

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Escola de Engenharia  
Departamento de Engenharia de Estruturas  
Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas

**UMA CONTRIBUIÇÃO PARA A  
MODELAGEM NUMÉRICA DO CONCRETO COM  
FIBRAS CURTAS DE AÇO**

**Breno Ferreira Grossi**

Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS como parte dos requisitos para obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS.

Orientador: Prof. Dr. José Márcio  
Fonseca Calixto

Belo Horizonte  
Dezembro de 2006

## FOLHA DE APROVAÇÃO

*“Você ficou acordada  
Para que eu dormisse em paz  
Não se fez de rogada  
Para que eu avançasse um pouco mais  
Ignorou suas vontades  
Para que eu não desistisse jamais...”*

*Que faço eu para retribuir  
Esse gesto de amor e carinho?  
Somente posso admitir  
Que eu não venci sozinho...*

*A glória com que fui presenteado  
Não é ter chegado até aqui  
É saber que tenho você ao meu lado  
É por isso que consegui....”*

Esses meus versos são uma homenagem para a minha amada esposa Michele, que tanto fez para o sucesso desta jornada e a quem dedico este trabalho.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter colocado Sua mão sobre a minha cabeça durante todo o tempo.

Aos meus pais Jairo (*in memoriam*) e Dilzeny, meus primeiros e maiores mestres, que despertaram em mim o gosto pelos estudos.

Ao Professor José Márcio Fonseca Calixto, por sua orientação segura e precisa e, acima de tudo, pela abnegação desmedida para que eu conseguisse realizar esta pesquisa.

Ao Coronel Antônio Demétrio Bassili, pelo apoio na fase inicial deste trabalho.

Por fim, mas não menos importante, ao meu querido filho Lucas, que trouxe um sopro de alegria ao calor das emoções finais deste trabalho, embora, às vezes, fosse preciso abrandar a ventania causada por aquele sopro.

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	1
1.1. Justificativa .....	5
1.2. Objetivos .....	6
1.3. Metodologia .....	8
1.4. Estrutura do Trabalho .....	9
2. REVISÃO DA LITERATURA .....	12
2.1. Conceituação do Concreto com Fibras Curtas de Aço .....	12
2.2. Fibras de Aço - Fabricação e Comercialização .....	14
2.3. Produção do Concreto com Fibras Curtas de Aço .....	16
2.3.1. Seleção de Materiais .....	17
2.3.2. Dosagem e Mistura .....	17

---

2.3.3. Trabalhabilidade .....	19
2.3.4. Custos.....	20
2.4. Parâmetros para Avaliação de Desempenho do Concreto com Fibras Curtas de Aço .....	21
2.4.1. Relação de Aspecto.....	21
2.4.2. Comprimento da Fibra e Comprimento Crítico.....	23
2.4.3. Volume Crítico .....	26
2.4.4. Compatibilidade Dimensional .....	26
2.5. Comportamento do Concreto com Fibras Curtas de Aço.....	28
2.5.1. Resistência à Compressão.....	30
2.5.2. Resistência à Tração .....	32
2.5.3. Resistência à Flexão.....	33
2.5.4. Resistência ao Cisalhamento .....	34
2.5.5. Tenacidade à Flexão .....	38
2.6. Aplicações do Concreto com Fibras Curtas de Aço .....	56
2.7. Evolução dos Modelos de Análise para Concreto com Fibras Curtas de Aço ...	58
2.7.1. Primeiros Modelos.....	62
2.7.2. Modelos Mais Recentes.....	66
2.7.3. Modelos Baseados na Mecânica do Dano .....	69
3. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MODELO TRILINEAR.....	74
3.1. Introdução .....	74
3.2. Análise Não-Linear pelo Método dos Elementos Finitos (MEF).....	76
3.3. Programação Orientada a Objetos (POO).....	80

---

---

3.4. Fundamentos do Código Computacional FEMOOP .....	82
3.5. Expansão do FEMOOP .....	84
3.5.1. Expansão da Classe <i>ConstModel</i> .....	84
3.5.2. Expansão da Classe <i>Material</i> .....	85
3.5.3. Expansão da Classe <i>DamLaw</i> .....	89
4. ESTUDO COMPARATIVO DO MODELO TRILINEAR PARA CARACTERIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO EM FLEXÃO DO CRFA... 108	
4.1. Introdução .....	108
4.2. Avaliação da Aplicabilidade da Modelagem Trilinear .....	109
4.2.1. Flexão em Quatro Pontos .....	109
4.2.2. Flexão em Três Pontos .....	130
5. SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE ENSAIOS PARA VALIDAÇÃO DO MODELO TRILINEAR .....	140
5.1. Introdução .....	140
5.2. Caracterização do Modelo Trilinear Modificado .....	141
5.2.1. Parametrização Sugerida pela RILEM .....	142
5.2.2. Parametrização Proposta nesta Pesquisa .....	143
5.2.3. Ensaio de Referência para Caracterização do Modelo Trilinear Proposto nesta Pesquisa .....	147
5.3. Validação do Modelo Trilinear Modificado (MTM) .....	157
5.4. Metodologia para Aplicação do Modelo MTM .....	163
5.4.1. Exemplo de Aplicação .....	164

---

---

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	171
6.1. Introdução .....	171
6.2. Contribuição do Trabalho .....	172
6.2.1. Considerações sobre o Modelo Trilinear Padrão (MTP).....	173
6.2.2. Considerações sobre o Modelo Trilinear Modificado (MTM) .....	174
6.2.3. Considerações sobre a Metodologia de Aplicação do modelo MTM.....	175
6.3. Sugestões para Pesquisas Futuras .....	176
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	180

---

---

## LISTA DE FIGURAS

<b>FIGURA 1.1</b> – Fibra curta de aço DRAMIX® (BELGO GRUPO ARCELOR, 2006).....	2
<b>FIGURA 1.2</b> – Exemplos de aplicação do concreto reforçado com fibras curtas de aço (BEKAERT, 2006).....	4
<b>FIGURA 2.1</b> – Características geométricas típicas das fibras de aço (AMERICAN CONCRETE INSTITUTE - ACI - MANUAL OF CONCRETE PRACTICE, PART 5, 2000 - ACI 544.1R-96, com adaptações) .....	15
<b>FIGURA 2.2</b> – Correspondência entre a relação de aspecto ( $l_f / d_f$ ) e a resistência à compressão em argamassas com fibras de aço (ACI 544.4R-88, 2000, com adaptações).....	22
<b>FIGURA 2.3</b> – Evolução do “Fator de Tenacidade” com a relação de aspecto (AGOPYAN e NUNES, 1998).....	23
<b>FIGURA 2.4</b> – Transferência de tensões entre as fissuras (NUNES <i>et al.</i> , 1997).....	24

<b>FIGURA 2.5</b> – Distribuição de tensões nas fibras (FIGUEIREDO, 2000) .....	25
<b>FIGURA 2.6</b> – Comparação entre o comprimento da fibra e a dimensão máxima do agregado (FIGUEIREDO, 2000) .....	27
<b>FIGURA 2.7</b> – Relação entre o teor de fibras e a resistência à compressão em argamassas reforçadas com fibras de aço (ACI 544.4R-88, 2000).....	32
<b>FIGURA 2.8</b> – Típicos modos de ruptura observados em ensaios experimentais de cisalhamento com fibras (NARAYANAN e DARWISH, 1987) .....	35
<b>FIGURA 2.9</b> – Diagramas tensão-deslocamento em ensaios de transferência de cisalhamento em corpos-de-prova de concreto simples e com fibras (SIMÕES, 1998) .....	36
<b>FIGURA 2.10</b> – Posicionamento de corpo-de-prova, LVDT e cutelos no ensaio de tração na flexão em quatro pontos com o sistema “yoke” (FIGUEIREDO, 2000) .....	40
<b>FIGURA 2.11</b> – Características da curva carga-deslocamento para obtenção dos índices de tenacidade à flexão segundo ASTM C1018 (RESENDE, 2003).....	42
<b>FIGURA 2.12</b> – Curva carga-deslocamento para material elasto-plástico perfeito segundo o método ASTM C1018 para avaliação da tenacidade à flexão (FIGUEIREDO, 2000).....	43
<b>FIGURA 2.13</b> – Características da curva carga-deslocamento para obtenção do Fator de Tenacidade segundo JSCE-SF4 (GROTH, 2000) .....	44
<b>FIGURA 2.14</b> – Esquema do ensaio de viga entalhada da RILEM – TC 162 (BARRAGÁN, 2002) .....	46

<b>FIGURA 2.15</b> – Esquema do ensaio de viga entalhada da RILEM – TC 162 (BARR e LEE, 2002).....	46
<b>FIGURA 2.16</b> – Tipologia do ensaio de viga entalhada padronizado pela RILEM (TC 162) para avaliação da tenacidade à flexão de concretos reforçados com fibras (STANG <i>et al.</i> , 2000) .....	47
<b>FIGURA 2.17</b> – Parâmetros de caracterização da tenacidade à flexão segundo a metodologia de resistências equivalentes da RILEM TC 162 (VANDEWALLE e DUPONT, 2002).....	49
<b>FIGURA 2.18</b> – Parâmetros de caracterização da tenacidade à flexão segundo a metodologia de resistências residuais da RILEM TC 162 (VANDEWALLE e DUPONT, 2002).....	51
<b>FIGURA 2.19</b> – Diagrama tensão-deformação em flexão segundo a metodologia RILEM TC 162 (VANDEWALLE e DUPONT, 2002b).....	52
<b>FIGURA 2.20</b> – Fator de tamanho empregado no método das resistências residuais segundo a metodologia RILEM TC 162 (VANDEWALLE e DUPONT, 2002b).....	54
<b>FIGURA 2.21</b> – Relação entre resistências equivalentes ( $f_{eq}$ ) e resistências residuais ( $f_R$ ) obtidas por VANDEWALLE e DUPONT (2002b).....	55
<b>FIGURA 2.22</b> – Relação entre resistências equivalentes ( $f_{eq}$ ) e resistências residuais ( $f_R$ ) obtidas por BARROS <i>et al.</i> (2003).....	55
<b>FIGURA 2.23</b> – Curva tensão-deformação em compressão proposta por HSU e HSU (1994) para concreto com fibras de aço.....	65
<b>FIGURA 2.24</b> – Parâmetros de caracterização da tenacidade à flexão do CRFA segundo a proposta alemã (DBV, 2001).....	68

<b>FIGURA 3.1</b> – Comunicação entre classes do FEMOOP .....	83
<b>FIGURA 3.2</b> – Expansão da classe <i>ConstModel</i> .....	84
<b>FIGURA 3.3</b> – Expansão da classe <i>Material</i> .....	85
<b>FIGURA 3.4</b> – Diagrama tensão-deformação em tração segundo MTP .....	86
<b>FIGURA 3.5</b> – Diagrama tensão-deformação em tração segundo MTM .....	88
<b>FIGURA 3.6</b> – Expansão da classe <i>DamLaw</i> .....	90
<b>FIGURA 3.7</b> – Diagrama tensão-deformação bilinear em compressão .....	96
<b>FIGURA 3.8</b> – Diagrama tensão-deformação bilinear em tração .....	98
<b>FIGURA 3.9</b> – Diagrama tensão-deformação não-linear em tração .....	99
<b>FIGURA 3.10</b> – Primeiro trecho do ramo descendente da curva tensão-deformação conforme modelo MTP .....	100
<b>FIGURA 3.11</b> – Segundo trecho do ramo descendente da curva tensão-deformação conforme modelo MTP .....	102
<b>FIGURA 3.12</b> – Primeiro trecho do ramo descendente da curva tensão-deformação conforme modelo MTM .....	104
<b>FIGURA 3.13</b> – Segundo trecho do ramo descendente da curva tensão-deformação conforme modelo MTM .....	106

<b>FIGURA 4.1</b> – Geometria (mm) e carregamento da viga em 4 pontos de AGOPYAN e NUNES (1998).....	110
<b>FIGURA 4.2</b> – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto A) com lei de dano bilinear (Teor de 20 kg/m <sup>3</sup> ).....	112
<b>FIGURA 4.3</b> – Distribuição de tensões normais horizontais (em MPa) correspondente à carga de pico do diagrama carga x deslocamento da figura 4.2.....	113
<b>FIGURA 4.4</b> – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto A) com lei de dano não-linear (Teor de 20 kg/m <sup>3</sup> ).....	114
<b>FIGURA 4.5</b> – Distribuição de tensões normais horizontais (em MPa) correspondente à carga de pico do diagrama carga x deslocamento da figura 4.4.....	115
<b>FIGURA 4.6</b> – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto A) com lei de dano trilinear (Teor de 20 kg/m <sup>3</sup> ).....	116
<b>FIGURA 4.7</b> – Distribuição de tensões normais horizontais (em MPa) correspondente à carga de pico do diagrama carga x deslocamento da figura 4.6.....	117
<b>FIGURA 4.8</b> – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto A): comparação entre as respostas dos modelos bilinear, não-linear e trilinear (Teor de 20 kg/m <sup>3</sup> ).....	118
<b>FIGURA 4.9</b> – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto A) com lei de dano não-linear (Teor de 40 kg/m <sup>3</sup> ).....	119
<b>FIGURA 4.10</b> – Distribuição de tensões normais horizontais (em MPa) correspondente à carga de pico do diagrama carga x deslocamento da figura 4.9.....	120

<b>FIGURA 4.11</b> – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto A) com lei de dano trilinear (Teor de 40 kg/m <sup>3</sup> ).....	121
<b>FIGURA 4.12</b> – Distribuição de tensões normais horizontais (em MPa) correspondente à carga de pico do diagrama carga x deslocamento da figura 4.11 .....	122
<b>FIGURA 4.13</b> – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto A): comparação entre as respostas dos modelos não-linear e trilinear (Teor de 40 kg/m <sup>3</sup> )	123
<b>FIGURA 4.14</b> – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto A) com lei de dano não-linear (Teor de 60 kg/m <sup>3</sup> ) .....	124
<b>FIGURA 4.15</b> – Distribuição de tensões normais horizontais (em MPa) correspondente à carga de pico do diagrama carga x deslocamento da figura 4.14 .....	125
<b>FIGURA 4.16</b> – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto A) com lei de dano trilinear (Teor de 60 kg/m <sup>3</sup> ).....	126
<b>FIGURA 4.17</b> – Distribuição de tensões normais horizontais (em MPa) correspondente à carga de pico do diagrama carga x deslocamento da figura 4.16 .....	127
<b>FIGURA 4.18</b> – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto A): comparação entre as respostas dos modelos não-linear e trilinear (Teor de 60 kg/m <sup>3</sup> )	128
<b>FIGURA 4.19</b> – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto A): respostas do modelo trilinear para diferentes teores de fibras .....	129
<b>FIGURA 4.20</b> – Geometria (mm) e carregamento da viga entalhada de ARAÚJO, D. (2002).....	131

<b>FIGURA 4.21</b> – Malha de Elementos Finitos para a Viga Entalhada de ARAÚJO, D. (2002), com detalhamento da discretização nas regiões do entalhe (a) e da carga (b).....	132
<b>FIGURA 4.22</b> – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão na Seção do Entalhe (ponto B) com lei de dano trilinear (Teor de 79 kg/m <sup>3</sup> ) .....	133
<b>FIGURA 4.23</b> – Distribuição de tensões normais horizontais (em MPa) correspondente à carga de pico do diagrama carga x deslocamento da figura 4.22 .....	134
<b>FIGURA 4.24</b> – Detalhamento da distribuição de tensões normais horizontais da figura 4.23 nas regiões de aplicação da carga (a) e do entalhe (b) .....	135
<b>FIGURA 4.25</b> – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão na Seção do Entalhe (ponto B) com lei de dano trilinear (Teor de 118 kg/m <sup>3</sup> ) .....	136
<b>FIGURA 4.26</b> – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão na Seção do Entalhe (ponto B) com lei de dano trilinear (Teor de 157 kg/m <sup>3</sup> ) .....	138
<b>FIGURA 5.1</b> – Diagrama tensão-deformação segundo modelo MTM.....	144
<b>FIGURA 5.2</b> – Regiões de influência dos parâmetros do modelo MTM na curva carga x deslocamento.....	145
<b>FIGURA 5.3</b> – Geometria (mm) e carregamento da viga entalhada de BARROS <i>et al.</i> (2002).....	147
<b>FIGURA 5.4</b> – Malha de Elementos Finitos para a Viga Entalhada de BARROS <i>et al.</i> (2002), com detalhamento da discretização nas regiões do entalhe (a) e da carga (b).....	148

<b>FIGURA 5.5</b> – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto C da figura 5.3) com lei de dano trilinear MTM (CP1A - Teor de 30 kg/m <sup>3</sup> ).....	150
<b>FIGURA 5.6</b> – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto C da figura 5.3) com lei de dano trilinear MTM (CP2A – Teor de 30 kg/m <sup>3</sup> ) .....	151
<b>FIGURA 5.7</b> – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto C da figura 5.3) com lei de dano trilinear MTM (CP7B – Teor de 30 kg/m <sup>3</sup> ) .....	152
<b>FIGURA 5.8</b> – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto C da figura 5.3) com lei de dano trilinear MTM (curva numérica média e curvas experimentais - Teor de 30 kg/m <sup>3</sup> ) .....	154
<b>FIGURA 5.9</b> – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto C da figura 5.3) com lei de dano trilinear MTM (curva numérica média e curvas experimentais – Teor de 20 kg/m <sup>3</sup> ) .....	156
<b>FIGURA 5.10</b> – Equipamento de realização dos ensaios de DUPONT (2003) .....	157
<b>FIGURA 5.11</b> – Geometria (mm) e carregamento para análise da viga de DUPONT (2003).....	158
<b>FIGURA 5.12</b> – Malha de Elementos Finitos para discretização da viga de DUPONT (2003). Em destaque, a região central da estrutura.....	158
<b>FIGURA 5.13</b> – Respostas numéricas e experimentais das vigas 7 e 8 de DUPONT (2003).....	160
<b>FIGURA 5.14</b> – Respostas numéricas e experimentais das vigas 9 e 10 de DUPONT (2003).....	161

<b>FIGURA 5.15</b> – Respostas numéricas e experimentais das vigas 11 e 12 de DUPONT (2003).....	162
<b>FIGURA 5.16</b> – Malha de Elementos Finitos para discretização da estrutura constante dos ensaios de SALDIVAR (1999) .....	165
<b>FIGURA 5.17</b> – Respostas carga x deslocamento numérica (modelo MTM e RILEM) e experimental (SALDIVAR, 1999) para validação do modelo trilinear (teor de 15 kg/m <sup>3</sup> ) .....	167
<b>FIGURA 5.18</b> – Avaliação do processo de dano do material segundo as respostas numérica (modelo MTM) e experimental (SALDIVAR, 1999) (teor de 15 kg/m <sup>3</sup> )....	168
<b>FIGURA 5.19</b> – Respostas carga x deslocamento numérica (modelo MTM e RILEM) e experimental (SALDIVAR, 1999) para validação do modelo trilinear (teor de 25 kg/m <sup>3</sup> ) .....	169
<b>FIGURA 5.20</b> – Avaliação do processo de dano do material segundo as respostas numérica (modelo MTM) e experimental (SALDIVAR, 1999) (teor de 25 kg/m <sup>3</sup> ).....	170
<b>FIGURA 6.1</b> – Sugestão de diagrama tensão x deformação linear de três pontos para representação do comportamento do CRFA.....	178
<b>FIGURA 6.2</b> – Sugestão de diagrama tensão x deformação linear de quatro pontos para representação do comportamento do CRFA.....	178

## LISTA DE TABELAS

<b>TABELA 2.1:</b> Características das fibras de aço segundo CALIXTO (1998).....	16
<b>TABELA 2.2:</b> Exemplos de alguns tipos de fibras curtas de aço encontradas no mercado (CALIXTO, 1998) .....	16
<b>TABELA 2.3:</b> Resistência média do concreto em função do volume de fibras adicionadas (ARAÚJO, D., 2002) .....	31
<b>TABELA 2.4:</b> Valores de abertura do entalhe (CMOD) e deslocamento vertical ( $\delta_i$ ) para cálculo das resistências residuais $f_{R, 1}$ e $f_{R, 4}$ (VANDEWALLE e DUPONT, 2002b) .....	51
<b>TABELA 3.1:</b> Parâmetros de entrada do arquivo neutro para a curva $\sigma$ - $\varepsilon$ segundo modelo MTP .....	87
<b>TABELA 3.2:</b> Parâmetros de entrada do arquivo neutro para a curva $\sigma$ - $\varepsilon$ segundo modelo MTM .....	89

<b>TABELA 4.1:</b> Características geométricas das fibras de aço usadas por AGOPYAN e NUNES (1998).....	110
<b>TABELA 4.2:</b> Parâmetros de entrada dos modelos de dano em tração e em compressão (BILINEAR - 20 kg/m <sup>3</sup> ) .....	111
<b>TABELA 4.3:</b> Parâmetros de entrada dos modelos de dano em tração e em compressão (NÃO-LINEAR - 20 kg/m <sup>3</sup> ) .....	114
<b>TABELA 4.4:</b> Parâmetros de entrada dos modelos de dano em tração e em compressão (TRILINEAR - 20 kg/m <sup>3</sup> ).....	116
<b>TABELA 4.5:</b> Parâmetros de entrada dos modelos de dano em tração e em compressão (NÃO-LINEAR – 40 kg/m <sup>3</sup> ).....	119
<b>TABELA 4.6:</b> Parâmetros de entrada dos modelos de dano em tração e em compressão (TRILINEAR – 40 kg/m <sup>3</sup> ) .....	121
<b>TABELA 4.7:</b> Parâmetros de entrada dos modelos de dano em tração e em compressão (NÃO-LINEAR – 60 kg/m <sup>3</sup> ).....	124
<b>TABELA 4.8:</b> Parâmetros de entrada dos modelos de dano em tração e em compressão (TRILINEAR – 60 kg/m <sup>3</sup> ) .....	125
<b>TABELA 4.9:</b> Parâmetros de entrada dos modelos de dano em tração e em compressão (TRILINEAR – 79 kg/m <sup>3</sup> ) .....	133
<b>TABELA 4.10:</b> Parâmetros de entrada dos modelos de dano em tração e em compressão (TRILINEAR – 118 kg/m <sup>3</sup> ) .....	135
<b>TABELA 4.11:</b> Parâmetros de entrada dos modelos de dano em tração e em compressão (TRILINEAR – 157 kg/m <sup>3</sup> ) .....	137

---

---

<b>TABELA 5.1:</b> Resistências fornecidas por BARROS <i>et al.</i> (2002) (30 kg/m <sup>3</sup> ).....	149
<b>TABELA 5.2:</b> Resistências residuais por corpo-de-prova e média segundo dados obtidos em BARROS <i>et al.</i> (2002) (30 kg/m <sup>3</sup> ) .....	153
<b>TABELA 5.3:</b> Resistências médias e por corpo-de-prova segundo dados obtidos em BARROS <i>et al.</i> (2002) (20 kg/m <sup>3</sup> ) .....	155
<b>TABELA 5.4:</b> Propriedades físicas dos materiais e parâmetros do modelo trilinear para a viga de DUPONT (2003) .....	159
<b>TABELA 5.5:</b> Propriedades físicas dos materiais dos ensaios de caracterização e validação do modelo trilinear (teor de 15 kg/m <sup>3</sup> ).....	166
<b>TABELA 5.6:</b> Propriedades físicas dos materiais dos ensaios de caracterização e validação do modelo trilinear (teor de 25 kg/m <sup>3</sup> ).....	169

## LISTA DE SÍMBOLOS

### SÍMBOLOS GREGOS

$\Phi(\varepsilon)$  ..... função de dano escalar

$\Phi_c$  ..... função de dano escalar em compressão

$\Phi_{c, BI}$  ..... função de dano escalar em compressão no modelo bilinear

$\Phi_{c, NON}$  .. função de dano escalar em compressão no modelo não-linear

$\Phi_t$  ..... função de dano escalar em tração

$\Phi_{t, BI}$  ..... função de dano escalar em tração no modelo bilinear

$\Phi_{t, MTM}$  .. função de dano escalar em tração no modelo trilinear MTM

- $\Phi_{t, \text{MTM}, \text{S}, 1}$  função de dano escalar em tração, com rigidez secante, no primeiro trecho descendente do modelo trilinear MTM
- $\Phi_{t, \text{MTM}, \text{S}, 2}$  função de dano escalar em tração, com rigidez secante, no segundo trecho descendente do modelo trilinear MTM
- $\Phi_{t, \text{MTM}, \text{T}, 1}$  função de dano escalar em tração, com rigidez tangente, no primeiro trecho descendente do modelo trilinear MTM
- $\Phi_{t, \text{MTM}, \text{T}, 2}$  função de dano escalar em tração, com rigidez tangente, no segundo trecho descendente do modelo trilinear MTM
- $\Phi_{t, \text{MTP}} \dots$  função de dano escalar em tração no modelo trilinear MTP
- $\Phi_{t, \text{MTP}, \text{S}, 1}$  função de dano escalar em tração, com rigidez secante, no primeiro trecho descendente do modelo trilinear MTP
- $\Phi_{t, \text{MTP}, \text{S}, 2}$  função de dano escalar em tração, com rigidez secante, no segundo trecho descendente do modelo trilinear MTP
- $\Phi_{t, \text{MTP}, \text{T}, 1}$  função de dano escalar em tração, com rigidez tangente, no primeiro trecho descendente do modelo trilinear MTP
- $\Phi_{t, \text{MTP}, \text{T}, 2}$  função de dano escalar em tração, com rigidez tangente, no segundo trecho descendente do modelo trilinear MTP
- $\Phi_{t, \text{NON}} \dots$  função de dano escalar em tração no modelo não-linear
- $\alpha$  ..... parâmetro para delimitação da tensão de inflexão do trecho descendente da curva *tensão x deformação* trilinear MTP

- $\alpha_1$  ..... parâmetro para delimitação da tensão de inflexão do trecho descendente da curva *tensão x deformação* trilinear MTM
- $\alpha_2$  ..... parâmetro para delimitação da tensão-limite no segundo trecho do ramo descendente da curva *tensão x deformação* trilinear MTM
- $\beta$  ..... parâmetro do material para caracterização das curvas *tensão x deformação* de HSU e HSU (1994) e de CARREIRA e CHU (1985)
- $\gamma_{12}$  ..... distorção no sistema local de ortotropia (1-2)
- $\delta_f$  ..... deslocamento correspondente à primeira fissura
- $\delta_{JSCE}$ ..... deslocamento-limite da norma JSCE-SF4
- $\delta_{FU}$  ..... deslocamento correspondente a  $F_U$
- $\delta_{R,1}$ ..... deslocamento prescrito na curva carga-deslocamento correspondente a CMOD igual 0,50 mm
- $\delta_{R,4}$ ..... deslocamento prescrito na curva carga-deslocamento correspondente a CMOD igual 3,50 mm
- $\delta_2$  .....deslocamento prescrito para cálculo da resistência equivalente  $f_{eq, 2}$
- $\delta_3$  .....deslocamento prescrito para cálculo da resistência equivalente  $f_{eq, 3}$
- $\varepsilon$  ..... deformação
- $\varepsilon_c$  ..... deformação correspondente à resistência  $f_c$
- $\varepsilon_{cr, c}$  .....deformação crítica no modelo bilinear de compressão

- $\varepsilon_{cr, t}$  .....deformação crítica no modelo bilinear de tração
- $\varepsilon_i$  ..... vetor de deformações no sistema local de coordenadas ( $i$ )
- $\varepsilon_t$  .....deformação correspondente à tensão  $f_t$
- $\varepsilon_0$  ..... deformação correspondente à tensão máxima de compressão da curva *tensão x deformação* de HSU e HSU (1994)
- $\varepsilon_1$  ..... deformação correspondente à tensão máxima da curva *tensão x deformação* trilinear (MTP e MTM)
- $\varepsilon_2$  ..... deformação correspondente ao ponto de inflexão do ramo descendente da curva *tensão x deformação* trilinear (MTP e MTM)
- $\varepsilon_3$  ..... deformação-limite da curva *tensão x deformação* trilinear (MTP e MTM)
- $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$  ... deformações axiais no sistema local de ortotropia (1-2)
- $\varepsilon_{12}$  ..... deformação na direção local 1 devido à deformação na direção local 2
- $\varepsilon_{21}$  ..... deformação na direção local 2 devido à deformação na direção local 1
- $\eta$  ..... parâmetro que relaciona as tensões de compressão com a tensão máxima de compressão ( $f_c'$ ) da curva *tensão x deformação* de HSU e HSU (1994)
- $\nu$  ..... coeficiente de Poisson
- $\sigma$  ..... tensão

- $\sigma_\ell$  ..... vetor de tensões no sistema local de coordenadas ( $\ell$ )
- $\sigma_1$  ..... tensão máxima da curva *tensão x deformação* trilinear (MTP e MTM)
- $\sigma_2$  ..... tensão correspondente ao ponto de inflexão do ramo descendente da curva *tensão x deformação* trilinear (MTP e MTM)
- $\sigma_3$  ..... tensão-limite da curva *tensão x deformação* trilinear MTM
- $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  .. tensões axiais no sistema local de ortotropia (1-2)
- $\tau_{12}$  ..... tensão cisalhante no sistema local de ortotropia (1-2)

## SÍMBOLOS LATINOS

- $A_1, A_3$  ... áreas sob as curvas numéricas *carga x deslocamento* do modelo MTM
- $A_2, A_4$  ... áreas sob as curvas *carga x deslocamento* do ensaio de SALDIVAR (1999)
- $b$  ..... largura da seção transversal
- $C$  ..... matriz de compliância referida a um sistema local de coordenadas ( $\ell$ )
- $d$  ..... altura útil
- $d_f$  ..... diâmetro da fibra

- $D_{BZ}^b$  ..... parcela de contribuição do concreto sem fibras na capacidade de absorção de energia da matriz
- $D_{BZ,2}^f$  ..... parcela de contribuição das fibras na capacidade de absorção de energia da matriz até o deslocamento  $\delta_2$
- $D_{BZ,3}^f$  ..... parcela de contribuição das fibras na capacidade de absorção de energia da matriz até o deslocamento  $\delta_3$
- $E_c$  ..... módulo de elasticidade longitudinal do concreto
- $E_d$  ..... módulo de elasticidade longitudinal do concreto no ramo descendente do modelo bilinear de compressão
- $E_0$  ..... módulo de elasticidade longitudinal inicial
- $E_1, E_2$  ..... módulos de elasticidade longitudinais nas direções 1 e 2, respectivamente, do sistema local de coordenadas
- $F_{R,1}$  ..... força residual correspondente ao deslocamento prescrito  $\delta_{R,1}$
- $F_{R,4}$  ..... força residual correspondente ao deslocamento prescrito  $\delta_{R,4}$
- $F_U$  ..... carga correspondente ao início da fissuração da matriz na curva *carga x deslocamento* do ensaio de viga entalhada
- $F_2$  ..... força correspondente a deslocamento  $\delta_2$
- $F_3$  ..... força correspondente a deslocamento  $\delta_3$
- $f_c$  ..... resistência à compressão axial máxima, tensão de compressão da curva *tensão x deformação* de HSU e HSU (1994)

- $f_c'$  ..... tensão máxima de compressão da curva *tensão x deformação* de HSU e HSU (1994)
- $f_{ctm,fl}$  ..... resistência à tração média na flexão do concreto
- $f_{eq}$  ..... resistência equivalente
- $f_{eq,2}$  ..... parcela de energia absorvida pelo concreto com fibras até o deslocamento  $\delta_2$
- $f_{eq,3}$  ..... parcela de energia absorvida pelo concreto com fibras até o deslocamento  $\delta_3$
- $f_{JSCE}$  ..... fator de tenacidade da norma JSCE-SF4
- $f_R$  ..... resistência residual
- $f_{R,1}$  ..... resistência residual correspondente ao deslocamento  $\delta_{R,1}$
- $f_{R,4}$  ..... resistência residual correspondente ao deslocamento  $\delta_{R,4}$
- $f_t$  ..... resistência à tração
- $G_f$  ..... energia de fratura
- $G_{12}$  ..... módulo de elasticidade transversal no sistema local de coordenadas 1-2
- $h$  ..... altura total da seção transversal, tamanho característico
- $h_{sp}$  ..... altura da seção transversal acima do entalhe

- $I_a$  ..... índice de tenacidade até um deslocamento “a”
- $I_b$  ..... índice de tenacidade até um deslocamento “b”
- $I_5$  ..... índice de tenacidade para o deslocamento  $3\delta_f$
- $I_{10}$  ..... índice de tenacidade para o deslocamento  $5,5\delta_f$
- $I_{20}$  ..... índice de tenacidade para o deslocamento  $10,5\delta_f$
- $I_{30}$  ..... índice de tenacidade para o deslocamento  $15,5\delta_f$
- $I_{50}$  ..... índice de tenacidade para o deslocamento  $25,5\delta_f$
- $k$  ..... parâmetro da curva do modelo não-linear de tração
- $k_h$  ..... fator de tamanho
- $L$  ..... comprimento do vão de ensaio da viga
- $l$  ..... comprimento da fibra
- $l_c$  ..... comprimento crítico da fibra
- $l_f$  ..... comprimento da fibra
- $n$  ..... parâmetro do material para caracterização da curva *tensão x deformação* de HSU e HSU (1994)
- $P_{\sigma, \varepsilon}$  ..... ponto correspondente à tensão  $\sigma$  e à deformação  $\varepsilon$  na curva *tensão x deformação trilinear*

- $P_{\sigma_1, \varepsilon_1}$  .... ponto correspondente à tensão  $\sigma_1$  e à deformação  $\varepsilon_1$  na curva *tensão x deformação* trilinear
- $P_{\sigma_2, \varepsilon_2}$  .... ponto correspondente à tensão  $\sigma_2$  e à deformação  $\varepsilon_2$  na curva *tensão x deformação* trilinear
- $P_{\sigma_3, \varepsilon_3}$  .... ponto correspondente à tensão  $\sigma_3$  e à deformação  $\varepsilon_3$  na curva *tensão x deformação* trilinear
- $p_1$  ..... parâmetro para delimitação da deformação de inflexão do trecho descendente da curva *tensão x deformação* trilinear (MTP e MTM)
- $p_2$  ..... parâmetro para delimitação da deformação-limite no segundo trecho do ramo descendente da curva *tensão x deformação* trilinear MTM
- $R_{b, a}$  ..... fator residual de resistência entre os deslocamentos “a” e “b”
- $T_{JSCE}$  ..... tenacidade à flexão da norma JSCE-SF4
- $V_f$  ..... teor de fibras (volume de fibras)
- $w$  ..... percentual de fibras em massa do concreto
- $w \cdot \frac{l_f}{d_f}$  ..... índice de reforço
- $w(\varepsilon)$  ..... parâmetro de dano
- $x$  ..... parâmetro que relaciona as deformações de compressão com a tensão máxima de compressão ( $f_c'$ ) da curva *tensão x deformação* de HSU e HSU (1994)

## RESUMO

Elementos de concreto submetidos a condições especiais, como elevadas tensões de tração, apresentam um comportamento frágil que deve ser evitado. Nesse contexto, concretos reforçados com fibras curtas de aço (CRFA) têm se mostrado uma solução exequível. A adição aleatória de fibras curtas ao concreto conduz a um comportamento pseudodúctil em vista da maior capacidade de absorção de energia proporcionada pelas fibras. Embora numerosos trabalhos experimentais sobre o comportamento do CRFA tenham sido realizados, a produção relacionada à modelagem numérica desse material é bem inferior. Este trabalho visa dar uma contribuição nessa linha de estudo. O objetivo desta tese é apresentar os resultados de uma proposta de modelagem numérica do comportamento de vigas de CRFA, os quais são obtidos a partir de uma análise não-linear pelo Método dos Elementos Finitos. Propõe-se um modelo cuja principal característica é o emprego de um diagrama *tensão x deformação* trilinear para o comportamento em tração, permitindo-se melhorar a representação do aumento da tenacidade do material oriundo do acréscimo das fibras. Duas vertentes da modelagem são avaliadas sob as bases da lei constitutiva trilinear, sendo os parâmetros dessa lei obtidos a partir das propriedades mecânicas do material. O modelo é incorporado a um código computacional disponível no meio acadêmico e que faz uso do paradigma da Programação Orientada a Objetos. Tal código foi expandido durante esta pesquisa para poder contemplar a implementação do modelo proposto. A validação da proposta de modelagem é feita mediante a simulação numérica de problemas de estado-plano em vigas de CRFA. São avaliados casos de flexão em três e quatro pontos em elementos de CRFA para uma gama de tipos e teores de fibras curtas de aço. Propõe-se uma metodologia para aplicação de uma das vertentes da modelagem. Resultados comparativos satisfatórios em termos da relação *carga x deslocamento* são alcançados, evidenciando a adequação da modelagem e da metodologia propostas.

Palavras-chave: Concreto. Fibras curtas de aço. Análise não-linear. Modelagem numérica.

## ABSTRACT

Concrete elements under certain conditions, such as high tensile stresses, present a brittle behavior which has to be avoided. In this context, steel fiber reinforced concrete (SFRC) proves to be a feasible solution. Random addition of short steel fibers to concrete leads to a pseudoductile behavior through an increase in the energy absorption capacity due to fibers. Although abundant experimental investigations concerned with SFRC have been done so far, less extensive research has dealt with the numerical modeling of SFRC. This work is a contribution to this research area. The objective of this thesis is to present the results of a proposed numerical modeling of SFRC beams behaviour, acquired from a nonlinear finite element analysis. The main characteristic of the proposed model is a trilinear tensile stress-strain diagram, which improves the representation of the toughness increase provided by the steel fibers addition. Two branches of the model are discussed, supported by a trilinear constitutive law whose parameters are obtained from the mechanical properties of the material. The model is incorporated to an academic open-source computational package that employs the object-oriented tool, which was expanded during the implementation of the proposed model. The validation of the proposal is done through numerical simulations of plane-state problems in SFRC beams. Three and four-point bending on SFRC specimens for different types of short steel fibers as well as a range of fiber contents are numerically investigated. One proposes a methodology for application of one of the sources of the model. Good correlation in the *load x displacement* relationship is achieved, proving the compliance of proposed model and methodology.

Keywords: Concrete. Short steel fibers. Nonlinear analysis. Numerical modeling.

# 1

## INTRODUÇÃO

Desde os primórdios da nossa civilização, o homem vem tentando desenvolver materiais que o auxiliem na luta pela sobrevivência. Primeiramente, foram utilizados materiais naturais cuja abundância, aliada a propriedades como resistência térmica e resistência mecânica, garantia a manutenção da qualidade de vida mínima para perpetuação da espécie.

Com o passar dos anos, as mudanças no modo de vida e as próprias imposições da natureza demandaram o desenvolvimento de novos materiais cujas propriedades se adequassem às diferentes realidades. Nesse processo de evolução, surgiu o concreto, oriundo dos trabalhos pioneiros de ASPDIN, na Inglaterra, e de LAMBOT e MONIER, na França. Pode-se dizer que esse material resultou da tentativa de imitar a pedra natural, que havia sido empregada em larga escala por nossos antepassados.

Apesar do surgimento do concreto, tido como uma revolução nos materiais de construção, pesquisas ainda hoje procuram minorar as suas deficiências, principalmente a sua fragilidade quando submetido a esforços de tração. É nesse contexto que surgiu o concreto reforçado com fibras, sendo hoje o estudo dessa nova modalidade de concreto uma linha de investigação de grande interesse por parte da comunidade científica

mundial. Nesse sentido, várias pesquisas foram e ainda continuam sendo desenvolvidas a fim de avaliar as principais características dos concretos reforçados com fibras, dentre as quais se destacam as investigações voltadas para o concreto reforçado com fibras curtas de aço (Figura 1.1).



**FIGURA 1.1** – Fibra curta de aço DRAMIX®  
(BELGO GRUPO ARCELOR, 2006)

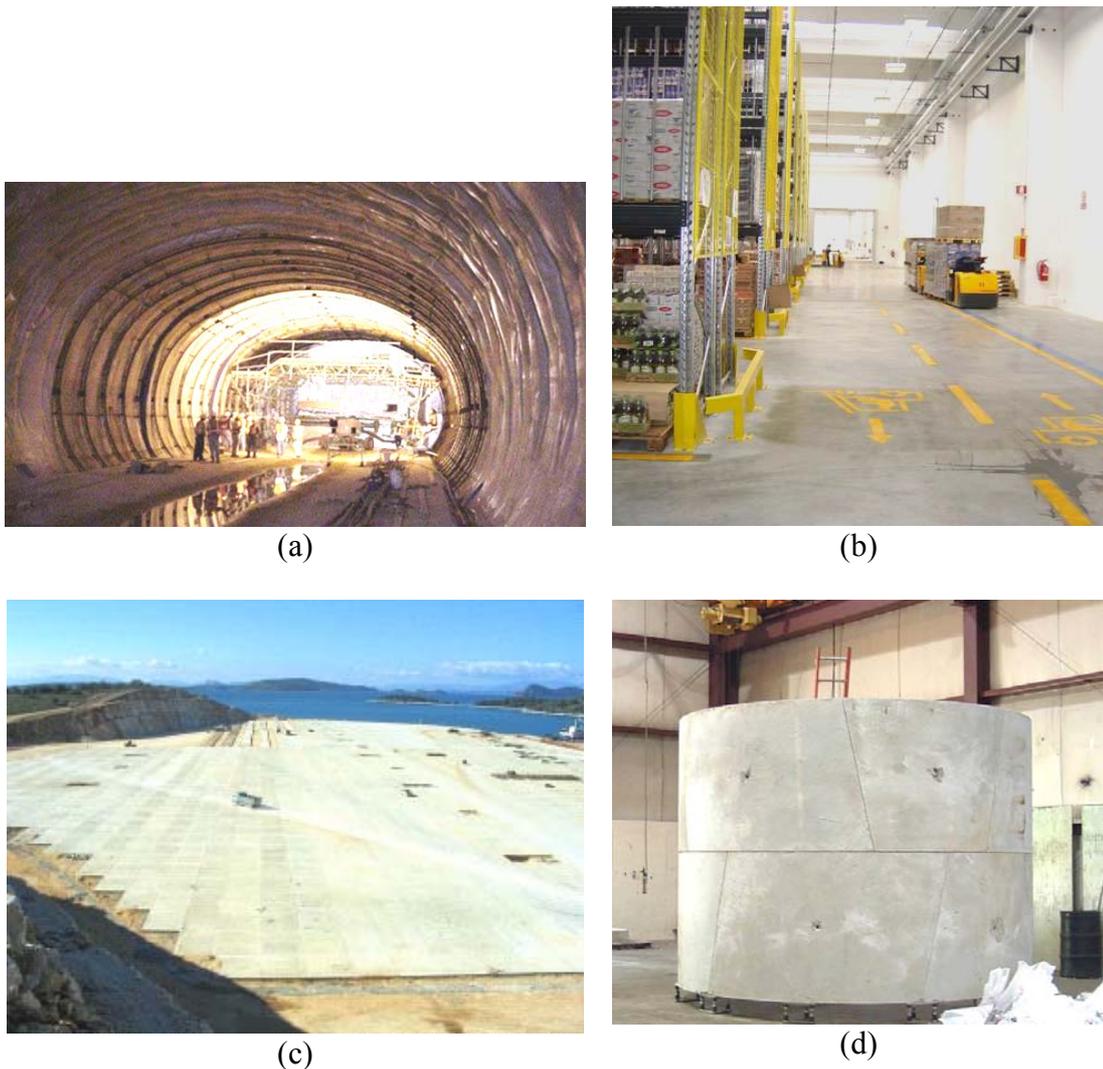
A idéia da utilização de fibras para melhorar o comportamento de alguns materiais frágeis não é recente. Muitos povos antigos, ainda que intuitivamente, já empregavam esse material visando o combate da fissuração presente em algumas peças de uso diário, como vasos, tijolos e telhas. Trechos bíblicos (Êxodo, 5:6-7) fazem referência ao uso de materiais reforçados para a construção das habitações da época.

Na era moderna, começaram a surgir diversas aplicações para as fibras. LAMBOT, em 1847, registrou uma patente de um concreto feito com adição de fibras contínuas de aço em fios separados, o que pode ser entendido como uma forma primitiva do concreto armado atual. Posteriormente, com o objetivo de diminuir a anisotropia do material oriunda da adição de fibras contínuas e revelar novos benefícios, procedeu-se à adição de fibras descontínuas imersas na massa de concreto convencional. Em 1874, BERARD, na Califórnia (EUA), registrou uma patente em concreto com

fibras a partir da sugestão do uso de rejeitos granulares de ferro em uma mistura de concreto para criar uma pedra artificial. Em 1898, HATSCHECK inventou um processo de fabricação de pastas de cimento com adição de fibras de amianto, que veio a se popularizar mundialmente como material empregado na fabricação de telhas, caixas d'água e outros produtos para a construção civil, embora atualmente haja certo cuidado no uso desse material em vista dos possíveis malefícios à saúde decorrentes da asbestose.

Segundo um relatório de um Comitê Técnico do “AMERICAN CONCRETE INSTITUTE” (ACI COMMITTEE 544, 2000), no final dos anos 1950 e início dos anos 1960, verifica-se que a utilização de fibras metálicas aumentou, principalmente a partir das pesquisas realizadas pela “PORTLAND CEMENT ASSOCIATION” (PCA). O referido relatório cita que, em 1971, foi construído o primeiro pavimento de concreto com fibras de aço nos Estados Unidos, situado em uma estação de pesagem de caminhões na cidade de Ashland, Ohio (EUA).

Em se tratando do desenvolvimento mais recente do concreto com fibras curtas de aço, pode-se destacar duas fases: uma primeira, anterior à década de 1960, em que se notam poucas descobertas e aplicações práticas, e uma segunda, marcada por um desenvolvimento acelerado das pesquisas e dos materiais ligados ao concreto com fibras, bem como o surgimento de aplicações específicas (Figura 1.2), como pavimentos (NANNI e JOHARI, 1989; BARROS e FIGUEIRAS, 1999; FIGUEIREDO, 2000; FARIAS *et al.*, 2000; PINTO JÚNIOR e CARNIO, 2000; REVISTA TÉCHNE/PINI, 2001), túneis (KOOIMAN e WALRAVEN, 2000; FIGUEIREDO, 2000), pisos industriais (TATNALL e KUITENBROUWER, 1992; FIGUEIREDO, 2000), entre outras (FARIAS *et al.*, 2000).



**FIGURA 1.2** – Exemplos de aplicação do concreto reforçado com fibras curtas de aço: (a) túneis; (b) pisos industriais; (c) terminais aeroportuários; (d) tubulações pré-moldadas (BEKAERT, 2006)

Pode-se afirmar que a distinção entre as duas citadas fases de desenvolvimento recente do concreto com fibras de aço se deve aos resultados que eram esperados a partir do seu uso. Anteriormente à década de 1960, as pesquisas procuravam averiguar o ganho na resistência à tração e à compressão proporcionado pela adição dessas fibras ao concreto. Todavia, nem sempre eles eram satisfatórios, conforme se comprovava nos resultados experimentais.

Em épocas mais recentes, estudos começaram a ressaltar a importância da correta definição de alguns requisitos mínimos de dosagem do concreto com fibras de aço. Tais requisitos, como o tipo e a geometria das fibras e o seu consumo, por exemplo, visam garantir uma melhora no desempenho do material, principalmente na etapa pós-fissuração. Nessa etapa, destaca-se o elevado ganho na capacidade de absorção de energia proporcionado pela adição das fibras, vindo essa propriedade a se tornar decisiva para o aumento no atual emprego do concreto reforçado com fibras curtas de aço.

## 1.1 Justificativa

Embora já comecem a se tornar mais conhecidas as vantagens da utilização do concreto reforçado com fibras curtas de aço, sempre surgem os questionamentos sobre o porquê do uso ainda limitado desse material. De imediato, a resposta que surge certamente está ligada à inexistência de referências normativas de cálculo e à caracterização ainda incompleta do material.

No dia-a-dia da Engenharia de Estruturas, a realização de um grande número de experimentos nem sempre é possível, uma vez que pode implicar o uso de recursos técnicos e financeiros consideráveis, aliados a uma substancial demanda de tempo na sua preparação e execução. Esses fatos acabam por tornar necessária uma forma de reproduzir convenientemente os resultados experimentais, objetivando garantir baixos custos, simplicidade, rapidez e precisão na análise estrutural.

Nesse sentido, a modelagem numérica passa a ser uma alternativa viável para simular os ensaios de laboratório em um número razoável de vezes, permitindo a obtenção de resultados confiáveis em prazos menores e com maior viabilidade técnico-econômica. Deve-se ressaltar ainda que as deduções oriundas da modelagem numéricas podem, muitas vezes, ser utilizadas para explicar ou mesmo otimizar resultados experimentais, revelando fenômenos até então desconhecidos. Acrescente-se o fato de que o desenvolvimento de um modelo sob as bases da análise não-linear, como a

empregada neste trabalho, permite representar, de maneira mais realista, o comportamento do material.

Nos últimos anos, tem sido verificado que o esforço inicial para estudar os concretos reforçados com fibras de aço resultou em um grande número de trabalhos direcionados à caracterização experimental desse material, de sorte que as pesquisas sobre modelagem numérica ficaram quantitativamente e qualitativamente em defasagem em relação às demais.

Atualmente, há evidências da carência de referências normativas que apresentem diretrizes de projeto com amplo embasamento teórico e respaldo experimental. Assim, a escassez de metodologias de projeto com larga aceitação pode ser uma razão para a ainda pequena utilização do concreto reforçado com fibras de aço em elementos estruturais correntes, apesar de já existirem alguns esforços pioneiros para mudar essa realidade (ACI COMMITTEE 544, 2000; BEKAERT, 1995; DBV, 2001; RILEM TC 162, 2003).

Constata-se, portanto, a necessidade de estudos que venham a contribuir para as pesquisas atuais relativas à modelagem numérica do concreto reforçado com fibras curtas de aço, agregando conhecimentos a essa linha de investigação e permitindo novas discussões acerca de uma futura proposta de referência normativa para essa modalidade de concreto. É a partir dessa demanda que se justifica o presente trabalho, cujos objetivos são apresentados a seguir.

## 1.2 Objetivos

Como objetivo geral, o presente trabalho visa dar continuidade aos estudos desenvolvidos na Escola de Engenharia da UFMG referentes à influência da adição de fibras curtas de aço no comportamento de estruturas de concreto: iniciação científica de

Guilherme Gallo Neves da Rocha (1996); mestrado de Landry Salles Vidal Filho (1999) e mestrado de Carla Montanari Gonçalves (2003).

Sob uma ótica distinta dos estudos anteriores e dentro da perspectiva de proporcionar uma contribuição para a modelagem do concreto reforçado com fibras curtas de aço, esta pesquisa tem por objetivos específicos:

- . desenvolver um modelo constitutivo para concreto reforçado com fibras curtas de aço, englobando os fenômenos de tração e de compressão e a conseqüente degradação da rigidez do material quando submetido a estados planos de sollicitação, com enfoque especial à capacidade do material em absorver energia após a fissuração;
- . implementar o modelo proposto em um programa de análise estrutural que faz uso do Método dos Elementos Finitos;
- . adotar o paradigma da Programação Orientada a Objetos como procedimento para a implementação computacional;
- . aplicar o modelo, por intermédio do programa de análise desenvolvido, à simulação do comportamento em flexão de estruturas de concreto reforçadas com fibras curtas de aço;
- . avaliar o desempenho da implementação a partir do confronto entre os resultados numéricos do modelo proposto e aqueles oriundos de outros modelos de análise;
- . comparar os resultados da modelagem proposta com resultados experimentais.
- . propor uma metodologia para aplicação de uma vertente da modelagem proposta.

Por último, em razão das novas demandas por projetos que se integrem ao compromisso de desenvolvimento sustentável, aliadas às recentes prescrições normativas de durabilidade e qualidade das estruturas (ABNT – NBR 6118: 2003), este

trabalho almeja fornecer resultados mais precisos da análise do comportamento do concreto com fibras de aço. Dessa forma, poderá representar uma contribuição para futuras diretivas de projeto lastreadas em dimensionamentos estruturais mais econômicos, gerando, conseqüentemente, menores desperdícios na cadeia produtiva. Ao mesmo tempo, espera-se poder contribuir para a melhor utilização do concreto, aproveitando, de forma mais adequada, as potencialidades desse material.

### 1.3 Metodologia

Para atingir os objetivos estabelecidos neste trabalho, será implementado um modelo numérico que terá como premissa o estabelecimento de leis de dano do material, calcadas em relações constitutivas que permitam reproduzir o seu comportamento após a fissuração e revelar o conseqüente benefício provocado pela adição das fibras curtas de aço, em especial, o aumento de sua capacidade de absorção de energia.

Nesta pesquisa, foi imposta a restrição de modelagem aos casos de concretos reforçados com fibras curtas de aço, dispostas aleatoriamente na matriz de concreto. Sem perder a relevância necessária à pesquisa, julgou-se que essa limitação da modelagem se coaduna com a maioria dos trabalhos acadêmicos que vêm sendo realizados e com a realidade da maior parte das aplicações correntes em Engenharia de Estruturas.

A modelagem numérica será fundamentada em uma nova proposta para expressar o comportamento do material, sendo confrontada com outros modelos e também com resultados experimentais a fim de garantir a confiabilidade necessária ao modelo proposto.

Para aferir as potencialidades da modelagem, serão estudadas duas vertentes do modelo proposto. Na primeira delas, intitulada “Modelo Trilinear Padrão”, será avaliada a aplicabilidade dos modelos com lei constitutiva do tipo trilinear, sendo contraposta a

outros modelos e a resultados experimentais. Como uma opção à primeira estratégia de modelagem, será proposto o denominado “Modelo Trilinear Modificado”, embasado em um ensaio padronizado, disponível na literatura, para avaliação da capacidade de absorção de energia de concretos reforçados com fibras curtas de aço. Nessa segunda vertente, serão discutidas formas de caracterização e validação do modelo, cotejando-se novamente resultados numéricos e experimentais. Por fim, será proposta uma metodologia de aplicação do Modelo Trilinear Modificado, com o objetivo de subsidiar o emprego dessa vertente da modelagem em casos reais do dia-a-dia da Engenharia de Estruturas.

O espectro de resultados experimentais que servirão de referência para as simulações numéricas realizadas nesta pesquisa contemplará fibras de aço de dimensões variadas e em diversos teores, visando imputar uma maior robustez à modelagem proposta.

Nesta pesquisa, será empregado um código computacional cuja base original está disponível no meio acadêmico e que tem como diretrizes a Programação Orientada a Objetos e a análise não-linear a partir do Método dos Elementos Finitos. Tal código sofrerá expansões a fim de contemplar a implementação da modelagem proposta.

## **1.4 Estrutura do Trabalho**

Este trabalho encontra-se estruturado em seis capítulos, complementado pelas referências bibliográficas ao final.

O texto anterior deste capítulo inicial, após apresentar uma visão geral da evolução do concreto reforçado com fibras curtas de aço, revela as premissas da modelagem numérica levada a efeito nesta pesquisa, destacando a justificativa para a sua realização, os objetivos propostos e a metodologia empregada para consecução desses objetivos.

Com o intuito de facilitar a leitura das páginas seguintes, foi feita uma divisão em capítulos da forma como descrita a seguir, visando um encadeamento de idéias e uma preparação para a abordagem da modelagem proposta. Cada capítulo apresenta um texto introdutório com o fim de destacar as suas finalidades específicas, vinculando as discussões de capítulos anteriores com a seqüência dada ao trabalho.

Em uma etapa preliminar à modelagem proposta, no capítulo 2, faz-se uma abordagem dos trabalhos existentes na linha de pesquisa de concretos reforçados com fibras de aço. São evocadas características dos materiais constituintes (concreto e fibras) e do comportamento estrutural da mistura concreto-fibra de aço. São abordadas algumas referências bibliográficas existentes tanto sob o enfoque eminentemente experimental quanto sob a ótica da modelagem teórica visando balizar os conceitos necessários à modelagem implementada.

No capítulo 3, apresenta-se a implementação computacional da modelagem proposta nesta pesquisa, indicando o tratamento empregado para o fenômeno da danificação do material. Discutem-se a estratégia de implementação do modelo, os fundamentos da análise não-linear pelo Método dos Elementos Finitos e as características do código computacional desenvolvido nesta pesquisa.

Uma primeira estratégia de abordagem da modelagem proposta é colocada no capítulo 4. É feita uma avaliação da aplicabilidade dessa vertente do modelo para fins de representação do comportamento em flexão do concreto com fibras curtas de aço. Os resultados obtidos com simulações numéricas empregando-se o modelo proposto são comparados a resultados numéricos obtidos com outros modelos, confrontando-os ainda com respostas de ensaios de alguns pesquisadores, permitindo-se também apurar a sensibilidade dessa modelagem às variações das respostas experimentais.

Como uma alternativa à modelagem inicial proposta no capítulo anterior, o capítulo 5 trata de uma estratégia de modelagem que tem como referência um ensaio padronizado para concreto com fibras de aço. Por meio de exemplos de simulação de

ensaios reais em elementos estruturais fabricados com diferentes teores de fibras de aço, são avaliadas as formas de caracterização e validação do novo modelo com uma parametrização proposta por este autor. Propõe-se ainda uma metodologia para aplicação do modelo tratado neste capítulo, visualizando seu uso na prática diária da Engenharia de Estruturas, tencionando também balizar futuras diretivas de projeto para concretos reforçados com fibras curtas de aço.

O capítulo 6 encerra este texto mediante um apanhado dos resultados alcançados, resumindo a contribuição desta pesquisa, apresentando as considerações finais referentes à modelagem proposta e complementando o trabalho com sugestões para pesquisas futuras.

