**Universidade Federal de Goiás**
**Instituto de Matemática e Estatística**

# Métricas de Einstein Projetivas na Geometria de Riemann-Finsler

**por**

**Stela Mares Corrêa**

**Orientador: Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza**

Dissertação de Mestrado em Matemática

Goiânia - Goiás
2007

**Universidade Federal de Goiás**
**Instituto de Matemática e Estatística**
**Coordenação de Pós-Graduação em Matemática**

# Métricas de Einstein Projetivas na Geometria de Riemann-Finsler

**por**

**Stela Mares Corrêa**

**Área de concentração: Geometria Diferencial**

**Orientador: Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza**

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Conselho Diretor do Instituto de Matemática e Estatística, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Goiânia - Goiás

2007

# Agradecimentos


- A Deus, pelo seu incondicional apoio;
- Ao professor Marcelo, pelo incentivo, dedicação e paciência;
- A minha família, por estarem ao meu lado em todos os momentos, pelos valores e princípios que me ensinaram;
- À todos os meus amigos do mestrado de maneira especial à Gisele, Marta, Kênio, Paulo, Renata, Lilian, Everson, Franciane e Ana Paula pelo apoio e observações feitas na dissertação;
- Ao professor Max Valério e demais professores da área de Geometria pelas observações feitas na dissertação ;
- A Capes pelo apoio financeiro.

# Sumário

# Resumo

Nesta dissertação estudamos a relação projetiva ponto a ponto das métricas de Einstein (tendo as mesmas geodésicas como conjunto de pontos). Mostraremos que pontualmente as métricas de Einstein projetivamente relacionadas satisfazem uma equação simples ao longo de geodésicas. Em particular, mostramos que se duas métricas de Einstein projetivamante relacionadas pontualmente são completas, com constante de Einstein negativa, então uma é múltipla da outra.

# Abstract

In this dissertation we study pointwise projectively related Einstein metrics (having the same geodesics as point sets). We show that pointwise projetively related Einstein metrics satisfy a simple equation along geodesics. In particular, we show that if two pointwise projectively related Einstein metrics are complete with negative Einstein constants, then one is a multiple of another.

# Introdução

S.S. Chern dizia o seguinte: ***A geometria de Finsler é exatamente a geometria Riemanniana sem a restrição quadrática*** [3].

Em 1854, Riemann introduziu uma estrutura métrica em um espaço geral baseado no elemento de arco $ds = F(x^1, ..., x^n; dx^1, ..., dx^n)$. Aqui, $F(x, y)$ é uma função positiva para $y \neq 0$ no fibrado tangente $TM$, e é homogênea de grau um em $y$.

Um caso especial importante é quando

$$F(x, dx) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) dx^i dx^j, \tag{0.1}$$

neste caso dizemos que $F$ é Riemanniana (a restrição quadrática).

Em 1918, Paul Finsler estudou espaços métricos mais gerais, hoje chamados espaços Riemann-Finsler ou simplesmente espaços de Finsler. O problema de caracterização e estudo das métricas projetivas é conhecido como o ***quarto problema de Hilbert***. Em 1900 num congresso em Paris, Hilbert enunciou 24 problemas, sendo que o quarto problema refere-se ao estudo da métricas projetivas. O problema 23 é dedicado ao cálculo de variações da integral e seus significados geométricos.

Há alguns desenvolvimentos na geometria de Finsler, nos anos recentes, que merecem atenção. Eles têm mostrado que a geometria diferencial moderna fornece os conceitos e as ferramentas para efetuar um tratamento da geometria de Riemann, sem a limitação quadrática, de uma maneira direta e elegante com resultados locais e globais.

Isto não dá somente uma compreensão melhor da geometria mas abre um visão comparável aos desenvolvimentos da geometria algébrica das quádricas para variedades algébricas gerais.

Nosso trabalho foi baseado nos seguintes artigos de Zhongmin Shen: On projectively related Einstein metrics in Riemann-Finsler geometry [9], o qual trabalhamos no capítulo 2 e Funk Metrics and R-Flat Sprays [8], o qual trabalhamos no capítulo 3.

**No Capítulo 1**, apresentaremos alguns conceitos e resultados de Geometria Riemanniana e apresentaremos também conceitos e resultados da Geometria de Finsler, resultados estes que foram de suma importância para o desenvolvimento deste trabalho.

**No Capítulo 2**, estudaremos as métricas de Einstein projetivamente relacionadas pontualmente cujas constantes de Einstein são: $\lambda = 0$, $\lambda = -1$, $\lambda = 1$.

**No Capítulo 3**, trataremos das métricas de Funk e de Klein. Estudaremos o seguinte problema: Dada uma métrica de Finsler $\tilde{F}$ sobre $\Omega$ vamos determinar um spray $\tilde{G}$, tal que, $\tilde{G}$ seja induzido por $\tilde{F}$. Veremos também o problema inverso: Dado um spray $\tilde{G}$, vamos determinar uma métrica de Finsler $\tilde{F}$, projetivamente pontualmente flat a uma métrica de Funk definida em $\Omega$, tal que, $\tilde{G}$ seja induzido por $\tilde{F}$.

Vejamos, abaixo, alguns problemas os quais iremos tratar no decorrer do nosso trabalho:

**Problema 0.1.** *Um problema natural é determinar todas métricas projetivas de curvatura constante num dado subconjunto $A$ aberto de $\mathbb{R}^n$.*

**Problema 0.2.** *Mais geral, dada uma métrica numa variedade $M$, gostaríamos de determinar todas as métricas de Finsler projetivas pontualmente uma a outra.*

**Problema 0.3.** *Estudar as métricas de Einstein projetivamente relacionadas pontualmente, numa variedade $M$.*

Nesta dissertação trataremos também do seguinte problema:

Dada uma métrica de Einstein, descreva todas as métricas de Einstein que são pontualmente projetiva a métrica dada.

$F$ é dita **completa positiva** (resp. **completa negativa** ), se toda geodésica definida no intervalo aberto $(a, b)$ pode ser estendida para o intervalo $(a, \infty)$, $(resp.(-\infty, b))$.

$F$ é dita **completa** se é completa positiva e negativa. Existem métricas de Finsler que são completas positivas, mas não são completas (ver (2.4)).

Se uma métrica projetiva de Finsler for uma métrica de Einstein, então ela deve ser de curvatura constante. Vejamos alguns exemplos de métricas projetivas que são, realmente, de curvatura constante. Provaremos isto posteriormente .

A ***métrica esférica*** $F_s$ definida no $\mathbb{R}^n$ é uma métrica projetiva Riemanniana incompleta com curvatura constante igual a 1, definida da seguinte forma

$$F_s(y) := \frac{\sqrt{|y|^2 + (|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2)}}{1 + |x|^2}, \qquad y \in T_x\mathbb{R}^n. \tag{0.2}$$

A ***métrica de Hilbert*** $F_H$ na bola unitária $B^n \subset \mathbb{R}^n$ é uma métrica projetiva Riemanniana completa com curvatura constante igual a $-1$, definida da seguinte forma

$$F_H(y) := \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2)}}{1 - |x|^2}, \qquad y \in T_xB^n = \mathbb{R}^n. \tag{0.3}$$

Abaixo estão nossos principais teoremas.

**Teorema 0.1.** *Sejam $F$ e $\tilde{F}$ métricas de Einstein numa variedade $M^n$, com*

$$Ric = (n-1)F^2, \qquad \tilde{Ric} = (n-1)\tilde{\lambda}\tilde{F}^2.$$

*Então para toda geodésica unitária $c(t)$ de $F$,*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{2}{(a^2 - \frac{\tilde{\lambda}}{a^2} - b^2)\cos(2t) + 2ab\sin(2t) + (a^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{a^2} + b^2)}, \tag{0.4}$$

*onde $a > 0$ e $b \neq 0$.*

*(i) Se* $\tilde{\lambda} = 1$, *então ao longo de qualquer geodésica* $c(t)$ *de* $F$ *com velocidade unitária,*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{\sqrt{C^2 - 1}\sin(\theta \pm 2t) + C},$$

*onde* $C > 1$ *e* $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. *Assim, para toda geodésica unitária* $c(t)$ *de* $F$, *com* $F-$*comprimento* $L_F(c) = \pi$, *o* $\tilde{F}-$*comprimento* $L_{\tilde{F}}(c) = \pi$.

*(ii) Se* $\tilde{\lambda} = 0$, *então ao longo da geodésica* $c(t)$ *de* $F$,

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{C\sin(\theta \pm 2t) + C},$$

*onde* $C > 0$ *e* $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. *Assim, toda geodésica* $c(t)$ *de* $F$ *tem comprimento finito.*

*(iii) Se* $\tilde{\lambda} = -1$ *ao longo da geodésica* $c(t)$ *de* $F$,

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{\sqrt{C^2 + 1}\sin(\theta \pm 2t) + C},$$

*onde* $C$ *é uma constante e* $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. *Assim, toda geodésica* $c(t)$ *de* $F$ *tem comprimento finito.*

**Teorema 0.2.** *Sejam* $F$ *e* $\tilde{F}$ *métricas de Einstein numa variedade* $M^n$, *com* $Ric = 0$ *e* $\tilde{Ric} = (n-1)\tilde{\lambda}\tilde{F}^2$. *Suponha que* $F$ *e* $\tilde{F}$ *sejam projetivamente relacionadas pontualmente em* $M$. *Então para toda geodésica unitária* $c(t)$ *de* $F$,

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{(a + bt)^2 + \tilde{\lambda}\left(\frac{t}{a}\right)^2}. \tag{0.5}$$

*(i) Se* $\tilde{\lambda} = 1$, *então ao longo de toda geodésica* $c(t)$ *de* $F$,

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{(a + bt)^2 + \left(\frac{t}{a}\right)^2}.$$

*Assim para toda geodésica* $c(t)$ *de* $F$, *o* $\tilde{F}$*-comprimento* $L_{\tilde{F}}(c) \leq \pi$.

*A igualdade ocorre quando* $F$ *é completa.*

*(ii) Se* $\tilde{\lambda} = 0$*, então ao longo de toda geodésica unitária* $c(t)$ *de* $F$*,*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{(a+bt)^2}. \tag{0.6}$$

*(a) Se a geodésica unitária* $c$ *de* $F$ *é definida de* $(-\infty, \infty)$*, então*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{a^2}.$$

*(b) Se a geodésica unitária* $c$ *de* $F$ *é definida em* $[0, \infty)$*, então ela tem comprimento* $\tilde{F}$ *finito, a menos que*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{a^2}.$$

*(c) Se a geodésica unitária* $c$ *de* $F$ *é definida de* $(-\infty, 0]$*, então ela tem comprimento* $\tilde{F}$ *finito, a menos que*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{a^2}.$$

*Portanto,* $F$ *é completa se, e somente se,* $\tilde{F}$ *é completa. Neste caso, ao longo de toda geodésica* $c$

$$\frac{F(\dot{c}(t))}{\tilde{F}(\dot{c}(t))} = \textit{constante}.$$

*(iii) Se* $\tilde{\lambda} = -1$ *então, ao longo de toda geodésica unitária* $c(t)$ *de* $F$*,*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{(a+bt)^2 - \left(\dfrac{t}{a}\right)^2}. \tag{0.7}$$

*Assim nenhuma geodésica de* $F$ *está definida no intervalo* $(-\infty, \infty)$*.*

*(a) Se a geodésica unitária* $c$ *de* $F$ *é definida de* $[0, \infty)$*, então ela tem comprimento* $\tilde{F}$ *finito, a menos que*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{a^2 + 2t}. \tag{0.8}$$

*(b) Se a geodésica unitária c de F é definida de* $(-\infty, 0]$, *então ela tem comprimento* $\tilde{F}$ *finito, a menos que*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{a^2 - 2t}. \tag{0.9}$$

**Teorema 0.3.** *Sejam* $F$ *e* $\tilde{F}$ *métricas de Einstein numa variedade* $M^n$, *com*

$$Ric = -(n-1)F^2, \qquad \tilde{Ric} = (n-1)\tilde{\lambda}\tilde{F}^2.$$

*Assuma que* $F$ *e* $\tilde{F}$ *são projetivamente relacionadas pontualmente. Então para toda geodésica* $c(t)$ *de* $F$,

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{\big(a^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{a^2} + b^2\big)\cosh(2t) + 2ab\sinh(2t) - \big(-a^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{a^2} + b^2\big)}. \tag{0.10}$$

*(i) Se* $\tilde{\lambda} = 1$, *então neste caso, toda geodésica de* $\tilde{F}$ *tem comprimento finito. Assim* $\tilde{F}$ *não é completa positiva nem completa negativa.*

*(ii) Se* $\tilde{\lambda} = 0$, *então neste caso as geodésica de* $\tilde{F}$ *não estão definidas no intervalo* $I = (-\infty, \infty)$.

*(iia) Se uma geodésica unitária c de F está definida no intervalo* $[0, \infty)$, *então* $\tilde{F}$*-comprimento finito, a menos que*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = (\frac{e^t}{a})^2. \tag{0.11}$$

*(iib) Se uma geodésica unitária c de F está definida no intervalo* $(-\infty, 0]$, *então* $\tilde{F}$*-comprimento finito, a menos que*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = (\frac{e^{-t}}{a})^2. \tag{0.12}$$

*(iii) Se* $\tilde{\lambda} = -1$. *Neste caso, se ambas* $F$ *e* $\tilde{F}$ *são completas, então*

$$F = \tilde{F}.$$

*(iiia) Se uma geodésica unitária c de F está definida no intervalo* $[0, \infty)$, *então esta tem* $\tilde{F}$*-comprimento finito, a menos que*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{e^{-2t}(a^2 - 1) + 1}, \ (a \geq 1). \tag{0.13}$$

*(iiib) Se uma geodésica unitária c de F está definida no intervalo* $(-\infty, 0]$, *então esta tem* $\tilde{F}$*-comprimento finito, a menos que*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{e^{2t}(a^2 - 1) + 1}, \ (a \geq 1). \tag{0.14}$$

# Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos e resultados da Geometria Riemanniana e apresentaremos também conceitos e resultados da Geometria de Finsler, resultados estes que foram de suma importância para o desenvolvimento deste trabalho.

## 1.1 Variedades Diferenciáveis: Espaços Riemannianos.

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos e resultados da Geometria Riemanniana os quais serão utilizados neste trabalho.

**Definição 1.1.** *Seja $M^n$ uma variedade diferenciável e seja $TM = \{(p, v) : p \in M \text{ e } v \in T_pM\}$. O conjunto $TM$ de uma estrutura diferenciável (de dimensão $2n$); será chamado* fibrado tangente *de $M$.*

**Definição 1.2.** *Um* campo de vetores *$X$ em uma variedade diferenciável $M$ é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicação, $X$ é uma aplicação de $M$ no fibrado tangente $TM$. O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \to TM$ é diferenciável.*

**Definição 1.3.** *Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável $M$ é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle , \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear, simétrica, positiva definida) no espaço tangente $T_pM$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de $p$, com $x(x_1, x_2, ...x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, ..., 1, ..., 0)$, então $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_{ij}(x_1, x_2, ...x_n)$ é uma função diferenciável em $U$.*

No que se segue, $\mathcal{X}(M)$ denotará o conjunto de campos de vetores de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $M$ e $\mathcal{D}(M)$ o conjunto das funções reais de classe $\mathcal{C}^\infty$ definidas em $M$.

**Definição 1.4.** *Uma aplicação diferenciável $c : I \to M$ de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em uma variedade diferenciável $M$ chama-se uma curva (parametrizada).*

**Definição 1.5.** *Uma conexão afim $\nabla$ em uma variedade diferenciável $M$ é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

*que se indica por $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3. $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$

*onde $X$, $Y$, $Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f$, $g \in \mathcal{D}(M)$.*

**Definição 1.6.** *Seja $M$ uma variedade diferenciável com uma conexão afim $\nabla$. Um campo vetorial $V$ ao longo de uma curva $c : I \to M$ é chamado paralelo quando a derivada covariante de $V$ ao longo de $c$ é nula, isto é, $\frac{DV}{dt} = 0$, $\forall\, t \in I$.*

**Definição 1.7.** *Seja $M$ uma variedade diferenciável com uma conexão afim $\nabla$ e uma uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle$. A conexão é dita* **compatível** *com a métrica $\langle , \rangle$, quando para toda curva diferenciável $c$ e quaisquer pares de campos de vetores paralelos $P$ e $P'$ ao longo de $c$, tivermos $\langle P, P' \rangle =$ constante.*

A Definição 1.7 é justificada pela proposição seguinte que mostra que se $\nabla$ é compatível com $\langle , \rangle$, então podemos diferenciar o produto interno pela regra do produto usual.

**Proposição 1.1.** *Seja $M$ uma variedade Riemanniana. Uma conexão $\nabla$ em $M$ é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par $V$ e $W$ de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \to M$ tem-se*

$$\frac{d}{dt} < V, W > = < \frac{DV}{dt}, W > + < V, \frac{DW}{dt} >, \ \ t \in I, \tag{1.1}$$

*onde $\frac{DV}{dt}$ é um campo vetorial ao longo da curva $c$, denominado derivada covariante de $V$ ao longo de $c$, que em um sistema de coordenadas locais é dado por $\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{ij} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{X_i} X_j$, se $V = \sum_j v^j X_j$ e $c(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$.*

**Definição 1.8.** *Uma conexão afim $\nabla$ em uma variedade diferenciável $M$ é dita* **simétrica**, *quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

*para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.*

**Observação 1.1.** *Em um sistema de coordenadas $(U, X)$, o fato da conexão ser simétrica implica que para todo $i, j = 1, ..., n$,*

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.2}$$

**Teorema 1.1.** *(Levi Civita) Dada uma variedade Riemanniana $M$, existe uma única conexão afim $\nabla$ em $M$ satisfazendo as condições:*

1. *$\nabla$ é simétrica;*

2. *$\nabla$ é compatível com a métrica Riemanniana.*

**Observação 1.2.** *A conexão $\nabla$ dada pelo Teorema (1.1)* é denominada conexão Riemanniana de $M$ ou conexão de Levi Civita, e caracterizada pela, conhecida Fórmula de Koszul,

$$\begin{aligned}\langle Z, \nabla_Y X\rangle &= \frac{1}{2}\{X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle + \\ &\quad \langle [X,Z],Y\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle - \langle [X,Y],Z\rangle\}.\end{aligned}$$

Escolhendo um sistema de coordenadas $(U, X)$ em torno de $p$, escrevendo $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$; $i = 1, \ldots, n$ e fazendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ (os $\Gamma_{ij}^k$ são chamados os símbolos de Christoffel da conexão), temos que pela Fórmula de Koszul que

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\right\},$$

onde $g_{ij} =< X_i, X_j >$, $i, j, k = 1, ..., n$, é a expressão da métrica nas coordenadas locais.

Como a matriz $(g_{km})$ admite uma inversa $(g^{km})$, teremos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\sum_k \left\{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\right\} g^{km}. \tag{1.3}$$

Em seguida definiremos a curvatura em uma variedade Riemanniana $M$.

**Definição 1.9.** *A curvatura $R$, de uma variedade Riemanniana $M$ é uma correspondência que associa a cada par $X$, $Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \ \ Z \in \mathcal{X}(M),$$

*onde $\nabla$ é a conexão Riemanniana de $M$.*

Observe que se $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X,Y)Z = 0, \ \forall \ X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$. Em um sistema de coordenadas $(U, X)$ em torno de $p \in M$, denotamos

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R^l_{ijk} X_l,$$

temos que os $R^l_{ijk}$ se expressam em termos de $\Gamma^k_{ij}$ por

$$R^s_{ijk} = \sum_l \Gamma^l_{ik}\Gamma^s_{jl} - \sum_l \Gamma^l_{jk}\Gamma^s_{il} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^s_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^s_{jk}. \tag{1.4}$$

Relacionada com o operador $R$, está a curvatura seccional que será definida a seguir.

**Definição 1.10.** *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$, o número real*

$$K(\sigma) = K(u,v) = \frac{< R(u,v)u, v >}{\sqrt{|u|^2|v|^2 - < u, v >^2}},$$

*onde $\{u, v\}$ é uma base qualquer de $\sigma$, é dito a* **curvatura seccional** *de $\sigma$ em $p$.*

Para $(M, F)$ um espaço de Finsler, veremos o invariante equivalente que é chamado *curvatura flag*. Uma variedade Riemanniana $(M, g)$ é chamada um **espaço de Einstein** (e, neste caso $g$ é referida como uma **métrica de Einstein**) se o tensor de Ricci for um múltiplo da métrica $g$:

$$\mathrm{Ric}g\,(X,Y) = \lambda g\,(X,Y)\,,$$

para todo $X, Y \in T_pM$, onde $\lambda$ é uma função $\lambda : M \to \mathbb{R}$. Neste caso, temos que $K = n\lambda$.

Além da curvatura seccional ter interessantes interpretações geométricas, sua importância provém do fato que o conhecimento de $K(\sigma)$ para todo $\sigma$, determina completamente a curvatura $R$.

Seja $v = e_n$ um vetor unitário em $T_pM$, tomemos uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ do hiperplano de $T_pM$ ortogonal a $v$, consideremos as seguintes expressões:

$$Ric_p(v) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} < R(v, e_i)v, e_i >$$

$$K(p) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Ric_p(e_j) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,j=1}^{n} < R(e_j, e_i)e_j, e_i > .$$

As expressões acima não dependem das bases ortonormais (ver [5]) e são chamadas de Curvatura de Ricci na direção de $v$ e Curvatura escalar em $p$, respectivamente.

**Definição 1.11.** *Uma curva parametrizada $\gamma : I \to M$ é uma* **geodésica em** *$t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$ no ponto $t_0$; se $\gamma$ é geodésica em $t$, para todo $t \in I$, dizemos que $\gamma$ é uma* **geodésica**. *Se $[a, b] \subset I$ e $\gamma : I \to M$ é uma geodésica, a restrição de $\gamma$ a $[a, b]$ é chamada (segmento de)* **geodésica** *ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.*

**Definição 1.12.** *Uma variedade Riemanniana $M$ é (geodesicamente)* **completa** *se, para todo $p \in M$, a aplicação exponencial, $exp_p$, está definida para todo $v \in T_pM$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de $p$ estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

**Observação 1.3.** *As variedades completas com curvatura seccional constantes são chamadas* **formas espaciais**.

## 1.2 Espaços de Finsler

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos e resultados de Geometria de Finsler que serão utilizados neste trabalho.

