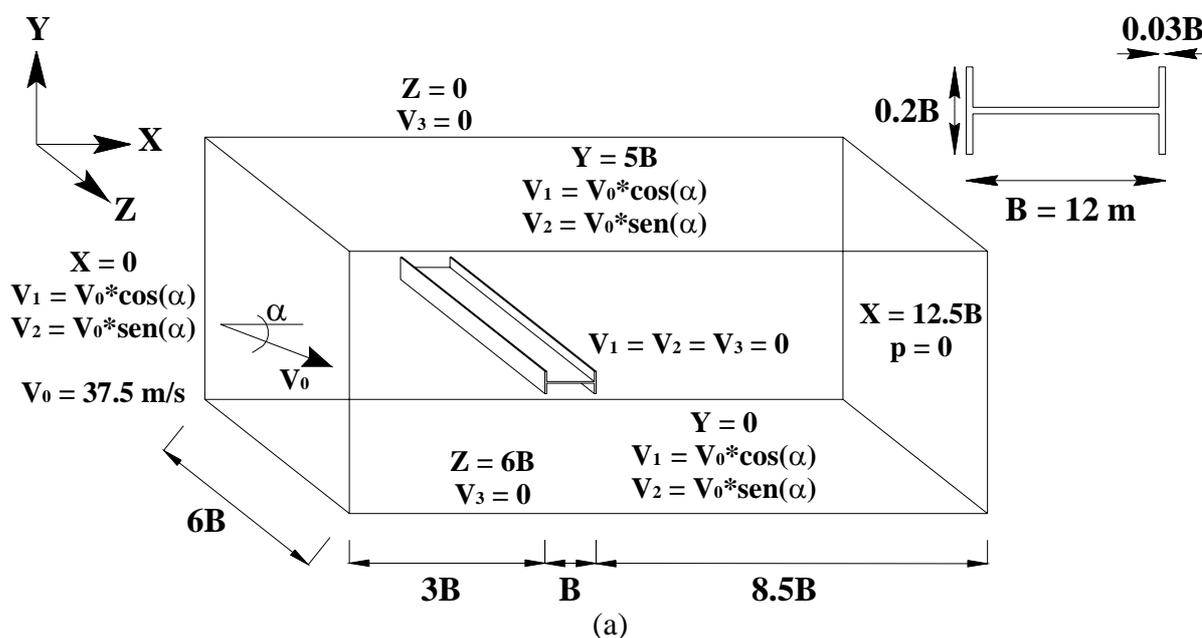
otimizada para a utilização em PC's. Informações sobre capacidade de memória e processamento da máquina utilizada são encontradas no Capítulo 7.

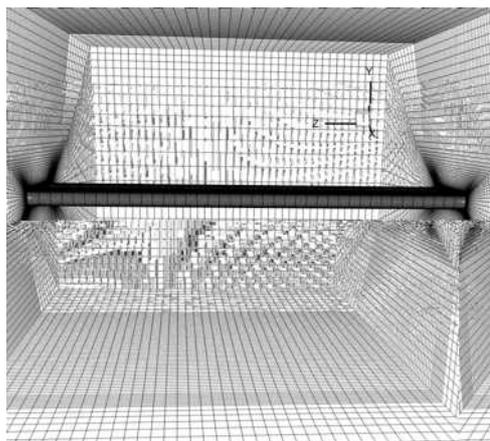
## 9.2 ANÁLISE AERODINÂMICA DE PONTES

### 9.2.1 Ponte de Tacoma

Neste exemplo é realizada a análise numérica do comportamento aerodinâmico de um modelo de ponte com características geométricas similares à ponte de Tacoma Narrows, famosa pelo desastre ocorrido na década de 40 do século passado nos Estados Unidos. No presente trabalho é empregado um protótipo, em escala real, de um modelo reduzido estudado por Limas (2003) no túnel de vento do Laboratório de Aerodinâmica das Construções da UFRGS (LAC/UFRGS). A ponte é submetida a diferentes condições de escoamento para a avaliação dos coeficientes aerodinâmicos e do número de Strouhal, sendo analisados os seguintes ângulos de incidência do vento ( $\alpha$ ):  $-8^\circ$ ,  $-4^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $+4^\circ$  e  $+8^\circ$ , onde os valores positivos são considerados no sentido anti-horário.

As dimensões do domínio computacional utilizado nas simulações, bem como as condições de contorno impostas, são apresentadas na Figura 9.1. Na mesma figura é mostrado ainda um detalhe da malha de elementos finitos na região junto à ponte.





(b)

Figura 9.1: Análise da ação do vento sobre a ponte de Tacoma: (a) características geométricas; (b) condições de contorno e malha de elementos finitos.

Como se pode notar da figura acima, as condições de contorno são fornecidas em função do ângulo de ataque  $\alpha$  a fim de reproduzir as diferentes direções de incidência do vento, com exceção para os contornos da ponte, onde é aplicada a condição de não deslizamento do escoamento. A malha é constituída de 473000 elementos com 495362 nós, sendo que as menores dimensões de elemento, encontradas junto à superfície da ponte, estão na ordem de  $2.1 \times 10^{-2}$  m. Na Tabela 9.1 são apresentadas as constantes físicas e geométricas utilizadas nas análises realizadas, caracterizando para todos os casos estudados um escoamento com um número de Reynolds ( $Re = \rho V_0 D / \mu$ ) de  $9 \times 10^4$ .

Tabela 9.1: Constantes físicas e geométricas utilizadas nas análises da ação do vento sobre a ponte de Tacoma.

Massa específica ( $\rho$ )	1.25 Kg/m <sup>3</sup>
Viscosidade dinâmica ( $\mu$ )	$1.25 \times 10^{-3}$ Ns/m <sup>2</sup>
Viscosidade volumétrica ( $\lambda$ )	0.0 Ns/m <sup>2</sup>
Velocidade do som no fluido ( $c$ )	150.0 m/s
Velocidade característica – $V_0$ (vel. entrada)	37.5 m/s
Dimensão característica – $D$ (= 0.2B)	2.4 m
Incremento de tempo ( $\Delta t$ )	$1 \times 10^{-4}$ s

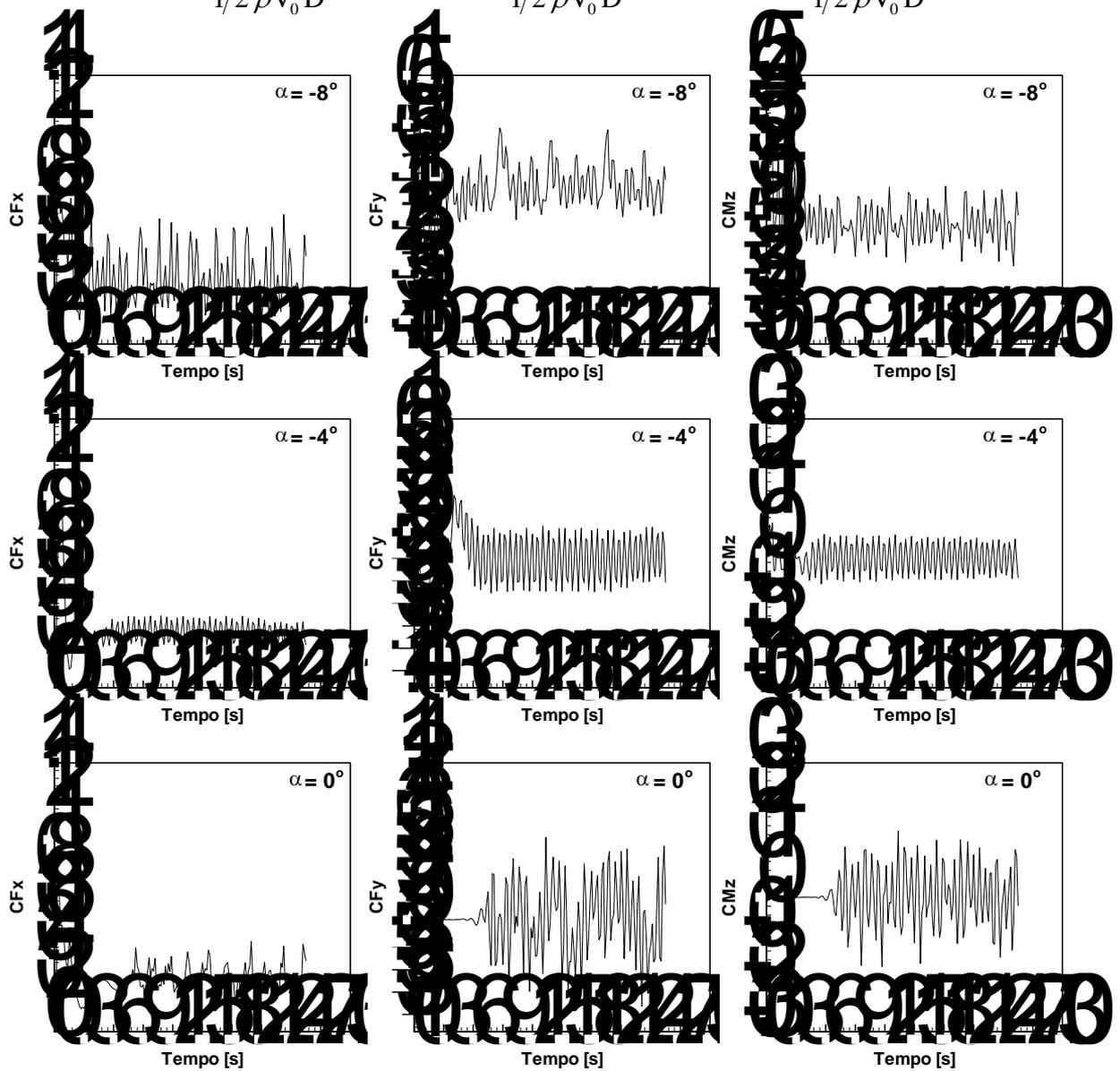
Na Figura 9.2 são mostrados os históricos dos coeficientes de força e momento  $C_{Fx}$ ,  $C_{Fy}$  e  $C_{Mz}$ , obtidos para as cinco condições de escoamento estudadas nesta seção, os quais seguem uma convenção de sinais de acordo com a direção dos eixos globais X, Y e Z do domínio de análise (ver Figura 9.1), sendo que o coeficiente de momento  $C_{Mz}$  é considerado positivo quando age em torno do eixo Z no sentido anti-horário. Para a obtenção dos

coeficientes aerodinâmicos de arrasto  $C_a$  e de sustentação  $C_l$  são usadas aqui as seguintes relações:

$$\begin{aligned} C_a(\alpha) &= C_{F_x}(\alpha) \cos(\alpha) + C_{F_y}(\alpha) \sin(\alpha) \\ C_l(\alpha) &= C_{F_y}(\alpha) \cos(\alpha) - C_{F_x}(\alpha) \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (9.1)$$

considerando-se ainda que:

$$C_{F_x} = \frac{\sum F_x}{1/2 \rho V_0^2 D} \quad ; \quad C_{F_y} = \frac{\sum F_y}{1/2 \rho V_0^2 D} \quad ; \quad C_{M_z} = \frac{\sum M_z}{1/2 \rho V_0^2 D^2} \quad (9.2)$$



(continua na próxima página)

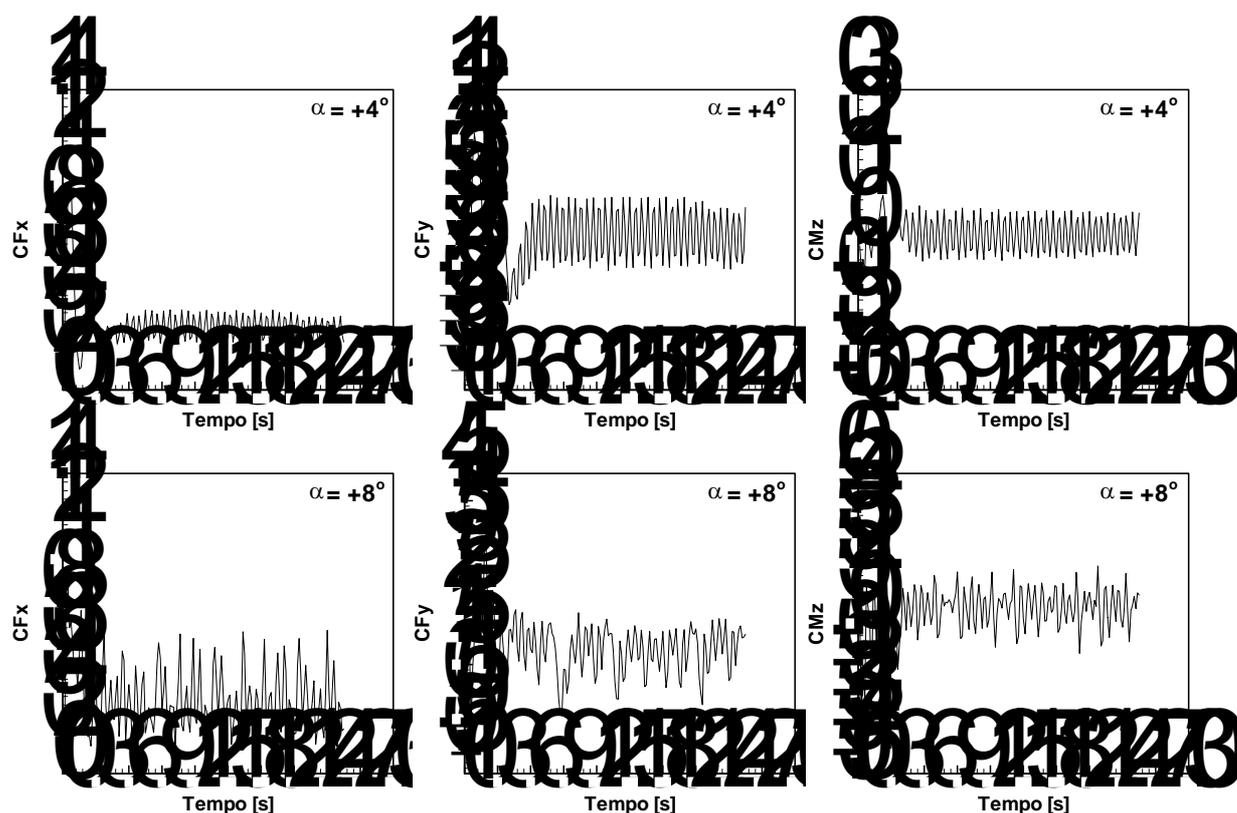
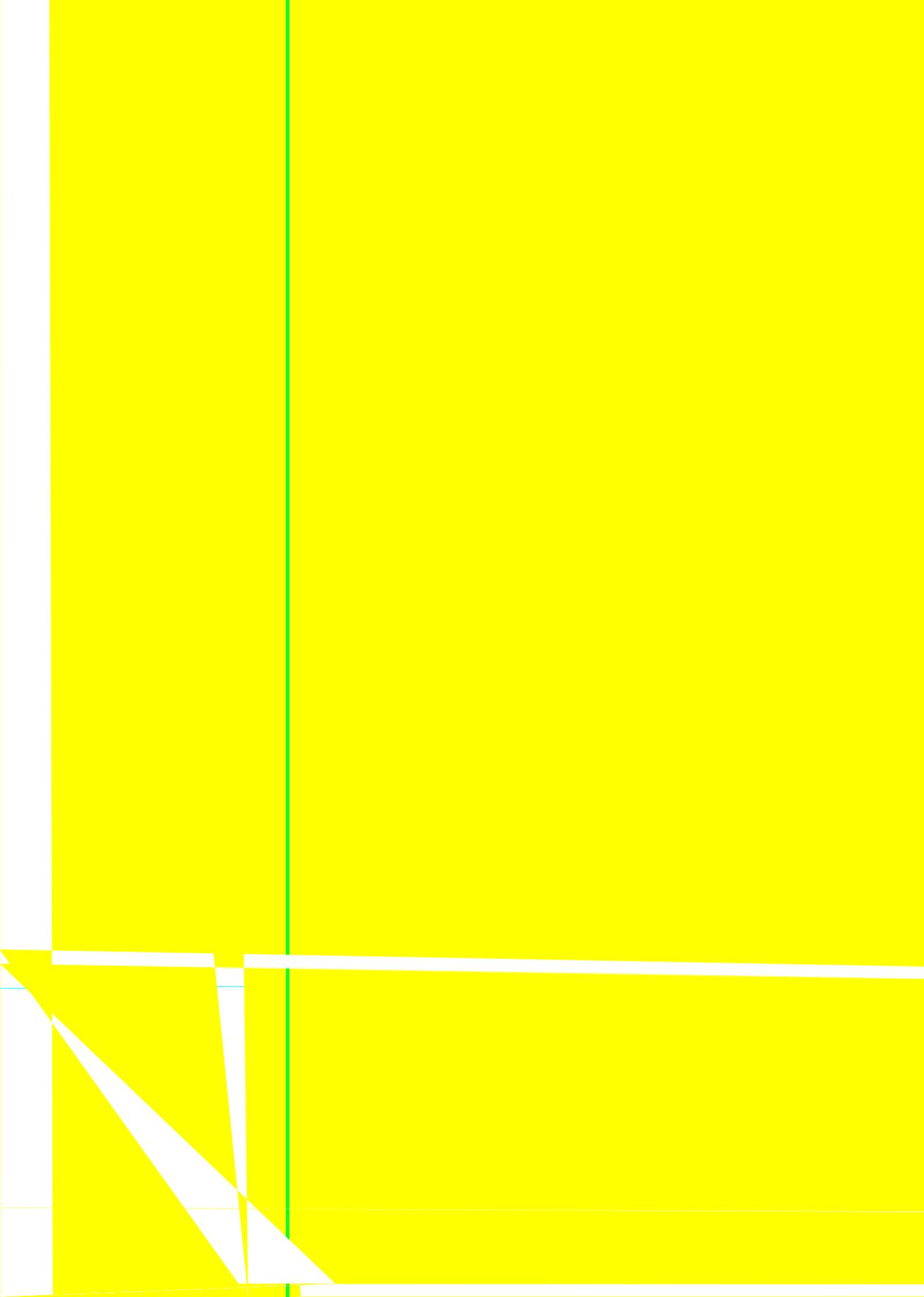


Figura 9.2: Históricos dos coeficientes de força e momento  $C_{Fx}$ ,  $C_{Fy}$  e  $C_{Mz}$  para a ponte de Tacoma.