# 2

## REVISÃO DA LITERATURA

### 2.1 Conceituação do Concreto com Fibras Curtas de Aço

O concreto reforçado com fibras curtas de aço (CRFCA), também designado por concreto com fibras curtas de aço (CFCA), concreto reforçado com fibras de aço (CRFA) ou ainda simplesmente concreto com fibras de aço (CFA), pode ser entendido como sendo um concreto convencional em que se adicionam, à matriz, pequenos elementos descontínuos de aço (fibras), obtendo-se um material que, sob certos aspectos, tem desempenho estrutural superior ao original.

Na acepção mais geral da palavra, fora do âmbito da Engenharia de Estruturas, as fibras são elementos de forma alongada que constituem tecidos de animais e vegetais, presentes também em certas substâncias minerais, estando dispostas, na maioria das vezes, em feixes. Entretanto, *stricto sensu*, esse conceito geral precisa ser reavaliado quando se pretende estudar as fibras para fins técnico-científicos.

Na Engenharia Estrutural, as chamadas “fibras curtas”, ou simplesmente “fibras” podem, inicialmente, ser idealizadas pelas barras de aço de estruturas de concreto (que

se apresentam como elementos isolados ou em feixe). Alternativamente, tem-se o exemplo das fibras naturais das estruturas de madeira.

De fato, nesses exemplos idealizados, as fibras podem ser encontradas sobre a forma discreta, imersas em um elemento estrutural, isoladamente ou em feixes. Entretanto, no que se refere às fibras usualmente empregadas como reforço estrutural, imersas no elemento estrutural principal, elas atuam com o objetivo de conferir desempenho estrutural superior, seja em razão de uma deficiência da própria matriz, seja por conta de uma característica intrínseca da fibra.

Em vista do exposto, para aplicação em estruturas de concreto, é comum caracterizar as fibras como elementos descontínuos adicionados à matriz, cuja composição predominante é aço-carbono ou aço inoxidável, apresentando dimensões reduzidas e com diferentes formas de seção transversal.

Recentemente, as fibras de aço têm obtido notória aceitação no mercado mundial em função de diversos fatores, como, por exemplo, o processo de obtenção relativamente barato, a grande disponibilidade de fabricantes, a boa aderência da fibra com a matriz, o elevado módulo de elasticidade, a facilidade de manuseio, a utilização inofensiva à saúde humana e, por fim, mas não menos importante, os consideráveis ganhos de desempenho estrutural. Esses ganhos podem ser traduzidos, em linhas gerais, na melhoria das propriedades da matriz, como o controle eficiente da fissuração, a capacidade de absorção de energia, a resistência a impactos e outras.

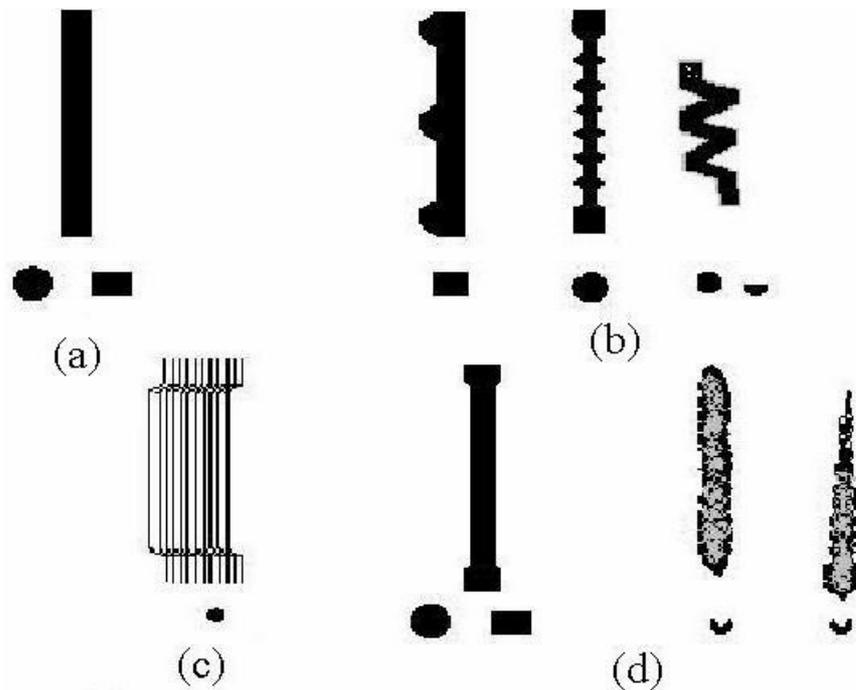
Por tudo isso, as fibras de aço têm sido consideradas uma opção bastante vantajosa em muitas aplicações, o que também motivou a sua escolha como objeto do presente trabalho. A seguir, apresenta-se uma breve descrição das características principais desse tipo de fibras, do concreto e do concreto reforçado com fibras curtas de aço, visando preparar o entendimento dos modelos teóricos disponíveis para análise do comportamento do concreto com fibras de aço, objeto deste estudo.

## 2.2 Fibras de Aço - Fabricação e Comercialização

Pelas razões apresentadas no penúltimo parágrafo anterior, as fibras de aço acabam por ter grande aceitação no mercado, garantindo um desempenho estrutural superior ao concreto reforçado com esses elementos.

Normalmente, as fibras de aço são comercializadas em elementos isolados (soltos) ou em forma de pentes, isto é, coladas umas às outras, embaladas em sacos. Os seus processos de fabricação mais comuns são:

- corte de fios de aço de diâmetro entre 0,25 e 1,00 mm: produzindo fibras retas de seção circular (Figura 2.1, letras “a” e “c”);
- achatamento de fios de aço ou cisalhamento de lâminas de aço: produzindo fibras retas de seção retangular (Figura 2.1, letra “a”);
- sobra industrial da produção de lã de aço, dando origem a fibras onduladas de seção circular (Figura 2.1, letra “b”);
- processos de conformação mecânica, que produzem fibras retas ou de extremidades alargadas, podendo apresentar seções retangulares ou irregulares (Figura 2.1, letra “d”).



**FIGURA 2.1** – Características geométricas típicas das fibras de aço (AMERICAN CONCRETE INSTITUTE - ACI - MANUAL OF CONCRETE PRACTICE, PART 5 - ACI 544.1R-96, 2000, com adaptações)

Ainda especificamente com relação às fibras de aço, a AMERICAN SOCIETY FOR TESTING MATERIALS (ASTM A820, 2006) as classifica em quatro grandes grupos, de acordo com o processo de fabricação: trefiladas, laminadas, fundidas e aquelas obtidas por outros processos.

A classificação japonesa para fibras de aço (JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS – JSCE, 1983) é baseada na forma da seção transversal: circular, retangular ou crescente.

A tabela 2.1 apresenta algumas propriedades gerais das fibras curtas de aço e a tabela 2.2 apresenta alguns detalhes dessas fibras de uso comercial mais comum.

**TABELA 2.1:** Características das fibras de aço segundo CALIXTO (1998)

Comprimento (mm)	25 a 100
Diâmetro (mm)	0,5 a 1,0
Seção transversal	retangular, circular, irregular
Relação de aspecto <sup>1</sup>	20 a 150
Resistência à tração (MPa):	500 a 2000
Tensão de escoamento mínima (MPa):	345 (conforme ASTM A820) 552 (conforme JSCE, 1983)
Massa específica (kg/m <sup>3</sup> ):	7800
Dosagem (% em volume):	0,1 a 1,5

**TABELA 2.2:** Exemplos de alguns tipos de fibras curtas de aço encontradas no mercado (CALIXTO, 1998)

Dramix (aço)	
fabricante	Belgo Mineira – Bekaert
densidade	7800 kg/m <sup>3</sup>
seção transversal	Circular
Xorex (aço)	
fabricante	Bombril
densidade	7800 kg/m <sup>3</sup>
seção transversal	Retangular

### 2.3 Produção do Concreto com Fibras Curtas de Aço

Fabricar um concreto com fibras de aço não exige técnicas muito sofisticadas, embora alguns cuidados devam ser tomados em relação à fabricação de um concreto convencional (BARROS, 1996).

Seleção adequada de materiais e fornecedores, viabilidade econômica, trabalhabilidade da mistura, comportamento estrutural, entre outros, são aspectos que certamente deverão ser avaliados com critério.

<sup>1</sup> razão entre o comprimento da fibra ( $l_f$ ) e o seu diâmetro equivalente ( $d_f$ ) ( $d_f$  é o diâmetro de uma seção circular que tem a mesma área que a da seção transversal da fibra).

### 2.3.1 Seleção de Materiais

Uma boa escolha de materiais é um aspecto que merece atenção. Isso porque as características intrínsecas de uma determinada fibra muitas vezes impedem a sua substituição por outra, já que os efeitos no comportamento estrutural conferidos por uma e outra podem variar significativamente.

A correta definição das características das fibras a serem empregadas (comprimento, diâmetro equivalente, teor, relação de aspecto, tensão de ruptura, teor de carbono e outras) bem como das propriedades da matriz de concreto tem papel decisivo no desempenho do concreto que se deseja obter.

A dosagem das fibras assume especial importância nos concretos reforçados com fibras de aço, uma vez que o teor de fibras pode ser fator relevante para o comportamento do material.

### 2.3.2 Dosagem e Mistura

A ordem de colocação das fibras na mistura é um fator que também deve ser considerado quando da homogeneização dos constituintes do concreto com fibras. A introdução na mistura de uma grande quantidade de fibras de uma única vez tende a aumentar o risco de ocorrência da aglomeração de fibras na massa de concreto. O termo utilizado na língua inglesa para descrever esse fenômeno é “balling”, cuja tradução para a língua portuguesa ainda não apresenta um consenso. Na literatura, encontram-se termos como “empelotamento” (FURLAN JÚNIOR, 1995; ROCHA, 1996; CALIXTO, 1998), “embolamento” (FIGUEIREDO, 2000), “ninho” (ROCHA, 1996; CALIXTO, 1998), “ouriços” (BARROS, 1995) e outros.

Em geral, fibras de maior comprimento tendem a causar a ocorrência mais freqüente do embolamento. Em aplicações em que se utiliza concreto projetado, por

exemplo, esse fenômeno pode acarretar entupimento dos mangotes, prejudicando o resultado final (FIGUEIREDO, 2000).

Deve-se, portanto, avaliar a melhor ordem de introdução dos materiais na betoneira, procurando-se sempre garantir uma distribuição uniforme das fibras no concreto. FIGUEIREDO (2000) recomenda que se introduzam as fibras em taxas controladas juntamente com os agregados, homogeneizando a mistura antes do lançamento. Nessa mesma filosofia, QUINTA (2006) sugere que, no processo produtivo em central de concreto, as fibras sejam adicionadas na esteira, juntamente com os agregados graúdos e miúdos, a uma taxa não maior que 40 kg / min. E, no caso de fibras adicionadas no caminhão-betoneira, já nas imediações do local de aplicação, indica que essa taxa seja aumentada para 60 kg / min.

BARROS (1995) cita que as fibras podem ser adicionadas por último, isoladas ou juntamente com o agregado graúdo, conforme recomenda o ACI (ACI 544.3R-93, 2000).

O ACI (ACI 544.1R-96, 2000) sugere duas opções para a adição das fibras:

- . Para os casos de concreto dosados em central, as fibras devem ser adicionadas à mistura em forma de uma “chuva de fibras individuais” instantes antes da aplicação do concreto;
- . Para concretos dosados na obra, as fibras devem ser misturadas ao agregado miúdo, que será posteriormente adicionado ao concreto.

Uma outra maneira de se tentar solucionar o problema da aglomeração das fibras na mistura é a utilização de fibras coladas, formando pentes. Durante o preparo do concreto com esse tipo de fibra de aço, a cola se dissolve paulatinamente, conduzindo a uma maior uniformidade na distribuição das fibras na massa de concreto.

### 2.3.3 Trabalhabilidade

Muitas são as referências bibliográficas voltadas para o estudo da trabalhabilidade de concreto com fibras (FURLAN JÚNIOR, 1995; BARROS, 1996; CECCATO, 1998; ACI 544.1R-96, 2000; FIGUEIREDO, 2000; FARIAS *et al.*, 2000; BRANDÃO, 2005; e outros). Isso porque é de conhecimento geral que as fibras conduzem, em um primeiro momento, a uma perda na trabalhabilidade.

BARROS (1996) sugere que, para se aumentar a percentagem de fibras sem comprometer a trabalhabilidade, é necessário utilizar misturas de granulometria mais fina, fibras de maior rigidez ou ainda fibras de menor “esbelteza” (isto é, menor relação de aspecto).

O ACI (ACI 544.1R-96, 2000) sugere um limite máximo de 2 % em peso do concreto para a adição de fibras metálicas para que não se comprometa a trabalhabilidade da mistura; também indica uma perda de 25 a 102 mm nos valores do abatimento do tronco de cone de concretos com fibras quando comparado a concreto sem fibras. Por outro lado, essa perda de trabalhabilidade tem sido compensada com o uso de aditivos superplastificantes e pozolanas (FURLAN JÚNIOR, 1995).

Três métodos de avaliação da trabalhabilidade de concretos com fibras são recomendados pelo ACI (ACI COMMITTEE 544.3R-93, 2000): Abatimento do Tronco de Cone (ABNT - NBR 7223: 1992; ASTM C143, 2005), Vibração e Abatimento de Cone Invertido (ASTM C995, 2001) e Ensaio VeBe (ABNT - NBR 9606: 1992).

CECCATO (1998) destaca que o ensaio de cone invertido não é recomendável para avaliar a trabalhabilidade de concreto com fibras. SOROUSHIAN e BAYASI (1991) afirmam que é pequena a variação da trabalhabilidade, medida por esse ensaio, em função do tipo de fibra empregada.

FURLAN JÚNIOR (1995) acrescenta que o ensaio de abatimento do tronco de cone (“*slump test*”) não é um bom índice de trabalhabilidade, o que é também apontado pelo ACI (ACI 544.1R-96, 2000). Isso se deve ao fato de que, em alguns casos, ao se avaliar a trabalhabilidade a partir da consistência do concreto, pode-se estar medindo uma propriedade aparente. Nesses casos, verifica-se que a vibração adequada permite obter um concreto de desempenho satisfatório, eliminando-se essa indesejável consistência (aparente) do concreto detectada pelo ensaio. O autor ratifica a possibilidade de o lançamento e a compactação do concreto serem satisfatórios mesmo que o abatimento seja reduzido.

Um cuidado que se deve tomar, entretanto, reside na adoção de elevados valores para o abatimento de tronco de cone, objetivando-se evitar a concentração de fibras na superfície. Valores muito elevados do referido abatimento poderão causar segregação das fibras (CECCATO, 1998), o que poderá reduzir a eficiência do concreto na superfície, dando origem a fissuras nessa região.

#### 2.3.4 Custos

Na escolha dos materiais que comporão o concreto com fibras, deve ser considerada também a viabilidade econômica do concreto. Em uma primeira análise, o concreto com fibras pode parecer onerar o processo produtivo, não somente em função do acréscimo de mais um elemento (a fibra) mas supostamente também em razão da introdução de um novo produto na obra, o que sempre gera incertezas quanto aos resultados finais. Isso pode levar a atrasos na produção em vista do desconhecimento inicial das peculiaridades do novo processo produtivo.

FARIAS *et al.* (2000) indicam, para fins de orçamento estimativo, um aumento de 8 % no custo do metro cúbico do concreto para cada 25 kg de fibras adicionadas à mistura. Todavia, ponderam que é importante considerar não somente o custo de produção mas também os ganhos adicionais decorrentes das novas potencialidades do concreto com fibras.

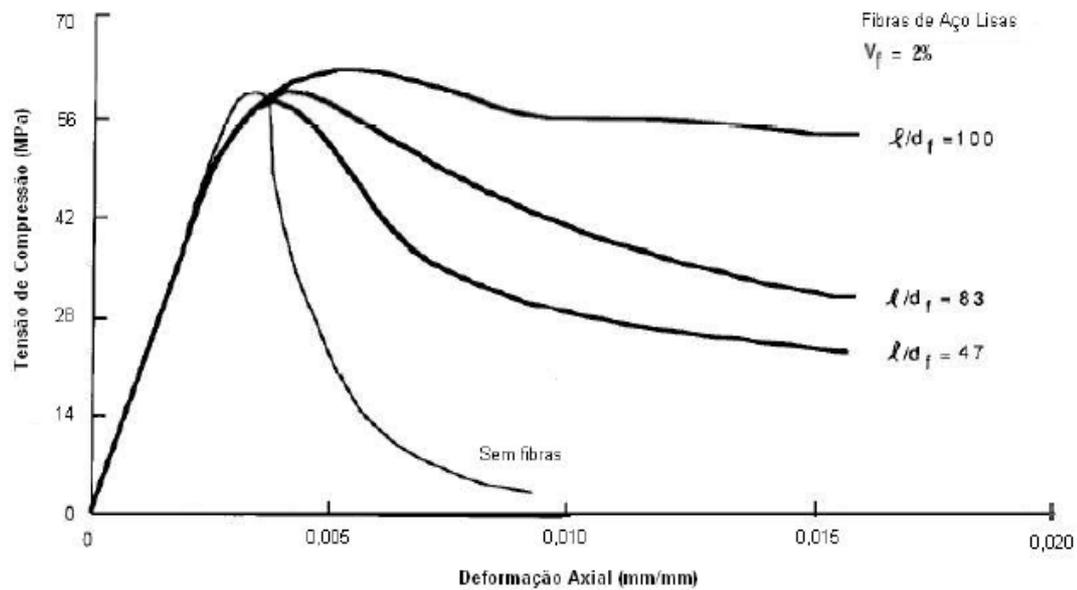
## 2.4 Parâmetros para Avaliação de Desempenho do Concreto com Fibras Curtas de Aço

### 2.4.1 Relação de Aspecto

A relação de aspecto (do inglês “aspect ratio”), termo às vezes empregado também como “relação de forma” ou “fator de forma” (AGOPYAN e NUNES, 1998) ou ainda “esbelteza” (no português de Portugal – BARROS, 1995), representa a razão entre o comprimento da fibra e o seu diâmetro equivalente (diâmetro da seção circular que tem a mesma área da seção transversal da fibra).

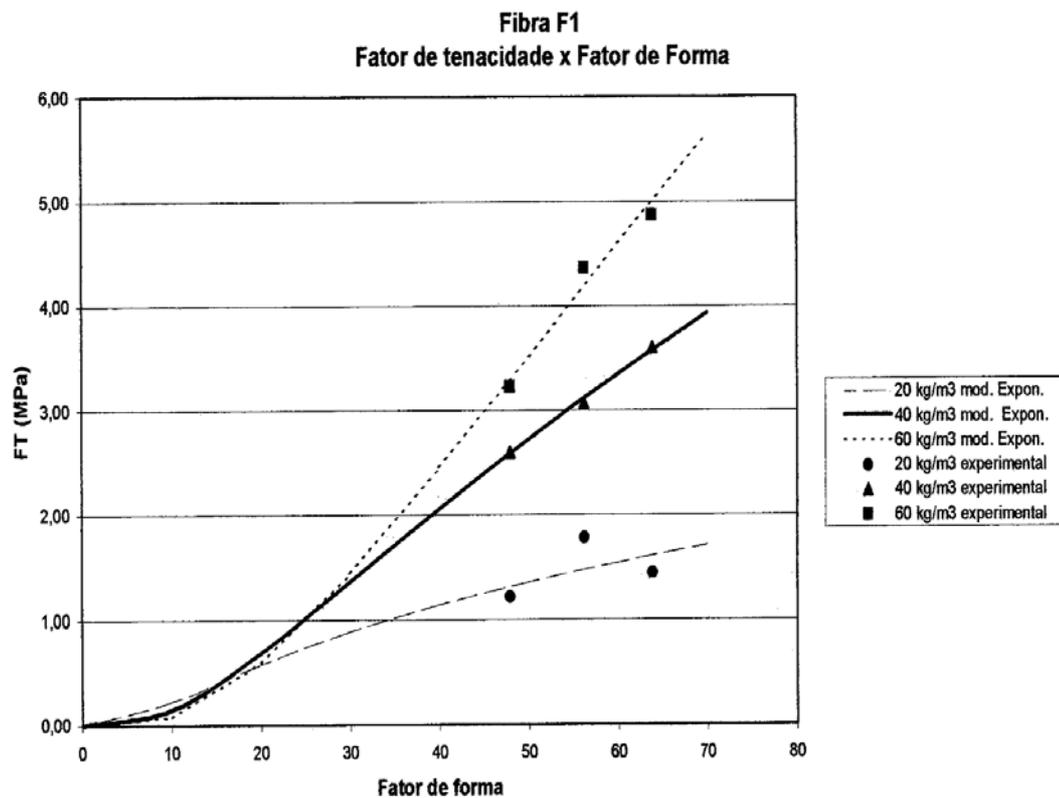
Esse parâmetro tem sido usualmente empregado como fator determinante na escolha de determinada fibra para uma aplicação específica. Isso porque se comprovou que a relação de aspecto tem grande influência na trabalhabilidade (ROCHA, 1996; HARTMANN, 1999; VIDAL FILHO, 1999; FIGUEIREDO, 2000; BRANDÃO, 2005). FARIAS *et al.* (2000) afirmam ser difícil se conseguir uma trabalhabilidade razoável em concreto com fibras cuja relação de aspecto é superior a 100.

Outra influência significativa da relação de aspecto se dá na tenacidade que se deseja obter no concreto reforçado com fibras. Em geral, as tenacidades à compressão e à flexão apresentam ganhos diretamente proporcionais ao aumento na relação de aspecto, conforme se exemplifica nas figuras 2.2 e 2.3 a seguir.



**FIGURA 2.2** – Correspondência entre a relação de aspecto ( $l_f / d_f$ ) e a resistência à compressão em argamassas com fibras de aço (ACI 544.4R-88, 2000, com adaptações)

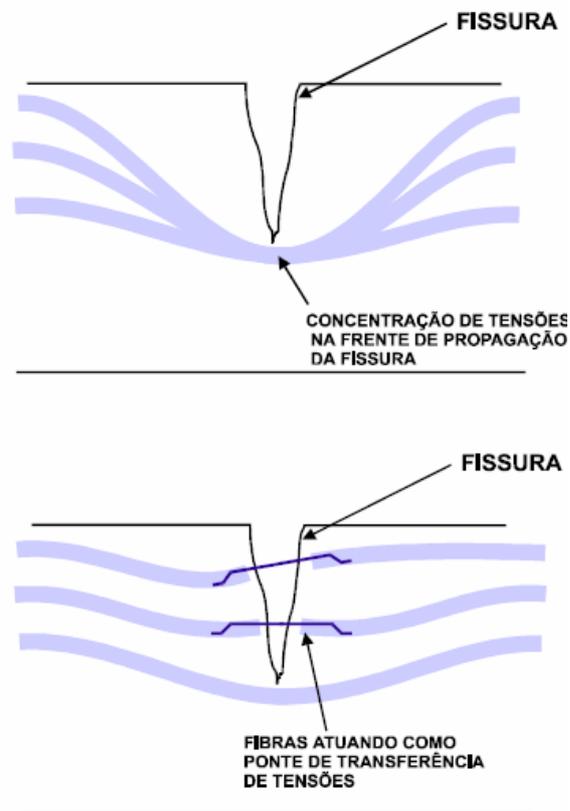
Objetivando avaliar, de modo geral, a influência da relação de aspecto na tenacidade à flexão, AGOPYAN e NUNES (1998) desenvolveram um estudo experimental de concretos reforçados com fibras de aço com extremidades em gancho e seção retangular. Os autores verificaram que houve aumento da consistência proporcionalmente ao aumento do consumo de fibras, sem, contudo, terem sido observadas significativas variações na compactabilidade das misturas, conforme já havia sido verificado por CECCATO (1998). Além disso, por meio do chamado “Fator de Tenacidade” (vide equação 2.3 adiante), os autores confirmaram o aumento da tenacidade em razão do aumento na relação de aspecto e em consequência do incremento no consumo de fibras (Figura 2.3).



**FIGURA 2.3** – Evolução do “Fator de Tenacidade” com a relação de aspecto (AGOPYAN e NUNES, 1998)

#### 2.4.2 Comprimento da Fibra e Comprimento Crítico

Considerando-se apenas a questão da trabalhabilidade, pode-se inferir que é recomendável adotar fibras de menor comprimento, reduzindo-se, assim, a probabilidade da ocorrência de elevadas concentrações de fibras (“balling”). Entretanto, verifica-se que o comprimento das fibras tem influência também na tenacidade (FIGUEIREDO, 2000). Em linhas gerais, após a primeira fissura, a matriz de concreto perde a capacidade de transferir as tensões atuantes entre as faces adjacentes à fissura formada. Nesse instante, as fibras atuam como uma “ponte” de transferência dessas tensões, por meio de tensões de aderência fibra-matriz, podendo sustentar até mesmo cargas maiores mesmo após a fissuração (Figura 2.4).



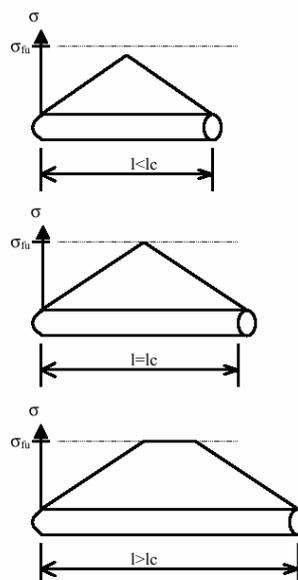
**FIGURA 2.4** – Transferência de tensões entre as faces da fissura (NUNES *et al.*, 1997)

Obviamente, a citada transferência de tensões não ocorre indefinidamente. Em determinado instante, as fibras deixam de atuar como elementos de reforço. Isso ocorre porque as tensões de aderência superam as resistências de aderência de tal sorte que a força de arrancamento da fibra (“*pull-out force*”) é elevada o suficiente para arrancar a fibra. Além disso, as tensões atuantes diretamente na fibra podem atingir níveis tão elevados que causem a sua ruptura.

Segundo o ACI (ACI 544.1R-96, 2000), técnicas para se conseguir uma alta resistência ao arrancamento com relações de aspecto pequenas incluem a utilização de fibras com extremidades em gancho (“*hooked-end*”), alargadas (“*enlarged-end*”), onduladas (“*crimped*”) ou de superfície irregular (“*rough surface*”).

A ruptura da fibra pode ocorrer com freqüência em concretos de alta resistência que contêm fibras de comprimentos muito grandes. Sendo as tensões de aderência diretamente proporcionais ao comprimento da fibra e à capacidade resistente da matriz, nesses casos, criam-se tensões de aderência tão elevadas que podem superar a resistência última das fibras, causando seu rompimento. Para aumentar ainda mais a transferência de tensões fibra-matriz, pode-se lançar mão das fibras com extremidades deformadas (“*hooked-ended*”) ou onduladas (“*crimped*”).

O estudo do fenômeno descrito no parágrafo anterior levou alguns pesquisadores a definirem um chamado “comprimento crítico” para a fibra, entendido como sendo o valor de comprimento da fibra acima do qual o estado limite último se dá por ruptura da fibra. A definição clássica do comprimento crítico (FIGUEIREDO, 2000) está baseada em um modelo que descreve a transferência de tensões entre a fibra e a matriz ( $\sigma$  na figura 2.5), segundo o qual tais tensões aumentam linearmente das extremidades para o centro da fibra (Figura 2.5). Naqueles casos em que o comprimento da fibra ( $l$ ) é maior que o comprimento crítico ( $l_c$ ), há uma superação das tensões de ruptura das fibras ( $\sigma_{fu}$  na Figura 2.5, com  $l > l_c$ ), o que causa, então, seu rompimento.



**FIGURA 2.5** – Distribuição de tensões nas fibras (FIGUEIREDO, 2000)

### 2.4.3 Volume Crítico

A capacidade de transferência de tensões proporcionada pelas fibras depende não somente do seu comprimento mas também do volume de fibras imersas no concreto, dando margem para o estudo de um certo volume “crítico” de fibras.

O volume crítico representa a concentração de fibras (em volume) acima da qual se consegue manter a capacidade portante após a ruptura da matriz (FIGUEIREDO, 2000). Ensaio realizados por AGOPYAN e NUNES (1998) e FIGUEIREDO (2000) confirmam a influência de volumes crescentes de fibra na manutenção e na superação da resistência da matriz.

O cálculo do volume crítico pode ser feito a partir de modelos que estimam a contribuição das fibras na rigidez da matriz após a fissuração. FIGUEIREDO (2000) faz comentários a um modelo proposto por AVESTON, COOPER e KELLY<sup>2</sup>, sugerindo a introdução de coeficientes (de correção ou de eficiência) em função da orientação aleatória e do comprimento das fibras. Após a introdução desses coeficientes, o autor estima em 1 % o volume crítico para o caso de fibras de aço.

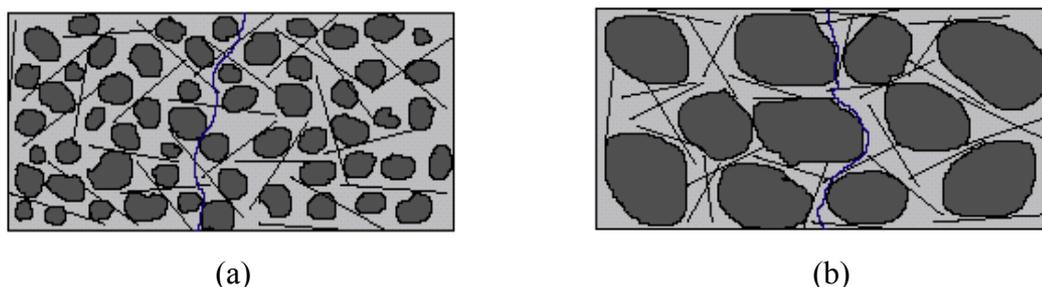
### 2.4.4 Compatibilidade Dimensional

Uma consideração importante a se fazer diz respeito à relação entre as dimensões das fibras e as dimensões do agregado utilizado no concreto. O reforço proporcionado pelas fibras será tão mais eficiente quanto maior a probabilidade de essas fibras interceptarem as fissuras. Isso é necessário ao se considerar não somente a orientação das fibras, mas também o seu comprimento em relação às dimensões dos materiais constituintes do concreto.

<sup>2</sup> AVESTON, J.; COOPER, G. A.; KELLY, A. **Single and Multiple Fracture**. In: Conference on the Properties of Fiber Composites, London, 1971. Proceedings. NPL. p.15-26.

Admitindo-se que algumas fibras poderão não interceptar as fissuras, deve-se avaliar a correta escolha do tipo de fibra a ser empregada de modo a se evitar tal situação. FIGUEIREDO (2000) recomenda que as fibras tenham comprimento maior ou igual ao dobro da dimensão máxima do agregado, possibilitando a interceptação das fissuras pelas fibras dispersas no concreto. FURLAN JÚNIOR (1995) afirma que agregados de maior diâmetro dificultam a uniformização das fibras na mistura.

A compatibilidade dimensional entre as fibras e o agregado é relevante principalmente quando se pensa em concretos de elevadas resistências. Nesses casos, mesmo com a possibilidade de ruptura não somente da matriz, mas também do agregado, a fibra estará apta a combater a fissuração (Figura 2.6).



**FIGURA 2.6** – Comparação entre o comprimento da fibra e a dimensão máxima do agregado (a) fibra de grande comprimento; (b) fibra de pequeno comprimento (FIGUEIREDO, 2000)

É importante considerar também o fato de que nem sempre será possível aumentar o comprimento da fibra visando-se garantir a compatibilidade dimensional fibra-agregado. Fibras de grande comprimento tendem a diminuir a trabalhabilidade, o que pode ser, então, um fator limitante na escolha da fibra. Uma alternativa seria diminuir a dimensão máxima do agregado, o que é viável quando se consideram, por exemplo, concretos projetados, onde se utilizam normalmente agregados com dimensão máxima de 19 a 25 mm (FIGUEIREDO, 2000). Concretos dosados com agregados de

grandes dimensões (pavimentos, por exemplo) irão requerer fibras de maior comprimentos de forma a garantir a compatibilidade dimensional.

## 2.5 Comportamento do Concreto com Fibras Curtas de Aço

Visando balizar o entendimento de como as fibras podem atuar na melhoria do comportamento estrutural do concreto, cabe discutir os principais efeitos da adição desses elementos ao concreto.

A concepção do concreto reforçado com fibras teve origem na tentativa de combater a fragilidade do concreto convencional (não-reforçado), principalmente no que se refere à baixa resistência à tração. Posteriormente, verificou-se que a utilização das fibras melhorava a ductilidade, a resistência ao impacto e à fadiga, o controle da fissuração e, em alguns casos, as resistências à tração e à compressão (FIGUEIREDO, 2000).

EZELDIN e BALAGURU (1989) realizaram um estudo teórico-experimental do comportamento da aderência de fibras de aço do tipo “hooked-ended” ao concreto armado com resistência de 34,5 a 75,9 MPa. Os autores observaram dois tipos de ruptura, arrancamento das fibras e fendilhamento do concreto, e presenciaram sensíveis ganhos no desempenho do material, principalmente na sua ductilidade.

ADEBAR *et al.* (1997) indicam relevantes aumentos na ductilidade das vigas de concreto reforçadas com fibras de aço, fato também comprovado em ensaios semelhantes realizados por CALIXTO *et al.* (1999) e em estudos da ductilidade de pilares de concreto de alta resistência desenvolvidos por GUIMARÃES *et al.* (2000).

Em geral, as fibras curtas, quando aplicadas isoladamente à matriz (sem armaduras convencionais), apresentam capacidade de resistência aos esforços de cisalhamento e de tração inferiores à das armaduras contínuas constituídas de barras e

fios de aço. Entretanto, elas se mostram eficientes no combate à fissuração, uma vez que, em função do pequeno espaçamento entre elas, agem como elementos que “costuram” as fissuras. Em consequência, retardam o aparecimento de microfissuras, garantindo a manutenção da capacidade resistente do material após serem atingidas deformações de ordem superior.

Observa-se ainda que os concretos com fibras apresentam fissuras com espaçamentos e aberturas menores, tornando-se um material menos permeável (SIMÕES, 1998; VIDAL FILHO, 1999; BARRAGÁN e GETTU, 2002).

Outra característica importante das fibras curtas é a capacidade de ser empregada em conjunto com a armadura discreta (barras e fios de aço), agindo como um mecanismo de resistência adicional da estrutura.

Estudos recentes (FIGUEIREDO, 2000; ACI COMMITTEE 544.3R-93, 2000) ressaltaram a importância de requisitos mínimos de dosagem do concreto com fibras, como, por exemplo, o tipo, o consumo e a geometria das fibras, visando garantir melhor desempenho, principalmente na etapa pós-fissuração. Nessa etapa, observaram-se aumentos substanciais na ductilidade (FARIAS *et al.*, 2000), juntamente com elevado ganho na tenacidade, vindo essa propriedade a se tornar decisiva para uma maior utilização do CRFA.

CUNHA *et al.* (2003) ressalta que, a despeito do maior interesse em novos estudos da capacidade de absorção de energia do CRFA, parece ainda escassa a caracterização teórico-experimental inequívoca desse material.

Diversos autores realizaram estudos em que puderam constatar os efeitos benéficos, de forma variada, da adição de fibras curtas de aço à matriz de concreto (SHAH e RANGAN, 1971; LIM *et al.*, 1987; NANNI e JOHARI, 1989; EL-NIEMA, 1991; SOROUSHIAN e BAYASI, 1991; VONDRAN, 1991; FURLAN JÚNIOR, 1995; BARROS, 1995; ZANGELMI JR., 1999; DING e KUSTERLE, 2000; BARROS e

GOUVEIA, 2000; FARIAS *et al.*, 2000; ACI 544.1R-96, 2000; FIGUEIREDO, 2000; ACI 544.4R-88, 2000; ARAÚJO, D., 2002; CUNHA, 2004; dentre outros).

A seguir, apresenta-se, em linhas gerais, a descrição desses efeitos, objetivando-se entender o comportamento do material em cada uma das situações analisadas. Os resultados e as conclusões apresentados permitiram orientar a modelagem numérica implementada no código computacional desenvolvido nesta pesquisa.

### 2.5.1 Resistência à Compressão

O ganho na resistência à compressão a partir da adição de fibras ao concreto não é um consenso. Estudos mostram que pode haver até mesmo redução nos valores medidos para essa propriedade, o que é justificado, em alguns casos, por uma má compactação do material (FIGUEIREDO, 2000).

Melhoras significativas na resistência à compressão só são possíveis para concretos reforçados com elevados teores de fibras, como é o exemplo dos concretos do tipo SIFCON (*Slurry Infiltrated Fiber Reinforced Concrete*). Por outro lado, teores muito elevados de fibras podem piorar a sua trabalhabilidade (FARIAS *et al.*, 2000).

O ACI (ACI 544.1R-96, 2000) indica um ganho de, no máximo, 15 % na resistência à compressão para volumes de fibra de até 1,5 %.

ARAÚJO, D. (2002) realizou ensaios de compressão em corpos-de-prova cilíndricos de 100 mm x 200 mm, adicionando-se, em três traços de concreto, fibras de aço com ganchos nas extremidades, usando-se teores de 0,75 % e 1,5 % em volume. Seus resultados, mostrados na tabela 2.3, confirmaram a influência marginal das fibras na resistência à compressão para os teores indicados.

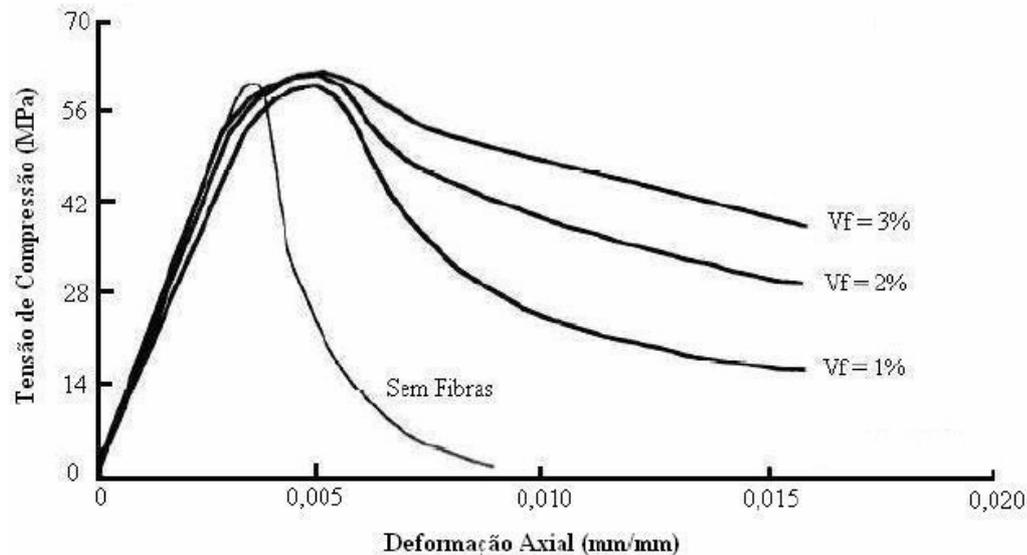
**TABELA 2.3:** Resistência média do concreto em função do volume de fibras adicionadas (ARAÚJO, D., 2002)

Traço	Volume de fibras (%)	Compressão ( $f_{cm}$ ) MPa
1	0,00	45,0
	0,75	52,2
	1,50	48,9
2	0,00	73,3
	0,75	73,1
	1,50	73,1
3	0,00	93,7
	0,75	99,3
	1,50	101,5

Independentemente da incerteza quanto aos ganhos na resistência à compressão do concreto reforçado com fibras de aço, é fato que o concreto, quando submetido à compressão, também poderá apresentar ganho em tenacidade (DING e KUSTERLE, 2000; BARROS e GOUVEIA, 2000). Em consequência das deformações de tração que surgem no material, as fibras atuarão como pontes de transferência de tensões de tração. Métodos de avaliação desse tipo de ganho em tenacidade podem ser encontrados em ZANGELMI JR. (1999).

É importante salientar que o ganho em tenacidade medido na compressão pode apresentar variações significativas em função do direcionamento da fibra no interior do concreto. Exemplo disso são os concretos projetados, nos quais há uma clara tendência de alinhamento das fibras segundo a direção do plano de projeção (FIGUEIREDO, 2000), o que pode falsear os resultados dos ensaios de compressão dependendo da direção em que se carrega o corpo-de-prova.

A figura a seguir exemplifica outros resultados da evolução da resistência à compressão de um conjunto de misturas com diferentes teores de fibras metálicas (ACI 544.4R-88, 2000). Em tais curvas, embora se constate um crescimento na energia absorvida após a fissuração, não se obtém aumento relevante na resistência à compressão das misturas.



**FIGURA 2.7** – Relação entre o teor de fibras e a resistência à compressão em argamassas reforçadas com fibras de aço (ACI 544.4R-88, 2000)

### 2.5.2 Resistência à Tração

Aumentos na resistência à tração podem ser observados nos concretos reforçados com fibras (FARIAS *et al.*, 2000; FIGUEIREDO, 2000). Entretanto, como adverte FURLAN JÚNIOR (1995), ganhos significativos só são obtidos a partir de volumes elevados de fibras. Na tração direta, observam-se aumentos de 30 a 40 % na resistência à tração em concretos com adição de 1,5 % de fibras em volume (ACI 544.1R-96, 2000).

Assim, via de regra, a resistência à tração direta do concreto sofre pequena influência da adição das fibras, exceto em situações específicas quando se criam condições favoráveis, como, por exemplo:

- volume de fibras: volumes elevados (geralmente, acima de 2 %) conduzem a ganhos significativos de resistência à tração;

- tipo de fibra: fibras de alto módulo de elasticidade e fibras com elevado fator de forma proporcionam ganhos maiores na resistência à tração;
- qualidade da matriz de concreto: matrizes com maior aderência às fibras (como exemplo, concretos de alta resistência com adições) proporcionam aumentos na resistência à tração;
- alinhamento das fibras: fibras alinhadas com a direção das tensões de tração produzem maiores incrementos na resistência à tração direta do que quando as fibras estão aleatoriamente distribuídas na matriz de concreto.

### 2.5.3 Resistência à Flexão

A resistência à flexão (tração na flexão) dos concretos reforçados com fibras apresenta ganhos superiores em comparação com aqueles obtidos na compressão e na tração direta. Isso ocorre devido ao comportamento pseudodúctil desenvolvido pelo concreto, cuja distribuição de tensões e deformações fica alterada após da introdução das fibras (ACI 544.1R-96, 2000). Resultados experimentais já conseguiram comprovar a eficiência das fibras no que se refere à resistência à flexão de elementos reforçados de concreto.

Um interessante estudo foi realizado por SHAH e RANGAN (1971), que propuseram uma expressão para estimar as variações na resistência à flexão do concreto em função das características da fibra (teor e relação de aspecto).

LIM *et al.* (1987) desenvolveram um estudo teórico-experimental sobre os efeitos da adição de fibras de aço com extremidades em gancho (“*hooked-ended*”) e retas no comportamento à flexão de vigas de concreto. Os autores propuseram expressões analíticas para representar as relações momento-curvatura e carga-flecha, as quais se mostraram confiáveis para representar o comportamento em flexão dessas estruturas.

Para avaliação da resistência à tração na flexão de concretos com fibras, costuma-se empregar o fator  $w \cdot \frac{l_f}{d_f}$  (“índice de reforço”), em que  $w$ ,  $l_f$ ,  $d_f$  representam o percentual de fibras em massa do concreto, o comprimento e o diâmetro (em milímetros) das fibras, respectivamente. FARIAS *et al.* (2000) afirmam que resultados mais significativos ocorrem para índices de reforço acima de 600 ou um pouco menores no caso de fibras onduladas. BARROS (1995) afirma que o aumento no índice de reforço de 40 para 120 proporciona um aumento da resistência à flexão de 25 %.

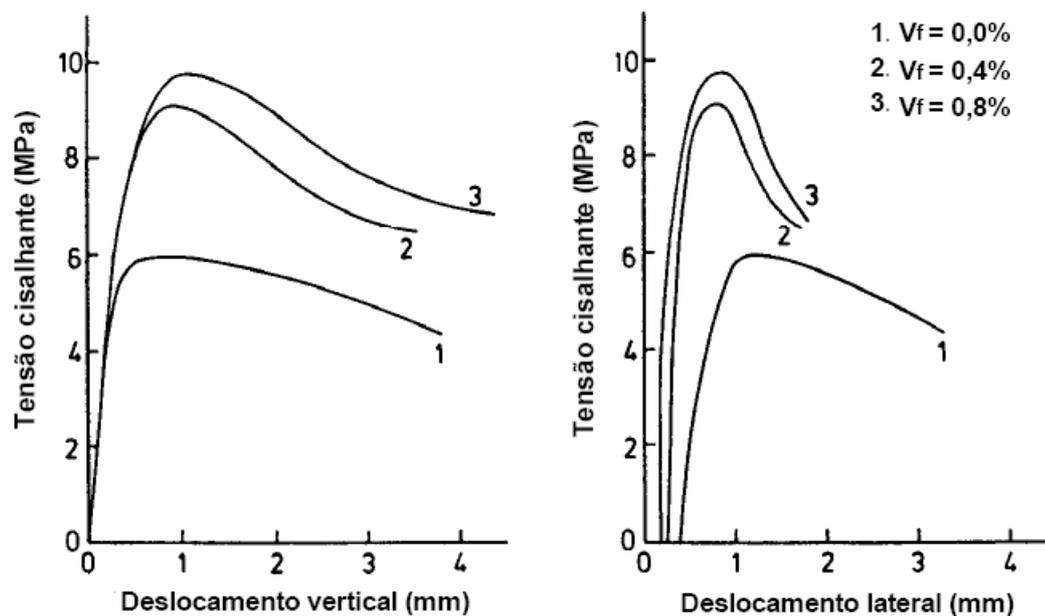
#### 2.5.4 Resistência ao Cisalhamento

Diversos autores (SWAMY e BAHIA, 1985; SHARMA, 1986; NARAYANAN e DARWISH, 1987; ASHOUR *et al.*, 1992; MURUGAPPAN *et al.*, 1992; VALLE e BÜYÜKÖZTÜRK, 1993; FURLAN JÚNIOR, 1995; BARROS, 1996; SIMÕES, 1998; LIM e OH, 1999; VIDAL FILHO, 1999; NOGHABAI, 2000, GROTH, 2000, dentre outros) constataram, em função da adição de fibras ao concreto, importantes melhoras no comportamento de elementos estruturais submetidos a esforços de cisalhamento.

De um modo geral, observam-se melhoras na capacidade resistente ao cisalhamento juntamente com um comportamento pseudodúctil do elemento de concreto reforçado com fibras, conforme se comprova nas figuras 2.8 e 2.9 bem como nas conclusões e nos resultados dos trabalhos citados a seguir.



**FIGURA 2.8** – Típicos modos de ruptura observados em ensaios experimentais de cisalhamento com fibras (teor de fibras crescente de cima para baixo - NARAYANAN e DARWISH, 1987)



**FIGURA 2.9** – Diagramas tensão-deslocamento em ensaios de transferência de cisalhamento em corpos-de-prova de concreto simples e com fibras: (a) deslocamento vertical; (b) deslocamento horizontal (lateral) (SIMÕES, 1998)

Normalmente, para avaliação da resistência ao cisalhamento do concreto reforçado com fibras de aço, leva-se em consideração uma parcela resistente adicional devido à adição das fibras.

SHARMA (1986), a partir de seus ensaios à flexão e ao cisalhamento em vigas com e sem fibras de aço, propôs equações empíricas para representar a resistência ao cisalhamento do concreto com fibras curtas de aço do tipo “hooked-ended”. O autor ressaltou a vantagem das fibras em relação aos estribos convencionais proporcionada por um menor espaçamento entre as fibras do que aquele entre as barras de estribos, o que conduziria a um ganho de resistência ao cisalhamento. Daí, sugeriu o uso combinado de fibras e estribos. Ganhos de ductilidade e de capacidade de absorção de energia também foram verificados pelo autor, que ainda propôs expressões para avaliar a resistência última ao cisalhamento.

ASHOUR *et al.* (1992) desenvolveram um programa experimental para avaliação da resistência ao cisalhamento de vigas de concreto armado de resistência à compressão média de 93 MPa, reforçadas com fibras de aço do tipo “*hooked-ended*”. Os autores propuseram equações empíricas para representar a resistência ao cisalhamento dessas estruturas e verificaram ganhos na ductilidade e na rigidez das vigas.

VALLE e BÜYÜKÖZTÜRK (1993) realizaram um estudo do comportamento do concreto de resistências à compressão entre 60 e 70 MPa reforçado com fibras (de aço e polipropileno) submetido a esforços de cisalhamento e observaram significativos ganhos na resistência ao cisalhamento e na ductilidade.

FURLAN JÚNIOR (1995) fez uma análise apurada de algumas pesquisas sobre a influência das fibras na resistência ao cisalhamento. Além disso, a partir de seus resultados experimentais, encontrou evidências satisfatórias do benefício proporcionado pela adição das fibras com relação à resistência ao cisalhamento em vigas de concreto. O autor ressaltou, entretanto, que o estudo da influência da adição de fibras na resistência ao cisalhamento precisava de mais aprofundamento, visto que ainda havia discrepâncias entre as conclusões de diversos autores. O autor assegurou que uma conclusão parcial, àquela época, seria a possibilidade de substituição parcial dos estribos pelas fibras.

VIDAL FILHO (1999) recomendou a adição de fibras de aço ao concreto como elemento de reforço ao cisalhamento. O autor sugeriu haver uma melhora nos mecanismos resistentes devido ao engrenamento dos agregados e ao efeito de pino da armadura longitudinal, com a conseqüente redução na parcela resistida pela armadura. Vidal Filho indicou ainda que, após a fissuração do concreto, as fibras atuariam em conjunto com os estribos no combate aos esforços de cisalhamento.

### 2.5.5 Tenacidade à Flexão

Feitas as considerações iniciais para os principais efeitos da adição das fibras ao concreto (subitens 2.5.1 a 2.5.4), pôde-se constatar benefícios, de forma variada, oriundos dessa adição. Por fim, mas não menos importante, resta avaliar aquele que, na visão de uma série de pesquisadores (BANTHIA e TROTTIER, 1995; BARROS, 1995; AGOPYAN e NUNES, 1998; FIGUEIREDO, 2000; ARAÚJO, D. 2002; LOBÃO, 2005; LOPES, 2005; NUNES, 2006 e outros) seria um dos principais motivos para a adição das fibras ao concreto: o aumento da capacidade de absorção de energia em flexão (tenacidade à flexão).

Segundo LOBÃO (2005), a tenacidade pode ser representada pela capacidade de deformação do compósito após a aparição da primeira fissura, que aumenta quando se adicionam fibras ao concreto. Vale acrescentar que FARIAS *et al.* (2000) indicam um aumento de 9 a 10 vezes nas deformações últimas do concreto reforçado com fibras em comparação com o concreto convencional.

Para se avaliar e quantificar o ganho na capacidade de absorção de energia da matriz reforçada com fibras, é imperioso estudar os mecanismos envolvidos na sua ruptura. Em razão da dissipação de energia necessária para a ruptura da matriz, é possível identificar três mecanismos responsáveis pelos ganhos em tenacidade do concreto com fibras:

- deformação da fibra durante a transferência de tensões da matriz fissurada para a fibra;
- tentativa de descolamento da fibra em relação à matriz;
- atrito provocado pelo escorregamento fibra-matriz na tentativa de arrancamento da fibra.

No caso do mecanismo de deformação da fibra, o ganho em tenacidade é maior para aquelas com maior ductilidade. Isso fica tão mais evidente quanto maior for a

capacidade de a fibra suportar, sem se romper, cargas cada vez maiores após a fissuração da matriz.

Certamente, em uma primeira análise, pode-se inferir que a maneira de se caracterizar o comportamento pós-pico de um material tracionado seria por meio de um ensaio de tração direta (GROTH, 2000). Entretanto, é sabido que tal ensaio envolve uma maior dificuldade de natureza prática do que a de um ensaio de flexão. Acrescente-se a isso o fato de que a grande maioria das aplicações do concreto reforçado com fibras envolve fenômenos de flexão (ou, mais especificamente, tração na flexão) e não simplesmente tração direta. Com isso, torna-se necessário, primordialmente, avaliar o comportamento pós-pico em flexão. Historicamente, essa necessidade levou ao desenvolvimento de métodos baseados em ensaios de flexão, sendo os principais descritos adiante.

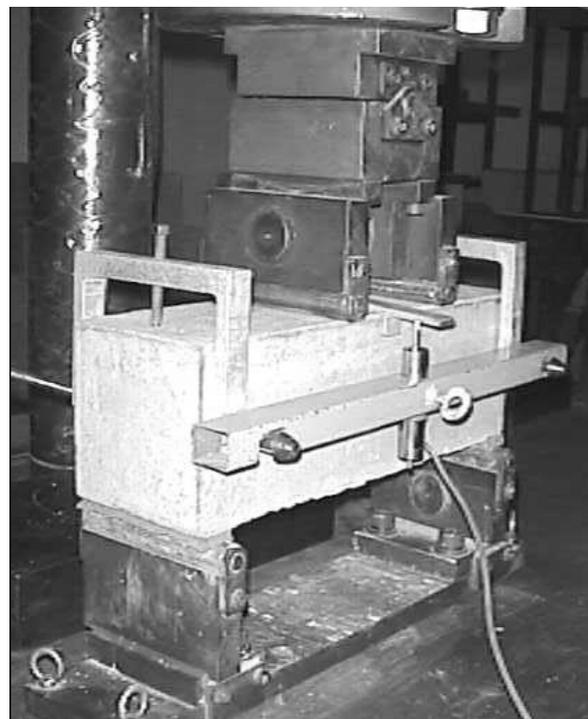
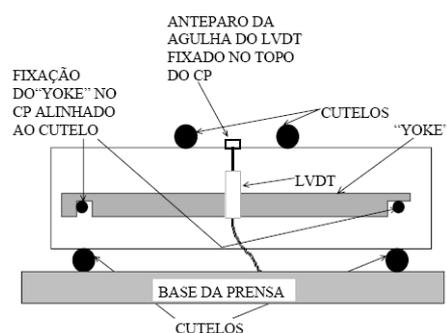
De forma geral, o ganho em tenacidade pode ser quantificado pela área sob a curva tensão-deformação (FIGUEIREDO, 2000). No caso de concreto com fibras, costuma-se adotar a recomendação do ACI (ACI 544.4R-88, 2000), medindo-se a área sob a curva carga-flecha, que representa o trabalho dissipado durante a deformação da estrutura até um determinado nível de deslocamento vertical.

MINDESS *et al.* (1996) relacionam os seguintes métodos de ensaio para caracterização da tenacidade à flexão: “ASTM C1018”, “JCI Standard SF-4 Toughness and Toughness Factor”, “ACI 544 Toughness Index”, “Belgian Standard NBN B15-238”, “Dutch CUR-Aabeveling 35”, “French Standard AFNOR P18-409”, “Spanish Standard AENOR UNE 83-510-89”, “German Specifications” e “Norwegian Standard”. FIGUEIREDO (2000) indica ainda os métodos prescritos pela EFNARC (“European Federation of Producers and Applicators of Specialist Products for Structures - 1996”) e pela NCA (“Norwegian Concrete Association”).

Dentre esses, destacam-se dois métodos usualmente utilizados: o método americano preconizado pela “AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND

MATERIALS” (ASTM C1018, 1994) e o método japonês instituído pela “JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS” (JSCE-SF4, 1984). Ambos são realizados em corpos-de-prova prismáticos carregados nos terços médios (“third-point bending” ou “four-point bending”). Mais recentemente, a RILEM (acrônimo na língua francesa para *RÉUNION INTERNATIONALE DES LABORATOIRES ET EXPERTS DES MATÉRIAUX, SYSTÈMES DE CONSTRUCTIONS ET OUVRAGES*) desenvolveu uma nova metodologia de avaliação da tenacidade em flexão de CRFA, a qual será discutida em detalhes adiante neste trabalho.

Um importante detalhe que merece atenção é o sistema de medição da deflexão para traçado dos diagramas carga-flecha. Em geral, empregam-se transdutores do tipo LVDT (“*Linear Variable Displacement Transducer*”) apoiados em um suporte próprio, denominado “yoke” (Figura 2.10), que garante uma maior confiabilidade na leitura das flechas, tendo como referência o próprio corpo-de-prova. Esse sistema, adotado tanto no método americano quanto no método japonês, evita erros de leitura oriundos de deformações dos apoios e dos contatos dos apoios com o corpo-de-prova.



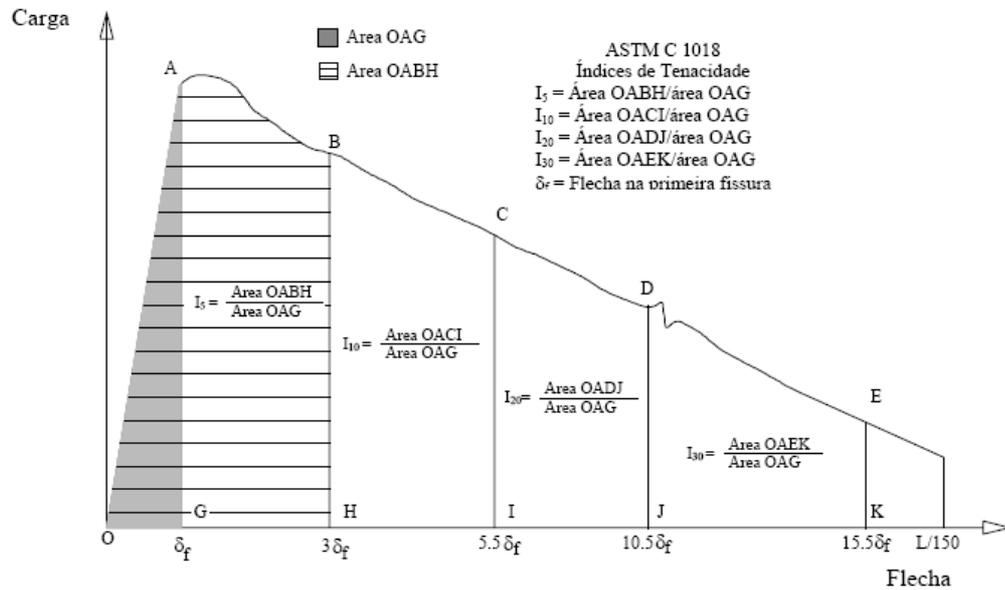
**FIGURA 2.10** – Posicionamento de corpo-de-prova, LVDT e cutelos no ensaio de tração na flexão em quatro pontos com o sistema “yoke” (FIGUEIREDO, 2000)

### **Método da ASTM C1018**

Nesse método, a tenacidade à flexão é obtida em ensaio de flexão em quatro pontos, utilizando-se uma viga de dimensões padronizadas (largura “b” e altura “h” iguais a 100 ou 150 mm e vão de ensaio igual a 300 mm ou 450 mm), sendo numericamente calculada por uma razão entre áreas na curva carga-deslocamento. Para tanto, definem-se índices de tenacidade, relacionados a determinados pontos-limite de deslocamento vertical no meio do vão (flechas), múltiplos do deslocamento correspondente à primeira fissura.