Em todo esse trabalho, usaremos a notação da convenção de Einstein, isto é, pares de

índices repetidos, um em cima e outro em baixo, indicam somatório.
Por exemplo, $\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, ou simplesmente $y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

**Definição 1.13.** *Seja $F : TM \to [0, \infty)$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

*(i) $F$ é $C^\infty$ sobre $TM - \{0\}$;*

*(ii) $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, $\lambda > 0$, $F$ é positiva homogênea de grau 1 em $y$;*

*(iii) $\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon^i g_{ij} \varepsilon^j > 0$, $\overrightarrow{\varepsilon} = (\varepsilon^i) \neq 0$, $\forall (x, y) \in TM - \{0\}$, onde*

$$g_{ij}(x, y) := (\frac{1}{2}F^2)_{y^i y^j}(x, y).$$

*$F$ é chamada **Métrica de Finsler.** O par $(M^n, F)$ é dito **Espaço de Finsler.***

Vamos mostrar que a métrica $F_S(y)$ em $\mathbb{R}^n$, dada em (0.2) é uma métrica de Finsler:

(i) $F_S(y) \in C^\infty$ em $T\mathbb{R}^n - \{0\}$, pois só não o seria se $y = 0$, o que daria uma indeterminação;

$F_S(y) \geqslant 0$, pois pela desigualdade de Cauchy Schwarz $|x||y| \geqslant \langle x, y \rangle$,

logo

$|x|^2|y|^2 \geqslant \langle x, y \rangle^2$,

o que resulta que o radicando da equação é positivo, portanto a métrica esférica é não negativa;

(ii) $F_S(y)$ é homogênea de grau um, pois para $\lambda > 0$ e $y \in T_x\mathbb{R}^n$
$F_S(\lambda y) := \frac{\sqrt{|\lambda y|^2 + (|x|^2|\lambda y|^2 - \langle x, \lambda y \rangle^2)}}{1 + |x|^2} = \lambda F_S(y)$;

(iii)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{F^2}{2}\right)_{y^i} &= \left(\frac{|y|^2 + (|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2)}{2(1+|x|^2)}\right)_{y^i} \\
&= \frac{2y^i + 2y^i|x| - 2x^i\langle x, y\rangle}{2(1+|x|^2} \\
&= \frac{y^i + y^i|x| - x^i\langle x, y\rangle}{(1+|x|)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{F^2}{2}\right)_{y^iy^j} &= \left(\frac{y^i}{1+|x|^2} - \frac{\langle x, y\rangle x^i}{(1+|x|^2)^2}\right)_{y^j} \\
&= \frac{\delta_{ij}}{1+|x|^2} - \frac{x^ix^j}{(1+|x|^2)^2} \\
&=: g_{ij}(x),
\end{aligned}$$

logo $g_{ij}(x)$ é uma métrica Riemanniana, pois depende apenas de $x$, restando apenas mostrar que a forma quadrática $\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon^i g_{ij} \varepsilon^j > 0$, é positiva definida. Para provar basta usar o processo de indução em n . De modo análogo, podemos concluir que a métrica de Hilbert na bola $B^n$ dada por (0.3), é uma métrica de Finsler.

**Definição 1.14.** *Dois espaços métricos regulares $M_1$ e $M_2$ são ditos projetivamente relacionadas se existe um difeomorfismo entre eles tal que a* **pull back** *leva métrica projetiva pontualmente uma na outra. Duas métricas são ditas* ***projetivamente relacionadas pontualmente*** *se elas têm as mesmas geodésicas como conjunto de pontos.*

**Definição 1.15.** *Um domínio $\Omega$ num espaço vetorial $V$ é dito* ***fortemente convexo*** *se existe um ponto $x_0 \in \Omega$ e uma norma de Minkowski $\varphi$ sobre $V$, tal que,*

$$\partial\Omega - x_0 = \{z \in V/\varphi(z) = 1\} = \varphi^{-1}(1).$$

**Definição 1.16.** *As métricas de um subconjunto fortemente convexo $\Omega \subset R^n$, as quais são projetivamente relacionadas pontualmente com a métrica Euclidiana serão chamadas simplesmente de* ***Métricas Projetivas****.*

Veremos a seguir um teorema que caracteriza funções homogêneas, o qual será utilizado no decorrer do nosso trabalho.

**Teorema 1.2.** *Seja $A$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$, tal que, se $y \in A$ e $t > 0$, então $ty \in A$ e seja $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então para $k \in \mathbb{R}$, $F$ é homogênea de grau $k$ $(F(ty) = t^k F(y))$ se, e somente se,*

$$y^i \frac{\partial F}{\partial y^i}(y) = kF(y), \forall y \in U.$$

**Demonstração.** $(\Rightarrow)$ Sejam $y = (y_1, ..., y_n)$ e $ty = (ty_1, ..., ty_n) = (u_1, ..., u_n)$. Derivando $F(ty) = t^k F(y)$ com respeito a $t$ obtemos

$$\begin{aligned} kt^{k-1}F(y) &= \frac{\partial}{\partial t}[F(ty)] \\ &= \frac{\partial}{\partial t}[F(u_1, ..., u_1)] \\ &= F_{u_1}u_1' + ... + F_{u_n}u_n' \\ &= \sum_{i=1}^{n} F_{u_i}u_i'(ty) \\ &= \sum_{i=1}^{n} F_{ty_i}y_i(ty). \end{aligned}$$

Se tomarmos $t = 1$ obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} F_{y_i}y_i(y) = kF(y) \Leftrightarrow y^i F_{y^i}(y) = kF(y). \tag{1.5}$$

$(\Leftarrow)$ Vamos supor que vale a igualdade (1.5). Fixe $y$ e considere $F(ty)$ com $t > 0$, daí

$$\frac{\partial}{\partial t}[F(ty)] = y^i F_{y^i}(ty) = \frac{(ty)^i}{t} F_{y^i}(ty) = \frac{k}{t}F(ty),$$

logo

$$\frac{\partial}{\partial t}[F(ty)] = \frac{k}{t}F(ty). \tag{1.6}$$

Como $F \in \mathbb{R}^n - 0$, daí

$$\frac{\partial}{\partial t}[\log F(ty)] = \frac{1}{F(ty)}\frac{\partial}{\partial t}[F(ty)] = \frac{1}{F(ty)}\frac{k}{t}F(ty) = \frac{k}{t},$$

mas

$$\frac{k}{t} = \frac{\partial}{\partial t}[k \log F(t)] = \frac{\partial}{\partial t}[\log t^k].$$

Portanto

$$\frac{\partial}{\partial t}[\log F(ty)] = \frac{\partial}{\partial t}[\log(t)^k],$$

logo

$$\log F(ty) = \log t^k + c_1,$$

daí

$$F(ty) = ct^k, \tag{1.7}$$

onde $c$ é constante. Se tomarmos $t = 1$, obtemos

$$c = F(y), \tag{1.8}$$

substituindo em (1.7), obtemos

$$F(ty) = t^k F(y).$$

□

Em particular, se $F$ for positiva homogênea de grau $k = 1$, teremos

$$F(ty) = tF(y), \tag{1.9}$$

logo

$$y^i F_{y^i}(y) = F(y), \tag{1.10}$$

equivalente a

$$\frac{y^i}{F}F_{y^i}(y) = 1. \tag{1.11}$$

Vamos mostrar que para funções homogêneas de grau um em $\mathbb{R}^n$, valem as seguintes propriedades:

(a) $y^j F_{y^i y^j}(y) = 0$, $\forall i$.

(b) $y^k F_{y^i y^j y^k}(y) = -F_{y^i y^j}(y)$, $\forall i, j$.

(c) $y^l F_{y^i y^j y^k y^l}(y) = -2F_{y^i y^j y^k}(y)$, $\forall i, j, k$.

De fato,

(a) Derivando (1.10) em relação a $y^j$ obtemos

$$\frac{\partial y^i}{\partial y^j} F_{y^i} + y^i F_{y^i y^j} = F_{y^j},$$

daí

$$\delta_{ij} F_{y^i} + y^i F_{y^i y^j} = F_{y^j},$$

logo

$$y^j F_{y^i y^j} = F_{y^j} - F_{y^j}, \ \forall i$$

portanto

$$y^j F_{y^i y^j} = 0. \tag{1.12}$$

(b) Derivando (1.12) em relação a $y^k$ obtemos

$$\frac{\partial y^j}{\partial y^k} F_{y^i y^j} + y^j F_{y^i y^j y^k} = 0,$$

daí

$$\delta_{jk} F_{y^i y^j} + y^j F_{y^i y^j y^k} = 0, \ \forall i, j$$

logo

$$y^k F_{y^i y^j y^k} = -F_{y^i y^j} \tag{1.13}$$

(c) Derivando (1.13) em relação a $y^l$ obtemos

$$\frac{\partial y^k}{\partial y^l} F_{y^i y^j y^k} + y^k F_{y^i y^j y^k y^l} = -F_{y^i y^j y^k},$$

daí

$$\delta_{kl} F_{y^i y^j y^k} + y^k F_{y^i y^j y^k y^l} = -F_{y^i y^j y^k}, \ \forall i, j, k$$

logo

$$y^l F_{y^i y^j y^k y^l} = -2F_{y^i y^j y^k} \tag{1.14}$$

□

**Exemplo 1.1.** *(Espaço de Minkowski). Seja $V^n$ um espaço vetorial de dimensão $n$. $F(x, y) = F(y)$, $\forall x \in V$ e $\forall y \in T_x V$, definimos,*

$$\begin{aligned} F_x \ &: \ T_x V \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ y &\longmapsto F_x(y) = \sqrt{y.y} = \sqrt{g_{ij}(x) y^i y^i} = \sqrt{c_{ij} y^i y^i}. \end{aligned}$$

Para todo $y \in T_x M - \{0\}$, a matriz hessiana $(g_{ij}(y))$ induz um produto interno $g_y$ em $T_x M$, por

$$g_y(u, v) = g_{ij}(y) u^i v^i.$$

Se $g$ é uma métrica Riemanniana, então

$$F(y) := \sqrt{g(y, y)},$$

é uma métrica de Finsler, de fato

Se $g$ é uma métrica Riemanniana $\langle\langle y, y \rangle\rangle|_x = g(y, y)$, então podemos definir

$$F(y) := \sqrt{g(y, y)}.$$

Logo $F(y) := \sqrt{\langle y, y\rangle} = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$, $\forall y \neq 0$ pois $(g) = (a_{ij}(x))$ é positiva definida para $y \neq 0$ $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

(i) $F_{y^i}(y) = \dfrac{1}{2}\dfrac{a_{ij}(x)2y^j}{2\sqrt{\langle y, y\rangle}} = \dfrac{a_{ij}(x)2y^j}{2\sqrt{\langle y, y\rangle}}$ é contínua $\forall y \neq 0$, portanto $F \in C^\infty$ em $T\mathbb{R}^n \setminus 0$;

(ii) $F(\lambda y) = \sqrt{\langle \lambda y, \lambda y\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle y, y\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle y, y\rangle} = \lambda\sqrt{\langle y, y\rangle} = \lambda F(y)$; $\lambda > 0$;

(iii) $(\dfrac{F^2}{2})_{y^i} = \dfrac{2y^i}{2} = y^i$ e $(\dfrac{F^2}{2})_{y^i y^j} = a_{ij}(x)$, temos $\sum y^i a_{ij} y^j > 0$, pois

$$g_{ij}(x, y) = y(a_{ij}(x))y^T > 0 \ \forall (x, y) \neq 0.$$

Portanto $g_{ij}(x, y) = a_{ij}(x)$ é positiva definida, $\forall y \neq 0$. Logo $F(y) := \sqrt{g(y, y)}$, é uma métrica de Finsler.

**Exemplo 1.2.** *Métrica Euclidiana no* $\mathbb{R}^n : F_\epsilon(y) := |y|$

*(i)* $F \in C^\infty$ *em* $T\mathbb{R}^n - \{0\}$*;*

*(ii)* $F(\lambda y) = |\lambda y| = |\lambda||y| = \lambda|y| = \lambda F(y)$; $\forall \lambda > 0$

*(iii)* $\dfrac{F^2}{2} = \dfrac{|y|^2}{2} = \dfrac{\langle y, y\rangle}{2} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{(y^i)^2}{2}$, *logo*

$$(\frac{F^2}{2})_{y^i} = \frac{2y^i}{2} = y^i \ \text{e} \ (\frac{F^2}{2})_{y^i y^j} = \delta_{ij}, \ \text{daí}$$

$$\sum \varepsilon^i \delta_{ij} \varepsilon^j = \sum (\varepsilon^i)^2 > 0.$$

*Logo* $(g_{ij}(y))_{n\times n}$ *é positiva definida. Portanto* $F_\epsilon(y) := |y|$ *é uma métrica de Finsler.*

**Definição 1.17.** *Um spray sobre uma variedade* $M$ *é um campo de vetores globalmente definido sobre* $TM$ *o qual é expresso num sistema padrão de coordenadas locais* $(x^i, y^i)$

*por*

$$G = y - 2G^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i},$$

*onde* $G^i(x, y)$ *são funções* $C^\infty$, *definidas localmente sobre* $TM - \{0\}$ *satisfazendo*

$$G^i(x, \lambda y) = \lambda^2 G^i(x, y), \ \lambda > 0.$$

Toda métrica de Finsler induz um Spray $G$ em $M$

$$G = y - 2G^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}$$

ou

$$G = y^i\frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \tag{1.15}$$

onde

$$G^i(y) := \frac{1}{4}g^{il}\{\frac{\partial^2(F^2)}{\partial x^k \partial y^l}y^k - \frac{\partial(F^2)}{\partial x^l}\}. \tag{1.16}$$

Em coordenadas locais, a curva $c(t)$ é uma geodésica se, e somente se, as coordenadas $(x^i(t))$ satisfazem

$$\ddot{c}^i + 2G^i(\dot{c}) = 0, \tag{1.17}$$

$\forall i = 1, 2, ..., n.$

**Observação 1.4.** *Como* $V^n$, *um Espaço de Minkowski, é um espaço vetorial de dimensão* $n$ *e* $F(x, y) = F(y)$, *segue que* $F$ *é constante em* $x$, *então* $G^i = 0$, *pois envolve derivadas de* $F$ *na variável* $x$, *portanto*

$$G(x, y) = y^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x = y.$$

*Substituindo* $G^i = 0$ *em (1.17), obtemos* $\ddot{c}^i = 0$, *logo* $(\dot{c}^i) = (b)$, *portanto*

$$(c^i) = (a + bt).$$

*Concluímos então que as geodésicas do Espaço de Minkowski são retas.*

A noção de curvatura de Riemann para métricas Riemannianas pode ser estendida para métricas/spray de Finsler.

**Definição 1.18.** *Para cada vetor $y \in T_xM$ - $\{0\}$, a **Curvatura Riemanniana** $R_y : T_xM \to T_xM$ é definida por*

$$R_y(u) = R^i_k(y)u^k \frac{\partial}{\partial x^i},$$

*onde*

$$R^i_k(y) := 2\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} y^j + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k}. \tag{1.18}$$

Tome um plano arbitrário $P \subset T_xM$ e um vetor não nulo $y \in P$ (flag pólo), a **curvatura flag** $K(P, y)$ é definida por

$$K(P, y) := \frac{g_y(R_y(v), v)}{g_y(y, y)g_y(v, v) - g_y(v, y)g_y(v, y)}, \tag{1.19}$$

onde $v$ é um vetor arbitrário em $P$ tal que $P = [y, v]$ (*gerado*). Vide Figura 1.

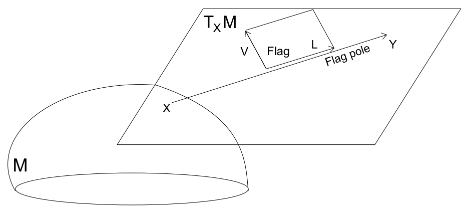


Figura 1

**Observação 1.5.** *No caso de $F$ ser Riemanniana esta é a curvatura seccional $K(\sigma)$.*

**Definição 1.19.** *Dizemos que $F$ é **curvatura escalar** se para todo vetor não nulo $y \in T_xM$ e alguma flag $P \subset T_xM$, $x \in M$, com $y \in P$, $K(P, y) = \lambda(y)$ independe de $P$, ou equivalente,*

$$R_y(.) = \lambda(y)F^2(y)\{I - g_y(y, .)y\},$$

$y \in T_xM$, $x \in M$, *onde* $I : T_xM \to T_xM$ *denota a aplicação identidade e*

$$g_y(y, .) = \frac{1}{2}[F^2]_{y^i} dx^i.$$

**Definição 1.20.** *$F$ é dita ser de **curvatura constante** $\lambda$ se $K(P, y) = \lambda$, para flag $P$ com $y \in P$. Para a métrica Riemanniana $F$ de curvatura escalar $K(y)$, $K(y) = K(x)$ independe de $y \in T_xM$.*

**Definição 1.21.** *O traço da curvatura de Riemann $R_y$ é uma função escalar em $TM$*

$$Ric(y) := traço(R_y). \tag{1.20}$$

*Ric é chamada a **curvatura de Ricci**. Normalize Ric e faça $R := \frac{1}{n-1} Ric$. $R$ é chamado o **escalar de Ricci**.*

**Definição 1.22.** *Uma métrica de Finsler é chamada uma **métrica de Einstein** com constante de Einstein $\lambda$ se*

$$Ric(y) = (n-1)\lambda F^2(y). \tag{1.21}$$

Neste caso, $R(y) = \lambda F^2(y)$.

# Capítulo 2

# Métricas de Einstein Projetivas

Neste capítulo estudaremos as relações projetivas ponto a ponto das métricas de Einstein (métricas as quais têm as mesmas geodésicas como conjunto de pontos). Mostraremos que pontualmente a relação projetiva das métricas de Einstein satisfaz uma equação simples ao longo de geodésicas.

Dadas duas métricas de Finsler $F$ e $\tilde{F}$ em uma variedade $M$, $n$-dimensional. Sejam $G$ e $\tilde{G}$ os sprays induzidos por $F$ e $\tilde{F}$, respectivamente. Temos que

$$\tilde{G}^i = G^i + \frac{\tilde{F}_{;k} y^k}{2\tilde{F}} y^i + \frac{\tilde{F}}{2} \tilde{g}^{il} \big[ \frac{\partial \tilde{F}_{;k}}{\partial y^l} y^k - \tilde{F}_{;l} \big], \tag{2.1}$$

onde $\tilde{F}_{;k}$ denota a derivada covariante de $\tilde{F}$ sobre $(M, F)$, a saber

$$\tilde{F}_{;k} := \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^k} - \frac{\partial G^l}{\partial y^k} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y^l}, \tag{2.2}$$

$$\tilde{F}_{;k.l} := \frac{\partial \tilde{F}_{;k}}{\partial y^l}. \tag{2.3}$$

A identidade (2.1) foi estabelecida primeiramente por [6]. Por (2.1), Rapcsák provou o seguinte lema importante. Ver demonstração em [6].

**Lema 2.1.** *(Rapcsák) Seja $(M, F)$ um espaço de Finsler. Uma métrica de Finsler $\tilde{F}$*

*é pontualmente projetivas a $F$ se, e somente se*

$$\frac{\partial \tilde{F}_{;k}}{\partial y^l} y^k - \tilde{F}_{;l} = 0. \tag{2.4}$$

Neste caso,

$$\tilde{G}^i = G^i + P y^i, \tag{2.5}$$

com

$$P = \frac{\tilde{F}_{;k} y^k}{2\tilde{F}}. \tag{2.6}$$

Veremos a prova, para um caso particular, deste lema no Capítulo 3.

Pelo Lema de Rapcsák, concluímos que uma métrica de Finsler $\tilde{F}$ em um subconjunto aberto $\Omega \subset R^n$ é uma métrica projetiva se, e somente se,

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^k \partial y^l} y^k - \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^l} = 0. \tag{2.7}$$

De fato, da igualdade (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial y^l} (\tilde{F}_{x^k} - G^r_{y^k} \tilde{F}_{y^r}) y^k - (\tilde{F}_{x^l} - G^s_{y^l} \tilde{F}_{y^s}) \\ &= y^k \tilde{F}_{x^k y^l} - y^k G^r_{y^k y^l} \tilde{F}_{y^r} - y^k G^r_{y^k} \tilde{F}_{y^r y^l} - \tilde{F}_{x^l} + G^s_{y^l} \tilde{F}_{y^s}, \end{aligned}$$

pelo Teorema de Euler, concluímos que $\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial x^k \partial y^l} y^k - \dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial x^l} = 0$, segue a igualdade (2.7). Podemos verificar, no capítulo 3 deste trabalho, que as métricas de Klein $F_k$ definidas em (3.15) e a métrica de Funk $F\pm$ definida em (3.9), satisfazem (2.7). Estas são métricas projetivas.

Sejam $F$ e $\tilde{F}$ métrica de Finsler em uma variedade $M$ de dimensão $n$ . Supor que $\tilde{F}$ é pontualmente projetiva a $F$, isto é, satisfaz (2.4). Substituindo (2.5) em (1.18) obtemos,

$$\tilde{R}_y(u) = R_y(u) + \Xi(y) u + \tau_y(u) y, \tag{2.8}$$

$$\tilde{Ric}(y) = Ric(y) + (n-1)\Xi(y), \tag{2.9}$$

onde

$$\Xi(y) := P^2 - P_{;k}y^k, \tag{2.10}$$

$$\tau_y(u) := 3(P_{;k} - \frac{1}{2}\frac{\partial[P^2]}{\partial y^k})u^k + \frac{\partial \Xi}{\partial y^k}u^k, \tag{2.11}$$

onde $P_{;k}$ denota a derivada covariante de $P$ sobre $(M, F)$ como definido em (2.2) para $\tilde{F}$. Usando-se (2.6), podemos expressar $\Xi(y)$ e $\tau_y$ em termos de $\tilde{F}$ e suas derivadas covariante sobre $(M, F)$. Estas fórmulas são provadas por [4]. Obtemos imediatamente a seguinte proposição.