Dos históricos de  $C_{Fy}$  é possível obter a frequência de desprendimento de vórtices  $f_v$  e, conseqüentemente, o número de Strouhal ( $St = f_v D / V_0$ ). Tomando-se  $D = 2.4$  m,  $V_0 = 37.5$  m/s e sendo  $f_v = 1.758$  Hz, obtém-se para o presente trabalho o valor  $St = 0.113$ , o qual está de acordo com o valor experimental ( $St = 0.115$ ) obtido por Larsen e Walther (1997).

Na Figura 9.3 são apresentados os valores médios de arrasto  $C_a$ , sustentação  $C_l$  e momento  $C_{Mz}$  em função do ângulo de ataque ( $\alpha$ ), calculados a partir dos históricos mostrados na Figura 9.2. Os resultados são comparados com os perfis obtidos experimentalmente por Limas (2003).

Com o objetivo de identificar as características de circulação do escoamento ao redor da ponte, são apresentados na Figura 9.4 os campos de pressão e linhas de corrente instantâneas para cada um dos ângulos de incidência estudados, os quais referem-se à seção intermediária do modelo ( $Z = 36$  m). Mais adiante, na Figura 9.5, são mostradas as diferentes condições de escoamento analisadas em termos de linhas de corrente integradas no espaço. Como se pode observar, vórtices de maior magnitude formam-se e desprendem-se da superfície inferior da ponte para ângulos de incidência negativos, gerando zonas de sucção elevadas nesta região que resultam em valores negativos para o coeficiente de sustentação.



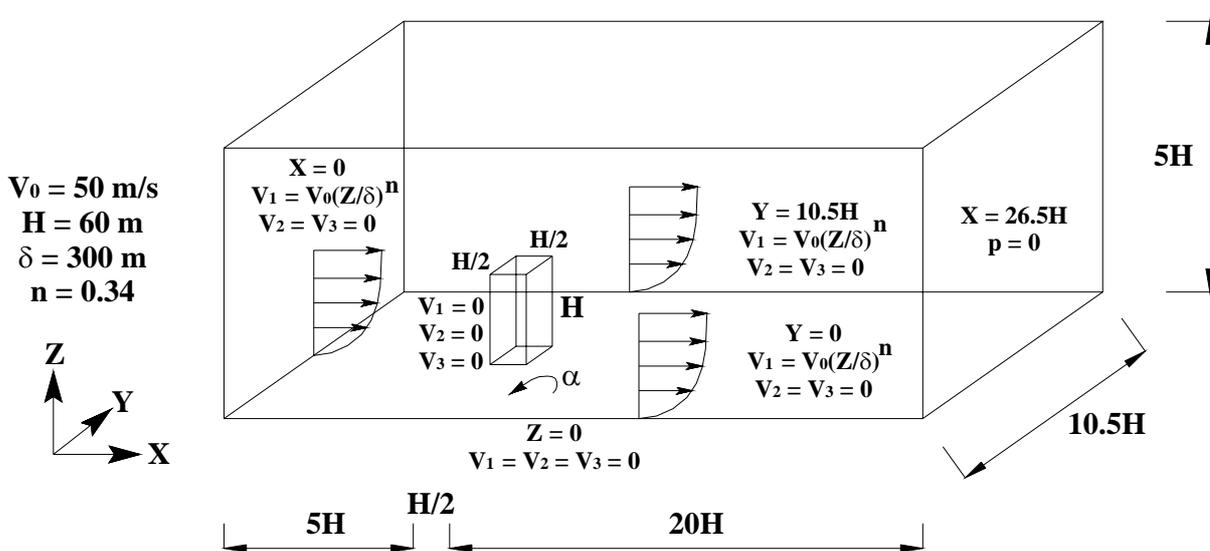


### 9.3 ANÁLISE AERODINÂMICA DE EDIFÍCIOS

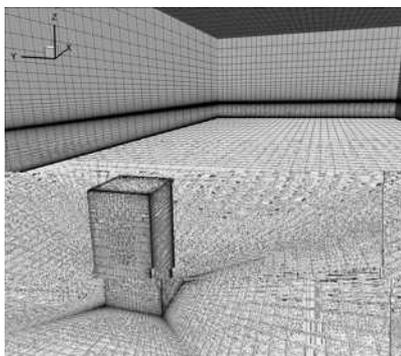
#### 9.3.1 Configuração com um edifício

A análise aerodinâmica de um modelo de edifício é realizada numericamente na presente seção. Um protótipo do modelo reduzido empregado nos estudos experimentais conduzidos por Akins et al. (1977) no túnel de vento do Laboratório de Dinâmica dos Fluidos e Difusão da Universidade do Estado do Colorado (EUA) é utilizado. O modelo é caracterizado por uma seção quadrada com uma razão altura/largura igual a dois, o qual é submetido a um escoamento de camada limite atmosférica com um ângulo de ataque igual a zero grau ( $\alpha = 0^\circ$ ) para a obtenção dos coeficientes aerodinâmicos.

As características geométricas do domínio computacional utilizado nas análises são apresentadas juntamente com as respectivas condições de contorno na Figura 9.6a, onde é possível verificar que a condição de não deslizamento é imposta sobre toda a superfície do prédio. Na Figura 9.6b é mostrada em detalhe as condições da malha utilizada neste estudo na região em torno da edificação. A malha apresenta um número de elementos igual a 467840 e de nós igual a 483879, estando as menores dimensões localizadas junto às arestas do prédio, valendo na ordem de 0.2 m. Na Tabela 9.2 são apresentadas as constantes físicas e geométricas utilizadas pelo código numérico, caracterizando um escoamento com um número de Reynolds ( $Re = \rho V_0 D / \mu$ ) de  $9.5 \times 10^4$ .



(a)



(b)

Figura 9.6: Análise da ação do vento sobre um edifício: (a) características geométricas e condições de contorno; (b) detalhe da malha de elementos finitos.

Tabela 9.2: Constantes físicas e geométricas utilizadas na análise da ação do vento sobre um edifício.

Massa específica ( $\rho$ )	1.25 Kg/m <sup>3</sup>
Viscosidade dinâmica ( $\mu$ )	6.96x10 <sup>-3</sup> Ns/m <sup>2</sup>
Viscosidade volumétrica ( $\lambda$ )	0.0 Ns/m <sup>2</sup>
Velocidade do som no fluido ( $c$ )	330.0 m/s
Velocidade característica – $V_0$ (entrada em $Z = 60$ m)	27.56 m/s
Dimensão característica – $D$ (lado do prédio)	30.0 m
Incremento de tempo ( $\Delta t$ )	6.5x10 <sup>-4</sup> s

Na Figura 9.7 são mostrados os históricos dos coeficientes de força e momento  $C_{Fx}$ ,  $C_{Fy}$ ,  $C_{Fz}$ ,  $C_{Mx}$ ,  $C_{My}$  e  $C_{Mz}$ , obtidos para a condição de escoamento estudada neste exemplo, os quais seguem uma convenção de sinais de acordo com a direção dos eixos globais X, Y e Z do domínio de análise (ver Figura 9.6), sendo que os coeficientes de momento são considerados positivos quando agem em torno do respectivo eixo no sentido anti-horário, sendo calculados em relação à base do edifício. Os coeficientes são obtidos empregando a formulação apresentada no Capítulo 7, sendo considerado neste exemplo uma velocidade de referência ( $V_\infty$ ) para o cálculo da pressão dinâmica a partir da seguinte expressão (ver Figura 9.6):

$$V_\infty = \frac{1}{H} \int_0^H V_0 \left( \frac{Z}{\delta} \right)^n dZ \quad (9.3)$$

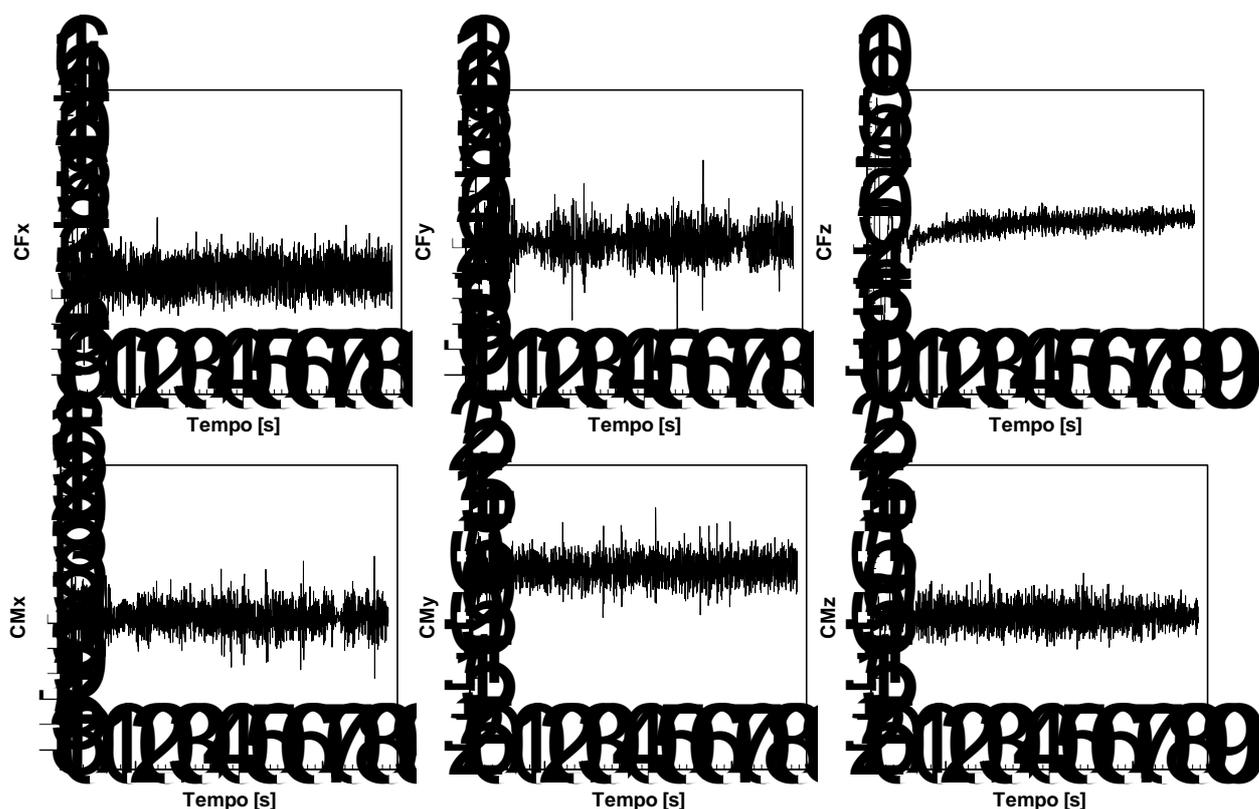


Figura 9.7: Históricos dos coeficientes de força e momento  $C_{Fx}$ ,  $C_{Fy}$ ,  $C_{Fz}$ ,  $C_{Mx}$ ,  $C_{My}$  e  $C_{Mz}$  para um edifício.

Na Tabela 9.3 são relacionados os valores médios dos coeficientes de força e momento em função do ângulo de ataque ( $\alpha$ ), calculados a partir dos históricos mostrados na Figura 9.7. Os dados apresentados são comparados com os resultados obtidos experimentalmente por Akins et al. (1977).

Tabela 9.3: Valores médios dos coeficientes de força e momento para um edifício.

Referências	Coeficientes					
	$C_{Fx}$	$C_{Fy}$	$C_{Fz}$	$C_{Mx}$	$C_{My}$	$C_{Mz}$
Presente trabalho	1.407	0.012	1.340	0.000	0.874	0.024
Akins et al. (1977)	1.457	0.009	1.266	0.000	0.829	0.000

As condições de circulação do vento ao redor do edifício podem ser avaliadas através da Figura 9.8, onde são apresentadas as linhas de corrente instantâneas integradas no espaço para vários níveis de altura. Assim como é verificado experimentalmente, observa-se a formação de uma zona de recirculação na região frontal do prédio, fazendo com que haja um escoamento descendente para as massas de ar que adentram esta região. O escoamento descendente segue até o piso, onde acaba redirecionado no sentido contrário ao escoamento

principal, até serem desenvolvidos os chamados vórtices de base. Este fenômeno pode ser visto no intervalo  $[0, 2/3H]$ , aproximadamente, sendo  $H$  a altura da edificação. Os vórtices de base apresentam-se de forma helicoidal, abrangendo toda a região frontal da edificação e agindo do centro para as laterais do prédio, onde acabam escapando por convecção em direção à esteira. Por outro lado, as partículas de ar que se aproximam do prédio em alturas mais elevadas têm a tendência de ascenderem em direção ao topo da edificação, sendo conduzidas novamente em direção ao piso na zona de esteira. Na zona de esteira, as partículas que são carregadas pelos vórtices de base acabam sendo elevadas junto às laterais da edificação, enquanto que as partículas provenientes de alturas intermediárias produzem uma zona de grande recirculação, logo à jusante. As partículas oriundas do topo são projetadas para uma zona posterior à zona de recirculação, onde são atraídas em direção ao piso.

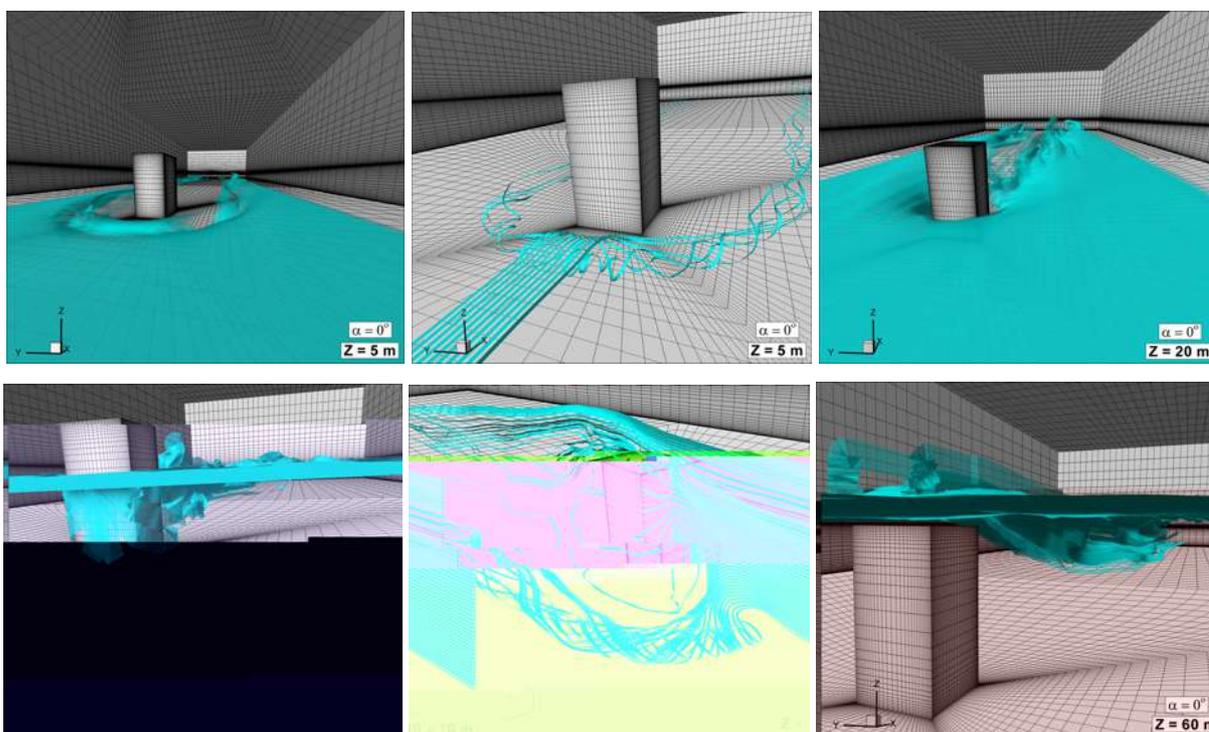


Figura 9.8: Linhas de corrente instantâneas integradas no espaço para um edifício.

Na Figura 9.9 são mostrados os campos de pressão instantâneos obtidos nas imediações do edifício em planos correspondentes aos quatro níveis de altura apresentados na figura anterior. Observa-se que a formação dos vórtices de base na região frontal ao edifício gera uma zona de sucção junto ao solo, fazendo com que o escoamento seja rebatido para as laterais do prédio. Para as alturas intermediárias, nota-se uma grande perturbação no campo de pressões à jusante da edificação devido à formação da zona de recirculação nesta região.

No topo do edifício, o campo de pressões é caracterizado pelo surgimento de zonas de sucção que envolvem o prédio em razão da separação do escoamento.