O primeiro ponto de interesse é aquele em que a curva carga-deslocamento perde a sua linearidade (deslocamento  $\delta_f$  da figura 2.11), revelando o aparecimento da primeira fissura (textualmente, o método prescreve: “...*the point at which the curvature first increases sharply and the slope of the curve exhibits a definite change...*”).

Os demais pontos de interesse são aqueles correspondentes a deslocamentos padronizados ( $3\delta_f / 5,5\delta_f / 10,5\delta_f / 15,5\delta_f / 25,5\delta_f$ ), definindo, assim, os respectivos índices de tenacidade  $I_a$  ( $I_5 / I_{10} / I_{20} / I_{30} / I_{50}$ ), em destaque na figura 2.11. Simultaneamente, determinam-se os “Fatores Residuais de Resistência” ( $R_{b, a}$ ), que, em conjunto com os citados índices, permitem caracterizar a capacidade de absorção de energia do material.



**FIGURA 2.11** – Características da curva carga-deslocamento para obtenção dos índices de tenacidade à flexão segundo ASTM C1018 (RESENDE, 2003)

Os índices de tenacidade e os fatores residuais de resistência podem ser expressos, respectivamente, por:

$$I_a = \frac{\text{área sob a curva até um deslocamento "a"}}{\text{área sob a curva até o deslocamento correspondente à primeira fissura}} \quad (2.1)$$

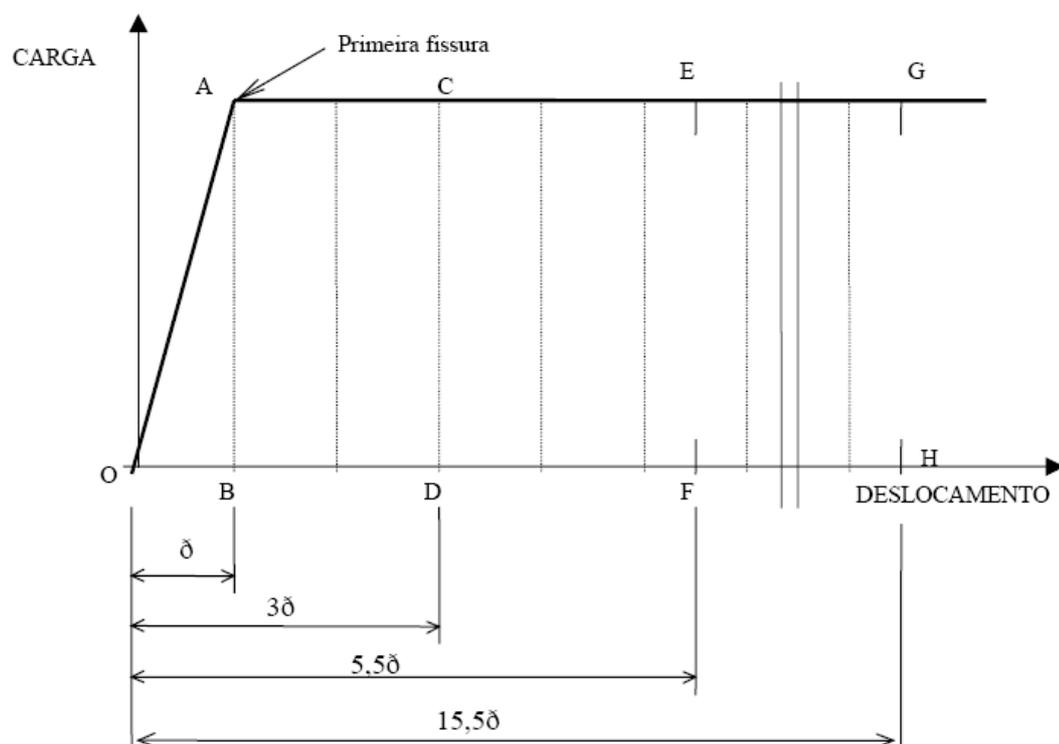
$$R_{b,a} = \frac{100}{b - a} \cdot (I_b - I_a) \quad (2.2)$$

onde  $I_a$  e  $I_b$  representam os índices de tenacidade com referências “a” e “b”, respectivamente, e  $R_{b,a}$  é o fator de resistência residual entre as referências “a” e “b”.

Em vista da definição dos índices de tenacidade, tem-se que os casos em que  $I_5 = 5$ ,  $I_{10} = 10$ ,  $I_{20} = 20$ ,  $I_{30} = 30$  e  $I_{50} = 50$  correspondem a um material elasto-plástico perfeito, apresentando, conseqüentemente fatores de resistência residual iguais a 100 (Figura 2.12).

Assim, para um determinado material em estudo, os valores adimensionais obtidos por meio dos índices de tenacidade permitem aferir o comportamento do material em relação à mencionada situação idealizada de comportamento elasto-plástico perfeito. Por outro lado, cabe ressaltar que o método apresenta como grande dificuldade a determinação do ponto em que se inicia a fissuração, que permite determinar o deslocamento  $\delta_f$ , referência para o cálculo de qualquer índice de tenacidade.

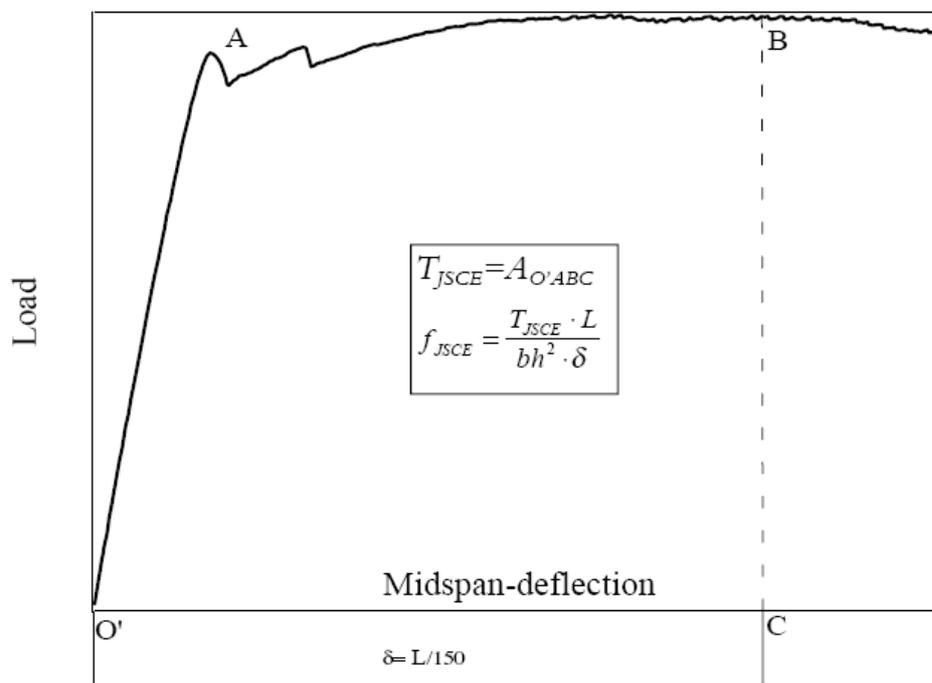
Cabe salientar que a avaliação da tenacidade baseada em índices de tenacidade pode ficar também prejudicada por problemas de instabilidade pós-pico, muito comuns em matrizes de concreto de elevada resistência e em teores de fibra muito baixos. Nesses casos, os dispositivos de medição de flechas podem ficar afetados pela súbita variação no campo de deslocamentos verticais, prejudicando o cômputo das áreas envolvidas no cálculo de índices de tenacidade, sobretudo nos casos dos índices iniciais ( $I_5$  e  $I_{10}$ , principalmente) (VILLARES, 2001).



**FIGURA 2.12** – Curva carga-deslocamento para material elasto-plástico perfeito segundo o método ASTM C1018 para avaliação da tenacidade à flexão (FIGUEIREDO, 2000)

### Método da JSCE-SF4

O método japonês para determinação da tenacidade à flexão também emprega o ensaio de viga padronizada de flexão (largura “b” e altura “h” iguais a 100 ou 150 mm e vão de ensaio igual a 300 mm ou 450 mm) com cargas aplicadas nos terços médios. Tem a particularidade de prescrever o cálculo do denominado “Fator de Tenacidade ( $f_{JSCE}$ )”. Esse fator tem como referência a área sob a curva carga-deslocamento até um deslocamento-limite (igual a 1/150 do vão de ensaio), conforme indicado na figura 2.13.



**FIGURA 2.13** – Características da curva carga-deslocamento para obtenção do Fator de Tenacidade segundo JSCE-SF4 (GROTH, 2000)

Assim, o Fator de Tenacidade pode ser expresso por:

$$f_{JSCE} = \frac{T_{JSCE}}{\delta_{JSCE}} \cdot \frac{L}{b \cdot h^2} \quad (2.3)$$

onde  $T_{JSCE}$  é a área sob a curva carga-deslocamento até o deslocamento limite ( $\delta_{JSCE} = \frac{L}{150} = \delta$  na figura anterior),  $L$  é o vão do ensaio (300 mm ou 450 mm),  $b$  e  $h$  são, respectivamente, a largura e a altura da viga padronizada (100 mm ou 150 mm).

Uma crítica recorrente a esse método é que o valor limite de deslocamento para cômputo da área de cálculo do fator de tenacidade (vão/150) supera os níveis de deslocamento de estruturas correntes (CUNHA, 2004).

### **Método da RILEM TC 162**

Conhecidas as deficiências dos principais métodos (ASTM C1018 e JSCE-SF4) para avaliação da tenacidade à flexão dos concretos reforçados com fibras (VILLARES, 2001; CUNHA, 2004), a RILEM houve por bem tentar corrigi-las. Para tanto, coube ao comitê técnico 162 da RILEM (“TECHNICAL COMMITTEE 162” – TC 162), dentre outras, a missão de estudar os métodos existentes e propor uma nova metodologia de ensaio para avaliação do comportamento à tração em flexão de concretos reforçados com fibras.

Após a versão inicial editada no ano 2000 (RILEM TC 162, 2000), o TC 162 lançou sucessivas revisões da metodologia (RILEM TC 162, 2002a; RILEM TC 162, 2002b), culminando com as recomendações finais apresentadas em RILEM TC 162, 2003.

Em linhas gerais, o novo método tenta evitar a dependência da geometria do corpo de prova presente no método japonês, procurando eliminar também a dificuldade de determinação do deslocamento correspondente à primeira fissura presente no método americano. Em conseqüência, prescreve um ensaio padronizado de flexão em três pontos em viga entalhada, conforme se apresenta a seguir.

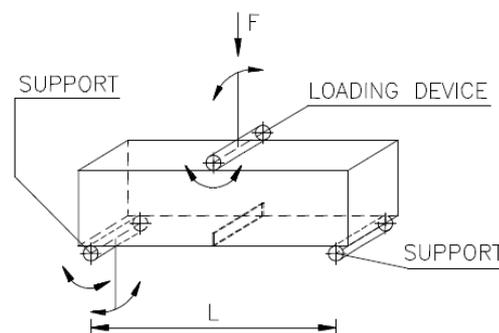
O comportamento em flexão é avaliado a partir de parâmetros que relacionam níveis de carga e deslocamento prescritos, que não dependem da localização do início da fissuração tampouco da geometria dos corpos-de-prova. Além disso, tem-se a possibilidade de tais parâmetros serem utilizados na verificação de estados limites de serviço e último.

A nova metodologia da RILEM pode ser considerada uma evolução de um método proposto por BANTHIA e TROTTIER (1995), que introduziram o conceito de “resistência pós-fissuração” (“*Post-Crack Strength*” - PCS). Nessa proposição, os autores empregaram a padronização do ensaio japonês (JSCE-SF4), calculando a energia absorvida até determinado deslocamento, trazendo como inovação a desconsideração da parcela de energia absorvida antes do início da fissuração. Adicionalmente, estabeleceram diversos limites de deslocamento objetivando o cômputo de parcelas de energia compatíveis com exigências relacionadas a estados limites de serviço de interesse à análise estrutural.

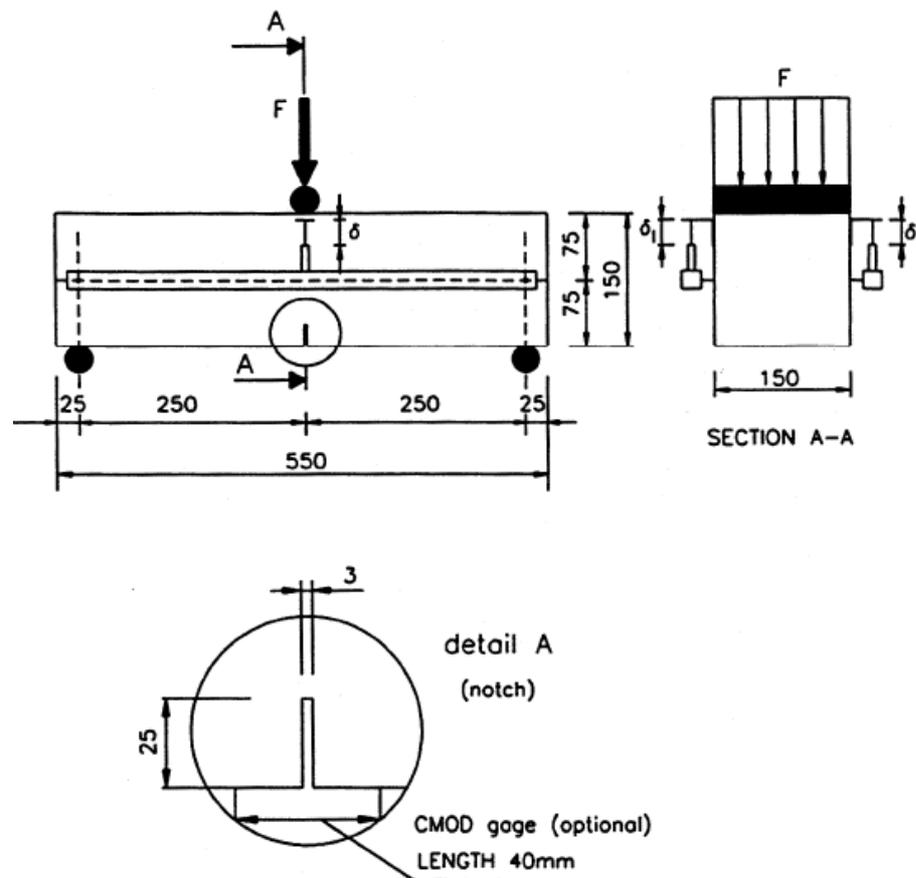
O ensaio da RILEM preconiza a ação de uma carga centrada (“center-point loading” ou “three-point bending”) em uma viga de dimensões padronizadas (150 mm x 150 mm x 500 mm), com um entalhe na metade do vão, na face inferior da viga, medindo 25 mm x 3 mm (Figuras 2.14 a 2.16).



**Figura 2.14** – Esquema do ensaio de viga entalhada da RILEM – TC 162 (BARRAGÁN, 2002)



**Figura 2.15** – Esquema do ensaio de viga entalhada da RILEM – TC 162 (BARR e LEE, 2002)



**FIGURA 2.16** – Tipologia do ensaio de viga entalhada padronizado pela RILEM (TC 162) para avaliação da tenacidade à flexão de concretos reforçados com fibras (STANG *et al.*, 2000)

A sugestão do emprego de prismas entalhados em substituição a corpos-de-prova sem entalhes já vinha sendo apresentada há bom tempo em estudos da RILEM para ensaios em vigas entalhadas (RILEM 50-FMC, 1985). BARROS (1995) e ARAÚJO, D. (2002) realizaram ensaios em vigas entalhadas ainda sob as orientações iniciais contidas nesses estudos, já tendo encontrado evidências satisfatórias da eficiência da metodologia de viga entalhada.

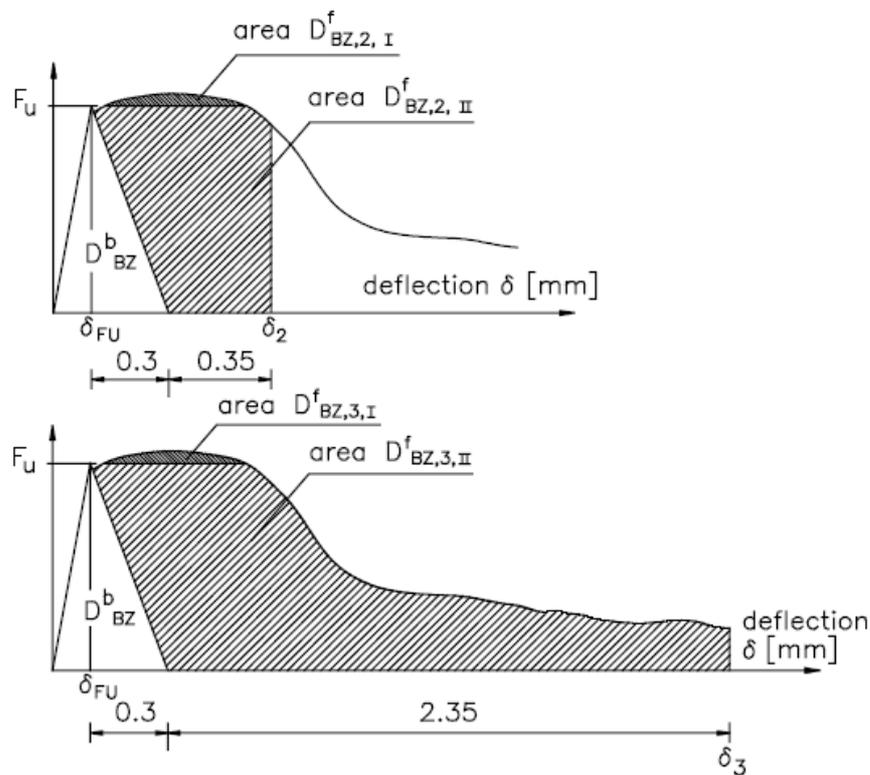
DUPONT (2003) considera que, inicialmente, o ensaio de viga entalhada da RILEM pode demandar custos mais elevados que os do ensaio em viga não-entalhada (flexão em quatro pontos), em vista das operações necessárias à execução do citado

entalhe. Entretanto, para baixos teores de fibras, esse autor afirma que o ensaio de quatro pontos conduz a um processo de fissuração muitas vezes instável, levando à desconsideração dos seus resultados e, conseqüentemente, onerando os seus custos. Por outro lado, em ensaios de três pontos, o processo de fissuração mais estável dificilmente descarta os resultados obtidos, tornando esses ensaios, em geral, mais econômicos.

Tendo como referência o ensaio padronizado em três pontos descrito anteriormente, a RILEM disponibilizou dois métodos para avaliação do comportamento em flexão do CRFA: Método das Resistências Equivalentes e Método das Resistências Residuais, os quais são apresentados a seguir.

. Método das Resistências Equivalentes (RILEM TC 162, 2000):

Em uma primeira versão da metodologia para avaliação do comportamento em flexão, a RILEM estabeleceu o chamado “método 1”, baseando-se em “resistências equivalentes” ( $f_{eq}$ ). Nesse método, a partir do traçado da curva carga-deslocamento, são obtidas as resistências equivalentes  $f_{eq, 2}$  e  $f_{eq, 3}$ . A resistência  $f_{eq, 2}$  corresponde à parcela de energia absorvida até o deslocamento  $\delta_2$  (área  $D_{BZ, 2}^f = \text{área } D_{BZ, 2, I}^f + \text{área } D_{BZ, 2, II}^f$  na figura 2.17) e a resistência  $f_{eq, 3}$  corresponde à parcela de energia absorvida até o deslocamento  $\delta_3$  (área  $D_{BZ, 3}^f = D_{BZ, 3, I}^f + D_{BZ, 3, II}^f$  na figura 2.17).



**FIGURA 2.17** – Parâmetros de caracterização da tenacidade à flexão segundo a metodologia de resistências equivalentes da RILEM TC 162 (VANDEWALLE e DUPONT, 2002)

Dessa curva, são extraídos os deslocamentos prescritos  $\delta_{FU}$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  e as respectivas forças  $F_U$ ,  $F_2$  e  $F_3$ . O par  $F_U - \delta_{FU}$  corresponde ao início da fissuração da matriz (não-linearidade) e os deslocamentos  $\delta_2$  e  $\delta_3$  são obtidos em função de  $\delta_{FU}$ , sendo dados por:

$$\delta_2 \text{ (mm)} = \delta_{FU} + 0,65 \quad (2.4)$$

$$\delta_3 \text{ (mm)} = \delta_{FU} + 2,65 \quad (2.5)$$

As correspondentes forças  $F_2$  e  $F_3$  são expressas por:

$$F_2 = \frac{\text{área } D_{BZ, 2, I}^f}{0,65} + \frac{\text{área } D_{BZ, 2, II}^f}{0,50} \quad (2.6)$$

$$F_3 = \frac{\text{área } D_{BZ, 3, I}^f}{2,65} + \frac{\text{área } D_{BZ, 3, II}^f}{2,50} \quad (2.7)$$

Em seguida, são obtidas as tensões equivalente  $f_{eq, 2}$  e  $f_{eq, 3}$ :

$$f_{eq, 2} = \frac{3}{2} \cdot F_2 \cdot \frac{L}{b \cdot h_{sp}^2} \quad (2.8)$$

$$f_{eq, 3} = \frac{3}{2} \cdot F_3 \cdot \frac{L}{b \cdot h_{sp}^2} \quad (2.9)$$

ou seja,

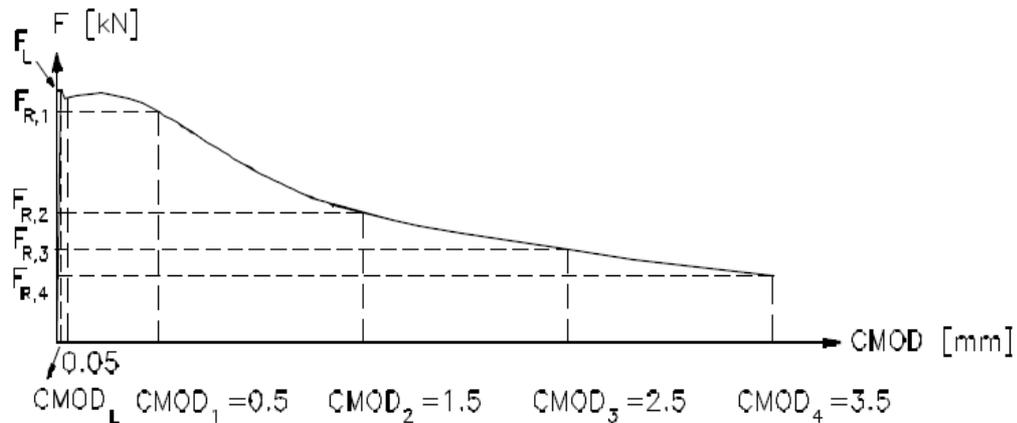
$$f_{eq, 2} = \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{\text{área } D_{BZ, 2, I}^f}{0,65} + \frac{\text{área } D_{BZ, 2, II}^f}{0,50} \right) \cdot \frac{L}{b \cdot h_{sp}^2} \quad (2.10)$$

$$f_{eq, 3} = \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{\text{área } D_{BZ, 3, I}^f}{2,65} + \frac{\text{área } D_{BZ, 3, II}^f}{2,50} \right) \cdot \frac{L}{b \cdot h_{sp}^2} \quad (2.11)$$

onde  $L$  é o vão do ensaio (500 mm),  $b$  e  $h_{sp}$  são, respectivamente, a largura e a altura da viga na seção acima do entalhe.

. Método das Resistências Residuais (RILEM TC 162, 2003):

Recentemente, por meio do chamado “método 2”, a RILEM adotou o conceito de “resistência residual” ( $f_R$ ). Por intermédio dos parâmetros  $f_{R,1}$  e  $f_{R,4}$  mostrados a seguir, caracteriza-se uma lei constitutiva ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) que governa o comportamento do material em flexão.



**FIGURA 2.18** – Parâmetros de caracterização da tenacidade à flexão segundo a metodologia de resistências residuais da RILEM TC 162 (VANDEWALLE e DUPONT, 2002)

As resistências residuais  $f_{R,1}$  e  $f_{R,4}$  são obtidas a partir de forças residuais  $F_{R,1}$  e  $F_{R,4}$ , respectivamente, em função dos correspondentes deslocamentos prescritos  $\delta_{R,1}$  e  $\delta_{R,4}$  no meio do vão. Tais deslocamentos são extraídos diretamente da curva carga-deslocamento, tendo valores pré-estabelecidos, que, segundo VANDEWALLE e DUPONT (2002b), guardam correspondência com os valores da abertura do entalhe (CMOD – “*crack-mouth opening displacement*” - Figuras 2.16 e 2.18), conforme indicado na tabela 2.4.

**TABELA 2.4:** Valores de abertura do entalhe (CMOD) e deslocamento vertical ( $\delta_i$ ) para cálculo das resistências residuais  $f_{R,1}$  e  $f_{R,4}$  (VANDEWALLE e DUPONT, 2002b)

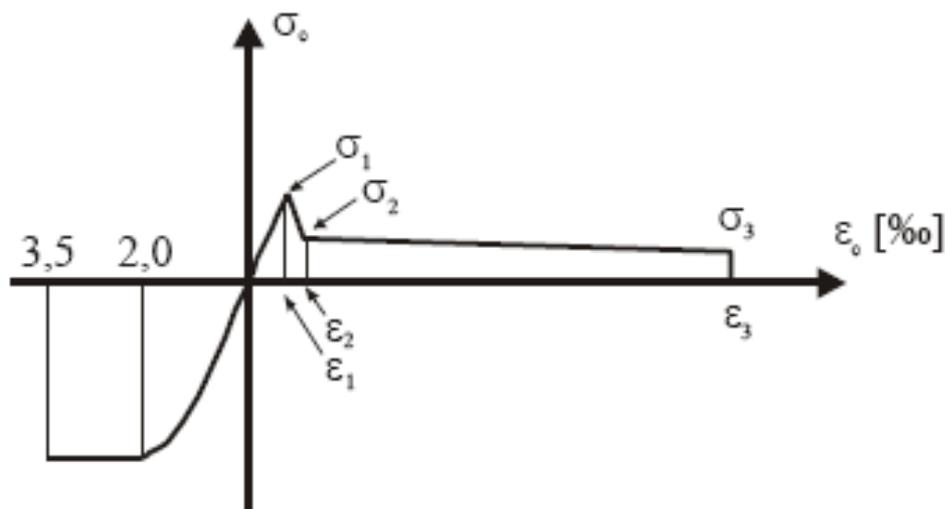
$f_{R,i}$ (N/mm <sup>2</sup> )	CMOD <sub>i</sub> (mm)	$\delta_i$ (mm)
$f_{R,1}$	0,50	0,46
$f_{R,4}$	3,50	3,00

Dessa forma, as resistências residuais são calculadas por:

$$f_{R,1} = \frac{3}{2} \cdot F_{R,1} \cdot \frac{L}{b \cdot h_{sp}^2} \quad (2.12)$$

$$f_{R,4} = \frac{3}{2} \cdot F_{R,4} \cdot \frac{L}{b \cdot h_{sp}^2} \quad (2.13)$$

De posse das resistências  $f_{R,1}$  e  $f_{R,4}$ , a lei constitutiva proposta pela RILEM TC 162 para avaliar o comportamento em flexão do concreto com fibras de aço fica estabelecida, tendo como referência o diagrama tensão-deformação a seguir.



**FIGURA 2.19** – Diagrama tensão-deformação em flexão segundo a metodologia RILEM TC 162 (VANDEWALLE e DUPONT, 2002b)

Nesse diagrama, o comportamento do material em compressão é expresso em termos de um diagrama parábola-retângulo, com deformação-limite a 3,5 ‰. Na tração, o comportamento do material é representado por três trechos lineares, formando um diagrama trilinear, definido pelos pares *tensão x deformação*  $(\sigma_1, \varepsilon_1)$ ,  $(\sigma_2, \varepsilon_2)$  e  $(\sigma_3, \varepsilon_3)$ . Esses pares são calculados pelas seguintes expressões:

$$\sigma_1 = 0,7 \cdot f_{ctm,fl} \cdot (1,6 - d) \quad (2.14)$$

(sendo “d” medida em metros e o fator (1,6 – d) considerado apenas nos casos de viga com armadura discreta).

$$\sigma_2 = 0,45 \times f_{R,1} \times k_h \quad (2.15)$$

$$\sigma_3 = 0,37 \times f_{R,4} \times k_h \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_c} \quad (2.17)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + 0,1 \text{ ‰} \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_3 = 25,0 \text{ ‰} \quad (2.19)$$

onde

$f_{ctm,fl}$  é a resistência à tração média na flexão do concreto

$f_{R,1}$  é a resistência residual determinada no ensaio padronizado de flexão (RILEM TC 162) correspondente a um deslocamento vertical  $\delta_i$  de 0,46 mm

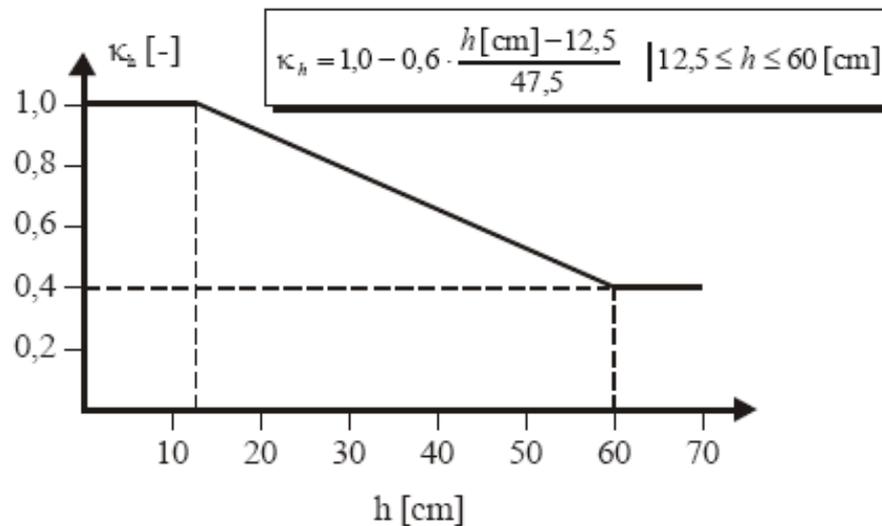
$f_{R,4}$  é a resistência residual determinada no ensaio padronizado de flexão (RILEM TC 162) correspondente a um deslocamento vertical  $\delta_i$  de 3,00 mm

$k_h$  representa uma ponderação relacionada a variações em função do tamanho da viga (“fator de tamanho”), conforme a figura **2.20**

$E_c$  é o módulo de elasticidade longitudinal do concreto

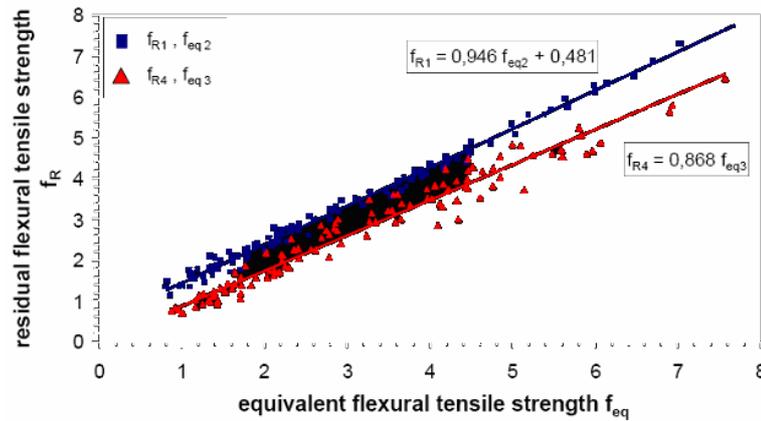
$h$  é a altura total da viga (em centímetros; figura **2.20**)

$d$  é a altura útil da viga (em metros)

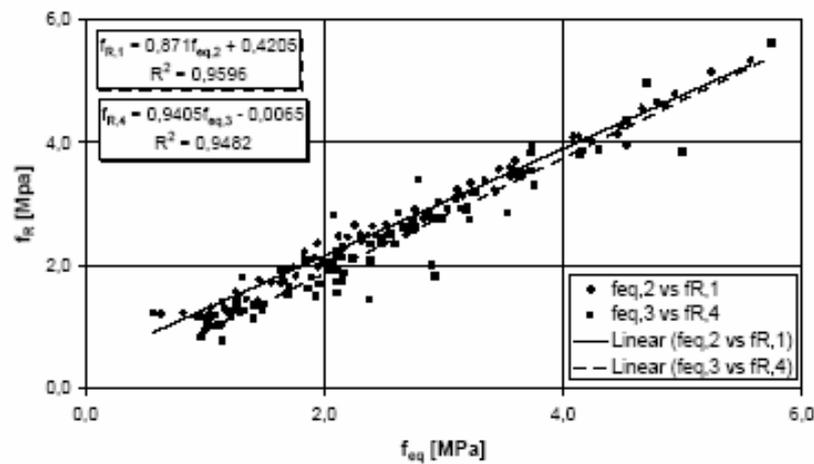


**FIGURA 2.20** – Fator de tamanho empregado no método das resistências residuais segundo a metodologia RILEM TC 162 (VANDEWALLE e DUPONT, 2002b)

Segundo VANDEWALLE e DUPONT (2002b), ambos os métodos apresentados (método 1 e método 2) podem ser usados para caracterizar o comportamento pós-fissuração do concreto com fibras. As boas correlações entre resistências equivalentes ( $f_{eq}$ ) e resistências residuais ( $f_R$ ) apontadas por esses pesquisadores (Figura 2.21) confirmam essa possibilidade, o que foi também corroborado por BARROS *et al.* (2003) (Figura 2.22). Por outro lado, após extensivas pesquisas realizadas no âmbito do consórcio que desenvolveu o projeto “Brite-EuRam” (“European Community under the Industrial & Materials Technologies Programme”), esses autores afirmam que o citado consórcio recomenda o uso do método 2 (resistências residuais). Assim, neste trabalho, optou-se pelo método das resistências residuais para modelagem do comportamento em flexão do concreto com fibras de aço.



**FIGURA 2.21** – Relação entre resistências equivalentes ( $f_{eq}$ ) e resistências residuais ( $f_R$ ) obtidas por VANDEWALLE e DUPONT (2002b)



**FIGURA 2.22** – relação entre resistências equivalentes ( $f_{eq}$ ) e resistências residuais ( $f_R$ ) obtidas por BARROS *et al.* (2003).

## 2.6 Aplicações do Concreto com Fibras Curtas de Aço

O notável desenvolvimento do concreto com fibras tem feito com que o concreto armado convencional ceda cada vez mais espaço para esse material (VODRAN, 1991; BARROS e FIGUEIRAS, 1999; FIGUEIREDO, 2000; CHAUDHARI, 2003).

Conforme se mostrou nos tópicos anteriores, os concretos reforçados com fibras de aço modificam o comportamento do concreto convencional, de forma que os ganhos de desempenho não podem ser negligenciados. Em consequência, diversas aplicações para esse tipo de material têm surgido nos últimos anos.

Dentre as aplicações usuais para o concreto reforçado com fibras de aço, destacam-se:

- . lajes apoiadas no solo;
- . pisos industriais;
- . pistas de aeroportos e rodovias;
- . estruturas hidráulicas;
- . taludes e maciços estabilizados;
- . estruturas militares;
- . estruturas resistentes a ações sísmicas;
- . estruturas de concreto refratário;
- . estruturas pré-moldadas;
- . estruturas com reforço secundário de armaduras de flexão;
- . estruturas com substituição parcial de armaduras de cisalhamento;
- . estruturas com substituição de armaduras de “pele”;
- . tubos de concreto para esgotos e águas pluviais;
- . superestrutura ferroviária (dormentes);
- . cascas de parede fina;
- . tanques e piscinas;
- . bases de máquinas;
- . reparos de estruturas.

VILLARES (2001) afirma que, em 2001, cerca de 70 % do mercado mundial de fibras metálicas estavam direcionados para aplicações em pisos industriais, 20 % voltavam-se para o uso em túneis e o restante se prestava para as demais aplicações.

Nos dias atuais, o emprego de técnicas específicas tem permitido que o concreto reforçado com fibras de aço seja utilizado como concreto projetado em camadas de grandes espessuras, aproveitando-se ainda a redução da permeabilidade do material.

Particularmente em túneis construídos com concretos projetados, FIGUEIREDO (2000) ressalta as seguintes vantagens do reforço com fibras de aço:

- . maior velocidade de execução;
- . possibilidade de aplicação do revestimento de concreto com fibras imediatamente após a escavação, diminuindo o risco de acidentes causados pela ruptura do maciço desestabilizado;
- . aumento da durabilidade do revestimento de concreto em consequência da redução das aberturas de fissuras (que seriam caminhos de entrada de agentes agressivos).

Paralelamente aos conhecidos avanços nas aplicações de fibras ao concreto, tem-se dado atenção ao desenvolvimento de materiais que se caracterizam por um desempenho ainda superior ao obtido em concretos reforçados com fibras nos padrões tradicionais. Trata-se dos concretos de alto desempenho reforçados com fibras, que combinam altos valores de resistência à tração com elevadas ductilidade e tenacidade.

Como exemplo de concreto de alto desempenho reforçado com fibras, citam-se os SIFCON (“*Slurry Infiltrated Fiber Concrete*”), os CRCC (“*Compact Reinforced Concrete Composite*”), o SIFCA (um tipo de SIFCON com propriedades refratárias) e o RPCC (“*Reactive Powder Concrete Composite*”). Esses materiais se caracterizam ainda por demandar teores bastante elevados de materiais finos e de fibras, sendo comum o emprego de superplastificantes na sua produção. Nesses casos, destacam-se também os

custos elevados de produção e os cuidados relativos à cura do concreto, o que sugere o emprego desses tipos especiais de concreto com fibras em aplicações específicas, como estruturas sujeitas a sismos, pilares muito altos, lajes de grandes vãos e regiões de ancoragem de cabos de protensão. Mais detalhes podem ser encontrados em FARIAS *et al.* (2000), em BRANDÃO (2005) e em NUNES (2006).

## **2.7 Evolução dos Modelos de Análise para Concreto com Fibras Curtas de Aço**

O uso de fibras como elemento de reforço estrutural vem sendo investigado com vistas à modelagem do comportamento do CRFA principalmente em razão das boas correlações encontradas entre as primeiras análises teóricas desenvolvidas e os resultados experimentais obtidos (ACI 544.4R-88, 2000).

Apesar da vasta gama de pesquisas que demonstram as vantagens da utilização do concreto com fibras de aço, pode-se verificar que os modelos existentes para análise do comportamento estrutural desse material carecem de mais aprofundamento teórico e conseqüente comprovação experimental.

Se, por um lado, os resultados experimentais existentes têm corroborado as vantagens do concreto com fibras curtas de aço, por outro lado, verifica-se uma escassez de modelos numéricos que descrevam a resposta do material de forma segura e inequívoca, seja em tração, seja em compressão, seja em outros casos de sollicitação, principalmente, no tocante ao ganho em tenacidade (BARROS e FIGUEIRAS, 1999).

O ACI (ACI 544.4R-88, 2000) destaca, dentre outros, três campos de pesquisa a serem explorados:

(1) procedimentos racionais de projeto para incorporação das propriedades das fibras metálicas em elementos estruturais, visando sua adoção nas normas de dimensionamento;

(2) modelos numéricos para análise de estruturas de concreto reforçado com fibras de aço submetidas a diferentes estados de tensão e deformação;

(3) modelos para análise da degradação da rigidez de estruturas de concreto com fibras.

Como apresentado anteriormente, expressões empíricas têm sido propostas para descrever o comportamento do concreto com fibras metálicas perante os variados tipos de sollicitação. Entretanto, tais expressões nem sempre conseguem representar o comportamento geral e irrestrito do concreto reforçado com fibras de aço, principalmente no tocante ao estágio pós-fissuração.

Há também outra justificativa para a necessidade do desenvolvimento da modelagem do comportamento do CRFA. Ela reside no fato de que as bases de cálculo de estruturas feitas com esse material ainda não estão incorporadas a um grande número de normas existentes (ACI 544.4R-88, 2000), embora alguns estudos tenham lançado as idéias iniciais sobre o assunto visando descrever o comportamento do concreto com fibras perante diferentes tipos de sollicitação (BEKAERT, 1995; CHANVILLARD, 1998; GETTU *et al.*, 2000; STANG e OLESEN, 2000; SILFWERBRAND, 2000).

Diante do exposto na revisão da literatura, verifica-se que alguns trabalhos têm sido desenvolvidos visando elaborar um modelo para análise do comportamento do concreto com fibras de aço nas mais diversas situações (NATARAJA *et al.*, 1988; SOROUSHIAN e LEE, 1989; HSU e HSU, 1994; PARAMASIVAM *et al.*, 1995; SIMÕES, 1998; ROSSI, 1994; BARROS, 1995; ROSSI, 1999; BARROS e FIGUEIRAS, 1999; NOGHABAI, 2000; BARROS e GOUVEIA, 2000; DBV, 2001; RILEM TC 162, 2003).

A leitura de trabalhos realizados por pesquisadores de diferentes países fornece um panorama acerca do que vem sendo desenvolvido no campo da modelagem do concreto com fibras curtas de aço. Pode-se verificar que, nos primeiros modelos, em geral, objetivava-se propor expressões analíticas para representar o comportamento do material em compressão ou em tração, que eram as características que, inicialmente, dominavam as pesquisas.

Conforme já citado, durante um bom tempo, um dos aspectos que despertaram interesse na modelagem do concreto reforçado com fibras curtas de aço foi a consideração dos possíveis ganhos de resistência à tração no concreto, em função das propriedades desenvolvidas pela matriz reforçada com fibras. Em consequência disso, muitos modelos de análise foram calcados em formulações essencialmente empíricas que, apesar de conduzirem a resultados satisfatórios, devem, no presente momento, ser criteriosamente avaliadas em virtude das circunstâncias particulares em que foram desenvolvidas. Atualmente, sabe-se que essa característica nem sempre é a que norteia o emprego do CRFA nas aplicações correntes.

Para estruturas submetidas à flexão, pesquisas foram realizadas tendo-se em conta as recomendações de que as fibras deveriam ser empregadas em conjunto com a armadura convencional composta de barras discretas (ACI 544.4R-88, 2000). Assim, havia um certo interesse de se procurar ganhos exclusivos na resistência à flexão do material. Durante um certo tempo, por falta de um modelo teórico coerente para o CRFA e pela despreocupação com os possíveis ganhos no estágio pós-fissurado do material, acabou-se por desenvolver soluções mais simples, como a de se considerar que a capacidade resistente à flexão seria integralmente desenvolvida pelas barras, ficando as fibras com uma parcela “extra” da capacidade resistente em flexão, não-mensurável naquele momento, embora existente. Essa solução, ainda que conservadora, estaria baseada na possível não-uniformidade da distribuição das fibras no concreto, o que poderia ocasionar áreas críticas de escassez de fibras na mistura, nas quais a redução da resistência do material comprometeria o desempenho final da estrutura.

Atualmente, sabe-se que as fibras de aço podem ter um papel muito mais importante do que aquele previsto nas pesquisas iniciais, como o de garantir uma melhor distribuição da fissuração e o de propiciar um comportamento pseudodúctil após a fissuração. Dessa forma, passa a haver, então, uma demanda maior por modelos mais apurados de análise estrutural.

Para lajes apoiadas no solo, pavimentos, revestimentos de pisos e de túneis, a provável melhora no comportamento pós-fissuração ocasionada pela adição de fibras deve ser considerada a fim de reduzir os custos dos elementos estruturais. Por esse motivo, lajes apoiadas no solo têm se mostrado uma das aplicações vantajosas do concreto reforçado com fibras de aço, permitindo-se encontrar exemplos de estruturas desse tipo em diversos países.

A análise dos trabalhos iniciais voltados para a modelagem do comportamento do concreto com fibras curtas de aço revelou dois fatos:

(1) as formulações teóricas introduzidas pelos modelos iniciais para análise do CRFA estão fortemente vinculadas às peculiaridades do material experimentado, seja a matriz de concreto, seja a fibra utilizada, estando também relacionadas às propriedades mecânicas de interesse (resistência à compressão, resistência à tração, fadiga etc.);

(2) muitas das formulações teóricas inicialmente propostas pelos pesquisadores deixavam de avaliar aquela que é uma das maiores vantagens dos concretos reforçados com fibras de aço (para muitos, a maior), que é o ganho na capacidade de absorção de energia após a fissuração.

Em razão do exposto, encontra-se uma sensível lacuna na modelagem numérica do comportamento do CRFA em função do ganho em tenacidade à flexão desse material. A ausência de um modelo unificado e universalmente aceito para avaliação desse ganho reforça a tese de que estudos mais aprofundados são necessários.

Paralelamente, embora a grande maioria das aplicações do CRFA esteja voltada a fenômenos envolvendo solicitações de flexão, a ausência de uma metodologia confiável para avaliação e mensuração da capacidade de absorção de energia em flexão desestimula a ampla utilização do CRFA nas aplicações correntes.

Nesse sentido, DUPONT (2003) afirma que a principal razão pela qual o CRFA ainda não é largamente utilizado em elementos estruturais correntes (vigas e pilares) consiste na carência de uma metodologia de projeto confiável e de ampla aceitação.

Em vista do que consta na introdução deste trabalho, acrescido do que foi apresentado neste tópico, optou-se por investigar a modelagem numérica do ganho em tenacidade à flexão obtido com a adição de fibras curtas de aço ao concreto, de forma a avaliar os modelos existentes e, caso necessário, propor modificações, estabelecendo os passos iniciais para uma futura proposta de normalização do comportamento estrutural do CRFA.

Antes, porém, para melhor balizar o detalhamento do modelo implementado no código computacional desenvolvido, convém traçar um panorama das principais estratégias de modelagem de estruturas de CRFA, ainda que não especificamente voltadas para modelos para avaliação da tenacidade do CRFA. Em seguida, serão apresentadas as bases do modelo para avaliação da tenacidade em flexão do CRFA, visando detalhar os aspectos relacionados à implementação computacional.

### 2.7.1 Primeiros Modelos

As formulações numéricas iniciais para modelagem do CRFA se mostravam muito particularizadas, nem sempre voltadas para o melhor aproveitamento dos benefícios do CRFA. Tais formulações estariam fortemente atreladas às peculiaridades da pesquisa então desenvolvida e, em grande parte dos casos, negligenciavam a substancial contribuição das fibras no desempenho da matriz pós-fissurada, traduzida

em capacidade de absorção de energia, principalmente em flexão. Tal fato pode ser confirmado a seguir nas descrições de algumas pesquisas desenvolvidas.

SHAH e RANGAN (1971) realizaram um estudo teórico-experimental de concretos e argamassas reforçados com fibras de aço. Para tanto, fizeram ensaios de flexão, tração e compressão com diferentes volumes, comprimentos, orientações e tipos de fibras. Em consequência, expuseram algumas considerações a respeito do efeito da adição de fibras no concreto. O comprimento e a orientação das fibras e o aspecto da curva tensão-deformação têm influência na resistência do concreto pós-fissuração, sendo que uma orientação aleatória e um pequeno comprimento das fibras tendem a reduzir o seu desempenho. Segundo eles, as fibras têm pouca influência no valor da carga de fissuração, exceto para grandes quantidades de fibras. Por fim, sugeriram que a influência das fibras fosse estudada a partir de um modelo que considerasse o concreto como um material compósito, sendo a fibra um de seus constituintes. Urge salientar que esses autores já alertavam para a importância da curva tensão-deformação do CRFA pós-fissurado na modelagem do CRFA, ressaltando a influência marginal das fibras na carga de fissuração, o que acabou por ser comprovado nos ensaios dos autores e nos testes de caracterização e de validação do modelo implementado nesta pesquisa.

MANSUR e PARAMASIVAM (1985) apresentaram resultados de seus ensaios de vigas retangulares de concreto com adição de fibras de aço do tipo “hooked-ended” (extremidades em gancho) para avaliar o efeito combinado de torção, flexão e cisalhamento, a partir dos quais tiraram algumas conclusões. Valendo-se de um modelo proposto anteriormente por Mansur para flexo-torção, os autores sugeriram novas equações que levassem em conta também os efeitos do cisalhamento, tendo obtido boas correlações com os resultados experimentais.

NATARAJA *et al.* (1988) elaboraram um modelo analítico para representação dos ramos ascendente e descendente da curva tensão-deformação na compressão de concretos (30 a 50 MPa) com fibras. Tais concretos foram reforçados com diversos teores de fibras de aço onduladas de diferentes relações de aspecto (relação comprimento/diâmetro da fibra). As expressões foram baseadas nas equações de

CARREIRA e CHU (1985) para o concreto convencional, modificando-se um parâmetro relacionado à forma do diagrama tensão-deformação. Os autores obtiveram bons resultados nas correlações feitas entre valores experimentais e aqueles obtidos a partir das expressões propostas.

EZELDIN e HSU (1992) elaboraram um algoritmo computacional para análise da contribuição das fibras de aço na flexão e no cisalhamento de vigas de concreto. Os autores propuseram uma estratégia de otimização do custo de um elemento de CRFA, empregando, na função de custo a otimizar, a variável “índice de reforço”, relacionada a características da fibra (comprimento, diâmetro e teor).

HSU e HSU (1994) propuseram um conjunto de relações empíricas para representar o comportamento à compressão de concretos de resistências elevadas (acima de 70 MPa) reforçados com fibras de aço. Os autores definiram parâmetros do material a serem pesquisados a partir de resultados experimentais e, adotando como ponto de partida as equações sugeridas por CARREIRA e CHU (1985) para o concreto convencional, apresentaram as expressões a seguir, que representam a curva tensão( $f_c$ )-deformação( $\varepsilon$ ) na compressão do material:

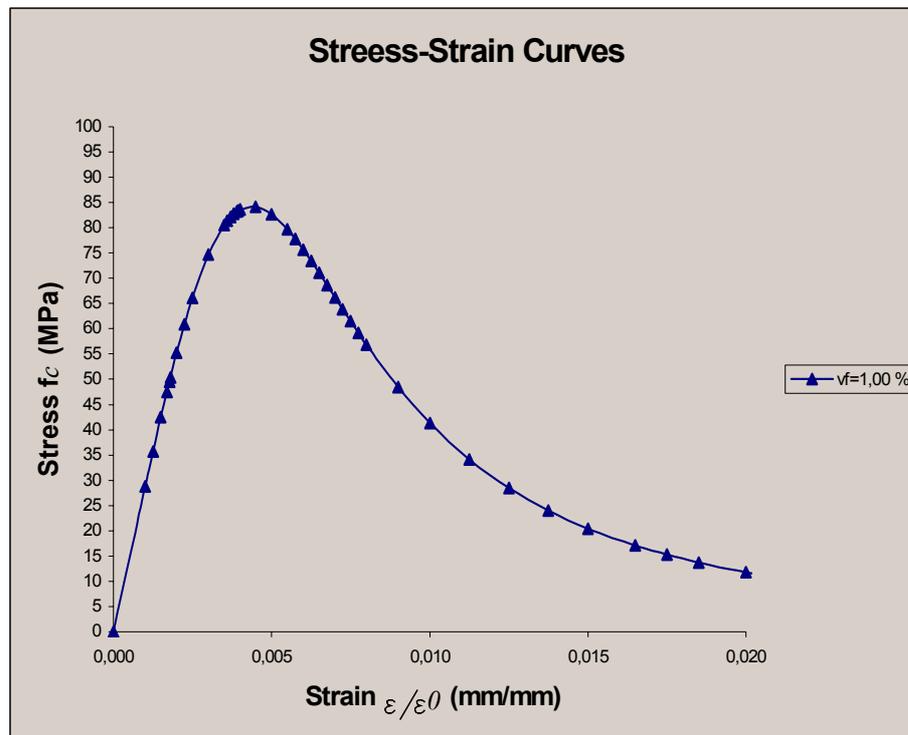
$$\eta = \frac{n\beta x}{n\beta - 1 + x \quad n\beta} \quad (2.20)$$

onde

$$\eta = \frac{f_c}{f_c'} \quad (2.21)$$

$$x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad (2.22)$$

sendo  $\beta$  e  $n$  parâmetros relativos ao material (em função do volume de fibras  $V_f$  e da forma do diagrama tensão-deformação). O parâmetro  $f_c'$  representa a tensão máxima de compressão e  $\varepsilon_0$ , a deformação correspondente a essa tensão na curva da figura 2.23.



**FIGURA 2.23** – Curva tensão-deformação em compressão proposta por HSU e HSU (1994) para concreto com fibras de aço

PARAMASIVAM *et al.* (1995) propuseram relações constitutivas para representar o comportamento do concreto reforçado com fibras de aço à compressão e à tração, as quais foram empregadas em um estudo desenvolvido pelos autores para vigas de concreto, tendo obtido boas correlações teórico-experimentais.

SIMÕES (1998) apresentou um modelo constitutivo para concreto reforçado com fibras elaborado a partir de modificações em um modelo para concreto simples. O autor incorporou ao modelo original relações constitutivas uniaxiais (tensão-deformação) para representar as solicitações de tração e compressão e obteve bons resultados na simulação numérica do comportamento de uma viga de concreto armado reforçada com fibras metálicas.

PENG e MEYER (2000) e LI e LI (2001) procuraram definir um modelo de dano do material que pudesse ser empregado na análise do processo de deterioração da estrutura de concretos reforçados com fibras. Apresentaram relações constitutivas para o comportamento do material e descreveram o dano sofrido em consequência da degradação da rigidez do material.

Uma alternativa também disponível na modelagem do comportamento do CRFA é a consideração desse material como sendo um compósito (SHAH e RANGAN, 1971; LI e MOBASHER, 1998; GRIMALDI e LUCIANO, 2000; CHUANG *et al.*, 2001). Nesses trabalhos, os autores propuseram o estudo das propriedades do material a partir das propriedades dos seus constituintes, no caso, a matriz de concreto, as fibras e a interface fibra-matriz.

MACIEL (2001) realizou um estudo experimental de vigas de concreto armado reforçadas com diferentes tipos de fibras, inclusive fibras de aço. Em seu trabalho, o autor procurou avaliar o comportamento do material em flexão e em cisalhamento à luz de algumas normas de cálculo, apresentando como sugestão o desenvolvimento de modelos teóricos de análise do concreto de alto desempenho reforçado com fibras.

### 2.7.2 Modelos Mais Recentes

Nos últimos anos, pesquisas têm procurado aplicar, ao concreto com fibras, conceitos da Mecânica da Fratura desenvolvidos para os concretos convencionais (HILLERBORG *et al.*, 1976; BAŽANT, 1986; BAŽANT, 1992; SHAH *et al.*, 1995). Nesses trabalhos, considera-se que as energias necessárias para fissurar o material e para arrancar as fibras estão relacionadas às propriedades do concreto.

GROTH (2000) realizou um estudo teórico da fissuração, em baixas idades, de capas de revestimento aplicadas sobre substratos rígidos e de prismas sem restrições de retração, todos reforçados com CRFA. O autor conseguiu avaliar os efeitos da adição

das fibras na capacidade de redistribuição da fissuração no material, empregando, para tanto, um modelo de fissuração discreta da Mecânica da Fratura implementado por meio do Método dos Elementos Finitos.

FERREIRA (2002) realizou uma investigação teórico-experimental em concretos reforçados com fibras metálicas objetivando avaliar a resposta ao fraturamento de corpos-de-prova cilíndricos. O autor desenvolveu um modelo de análise baseado nos conceitos clássicos da Mecânica da Fratura que conseguiu oferecer boas respostas na representação do fraturamento no material.

Recentemente, a Associação Alemã de Concreto e Engenharia Civil (DBV, 2001) apresentou relações constitutivas para o comportamento do CRFA em flexão, adotando diagramas multilineares para a modelagem, o que já havia sido defendido por BARROS (1995). A formulação proposta (Figura 2.24) se assemelha àquela sugerida pelo comitê técnico 162 da RILEM (RILEM TC 162, 2003).