**Proposição 2.1.** *Seja $(M, F)$ um espaço de Finsler de dimensão $n$ e $\tilde{F}$ uma outra métrica de Finsler em $M$ a qual é pontualmente projetiva a $F$.*

*(i) Suponhamos que $Ric = (n-1)\lambda F^2$. Então $\tilde{Ric} = (n-1)\tilde{\lambda}\tilde{F^2}$ se, e somente se,*

$$\Xi = \tilde{\lambda}\tilde{F^2} - \lambda F^2; \tag{2.12}$$

*(ii) Suponhamos que $K = \lambda$ . Então $\tilde{K} = \tilde{\lambda}$ se, e somente se vale (2.12).*

**Demonstração.(i)** ($\Rightarrow$) Temos por hipótese que $Ric = (n-1)\lambda F^2$ e $\tilde{Ric} = (n-1)\tilde{\lambda}\tilde{F^2}$, substituindo em (2.9) obtemos

$$\begin{aligned}
(n-1)\tilde{\lambda}\tilde{F^2} &= (n-1)\lambda F^2 + (n-1)\Xi(y) \\
\tilde{\lambda}\tilde{F^2} &= \lambda F^2 + \Xi(y) \\
\Xi(y) &= \tilde{\lambda}\tilde{F^2} - \lambda F^2.
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Temos por hipótese que $Ric = (n-1)\lambda F^2$ e $\Xi = \tilde{\lambda}\tilde{F^2} - \lambda F^2$, substituindo em (2.9) obtemos

$$\tilde{Ric}(y) = (n-1)\lambda F^2 + (n-1)\tilde{\lambda}\tilde{F}^2 - (n-1)\lambda F^2$$

$$\tilde{Ric}(y) \;=\; (n-1)\tilde{\lambda}\tilde{F}^2.$$

**(ii)** Uma prova para este ítem encontramos em [4].

Existe uma simples condição suficiente para que $\tilde{F}$ seja de curvatura constante negativa e pontualmente projetiva a $F$.

**Proposição 2.2.** *Seja $(M, F)$ um espaço de Finsler de dimensão $n$ e $\tilde{F}$ uma outra métrica de Finsler em $M$. Suponha que*

$$\tilde{F}_{;k} = \mu \frac{\partial[\tilde{F}^2]}{\partial y^k}, \tag{2.13}$$

*onde $\mu$ é uma constante. Então $\tilde{F}$ é pontualmente projetiva a $F$ e*

$$\tilde{R}_y(u) = R_y(u) - \mu^2[\tilde{F}^2(y)u - \tilde{g}_y(y,u)y], \tag{2.14}$$

$$\tilde{Ric}(y) = Ric(y) - (n-1)\mu^2\tilde{F}^2(y), \tag{2.15}$$

*onde*

$$\tilde{g}_y(y,u) := \frac{1}{2}\frac{\partial[\tilde{F}^2]}{\partial y^k}(y)u^k.$$

*Daí,*

*(i) se $F$ for Ricci-flat ($Ric = 0$), então $\tilde{F}$ será uma métrica de Einstein com*

$$\tilde{Ric} = (n-1)\mu^2\tilde{F}^2;$$

*(ii) se $F$ é R-flat ($K = 0$), então $\tilde{F}$ é de curvatura constante com $\tilde{K} = -\mu^2$.*

**Demonstração.** Diferenciando (2.13) com respeito a $y^l$, obtemos

$$\frac{\partial \tilde{F}_{;k}}{\partial y^l} = \mu\frac{\partial^2[\tilde{F}^2]}{\partial y^k \partial y^l}. \tag{2.16}$$

Multiplicando $y^k$, usando (2.13) novamente e pelo Teorema de Euler, obtemos

$$\frac{\partial \tilde{F}_{;k}}{\partial y^l}y^k = \mu\frac{\partial^2[\tilde{F}^2]}{\partial y^k \partial y^l}y^k = \mu\frac{\partial}{\partial y^k}[\frac{\partial(\tilde{F}^2)}{\partial y^l}]y^k = \mu\frac{\partial(\tilde{F}^2)}{\partial y^l} = \tilde{F}_{;l}. \tag{2.17}$$

Portanto

$$\frac{\partial \tilde{F}_{;k}}{\partial y^l} y^k - \tilde{F}_{;l} = 0.$$

Pelo Lema 2.1, concluímos que $\tilde{F}$ é pontualmente projetiva a F. Aplicando $y^k$ em (2.13) obtemos

$$\tilde{F}_{;k} y^k = \mu \frac{\partial [\tilde{F}^2]}{\partial y^k} y^k = 2\mu \tilde{F}^2. \tag{2.18}$$

Assim a função $P$ em (2.6) simplifica para

$$P = \frac{\tilde{F}_{;k} y^k}{2\tilde{F}} = \frac{2\mu \tilde{F}^2}{2\tilde{F}} = \mu \tilde{F}. \tag{2.19}$$

Usando (2.10), (2.18) e (2.19), obtemos

$$\Xi(y) = \mu^2 \tilde{F}^2 - \mu \tilde{F}_{;k} y^k = \mu^2 \tilde{F}^2 - 2\mu^2 \tilde{F}^2 = -\mu^2 \tilde{F}^2$$

portanto

$$\Xi(y) = -\mu^2 \tilde{F}^2. \tag{2.20}$$

Substituindo (2.19) em (2.11), produzimos

$$\begin{aligned}
\tau_y(u) &= 3(P_{;k} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^k}[P^2])u^k + \frac{\partial \Xi}{\partial y^k} u^k \\
&= 3(\mu \tilde{F}_{;k} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^k}[\mu^2 \tilde{F}^2])u^k - \frac{\partial}{\partial y^k}[\mu^2 \tilde{F}^2]u^k \\
&= 3\mu \tilde{F}_{;k} u^k - \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial y^k}[\mu^2 \tilde{F}^2]u^k - \frac{\partial}{\partial y^k}[\mu^2 \tilde{F}^2]u^k \\
&= 3\mu^2 \frac{\partial}{\partial y^k}[\tilde{F}^2]u^k - \frac{5}{2}\frac{\partial}{\partial y^k}[\mu^2 \tilde{F}^2]u^k \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^k}[\mu^2 \tilde{F}^2]u^k \\
&= \mu^2 \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^k}[\tilde{F}^2](y)u^k
\end{aligned}$$

logo, pela definição no enunciado obtemos $\tau_y(u) =: \mu^2 \tilde{g}_y(y,u)$. Portanto, substituindo $\Xi(y)$ em (2.9), obtemos

$$\tilde{Ric}(y) = Ric(y) + (n-1)(-\mu^2 \tilde{F}^2(y))$$

equivalente à

$$\tilde{Ric}(y) = Ric(y) - (n-1)\mu^2 \tilde{F}^2(y).$$

Portanto, por $(i)$ temos que se $F$ é Ricci-flat, isto é, $Ric(y) = 0$, então $\tilde{F}$ é uma métrica de Finsler com

$$\tilde{Ric}(y) = -(n-1)\mu^2 \tilde{F}^2(y).$$

Daí,

$$\tilde{R}_y(u) = R_y(u) + (-\mu^2 \tilde{F}^2)u + \mu^2 \tilde{g}_y(y,u)y$$

$$\tilde{R}_y(u) = R_y(u) - \mu^2(\tilde{F}^2(y)u - \tilde{g}_y(y,u)y).$$

Em $(ii)$ temos que $F$ é R-flat, isto é, $K = 0$, segue que $\tilde{F}$ tem curvatura constante com $\tilde{K} = -\mu^2$, de fato por hipótese temos que $Ric = 0$ e pelo item $(ii)$ da Proposição 2.1, obtemos $K = \lambda = 0$ e $\tilde{K} = \tilde{\lambda}$, portanto substituindo (2.20) em (2.12), obtemos

$$-\mu^2 \tilde{F}^2 = \tilde{\lambda}\tilde{F}^2 - \lambda F^2,$$

logo

$$-\mu^2 = \tilde{\lambda} = \tilde{K},$$

portanto

$$\tilde{K} = -\mu^2.$$

Isto prova a proposição. □

A métrica de Funk $F_{\pm}$ num domínio fortemente convexo $\Omega \subset R^n$ satisfaz

$$\frac{\partial F_{\pm}}{\partial x^k} = \pm\frac{1}{2}\frac{\partial [F_{\pm}^2]}{\partial y^k}. \tag{2.21}$$

Dessa forma $F_{\pm}$ são de curvatura constante $-1/4$ pela Proposição 2.2. Desde que $F_-$ e $F_+$ são métricas pontualmente projetivas, assim também o será $F_H = \frac{1}{2}(F_- + F_+)$.

Segue de (2.21) que o fator projetivo $P$ de $F_H$ é dado por

$$P := \frac{[F_H]_{;k} y^k}{2F_H} = \frac{1}{2}(F_- + F_+)$$

e

$$\Xi := P^2 - P_{;k} y^k = -[F_H]^2.$$

Por isto a métrica de Hilbert $F_H$ tem curvatura constante $-1$. Veremos estas provas no Capítulo 3.

## 2.1 Métricas de Einstein Projetivas

Nesta seção encontraremos uma equação diferencial ordinária para a métrica de Einsten $\tilde{F}$, ao longo das geodésicas $c(t)$ de $F$ com velocidade unitária.

Suponhamos que $F$ e $\tilde{F}$ são métricas de Einstein projetivamente relacionadas pontualmente com,

$$Ric(y) = (n-1)\lambda F^2(y),$$

$$\widetilde{Ric}(y) = (n-1)\tilde{\lambda}\tilde{F}^2(y).$$

O Lema de Rapcsák (2.4) e (2.12) estão satisfeitas. Vamos escrever (2.12) como segue

$$\tilde{\lambda}\tilde{F}^2 = \lambda F^2 + \frac{3}{4}(\frac{\tilde{F}_{;k} y^k}{\tilde{F}})^2 - \frac{\tilde{F}_{;k;l} y^k y^l}{2\tilde{F}}, \tag{2.22}$$

De fato,

De (2.9) e (2.10), obtemos

$$
\begin{aligned}
\tilde{\lambda}\tilde{F}^2 &= \lambda F^2 + (P^2 - P_{;k}y^k)\\
&= \lambda F^2 + \big(\frac{\tilde{F}_{;k}y^k}{2\tilde{F}}\big)^2 - \big(\frac{\tilde{F}_{;k}y^k}{2\tilde{F}}\big)_{;l}y^l\\
&= \lambda F^2 + \big(\frac{\tilde{F}_{;k}y^k}{2\tilde{F}}\big)^2 - \Big[\frac{\partial}{\partial x^l}\big(\frac{\tilde{F}_{;k}y^k}{2\tilde{F}}\big) - \frac{\partial G^s}{\partial y^l}\frac{\partial}{\partial y^s}\big(\frac{\tilde{F}_{;k}y^k}{2\tilde{F}}\big)\Big]y^l\\
&= \lambda F^2 + \big(\frac{\tilde{F}_{;k}y^k}{2\tilde{F}}\big)^2 - \Big[\frac{\partial}{\partial x^l}(\tilde{F}_{;k}y^k)\frac{2\tilde{F}}{(2\tilde{F})^2} - \frac{\tilde{F}_{;k}y^k 2\tilde{F}_{x^l}}{(2\tilde{F})^2} -\\
&\quad -\frac{\partial G^s}{\partial y^l}\Big(\frac{\partial}{\partial y^s}(\tilde{F}_{;k}y^k)\frac{2\tilde{F}}{(2\tilde{F})^2} - \frac{\tilde{F}_{;k}y^k 2\tilde{F}_{y^s}}{(2\tilde{F})^2}\Big)\Big]y^l\\
&= \lambda F^2 + \frac{1}{4}\big(\frac{\tilde{F}_{;k}y^k}{\tilde{F}}\big)^2 - \Big[\frac{\partial}{\partial x^l}(\tilde{F}_{;k}y^k)\frac{1}{(2\tilde{F})} - \frac{\tilde{F}_{;k}y^k 2\tilde{F}_{x^l}}{(2\tilde{F})^2} -\\
&\quad -\frac{\partial G^s}{\partial y^l}\frac{\partial}{\partial y^s}(\tilde{F}_{;k}y^k)\frac{1}{(2\tilde{F})} + \frac{\partial G^s}{\partial y^l}\frac{\tilde{F}_{;k}y^k 2\tilde{F}_{y^s}}{(2\tilde{F})^2}\Big]y^l\\
&= \lambda F^2 + \frac{1}{4}\big(\frac{\tilde{F}_{;k}y^k}{\tilde{F}}\big)^2 - \frac{y^l}{2\tilde{F}}\frac{\partial(\tilde{F}_{;k}y^k)}{\partial x^l} + \frac{2\tilde{F}_{x^l}}{(2\tilde{F})^2}\tilde{F}_{;k}y^k y^l +\\
&\quad +\frac{1}{2\tilde{F}}\frac{\partial G^s}{\partial y^l}\frac{\partial}{\partial y^s}(\tilde{F}_{;k}y^k)y^l - \frac{2}{(2\tilde{F})^2}\tilde{F}_{y^s}\frac{\partial G^s}{\partial y^l}\tilde{F}_{;k}y^k y^l.
\end{aligned}
$$

De onde, obtemos

$$\tilde{\lambda}\tilde{F}^2 = \lambda F^2 + \frac{3}{4}\big(\frac{\tilde{F}_{;k}y^k}{\tilde{F}}\big)^2 - \frac{\tilde{F}_{;k;l}y^k y^l}{2\tilde{F}},$$

provando (2.22).

Seja $c(t)$ uma geodésica de velocidade unitária em $(M, F)$ e

$$\tilde{F}(t) := \tilde{F}(\dot{c}(t)).$$

Observe que

$\tilde{F}'(t) = \tilde{F}_{;k}(\dot{c}(t))\dot{x}^k(t) = \tilde{F}_{;k}(y)y^k$, de fato

$$\begin{aligned}
\tilde{F}'(t) &= \frac{d}{dt}[\tilde{F}(c(t),\dot{c}(t))] \\
&= \frac{d}{dt}[\tilde{F}(\dot{c}(t))] \\
&= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^k}\frac{dc^k(t)}{dt} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y^k}\frac{d\dot{c}^k(t)}{dt} \\
&= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^k}y^k + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y^k}\ddot{c}^k(t)
\end{aligned}$$

Como

$$\ddot{c}^k + 2G^k\dot{c} = 0,$$

segue que

$$\ddot{c}^k = -2G^k\dot{c}.$$

Daí

$$\begin{aligned}
\tilde{F}'(t) &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^k}y^k - \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y^k}2G^k(y) \\
&= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^k}y^k - \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y^s}y^k\frac{\partial G^s}{\partial y^k} \\
&= y^k[\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^k} - \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y^s}\frac{\partial G^s}{\partial y^k}] \\
&= \dot{x}^k[\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^k} - \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y^s}\frac{\partial G^s}{\partial y^k}] \\
&= \tilde{F}_{;k}(\dot{c}(t))\dot{x}^k(t)
\end{aligned}$$

e $F''(t) = \tilde{F_{;k;l}}(\dot{c}(t))\dot{x}^k(t)\dot{x}^l(t) = \tilde{F_{;k;l}}(y)y^k y^l$. De fato,

$$\begin{aligned}
\tilde{F}''(t) &= \frac{d}{dt}[\tilde{F}_{;k}(y)y^k] \\
&= \frac{\partial \tilde{F}_{;k}}{\partial x^l}\frac{dc^l(t)}{dt}y^k + \frac{\partial \tilde{F}_{;k}}{\partial y^l}\frac{d\dot{c}^l(t)}{dt}y^k \\
&= \frac{\partial \tilde{F}_{;k}}{\partial x^l}y^l y^k + \frac{\partial \tilde{F}_{;k}}{\partial y^l}\ddot{c}^l(t)y^k
\end{aligned}$$

Como

$$\ddot{c}^l + 2G^l \dot{c} = 0,$$

segue que

$$\ddot{c}^l = -2G^l \dot{c}.$$

Daí

$$\begin{aligned}
\tilde{F}''(t) &= \frac{\partial \tilde{F}_{;k}}{\partial x^l} y^l y^k - \frac{\partial \tilde{F}_{;k}}{\partial y^r} 2G^l y^k \\
&= \frac{\partial \tilde{F}_{;k}}{\partial x^l} y^l y^k - \frac{\partial \tilde{F}_{;k}}{\partial y^r} \frac{G^r}{\partial y^l} y^k y^l \\
&= y^k y^l [\frac{\partial \tilde{F}_{;k}}{\partial x^l} - \frac{\partial \tilde{F}_{;k}}{\partial y^r} \frac{\partial G^r}{\partial y^l}] \\
&= \tilde{F_{;k;l}}(y) y^k y^l
\end{aligned}$$

Substituindo estas expressões em (2.22), obtemos

$$\tilde{\lambda} \tilde{F}^2 - \lambda F^2 - \frac{3}{4} \frac{\tilde{F}'(t)^2}{\tilde{F}^2} + \frac{\tilde{F}''(t)^2}{2\tilde{F}} = 0.$$

Equivalentemente,

$$2\tilde{\lambda} \tilde{F}^3(t) - 2\lambda F^2(t) \tilde{F} - \frac{3}{2} \frac{\tilde{F}'(t)^2}{\tilde{F}(t)} + \tilde{F}''(t) = 0.$$

Como $c(t)$ é uma geodésica de velocidade unitária, temos

$$F^2(t) = F^2(\dot{c}(t)) = 1$$

daí

$$\tilde{F}''(t) - \frac{3}{2} \frac{\tilde{F}'(t)^2}{\tilde{F}(t)} - 2\lambda \tilde{F}(t) + 2\tilde{\lambda} \tilde{F}^3(t) = 0.$$

Seja

$$f(t) := \frac{1}{\sqrt{\tilde{F}(t)}}.$$

Logo,

$$\tilde{F}(t) := \frac{1}{f^2(t)}$$

derivando a equação anterior até a segunda ordem, obtemos

(i) $\tilde{F}'(t) = -\dfrac{2f(t)f'(t)}{f^4(t)} = -\dfrac{2f'(t)}{f^3(t)}$,

(ii) $\tilde{F}''(t) = -\dfrac{2f''(t)f^3(t) + 2f'(t)3f^2(t)f'(t)}{f^6(t)}$.

Portanto

$$-\frac{2f''(t)f^3(t) + 6f'^2(t)f^2(t)}{f^6(t)} - \frac{3}{2}4\frac{f'^2(t)f^2(t)}{f^6(t)} + 2\tilde{\lambda}\frac{1}{f^6(t)} - 2\lambda\frac{1}{f^2(t)} = 0$$

que é equivalente a

$$\frac{-2f''(t)f^3(t) + 6f'^2(t)f^2(t) - 6f^2(t)f'^2(t) + 2\tilde{\lambda} - 2\lambda f^4(t)}{f^6(t)} = 0.$$

Dividindo por $(-2f^3(t))$, obtemos

$$f''(t) - \frac{\tilde{\lambda}}{f^3(t)} + \lambda f(t) = 0.$$

Ou seja

$$f''(t) + \lambda f(t) = \frac{\tilde{\lambda}}{f^3(t)}. \tag{2.23}$$

A equação (2.23) é solúvel. Vamos resolvê-la:

Por simplicidade, seja

$$C := \frac{1}{2}(\lambda a^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{a^2} + b^2).$$

Faça $s = f(t)$, derivando em t, obtemos $f'(t) = \dfrac{ds}{dt} = p$, derivando novamente em $t$, temos $f''(t) = \dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{dp}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{dp}{ds}p$.

Assim

$$f''(t) + \lambda f(t) = \frac{\tilde{\lambda}}{f^3(t)},$$

logo

$$p\frac{dp}{ds} + \lambda s = \frac{\tilde{\lambda}}{s^3},$$

ou ainda

$$p\frac{dp}{ds} = -\lambda s + \frac{\tilde{\lambda}}{s^3}.$$

Separando as variáveis, temos

$$pdp = (\frac{\tilde{\lambda}}{s^3} - \lambda s)ds,$$

logo

$$\frac{p^2}{2} = \tilde{\lambda}\int s^{-3}ds - \lambda\int sds,$$

daí

$$\frac{p^2}{2} = -\tilde{\lambda}\frac{s^{-2}}{2} - \lambda\frac{s^2}{2} + C,$$

ou ainda

$$p^2 = -\tilde{\lambda}s^{-2} - \lambda s^2 + 2C,$$

o que nos dá

$$(\frac{ds}{dt})^2 = -\frac{\tilde{\lambda}}{s^2} - \lambda s^2 + 2C,$$

logo

$$\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{\frac{-\tilde{\lambda} - \lambda s^4 + 2Cs^2}{s^2}}.$$

Portanto

$$\frac{ds}{\sqrt{\frac{-\tilde{\lambda} - \lambda s^4 + 2Cs^2}{s^2}}} = \pm dt,$$

daí

$$\frac{|s|}{\sqrt{-\tilde{\lambda} - \lambda s^4 + 2Cs^2}}ds = \pm dt.$$

Logo a solução de (2.23) com

$$f(0) = a > 0, f'(0) = b \neq 0$$

é dada por

$$\int_a^{f(t)} \frac{s}{\sqrt{-\lambda s^4 + 2Cs^2 - \tilde{\lambda}}} ds = \pm t + C_1, \tag{2.24}$$

onde o sinal $\pm$ em (2.24) é o mesmo de $f'(0) = b$. A solução com

$$f(0) = a > 0, f'(0) = 0$$

pode ser obtida fazendo $b \to 0$.

Tomemos o radicando da equação (2.24) e façamos $s = a$, obtemos

$$\begin{aligned}
-\lambda a^4 + 2Ca^2 - \tilde{\lambda} &= -\lambda a^4 + 2a^2[\frac{1}{2}(\lambda a^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{a^2} + b^2)] - \tilde{\lambda} \\
&= -\lambda a^4 + \lambda a^4 + \tilde{\lambda} + (ab)^2 - \tilde{\lambda} \\
&= (ab)^2 > 0,
\end{aligned}$$

portanto

$$-\lambda a^4 + 2Ca^2 - \tilde{\lambda} = (ab)^2 > 0. \tag{2.25}$$

Logo completando os quadrados em (2.25) obtemos

$$-\lambda(a^2 - \frac{C}{\lambda})^2 + \frac{C^2}{\lambda} - \tilde{\lambda} = (ab)^2 > 0, \ \ se \ \ \lambda \neq 0. \tag{2.26}$$

O integrando da equação (2.24) é definido para uma vizinhança $s$ de $a$, e a solução maximal $f(t) > 0$ existe num intervalo I contendo $s = 0$.