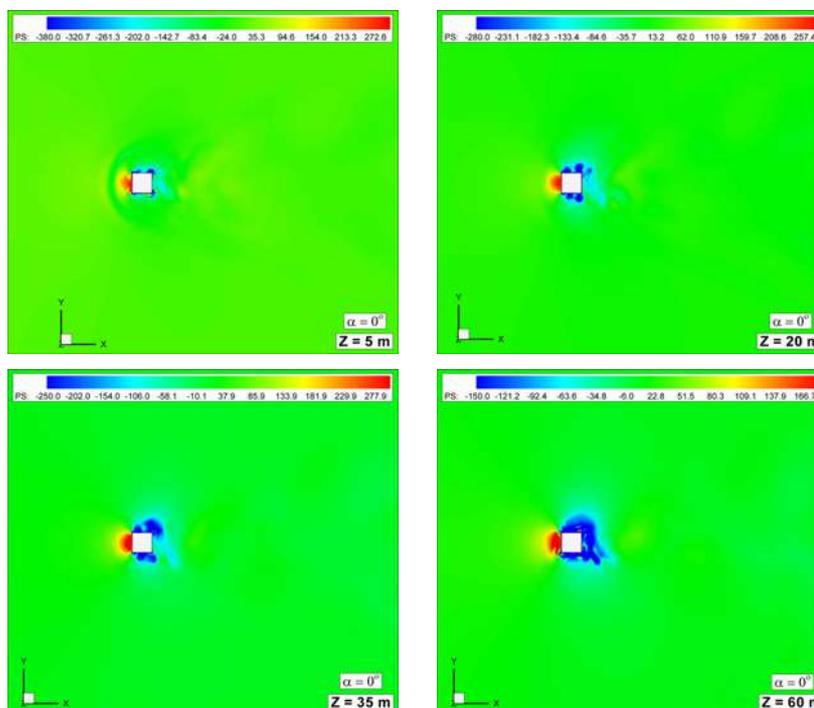
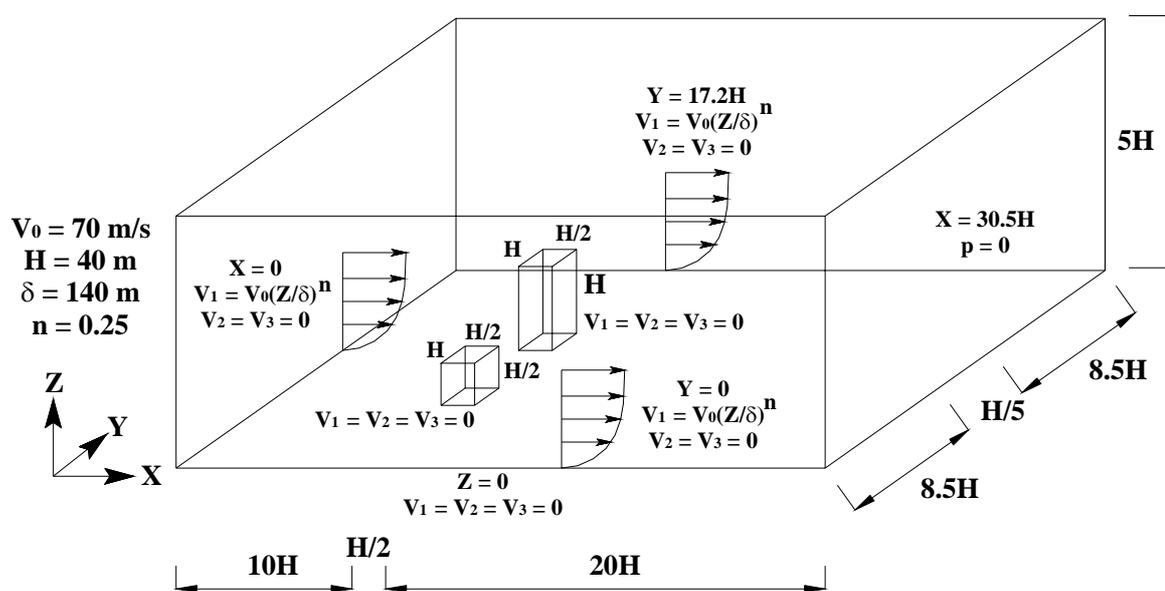


Figura 9.9: Campos de pressão instantâneos nas imediações de um edifício.

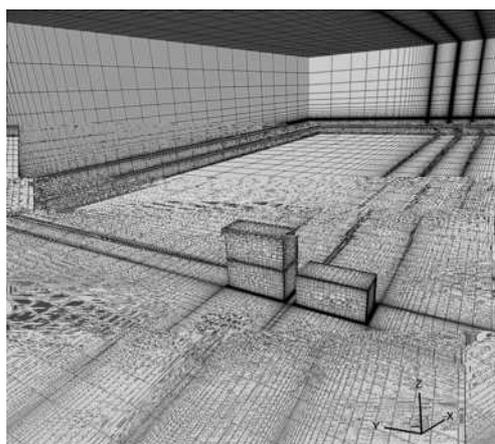
### 9.3.2 Configuração com dois edifícios em paralelo

Neste exemplo é realizada a análise numérica da ação do vento sobre dois prédios paralelos com diferentes alturas, onde o principal objetivo é a determinação das condições de circulação do escoamento nas imediações das edificações sob efeitos de proximidade, obtendo também o comportamento aerodinâmico de cada prédio nestas condições. A simulação é realizada empregando modelos de prédios com características geométricas similares a um dos casos estudados numericamente por Tutar e Oguz (2002), os quais estão em conformidade com as análises experimentais em túnel de vento conduzidas por Wiren (1975). Ambos os modelos possuem uma seção retangular de 20x40 m, sendo o menor deles com uma altura de 20 m e o maior com uma altura de 40 m, considerando-se a menor dimensão da seção alinhada com o eixo X do domínio de análise (ver Figura 9.10), onde um escoamento de camada limite atmosférica com um ângulo de incidência nulo é estabelecido, o qual é caracterizado por um número de Reynolds de  $7.9 \times 10^5$ , calculado com base na velocidade de entrada a 20 m de altura.

O domínio geométrico empregado na análise realizada nesta seção pode ser visualizado na Figura 9.10, onde são fornecidas também as condições de contorno usadas na simulação do escoamento. Logo após, na mesma figura, é mostrado um detalhe da malha de elementos finitos utilizada na discretização espacial do domínio de estudo em uma região próxima aos edifícios, a qual possui em sua totalidade 752640 elementos e 781519 nós, com uma dimensão mínima na ordem de 0.18 m. As constantes físicas e geométricas empregadas pelo código numérico são apresentadas na Tabela 9.4.



(a)



(b)

Figura 9.10: Análise da ação do vento sobre dois edifícios em paralelo: (a) características geométricas e condições de contorno; (b) detalhe da malha de elementos finitos.

9.4: Constantes físicas e geométricas utilizadas nas análises da ação do vento sobre dois edifícios em paralelo.

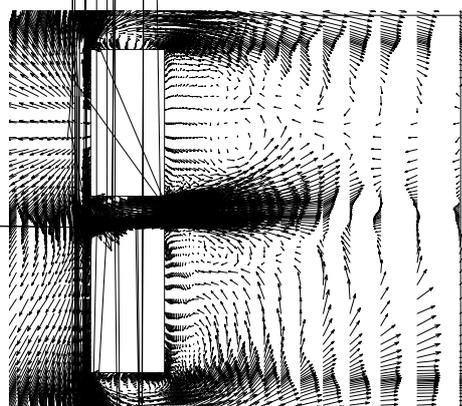
Massa específica ( $\rho$ )	1.25 Kg/m <sup>3</sup>
Viscosidade dinâmica ( $\mu$ )	1.09x10 <sup>-3</sup> Ns/m <sup>2</sup>
Viscosidade volumétrica ( $\lambda$ )	0.0 Ns/m <sup>2</sup>
Velocidade do som no fluido ( $c$ )	280.0 m/s
Velocidade característica (entrada em Z = 20 m)	43.0 m/s
Dimensão característica (lado menor do prédio)	20.0 m
Incremento de tempo ( $\Delta t$ )	5x10 <sup>-4</sup> s

9.11 são mostrados os históricos dos coeficientes de força ( $C_{Fx}$ ,  $C_{Fy}$  e  $C_{Fz}$ ) e momentos ( $C_{My}$  e  $C_{Mz}$ ), avaliados ao longo do tempo de simulação usado na presente análise. Os dados são dados de acordo com a direção dos eixos globais X, Y e Z do domínio de simulação (Figura 9.10), sendo o coeficiente de momento considerado positivo quando age no sentido horário. Os valores de  $C_{Fx}$ ,  $C_{Fy}$ ,  $C_{Fz}$ ,  $C_{My}$  e  $C_{Mz}$  são relacionados os valores médios

Tabela 9.5: Resultados médios de coeficientes aerodinâmicos para cada um dos prédios em paralelo analisados.

Prédios	Coeficientes					
	CF <sub>x</sub>	CF <sub>y</sub>	CF <sub>z</sub>	CM <sub>x</sub>	CM <sub>y</sub>	CM <sub>z</sub>
Prédio 1 (H = 40 m)	1.050	-0.045	0.380	0.006	0.055	0.024
Prédio 2 (H = 20 m)	0.800	-0.400	0.450	-0.019	0.062	-0.048

Na Figura 9.12 é apresentado o campo médio de vetores de velocidade obtido neste trabalho para a região em torno dos prédios, tomado no plano  $Z = 2$  m. Na mesma figura é apresentado o resultado obtido por Tutar e Oguz (2002) como referência de comparação, os quais empregam uma malha com 77440 nós e um modelo numérico baseado no MVF e LES. Embora apresente diferenças visíveis na localização dos vórtices formados no entorno dos prédios, algumas características principais do escoamento puderam ser reproduzidas, como a reversão do escoamento na região frontal do prédio mais alto, a formação de um escoamento paralelo à face frontal do edifício de menor estatura e a aceleração do escoamento na zona de passagem entre os prédios. As maiores diferenças entre os resultados encontram-se na região frontal das edificações, onde observa-se que a região de reversão do escoamento obtida no presente trabalho mostra-se mais abrangente em relação ao trabalho de referência. Também na esteira, junto à passagem entre os prédios, verifica-se uma maior dispersão dos vetores de velocidade aqui obtidos. Uma possível causa para estas diferenças pode ser a necessidade de uma melhor representação no presente trabalho da região em torno dos prédios e da camada limite atmosférica, a qual pode ser feita através da introdução de turbulência na corrente incidente.



Na Figura 9.13 são apresentados os campos médios de pressão tomados na região dos prédios e em quatro planos correspondendo a quatro níveis de altura distintos. Verifica-se claramente uma maior sobrepressão sobre o Prédio 1 (de maior altura), justificando o valor mais alto obtido para o coeficiente  $C_{Fx}$  (ver Tabela 9.5). Mais uma vez é possível constatar a ação dos vórtices de base nas imediações dos prédios, produzindo zonas de sucção que fazem com que o escoamento seja rebatido na região frontal e levado em direção às laterais das edificações. Para alturas médias, observa-se também a formação de uma zona de grande recirculação, logo à jusante, como já era esperado. Devido à ação dos vórtices desprendidos pelo Prédio 1, a região acima do Prédio 2 fica sujeita a uma maior sucção, tendo como resultado um valor maior para o coeficiente  $C_{Fz}$ .

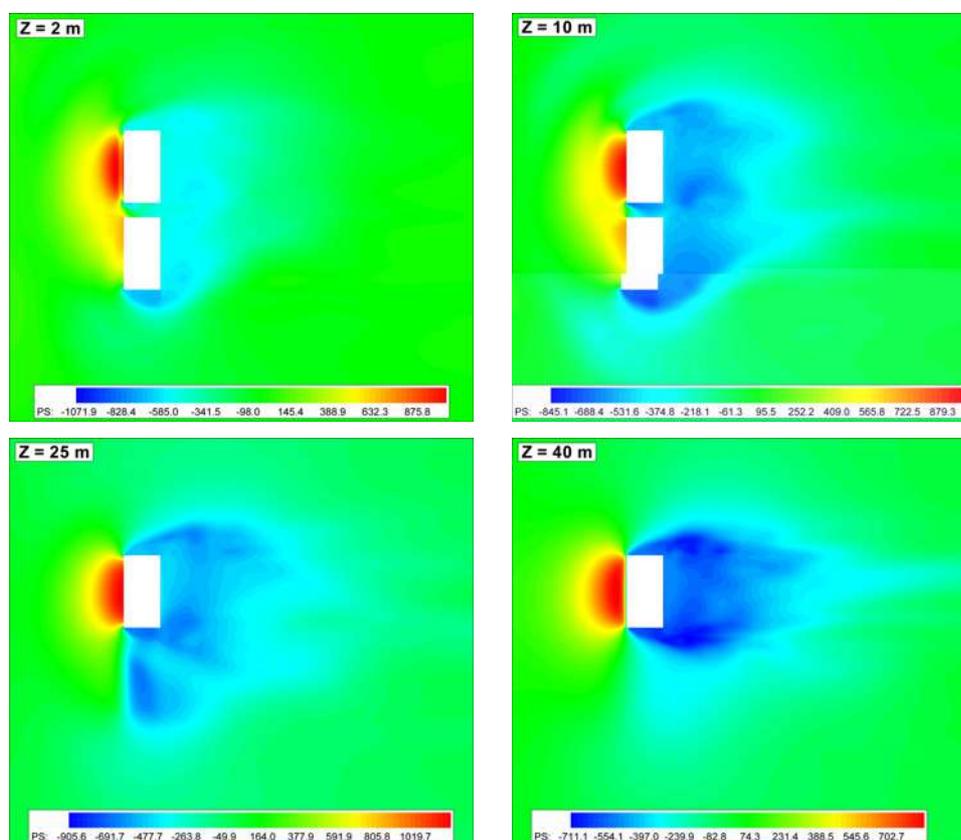


Figura 9.13: Campos médios de pressão nas imediações de dois edifícios em paralelo.

Na Figura 9.14 são apresentadas as linhas de corrente instantâneas integradas no espaço para os níveis de altura avaliados na figura anterior. Novamente, os principais fenômenos encontrados neste tipo de problema podem ser visualizados, como a formação dos vórtices de base para cotas mais baixas e a projeção das massas de ar fluindo em alturas próximas do topo do prédio para uma zona mais adiante da esteira, onde adquirem uma

tendência descendente. No entanto, verifica-se neste caso que a zona de recirculação na região posterior ao Prédio 1 é menor em relação a um prédio similar na condição isolada, sendo esta redução causada pela interferência produzida pela esteira gerada pelo Prédio 2.

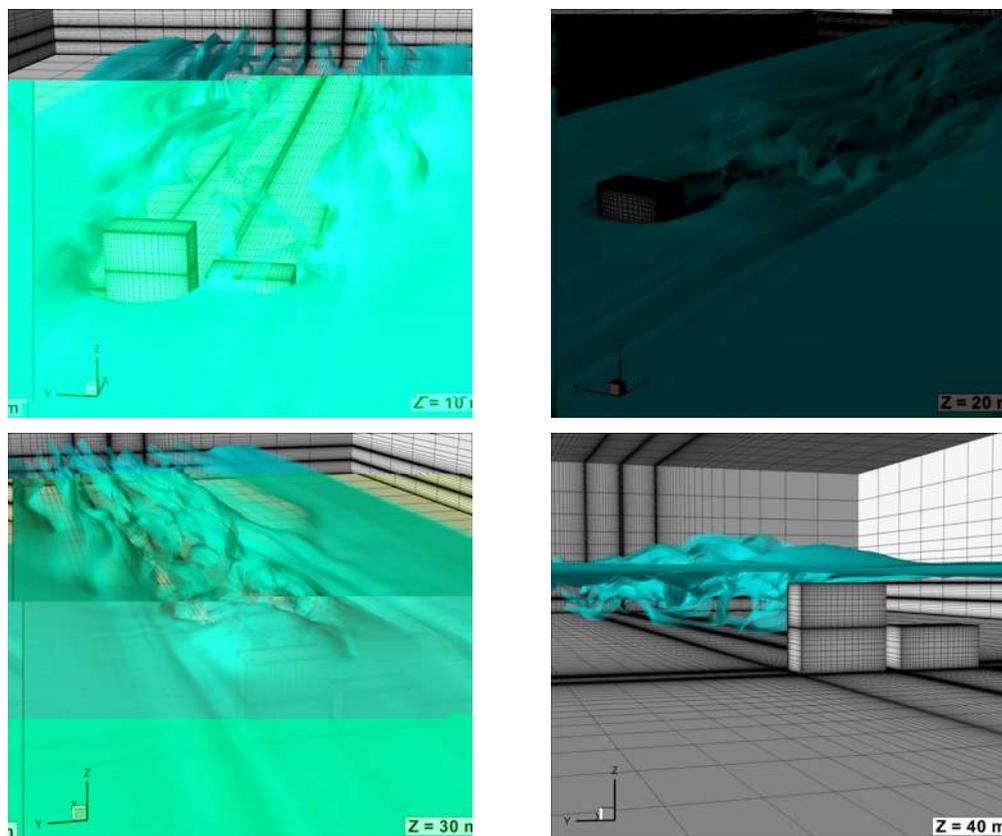


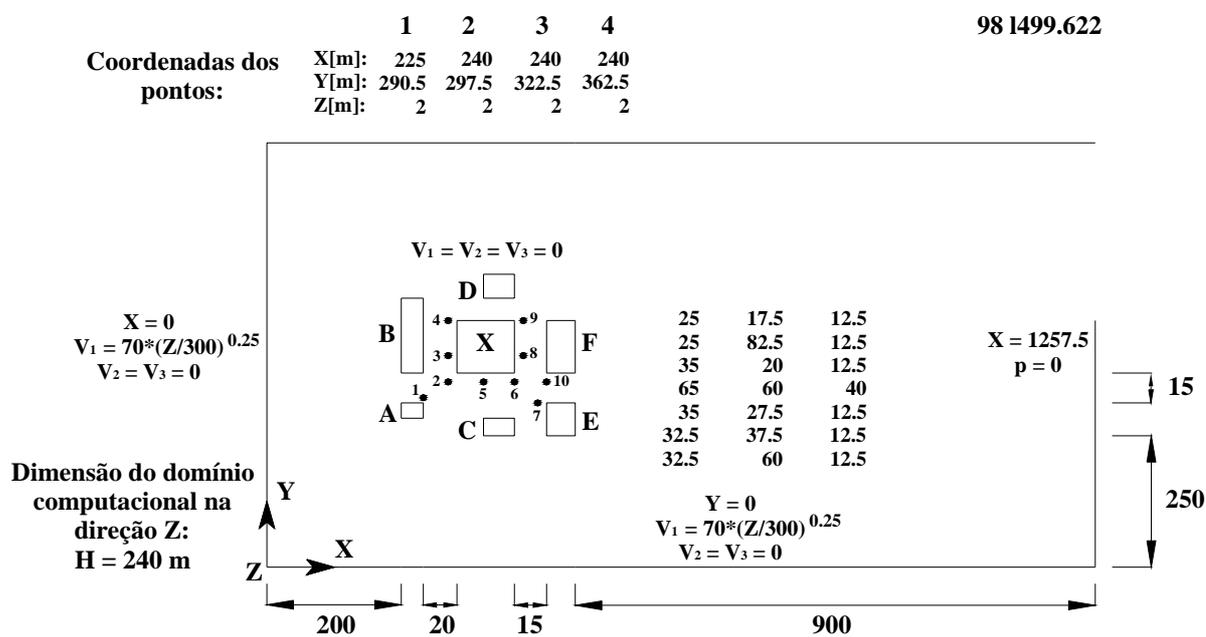
Figura 9.14: Linhas de corrente instantâneas integradas no espaço para dois edifícios em paralelo.