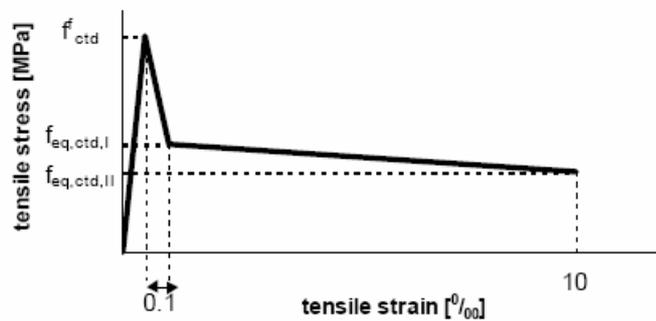


Figura 2.24 (a)

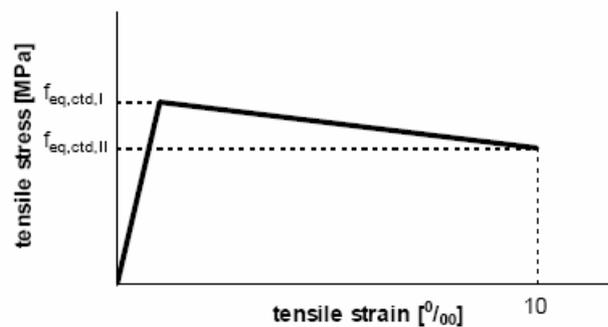


Figura 2.24 (b)

**FIGURA 2.24** – Parâmetros de caracterização da tenacidade à flexão do CRFA segundo a proposta alemã [(a): estado-limite de serviço (b): estado-limite último] (DBV, 2001)

O comitê técnico 162 da RILEM (TC 162), baseando-se em resultados experimentais obtidos anteriormente ao ano 2000 por diversos pesquisadores e amparando-se na experiência adquirida no âmbito do projeto “*Brite-EuRam*” (“*European Community under the Industrial & Materials Technologies Programme*”), também sugeriu o uso de diagramas multilineares, o que já havia sido proposto por outros pesquisadores (BARROS, 1995; DBV, 2001). Em 2003, a RILEM publicou as recomendações finais do trabalho daquele comitê (RILEM TC 162, 2003), nas quais figuram as relações constitutivas já detalhadas no item 2.5.5 desta tese.

Nos últimos anos, tem despertado interesse uma outra classe de modelos que admitem o concreto como inicialmente homogêneo e isotrópico se algumas condições forem atendidas, conduzindo também a bons resultados. Tais modelos são aplicáveis às análises de materiais como o concreto com fibras, permitindo que a chamada “Mecânica do Dano” possa explicar os fenômenos presentes nessa classe de modelos, cujas características são apresentadas a seguir.

### 2.7.3 Modelos Baseados na Mecânica do Dano

Por natureza, o concreto é um material heterogêneo, uma vez que ao menos duas fases distintas podem ser identificadas: fase agregado e fase pasta (matriz). Adicionalmente, em razão dos fenômenos de expansão e retração da matriz quando do processo de cura, pode-se admitir uma terceira fase formada ao redor dos grãos. Essa fase, comumente denominada “zona de transição”, se desenvolve em condições de ainda baixa resistência da matriz, dando margem à criação de vazios e defeitos de aderência. Assim, a existência de vazios na estrutura matricial ou mesmo a geração dos citados defeitos durante o processo de fabricação do concreto permitem afirmar que esse material sempre apresentará uma dada heterogeneidade. Tal fato conduz ao postulado da existência incontestável e irreversível de um certo dano inicial no material, representado pela porosidade da matriz e pela fragilidade da interface de fases (PITUBA, 2003).

Alguns conceitos da Mecânica do Dano auxiliam na análise do comportamento estrutural do concreto perante os fenômenos de deterioração existentes. A seguir, será discutida a essência da utilização dos conceitos da Mecânica do Dano na modelagem que se pretende realizar neste trabalho.

A Mecânica do Dano em meio contínuo teve origem em proposta de penalização da rigidez originalmente introduzida por KACHANOV em 1958. Segundo essa teoria, as equações constitutivas são escritas incluindo-se uma variável, a variável de dano, que

quantifica o processo de deterioração em uma etapa preliminar à formação das fissuras (ARAÚJO, F., 2003).

O conceito de dano em materiais está geralmente associado ao desenvolvimento de microfissuração na sua estrutura. Esse conceito foi inicialmente aplicado na análise de metais sob o regime de ruptura, que apresentavam defeitos na sua estrutura após estágios avançados de plastificação. No caso do concreto, esse conceito pode ser também aplicado, uma vez que se comprovou que o processo de danificação se desenvolve de forma contínua e logo nas primeiras idades. Em estágios mais avançados de deformação, a evolução das microfissuras iniciais dá origem a deformações de caráter permanente.

Em linhas gerais, os modelos de dano estabelecem que o material submetido a processos contínuos de danificação apresenta perdas progressivas de rigidez e de resistência. Com a evolução da chamada “Teoria do Dano”, os modelos atualmente podem ser divididos em dois grupos principais: modelos de dano escalar (isotrópicos ou ortotrópicos) e modelos de dano anisotrópico, a depender de a função de dano ser um escalar ou um tensor. Nesse contexto, a Mecânica do Dano pode ser encarada como uma valiosa ferramenta para a formulação de modelos constitutivos de materiais que apresentam defeitos intrínsecos, como é o caso do concreto.

Desse modo, sob a ótica da Mecânica do Dano, estabelece-se a premissa de que o modelo de dano deve ser capaz de representar as perdas de rigidez. Para o caso do concreto, isso deve ser feito admitindo-se, na curva que representa o comportamento tensão-deformação do material, a presença de um ramo de queda de tensões com aumento de deformações, usualmente conhecido como “softening” (amolecimento), evidenciando a degradação das propriedades do material.

Para o caso específico do concreto com fibras, a análise do estado pós-fissurado do concreto assume especial importância, em vista das sensíveis alterações no ramo de amolecimento após a introdução das fibras. Dessa forma, evidencia-se a relevância da

análise apurada da degradação das propriedades mecânicas do concreto com fibras sob as bases da Mecânica do Dano.

Uma vez convencidos da natureza heterogênea do material, é preciso avaliar como tratá-la para fins de modelagem do comportamento estrutural. De antemão, é necessário considerar não somente a existência do dano inicial, conforme discutido anteriormente, sendo importante também avaliar a evolução desse dano, ou seja, o processo de danificação.

Em um domínio discretizado numericamente, o processo de danificação é caracterizado pela existência de pontos do domínio cujas características diferem daquelas apresentadas pelos demais. Tal fato conduz a efeitos não-lineares na resposta da estrutura à aplicação das cargas.

Em que pese a heterogeneidade da matriz, pode-se aceitar, teoricamente, que a análise do comportamento do material parta do princípio da existência de uma certa homogeneidade inicial, admitindo-se que o material é elástico e isotrópico. Tal premissa pode ser garantida desde que as grandezas de interesse (tensão e deformação, por exemplo) sejam tomadas em um “volume representativo” do domínio. Isso equivale a dizer que as relações tensão-deformação são inicialmente fixadas em um espaço cujas dimensões são suficientemente superiores às dimensões dos defeitos presentes no estágio inicial da análise (PITANGUEIRA, 1998).

Essa premissa de se considerar o estado inicial de um material como homogêneo, elástico e isotrópico permite que se conheça, de antemão, a resposta inicial esperada de todo o domínio discretizado, forçando todos os pontos do domínio a, inicialmente, reagirem de forma idêntica à aplicação das cargas. Em consequência, é possível haver relações tensão-deformação pré-estabelecidas, tratadas, então, como uma propriedade do material. Tais relações são conhecidas como a “lei constitutiva” do material (ou o seu “modelo constitutivo”), sendo válidas desde que se garanta, inicialmente, que o meio é contínuo e homogêneo.

PROENÇA (2001) afirma que as dimensões de um elemento de “volume representativo” são grandes o suficiente para garantir a homogeneidade na distribuição de defeitos nele contidos, ao mesmo tempo em que são suficientemente pequenas para que se evitem gradientes elevados nas grandezas locais de interesse, como a deformação, por exemplo.

A garantia de um estado homogêneo, elástico e isotrópico nem sempre pode se manter válida durante toda a análise. Com a aplicação das cargas, em nível macroscópico, tende a se desenvolver um processo de deterioração da estrutura, traduzido em termos da ocorrência de danos em tração ou em compressão nas regiões mais solicitadas, criando, como dito anteriormente, fenômenos de “softening” no diagrama tensão-deformação. Isso equivale a dizer que, na prática, a garantia de um meio contínuo e homogêneo nem sempre é válida durante todo o processo de carregamento da estrutura.

PROENÇA (2001) ressalta que, ainda que a resposta global do material se mantenha sob o regime elástico e homogêneo, a existência de danos iniciais (conforme citado anteriormente) não impede que, macroscopicamente, a danificação influencie diretamente as propriedades elásticas. Isso acaba tendo consequência direta na redução da rigidez do material. Em estágios avançados de carregamento, esse processo de danificação pode levar, inclusive, à formação de novos defeitos.

De tudo que foi apresentado, pode-se inferir que é justamente a degradação da rigidez do material que precisa ser considerada, de sorte que a idealização inicial de um meio contínuo e homogêneo precisa ser reavaliada no decorrer da análise. Assim, a análise estrutural deve considerar fenômenos de degradação da rigidez estrutural em razão de processos de danificação do material, seja em tração, seja em compressão.

Numericamente, os fenômenos de degradação da rigidez podem ser avaliados a partir da implementação de um tratamento matemático adequado, existindo algumas propostas para se levar a efeito essa idéia. Para o caso do concreto com fibras de aço, a escolha da forma para representação da danificação do material, traduzida pelo ramo de

amolecimento da curva tensão-deformação, pode ter influência direta nos resultados obtidos, visto que esse ramo sofre significativa alteração em função da adição das fibras. No capítulo seguinte, algumas dessas formas de representação serão apresentadas, incluindo-se a do modelo trilinear, proposto neste trabalho e supostamente considerado mais adequado à simulação do comportamento do CRFA.

# 3

## IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MODELO TRILINEAR

### 3.1 Introdução

Para fins de representação do processo de danificação do CRFA citado no capítulo anterior, utilizou-se um código computacional disponível no meio acadêmico, aproveitando-se um conjunto existente de formas representativas da degradação da rigidez do concreto convencional. Para que tais formas pudessem também contemplar o caso do CRFA, aplicou-se uma estratégia de implementação de um novo modelo, do tipo trilinear.

A estratégia de implementação foi baseada no paradigma da Programação Orientada a Objetos (POO). Foram aproveitadas as características de expansão e de modularização presentes no código computacional disponível, desenvolvido na linguagem C<sup>++</sup>. Na implementação do modelo constitutivo trilinear para CRFA, a estratégia escolhida foi aplicada ao código computacional FEMOOP ("Finite Element Method Object Oriented Program"). Esse código foi inicialmente desenvolvido pelo

Departamento de Engenharia Civil da PUC–Rio (GUIMARÃES, 1992; MARTHA *et al.*, 1996) e vem sendo utilizado em pesquisas em algumas universidades brasileiras.

Durante esta pesquisa, o FEMOOP sofreu uma expansão a fim de contemplar relações constitutivas trilineares em tração, idealizadas para a modelagem do comportamento em flexão do CRFA. Em uma primeira etapa, partiu-se para uma estratégia de implementação de um modelo trilinear denominado *padrão* (MTP - **M**odelo **T**rilinear **P**adrão). Em seguida, foram feitas adaptações ao modelo padrão, as quais deram origem a uma segunda estratégia de modelagem, denominada modelo trilinear *modificado* (MTM - **M**odelo **T**rilinear **M**odificado). Em ambos os casos, foram feitas simulações computacionais de ensaios laboratoriais realizados por diferentes pesquisadores, tendo sido possível extrair algumas conclusões a partir dos resultados alcançados. Tais simulações e os respectivos resultados serão apresentados nos capítulos seguintes.

Em virtude da potencialidade do Método dos Elementos Finitos (MEF) para resolução de problemas de análise estrutural (LIU e STEVENS, 1992; AL-TAAN e EZZADEEN, 1992), considera-se que a adaptação do citado código computacional visando a análise de elementos de concreto reforçados com fibras de aço é uma opção adequada.

Anteriormente ao detalhamento da implementação do modelo no programa FEMOOP, faz-se necessária uma descrição de aspectos relevantes da análise não-linear via Método dos Elementos Finitos. Paralelamente, apresenta-se uma breve introdução aos conceitos básicos e à terminologia empregada em um ambiente de programação orientado a objetos, conjugando-os com as principais características do código computacional desenvolvido.

## 3.2 Análise Não-Linear pelo Método dos Elementos Finitos (MEF)

Na análise de problemas não-lineares tratados pela Mecânica das Estruturas, freqüentemente, lança-se mão de métodos que possibilitem representar numericamente as estruturas e os fenômenos associados à aplicação do carregamento externo. Tais métodos têm por objetivo oferecer soluções numéricas aproximadas, tanto quanto possível, das respostas exatas do problema contínuo. Nesse contexto, destaca-se o Método dos Elementos Finitos (MEF), cuja eficiência e aplicabilidade vêm sendo comprovada ao longo dos anos.

No MEF, a representação numérica do problema contínuo é feita, inicialmente, a partir da discretização do domínio em subdomínios, ditos elementos, cuja interface é constituída de nós, formando-se uma malha de elementos finitos. Submetendo-se a análise a um processo iterativo-incremental regulado por critérios de convergência, pode-se obter soluções aproximadas das soluções exatas. Estratégias relacionadas a refinamentos de malha, algoritmos de controle do processo iterativo-incremental, definição de graus de liberdade, tipos de elementos e outras podem ser aplicadas visando-se uma melhor aproximação da solução numérica.

Diante desse quadro, o Método dos Elementos Finitos pode ser empregado na análise de estruturas de relativa complexidade estrutural, seja pelas características peculiares da geometria (não-linearidade geométrica), seja pelas particularidades do material (não-linearidade física). Isso permite que o método seja aplicado eficientemente, por exemplo, em projetos de estruturas de pontes, edifícios muito altos, cascas de pequena espessura, arcos, materiais com relações constitutivas não-lineares, fenômenos de retração e fluência e outros.

Objetivando-se aproveitar essas potencialidades do Método dos Elementos Finitos, é conveniente que as bases desse método estejam inseridas em códigos computacionais que permitam um fácil e rápido aproveitamento dos seus recursos. Isso implica dizer que o código computacional escolhido deve permitir o máximo de reaproveitamento, minimizando o esforço computacional e voltando-o especificamente

para novas potencialidades a serem implementadas. Nesse prisma, é prudente escolher uma ferramenta computacional que contemple as vantagens do MEF, conjugadas com o acréscimo de novas funcionalidades sem que haja substancial alteração no código-fonte.

Nos dias de hoje, dispõe-se de uma gama de programas que tratam da não-linearidade do material ao mesmo tempo em que fazem uso do Método dos Elementos Finitos. Alguns desses programas disponibilizam uma série de recursos de análise, com apresentação de detalhados relatórios de resultados e avançadas interfaces gráficas, permitindo um melhor tratamento do fenômeno que se deseja estudar. A seguir, objetivando preparar o entendimento dos motivos que levaram à escolha do código computacional desenvolvido nesta pesquisa, apresenta-se um breve apanhado de alguns dos programas de análise disponíveis nos meios acadêmico e comercial no presente momento.

Entre os mais conhecidos, podem ser citados os programas FRANC2D, QUEBRA2D, FRANCD3D, ABAQUS, ANSYS e ADINA. Os dois primeiros tratam da modelagem de fenômenos em estado plano, ao passo que os demais se prestam também para casos de estruturas fora do plano (3D).

O programa FRANCD2D (CFG, 2007a) é voltado para a simulação da propagação de fissuras sob a ótica da Mecânica da Fratura, realizando uma análise de casos planos (Estado Plano de Tensão e de Deformação e Axissimétrico) via Método dos Elementos Finitos. Para trabalho em conjunto com esse programa, tem sido usual a utilização do pré-processador CASCA, embora outros pré-processadores de dados possam ser empregados. Segundo SOUZA (2001), o programa conduz a melhores resultados e menos problemas de processamento quando empregado o seu módulo de análises lineares, que é voltado para materiais de comportamento elástico, não fornecendo resultados apropriados para materiais como o concreto.

O QUEBRA2D (KANG, 2007) é um programa desenvolvido pelas equipes do Laboratório de Mecânica Computacional (LMC) da Escola Politécnica da USP e do Grupo de Tecnologia em Computação Gráfica (Tecgraf) da PUC-Rio. Permite análises

lineares e não-lineares e também cuida da análise estrutural a partir de fenômenos ligados ao fraturamento do material. Tem como característica uma interface mais amigável para entrada e saída de dados em relação àquela disponível no FRANC2D, tendo sido idealizado como natural substituto desse (SOUZA, 2001).

Apresentando-se como uma evolução em relação ao FRANC2D, o programa FRANC3D (CFG, 2007b) permite a simulação da propagação de fissuras em estruturas tridimensionais, apresentando algumas funcionalidades, como a discretização da malha de elementos e a modificação da geometria da estrutura para permitir a propagação da fissuração. O programa trabalha em conjunto com o modelador de geometria OSM (“Object Solid Modeler”), disponibilizando ainda ao usuário uma interface gráfica para avaliação de resultados da análise. Segundo SOUZA (2001), a principal característica do programa é a possibilidade de representação da propagação de fissuras arbitrárias não-planares, que podem ser internas, superficiais, em interfaces de materiais e em cruzamento com outras fissuras.

Na linha de programas comerciais, destacam-se o ABAQUS, o ANSYS e o ADINA. Esses programas permitem análises lineares e não-lineares para diversos tipos de materiais (concretos simples e armado, aço, rochas, solo, madeira, borracha e outros) e em estruturas planas e tridimensionais.

O ABAQUS (ABAQUS, Inc., 2007) permite análises lineares e não-lineares, via Método dos Elementos Finitos, para solução de problemas estáticos, dinâmicos e térmicos de estruturas em uma, duas ou três dimensões e para diferentes tipos de materiais, incluindo-se concretos simples e armado; para esses casos, o programa dispõe de dois modelos distintos para as análises, que são baseadas na Teoria da Plasticidade. Em se tratando de concreto simples, o programa adota um modelo que lida com carregamentos monotônicos. SOUZA (2001) afirma que tal modelo requer carregamentos monotônicos sob baixa pressão de confinamento (menor que cinco vezes a máxima tensão de compressão axial do concreto). Por outro lado, o modelo disponível para concreto armado agrega, ao modelo anterior, elementos de barra submetidos a deformações unidimensionais.

O ANSYS (ANSYS, Inc., 2007) se constitui em uma poderosa ferramenta computacional para aplicação na indústria de eletrônicos, automóveis, aeronaves, sistemas mecânicos e elétricos, engenharia de estruturas, mecânica dos fluidos e outras. Em vista dos recursos disponíveis para análises lineares e não-lineares para diversos tipos de materiais, inclusive o concreto, o programa tem boa aceitação no meio acadêmico. Na análise de estruturas de concreto, utiliza um modelo que permite avaliar o fraturamento do material a partir da visualização gráfica de regiões fissuradas em tração ou comprimidas em compressão. Esse modelo emprega um critério de ruptura baseado em tensões principais, levando-se em consideração uma superfície de ruptura pré-estabelecida.

O ADINA (ADINA R & D, 2007) é um sistema computacional que permite análises avançadas, pelo Método dos Elementos Finitos, para problemas estruturais, térmicos e de fluidos. Encontra-se disponível para plataformas Windows, UNIX e Linux, permitindo análises estáticas e dinâmicas, lineares e não-lineares, de estruturas em uma, duas ou três dimensões e para uma vasta gama de materiais, incluindo-se o concreto. O modelo empregado para concreto se baseia nas premissas de ruptura por tração e esmagamento em compressão. Segundo KHATRI e ANDERSON (1995), tal modelo se mostra vantajoso pela possibilidade de calibração do material em função de parâmetros de ductilidade e resistência, pela opção de simulação de estados multiaxiais de tensão, pela disponibilidade de uma gama variada de tipos de análise em um único programa e pelo mapeamento gráfico de elementos estruturais com possibilidade de fissuração. O programa permite ainda a adição de módulos complementares, que ampliam as possibilidades do pacote padrão do sistema.

### 3.3 Programação Orientada a Objetos (POO)

A compreensão da filosofia da Programação Orientada a Objetos (POO) passa necessariamente pelo entendimento de alguns conceitos básicos, dentre os quais merecem destaque a encapsulação e a herança (MONTENEGRO e PACHECO,1994).

Uma forma genérica de se entender o princípio da encapsulação é pensar em uma relação cliente-fornecedor, conforme descrito em seguida (MARTHA *et al.*, 1996). Suponha-se, por exemplo, um programa que esteja dividido em um módulo principal e vários módulos secundários. Os módulos secundários podem ser visualizados como fornecedores, ao passo que o módulo principal pode ser visto como um cliente.

Em um ambiente de programação convencional, a relação cliente-fornecedor é caracterizada por uma transferência de dados na qual ambas as partes têm conhecimento dos dados e das operações envolvidas. Isso implica que o cliente pode interferir na forma como cada operação é realizada, bastando executar uma determinada rotina (instrução) do fornecedor. Todavia, na POO, o cliente apenas decide qual operação será executada, mas não como será executada. Em consequência, o cliente deixa de ter acesso irrestrito aos dados, podendo-se dizer que esses dados estão, assim, protegidos (encapsulados). Além disso, o fornecedor passa a definir formas específicas (métodos) de acesso aos seus dados. Pode-se dizer, então, que o cliente interfere apenas em algoritmos (ações) globais. Por outro lado, o fornecedor pode manipular dados e métodos próprios, isto é, privados, sem ingerência do cliente.

Para compreender o conceito de herança, é preciso se inteirar dos significados de classe e objeto. Uma classe é uma categoria (grupo) de elementos que possuem os mesmos tipos de dados e métodos. Elementos de uma classe possuem características em comum mas são diferentes entre si, de modo que cada elemento de uma classe pode ser visto como um objeto, que vem a dar nome à filosofia da POO. Além disso, uma classe pode ser constituída de várias subclasses, que dela derivam, formando-se uma hierarquia do tipo classe-mãe e classe-filha. Essa hierarquia pode ser seletiva, uma vez que a classe derivada (classe-filha) poderá herdar todas ou apenas algumas

características da classe original (classe-mãe), assim como poderá redefinir alguns dos métodos herdados. Essas formas peculiares de relacionamento entre uma classe-mãe e uma classe-filha caracterizam o princípio da herança.

### 3.4 Fundamentos do Código Computacional FEMOOP

Em razão do que foi apresentado nos tópicos precedentes, seria conveniente que se pudesse aproveitar as potencialidades do MEF e da POO. Portanto, uma ferramenta numérico-computacional deveria contemplar simultaneamente essas potencialidades, permitindo que o foco da pesquisa se voltasse à modelagem do comportamento do material, no caso, o CRFA. Nesse contexto, a utilização do código computacional FEMOOP representou uma opção que comportava todas as citadas potencialidades.

A fim de materializar a implementação computacional do modelo trilinear segundo a filosofia da POO, foram aproveitadas as características de modularização e de facilidade de expansão presentes no código computacional FEMOOP. Em verdade, o FEMOOP constitui um esforço continuado de desenvolvimento de um programa de código aberto para análise de estruturas a partir do Método dos Elementos Finitos. Desde a sua criação pelo Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio até os dias atuais, o código tem recebido novas expansões visando adaptá-lo às mais diversas situações de análise.

O FEMOOP utiliza um arquivo neutro como formato de entrada de dados, permitindo a integração com programas de pré-processamento e pós-processamento, como, por exemplo, B\_Ed (*Building Editor*), MTool (*Bidimensional\_Mesh\_TOOL*), Mview, Pos-3d e Ciclo. A figura seguinte mostra a comunicação entre as principais classes do programa na versão utilizada nesta pesquisa, com destaque para as classes *ConstModel* e *Material*, que foram expandidas para contemplar os modelos implementados. Tais classes são descritas em seguida.

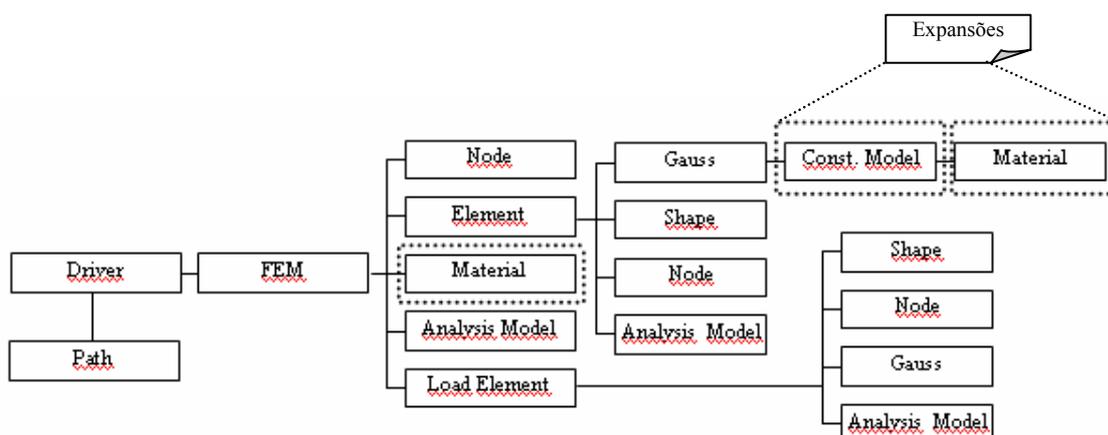


FIGURA 3.1 – Comunicação entre classes do FEMOOP

As classes acima identificadas cuidam das seguintes tarefas:

- . **Classe *Driver***: definição do tipo de análise a ser realizada (mecânica estática, dinâmica, térmica, fluxo, entre outras);
- . **Classe *Path***: gerenciamento do algoritmo de controle para obtenção das trajetórias de equilíbrio em problemas lineares e não-lineares;
- . **Classe *FEM***: discretização numérica do domínio em malha de elementos finitos, condução de métodos para montagem de matrizes e vetores globais e ainda gerenciamento de impressão de resultados. Essa classe se comunica com objetos de outras classes, que referenciam nós da malha (classe *Node*), elementos da malha (classe *Element*), grupo de materiais (classe *Material*), cargas nos elementos (classe *LoadElement*) e tipo de análise (classe *AnModel*). Objetos da classe *FEM* contêm ainda referências às classes *Shape* (funções de mapeamento, conectividade e características geométricas dos elementos) e *Gauss* (coordenadas e pesos da integração numérica e estado constitutivo do material em um ponto de Gauss).
- . **Classe *ConstModel***: cálculo de tensões e modificação da matriz constitutiva.

### 3.5 Expansão do FEMOOP

Para implementação do modelo trilinear, foi necessária uma expansão do código computacional, realizada sobre as classes *ConstModel*, *Material* e *DamLaw*. Essas classes e as respectivas formas de expansão são descritas a seguir.

#### 3.5.1 Expansão da Classe *ConstModel*

A classe *ConstModel* (“Constitutive Model”) dispõe de informações relacionadas aos modelos constitutivos disponíveis para a análise. Esta classe retorna o campo de tensões associado a um dado campo de deformações, realizando a modificação da matriz constitutiva segundo os modelos de dano existentes. Além disso, cuida da realização e do controle de iterações para análise não-linear. Para contemplar a implementação do modelo trilinear proposto neste trabalho, esta classe foi expandida a partir de sua classe derivada *Damage* (Figura 3.2).

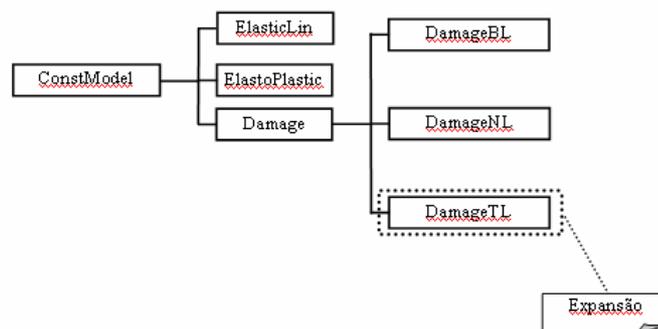
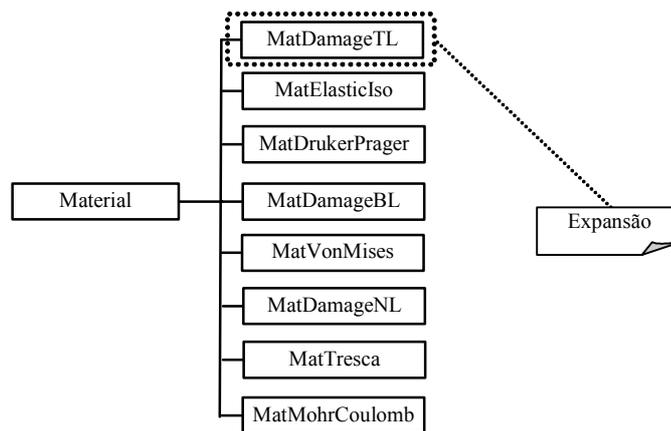


FIGURA 3.2 – Expansão da classe *ConstModel*

### 3.5.2 Expansão da Classe *Material*

A classe *Material* é uma classe auxiliar da classe *ConstModel*, fornecendo a ela os parâmetros necessários ao funcionamento do modelo constitutivo. *Material* cuida da leitura dos dados do arquivo neutro e do armazenamento de parâmetros do material.

Na expansão desta classe (Figura 3.3), foi criada uma classe derivada de nome *MatDamageTl*, visando contemplar a forma de degradação da rigidez do modelo trilinear, de modo que cada ponto de integração pudesse ter seu comportamento tensão-deformação representado pela lei constitutiva daquele modelo.



**FIGURA 3.3** – Expansão da classe *Material*

Conforme descrito na introdução deste capítulo, o modelo trilinear foi implementado segundo duas estratégias: MTP e MTM, ambas inseridas na forma de expansão contemplada na subclasse *MatDamageTl*. A estratégia MTP baseou-se na forma de degradação da rigidez apresentada na figura 3.4, ao passo que a estratégia MTM teve como referência o Método das Resistências Residuais descrito no capítulo anterior, sendo a curva da figura 3.5 balizadora da lei de dano desse modelo.

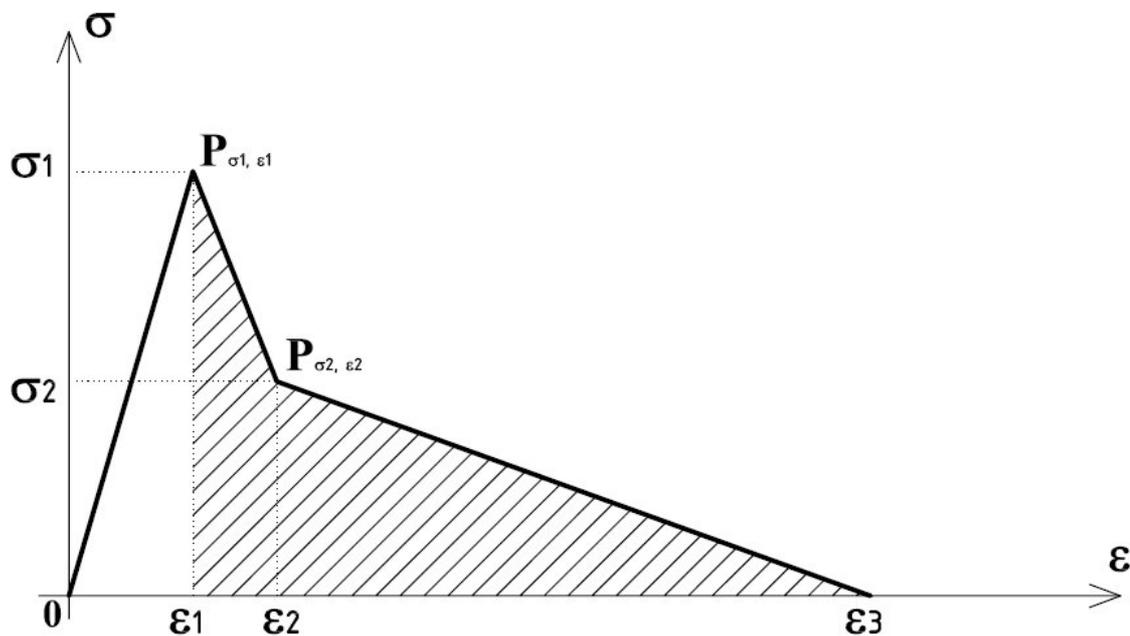


FIGURA 3.4 – Diagrama tensão-deformação em tração segundo MTP

a) Expansão da Classe *Material* para Modelo MTP

Neste trabalho, o modelo trilinear padrão (MTP) representou uma primeira tentativa de avaliação da aplicabilidade de diagramas trilineares na análise do comportamento do CRFA em flexão. Sua formulação utilizou, em parte, uma abordagem já existente na versão original do FEMOOP, que tinha como referência explícita a representação do comportamento danificado do material a partir de parâmetros da Mecânica da Fratura, a saber: energia de fratura ( $G_f$ ) e tamanho característico ( $h$ ).  $G_f$  é a energia necessária para criar uma unidade de área de uma fissura contínua. Nos modelos de fissuras distribuídas,  $G_f$  se relaciona ao acúmulo de deformações atuando em uma faixa de largura “ $h$ ” do elemento, então denominada “tamanho característico” (PITANGUEIRA, 1998).

A tabela 3.1 apresenta os parâmetros lidos no arquivo neutro para o instanciamento de um objeto da classe *Material* segundo o modelo de dano MTP.

**TABELA 3.1:** Parâmetros de entrada do arquivo neutro para a curva  $\sigma$ - $\varepsilon$  segundo modelo MTP

Parâmetros MTP			
Símbolo	Descrição	Relação com o modelo	Figura
$f_t$	resistência à tração	$\sigma_1 = f_t$	3.4 (ponto $P_{\sigma_1, \varepsilon_1}$ )
$E_c$	módulo de elasticidade longitudinal do concreto	$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_c}$	3.4 (ponto $P_{\sigma_1, \varepsilon_1}$ )
$G_f$	energia de fratura	$\frac{G_f}{h}$ é a área sob a curva $\sigma$ - $\varepsilon$ após o início do dano	3.4 (região hachurada)
$h$	tamanho característico		
$\alpha$	parâmetro para delimitação da tensão de inflexão do trecho descendente da curva $\sigma$ - $\varepsilon$	$\sigma_2 = \alpha \cdot \sigma_1$	3.4 (ponto $P_{\sigma_2, \varepsilon_2}$ )
$p_1$	parâmetro para delimitação da deformação de inflexão do trecho descendente da curva $\sigma$ - $\varepsilon$	$\varepsilon_2 = p_1 \cdot \varepsilon_1$	3.4 (ponto $P_{\sigma_2, \varepsilon_2}$ )

b) Expansão da Classe *Material* para Modelo MTM

A expansão da classe *Material* realizada por intermédio da subclasse *MatDamageTl* também contemplou a estratégia baseada no modelo trilinear modificado (MTM). A curva de referência desse modelo tem o aspecto apresentado na figura 3.5, que se coaduna com propostas mais recentes de modelos para representação do comportamento do CRFA, como a da Associação Alemã de Concreto e Engenharia Civil (DBV, 2001) e a do comitê técnico 162 da RILEM (RILEM TC 162, 2003) (ver seção 2.7.2 do Capítulo 2). A tabela 3.2 apresenta os parâmetros lidos no arquivo neutro durante o instanciamento de um objeto da classe *Material* segundo o modelo de dano MTM.

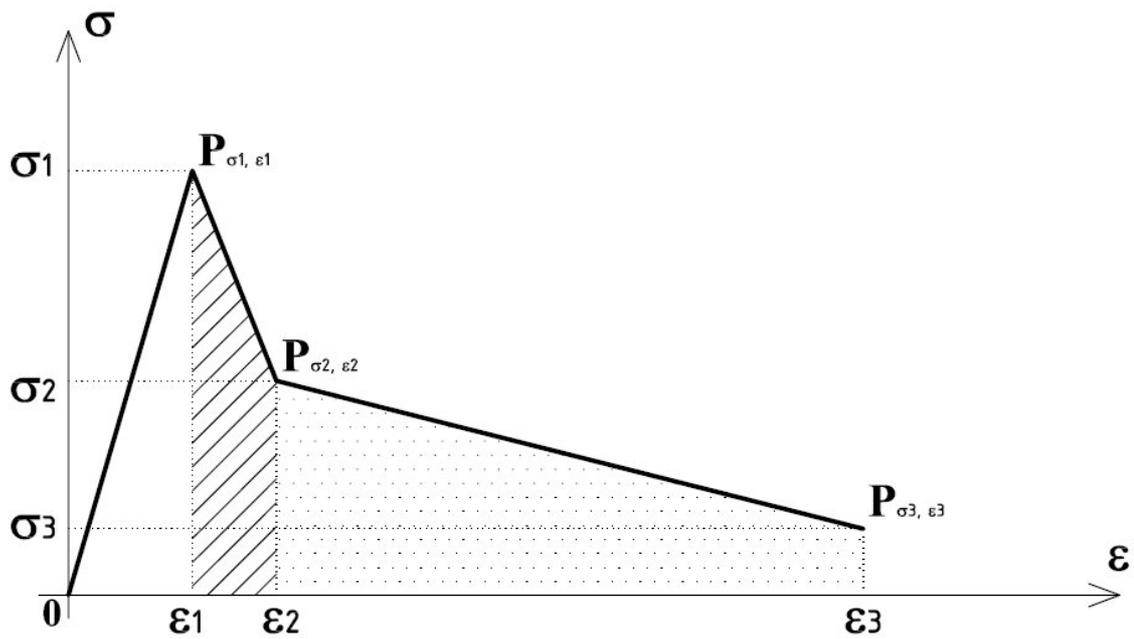


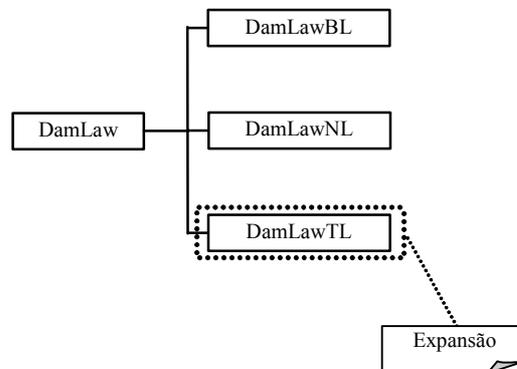
FIGURA 3.5 – Diagrama tensão-deformação em tração segundo MTM

**TABELA 3.2: Parâmetros de entrada do arquivo neutro para a curva  $\sigma$ - $\varepsilon$  segundo modelo MTM**

Parâmetros MTM			
Símbolo	Descrição	Relação com o modelo	Figura
$f_t$	resistência à tração	$\sigma_1 = f_t$	3.5 (ponto $P_{\sigma_1, \varepsilon_1}$ )
$E_c$	módulo de elasticidade longitudinal do concreto	$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_c}$	3.5 (ponto $P_{\sigma_1, \varepsilon_1}$ )
$\alpha_1$	parâmetro para delimitação da tensão de inflexão ao final do primeiro trecho do ramo descendente da curva $\sigma$ - $\varepsilon$	$\sigma_2 = \alpha_1 \cdot \sigma_1$	3.5 (ponto $P_{\sigma_2, \varepsilon_2}$ )
$\alpha_2$	parâmetro para delimitação da tensão-limite no segundo trecho do ramo descendente da curva $\sigma$ - $\varepsilon$	$\sigma_3 = \alpha_2 \cdot \sigma_1$	3.5 (ponto $P_{\sigma_3, \varepsilon_3}$ )
$p_1$	parâmetro para delimitação da deformação de inflexão ao final do primeiro trecho do ramo descendente da curva $\sigma$ - $\varepsilon$	$\varepsilon_2 = p_1 \cdot \varepsilon_1$	3.5 (ponto $P_{\sigma_2, \varepsilon_2}$ )
$p_2$	parâmetro para delimitação da deformação-limite no segundo trecho do ramo descendente da curva $\sigma$ - $\varepsilon$	$\varepsilon_3 = p_2 \cdot \varepsilon_1$	3.5 (ponto $P_{\sigma_3, \varepsilon_3}$ )

### 3.5.3 Expansão da Classe *DamLaw*

Após estabelecidas as curvas que delimitam os modelos implementados (MTP e MTM), resta formalizar as leis de dano do material, o que é feito na expansão da classe *DamLaw* (“Damage Law”) (Figura 3.6). Essa expansão foi realizada visando permitir o trabalho conjunto com a expansão da classe *ConstModel*.



**FIGURA 3.6** – Expansão da classe *DamLaw*

Uma das formas de se tratar o fenômeno da danificação em materiais que vem apresentando interessantes resultados numéricos é aquela baseada em uma lei de dano escalar (PITANGUEIRA, 1998), sendo esta a lei utilizada neste trabalho. A seguir, será apresentada a formulação do modelo de dano escalar desenvolvida nesta pesquisa, estabelecendo-se as bases da modelagem numérico-computacional implementada.

A hipótese de dano escalar em um material com comportamento ortotrópico adotada neste trabalho supõe a validade de uma relação de compliância entre deformações e tensões em um sistema local, posicionado nas direções principais de ortotropia. Tal relação é dada, genericamente, por:

$$\varepsilon_{\ell} = C \cdot \sigma_{\ell} \quad (3.1)$$

onde  $\varepsilon_{\ell}$  e  $\sigma_{\ell}$  são vetores de deformação e tensão, respectivamente, tomados em um sistema local ( $\ell$ ) posicionado na direção da fissura.  $C$  é a matriz de compliância também referida a um sistema local de coordenadas.

Os vetores  $\varepsilon_\ell$  e  $\sigma_\ell$  para estado plano são dados por:

$$\sigma_\ell = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_\ell = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Nessas expressões,  $\varepsilon_{11}$  e  $\varepsilon_{22}$  são as deformações axiais no sistema local de ortotropia e  $\gamma_{12}$  é a distorção no sistema local (1-2). As variáveis  $\sigma_{11}$  e  $\sigma_{22}$  representam as correspondentes tensões axiais e  $\tau_{12}$  é a tensão cisalhante no sistema local (1-2) posicionado no plano de fissuração.

Portanto, admitindo-se que o material é ortotrópico nas direções principais de deformação, podem ser estabelecidas as seguintes relações de compliância para os casos clássicos de estado plano de tensão (EPT) e estado plano de deformação (EPD):

Estado Plano de Tensões (EPT):

Em se tratando de EPT, as seguintes expressões são válidas para as tensões e deformações nas direções de ortotropia do modelo:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1} \cdot \sigma_{11} - \frac{\varepsilon_{12}}{E_2} \cdot \sigma_{22} \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E_2} \cdot \sigma_{22} - \frac{\varepsilon_{21}}{E_1} \cdot \sigma_{11} \quad (3.5)$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{G_{12}} \cdot \tau_{12} \quad (3.6)$$

sendo que

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{1 + \varepsilon_{21}}{E_1} + \frac{1 + \varepsilon_{12}}{E_2} \quad (3.7)$$

onde  $\varepsilon_{12}$  representa a deformação na direção local 1 devido à deformação na direção local 2 e  $\varepsilon_{21}$  tem o significado oposto.

Em conseqüência, a matriz de compliância C em EPT assume a seguinte forma:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\varepsilon_{12}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\varepsilon_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

. Estado Plano de Deformações (EPD):

Neste caso, as relações tensão-deformação são expressas por:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1} \cdot \sigma_{11} - \frac{\varepsilon_{12}}{E_2} \cdot \sigma_{22} - \frac{\varepsilon_{13}}{E_3} \cdot \sigma_{33} \quad (3.9)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E_2} \cdot \sigma_{22} - \frac{\varepsilon_{21}}{E_1} \cdot \sigma_{11} - \frac{\varepsilon_{23}}{E_3} \cdot \sigma_{33} \quad (3.10)$$

Considerando-se que, neste caso, a deformação fora do plano é nula, tem-se que:

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E_3} \cdot \sigma_{33} - \frac{\varepsilon_{31}}{E_1} \cdot \sigma_{11} - \frac{\varepsilon_{32}}{E_2} \cdot \sigma_{22} = 0 \quad (3.11)$$

A tensão  $\sigma_{33}$  pode ser retirada da expressão anterior e substituída nas expressões (3.9) e (3.10), resultando em:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1} \cdot (1 - \varepsilon_{13} \cdot \varepsilon_{31}) \cdot \sigma_{11} - \frac{1}{E_2} \cdot (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} \cdot \varepsilon_{32}) \cdot \sigma_{22} \quad (3.12)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E_2} \cdot (1 - \varepsilon_{23} \cdot \varepsilon_{32}) \cdot \sigma_{22} - \frac{1}{E_1} \cdot (\varepsilon_{21} + \varepsilon_{23} \cdot \varepsilon_{31}) \cdot \sigma_{11} \quad (3.13)$$

Em conseqüência, a matriz de compliância (C) para EPD fica:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{c_4}{E_1} & -\frac{c_2}{E_2} & 0 \\ -\frac{c_3}{E_1} & \frac{c_1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

em que as constantes  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  são dadas por:

$$c_1 = (1 - \varepsilon_{23} \cdot \varepsilon_{32}) \quad (3.15)$$

$$c_2 = (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} \cdot \varepsilon_{32}) \quad (3.16)$$

$$c_3 = (\varepsilon_{21} + \varepsilon_{23} \cdot \varepsilon_{31}) \quad (3.17)$$

$$c_4 = (1 - \varepsilon_{13} \cdot \varepsilon_{31}) \quad (3.18)$$

O modelo de dano escalar admite uma situação em que os defeitos iniciais se distribuem de maneira aproximadamente uniforme no volume representativo do material. Segundo PITANGUEIRA (1998), nesses casos, uma função de dano escalar

$\Phi(\varepsilon)$  pode ser definida, dependendo somente da deformação ( $\varepsilon$ ) ocorrida em uma dada direção.

$$\Phi(\varepsilon) = 1 - w(\varepsilon) \quad (3.19)$$

onde  $w(\varepsilon)$  representa, na Mecânica do Dano, uma variável conhecida como “variável de dano” ou “parâmetro de dano”. Esse parâmetro assume os valores limites  $w(\varepsilon) = 0$  (nenhum dano) e  $w(\varepsilon) = 1$  (estado final de dano).

A necessidade de se avaliar a degradação da rigidez da estrutura no decorrer da análise estrutural impõe a aplicação de um tratamento matemático adequado, implicando a alteração das propriedades elásticas do material. Para isso, lança-se mão da função de dano  $\Phi(\varepsilon)$  para modificação das propriedades elásticas iniciais do material ( $E_0$ ). Conseqüentemente, em cada uma das direções principais de dano (1 e 2), as propriedades elásticas modificadas pela ocorrência do dano ficam:

$$E_1 = E_0 \cdot \Phi(\varepsilon_1) = E_0 \cdot (1 - w(\varepsilon_1)) \quad (3.20)$$

$$E_2 = E_0 \cdot \Phi(\varepsilon_2) = E_0 \cdot (1 - w(\varepsilon_2)) \quad (3.21)$$

em que  $E_1$  e  $E_2$  representam, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal nas direções de dano 1 e 2, correspondentes às respectivas deformações axiais  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ .

Finalmente, é importante lembrar que  $\Phi(\varepsilon)$  é uma função de dano escalar, dependente somente da deformação ocorrida em uma direção. Por intermédio da penalização da rigidez inicial do material (expressões 3.19, 3.20 e 3.21), pode-se

explicitar essa função para regiões de tração e compressão, segundo formas escolhidas de comportamento do material nesses casos.

A seguir, apresentam-se as funções  $\Phi$  existentes no FEMOOP para tratamento do dano no material, tanto para regiões de dano em compressão ( $\Phi_c$ ) quanto para regiões de dano em tração ( $\Phi_t$ ), incluindo-se aquelas implementadas para os modelos MTP e MTM.

Considerando-se a hipótese de dano escalar apresentada anteriormente, com a função de dano definida pelas expressões 3.19, 3.20 e 3.21, é possível estabelecer as formas dessas funções em compressão e em tração ( $\Phi_c$  e  $\Phi_t$ , respectivamente), segundo as modelagens bilinear ( $\Phi_{c, BI}$  e  $\Phi_{t, BI}$ ), não-linear ( $\Phi_{c, NON}$  e  $\Phi_{t, NON}$ ) e trilinear, essa última desmembrada nas estratégias dos modelos padrão ( $\Phi_{t, MTP}$ ) e modificado ( $\Phi_{t, MTM}$ ).

a) Funções de Dano  $\Phi$  para Regiões de Compressão ( $\Phi_c$ ):

a.1) Modelo Bilinear ( $\Phi_{c, BI}$ ):

A curva  $\sigma$ - $\varepsilon$  fica definida por  $E_0$  (módulo de elasticidade longitudinal inicial),  $f_c$  (resistência à compressão axial máxima),  $\varepsilon_c$  (deformação correspondente à resistência  $f_c$ ) e  $E_d$  (módulo de elasticidade do ramo descendente), visualizados na figura 3.7.

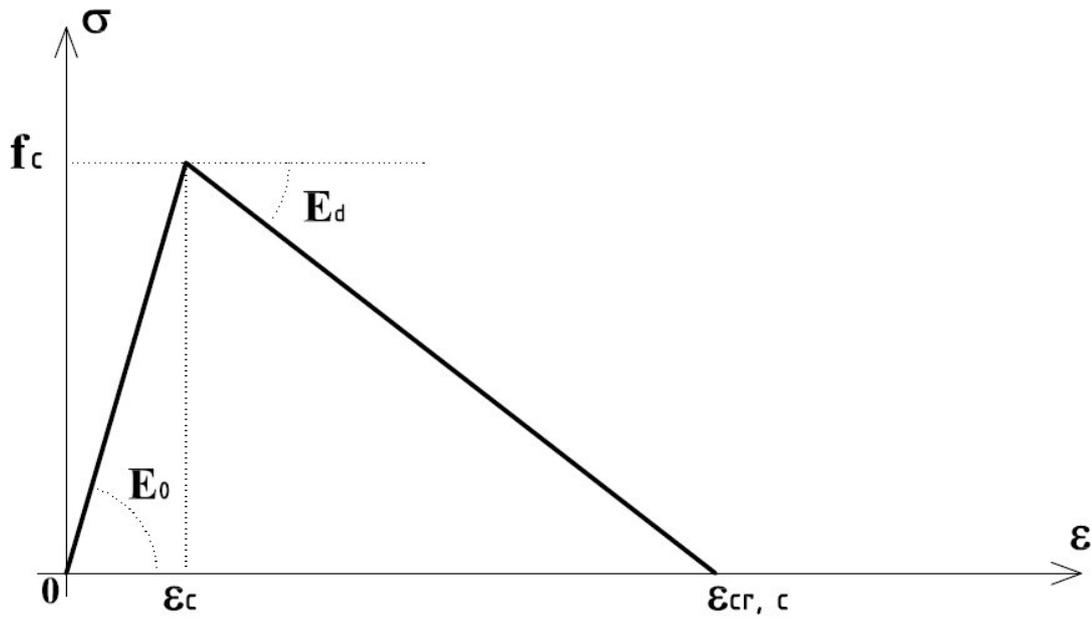


FIGURA 3.7 – Diagrama tensão-deformação bilinear em compressão

A deformação crítica em compressão  $\epsilon_{cr, c}$  pode ser calculada, em módulo, por:

$$\epsilon_{cr, c} = \epsilon_c + \frac{f_c}{E_d} \quad (3.22)$$

Para o caso de dano bilinear secante em compressão, a função de dano fica:

$$\begin{aligned} \Phi_{c, BI} &= 1,0 \dots\dots\dots \text{para } \epsilon \leq \epsilon_c \\ \Phi_{c, BI} &= \frac{E_d}{E_0} \cdot \frac{\epsilon - \epsilon_c \cdot \left(1 - \frac{E_0}{E_d}\right)}{\epsilon} \dots\dots\dots \text{para } \epsilon_c < \epsilon \leq \epsilon_{cr, c} \\ \Phi_{c, BI} &= 0,0 \dots\dots\dots \text{para } \epsilon > \epsilon_{cr, c} \end{aligned} \quad (3.23)$$

a.2) Modelo Não-Linear ( $\Phi_{c, \text{NON}}$ ):

Neste caso, a curva  $\sigma$ - $\varepsilon$  não-linear adotada no FEMOOP é aquela proposta por CARREIRA e CHU (1985) para concretos convencionais, que já havia sido empregada por NATARAJA *et al.* (1988) e por HSU e HSU (1994) para modelagem da compressão de CRFA. Tal curva tem o aspecto semelhante ao indicado na figura 2.23 do capítulo anterior, sendo que a relação tensão-deformação pode expressa por:

$$\sigma = f_c \cdot \frac{\beta \cdot (\varepsilon / \varepsilon_c)}{\beta - 1 + (\varepsilon / \varepsilon_c)^\beta} \quad (3.24)$$

sendo

$$\beta = \frac{1}{1 - \left(\frac{f_c}{\varepsilon_c \cdot E_0}\right)} \quad (3.25)$$

Neste caso, a curva fica completamente definida pela tensão ( $f_c$ ) e pela deformação ( $\varepsilon_c$ ) do pico do diagrama, pelo módulo de elasticidade longitudinal inicial ( $E_0$ ) e por um parâmetro  $\beta$ , definido em função da forma da curva. Conseqüentemente, a função de dano secante fica:

$$\Phi_{c, \text{NON}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)^\beta \cdot \left(\frac{E_0 \cdot \varepsilon}{f_c} - 1\right)} \quad (3.26)$$

b) Funções de Dano  $\Phi$  para Regiões de Tração ( $\Phi_t$ ):

b.1) Modelo Bilinear ( $\Phi_{t, \text{BI}}$ ):

Para o caso de dano em tração com modelo bilinear, a curva tem aspecto semelhante ao do caso bilinear em compressão (Figura 3.7), com a diferença que o ramo descendente fica condicionado não ao módulo de elasticidade desse trecho, mas, sim, aos parâmetros energia de fratura ( $G_f$ ) e tamanho característico ( $h$ ), definidos

anteriormente. Esses parâmetros, acrescidos do módulo de elasticidade longitudinal inicial ( $E_0$ ), da resistência à tração máxima ( $f_t$ ) e da deformação ( $\epsilon_t$ ) correspondente à tensão de pico do diagrama, permitem caracterizar a curva apresentada na figura 3.8.