## 2.2 O caso em que $\lambda = 1$

Novamente fazendo

$$C := \frac{1}{2}(a^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{a^2} + b^2)$$

temos que

$$C^2 - \tilde{\lambda} = (a^2 - C)^2 + (ab)^2,$$

de fato, tomemos a equação (2.25) e façamos $\lambda = 1$, logo

$$-a^4 + 2Ca^2 - \tilde{\lambda} = (ab)^2 > 0.$$

Completando os quadrados, obtemos $-(a^2 - C)^2 + C^2 - \tilde{\lambda} = (ab)^2$, então

$$C^2 - \tilde{\lambda} = (a^2 - C)^2 + (ab)^2.$$

Dada a equação (2.24)

$$\int_a^{f(t)} \frac{s}{\sqrt{-s^4 + 2Cs^2 - \tilde{\lambda}}} ds = \pm t,$$

temos

$$\sqrt{-s^4 + 2Cs^2 - \tilde{\lambda}} = \sqrt{-(s^2 - C)^2 + C^2 - \tilde{\lambda}}.$$

fazendo

$$k^2 = C^2 - \tilde{\lambda},$$

obtemos

$$\int \frac{s}{\sqrt{-(s^2 - C)^2 + C^2 - \tilde{\lambda}}} ds = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{k^2 - u^2}},$$

onde

$$u = s^2 - C, \; \frac{du}{2} = sds.$$

Logo

$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{k^2 - u^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{kcos\theta}{\sqrt{k^2(1 - \sin^2\theta)}} d\theta,$$

onde $u = k\sin\theta$, $du = k\cos\theta d\theta$ $e$ $\theta = arcsen(\frac{u}{k})$.

Portanto

$$\begin{aligned}
\int \frac{s}{\sqrt{-s^4 + 2Cs^2 - \tilde{\lambda}}} ds &= \frac{1}{2}\int \frac{k\cos\theta}{k\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int d\theta \\
&= \frac{1}{2} arcsen\frac{u}{k} \\
&= \frac{1}{2} arcsen\Big(\frac{s^2 - C}{k}\Big) + C_1.
\end{aligned}$$

Consequentemente (2.24) fica da forma,

$$\pm t = \frac{1}{2}\Big[arcsen\Big(\frac{f^2(t) - C}{k}\Big) - arcsen(\frac{a^2 - C}{k})\Big].$$

Daí

$$\pm 2t = arcsen\Big(\frac{f^2(t) - C}{k}\Big) - arcsen\Big(\frac{a^2 - C}{k}\Big),$$

logo

$$arcsen\Big(\frac{f^2(t) - C}{k}\Big) = arcsen\Big(\frac{a^2 - C}{k}\Big) \pm 2t.$$

Aplicando a função *seno* em ambos os lados, temos

$$\frac{f^2(t) - C}{k} = \sin\Big(arcsen\Big(\frac{a^2 - C}{k}\Big) \pm 2t\Big),$$

ou seja

$$\frac{f^2(t) - C}{k} = \frac{a^2 - C}{k}\cos(2t) \pm \sin(2t)\cos\Big(arcsen\Big(\frac{a^2 - C}{k}\Big)\Big).$$

De onde obtemos

$$\begin{aligned}
f^2(t) &= (a^2-C)\cos(2t) \pm k\sin(2t)\cos\Big(arcsen\Big(\frac{a^2-C}{k}\Big)\Big) + C \\
&= (a^2-C)\cos(2t) \pm k\sin(2t)\cos(\theta_1) + C \\
&= (a^2-C)\cos(2t) \pm k\sin(2t)\frac{\sqrt{k^2-(a^2-C)^2}}{k} + C \\
&= (a^2-C)\cos(2t) \pm \sin(2t)\sqrt{(a^2-C)^2+(ab)^2-(a^2-C)^2} + C \\
&= (a^2-C)\cos(2t) \pm \sin(2t)(ab) + C,
\end{aligned}$$

logo

$$f(t) = \sqrt{(a^2-C)\cos(2t) \pm ab\sin(2t) + C}. \tag{2.27}$$

Usando a equação (2.26) reescrevemos (2.27) da seguinte forma

$$f(t) = \sqrt{\sqrt{C^2-\tilde{\lambda}}\sin\big[\sin^{-1}\big(\frac{a^2-C}{\sqrt{C^2-\tilde{\lambda}}}\big) \pm 2t\big] + C}. \tag{2.28}$$

De fato

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sqrt{\sqrt{C^2-\tilde{\lambda}}\sin\big[\sin^{-1}\big((\frac{a^2-C}{\sqrt{C^2-\tilde{\lambda}}}\big) \pm 2t\big] + C} \\
&= \sqrt{\sqrt{C^2-\tilde{\lambda}}\Big[\frac{a^2-C}{\sqrt{C^2-\tilde{\lambda}}}\cos(2t) \pm \sin(2t)\cos\Big(\sin^{-1}\Big(\frac{a^2-C}{\sqrt{C^2-\tilde{\lambda}}}\Big)\Big)\Big] + C} \\
&= \sqrt{\big(a^2-C\big)\cos(2t) \pm \sin(2t)\sqrt{C^2-\tilde{\lambda}}\cos\Big(\sin^{-1}\Big(\frac{a^2-C}{\sqrt{C^2-\tilde{\lambda}}}\Big)\Big)\Big] + C} \\
&= \sqrt{\big(a^2-C\big)\cos(2t) \pm \sin(2t)\sqrt{C^2-\tilde{\lambda}}\cos(\theta_1) + C} \\
&= \sqrt{\big(a^2-C\big)\cos(2t) \pm \sin(2t)\sqrt{C^2-\tilde{\lambda}}\frac{\sqrt{(a^2-C)^2+(ab)^2-(a^2-C)^2}}{\sqrt{C^2-\tilde{\lambda}}} + C} \\
&= \sqrt{\big(a^2-C\big)\cos(2t) \pm \sin(2t)ab + C},
\end{aligned}$$

onde o sinal $\pm$ em (2.28) é o mesmo de $f'(0) = b$, onde $b \neq 0$. Aliás, o sinal pode ser escolhido arbitrariamente.

**Caso 1:** $\tilde{\lambda} = 1$. Neste caso,

$$C := \frac{1}{2}(a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2) > 1, \qquad C^2 - 1 = (a^2 - C)^2 + (ab)^2,$$

$$\frac{|C|}{\sqrt{C^2 - 1}} > 1.$$

Então

$$f(t) = \sqrt{\sqrt{C^2 - 1}\sin\big[\sin^{-1}\big(\frac{a^2 - C}{\sqrt{C^2 - 1}}\big) \pm 2t\big] + C}. \tag{2.29}$$

Assim $f(t)$ é definida no intervalo $I = (-\infty, \infty)$ e para algum $r$,

$$\int_r^{r+\pi} \frac{1}{f(t)^2} dt = \pi.$$

**Caso 2:** $\tilde{\lambda} = 0$. Neste caso,

$$C := \frac{1}{2}(a^2 + b^2) > 0, \qquad C^2 = (a^2 - C)^2 + (ab)^2.$$

Então

$$f(t) = \sqrt{C}\sqrt{\sin\big[\sin^{-1}\big(\frac{a^2 - C}{C}\big) \pm 2t\big] + 1}. \tag{2.30}$$

Assim $f(t)$ é definida no intervalo limitado $I = (-\delta, \tau)$ e

$$\int_{-\delta}^{0} \frac{1}{f(t)^2} dt = \infty = \int_0^{\tau} \frac{1}{f(t)^2} dt.$$

**Caso 3:** $\tilde{\lambda} = -1$. Neste caso,

$$C := \frac{1}{2}(a^2 - \frac{1}{a^2} + b^2), \qquad C^2 + 1 = (a^2 - C)^2 + (ab)^2,$$

$$\frac{|C|}{\sqrt{C^2 + 1}} < 1.$$

Então

$$f(t) = \sqrt{\sqrt{C^2 + 1}\sin\big[\sin^{-1}\big(\frac{a^2 - C}{\sqrt{C^2 + 1}}\big) \pm 2t\big] + C}. \tag{2.31}$$

Assim $f(t)$ é definida no intervalo limitado $I = (-\delta, \tau)$ e

$$\int_{-\delta}^{0} \frac{1}{f(t)^2} dt = \infty = \int_0^{\tau} \frac{1}{f(t)^2} dt.$$

A partir dos argumentos acima, obtemos o seguinte teorema.

**Teorema 2.1.** *Sejam $F$ e $\tilde{F}$ métricas de Einstein numa variedade $M^n$, com*

$$Ric = (n-1)F^2, \qquad \tilde{Ric} = (n-1)\tilde{\lambda}\tilde{F}^2.$$

*Então para toda geodésica unitária $c(t)$ de $F$,*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{2}{(a^2 - \frac{\tilde{\lambda}}{a^2} - b^2)\cos(2t) + 2ab\sin(2t) + (a^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{a^2} + b^2)}, \tag{2.32}$$

*onde $a > 0$ e $b \neq 0$.*

*(i) Se $\tilde{\lambda} = 1$, então ao longo de qualquer geodésica $c(t)$ de $F$ com velocidade unitária,*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{\sqrt{C^2-1}\sin(\theta \pm 2t) + C},$$

*onde $C > 1$ e $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Assim, para toda geodésica unitária $c(t)$ de $F$, com $F-$comprimento $L_F(c) = \pi$, o $\tilde{F}-$comprimento $L_{\tilde{F}}(c) = \pi$.*

*(ii) Se $\tilde{\lambda} = 0$, então ao longo da geodésica $c(t)$ de $F$,*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{C\sin(\theta \pm 2t) + C},$$

*onde $C > 0$ e $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Assim, toda geodésica $c(t)$ de $F$ tem comprimento finito.*

*(iii) Se $\tilde{\lambda} = -1$ ao longo da geodésica $c(t)$ de $F$,*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{\sqrt{C^2+1}\sin(\theta \pm 2t) + C},$$

*onde $C$ é uma constante e $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Assim, toda geodésica $c(t)$ de $F$ tem comprimento finito.*

**Demonstração.** Temos que $F$ e $\tilde{F}$ são métricas de Einstein projetivamente relacionadas, definimos como anteriormente

$$f(t) := \frac{1}{\sqrt{\tilde{F}(t)}}.$$

logo,

$$\tilde{F}(t) := \frac{1}{f^2(t)}$$

e como para toda geodésica unitária em $(M, F)$ temos

$$\tilde{F}(t) := \tilde{F}(\dot{c}(t)),$$

daí pela equação (2.27), obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(\dot{c}(t)) &= \frac{1}{(a^2 - C)\cos(2t) + ab\sin(2t) + C} \\
&= \frac{1}{(a^2 - \frac{1}{2}(a^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{a^2} + b^2))\cos(2t) + ab\sin(2t) + \frac{1}{2}(a^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{a^2} + b^2)} \\
&= \frac{1}{(\frac{2a^4 - a^4 - \tilde{\lambda} - a^2b^2}{2a^2})\cos(2t) + ab\sin(2t) + \frac{a^4 + \tilde{\lambda} + a^2b^2}{2a^2}} \\
&= \frac{1}{\frac{(a^4 - \tilde{\lambda} - a^2b^2)\cos(2t) + 2a^2ab\sin(2t) + a^4 + \tilde{\lambda} + a^2b^2}{2a^2}},
\end{aligned}$$

logo

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{2}{(a^2 - \frac{\tilde{\lambda}}{a^2} - b^2)\cos(2t) + 2ab\sin(2t) + (a^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{a^2} + b^2)},$$

onde $a > 0$ e $b \neq 0$.

(i) Se $\tilde{\lambda} = 1$, então ao longo de qualquer geodésica $c(t)$ de $F$ com velocidade unitária,

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{\sqrt{C^2 - 1}\sin(\theta \pm 2t) + C}.$$

De fato, para $\tilde{\lambda} = 1$, a equação (2.32) se torna

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{2}{(a^2 - \frac{1}{a^2} - b^2)\cos(2t) + 2ab\sin(2t) + (a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2)}. \tag{2.33}$$

Temos $C := \frac{1}{2}\big(a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2\big) > 1$, $C^2 - 1 = \big(a^2 - C\big)^2 + (ab)^2$, logo
$a^2 - C = a^2 - \frac{1}{2}\big(a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2\big) = a^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2}\big(\frac{1}{a^2} + b^2\big) = \frac{1}{2}\big(a^2 - \frac{1}{a^2} - b^2\big)$, daí $(a^2 - \frac{1}{a^2} - b^2) = 2(a^2 - C)$. Substituindo estas expressões em (2.33), obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\dot{c}(t)) &= \frac{2}{2(a^2 - C)\cos(2t) + 2ab\sin(2t) + 2C} \\ &= \frac{1}{(a^2 - C)\cos(2t) + ab\sin(2t) + C} \\ &= \frac{1}{f^2(t)}.\end{aligned}$$

Portanto de (2.29), obtemos

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{\sqrt{C^2 - 1}\sin\big(\theta \pm 2t\big) + C}, \tag{2.34}$$

onde $\theta = \sin^{-1}\big(\frac{a^2 - C}{\sqrt{C^2 - 1}}\big)$, $C > 1$ e $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Assim, para toda geodésica unitária $c(t)$ de $F$, com $F-$ comprimento $L_F(c) = \pi$, o $\tilde{F}-$ comprimento $L_{\tilde{F}}(c) = \pi$.

(ii) Se $\tilde{\lambda} = 0$, então ao longo da geodésica $c(t)$ de $F$,

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{C\sin(\theta \pm 2t) + C}.$$

De fato,

para $\tilde{\lambda} = 0$, a equação (2.32) se torna

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{2}{(a^2 - b^2)\cos(2t) + 2ab\sin(2t) + (a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2)}. \tag{2.35}$$

Temos $C := \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2) > 0,$ dai $C^2 = (a^2 - C)^2 + (ab)^2,$

logo

$$a^2 - C = a^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} = \frac{2a^2 - a^2 - b^2}{2} = \frac{a^2 - b^2}{2},$$

daí $(a^2 - b^2) = 2(a^2 - C)$. Temos ainda

$$\frac{|C|}{\sqrt{C^2 - 1}} > 1.$$

Substituindo estas expressões em (2.35), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\dot{c}(t)) &= \frac{2}{2(a^2 - C)\cos(2t) + 2ab\sin(2t) + 2C} \\ &= \frac{1}{(a^2 - C)\cos(2t) + ab\sin(2t) + C} \\ &= \frac{1}{f^2(t)}. \end{aligned}$$

Portanto de (2.30), obtemos

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{C\sin\big(\theta \pm 2t\big) + C}, \tag{2.36}$$

onde $\theta = \sin^{-1}\big(\dfrac{a^2 - C}{C}\big)$, $C > 0$ e $\theta \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$. Assim, toda geodésica $c(t)$ de $F$ tem comprimento finito.

(iii) Se $\tilde{\lambda} = -1$ ao longo da geodésica $c(t)$ de $F$,

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{\sqrt{C^2 + 1}\sin(\theta \pm 2t) + C}.$$

De fato,

para $\tilde{\lambda} = -1$, a equação (2.32) se torna

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{2}{(a^2 + \frac{1}{a^2} - b^2)\cos(2t) + 2ab\sin(2t) + (a^2 - \frac{1}{a^2} + b^2)} \tag{2.37}$$

temos $C := \frac{1}{2}(a^2 - \frac{1}{a^2} + b^2)$, e $C^2 + 1 = (a^2 - C)^2 + (ab)^2$, logo

$$
\begin{aligned}
a^2 - C &= a^2 - \frac{1}{2}(a^2 - \frac{1}{a^2} + b^2) \\
&= a^2 - \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2a^2} - b^2 \\
&= \frac{2a^4 - a^4 + 1 - a^2b^2}{2a^2} \\
&= \frac{1}{2}(a^2 + \frac{1}{a^2} - b^2),
\end{aligned}
$$

daí $(a^2 + \frac{1}{a^2} - b^2) = 2(a^2 - C)$. Temos ainda

$$\frac{|C|}{\sqrt{C^2+1}} < 1.$$

Substituindo estas expressões em (2.37), obtemos

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}(\dot{c}(t)) &= \frac{2}{2(a^2 - C)\cos(2t) + 2ab\sin(2t) + 2C} \\
&= \frac{1}{(a^2 - C)\cos(2t) + ab\sin(2t) + C} \\
&= \frac{1}{f^2(t)}.
\end{aligned}
$$

Portanto de (2.31), obtemos

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{\sqrt{C^2+1}\sin\big(\theta \pm 2t\big) + C}, \tag{2.38}$$

onde $\theta = \sin^{-1}\big(\frac{a^2 - C}{\sqrt{C^2+1}}\big)$, $C$ é uma constante e $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Assim, toda geodésica $c(t)$ de $F$ tem comprimento finito.

$\square$

## 2.3 O caso em que $\lambda = 0$

Nesta seção, iremos estudar a equação (2.24) onde $\lambda = 0$. De (2.24) obtemos

$$f(t) = \sqrt{(a \pm bt)^2 + \tilde{\lambda}\Big(\frac{t}{a}\Big)^2}. \tag{2.39}$$

De fato, tomemos a equação (2.24), fazendo $\lambda = 0$ obtemos

$$\int_a^{f(t)} \frac{s}{\sqrt{2Cs^2 - \tilde{\lambda}}} ds = \pm t, \tag{2.40}$$

como

$$C := \frac{1}{2}(\lambda a^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{a^2} + b^2),$$

para $\lambda = 0$ teremos

$$C = \frac{1}{2}(\frac{\tilde{\lambda}}{a^2} + b^2). \tag{2.41}$$

Temos de (2.25)

$$-\lambda a^4 + 2Ca^2 - \tilde{\lambda} = (ab)^2 > 0, \tag{2.42}$$

logo para $\lambda = 0$ obtemos

$$2Ca^2 - \tilde{\lambda} = (ab)^2 > 0. \tag{2.43}$$

Agora façamos $u = 2cs^2, \quad du = 4csds$, logo $\dfrac{du}{4c} = sds$, substituindo em (2.40) obtemos

$$\pm t = \int \frac{du}{4c\sqrt{u - \tilde{\lambda}}},$$

daí

$$\pm t = \frac{1}{4c} \int (u - \tilde{\lambda})^{-\frac{1}{2}} du,$$

logo

$$\pm t = \frac{1}{4c} 2(u - \tilde{\lambda})^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto

$$\pm t = \frac{\sqrt{u - \tilde{\lambda}}}{2c},$$

o que nos dá

$$\pm t = \frac{\sqrt{2cs^2 - \tilde{\lambda}}}{2c}\Big|_a^{f(t)},$$

logo

$$\pm t = \frac{\sqrt{2c(f(t))^2 - \tilde{\lambda}} - \sqrt{2ca^2 - \tilde{\lambda}}}{2c}.$$

Daí

$$(\pm 2ct + \sqrt{2ca^2 - \tilde{\lambda}})^2 = (\sqrt{2c(f(t))^2 - \tilde{\lambda}})^2),$$

logo

$$2c(f(t))^2 - \tilde{\lambda} = (\pm 2ct + \sqrt{2ca^2 - \tilde{\lambda}})^2,$$

onde obtemos

$$\begin{aligned} f(t)^2 &= \frac{4c^2t^2 \pm \sqrt{2ca^2 - \tilde{\lambda}} + 2ca^2 - \tilde{\lambda} + \tilde{\lambda}}{2c} \\ &= 2ct^2 \pm 2t\sqrt{(ab)^2} + a^2 \\ &= 2\frac{1}{2}\Big(\frac{\tilde{\lambda}}{a^2} + b^2\Big)t^2 \pm 2tab + a^2 \\ &= \frac{\tilde{\lambda}}{a^2}t^2 + b^2t^2 \pm 2tab + a^2 \\ &= (a \pm bt)^2 + \tilde{\lambda}\Big(\frac{t}{a}\Big)^2, \end{aligned}$$

portanto

$$f(t) = \sqrt{(a \pm bt)^2 + \tilde{\lambda}\Big(\frac{t}{a}\Big)^2}. \tag{2.44}$$

**Caso 1:** $\tilde{\lambda} = 1$. Neste caso, temos

$$f(t) = \sqrt{(a + bt)^2 + \Big(\frac{t}{a}\Big)^2}, \text{ para } b > 0. \tag{2.45}$$

Assim $f(t)$ é definida no intervalo $I = (-\infty, \infty)$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(t)^2} dt = \pi. \tag{2.46}$$

De fato

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+bt)^2 + \left(\frac{t}{a}\right)^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\frac{1+(ab)^2}{a^2})(t + \frac{a^3 b}{1+(ab)^2})^2 + E} dt,$$

onde

$$\begin{aligned}
(a+bt)^2 + \left(\frac{t}{a}\right)^2 &= a^2 + 2abt + (bt)^2 + \frac{t^2}{a^2} \\
&= t^2\left(\frac{1+(ab)^2}{a^2}\right) + 2abt + a^2 \\
&= (\frac{1+(ab)^2}{a^2})(t + \frac{a^3 b}{1+(ab)^2})^2 - \frac{a^4 b^2}{((ab)^2+1)} + a^2
\end{aligned}$$

e

$$E = \frac{-a^4 b^2}{((ab)^2+1)} + a^2 = \frac{-a^4 b^2 + a^2(1+(ab)^2)}{1+(ab)^2} = \frac{-a^4 b^2 + a^2 + a^4 b^2}{1+(ab)^2}.$$

Logo

$$E = \frac{a^2}{(ab)^2+1} \geq 0.$$

Para resolvermos a integral acima tomemos, $u = t + \dfrac{a^3 b}{1+(ab)^2}$,

logo $du = dt,$ donde

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\frac{1+(ab)^2}{a^2})u^2 + E} du &= \frac{a^2}{1+(ab)^2} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{u^2 + \frac{Ea^2}{1+(ab)^2}} du \\
&= \frac{a^2}{1+(ab)^2} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{u^2 + E^2} du \\
&= \frac{a^2}{1+(ab)^2} \frac{1}{E} \lim_{t\to\infty} \Bigg[ \arctan\Big[ \frac{\big(t(1+a^2b^2) + a^3 b\big)}{a^2} \Big] \\
&\quad - \arctan\Big[ \frac{-\big(t(1+a^2b^2) + a^3 b\big)}{a^2} \Big] \Bigg] \\
&= \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

**Caso 2:** $\tilde{\lambda} = 0$. Neste caso,

$$f(t) = (a \pm bt). \tag{2.47}$$

(i) Se $b = 0$, então

$$f(t) = a.$$

Assim $f(t)$ é definida no intervalo $I = (-\infty, \infty)$.