## 9.4 ANÁLISE DA AÇÃO DO VENTO SOBRE ZONAS URBANAS

### 9.4.1 Ação do vento sobre um bloco de prédios na região central de Montreal, Canadá

Nesta seção são determinadas numericamente as condições de circulação de vento bem como as forças aerodinâmicas geradas sobre um conjunto de prédios representando um quarteirão da região central da cidade de Montreal (CAN). Os modelos empregados na representação geométrica dos prédios e a sua distribuição sobre a região de análise seguem as configurações utilizadas por Stathopoulos e Baskaran (1996), os quais realizaram medições tanto numéricas como também experimentais sobre este mesmo problema, sendo o estudo

experimental realizado no túnel de vento do Centro para Estudos de Edificações na Universidade Concordia (CAN).

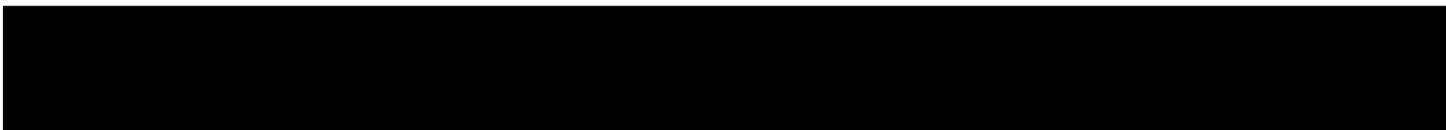
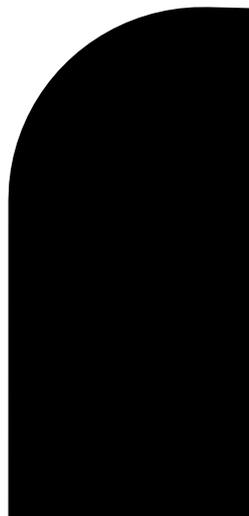
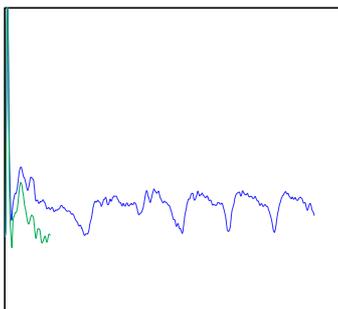


menores dimensões estando localizadas junto às par  
 m. Na Tabela 9.6 encontram-se relacionadas as cons  
 análises, caracterizando um escoamento de camada  
 Reynolds ( $Re = \rho VD/\mu$ ) de  $1.0 \times 10^5$ .

Tabela 9.6: Constantes físicas e geométr  
 ação do vento sobre um bl

Massa específica ( $\rho$ )
Viscosidade dinâmica ( $\mu$ )
Viscosidade volumétrica ( $\lambda$ )
Velocidade do som no fluido ( $c$ )
Velocidade característica – V (entrada en
Dimensão característica – D (lado do m
Incremento de tempo ( $\Delta t$ )

Os históricos obtidos para os coeficientes de  
 e  $C_{Mz}$  relativos a cada um dos prédios analisados po  
 quais empregam a mesma convenção de sinais adota  
 expressão (9.3) para o cálculo da velocidade de r  
 médios dos coeficientes aerodinâmicos são comparac



Na Figura 9.17 é mostrado o campo médio de vetores de velocidade avaliado no plano  $Z = 2$  m. Convém destacar que o campo vetorial apresentado refere-se apenas às componentes  $v_1$  e  $v_2$  dos vetores de velocidades tomados no plano correspondente à altura indicada. Como pode ser visto, o campo vetorial obtido pelo presente trabalho consegue reproduzir as características gerais de circulação do escoamento, inclusive os fenômenos de separação e recolamento junto aos prédios, os quais não são observados no trabalho de referência em razão do nível de discretização inferior empregado (267648 nós usando o MVF) em relação ao nível utilizado nesta tese.

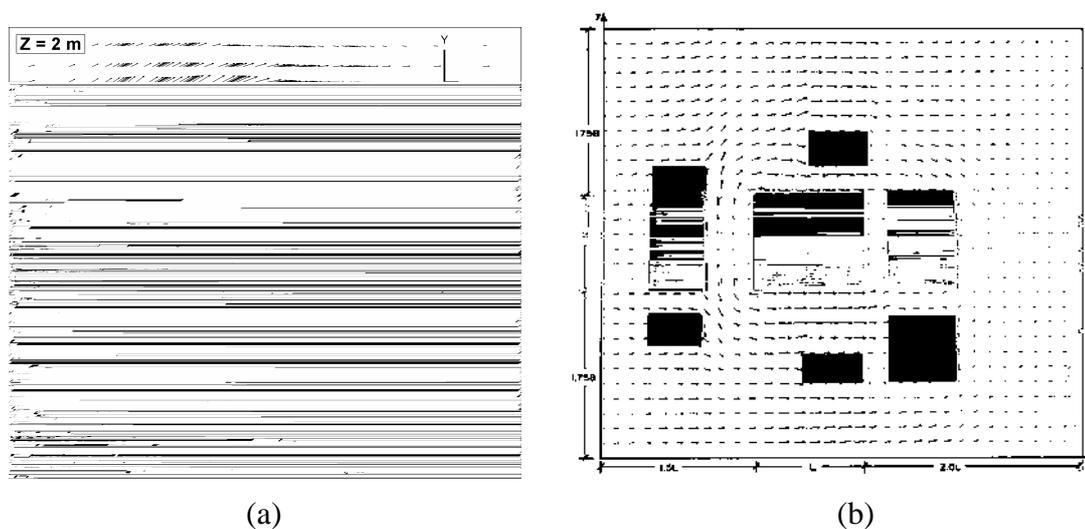


Figura 9.17: Campo vetorial médio  $\mathbf{v}$  ( $v_1, v_2$ ) no plano  $Z = 2$  m para a região do quarteirão de prédios: (a) presente trabalho; (b) Stathopoulos e Baskaran (1996).

Tabela 9.7: Resultados médios de coeficientes aerodinâmicos para cada um dos prédios em bloco analisados.

Prédios	Coeficientes					
	CF <sub>x</sub>	CF <sub>y</sub>	CF <sub>z</sub>	CM <sub>x</sub>	CM <sub>y</sub>	CM <sub>z</sub>
Prédio A	0.882	-0.624	-0.424	0.304	0.268	-1.250
Prédio B	0.165	0.525	-0.236	0.103	0.041	-0.291
Prédio C	1.053	0.016	0.442	0.013	1.153	0.090
Prédio X	1.103	0.083	0.478	0.003	0.137	0.015
Prédio D	0.746	-0.064	0.541	-0.014	0.765	-0.024
Prédio E	0.158	0.313	-0.073	0.075	0.130	0.008
Prédio F	-0.254	-0.105	0.023	-0.0005	0.150	-0.001

Na Figura 9.18 são apresentados os campos médios de pressão avaliados em quatro planos correspondentes a quatro níveis diferentes de altura na região em torno do bloco de prédios. Observa-se que para a cota  $Z = 5$  m são criadas zonas de alta sobrepressão nas

regiões frontais à maioria dos prédios, sendo mais acentuada entre os prédios B e X devido à formação de uma zona de circulação que incide sobre estes edifícios, onde são produzidas zonas de sucção próximas aos cantos à jusante do Prédio B, por onde as massas de ar são expulsas desta região. Junto aos cantos frontais do Prédio X formam-se zonas de sucção geradas pela separação e o posterior recolamento do escoamento. Em  $Z = 10$  m, as condições de pressão praticamente se mantêm, observando-se uma maior acentuação das zonas de sucção na região intermediária entre os prédios B e X e nos pontos de separação junto aos cantos frontais do Prédio X. Os valores de sobrepressão nas zonas frontais dos prédios A, B e C também encontram-se maiores devido à incidência direta do escoamento nesta altura, onde não há mais a influência da região frontal de recirculação. Para as cotas  $Z = 25$  m e  $Z = 40$  m, praticamente não é mais notada a interferência entre os prédios sobre o campo de pressões, o qual caracteriza-se por uma maior região de separação do escoamento nas paredes laterais do edifício X. A quantificação das observações feitas acima pode ser verificada nos valores obtidos para os coeficientes aerodinâmicos (ver Tabela 9.7).

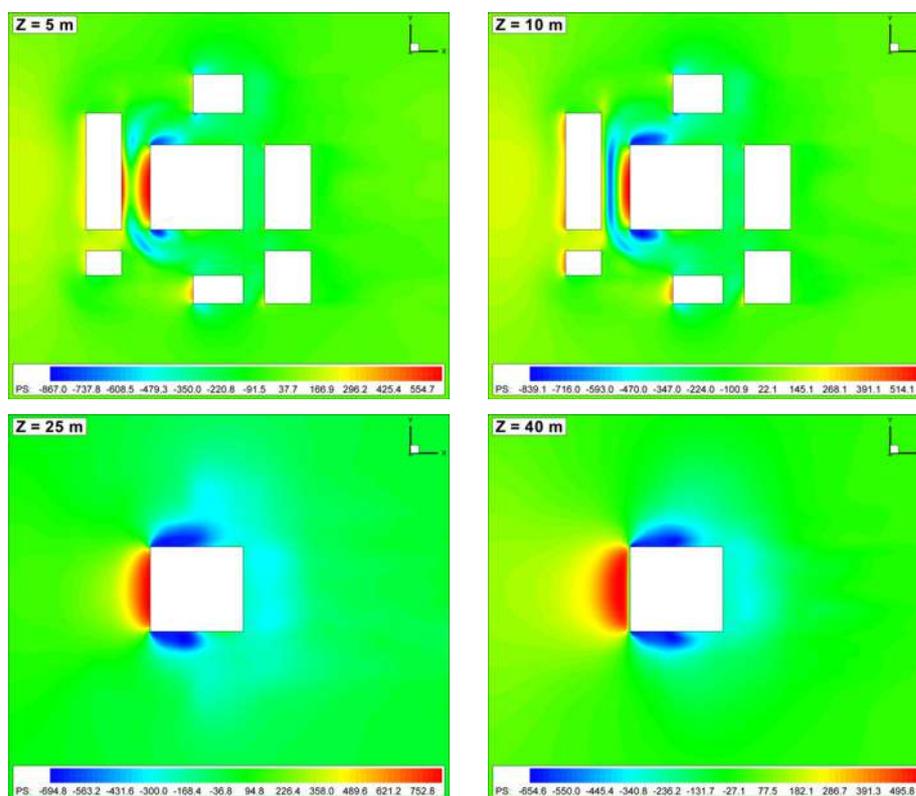


Figura 9.18: Campos de pressão médios nas imediações do bloco de edifícios.

Na Figura 9.19 são apresentadas as linhas de corrente instantâneas integradas no espaço para os níveis de altura usados na figura anterior. Em  $Z = 5$  m observa-se a ação dos

vórtices de base, criando as protuberâncias visíveis na superfície de linhas de corrente, envolvendo externamente a região do bloco de edifícios. Uma zona de grande circulação é verificada à esquerda da figura devido à passagem existente entre os prédios A e B. Para  $Z = 10$  m, o escoamento é elevado ao encontrar-se com os prédios A e B, sendo puxado em direção ao solo, logo após, em razão da ocorrência de uma zona de sucção entre os prédios B e X, a qual forma-se em virtude da grande recirculação presente nesta área. Os prédios C e E também são fortemente influenciados por estarem situados justamente na região de esteira do prédio A e da passagem existente entre os edifícios A e B. Para  $Z = 25$  m e  $Z = 40$  m, o escoamento incidente é elevado ao deparar-se com o edifício X, tomando uma tendência descendente na região de esteira, após a zona de recirculação à jusante do bloco de edifícios.

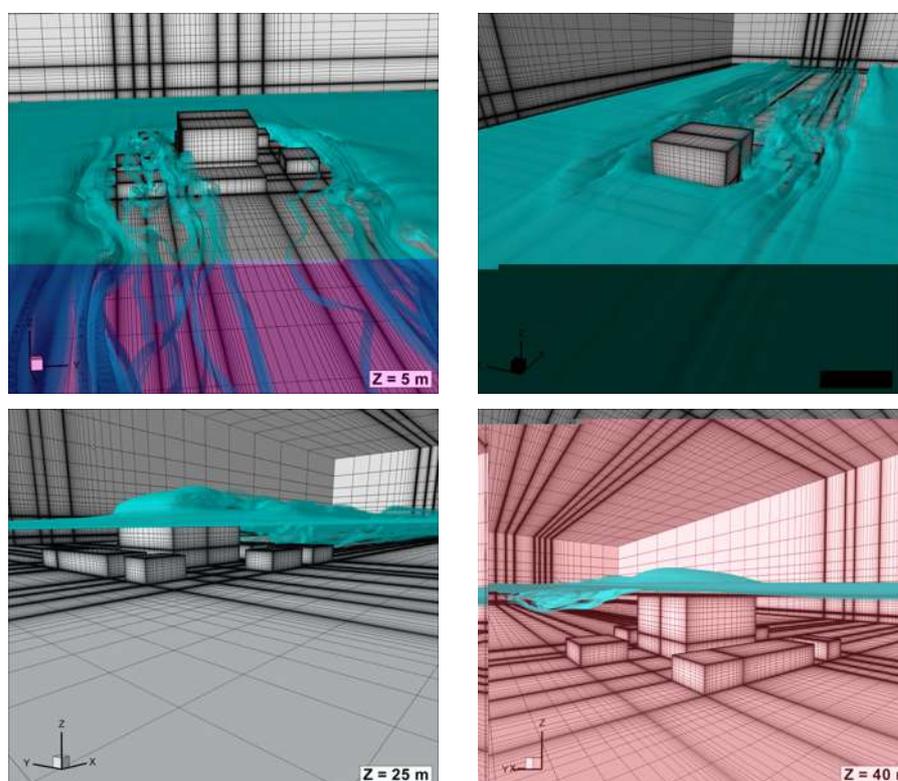


Figura 9.19: Linhas de corrente instantâneas integradas no espaço sobre o bloco de edifícios.

Na Tabela 9.8 é feita uma comparação entre as medições realizadas nesta tese e no trabalho de Stathopoulos e Baskaran (1996) referentes a valores médios de  $V_1/V_0$  ( $V_1 = [v_1^2 + v_2^2]^{1/2}$ ;  $V_0$  – velocidade de entrada a 2 m) obtidos em locais determinados através da Figura 9.15 e avaliados no plano  $Z = 2$  m. Verifica-se uma concordância razoável entre as medições realizadas neste trabalho e os resultados experimentais, estando as maiores discrepâncias

situadas nos pontos 3, 6 e 8, os quais localizam-se em pontos de difícil determinação, inclusive experimentalmente.

Tabela 9.8: Resultados médios de  $V_1/V_0$  para diferentes locais na região do bloco de prédios.

Ponto de medição	Valor medido ( $V_1/V_0$ )		
	Presente trabalho	Stathopoulos e Baskaran (1996)	
		Numérico	Experimental
1	0.80	0.73	0.98
2	1.49	0.98	1.32
3	0.34	0.57	0.23
4	1.43	1.08	1.28
5	1.26	0.89	1.02
6	1.14	0.81	0.67
7	0.60	0.96	0.76
8	0.27	0.26	0.05
9	0.61	0.58	0.44
10	0.83	0.84	0.64

## 9.5 ANÁLISE DA CIRCULAÇÃO DO VENTO EM EDIFICAÇÕES

### 9.5.1 Ventilação interna e externa em um modelo de edificação

Neste exemplo é realizada a simulação numérica dos estudos de avaliação das condições de ventilação natural para um modelo simples de edificação, o qual reproduz uma das configurações estudadas por Jiang et al. (2003). Neste artigo são realizadas análises numéricas (usando o MVF e LES; 520000 elementos) e experimentais para determinação das condições de circulação de vento tanto no ambiente interno como no exterior da edificação, considerando diferentes configurações de abertura. Os resultados experimentais foram obtidos no túnel de vento da Universidade de Cardiff, no Reino Unido. No presente trabalho, considera-se um escoamento de vento de camada limite atmosférica incidindo sobre o modelo de edificação, o qual é caracterizado por uma casca cúbica com uma única abertura na parede de barlavento, reproduzindo as dimensões de uma porta.

As características geométricas do domínio de análise utilizado na presente simulação são apresentadas na Figura 9.20 juntamente com as condições de contorno impostas ao escoamento. Nesta figura são apontadas também algumas posições onde serão avaliados

alguns dos resultados. As características de discretização da malha de elementos finitos na região de localização do modelo de edificação são apresentadas na mesma figura. A malha é formada de 1037660 elementos com 1073919 nós, sendo as menores dimensões na ordem de 0.015 m, as quais situam-se junto às paredes da edificação. As constantes físicas e geométricas empregadas pelo modelo numérico na presente simulação são dadas através da Tabela 9.9. O escoamento é caracterizado por um número de Reynolds igual a  $1.4 \times 10^5$ , calculado com base na dimensão característica da edificação e na velocidade de entrada tomada em  $Z = 2.5m$ .