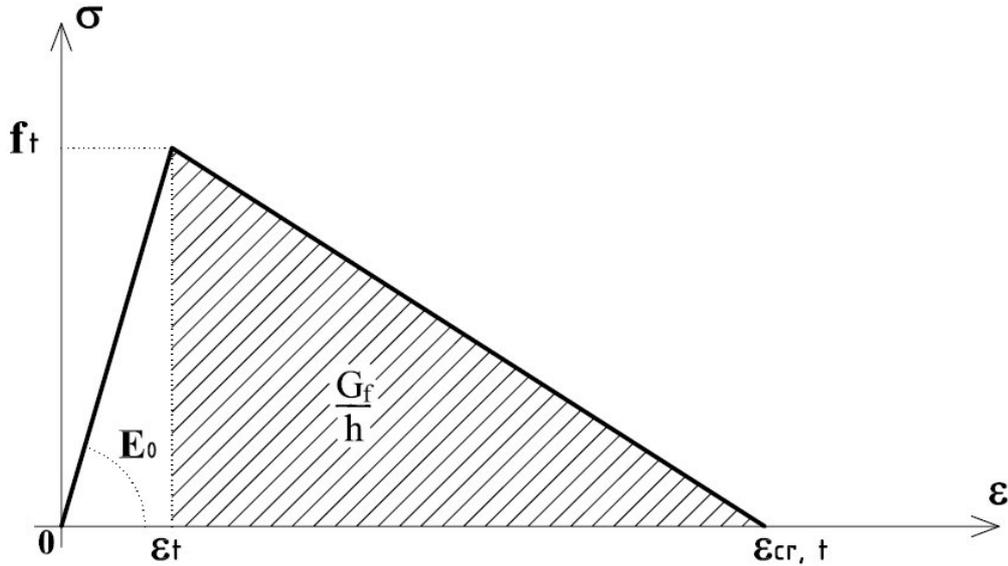


FIGURA 3.8 – Diagrama tensão-deformação bilinear em tração

A deformação crítica em tração  $\epsilon_{cr, t}$  pode ser expressa por:

$$\epsilon_{cr, t} = \epsilon_t + \frac{2 \cdot \frac{G_f}{h}}{f_t} \quad (3.27)$$

E a função de dano secante fica:

$$\begin{aligned} \Phi_{t, BI} &= 1,0 \dots\dots\dots \text{para } \epsilon \leq \epsilon_t \\ \Phi_{t, BI} &= \frac{f_t}{E_0 \cdot (\epsilon_{cr, t} - \epsilon_t)} \cdot \frac{\epsilon_{cr, t} - \epsilon}{\epsilon} \dots\dots\dots \text{para } \epsilon_t < \epsilon \leq \epsilon_{cr, t} \\ \Phi_{t, BI} &= 0,0 \dots\dots\dots \text{para } \epsilon > \epsilon_{cr, t} \end{aligned} \quad (3.28)$$

b.2) Modelo Não-Linear ( $\Phi_{t, \text{NON}}$ ):

Neste caso, assume-se um modelo exponencial com um ramo ascendente linear e um ramo descendente não-linear (BOONE e INGRAFFEA, 1987). O ramo descendente também se expressa em função de parâmetros da Mecânica da Fratura ( $G_f$  e  $h$ ) e da deformação ( $\epsilon_t$ ) correspondente à tensão de pico do diagrama, na forma que se segue:

$$\sigma = f_t \cdot e^{-k \cdot (\epsilon - \epsilon_t)} \quad (3.29)$$

sendo

$$k = \frac{h \cdot f_t}{G_f} \quad (3.30)$$

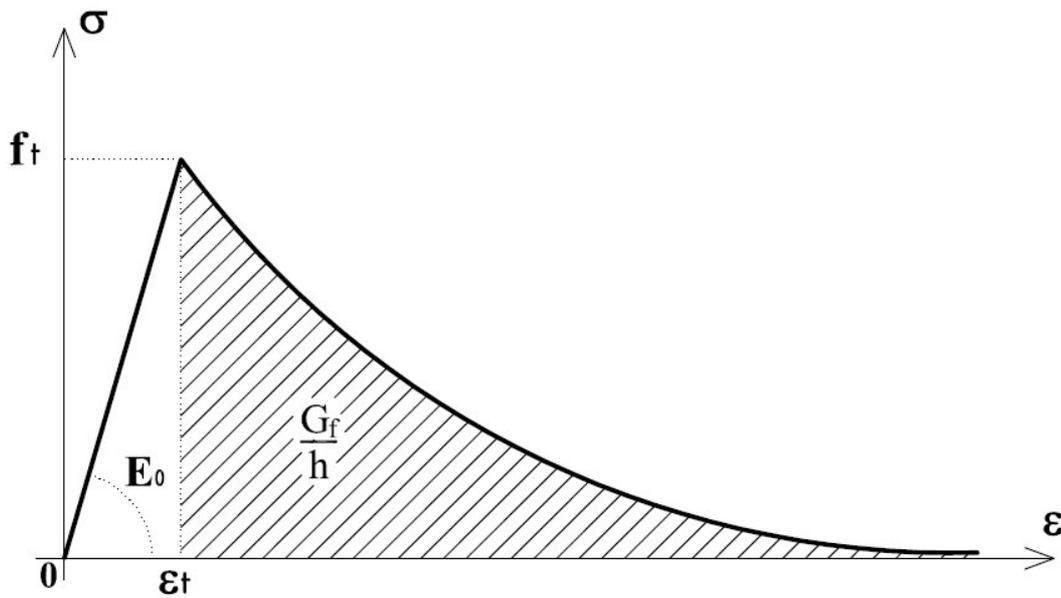


FIGURA 3.9 – Diagrama tensão-deformação não-linear em tração

A função de dano secante é dada por:

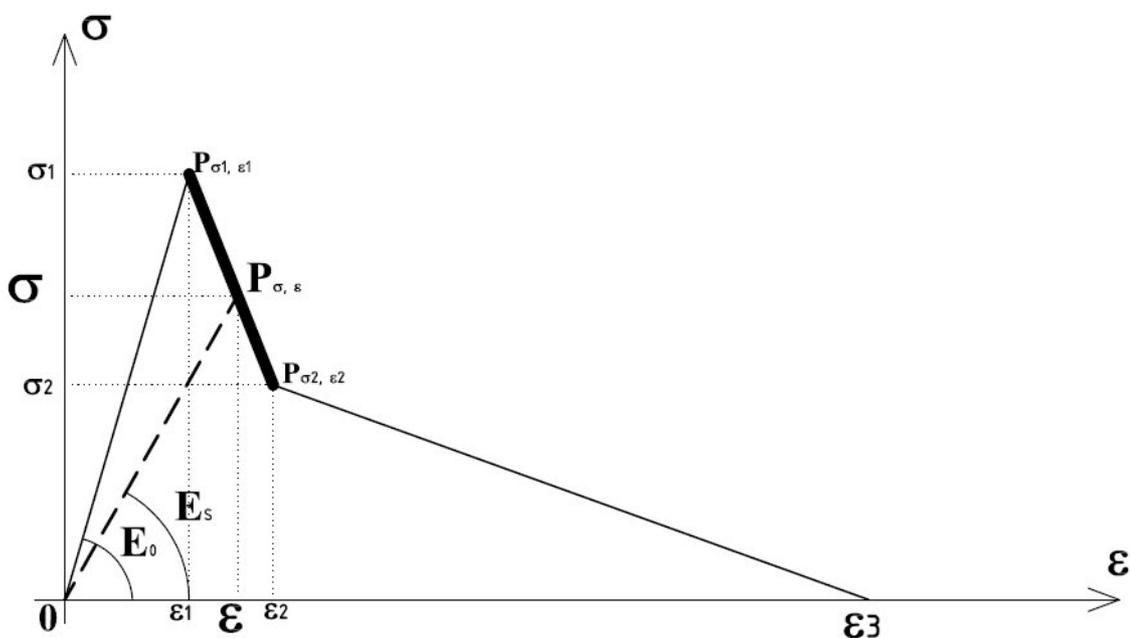
$$\begin{aligned} \Phi_{t, \text{NON}} &= 1,0 \dots\dots\dots \text{para } \epsilon \leq \epsilon_t \\ \Phi_{t, \text{NON}} &= \frac{f_t}{E_0 \cdot \epsilon} \cdot e^{-k \cdot (\epsilon - \epsilon_t)} \dots\dots\dots \text{para } \epsilon > \epsilon_t \end{aligned} \quad (3.31)$$

b.3) Modelo Trilinear

A evolução do dano em tração com diagrama trilinear é apresentada a seguir para cada um dos modelos implementados (MTP e MTM). Em cada caso, são estabelecidas funções de dano com rigidez secante e com rigidez tangente. As tabelas 3.1 e 3.2, apresentadas anteriormente, e as figuras seguintes 3.10 e 3.11 permitem definir completamente as curvas trilinares.

Modelo Trilinear Padrão ( $\Phi_{t, MTP}$ ):

No ramo ascendente da curva tensão x deformação ( $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ ),  $\Phi_{t, MTP} = 1,0$ . Para completar as funções de dano em tração deste modelo ( $\Phi_{t, MTP}$ ), é necessário dividir o ramo descendente da curva da figura 3.4, de sorte que as leis de dano fiquem claramente delimitadas para dois trechos descendentes, em função do estado de deformação durante a análise. O primeiro trecho descendente é destacado na figura a seguir.



**FIGURA 3.10** – Primeiro trecho do ramo descendente da curva tensão-deformação conforme modelo MTP

Tendo em conta a curva da figura anterior e os parâmetros de material para instanciamento de um objeto da classe *MatDamageTl* com modelo MTP (tabela 3.1), tem-se que:

$$\sigma_2 = \alpha \cdot \sigma_1 = \alpha \cdot f_t \quad (3.32)$$

$$\varepsilon_2 = p_1 \cdot \varepsilon_1 \quad (3.33)$$

Equacionando-se o primeiro trecho do ramo descendente para um ponto  $P_{\sigma, \varepsilon}$  de coordenadas  $(\sigma, \varepsilon)$ , tem-se:

$$\sigma = f_t \cdot \left[ 1 - \frac{(1 - \alpha) \cdot (\varepsilon - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 \cdot (p_1 - 1)} \right] \quad (3.34)$$

Como a deformação não é nula nesse trecho, da expressão anterior, se obtém:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{f_t}{\varepsilon} \cdot \left[ 1 - \frac{(1 - \alpha) \cdot (\varepsilon - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 \cdot (p_1 - 1)} \right] \quad (3.35)$$

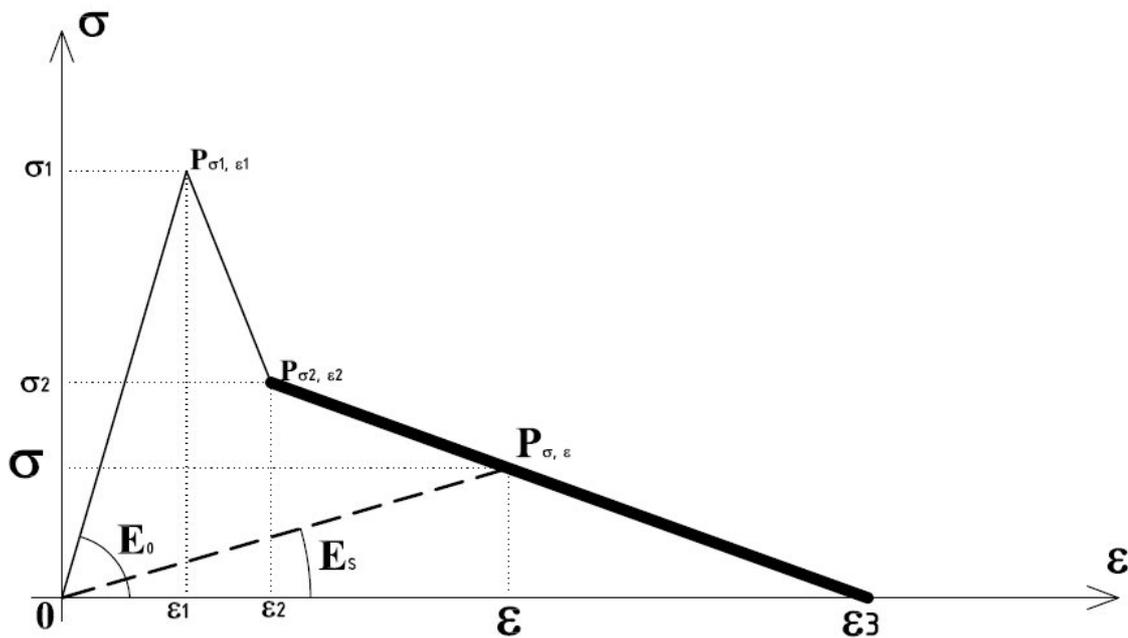
Considerando que  $\frac{\sigma}{\varepsilon}$  representa o módulo secante após a danificação ( $E_s$ ), dividindo ambos os membros pelo módulo anterior à danificação ( $E_0$ ), tem-se a função de dano secante (subíndice S) para o primeiro trecho descendente (subíndice 1):

$$\Phi_{t, \text{MTP}, S, 1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \cdot \left[ 1 - \frac{(1 - \alpha) \cdot (\varepsilon - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 \cdot (p_1 - 1)} \right] \quad (3.36)$$

Para o caso de dano com rigidez tangente (T), a função de dano assume a seguinte forma:

$$\Phi_{t, \text{MTP}, T, 1} = - \frac{(1 - \alpha)}{(p_1 - 1)} \quad (3.37)$$

Para o segundo trecho descendente (subíndice 2), destacado na figura a seguir, considerando-se novamente as expressões de 3.32 e 3.33, a lei de dano fica completamente definida com o instanciamento de um objeto da classe *MatDamageTl* a partir dos parâmetros de material para com modelo MTP (tabela 3.1).



**FIGURA 3.11** – Segundo trecho do ramo descendente da curva tensão-deformação conforme modelo MTP

A equação do segundo trecho do ramo descendente é expressa por:

$$\sigma = \frac{\alpha \cdot f_t \cdot (p_2 \cdot \varepsilon_1 - \varepsilon)}{\varepsilon_1 \cdot (p_2 - p_1)} \quad (3.38)$$

Para todos os pontos deste trecho, a expressão anterior pode ser extrapolada para:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\alpha \cdot f_t \cdot (p_2 \cdot \varepsilon_1 - \varepsilon)}{\varepsilon \cdot \varepsilon_1 \cdot (p_2 - p_1)} \quad (3.39)$$

Como  $\frac{\sigma}{\varepsilon}$  representa o módulo secante após a danificação ( $E_s$ ), dividindo ambos os membros pelo módulo anterior à danificação ( $E_0$ ), a função de dano secante para os pontos  $P_{\sigma, \varepsilon}$  deste segundo trecho descendente fica:

$$\Phi_{t, MTP, S, 2} = \frac{\alpha}{\varepsilon} \cdot \frac{(p_2 \cdot \varepsilon_1 - \varepsilon)}{(p_2 - p_1)} \quad (3.40)$$

com

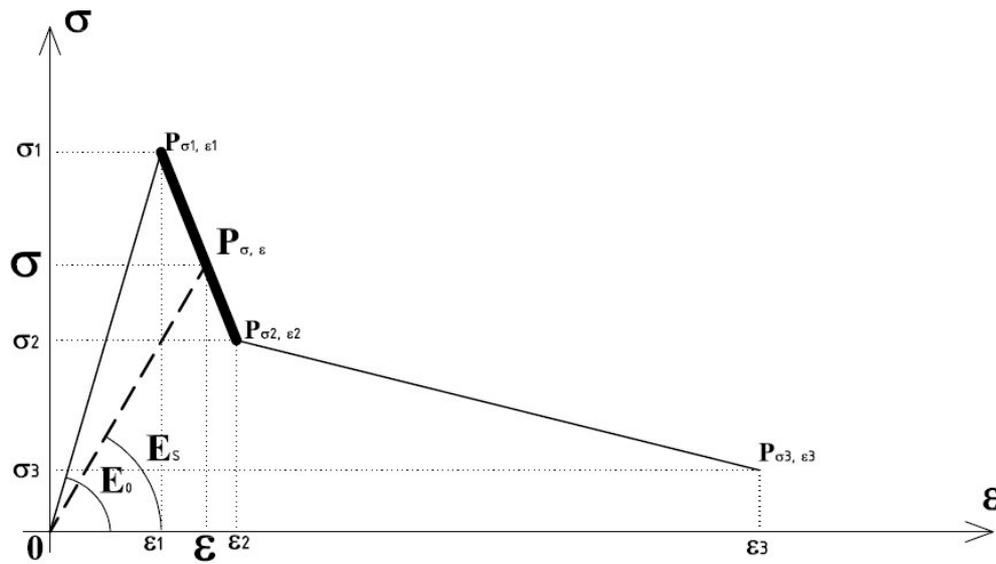
$$p_2 = \frac{2 \cdot G_f / h}{\alpha \cdot f_t \cdot \varepsilon_1} - \frac{(p_1 - 1 - \alpha)}{\alpha} \quad (3.41)$$

Para o caso de dano com rigidez tangente, a função de dano neste trecho fica:

$$\Phi_{t, MTP, T, 2} = - \frac{\alpha}{(p_2 - p_1)} \quad (3.42)$$

#### Modelo Trilinear Modificado ( $\Phi_{t, MTM}$ ):

Neste caso, também quando  $\varepsilon \leq \varepsilon_1$  (ramo ascendente da curva tensão x deformação),  $\Phi_{t, MTM} = 1,0$ . Da mesma forma que no modelo anterior, é preciso estabelecer funções de dano em tração ( $\Phi_{t, MTM}$ ) para cada trecho do ramo descendente da curva da figura 3.5, de sorte que as leis de dano ficam claramente delimitadas para dois trechos descendentes, em função do estado de deformação durante a análise. O primeiro trecho descendente é destacado na figura a seguir.



**FIGURA 3.12** – Primeiro trecho do ramo descendente da curva tensão-deformação conforme modelo MTM

A partir da curva da figura anterior e dos parâmetros de material para instanciamento de um objeto da classe *MatDamageTl* com modelo MTM (tabela 3.2), tem-se que:

$$\sigma_2 = \alpha_1 \cdot \sigma_1 = \alpha_1 \cdot f_t \quad (3.43)$$

$$\varepsilon_2 = p_1 \cdot \varepsilon_1 \quad (3.44)$$

$$\sigma_3 = \alpha_2 \cdot \sigma_1 = \alpha_2 \cdot f_t \quad (3.45)$$

$$\varepsilon_3 = p_2 \cdot \varepsilon_1 \quad (3.46)$$

Equacionando-se o primeiro trecho do ramo descendente para um ponto  $P_{\sigma, \varepsilon}$  de coordenadas  $(\sigma, \varepsilon)$ , tem-se:

$$\sigma = f_t \cdot \left[ 1 - \frac{(1 - \alpha_1) \cdot (\varepsilon - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 \cdot (p_1 - 1)} \right] \quad (3.47)$$

Como a deformação  $\varepsilon$  não se anula nesse trecho, da expressão anterior, se obtém:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{f_t}{\varepsilon} \left[ 1 - \frac{(1 - \alpha_1) \cdot (\varepsilon - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 \cdot (p_1 - 1)} \right] \quad (3.48)$$

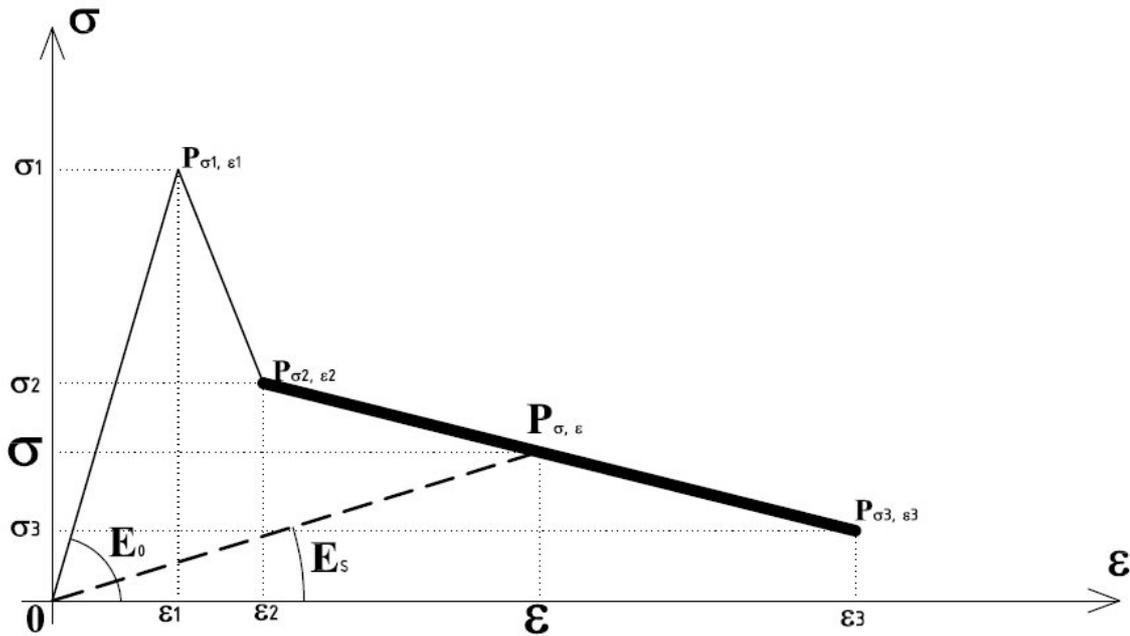
Considerando que  $\frac{\sigma}{\varepsilon}$  representa o módulo secante após a danificação ( $E_s$ ), dividindo ambos os membros pelo módulo anterior à danificação ( $E_0$ ), tem-se a função de dano secante para o primeiro trecho descendente (mantendo-se a mesma notação indicial do caso anterior):

$$\Phi_{t, \text{MTM}, S, 1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \cdot \left[ 1 - \frac{(1 - \alpha_1) \cdot (\varepsilon - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 \cdot (p_1 - 1)} \right] \quad (3.49)$$

Para o caso de dano com rigidez tangente, a função de dano assume a seguinte forma:

$$\Phi_{t, \text{MTM}, T, 1} = - \frac{(1 - \alpha_1)}{(p_1 - 1)} \quad (3.50)$$

Novamente se valendo das expressões 3.43, 3.44, 3.45 e 3.46, a lei de dano para o segundo trecho descendente do modelo MTM (figura seguinte) fica completamente definida com o instanciamento de um objeto da classe *MatDamageTl* a partir dos parâmetros de material indicados na tabela 3.2.



**FIGURA 3.13** – Segundo trecho do ramo descendente da curva tensão-deformação conforme modelo MTM

A equação do segundo trecho do ramo descendente é expressa por:

$$\sigma = \frac{f_t \cdot (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot (p_2 \cdot \varepsilon_1 - \varepsilon)}{\varepsilon_1 \cdot (p_2 - p_1)} + \alpha_2 \cdot f_t \quad (3.51)$$

A expressão anterior pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{f_t \cdot (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot (p_2 \cdot \varepsilon_1 - \varepsilon)}{\varepsilon \cdot \varepsilon_1 \cdot (p_2 - p_1)} + \frac{\alpha_2 \cdot f_t}{\varepsilon} \quad (3.52)$$

Inserindo na expressão anterior o módulo secante após a danificação ( $E_s$ ) e o módulo anterior à danificação ( $E_0$ ), a função de dano secante para os pontos  $P_{\sigma, \varepsilon}$  deste segundo trecho descendente fica:

$$\Phi_{t, \text{MTM}, S, 2} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot (p_2 \cdot \varepsilon_1 - \varepsilon)}{\varepsilon \cdot (p_2 - p_1)} + \frac{\alpha_2 \cdot \varepsilon_1}{\varepsilon} \quad (3.53)$$

Para o caso de dano com rigidez tangente, a função de dano neste trecho fica:

$$\Phi_{t, \text{MTM}, T, 2} = - \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{(p_2 - p_1)} \quad (3.54)$$

Uma vez estabelecidas as leis de dano para a modelagem de regiões de compressão e de tração na flexão do CRFA, materializadas pelas citadas expansões de classes no código computacional FEMOOP, cabe avaliar a aplicabilidade do modelo em casos reais de solicitação. Para isso, no capítulo seguinte, será realizada essa avaliação, simulando numericamente um conjunto de resultados experimentais de alguns autores, todos obtidos em CRFA, objetivando confrontar os valores numéricos obtidos pelo código computacional com os resultados de ensaios reais.

# 4

## **ESTUDO COMPARATIVO DO MODELO TRILINEAR PARA CARACTERIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO EM FLEXÃO DO CRFA**

### **4.1 Introdução**

Neste capítulo, dá-se início à avaliação dos modelos numéricos para fins de representação do comportamento do concreto reforçado com fibras de aço (CRFA). Para tanto, exploram-se as possibilidades do FEMOOP para mensuração do dano nas estruturas avaliadas, valendo-se dos modelos existentes de dano bilinear, não-linear e, finalmente, do modelo trilinear desenvolvido, conforme indicado no capítulo anterior.

As simulações apresentadas a seguir objetivam comparar os resultados obtidos numericamente com aqueles oriundos de ensaios de laboratório realizados por alguns pesquisadores, todos empregando CRFA. Os exemplos visam explorar as possibilidades de obtenção de resultados numéricos compatíveis com os resultados de laboratório de forma a garantir a confiabilidade necessária à modelagem numérica.

A abordagem dos casos simulados numericamente contempla problemas de estado plano, comuns na prática da Engenharia de Estruturas e, em específico, no dia-a-dia do CRFA. É feita uma avaliação da aplicabilidade do modelo trilinear proposto por meio de dois exemplos de viga, restringindo-se, neste capítulo, à metodologia do Modelo Trilinear Padrão (MTP), apresentada no Capítulo 3 deste trabalho. Os exemplos apresentados permitem obter uma boa avaliação das potencialidades do modelo.

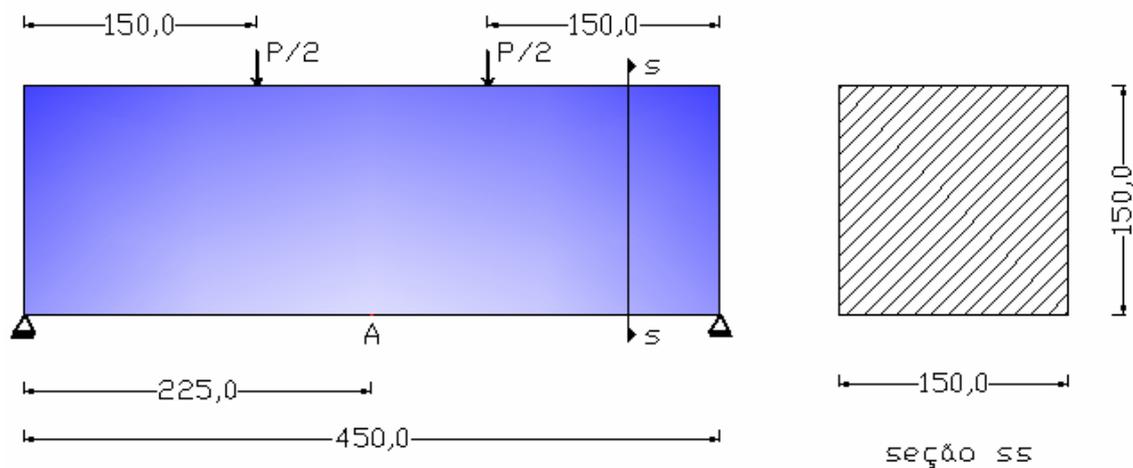
## 4.2 Avaliação da Aplicabilidade da Modelagem Trilinear

Em uma primeira aferição do modelo trilinear proposto neste trabalho, são efetuadas duas simulações de ensaios realizados em estruturas reforçadas com fibra de aço.

Em ambos os casos mostrados, lança-se mão da metodologia do modelo trilinear padrão (MTP), apresentada no Capítulo 3 deste trabalho. A aplicabilidade do modelo trilinear é testada perante os modelos de dano bilinear e não-linear, tencionando confirmar uma até então suposta maior eficiência do modelo trilinear em relação aos demais.

### 4.2.1 Flexão em Quatro Pontos

AGOPYAN e NUNES (1998) realizaram ensaios em vigas de CRFA submetidas a cargas aplicadas nos terços médios do vão (“*four-point bending*”), nos moldes da viga padronizada para o ensaio de tenacidade da norma japonesa JSCE (JSCE-SF4, 1984). A viga ensaiada tem comprimento total de 500,0 mm (vão de ensaio igual a 450,0 mm), altura de 150,0 mm e largura de 150,0 mm, conforme mostrado na figura 4.1.



**FIGURA 4.1** – Geometria (mm) e carregamento da viga em 4 pontos de AGOPYAN e NUNES (1998)

Foram utilizados três teores de fibras ( $V_f$ ), 20, 40 e 60 kg/m<sup>3</sup>, as quais tinham características geométricas apresentadas na tabela a seguir.

**TABELA 4.1:** Características geométricas das fibras de aço usadas por AGOPYAN e NUNES (1998)

Grupo de fibras		F1-A
Comprimento (mm)		49,0
Seção transversal	Largura (mm)	1,8
	Altura (mm)	0,45
Diâmetro equivalente (mm)		1,01
Fator de forma		48,5

Primeiramente, foram feitas análises empregando-se os modelos constitutivos bilinear e não-linear para dano em tração. Em seguida, visando aferir a aplicabilidade do modelo trilinear, foram feitas as simulações numéricas com o código computacional FEMOOP, empregando-se o modelo de dano MTP.

a) Teor de fibras igual a 20 kg/m<sup>3</sup>

MODELO BILINEAR

Para resolução numérica do problema, foi empregada uma análise em estado plano de tensão, utilizando-se um algoritmo de controle de deslocamentos generalizados, com um fator de tolerância de  $1,00 \times 10^{-4}$  para a convergência. Para a discretização do domínio, adotou-se uma malha uniforme de elementos finitos quadriláteros de 4 nós com largura igual a 37,5 mm e altura igual a 12,5 mm.

Na representação da lei de evolução do dano, foram empregados os parâmetros indicados na tabela a seguir. Para a compressão, utilizou-se uma lei de dano não-linear, com o parâmetro definidor da forma da curva ( $\beta$ ) adotado segundo a sugestão de CARREIRA e CHU (1985), apresentada no Capítulo 3.

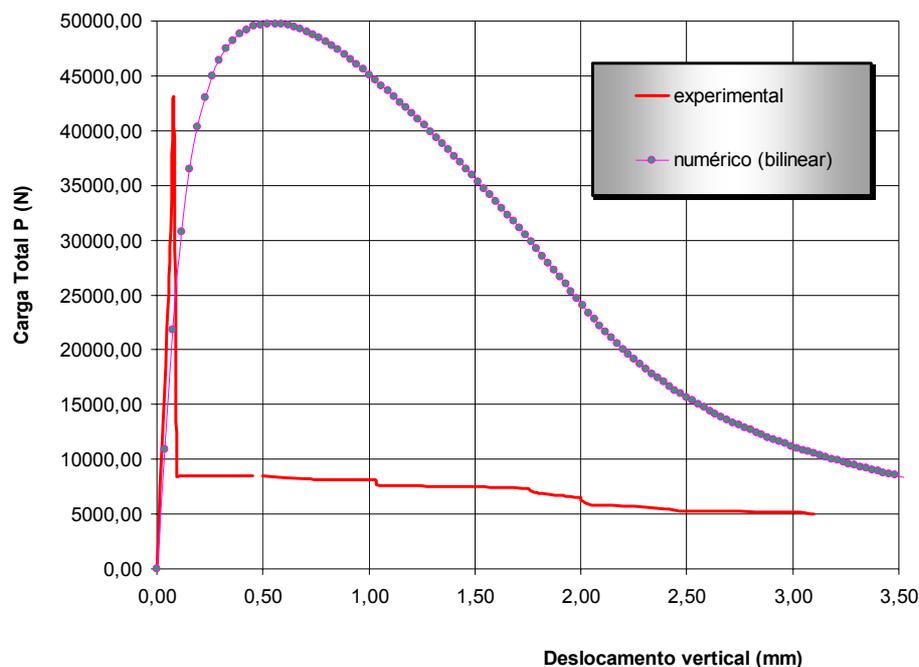
**TABELA 4.2:** Parâmetros de entrada dos modelos de dano em tração e em compressão (BILINEAR - 20 kg/m<sup>3</sup>)

$E_0$ (MPa)	$\nu$	$f_t$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$\epsilon_c$	$G_f$ (N/mm)	$h$ (mm)
32268	0,2	5,81	39,19	0,0022	1,22	10,0

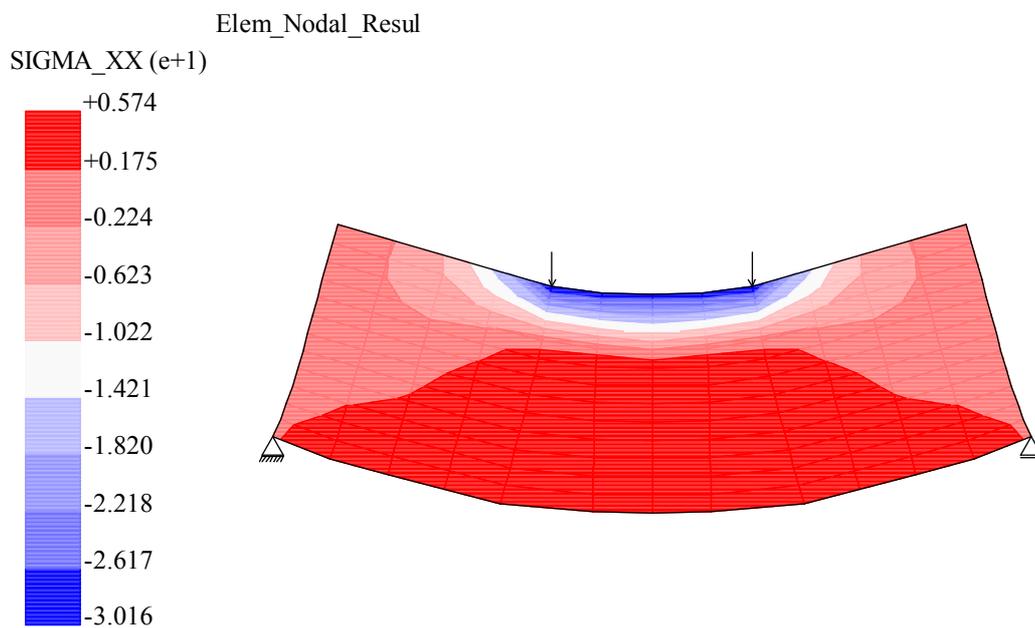
Na tabela anterior,  $f_t$  e  $f_c$  representam, respectivamente, a resistência à tração e a resistência à compressão do material, tendo sido obtidas do trabalho de AGOPYAN e NUNES (1998). O módulo de elasticidade longitudinal  $E_0$  foi calculado pela expressão  $E_0 = 9500 \cdot (f_c^{1/3})$  (EUROCODE 2, 1991) e, para  $\nu$  (coeficiente de Poisson), foi adotado um valor usual para concretos convencionais. O parâmetro  $\epsilon_c$  (deformação correspondente à tensão máxima de compressão) foi adotado a partir de uma indicação do Comitê Europeu de Concreto (CEB-FIP/MC1990, 1991). Os parâmetros  $G_f$  e  $h$  estão vinculados ao modelo que representa o dano em tração do material (ver Capítulo 3). Para os casos aqui simulados,  $h$  (tamanho característico) foi adotado de modo a aproximar as curvas teórica e experimental, tendo sempre em mente ainda a convergência do processo incremental-iterativo da análise. O parâmetro  $G_f$ , também

condicionante do modelo de dano bilinear em tração, foi obtido a partir dos valores do Fator de Tenacidade (JSCE-SF4, 1984), calculados e apresentados pelos autores da referência bibliográfica em tela, tendo em conta a energia absorvida no processo de fissuração e a expressão de cálculo do citado fator (Eq. (2.3) do Capítulo 2 desta tese).

A figura 4.2 mostra a curva carga x deslocamento vertical do ponto A da figura 4.1. Na figura 4.3, apresenta-se o contorno de tensões normais horizontais nos elementos correspondente à carga de pico da curva carga x deslocamento.



**FIGURA 4.2** – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto A) com lei de dano bilinear (Teor de 20 kg/m<sup>3</sup>)



**FIGURA 4.3** – Distribuição de tensões normais horizontais (em MPa) correspondente à carga de pico do diagrama carga x deslocamento da figura 4.2

A partir das figuras 4.2 e 4.3, verifica-se que o modelo de dano bilinear é incapaz de representar o comportamento do material, falhando na descrição da trajetória de equilíbrio da estrutura no regime pós-pico.

### MODELO NÃO-LINEAR

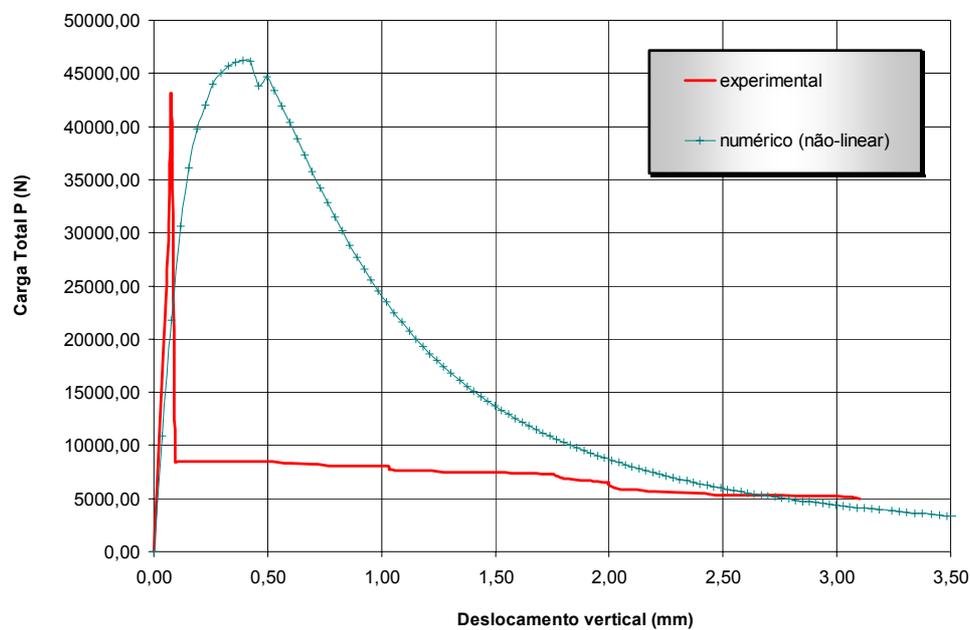
Neste caso, também foi empregada uma análise em estado plano de tensão, utilizando-se um algoritmo de controle de deslocamentos generalizados, com um fator de tolerância de  $1,00 \times 10^{-4}$  para a convergência, tendo-se empregado a mesma malha de elementos finitos do caso anterior.

Para representação da lei de evolução de dano, foram utilizados os parâmetros indicados na tabela a seguir, já definidos para o modelo anterior, tendo sido obtidos de forma idêntica à daquele caso.

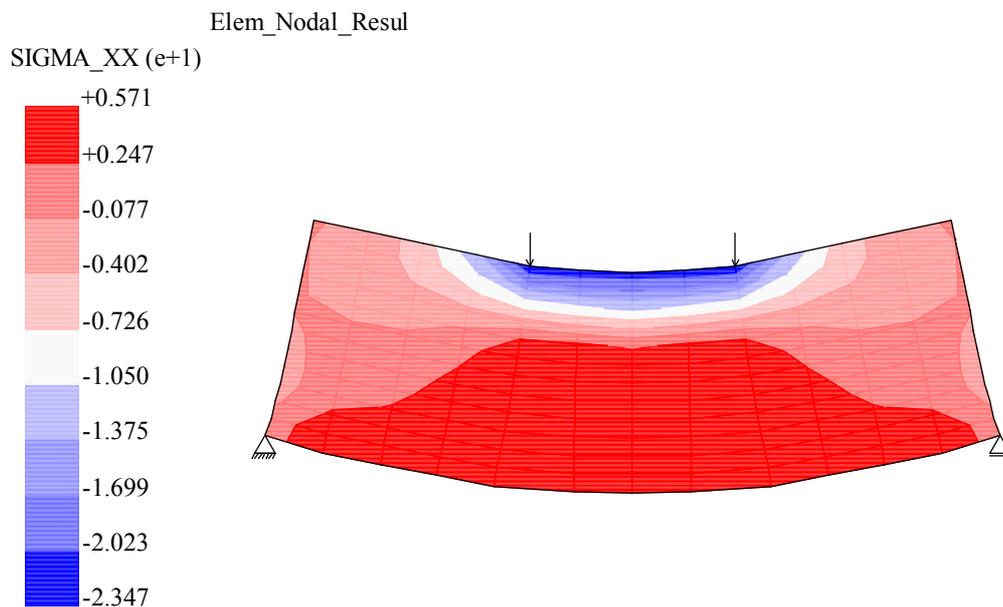
**TABELA 4.3:** Parâmetros de entrada dos modelos de dano em tração e em compressão (NÃO-LINEAR - 20 kg/m<sup>3</sup>)

$E_0$ (MPa)	$\nu$	$f_t$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$\epsilon_c$	$G_f$ (N/mm)	$h$ (mm)
32268	0,2	5,81	39,19	0,0022	1,22	10,0

A figura 4.4 mostra a curva carga x deslocamento vertical do ponto A da figura 4.1. Na figura 4.5, apresenta-se o contorno de tensões normais horizontais nos elementos correspondente à carga de pico da curva carga x deslocamento.



**FIGURA 4.4** – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto A) com lei de dano não-linear (Teor de 20 kg/m<sup>3</sup>)



**FIGURA 4.5** – Distribuição de tensões normais horizontais (em MPa) correspondente à carga de pico do diagrama carga x deslocamento da figura 4.4

Pelas figuras 4.4 e 4.5, verifica-se que o modelo de dano não-linear também não é capaz de representar o comportamento da viga. Apesar de haver uma melhor cobertura do ramo descendente do que no caso anterior (bilinear), com razoável aproximação da carga de pico, o modelo também falha na descrição da trajetória de equilíbrio da estrutura no regime pós-fissuração.

### MODELO TRILINEAR

A análise não-linear do problema foi realizada nos mesmos padrões dos casos anteriores, empregando-se, porém, uma lei de dano em tração trilinear segundo o modelo MTP.

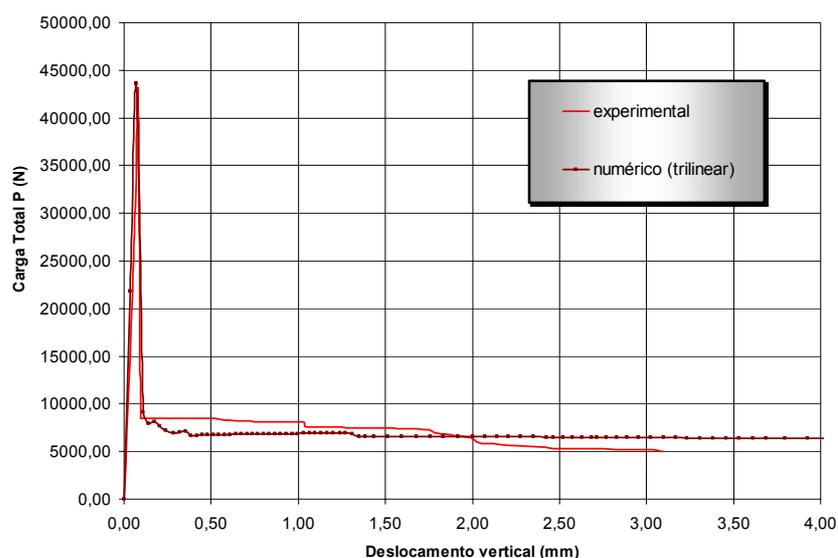
Para representação da lei de evolução de dano, foram utilizados os parâmetros indicados na tabela a seguir, valendo-se de uma lei de dano não-linear para a compressão.

**TABELA 4.4:** Parâmetros de entrada dos modelos de dano em tração e em compressão (TRILINEAR - 20 kg/m<sup>3</sup>)

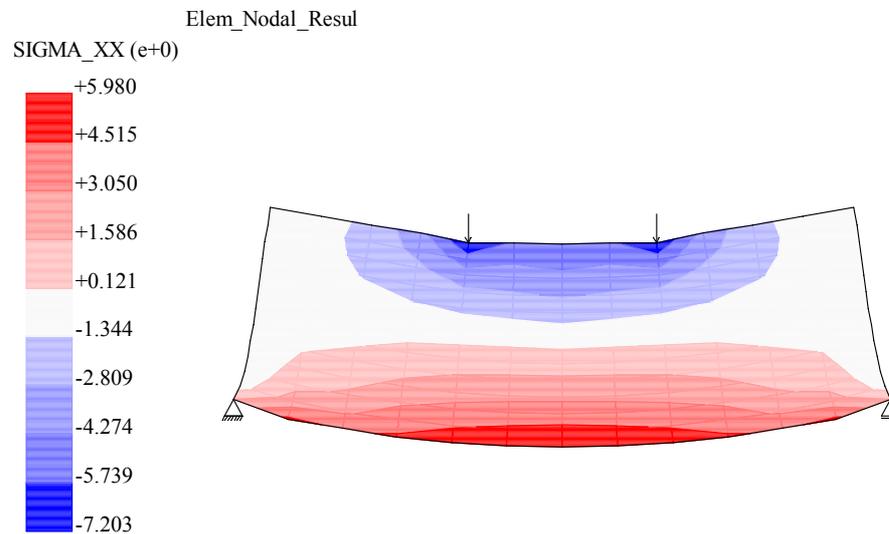
E <sub>0</sub> (MPa)	$\nu$	f <sub>t</sub> (MPa)	f <sub>c</sub> (MPa)	$\epsilon_c$	G <sub>f</sub> (N/mm)	h (mm)	$\alpha$	p <sub>1</sub>
32268	0,2	5,81	39,19	0,0022	1,22	10,0	0,05	1,05

A maior parte dos parâmetros da tabela foi obtida de forma idêntica à dos casos anteriores. Por outro lado, os parâmetros  $\alpha$  e p<sub>1</sub> (característicos da lei constitutiva do modelo de tração) foram adotados de modo a aproximar as curvas teórica e experimental, cuidando-se de garantir ainda a convergência do processo incremental-iterativo da análise.

A figura 4.6 mostra a curva carga x deslocamento vertical do ponto A da figura 4.1. Na figura 4.7, apresenta-se o contorno de tensões normais horizontais nos elementos correspondente à carga de pico da curva carga x deslocamento.



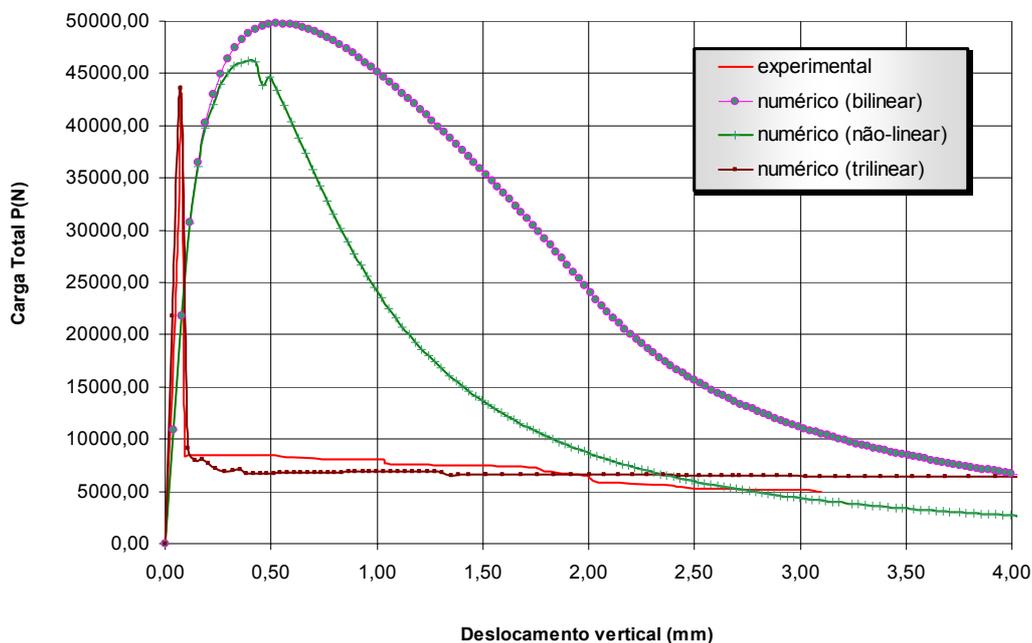
**FIGURA 4.6** – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto A) com lei de dano trilinear (Teor de 20 kg/m<sup>3</sup>)



**FIGURA 4.7** – Distribuição de tensões normais horizontais (em MPa) correspondente à carga de pico do diagrama carga x deslocamento da figura 4.6

Nas figuras 4.6 e 4.7, percebe-se que o modelo trilinear consegue melhor representar o comportamento do material, tanto na avaliação da carga de pico quanto na descrição do regime pós-pico.

A fim de possibilitar uma visão geral dos modelos avaliados, na figura a seguir, apresenta-se a comparação dos resultados da curva carga x deslocamento obtidos para o teor de  $20 \text{ kg/m}^3$  com os modelos bilinear, não-linear e trilinear.



**FIGURA 4.8** – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto A): comparação entre as respostas dos modelos bilinear, não-linear e trilinear (Teor de  $20 \text{ kg/m}^3$ )

### **b) Teor de fibras igual a $40 \text{ kg/m}^3$**

Nos dois modelos testados para este teor (não-linear e trilinear), a análise foi conduzida de forma idêntica à do teor de  $20 \text{ kg/m}^3$  no que se refere à discretização do domínio em elementos finitos e ao controle da convergência do processo incremental-iterativo. Os parâmetros necessários para esses modelos, apresentados nas tabelas 4.5 e 4.6 a seguir, foram obtidos dos mesmos modos que os indicados para os respectivos modelos tratados no teor de  $20 \text{ kg/m}^3$  (tabelas 4.3 e 4.4).

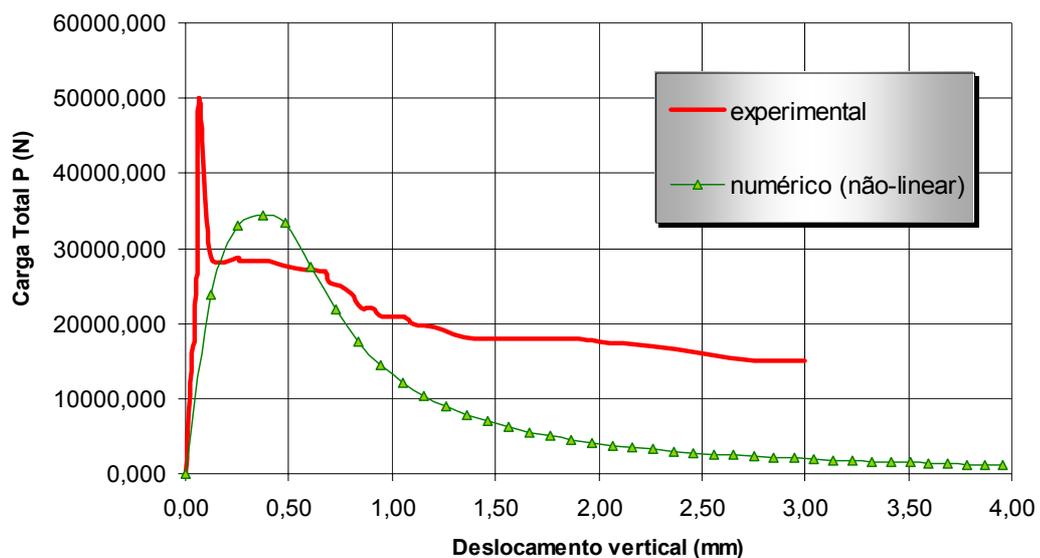
#### *MODELO NÃO-LINEAR*

Para representação da lei de evolução de dano, foram empregados os parâmetros indicados na tabela a seguir, tendo-se utilizado uma lei de dano também não-linear para a compressão.

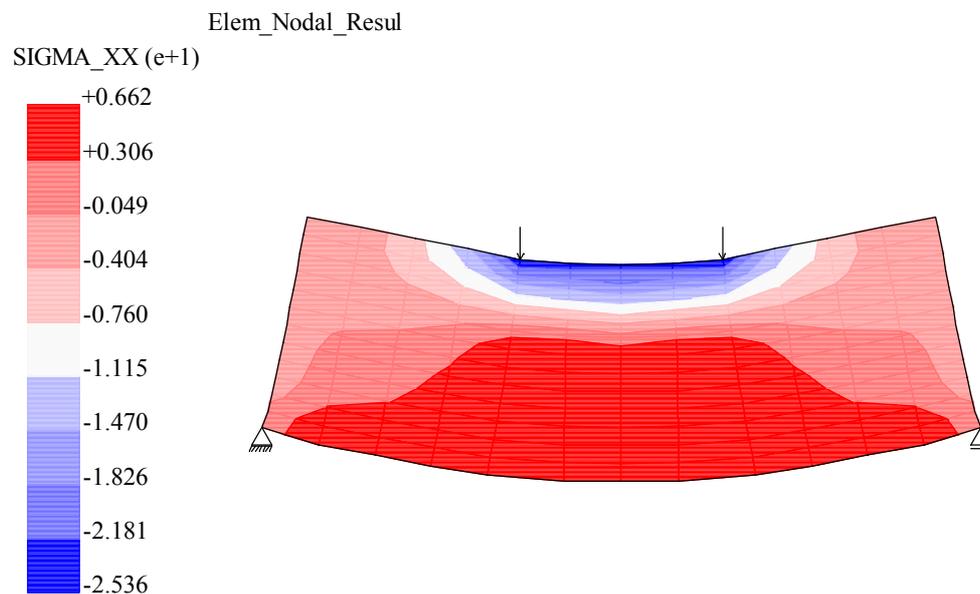
**TABELA 4.5:** Parâmetros de entrada dos modelos de dano em tração e em compressão (NÃO-LINEAR – 40 kg/m<sup>3</sup>)

$E_0$ (MPa)	$\nu$	$f_t$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$\epsilon_c$	$G_f$ (N/mm)	$h$ (mm)
32662	0,2	6,81	40,64	0,0022	2,6	25,0

A figura 4.9 mostra a curva carga x deslocamento vertical do ponto A da figura 4.1. Na figura 4.10, apresenta-se o contorno de tensões normais horizontais nos elementos correspondente à carga de pico da curva carga x deslocamento.



**FIGURA 4.9** – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto A) com lei de dano não-linear (Teor de 40 kg/m<sup>3</sup>)



**FIGURA 4.10** – Distribuição de tensões normais horizontais (em MPa) correspondente à carga de pico do diagrama carga x deslocamento da figura 4.9

Com as duas figuras anteriores, novamente se verifica que o modelo de dano não-linear é incapaz de representar o comportamento do material, atribuindo a ele uma capacidade de absorção de energia bastante distinta daquela observada no resultado experimental.

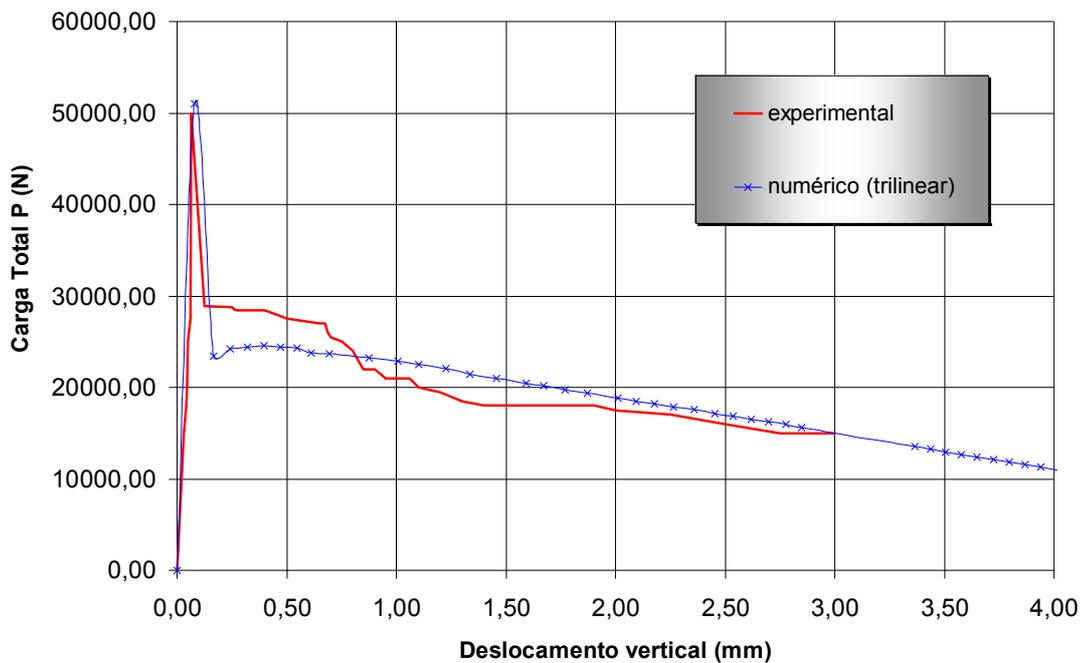
### MODELO TRILINEAR

Para representação da lei de evolução de dano, foram empregados os parâmetros indicados na tabela a seguir, com lei de dano não-linear para a compressão.

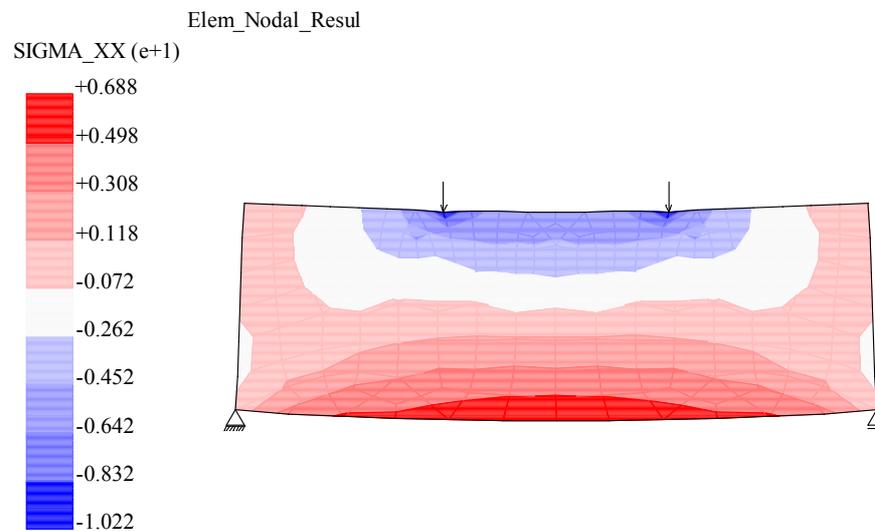
**TABELA 4.6:** Parâmetros de entrada dos modelos de dano em tração e em compressão (TRILINEAR – 40 kg/m<sup>3</sup>)

$E_0$ (MPa)	$\nu$	$f_t$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$\epsilon_c$	$G_f$ (N/mm)	$h$ (mm)	$\alpha$	$p_1$
32262	0,2	6,81	40,64	0,0022	2,6	25,0	0,16	1,05

A figura 4.11 mostra a curva carga x deslocamento vertical do ponto A da figura 4.1. Na figura 4.12, apresenta-se o contorno de tensões normais horizontais nos elementos correspondente à carga de pico da curva carga x deslocamento.



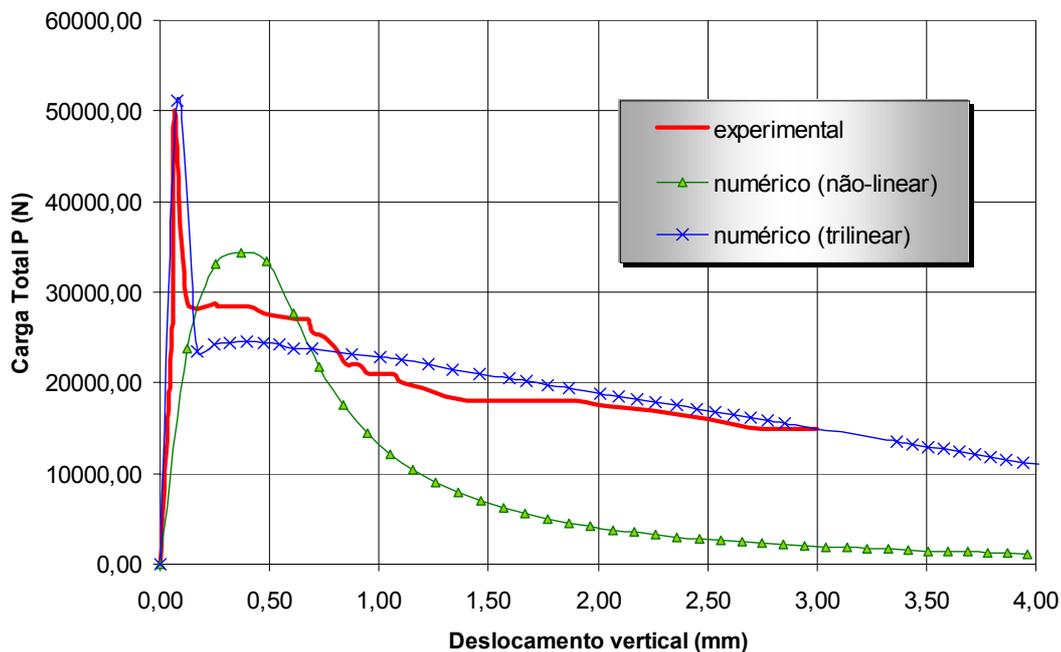
**FIGURA 4.11** – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto A) com lei de dano trilinear (Teor de 40 kg/m<sup>3</sup>)



**FIGURA 4.12** – Distribuição de tensões normais horizontais (em MPa) correspondente à carga de pico do diagrama carga x deslocamento da figura 4.11

Nas figuras 4.11 e 4.12, constata-se novamente que o modelo trilinear consegue melhor representar o comportamento do material, tanto na avaliação da carga de pico quanto na descrição do regime pós-pico.