(ii) Se $b \neq 0$, então

$$f(t) = \big(a + bt\big).$$

Neste caso $b > 0$, $I = (-\delta, \infty)$

$$\int_{-\delta}^{0} \frac{1}{f(t)^2} dt = \infty.$$

De fato

$$\begin{aligned}
\int_{-\delta}^{0} \frac{1}{(a+bt)^2} dt &= \int_{a-\delta b}^{a} u^{-2} du \\
&= -\int_{a-\delta b}^{a} \frac{1}{u} du \\
&= -\,ln|u|\Big|_{a-\delta b}^{a} \\
&= -\Big[ln|a| - ln|a - \delta b|\Big] \\
&= -ln\Big|\frac{a}{a-\delta b}\Big| \\
&= ln\Big|\frac{a}{a-\delta b}\Big|^{-1} \\
&= ln\Big|\frac{a-\delta b}{a}\Big| \\
&= \infty
\end{aligned}$$

e

$$\int_0^\infty \frac{1}{f(t)^2} dt < \infty.$$

De fato,

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{1}{(a+bt)^2} dt = \lim_{R\to\infty} \left( \frac{-1}{b(a+bt)} \right)\Big|_0^R = \lim_{R\to\infty} \left( \frac{-1}{b(a+bR)} + \frac{1}{ab} \right) = \frac{1}{ab} < \infty.$$

O caso onde $b < 0$ será similar, logo é omitido.

**Caso 3:** $\tilde{\lambda} = -1$. Neste caso,

$$f(t) = \sqrt{\Big(a \pm bt\Big)^2 - \Big(\frac{t}{a}\Big)^2}. \tag{2.48}$$

(i) Se $ab = 1$, logo $b > 0$ então

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{a^2 + 2abt + b^2t^2 - \frac{t^2}{a^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^4 + 2aba^2t + a^2b^2t^2 - t^2}{a^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^4 + 2a^2t}{a^2}} \\ &= \sqrt{a^2 + 2t}. \end{aligned}$$

Neste caso, $I = (-\delta, \infty)$ e

$$\int_{-\delta}^0 \frac{1}{f(t)^2} dt = \infty = \int_0^\infty \frac{1}{f(t)^2} dt.$$

De fato

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{f(t)^2}dt &= \int_0^\infty \frac{1}{a^2+2t}dt \\
&= \frac{1}{2}\ln|u|\Big|_{a^2}^{\infty} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\ln|u|\Big|_{a^2}^{R} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\Big[ln|R| - ln|a^2|\Big] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\ln|\frac{R}{a^2}| \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

O caso onde $ab = -1$ é similar. Neste caso $b < 0$.

(ii) Se $-1 < ab < 1$, então $f(t)$ é definida na fronteira do intervalo $(-\delta, \tau)$ e claramente,

$$\int_{-\delta}^0 \frac{1}{f(t)^2}dt = \infty \text{ e } \int_0^\tau \frac{1}{f(t)^2}dt = \infty.$$

(iii) Se $ab > 1$, logo $b > 0$ então $f(t)$ está definida no intervalo $(-\delta, \infty)$ e

$$\int_{-\delta}^0 \frac{1}{f(t)^2}dt = \infty \text{ e } \int_0^\infty \frac{1}{f(t)^2}dt < \infty.$$

O caso em que $ab < -1$ é similar, então será omitido.

**Teorema 2.2.** *Sejam $F$ e $\tilde{F}$ métricas de Einstein numa variedade $M^n$, com $Ric = 0$ e $\tilde{Ric} = (n-1)\tilde{\lambda}\tilde{F}^2$. Suponha que $F$ e $\tilde{F}$ sejam projetivamente relacionadas pontualmente em $M$. Então para toda geodésica unitária $c(t)$ de $F$,*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{(a+bt)^2 + \tilde{\lambda}\Big(\frac{t}{a}\Big)^2}. \tag{2.49}$$

*(i) Se $\tilde{\lambda} = 1$, então ao longo de toda geodésica $c(t)$ de $F$,*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{(a+bt)^2 + \Big(\frac{t}{a}\Big)^2}.$$

*Assim para toda geodésica $c(t)$ de $F$, o $\tilde{F}$-comprimento $L_{\tilde{F}}(c) \leq \pi$.*

*A igualdade ocorre quando $F$ é completa.*

*(ii) Se $\tilde{\lambda} = 0$, então ao longo de toda geodésica unitária $c(t)$ de $F$,*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{(a+bt)^2}. \tag{2.50}$$

*(a) Se a geodésica unitária $c$ de $F$ é definida de $(-\infty, \infty)$, então*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{a^2}.$$

*(b) Se a geodésica unitária $c$ de $F$ é definida em $[0, \infty)$, então ela tem comprimento $\tilde{F}$ finito, a menos que*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{a^2}.$$

*(c) Se a geodésica unitária $c$ de $F$ é definida de $(-\infty, 0]$, então ela tem comprimento $\tilde{F}$ finito, a menos que*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{a^2}.$$

*Portanto, $F$ é completa se, e somente se, $\tilde{F}$ é completa. Neste caso, ao longo de toda geodésica $c$*

$$\frac{F(\dot{c}(t))}{\tilde{F}(\dot{c}(t))} = \textit{constante}.$$

*(iii) Se $\tilde{\lambda} = -1$ então, ao longo de toda geodésica unitária $c(t)$ de $F$,*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{(a+bt)^2 - \left(\frac{t}{a}\right)^2}. \tag{2.51}$$

*Assim nenhuma geodésica de $F$ está definida no intervalo $(-\infty, \infty)$.*

*(a) Se a geodésica unitária c de F é definida de $[0, \infty)$, então ela tem comprimento $\tilde{F}$ finito, a menos que*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{a^2 + 2t}. \tag{2.52}$$

*(b) Se a geodésica unitária c de F é definida de $(-\infty, 0]$, então ela tem comprimento $\tilde{F}$ finito, a menos que*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{a^2 - 2t}. \tag{2.53}$$

**Demonstração.** Temos que $F$ e $\tilde{F}$ métricas de Einstein projetivamente relacionadas, logo definimos anteriormente que

$$f(t) := \frac{1}{\sqrt{\tilde{F}(t)}}.$$

daí,

$$\tilde{F}(t) := \frac{1}{f^2(t)}$$

e como para toda geodésica unitária em $(M, F)$ temos

$$\tilde{F}(t) := \tilde{F}(\dot{c}(t)),$$

daí pela equação (2.39), obtemos

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{(a+bt)^2 + \tilde{\lambda}\left(\dfrac{t}{a}\right)^2}.$$

(i) Se $\tilde{\lambda} = 1$, então ao longo de toda geodésica $c(t)$ de $F$,

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{(a+bt)^2 + \left(\dfrac{t}{a}\right)^2}. \tag{2.54}$$

Assim para toda geodésica $c(t)$ de $F$, o $\tilde{F}$-comprimento $L_{\tilde{F}}(c) \leq \pi$. A igualdade ocorre quando $F$ é completa. Basta verificar o caso 1.

(ii) Se $\tilde{\lambda} = 0$, então ao longo de toda geodésica unitária $c(t)$ de $F$,

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{(a+bt)^2}. \tag{2.55}$$

(a) Se a geodésica unitária $c$ de $F$ é definida de $(-\infty, \infty)$, então

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{a^2}.$$

De fato, ver caso 2 item (i). Basta fazer $b = 0$ em (2.47) logo obtemos $f(t) = a$, daí substituindo em $\tilde{F}(t) := \dfrac{1}{f^2(t)}$, obtemos

$$\tilde{F}(t) := \frac{1}{a^2}.$$

(b) Se a geodésica unitária $c$ de $F$ é definida em $[0, \infty)$, então $\tilde{F}$ tem comprimento $\tilde{F}$ finito, a menos que $\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \dfrac{1}{a^2}$.

De fato, de acordo com o caso 2 (ii) para $b > 0$, vimos que

$$\int_0^\infty \frac{1}{(a+bt)^2} dt < \infty.$$

E a integral da função $\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \dfrac{1}{a^2}$ definida no intervalo $(-\infty, \infty)$ não é finita.

(c) Se a geodésica unitária $c$ de $F$ é definida de $(-\infty, 0]$, então $\tilde{F}$ tem comprimento $\tilde{F}$ finito, a menos que $\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \dfrac{1}{a^2}$.

De fato, de acordo com o caso 2 (ii) para $b < 0$, sendo $f(t) = (a - bt)$, temos

$$\int_0^R \frac{1}{(a-bt)^2} dt < \infty.$$

E a integral da função $\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \dfrac{1}{a^2}$ definida no intervalo $(-\infty, \infty)$ não é finita.

Portanto, $F$ é completa se, e somente se, $\tilde{F}$ é completa. Neste caso, ao longo de toda geodésica $c$

$$\frac{F(\dot{c}(t))}{\tilde{F}(\dot{c}(t))} = \text{constante}.$$

De fato, como a geodésica $c$ de $F$ é unitária, então $F(t) = F(\dot{c}(t)) = 1$ e

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{a^2},$$

logo

$$\frac{F(\dot{c}(t))}{\tilde{F}(\dot{c}(t))} = \frac{1}{\frac{1}{a^2}} = a^2,$$

portanto é constante.

(iii) Se $\tilde{\lambda} = -1$ então, ao longo de toda geodésica unitária $c(t)$ de $F$,

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{(a+bt)^2 - \left(\frac{t}{a}\right)^2}. \tag{2.56}$$

Assim não existe geodésica de $F$ definida no intervalo $(-\infty, \infty)$.

(a) Se a geodésica unitária $c$ de $F$ é definida de $[0, \infty)$, então ela tem comprimento $\tilde{F}$ finito, a menos que

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{a^2 + 2t}. \tag{2.57}$$

De fato, de acordo com o caso 3 (iii) para $ab > 1$, vimos que

$$\int_0^R \frac{1}{(a+bt)^2 - (\frac{t}{a})^2} dt < \infty.$$

E a integral da função, caso 3 (i), onde $ab = 1$ e $\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \dfrac{1}{a^2 + 2t}$ definida no intervalo $(-\delta, \infty)$, não é finita.

(b) Se a geodésica unitária $c$ de $F$ é definida de $(-\infty, 0]$, então ela tem comprimento $\tilde{F}$ finito, a menos que

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{a^2 - 2t}. \tag{2.58}$$

De fato, de acordo com o caso 3 (iii) para $ab < -1$, a integral

$$\int_0^R \frac{1}{(a - bt)^2 - (\frac{t}{a})^2} dt < \infty.$$

E a integral da função, caso 3 (i), onde $ab = -1$ e $\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \dfrac{1}{a^2 - 2t}$ definida no intervalo $(-\infty, \delta)$, não é finita.

$\square$

A métrica esférica $F_s$, abaixo tem curvatura constante positiva $K = 1$ e é pontualmente projetiva com a métrica flat padrão $F_E(y) = |y|$ no $\mathbb{R}^n$. Uma prova disto está no capítulo 3 deste trabalho. Tome uma geodésica arbitrária $c(t) = x + ty$ em $(\mathbb{R}^n, F_E)$.

$$\begin{aligned} F_s(\dot{c}(t)) &:= \frac{\sqrt{|y|^2 + (|x + ty|^2|y|^2 - \langle x + ty, y\rangle^2)}}{1 + |x + ty|^2} \\ &= \frac{1}{(a + bt)^2 + (\frac{t}{a})^2}, \end{aligned}$$

onde $a = \dfrac{\sqrt{1 + |x|^2}}{\left[|y|^2 + (|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2)\right]^{\frac{1}{4}}}$ e $b = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{1 + |x|^2}\left[|y|^2 + (|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2)\right]^{\frac{1}{4}}}$

Podemos concluir que a métrica esférica $F_s$, é projetiva com a métrica euclidiana $F_E$ em $\mathbb{R}^n$ e suas geodésicas são linhas retas em $\mathbb{R}^n$. Verificando assim que $F_s(\dot{c}(t))$ é do tipo (2.54).

## 2.4 O caso em que $\lambda = -1$

Nesta seção, iremos estudar a equação (2.24) onde $\lambda = -1$. De (2.24) obtemos

$$f(t) = \sqrt{(a^2 + C)\cosh(2t) \pm ab\sinh(2t) - C}. \tag{2.59}$$

De fato, tomemos a equação (2.24), fazendo $\lambda = -1$ obtemos

$$\int_a^{f(t)} \frac{s}{\sqrt{s^4 + 2Cs^2 - \tilde{\lambda}}} ds = \pm t,$$

como

$$C := \frac{1}{2}(\lambda a^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{a^2} + b^2),$$

para $\lambda = -1$ teremos

$$C := \frac{1}{2}(-a^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{a^2} + b^2) \quad e \quad (a^2 + C)^2 = (ab)^2 + \tilde{\lambda} + C^2.$$

Temos

$$-\lambda a^4 + 2Ca^2 - \tilde{\lambda} = (ab)^2 > 0,$$

logo para $\lambda = -1$ obtemos

$$a^4 + 2Ca^2 - \tilde{\lambda} = (ab)^2 > 0. \tag{2.60}$$

Dada a equação (2.24)

$$\int_a^{f(t)} \frac{s}{\sqrt{s^4 + 2Cs^2 - \tilde{\lambda}}} ds = \pm t,$$

temos

$$\sqrt{s^4 + 2Cs^2 - \tilde{\lambda}} = \sqrt{(s^2 + C)^2 - C^2 - \tilde{\lambda}},$$

logo

$$\int \frac{s}{\sqrt{(s^2+C)^2 - C^2 - \tilde{\lambda}}} ds = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - k^2}},$$

onde

$$u = s^2 + C, \ \frac{du}{2} = sds$$

fazendo

$$k^2 = C^2 + \tilde{\lambda},$$

obtemos

$$\int_a^{f(t)} \frac{s}{\sqrt{s^4 + 2Cs^2 - \tilde{\lambda}}} ds = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - k^2}}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int \frac{s}{\sqrt{s^4 + 2Cs^2 - \tilde{\lambda}}} ds &= \frac{1}{2}\Big( \cosh^{-1}(\frac{u}{k}) + C_1 \Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big( \cosh^{-1}(\frac{s^2 + C}{k}) + C_1 \Big)\Big|_a^{f(t)} \\ &= \frac{1}{2}\Big( \cosh^{-1}(\frac{f^2(t) + C}{k}) - \cosh^{-1}(\frac{a^2 + C}{k}) \Big). \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\pm 2t = \cosh^{-1}(\frac{f^2(t) + C}{k}) - \cosh^{-1}(\frac{a^2 + C}{k}).$$

Daí

$$\cosh^{-1}(\frac{f^2(t) + C}{k}) = \cosh^{-1}(\frac{a^2 + C}{k}) \pm 2t.$$

Aplicando a função *cosh* em ambos os lados, temos

$$\frac{f^2(t) + C}{k} = \cosh\Big( \cosh^{-1}\Big( \frac{a^2 + C}{k} \Big) \pm 2t \Big),$$

ou seja

$$\frac{f^2(t)+C}{k} = \frac{a^2+C}{k}\cosh(2t) \pm \sinh(2t) senh\Big(\cosh^{-1}\Big(\frac{a^2+C}{k}\Big)\Big).$$

De onde obtemos

$$\begin{aligned}
f^2(t) &= (a^2+C)\cosh(2t) \pm k\sinh(2t)\sinh\Big(\cosh^{-1}\Big(\frac{a^2+C}{k}\Big)\Big) - C \\
&= (a^2+C)\cosh(2t) \pm \sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\sinh(\cosh^{-1}(\frac{a^2+C}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}}))\sinh(2t) - C \\
&= (a^2+C)\cosh(2t) \pm \sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\sinh\Big[ln\Big(\frac{a^2+C}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}} + \sqrt{(\frac{a^2+C}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}})^2 - 1}\Big)\Big]. \\
&\quad .\sinh(2t) - C \\
&= (a^2+C)\cosh(2t) \pm \sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\frac{1}{2}\Bigg[\frac{\big((a^2+C)+\sqrt{a^2b^2}\big)}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}[(a^2+C)+\sqrt{a^2b^2}]} - \\
&\quad -\frac{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}}{(a^2+C)+\sqrt{a^2b^2}}\Bigg]\sinh(2t) - C \\
&= (a^2+C)\cosh(2t) \pm \sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\frac{1}{2}\Bigg[\frac{(a^2+C)+ab}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}} - \frac{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}}{(a^2+C)+ab}\Bigg]\sinh(2t) - C \\
&= (a^2+C)\cosh(2t) \pm \sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\frac{1}{2}\Bigg[\frac{a^4+2a^2C+2(a^2+C)ab+C^2}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\Big[(a^2+C)+ab\Big]} + \\
&\quad +\frac{(a^2+C)^2-(C^2+\tilde{\lambda})-(C^2+\tilde{\lambda})}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\Big[(a^2+C)+ab\Big]}\Bigg]\sinh(2t) - C \\
&= (a^2+C)\cosh(2t) \pm \sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\frac{1}{2}\Bigg[\frac{a^4+2a^2C+C^2-2(C^2+\tilde{\lambda})}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\Big[(a^2+C)+ab\Big]} + \\
&\quad +\frac{(a^2+C)^2+2(a^2+C)ab}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\Big[(a^2+C)+\sqrt{(a^2+C)^2-(C^2+\tilde{\lambda})}\Big]}\Bigg]\sinh(2t) - C
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (a^2+C)\cosh(2t) \pm \sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\frac{1}{2}\left[\frac{a^4-a^4+\tilde{\lambda}+a^2b^2+C^2-2C^2-2\tilde{\lambda}}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\Big[(a^2+C)+ab\Big]}+\right.\\
&\quad\left.+\frac{C^2+a^2b^2+\tilde{\lambda}+2(a^2+C)ab}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\Big[(a^2+C)+ab\Big]}\right]\sinh(2t)-C\\
&= (a^2+C)\cosh(2t) \pm \sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\frac{1}{2}\left[\frac{2a^2b^2+2(a^2+C)ab}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\Big[(a^2+C)+ab\Big]}\right]\sinh(2t)-C\\
&= (a^2+C)\cosh(2t) \pm \left[\frac{a^2b^2+(a^2+C)ab}{(a^2+C)+ab}\right]\sinh(2t)-C\\
&= (a^2+C)\cosh(2t) \pm \left[\frac{(ab)\big((ab)+(a^2+C)\big)}{(ab)+(a^2+C)}\right]\sinh(2t)-C\\
&= (a^2+C)\cosh(2t) \pm (ab)\sinh(2t)-C.
\end{aligned}
$$

Logo para $b > 0$, temos

$$
f(t) = \sqrt{(a^2+C)\cosh(2t)+ab\sinh(2t)-C}. \tag{2.61}
$$

Usaremos (2.25) para reescrevermos (2.59) da seguinte forma

$$
f(t) = \begin{cases}
\sqrt{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\cosh\big[\cosh^{-1}\big(\frac{a^2+C}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}}\big)\pm 2t\big]-C}, & se \quad C^2+\tilde{\lambda}>0\\
\sqrt{e^{\pm 2t}\big(a^2+C\big)-C}, & se \quad C^2+\tilde{\lambda}\ =0\\
\sqrt{\sqrt{-C^2-\tilde{\lambda}}\sinh\big[\sinh^{-1}\big(\frac{a^2+C}{\sqrt{-C^2-\tilde{\lambda}}}\big)\pm 2t\big]-C}, & se \quad C^2+\tilde{\lambda}<0.
\end{cases} \tag{2.62}
$$

De fato, tomemos $C^2 + \tilde{\lambda} > 0$, daí

$$\begin{aligned}
(f(t))^2 &= \sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\cosh\big[\cosh^{-1}\big(\frac{a^2+C}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}}\big) \pm 2t\big] - C \\
&= \sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\Big[\frac{a^2+C}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}}\cosh(2t) \pm \sinh(\cosh^{-1}\big(\frac{a^2+C}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}}\big))\sinh(2t)\Big] - C \\
&= (a^2+C)\cosh(2t) \pm \sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\sinh(\cosh^{-1}\big(\frac{a^2+C}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}}\big))\sinh(2t) - C \\
&= (a^2+C)\cosh(2t) \pm \sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\sinh\Big[ln\Big(\frac{a^2+C}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}} + \sqrt{\big(\frac{a^2+C}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}}\big)^2 - 1}\Big)\Big]. \\
&\quad .(\sinh(2t)) - C \\
&= (a^2+C)\cosh(2t) \pm \sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\frac{1}{2}\Bigg[\frac{\big((a^2+C)+\sqrt{a^2b^2}\big)}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}[(a^2+C)+\sqrt{a^2b^2}]} - \\
&\quad -\frac{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}}{(a^2+C)+\sqrt{a^2b^2}}\Bigg]\sinh(2t) - C \\
&= (a^2+C)\cosh(2t) \pm \sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\frac{1}{2}\Bigg[\frac{(a^2+C)+ab}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}} - \frac{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}}{(a^2+C)+ab}\Bigg]. \\
&\quad .\sinh(2t) - C \\
&= (a^2+C)\cosh(2t) \pm \sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\frac{1}{2}\Bigg[\frac{a^4+2a^2C+2(a^2+C)ab+C^2}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\Big[(a^2+C)+ab\Big]} + \\
&\quad +\frac{(a^2+C)^2-(C^2+\tilde{\lambda})-(C^2+\tilde{\lambda})}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\Big[(a^2+C)+ab\Big]}\Bigg]\sinh(2t) - C \\
&= (a^2+C)\cosh(2t) \pm \sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\frac{1}{2}\Bigg[\frac{a^4+2a^2C+C^2-2(C^2+\tilde{\lambda})}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\Big[(a^2+C)+ab\Big]} + \\
&\quad +\frac{(a^2+C)^2+2(a^2+C)ab}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\Big[(a^2+C)+\sqrt{(a^2+C)^2-(C^2+\tilde{\lambda})}\Big]}\Bigg]\sinh(2t) - C \\
&= (a^2+C)\cosh(2t) \pm \sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\frac{1}{2}\Bigg[\frac{a^4-a^4+\tilde{\lambda}+a^2b^2+C^2-2C^2-2\tilde{\lambda}}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\Big[(a^2+C)+ab\Big]} + \\
&\quad +\frac{C^2+a^2b^2+\tilde{\lambda}+2(a^2+C)ab}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\Big[(a^2+C)+ab\Big]}\Bigg]\sinh(2t) - C
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (a^2+C)\cosh(2t) \pm \sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\frac{1}{2}\left[\frac{2a^2b^2+2(a^2+C)ab}{\sqrt{C^2+\tilde{\lambda}}\Big[(a^2+C)+ab\Big]}\right]\sinh(2t) - C \\
&= (a^2+C)\cosh(2t) \pm \left[\frac{a^2b^2+(a^2+C)ab}{(a^2+C)+ab}\right]\sinh(2t) - C \\
&= (a^2+C)\cosh(2t) \pm \left[\frac{(ab)\big((ab)+(a^2+C)\big)}{(ab)+(a^2+C)}\right]\sinh(2t) - C \\
&= (a^2+C)\cosh(2t) \pm (ab)\sinh(2t) - C.
\end{aligned}
$$

Para o caso $C^2 + \tilde{\lambda} = 0$, temos

$(a^2+C)^2 = (ab)^2 + \tilde{\lambda} + c^2$, logo $(a^2+C)^2 = (ab)^2$, daí $(a^2+C) = \pm ab$, tomemos a função (2.62), logo

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sqrt{(a^2+C)\cosh(2t) \pm ab\sinh(2t) - C} \\
&= \sqrt{\pm ab\cosh(2t) \pm ab\sinh(2t) - C} \\
&= \sqrt{\pm ab(\cosh(2t)+\sinh(2t)) - C} \\
&= \sqrt{\frac{\pm ab}{2}\big[(e^{2t}+e^{-2t})+(e^{2t}-e^{-2t})\big] - C} \\
&= \sqrt{\frac{\pm ab}{2}(2e^{\pm 2t}) - C} \\
&= \sqrt{\pm abe^{\pm 2t} - C}.
\end{aligned}
$$

Logo $f(t) = \sqrt{(a^2+C)e^{\pm 2t} - C}$.