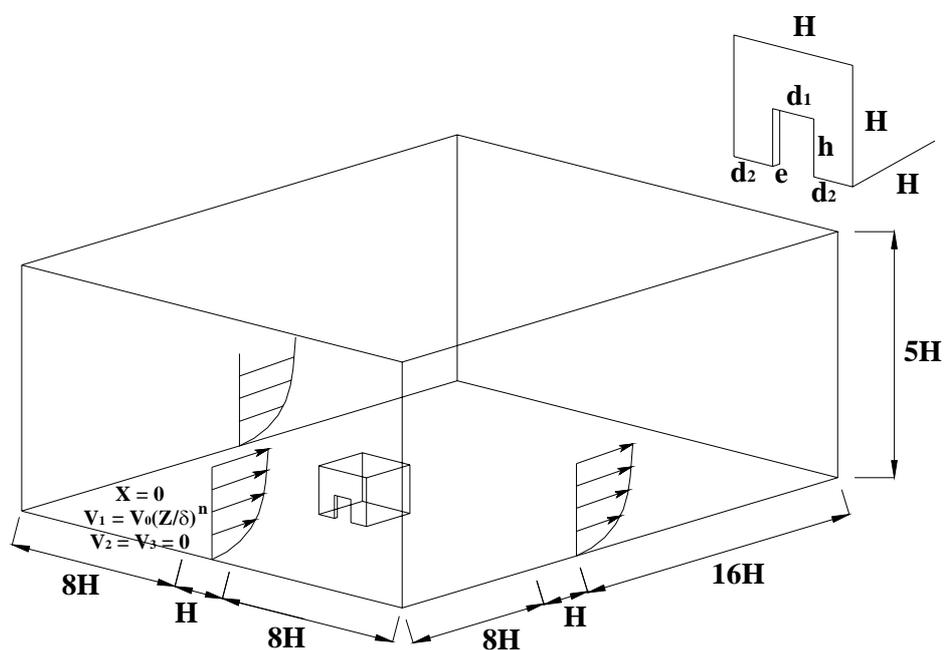
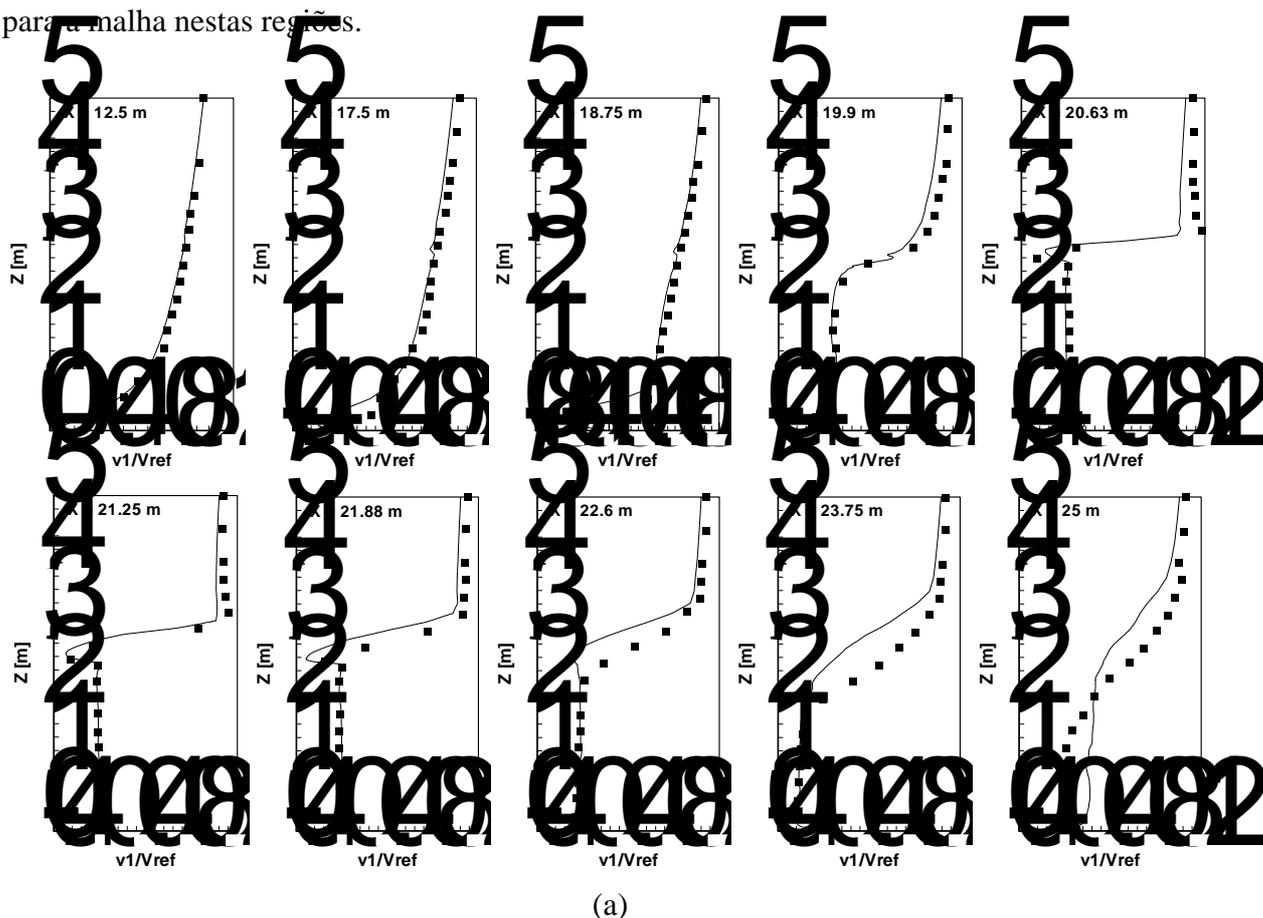
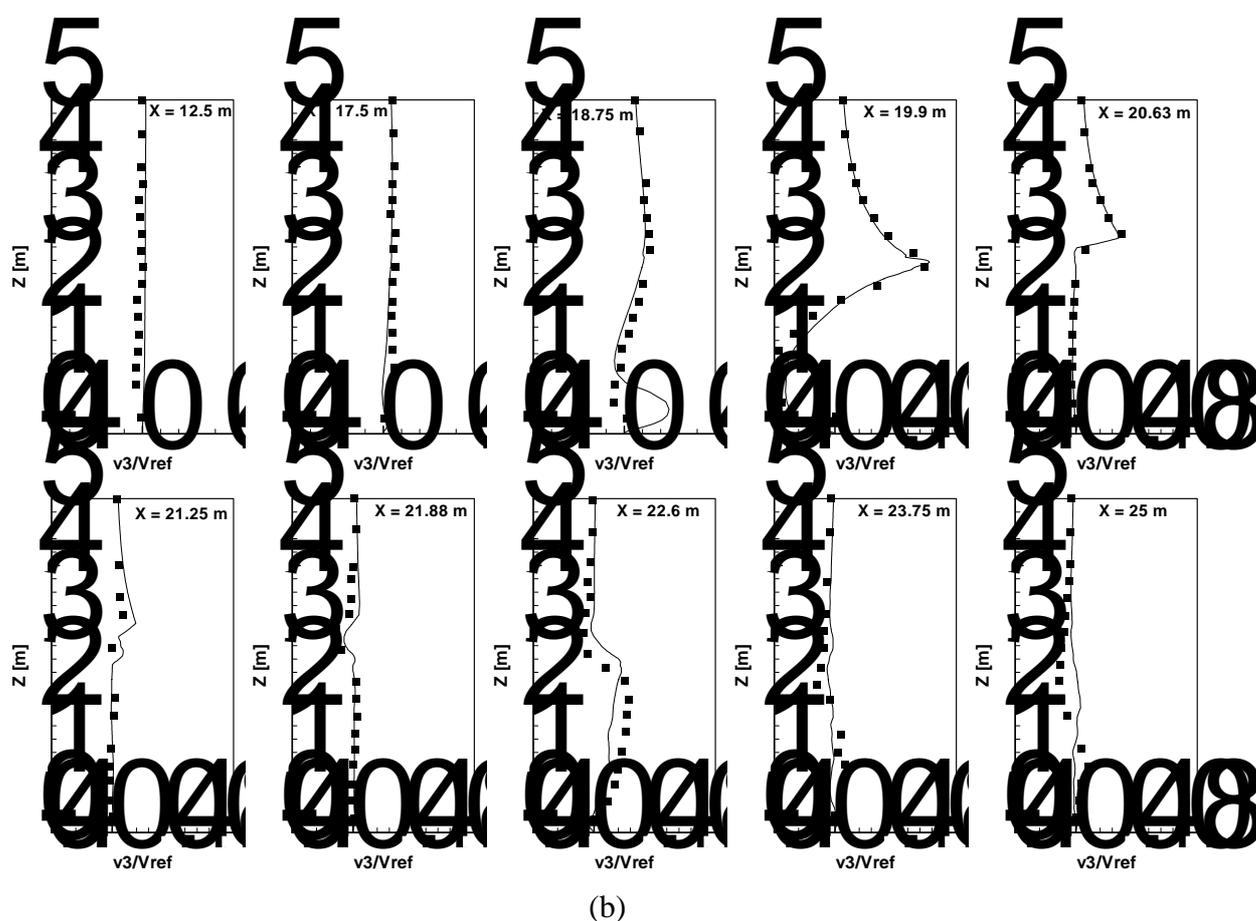


Tabela 9.9: Constantes físicas e geométricas utilizadas na análise de circulação de vento sobre uma edificação.

Massa específica ( $\rho$ )	1.25 Kg/m <sup>3</sup>
Viscosidade dinâmica ( $\mu$ )	2.65x10 <sup>-4</sup> Ns/m <sup>2</sup>
Viscosidade volumétrica ( $\lambda$ )	0.0 Ns/m <sup>2</sup>
Velocidade do som no fluido ( $c$ )	50.0 m/s
Velocidade característica – $V_{ref}$ (entrada em $Z = 5$ m)	11.9 m/s
Dimensão característica (lado do prisma)	2.5 m
Incremento de tempo ( $\Delta t$ )	2.25x10 <sup>-4</sup> s

Na Figura 9.21 são mostrados os perfis médios de  $v_1/V_{ref}$  e  $v_3/V_{ref}$  obtidos pelo presente trabalho juntamente com os respectivos valores fornecidos pela análise experimental conduzida por Jiang et al. (2003), os quais referem-se às posições indicadas na Figura 9.20. Os resultados aqui obtidos mostram uma boa concordância com o estudo experimental, sendo que as maiores discrepâncias encontram-se, principalmente na zona de esteira e na região frontal junto ao piso, indicando a necessidade de uma discretização um pouco mais refinada para a malha nestas regiões.





(b)

Figura 9.21: Perfis médios de velocidade para diferentes posições no domínio de análise para uma edificação com abertura: (a)  $v_1/V_{ref}$ ; (b)  $v_3/V_{ref}$ . Linhas contínuas indicam valores obtidos pelo presente trabalho; pontos indicam valores experimentais.

O campo médio de vetores de velocidade na região em torno da edificação, para um plano que passa pela seção central da edificação, é apresentado na Figura 9.22, onde é feita a comparação entre os resultados obtidos pelo presente trabalho e por Jiang et al. (2003). Na mesma figura é também mostrado o campo médio de pressões para uma melhor avaliação das condições de escoamento. De uma forma geral, uma boa concordância pode ser observada entre os resultados apresentados. A reversão do escoamento na zona frontal da edificação, junto ao solo, foi reproduzida pelo presente trabalho, embora apresentando dois vórtices bem definidos que os resultados de referência não mostram. A razão disso deve-se provavelmente a diferenças nas características da camada limite atmosférica, onde foi considerado no presente trabalho um perfil de velocidades sem flutuações, ao contrário do utilizado pela referência. Outro aspecto importante que pôde ser observado é o estabelecimento de um escoamento de baixa velocidade no interior da edificação, uma vez que o vórtice que se forma na região frontal do prédio age como uma barreira, impedindo a entrada da corrente de ar. Como pode ser verificado, a simulação aqui realizada consegue reproduzir o fenômeno de

separação e recolamento do escoamento sobre o teto da edificação, estando o vórtice gerado com uma magnitude levemente maior e com o ponto de recolamento mais atrasado em relação ao resultado numérico do trabalho de referência. Esta diferença no resultado, assim como as diferenças encontradas em relação à reversão do escoamento na zona frontal da edificação, é explicada no trabalho de Peterka et al. (1985), onde são mostrados os diferentes padrões de circulação existentes neste tipo de problema. Segundo estes autores, a razão principal para as diferenças apresentadas refere-se à intensidade de turbulência presente na corrente de ar incidente.

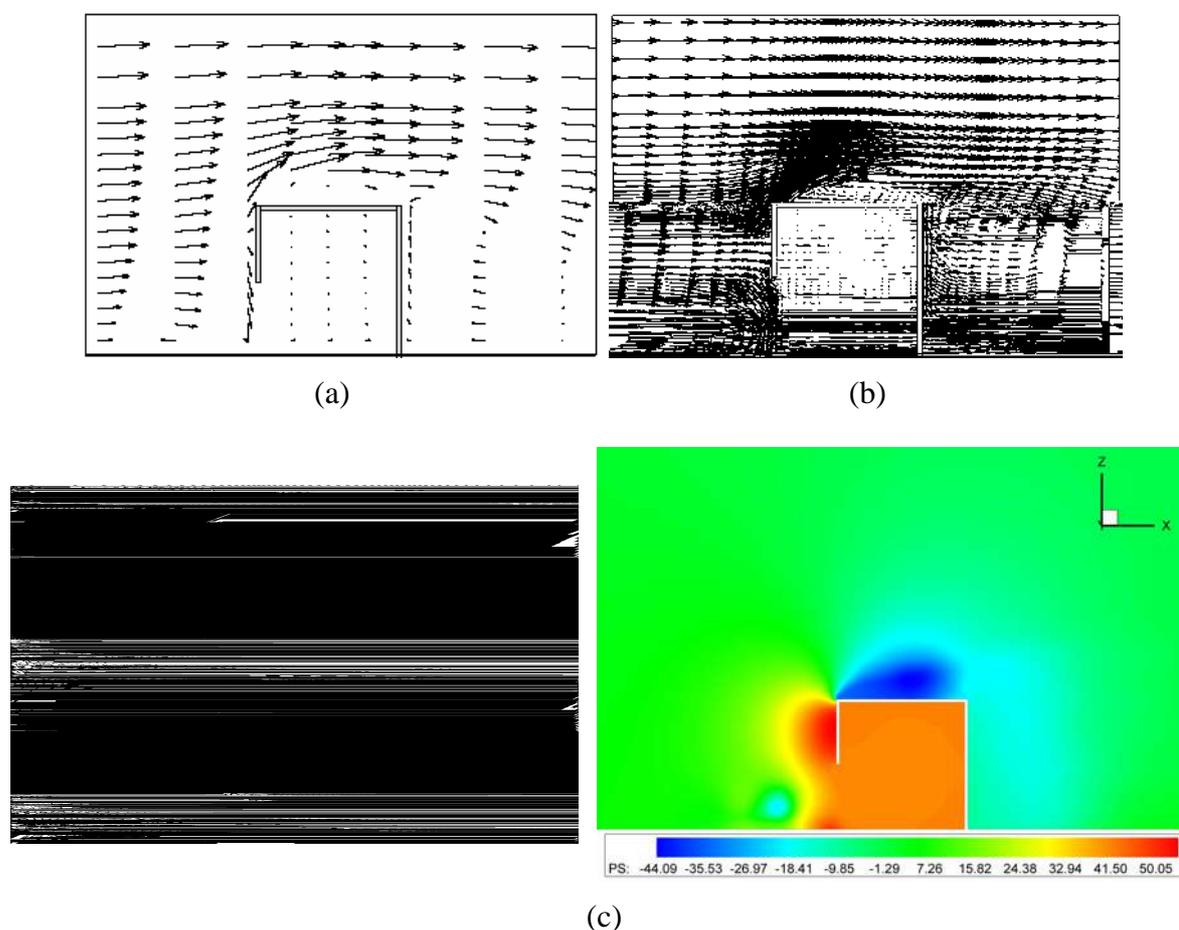


Figura 9.22: Campos médios de vetores de velocidade e pressão na região de uma edificação com abertura – plano  $Y = 21.25$  m: (a) Jiang et al. (2003) – experimental; (b) Jiang et al. (2003) – numérico; (c) presente trabalho.

Na Figura 9.23 são mostradas as distribuições do coeficiente de pressão médio ( $C_p = P - P_{\text{ref}} / 0.5\rho V_{\text{ref}}^2$ ) tomadas sobre linhas que representam as paredes externas da edificação na seção intermediária, as quais correspondem aos valores obtidos por esta tese e por Jiang et al.

(2003). Como se pode observar, as diferenças encontradas devem-se ao valor da pressão de referência empregado no cálculo de  $C_p$  e considerou-se para o presente trabalho  $P_{ref} = 0$ .

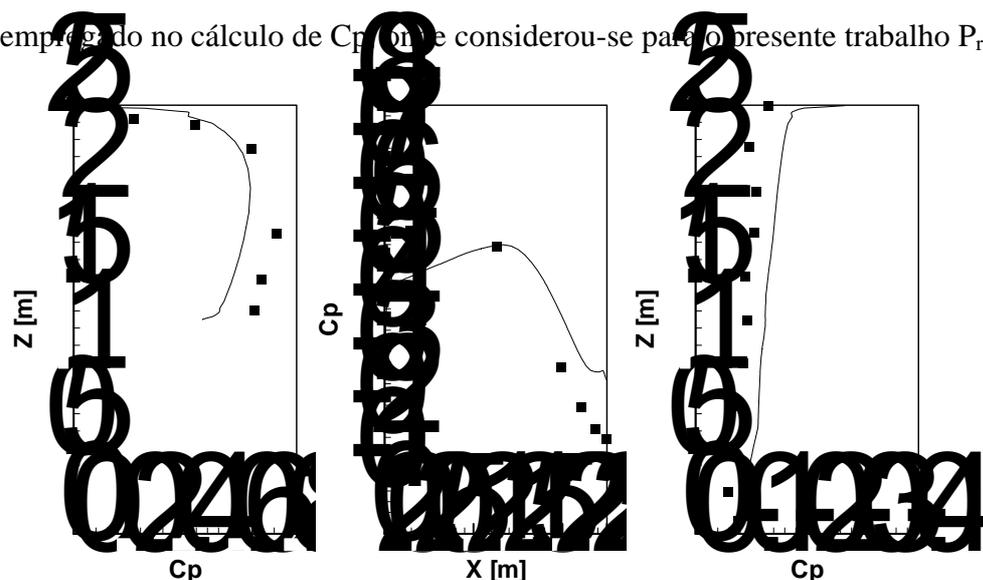
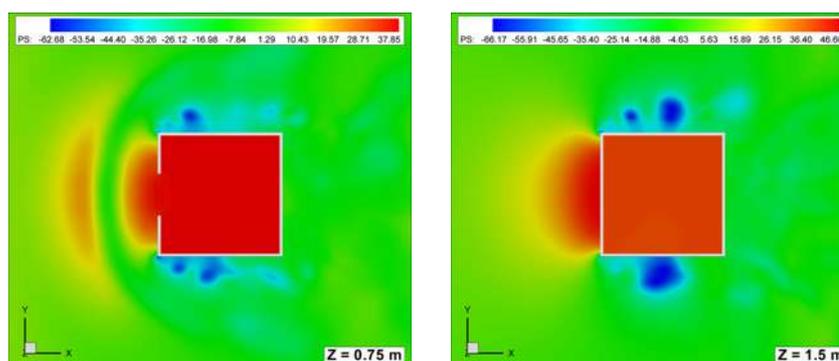


Figura 9.23: Coeficientes de pressão médios ( $C_p$ ) sobre as paredes externas da seção intermediária ( $Y = 21.25$  m) de uma edificação com abertura. Linhas contínuas indicam valores obtidos pelo presente trabalho; pontos indicam valores experimentais obtidos por Jiang et al. (2003).