Na figura a seguir, apresenta-se a comparação dos resultados da curva carga x deslocamento obtidos para o teor de  $40 \text{ kg/m}^3$  com os modelos não-linear e trilinear.



**FIGURA 4.13** – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto A): comparação entre as respostas dos modelos não-linear e trilinear (**Teor de 40 kg/m<sup>3</sup>**)

### c) Teor de fibras igual a 60 kg/m<sup>3</sup>

Nos dois modelos testados para este teor (não-linear e trilinear), manteve-se o padrão de discretização do domínio em elementos finitos empregado nos teores de 20 kg/m<sup>3</sup> e 40 kg/m<sup>3</sup>, assim como o controle da convergência do processo incremental-iterativo durante a análise. Os parâmetros necessários para esses modelos, apresentados nas tabelas 4.7 e 4.8 adiante, foram obtidos dos mesmos modos que os indicados para os respectivos modelos tratados nos teores anteriores.

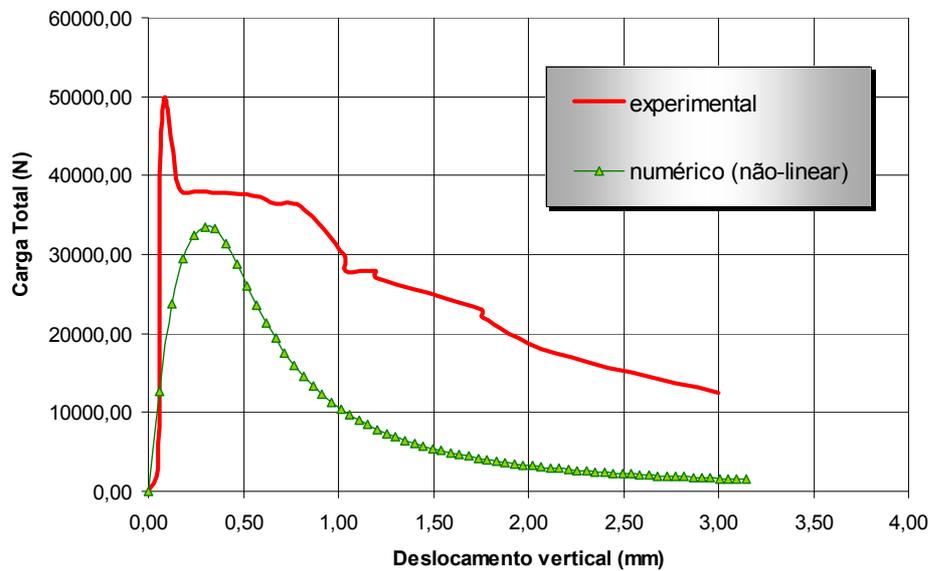
### MODELO NÃO-LINEAR

Para representação da lei de evolução de dano, foram empregados os parâmetros indicados na tabela a seguir, tendo-se utilizado uma lei de dano também não-linear para a compressão.

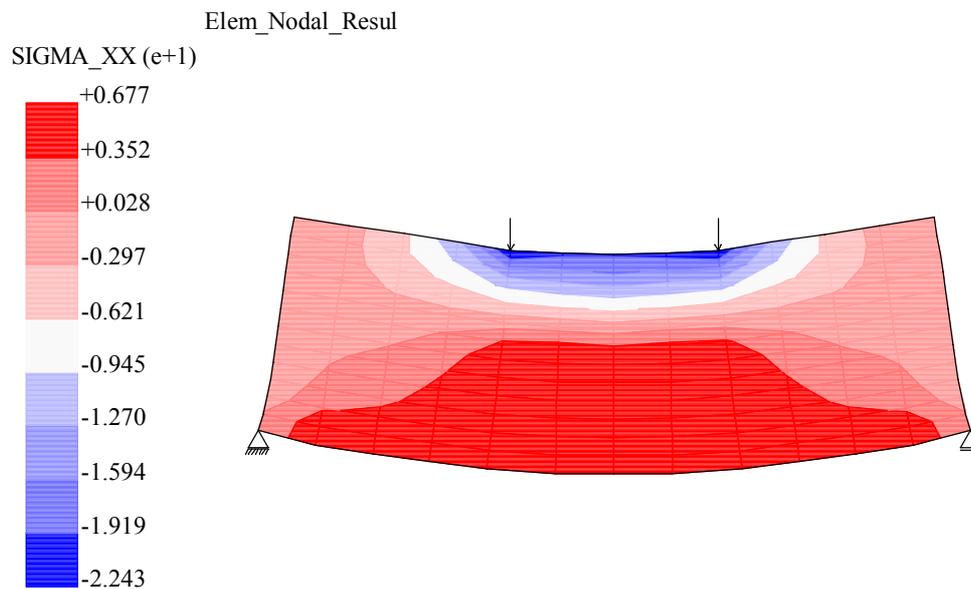
**TABELA 4.7:** Parâmetros de entrada dos modelos de dano em tração e em compressão (NÃO-LINEAR – 60 kg/m<sup>3</sup>)

$E_0$ (MPa)	$\nu$	$f_t$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$\epsilon_c$	$G_f$ (N/mm)	$h$ (mm)
32598	0,2	6,76	40,40	0,0022	3,23	35,0

A figura 4.14 mostra a curva carga x deslocamento vertical do ponto A da figura 4.1. Na figura 4.15, apresenta-se o contorno de tensões normais horizontais nos elementos correspondente à carga de pico da curva carga x deslocamento.



**FIGURA 4.14** – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto A) com lei de dano não-linear (Teor de 60 kg/m<sup>3</sup>)



**FIGURA 4.15** – Distribuição de tensões normais horizontais (em MPa) correspondente à carga de pico do diagrama carga x deslocamento da figura 4.14

Com as duas figuras anteriores, novamente se verifica que o modelo de dano não-linear não é capaz de representar o comportamento do material.

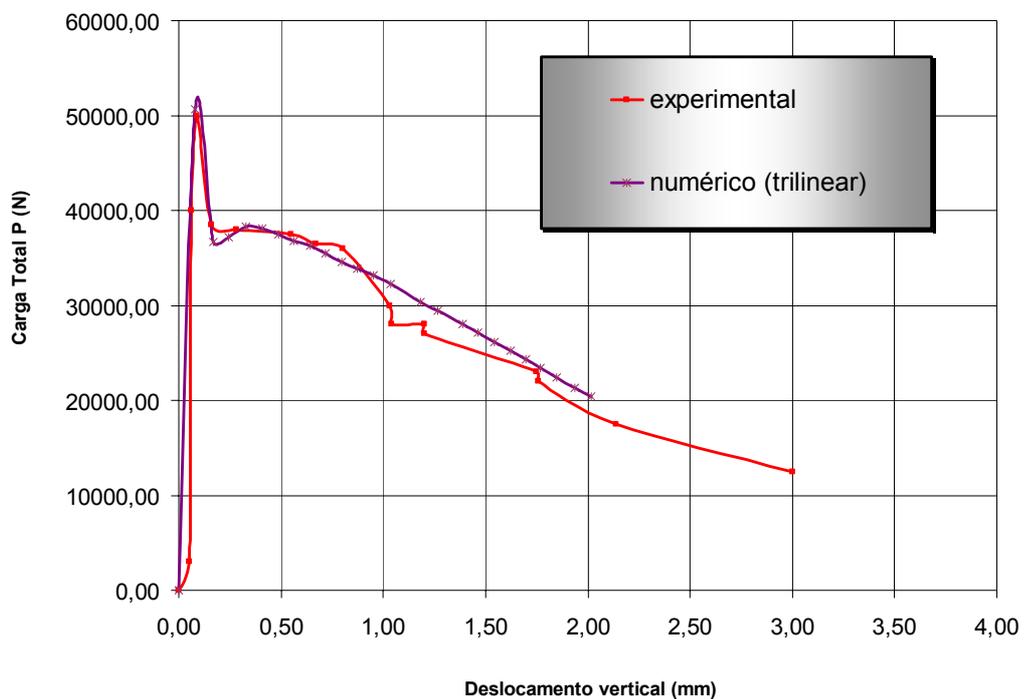
### MODELO TRILINEAR

Para representação da lei de evolução de dano, foram empregados os parâmetros indicados na tabela a seguir, com lei de dano não-linear para a compressão.

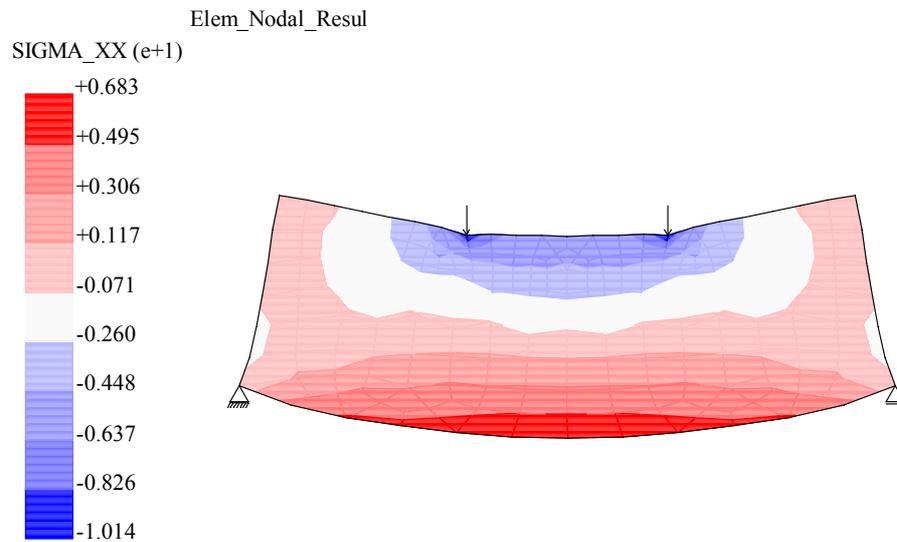
**TABELA 4.8:** Parâmetros de entrada dos modelos de dano em tração e em compressão (TRILINEAR – 60 kg/m<sup>3</sup>)

$E_0$ (MPa)	$\nu$	$f_t$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$\epsilon_c$	$G_f$ (N/mm)	$h$ (mm)	$\alpha$	$p_1$
32598	0,2	6,76	40,40	0,0022	3,23	35	0,27	1,05

A figura 4.16 mostra a curva carga x deslocamento vertical do ponto A da figura 4.1. Na figura 4.17, apresenta-se o contorno de tensões normais horizontais nos elementos correspondente à carga de pico da curva carga x deslocamento.

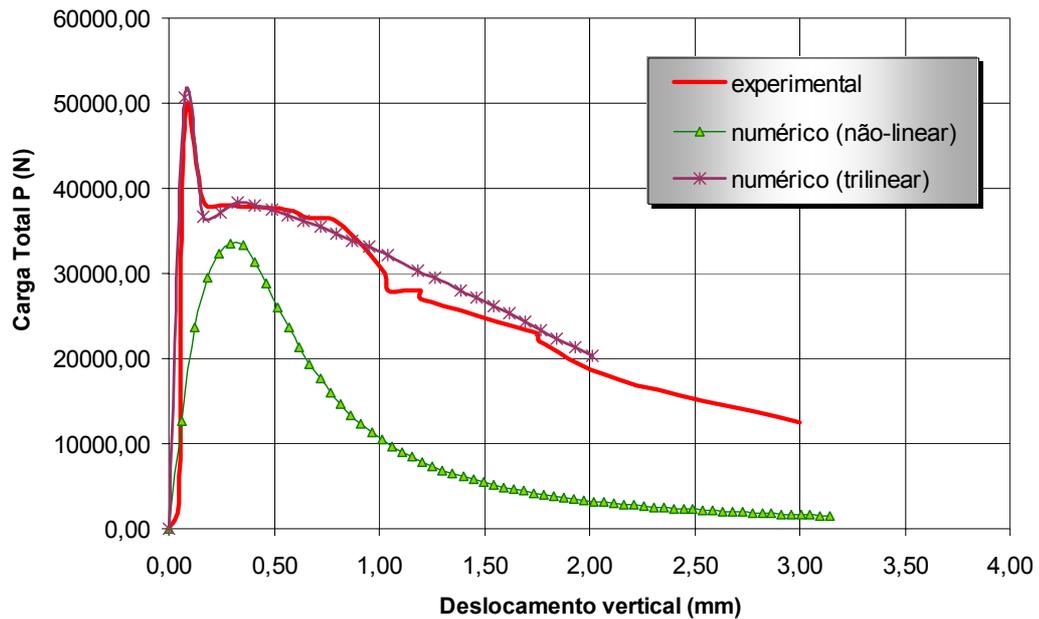


**FIGURA 4.16** – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto A) com lei de dano trilinear (Teor de 60 kg/m<sup>3</sup>)



**FIGURA 4.17** – Distribuição de tensões normais horizontais (em MPa) correspondente à carga de pico do diagrama carga x deslocamento da figura 4.16

Nas figuras 4.16 e 4.17, confirma-se o modelo trilinear como a melhor representação para o comportamento do material, o que fica mais bem visualizado na curva seguinte, com a comparação direta dos resultados da curva carga x deslocamento obtidos para o teor de  $60 \text{ kg/m}^3$ .



**FIGURA 4.18** – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto A): comparação entre as respostas dos modelos não-linear e trilinear (Teor de  $60 \text{ kg/m}^3$ )

Uma vez constatado que a melhor resposta do comportamento do material foi fornecida pelo modelo trilinear, na figura seguinte, apresentam-se as curvas obtidas com esse modelo para os diversos teores analisados ( $20$ ,  $40$  e  $60 \text{ kg/m}^3$ ), confrontando-as com os resultados experimentais.

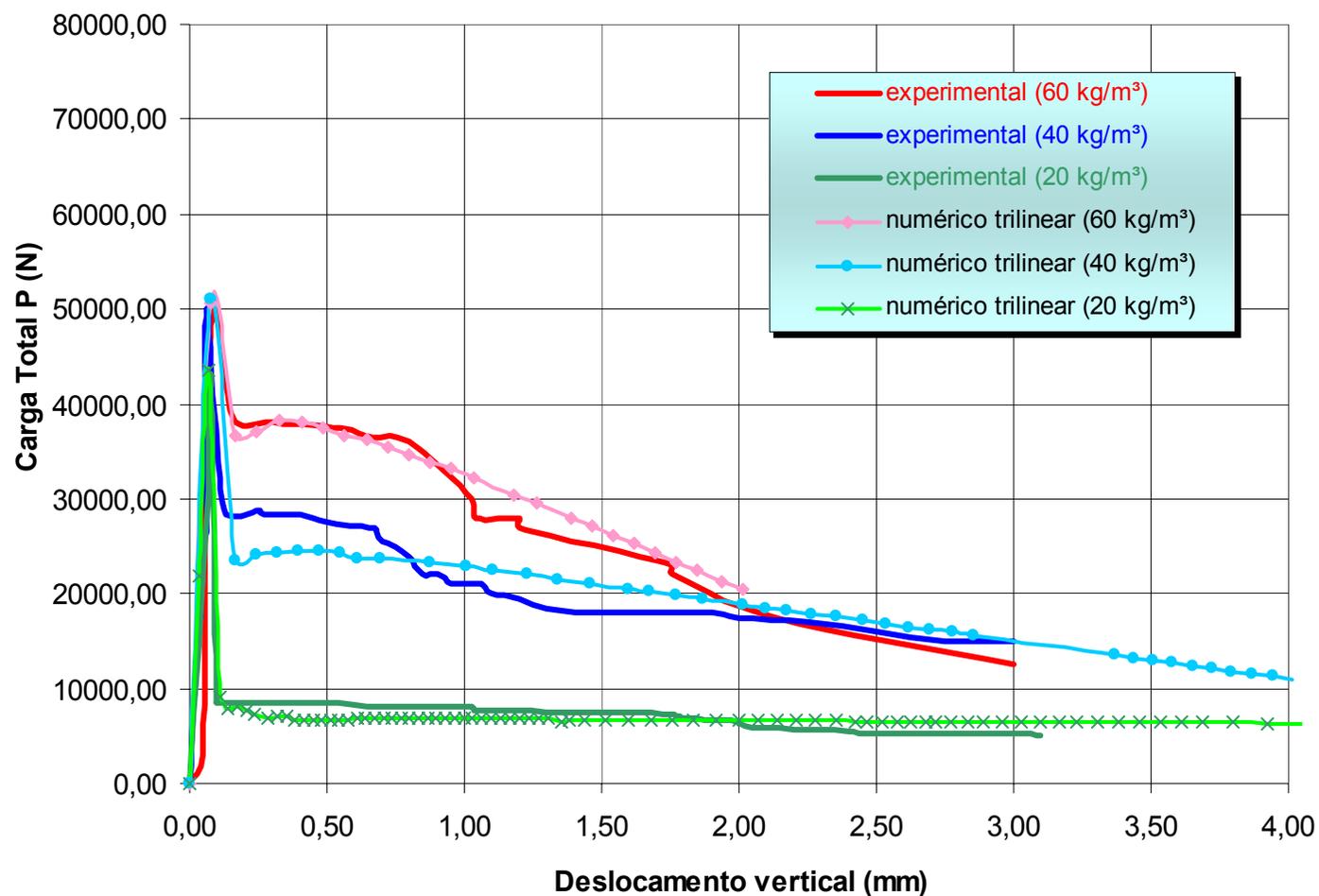


FIGURA 4.19 – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão (ponto A): respostas do modelo trilinear para diferentes teores de fibras

Os exemplos apresentados permitiram efetuar uma primeira avaliação dos modelos para tratamento do dano no CRFA. As simulações numéricas realizadas empregando-se o modelo trilinear padrão (MTP) confirmaram a sua boa resposta para representação do comportamento do material, permitindo ratificar a hipótese de que esse modelo teria uma aplicabilidade maior que a dos demais modelos disponíveis (bilinear e não-linear).

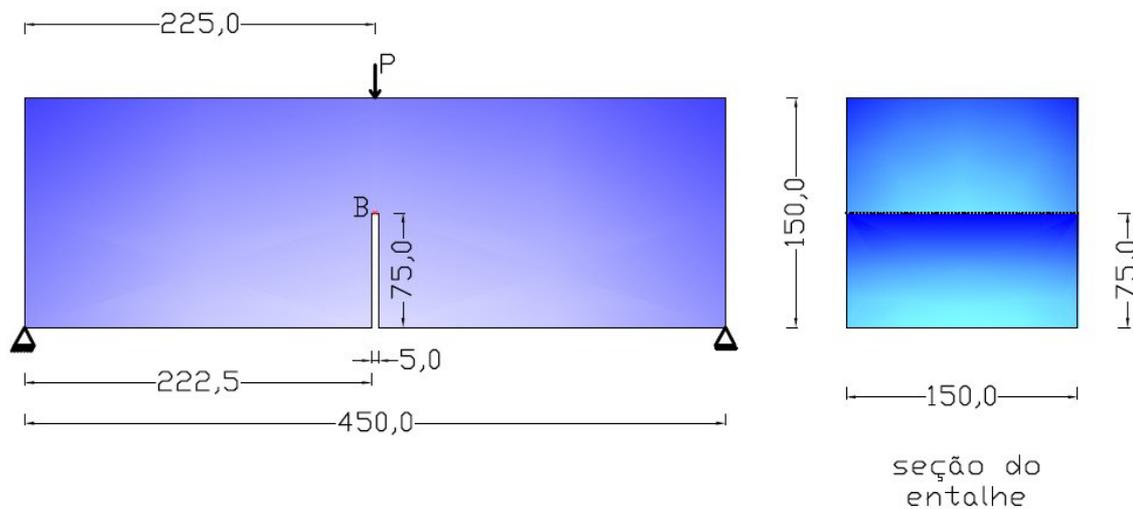
A seguir, pretende-se explorar um novo conjunto de simulações numéricas visando ainda testar a aplicabilidade do modelo trilinear; desta vez, porém, em um outro elemento estrutural e com uma variação distinta do teor de fibras.

#### 4.2.2 Flexão em Três Pontos

ARAÚJO, D. (2002) realizou ensaios em vigas de CRFA submetidas a carga aplicada no meio do vão (“*three-point bending*”). Além de ter empregado uma fibra de aço com características diferentes das do caso anterior, o autor adotou teores de fibra maiores, o que motivou as simulações a seguir apresentadas, objetivando, em última instância, ainda testar a aplicabilidade do modelo trilinear.

A viga ensaiada tem comprimento total de 500,0 mm (vão de ensaio igual a 450,0 mm), altura de 150,0 mm, largura de 150,0 mm e um entalhe retangular na metade do vão, partindo da face inferior da viga, com altura de 75,0 mm e largura de aproximadamente 5,0 mm. A figura a seguir esquematiza a geometria e o carregamento da viga do presente caso.

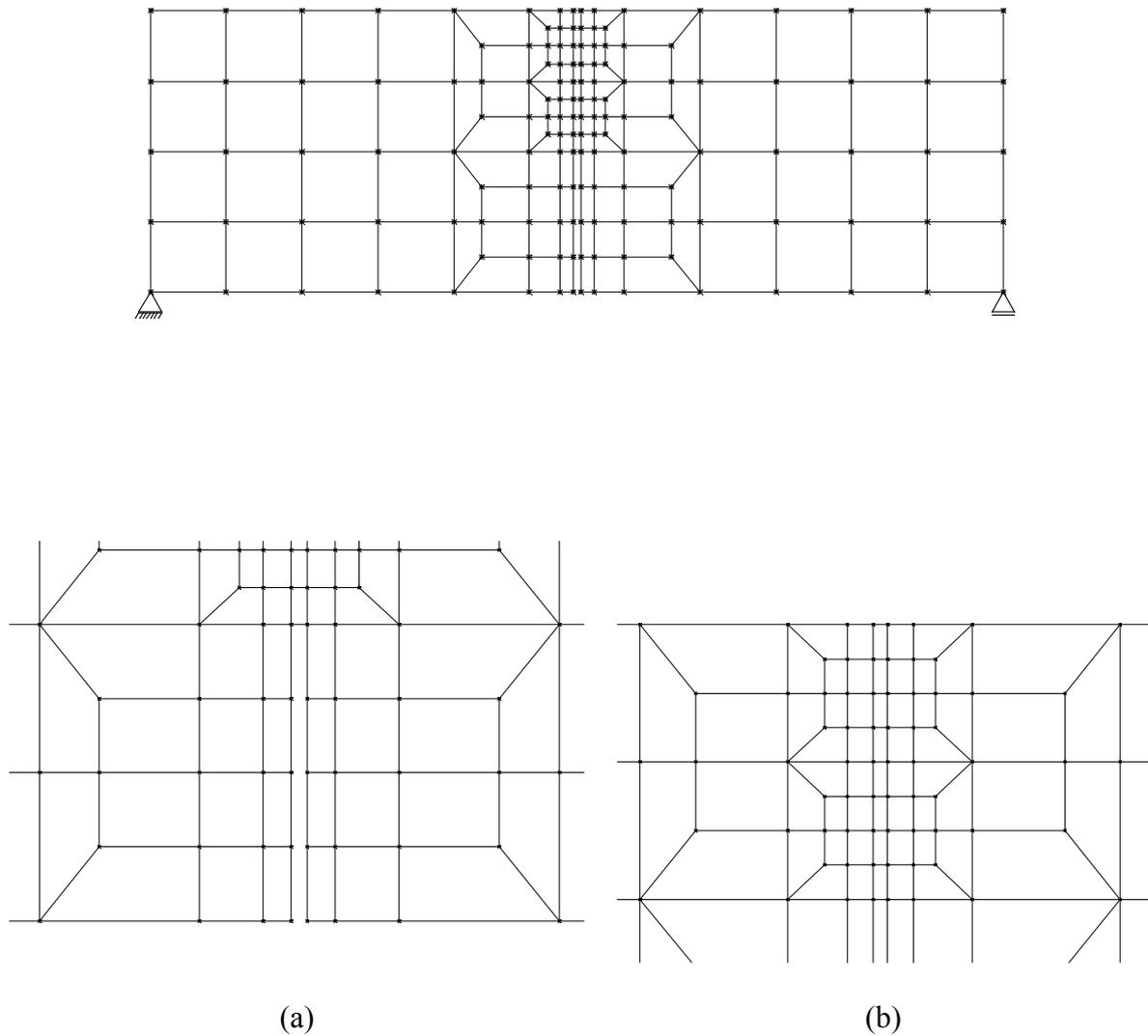
Foram empregadas fibras de aço DRAMIX® RL 45/30 BN, com extremidades em gancho ( $l_f = 30,0$  mm;  $d_f = 0,62$ ), tendo sido avaliados, neste trabalho, três teores de fibras: 79, 118 e 157 kg/m<sup>3</sup>.



**FIGURA 4.20** – Geometria (mm) e carregamento da viga entalhada de ARAÚJO, D. (2002)

Para resolução numérica do problema, foi empregada uma análise em estado plano de tensão, utilizando-se um algoritmo de controle de deslocamentos generalizados, com um fator de tolerância de  $1,00 \times 10^{-4}$  para a convergência. O domínio foi discretizado em uma malha de 120 elementos finitos quadrilaterais de 4 nós (Figura 4.21).

As análises foram feitas diretamente com a lei constitutiva não-linear para dano em compressão e trilinear para dano em tração, valendo-se ainda, nesse caso, da formulação do Modelo Trilinear Padrão (MTP - ver Capítulo 3). Os parâmetros do modelo de dano indicados nas tabelas deste exemplo foram obtidos da mesma forma que no exemplo anterior (seção 4.2.1). Exceção se fez aos valores da energia de fratura  $G_f$ , que foram obtidos diretamente por ARAÚJO, D. (2002), e ao parâmetro  $h$ , que, pela natureza do problema, assumiu valores da ordem de grandeza da largura do entalhe.



**FIGURA 4.21** – Malha de elementos finitos para a viga entalhada de ARAÚJO, D. (2002), com detalhamento da discretização nas regiões do entalhe (a) e da carga (b)

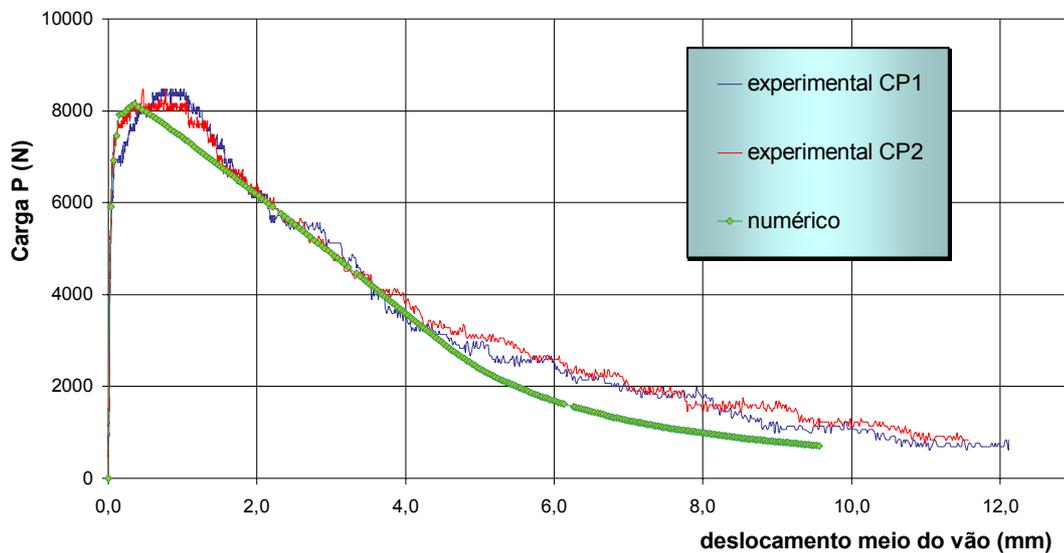
**a) Teor de fibras igual a 79 kg/m<sup>3</sup>**

Para representação da lei de evolução de dano, foram empregados os parâmetros indicados na tabela a seguir. Na figura seguinte, encontram-se os resultados numéricos obtidos e os resultados experimentais oriundos de dois corpos-de-prova (CP1 e CP2).

**TABELA 4.9:** Parâmetros de entrada dos modelos de dano em tração e em compressão (TRILINEAR – 79 kg/m<sup>3</sup>)

E <sub>0</sub> (MPa)	v	f <sub>t</sub> (MPa)	f <sub>c</sub> (MPa)	ε <sub>c</sub>	G <sub>r</sub> (N/mm)	h (mm)	α	p <sub>1</sub>
39902	0,2	6,73	74,10	0,0022	4,330	5,0	0,35	1,05

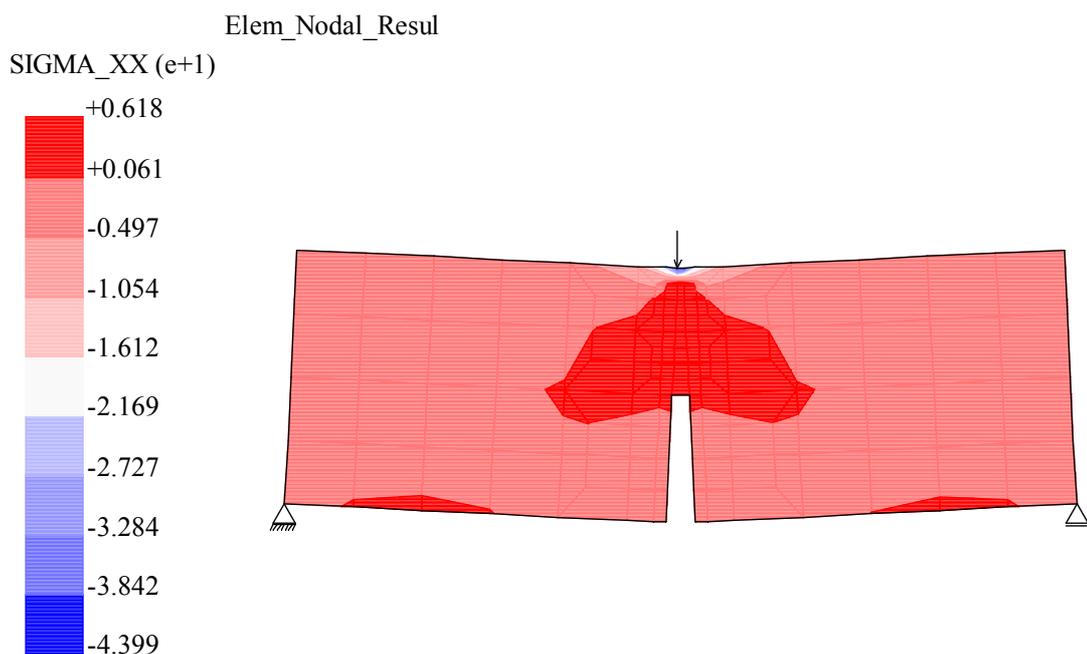
A figura 4.22 mostra a curva carga x deslocamento vertical do ponto B da figura 4.20.



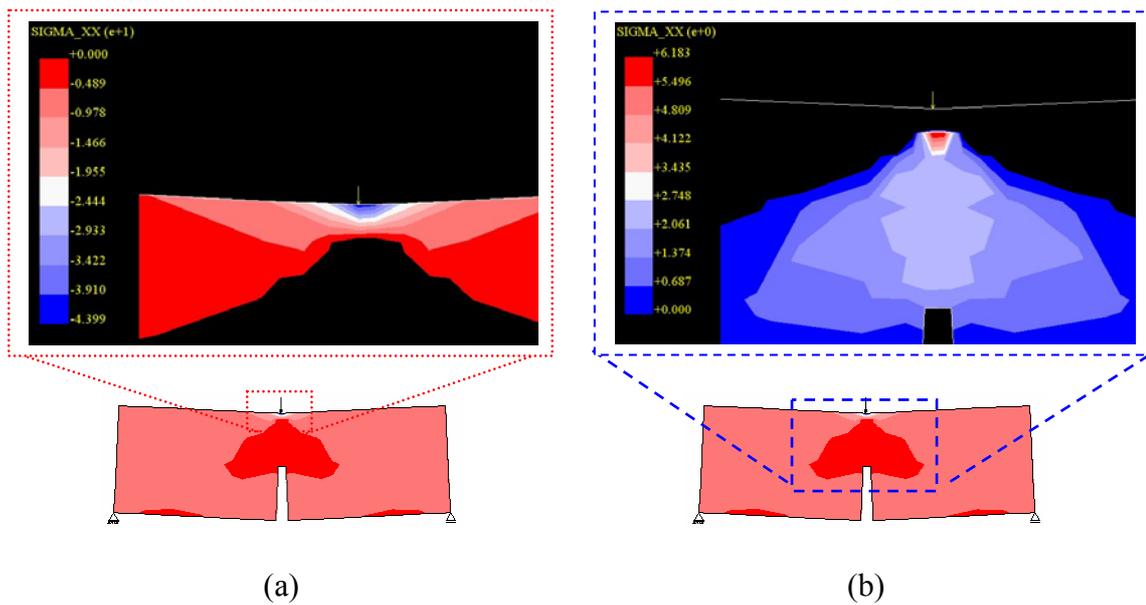
**FIGURA 4.22** – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão na Seção do Entalhe (ponto B) com lei de dano trilinear (Teor de 79 kg/m<sup>3</sup>)

Para este teor, verifica-se que o modelo consegue bem representar o comportamento do material, mostrando uma resposta satisfatória na curva da figura anterior.

Na figura 4.23, apresenta-se o contorno de tensões normais horizontais nos elementos para o ponto correspondente à carga de pico da curva carga x deslocamento. São mostrados em seguida os detalhamentos do contorno dessas tensões para as regiões de aplicação da carga e do entalhe (Figura 4.24).



**FIGURA 4.23** – Distribuição de tensões normais horizontais (em MPa) correspondente à carga de pico do diagrama carga x deslocamento da figura 4.22



**FIGURA 4.24** – Detalhamento da distribuição de tensões normais horizontais da figura 4.23 nas regiões de aplicação da carga (a) e do entalhe (b)

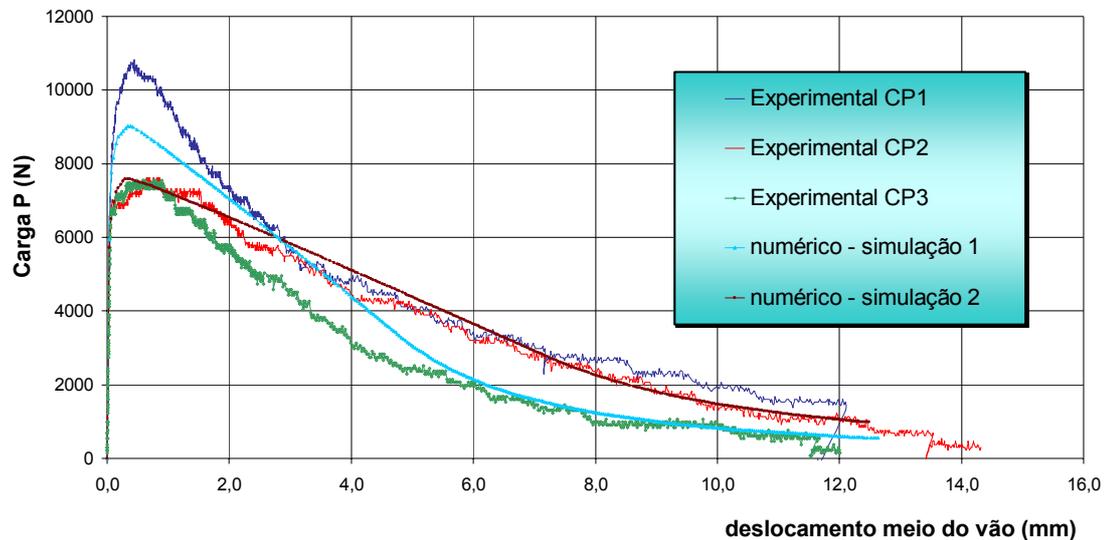
**b) Teor de fibras igual a 118 kg/m<sup>3</sup>**

Neste caso, foi possível avaliar a sensibilidade de parâmetros do modelo trilinear padrão. Com os resultados experimentais disponíveis para três corpos-de-prova (CP1, CP2 e CP3), foram feitas modificações em parâmetros do modelo a fim de que os resultados das simulações pudessem representar, da melhor forma possível, o espectro de resultados experimentais. A tabela a seguir apresenta os parâmetros de entrada do modelo para cada simulação realizada.

**TABELA 4.10:** Parâmetros de entrada dos modelos de dano em tração e em compressão (TRILINEAR – 118 kg/m<sup>3</sup>)

simulação	E <sub>0</sub> (MPa)	ν	f <sub>t</sub> (MPa)	f <sub>c</sub> (MPa)	ε <sub>c</sub>	G <sub>f</sub> (N/mm)	h (mm)	α	p <sub>1</sub>
1	40992	0,2	6,55	80,34	0,0022	5,177	5,0	0,40	1,05
2	40992	0,2	6,55	80,34	0,0022	5,177	4,0	0,33	1,05

A figura 4.25 mostra a curva carga x deslocamento vertical do ponto B da figura 4.20.



**FIGURA 4.25** – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão na Seção do Entalhe (ponto B) com lei de dano trilinear ( $\text{Teor de } 118 \text{ kg/m}^3$ )

As curvas anteriores permitem constatar a sensibilidade do modelo à variação dos parâmetros da lei constitutiva. Embora também neste exemplo se tenha deparado com uma certa variabilidade dos resultados experimentais, o modelo se comportou bem durante as análises, permitindo que a simulação numérica encontrasse respostas eficientes. Percebe-se que os resultados numéricos (simulações 1 e 2) conseguem representar grande parte dos regimes pós-fissuração revelados pelos corpos-de-prova CP1 e CP3. Além disso, constata-se que o resultado experimental de CP2 é bem representado pelo resultado numérico da simulação 2 em toda a trajetória de equilíbrio da estrutura.

**c) Teor de fibras igual a 157 kg/m<sup>3</sup>**

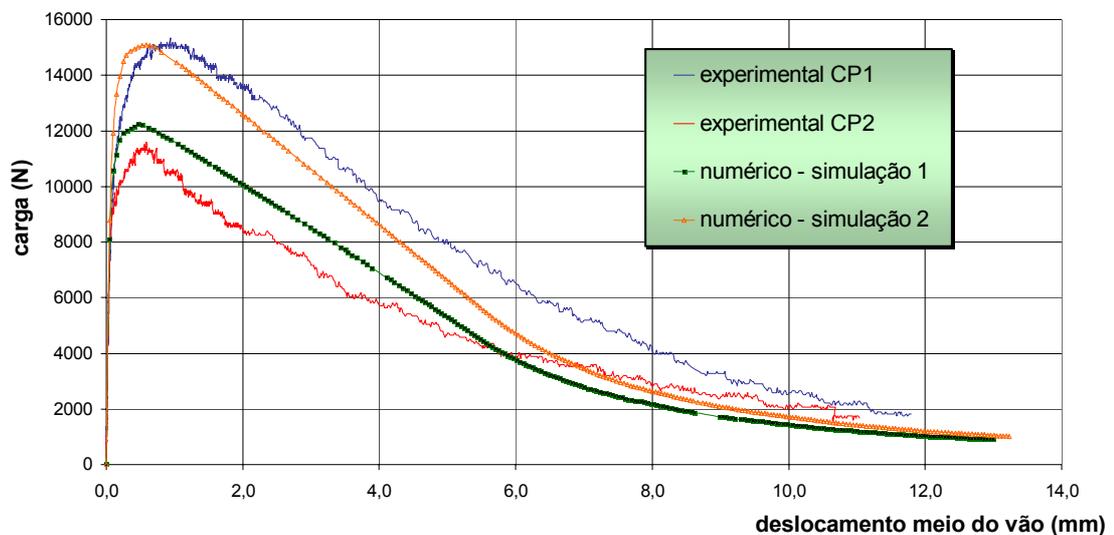
Finalizando o conjunto de análises baseadas no modelo trilinear padrão, foram feitas simulações com um teor de 157 kg/m<sup>3</sup>. De fato, essa última avaliação do modelo MTP permitiu expor a aplicabilidade da modelagem trilinear para um caso típico de teor de fibras de aço bem acima dos usuais, segundo o que foi discutido no Capítulo 2 desta tese. Paralelamente, manteve-se a possibilidade de apuração da sensibilidade do modelo trilinear a partir da variação dos parâmetros da sua lei constitutiva, nos mesmos moldes tratados no teor de 118 kg/m<sup>3</sup>.

A tabela a seguir apresenta os parâmetros de entrada do modelo para cada simulação realizada.

**TABELA 4.11:** Parâmetros de entrada dos modelos de dano em tração e em compressão (TRILINEAR – 157 kg/m<sup>3</sup>)

Simulação	E <sub>0</sub> (MPa)	v	f <sub>t</sub> (MPa)	f <sub>c</sub> (MPa)	ε <sub>c</sub>	G <sub>f</sub> (N/mm)	h (mm)	α	p <sub>1</sub>
1	40866	0,2	8,95	79,60	0,0022	8,029	5,0	0,4	1,05
2	40866	0,2	8,95	79,60	0,0022	8,029	4,0	0,5	1,05

A figura 4.26 mostra a curva carga x deslocamento vertical do ponto B da figura 4.20. Novamente, foi possível avaliar a sensibilidade de parâmetros do modelo trilinear padrão. A partir de modificações nos parâmetros do modelo, confirmou-se a boa simulação dos resultados experimentais disponíveis para dois corpos-de-prova (CP1 e CP2).



**FIGURA 4.26** – Carga x Deslocamento Vertical do Meio do Vão na Seção do Entalhe (ponto B) com lei de dano trilinear (**Teor de 157 kg/m<sup>3</sup>**)

Em geral, os resultados apresentados para os exemplos tratados neste capítulo permitiram confirmar a boa receptividade à modelagem de dano trilinear. Isso se confirmou na superioridade do modelo trilinear em relação ao demais (bilinear e não-linear) bem como na possibilidade de se dispor de uma boa sensibilidade desse modelo às variações presentes nos resultados experimentais simulados.

Por outro lado, procedendo-se a uma análise mais aprofundada dos resultados, pode-se expandir as conclusões até aqui obtidas. Em geral, da forma como foram estabelecidas as leis constitutivas do material para cada enfoque de dano em tração (bilinear, não-linear e trilinear padrão), com os exemplos anteriores, verificou-se que essa classe de modelos exibe uma dependência dos parâmetros  $G_f$  e  $h$ . A escolha aleatória ou a determinação imprecisa desses parâmetros pode onerar a obtenção de resultados numéricos satisfatórios ou, ao menos, dificultar a decisão do analista quanto ao correto uso dos modelos mencionados.

Em função da variabilidade das respostas experimentais, a determinação do valor numérico de  $G_f$  revela-se trabalhosa, dificultando o seu emprego no dia-a-dia das atividades laboratoriais. Além disso, a adoção de um parâmetro que se relaciona ao acúmulo de deformações atuando em uma faixa de largura  $h$  (o chamado “tamanho característico do material”) parece demandar certa cautela nas análises em virtude da incerteza relacionada a sua ordem de grandeza, principalmente nos casos de CRFA. Portanto, a escolha conveniente de um “tamanho característico” deve implicar reflexões mais profundas por parte do analista.

Em que pesem as constatações acima apontadas, convém reafirmar que, entre os modelos avaliados neste capítulo, o do tipo trilinear na sua formulação padrão (MTP) parece permitir uma melhor interferência consciente do analista para a resolução do problema. Isso porque tal modelo dispõe de parâmetros adicionais na sua lei constitutiva ( $\alpha$  e  $p_1$ ) cuja influência nos resultados pode ser melhor ponderada do que nos casos dos modelos bilinear e não-linear. Conforme se disse, esses últimos estão essencialmente calcados em dois parâmetros ( $G_f$  e  $h$ ) de delicada mensuração ou avaliação.

Nesse sentido, o modelo MTP teve sua implementação voltada primeiramente à obtenção de resultados numéricos adequados, permitindo-se testar sua aplicabilidade. Complementarmente, os resultados das simulações numéricas apresentadas neste capítulo com esse modelo permitiram perceber uma maior flexibilidade disponibilizada ao analista, que pode interferir de maneira mais consciente na análise estrutural. Entretanto, deve-se admitir que esse maior poder de decisão do analista quanto ao uso de um modelo de base constitutiva trilinear do tipo padrão (MTP) ainda encontra obstáculos na mesma dependência paramétrica de  $G_f$  e  $h$  presente nos demais modelos. Dessa forma, na seqüência deste trabalho, optou-se por avaliar uma outra vertente do modelo trilinear, denominada “Modelo Trilinear Modificado”, cujas leis constitutivas já foram apresentadas no capítulo anterior e que será avaliado no capítulo seguinte.

# 5

## **SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE ENSAIOS PARA VALIDAÇÃO DO MODELO TRILINEAR**

### **5.1 Introdução**

No capítulo anterior, testou-se a aplicabilidade da formulação trilinear para simulação do comportamento do CRFA, tendo-se discutido as potencialidades de uma modelagem inicial intitulada “padrão” (modelo MTP).

Neste capítulo, dando continuidade à proposta de implementação da modelagem trilinear, é discutida uma nova vertente do modelo, baseada em uma lei constitutiva de dano já apresentada neste trabalho (ver Capítulo 3), tendo esse novo paradigma sido denominado “Modelo Trilinear Modificado” (MTM).

A caracterização e a validação do novo modelo de dano com a parametrização proposta é efetuada a partir de exemplos da simulação de ensaios reais em alguns elementos estruturais. Os resultados das simulações numéricas com o código computacional desenvolvido nesta pesquisa são postos à prova dos resultados

experimentais. As grandezas balizadoras do modelo de dano trilinear, estabelecidas anteriormente neste trabalho, são obtidas mediante consulta direta às referências bibliográficas citadas neste capítulo.

Conforme se apresentou no Capítulo 3 desta tese, a modelagem do problema com base na lei constitutiva do modelo MTM demanda o instanciamento de um objeto da classe *MatDamageTl*. Para tanto, é necessário o conhecimento dos parâmetros de cálculo das tensões  $\sigma_2$  (parâmetro  $\alpha_1$ ) e  $\sigma_3$  (parâmetro  $\alpha_2$ ) e das deformações  $\varepsilon_2$  (parâmetro  $p_1$ ) e  $\varepsilon_3$  (parâmetro  $p_2$ ). Tais parâmetros são fornecidos pelo analista na entrada de dados do problema, permitindo definir a lei de dano do material, fundamentada em pontos notáveis do diagrama *tensão x deformação*: pico do diagrama ( $\sigma_1, \varepsilon_1$ ), ponto de inflexão do ramo descendente ( $\sigma_2, \varepsilon_2$ ) e extremidade final do diagrama ( $\sigma_3, \varepsilon_3$ ).

A seguir, discutem-se a forma de caracterização da modelagem proposta e propõe-se uma metodologia de validação da nova vertente do modelo trilinear. A partir de simulações conduzidas com o código computacional desenvolvido nesta pesquisa, ajusta-se convenientemente a lei constitutiva do material de forma a garantir um bom desempenho do modelo proposto.

## 5.2 Caracterização do Modelo Trilinear Modificado

As simulações com a metodologia MTM têm por finalidade propor uma alternativa ao modelo anterior (MTP). Na nova proposta, a modelagem tem por objetivo, além de oferecer uma resposta numérica satisfatória, garantir o estabelecimento de uma lei constitutiva com base em parâmetros de natureza física distinta daquela empregada no caso do modelo trilinear padrão apresentado no Capítulo 4. Para caracterização do comportamento do CRFA, os mencionados parâmetros serão

obtidos a partir de um ensaio padronizado de viga entalhada com carga centrada (“*three-point bending*”) (RILEM TC 162, 2003).

Inicialmente, visando caracterizar a metodologia do Modelo Trilinear Modificado (MTM), a análise se volta para o citado ensaio padronizado. Para tanto, são considerados os parâmetros de caracterização sugeridos pela RILEM para a curva trilinear *tensão x deformação* segundo a referência do Método das Resistências Residuais (RILEM TC 162, 2003), apresentado no Capítulo 2 desta tese. Em função das análises efetuadas e dos resultados obtidos com o código computacional desenvolvido nesta pesquisa, pretende-se avaliar o comportamento da lei constitutiva sob a ótica do modelo MTM.

### 5.2.1 Parametrização Sugerida pela RILEM

A partir de resultados experimentais realizados no âmbito do Consórcio que desenvolveu o projeto “*Brite-EuRam*” (“*European Community under the Industrial & Materials Technologies Programme*”), a RILEM (RILEM TC 162, 2003), amparada no “Método das Resistências Residuais”, recomendou um conjunto de expressões para as tensões ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ ) e para as deformações ( $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$ ) desse método, apresentadas na seção 2.5.5 do Capítulo 2 desta tese e que são transcritas a seguir.

$$\sigma_1 = 0,7 \cdot f_{ctm, fl} \cdot (1,6 - d) \quad (5.1)$$

(sendo “d” medida em metros e o fator (1,6 – d) considerado apenas nos casos de viga com armadura discreta).

$$\sigma_2 = 0,45 \times f_{R,1} \times k_h \quad (5.2)$$

$$\sigma_3 = 0,37 \times f_{R,4} \times k_h \quad (5.3)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_c} \quad (5.4)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + 0,1 \text{ ‰} \quad (5.5)$$

$$\varepsilon_3 = 25,0 \text{ ‰} \quad (5.6)$$

onde  $f_{ctm,fl}$  é a resistência à tração média na flexão do concreto;  $f_{R,1}$  é a resistência residual correspondente a uma flecha de 0,46 mm;  $f_{R,4}$  é a resistência residual correspondente a uma flecha de 3,00 mm;  $k_h$  representa o “fator de tamanho” dado em função da altura total “h” da viga (figura 2.20 do Capítulo 2);  $E_c$  é o módulo de elasticidade longitudinal do concreto e  $d$  é a altura útil da viga (em metros).

### 5.2.2 Parametrização Proposta nesta Pesquisa

Valendo-se de simulações numéricas com o código computacional desenvolvido nesta pesquisa, optou-se por aferir os parâmetros da lei constitutiva trilinear sugeridos pela RILEM e, caso necessário, propor modificações nessa lei.

Primeiramente, as simulações numéricas foram realizadas com base nos valores das tensões e das deformações calculados conforme a sugestão da RILEM (expressões 5.1 a 5.6). Empregando-se o modelo MTM, após estudar os resultados de simulações numéricas do comportamento de elementos de concreto reforçados com fibras de aço, foi possível perceber a influência de cada parâmetro balizador das tensões que regem a lei constitutiva trilinear. Em consequência, a partir da observação das respostas numéricas extraídas com código computacional desenvolvido, este autor procedeu a um ajuste dos parâmetros da lei constitutiva. Esse procedimento foi feito de forma que a curva numérica se aproximasse, tanto quanto possível, da curva experimental em termos da resposta *carga x deslocamento*.

Conforme mencionado, no citado estudo, tomaram-se como referência as expressões paramétricas definidoras da lei constitutiva trilinear modificada, cujos fundamentos foram apresentados no Capítulo 3 desta tese e cuja forma de apresentação é obtida na curva seguinte, transcrita daquele capítulo:

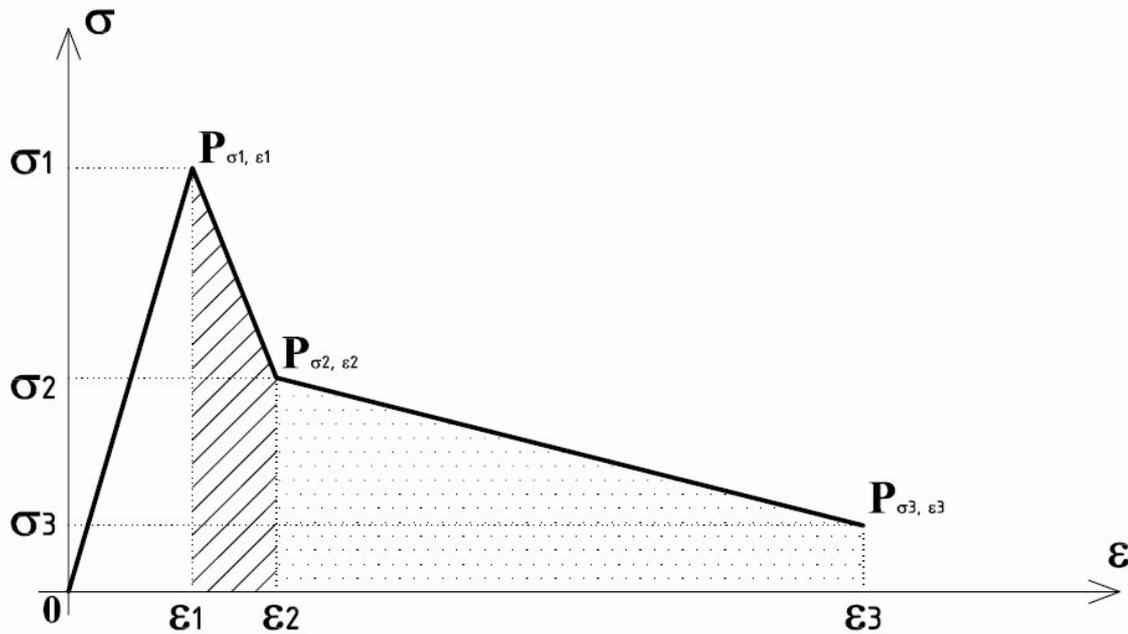


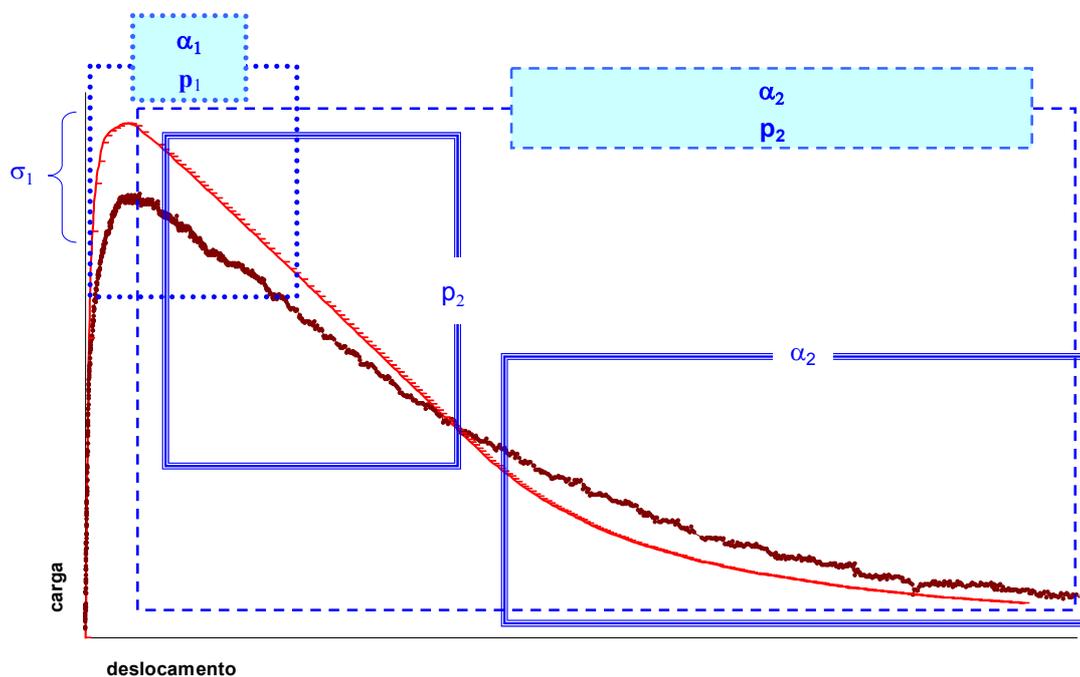
FIGURA 5.1 – Diagrama tensão-deformação segundo modelo MTM

Na figura anterior, o ponto  $P_{\sigma_2, \epsilon_2}$  delimita o escopo de atuação dos parâmetros  $\alpha_1$  ( $\sigma_2 = \alpha_1 \cdot \sigma_1$ ) e  $p_1$  ( $\epsilon_2 = p_1 \cdot \epsilon_1$ ), ao passo que  $P_{\sigma_3, \epsilon_3}$  regula os parâmetros  $\alpha_2$  ( $\sigma_3 = \alpha_2 \cdot \sigma_1$ ) e  $p_2$  ( $\epsilon_3 = p_2 \cdot \epsilon_1$ ).

Como resultado do citado estudo, inferiram-se as seguintes influências dos parâmetros da lei trilinear modificada (MTM) na resposta *carga x deslocamento* (Figura 5.2):

- . modificações nos parâmetros  $\alpha_1$  e  $p_1$  têm influência preponderante na região em torno do pico da curva;
- . variações nos parâmetros  $\alpha_2$  e  $p_2$  afetam mais significativamente o ramo descendente da curva;

- . aumentos nos valores de  $p_2$  tendem a horizontalizar o ramo de amolecimento da curva como um todo, embora com maior influência no trecho logo após o pico do diagrama;
- . acréscimos nos valores de  $\alpha_2$  tendem a horizontalizar o ramo de amolecimento da curva, havendo maior influência em pontos mais afastados do pico do diagrama (trecho final da curva *carga x deslocamento*);
- . ainda que a tensão  $\sigma_1$  não esteja vinculada a qualquer parâmetro do tipo  $\alpha_i$  ou  $p_i$  como é o caso das tensões  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  e das deformações  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$ , tampouco faça referência às resistências residuais  $f_{R, 1}$  e  $f_{R, 4}$ , percebe-se que a carga de pico da curva *carga x deslocamento* sofre influência na proporção direta das variações dessa tensão.