E por último, seja $C^2 + \tilde{\lambda} < 0$, usaremos a definição de $\sinh(u)$ e $\sinh^{-1}(u)$, cujos cálculos são feitos de maneira análoga ao caso $C^2 + \tilde{\lambda} > 0$.

O sinal $\pm$ em (2.62) é o mesmo de $f'(0) = b \neq 0$. Dividiremos este caso em diversos casos.

**Caso 1:** $\tilde{\lambda} = 1$. Neste caso,

$$
C := \frac{1}{2}(-a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2), \qquad (a^2+C)^2 = C^2 + 1 + (ab)^2,
$$

$$
\frac{|C|}{\sqrt{C^2+1}} < 1.
$$

Então, por (2.62) obtemos

$$f(t) = \sqrt{\sqrt{C^2+1}\cosh\big[\cosh^{-1}\big(\frac{a^2+C}{\sqrt{C^2+1}}\big) \pm 2t\big] - C}. \tag{2.63}$$

Assim $f(t)$ é definida no intervalo $I = (-\infty, \infty)$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(t)^2} dt < \infty.$$

**Caso 2:** $\tilde{\lambda} = 0$. Neste caso,

$$C := \frac{1}{2}(-a^2+b^2), \qquad (a^2+C)^2 = C^2 + (ab)^2.$$

Então

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{2|C|}\cosh\left[\frac{1}{2}\cosh^{-1}\left(\frac{a^2}{|C|} - 1\right) \pm t\right], & se \quad C < 0, \\ \sqrt{2|C|}\sinh\left[\frac{1}{2}\cosh^{-1}\left(\frac{a^2}{C} + 1\right) \pm t\right], & se \quad C > 0, \\ ae^{\pm t} & se \quad C = 0. \end{cases} \tag{2.64}$$

(i) Se $C < 0$, usaremos a definição de $\cosh(u)$ e $\cosh^{-1}(u)$, cujos cálculos são feitos de maneira análoga ao caso $C > 0$. $f(t)$ esta definida no intervalo $I = (-\infty, \infty)$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(t)^2} dt < \infty.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(t)^2} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2|C|\cosh^2\left[\frac{1}{2}\cosh^{-1}\left(\frac{a^2}{|C|} - 1\right) \pm t\right]} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2|C|\cosh^2\left[\theta \pm t\right]} dt \\ &= \frac{1}{2|C|}\int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2\left[\theta \pm t\right] dt \end{aligned}$$

onde $\theta = \dfrac{1}{2}\cosh^{-1}\big(\dfrac{a^2}{|C|} - 1\big)$ fazendo $u = \theta \pm t$, $\quad du = \pm dt$ temos

$$
\begin{aligned}
\pm\frac{1}{2|C|}\int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2(u)du &= \pm\frac{1}{2|C|}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \sec h^2 u du \\
&= \pm\frac{1}{2|C|}\lim_{R\to\infty} \operatorname{tg} hu\Big|_{-R}^{R} \\
&= \pm\frac{1}{2|C|}\lim_{R\to\infty} \Big[\frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}\Big]\Big|_{-R}^{R} \\
&= \pm\frac{1}{2|C|}\lim_{R\to\infty} \Big[\big[\frac{e^R - e^{-R}}{e^R + e^{-R}}\big] - \big[\frac{e^{-R} - e^{R}}{e^{-R} + e^{R}}\big]\Big] \\
&= \pm\frac{1}{2|C|}\lim_{R\to\infty} \Big[\frac{e^R - e^{-R} - e^{-R} + e^{-R}}{e^R + e^{-R}}\Big] \\
&= \pm\frac{1}{2|C|}\lim_{R\to\infty} \frac{2(e^R - e^{-R})}{(e^R + e^{-R})} \\
&= \pm\frac{1}{2|C|}\lim_{R\to\infty} \frac{2e^R - 2e^{-R}}{e^R + e^{-R}} \\
&= \pm\frac{1}{2|C|}\lim_{R\to\infty} \frac{e^R(2 - \dfrac{2e^{-R}}{e^R})}{e^R(1 + \dfrac{e^{-R}}{e^R})} \\
&= \pm\frac{1}{2|C|}\lim_{R\to\infty} \frac{(2 - \dfrac{2}{e^{2R}})}{(1 + \dfrac{1}{e^{2R}})} \\
&= \pm\frac{1}{2|C|}2 \\
&= \pm\frac{1}{|C|} < \infty.
\end{aligned}
$$

(ii) Se $C > 0$, tome $\theta = \dfrac{1}{2}\cosh^{-1}\big(\dfrac{a^2}{|C|}+1\big)$ e $x = \dfrac{a^2}{|C|}+1 = \dfrac{a^2+|C|}{|C|}$

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sqrt{2|C|}\sinh\Big[\frac{1}{2}\cosh^{-1}\big(\frac{a^2}{|C|}+1\big)\pm t\Big]\\
&= \sqrt{2|C|}\sinh\Big[\ln(x+\sqrt{x^2-1})^{\frac{1}{2}}\pm t\Big]\\
&= \sqrt{2|C|}\frac{1}{2}\Big[e^{\ln(x+\sqrt{x^2-1})^{\frac{1}{2}}\pm t} - e^{\ln(x+\sqrt{x^2-1})^{-\frac{1}{2}}\mp t}\Big]\\
&= \sqrt{2|C|}\frac{1}{2}\Big[e^{\pm t}(x+\sqrt{x^2-1})^{\frac{1}{2}} - e^{\mp t}(x+\sqrt{x^2-1})^{-\frac{1}{2}}\Big]\\
&= \sqrt{2|C|}\frac{1}{2}\left[\frac{e^{\pm t}(x+\sqrt{x^2-1})-e^{\mp t}}{\sqrt{(x+\sqrt{x^2-1})}}\right]\\
&= \sqrt{2|C|}\frac{1}{2}\left[\frac{e^{\pm t}\Big((\frac{a^2+C}{C})+\frac{\sqrt{(a^2+C)^2-C^2}}{|C|}\Big)-e^{\mp t}}{\sqrt{(\frac{a^2+C}{C})+\frac{\sqrt{(a^2+C)^2-C^2}}{|C|}}}\right]\\
&= \sqrt{2|C|}\frac{1}{2}\left[\frac{e^{\pm t}\Big(\frac{a^2+C+ab}{C}\Big)-e^{\mp t}}{\sqrt{\frac{a^2+C+ab}{C}}}\right]\\
&= \sqrt{2|C|}\frac{1}{2}\left[\frac{e^{\pm t}\Big(\sqrt{a^2+C+ab}\Big)}{C}-\frac{e^{\mp t}}{\sqrt{a^2+C+ab}}\right].
\end{aligned}
$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos

$$
\begin{aligned}
f^2(t) &= \big(\sqrt{2|C|}\frac{1}{2}\big)^2\Big[\frac{e^{\pm t}\sqrt{\big(a^2+C+ab\big)}}{C}-e^{\mp t}\sqrt{a^2+C+ab}\Big]^2\\
&= \frac{C^2}{2}\Big[\frac{e^{\pm 2t}\big(a^2+C+ab\big)}{C^2}-\frac{2}{C}+\frac{e^{\mp 2t}}{\big(a^2+C+ab\big)}\Big]\\
&= \frac{C^2}{2}\Big[\frac{e^{\pm 2t}\big(a^2+C+ab\big)}{C^2}+\frac{e^{\mp 2t}}{\big(a^2+C+ab\big)}\Big]-C\\
&= \frac{C}{2}\Big[\frac{e^{\pm 2t}\big(a^2+C+ab\big)}{C}+\frac{Ce^{\mp 2t}}{\big(a^2+C+ab\big)}\Big]-C.
\end{aligned}
$$

Logo

$$f^2(t) = \frac{C}{2}\Big[\frac{e^{\pm 2t}\big(a^2 + C + ab\big)}{C} + \frac{Ce^{\mp 2t}}{\big(a^2 + C + ab\big)}\Big] - C. \tag{2.65}$$

Por outro lado, para $\tilde{\lambda} = 0$, temos

$$\begin{aligned}
f^2(t) &= \sqrt{C^2}\cosh\Big[\cosh^{-1}\Big(\frac{a^2 + C}{\sqrt{C^2}}\Big) \pm 2t\Big] - C \\
&= \sqrt{C^2}\cosh\Big[\cosh^{-1}\Big(\frac{a^2}{|C|} + 1\Big) \pm 2t\Big] - C \\
&= \sqrt{C^2}\cosh\Big[\ln\Big(\frac{a^2}{|C|} + 1 + \frac{\sqrt{(a^2 + C)^2 - 1}}{|C|}\Big) \pm 2t\Big] - C \\
&= \sqrt{C^2}\left[\frac{e^{\ln\Big(\frac{a^2}{|C|}+1+\frac{\sqrt{(ab)^2}}{|C|}\Big) \pm 2t} + e^{-\ln\Big(\frac{a^2}{|C|}+1+\frac{\sqrt{(ab)^2}}{|C|}\Big) \mp 2t}}{2}\right] - C \\
&= \frac{\sqrt{C^2}}{2}\left[\big(\frac{a^2 + C + ab}{|C|}\big)e^{\pm 2t} + \big(\frac{a^2 + C + ab}{|C|}\big)^{-1}e^{\mp 2t}\right] - C \\
&= \frac{C}{2}\left[\big(\frac{a^2 + C + ab}{|C|}\big)e^{\pm 2t} + \big(\frac{C}{a^2 + C + ab}\big)e^{\mp 2t}\right] - C \\
&= \frac{C}{2}\Big[\frac{e^{\pm 2t}\big(a^2 + C + ab\big)}{C} + \frac{Ce^{\mp 2t}}{\big(a^2 + C + ab\big)}\Big] - C.
\end{aligned}$$

Logo

$$f^2(t) = \frac{C}{2}\Big[\frac{e^{\pm 2t}\big(a^2 + C + ab\big)}{C} + \frac{Ce^{\mp 2t}}{\big(a^2 + C + ab\big)}\Big] - C. \tag{2.66}$$

Portanto, de (2.65) e (2.66) concluímos que

$$f(t) = \sqrt{2|C|}\sinh\big[\frac{1}{2}\cosh^{-1}\big(\frac{a^2}{|C|} + 1\big) \pm t\big].$$

Sendo que $f(t)$ é definida em ambos os intervalos $I = (-\delta, \infty)$ ou $I = (-\infty, \tau)$.

Assuma que $I = (-\delta, \infty)$. Então

$$\int_{-\delta}^{0} \frac{1}{f(t)^2}dt = \infty \;\; e \int_{0}^{\infty} \frac{1}{f(t)^2}dt < \infty.$$

O caso onde $I = (-\infty, \tau)$ é similar, sendo assim omitido.

(iii) Se $C = 0$, temos

$0 = \frac{1}{2}(-a^2 + b^2)$, logo $a^2 = b^2$, daí $a = \pm b$, e $(a^2)^2 = (ab)^2$, logo

$a^4 = b^4$, daí $a = \pm b$. Tomemos a função (2.32),

logo

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sqrt{(a^2 + C)\cosh(2t) + ab\sinh(2t) - C} \\
&= \sqrt{a^2\cosh(2t) \pm a^2\sinh(2t)} \\
&= \sqrt{a^2(\cosh(2t) \pm \sinh(2t))} \\
&= \sqrt{\frac{a^2}{2}(e^{2t} + e^{-2t} \pm (e^{2t} - e^{-2t}))} \\
&= \sqrt{\frac{a^2}{2}(2e^{\pm 2t})} \\
&= \sqrt{a^2 e^{\pm 2t}}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$f(t) = ae^{\pm t}.$$

Temos que $b \neq 0$, (para $b = 0$ $f(t)$ não está bem definida) mas $f(t)$ está definida no intervalo $I = (-\infty, \infty)$.

Assuma que $b > 0$. Então

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{f(t)^2}dt = \infty \quad e \int_{0}^{\infty} \frac{1}{f(t)^2}dt < \infty.$$

De fato

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{a^2 e^{2t}} dt &= \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{e^{2t}} dt \\
&= \lim_{R\to\infty} \Big(\frac{-e^{-2t}}{2a^2} + C\Big)\Big|_{-R}^{0} \\
&= \lim_{R\to\infty} \Big(\frac{-e^{0}}{2a^2} + \frac{e^{2R}}{2a^2}\Big) \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2a^2}\Big( -1 + e^{2R}\Big) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} \frac{1}{a^2 e^{2t}} dt &= \frac{1}{a^2} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{e^{2t}} dt \\
&= \lim_{R\to\infty} \Big(\frac{-e^{-2t}}{2a^2} + C\Big)\Big|_{0}^{R} \\
&= \lim_{R\to\infty} \Big(\frac{-e^{-2R}}{2a^2} + \frac{e^{0}}{2a^2}\Big) \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2a^2}\Big(\frac{-1}{e^{2R}} + 1\Big) \\
&= \frac{1}{2a^2} < \infty
\end{aligned}$$

O caso onde $b < 0$ é similar, sendo assim omitido.

**Caso 3:** $\tilde{\lambda} = -1$. Neste caso,

$$C := \frac{1}{2}(-a^2 - \frac{1}{a^2} + b^2), \qquad (a^2 + C)^2 = C^2 - 1 + (ab)^2.$$

(i) $C^2 > 1$. Neste caso,

$$\frac{|C|}{\sqrt{C^2 - 1}} > 1.$$

Então, de (2.62) temos

$$f(t) = \sqrt{\sqrt{C^2-1}\cosh\big[\cosh^{-1}\big(\frac{a^2 + C}{\sqrt{C^2 - 1}}\big) \pm 2t\big] - C}. \tag{2.67}$$

(ia) Se $C > 1$, então $f(t)$ está definida no intervalo $I = (-\delta, \infty)$ e

$$\int_{-\delta}^{0} \frac{1}{f(t)^2} dt = \infty \;\; e \int_{0}^{\infty} \frac{1}{f(t)^2} dt < \infty.$$

(ib) Se $C < -1$, então $f(t)$ está definida no intervalo $I = (-\infty, \infty)$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(t)^2} dt < \infty.$$

(ii) Se $C^2 < 1$. Então, de (2.62) temos

$$f(t) = \sqrt{\sqrt{1 - C^2} \sinh \big[ \sinh^{-1} \big( \frac{a^2 + C}{\sqrt{1 - C^2}} \big) \pm 2t \big] - C}. \tag{2.68}$$

Neste caso, $f(t)$ está definida em ambos os intervalos $I = (-\delta, \infty)$ ou $I = (-\infty, \tau)$. Assuma que $I = (-\delta, \infty)$. Então

$$\int_{-\delta}^{0} \frac{1}{f(t)^2} dt = \infty \;\; e \int_{0}^{\infty} \frac{1}{f(t)^2} dt < \infty.$$

O caso onde $I = (-\infty, \tau)$, é similar sendo assim omitido.

(iii) $C^2 = 1$.

(iiia) Se $C = 1$, Então, de (2.62) temos

$$f(t) = \sqrt{e^{\pm 2t}(a^2 + 1) - 1}. \tag{2.69}$$

Assim $f(t)$ está definida em ambos os intervalos $I = (-\delta, \infty)$ ou $I = (-\infty, \tau)$. Assuma que $I = (-\delta, \infty)$. Então

$$\int_{-\delta}^{0} \frac{1}{f(t)^2} dt = \infty \;\; e \int_{0}^{\infty} \frac{1}{f(t)^2} dt < \infty.$$

De fato, tomemos $b > 0$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{e^{2t}(a^2 + 1) - 1} dt,$$

seja

$$u = e^{2t}(a^2+1) - 1, \quad du = 2e^{2t}(a^2+1)dt \text{ e } \quad dt = \frac{du}{2e^{2t}(a^2+1)} = \frac{du}{2(u+1)}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{e^{2t}(a^2+1)-1}dt &= \int_{a^2}^\infty \frac{1}{u}\frac{1}{2(u+1)}du \\
&= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{a^2}^R (\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1})du \\
&= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\big(\ln|u| - \ln|u+1|\big)\Big|_{a^2}^R \\
&= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\Big(\ln|\frac{u}{u+1}|\Big)\Big|_{a^2}^R \\
&= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\Big(\ln|\frac{R}{R+1}| - \ln|\frac{a^2}{a^2+1}|\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\ln|\frac{a^2}{a^2+1}| < \infty
\end{aligned}$$

O caso onde $I = (-\infty, \tau)$, é similar sendo assim omitido.

(iiib) Se $C = -1$. Então, de (2.62) temos

$$f(t) = \sqrt{e^{\pm 2t}(a^2-1)+1}. \tag{2.70}$$

Se $a > 1$, então $b \neq 0$ e $f(t)$ está definida no intervalo $I = (-\infty, \infty)$.

Assuma que $b > 0$, então $f(t) = \sqrt{e^{2t}(a^2-1)+1}$. Logo

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{f(t)^2}dt = \infty \ \ e \int_0^\infty \frac{1}{f(t)^2}dt < \infty.$$

O caso onde $b < 0$ é similar, sendo assim omitido.

Se $0 < a < 1$, então $f(t)$ é definida em ambos os intervalos $I = (-\delta, \infty)$ ou $I = (-\infty, \tau)$. Assuma que $I = (-\delta, \infty)$. Então para $b < 0$, temos $\sqrt{e^{-2t}(a^2-1)+1}$.

$$\int_{-\delta}^0 \frac{1}{f(t)^2}dt = \infty \ \ e \int_0^\infty \frac{1}{f(t)^2}dt < \infty.$$

O caso onde $b > 0$, é similar sendo assim omitido.

Se $a = 1$, então $b = 0$. De fato, como $C := \frac{1}{2}(-a^2 - \frac{1}{a^2} + b^2)$, logo $-2 + b^2 = -2$, daí $b^2 = 0$, logo $b = 0$. Então $f(t) = 1$. Neste caso, $f(t)$ está definida no intervalo $I = (-\infty, \infty)$.

**Teorema 2.3.** *Sejam $F$ e $\tilde{F}$ métricas de Einstein numa variedade $M^n$, com*

$$Ric = -(n-1)F^2, \qquad \tilde{Ric} = (n-1)\tilde{\lambda}\tilde{F}^2.$$

*Assuma que $F$ e $\tilde{F}$ são projetivamente relacionadas pontualmente. Então para toda geodésica $c(t)$ de $F$,*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{\left(a^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{a^2} + b^2\right)\cosh(2t) + 2ab\sinh(2t) - \left(-a^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{a^2} + b^2\right)}. \tag{2.71}$$

*(i) Se $\tilde{\lambda} = 1$,então neste caso, toda geodésica de $\tilde{F}$ tem comprimento finito. Assim $\tilde{F}$ não é completa positiva nem completa negativa.*

*(ii) Se $\tilde{\lambda} = 0$, então neste caso as geodésica de $\tilde{F}$ não estão definidas no intervalo $I = (-\infty, \infty)$.*

*(iia) Se uma geodésica unitária $c$ de $F$ está definida no intervalo $[0, \infty)$, então $\tilde{F}$-comprimento finito, a menos que*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = (\frac{e^t}{a})^2. \tag{2.72}$$

*(iib) Se uma geodésica unitária $c$ de $F$ está definida no intervalo $(-\infty, 0]$, então $\tilde{F}$-comprimento finito, a menos que*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = (\frac{e^{-t}}{a})^2. \tag{2.73}$$

*(iii) Se $\tilde{\lambda} = -1$. Neste caso, se ambas $F$ e $\tilde{F}$ são completas, então*

$$F = \tilde{F}.$$

*(iiia) Se uma geodésica unitária c de F está definida no intervalo* $[0, \infty)$, *então esta tem* $\tilde{F}$*-comprimento finito, a menos que*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{e^{-2t}(a^2 - 1) + 1}, \ (a \geq 1). \tag{2.74}$$

*(iiib) Se uma geodésica unitária c de F está definida no intervalo* $(-\infty, 0]$, *então esta tem* $\tilde{F}$*-comprimento finito, a menos que*

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{e^{2t}(a^2 - 1) + 1}, \ (a \geq 1). \tag{2.75}$$

**Demonstração.** Temos que $F$ e $\tilde{F}$ são métricas de Einstein projetivamente relacionadas, definimos como anteriormente

$$f(t) := \frac{1}{\sqrt{\tilde{F}(t)}}.$$

logo,

$$\tilde{F}(t) := \frac{1}{f^2(t)}$$

e como para toda geodésica unitária em $(M, F)$ temos

$$\tilde{F}(t) := \tilde{F}(\dot{c}(t)),$$

daí pela equação (2.61), obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(\dot{c}(t)) &= \frac{1}{(a^2 + C)\cosh(2t) + ab\sinh(2t) - C} \\
&= \frac{1}{(a^2 + \frac{1}{2}(-a^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{a^2} + b^2))\cosh(2t) + ab\sinh(2t) - \frac{1}{2}(-a^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{a^2} + b^2)} \\
&= \frac{1}{(\frac{2a^4 - a^4 + \tilde{\lambda} + a^2b^2}{2a^2})\cosh(2t) + ab\sinh(2t) + \frac{a^4 - \tilde{\lambda} - a^2b^2}{2a^2}} \\
&= \frac{1}{\frac{(a^4 + \tilde{\lambda} + a^2b^2)\cosh(2t) + 2a^2ab\sinh(2t) + a^4 - \tilde{\lambda} - a^2b^2}{2a^2}},
\end{aligned}$$

logo

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{2}{(a^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{a^2} + b^2)\cosh(2t) + 2ab\sinh(2t) - (-a^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{a^2} + b^2)},$$

onde $a > 0$ e $b \neq 0$.