Na Figura 9.24 pode-se observar os campos de pressão instantâneos obtidos pelo presente trabalho em três planos, os quais correspondem a três cotas distintas do domínio de análise, avaliados na região da edificação. Nota-se claramente a ação dos vórtices de base na região frontal da edificação para  $Z = 0.75$  m, onde é gerada uma barreira para as massas de ar da corrente incidente, as quais são incorporadas a estes vórtices e jogadas em direção às laterais da edificação. Para  $Z = 1.5$  m, o escoamento de ar que chega nas imediações da edificação já não fica mais sob a influência da zona frontal de recirculação, desenvolvendo-se uma distribuição de pressões externa ao prédio típica para os casos de escoamentos sobre corpos cúbicos, valendo o mesmo para  $Z = 2.25$  m. Em todos os casos, observa-se a formação de um estado de sobrepressão no ambiente interno do prédio.



(continua na próxima página)

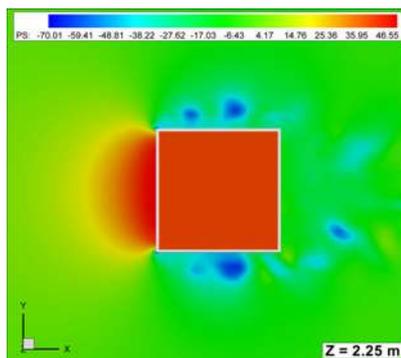


Figura 9.24: Campos de pressão instantâneos nas imediações de uma edificação com abertura.

Linhas de corrente integradas no espaço, as quais correspondem a campos instantâneos de velocidade, são apresentadas na Figura 9.25 para as três cotas avaliadas na figura anterior. Em  $Z = 0.75$  m observa-se com nitidez a zona de atuação dos vórtices de base desenvolvidos na região frontal da edificação. Para  $Z = 1.5$  m, verifica-se que o escoamento incidente já não é mais levado em direção ao solo, criando uma esteira que se projeta sobre a zona de recirculação, atrás da edificação. Por fim, para  $Z = 2.25$  m o escoamento sofre uma ação ascendente junto ao prédio, criando zonas de separação do escoamento junto aos cantos de sotavento do teto.

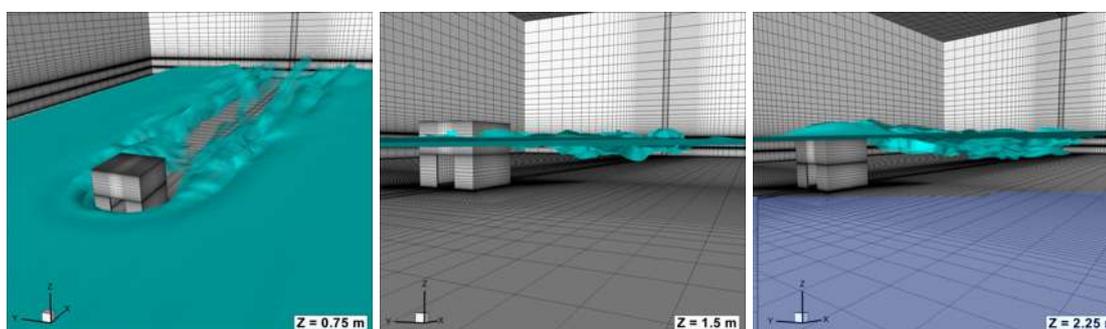


Figura 9.25: Linhas de corrente instantâneas integradas no espaço sobre uma edificação com abertura.

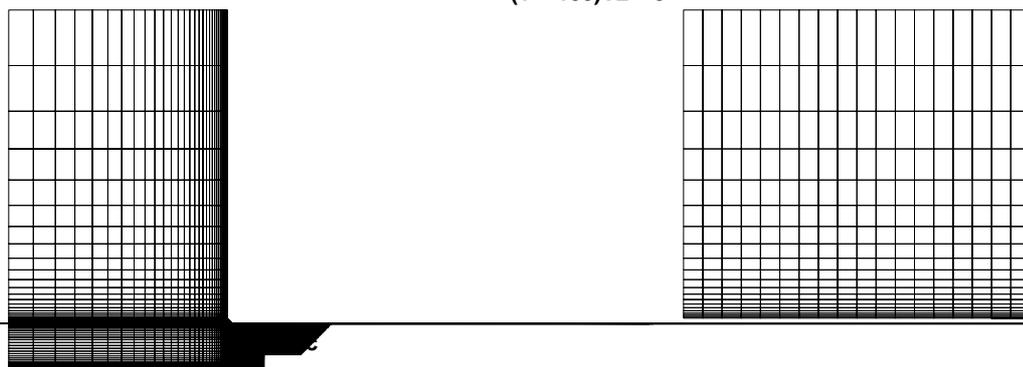
## 9.6 ANÁLISE AEROELÁSTICA DE EDIFICAÇÕES

### 9.6.1 Resposta estrutural de uma edificação com cobertura em membrana elástica sob a ação do vento

Neste exemplo trata-se da interação entre um escoamento de vento e um prédio de paredes rígidas com uma cobertura flexível em membrana sob a ação da gravidade. Esta

aplicação apresenta características importantes encontradas em análises da EVC, como o desenvolvimento de camada limite do terreno e a geração e desprendimento de vórtices agindo sobre a estrutura. Mais uma vez são empregados os esquemas explícito de dois passos e  $\alpha$ -Generalizado com controle de energia para a análise dos domínios fluido e estrutural, respectivamente. Além do modelo de acoplamento proposto para esta tese, é usada também uma versão particionada convencional para a comparação dos modelos. Em ambas as análises efetuadas considera-se o número de subciclos igual a 4.

$$(Y = 100)V2 = 0$$



745558 nós, sendo que a menor dimensão está na ordem de  $5 \times 10^{-5}$  m, encontrada nos elementos localizados sobre a interface sólido-fluido. No que se refere à estrutura, emprega-se uma malha com coincidência nodal sobre a interface, constituída de  $150 \times 4 \times 1$  elementos distribuídos de acordo com as direções dos eixos globais.

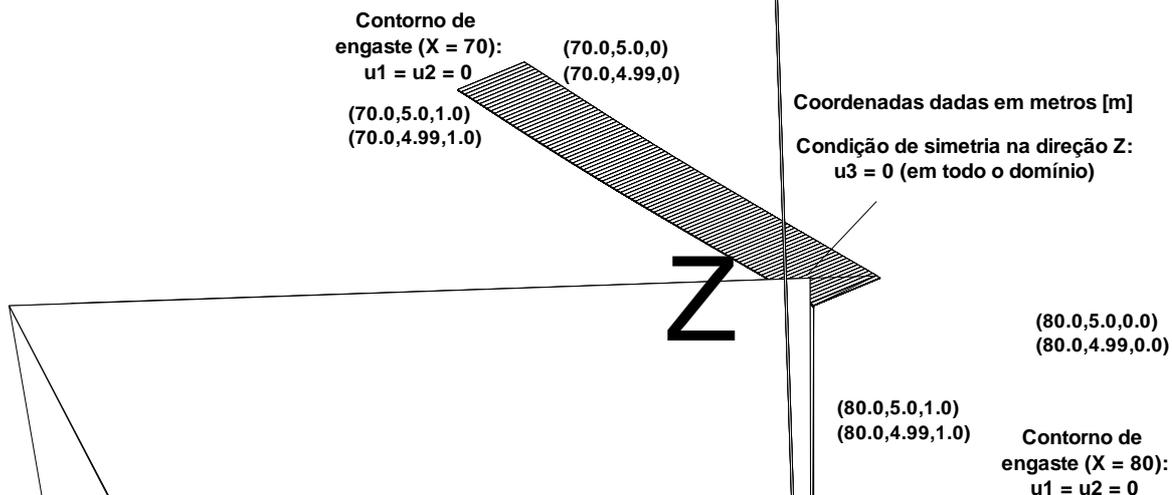


Figura 9.27: Características geométricas, condições de contorno e malha de elementos finitos empregadas para a estrutura na análise de interação fluido-estrutura sobre uma cobertura em membrana.

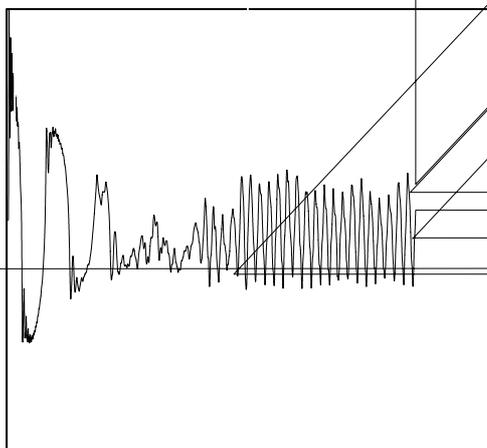
Tabela 9.10: Constantes empregadas na análise de interação fluido-estrutura sobre uma cobertura em membrana.

<b>Fluido</b>	Massa específica ( $\rho$ )	1.25 Kg/m <sup>3</sup>
	Viscosidade dinâmica ( $\mu$ )	0.1 Ns/m <sup>2</sup>
	Viscosidade volumétrica ( $\lambda$ )	0.0 Ns/m <sup>2</sup>
	Velocidade do som no fluido ( $c$ )	330.0 m/s
	Velocidade característica (entrada)	35.0 m/s
	Dimensão característica (comprimento da membrana)	10 m
<b>Estrutura</b>	Parâmetro seletivo de massa ( $e$ )	0.0
	Incremento de tempo ( $\Delta t$ )	1.0x10 <sup>-4</sup> s
	Massa específica ( $\rho$ )	1.0x10 <sup>3</sup> Kg/m <sup>3</sup>
	Módulo de elasticidade (E)	1.0x10 <sup>9</sup> N/m <sup>2</sup>
	Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0.0
	Coefficiente de amortecimento ( $\gamma$ )	0.0 Ns/m
	Peso próprio específico	1.0x10 <sup>4</sup> N/m <sup>3</sup>
Raio espectral ( $\tau_a$ )	0.6	
Incremento de tempo ( $\Delta t$ )	4.0x10 <sup>-4</sup> s	

As propriedades físicas e geométricas empregadas nas análises do escoamento e da estrutura encontram-se reunidas na Tabela 9.10. Assim como no exemplo do painel, o escoamento é primeiramente desenvolvido considerando-se os campos de velocidade e pressão iniciais nulos e a estrutura rígida e indeslocável durante um determinado período de tempo. Após este período inicial, com os campos de velocidade e pressão já desenvolvidos, o acoplamento fluido-estrutura é então estabelecido, permitindo a interação entre o escoamento e as vibrações da membrana. O escoamento é caracterizado por um número de Reynolds igual

a 1718, calculado a partir da velocidade de entrada em  $Z = 5$  m (ver Figura 9.26) e na dimensão característica da membrana.

Na Figura 9.28 são apresentados os resultados obtidos em termos dos históricos de deslocamentos verticais avaliados no ponto central do vão da membrana de acordo com o tipo de modelo de acoplamento empregado. Na seqüência, na Tabela 9.11, os resultados são compilados estatisticamente, comparando-os com as respostas obtidas por Hübner et al. (2004). Como se pode observar, os esquemas de acoplamento utilizados apresentam resultados praticamente idênticos para o exemplo analisado. Após um período inicial de aproximadamente 35 segundos, onde o escoamento é desenvolvido nos primeiros 5 segundos sem a deformação da estrutura, é atingido um ponto no qual o fenômeno de desprendimento de vórtices começa a ser regido pelos movimentos da membrana, obtendo uma vibração acoplada de grande amplitude. Em comparação com o trabalho de referência, os dados estatísticos obtidos neste trabalho mostram uma diferença na ordem de 6% para o período de vibração e a amplitude média, sendo 10% menores os resultados de pico de deslocamento.

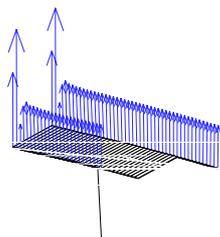


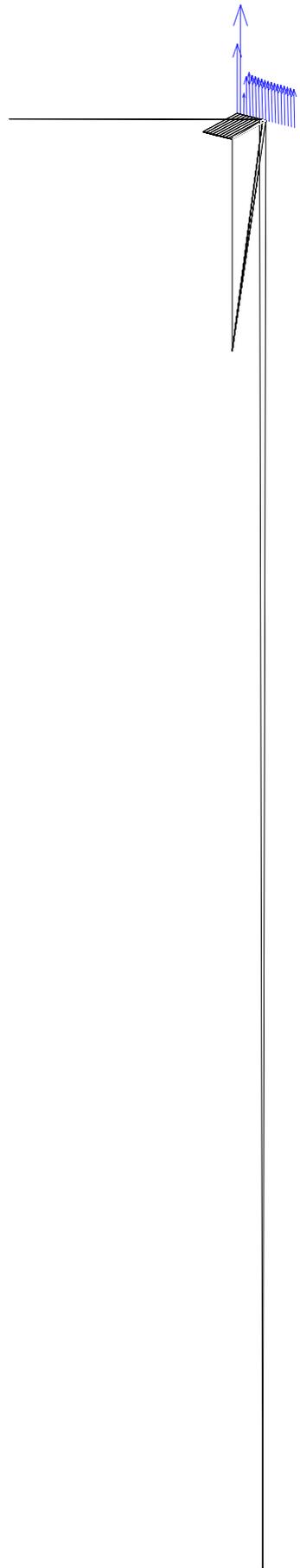
Na Figura 9.29 são apresentadas as diferentes configurações assumidas pela malha de elementos finitos do fluido na região vizinha ao prédio, em diferentes instantes de tempo ao longo da análise. Nesta mesma região e nos mesmos instantes são mostrados também os respectivos campos de pressão.



Como pode ser visto, mais uma vez o esquema de movimento de malha empregado neste trabalho conseguiu absorver perfeitamente as deformações apresentadas pela estrutura sem apresentar distorções excessivas nos elementos. Nos campos de pressão, observa-se claramente os dois tipos de escoamentos existentes neste problema, antes e depois do acoplamento entre as frequências de vibração da cobertura e de desprendimento de vórtices. Nos primeiros dois casos não há o desprendimento de grandes vórtices sobre a cobertura e a estrutura apresenta apenas uma vibração de pequena amplitude, ao contrário do que ocorre a partir de  $t = 35$  s, onde se estabelece o acoplamento entre as características dinâmicas do fluido e da estrutura, fazendo com que haja a formação de vórtices de maior magnitude devido a uma maior deformação apresentada pela membrana.

Finalmente, na Figura 9.30 são visualizadas as configurações deformadas da estrutura em diferentes instantes de tempo juntamente com os vetores de força do escoamento, os quais estão fora de escala. Como se pode verificar, há uma visível conformidade entre as distribuições de força do fluido e ação dos vórtices sobre a estrutura, vistos na Figura 9.29.





## 10 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi apresentado um estudo sobre desenvolvimento e aplicação de procedimentos numéricos adequados para a análise de problemas da Engenharia do Vento Computacional (EVC). Primeiramente, vários exemplos clássicos foram analisados com o objetivo de verificar os diferentes módulos (fluido, estrutura e interação fluido-estrutura) que compõe o modelo numérico. Depois disso, exemplos envolvendo aplicações típicas do campo da Engenharia do Vento foram simulados para demonstrar a validade da formulação proposta. As principais conclusões com respeito aos esquemas numéricos analisados e aplicações da EVC são relatados a seguir. Ao final, sugestões são propostas para a ampliação do campo de aplicações e melhoria do modelo numérico desenvolvido.

- Quanto aos algoritmos empregados para a simulação de escoamentos foi verificado que o modelo explícito de dois passos mostrou-se mais robusto em relação ao modelo explícito-iterativo, embora apresente o inconveniente de apresentar um excesso de dissipação numérica para escoamentos com números de Reynolds mais baixos. Para corrigir este excesso de dissipação deve-se empregar o parâmetro seletivo de massa na solução da equação da continuidade com o objetivo de controlar o nível de amortecimento numérico do esquema (ver Seção 3.4.1).

- Na comparação entre os modelos clássico e dinâmico para a simulação das escalas de turbulência inferiores à resolução da malha concluiu-se que ambos os modelos apresentam resultados satisfatórios, sendo que a superioridade do modelo dinâmico fica evidenciada em problemas onde haja uma maior complexidade e uma maior variabilidade de fenômenos físicos no escoamento. Verificou-se também que o modelo dinâmico exige um esquema de estabilização numérica bastante eficiente devido à grande variabilidade do coeficiente dinâmico  $C(\vec{x}, t)$ .

- No que se refere ao modelo utilizado neste trabalho para a análise dinâmica de estruturas com não-linearidade geométrica foi possível constatar a eficiência e a qualidade da formulação em elementos finitos empregada na discretização espacial da estrutura, incluindo a abordagem co-rotacional para o tratamento do problema não-linear e uma técnica eficiente de estabilização de modos espúrios em razão do uso da técnica de integração reduzida, com a qual foi possível reproduzir de forma satisfatória os campos de deformação referentes aos problemas estudados.

- Na questão relativa à discretização no tempo da equação de equilíbrio dinâmico verificou-se que o método de Newmark trapezoidal perde a característica de estabilidade incondicional devido à falta de conservação de energia no processo de integração. Esta deficiência foi corrigida ao empregar-se o método  $\alpha$ -Generalizado, através do qual foi possível a obtenção de um processo de integração estável adicionando-se uma quantidade adequada de dissipação numérica ao esquema por meio do valor atribuído ao raio espectral. Outro aspecto importante observado refere-se ao baixo custo computacional do algoritmo referente ao método  $\alpha$ -Generalizado, o qual é similar ao método de Newmark convencional.

- Para o modelo numérico de interação fluido-estrutura empregado verificou-se que o esquema de acoplamento proposto conseguiu reproduzir os resultados de referência com um bom nível de precisão. Diferentes condições de subciclos e de compatibilidade entre as malhas da estrutura e do fluido sobre a interface foram testadas, levando a resultados igualmente satisfatórios. A proposta de utilizar um mesmo elemento finito para a discretização da estrutura e do fluido mostrou ser também bastante eficiente, facilitando a comunicação de dados entre os meios. Porém, não foi possível observar nos exemplos analisados a superioridade do esquema de acoplamento proposto em relação aos modelos convencionais no que se refere ao tratamento das variáveis de interface.