**FIGURA 5.2** – Regiões de influência dos parâmetros do modelo MTM na curva *carga x deslocamento*

Em razão do estudo paramétrico do modelo trilinear modificado desenvolvido durante esta pesquisa e do conseqüente ajuste de curvas para obtenção dos resultados numéricos, foi possível definir um novo conjunto de expressões para cálculo das tensões de referência do modelo MTM, propondo-se a seguinte parametrização para a lei constitutiva trilinear modificada:

$$\sigma_1 = 0,33 \cdot f_{ctm, fl} \quad (5.7)$$

$$\sigma_2 = 0,50 \times f_{R, 1} \times k_h \quad (5.8)$$

$$\sigma_3 = 0,10 \times f_{R, 4} \times k_h \quad (5.9)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_c} \quad (5.10)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + 0,1 \text{ ‰} \quad (5.11)$$

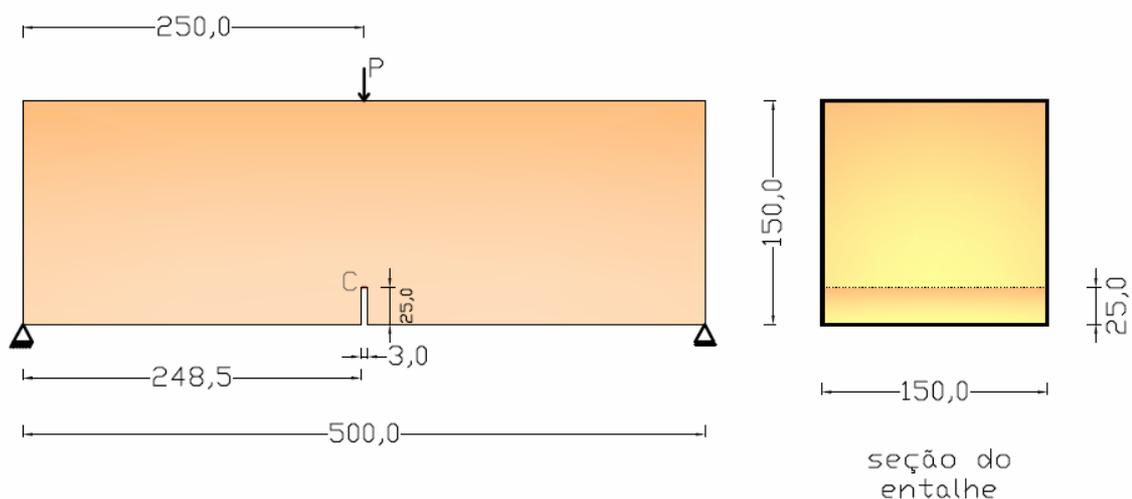
$$\varepsilon_3 = 25,0 \text{ ‰} \quad (5.12)$$

Cabe ressaltar que, para o cálculo da tensão  $\sigma_1$  (expressão 5.7), propõe-se a retirada do fator (1,6 – d) da expressão original sugerida pela RILEM (expressão 5.1). Isso se deve ao fato de que o modelo proposto se restringe à análise de elementos de CRFA sem armadura discreta.

### 5.2.3 Ensaio de Referência para Caracterização do Modelo Trilinear Proposto nesta Pesquisa

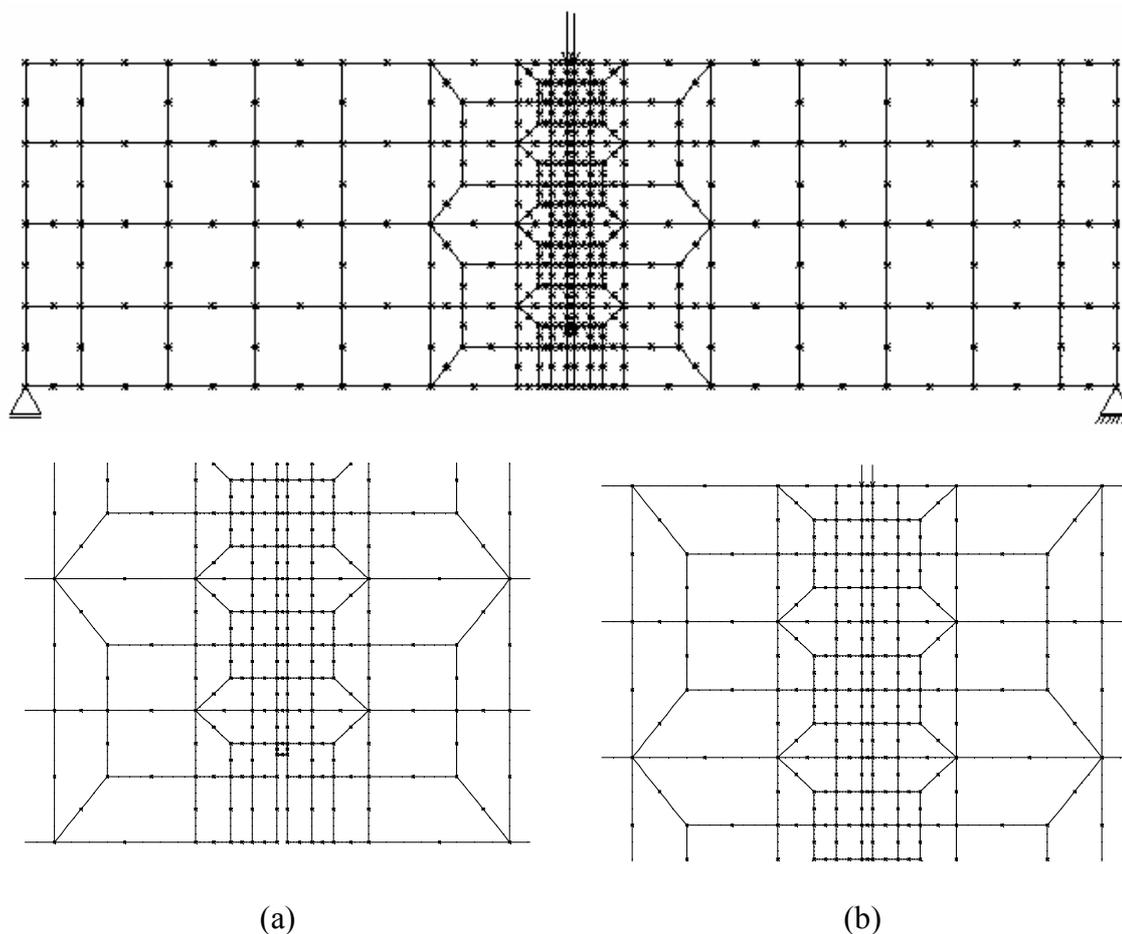
Como referência para a caracterização da proposta de parametrização da formulação trilinear (MTM), foram efetuadas simulações numéricas dos ensaios padronizados de viga entalhada realizados por BARROS *et al.* (2002), confrontando-se os resultados numéricos com as respectivas respostas experimentais. Em todos os exemplos, adotou-se o modelo não-linear para dano em compressão (empregando-se, de acordo com uma sugestão do CEB-FIP/MC1990, 1991, o valor de 0,0022 para deformação  $\varepsilon_c$  correspondente à tensão máxima de compressão).

BARROS *et al.* (2002) efetuaram uma série de ensaios em vigas entalhadas com geometria e carregamento padronizados pela RILEM (Figura 5.3). Foram empregadas fibras de aço do tipo DRAMIX<sup>®</sup> RC 80/60 BN com extremidades em gancho ( $l_f = 60,0$  mm;  $d_f = 0,75$  mm), nos teores de 20 e 30 kg/m<sup>3</sup>.



**FIGURA 5.3** – Geometria (mm) e carregamento da viga entalhada de BARROS *et al.* (2002)

Para resolução numérica do problema, foi realizada uma análise em estado plano de tensão, com o domínio discretizado em uma malha de 154 elementos finitos quadriláteros de 8 nós, conforme mostrado na figura 5.4.



**FIGURA 5.4** – Malha de Elementos Finitos para a Viga Entalhada de BARROS *et al.* (2002), com detalhamento da discretização nas regiões do entalhe (a) e da carga (b)

Adiante, apresentam-se as curvas *carga x deslocamento* obtidas nas simulações numéricas para os teores de fibras adotados por BARROS *et al.* (2002) (30 e 20 kg/m<sup>3</sup>). Em cada teor, esses autores ensaiaram mais de um corpo-de-prova (CP). Nos resultados numéricos obtidos para cada teor de fibras, as curvas do modelo MTM foram traçadas em duas situações para cada CP: uma com parâmetros recomendados pela RILEM (expressões 5.1 a 5.6) e outra com parâmetros propostos segundo o ajuste das curvas

numéricas anteriormente descrito. As curvas obtidas numericamente foram confrontadas ainda com as respectivas respostas experimentais de cada corpo-de-prova (CP).

**a) Teor de fibras igual a 30 kg/m<sup>3</sup>**

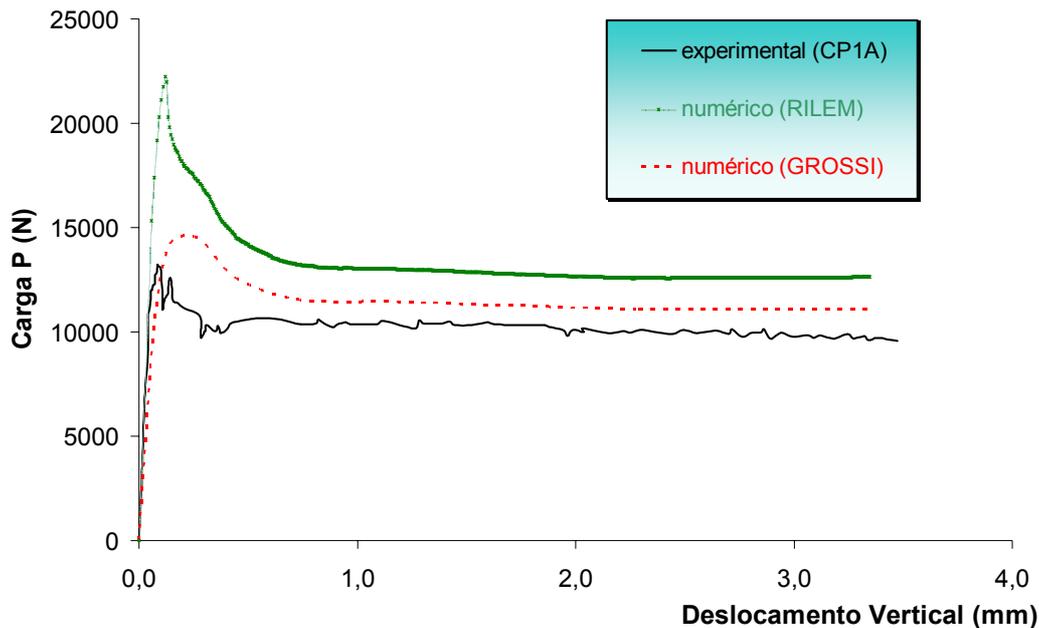
O programa experimental contemplou três corpos-de-prova para este teor de fibras (CP1A, CP2A e CP7B), cuja matriz apresentou módulo de elasticidade longitudinal médio de 22100 MPa e resistência à compressão axial média de 28,5 MPa. Para cada corpo-de-prova, BARROS *et al.* (2002) mediram as forças  $F_{R,1}$  e  $F_{R,4}$  e com elas calcularam as resistências residuais ( $f_{R,1}$  e  $f_{R,4}$ ), indicadas na tabela a seguir juntamente com os valores da resistência à tração de cada corpo-de-prova ( $f_t$ ).

**TABELA 5.1: Resistências fornecidas por BARROS *et al.* (2002) (30 kg/m<sup>3</sup>)**

<b>corpo-de-prova</b> <b><math>f_{R,i}</math> e <math>f_t</math></b> <b>(MPa)</b>	CP1A	CP2A	CP7B
$f_{R,1}$	3,352	4,142	3,201
$f_{R,4}$	3,180	4,356	3,449
$f_t$	4,160	4,700	4,320

Os resultados das simulações numéricas para cada CP estão mostrados nas figuras seguintes (curvas *carga x deslocamento* do nó central da face inferior da seção acima do entalhe – ponto C da figura 5.3). Nessas figuras, o resultado numérico de simulações realizadas com parâmetros recomendados pela RILEM é indicado pela denominação “numérico (RILEM)”, ao passo que as simulações realizadas com parâmetros propostos receberam a denominação “numérico (GROSSI)”.

corpo-de-prova CP1A

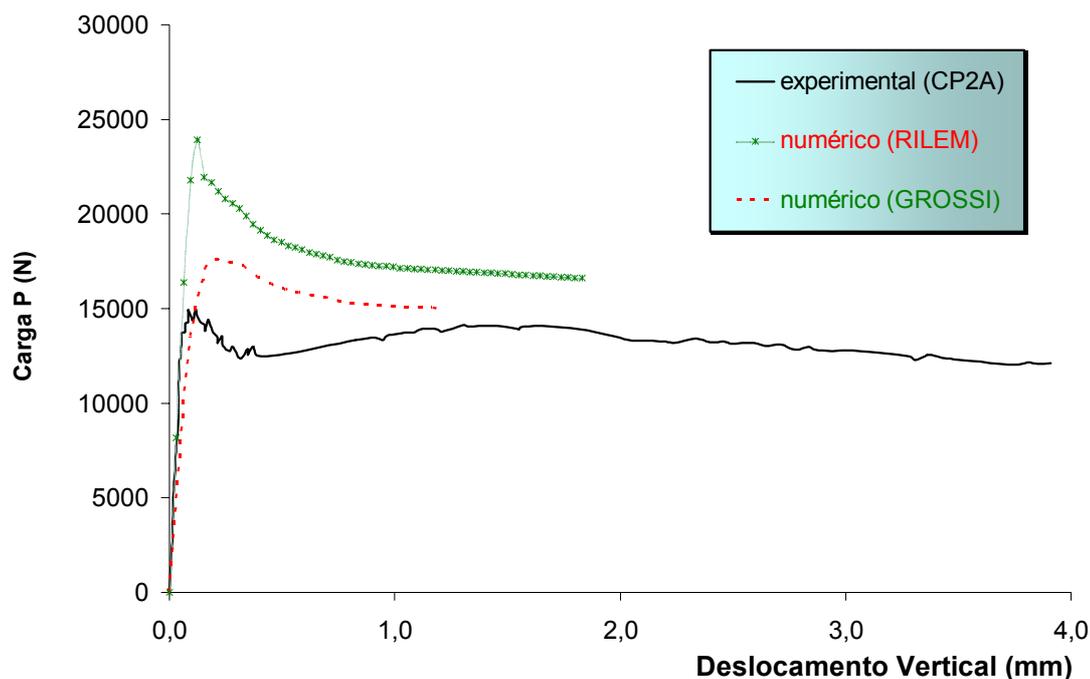


**FIGURA 5.5** – Carga x deslocamento vertical do meio do vão (ponto C da figura 5.3) com lei de dano trilinear MTM (CP1A - Teor de 30 kg/m<sup>3</sup>)

Na figura anterior, ainda que ambas as formulações numéricas tenham superestimado os resultados experimentais, percebe-se que a curva numérica proposta é a que mais se aproxima da resposta experimental, evidenciando não somente a eficiência do modelo trilinear mas também a receptividade aos parâmetros propostos para a caracterização da nova lei de dano trilinear.

As curvas seguintes, obtidas para os demais corpos-de-prova, permitem avaliar novamente a metodologia MTM e a lei constitutiva com parâmetros propostos nesta pesquisa.

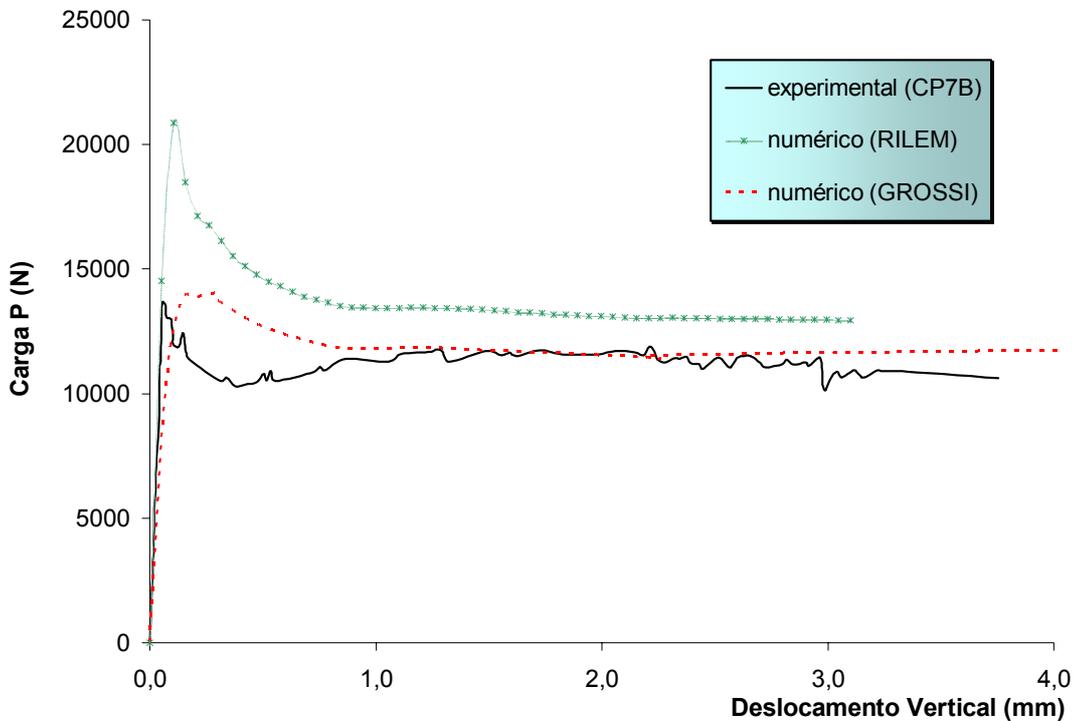
corpo-de-prova CP2A



**FIGURA 5.6** – Carga x deslocamento vertical do meio do vão (ponto C da figura 5.3) com lei de dano trilinear MTM (CP2A – Teor de  $30 \text{ kg/m}^3$ )

A partir da figura anterior, pode-se concluir que a resposta numérica “RILEM” é inferior àquela proposta neste trabalho. Embora a resposta “numérico (GROSSI)” tenha apresentado dificuldades de convergência numérica para traçado da trajetória de equilíbrio após um determinado nível de deslocamento, restou clara a sua superioridade para representação do comportamento do material.

corpo-de-prova CP7B



**FIGURA 5.7** – Carga x deslocamento vertical do meio do vão (ponto C da figura 5.3) com lei de dano trilinear MTM (CP7B – Teor de 30 kg/m<sup>3</sup>)

Mais uma vez, a simulação numérica efetuada com os parâmetros propostos respondeu de maneira mais condizente com o resultado experimental, ratificando não somente a aplicabilidade do modelo trilinear mas também a adequação da nova parametrização sugerida para a lei de dano trilinear.

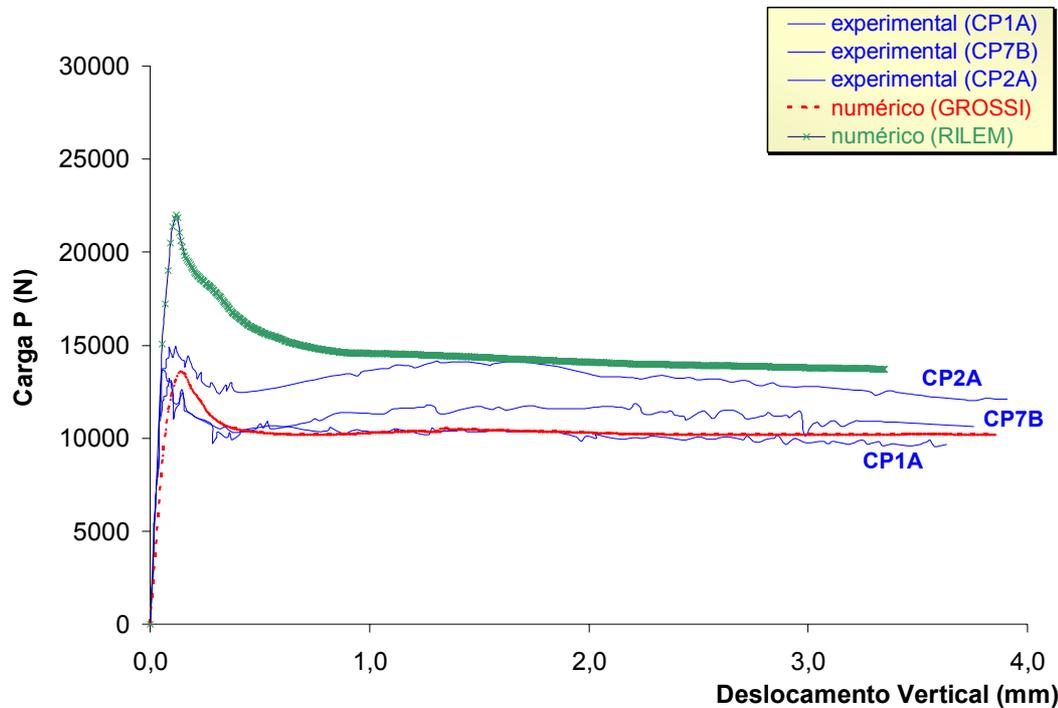
Uma vez confirmada a melhor resposta obtida com as curvas numéricas parametrizadas pela proposta (“numérico (GROSSI)” nas figuras anteriores) e visando ratificar a modelagem proposta, procedeu-se a uma avaliação conjunta dos resultados experimentais anteriormente apresentados para o teor de 30 kg/m<sup>3</sup>. Assim, foi tomada como referência para uma nova rodada de simulações uma curva única de resultados numéricos para todos os CP (“curva numérica média”), valendo-se da parametrização da

lei constitutiva trilinear proposta (expressões 5.7 a 5.12) e também da sugestão da RILEM (5.1 a 5.6). Nesse caso, resistências residuais utilizadas ( $f_{R, 1}$  e  $f_{R, 4}$ ) foram obtidas a partir das médias aritméticas das respectivas resistências residuais dos corpos-de-prova apresentadas na tabela 5.1 (transcritas na tabela 5.2), conduzindo aos novos valores de referência médios destacados na coluna mais à direita da tabela a seguir.

A próxima figura apresenta o confronto entre a “curva numérica média” com parametrizações deste autor (indicação “numérica (GROSSI)”) e da RILEM (indicação “numérica (RILEM)”) e as curvas experimentais dos três corpos-de-prova (CP1A, CP2A e CP7B). É possível reafirmar a aplicabilidade do modelo trilinear MTM, que apresenta melhor resposta que a sugestão da RILEM, ratificando a expectativa de bons resultados da parametrização proposta.

**TABELA 5.2: Resistências residuais por corpo-de-prova e média segundo dados obtidos em BARROS *et al.* (2002) (30 kg/m<sup>3</sup>)**

<b>corpo-de-prova</b> <b><math>f_{R, i}</math></b> <b>(MPa)</b>	CP1A	CP2A	CP7B	$f_{R, i, \text{média}}$
$f_{R, 1}$	3,352	4,142	3,201	<b>3,565</b>
$f_{R, 4}$	3,180	4,356	3,449	<b>3,662</b>



**FIGURA 5.8** – Carga x deslocamento vertical do meio do vão (ponto C da figura 5.3) com lei de dano trilinear MTM (curva numérica média e curvas experimentais - Teor de 30 kg/m<sup>3</sup>)

#### **b) Teor de fibras igual a 20 kg/m<sup>3</sup>**

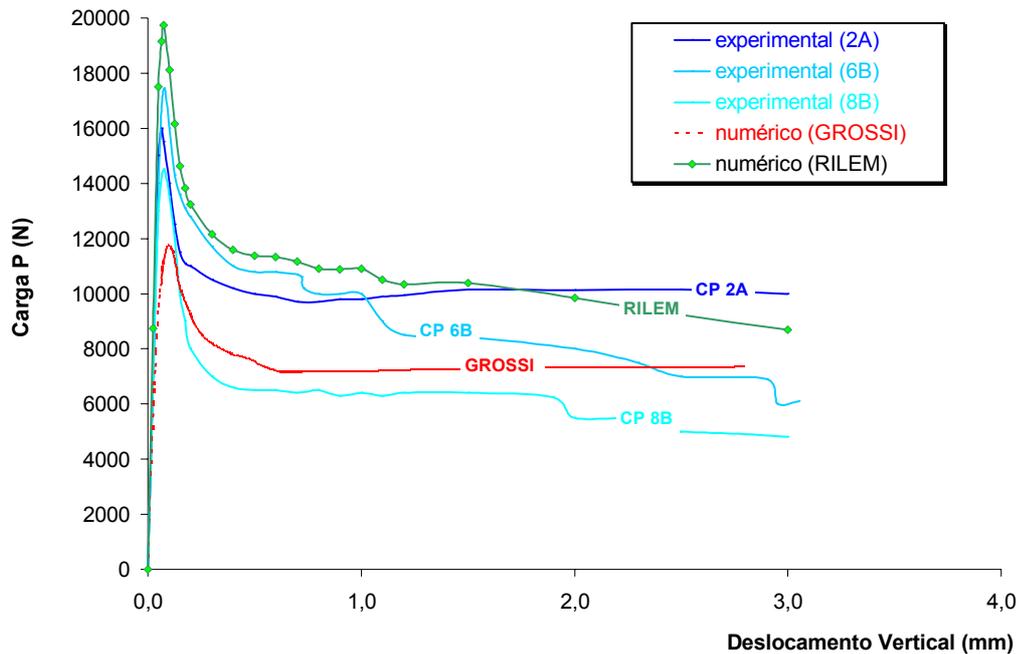
Para este teor, BARROS *et al.* (2002) também ensaiaram três corpos-de-prova (CP2A, CP6B e CP8B), cuja matriz apresentou módulo de elasticidade longitudinal médio de 27900 MPa e resistência à compressão axial média de 36,0 MPa. Com as forças residuais  $F_{R,1}$  e  $F_{R,4}$ , os autores calcularam as respectivas resistências residuais, indicadas na tabela a seguir, juntamente com os valores da resistência à tração ( $f_t$ ) de cada corpo-de-prova.

Neste caso, optou-se por avaliar diretamente a “curva numérica média”, confrontando-a com o conjunto de respostas experimentais dos corpos-de-prova deste teor (CP2A, CP 6B e CP8B). A tabela 5.3 também apresenta os valores médios das resistências residuais e da resistência à tração empregados nas simulações numéricas.

**TABELA 5.3: Resistências médias e por corpo-de-prova segundo dados obtidos em BARROS *et al.* (2002) (20 kg/m<sup>3</sup>)**

<b>corpo-de-prova</b> <b><math>f_{R,i}</math> e <math>f_t</math></b> <b>(MPa)</b>	CP2A	CP6B	CP8B	valor médio
$f_{R,1}$	3,139	3,516	2,133	<b>2,929</b>
$f_{R,4}$	3,100	2,004	1,513	<b>2,206</b>
$f_t$	5,152	5,520	4,640	<b>5,104</b>

A figura a seguir coteja a curva experimental média dos três corpos-de-prova (CP2A, CP6B e CP8B) com a “curva numérica média” obtida com o modelo trilinear modificado (MTM) parametrizado pela proposta deste autor (indicação “numérica (GROSSI)”) e a sugestão da RILEM (indicação “numérica (RILEM)”). Nessa figura, percebe-se novamente a aplicabilidade do modelo trilinear MTM e a eficiência da parametrização proposta, superando o resultado numérico obtido com a parametrização proposta pela RILEM.



**FIGURA 5.9** – Carga x deslocamento vertical do meio do vão (ponto C da figura 5.3) com lei de dano trilinear MTM (curva numérica média e curvas experimentais – Teor de 20 kg/m<sup>3</sup>)

A partir do que foi observado nos exemplos anteriores, pode-se inferir que a lei constitutiva proposta nos moldes do modelo MTM permite caracterizar adequadamente o comportamento do CRFA, oferecendo resultados satisfatórios sob uma ótica distinta daquela presente no modelo trilinear padrão (MTP).

De posse dos resultados obtidos até aqui e mediante essa nova proposta de parametrização para caracterização da lei constitutiva trilinear, esta vertente do modelo trilinear fica apta a ser validada a partir de simulações em estruturas distintas daquela padronizada no ensaio de viga entalhada com carga centrada, o que é levado a efeito a seguir.

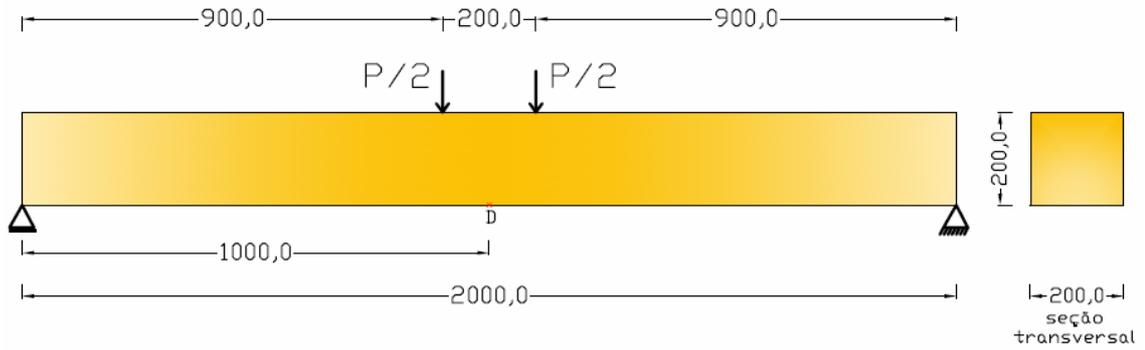
### 5.3 Validação do Modelo Trilinear Modificado (MTM)

Pretende-se agora aferir a simulação numérica trilinear MTM a partir de resultados de ensaios realizados por DUPONT (2003). Será feita a análise numérica de vigas reforçadas com fibras curtas de aço cujo concreto foi também submetido, por esse pesquisador, ao ensaio de viga entalhada padronizado pela RILEM (RILEM TC 162, 2003).

O elemento estrutural empregado nos ensaios para validação foi uma viga retangular com altura ( $h$ ) e largura ( $b$ ) de 200,0 mm, vão de ensaio ( $L$ ) de 2000,0 mm, submetida a duas cargas verticais aplicadas na sua região central e distantes entre si de 200,0 mm (Figuras 5.10 e 5.11). Foram ensaiadas duas vigas para cada teor de fibras (25, 50 e 60 kg/m<sup>3</sup>), tendo sido utilizados dois tipos de fibras de aço: DRAMIX<sup>®</sup> RC 65/60 BN ( $l_f = 60,0$  mm;  $d_f = 0,92$  mm) e DRAMIX<sup>®</sup> RC 80/60 BP ( $l_f = 60,0$  mm;  $d_f = 0,75$  mm).

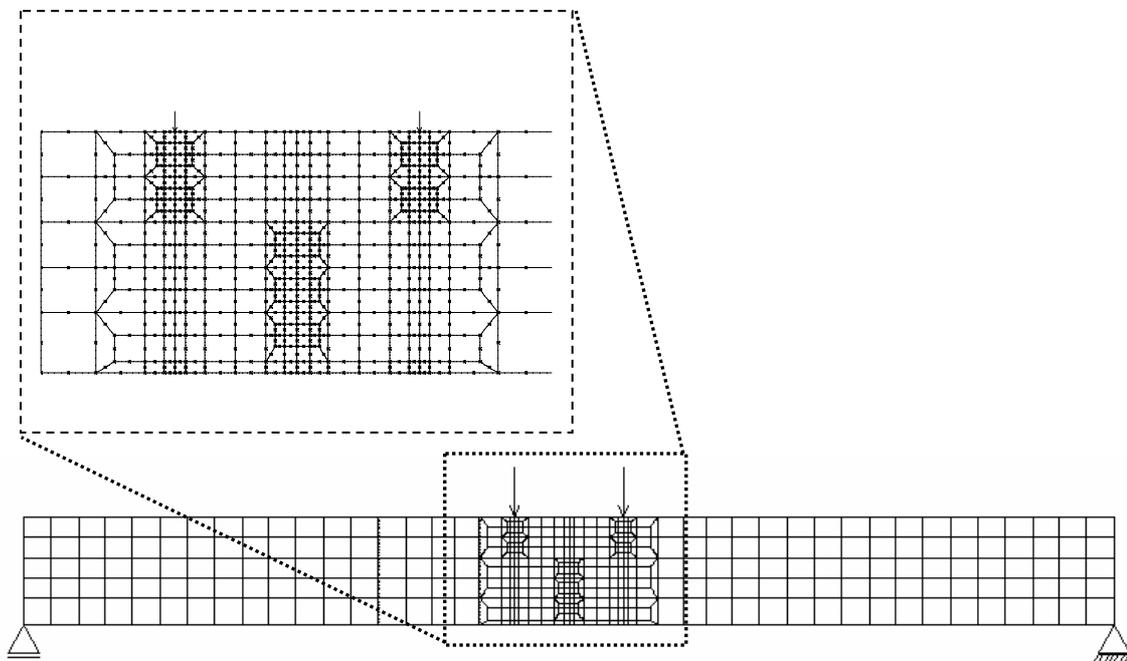


**FIGURA 5.10** – Equipamento de realização dos ensaios de DUPONT (2003)



**FIGURA 5.11** – Geometria (mm) e carregamento para análise da viga de DUPONT (2003)

Para resolução numérica do problema, foram mantidas as características da análise não-linear empregadas nas demais simulações deste capítulo. A discretização do domínio foi feita com uma malha de 462 elementos finitos quadrilaterais de 8 nós, conforme mostrado na figura 5.12.



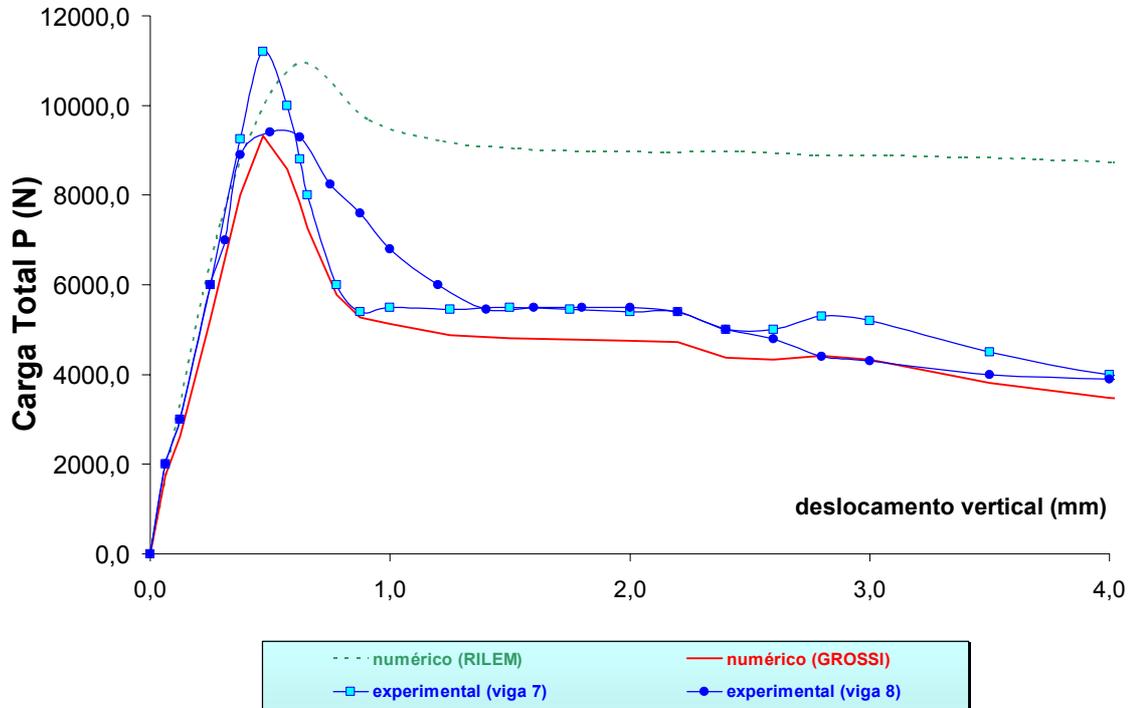
**FIGURA 5.12** – Malha de Elementos Finitos para discretização da viga de DUPONT (2003). Em destaque, a região central da estrutura.

A apresentação dos resultados a seguir foi dividida de acordo com a tabela 5.4, onde estão indicadas as propriedades dos materiais constituintes das misturas e os parâmetros do modelo de análise. Os dados da tabela foram obtidos diretamente por DUPONT (2003), salvo a deformação  $\varepsilon_c$  e o coeficiente  $\nu$ , para os quais foram adotados, respectivamente, os valores de 0,0022 (sugerido pelo CEB-FIP/MC1990, 1991) e 0,2 (usual para concretos convencionais). Os valores utilizados do módulo de elasticidade longitudinal do concreto ( $E_0$ ) foram obtidos com base na resistência à compressão ( $f_c$ ) por meio da equação proposta pelo EUROCODE 2 (1991), já adotada nesta pesquisa.

**TABELA 5.4: Propriedades físicas dos materiais e parâmetros do modelo trilinear para a viga de DUPONT (2003)**

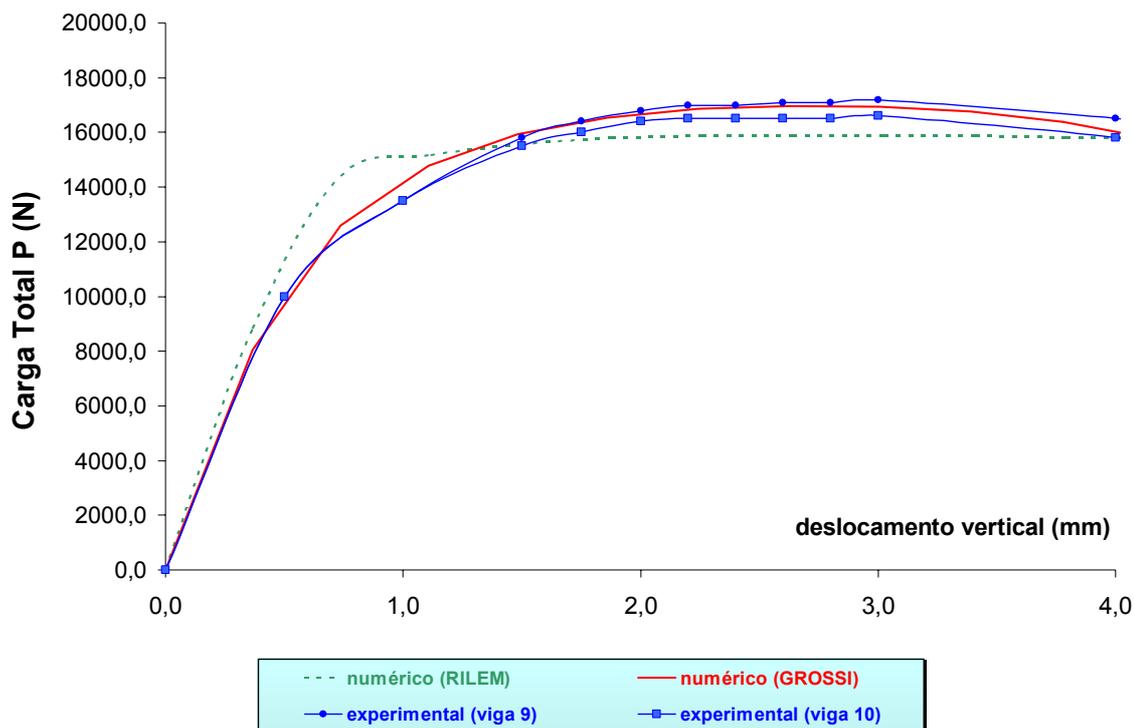
Vigas	Fibra DRAMIX®	$V_f$ (kg/m <sup>3</sup> )	$E_0$ (MPa)	$\nu$	$f_t$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$\varepsilon_c$	$f_{R,1}$ (MPa)	$f_{R,4}$ (MPa)
7 e 8	RC 65/60 BN	25	31855	0,2	3,7	37,7	0,0022	2,7	2,4
9 e 10	RC 65/60 BN	50	30564	0,2	4,4	33,3	0,0022	5,0	3,7
11 e 12	RC 80/60 BP	60	38411	0,2	6,5	66,1	0,0022	7,7	9,3

Para avaliação dos resultados numéricos, o modelo MTM foi empregado com a parametrização proposta, juntamente com a sugestão da RILEM (RILEM TC 162, 2003), os quais foram confrontados com os resultados experimentais. Nas figuras seguintes, apresentam-se essas confrontações, tendo como referência o deslocamento vertical do ponto “D” da figura 5.11. São mantidas as nomenclaturas “numérico (RILEM)” e “numérico (GROSSI)” para os resultados numéricos.



**FIGURA 5.13** – Respostas numéricas e experimentais das vigas 7 e 8 de DUPONT (2003)

Embora se note uma variabilidade nos resultados experimentais, a resposta numérica do modelo proposto consegue representar bem toda a trajetória de equilíbrio, o mesmo não acontecendo com a sugestão da RILEM. O modelo com a parametrização proposta consegue reproduzir com boa aproximação o resultado experimental tanto na região de comportamento linear (pré-pico) quanto no regime pós-fissuração.



**FIGURA 5.14** – Respostas numéricas e experimentais das vigas 9 e 10 de DUPONT (2003)

Na figura 5.14 (vigas 9 e 10), constata-se novamente uma boa aproximação do resultado experimental a partir da resposta do modelo proposto, que supera o desempenho da resposta numérica da RILEM em toda a trajetória de equilíbrio.

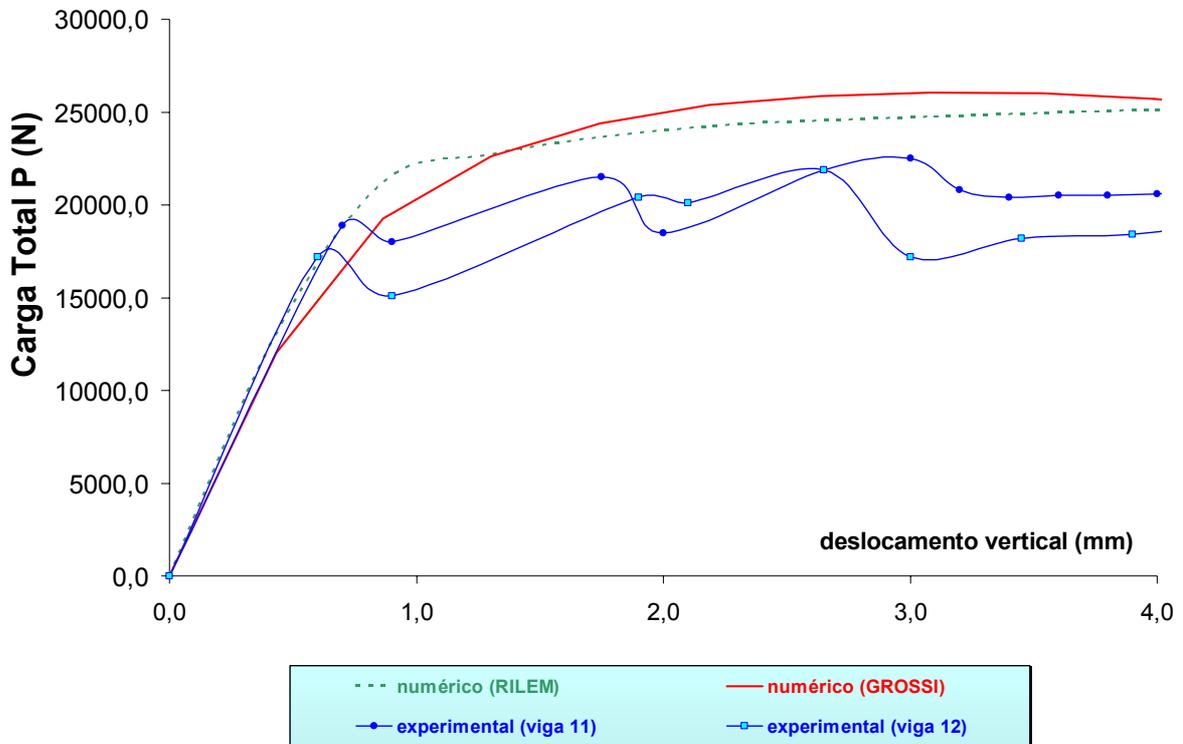


FIGURA 5.15 – Respostas numéricas e experimentais das vigas 11 e 12 de DUPONT (2003)

Por último, verifica-se que as respostas numéricas apresentadas na figura 5.15 (vigas 11 e 12) superestimam as respostas experimentais. Embora tenha havido uma variação nos resultados experimentais, constata-se que a curva obtida com o modelo MTM se comportou de maneira semelhante à da curva numérica da RILEM.

As curvas apresentadas permitiram avaliar as repostas do modelo proposto perante os resultados numérico com parâmetros da RILEM e experimentais. De modo geral, entende-se que são satisfatórias as respostas obtidas com o modelo proposto quando consideradas as variações apresentadas pelos resultados experimentais. A validação do modelo MTM apresentada nesse exemplo permitiu constatar que a

resposta numérica da proposta do modelo MTM se comportou de maneira satisfatória mesmo para um conjunto de teores de fibra (25, 50 e 60 kg/m<sup>3</sup>) com variação superior àquela presente nos ensaios de referência para caracterização desse modelo (20 e 30 kg/m<sup>3</sup> – seção 5.2.3)

## 5.4 Metodologia para Aplicação do Modelo MTM

Depois de avaliados os resultados obtidos na seção anterior, entende-se ser oportuno tratar da questão da utilização da modelagem MTM no dia-a-dia da Engenharia de Estruturas.

Uma reflexão acerca da lei trilinear modificada permite supor que a utilização corriqueira almejada para essa modelagem pode não ser alcançada em razão de dificuldades para realização dos ensaios de caracterização fora do âmbito acadêmico, por questões de custo, tempo ou outras. Parece razoável imaginar que podem ocorrer situações em que os parâmetros de caracterização do modelo ( $f_{R, 1}$  e  $f_{R, 4}$ ) não estejam prontamente disponíveis ao analista.

Em outra linha de pensamento, pode-se vislumbrar que uma futura diretriz de projeto para CRFA se respalde em uma obtenção indireta de parâmetros da modelagem trilinear, desde que, obviamente, atendidas certas imposições. Portanto, como complemento aos resultados apresentados, propõe-se uma metodologia para aplicação da vertente de modelagem tratada neste capítulo (MTM), amparada nos seguintes procedimentos:

- 1) Caracterização: obtenção dos parâmetros  $f_{R, 1}$  e  $f_{R, 4}$  da lei constitutiva MTM a partir de resultados de um ensaio que atenda à padronização de viga entalhada com carga centrada (RILEM TC 162, 2003);
- 2) Validação: seleção de um exemplo de aplicação para o modelo MTM;

- 3) Apreciação: imposição, ao conjunto “1” e “2”, de um “critério de semelhança” para validação do modelo;
- 4) Parametrização: adoção de parâmetros da lei constitutiva ( $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $p_1$  e  $p_2$ ) a partir de dados existentes na literatura (proposta deste trabalho, RILEM, outros);
- 5) Aferição: obtenção e análise dos resultados numéricos.

A proposta aqui apresentada é motivada pela possibilidade de repetição dessa abordagem em casos correntes da Engenharia de Estruturas. Isso implica, sobretudo, uma preocupação com a praticidade da modelagem, assunto que já foi discutido neste trabalho quando se tratou da análise sob a ótica do modelo trilinear padrão (reporte-se à parte final do Capítulo 4).

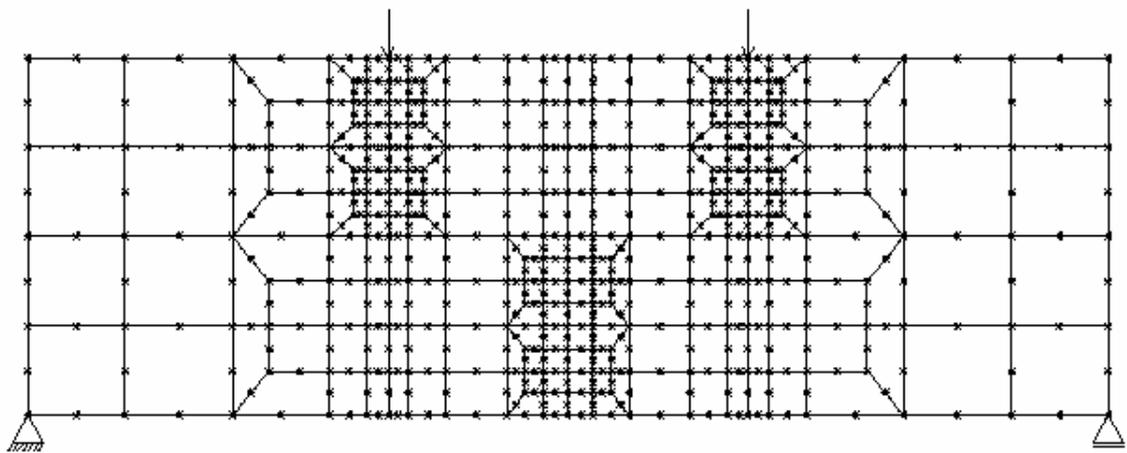
A metodologia proposta prescreve, no item “3” anterior, a existência de um “critério de semelhança”. Neste trabalho, propõe-se para esse critério a correspondência unívoca quanto ao tipo de fibras de aço empregado, exigindo também a menor variação possível nas classes de resistência dos concretos e nos teores de fibras utilizados. Dessa forma, o critério proposto visa impedir que possíveis discrepâncias entre os materiais utilizados em “1” e “2” interfiram nos resultados da análise numérica. A seguir, apresenta-se um exemplo do emprego da metodologia proposta.

#### 5.4.1 Exemplo de Aplicação

Visando aplicar a metodologia proposta na seção anterior, foram estudados os ensaios de SALDIVAR (1999), constantes de uma ampla investigação realizada para caracterização da tenacidade à flexão de concretos reforçados com fibras de aço. Dentre os ensaios executados, constam os de vigas carregadas nos terços médios do vão (“*four-point bending*”), com vão de ensaio ( $L$ ) de 450,0 mm, largura ( $b$ ) de 150,0 mm e altura

(h) de 150,0 mm. As vigas ensaiadas tinham uma matriz de concreto reforçada com fibras de aço nos teores de 15 e 25 kg/m<sup>3</sup>.

Para resolução numérica do problema, foram mantidas as condições de análise e controle do processo incremental-iterativo empregadas no ensaio de caracterização apresentado na seção 5.2.3 deste capítulo. O domínio foi discretizado em uma malha de 224 elementos finitos quadrilaterais de 8 nós, conforme mostrado na figura 5.16.



**FIGURA 5.16** – Malha de Elementos Finitos para discretização da estrutura constante dos ensaios de SALDIVAR (1999)

Para obtenção dos parâmetros de caracterização do modelo MTM (resistências residuais  $f_{R,1}$  e  $f_{R,4}$ ) das vigas de SALDIVAR (1999), foram utilizados os valores dessas resistências disponibilizados por BARROS *et al.* (2002) a partir de ensaios padronizados de viga entalhada. Cabe lembrar que os citados ensaios padronizados tiveram seus resultados simulados numericamente com o modelo MTM e apresentados nas páginas anteriores (seção 5.2.3).

A adoção do procedimento de obtenção indireta de parâmetros de caracterização do modelo foi baseada no “critério de semelhança” proposto nesta pesquisa, motivada pelo fato de que tais parâmetros não estavam disponíveis em SALDIVAR (1999).

Assim, nas duas referências utilizadas neste exemplo, tanto o ensaio de caracterização do modelo (BARROS *et al.*, 2002) quanto o ensaio de validação (SALDIVAR, 1999) trataram da mesma fibra de aço (DRAMIX<sup>®</sup> RC 80/60 BN). Além disso, as matrizes de concreto dessas referências não apresentavam diferenças significativas quanto às classes de resistência dos concretos nem quanto aos teores de fibra utilizados, conforme se verifica nas tabelas 5.5 e 5.6 a seguir.

A seguir, são apresentados os resultados da validação do modelo MTM para os teores de 15 e 25 kg/m<sup>3</sup> de SALDIVAR (1999).

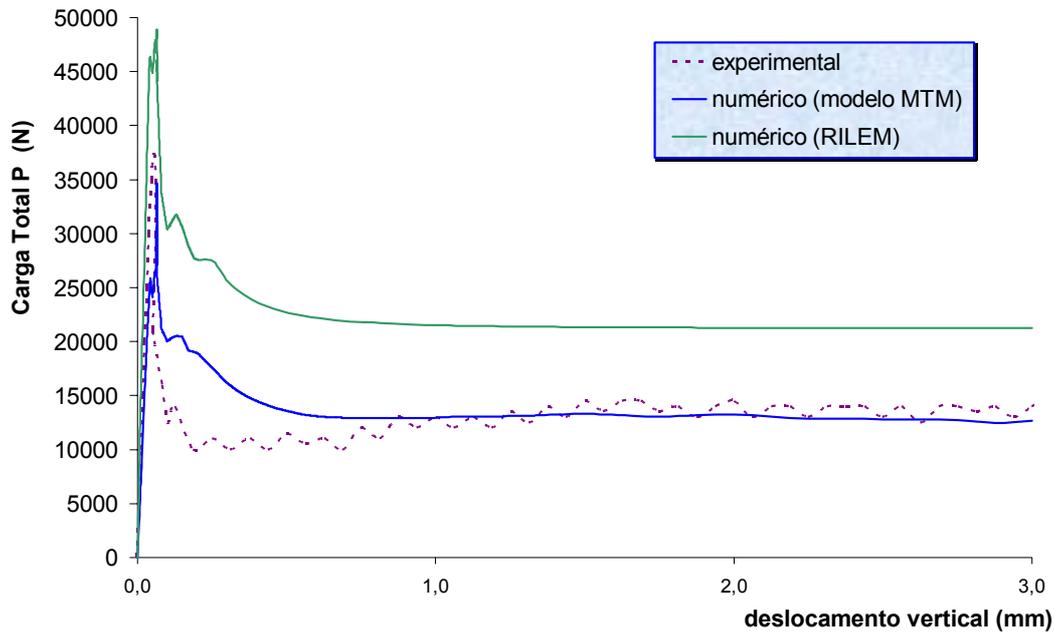
**a) Teor de fibras igual a 15 kg/m<sup>3</sup>**

Para as simulações numéricas com este teor, foram utilizados os parâmetros dos ensaios de caracterização e validação indicados na tabela 5.5.

**TABELA 5.5: Propriedades físicas dos materiais dos ensaios de caracterização e validação do modelo trilinear (teor de 15 kg/m<sup>3</sup>)**

ENSAIO	Fibra	V <sub>f</sub> (kg/m <sup>3</sup> )	f <sub>c</sub> (MPa)	f <sub>R,1</sub> (MPa)	f <sub>R,4</sub> (MPa)
Caracterização (BARROS <i>et al.</i> , 2002)	DRAMIX <sup>®</sup> RC 80/60 BN	20	36,0	2,929	2,206
Validação (SALDIVAR, 1999)	DRAMIX <sup>®</sup> RC 80/60 BN	15	32,4	-	-

A figura seguinte apresenta as respostas *carga x deslocamento* numérica e experimental para o ponto médio do vão das vigas ensaiadas por SALDIVAR (1999).

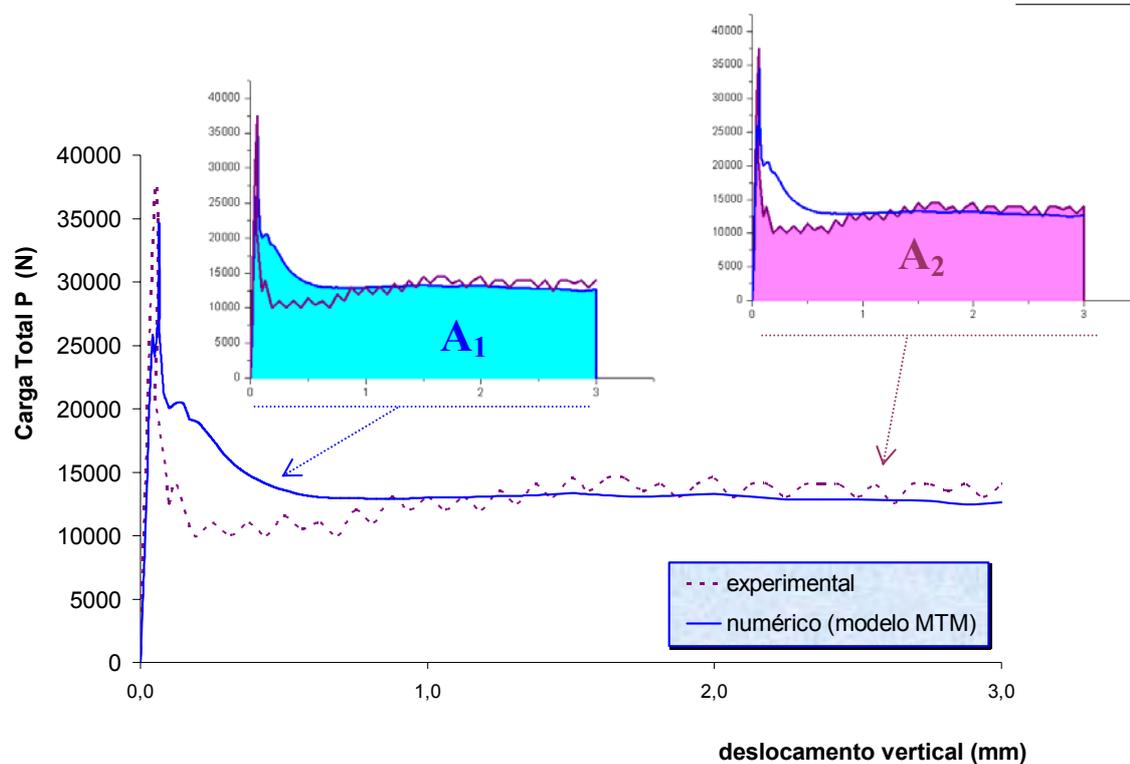


**FIGURA 5.17** – Respostas *carga x deslocamento* numérica (**modelo MTM e RILEM**) e experimental (SALDIVAR, 1999) para validação do modelo trilinear (teor de 15 kg/m<sup>3</sup>)

Pela figura anterior, é possível perceber que a resposta do modelo desvia-se do resultado experimental na região após o início da fissuração, podendo evidenciar uma suposta fraqueza da modelagem nessa região. Todavia, de maneira geral, a curva numérica proposta se comporta de modo condizente com o resultado experimental. Essa resposta numérica consegue representar a resposta experimental com maior aproximação do que aquela parametrizada pela RILEM, que superestima o comportamento real da viga em toda a sua trajetória de equilíbrio.