(i) Se $\tilde{\lambda} = 1$, então neste caso, toda geodésica de $\tilde{F}$ tem comprimento finito. Assim $\tilde{F}$ não é completa positiva nem completa negativa.

(ii) Se $\tilde{\lambda} = 0$, então neste caso as geodésica de $\tilde{F}$ não estão definidas no intervalo $I = (-\infty, \infty)$.

(iia) Se uma geodésica unitária $c$ de $F$ está definida no intervalo $[0, \infty)$, então $\tilde{F}$-comprimento finito, a menos que

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = (\frac{e^t}{a})^2. \tag{2.76}$$

De fato, pois para $b > 0$, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{a^2 e^{2t}} dt < \infty$ (ver caso 2 (iii)) e para $b < 0$, teremos $\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \dfrac{1}{e^{-2t}a^2} = (\dfrac{e^t}{a})^2$, cujo comprimento é infinito, quando $t \to \infty$.

(iib) Se uma geodésica unitária $c$ de $F$ está definida no intervalo $(-\infty, 0]$, então $\tilde{F}$-comprimento finito, a menos que

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = (\frac{e^{-t}}{a})^2. \tag{2.77}$$

De fato, pois para $b < 0$, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{a^2 e^{-2t}} dt < \infty$ (ver caso 2 (iii)) e para $b > 0$, teremos $\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \dfrac{1}{e^{2t}a^2} = (\dfrac{e^{-t}}{a})^2$, cujo comprimento é infinito, quando $t \to -\infty$ .

(iii) Se $\tilde{\lambda} = -1$. Neste caso, se ambas $F$ e $\tilde{F}$ são completas, então

$$F = \tilde{F}.$$

De fato,

como a geodésica $c$ de $F$ é unitária, então $F(t) = F(\dot{c}(t)) = 1$ e $\tilde{F}(\dot{c}(t)) = 1$, (ver caso 3 (iiib), onde $a = 1$), logo

$$\frac{F(\dot{c}(t))}{\tilde{F}(\dot{c}(t))} = 1,$$

portanto

$$F = \tilde{F}.$$

(iiia) Se uma geodésica unitária $c$ de $F$ está definida no intervalo $[0, \infty)$, então esta tem $\tilde{F}$-comprimento finito, a menos que

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{e^{-2t}(a^2 - 1) + 1}, \ (a \geq 1). \tag{2.78}$$

De fato, pois para $b > 0$, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^{2t}(a^2-1)+1} dt < \infty$ (ver caso 3 (iiib)) e para $b < 0$, teremos $\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \dfrac{1}{e^{-2t}(a^2-1)+1}$ para $(a \geq 1)$ cujo comprimento é infinito, quando $t \to \infty$.

(iiib) Se uma geodésica unitária $c$ de $F$ está definida no intervalo $(-\infty, 0]$, então esta tem $\tilde{F}$-comprimento finito, a menos que

$$\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \frac{1}{e^{2t}(a^2 - 1) + 1}, \ (a \geq 1). \tag{2.79}$$

De fato, pois para $b < 0$, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{e^{-2t}(a^2-1)+1} dt < \infty$ (ver caso 3 (iiib)) e para $b > 0$, teremos $\tilde{F}(\dot{c}(t)) = \dfrac{1}{e^{2t}(a^2-1)+1}$ para $(a \geq 1)$ cujo comprimento é infinito, quando $t \to -\infty$.

$\square$

## 2.5 Exemplos

A seguir veremos alguns exemplos interessantes.Todas as métricas de Einstein a seguir são métricas projetivas de Finsler de curvatura constante em um domínio fortemente convexo no espaço euclideano.

**Exemplo 2.1.** *Seja a métrica padrão superior e inferior da semi-esfera $S^n$ podemos puxar (pulled back) a métrica esférica do $F_s$ no $\mathbb{R}^n$ por um difeomorfismo*

$$\begin{aligned}\varphi_{\pm} \quad &: \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n_{\pm}, \\ & \quad x \longmapsto \varphi_{\pm}(x) := \Big(\frac{x}{\sqrt{1+|x|^2}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{1+|x|^2}}\Big).\end{aligned}$$

A fórmula de $F_s$ dada em (0.2) tem curvatura constante positiva $K = 1$ e é projetiva pontualmente com a métrica flat padrão $F_E(y) = |y|$ no $\mathbb{R}^n$. Tome uma geodésica arbitrária $c(t) = x + ty$ em $(\mathbb{R}^n, F_E)$. Faça $\dot{c}(t) = y$, substituindo em (0.2) obtemos

$$\begin{aligned}F_s(\dot{c}(t)) &:= \frac{\sqrt{|y|^2 + (|x+ty|^2|y|^2 - \langle x+ty, y\rangle^2)}}{1+|x+ty|^2} \\ &= \frac{\sqrt{|y|^2 + |y|^2(|x|^2 + 2\langle x,y\rangle t + t^2|y|^2) - \langle x+ty, y\rangle^2}}{1+|x|^2+2\langle x,y\rangle t + t^2|y|^2} \\ &= \frac{\sqrt{|y|^2(1+|x|^2+2\langle x,y\rangle t + t^2|y|^2) - \langle x,y\rangle^2 - 2t\langle x,y\rangle\langle y,y\rangle - t^2\langle y,y\rangle^2}}{1+|x|^2+2\langle x,y\rangle t+t^2|y|^2} \\ &= \frac{\sqrt{|y|^2+|y|^2|x|^2 - \langle x,y\rangle^2 + 2t\langle x,y\rangle|y|^2 + t^2|y|^4 - 2t\langle x,y\rangle|y|^2 - t^2|y|^4}}{1+|x|^2+2\langle x,y\rangle t+t^2|y|^2} \\ &= \frac{\sqrt{|y|^2+|y|^2|x|^2-\langle x,y\rangle^2}}{1+|x|^2+2\langle x,y\rangle t+t^2|y|^2}.\end{aligned}$$

Logo

$$F_s(y) := \frac{\sqrt{|y|^2 + (|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2)}}{1+|x|^2+2\langle x,y\rangle t + |y|^2t^2}, \tag{2.80}$$

ou ainda,

$$F_s(y) := \frac{1}{(a+bt)^2 + (\frac{t}{a})^2}. \tag{2.81}$$

onde $a = \dfrac{\sqrt{1+|x|^2}}{\left[|y|^2 + (|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2)\right]^{\frac{1}{4}}}$ e $b = \dfrac{\langle x,y\rangle}{\sqrt{1+|x|^2}\left[|y|^2 + (|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2)\right]^{\frac{1}{4}}}$

Podemos concluir que a métrica esférica $F_s$, é projetiva com a métrica euclidiana $F_E$ em $\mathbb{R}^n$ e suas geodésicas são linhas retas em $\mathbb{R}^n$. Verificando assim que $F_s(\dot{c}(t))$ satisfaz o Teorema (2.2) e é da forma (i).

**Exemplo 2.2.** *Deformando a métrica esférica $F_s$ produzimos algumas métricas de Finsler interessantes. Seja*

$$A_\varepsilon(y) := |x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2 + \varepsilon|y|^2 + \frac{2(1-\varepsilon^2)\langle x,y\rangle^2}{|x|^4 + 2\varepsilon|x|^2 + 1},$$

$$B_\varepsilon(y) := (|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2)^2 + 2\varepsilon(|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2)|y|^2 + |y|^4.$$

*Para $0 < \varepsilon \leq 1$, defina*

$$F_\varepsilon(y) := \sqrt{\frac{A_\varepsilon(y) + \sqrt{B_\varepsilon(y)}}{2(|x|^4 + 2\varepsilon|x|^2 + 1)}} + \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\langle x,y\rangle}{|x|^4 + 2\varepsilon|x|^2 + 1}, y \in T_x\mathbb{R}^n. \tag{2.82}$$

$F_\varepsilon$ é uma família de métricas de Finsler no $\mathbb{R}^n$. Note que $F_1 = F_s$. De fato,

$$\begin{aligned}
F_1(y) &= \sqrt{\frac{A_1(y) + \sqrt{B_1(y)}}{2(|x|^4 + 2|x|^2 + 1)}} + \frac{\sqrt{1-1}\langle x,y\rangle}{|x|^4 + 2|x|^2 + 1} \\
&= \sqrt{\frac{|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2 + |y|^2 + \sqrt{(|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2)^2 + 2(|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2)|y|^2 + |y|^4}}{2(|x|^4 + 2|x|^2 + 1)}} \\
&= \sqrt{\frac{|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2 + |y|^2 + \sqrt{(|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2 + |y|^2)^2}}{2(|x|^4 + 2|x|^2 + 1)}} \\
&= \sqrt{\frac{|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2 + |y|^2 + |x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2 + |y|^2}{2(|x|^4 + 2|x|^2 + 1)}} \\
&= \sqrt{\frac{2(|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2 + |y|^2)}{2(|x|^4 + 2|x|^2 + 1)}} \\
&= \sqrt{\frac{|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2 + |y|^2}{2(|x|^4 + 2|x|^2 + 1)}} \\
&= F_s(y),
\end{aligned}$$

é justamente a métrica esférica. Usando (2.80), podemos levar $F_\varepsilon$ para $S^n$.

As métricas da pull-back sobre $S^n$ são realmente classes especiais das métricas de Bryant sobre $S^n$. Suponha que $F_\varepsilon$ é de curvatura constante $K = 1$ e pontualmente projetiva a métrica euclidiana $F_E$ sobre $\mathbb{R}^n$. Então para toda $c(t) = x + ty$, existem constantes $a > 0$ e $-\infty < b < \infty$ tais que

$$F(\dot{c}(t)) = \frac{1}{(a+bt)^2 + \left(\frac{t}{a}\right)^2}.$$

As constantes $a$ e $b$ devem ser dadas por

$$a = \frac{1}{\sqrt{F_\varepsilon(y)}}, \qquad b = -\frac{y^i}{\sqrt{F_\varepsilon(y)}}\frac{\partial}{\partial x^i}\big[\ln\sqrt{F_\varepsilon(y)}\big].$$

**Exemplo 2.3.** *A métrica de Klein $F_k$ (3.15)* é Riemanniana. Ela é completa com curvatura constante $-1$ e projetiva pontualmente com a métrica euclidiana padrão $F_\epsilon = |y|$ sobre $B^n$. Tome uma geodésica arbitrária $c(t) = x + ty$ em $(B^n, F_\epsilon)$. Então

$$\begin{aligned} F_k(\dot{c}(t)) &:= \frac{\sqrt{|y|^2 + (|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2)}}{1 - |x|^2 - 2\langle x,y\rangle t + |y|^2t^2} \\ &= \frac{1}{(a+bt)^2 - \left(\frac{t}{a}\right)^2}, \end{aligned}$$

onde

$$a = \frac{\sqrt{1-|x|^2}}{\left[\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2)}\right]^{\frac{1}{4}}},$$

$$b = -\frac{\langle x,y\rangle}{\sqrt{1-|x|^2\left[|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2)\right]^{\frac{1}{4}}}}.$$

Assim $F_k(\dot{c}(t))$ satisfaz o teorema (2.2) e é da forma (2.56).

**Exemplo 2.4.** *(Métricas de Funk). Seja $\Omega$ um domínio fortemente convexo em $\mathbb{R}^n$. Para $0 \neq y \in T_x\Omega \approx \mathbb{R}^n$, defina $F_-(y) > 0$ e $F_+(y) > 0$ por*

$$x - \frac{y}{F_-(y)} =: z_- \in \partial\Omega, \quad x + \frac{y}{F_+(y)} =: z_+ \in \partial\Omega \tag{2.83}$$

*$F\mp$ é chamado o par de métricas de Funk sobre $\Omega$. Note que $F_+(-y) = F_-(y)$, ou ainda, estas satisfazem*

$$\frac{\partial F_\pm}{\partial x^k} = \pm\frac{1}{2}\frac{\partial[F_\pm^2]}{\partial y^k}. \tag{2.84}$$

De acordo com o Proposição 2.1, $F_\pm$ tem curvatura constante $-\frac{1}{4}$ e é projetiva pontualmente com a métrica euclidiana padrão $F_\epsilon = |y|$ sobre $\Omega$. Esta prova está feita no capítulo 3 deste trabalho. Fixe $y \in T_x\Omega$ e $t$ tais que $c(t) = x + ty \in \Omega$. Da definição de $F_-$ e $F_+$, temos

$$z_- = x - \frac{y}{F_-(y)} = x + ty - \frac{y}{F_-(\dot{c}(t))}.$$
$$z_+ = x + \frac{y}{F_+(y)} = x + ty + \frac{y}{F_+(\dot{c}(t))}.$$

Obtemos

$$F_-(\dot{c}(t)) = \frac{F_-(y)}{1 + F_-(y)t}, \tag{2.85}$$

$$F_+(\dot{c}(t)) = \frac{F_+(y)}{1 - F_+(y)t}. \tag{2.86}$$

Assim

$$\frac{1}{2}F_\pm(\dot{c}(t)) = \frac{1}{a^2 \mp 2t}, \text{ onde } a^2 = \frac{2}{F_\pm(y)}.$$

Assim $\frac{1}{2}F_\pm(\dot{c}(t))$ estão na forma (2.48) com $ab = \mp 1$. Isto é garantido também pelo teorema 2.2, porque $\frac{1}{2}F_\pm$ tem curvatura constante $-1$.

**Exemplo 2.5.** *Seja $\Omega$ um domínio fortemente convexo em $\mathbb{R}^n$. Seja $F_\pm$ denotando a métrica de Funk sobre $\Omega$, a qual é definida em (2.80).* Defina

$$F_H(y) := \frac{1}{2}(F_-(y) + F_+(y)). \tag{2.87}$$

$F_H$ é chamada a métrica de Hilbert sobre $\Omega$. A métrica de Hilbert tem curvatura constante $-1$ e é projetiva pontualmente a métrica euclidiana padrão $F_E = |y|$ sobre

$\Omega$. Segue do teorema 2.2 que ao longo de toda geodésica $c(t) = x + ty$ de $F_E$, $F_H(\dot{c}(t))$ deve satisfazer (2.48). Deixe-nos verificar diretamente esta condição necessária. De (2.85) e (2.86), obtemos

$$\begin{aligned} F_H(\dot{c}(t)) &= \frac{F_-(y) + F_+(y)}{2(1 + F_-(y)t)(1 - F_+(y)t)} \\ &= \frac{1}{(a + bt)^2 - \left(\dfrac{t}{a}\right)^2}, \end{aligned}$$

onde

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{F_-(y) + F_+(y)}}, \text{ e} \qquad b = \frac{F_-(y) + F_+(y)}{\sqrt{2}\sqrt{F_-(y) + F_+(y)}}.$$

De fato, por um simples cálculo mostramos que $F_H(\dot{c}(t))$ satisfaz (2.48). Seja $F = F_H$ e $\tilde{F} = \frac{1}{2}F_\pm$. Então ao longo de toda geodésica $c(t)$ de velocidade unitária de $F$, $\frac{1}{2}F_+(\dot{c}(t))$ satisfaz (2.78) e $\frac{1}{2}F_-(\dot{c}(t))$ satisfaz (2.79).

Finalmente, colocamos a seguinte pergunta:

**Problema em aberto:** Existem métricas Ricci-flat, não triviais, completas positivamente/negativamente em um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$?

# Capítulo 3

# Métricas de Funk e de Klein

## 3.1 Problema: Determinar o spray dada a métrica.

Dada uma métrica de Finsler $\tilde{F}$ sobre $\Omega$ vamos determinar um spray $\tilde{G}$, tal que, $\tilde{G}$ seja induzido por $\tilde{F}$.

**Definição 3.1.** *Uma **norma de Minkowski** sobre um espaço vetorial $V$, $\varphi : V \to [0, \infty)$ é uma função não negativa com as seguintes propriedades:*

- *$\varphi$ é positiva homogênea de grau um, isto é,*

$$\varphi(\lambda y) = \lambda \varphi(y), \quad \lambda > 0, \;\; y \in V.$$

- *$\varphi$ é $C^\infty$ em $V - \{0\}$ e para todo $y \in V - \{0\}$,*

$$g_y(u, v) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} [\varphi^2(y + su + tv)] | s = t = 0, u, v \in V$$

*é uma forma bilinear, simétrica, positiva definida.*

Veremos uma versão do Lema de Rapcsák[R] para uma métrica de Finsler pontualmente projetivamente flat.

**Lema 3.1.** ***(Rapcsák [R])*** *Seja $\tilde{F} = \tilde{F}(x,y)$ uma métrica de Finsler num subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. $\tilde{F}$* ***é pontualmente projetivamente flat*** *(isto é, as geodésicas são linhas retas) se, e somente se, $\tilde{F}$ satisfaz*

$$\tilde{F}_{x^k y^l} y^k = \tilde{F}_{x^l},\ l = 1, ..., n. \tag{3.1}$$

Neste caso, os coeficientes $\tilde{G}^i$ do spray são da forma $\tilde{G}^i = P y^i$, com

$$P = \frac{\tilde{F}_{x^k} y^k}{2\tilde{F}}.$$

**Demonstração.** Pelo Lema de Rapcsák - (2.4). Seja $F$ uma métrica de Finsler. $\tilde{F}$ é pontualmente projetiva a $F$ se, e somente se,

$$\frac{\partial \tilde{F}_{;k}}{\partial y^l} y^k - \tilde{F}_{;l} = 0, \tag{3.2}$$

$$\tilde{G}^i = G^i + P y^i, \tag{3.3}$$

$$P = \frac{\tilde{F}_{;k} y^k}{2\tilde{F}}. \tag{3.4}$$

Temos por hipótese que $\tilde{F}$ é pontualmente projetivamente flat, isto é, $\tilde{F}$ é pontualmente projetiva a uma métrica flat ($K = 0$), logo as geodésicas de $F$ são linhas retas, daí $G^i = 0$, $\forall i$, então

$$\tilde{F}_{;k} := \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^k} - \frac{\partial G^l}{\partial y^k}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y^l} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^k}. \tag{3.5}$$

Por (3.2) temos

$$\frac{\partial}{\partial y^l}\left[\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^k}\right] y^k - \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x^l} = 0$$

se, e somente se,

$$\tilde{F}_{x^k y^l} y^k - \tilde{F}_{x^l} = 0.$$

Por (3.3) temos $\tilde{G}^i = Py^i$ e $P = \frac{\tilde{F}_{x^k}y^k}{2\tilde{F}}$, como gostaríamos de provar. $\square$

**Métricas de Funk**. Seja $\Omega$ um domínio fortemente convexo no $\mathbb{R}^n$. Por definição, existe uma norma de Minkowski $\varphi$ sobre $\mathbb{R}^n$ e um ponto $x_0 \in \Omega$, tal que

$$\partial\Omega - x_0 = \varphi^{-1}(1).$$

Seja $F$ uma métrica de Funk sobre $\Omega$. Para todo $y \in T_x\Omega = \mathbb{R}^n$, $F = F(x, y)$ é determinada por

$$\varphi(x + \frac{y}{F} - x_0) = 1. \tag{3.6}$$

Sendo $F$ definida da seguinte forma

$$\begin{aligned} F \quad : \quad & T\Omega = \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty) \\ & (x, y) \longmapsto F(x, y), \end{aligned}$$

para todo $y \in T_x\Omega = \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$ se, e somente se, $\varphi(z) = 1$, $z \in \mathbb{R}^n$.
Como $z = x + \dfrac{y}{F} - x_0$, $x = (x^i)$, $z = (z^i) = x + \dfrac{y}{F} - x_0$ com $x_0 = (a^i)$, diferenciando (3.6) em relação a $x^j$ e $y^j$ respectivamente, obtemos

(a) $\left[\varphi(z^i)\right]_{x^j} = 1$, logo $\varphi_{z^i}(z)(z^i)_{x^j} = 0$, portanto $(\delta_{ij} - y^i F_{x^j} f^{-2})\varphi_{z^i}(z) = 0$;

(b) $\left[\varphi(z^i)\right]_{y^j} = 1$, logo $\varphi_{z^i}(z)(z^i)_{y^j} = 0$, portanto $[(\delta_{ij}F - y^i F_{y^j})F^{-2}]\varphi_{z^i}(z) = 0$ ou ainda, $[(\delta_{ij} - y^i F_{y^j} F^{-1})F^{-1}]\varphi_{z^i}(z) = 0$.