- Nas aplicações sobre a EVC constatou-se que o esquema explícito de dois passos associado ao modelo dinâmico de turbulência conseguiu reproduzir de uma forma satisfatória grande parte dos fenômenos físicos presentes nos escoamentos simulados. Características importantes sobre a circulação de escoamentos de vento ao redor de estruturas civis puderam ser observadas através dos resultados numéricos apresentados, podendo-se citar o processo de formação e desprendimento de vórtices sobre uma seção de ponte e a sua relação com o campo de pressões desenvolvido e a verificação dos diferentes padrões de circulação ao redor de edifícios, onde destaca-se a formação dos chamados vórtices de base na zona frontal das edificações. Os problemas da interferência entre edificações e da ventilação em ambientes internos e externos também foram reproduzidos numericamente, obtendo-se resultados coerentes com os fenômenos físicos, embora com o surgimento de algumas dificuldades que serão comentadas mais adiante.

- No exemplo aeroelástico analisado, verificou-se que o modelo de acoplamento proposto conseguiu reproduzir o fenômeno de instabilidade esperado para este problema com um bom nível de precisão. No entanto, mais uma vez não foi possível observar diferenças nos resultados apresentados entre o modelo de acoplamento sugerido neste trabalho e um modelo

convencional. Com o uso de números de subciclos mais elevados do que os aqui utilizados ou em casos onde se faça necessário o emprego de valores reduzidos para o raio espectral, provavelmente seja possível verificar a superioridade do esquema de acoplamento conservativo.

- Algumas dificuldades foram encontradas nas aplicações realizadas sobre EVC e seria importante descrevê-las. O emprego de hexaedros em malhas estruturadas leva a um processo de discretização muito pouco versátil, necessitando-se geralmente de um número excessivo de elementos e uma distribuição ineficientemente sobre o domínio de análise. Além disso, regiões com dimensões características de elemento muito diferenciadas acabam produzindo um processo de integração no tempo muito pouco eficiente devido às restrições de estabilidade impostas pelos esquemas numéricos explícitos, usados na solução do escoamento. Por fim, a falta de um modelo numérico que gere turbulência na corrente incidente pode conduzir, em muitos casos, a diferenças na solução numérica quando comparada a resultados experimentais, os quais usualmente empregam algum nível de turbulência na corrente de ar produzida pelos túneis de vento.

Na seqüência são apresentadas algumas propostas para a expansão do campo de aplicações do modelo apresentado e melhorias em sua formulação, bem como nos algoritmos utilizados pelo código numérico. Sugere-se o seguinte:

- Alguns campos de aplicação da Engenharia do Vento não puderam ser abordados neste trabalho, como a análise de dispersão de poluentes em meios urbanos e estudos de conforto de pedestres com efeitos de temperatura em ambientes externos e internos. Para isso, bastariam apenas pequenos ajustes no modelo existente e a inclusão das equações de conservação de energia e de conservação de espécies ao sistema de equações governantes.

- Em relação ao algoritmo para a análise de escoamentos seria importante a otimização do processo de integração temporal e da distribuição de elementos pelo domínio de análise. Devido a restrições de estabilidade, o incremento de tempo adotado na integração temporal das equações governantes em esquemas explícitos deve ser dado de acordo com a menor dimensão de elemento existente em toda a malha. Em problemas com escalas de dimensão muito diferenciadas entre os elementos, como ocorre nos escoamentos turbulentos, a restrição de estabilidade leva a um processo de integração extremamente ineficiente, uma vez que regiões da malha discretizadas com elementos de maior tamanho acabam sendo forçadas a empregar um incremento de tempo muito menor que as exigências locais de estabilidade. Para contornar este inconveniente, propõe-se o emprego da técnica de subdomínios (ver Teixeira,

2001), onde são usados diferentes incrementos de tempo em diferentes regiões da malha, reduzindo substancialmente o esforço computacional. No que se refere ao processo de discretização do domínio de análise, verifica-se que há uma demanda muito elevada de elementos em problemas tridimensionais para obter-se um nível de refinamento adequado e, assim, capturar as regiões com gradientes de velocidade e pressão. Portanto, a distribuição dos elementos no domínio de análise deve ser feita da maneira mais econômica e racional possível. Neste sentido, sugere-se a incorporação ao presente modelo de um esquema de adaptação de malhas (ver Popiolek, 2006) com a capacidade de propiciar um rezoneamento da malha existente em função de deficiências na representação das características físicas do escoamento.

- Outro estudo que pode ser realizado com respeito ao esquema de dois passos para a solução do escoamento refere-se aos efeitos causados pelo uso do parâmetro seletivo de massa sobre a dissipação numérica sob diferentes condições de número de Mach, o qual pode gerar também um amortecimento no campo de pressão para valores muito altos (até mais ou menos 0.4).

- Propõe-se também a inclusão de algum modelo numérico para a geração de flutuações no campo de velocidades com o objetivo de reproduzir a condição de turbulência na corrente incidente (ver, por exemplo, Kondo et al., 1997). Com isso, será possível caracterizar mais adequadamente os perfis de velocidade relativos à camada limite atmosférica.

- No que se refere ao modelo numérico para a análise de estruturas, um avanço poderia ser feito em relação ao modelo constitutivo, onde a implementação de um modelo hiperelástico possibilitaria o tratamento de problemas com grandes deformações.

- Para o modelo de acoplamento fluido-estrutura, sugere-se continuar com os estudos comparativos entre o esquema proposto nesta tese e o esquema convencional. Propõe-se empregar números de subciclos mais elevados que os aqui utilizados, fazendo com que o incremento de deslocamentos para a estrutura torne-se mais alto. Sugere-se também analisar problemas altamente não-lineares onde seja necessário o uso de valores reduzidos de raio espectral para a análise da estrutura. Nestas condições, acredita-se que as propriedades conservativas superiores do modelo aqui apresentado em relação aos modelos convencionais façam-se sentir.

## 11 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas, 1987. “NBR 6123: Forças Devidas ao Vento em Edificações”. PPGEC/UFRGS, Porto Alegre.

Akins, R.E., Peterka, J.A. e Cermak, J.E., 1977. “Mean force and moment coefficients for buildings in turbulent boundary layers”. **Journal of Industrial Aerodynamics**, vol. 2, pp. 195-209.

Azevedo, R.L., 1999. “**Análise de Problemas de Interação Fluido-Estrutura Usando o Método dos Elementos Finitos com um Acoplamento Monolítico**”. Tese de Doutorado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre.

Baig, M.M.I. e Bathe, K.J., 2005. “On direct time integration in large deformation dynamic analysis”. In: **Proceedings of the 3<sup>rd</sup> MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics**, pp. 1044-1047.

Baker, C. (editor), 2002. “**Special Issue on Computational Wind Engineering – Selected Papers Presented at CWE2000**”. In: *Wind & Structures*, vol. 5, n° 2-4.

Baskaran, A., Kashef, A., 1996. “Investigation of air flow around buildings using computational fluid dynamics techniques”. **Engineering Structures**, vol. 18, n° 11, pp. 861-875.

Bathe, K.J., 1996. “**Finite Element Procedures**”. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Bathe, K.J. e Baig, M.M.I., 2005. “On a composite implicit time integration procedure for nonlinear dynamics”. **Computers & Structures**, vol. 83, pp. 2513-2524.

Batina, J.T., 1989. “Unsteady Euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes”. **AAIA Paper – AIAA 27<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting**, paper n° 89-0115, Reno, Nevada.

Behr, M., Johnson, A., Kennedy, J., Mittal, S. e Tezduyar, T.E., 1993. “Computation of incompressible flows with implicit finite element implementations on the Connection Machine”. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 108, pp. 99-118.

Belytschko, T. e Bindeman, L.P., 1991. “Assumed strain stabilization of the 4-node ion of 971

Belytschko, T., Liu, W.K. e Moran, B., 2000. “**Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures**”. Chichester: John Wiley & Sons Ltd.

Blessmann, J., 1998. “**Introdução ao Estudo das Ações Dinâmicas do Vento**”. Porto Alegre: Editora da Universidade/UFRGS.

Braun, A.L., 2002. “**Um Modelo para a Simulação Numérica da Ação do Vento sobre Seções de Ponte**”. Dissertação de Mestrado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre.

Braun, A.L. e Awruch, A.M., 2003. “Numerical simulation of the wind action on a long-span bridge deck”. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science and Engineering**, vol. XXV, n° 4, pp. 352-363.

Braun, A.L. e Awruch, A.M., 2004. “A segregated scheme for turbulent incompressible flows simulation”. In: **XXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE 2004**, Recife (PE), Brasil, pp. 1-19.

<sup>a</sup>Braun, A.L. e Awruch, A.M., 2005. “Aerodynamic and aeroelastic analysis of bundled cables by numerical simulation”. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 284, pp. 51-73.

<sup>b</sup>Braun, A.L. e Awruch, A.M., 2005. “An efficient numerical model for isothermal and thermally coupled incompressible flows”. In: **18<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering – COBEM 2005**, vol. 284, pp. 51-73.

Brebbia, C.A. e Dominguez, J., 1989. “**Boundary Elements: An Introductory Course**” New York: McGraw Hill Book Co., Computational Mechanics Publication, Southampton.

Brooks, A. e Hughes. T., 1982. “Streamline upwind/Petrov Galerkin formulation for convection-dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations”. **Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 32, 199-259.

Burbridge, H.P., 1999. “**O Esquema Explícito de Taylor-Galerkin na Simulação Numérica de escoamentos Compressíveis Tridimensionais utilizando Elementos Finitos Hexaédricos de Oito Nós**”. Dissertação de Mestrado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre.

Casadei, F., Halleux, J.P., Sala, A. e Chillè, F., 2001. “Transient fluid-structure interaction algorithms for large industrial applications”. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 190, pp. 3081-3110.

Casadei, F. e Potapov, S., 2004. “Permanent fluid-structure interaction with non-conforming interfaces in fast transient dynamics”. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 193, pp. 4157-4194.

Cebal, J.R. e Löhner, R., 1998. "Load transfer for viscous fluid-structure interaction". **In: Computational Mechanics**, S. Idelsohn, E. Oñate e E. Dvorakin (eds.), Barcelona: CIMNE.

Chorin, A.J., 1967. "A numerical method for solving incompressible viscous flow problems". **Journal of Computational Physics**, vol. 2, pp. 12-26.

Christon, M.A., 1997. "A domain-decomposition message-passing approach to transient viscous incompressible flow using explicit time integration". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 148, pp. 329-352.

Chung, T.J., 2002. "**Computational Fluid Dynamics**". USA: Academic Press, Cambridge University Press.

Chung, J. e Hulbert, G.M., 1993. "A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- $\alpha$  method". **Journal of Applied Mechanics**, Transactions of the ASME, vol. 60, pp. 371-375.

Clark, R.A., Ferziger, J.H. e Reynolds, W.C., 1979. "Evaluation of sub-grid scale turbulence models using an accuracy simulated turbulent flow". **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 91, pp. 1-16.

Cuthill, E. e McKee, J., 1969. "Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices". **In: Proceedings of the 24<sup>th</sup> National Conference of ACM**, vol. P-69, 157-172.

Deardorff, J.M., 1970. "A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds number", **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 41, pp. 453-480.

Donea, J., 1984. "A Taylor-Galerkin method for convective transport problems". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 20, pp. 101-119.

Donea, J., Giuliani, S. e Halleux, J.P. 1982. "An arbitrary Lagrangean-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 33, pp. 689-723.

Duarte Filho, L.A., 2002. "**Análise Estática e Dinâmica, Linear e Não-linear Geométrica, através de Elementos Hexaédricos de Oito Nós com Um Ponto de Integração**". Dissertação de Mestrado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre.

Duarte Filho, L.A. e Awruch, A.M., 2004. "Geometrically nonlinear static and dynamic analysis of shells and plates using the eight-node hexahedral element with one-point quadrature". **Finite Elements in Analysis and Design**, vol. 40, 1297-1315.

Durao, D.F.G., Heitor, M.V. e Pereira, J.C., 1988. "Measurements of turbulent and periodoc flows around a square cross-section cylinder". **Experimental Fluids**, vol. 6, pp. 298-304.

Farhat, C. e Lesoinne, M., 2000. "Two efficient staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 182, pp. 499-515.

Farhat, C., Lesoinne, M. e LeTallec, P., 1998. "Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces: Momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 157, pp. 95-114.

Farhat, C., Lesoinne, M. e Maman, N., 1995. "Mixed explicit/implicit time integration of coupled aeroelastic problems: three-field formulation, geometric conservation and distributed solution". **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 21, pp. 807-835.

Farhat, C., Lesoinne, M. e Stern, P., 1997. "High performance solution of three-dimensional nonlinear aeroelastic problems via parallel partitioned algorithms: methodology and preliminary results". **Advances in Engineering Software**, vol. 28, pp. 43-61.

Farhat, C., Lin, Y.T., 1993. "A structure attached corotational fluid grid for transient aeroelastic computations". **AIAA**, vol. 31, pp. 597-599.

Farhat, C., van der Zee, K.G. e Geuzaine, P., 2005. "Provably second-order time-accurate loosely-coupled solution algorithms for transient nonlinear computational aeroelasticity". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, In Press.

Felippa, C.A., Park, K.C. e Farhat, C., 2001. "Partitioned analysis of coupled mechanical systems". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 190, pp. 3247-3270.

Ferreira, A.D., Souza, A.C.M. e Viegas, D.X., 2002. "Prediction of building interference effects on pedestrian level comfort". **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, vol. 90, pp. 305-319.

Ferziger, J.H., Bardina, J. e Allen, G., 1981. "Overview of taxonomy: morphology of the flows and computational methods". In: **Computation of Complex Turbulent Flows – Proceedings of the HTTM-AFOSR**, Kline et al. (eds.) Dept. Mechanical Engineering, Stanford University, Stanford, CA, vol. 2, pp. 634-649.

Findikakis, A.N. e Street, R.L., 1982. "Mathematical description of turbulent flows". **Journal of Hydraulics Division – ASCE**, vol. 108, n° HY8, pp. 887-903.

Flanagan, D.P. e Belytschko, T., 1981. "A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control". **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, vol. 17, 679-706.

Gerbeau, J.F. e Vidrascu, M., 2003. "A Quasi-Newton algorithm based on a reduced model for fluid-structure interactions problems in blood flows". **Math. Model. Numer. Anal.**, vol. 37, n° 4, pp. 631-648.

Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. e Cabot, W.H., 1991. "A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model". **Physics of Fluids**, vol. A3, n. 7, pp. 1760-1765.

Gluck, M., Breuer, M., Durst, F., Halfmann, A. e Rank, E., 2001. "Computation of fluid-structure interaction on lightweight structures". **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, vol. 89, pp. 1351-1368.

Gluck, M., Breuer, M., Durst, F., Halfmann, A. e Rank, E., 2003. "Computation of wind-induced vibrations of flexible shells and membranous structures". **Journal of Fluids and Structures**, vol. 17, pp. 739-765.

González, L.A.S., 1993. "**Análise de escoamentos de fluidos quase-incompressíveis e das vibrações induzidas em objetos imersos**". Dissertação de Mestrado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre.

Gresho, P.M., Chan, S.T., Lee, R.L. e Upson, C.D., 1984. "A modified finite element method for solving the time-dependent, incompressible Navier-Stokes equations. Part 1: theory". **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 4, pp. 557-598.

Gresho, P.M. e Sani, R.L., 1999. "**Incompressible Flow and the Finite Element Method. Advection-Diffusion and Isothermal Laminar Flow**". Sussex, UK: John Wiley & Sons Ltd.

Griffiths, D.F. e Lorenz, J., 1978. "An analysis of the Petrov-Galerkin finite element method". **Computer Method in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 14, pp. 39-64.

Hanson, T., Smith, F., Summers, D.M. e Wilson, C.B., 1982. "Computer simulation of wind flow around buildings". **Computer Aided Design**, pp. 27-31.

Hanson, T., Summers, D.M. e Wilson, C.B., 1986. "Validation of a computer simulation of wind flow over a building model". **Building and Environment**, vol. 21, pp. 97-111.

Harlow, H. e Nakayama, P.I., 1968. "Transport of turbulent energy decay rate". **Technical Report**, n° LA-3854, Los Alamos.

He, J. e Song, C.C.S., 1999. "Evaluation of pedestrian winds in urban area by numerical approach". **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, vol. 81, pp. 295-309.

Heinrich, J.C., Huyakorn, P.S., Zienkiewicz, O.C. e Mitchell, A.R., 1977. "An upwind finite element scheme for two-dimensional convective transport equations". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 11, pp. 131-143.

Hilber, H.M., Hughes, T.J.R. e Taylor, R.L., 1977. "Improved numerical dissipation for the time integration algorithms in structural dynamics". **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, vol. 5, pp. 283-292.

Hinze, J.O., 1975. "**Turbulence**", New York: McGraw-Hill Inc., 2<sup>nd</sup> ed.

Hirt, C.W., Amsden, A.A. e Cook, J.L., 1974. "An arbitrary Lagrangean-Eulerian computing method for all flow speeds". **Journal of Computational Physics**, vol. 14, pp. 227-253.

Hu, Y.K. e Nagy, L.I., 1997. "A one-point quadrature eight-node brick element with hourglass control". **Computers & Structures**, vol. 65, pp. 893-902.

Hübner, B., Walhorn, E. e Dinkler, D., 2004. "A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 193, pp. 2087-2104.

Hughes, T.J.R., 1980. "Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media". **International Journal of Numerical methods in Engineering**, vol. 15, pp. 1413-1418.

Hughes, T.J.R., 1987. "**The Finite Element Method**". Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.

Hughes, T.J.R., Caughey, T.K. e Liu, W.K., 1978. "Finite element methods for nonlinear elastodynamics which conserve energy". **Journal of Applied Mechanics**, Transaction of the ASME, vol. 45, pp. 366-370.

Hughes, T.J.R., Franca, L.P. e Hulbert, G.M., 1989. "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin-least-squares method for advective-diffusive equations". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 73, pp. 173-189.

Hughes, T.J.R. e Jansen, K., 1993. "Finite element method in wind engineering". **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, vol. 46&47, pp. 297-313.

Hughes, T.J.R., Liu, W.K. e Zimmerman, T.K., 1981. "Lagrangean Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 29, pp. 329-349.

Hughes, T.J.R. e Winget, J.M., 1980. "Finite rotations effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 15, pp. 1862-1867.

Jaiman, R.K., Jiao, X., Geubelle, P.H. e Loth, E., 2005. "Assessment of conservative load transfer for fluid-solid interface with non-matching meshes". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 64, pp. 2014-2038.

Jiao, X. e Heath, M.T., 2004. "Common-refinement-based data transfer between non-matching meshes in multiphysics simulations". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 61, pp. 2402-2427.

Jiang, Y., Alexandre D., Jenkins, H., Arthur, R. e Chen, Q., 2003. "Natural ventilation in buildings: measurement in a wind tunnel and numerical simulation with large-eddy simulation". **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, vol. 91, pp. 331-353.

Jones, W.P. e Launder, B.E., 1972. "The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence". **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 15, pp. 301.

Kawahara, M. e Hirano, H., 1983. "A finite element method for high Reynolds number viscous fluid flow using two step explicit scheme". **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 3, pp. 137-163.

Kawahara, M., Hirano, H. e Kodama, T., 1984. "Two-step explicit finite element method for high Reynolds number flow past through oscillating body". **Finite Elements in Fluids**, John Wiley & Sons, vol. 5, pp. 227-262.

Kawamoto, S., 1995. "An improved  $k-\epsilon-\phi$  turbulence model for wind load estimation. Reproduction of Conical vortices on the roof of 1:1:0,5 building". In: **9<sup>th</sup> Symposium on Numerical Fluid Dynamics**, Japão, pp. 197-198.

Kawamoto, S. e Tanahashi, T., 1994. "High-speed GSMAC-FEM for wind engineering". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 112, pp. 219-226.

Kim, D., Yang, K. e Senda, M., 2004. "Large eddy simulation of turbulent flow past a square cylinder confined in a channel". **Computers & Fluids**, vol. 33, pp. 81-96.

Kirchoff, G., 1850. "Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe". **J. Reine und Angewandte Mathematik (Crelle)**, vol. 40, pp. 51-58.

Knopp, T., Lube, G., Gritzki, R. e Rösler, M., 2005. "A near-wall strategy for buoyancy-affected turbulent flows using stabilized FEM with applications to indoor air flow simulation". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 194, pp. 3797-3816.

Kondo, K., Murakami, S. e Mochida, A., 1997. "Generation of velocity fluctuations for inflow boundary condition of LES". **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, vol. 67&68, pp. 51-64.

Kuhl, D. e Crisfield, M.A., 1999. "Energy-conserving and decaying algorithms in non-linear structural dynamics". **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 45, pp. 569-599.

Kuhl, D. e Ramm, E., 1996. "Constraint energy momentum algorithm and its application to nonlinear dynamics of shells". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 136, pp. 293-315.

Kuhl, D. e Ramm, E., 1999. "Generalized energy-momentum method for non-linear adaptive shell dynamics". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 178, pp. 343-366.

Larsen, A. e Walther, J.H., 1997. "Aeroelastic analysis of bridge girder sections based on discrete vortex simulations". **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, vol. 67&68, pp. 253-265.

Lauder, B.E. e Kato, M., 1993. "Modelling flow-induced oscillations in turbulent flow around a square cylinder". In: **ASME Fluid Engineering Conference**, Washington, DC.

Lauder, B.E. e Spalding, D.B., 1972. "**Lectures in Mathematical Models of Turbulence**". London: Academic Press.

Lax, P.D. e Wendroff, B., 1964. "Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy". **Comm. Pure Appl. Math.**, vol. 17, pp. 381.

Lee, S., 1998. "Numerical study of wake structure behind a square cylinder at high Reynolds number". **Wind and Structures**, vol.1, n°2, pp. 127-144.

Leonard, A., 1974. "Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent flows". **Advances in Geophysics**, vol. 18A, pp. 237-248.

Lesoinne, M. e Farhat, C., 1996. "Geometric conservation laws for flow problems with moving boudaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 134, pp. 70-90.

Lesoinne, M. e Farhat, C., 1998. "Improved staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems". In: **Computational Mechanics**, S. Idelsohn, E. Oñate and E. Dvorakin (eds.), Barcelona: CIMNE.

Löhner, R., 1995. "Robust, vectorized search algorithms for interpolation on unstructured grids". **Journal of Computational Physics**, vol. 118, pp. 380-387.

Lilly, D.K., 1992. "A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method". **Physics of Fluids**, vol. A4, n. 3, pp. 633-635.

Limas, L.F., 2003. "**Determinação das Características Aerodinâmicas de Seções Transversais de Pontes em Túnel de Vento**". Dissertação de Mestrado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre.

Liu, W.K., Guo, Y., Tang, S. e Belytschko, T., 1998. “A multiple-quadrature eight-node hexaedral finite element for large deformation elastoplastic analysis”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 154, pp. 69-132.

Liu, W.K., Hu, Y.K. e Belytschko, T., 1994. “Multiple quadrature underintegrated finite elements”. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 37, pp. 3263-3289.

Liu, W.K., Ong, S.J. e Uras, R.A., 1985. “Finite element stabilization matrices – a unification approach”. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 53, pp. 13-46.

Lyn, D.A., Einav, E., Rodi, W. e Park, J.-H., 1995. “A laser-Doppler velocimeter study of ensemble-averaged characteristics of the turbulent near wake of a square cylinder”. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 304, pp. 285-319.

Maliska, C.R., 2004. “**Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**”. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2<sup>a</sup> ed.

Malvern, L.E., 1969. “**Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**”. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.

Maman, N. e Farhat, C., 1995. “Matching fluid and structure meshes for aeroelastic computations: a parallel approach”. **Computers & Structures**, vol. 54, n° 4, 779-785.

Mase, G.E., 1970. “**Theory and Problems of Continuum Mechanics**”. McGraw Hill: New York.

Meneveau, C., Lund, T.S. e Cabot, W.H., 1996. “A Lagrangean dynamic subgrid-scale model of turbulence”. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 319, pp. 353-385.

Meroney, R. e Bienkiewicz, B. (editors), 1997. “**Computational Wind Engineering 2: Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Symposium on Computational Wind Engineering**”. In: *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 67&68.

Michler, C., van Brummelen, E.H., Hulshoff, S.J. e de Borst, R., 2003. “The relevance of conservation for stability and accuracy of numerical methods for fluid-structure interaction”. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 192, pp. 4195-4215.

Mindlin, R.D., 1951. “Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates”. **Journal of Applied Mechanics**, vol. 18, pp. 31-38.

Mondkar, D.P. e Powell, G.H., 1977. “Finite element analysis of nonlinear static and dynamic response”. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 11, pp. 499-520.

MSC PATRAN, 2001. "User's Guide". MSC Software Corporation, Santa Ana-CA, USA.

Murakami, S. (editor), 1990. "**Current Status of Computational Wind Engineering**". In: *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 35.

Murakami, S., 1993. "Comparison of various turbulence models applied to a bluff body". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 46&47, pp. 21-36.

Murakami, S., 1997. "Current status and future trends in computational wind engineering". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 67&68, pp. 3-34.

Murakami, S. e Kato, S., 1988. "Current status of numerical and experimental methods for analyzing flow field and diffusion field in a room". In: **Proceedings of the Conference on Modelling of Indoor Air Quality and Exposure - ASHRAE**, University of Illinois Press, Urbana-Champaign, IL, USA, pp. 39-56.

Murakami, S., Matsumoto, M. e Mochida, A. (editors), 1993. "**Computational Wind Engineering 1: Proceedings of the 1<sup>st</sup> International Symposium on Computational Wind Engineering**". In: *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 46&47.

Murakami, S. e Mochida, A., 1989. "Three-dimensional numerical simulation of turbulent air flow around buildings by means of the k- $\epsilon$  turbulence model". *Journal of Building Environment*, vol. 24, pp. 51-64.

Murakami, S., Mochida, A. e Hayashi, Y., 1990. "Examining the k- $\epsilon$  model by means of a wind tunnel test and large-eddy simulation of the turbulence structure around a cube". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 35, pp. 87-100.

Murakami, S., Mochida, A. e Hibi, K., 1987. "Numerical prediction of velocity and pressure field around building models". In: **Proc. Of the 7<sup>th</sup> International Conference on Wind Engineering**, Aachen, Alemanha, vol. 2, pp. 31-40.

Murakami, S., Ooka, R., Mochida, A., Yoshida, S. e Kim, S., 1999. "CFD analysis of wind climate from human scale to urban scale". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 81, pp. 57-81.

Murti, V. e Valliapan, S., 1986. "Numerical inverse isoparametric mapping in remeshing and nodal quantity contouring". *Computers & Structures*, vol. 22, n° 6, pp. 1011-1021.

Newmark, N.N., 1959. "A method of computation for structural dynamics". *Journal of the Engineering Mechanic Division*, Proceedings of the ASCE, vol. 85 (EM3), pp. 67-94.

Nielsen, P.V., 1988. "Numerical prediction of air distribution in rooms – status and potentials". **In: Proceedings of the Conference on Modelling of Indoor Air Quality and Exposure - ASHRAE**, University of Illinois Press, Urbana-Champaign, IL, USA, pp. 31-38.

Oñate, E., 1995. "**Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos – Analisis Estático Lineal**". Barcelona: CIMNE, 2ª ed.

Orszag, S.A., Yakhot, V., Flannery, W.S., Boysan, F., Chouhury, D., Maruzewski, J. e Patel, B., 1993. "Renormalization group modelling and turbulence simulations". **In: Near-Wall Turbulent Flows**, So, R.M.C., Speziale, C.G. e Launder, B.E. (eds.), Elsevier Science Publisher.

Padilla, E.L.M. e Silveira-Neto, A., 2003. "Influência de diferentes tipos de filtros para modelagem dinâmica em simulação de grandes escalas". **In: XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE 2003**, Ouro Preto (MG), Brasil, pp. 1-10.

Pantakar, S.V., 1980. "**Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**", Ed. Hemisphere.

Peterka, J.A., Meroney, R.N. e Kothari, K.M., 1985. "Wind flow patterns about buildings". **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, vol. 21, nº 1, pp. 21-38.

Petry, A.P., 1993. "**Análise Numérica da Interação Fluido-Estrutura através do Método dos Elementos Finitos**". Dissertação de Mestrado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre.

Petry, A.P., 2002. "**Análise Numérica de Escoamentos Turbulentos Tridimensionais Empregando o Método dos Elementos Finitos e Simulação de Grandes Escalas**". Tese de Doutorado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre.

Petry, A.P. e Awruch, A.M., 1997. "Simulação de escoamentos turbulentos pelo método dos elementos finitos através da simulação direta de grandes vórtices". **In: ENIEF 97 - Mecânica Computacional**, E. Dari, C. Pedra e R. Saliba (eds.), San Carlos de Bariloche, Argentina, vol. XVIII, pp. 113-122.

Piperno, S. e Farhat, C., 2001. "Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems – Part II: energy transfer analysis and three-dimensional applications". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 190, 3147-3170.

Piperno, S., Farhat, C. e Larrouturou, B., 1995. "Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 124, 11-79.

Popiolek, T.L., 2006. "**Análise de Escoamentos Incompressíveis Utilizando Simulação de Grandes Escalas e Adaptação de Malarhas**". Tese de Doutorado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre.

Posner, J.D., Buchanan, C.R. e Dunn-Rankin, D., 2003. "Measurement and prediction of indoor air flow in a model room". **Energy and Buildings**, vol. 35, pp. 515-526.

Prasad, A.K. e Koseff, J.R., 1989. "Reynolds number and end-wall effects on a lid-driven cavity flow". **Physics Fluids A**, vol. 1, n° 2, pp.208-218.

Reddy, J.N. e Gartling, D.K., 1994. "**The Finite Element Method in the Heat Transfer and Fluid Dynamics**". Boca Raton, Florida: CRC Press.

Reissner, E., 1945. "The effect of transverse shear deformation on the bending of  
elas 7(tic p)5.6(l(e)-6.8(es1(".)]TJ/TT2 1 Tf12.0085 0 0 12.0081580. 5 793.9403 Tm-0.0305 Tc-0.1265 T

Shimada, K., Takei, K., Yamamoto, S. e Sugimoto, H., 1999. "Application of 3D numerical analysis on the prediction of aerodynamic forces of a tall stack cross section". **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, vol. 81, pp. 391-401.

Simiu, E. e Scanlan, R.H., 1996. "**Wind Effects on Structures**". New York: John Wiley & Sons, 2<sup>nd</sup> ed.

Simo, J.C. e Tarnow, N., 1992. "The discrete energy-momentum method. Conserving algorithms for nonlinear elastodynamics". **Journal of Applied Mathematics and Physics**, vol. 43, pp. 757-792.

Slone, A.K., Pericleous, K., Bailey, C. e Cross, M., 2001. "Dynamic fluid structure interaction using finite volume unstructured mesh procedures". **Computers & Structures**, vol. 80, pp. 371-390.

Slone, A.K., Pericleous, K., Bailey, C. Cross, M. e Bennet, C., 2004. "A finite volume unstructured mesh approach to dynamic fluid-structure interaction: an assessment of the challenge of predicting the onset of flutter". **Applied Mathematical Modelling**, vol. 28, pp. 211-239.

Stathopoulos, T., 1997. "Computational wind engineering: Past achievements and future challenges". **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, vol. 67&68, pp. 509-532.

Stathopoulos, T. e Baskaran, A., 1996. "Computer simulation of wind environment conditions around buildings". **Engineering Structures**, vol. 18, n° 11, pp. 876-885.

Summers, D.M., Hanson, T, e Wilson, C.B., 1986. "Validation of a computer simulation of wind flow over a building model". **Journal of Building Environment**, vol. 21, pp. 97-111.

Tabarrok, B. e Su, J., 1994. "Semi-implicit Taylor-Galerkin finite element methods for incompressible viscous flows". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 117, pp. 391-410.

Tang, L.Q., Cheng, T. e Tsang, T.T.H., 1995. "Transient solutions for three-dimensional lid-driven cavity flows by a least-squares finite element method". **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 21, pp. 413-432.

TECPLOT 8.0, 2000. "User's Manual". Amtec Engineering Inc., Houston-Tx, USA.

Teixeira, P.R.F., 2001. "**Simulação Numérica da Interação de Escoamentos Tridimensionais de Fluidos Compressíveis e Incompressíveis e Estruturas Deformáveis Usando o Método dos Elementos Finitos**". Tese de Doutorado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre.

Teixeira, P.R.F. e Awruch, A.M., 2001. "Three dimensional simulation of high compressible flows using a multi-time-step integration technique with subcycles". **Applied Mathematic Modelling**, vol. 25, pp. 613-627.

Tezduyar, T., Behr, M. e Liou, J., 1992. "A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces – the deforming spatial domain/space-time procedure: I. The concept and the preliminary numerical tests". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 94, pp. 339-351.

Tezduyar, T.E. e Osawa, Y., 2001. "The multi-domain method for computation of the aerodynamics of a parachute crossing the far wake of an aircraft". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 191, pp. 705-716.

Thomas, P.D. e Lombard, C.K., 1979. "Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids". **AIAA**, vol. 17, pp. 1030-1037.

Timoshenko, S.P. e Woinowski-Krieger, S., 1959. "**Theory of Plates and Shells**". Auckland: McGraw Hill, 2<sup>nd</sup> ed.

Tsuchiya, M., Murakami, S., Mochida, A., Kondo, K. e Ishida, Y., 1997. "Development of a new k- $\epsilon$  model for flow and pressure fields around bluff body". **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, vol. 67&68, pp. 169-182.

Tutar, M. e Oguz, G., 2002. "Large eddy simulation of wind flow around parallel buildings with varying configurations". **Fluid Dynamics Research**, vol. 31, pp. 289-315.

Vaz dos Santos, M.A., 1993. "**Simulação Numérica de escoamentos compressíveis e sua interação com estruturas deformáveis**". Tese de Doutorado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre.

Wall, W.A. e Ramm, E., 1998. "Fluid-structure interaction based upon a stabilized (ALE) finite element method". In: **Computational Mechanics**, S. Idelsohn, E. Oñate and E. Dvorkin (eds.), CIMNE, Barcelona.

Wanderley, J.B.V. e Levi, C.A., 2002. "Validation of a finite difference method for the simulation of vortex-induced vibrations on a circular cylinder". **Ocean Engineering**, vol. 29, pp. 445-460.

White, F.M., 1991. "**Viscous Fluid Flow**". New York: McGraw Hill, 2<sup>nd</sup> ed.

Wilcox, D.C., 1988. "Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models". **AIAA Journal**, vol. 26 (11), pp. 1299-1310.

Wiren, B.G., 1975. "A wind tunnel study of wind velocities in passages and through buildings". **Proceedings of the Fourth International Conference on Wind Effects on Buildings and Structures**, Heatrow, United Kingdom, pp. 465-475.

Wood, W.L., Bossak, M. e Zienkiewicz, O.C., 1981. “An alpha modification of Newmark’s method”. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 15, pp. 1562-1566.

Yakhot, V. e Orszag, S.A., 1986. “Renormalization group analysis of turbulence. I. Basic theory”. **Journal of Scientific Computations**, vol. 1, pp. 3-51.

Yoon, K.T., Moon, S.Y., Garcia, S.A., Heard, G.W. e Chung, T.J., 1998. “Flow field-dependent mixed explicit-implicit (FDMEI) methods for high and low speed and compressible and incompressible flows. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 151, pp. 75-104.

Zang, Y., Street, R.L. e Koseff, J.R., 1993. “A dynamic mixed subgrid-scale model and its application to turbulent recirculating flows”. **Physics of Fluids A**, vol. 5, n° 12, pp. 3186-3196.

Zhang, Q. e Hisada, T., 2004. “Studies of the strong coupling and weak coupling methods in FSI analysis”. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 60, pp. 2013-2029.

Zhu, Y. e Cescotto, S., 1996. “Unified and mixed formulation of the 8-node hexaedral elements by assumed strain method”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 129, 177-209.

Zienkiewicz, O.C., 1967. “**The Finite Element Method in Engineering Science**”. New York: McGraw Hill, 1<sup>st</sup> ed.

Zienkiewicz, O.C. e Taylor, R.L., 2005. “**The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics**”. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 6<sup>th</sup> ed.

<sup>a</sup>Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. e Nithiarasu, P., 2005. “**The Finite Element Method for Fluid Dynamics**”. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 6<sup>th</sup> ed.

<sup>b</sup>Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. e Zhu, J.Z., 2005. “**The Finite Element Method: Its Basis & Fundamentals**”. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 6<sup>th</sup> ed.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)