Visando confirmar o resultado obtido, procedeu-se a uma avaliação, por integração até o deslocamento de 3,00 mm, das áreas sob as curvas do modelo (área numérica  $A_1$ ) e do ensaio (área experimental  $A_2$ ), conforme mostra a figura 5.18. Em conseqüência, foram obtidos os valores de 41092 N.mm para  $A_1$  e 39112 N.mm para  $A_2$ . Esses resultados permitem concluir que é pequena a diferença entre as respostas numérica e experimental na representação do processo de dano do material. No entanto,

julgou-se conveniente experimentar um outro teor de fibras de modo a aferir a modelagem e a metodologia propostas.



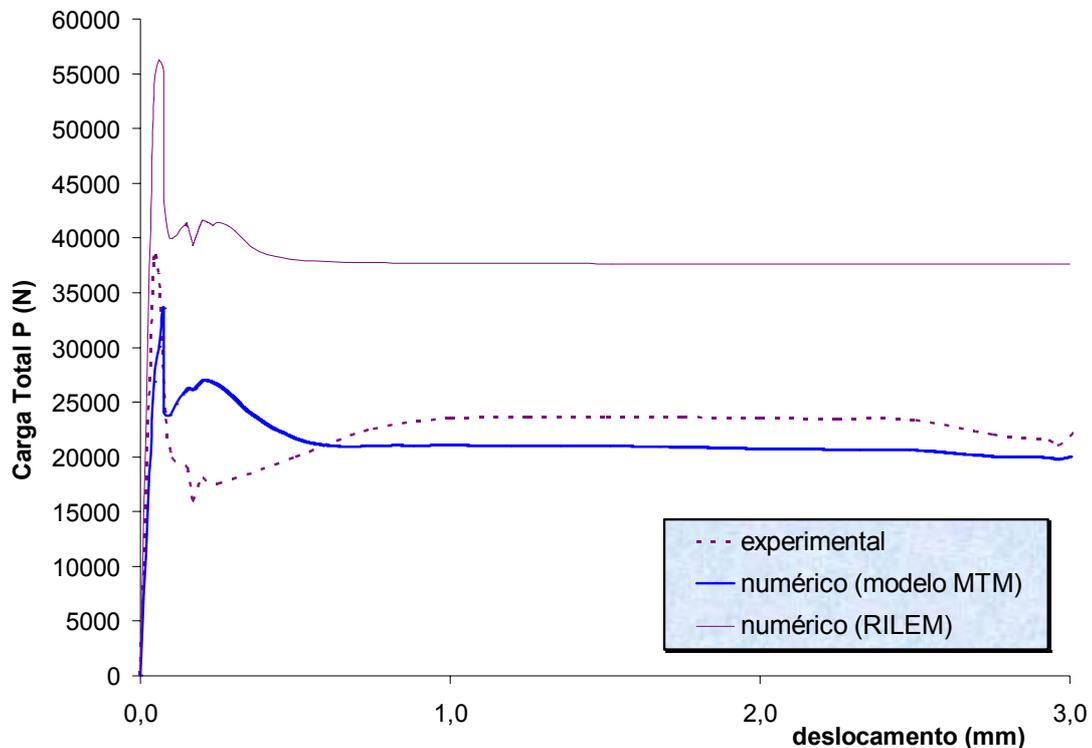
**FIGURA 5.18** – Avaliação do processo de dano do material segundo as respostas numérica (**modelo MTM**) e experimental (SALDIVAR, 1999) (teor de  $15 \text{ kg/m}^3$ )

### **b) Teor de fibras igual a $25 \text{ kg/m}^3$**

No caso anterior, embora a resposta experimental tenha sido capturada adequadamente pelo modelo MTM, poder-se-ia duvidar da influência das variações nas propriedades físicas dos materiais (tabela 5.5) no resultado final. Nesse sentido, apresenta-se um outro espectro dessas variações (tabela 5.6), o que permite uma nova análise sobre a eficiência do modelo e da metodologia propostos. Na tabela 5.6, indicam-se os parâmetros dos ensaios de caracterização e validação para este teor, estando o resultado das simulações indicado na figura 5.19.

**TABELA 5.6: Propriedades físicas dos materiais dos ensaios de caracterização e validação do modelo trilinear (teor de 25 kg/m<sup>3</sup>)**

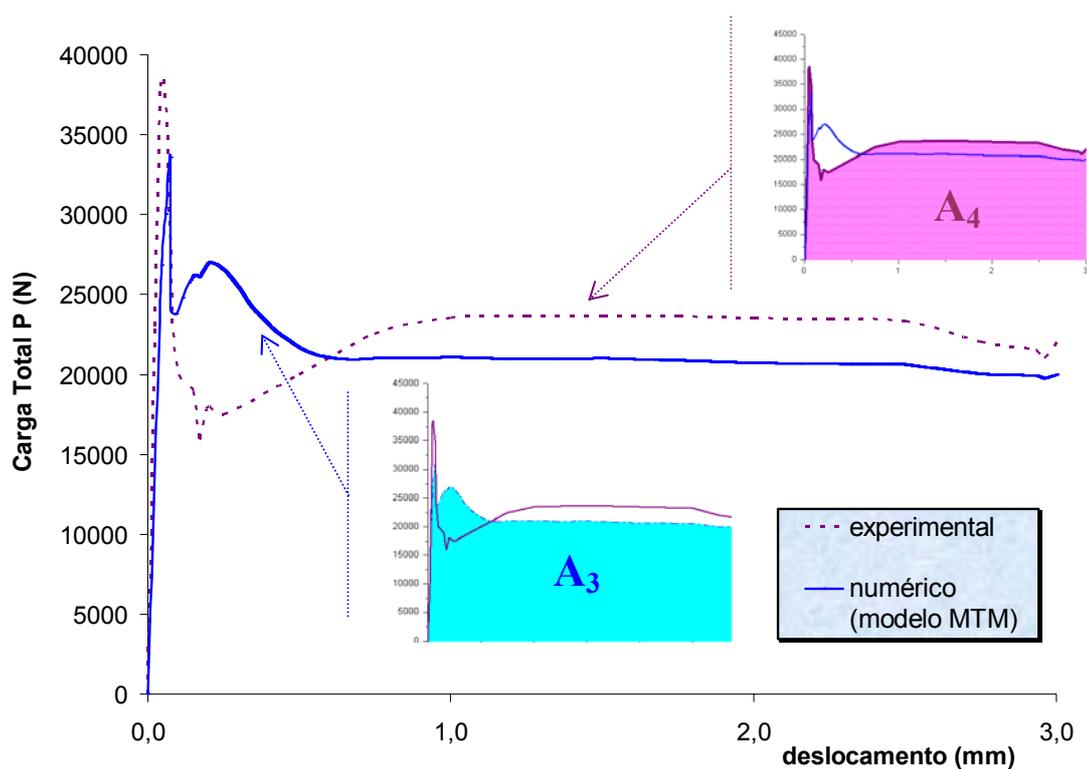
ENSAIO	Fibra	V <sub>f</sub> (kg/m <sup>3</sup> )	f <sub>c</sub> (MPa)	f <sub>R,1</sub> (MPa)	f <sub>R,4</sub> (MPa)
Caracterização (BARROS <i>et al.</i> , 2002)	DRAMIX <sup>®</sup> RC 80/60 BN	30	28,5	3,565	3,662
Validação (SALDIVAR, 1999)	DRAMIX <sup>®</sup> RC 80/60 BN	25	32,6	-	-

**FIGURA 5.19** – Respostas *carga x deslocamento* numérica (**modelo MTM e RILEM**) e experimental (SALDIVAR, 1999) para validação do modelo trilinear (teor de 25 kg/m<sup>3</sup>)

Na figura anterior, verifica-se novamente o mesmo padrão de comportamento das respostas numéricas obtido no teor de 15 kg/m<sup>3</sup>, em que a proposta do modelo MTM mostra uma aproximação do resultado experimental melhor do que aquela

sugerida pela RILEM. Essa última se mostra contra a segurança em relação tanto à carga máxima da curva quanto ao comportamento após a fissuração.

Finalizando este capítulo, para manter a linha de raciocínio adotada no teor de fibras anterior, foram calculadas as áreas aproximadas, até o deslocamento de 3,00 mm, das curvas do modelo (área numérica  $A_3$ ) e do ensaio (área experimental  $A_4$ ) para este teor de 25 kg/m<sup>3</sup> (figura 5.20). Em consequência, foram obtidos os valores de 68837 N.mm para  $A_3$  e 67874 N.mm para  $A_4$ , permitindo-se novamente concluir pela validade do modelo proposto para a representação do processo de dano do material, ao mesmo tempo em que se confirma a pertinência da metodologia de aplicação desse modelo proposta neste trabalho.



**FIGURA 5.20** – Avaliação do processo de dano do material segundo as respostas numérica (**modelo MTM**) e experimental (SALDIVAR, 1999) (teor de 25 kg/m<sup>3</sup>)

# 6

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 6.1 Introdução

A evidência histórica tem mostrado uma fase inicial das pesquisas em concretos reforçados com fibras de aço (CRFA) onde o objetivo predominante foi a sua caracterização experimental. Conseqüentemente, criou-se uma lacuna no campo da modelagem numérica, havendo atualmente uma razoável demanda pela representação do comportamento desse material, principalmente no que se refere aos ganhos na capacidade de absorção de energia em flexão após a fissuração da matriz.

Visando mitigar a dificuldade de realização de um número considerável de ensaios laboratoriais para caracterização do material, a modelagem numérica tem se apresentado como uma alternativa adequada, propiciando resultados viáveis técnica e economicamente. Esta pesquisa se inseriu nesse contexto, visando dar uma contribuição para essa linha do conhecimento.

## 6.2 Contribuição do Trabalho

No âmbito da Escola de Engenharia da UFMG, o presente trabalho representou uma inovação no estudo do CRFA em vista dos trabalhos até então realizados. Paralelamente, considera-se que esta pesquisa contribuiu para a evolução nos estudos do CRFA, uma vez que procurou destacar uma forma potencialmente eficaz de representação do comportamento do material: a simulação numérica de resultados experimentais.

Procurando melhor aferir o comportamento do CRFA em problemas de estado-plano, as análises realizadas nesta pesquisa voltaram-se para o estudo da capacidade de absorção de energia em flexão desse material, que é notoriamente modificada a partir da introdução aleatória das fibras curtas de aço na matriz de concreto.

Os resultados alcançados permitiram ratificar os objetivos desta pesquisa, revelando as seguintes contribuições:

- . o desenvolvimento de um modelo constitutivo para avaliação da degradação do CRFA quando submetido a solicitações de tração e de compressão;
- . a implementação do modelo proposto em um programa de análise não-linear pelo Método dos Elementos Finitos;
- . a expansão de um código computacional disponível no meio acadêmico por meio do paradigma da Programação Orientada a Objetos;
- . a aplicação do modelo proposto à simulação do comportamento em flexão de vigas de CRFA;
- . a avaliação do desempenho do modelo proposto quando comparado a outros modelos e a resultados experimentais.

Além das contribuições indicadas anteriormente, este trabalho permitiu a implementação, a caracterização e a validação de duas vertentes do modelo que adotam uma lei constitutiva do tipo “trilinear” para representação das relações *tensão x deformação* de tração do material. Assim, as potencialidades dessa proposta de modelagem foram aferidas por meio dos denominados “**Modelo Trilinear Padrão**” (MTP) e “**Modelo Trilinear Modificado**” (MTM), cada qual com suas particularidades, discutidas e avaliadas em partes distintas do texto desta tese.

Visando conferir uma maior robustez ao modelo, as estratégias de modelagem propostas (MTP e MTM) foram avaliadas por meio de simulações numéricas de ensaios reais disponíveis na literatura e que contemplavam fibras de aço de diferentes características e em teores variados. Os resultados obtidos a partir das confrontações entre respostas numéricas e experimentais permitiram certificar a eficiência da modelagem proposta.

Adicionalmente, foi sugerida e aferida uma metodologia de aplicação do modelo MTM, objetivando despertar para a necessária praticidade dessa modelagem e para o seu emprego no dia-a-dia da Engenharia de Estruturas. Nessa metodologia, propôs-se um “critério de semelhança” para validação do modelo MTM.

A seguir, são apresentadas ponderações sobre as contribuições desta pesquisa no que diz respeito aos modelos MTP e MTM e à metodologia de aplicação proposta para esse último.

### 6.2.1 Considerações sobre o Modelo Trilinear Padrão (MTP)

A estratégia de modelagem baseada em uma lei constitutiva trilinear denominada “padrão” foi tratada no Capítulo 4, tendo por fim testar a aplicabilidade dessa vertente do modelo para representação do comportamento em flexão do concreto com fibras curtas de aço. Os resultados obtidos com simulações numéricas empregando-

se o modelo proposto foram comparados com resultados numéricos de outros modelos e com respostas de ensaios de alguns pesquisadores.

Nos exemplos analisados, foi possível confirmar que o modelo MTP mostrou-se capaz de representar com boa aproximação o comportamento do material. Paralelamente, por intermédio de modificações nos valores dos parâmetros balizadores da lei constitutiva trilinear padrão, revelou-se uma boa sensibilidade desse modelo às variações presentes nos resultados experimentais simulados.

Na vertente de modelagem MTP, pôde-se também concluir pela existência de possíveis dificuldades na obtenção dos resultados numéricos em função de dois fatores: uma escolha imprecisa de um parâmetro do material relacionado ao acúmulo de deformações atuando em uma faixa de largura definida ( $h$ ) e uma determinação trabalhosa do parâmetro do material que quantifica a sua energia de fratura ( $G_f$ ). Por outro lado, verificou-se que esse modelo permite um posicionamento mais consciente do analista quanto aos parâmetros balizadores da sua lei constitutiva ( $\alpha$  e  $p_1$ ), possibilitando uma boa aproximação das respostas experimentais e resultados numéricos superiores aos apresentados pelos modelos bilinear e não-linear, também fundamentados nos parâmetros  $G_f$  e  $h$ .

### 6.2.2 Considerações sobre o Modelo Trilinear Modificado (MTM)

A modelagem sob o enfoque trilinear modificado, discutida no Capítulo 5 deste trabalho, foi inicialmente motivada por ser uma alternativa ao modelo MTP, permitindo tratar o dano do material sob um enfoque distinto do empregado naquela vertente inicial da modelagem. Além disso, a possibilidade de obtenção direta dos parâmetros do material balizadores da sua lei constitutiva ( $f_{R,1}$  e  $f_{R,4}$ ) a partir de um ensaio padronizado na literatura aumentou o interesse pela implementação dessa proposta.

Inicialmente, admitiu-se que a relação *tensão x deformação* em tração pudesse ser aproximada por uma curva parametrizada pela lei constitutiva trilinear sugerida pela

RILEM (RILEM TC 162, 2003). Em seguida, um estudo da influência dos parâmetros dessa lei em termos das respostas *carga x deslocamento* permitiu propor uma nova parametrização, tendo por fim aproximar as respostas numérica (MTM) e experimental. Os resultados com a nova estratégia de modelagem confirmaram a expectativa de boa aproximação numérica quando da comparação com respostas experimentais para teores de fibras variados.

Verificou-se que uma característica marcante dessa vertente do modelo trilinear é a forma de obtenção dos parâmetros da sua lei constitutiva. Nesse caso, tomou-se como referência um ensaio padronizado na literatura que disponibiliza, de maneira objetiva, os parâmetros do modelo ( $f_{R, 1}$  e  $f_{R, 4}$ ). Concluiu-se que esse fato elimina as possíveis dificuldades numéricas percebidas na modelagem anterior (MTP) vinculadas à imprecisão na obtenção do parâmetro “h” e ao trabalho necessário para quantificação do parâmetro  $G_f$ , característicos do modelo MTP.

### 6.2.3 Considerações sobre a Metodologia de Aplicação do modelo MTM

Propôs-se uma metodologia para possibilitar o emprego da modelagem MTM em situações de indisponibilidade dos parâmetros balizadores da sua lei constitutiva ( $f_{R, 1}$  e  $f_{R, 4}$ ). Essa proposta teve como motivação uma almejada utilização rotineira do modelo MTM, aliada à possibilidade de obtenção indireta dos citados parâmetros, conferindo, assim, uma maior praticidade a essa vertente do modelo trilinear.

Nessa metodologia, estabeleceu-se um “critério de semelhança” para validação do modelo MTM. Nesta pesquisa, propôs-se pautar esse critério na correspondência perfeita quanto ao tipo de fibras de aço empregado, exigindo também a menor variação possível nas classes de resistência dos concretos e nos teores de fibras utilizados. Esse critério foi proposto com o objetivo de minorar possíveis interferências nos resultados numéricos causadas por discrepâncias entre as propriedades dos materiais das referências de caracterização e validação do modelo.

É importante também avaliar a atuação do analista quando da aplicação da metodologia proposta. Certamente, pode ele ponderar sobre o uso de um “critério de semelhança” de sua livre escolha. Todavia, como uma primeira aproximação, sugere-se empregar o critério apresentado neste trabalho. Nesta pesquisa, quando submetido a um exemplo de aplicação baseado em resultados experimentais disponíveis na literatura, esse critério conduziu a respostas numéricas satisfatórias, confirmando a pertinência da metodologia de aplicação proposta.

Finalmente, considera-se que esta pesquisa contribuiu para uma maior precisão na obtenção de resultados da análise estrutural de concretos com fibras de aço. Conseqüentemente, veio a se coadunar com as expectativas de projetos estruturais mais econômicos, amparados nas idéias de desenvolvimento sustentável e nas premissas de durabilidade e qualidade das estruturas.

### 6.3 Sugestões para Pesquisas Futuras

Primeiramente, vale dizer que a implementação da modelagem proposta neste trabalho baseou-se no paradigma da Programação Orientada a Objetos. Além disso, a implementação foi conduzida em um código computacional aberto, disponível no meio acadêmico e desenvolvido na linguagem de programação C<sup>++</sup>, o que possibilita aplicações tanto em microcomputadores quanto em estações de trabalho. A portabilidade dessa linguagem e as características de expansão disponíveis no código computacional sugerem a implementação da modelagem proposta em ambientes de processamento paralelo, visando disponibilizar análises com novos recursos e capacidades de processamento.

Paralelamente, os resultados obtidos permitiram vislumbrar outras linhas de investigação para o concreto reforçado com fibras de aço. A seguir, apresentam-se sugestões nesse sentido:

- . a expansão da modelagem numérica proposta para representação do comportamento desse material diante de carregamentos dinâmicos, em vista das possibilidades de aplicação do CRFA;
- . o estudo da aplicabilidade da modelagem trilinear em concretos de alto desempenho reforçado com fibras, como os SIFCON, os CRCC (“*Compact Reinforced Concrete Composite*”), o SIFCA (um tipo de SIFCON com propriedades refratárias) e o RPCC (“*Reactive Powder Concrete Composite*”);
- . a expansão do modelo proposto para contemplar casos de atuação conjunta de fibras de aço e de armaduras discretas;
- . nesta pesquisa, a aproximação da curva *tensão x deformação* do CRFA por meio de um diagrama trilinear mostrou-se eficaz nos exemplos estudados. Os parâmetros do material balizadores dessa lei ( $f_{R,1}$  e  $f_{R,4}$ ) foram obtidos a partir de dois deslocamentos prescritos na curva *carga x deslocamento* de um ensaio padronizado de viga entalhada (RILEM TC 162, 2003). Considera-se que o embasamento da lei constitutiva a partir de outros parâmetros do material poderá fornecer mais subsídios para a representação adequada do seu comportamento. Nesse sentido, sugere-se o emprego de diagramas lineares de três ou quatro pontos no ramo descendente da curva *tensão x deformação*. Tais pontos devem estar fundamentados nas resistências residuais  $f_{R,2}$  e  $f_{R,3}$  ou em uma combinação dessas, sendo os valores dessas resistências obtidos também do mencionado ensaio de viga entalhada (RILEM TC 162, 2003). Para tanto, é preciso que se meçam os seguintes deslocamentos prescritos pela RILEM:  $\delta_{R,2} = 1,31$  mm (correspondente a  $CMOD = 1,5$  mm) e  $\delta_{R,3} = 2,15$  mm (correspondente a  $CMOD = 2,5$  mm). Com esses valores medidos na curva *carga x deslocamento* do ensaio padronizado, poderão ser obtidas as respectivas forças residuais ( $F_{R,2}$  e  $F_{R,3}$ ) e tensões residuais ( $f_{R,2}$  e  $f_{R,3}$ ), fundamentando as novas formas de parametrização da curva *tensão x deformação*. As figuras 6.1 e 6.2 apresentam a sugestão para as curvas de modelagem, sendo  $g_i$  uma função genérica que delimita os pontos da curva a partir das resistências residuais;

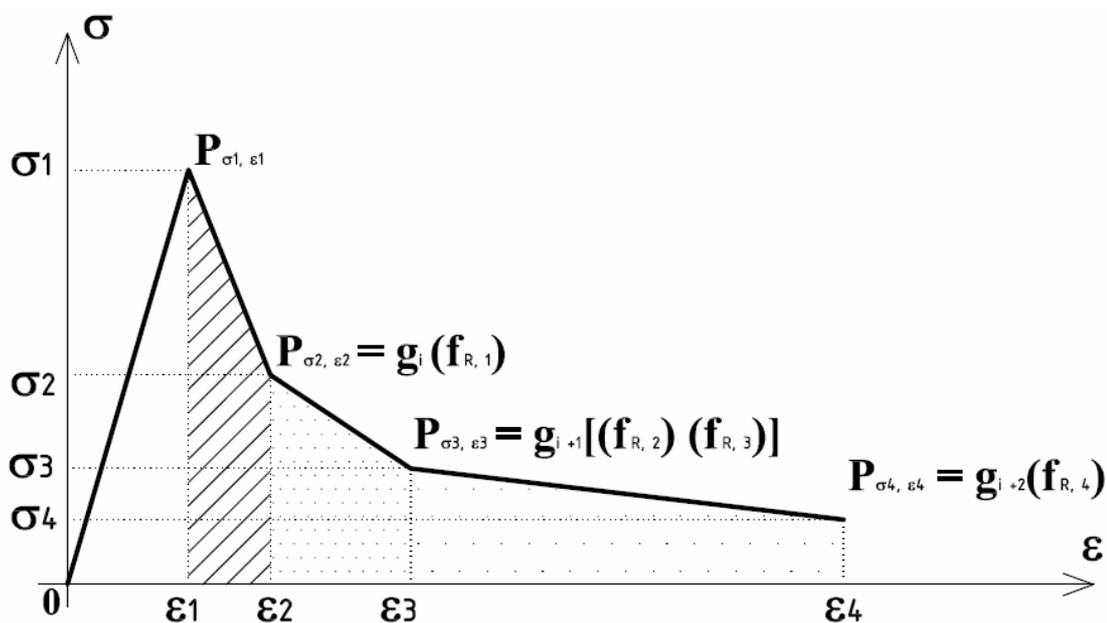


FIGURA 6.1 – Sugestão de diagrama *tensão x deformação* linear de três pontos para representação do comportamento do CRFA

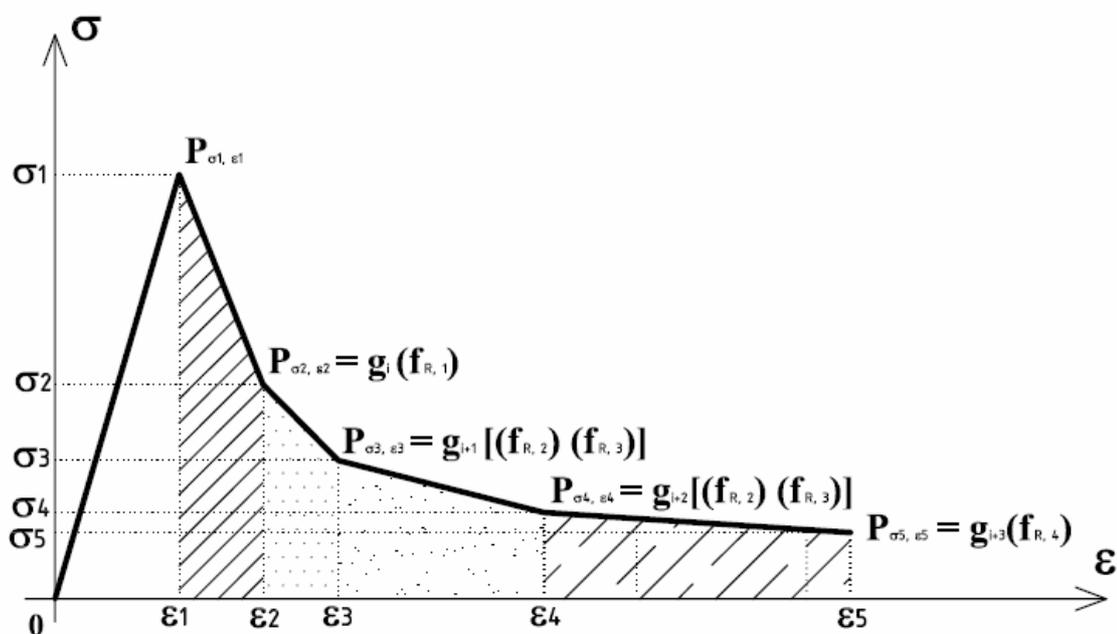


FIGURA 6.2 – Sugestão de diagrama *tensão x deformação* linear de quatro pontos para representação do comportamento do CRFA

. a proposta de uma metodologia de aplicação do modelo trilinear modificado apresentada neste trabalho teve como premissa o estabelecimento de um “critério de semelhança” para validação do modelo MTM. Acredita-se que pesquisas futuras possam contribuir nesse sentido, apontando novos elementos para o estabelecimento de outros critérios com o necessário embasamento e rigor científicos. Sugere-se o estudo de um critério a ser aplicado em matrizes de concreto reforçadas com tipos distintos de fibras;

. finalmente, em complemento à sugestão anterior, propõe-se avaliar a influência, na metodologia de aplicação do modelo MTM proposta neste trabalho, de variações significativas nas classes de concreto e nos teores de fibra das referências para caracterização e validação do modelo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABAQUS, Inc. **ABAQUS/Standart. Version 6.6.** Disponível em: <[www.abaqus.com](http://www.abaqus.com)> 22/03/2007.

ABNT – NBR 6118: 2003 - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento.** Rio de Janeiro/RJ, 2003.

ABNT - NBR 7223: 1992 - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7223: Concreto – Determinação da Consistência pelo Abatimento do Tronco de Cone.** Rio de Janeiro/RJ, 1992.

ABNT - NBR 9606: 1992 - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 9606: Concreto fresco – Determinação da Consistência pelo Espalhamento do Tronco de Cone.** Rio de Janeiro/RJ, 1992.

ACI 544.4R-88 - ACI COMMITTEE 544. **Design Considerations for Steel Fiber Reinforced Concrete.** ACI Manual of Concrete Practice, Part 5, 2000.

ACI 544.3R-93 - ACI COMMITTEE 544. **Guideline for Specifying, Proportioning, Mixing, Placing and Finishing Steel Fiber Reinforced Concrete.** ACI Manual of Concrete Practice, Part 5, 2000.

ACI 544.1R-96 - ACI COMMITTEE 544. **State-of-Art Report in Fiber Reinforced Concrete.** ACI Manual of Concrete Practice, Part 5, 2000.

ADEBAR, P., MINDESS, S., St.-PIERRE, D., OLUND, B. **Shear Tests of Fiber Concrete Beams without Stirrups.** ACI Structural Journal, v. 94-S8, p. 68-76, January/February, 1997.

ADINA R & D. **Adina - System Overview.** Disponível em: <[www.adina.com](http://www.adina.com)> 22/03/2007.

AGOPYAN, V., NUNES, N. L. **A Influência do Fator de Forma da Fibra na Tenacidade à Flexão do Concreto Reforçado com Fibras de Aço.** 18 p. Boletim Técnico BT/PCC/225, Departamento de Engenharia de Construção Civil, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, SP, 1998.

AL-TAAN, S. A. e EZZADEEN, N. A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Steel Fibre Reinforced Concrete Members.** Mosul University, Mosul, Iraq. Fiber Reinforced Cement and Concrete – RILEM. Publish. By E & FN Spon, 2-6 Boundary Row, London, 1992.

ANSYS, Inc. **ANSYS. Mechanical Products Capabilities - 11.0 Release.** Disponível em: <[www.ansys.com](http://www.ansys.com)> 22/03/2007.

ARAÚJO, D. L. **Cisalhamento entre Viga e Laje Pré-moldada Ligadas mediante Nichos Preenchidos com Concreto de Alto Desempenho.** Tese de Doutorado - EESC. São Carlos/SP, 2002.

ARAÚJO, F. A. **Contribuição ao Emprego da Mecânica do Dano para a Análise do Comportamento Dinâmico Não-Linear de Vigas em Concreto Armado**. Dissertação (Mestrado). EESC. São Carlos/SP, 2003.

ASHOUR, S.; HASANAIN, G. e WAFSA, F. **Shear Behavior of High-Strength Fiber Reinforced Concrete Beams**. ACI Journal, vol. 89, p 176-184, March/April, 1992.

ASTM A820 - AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM A820/A820M-06 - Standard Specification for Steel Fibers for Fiber-Reinforced Concrete**, 2006.

ASTM C143 - AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **Standard Test Method for Slump of Hydraulic Cement Concrete - ASTM C143/C143M-05a**. November, 2005.

ASTM C995 - AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **Standard Test Method for Time of Flow of Fiber-Reinforced Concrete Through Inverted Slump Cone - ASTM C995-01**. November, 2001.

ASTM C1018 - AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM C1018-97 - Standard Test Method for Flexural Toughness and First-Crack Strength of Fiber-Reinforced Concrete (Using Beam With Third-Point Loading) -**. January, 1994

BARR, B. I. G. e LEE, M. K. **Design of SFRC based on the Stress-Strain Relationship (Part 2 / Section 1) - Final Report, Subtask 7.1 - Recommendations for Testing of SFRC**. 32 p. European Community under the Industrial & Materials Technologies Programme (Brite-EuRam III) BPR-CT98-0813. January, 2002.

BARRAGÁN, B. E. **Failure and Toughness of Steel Fiber Reinforced Concrete under Tension and Shear**. Universitat Politecnica de Catalunya - Escola Técnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelon. March, 2002.

BARRAGÁN, B. E. e GETTU, R. **Hormigones Reforzados con Fibras - Recientes Avances y Tendências**. Universitat Politècnica de Catalunya - Laboratori de Tecnologia d'Estructures - Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelon. Setembro, 2002.

BARROS, J. A. O. **Comportamento do Betão Reforçado com Fibras – Análise Experimental e Simulação Numérica**. Tese de Doutoramento - FEUP, Universidade do Minho, Guimarães, Portugal, Dezembro, 1995.

\_\_\_\_\_. **Estado-da-arte de Betões Reforçados com Fibras**. Revista “Engenharia Civil”, nº 3, Universidade do Minho, Portugal, 1996.

BARROS, J.A.O.; FIGUEIRAS, J. A. **Flexural Behaviour of SFRC: Testing and Modelling**. Journal of Materials in Civil Engineering, Volume 11, Issue 4, p. 331-338, 1999.

BARROS; J. A. O.; GOUVEIA, A. V. **Simulação do Comportamento à Compressão Uniaxial do Betão Reforçado com Fibras de Aço**. Revista do Departamento de Engenharia Civil da Universidade do Minho, Guimarães, Portugal, p. 39-52, Maio, 2000.

BARROS; J. A. O.; ANTUNES, J. A. B.; AMORIM, J. A. S. B. A. **Influência da Quantidade de Fibras, Percentagem de Cinzas Volantes e Idade no Comportamento à Flexão de Betão Reforçado com Fibras de Aço Dramix RC-80/60-BN**. 87 p. Relatório 02-DEC/E-11, Escola de Engenharia, Departamento de Engenharia Civil, Universidade do Minho, Portugal, julho, 2002.

BARROS, J.A.O., ANTUNES, J.A.B., CUNHA, V.M.C.F., RIBEIRO, A.F. **Post-Cracking Behaviour of Steel Fibre Reinforced Concrete (RILEM Recommendations)**. 5th International Colloquium "Industrial Floors", Technique Academy Esslingen, Stuttgart, German, p. 547-546; 21-23, January, 2003.

BAŽANT, Z. P. **Mechanics of Distributed Cracking**. ASME, Vol. 39 - no 5, May, 1986.

\_\_\_\_\_. **Fracture Mechanics of Concrete Structures: An Aperçu of Basic Concepts and Modeels**. In: Proceedings of FramCoS I, Elsevier Applied Science, p. 145-54, London, 1992.

BEKAERT. **Dramix Guideline: Design of Steel Wire Fiber Reinforced Concrete Structures with or without Ordinaring Reinforcement**, Infrastructuur in Het Leefmilieu 4, Belgium, p. 227-259, 1995.

\_\_\_\_\_. **Fiber Concrete**. Disponível em: [www.bekaert.com](http://www.bekaert.com). 16/11/2006.

BELGO GRUPO ARCELOR. **Fibras de Aço Dramix**. Disponível em: [www.belgo.com.br](http://www.belgo.com.br). 30/08/2006.

BOONE, T., INGRAFFEA, A. **Simulation of the Fracture Process at Rock Interfaces**. Numerical Methods in Fracture Mechanics, Proceedings of the Fourth International Conference, p. 519-531. San Antonio, Texas, U.S.A., 1987.

BRANDÃO, J. H. **Análise Experimental e Numérica de Cascas de Concreto de Ultra-Alto Desempenho Reforçado com Fibras**. Tese de Doutorado - COPPE/UFRJ, Março, 2005.

CALIXTO, J. M. F. **Concreto Reforçado com Fibras Curtas**. Estruturas Usuais de Concreto – Curso de Extensão em Engenharia de Estruturas. Escola de Engenharia – UFMG, Belo Horizonte, MG, Agosto, 1998.

CALIXTO, J. M. F.; VIDAL FILHO, L. S.; GONÇALVEZ, C. M. **The Effects of Different Types of Short Fibers on the Behavior and Strength of Reinforced Concrete Beams**. In: 12th International Conference on Composite Materials

(ICCM12). Paris, França, 1999.

CARREIRA, D. J.; CHU, K. H. **Stress-Strain Relationship for Plain Concrete in Compression**. ACI Journal, 82(6), p. 797-804, 1985.

CEB-FIP/MC1990, 1991. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **Bulletin D'Information nº 203**. Lausanne, Suisse. July, 1991.

CECCATO, M.R. **Estudo da Trabalhabilidade do Concreto Reforçado com Fibras de Aço**. Dissertação de Mestrado. 98 p. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, SP, 1998.

CHANVILLARD, G. **French Approach in Metallic Fiber Reinforced Concrete Structures Design**. Fifth International Conference on Composites Engineering ICCE/5, Las Vegas, USA, July, 1998.

CHAUDHARI, G. P. **Fibers in Concrete**. The Indian Concrete Journal, p. 939-940, March, 2003.

CHUANG, E., OVERLAND, M., e ULM, F.-J., **Length Scales of Fiber Reinforced Cementitious Composites - A Review**. Proc. FramCoS 4 (ed.: R. de Borst, J. Mazars, G. Pijaudier-Cabot e J.G.M. van Mier), Paris, v. 1(2), p. 35-42, May 28 - June 1, 2001.

CUNHA, V.; RIBEIRO, A.; BARROS, J. e ANTUNES, A. **Betão Reforçado com Fibras de Aço: Recomendações Normativas, Investigação Experimental e Numérica**. V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, 19 p, São Paulo, SP, 2003.

CFG - CORNELL FRACTURE GROUP (a). **FRANC2D, CASCA and Translators**. Disponível em: <[www.cfg.cornell.edu/software/franc2d\\_casca.htm](http://www.cfg.cornell.edu/software/franc2d_casca.htm)> 22/03/2007.

\_\_\_\_\_ (b). **FRANC3D and OSM**. Disponível em:

<[www.cfg.cornell.edu/software/franc3d\\_osm.htm](http://www.cfg.cornell.edu/software/franc3d_osm.htm)> 22/03/2007.

CUNHA, V. M. C. F. **Investigação Experimental e Numérica do Comportamento à Tração de Betão Reforçado com Fibras de Aço**. Dissertação (Mestrado). 127 p. Universidade do Minho, Portugal, 2004.

DBV - DEUTSCHER BETON-UND-BAUTECHNIK-VEREIN. **DBV-Merkblatt: Stahlfaserbeton**. Oktober, 2001.

DING, Y., KUSTERLE, W. **Compressive Strees-Strain Relationship of Steel Fibre-Reinforced Concrete at Early Age**. Cement and Concrete Research, Vol. 30, p. 1573-1579, 2000.

DUPONT, D. **Modelling and Experimental Validation of the Constitutive Law ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) and Cracking Behaviour of Steel Fibre Reinforced Concrete**. Doctoral Thesis. 215 p. Catholic University of Leuven. Department of Civil Engineering. Division Building Materials and Building Technology, Belgium, 2003.

EL-NIEMA, E. I. **Reinforced Concrete Beams with Steel Fibers under Shear**. ACI Journal, p. 178-83, March/April, 1991.

EUROCODE 2 (ENV 1992-1-1: 1991). **Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1 : General rules and rules for buildings**. 1991.

EZELDIN, A. S. e BALAGURU, P. N. **Bond Behavior of Normal and High-Strength Fiber Reinforced Concrete**. ACI Materials Journal, Sept/Oct, 1989.

EZELDIN, A. S. e HSU, C-T. T. **Optimization of Reinforced Fibrous Concrete Beams**. ACI Materials Journal, 89-S12, Jan/Feb, 1992.

FARIAS, M. L. R.; TOLEDO, R.; FAIRBAIRN, E. **Concreto de Alto Desempenho Reforçado com Fibras**. Revista Engenharia – Estudo e Pesquisa, v.3, n. 1, p. 87-98,

Juiz de Fora, MG, Jan/Jun, 2000.

FERREIRA, L. E. **Sobre a Resistência ao Fraturamento do Concreto e do Concreto reforçado com Fibras de Aço**. Tese de Doutorado - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, SP, 2002.

FIGUEIREDO, A. D. **Concreto com Fibras de Aço**. Boletim Técnico BT/PCC/260. 69 p. Departamento de Engenharia de Construção Civil, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, SP, 2000.

FURLAN JÚNIOR, S. **Vigas de Concreto Armado com Taxas Reduzidas de Armadura de Cisalhamento: Influência do Emprego de Fibras Curtas e de Protensão**. Tese de Doutorado. 373 p. - Escola de Engenharia de São Carlos (EESC). São Carlos, SP, 1995.

GETTU, R., SCHNÜTGEN, B., ERDEM, E., STANG, H. **Design Methods for Steel Fiber Reinforced Concrete – A State-of-Art**. Brite-EuRam Project BRPR-CT98-0813 (DG12-BRPR). February, 2000.

GRIMALDI, A. e LUCIANO, R. **Tensile Stiffness and Strength of Fiber-Reinforced Concrete**. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Volume 48, Issue 9, p. 1987-2008, 1 September, 2000.

GROTH, P. **Fiber Reinforce Concrete - Fracture Mechanics Methods Applied on Self-Compacting Concrete and Energetically Modified Binders**. Doctoral Thesis. Department of Civil and Mining Engineering, Division of Structural Engineering, Luleå University of Technology, S-97187, Luleå, Sweden, January, 2000.

GUIMARÃES, L. G. S. (1992). **Disciplina de Programação Orientada a Objetos para Análise e Visualização Bidimensional de Modelos de Elementos Finitos**, Dissertação de Mestrado. 62 p. Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, 1992.

GUIMARÃES, A. E. P., GIONGO, J. S., BITTENCOURT, T. N. **Pilares em Concreto de Alta Resistência: Análise da Dutilidade com Adição de Fibras Metálicas.** XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural. Punta del Este, Uruguai, Nov, 2000.

HARTMANN, T. **Steel Fiber Reinforced Concrete.** PhD Thesis, Royal Institute of Technology (KTH). Stockholm, 1999.

HILLERBORG, A.; MODEER, M.; PETERSSON, P-E. **Analysis of Crack Formation and Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and FE.** Cement and Concrete Research, Vol. 6, p. 773-82, 1976.

HSU, L. S. e HSU, C-T. **Stress-Strain Behaviour of Steel Fiber Reinforced Concrete under Compression.** ACI Structural Journal, p. 448-57, July/August, 1994.

JSCE - JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS. **Specification of Steel Fibers for Concrete.** Standard Part III-1. Concrete Library of JSCE, n. 50, March, 1983.

JSCE-SF4 - JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS. **Methods of Tests for Flexural Strength and Flexural Toughness of Steel Fiber Reinforced Concrete.** Standard Part III-2. Methods and Tests for Steel Fiber Reinforced Concrete, Concrete Library of JSCE., n. 3, p. 58-66, June, 1984.

KOOIMAN, A. e WALRAVEN, J. **Steel Fiber Reinforced Concrete in the 2<sup>nd</sup> Heinenoor Tunnel.** Delft Univ of Technology, 2000.

KANG, WANG TAI. **QUEBRA2D.** Disponível em:  
<[www.lmc.ep.usp.br/people/taikang/quebra2d.htm](http://www.lmc.ep.usp.br/people/taikang/quebra2d.htm)> 22/03/2007.

KHATRI, D., ANDERSON, J. C. **Analysis of Reinforced Concrete Shear Wall Components Using the ADINA Nonlinear Concrete Model.** Computers & Structures, v. 56, n. 2/3, p. 485-504, 1995.

- LI, F. e LI, Z. **Continuum Damage Mechanics Based Modelling of Fiber Reinforced Concrete in Tension**. International Journal of Solids and Structures, Volume 38, Issue 5, Pages 777-793, February, 2001.
- LI, C. H. e MOBASHER, B. **Finite Element Simulations of Fiber Pullout Toughening in Fiber Reinforced Cement Based Composites**. Advanced Cement Based Materials, Volume 7, Issues 3-4, p. 123-132, 5 April, 1998.
- LIM, D. H. e OH, B. H. **Experimental and Theoretical Investigation on the Shear of Steel Fibre Reinforced Concrete Beams**. Engineering Structures, Volume 21, Issue 10, p. 937-944, October, 1999.
- LIM, T. Y.; PARAMISIVAM, P.; S. L. LEE. **Bending Behaviour of Steel-Fiber Concrete Beams** ACI Structural Journal, 84-S54, Nov/Dec 1987b.
- LIU, D. e STEVENS, D. J. **Finite Element Application of a Constitutive Model for Fiber Reinforced Concrete/Mortar**. Clarkson University, Potsdam, USA. Fiber Reinforced Cement and Concrete – RILEM. Published by E & FN Spon, 2-6 Boundary Row, London, 1992.
- LOBÃO, L. M. M. **Taxa de Armadura Longitudinal de Tração Mínima em Vigas de Concreto de Resistência Normal com Fibras de Aço**. Dissertação de Mestrado. 109 p. COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro, RJ, 2005.
- LOPES, L. M. M. **Substituição Parcial de Armadura de Flexão por Fibras de Aço em Vigas de Concreto**. Dissertação de Mestrado. COPPE/UFRJ, 2005.
- MACIEL, A. S. **Análise Experimental de Vigas Armadas de Concreto de Alto Desempenho com Diferentes Tipos de Fibras**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, 2001.

- MANSUR, M. A., PARAMASIVAM, P. **Fiber Reinforced Concrete Beams in Torsion, Bending and Shear.** ACI Journal, Jan/Feb, 1985.
- MARTHA, L. F., MENEZES, I. F. M., LAGES, E. N., PARENTE JÚNIOR, E. e PITANGUEIRA, R. L. **An OOP Class Organization for Materially Nonlinear Finite Element Analysis.** XVII CILAMCE, Padova, Itália, Vol. 1, p. 229-32, 1996.
- MINDESS, S.; TAERWE, L.; LIN, Y. -Z.; ANSARI, F.; BATSON, G. **Standard Testing.** In: HIGH PERFORMANCE FIBER REINFORCED CEMENT COMPOSITES 2 (HPFRCC2), pág. 384-421. Londres: E & F Spon, 1996.
- MONTENEGRO, F. E. PACHECO, R. **Orientação a Objetos em C++.** Editora Ciência Moderna Ltda. – Rio de Janeiro, 1994.
- MURUGAPPAN, K., PARAMASIVAM, P. e TAN, K. H. **Shear Response of Reinforced Fibrous Concrete Beams Using Finite Element Method.** National University of Singapore, China. Fiber Reinforced Cement and Concrete – RILEM 1992. Published by E & FN Spon, 2-6 Boundary Row, London, 1992.
- NANNI, A., JOHARI, A. **Roller Compacted Concrete Pavement Reinforced with Steel Fibers.** Concrete International, Mar, 1989.
- NARAYANAN, R.; DARWISH, I. Y. **Use of Steel Fibers as Shear Reinforcement.** ACI Journal, p. 216-226, May/Jun, 1987.
- NATARAJA, M. C., DHANG, A. P., GUPTA, A. P. **Stress-Strain Curves for Steel-Fiber Reinforced Concrete under Compression.** Cement and Concrete Composites, Vol. 21, p 383-90, 1988.
- NOGHABAI, K. **Beams of Fibrous Concrete in Shear and Bending: Experimental and Model.** Lulea University, Se. Journal of Structural Engineering, p. 243-51, Feb, 2000.

NUNES, N. L. **Contribuição para a Aplicação do Concreto Reforçado com Fibras de Aço em Elementos de Superfície Restringidos**. Tese de Doutorado. 253 p. - Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, SP, 2006.

NUNES, N.L. ; TANESI, J. ; FIGUEIREDO, A.D. **Aplicação do Concreto Reforçado com Fibras de Aço na Recuperação de Estruturas e Pavimentos**. Congresso Ibero-americano de Patologia das Construções - CONPAT 97, 4. Anais 1997, v.2, p. 41-48, Porto Alegre, RS, 21 a 24 de outubro de 1997.

PARAMASIVAM, P., MURUGAPPAN, K., TAN, K. H. **Finite Element Analysis of Partially Prestressed Steel Fiber Concrete Beams in Shear**. National University of Singapore, China. Advn Cem Bas Mat – Elsevier Science, 1995.

PENG, X., MEYER, C. **A Continuum Damage Mechanics Model for Concrete Reinforced with Randomly Distributed Short Fibers**. Computers & Structures, Volume 78, Issue 4, Pages 505-515, December, 2000.

PINTO JÚNIOR, N. O., CARNIO, M. A. **Análise em Regime Plástico de Placas de Concreto Reforçado com Fibras de Aço sobre Base Elástica**. XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural. Punta del Este, Uruguai, Nov, 2000.

PITANGUEIRA, R. L. S. **Mecânica de Estruturas de Concreto com Inclusão de Efeitos de Tamanho e Heterogeneidade**. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, 1998.

PITUBA, J. J. C. **Sobre a Formulação de um Modelo de Dano para o Concreto**. Tese de Doutorado - Escola de Engenharia da Universidade de São Carlos. São Carlos, SP, 2003.

PROENÇA, S. P. B. **Elementos de Mecânica do Dano em Meios Contínuos**. Escola de Engenharia de São Carlos - EESC. São Carlos, 2001.

QUINTA, M. T. **Pisos de Concreto com Fibras de Aço**. Revista Thécne, nº 107, pág. 70-72. Editora Pini, Fevereiro, 2006.

RESENDE, F. M. **Influência das Fibras de Aço, Polipropileno e Sisal no Amortecimento de Concretos de Resistência Normal e de Alto Desempenho**. Tese de Mestrado - COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro, RJ – Brasil. Agosto, 2003

Revista Thécne. **Rodoanel – Rota Bandeirante (SP)**, nº 55, ed. Pini, Outubro, 2001.

RILEM 50-FMC. COMMITTEE FRACTURE MECHANICS OF CONCRETE. **Determination of Fracture Energy of Mortar and Concrete by means of Three-point Bending Tests on Notched Beams - Draft Recommendation**. Materials and Structures, v. 85, n. 85, p. 285-90, 1985.

RILEM TC 162 / 2000. TECHNICAL COMMITTEE 162. **"Test and Design Methods for Steel Fibre Reinforced Concrete:  $\sigma$ - $\epsilon$  Design Method"**. Vandewalle, L.; Nemegeer, D.; Balazs, L.; Barr, B.; Bartos, P.; Banthia, N.; Brandt, A.; Criswell, M.; Denarie, E.; Di Prisco, M.; Falkner, H.; Gettu, R.; Gopalaratnam, V.; Groth, P.; Hausler, V.; Katsaragakis, E.; Kooiman, A.; Kovler, K.; Lehtonen, J.; Massicotte, B.; Mindess, S.; Reinhardt, H.; Rossi, P.; Schaerlaekens, S.; Schnutgen, B.; Shah, S.; Skarendahl, A.; Stang, H.; Stroeven, P.; Swamy, R.; Tatnall, P.; Teutsch, M.; Walraven, J.; Wubs, A. Materials and Structures 33 (226), p. 75-81, March, 2000.

RILEM TC 162 / 2002a. TECHNICAL COMMITTEE 162. **"Test and Design Methods for Steel Fibre Reinforced Concrete - Design of Steel Fibre Reinforced Concrete Using the  $\sigma$ -w Method: Principles And Applications"**, Vandewalle, L.; Nemegeer, D.; Balazs, L.; Barr, B.; Barros, J.; Bartos, P.; Banthia, N.; Brandt, A.; Criswell, M.; Denarie, E.; Di Prisco, M.; Falkner, H.; Gettu, R.; Gopalaratnam, V.; Groth, P.; Hausler, V.; Katsaragakis, F.; Kooiman, A.; Kovler, K.; Lehtonen, J.; Massicotte, B.; Mindess, S.; Reinhardt, H.; Rossi, P.; Schaerlaekens, S.; Schumacher, P.; Schnutgen, B.; Shah, S.; Skarendahl, A.; Stang, H.; Stroeven, P.; Swamy, R.; Tatnall, P.; Teutsch, M.; Walraven,

J.; Wubs, A. *Materials and Structures* 35 (249), p. 262-278, June, 2002.

RILEM TC 162 / 2002b. TECHNICAL COMMITTEE 162. "**Test and Design Methods for Steel Fibre Reinforced Concrete - Final Recommendation**", Vandewalle, L.; Nemegeer, D.; Balazs, L.; Barr, B.; Bartos, P.; Banthia, N.; Brandt, A.; Criswell, M.; Denarie, E.; Di Prisco, M.; Falkner, H.; Gettu, R.; Gopalaratnam, V.; Groth, V.; Hausler, V.; Katsaragakis, E.; Kooiman, A.; Kovler, K.; Lehtonen, J.; Massicotte, B.; Mindess, S.; Reinhardt, H.; Rossi, P.; Schaerlaekens, S.; Schnutgen, B.; Shah, S.; Skarendahl, A.; Stang, H.; Stroeven, P.; Swamy, R.; Tatnall, P.; Teutsch, M.; Walraven, J.; Wubs, A. *Materials and Structures* 35 (253): 579-582, Nov, 2002 .

RILEM TC 162 / 2003. TECHNICAL COMMITTEE 162. "**Test and Design Methods for Steel Fibre Reinforced Concrete -  $\sigma$ - $\epsilon$  Design Method - Final Recommendation**", Author(s): Vandewalle, L.; Nemegeer, D.; Balazs, L.; Barr, B.; Bartos, P.; Banthia, N.; Brandt, A.; Criswell, M.; Denarie, E.; Di Prisco, M.; Falkner, H.; Gettu, R.; Gopalaratnam, V.; Groth, P.; Hausler, V.; Katsaragakis, E.; Kooiman, A.; Kovler, K.; Lehtonen, J.; Massicotte, B.; Mindess, S.; Reinhardt, H.; Rossi, P.; Schaerlaekens, S.; Schnutgen, B.; Shah, S.; Skarendahl, A.; Stang, H.; Stroeven, P.; Swamy, R.; Tatnall, P.; Teutsch, M.; Walraven, J.; Wubs, A. *Materials and Structures* 36 (262): 560-567 Oct, 2003.

ROCHA, G. G. N. **Concreto de Alto Desempenho Fabricado com Fibras de Aço**. Relatório de Pesquisa de Iniciação Científica – CNPq. 53 p. Escola de Engenharia da UFMG, Belo Horizonte, MG, março, 1996.

ROSSI, P. **Steel Fiber Reinforced Concrete (SFRC): An Example of French Research**. *ACI Materials Journal*, p. 273-79, Mai/Jun, 1994.

\_\_\_\_\_. **A Model for Cracking in Fibre-Reinforced Concrete Structures**. *Materials and Structures* vol. 32, p. 125-130, March, 1999.

SALDIVAR, H. **Flexural Toughness Characterization of Steel Fiber Reinforced**

**Concrete - Study of Experimental Methodologies and Size Effects.** Doctoral Thesis, School of Civil Engineering (ETSECCPB), Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain, 1999.

SHAH, S. P. e RANGAN, B. V. **Fiber Reinforced Concrete Properties.** ACI Journal, vol 64, p. 126-35, Feb, 1971.

SHAH, S. P.; SWATRZ, S. E. e OUYANG, C. **Fracture Mechanics of Concrete: Applications of Fracture Mechanics to Concrete, Rock and other Quasi-Brittle Materials.** John Wiley & Sons, Inc., 1995.

SHARMA, A. K. **Shear Strength of Steel Fiber Reinforced Concrete Beams.** ACI Journal, p. 624-28, Jul/Aug, 1986.

SILFWERBRAND, J. **Design of Steel Fibre Reinforced Concrete Slabs on Grade.** PRO 15 – Contents PRO 15: Fibre-Reinforced Concretes (FRC) - BEFIB'2000 – RILEM. Part Three: Design Methods and Modelling.

SIMÕES, L. C. **Um Modelo Constitutivo para Concreto com Fibras.** Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Abril, 1998.

SOROUSHIAN, P. e BAYASI, Z. **Fiber-Type Effects on the Performance of Steel-Fiber Reinforced Concrete.** ACI Materials Journal, p. 129-34, Mar/Apr, 1991.

SOROUSHIAN, P. e LEE, C. D. **Constitutive Modelling of Steel Fiber Reinforced Concrete under Direct Tension and Compression.** Recent Developments in Fiber Reinforced Cements and Concretes (eds. R. N. SWAMY and B. BARR). Elsevier Science publishers Ltd., Essex, p. 363-377, 1989.

SOUZA, R. A. **Análise de Fraturamento em Estruturas de Concreto Utilizando Programas de Análise Estrutural.** Dissertação de Mestrado. 249 p. Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Campinas, SP,

2001.

STANG, H.; GETTU, R.; BARR, B. **Test and Design Methods for Steel Fiber Reinforced Concrete**. 51 p. Brite-EuRam Project BPR-CT98-0813 (DG12-BRPR). Report Subtask 1.1., March, 2000.

SWAMY, R. N.; BAHIA, H. M. **The Effectiveness of Steel Fibers as Shear Reinforcement**. ACI International, p. 35-40, Mar, 1985.

STANG, H., OLESEN, J. F. **A Fracture Mechanics Based Design Approach to FRC**. PRO 15: Fibre-Reinforced Concretes (FRC) - BEFIB'2000 – RILEM Part Three: Design Methods and Modelling, 2000.

TATNALL, P. C. e KUITENBROUWER, L. **Steel Fiber Reinforced Concrete in Industrial Floors**. Concrete International, p. 43-7, 1992.

VANDEWALLE, L.; DUPONT, D. **Design of SFRC based on the Stress-Strain Relationship (Part 2 / Section 1) - Draft Final Report, Subtask 3.1 - Test and Design Methods for Steel Fibre Reinforced Concrete**. 32 p. Brite-EuRam Project BPR-CT98-0813, January, 2002.

VANDEWALLE, L.; DUPONT, D. / 2002b **Recommendations on Design of SFRC - Final Report, Subtask 7.2**. 62 p. Brite-EuRam Project BPR-CT98-0813. April, 2002.

VALLE, M.; BÜYÜKÖZTÜRK, O. **Behavior of Fiber Reinforced High-Strength Concrete under Direct Shear**. ACI Materials Journal, p. 122-133, Mar/Apr, 1993.

VIDAL FILHO, L. S. **Influência da Adição de Fibras Curtas de Aço no Comportamento e Resistência ao Esforço Cortante em Vigas de Concreto Armado**. Dissertação de Mestrado. 130 p. Escola de Engenharia da UFMG, Belo Horizonte, MG, 1999.

VILLARES, A. M. O. **Influência da Largura do Corpo-de-Prova na Medida da Tenacidade do Concreto Reforçado com Fibras de Aço.** Dissertação de Mestrado. Universidade de Campinas (UNICAMP), Campinas, SP, 2001.

VONDRAN, G. L. **Applications of Steel Fiber Reinforced Concrete.** Concrete International, Nov, 1991.

ZANGELMI JR., E. **Caracterización del Comportamiento de Hormigones de Altas Prestaciones com y sin Fibras Metálicas a Compresión Uniaxial.** Thesis Doctoral. Universitat Politècnica de Catalunya. Escola Tècnica Superior D'Enginyers de Camins, Canals i Ports. Barcelona, Espanha. Abril, 1999.