Segue-se de $(a)$ e $(b)$ que

$$(-y^i F_{y^j} F^{-1} + y^i F_{x^j} F^{-2})\varphi_{z^i}(z) = 0,$$

ou seja

$$(F_{x^j} F^{-1} - F_{y^j})F^{-1} y^i \varphi_{z^i}(z) = 0.$$

Logo

$$(F_{x^j} - FF_{y^j})\frac{1}{F^2}y^i\varphi_{z^i}(z) = 0.$$

Daí

$$(F_{x^j} - FF_{y^j})y^i\varphi_{z^i}(z) = 0.$$

Observe que $v = (v^i) \in T_z\mathbb{R}^n$ é tangente a $\partial\Omega$ se, e somente se, $\varphi_{z^i}(z)v^i = 0$. Assim $\varphi_{z^i}(z)y^i \neq 0$, portanto

$$F_{x^j} - FF_{y^j} = 0. \tag{3.7}$$

A métrica de Funk $F$ numa bola unitária $B^n \subset \mathbb{R}^n$ é dada por:

$$F := \frac{\sqrt{|y|^2 - |x|^2|y|^2 + \langle x, y\rangle^2} + \langle x, y\rangle}{1 - |x|^2}. \tag{3.8}$$

De fato, temos que $\langle x + \frac{y}{F}, x + \frac{y}{F}\rangle = 1$,

então

$$|x|^2 + 2\langle x, \frac{y}{F}\rangle + \frac{1}{F^2}|y|^2 = 1,$$

logo

$$|x|^2 + \frac{2}{F}\langle x, y\rangle + \frac{1}{F^2}|y|^2 = 1,$$

de onde segue que

$$F^2|x|^2 + 2F\langle x, y\rangle + |y|^2 - F^2 = 0.$$

Daí

$$F^2(|x|^2 - 1) + 2F\langle x, y\rangle + |y|^2 = 0,$$

usando Bháskara, obtemos

$$F = \frac{-2\langle x, y\rangle \pm \sqrt{4\langle x, y\rangle^2 - 4|y|^2(|x|^2 - 1)}}{2(|x|^2 - 1)},$$

que é equivalente a

$$F = \frac{\pm\sqrt{\langle x, y\rangle^2 + |y|^2 - |x|^2|y|^2} - \langle x, y\rangle}{|x|^2 - 1}.$$

Portanto

$$F_1 = \frac{-\sqrt{\langle x, y\rangle^2 + |y|^2 - |x|^2|y|^2} + \langle x, y\rangle}{1 - |x|^2}$$

e

$$F_2 = \frac{\sqrt{\langle x, y\rangle^2 + |y|^2 - |x|^2|y|^2} + \langle x, y\rangle}{1 - |x|^2}, \text{ para } |x| < 1.$$

logo obtemos,

o par de ***métricas de Funk*** $F_{\pm}$ na bola unitária $B^n \subset \mathbb{R}^n$ as quais são métricas projetivas Riemanniana completas com curvatura constante igual a $-1$, definida da seguinte forma

$$F_{\pm}(y) := \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2)} \pm \langle x, y\rangle}{1 - |x|^2}, \qquad y \in T_xB^n = \mathbb{R}^n. \tag{3.9}$$

O lema abaixo nos permitirá calcular a curvatura constante $K$, das métricas projetivas.

**Lema 3.2.** *Se um espaço de Finsler é projetivamente flat, ou $G^i = Py^i$, então ele é de curvatura escalar, e*

$$K = \frac{-1}{F^2}(P_{x^i}y^i - P^2). \tag{3.10}$$

Uma prova para este lema será dada por [5].

Vamos mostrar que a métrica de Funk $F$ é projetiva, isto é satisfaz a equação (3.1).

De fato, por definição a métrica de Funk $F$ num domínio fortemente convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, implica que

$$F_{x^j} = FF_{y^j}. \tag{3.11}$$

Diferenciando (3.11) em relação a $y^l$ e aplicando $y^j$, obtemos

$$F_{x^jy^l}y^j = (FF_{y^j})_{y^l}y^j = (F_{y^l}F_{y^j} + FF_{y^jy^l})y^j = FF_{y^l} = F_{x^l}.$$

Portanto $F_{x^jy^l}y^j = F_{x^l}$, com $l = 1, ..., n$.

Logo, $F$ é pontualmente projetivamente flat. Assim as geodésicas de $F$ são linhas retas em $B^n \subset \mathbb{R}^n$, com $G^i = Py^i$ e $P = \frac{F_{x^j}y^j}{2F}$, aplicando $y^j$ em (3.11) temos

$$F_{x^j}y^j = FF_{y^j}y^j = F^2,$$

daí

$$\frac{F_{x^j y^j}}{F} = F,$$

logo

$$\frac{F}{2} = \frac{F_{x^j y^j}}{2F} = P.$$

Portanto

$$P = \frac{F}{2}, \tag{3.12}$$

é o fator projetivo da métrica de Funk $F$. Logo os coeficientes geodésicos do spray de $F$ são dados por

$$G^i = \frac{1}{2}F(y)y^i. \tag{3.13}$$

As métricas de Funk $F_{\pm}$ são de curvatura constante $-1/4$.
De fato, substituindo $P = \dfrac{F}{2}$ em (3.10) obtemos

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{F^2}\left[(\frac{F}{2})_{x^i}y^i - (\frac{F}{2})^2\right] \\ &= -\frac{1}{F^2}\left[(\frac{1}{2})F_{x^i}y^i - (\frac{F^2}{4})\right] \\ &= -\frac{1}{F^2}\left[(\frac{1}{2})FF_{y^i}y^i - (\frac{F^2}{4})\right] \\ &= -\frac{1}{F^2}\left[(\frac{1}{2})F^2 - (\frac{F^2}{4})\right] \\ &= -\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Portanto

$$K = -\frac{1}{4}. \tag{3.14}$$

Temos ainda a ***métrica de Klein*** $F_K$ que é justamente a métrica de Hilbert

$$F_H = \frac{1}{2}(F_- + F_+) \text{ na bola } B^n \subset \mathbb{R}^n,$$

a qual é uma métrica projetiva Riemanniana completa com curvatura constante igual a $-1$, definida da seguinte forma

$$F_K(y) := \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2)}}{1 - |x|^2}, \qquad y \in T_xB^n = \mathbb{R}^n. \tag{3.15}$$

Vamos agora mostrar que a métrica de Klein $F_k$, é projetiva, isto é satisfaz a equação (3.1).

De fato, $F_H = \frac{1}{2}(F_- + F_+)$, como $F_-$ e $F_+$ são métricas de Funk, logo vale $F_{x^j} = FF_{y^j}$, portanto obtemos

$$(F_-)_{x^j} = (F_-)(F_-)_{y^j}, \tag{3.16}$$

daí

$$(F_-)_{x^jy^i}y^j = [(F_-)_{y^i}(F_-)_{y^j} + (F_-)(F_-)_{y^jy^i}]y^j$$

como $F$ é positiva, homogênea de grau 1, logo pela relação de Euler (1.2), temos

$$(F_-)_{x^jy^i}y^j = (F_-)(F_-)_{y^i},$$

por (3.16), obtemos

$$(F_-)_{x^jy^i}y^j = (F_-)_{x^i}, \tag{3.17}$$

temos ainda

$$(F_+)_{x^j} = (F_+)(F_+)_{y^j},$$

daí

$$(F_+)_{x^jy^i}y^j = [(F_+)_{y^i}(F_+)_{y^j} + (F_+)(F_+)_{y^jy^i}]y^j = (F_+)(F_+)_{y^i},$$

logo de maneira análoga ao anterior, obtemos

$$(F_+)_{x^jy^i}y^j = (F_+)_{x^i}. \tag{3.18}$$

Consequentemente de (3.17) e (3.18) temos

$$(F_H)_{x^jy^i}y^j = (F_H)_{x^i}. \tag{3.19}$$

Logo, concluímos que $F_H$ é pontualmente projetivamente flat. Assim as geodésicas de $F_H$ são linhas retas em $B^n \subset \mathbb{R}^n$. Sendo $P = \frac{1}{2}(F_- + F_+) = F_H$ o fator projetivo da métrica de Hilbert $F_H$. Logo os coeficientes geodésicos do spray de $F_H$ são dados por

$$G^i = \frac{1}{2}(F_- + F_+)y^i.$$

A métrica de Hilbert $F_H$ tem curvatura constante $-1$.
De fato, substituindo $P = \dfrac{(F_- + F_+)}{2}$ em (3.10) obtemos

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{1}{F_H^2}\Big[\frac{(F_-)_{x^i} + (F_+)_{x^i}}{2}y^i - \big(\frac{(F_- + F_+)}{2}\big)^2\Big] \\
&= -\frac{1}{F_H^2}\Big[\frac{1}{2}(F_- + F_+)\big((F_-)_{y^i} + (F_+)_{y^i}\big)y^i - \frac{1}{4}(F_- + F_+)^2\Big] \\
&= -\frac{4}{(F_- + F_+)^2}\big[\frac{1}{2}(F_- + F_+)^2 - \frac{1}{4}(F_- + F_+)^2\big] \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Portanto

$$K = -1. \tag{3.20}$$

Vamos agora mostrar que $\Xi = -[F_H]^2$. Pela equação (3.10) temos

$$K = \frac{-1}{[F_H]^2}(P_{;k}y^k - P^2).$$

Daí

$$K = \frac{\Xi}{[F_H]^2},$$

logo por (3.20), temos

$$\Xi = -[F_H]^2.$$

Se encontrarmos um spray R-flat, obteremos uma métrica de Finsler $\tilde{F}$ com curvatura constante $k = 0$.

**Teorema 3.1.** *Seja $\Omega$ um domínio fortemente convexo em $\mathbb{R}^n$ e $F$ uma métrica de Funk em $\Omega$. Então o seguinte spray é R-flat*

$$\tilde{G} := y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2Fy^i \frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{3.21}$$

**Demonstração.** Tomemos $G^i(x,y) = Fy^i$ e $F_{x^j} = FF_{y^j}$, daí

(a) $\frac{\partial G^i}{\partial x^k} = F_{x^k} y^i = FF_{y^k} y^i$;

(b) $\frac{\partial G^i}{\partial y^j} = F_{y^j} y^i + F\delta_{ij}$;

(c)

$$\begin{aligned}
y^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} &= y^j [\frac{\partial}{\partial y^k}(FF_{y^k} y^i)] \\
&= y^j [(F_{y^k} F_{y^k} + FF_{y^k y^j}) y^i + FF_{y^k} \delta_{ik}] \\
&= y^j F_{y^k} F_{y^k} y^i + y^j FF_{y^k y^j} y^i + y^i FF_{y^k} \delta_{ik} \\
&= y^j F_{y^j} F_{y^k} y^i + y^j F_{y^k y^j} F y^i + y^i F_{y^j} F \delta_{ik} \\
&= FF_{y^k} y^i + F^2 \delta_{ik};
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} &= G^j [\frac{\partial}{\partial y^k}(\frac{\partial G^i}{\partial y^j})] \\
&= G^j [\frac{\partial}{\partial y^k}(F_{y^j} y^i + F\delta_{ij})] \\
&= G^j [F_{y^j y^k} y^i + F_{y^j} \delta_{ik} + F_{y^k} \delta_{ij}] \\
&= F_{y^j} [F_{y^j y^k} y^i + F_{y^j} \delta_{ik} + F_{y^k} \delta_{ij}] \\
&= F_{y^j} F_{y^j y^k} y^i + F_{y^j} F_{y^j} \delta_{ik} + F_{y^j} F_{y^k} \delta_{ij}] \\
&= F^2 \delta_{ik} + y^j \delta_{ij} FF_{y^k} \\
&= F^2 \delta_{ik} + y^i FF_{y^k}.
\end{aligned}$$

Como

$$
\begin{aligned}
R^i_k &= 2\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j\frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2G^j\frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k} \\
&= 2FF_{y^k}y^i - FF_{y^k}y^i - F^2\delta_{ik} + 2FF_{y^k}y^i + 2F^2\delta_{ik} - (F_{y^j}y^i + F\delta_{ij})(F_{y^k}y^j + F\delta_{jk}) \\
&= FF_{y^k}y^i + F^2\delta_{ik} + 2FF_{y^k}y^i - y^iy^jF_{y^j}F_{y^k} - y^iF_{y^j}F\delta_{jk} - F\delta_{ij}F_{y^k}y^j - F^2\delta_{ik} \\
&= FF_{y^k}y^i + 2FF_{y^k}y^i - y^iFF_{y^k} - y^iFF_{y^k} - y^iFF_{y^k} \\
&= 3y^iFF_{y^k} - 3y^iFF_{y^k} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

portanto $R^i_k = 0$, daí

$$R_y(u) := R^i_k u^k \frac{\partial}{\partial x^i}_p = 0.$$

Então a curvatura flag é

$$K(P,y) = \frac{g_y(R_y(u),u)}{g_y(y,y)g_y(u,u) - g_y(y,u)g_y(y,u)} = 0,$$

onde $u \in P \subset T_PM$ e $y \in P - \{0\}$, logo $\tilde{F}$ é R-flat, concluímos então que $\tilde{G}$ é R-flat, pois uma métrica tem curvatura constante $K = 0$, se e somente se, seu spray é R-flat. □

## 3.2 Problema Inverso: Determinar a métrica dado o spray.

Dado um spray $\tilde{G}$, vamos determinar uma métrica de Finsler $\tilde{F}$ sobre $\Omega$, tal que, $\tilde{G}$ seja induzido por $\tilde{F}$.

**Lema 3.3.** *Seja $F$ uma métrica de Funk sobre domínio fortemente convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\tilde{G} = y^i\frac{\partial}{\partial x^i} - 2Fy^i\frac{\partial}{\partial y^i}$. Então uma métrica de Finsler $\tilde{F}$ sobre $\Omega$ induz $\tilde{G}$ se, e somente* *se, $\tilde{F}$ satisfaz*

$$\tilde{F}_{x^k} = (F\tilde{F})_{y^k}, \quad k = 1, ...n. \tag{3.22}$$

**Demonstração.** ($\Rightarrow$)Supondo que $\tilde{F}$ induz $\tilde{G}$, isto é, os coeficientes geodésicos de $\tilde{F}$ são dados por

$$\tilde{G}^i = Fy^i.$$

Visto que $\tilde{G}$ é pontualmente projetivemante flat, então $\tilde{F}$ também o é.

Pelo Lema (3.1) temos $\tilde{F}_{x^k y^l} y^k = \tilde{F}_{x^l}$ e os coeficientes geodésicos do spray de $\tilde{F}$ são da forma $\tilde{G}^i = Py^i$, logo

$$P = F,$$

como

$$P = \frac{\tilde{F}_{x^k} y^k}{2\tilde{F}},$$

obtemos

$$2P\tilde{F} = \tilde{F}_{x^k} y^k,$$

portanto

$$2F\tilde{F} = \tilde{F}_{x^k} y^k.$$

Diferenciando esta última equação com respeito a $y^l$, temos

$$\begin{aligned}
2(F\tilde{F})_{y^l} &= (\tilde{F}_{x^k} y^k)_{y^l} \\
&= (\tilde{F}_{x^k} y^k)_{y^l} \\
&= \tilde{F}_{x^k y^l} y^k + \tilde{F}_{x^k} \delta_{kl} \\
&= \tilde{F}_{x^k y^l} y^k + \tilde{F}_{x^l} \\
&= \tilde{F}_{x^l} \tilde{F}_x^l \\
&= 2\tilde{F}_{x^l}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$(F\tilde{F})_{y^l} = \tilde{F}_{x^l}, \quad l = 1, ...n. \tag{3.23}$$

($\Leftarrow$) Supondo que $\tilde{F}$ é uma métrica de Finsler em $\Omega$ a qual satisfaz (3.23), diferenciando-a com respeito a $y^k$ temos

$$((F\tilde{F})_{y^l})_{y^k} = (\tilde{F}_{x^l})_{y^k},$$

multiplicando $y^l$, obtemos

$$(F\tilde{F})_{y^l y^k} y^l = \tilde{F}_{x^l y^k} y^l,$$

daí,

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{x^l y^k} y^l &= (F_{y^l}\tilde{F} + F\tilde{F}_{y^l})_{y^k} y^l \\
&= \big[F_{y^l y^k}\tilde{F} + F_{y^l}\tilde{F}_{y^k} + F_{y^k}\tilde{F}_{y^l} + F\tilde{F}_{y^l y^k}\big] y^l \\
&= F\tilde{F}_{y^k} + F_{y^k}\tilde{F} \\
&= (F\tilde{F})_{y^k} \\
&= \tilde{F}_{x^k}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\tilde{F}_{x^l y^k} y^l = \tilde{F}_{x^k},$$

então pelo Lema (3.1), $\tilde{F}$ é pontualmente projetivamente flat com $\tilde{G}^i = Py^i$. Vamos determinar o fator projetivo $P$.

Multiplicando $y^l$ em

$$\tilde{F}_{x^l} = (F\tilde{F})_{y^l},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{x^l} y^l &= (F_{y^l}\tilde{F} + F\tilde{F}_{y^l}) y^l \\
&= F\tilde{F} + F\tilde{F} \\
&= 2F\tilde{F}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$F = \frac{\tilde{F}_{x^l} y^l}{2\tilde{F}} = P,$$

logo $\tilde{G}^i = F y^i$. à saber o spray de $\tilde{F}$ é justamente $\tilde{G}$, pois

$$\tilde{G} := y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2\tilde{G}^i y^i \frac{\partial}{\partial y^i} = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2F y^i \frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{3.24}$$

$\square$

Se uma métrica de Finsler $\tilde{F}$ induz $\tilde{G}$ sobre um subconjunto aberto de $\Omega$, então ela é pontualmente projetivamente flat com curvatura constante $K = 0$.

**Teorema 3.2.** *Seja $F = F(x, y)$ uma métrica de Funk num domínio fortemente convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Para um ponto arbitrário $a = (a^i) \in \Omega$, defina a função $\tilde{F} = \tilde{F}(x, y)$ sobre $T\Omega = \Omega \times \mathbb{R}^n$ por*

$$\tilde{F} := F(x, y) + F_{x^i}(x, y)(x^i - a^i).$$

*$\tilde{F}$ é uma métrica de Finsler pontualmente projetivamente flat com $K = 0$.*

**Demonstração.** Por (3.11) temos

$$\tilde{F} := F(x, y) + F F_{y^i}(x, y)(x^i - a^i). \tag{3.25}$$

Devemos mostrar que $\tilde{F}$ induz $\tilde{G}$. É suficiente provar que $\tilde{F}$ satisfaz (3.22).

De (3.11) temos

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{x^k} &= F_{x^k} + (F_{x^k} F_{y^i} + F F_{y^i x^k})(x^i - a^i) + F F_{y^i} \delta_{ik} \\
&= F_{x^k} + F_{x^k} F_{y^i}(x^i - a^i) + F F_{x^k y^i}(x^i - a^i) + F F_{y^k} \\
&= F F_{y^k} + F F_{y^k} F_{y^i}(x^i - a^i) + F F_{x^k y^i}(x^i - a^i) + F F_{y^k} \\
&= 2F F_{y^k} + F F_{y^k} F_{y^i}(x^i - a^i) + F(F F_{y^k})_{y^i}(x^i - a^i) \\
&= 2F F_{y^k} + F F_{y^k} F_{y^i}(x^i - a^i) + F(F_{y^i} F_{y^k} + F F_{y^k y^i})(x^i - a^i) \\
&= 2F F_{y^k} + 2F F_{y^k} F_{y^i}(x^i - a^i) + F^2 F_{y^i y^k}(x^i - a^i).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\tilde{F}_{x^k} = 2FF_{y^k} + 2FF_{y^k}F_{y^i}(x^i - a^i) + F^2F_{y^iy^k}(x^i - a^i). \tag{3.26}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
(F\tilde{F})_{y^k} &= \left[F(F + FF_{y^i}(x^i - a^i))\right]_{y^k} \\
&= \left[F^2 + F^2F_{y^i}(x^i - a^i))\right]_{y^k} \\
&= 2FF_{y^k} + 2FF_{y^k}F_{y^i}(x^i - a^i) + F^2F_{y^iy^k}(x^i - a^i) + F^2F_{y^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^k} \\
&= 2FF_{y^k} + 2FF_{y^k}F_{y^i}(x^i - a^i) + F^2F_{y^iy^k}(x^i - a^i).
\end{aligned}$$

Portanto

$$(F\tilde{F})_{y^k} = 2FF_{y^k} + 2FF_{y^k}F_{y^i}(x^i - a^i) + F^2F_{y^iy^k}(x^i - a^i) \tag{3.27}$$

Concluímos então de (3.26) e (3.27) que $\tilde{F}$ induz $\tilde{G}$ e pelo Lema 3.3 que $\tilde{F}$ é pontualmente projetivamente flat, pelo Teorema 3.1 concluímos que $K = 0$. O que conclui a prova. $\square$

# Conclusão

Vimos que para se obter informacões sobre duas métricas, tendo mesmas geodésicas, impomos a condicão de estas serem de Einstein e usamos as relacões entre seus *sprays*. O estudo da Geometria de Finsler é bastante trabalhoso devido as contas serem mais difíceis, por exemplo as componentes da métrica dependem do ponto e de uma direção escolhida, aumentando assim as contas. O estudo de uma geometria mais geral que Riemanniana serve para um melhor entendimento da própria geometria Riemanniana.

# Referências Bibliográficas


[1] Bao, D., Chern, S.S., Shen, Z. *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*, GTM **200**. Springer-Verlag,(2000)

[2] Carmo, M. P. *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, (1988), (pp. 300).

[3] Chern, S.S. *Finsler geometry is just Riemannian geometry without the quadratic restriction*, Notices AMS. **43**, (1996), 9, 959-963.

[4] Matsumoto, M., Wei, X. *Projective changes of Finsler spaces of constant curvature*, Publ. Math. Debrecen **44** (1994), 175-181.

[5] Okada, T. *On models of projectively flat Finsler spaces of constant negative curvature*, Tensor, N.S **40** (1983), 117-124.

[6] Rapcsák, A. *Uber die bahntreuen Abbildungen metrisher Raume*, Publ. Math. Debrecen **8** (1961), 285-290.

[7] Shen, Z. *Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces*, Kluwer Academic Publishers Dordrecht, (2001).

[8] Shen, Z. *Funk Metrics and R-Flat Sprays*, preprint, Revised in June, 2001

[9] Shen, Z. *On projectively related Einstein metrics in Riemann-Finsler geometry* Math. Ann. **320**, 625-647 (2001).

[10] Souza, M. A. *Hipersuperfícies Mínimas Folheadas por Geodésicas em Formas Espaciais 4-Dimensionais*, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Goiás, (2003).

[11] Tenenblat, K., Souza, M.A. *Minimal surfaces of Rotation in Finsler Space with a Randers Metric*, Math. Ann., (2003), 325, 625-642.

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo