

**Javã Atayde Pedreira**

**Dinâmica de Máquinas Rotativas  
em Mancais Hidrodinâmicos**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
Programa de Pós-graduação em  
Engenharia Mecânica

Rio de Janeiro  
dezembro de 2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



**Javã Atayde Pedreira**

**Dinâmica de Máquinas Rotativas em  
Mancais Hidrodinâmicos**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-  
graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de  
Engenharia Mecânica da PUC-Rio

Orientador: Prof. Hans Ingo Weber

Rio de Janeiro  
dezembro de 2006



**Javã Atayde Pedreira**

## **Dinâmica de Máquinas Rotativas em Mancais Hidrodinâmicos**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Hans Ingo Weber, Dr.-Ing.**

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

**Prof. Ilmar Ferreira Santos, Dr.-Ing.**

Denmark University of Technology

**Prof. Moysés Zindeluk, Dr.-Eng.**

Departamento de Engenharia Mecânica – COPPE-UFRJ

**Prof. Rubens Sampaio Filho, Ph.D.**

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 12 de dezembro de 2006

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Javã Atayde Pedreira**

Graduou-se em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal da Bahia. Trabalha na Petrobras desde 1987 na área de Engenharia de Manutenção de turbomáquinas

#### Ficha Catalográfica

Pedreira, Javã Atayde

Dinâmica de máquinas rotativas em mancais hidrodinâmicos / Javã Atayde Pedreira ; orientador: Hans Ingo Weber. — 2006.

113 f.: il.; 30 cm

Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica)—Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro , 2006.

Inclui bibliografia

1. Engenharia mecânica — Teses. 2. Rotodinâmica. 3. Mancal de deslizamento 4. Rotor de Jeffcott 5. Velocidade crítica. I. Weber, Hans Ingo. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD: 621

Aos meus pais, Antônio Jaques e Anelita.

A Liliana, minha esposa, e Henrique, meu filho, que sempre me apoiaram com muita paciência e compreensão pela privação dos momentos de lazer e do convívio familiar.

## Agradecimentos

Aos meus pais, Antônio Jaques Pedreira e Anelita Atayde Pedreira, pelo amor e carinho durante toda a minha formação.

Ao professor Hans I. Weber pela sua competência, dedicação, paciência e grandeza na condução deste trabalho que será de grande valia à minha formação profissional.

À PUC-Rio pela oportunidade concedida de desenvolver este trabalho.

À Petrobras, empresa que muito nos orgulha, pelo incentivo e pela sua visão estratégica da importância de investir na formação dos seus funcionários.

Aos colegas da Petrobrás pela experiência e grande conhecimento de rotodinâmica, com os quais tive a oportunidade de discutir e aprender muito.

Aos colegas do Laboratório de Vibrações da PUC-Rio, sempre muito solícitos no apoio à superação das minhas dificuldades, contribuindo assim para o enriquecimento deste trabalho.

Ao técnico Wagner Epifânio da Cruz pelo seu empenho, prestimosidade e criatividade na solução das dificuldades na construção e montagem do rotor e seu sistema hidráulico.

## Resumo

Pedreira, Javã Atayde ; Weber, Hans Ingo. **Dinâmica de Máquinas Rotativas em Mancais Hidrodinâmicos**. Rio de Janeiro, 2006. 113p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho analisa a influência dos mancais hidrodinâmicos no comportamento rotodinâmico das turbomáquinas, no que diz respeito à resposta ao desbalanceamento, modos de vibrar e, principalmente, à instabilidade, que tende a manifestar-se em rotações elevadas ou baixas cargas. As propriedades de rigidez e amortecimento do mancal são determinadas a partir da solução analítica da Equação de Reynolds, usando a aproximação do mancal curto. Um procedimento é apresentado para modelagem dinâmica do sistema rotor-mancal. O modelo de elementos finitos inclui a influência da ação giroscópica. A análise rotodinâmica completa de um rotor concebido e projetado para apresentar o fenômeno da instabilidade é feita com auxílio do programa ROMAC da University of Virginia. O programa calcula as propriedades do mancal a partir da solução numérica completa da Equação de Reynolds e o cálculo das velocidades críticas, dos modos e da análise de estabilidade é feito pelo Método dos Elementos Finitos. Finalmente, documenta-se o projeto do protótipo, o estudo realizado e os ensaios desenvolvidos. A partir das medições realizadas, valida-se a solução numérica.

## Palavras-chave

rotodinâmica, rotor, mancal cilíndrico, jeffcott.

## Abstract

Pedreira, Javã Atayde ; Weber, Hans Ingo. **Dynamics of Rotating Machinery in Fluid-film Bearing**. Rio de Janeiro, 2006. 113p. MSc. Dissertation — Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work analyses the effect of fluid-film bearings on the dynamics of turbomachinery with respect to unbalance response, vibration mode shapes and, specially, instability that tends to occur, mainly, at high speeds or light loads. The bearing stiffness and damping bearing properties are calculated using the analytical solution of the Reynolds Equation, based in a short bearing approach. Following, a procedure is presented for the dynamic modelling of rotor-bearing systems based in the Finite Element Method, including the gyroscopic effect. The complete rotordynamic analysis of a rotor designed to undergo instability problem is performed by software ROMAC from University of Virginia. The software predicts the bearing properties by complete numerical solution of Reynolds Equation and critical speeds, mode shapes and stability analysis is performed using the Finite Element Method. Finally, it is presented the design of the rotor kit, accomplished studies and performed tests. The numerical solution is validated by measurements that were made.

## Keywords

rotor rotordynamics, journal bearing, jeffcott, vibration, bearing stability.

## Conteúdo

1	INTRODUÇÃO	16
2	CONCEITOS BÁSICOS DE ROTODINÂMICA	20
2.1	Introdução	20
2.2	O Rotor de Jeffcott	21
3	OS MANCAIS HIDRODINÂMICOS	35
3.1	Introdução	35
3.2	A Teoria da Lubrificação	35
3.3	A Equação de Reynolds	37
3.4	Mancais Radiais	40
3.5	Rotor montado em mancais hidrodinâmicos	55
3.6	“Oil Whirl” e “oil whip”	61
3.7	Tipos de Mancais Radiais	64
4	O SISTEMA CONTÍNUO ROTOR-MANCAL	69
4.1	Introdução	69
4.2	Equações de Movimento	69
4.3	O Método dos Elementos Finitos	74
4.4	Solução da Equação de Movimento	81
4.5	Análise Rotodinâmica	85
5	Concepção e Projeto da Bancada	94
5.1	Introdução	94
5.2	Descrição do Rotor	94
5.3	Analisador de Vibração	95
5.4	Resultados Experimentais	97
6	Conclusões e Trabalhos Futuros	103
	Bibliografia	105
	Anexos	108
A	Análise de Estabilidade	108
B	Propriedades do mancal para 4.100 rpm	111
C	Detalhamento do mancal	113

## Lista de Figuras

1.1	Simulação do diagrama de Bode	17
1.2	Diagrama de Bode obtido no teste mecânico	17
1.3	Espectro de vibração	18
2.1	Rotor rígido e rotor flexível	21
2.2	a) Rotor em repouso; b) Rotor girando com velocidade $\Omega$ .	22
2.3	Rotor de Jeffcott em coordenadas cartesianas	22
2.4	Resposta em função da razão de frequências	23
2.5	Posição relativa de $C$ e $G$	23
2.6	Sistemas de referência	24
2.7	Rotor de Jeffcott em mancais flexíveis	27
2.8	resposta em função da razão de frequências	27
2.9	a) Resposta sem amortecimento; b) Resposta amortecida	28
2.10	precessões direta e retrógrada	30
2.11	Sistemas de referência para um disco em balanço	31
2.12	Frequências naturais em função da velocidade $\Omega$	34
3.1	Cisalhamento do filme de óleo	36
3.2	Sapata deslizante inclinada	36
3.3	Equilíbrio de um elemento infinitesimal	37
3.4	Mancal curto $B \ll L$	39
3.5	Funcionamento do mancal radial	40
3.6	Geometria do mancal radial	41
3.7	Erro da aproximação da espessura do filme	42
3.8	Desenvolvimento do filme de óleo	42
3.9	Cinemática para definição de $U$ e $V$	43
3.10	Distribuição de pressão no mancal radial	46
3.11	Forças sobre o eixo	46
3.12	Número de Sommerfeld	49
3.13	Lugar geométrico da posição de equilíbrio do munhão	49
3.14	Modelo massa-mola para o filme fluido	50
3.15	Variação da força de reação com o deslocamento	50
3.16	Perturbações em torno da posição de equilíbrio	51
3.17	Pequena perturbação em torno da posição de equilíbrio	52
3.18	Rigidez e amortecimento adimensionalizados	55
3.19	Rotor rígido em mancais hidrodinâmicos	56
3.20	Rotor rígido em mancais hidrodinâmicos	56
3.21	Mapa de estabilidade em função do Número de Sommerfeld	59
3.22	Rotor de Jeffcott em mancal hidrodinâmico	59
3.23	Mapa de estabilidade do rotor de Jeffcott em mancal hidrodinâmico	61
3.24	Espectro em cascata de vibração de um rotor experimental	62
3.25	Ciclo limite da órbita do eixo	63
3.26	Gráfico da velocidade e vibração	64
3.27	Espectro de vibração durante a partida	65

3.28	Tipos de mancal	65
3.29	Conceito de precarga de um mancal	66
3.30	Oscilação da sapata e “offset” de um mancal	66
3.31	Precarga de um mancal de sapatas oscilantes	67
3.32	Mapa de estabilidade para diferentes projetos de mancal	67
3.33	Mancal pressure-dam	68
4.1	Oscilação do rotor com 4 graus de liberdade	70
4.2	Condição de equilíbrio de um elemento infinitesimal	70
4.3	Elemento finito simples em flexão	75
4.4	Viga com dois elementos finitos	79
4.5	Mapa de críticas com dados da figura 4.6	87
4.6	Propriedades do mancal	88
4.7	Modos de vibrar para mancal flexível e rígido	89
4.8	Modos de vibrar não amortecidos	90
4.9	Fator de amplificação e margem de separação	91
4.10	Diagrama de Bode	92
4.11	1º modo e vibrar	92
4.12	2º modo de vibrar	93
4.13	3º modo de vibrar	93
5.1	Rotor experimental conforme construído	95
5.2	Sistema de lubrificação do mancal	95
5.3	Sistema de lubrificação do mancal	96
5.4	Painel frontal do 208 DAIU	96
5.5	Fluxo de dados do analisador	97
5.6	Diagrama de Bode obtido experimentalmente	98
5.7	Espectro e órbita nas vizinhanças da velocidade crítica	99
5.8	Fenômeno do oil whirl	100
5.9	Fenômeno do oil whip	101
5.10	Forma de onda	102

## Lista de símbolos

$A$	Área da seção reta.
$A$	Constante de integração.
$A_o$	Constante.
$A_1$	Constante.
$A_2$	Constante.
$A_3$	Constante.
$A_4$	Constante.
$AF$	Fator de amplificação.
$a$	Aceleração.
$B$	Largura do mancal.
$B$	Constante de integração.
$C$	Matriz de amortecimento.
$\bar{C}$	Matriz de amortecimento adimensionalizada.
$c$	Coefficiente de amortecimento.
$c_{xx}$	Amortecimento principal na direção horizontal.
$c_{yy}$	Amortecimento principal na direção vertical.
$c_{xy}$	Amortecimento cruzado .
$c_{yx}$	Amortecimento cruzado.
$E$	Módulo de elasticidade.
$e$	Excentricidade do mancal.
$F$	Força sobre o mancal.
$F_r$	Força radial sobre o munhão.
$F_{ro}$	Força radial sobre o munhão na condição de equilíbrio.
$F_t$	Força tangencial sobre o munhão.
$F_{to}$	Força tangencial sobre o munhão na condição de equilíbrio.
$f$	Folga radial do mancal.
$f$	Força externa sobre o rotor.
$G$	Matriz giroscópica.
$g$	Aceleração da gravidade.
$H$	Momento angular.
$h$	Espessura aproximada do filme lubrificante.
$h_e$	Espessura exata do filme lubrificante.
$I$	Momento de inércia de área.
$J$	Momento de inércia de massa.
$J$	Momento de inércia de massa transversal.
$J_p$	Momento de inércia de massa polar.
$K$	Matriz de rigidez.
$k$	Rigidez efetiva.
$k_b$	Rigidez do mancal.
$k_e$	Rigidez do eixo.
$k_{xx}$	Rigidez principal na direção horizontal.
$k_{yy}$	Rigidez principal na direção vertical.
$k_{xy}$	Rigidez cruzada .
$k_{yx}$	Rigidez principal na direção horizontal.
$L$	Comprimento do mancal.
$L_v$	Limite de vibração.
$l$	Comprimento do rotor ou do elemento finito.

$M$	Torque.
$m$	Massa do do rotor.
$m$	Precarga do mancal.
$N$	Velocidade de rotação do rotor (rpm).
$N$	Número de funções de modo.
$P$	Força.
$p$	Pressão.
$p$	Número de elementos finitos.
$Q$	Variável auxiliar para uma expressão de $\varepsilon$ .
$q$	Vazão.
$r$	Vetor deflexão do centro geométrico do disco.
$S$	Número de Sommerfeld.
$s$	Expressão para avaliação do sentido da precessão.
$SM$	Margem de separação.
$R$	Raio do mancal.
$Re$	Parte real de um número complexo.
$t$	Tempo.
$T$	Matriz de transformação de coordenadas.
$U$	Velocidade na direção X.
$U$	Matriz dos autovetores a direita.
$u$	Vetor excentricidade devido ao desbalanceamento (m).
$u$	Desbalanceamento residual (g.m).
$u$	Vetor de estado na direção. X
$V$	Esforço cortante.
$V$	Velocidade na direção Y.
$V$	Matriz dos autovetores a esquerda.
$v$	Vetor de deslocamento na direção. Y.
$v$	Velocidade.
$x$	Deflexão na direção X.
$y$	Deflexão na direção Y.
$w$	Peso.
$\bar{w}$	Carga distribuída.
$W$	Velocidade na direção Z.
$Z(t)$	Vetor força modal.
$\alpha$	ângulo (rad).
$\delta$	Constante.
$\varepsilon$	Razão de excentricidade do mancal.
$\varepsilon_o$	Razão de excentricidade do mancal na condição de equilíbrio.
$\mu$	Viscosidade.
$\rho$	Vetor deslocamento do centro de gravidade do disco.
$\rho$	Densidade.
$\Omega$	Velocidade angular do rotor (rad/s).
$\omega$	Frequência natural (rad/s).
$\Omega_l$	Velocidade limite de estabilidade (rad/s).
$\omega_l$	Frequência natural na velocidade limite (rad/s).
$\theta$	ângulo (rad).

$\beta$  ângulo (rad).  
 $\psi$  ângulo (rad).  
 $\lambda$  Autovalores do polinômio característico.

$\beta$  ângulo de fase(rad).  
 $\xi$  Razão de amortecimento.  
 $\gamma$  ângulo (rad).  
 $\eta$  Razão de frequência.  
 $\tau$  Tensão de cisalhamento.  
 $\phi$  ângulo de atitude(rad).  
 $\phi_o$  ângulo de atitude na condição de equilíbrio (rad).  
 $\phi$  Função de modo.  
 $\zeta(t)$  Vetor das cordenadas modais.

*Caminhante, não há caminho. O caminho se faz ao caminhar.*

**Autor desconhecido.**

# 1

## INTRODUÇÃO

O ganho em escala na produção de combustíveis e produtos petroquímicos tem levado à construção de novas plantas de processo de altíssima capacidade de processamento. Ao mesmo tempo, exige-se delas alta performance, traduzida em índices elevados de confiabilidade. As turbomáquinas (turbinas e compressores) desempenham um papel fundamental neste cenário, uma vez que devem operar continuamente durante a campanha operacional, que varia de 3 a 5 anos, sob pena de causarem grandes prejuízos econômicos por perda de produção.

A condição operacional que confere às turbomáquinas altas densidades de energia e vazão é a velocidade do rotor. Altas velocidades induzem a problemas potenciais de velocidade crítica, resposta ao desbalanceamento e instabilidade do rotor. A instabilidade é, em geral, causada pela combinação de fenômenos oriundos dos mancais, selagem, roçamentos e efeitos aerodinâmicos das palhetas.

Diante deste desafio, é essencial a correta compreensão dos fenômenos de vibração e o conhecimento profundo dos fenômenos dinâmicos que influenciam o comportamento vibracional das turbomáquinas. A rotodinâmica é uma poderosa ferramenta para solução e prevenção de potenciais problemas e deve ser levada em consideração desde os processos de aquisição até a operação e a manutenção.

A fase de aquisição é uma das mais importantes, porque daí podem nascer máquinas com problemas dinâmicos crônicos, de difícil solução, que impactarão sensivelmente a confiabilidade da planta. Daí ser imperativo, nesta fase, que se estabeleçam parâmetros de aceitação como fator de amplificação e margem de separação entre a velocidade de operação e a velocidade crítica na concepção do projeto da máquina.

Graças ao avanço dos recursos computacionais e técnicas de modelagem matemática, é possível prever com boa precisão as velocidades críticas do rotor, a resposta ao desbalanceamento e a velocidade limite de estabilidade. A figura 1.1 mostra o diagrama de Bode como resultado de uma

simulação obtida através de modelagem computacional de uma turbina a vapor de fabricação Siemens de 30 MW de potência, girando a 4.100 rpm e a figura 1.2, os resultados obtidos no teste mecânico em bancada.

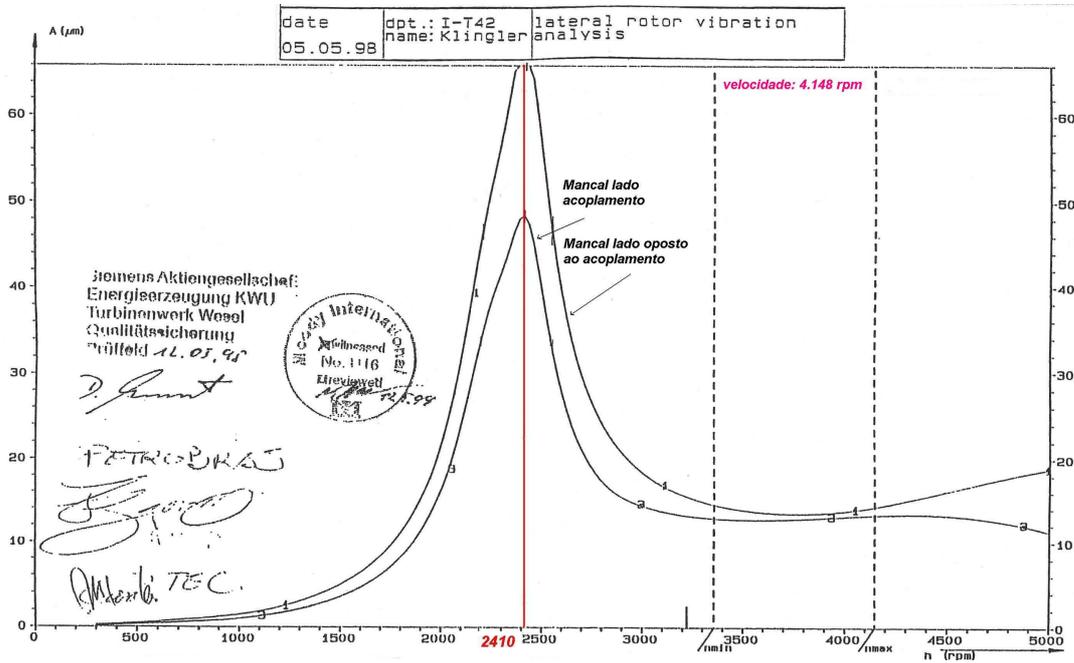


Figura 1.1: Simulação do diagrama de Bode

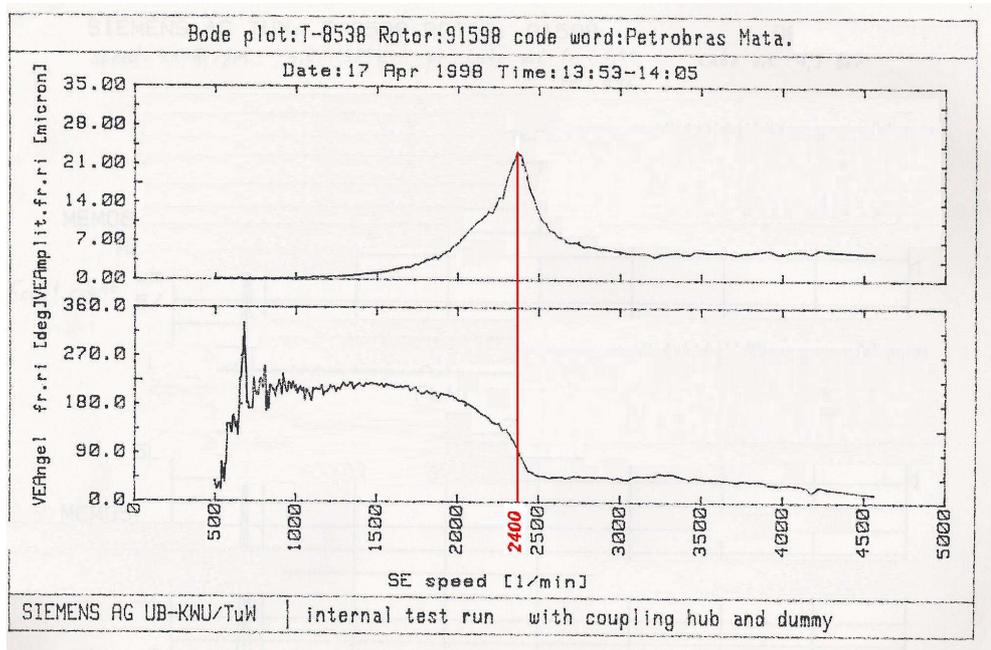


Figura 1.2: Diagrama de Bode obtido no teste mecânico

Mesmo com todas estas precauções, é ainda possível que sejamos surpreendidos com problemas vibracionais resultantes de fenômenos não previstos e/ou desconhecidos como aconteceu durante o teste de aceitação

da máquina citada: apareceu um pico de vibração com frequência sub-harmônica. A figura 1.3 mostra o espectro de vibração em que aparece um pico de vibração na frequência 2.400 rpm, coincidente com a velocidade crítica do rotor, indicada no diagrama de Bode mostrado na figura 1.2, caracterizando um problema clássico de instabilidade, conhecido como “*oil-whip*”. Vale ressaltar que não era de se esperar este comportamento uma vez que o mancal desta máquina é do tipo sapatas oscilantes, não sujeito, em tese, a este tipo de problema.

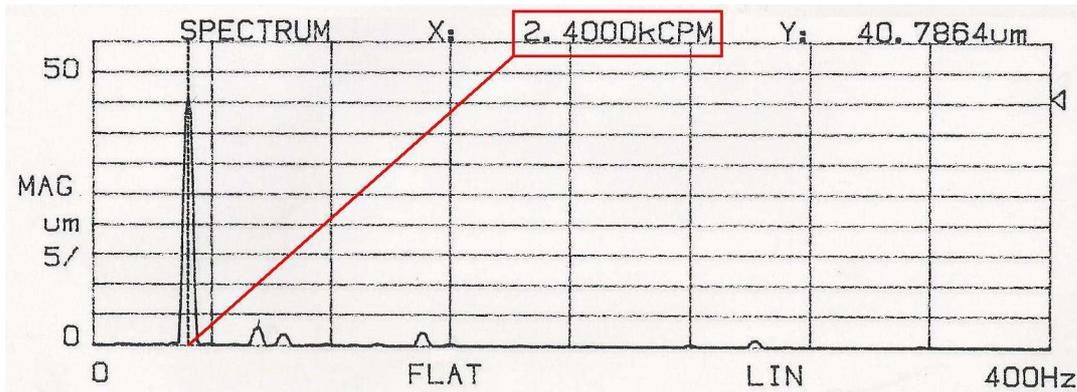


Figura 1.3: Espectro de vibração

Na fase de operação da máquina, ocorrem problemas quando as condições operacionais não são compatíveis com aquelas previstas no projeto, ou mesmo condições não previstas, como por exemplo, acelerações impostas pelo sistema de controle de capacidade. Também não é raro necessidades de aumento de capacidade de processamento da planta que impliquem aumento de velocidade da máquina, o que requer uma análise rotodinâmica a fim de avaliar sua viabilidade técnica. Demandas de modificações surgem, também, quando se deseja melhorias no projeto mecânico, como por exemplo, a mudança de uma selagem a óleo para uma selagem a gás (selo seco). Tal modificação pode alterar significativamente as propriedades de rigidez e amortecimento do sistema, que refletirão na sua velocidade crítica, condição de estabilidade e resposta ao desbalanceamento.

A fase de manutenção também é muito crítica, porque é aí que se constatam, deixa-se de constatar ou mesmo desprezam-se deteriorações sutis que podem influenciar o comportamento dinâmico do rotor. Esta situação normalmente vem aliada quase sempre à premência dos serviços de manutenção, o que pode levar o engenheiro, sob pressão da área de produção, a tomar decisões como, por exemplo, reutilização de um mancal cuja folga está ligeiramente maior que a máxima prevista no projeto, podendo implicar comportamentos vibracionais indesejados.

Um exemplo desta situação foi o caso de um compressor da Refinaria Landulpho Alves de Mataripe de 2.000 CV de potência e 11.000 rpm de velocidade que vibrou excessivamente após uma intervenção para manutenção. Conforme previsto no procedimento, as folgas dos mancais foram verificadas e ajustadas. Entretanto, a folga entre o mancal e seu alojamento não foi objeto de verificação, uma vez que não se espera desgaste nesta região. Uma nova intervenção foi feita e, após longa análise, foi constatado ser esta a causa da vibração.

Como pôde-se notar nos exemplos citados, os mancais hidrodinâmicos desempenham um papel de extrema importância na dinâmica das turbomáquinas e são largamente empregados na indústria por permitirem altas cargas em altas velocidades. As características dinâmicas de um rotor são altamente influenciadas pelas propriedades dos mancais e fenômenos de instabilização tendem a aparecer em altas velocidades, devido ao efeito cruzado (“*cross-coupling*”) das propriedades de rigidez e amortecimento.

O presente trabalho analisa o projeto dos mancais sob o ponto de vista da estabilidade e a sua influência na determinação das velocidades críticas e resposta ao desbalanceamento do sistema rotor-mancal. Simulações dinâmicas de um rotor montado no Laboratório de Dinâmica e Vibrações do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC são feitas com auxílio do programa ROMAC (Rotating Machinery and Controls Laboratory) da Universidade da Virgínia e os resultados são comparados com medições efetuadas em ensaios.

## 2

# CONCEITOS BÁSICOS DE ROTODINÂMICA

### 2.1

#### Introdução

O estudo da rotodinâmica tem os seguintes objetivos:

1. Determinar as velocidades críticas. Velocidades nas quais a vibração é máxima e que podem ser calculadas para evitar que alguma fique próxima da velocidade de operação.
2. Determinar a resposta ao desbalanceamento. As turbomáquinas possuem componentes que possuem movimento relativo cujas folgas de operação são da ordem de décimos de milímetro. A amplitude das vibrações ao longo do rotor deverão ser menores que estas folgas.
3. Determinar a velocidade limite de estabilidade. Forças desestabilizadoras nos mancais e discos tendem a aparecer em altas velocidades. Modificações no projeto devem ser implementadas a fim de evitar esta condição.

O modelo mais simples para análise da vibração de um rotor é o sistema massa-mola. Se o rotor for relativamente rígido comparado com os mancais, a massa efetiva  $m$  é a massa total do rotor e a rigidez efetiva  $k = 2k_b$  é a rigidez dos mancais. Se o rotor for relativamente flexível comparado com a rigidez dos mancais, a rigidez efetiva será determinada pela rigidez à flexão do eixo  $k = 48EI/l^3$  (figura 2.1). Se considerarmos que a deflexão ocorrerá em duas direções ortogonais  $X$  e  $Y$ , o sistema terá dois graus de liberdade. Quando se leva em conta a influência da ação giroscópica, mais dois graus de liberdade devem ser considerados.

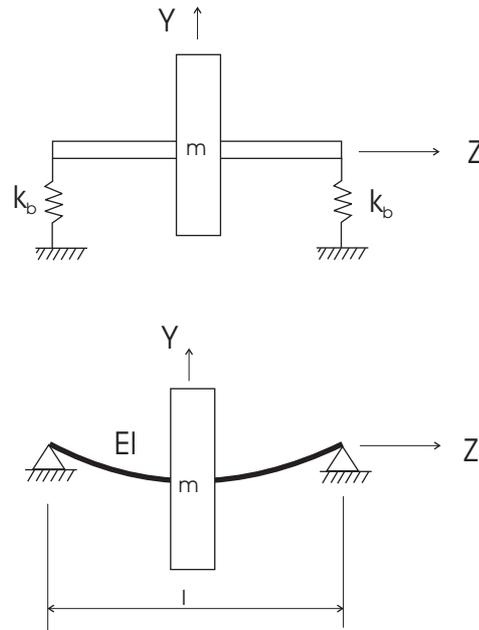


Figura 2.1: Rotor rígido e rotor flexível

## 2.2

### O Rotor de Jeffcott

O rotor de Jeffcott é muito útil para se estabelecer conceitos e definições importantes. É um modelo simplificado que guarda muitas das características de um sistema mais complexo. Consiste de um eixo flexível sem massa com um disco central suportado por mancais idênticos. O eixo  $Z$  do sistema de coordenadas  $XYZ$  coincide com a linha de centro dos mancais. Devido a um desbalanceamento  $u$ , conhecido como excentricidade, o centro de massa  $G$  não coincide com o centro geométrico  $C$  do disco. Quando o rotor está em repouso, o ponto  $C$  coincide com o centro elástico  $O$ , pertencente à linha de centro dos mancais (figura 2.2).

Quando o rotor é acionado a uma velocidade  $\Omega$  constante, a força devida ao desbalanceamento deslocará o ponto  $C$  de  $r$  em relação à linha de centro dos mancais.

Observando a figura 2.3 e aplicando as Leis de Newton, obtém-se

$$\begin{aligned} m\ddot{\rho}_x &= -kr_x \\ m\ddot{\rho}_y &= -kr_y \end{aligned} \quad (2-1)$$

Substituindo as relações 2-2

$$\begin{aligned} \rho_x &= r_x + u \cos \Omega t \\ \rho_y &= r_y + u \sin \Omega t \end{aligned} \quad (2-2)$$

em 2-1, obtém-se

$$\begin{aligned} m\ddot{r}_x + kr_x &= mu\Omega^2 \cos \Omega t \\ m\ddot{r}_y + kr_y &= mu\Omega^2 \sin \Omega t \end{aligned} \quad (2-3)$$

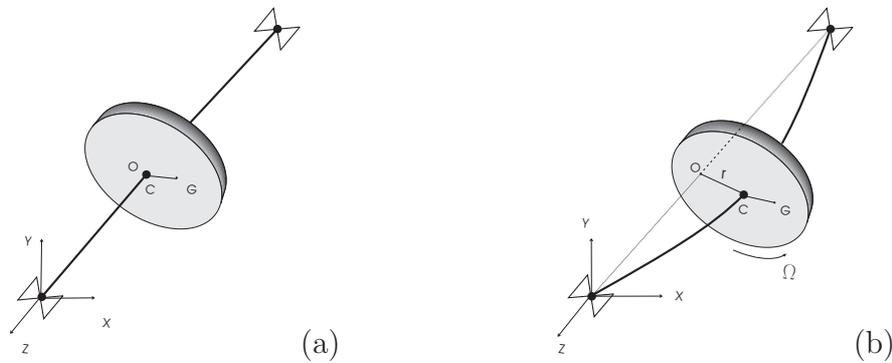


Figura 2.2: a) Rotor em repouso; b) Rotor girando com velocidade  $\Omega$ .

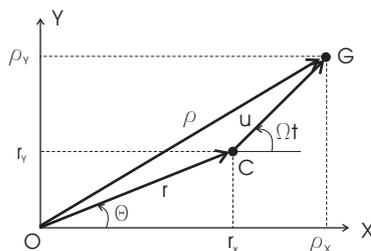


Figura 2.3: Rotor de Jeffcott em coordenadas cartesianas

As equações 2-3 mostram que os movimentos nas direções  $X$  e  $Y$  são desacopladas. Introduzindo a variável complexa  $r = r_x + ir_y$  e fazendo  $\omega = \sqrt{k/m}$ , obtém-se

$$\ddot{r} + \omega^2 r = u\Omega^2 e^{i\Omega t} \quad (2-4)$$

Uma solução particular de resposta em regime permanente, é dada, para  $\Omega \neq \omega$ , por

$$r = u \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} e^{i\Omega t} \quad (2-5)$$

Fazendo  $\eta = \frac{\Omega}{\omega}$ , temos

$$r = u \frac{1}{1 - \eta^2} e^{i\Omega t} \quad (2-6)$$

A figura 2.4 ilustra o gráfico da resposta em função da razão de frequência. Para velocidades  $\Omega$  menores que  $\omega$  o deslocamento  $r$  está em fase

com a excentricidade  $u$  e, para velocidades maiores que  $\omega$ , o deslocamento está  $180^\circ$  fora de fase. Na velocidade de ressonância  $\Omega = \omega$  o deslocamento torna-se infinito quando se desconsidera o amortecimento, enquanto que para frequências elevadas, a amplificação dinâmica  $r/u$  tende a 1. A figura 2.5 ilustra estas condições.

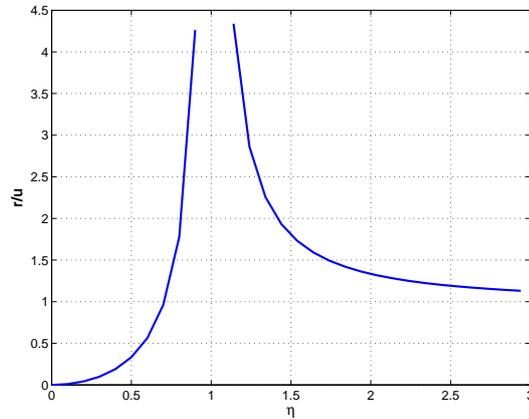


Figura 2.4: Resposta em função da razão de frequências

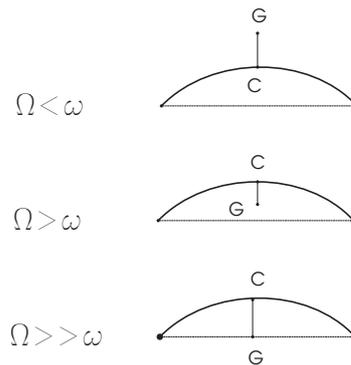


Figura 2.5: Posição relativa de  $C$  e  $G$

Se  $\Omega = \omega$ , a solução particular da equação 2-4 é

$$r = \frac{m u \omega}{2} t e^{i(\Omega t - \pi/2)} \tag{2-7}$$

em que pode-se observar que a amplitude cresce linearmente com a velocidade  $\omega$ .

A terceira equação de movimento do sistema é obtida aplicando-se a Lei de Euler, expressa pela equação 2-8 e determinará o torque  $\mathbf{M}_c$  necessário para manter constante a velocidade  $\Omega$ .

$$\mathbf{M}_c = J_c \frac{d(\mathbf{H})}{dt} + m \mathbf{u} \times \mathbf{a}_c \tag{2-8}$$

onde

$\mathbf{H} = J_c \boldsymbol{\omega}$  - momento angular do disco em relação ao ponto  $C$  e  $J_c$  é o tensor de inércia.

$\mathbf{a}_c$  - aceleração do ponto  $C$

Esta equação deverá ser escrita em um sistema móvel solidário ao disco, de forma que o momento de inércia  $J$  seja constante. Os sistemas de referência  $SR$  estão definidos conforme figura 2.6.

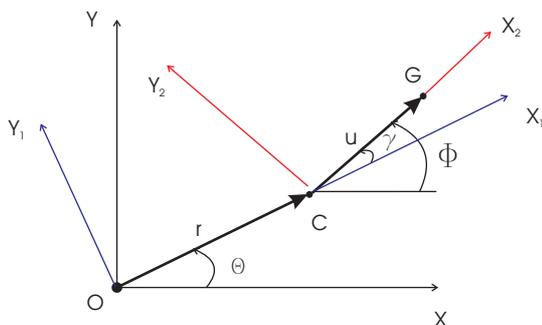


Figura 2.6: Sistemas de referência

Sistema inercial  $SR I(XYZ)$  com origem em  $O$

Sistema móvel  $SR F(X_1Y_1Z_1)$  com origem em  $O$  acompanhando o movimento de  $C$

Sistema  $SR Q(X_2Y_2Z_2)$  com origem em  $C$ , solidário ao disco

A primeira rotação ocorre no  $SR I$  em torno do eixo  $Z \Rightarrow I \xrightarrow{\theta} F$

$${}^I\mathbf{T}^F = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^I\boldsymbol{\Omega}_F = {}^F\boldsymbol{\Omega}_F = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (2-9)$$

onde

${}^I\boldsymbol{\Omega}_F$  - velocidade angular do  $SR F$

A segunda rotação ocorre no  $SR F$  em torno do eixo  $Z_1$  (coincidente com  $Z$ )  $\Rightarrow F \xrightarrow{\gamma} Q$

$${}^F\mathbf{T}^Q = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\text{sen } \gamma & 0 \\ \text{sen } \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^F\boldsymbol{\Omega}_Q = {}^Q\boldsymbol{\Omega}_Q = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} \quad (2-10)$$

A velocidade angular do sistema  $Q$  é composta por duas rotações consecutivas:  ${}^I\boldsymbol{\Omega}_F$  e  ${}^F\boldsymbol{\Omega}_Q$ . Representada no sistema  $Q$ , será:

$${}^Q\boldsymbol{\Omega}_Q = {}^I\boldsymbol{\Omega}_F + {}^F\boldsymbol{\Omega}_Q = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix}$$

A aceleração angular do  $SR F$  será

$$\mathbf{I}^F \dot{\boldsymbol{\Omega}}_F = \frac{d(\mathbf{I}^F \boldsymbol{\Omega}_F)}{dt} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (2-11)$$

A aceleração do ponto  $C$  no  $SR F$  é

$$\mathbf{F} \mathbf{a}_c = \mathbf{I}^F \boldsymbol{\Omega}_F \times \mathbf{I}^F \boldsymbol{\Omega}_F \times \mathbf{F} \mathbf{r} + \mathbf{I}^F \dot{\boldsymbol{\Omega}}_F \times \mathbf{F} \mathbf{r} + 2 \mathbf{I}^F \boldsymbol{\Omega}_F \times \mathbf{F} \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{F} \mathbf{a}_{rel} \quad (2-12)$$

onde,

$$\mathbf{F} \mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{F} \mathbf{v}_{rel} = \begin{Bmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{F} \mathbf{a}_{rel} = \begin{Bmatrix} \ddot{r} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Efetuando os produtos vetoriais e somando as parcelas de 2-12, obtém-se

$$\mathbf{F} \mathbf{a}_c = \begin{Bmatrix} -r \dot{\theta}^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ r \ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{r} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-13)$$

$$\mathbf{F} \mathbf{a}_c = \begin{Bmatrix} \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \\ r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-14)$$

Para escrever  $\mathbf{F} \mathbf{a}_c$  no  $SR Q$ , onde será aplicada a lei de Euler, basta multiplicar pela matriz de transformação de coordenadas  $\mathbf{Q}^T \mathbf{F}$  2-10. Assim,

$$\mathbf{Q} \mathbf{a}_c = \mathbf{Q}^T \mathbf{F} \mathbf{F} \mathbf{a}_c = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \\ r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-15)$$

$$\mathbf{Q} \mathbf{a}_c = \begin{Bmatrix} (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \cos \gamma + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \sin \gamma \\ (r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \cos \gamma - (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \sin \gamma \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-16)$$

A equação de Euler em relação ao ponto  $C$  escrita no  $SR Q$ , tendo

em vista que  ${}^Q\mathbf{J}_c = cte$ , é dada por

$$\mathbf{M}_c = {}^Q J_c \frac{d({}^Q\boldsymbol{\omega})}{dt} + m {}^Q\mathbf{u} \times {}^Q\mathbf{a}_c \quad (2-17)$$

onde  ${}^Q\boldsymbol{\omega}$  é a velocidade angular do disco, que coincide com a velocidade angular do  $SRQ$ . Então,

$${}^Q\boldsymbol{\omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix}; \quad {}^Q\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-18)$$

Substituindo 2-16 e 2-18 em 2-17, obtém-se

$$\mathbf{M}_z = J_p \ddot{\phi} + mu[(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \cos \gamma - (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \gamma] \quad (2-19)$$

onde,  $J_p$  é o momento de inércia polar,  $\gamma = \phi - \theta$  e  $\ddot{\phi} = 0$  e  $\dot{\phi} = \Omega t$ , uma vez que o disco gira com velocidade constante.

Então,

$$\mathbf{M}_z = mu[(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \cos(\Omega t - \theta) - (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin(\Omega t - \theta)] \quad (2-20)$$

### 2.2.1

#### A influência do Amortecimento e dos Mancais Flexíveis

Se considerarmos a existência de amortecimento externo fazendo  $c_x = c_y = c$  (figura 2.7), as equações 2-3 de movimento do centro de massa  $G$  para o caso de rotação  $\Omega$  constante tornam-se

$$\begin{aligned} m\ddot{r}_x + c\dot{r}_x + k_x r_x &= mu\Omega^2 \cos \Omega t \\ m\ddot{r}_y + c\dot{r}_y + k_y r_y &= mu\Omega^2 \sin \Omega t \end{aligned} \quad (2-21)$$

onde  $c$  é o coeficiente de amortecimento externo.

Estas equações são desacopladas, podendo, portanto, ser resolvidas separadamente.

Introduzindo a variável complexa  $r = r_x + ir_y$  e fazendo  $\eta = \frac{\Omega}{\omega}$ , a solução em regime permanente será

$$r = \frac{u\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}} e^{i\Omega t} \quad (2-22)$$

onde  $\xi = c/(2m\omega)$  é a razão de amortecimento.

A figura 2.8 ilustra a resposta em função da razão de frequência  $\eta$  para diferentes razões de amortecimento.

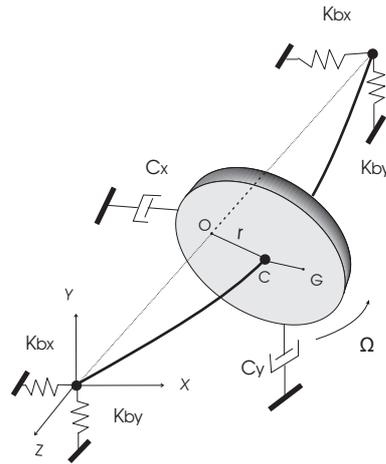


Figura 2.7: Rotor de Jeffcott em mancais flexíveis

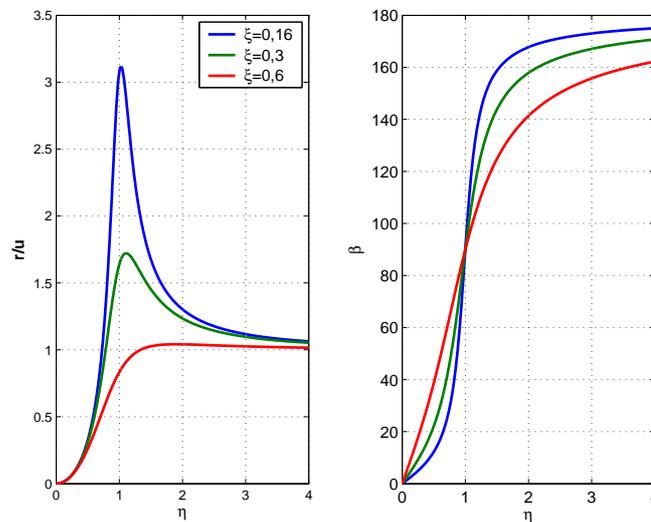


Figura 2.8: resposta em função da razão de frequências

Quando os mancais são flexíveis, a rigidez equivalente de cada mancal é  $k$ , combinação em série da rigidez  $k_e$  do eixo e  $k_b$  do mancal. Assim,

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_e} + \frac{1}{2k_b}$$

$$k = \frac{2k_b k_e}{2k_b + K_e}$$

Quando o rotor está montado em mancais cujas rigidezes são iguais nas direções  $X$  e  $Y$ , o sistema é chamado de isotrópico. Em geral, as rigidezes equivalentes ( $k_x$  e  $k_y$ ) não são as mesmas devido às propriedades assimétricas dos mancais, embora o rotor seja axissimétrico. Tal sistema é chamado de

anisotrópico. As equações de movimento são

$$\begin{aligned} m\ddot{r}_x + c_x\dot{r}_x + k_x r_x &= mu\Omega^2 \cos \Omega t \\ m\ddot{r}_y + c_y\dot{r}_y + k_y r_y &= mu\Omega^2 \sin \Omega t \end{aligned} \quad (2-23)$$

Estas equações são desacopladas, podendo, portanto, ser resolvidas separadamente.

A solução em regime permanente é

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{u\eta_x^2}{\sqrt{(1-\eta_x^2)^2 + (2\xi_x\eta_x)^2}} \cos(\Omega t - \beta_x) \\ r_y &= \frac{u\eta_y^2}{\sqrt{(1-\eta_y^2)^2 + (2\xi_y\eta_y)^2}} \sin(\Omega t - \beta_y) \end{aligned} \quad (2-24)$$

onde

$$\beta_x = \arctan\left(\frac{2\xi_x\eta_x}{1-\eta_x^2}\right); \quad \beta_y = \arctan\left(\frac{2\xi_y\eta_y}{1-\eta_y^2}\right) \quad (2-25)$$

A partir destas equações, observa-se que aparecem duas frequências naturais referentes às direções  $X$  e  $Y$  conforme ilustrado na figura 2.9.

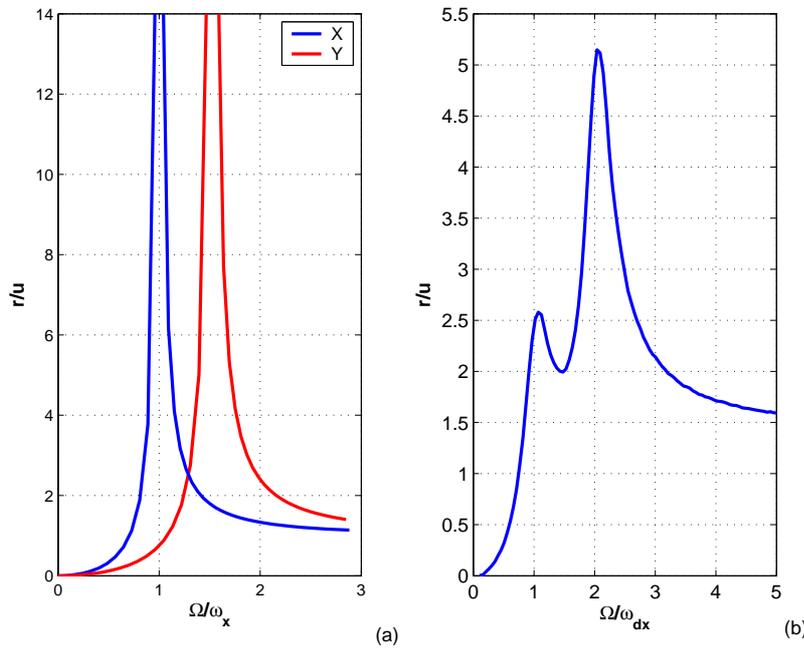


Figura 2.9: a) Resposta sem amortecimento; b) Resposta amortecida

A solução particular de 2-23 pode ser escrita, também, na forma

$$\begin{aligned} r_x &= A_x \cos \Omega t + B_x \sin \Omega t \\ r_y &= A_y \cos \Omega t + B_y \sin \Omega t \end{aligned} \quad (2-26)$$

onde as constantes  $A_x$ ,  $B_x$ ,  $A_y$  e  $B_y$  são obtidas substituindo-se 2-26 em 2-23

$$A_x = \frac{mu\Omega^2(k_x - m\Omega^2)}{(k_x - m\Omega^2)^2 + (\Omega C_x)^2}; \quad B_x = \frac{\Omega c_x(mu\Omega^2)}{(k_x - m\Omega^2)^2 + (\Omega C_x)^2}$$

$$A_y = (-\Omega c_y) \frac{mu\Omega^2}{(k_y - m\Omega^2)^2 + (\Omega C_y)^2}; \quad B_y = \frac{mu\Omega^2(k_y - m\Omega^2)}{(k_y - m\Omega^2)^2 + (\Omega C_y)^2} \quad (2-27)$$

Referindo-se à figura 2.3,  $r_x$  e  $r_y$  são as coordenadas do ponto  $C$  que executará um movimento elíptico, chamado de precessão (“*whirling*”), cujo ângulo é dado por

$$\theta = \arctan\left(\frac{r_y}{r_x}\right) \quad (2-28)$$

Em regime permanente, a velocidade de precessão é igual à velocidade de rotação do disco. Se o sentido de rotação for o mesmo, diz-se que a precessão é direta. Caso contrário, a precessão é retrógrada.

Derivando 4-11 em relação ao tempo, obtém-se a velocidade de precessão

$$\dot{\theta} = \frac{1}{1 + (r_y/r_x)^2} \left(\frac{r_y}{r_x}\right)'$$

$$\dot{\theta} = \frac{\Omega(A_x B_y - A_y B_x)}{r_x^2 + r_y^2} \quad (2-29)$$

De 2-29 conclui-se que o sinal de  $\dot{\theta}$  depende unicamente do termo

$$s = A_x B_y - A_y B_x \quad (2-30)$$

pois os demais são quadráticos.

Substituindo 2-27 em 2-30, obtém-se

$$s = (\omega_x^2 - \Omega^2)(\omega_y^2 - \Omega^2) + (4\Omega^2 \xi_x \xi_y \omega_x \omega_y) \quad (2-31)$$

Se

$s > 0$ , a precessão é direta

$s < 0$ , a precessão é retrógrada

$s = 0$ , a precessão é um segmento pois  $\dot{\theta} = 0$  linha

De 4-17, conclui-se que a precessão é direta quando a velocidade  $\Omega$  estiver abaixo da primeira ressonância  $\omega_x$  ou acima da segunda ressonância

$\omega_y$ . Entre as duas ressonâncias, a precessão poderá ser direta ou retrógrada, a depender da magnitude do amortecimento.

Pode-se plotar as duas precessões no plano  $XY$ , como ilustrado na figura 2.10

Se o amortecimento  $\xi$  for zero, à solução 2-26 deverá acrescentada a solução transiente, que será harmônica, porém de frequência  $\omega_n \neq \Omega$ . Logo, a órbita não será uma elipse.

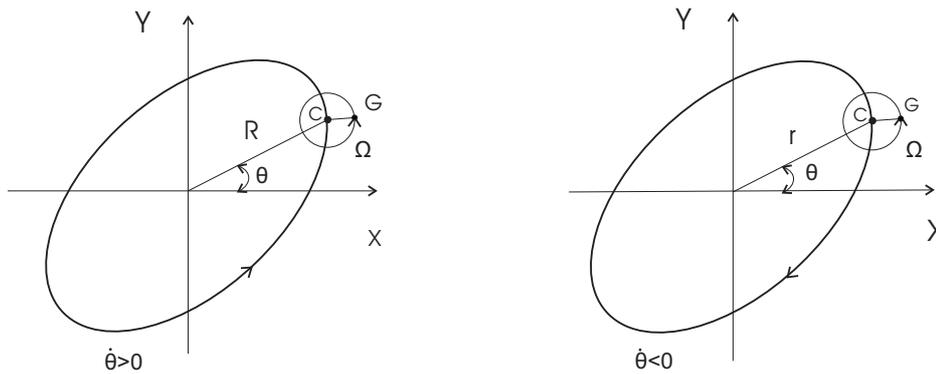


Figura 2.10: precessões direta e retrógrada

### 2.2.2

#### A Influência da Ação Giroscópica

Se o disco da figura 2.2 é colocado no centro, entre os apoios, ele precessionará em seu próprio plano se não existir uma excitação que induza outro movimento, como um desbalanceamento dinâmico. Se, ao contrário, for deslocado do centro e, especialmente, se estiver em balanço, a oscilação não dar-se-á em seu plano e induzirá momentos giroscópicos que alteram a velocidade crítica do rotor.

As equações de movimento do disco serão descritas com auxílio de sistemas móveis de referência  $SR$  conforme ilustrado na figura 2.11.

Sistema inercial  $SR I(XYZ)$

Sistema móvel  $SR F(X_1Y_1Z_1)$

Sistema móvel  $SR Q(X_2Y_2Z_2)$

Sistema móvel  $SR S(X_3Y_3Z_3)$

A primeira rotação ocorre no sistema inercial  $I$  em torno do eixo  $X \Rightarrow I \xrightarrow{\alpha} F$  e a matriz de transformação de coordenadas será

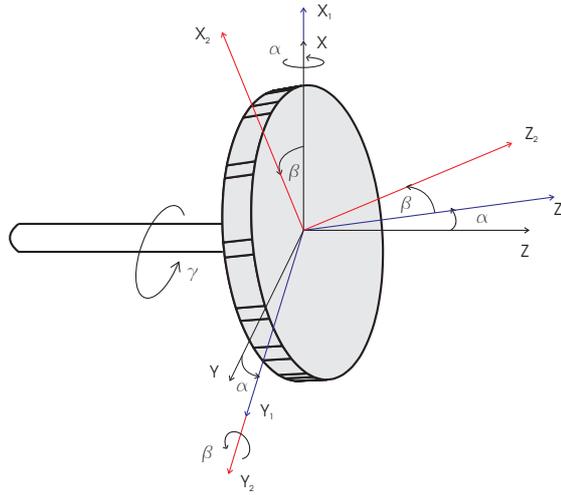


Figura 2.11: Sistemas de referência para um disco em balanço

$${}^I\mathbf{T}^F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ 0 & \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; \quad {}^I\boldsymbol{\Omega}_F = {}^F\boldsymbol{\Omega}_F = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A segunda rotação ocorre no sistema móvel  $F$  em torno do eixo  $Y_1 \Rightarrow F \xrightarrow{\beta} Q$  e a matriz de transformação de coordenadas será

$${}^F\mathbf{T}^Q = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \text{sen} \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}; \quad {}^F\boldsymbol{\Omega}_Q = {}^Q\boldsymbol{\Omega}_Q = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A terceira rotação ocorre no sistema móvel  $Q$  em torno do eixo  $Y_2 \Rightarrow Q \xrightarrow{\gamma} S$  e a matriz de transformação de coordenadas será

$${}^Q\mathbf{T}^S = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\text{sen} \gamma & 0 \\ \text{sen} \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^Q\boldsymbol{\Omega}_S = {}^S\boldsymbol{\Omega}_S = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix}$$

A velocidade angular absoluta do  $SR Q$  será

$${}^Q\boldsymbol{\Omega}_Q = {}^Q\boldsymbol{\Omega}_Q + {}^Q\mathbf{T}^F {}^F\boldsymbol{\Omega}_F = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\text{sen} \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen} \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \text{sen} \beta \end{Bmatrix} \quad (2-32)$$

A velocidade angular do disco será, então

$${}^Q\omega = {}^Q\Omega_Q + {}^Q\Omega_S = {}^Q\omega = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta \end{Bmatrix} \quad (2-33)$$

A aceleração angular do disco será

$${}^Q\dot{\omega} = \frac{d({}^Q\Omega)}{dt} + {}^Q\Omega_Q \times {}^Q\omega$$

$${}^Q\dot{\omega} = \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha} \cos \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} + \ddot{\alpha} \sin \beta + \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ -\dot{\alpha} \dot{\gamma} \cos \beta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}^Q\dot{\omega} = \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha} \cos \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta + \dot{\beta} \dot{\gamma} \\ \ddot{\beta} - \dot{\alpha} \dot{\gamma} \cos \beta \\ \ddot{\gamma} + \ddot{\alpha} \sin \beta + \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta \end{Bmatrix} \quad (2-34)$$

Lembrando que os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são muito pequenos, 2-33 e 2-34 podem ser simplificadas na forma das equações 2-35.

$${}^Q\omega = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} + \beta \dot{\alpha} \end{Bmatrix}; \quad {}^Q\dot{\omega} = \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha} - \beta \dot{\alpha} \dot{\beta} + \dot{\beta} \dot{\gamma} \\ \ddot{\beta} - \dot{\alpha} \dot{\gamma} \\ \ddot{\gamma} + \ddot{\alpha} \beta + \dot{\alpha} \dot{\beta} \end{Bmatrix} \quad (2-35)$$

Aplicando a Lei de Euler

$$\mathbf{M}_c = J_c \dot{\omega} + {}^Q\Omega_Q \times (J_c {}^Q\omega) \quad (2-36)$$

obtem-se

$$\begin{cases} M_x = J(\ddot{\alpha} + \dot{\beta} \dot{\gamma} - \beta \dot{\alpha} \dot{\beta}) + (J_p - I) \dot{\beta} (\dot{\gamma} + \beta \dot{\alpha}) \\ M_y = J(\ddot{\beta} - \dot{\alpha} \dot{\gamma}) - (J_p - I) \dot{\alpha} (\dot{\gamma} + \beta \dot{\alpha}) \\ M_z = I_p (\ddot{\gamma} + \ddot{\alpha} \beta + \dot{\alpha} \dot{\beta}) \end{cases} \quad (2-37)$$

onde  $J$  e  $J_p$  são os momentos de inércia transversal e polar, respectivamente.

Considerando  $\ddot{\gamma} = 0$ , fazendo  $\dot{\gamma} = \Omega$  e desprezando os termos de

segunda ordem com a linearização, temos

$$\begin{cases} M_x = J\ddot{\alpha} + J_p\Omega\dot{\beta} \\ M_y = J\ddot{\beta} - J_p\Omega\dot{\alpha} \\ M_z = 0 \end{cases} \quad (2-38)$$

Se o centro do disco tiver deflexões em  $X$  e  $Y$ , temos

$$\begin{cases} m\ddot{r}_x + k_x r_x - k_{x\beta}\beta = 0 \\ m\ddot{r}_y + k_y r_y - k_{y\alpha}\alpha = 0 \\ J\ddot{\beta} - J_p\Omega\dot{\alpha} + k_{\beta\beta}\beta - k_{\beta x}r_x = 0 \\ J\ddot{\alpha} + J_p\Omega\dot{\beta} + k_{\alpha\alpha}\alpha + k_{\alpha y}r_y = 0 \end{cases} \quad (2-39)$$

Considerando o eixo isotrópico, tem-se os coeficientes de influência

$$\begin{aligned} k_{xx} = k_{yy} = k_{rr}, \quad k_{\alpha\alpha} = k_{\beta\beta} = k_{\psi\psi} \\ k_{x\beta} = k_{\phi x} = k_{\alpha y} = k_{y\alpha} = k_{r\psi} \end{aligned} \quad (2-40)$$

Para um disco em balanço, tem-se da Mecânica dos Sólidos que

$$k_{rr} = 12EI/l^3, \quad k_{\psi\psi} = 4EI/l, \quad k_{r\psi} = 6EI/l^2 \quad (2-41)$$

onde  $I$  é o momento de inércia de área.

Introduzindo as variáveis complexas  $r = r_x + ir_y$  e  $\psi = \alpha + i\beta$ , as equações 4-42 tornam-se

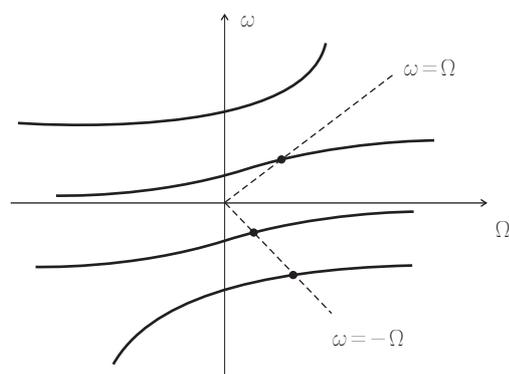
$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -iJ_p\Omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{rr} & k_{r\psi} \\ k_{r\psi} & k_{\psi\psi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-42)$$

Assumindo a solução do tipo  $r = r_o e^{i\omega t}$  e  $\psi = \psi_o e^{i\omega t}$  e substituindo em 2-42, chega-se à equação característica para o cálculo das frequências

$$mJ\omega_n^4 - mJ_p\Omega\omega_n^3 - (mk_{\psi\psi} + Jk_{rr})\omega_n^2 + k_{rr}J_p\Omega\omega_n + (k_{rr}k_{\psi\psi} - k_{r\psi}^2) = 0 \quad (2-43)$$

da qual conclui-se que a frequência natural depende da velocidade  $\Omega$  do rotor. A figura 2.12 mostra as curvas das frequências naturais.

Se traçarmos duas retas  $\Omega = \omega$  e  $\Omega = -\omega$ , elas interceptarão estas curvas em pontos que são conhecidos como velocidades críticas do rotor. Este gráfico é conhecido como Diagrama de Campbell. A interseção da linha  $\Omega = \omega$  define uma velocidade crítica precessional direta, enquanto que a interseção com a linha  $\Omega = -\omega$ , duas velocidades críticas precessionais retrógradadas.

Figura 2.12: Frequências naturais em função da velocidade  $\Omega$

## 3 OS MANCAIS HIDRODINÂMICOS

### 3.1 Introdução

Os mancais hidrodinâmicos são largamente empregados em turbomáquinas por permitirem altas cargas em altas velocidades. Além disso, a vida de um mancal de deslizamento é, teoricamente, infinita, uma vez que não existe contato entre peças com movimento relativo, garantindo longa continuidade operacional.

Este capítulo analisa a teoria básica da lubrificação e, a partir da Equação de Reynolds estuda o mecanismo de formação da pressão de sustentação da carga dos mancais, determinando as propriedades de rigidez e amortecimento.

As seções 3.3 e 3.4 são um resumo dos textos de Allaire [24] e Cameron [25].

### 3.2 A Teoria da Lubrificação

A lubrificação consiste na interposição de um fluido lubrificante entre superfícies que possuem movimento relativo, com o objetivo de reduzir o coeficiente de atrito, evitando, conseqüentemente, o desgaste.

A viscosidade é uma das propriedades mais importantes de um lubrificante. Seu significado fundamental pode ser ilustrado considerando-se duas placas paralelas: uma fixa e a outra móvel sob a ação de uma força  $P$ , paralela à placa fixa e separadas por uma película de lubrificante de espessura  $h$ , conforme ilustrado na figura 3.1.

As partículas do lubrificante aderem às placas fixa e móvel. O movimento é acompanhado por um escorregamento linear ou cisalhamento das partículas do lubrificante através de toda a altura  $h$  da película. Sendo  $A$

a área de contato da placa com o fluido, a tensão cisalhante será igual a

$$\tau = \frac{P}{A}$$

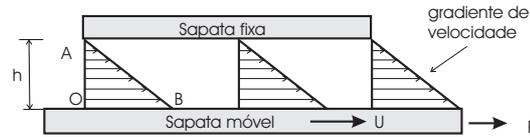


Figura 3.1: Cisalhamento do filme de óleo

Esta tensão cisalhante varia de forma diretamente proporcional à velocidade  $U$  da placa móvel e inversamente à espessura  $h$  da película.

Define-se

$$\mu = \frac{P/A}{U/h} = \frac{\text{tensão de cisalhamento}}{\text{gradiente de velocidade}}$$

onde  $\mu$  é a constante de proporcionalidade, conhecida como viscosidade.

Quando a sapata fixa é paralela à que se move, como no caso da figura 3.1, as velocidades das várias lâminas de fluido são proporcionais à sua distância à sapata fixa e a área do triângulo  $OAB$  é proporcional ao volume de fluido que passa por uma seção unitária na unidade de tempo. Neste caso, a sapata fixa não sustenta nenhum esforço vertical. Se a sapata fixa for inclinada de tal modo que a espessura da película varie de  $h_1$  na seção onde o óleo entra, até  $h_2$  por onde o óleo sai, o gradiente de velocidade variará ao longo da placa. A curva representativa da variação da velocidade é côncava na entrada e convexa na saída, como mostrado na figura 3.2. Os diagramas não são mais triangulares, mas devem ter todos a mesma área, desde que não haja fuga de lubrificante. Assim, a carga  $w$  será suportada pela pressão gerada entre as sapatas no filme fluido como indicado na figura 3.2.

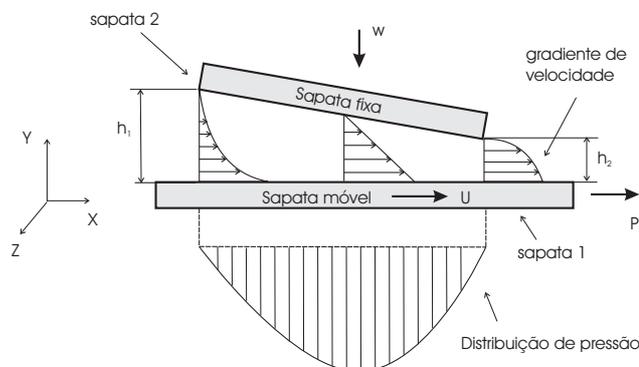


Figura 3.2: Sapata deslizante inclinada

### 3.3

#### A Equação de Reynolds

A equação de Reynolds é deduzida a partir da condição de equilíbrio de um elemento infinitesimal (figura 3.3) sob a ação de tensões de cisalhamento viscoso  $\tau$  e da pressão  $p$  do fluido.

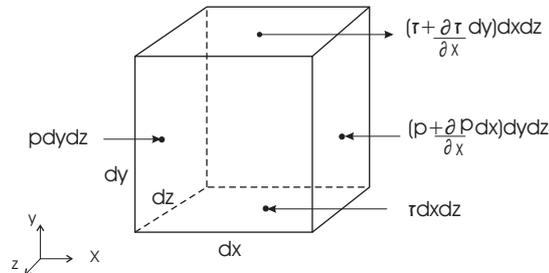


Figura 3.3: Equilíbrio de um elemento infinitesimal

Supõem-se as seguintes hipóteses na dedução da equação:

1. Campos externos como o magnético e gravitacional são desprezados.
2. A pressão ao longo da espessura do filme lubrificante é considerada constante, uma vez que tal espessura é muito pequena (da ordem de centésimos de milímetro).
3. As curvaturas da superfície do mancal são consideradas muito grandes comparadas com a espessura do filme, o que significa que a direção da velocidade das lâminas é considerada constante.
4. Não existe deslizamento na interface fluido-sólido, o que significa que a velocidade da superfície é a mesma da última lâmina adjacente de lubrificante.
5. O lubrificante é Newtoniano.
6. O fluxo é laminar.
7. A viscosidade do filme lubrificante não varia, mantidas constantes a carga e a velocidade.
8. A inércia do fluido é desprezada.

Considerando a equação da continuidade

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0 \quad (3-1)$$

onde  $q$  é a vazão nas direções  $X, Y$  e  $Z$ ,  
chega-se à Equação de Reynolds em três dimensões

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left[ \frac{\partial}{\partial x} h(U_1 + U_2) + \frac{\partial}{\partial z} h(W_1 + W_2) + 2(V_1 - V_2) \right] \quad (3-2)$$

onde,

$U$  - velocidade da superfície na direção  $X$

$V$  - velocidade da superfície na direção  $Y$

$W$  - velocidade da superfície na direção  $Z$

Em geral, não existe movimento dos mancais na direção  $Z$ , portanto,  $W_1 = W_2 = 0$ . Nas direções  $X$  e  $Y$ , somente uma das superfícies se move, toma-se então,  $U_2 = V_2 = 0$ .

Assim, fazendo  $U_1 = U$  e  $V_1 = V$ , a equação 3-2 reduz-se a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left( 2V + \frac{\partial(Uh)}{\partial x} \right) \quad (3-3)$$

Efetuando a derivada do segundo membro, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left( 2V + U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U}{\partial x} \right) \quad (3-4)$$

Quando atuam somente cargas estáticas no mancal, como o peso do rotor, por exemplo, haverá equilíbrio e o termo de velocidade  $V$  será nulo. Se, por outro lado, considerarmos cargas dinâmicas como a força resultante de um desbalanceamento do rotor, o eixo oscilará em torno de uma posição de equilíbrio, produzindo o efeito conhecido como “*squeeze*” (esmagamento do filme). Outro exemplo é o mancal que apóia o virabrequim de máquinas alternativas, como motores a explosão ou compressores alternativos, nos quais a direção e amplitude da carga mudam constantemente com a posição angular do virabrequim.

Duas aproximações são usadas para se obter uma solução analítica de problemas de mancal, a saber: mancal curto, em que a largura  $B$  é muito menor que o comprimento  $L$ , e o mancal longo, no qual  $B \gg L$ . Será considerado aqui, somente o primeiro caso já que o mancal objeto dos experimentos será o curto.

### 3.3.1 Solução para Mancais Curtos

Mancais cuja dimensão na direção  $Z$  é bem menor que na direção  $X$ , como mostrado na figura 3.4, são considerados curtos. Assim sendo, o pico de pressão deve cair mais rapidamente para a pressão ambiente  $p_a$  na direção  $Z$  do que na direção  $X$ . Logo, como o gradiente de pressão  $\partial p/\partial z$  é muito maior que o gradiente de pressão  $\partial p/\partial x$ , o primeiro termo do lado esquerdo da equação 3-4 pode ser desprezado. Se considerarmos apenas carga estática, não haverá movimento na direção  $Y$ , portanto  $V = 0$ , ficando, então

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3-5)$$

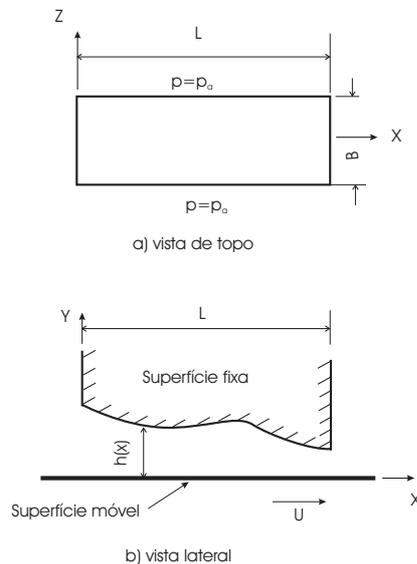


Figura 3.4: Mancal curto  $B \ll L$

Como  $h$  é apenas função de  $x$ , a equação 3-5 torna-se

$$\frac{d^2 p}{dz^2} = 6U\mu \frac{dh/dx}{h^3} \quad (3-6)$$

que, integrando, obtém-se

$$\frac{dp}{dz} = 6U\mu \frac{dh/dx}{h^3} \frac{z^2}{2} + c_1 z + c_2 \quad (3-7)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são as constantes de integração, obtidas aplicando-se as condições de contorno. Considerando a origem do sistema de coordenadas na metade da largura  $B$ , elas são

$$p = p_a = 0, \quad \text{para } z = B/2 \quad \text{e} \quad z = -B/2 \quad (3-8)$$

Então,

$$p = 3\mu U \frac{dh/dx}{h^3} \left( z^2 - \frac{B^2}{4} \right) \quad (3-9)$$

A equação 3-9 confirma o que foi dito na seção 3.2, ou seja, se  $dh/dx = 0$  (superfícies paralelas), a pressão será nula, não havendo, portanto, capacidade de sustentação de carga no mancal.

A capacidade de carga do mancal será dada por

$$w = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} p \, dz \, dx$$

### 3.4

#### Mancais Radiais

Um mancal radial é composto por um alojamento com superfície curva (cilíndrica, elíptica ou multilobular) e um eixo em seu interior, ambos separados por um fluido lubrificante, conforme mostrado na figura 3.5 nas posições de repouso, início de movimento e em movimento. Nas duas primeiras posições há contato direto do munhão (parte do eixo dentro do mancal) com as paredes do mancal.

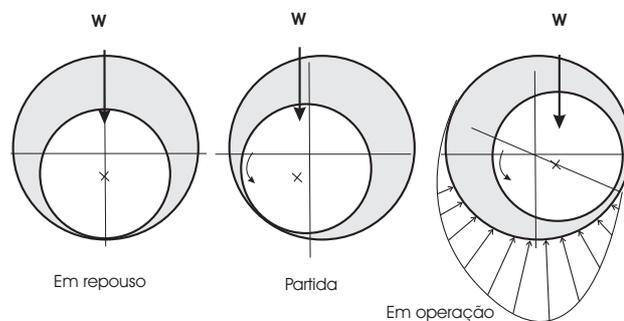


Figura 3.5: Funcionamento do mancal radial

O fluido é forçado para a região abaixo do munhão devido às forças de cisalhamento geradas pela rotação do eixo. Isto gera alta pressão no fundo do eixo similar à da sapata deslizante mostrada na figura 3.2. Esta alta pressão suporta o peso do rotor, impedindo que o munhão toque a superfície do mancal.

Consideremos, conforme ilustrado na figura 3.6, um eixo circular de raio  $R$ , girando a uma velocidade angular absoluta  $\Omega$  em um mancal cilíndrico de raio  $R + f$  e largura  $B$  na direção  $Z$ . As coordenadas do centro  $C$  do eixo são dadas por  $x_c$  e  $y_c$  em um sistema inercial com origem no centro

do mancal que é designado por  $O$ . A distância entre o centro do munhão e o centro do mancal é definida como excentricidade  $e$ . Será definida uma coordenada angular  $\theta$ , medida a partir da posição de espessura máxima do filme, que se localiza onde a extensão da linha  $\overline{CO}$  corta a superfície do mancal em  $B$ . Se considerarmos um ponto  $D$  qualquer no mancal, observa-se que o ângulo  $\widehat{BCD} = \theta$  possui o vértice em  $C$ .

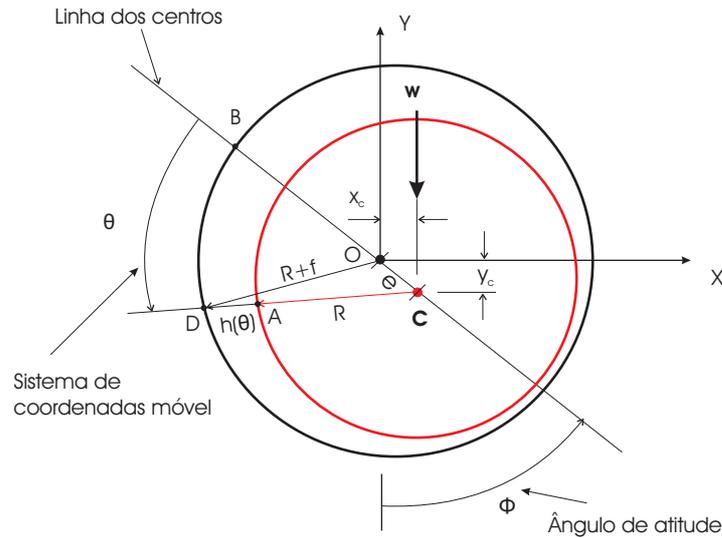


Figura 3.6: Geometria do mancal radial

A linha  $\overline{CD}$  corta a superfície do munhão em  $A$  e  $\overline{AD} = h(\theta)$  é a espessura do filme, determinada aplicando-se a lei dos cossenos no triângulo  $COD$ , como segue.

$$\begin{aligned} (R + f)^2 &= e^2 + (R + h)^2 - 2e(R + h) \cos \theta \\ R^2 + 2Rf + f^2 &= e^2 + R^2 + 2Rh + h^2 - 2eR \cos \theta - 2eh \cos \theta \end{aligned} \quad (3-10)$$

Simplificando e desprezando os termos de segunda ordem  $f^2$ ,  $e^2$ ,  $h^2$  e  $eh$ , obtém-se

$$h = f + e \cos \theta = f(1 + \varepsilon \cos \theta) \quad (3-11)$$

onde  $\varepsilon = e/f$  é conhecida como razão de excentricidade.

A expressão exata da espessura será aqui desenvolvida para efeito de comparação com a aproximação. Assim, desenvolvendo 3-10, encontramos uma equação do segundo grau na espessura exata  $h_e$

$$h_e^2 + 2(R - e \cos \theta)h_e - 2eR \cos \theta + e^2 - f^2 - 2Rf = 0 \quad (3-12)$$

cuja raiz positiva é

$$h_e = e \cos \theta - R + \sqrt{(R + f)^2 - e^2 \sin^2 \theta} \quad (3-13)$$

Fazendo as adimensionalizações de 3-13 com  $\bar{f} = f/R$  e  $\varepsilon = e/f$ , obtém-se

$$h_e = f \left( \frac{\sqrt{(\bar{f} + 1)^2 - (f\varepsilon)^2 \sin^2 \theta} - 1}{\bar{f}} + \varepsilon \cos \theta \right) \quad (3-14)$$

O gráfico 3.7 compara o erro percentual ( $h_e - h$ ) em um mancal de 20 mm de diâmetro para diferentes razões de excentricidade  $\varepsilon$ . Conclui-se que o erro é nulo em  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ , tende a zero quando  $\varepsilon$  tende a zero e é máximo quando  $\varepsilon$  tende a 1.

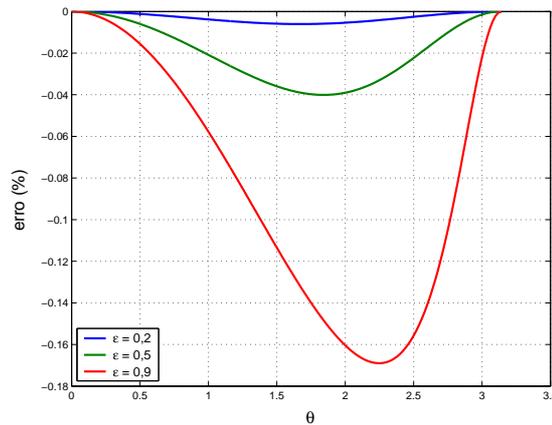


Figura 3.7: Erro da aproximação da espessura do filme

A carga do mancal  $w$  é tomada verticalmente de cima para baixo e corresponde à metade do peso do rotor, suportado por dois mancais. O ângulo de atitude  $\phi$  é o ângulo entre a linha de carga e a linha dos centros  $\overline{OC}$ .

Daí pode-se tirar as seguintes relações trigonométricas da figura 3.6

$$e = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} \quad (3-15)$$

$$x_c = e \sin \phi; \quad y_c = -e \cos \phi$$

O mancal é analisado considerando o que foi estabelecido na figura 3.4, substituindo-se a coordenada  $x$  pela coordenada  $\theta$  conforme indicado na figura 3.8. Mais adiante será visto que será considerado somente o intervalo de 0 a  $\pi$ .

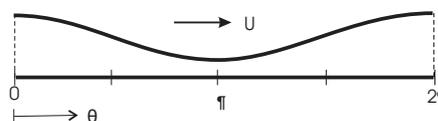


Figura 3.8: Desenvolvimento do filme de óleo

A equação de Reynolds em coordenadas cilíndricas para o mancal radial é encontrada fazendo-se  $x = R\theta$  em 3-4. Assim,

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left( 2V + \frac{U}{R} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{h}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \quad (3-16)$$

Se considerarmos o mancal curto desprezando o primeiro termo do lado esquerdo, a equação 3-16 reduz-se a

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left( 2V + \frac{U}{R} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{h}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \quad (3-17)$$

cujas condições de contorno em  $Z$  são

$$p = p_a(z = -B/2); \quad p = p_a(z = B/2) \quad (3-18)$$

suficientes para calcular o mancal curto

Para o cálculo dos termos de velocidade  $U$  e  $V$ , componentes do vetor  $\mathbf{v}_A$ , dado por 3-19, ilustramos na figura 3.9 o vetor excentricidade em uma posição genérica e os sistemas móveis de referência  $R(X_1Y_1)$  e  $S(X_2Y_2)$ .

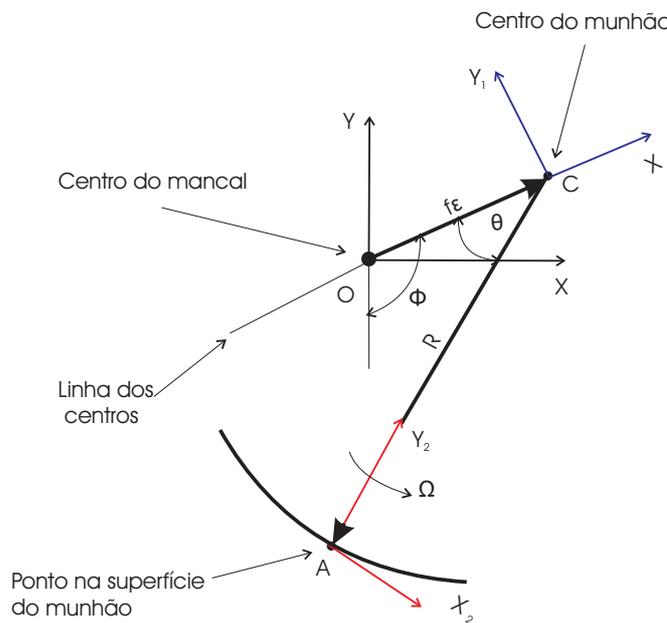


Figura 3.9: Cinemática para definição de  $U$  e  $V$

Embarcando no sistema de referência  $R$  e escrevendo os vetores com componentes em  $S$ :

$${}^S \mathbf{v}_A = {}^S \mathbf{v}_C + {}^S \tilde{\omega}_R {}^S \mathbf{r}_{CA} + {}^S \mathbf{v}_{relA} \quad (3-19)$$

$$\text{onde } {}^S\boldsymbol{\omega}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

A velocidade do ponto  $C$  é facilmente escrita em  $R$

$$\mathbf{s}_{\mathbf{v}_C} = \begin{pmatrix} f\dot{\varepsilon} \\ f\varepsilon\dot{\phi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-20)$$

e pode ser transformada para  $S$  com ajuda da matriz de transformação de coordenadas  ${}^S T^R$ ,  $\mathbf{s}_{\mathbf{v}_C} = {}^S T^R R \mathbf{v}_C$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{\mathbf{v}_C} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) & \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) & 0 \\ -\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) & \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f\dot{\varepsilon} \\ f\varepsilon\dot{\phi} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f\dot{\varepsilon} \\ f\varepsilon\dot{\phi} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\dot{\varepsilon} \sin \theta - f\varepsilon\dot{\phi} \cos \theta \\ f\dot{\varepsilon} \cos \theta + f\varepsilon\dot{\phi} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3-21)$$

A componente da velocidade devido à rotação do SR  $R$ :

$${}^S \tilde{\boldsymbol{\omega}}_R \mathbf{s}_{\mathbf{C}r_A} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi} & 0 \\ \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi}R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-22)$$

Embarcando em  $R$ , o movimento de um ponto na superfície do munhão ocorre com uma velocidade angular de módulo  $\Omega - \dot{\phi}$

$${}^S \mathbf{v}_{\text{relA}} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\phi} - \Omega & 0 \\ \Omega - \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\Omega - \dot{\phi}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-23)$$

Somando 3-21, 3-22 e 3-23, tem-se

$$\mathbf{s}_{\mathbf{v}_A} = \begin{pmatrix} f\dot{\varepsilon} \sin \theta - f\varepsilon\dot{\phi} \cos \theta + \Omega R \\ f\varepsilon\dot{\phi} \sin \theta + f\dot{\varepsilon} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-24)$$

Assim,

$$\begin{aligned} U &= f\dot{\varepsilon} \sin \theta - f\varepsilon\dot{\phi} \cos \theta + \Omega R \\ V &= f\varepsilon\dot{\phi} \sin \theta + f\dot{\varepsilon} \cos \theta \end{aligned} \quad (3-25)$$

Efetuada as derivações constantes do segundo membro de 3-17,

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = -f \cos \theta \quad (3-26)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = f\dot{\varepsilon} \cos \theta + f\varepsilon\dot{\phi} \sin \theta$$

Substituindo 3-26 e 3-11 na equação 3-17, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= 6\mu f [2\dot{\varepsilon} \cos \theta + 2\dot{\phi} \varepsilon \sin \theta - \varepsilon \sin \theta (f\dot{\varepsilon} \sin \theta - f\varepsilon\dot{\phi} \cos \theta + \Omega R)] / R \\ &+ f(1 + \varepsilon \cos \theta)(\dot{\varepsilon} \cos \theta + \varepsilon\dot{\phi} \sin \theta) / R \end{aligned} \quad (3-27)$$

Efetuada as operações em 3-27, desprezando os termos de  $f^2/R$  e lembrando que a espessura  $h$  não varia com a coordenada  $z$ , obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{6\mu f [2\dot{\varepsilon} \cos \theta + \varepsilon(2\dot{\phi} - \Omega) \sin \theta]}{h^3} \quad (3-28)$$

que pode ser facilmente integrada, aplicando-se as condições de contorno 3-18 para resultar em

$$p(\theta, z) = \frac{3\mu [2\dot{\varepsilon} \cos \theta + \varepsilon(2\dot{\phi} - \Omega) \sin \theta]}{f^2(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \left( z^2 - \frac{B^2}{4} \right) + p_a \quad (3-29)$$

Se considerarmos carga puramente estática, temos  $\dot{\varepsilon} = 0$  e  $\dot{\phi} = 0$ , e a equação 3-29 reduz-se a

$$p(\theta, z) = -\frac{3\mu\varepsilon\Omega \sin \theta}{f^2(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \left( z^2 - \frac{B^2}{4} \right) + p_a \quad (3-30)$$

Todos os termos de 3-30 são positivos, exceto  $\sin \theta$ , que é positivo para  $0 < \theta < \pi$  e negativo para  $\pi < \theta < 2\pi$ . Como o líquido não pode suportar pressão negativa, forma-se uma região de vapor oriundo do óleo. A pressão de vapor nunca cai abaixo da pressão de vapor do lubrificante. Geralmente, a pressão da região sujeita à cavitação é constante, denotada por  $p_{cav}$  e é tomada aproximadamente igual a zero. Na solução da Equação de Reynolds, a qualquer valor com pressão negativa atribui-se  $p_{cav}$ . Assim,

$$p = \begin{cases} -\frac{3\mu\Omega f \varepsilon \sin \theta}{f^2(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \left( z^2 - \frac{B^2}{4} \right) + p_a, & 0 < \theta < \pi \\ 0, & \pi < \theta < 2\pi \end{cases} \quad (3-31)$$



$$F_t = \int_0^\pi \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} p \operatorname{sen} \theta dz R d\theta \quad (3-33)$$

Substituindo 3-29 em 3-32 e 3-33, obtém-se

$$F_r = \frac{3\mu R}{f^2} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} (z^2 - \frac{B^2}{4}) dz \left[ 2\dot{\varepsilon} \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} + \varepsilon(2\dot{\phi} - \Omega) \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \right] \quad (3-34)$$

$$F_t = \frac{\mu R}{2f^2} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} (z^2 - \frac{B^2}{4}) dz \left[ 2\dot{\varepsilon} \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} + \varepsilon(2\dot{\phi} - \Omega) \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \right] \quad (3-35)$$

As integrais em  $\theta$  foram calculadas por Sommerfeld [25] e valem

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)} d\theta &= -\frac{2\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^2} \\ \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} &= \frac{\pi(1 + 2\varepsilon^2)}{2(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \\ \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} &= \frac{\pi}{2(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (3-36)$$

Substituindo 3-36 em 3-34 e 3-35 e simplificando, obtém-se

$$F_r = -\frac{\mu RB^3}{2f^2} \left[ \frac{\pi\dot{\varepsilon}(1 + 2\varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} - \frac{2\varepsilon^2(2\dot{\phi} - \Omega)}{(1 - \varepsilon^2)^2} \right] \quad (3-37)$$

$$F_t = \frac{\mu RB^3}{2f^2} \left[ \frac{4\varepsilon\dot{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon^2)^2} - \frac{\pi\varepsilon(2\dot{\phi} - \Omega)}{2(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \right] \quad (3-38)$$

Se considerarmos somente cargas estáticas, temos  $\dot{\varepsilon} = \dot{\phi} = 0$  e as forças sobre o mancal serão

$$F_r = -\frac{\mu\Omega RB^3}{f^2} \frac{\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} \quad (3-39)$$

onde o sinal negativo indica que a força está na direção da máxima espessura do filme.

e

$$F_t = \frac{\mu\Omega RB^3}{f^2} \frac{\pi\varepsilon}{4(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \quad (3-40)$$

onde o sinal positivo indica que a força está na mesma direção da rotação do eixo e é a força desestabilizadora do mancal.

As forças  $F_r$  e  $F_t$  podem ser relacionadas com as forças externas aplicadas, como o peso, força de engrenamento, no caso de multiplicadores ou redutores de velocidade, ou empuxo radial do vapor no caso de turbinas.

Relembrando que nesta análise o sistema mecânico está em equilíbrio, consideremos a carga externa  $w$  aplicada na direção vertical para baixo. Observando a figura 3.11, temos que

$$F_r = w \cos \phi, \quad F_t = w \sin \phi \quad (3-41)$$

Substituindo 3-39 e 3-40 em 3-41 e resolvendo para  $w$  e  $\phi$ , obtém-se

$$w = \frac{\mu\Omega RB^3}{4f^2} \frac{\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \sqrt{\pi^2(1-\varepsilon^2) + 16\varepsilon^2} \quad (3-42)$$

$$\tan \phi = \frac{\pi \sqrt{1-\varepsilon^2}}{4\varepsilon} \quad (3-43)$$

Sob condição de carga estática, o eixo opera no ponto do espaço dado pela excentricidade  $e$  e ângulo de atitude  $\phi$ . Isto significa que, se a carga externa não variar com o tempo, a posição do eixo também não mudará. Em uma máquina real, sempre haverá variações da carga externa, ou efeitos internos como o desbalanceamento. Usualmente estas cargas são pequenas comparadas com a carga estática, de modo que o eixo move-se em uma pequena órbita em torno da posição de equilíbrio.

Se rearrumarmos 3-42 na forma

$$\frac{\mu\Omega RB}{w(f/R)^2} = \left(\frac{R}{B}\right)^2 \frac{4(1-\varepsilon^2)}{\pi\varepsilon\sqrt{\pi^2(1-\varepsilon^2) + 16\varepsilon^2}} \quad (3-44)$$

teremos no lado esquerdo o parâmetro adimensional conhecido como Número de Sommerfeld  $S$ , que reúne as características geométricas e operacionais do mancal. A figura 3.12 ilustra a curva do Número de Sommerfeld para o mancal que será objeto de análise deste trabalho, destacando o ponto de trabalho para uma rotação de 4.100 rpm.

O ângulo de atitude  $\phi$  também pode ser traçado como função da razão de excentricidade  $\varepsilon$ . Pode ser mostrado que a posição de equilíbrio do munhão segue um semicírculo conforme mostra a figura 3.13. Assim, quando a velocidade é zero, o centro do munhão está no fundo, a razão de

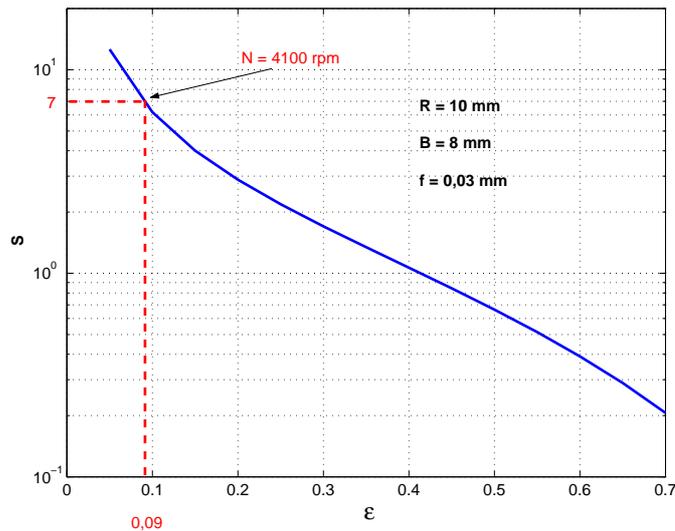


Figura 3.12: Número de Sommerfeld

excentricidade será  $\varepsilon = 1$  e o ângulo de atitude  $\phi = 0$ . À medida que se aumenta a velocidade tendendo a infinito, o centro desloca-se aproximando-se do centro do mancal, onde  $\varepsilon = 0$  e  $\phi = 90^\circ$ .

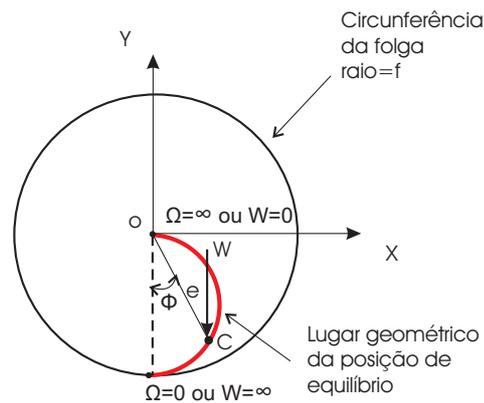


Figura 3.13: Lugar geométrico da posição de equilíbrio do munhão

### 3.4.2 Rigidez e amortecimento dos mancais radiais

Estabelecendo uma posição de equilíbrio em uma dada condição operacional, o filme de lubrificante ilustrado na figura 3.2 comporta-se como um sistema massa-mola-amortecedor de rigidez  $k$  e amortecimento  $c$ , ilustrado pela figura 3.14. Se aplicarmos uma pequena perturbação  $\Delta y$  na sapata móvel, por exemplo, a força de reação  $F_y$  sobre ela aumentará de  $\Delta F_y$ . Análise análoga pode ser feita com uma pequena perturbação  $\Delta \dot{y}$  na velocidade  $\dot{y}$ .

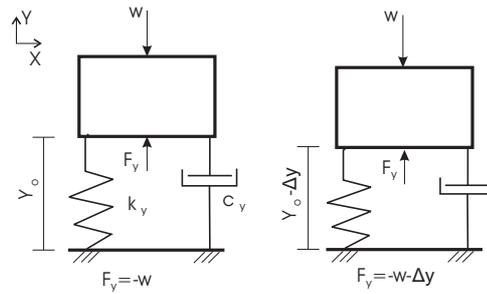


Figura 3.14: Modelo massa-mola para o filme fluido

A figura 3.15 ilustra o gráfico da variação da força de reação que será aplicada através do fluido à sapata fixa. Assim, Os coeficientes  $k_y$  e  $c_y$  são definidos como

$$k_y = -\frac{\Delta F_y}{\Delta y} ; \quad c_y = -\frac{\Delta F_y}{\Delta \dot{y}} \quad (3-45)$$

podendo, também, ser escritos na forma derivativa, uma vez que correspondem à inclinação da curva

$$k_y = -\frac{\partial F}{\partial y} ; \quad c_y = -\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}$$

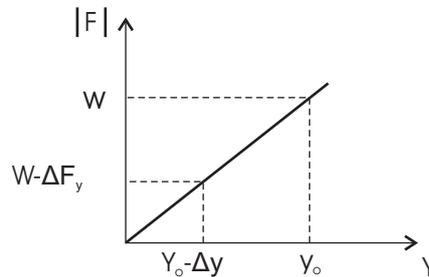


Figura 3.15: Variação da força de reação com o deslocamento

Então, a força total de reação  $F$  do fluido sobre a sapata móvel será

$$F = -w - k_{yy}\Delta y - c_{yy}\Delta \dot{y}$$

Em um mancal radial o problema é mais complexo porque o munhão tem uma posição no espaço dada pelas componentes  $x_c$  e  $y_c$ , bem como pode possuir as componentes de velocidade  $\dot{x}_c$  e  $\dot{y}_c$ . As forças do fluido agindo sobre o munhão terão componentes horizontal  $F_x$  e vertical  $F_y$ . Se o munhão for deslocado de sua posição de equilíbrio de uma pequena distância horizontal  $\Delta x_c$  para a direita, como mostrado na figura 3.16, duas mudanças ocorrem:

$\Delta F_x$  - Mudança na força horizontal devido ao deslocamento horizontal  $\Delta x_c$

$\Delta F_y$  - Mudança na força vertical devido ao deslocamento horizontal  $\Delta x_c$

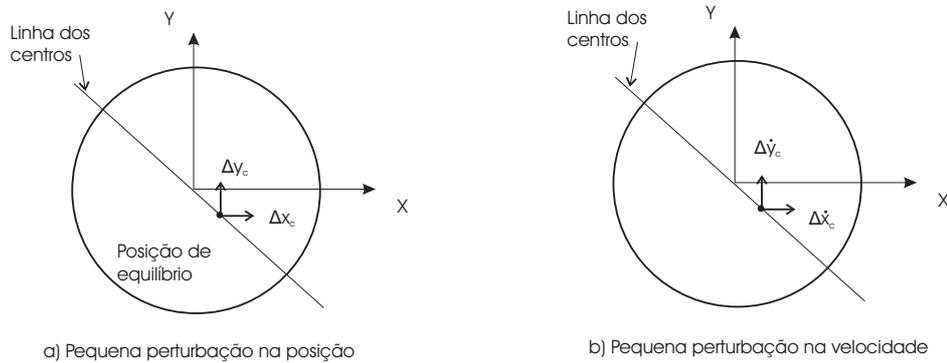


Figura 3.16: Perturbações em torno da posição de equilíbrio

Os dois coeficientes de rigidez correspondentes a essas mudanças são

$$k_{xx} = -\frac{\partial F_x}{\partial x_c}; \quad k_{yx} = -\frac{\partial F_y}{\partial x_c} \quad (3-46)$$

Se o munhão for deslocado de sua posição de equilíbrio de uma pequena distância vertical  $\Delta y_c$  para cima, duas mudanças ocorrem:

$\Delta F_x$  - Mudança na força horizontal devido ao deslocamento vertical  $\Delta y_c$

$\Delta F_y$  - Mudança na força vertical devido ao deslocamento vertical  $\Delta y_c$

Os dois coeficientes de rigidez correspondentes a essas mudanças são

$$k_{xy} = -\frac{\partial F_x}{\partial y_c}; \quad k_{yy} = -\frac{\partial F_y}{\partial y_c} \quad (3-47)$$

Os coeficientes de rigidez são conhecidos como principais ou cruzados. Assim, o termo  $k_{xx}$ , principal, corresponde à força na direção horizontal produzida por um pequeno deslocamento na direção horizontal. O termo  $k_{yx}$ , cruzado, corresponde à força na direção vertical produzida por um pequeno deslocamento na direção horizontal.

Da mesma forma definem-se os coeficientes de amortecimento:

$\Delta F_x$  - Mudança na força horizontal devido à pequena velocidade horizontal  $\Delta \dot{x}_c$

$\Delta F_y$  - Mudança na força vertical devido à pequena velocidade horizontal  $\Delta \dot{x}_c$

Os dois coeficientes de amortecimento correspondentes a essas mudanças são

$$c_{xx} = -\frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}_c}; \quad c_{yx} = -\frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}_c} \quad (3-48)$$

$\Delta F_x$  - Mudança na força horizontal devido à pequena velocidade vertical  $\Delta \dot{y}_c$

$\Delta F_y$  - Mudança na força vertical devido à pequena velocidade vertical  $\Delta \dot{y}_c$

Os respectivos coeficientes são

$$c_{xy} = -\frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}_c}; \quad c_{yy} = -\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \quad (3-49)$$

A fim de calcular estes coeficientes, será aplicada uma pequena perturbação em torno da posição de equilíbrio  $(\phi_o, f\varepsilon)$ , conforme ilustrado na figura 3.17, onde  $e_r$  e  $e_t$  são os vetores unitários nas direções radial e tangencial, respectivamente.

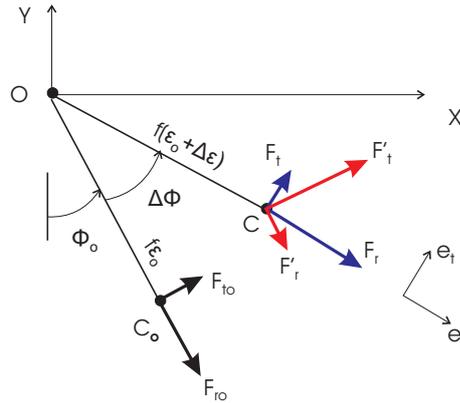


Figura 3.17: Pequena perturbação em torno da posição de equilíbrio

Para pequenas vibrações  $(\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi})$  em torno da posição de equilíbrio estático  $(\varepsilon_o, \phi_o)$ , a força  $F = F_r \mathbf{e}_r + F_t \mathbf{e}_t$  sobre o munhão pode ser expressa por:

$$\begin{Bmatrix} F_r \\ F_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ro} \\ F_{to} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_r}{f \partial \varepsilon} & \frac{\partial F_r}{f \varepsilon \partial \phi} \\ \frac{\partial F_t}{f \partial \varepsilon} & \frac{\partial F_t}{f \varepsilon \partial \phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f \Delta \varepsilon \\ f \varepsilon \Delta \phi \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_r}{f \partial \dot{\varepsilon}} & \frac{\partial F_r}{f \varepsilon \partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial F_t}{f \partial \dot{\varepsilon}} & \frac{\partial F_t}{f \varepsilon \partial \dot{\phi}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f \Delta \dot{\varepsilon} \\ f \varepsilon \Delta \dot{\phi} \end{Bmatrix} \quad (3-50)$$

Da figura 3.17, tem-se a seguinte transformação

$$\begin{Bmatrix} F_r' \\ F_t' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Delta \phi & -\text{sen} \Delta \phi \\ \text{sen} \Delta \phi & \cos \Delta \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_r \\ F_t \end{Bmatrix} \quad (3-51)$$

onde  $F_r'$  é a componente da força do fluido  $F$  na mesma direção da componente  $F_{ro}$  na posição de equilíbrio, e  $F_{to}$  é a componente de  $F$  na mesma direção da componente  $F_{to}$ .

Para uma pequena perturbação  $\Delta \phi \ll 1$ ,  $\cos \Delta \phi = 1$  e  $\text{sen} \Delta \phi = \Delta \phi$ .

Usando estas aproximações, 3-51 pode ser escrita como

$$\begin{Bmatrix} F_r' \\ F_t' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_r \\ F_t \end{Bmatrix} + \Delta \phi \begin{Bmatrix} -F_t \\ F_r \end{Bmatrix} \quad (3-52)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} F_r \\ F_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_r' \\ F_t' \end{Bmatrix} - f\varepsilon\Delta\phi \begin{Bmatrix} -F_t/f\varepsilon \\ F_r/f\varepsilon \end{Bmatrix} \quad (3-53)$$

Substituindo 3-53 em 3-50 e rearranjando, obtém-se

$$\begin{Bmatrix} F_r' - F_{ro} \\ F_t' - F_{to} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_r}{f\partial\varepsilon} & \frac{\partial F_r}{f\varepsilon\partial\phi} - \frac{F_t}{f\varepsilon} \\ \frac{\partial F_t}{f\partial\varepsilon} & \frac{\partial F_t}{f\varepsilon\partial\phi} + \frac{F_r}{f\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f\Delta\varepsilon \\ f\varepsilon\Delta\phi \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_r}{f\partial\dot{\varepsilon}} & \frac{\partial F_r}{f\varepsilon\partial\dot{\phi}} \\ \frac{\partial F_t}{f\partial\dot{\varepsilon}} & \frac{\partial F_t}{f\varepsilon\partial\dot{\phi}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f\Delta\dot{\varepsilon} \\ f\varepsilon\Delta\dot{\phi} \end{Bmatrix} \quad (3-54)$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} k_{rr} & k_{rt} \\ k_{tr} & k_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F_r}{f\partial\varepsilon} & -\frac{\partial F_r}{f\varepsilon\partial\phi} + \frac{F_t}{f\varepsilon} \\ -\frac{\partial F_t}{f\partial\varepsilon} & -\frac{\partial F_t}{f\varepsilon\partial\phi} - \frac{F_r}{f\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (3-55)$$

$$\begin{bmatrix} c_{rr} & c_{rt} \\ c_{tr} & c_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F_r}{f\partial\dot{\varepsilon}} & -\frac{\partial F_r}{f\varepsilon\partial\dot{\phi}} \\ -\frac{\partial F_t}{f\partial\dot{\varepsilon}} & -\frac{\partial F_t}{f\varepsilon\partial\dot{\phi}} \end{bmatrix} \quad (3-56)$$

Substituindo 3-37 e 3-38 em 3-55 e 3-56, e avaliando as derivadas na condição de equilíbrio  $\dot{\varepsilon} = \dot{\phi} = 0$  encontram-se as matrizes de rigidez e amortecimento em coordenadas polares

$$K = \begin{bmatrix} \frac{2\Omega\mu RB^3\varepsilon(1+\varepsilon^2)}{f^3(1-\varepsilon^2)^3} & \frac{\pi\Omega\mu RB^3}{4f^3(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \\ -\frac{\pi\Omega\mu RB^3(1+2\varepsilon^2)}{4f^3(1-\varepsilon^2)^{5/2}} & \frac{\pi\Omega\mu RB^3}{4f^3(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \end{bmatrix} \quad (3-57)$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\pi\mu RB^3(1+2\varepsilon^2)}{2f^3(1-\varepsilon^2)^{5/2}} & -\frac{2\varepsilon\mu RB^3}{f^3(1-\varepsilon^2)^2} \\ -\frac{2\varepsilon\mu RB^3}{f^3(1-\varepsilon^2)^2} & \frac{\mu RB^3\varepsilon}{f^3(1-\varepsilon^2)^2} \end{bmatrix} \quad (3-58)$$

Fazendo  $\bar{k}_{ij} = \frac{f^3}{\mu\Omega RB^3} k$  e  $\bar{c}_{ij} = \frac{f^3}{\mu RB^3} c$  ( $i, j = r, t$ ) os coeficientes linearizados são adimensionalizados.

Estes coeficientes em coordenadas cartesianas são calculados com auxílio das transformações

$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{xx} & \bar{k}_{xy} \\ \bar{k}_{yx} & \bar{k}_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \phi_o & \cos \phi_o \\ -\cos \phi_o & \sin \phi_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k}_{rr} & \bar{k}_{rt} \\ \bar{k}_{tr} & \bar{k}_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \phi_o & -\cos \phi_o \\ \cos \phi_o & \sin \phi_o \end{bmatrix} \quad (3-59)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_{xx} & \bar{c}_{xy} \\ \bar{c}_{yx} & \bar{c}_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \phi_o & \cos \phi_o \\ -\cos \phi_o & \sin \phi_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_{rr} & \bar{c}_{rt} \\ \bar{c}_{tr} & \bar{c}_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \phi_o & -\cos \phi_o \\ \cos \phi_o & \sin \phi_o \end{bmatrix}$$

onde  $\phi_o$  é dado por 3-43

Substituindo 3-57 e 3-58 em 3-59, tem-se

$$\begin{aligned} \bar{k}_{xx} &= Q^2 \varepsilon \left[ \frac{2\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} \right] \\ \bar{k}_{xy} &= \pi Q^2 \left[ \frac{\pi^2 - \varepsilon^2(\pi^2 + 16\varepsilon^2)}{4(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \right] \\ \bar{k}_{yx} &= -\pi Q^2 \left[ \frac{(32 - 2\pi^2\pi^2)\varepsilon^4 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + \pi^2}{4(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \right] \\ \bar{k}_{yy} &= Q^2 \varepsilon \left[ \frac{\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + (32 - 2\pi^2)\varepsilon^4}{(1 - \varepsilon^2)^3} \right] \\ \bar{c}_{xx} &= \pi Q^2 \left[ \frac{\pi + (2\pi - 4)\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \right] \\ \bar{c}_{xy} &= -2Q^2 \varepsilon \left[ \frac{\pi + (2\pi^2 - 16)\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} \right] \\ \bar{c}_{yx} &= \bar{c}_{xy} \\ \bar{c}_{yy} &= \frac{\pi[48Q^2\varepsilon^4 + \pi(1 - \varepsilon^2)]}{2(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \end{aligned} \quad (3-60)$$

onde  $Q(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi^2(1-\varepsilon^2)+16\varepsilon^2}}$

A figura 3.18 ilustra o gráfico destes coeficientes em função do Número de Sommerfeld.

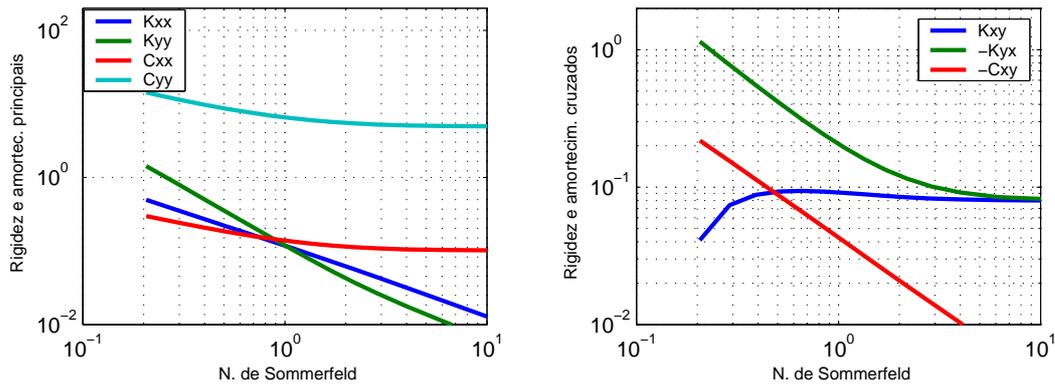


Figura 3.18: Rigidez e amortecimento adimensionalizados

### 3.5

#### Rotor montado em mancais hidrodinâmicos

A vantagem de um mancal hidrodinâmico do ponto de vista rotodinâmico é seu alto amortecimento relativo. Além disso, a rigidez do filme de óleo tem uma forte influência sobre as velocidades críticas e, conseqüentemente, estes parâmetros podem ser usados para aumentar ou reduzir a velocidade crítica para um dado rotor. Como a rigidez e amortecimento de um mancal são altamente sensíveis à folga do mancal, este parâmetro é um dos mais importantes para controlar a dinâmica do rotor.

Nesta seção analisaremos a estabilidade do sistema rotor-mancal com parâmetros concentrados, considerando dois casos: rotor rígido e flexível.

#### 3.5.1

##### Rotor rígido

Consideremos o rotor rígido montado em mancais hidrodinâmicos conforme ilustrado na figura 3.19. A carga por mancal será  $w$ .

O mancal é modelado na literatura como mostrado na figura 3.20.

Do diagrama de corpo livre do disco nas direções  $X$  e  $Y$ , tem-se

$$\begin{aligned} m\ddot{r}_x &= F_x \\ m\ddot{r}_y &= F_y - w \end{aligned} \quad (3-61)$$

onde  $r_x$  e  $r_y$  são as coordenadas do centro de massa  $C$  do disco dadas por

$$r_x = r_{xo} + x; \quad r_y = r_{yo} + y \quad (3-62)$$

e  $x$  e  $y$  são pequenas oscilações do munhão e do disco em torno da posição de equilíbrio  $r_{xo}$  e  $r_{yo}$ , respectivamente.

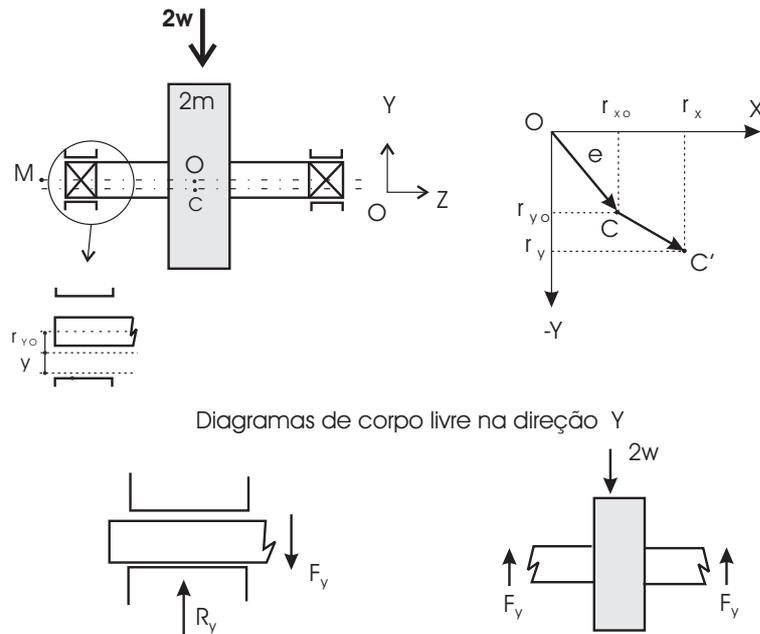


Figura 3.19: Rotor rígido em mancais hidrodinâmicos

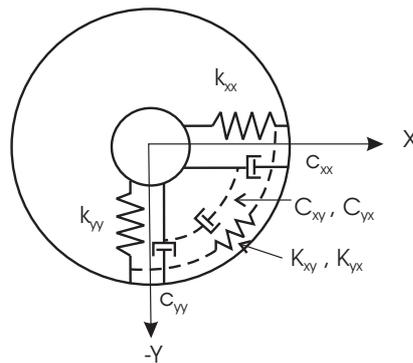


Figura 3.20: Rotor rígido em mancais hidrodinâmicos

Do diagrama de corpo livre do mancal nas direções X e Y tem-se

$$\begin{aligned} F_x = R_x &= k_{xx}x + k_{xy}y + c_{xx}\dot{x} + c_{xy}\dot{y} \\ F_y = R_y &= k_{yy}y + k_{yx}x + c_{yy}\dot{y} + c_{yx}\dot{x} \end{aligned} \quad (3-63)$$

Substituindo 3-62 e 3-63 em 3-61 tem-se as equações que descrevem o movimento livre nas direções horizontal e vertical na forma matricial

$$m \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -w \end{Bmatrix} \quad (3-64)$$

Uma solução para a equação 3-64 pode ser encontrada nas formas

$$x = x_o e^{\lambda t}; \quad y = y_o e^{\lambda t} \quad (3-65)$$

Substituindo 3-65 em 3-64, chega-se ao polinômio característico de quarto grau, cujas raízes serão da forma  $\lambda = \sigma + i\omega$ , onde  $\sigma$  - parte real ou fator de crescimento ou decrescimento exponencial  $\omega$  - parte imaginária, correspondente à frequência natural

A vibração do rotor rígido terá então, a forma

$$x = x_o e^{(\sigma+i\omega)t} \quad y = y_o e^{(\sigma+i\omega)t} \quad (3-66)$$

O termo exponencial  $\sigma$  representa crescimento da vibração, se  $\sigma > 0$ , ou decaimento, se  $\sigma < 0$ .

Nosso particular interesse aqui é determinar o limite de estabilidade, ou seja, a velocidade para a qual  $\sigma = 0$ . À medida que se aumenta a velocidade, o efeito cruzado dos coeficientes de rigidez e amortecimento tornar-se-ão maiores e, pelo menos duas das raízes complexas conjugadas com fator de crescimento  $\sigma < 0$  passarão a ter parte real  $\sigma = 0$ . Esta velocidade corresponderá à velocidade limite de estabilidade  $\Omega_l$ . Se prosseguirmos com o aumento de velocidade,  $\sigma$  será positivo, configurando-se, então, uma situação de instabilidade.

Uma estratégia para se encontrar o mapa de estabilidade de um mancal é introduzir na equação 3-64 o termo da velocidade  $\Omega$ . Para tanto, basta substituir as matrizes  $K$  e  $C$  por suas correspondentes adimensionalizadas. Assim, temos

$$C = \frac{w}{f\Omega} C'; \quad K = \frac{w}{f} K' \quad (3-67)$$

A equação 3-64 fica, então

$$\frac{f}{g} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \end{Bmatrix} + \frac{1}{\Omega} \begin{bmatrix} c'_{xx} & c'_{xy} \\ c'_{yx} & c'_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k'_{xx} & k'_{xy} \\ k'_{yx} & k'_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-68)$$

Substituindo 3-65 em 3-68 e fazendo  $\alpha = f/g$ , encontramos o polinômio característico 3-69

$$\alpha^2 \lambda^4 + \frac{\alpha A_4}{\Omega} \lambda^3 + \left( \alpha A_3 + \frac{A_2}{\Omega^2} \right) \lambda^2 + \frac{A_1}{\Omega} \lambda + A_o = 0 \quad (3-69)$$

onde

$$\begin{aligned}
 A_o &= k'_{xx}k'_{yy} - k'_{xy}k'_{yx} \\
 A_1 &= c'_{xx}k'_{yy} + k'_{xx}c'_{yy} - (c'_{yx}k'_{xy} + c'_{xy}k'_{yx}) \\
 A_2 &= c'_{yy}c'_{xx} - c'_{xy}c'_{yx} \\
 A_3 &= k'_{xx} + k'_{yy} \\
 A_4 &= c'_{xx} + c'_{yy}
 \end{aligned} \tag{3-70}$$

Fazendo  $\lambda = i\omega_l$  e  $\Omega = \Omega_l$  em 3-69, temos

$$\alpha^2 \omega_l^4 - \left( \alpha A_3 + \frac{A_2}{\Omega_l^2} \right) \omega_l^2 + A_o + \left( \frac{A_1 \omega_l - \alpha A_3 \omega_l^3}{\Omega_l} \right) i = 0 \tag{3-71}$$

De 3-71 temos

$$\omega_l = \sqrt{\frac{A_1}{\alpha A_4}} \tag{3-72}$$

e

$$\Omega_l = \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_4}{\alpha (A_1^2 - A_1 A_3 A_4 + A_o A_4^2)}} \tag{3-73}$$

onde  $\Omega_l$  e  $\omega_l$  são a velocidade limite de estabilidade e a frequência natural nesta velocidade, respectivamente.

Assim, de posse de 3-70 e 3-73 pode-se plotar o mapa de estabilidade como função do Número de Sommerfeld para o mancal objeto deste trabalho . Através deste mapa, pode-se determinar se o mancal é estável ou não para qualquer combinação de carga e velocidade, expressa pelo Número de Sommerfeld. Assim, conforme ilustrado na figura 3.21, se levantarmos uma linha vertical em  $S = 7$ , a interseção com a curva dá-se em  $\bar{\Omega} = 3.9$ , que corresponde à velocidade limite de 21.296 *rpm* para uma folga  $f = 0,03$  *mm* e 18.443 *rpm*, para  $f = 0,04$  *mm*. Vale ressaltar que, caminhar na linha  $S = 7$  de baixo para cima equivale a aumentar a carga do mancal, uma vez que estamos aumentando a velocidade mantendo  $S$  constante. Pode-se concluir do mapa que o aumento da folga tende a desestabilizar o mancal.

### 3.5.2 Rotor flexível

Consideremos o rotor de Jeffcott com um disco de massa  $2m$  suportado por mancais hidrodinâmicos idênticos ilustrado na figura 3.22. Como o eixo é horizontal, os mancais suportam o peso  $2w$  do rotor que determinará a posição estática de operação  $(x_M, y_M)$  a uma dada a velocidade  $\Omega$ .

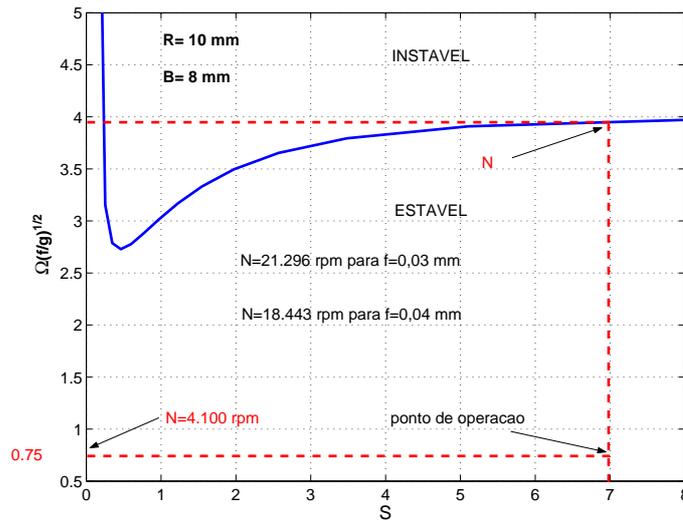


Figura 3.21: Mapa de estabilidade em função do Número de Sommerfeld

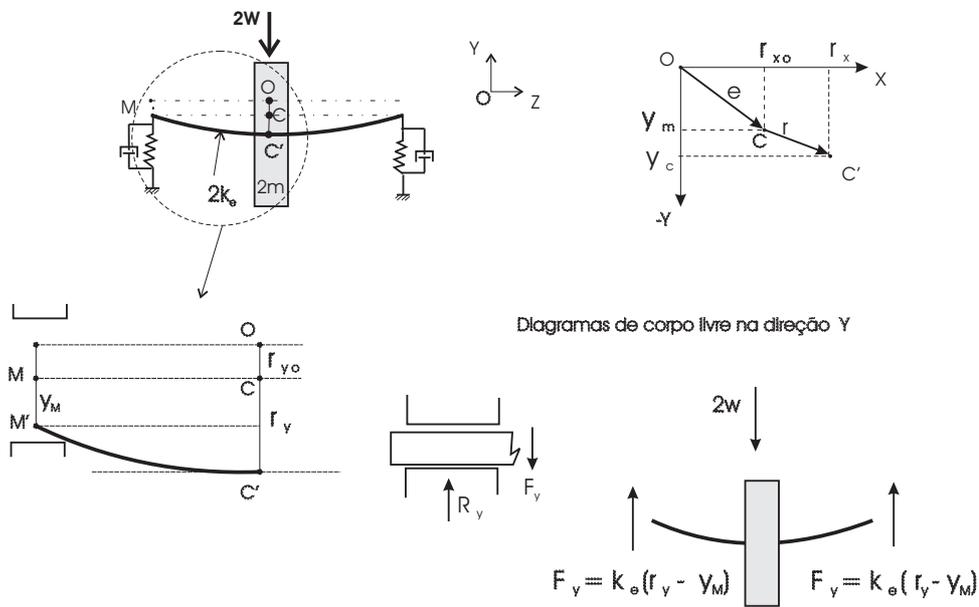


Figura 3.22: Rotor de Jeffcott em mancal hidrodinâmico

Do diagrama de corpo livre do disco nas direções  $X$  e  $Y$ , tem-se

$$\begin{cases} m\ddot{r}_x = -k_e(r_x - x_M) \\ m\ddot{r}_y = -k_e(r_y - y_M) - w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{k_e}\ddot{r}_x + r_x - x_M = 0 \\ \frac{m}{k_e}\ddot{r}_y + r_y - y_M = -w \end{cases} \quad (3-74)$$

que, na forma matricial e fazendo  $p = m/k_e$ , fica

$$\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_x \\ \ddot{r}_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_M \\ y_M \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-75)$$

Do diagrama de corpo livre dos mancais, tem-se

$$\begin{aligned} F_x = R_x &= k_{xx}x_M + k_{xy}y_M + c_{xx}\dot{x}_M + c_{xy}\dot{y}_M = k_e(r_x - x_M) \\ F_y = R_y &= k_{yy}y_M + k_{yx}x_M + c_{yy}\dot{y}_M + c_{yx}\dot{x}_M = k_e(r_y - y_M) \end{aligned} \quad (3-76)$$

$$\begin{aligned} c_{xx}\dot{x}_M + c_{xy}\dot{y}_M + (k_{xx} + k_e)x_M + k_{xy}y_M - k_er_x &= 0 \\ c_{yy}\dot{y}_M + c_{yx}\dot{x}_M + k_{yx}x_M + (k_{yy} + k_e)y_M - k_er_y &= 0 \end{aligned} \quad (3-77)$$

Dividindo 3-77 por  $k_e$  e escrevendo na forma matricial, fica

$$\frac{1}{k_e} \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{y}_M \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_{xx}}{k_e} + 1 & \frac{k_{xy}}{k_e} \\ \frac{k_{yx}}{k_e} & \frac{k_{yy}}{k_e} + 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_M \\ y_M \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-78)$$

Fazendo  $K = \frac{mg}{f}K'$ ,  $C = \frac{mg}{f\Omega}C'$  e  $\delta = \frac{mg}{fk_e}$ , obtém-se

$$\frac{\delta}{\Omega} \begin{bmatrix} c'_{xx} & c'_{xy} \\ c'_{yx} & c'_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{y}_M \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta k'_{xx} + 1 & \delta k'_{xy} \\ \delta k'_{yx} & \delta k'_{yy} + 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_M \\ y_M \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-79)$$

As equações 3-75 e 3-79 podem ser reunidas na equação matricial

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_x \\ \ddot{r}_y \\ \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \end{Bmatrix} + \frac{\delta}{\Omega} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c'_{xx} & c'_{xy} \\ 0 & 0 & c'_{yx} & c'_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{x}_M \\ \dot{y}_M \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \delta k'_{xx} + 1 & \delta k'_{xy} \\ 0 & -1 & \delta k'_{yx} & \delta k'_{yy} + 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ x_M \\ y_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -w \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3-80)$$

O polinômio característico da equação 3-80 é

$$\begin{aligned} p^2\Omega^2 A_2 \lambda^6 + p^2 \frac{A_1 + \delta A_4}{\Omega} \lambda^5 + p \left[ p(A_o + \delta A_3 + \delta^2) + \frac{2A_2}{\Omega^2} \right] \lambda^4 \\ + p \frac{2A_1 + \delta A_4}{\Omega} \lambda^3 + \left[ p(2A_o + \delta A_3) + \frac{A_2}{\Omega^2} \right] \lambda^2 + \frac{A_1}{\Omega} \lambda + A_o = 0 \end{aligned} \quad (3-81)$$

Para determinar a velocidade limite  $\Omega_l$  de estabilidade, basta fazer  $\lambda = i \omega_l$  em 3-81 para encontrar

$$\omega_l = \frac{A_1}{p(A_1 + \delta A_4)} \quad (3-82)$$

$$\Omega_l = A_4 \sqrt{\frac{\omega_l A_2}{A_1^2 - A_1 A_3 A_4 + A_o A_4^2}} \quad (3-83)$$

A partir de 3-82 e 3-83 pode-se analisar a influência da flexibilidade do eixo no limite de estabilidade. Quanto menor a flexibilidade do eixo  $k_e$ , maior torna-se  $p$ , o que diminui  $\omega_l$  em 3-82. Conseqüentemente,  $\Omega_l$  em 3-83 diminui, donde se conclui que quanto mais flexível o eixo, mais propenso à instabilidade será o rotor. Este fato pode ser observado se compararmos o mapa de estabilidade para o rotor rígido na figura 3.21 com o gráfico na figura 3.23 referente ao mapa de estabilidade para o rotor flexível. A curva possui a mesma forma, mas é mais baixa.

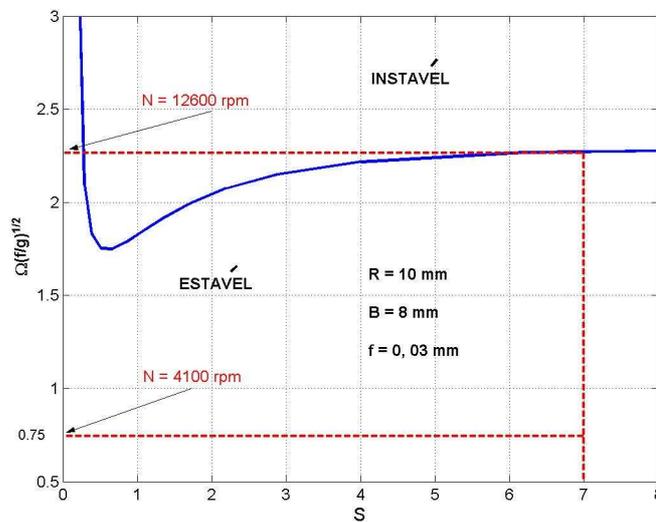


Figura 3.23: Mapa de estabilidade do rotor de Jeffcott em mancal hidrodinâmico

### 3.6 “Oil Whirl” e “oil whip”

A instabilidade em mancais hidrodinâmicos é conhecida na literatura como “*oil whirl*” e “*oil whip*” cujos conceitos têm sido objeto de confusão. Bently [5] descreveu a diferença entre os dois conceitos.

A figura 3.24 mostra o espectro em cascata de vibração de um rotor experimental durante a partida. Quando a velocidade atinge a velocidade limite de estabilidade (“*threshold speed*”), 2470 rpm, o rotor entra na zona de instabilidade e apresenta uma vibração subsíncrona proporcional à sua velocidade, descrevendo uma órbita de sentido direto. Em torno



da órbita, aproximadamente circular, aumenta. Se a rigidez mantivesse o seu valor constante conforme o modelo linear adotado, a órbita aumentaria indefinidamente. Entretanto, a rigidez do mancal aumenta com o aumento da excentricidade. Consequentemente, a frequência natural e a velocidade limite aumentam. Assim, as não linearidades do sistema induzem ao ciclo limite. Isto acontece a 2470 rpm. A figura 3.25 ilustra a transição da órbita entre a velocidade limite e o ciclo limite visto da tela de um osciloscópio em experimentos realizados por Muszynska [15].

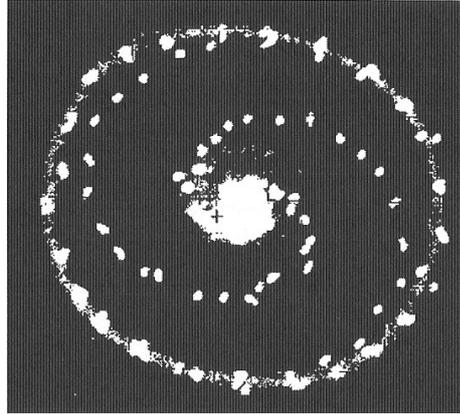


Figura 3.25: Ciclo limite da órbita do eixo

Continuando o aumento de velocidade, a excentricidade atinge seu limite quando o eixo se aproxima da superfície do mancal cuja rigidez supera à do eixo, governando a dinâmica do sistema. Nesta região, a frequência de precessão é constante e corresponde à frequência de ressonância, ditada basicamente pela elasticidade do eixo. Durante o “*whip*”, a vibração está limitada à folga do mancal, mas o modo de flexão pode produzir vibrações de altas amplitudes entre os mancais, resultando em roçamentos e ciclos severos de tensão que podem ser muito destrutivos.

Como foi visto na seção 3.4, as propriedades de rigidez e amortecimento dos mancais dependem da carga estática que neles atuam. Assim, tal carga deve ser cuidadosamente considerada no projeto rotodinâmico.

O peso do rotor é a carga mais evidente e pode ser facilmente calculada. No entanto, quando se trata de caixas de engrenagem e turbinas a vapor, estas cargas não são tão óbvias e o seu cálculo não tão imediato.

No caso das caixas de engrenagem, o torque é transmitido de um eixo para o outro através de forças radiais e tangenciais agindo entre os dentes, cuja resultante será uma força radial suportada pelos mancais. Estas forças são diretamente proporcionais ao torque. À plena potência, o esforço radial será máximo, reduzindo a tendência à instabilidade. Em baixas potências,

que ocorre principalmente durante o processo de partida da máquina, os esforços radiais são baixos, favorecendo a instabilidade.

Nas turbinas a vapor, a carga estática corresponde ao empuxo do vapor nas palhetas, transmitido radialmente aos mancais. À plena potência, este empuxo é máximo. Em baixas cargas a admissão é parcial, resultando num empuxo menor, além da mudança da direção da resultante, o que vai influenciar nas propriedades dos mancais.

Portanto, o projeto rotodinâmico deve levar em conta a carga estática em baixas potências.

Um exemplo prático de projeto de mancal que não considerou a operação do multiplicador de velocidade em baixa potência ocorreu em um compressor da plataforma P-19 da Petrobras [3], após repontenciamento para aumento de capacidade. A relação de transmissão do multiplicador de velocidade foi aumentada de 1:1,39 para 1:1,54. Durante o processo de partida, a vibração atingiu  $180 \mu\text{m}$  a  $3.000 \text{ rpm}$ , levando a máquina ao desarme, conforme mostrado na figura 3.26.

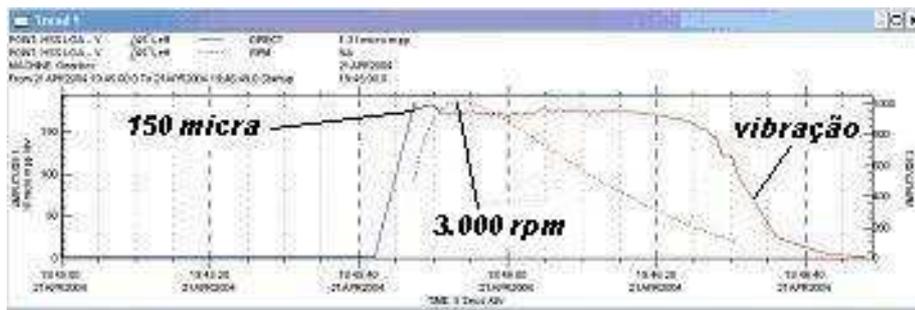


Figura 3.26: Gráfico da velocidade e vibração

O espectro em cascata de vibração mostrado na figura 3.27 evidencia um caso clássico de “*oil whirl*”. Para permitir a partida da máquina foi necessário implementar um retardo no sistema de proteção por alta vibração e assim ficará até que sejam projetados mancais mais adequados.

### 3.7

#### Tipos de Mancais Radiais

Os mancais cilíndricos estão sujeitos a instabilidade quando em altas rotações ou baixas cargas. Como foi visto, o aumento da excentricidade  $\varepsilon$  tende a estabilizar o mancal. Diversos mancais foram desenvolvidos com o objetivo de resolver o problema com base nesta característica “precarregando” seus segmentos, tais como os multilobulares (elíptico, “*offset*”, trilobular, etc.) e os de sapatas oscilantes, conforme ilustra a figura 3.28.

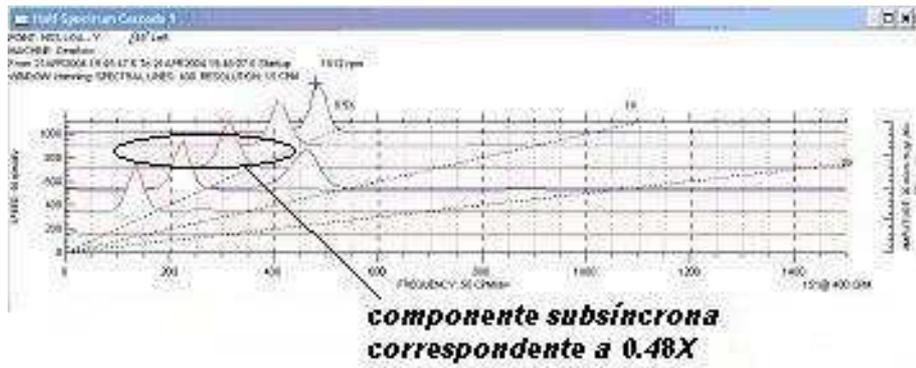


Figura 3.27: Espectro de vibração durante a partida

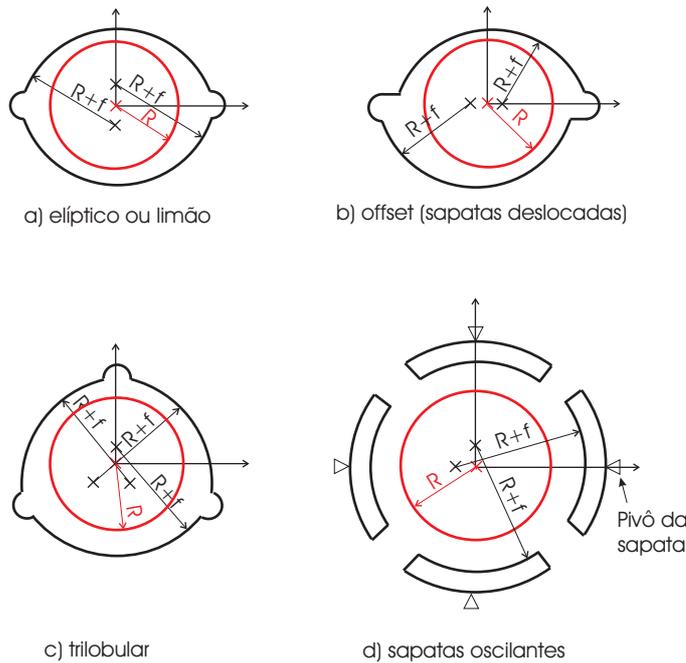


Figura 3.28: Tipos de mancal

São construídos de tal forma que os centros de curvatura de cada sapata não estão no mesmo ponto. Cada sapata é deslocada do centro do mancal de forma a tornar o filme lubrificante mais convergente ou divergente.

Um parâmetro importante para definir estes mancais é a precarga  $m$ , definida pela relação da distância do centro de curvatura da sapata e o centro do mancal e a folga do mancal. Para melhor compreensão do conceito, consideremos um munhão de raio  $R$  cujo centro coincida com o centro do mancal de raio. O maior eixo que pode ser colocado no mancal tem raio  $R + f_b$ , conforme ilustrado na figura 3.29, exemplificando precarga  $m = 0$  e

$m = 1$ . Então, a precarga será dada por

$$m = \frac{f - f_b}{f} \tag{3-84}$$

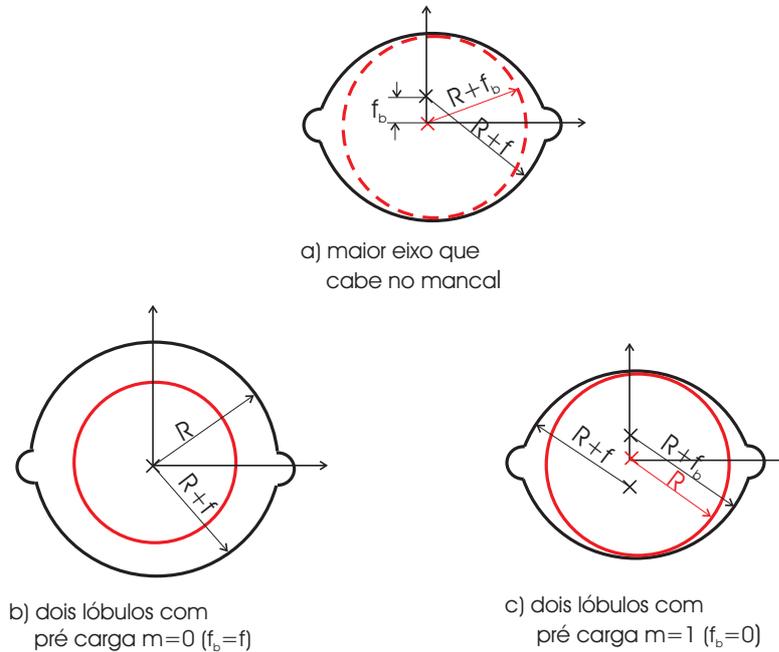


Figura 3.29: Conceito de precarga de um mancal

Os mancais de sapatas oscilantes (“*tilting pad*”) são largamente empregados na indústria. Cada sapata é pivotada, de modo que não há nenhuma reação de momento. A sapata oscila de modo que seu centro de curvatura move-se de um ângulo  $\delta$  para criar um filme fortemente convergente. O pivô é posicionado no centro da sapata ou ligeiramente deslocado no sentido da borda de fuga. A razão entre a distância  $d$  do pivô à borda de ataque e o comprimento da sapata  $L$  é conhecido como fator de “*offset*” (figura 3.30).

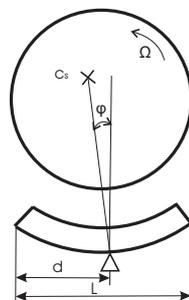


Figura 3.30: Oscilação da sapata e “offset” de um mancal

A precarga é dada pela equação 3-84 e ilustrada na figura 3.30, onde  $f = R_s - R$ .

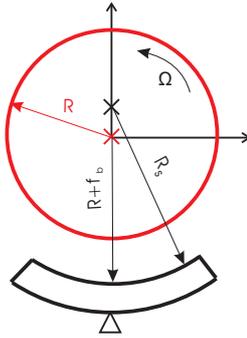


Figura 3.31: Precarga de um mancal de sapatas oscilantes

A figura 3.32 mostrada em Childs [7] compara o mapa de estabilidade de diversos tipos de mancal e pode-se notar que o tipo mais estável é o tipo “*pressure-dam*” ilustrado na figura 3.33.

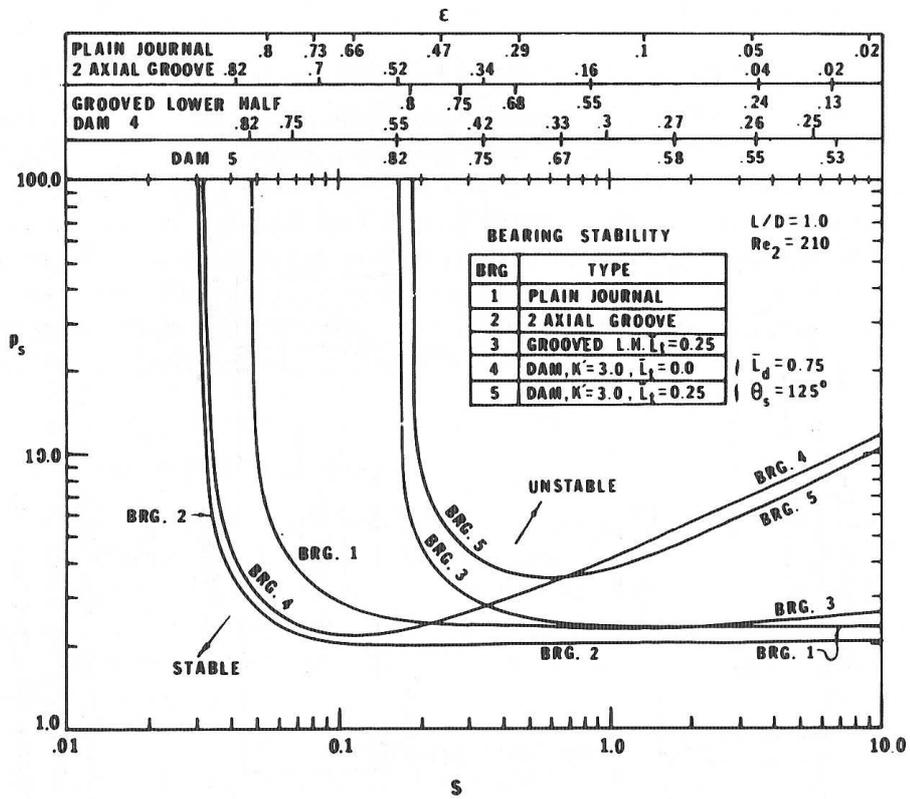


Figura 3.32: Mapa de estabilidade para diferentes projetos de mancal

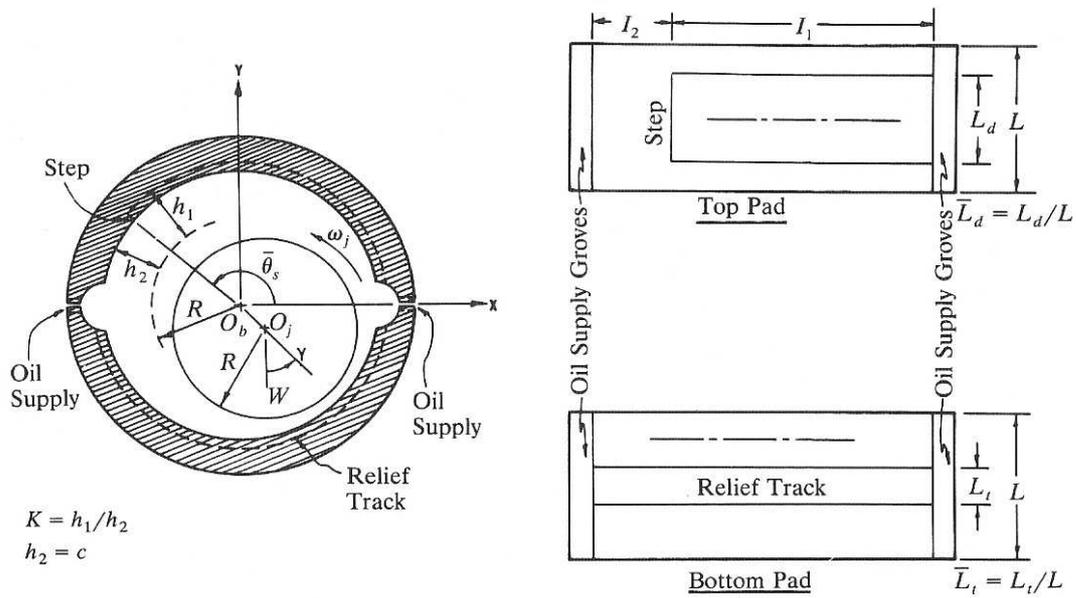


Figura 3.33: Mancal pressure-dam

## 4

# O SISTEMA CONTÍNUO ROTOR-MANCAL

### 4.1

#### Introdução

Na seção 3.5 as equações de movimento foram determinadas considerando-se parâmetros concentrados. Entretanto, rotores reais são mais complexos, constituídos de vários discos e a seção do eixo não é constante, fazendo-se necessária uma análise com auxílio de um modelo com parâmetros distribuídos no qual a massa, a rigidez e o amortecimento são distribuídos. Este modelo é, também, chamado de rotor contínuo. A análise de um rotor contínuo é baseada na teoria da vibração transversal da viga. A teoria mais fundamental é a teoria da viga Bernoulli-Euler, que assume que a seção permanece plana e perpendicular à linha de centro. Se o eixo for delgado, essas equações representam bem o movimento do rotor. Quando a viga vibra segundo modos mais altos, o efeito da inércia de rotação da seção transversal e das deformações de cisalhamento aparecem, não mais podendo ser desprezadas. Este modelo é conhecido como viga de Timoshenko, o qual não será considerado neste estudo. Este modelo acrescenta outras equações específicas da rotação da seção transversal.

Quando o diâmetro do disco é muito maior em relação à sua largura, aparece a ação giroscópica, que será considerada neste estudo.

Existem diversos métodos aproximados para análise de rotores contínuos. Será empregado aqui o Método dos Elementos Finitos.

### 4.2

#### Equações de Movimento

A figura 4.1 ilustra o modelo de um rotor contínuo elástico cujo centro coincide com o eixo  $Z$ . As deflexões nas direções  $X$  e  $Y$  são denotadas por

$x(z, t)$  e  $y(z, t)$ , respectivamente. A inclinação em torno das direções  $X$  e  $Y$  são representadas por  $\alpha(z, t)$  e  $\beta(z, t)$ , respectivamente, e são dadas por

$$\alpha = -\frac{\partial y}{\partial z} ; \quad \beta = \frac{\partial x}{\partial z} \quad (4-1)$$

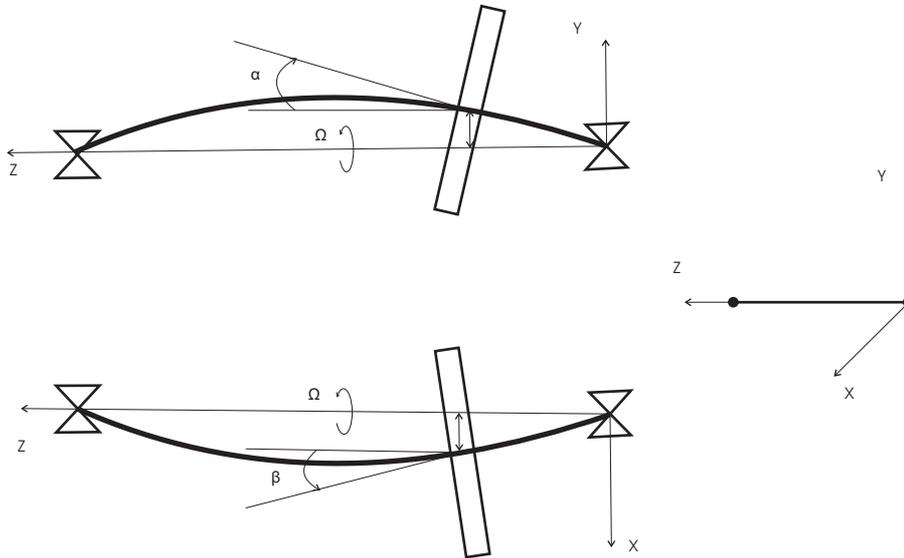


Figura 4.1: Oscilação do rotor com 4 graus de liberdade

Para se chegar às equações de movimento, consideramos um elemento infinitesimal do eixo de espessura  $dz$ , mostrado na figura 4.2 nas duas direções.

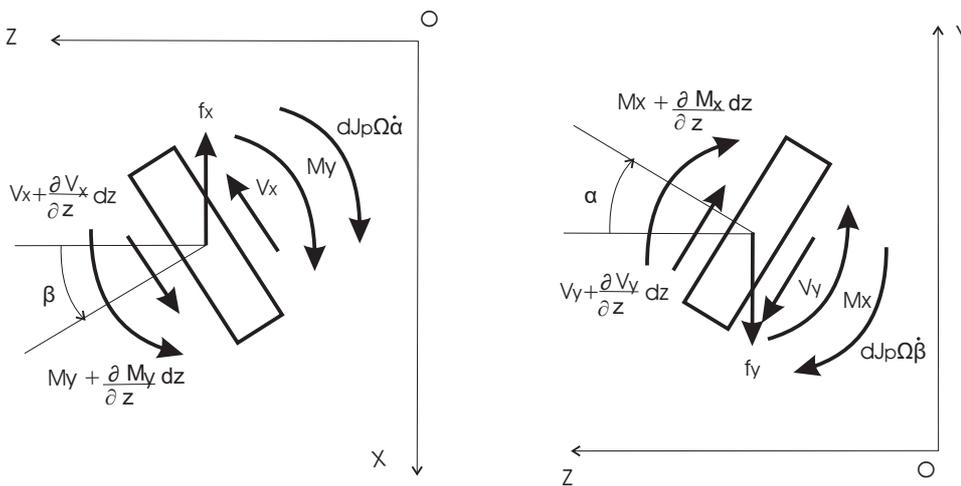


Figura 4.2: Condição de equilíbrio de um elemento infinitesimal

A condição de equilíbrio dinâmico nas direções  $X$  e  $Y$  nos dá

$$\begin{aligned} -V_x + \left( V_x + \frac{\partial V_x}{\partial z} dz \right) - \rho A \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dz - c \frac{\partial x}{\partial t} dz - f_x &= 0 \\ -V_y + \left( V_y + \frac{\partial V_y}{\partial z} dz \right) - \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dz - c \frac{\partial y}{\partial t} dz - f_y &= 0 \end{aligned} \quad (4-2)$$

onde,

$V_x$  e  $V_y$  - esforço cortante nas direções  $X$  e  $Y$ , respectivamente

$f_x$  e  $f_y$  - forças externas nas direções  $X$  e  $Y$ , respectivamente

$A$  - área da seção transversal do eixo

$\rho$  - densidade do material

$\bar{c}$  - coeficiente de amortecimento por unidade de comprimento

Simplificando, temos

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} = \rho A \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \bar{c} \frac{\partial x}{\partial t} + f_x ; \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \bar{c} \frac{\partial y}{\partial t} + f_y \quad (4-3)$$

Da condição de equilíbrio do momento, obtém-se, desprezando as forças oriundas da aceleração angular

$$\begin{aligned} -M_y + \left( M_y + \frac{\partial M_y}{\partial z} dz \right) + V_x dz - dJ_p \Omega \dot{\alpha} &= 0 \\ M_x - \left( M_x + \frac{\partial M_x}{\partial z} dz \right) - V_y dz + dJ_p \Omega \dot{\beta} &= 0 \end{aligned} \quad (4-4)$$

onde  $dJ_p \Omega \dot{\alpha}$  e  $dJ_p \Omega \dot{\beta}$  são os momentos giroscópicos

Lembrando que

$$\begin{aligned} M_x &= EI \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} ; & M_y &= EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \\ \dot{\alpha} &= -\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} ; & \dot{\beta} &= \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial t} \end{aligned} \quad (4-5)$$

onde

$I$  - momento de inércia de área.

$dJ_p = \rho A dz R^2/4$  é o momento de inércia polar de massa do elemento

Substituindo 4-5 em 4-4, obtém-se

$$V_x = -EI \frac{\partial^3 y}{\partial z^3} - \bar{J}_p \Omega \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} = 0$$

$$V_y = -\frac{\partial^3 x}{\partial z^3} + \bar{J}_p \Omega \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial t} = 0$$
(4-6)

onde  $\bar{J}_p = \rho A R^2 / 4$  é o momento de inércia por unidade de comprimento

Substituindo 4-6 em 4-3, obtém-se

$$\frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + \rho A \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \bar{J}_p \Omega \frac{\partial^3 y}{\partial z^2 \partial t} + \bar{c} \frac{\partial x}{\partial t} - f_x = 0$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \bar{J}_p \Omega \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t} + \bar{c} \frac{\partial y}{\partial t} - f_y = 0$$
(4-7)

Considerando somente a direção  $X$ , uma vez que o procedimento para a solução em  $Y$  é o mesmo, multiplicaremos 4-7 pela função do modo  $\phi_j$  e integraremos de 0 a  $l$ . Tal função é uma aproximação da autofunção exata que, na maioria dos casos não é possível ser determinada analiticamente pelo método da separação das variáveis. Essas funções são conhecidas, também, como funções teste e são escolhidas de forma que, pelo menos, satisfaçam às condições de contorno geométricas e sejam diferenciáveis duas vezes. Assim,

$$EI \int_0^l \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} \phi_j dz + \rho A \int_0^l \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \phi_j dz + \bar{J}_p \Omega \int_0^l \frac{\partial^3 y}{\partial z^2 \partial t} \phi_j dz + \bar{c} \int_0^l \frac{\partial x}{\partial t} \phi_j dz$$

$$= \int_0^l f \phi_j dz$$
(4-8)

Integrando por partes ( $\int u dv = uv - \int v du$ ) o primeiro termo de 4-8, temos

$$\int_0^l \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} \phi_j dz = \phi_j \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} \Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} \phi_j' dz$$

Integrando por partes novamente,

$$\int_0^l \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} \phi_j' dz = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \phi_j'' \Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \phi_j'' dz$$

A equação 4-8 fica, então

$$EI \int_0^l \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \phi_j'' + \boxed{EI \phi_j \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} \Big|_0^l} - \boxed{EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \phi_j' \Big|_0^l} + \rho A \int_0^l \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \phi_j dz$$

$$+ \bar{J}_p \Omega \int_0^l \frac{\partial^3 y}{\partial z^2 \partial t} \phi_j dz + c \int_0^l \frac{\partial x}{\partial t} \phi_j dz = \int_0^l f \phi_j dz \quad (4-9)$$

As condições de contorno são incorporadas na equação através dos termos em destaque.

Para gerar um modelo de equações diferenciais aproximadas com  $N$  graus de liberdade por direção, os deslocamentos do sistema contínuo serão expandidos como uma combinação linear de  $N$  funções de modo  $\phi$  linearmente independentes. Assim, tem-se

$$x(z, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \phi_i(z); \quad y(z, t) = \sum_{i=1}^N b_i(t) \phi_i(z) \quad (4-10)$$

onde  $a_i$  e  $b_i$  são as coordenadas generalizadas dependentes do tempo, a serem determinados.

O que está se dizendo aqui é que cada modo contribuirá para a resposta global e o tamanho desta contribuição será controlado por cada  $a_i$  e  $b_i$ .

Substituindo 4-10 em 4-9, obtém-se, nas direções  $X$  e  $Y$ ,

$$\ddot{\mathbf{a}}_i(\mathbf{t}) \rho A \int_0^l \phi_i(z) \phi_j(z) dz + \dot{\mathbf{a}}_i(\mathbf{t}) \bar{c} \int_0^l \phi_i(z) \phi_j(z) dz + \dot{\mathbf{b}}_i(\mathbf{t}) \bar{J}_p \Omega \int_0^l \phi_i''(z) \phi_j dz$$

$$+ \mathbf{a}_i(\mathbf{t}) EA \int_0^l \phi_i''(z) \phi_j''(z) dz = \int_0^l f(z, t) \phi_j(z) dz$$

$$\ddot{\mathbf{b}}_i(\mathbf{t}) \rho A \int_0^l \phi_i(z) \phi_j(z) dz + \dot{\mathbf{b}}_i(\mathbf{t}) \bar{c} \int_0^l \phi_i(z) \phi_j(z) dz - \dot{\mathbf{a}}_i(\mathbf{t}) \bar{J}_p \Omega \int_0^l \phi_i''(z) \phi_j dz$$

$$+ \mathbf{b}_i(\mathbf{t}) EA \int_0^l \phi_i''(z) \phi_j''(z) dz = \int_0^l f(z, t) \phi_j(z) dz \quad (4-11)$$

ou

$$[M_x]_{ij} \ddot{\mathbf{a}}_i(\mathbf{t}) + [C_x]_{ij} \dot{\mathbf{a}}_i(\mathbf{t}) + [G_x]_{ij} \dot{\mathbf{b}}_i(\mathbf{t}) + [K_x]_{ij} \mathbf{a}_i(\mathbf{t}) = F_x(\phi_j)$$

$$[M_y]_{ij} \ddot{\mathbf{b}}_i(\mathbf{t}) + [C_y]_{ij} \dot{\mathbf{b}}_i(\mathbf{t}) - [G_y]_{ij} \dot{\mathbf{a}}_i(\mathbf{t}) + [K_y]_{ij} \mathbf{b}_i(\mathbf{t}) = F_y(\phi_j) \quad (4-12)$$

onde

$$\begin{aligned}
 [M_x]_{ij} &= \rho A \int_0^l \phi_j(z) \phi_i(z) dz, & [M_y]_{ij} &= \rho A \int_0^l \phi_j(z) \phi_i(z) dz \\
 [K_x]_{ij} &= EA \int_0^l \phi_j''(z) \phi_i''(z) dz, & [K_y]_{ij} &= EA \int_0^l \phi_j''(z) \phi_i''(z) dz \\
 [C_x]_{ij} &= \bar{c} \int_0^l \phi_j(z) \phi_i(z) dz, & [C_y]_{ij} &= \bar{c} \int_0^l \phi_j(z) \phi_i(z) dz \\
 [G_x]_{ij} &= \bar{J}_p \Omega \int_0^l \phi_j''(z) \phi_i(z) dz, & [G_y]_{ij} &= -\bar{J}_p \Omega \int_0^l \phi_j''(z) \phi_i(z) dz
 \end{aligned} \tag{4-13}$$

e

$$[F_x]_{j1} = \int_0^l f(z, t) \phi_j(z) dz, \quad [F_y]_{j1} = \int_0^l f(z, t) \phi_j(z) dz \tag{4-14}$$

Os dois conjuntos de equações matriciais 4-12 podem ser agrupados numa única equação matricial, como segue.

$$M\ddot{\mathbf{q}}(t) + (C + G)\dot{\mathbf{q}}(t) + K\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}(t)$$

onde

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{bmatrix} M_x & 0 \\ 0 & M_y \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} C_x & 0 \\ 0 & C_y \end{bmatrix} \\
 G &= \begin{bmatrix} 0 & G_x \\ -G_y & 0 \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix} \\
 Q &= \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}; \quad q(t) = \begin{bmatrix} a_i(t) \\ b_i(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4-15}$$

sendo  $M$ ,  $C$ ,  $G$  e  $K$  de dimensão  $2N$  e  $Q$  e  $q(t)$ ,  $2N \times 1$ .

### 4.3

#### O Método dos Elementos Finitos

O método dos elementos finitos é uma poderosa técnica que usa métodos variacionais e de interpolação para modelar e resolver problemas de condições de contorno em sistemas contínuos.

O método consiste da discretização da estrutura, ou seja, divisão em pequenos subdomínios, chamados elementos finitos. Cada elemento possui extremidades chamadas nós, que conectam-se ao elemento seguinte. O elemento pode conter nós em seu interior, a depender da função de aproximação escolhida. A equação de movimento para cada elemento é então determinada e resolvida. As soluções das equações dos elementos são aproximação por uma combinação linear de polinômios de baixa ordem. Cada uma das soluções polinomiais individuais são compatibilizadas com a solução adjacente, chamada condição de continuidade, nos nós comuns a dois elementos. Estas soluções são, então, reunidas através de um procedimento, resultando em matrizes globais de massa, rigidez, amortecimento e giroscópica, que descrevem a estrutura como um todo. O vetor de deslocamentos associados com a solução global do modelo de elementos finitos descreve o movimento.

As coordenadas usadas no modelo de elementos finitos, ilustrado na figura 4.3 são as duas coordenadas lineares  $x_1(t)$  e  $x_3(t)$  e duas coordenadas angulares  $x_2(t) = \beta_1$  e  $x_4(t) = \beta_2$ , necessárias para descrever o movimento de cada nó, ou seja, cada nó possui dois graus de liberdade. O deslocamento estático transversal deve satisfazer

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ EI \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (4-16)$$

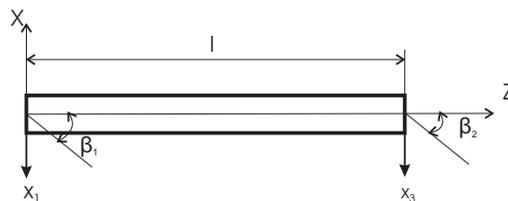


Figura 4.3: Elemento finito simples em flexão

Para valores constantes de  $EI$ , 4-16 torna-se  $\frac{\partial^4 x}{\partial z^4} = 0$ , que, integrando, leva a

$$x(z, t) = c_1(t)z^3 + c_2(t)z^2 + c_3(t)z + c_4(t) \quad (4-17)$$

onde  $c_i(t)$  são as constantes de integração. A equação 4-17 é usada para interpolar os deslocamentos dentro do elemento.

Os deslocamentos desconhecidos  $x_i(t)$  devem satisfazer às condições de contorno

$$\begin{aligned} x(0, t) &= x_1(t) & x'(0, t) &= x_3(t) \\ x(l, t) &= x_1(t) & x'(l, t) &= x_4(t) \end{aligned} \quad (4-18)$$

Estas relações são substituídas em 4-17 e resolvidas para as constantes de integração  $c_i$ , levando a

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \frac{1}{l^3}[2(x_1 - x_3) + l(x_2 + x_4)] \\ c_2(t) &= \frac{1}{l^2}[2(x_3 - x_1) - l(2x_2 + x_4)] \\ c_3(t) &= x_2(t) \quad c_4(t) = x_1(t) \end{aligned} \quad (4-19)$$

Substituindo 4-19 em 4-17, e rearranjando os termos como coeficientes de deslocamentos nodais desconhecidos, leva ao resultado aproximado do deslocamento  $x(z, t)$  para o elemento, expresso por

$$\begin{aligned} x(z, t) &= \left(1 - 3\frac{z^2}{l^2} + 2\frac{z^3}{l^3}\right) x_1(t) + l \left(\frac{z}{l} - 2\frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3}\right) z_2(t) \\ &+ \left(3\frac{z^2}{l^2} - 2\frac{z^3}{l^3}\right) z_3(t) + l \left(-\frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3}\right) z_4(t) \end{aligned} \quad (4-20)$$

Os polinômios entre parênteses são as funções aproximadas  $\phi_i$  dos modos de vibrar que serão usadas para o cálculo das matrizes de massa, rigidez e amortecimento da equação 4-14. Então,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \left(1 - 3\frac{z^2}{l^2} + 2\frac{z^3}{l^3}\right) ; \quad \phi_2 = l \left(\frac{z}{l} - 2\frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3}\right) \\ \phi_3 &= \left(3\frac{z^2}{l^2} - 2\frac{z^3}{l^3}\right) ; \quad \phi_4 = l \left(-\frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3}\right) \end{aligned} \quad (4-21)$$

Assim, substituindo 4-21 em 4-13, temos

$$M_x = \rho A \begin{bmatrix} \int_{z_1}^{z_2} \phi_1 \phi_1 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_2 \phi_1 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_3 \phi_1 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_4 \phi_1 dz \\ \int_{z_1}^{z_2} \phi_1 \phi_2 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_2 \phi_2 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_3 \phi_2 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_4 \phi_2 dz \\ \int_{z_1}^{z_2} \phi_1 \phi_3 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_2 \phi_3 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_3 \phi_3 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_4 \phi_3 dz \\ \int_{z_1}^{z_2} \phi_1 \phi_4 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_2 \phi_4 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_3 \phi_4 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_4 \phi_4 dz \end{bmatrix} \quad (4-22)$$

$$K_x = EI \begin{bmatrix} \int_{z_1}^{z_2} \phi_1'' \phi_1'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_2'' \phi_1'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_3'' \phi_1'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_4'' \phi_1'' dz \\ \int_{z_1}^{z_2} \phi_1'' \phi_2'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_2'' \phi_2'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_3'' \phi_2'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_4'' \phi_2'' dz \\ \int_{z_1}^{z_2} \phi_1'' \phi_3'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_2'' \phi_3'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_3'' \phi_3'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_4'' \phi_3'' dz \\ \int_{z_1}^{z_2} \phi_1'' \phi_4'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_2'' \phi_4'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_3'' \phi_4'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_4'' \phi_4'' dz \end{bmatrix} \quad (4-23)$$



$$K = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & & & & & & & & \\ 0 & 12 & & & & & \text{sim} & & \\ 0 & -6l & 4l^2 & & & & & & \\ 6l & 0 & 0 & 4l^2 & & & & & \\ -12 & 0 & 0 & -6l & 12 & & & & \\ 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 6l & & & \\ 0 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 6l & 4l^2 & & \\ 6l & 0 & 0 & 2l^2 & -6l & 0 & 0 & 4l^2 & \end{bmatrix} \quad (4-30)$$

$$C = \frac{c}{420l} \begin{bmatrix} 156 & & & & & & & & \\ 0 & 156 & & & & & \text{sim} & & \\ 0 & 22l & 4l^2 & & & & & & \\ 22l & 0 & 0 & 4l^2 & & & & & \\ 54 & 0 & 0 & 13l & 156 & & & & \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 0 & 156 & & & \\ 0 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 & 22l & 4l^2 & & \\ -13l & 0 & 0 & -3l^2 & -22l & 0 & 0 & 4l^2 & \end{bmatrix} \quad (4-31)$$

$$G = \frac{\Omega J_p}{30l^2} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ 36 & 0 & & & & & \text{anti sim} & & \\ -3l & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & -3l & 4l^2 & 0 & & & & & \\ 0 & 36 & -3l & 0 & 0 & & & & \\ -36 & 0 & 0 & -3l & 36l & 0 & & & \\ -3l & 0 & 0 & l^2 & 3l & 0 & 0 & & \\ 0 & -3l & -l^2 & 0 & 0 & 3l & 4l^2 & 0 & \end{bmatrix} \quad (4-32)$$

com o correspondente vetor dos deslocamentos

$$q^T = [x_1 \ y_1 \ \beta_1 \ \alpha_1 \ x_2 \ y_2 \ \beta_2 \ \alpha_2] \quad (4-33)$$

O passo seguinte é a montagem das matrizes globais de massa, rigidez, amortecimento e giroscópica, que consiste em agregar apropriadamente os coeficientes das matrizes. Qualquer elemento  $k_{ij}$  da matriz global pode ser obtido adicionando-se os correspondentes coeficientes associados com aquelas coordenadas do nó. Assim, se por exemplo, considerarmos dois elementos finitos (figura 4.4), para obtermos o coeficiente de rigidez  $k_{55}$  da matriz global, é necessário adicionar os coeficientes de rigidez dos elementos **1** e **2** correspondentes ao nó 2. Estes coeficientes são designados por  $k_{55}^1$  e  $k_{11}^2$ , respectivamente, onde o sobrescrito identifica o elemento da viga

e o índice inferior localiza o coeficiente apropriado na matriz do elemento correspondente. A equação 4-34 ilustra o processo descrito, onde pode-se verificar que, onde houver superposição, as contribuições à matriz global  $[K]$  de dimensão  $12 \times 12$  são somadas.

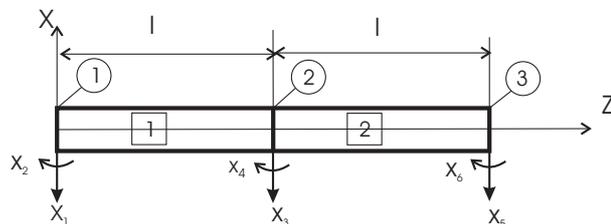


Figura 4.4: Viga com dois elementos finitos

$$K = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6l & -12 & 0 & 0 & 6l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6l & 0 & 0 & -12 & -6l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6l & 4l^2 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 0 & 0 & 4l^2 & -6l & 0 & 0 & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & -6l & 12+12 & 0 & 0 & -6l+6l & -12 & 0 & 0 & 6l \\ 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 12+12 & 6l-6l & 0 & 0 & -12 & -6l & 0 \\ 0 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 6l-6l & 4l^2+4l^2 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 0 \\ 6l & 0 & 0 & 2l^2 & -6l-6l & 0 & 0 & 4l^2+4l^2 & -6l & 0 & 0 & 2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & -6l & 12 & 0 & 0 & -6l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 12 & 6l & 4l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 6l & 4l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 0 & 0 & 2l^2 & -6l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4-34)$$

O mesmo procedimento é adotado para as demais matrizes.

### 4.3.1 Condições de contorno e carregamento

Como já foi abordado na seção 4-12, as condições de contorno estão incorporadas na equação 4-9 através dos termos em destaque. Assim, se considerarmos uma viga engastada em uma extremidade e livre na outra, estes termos são nulos, uma vez que  $\phi(0) = \phi'(0) = \phi''(l) = \phi'''(l) = 0$ . isto equivale a eliminar a primeira e segunda linhas e colunas das matrizes  $M$ ,  $K$ ,  $C$  e  $G$ , uma vez que  $x_1 = x_2 = 0$ .

Se considerarmos que a viga possui a extremidade apoiada em um elemento flexível com amortecimento, teremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x(0)}{\partial z^3} &= \frac{k}{EI} x(0) ; & \frac{\partial^3 x(l)}{\partial z^3} &= \frac{k}{EI} x(l) \\ \frac{\partial^3 x(0)}{\partial z^3} &= \frac{c}{EI} \frac{\partial x(0)}{\partial t} ; & \frac{\partial^3 x(l)}{\partial z^3} &= \frac{c}{EI} \frac{\partial x(l)}{\partial t} \end{aligned} \quad (4-35)$$

Assim, à matriz global  $K$  são adicionados os efeitos das propriedades concentradas nos nós das extremidades:

$$K_b = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}$$

Da mesma forma fazemos com a matriz de amortecimento

$$C_b = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}$$

As condições de contorno para o rotor apoiado em mancais hidrodinâmicos, incluindo rigidez e amortecimento cruzados, serão

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x(0)}{\partial z^3} &= \frac{1}{EI} \left[ k_{xx}x(0) + k_{xy}y(0) + c_{xx} \frac{\partial x(0)}{\partial t} + c_{xy} \frac{\partial y(0)}{\partial t} \right] \\ \frac{\partial^3 x(l)}{\partial z^3} &= \frac{1}{EI} \left[ k_{xx}x(l) + k_{xy}y(l) + c_{xx} \frac{\partial x(l)}{\partial t} + c_{xy} \frac{\partial y(l)}{\partial t} \right] \\ \frac{\partial^3 y(0)}{\partial z^3} &= \frac{1}{EI} \left[ k_{yy}y(0) + k_{yx}x(0) + c_{yy} \frac{\partial y(0)}{\partial t} + c_{yx} \frac{\partial x(0)}{\partial t} \right] \\ \frac{\partial^3 y(l)}{\partial z^3} &= \frac{1}{EI} \left[ k_{yy}y(l) + k_{yx}x(l) + c_{yy} \frac{\partial y(l)}{\partial t} + c_{yx} \frac{\partial x(l)}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (4-36)$$

onde os coeficientes de rigidez  $k$  e amortecimento  $c$ , principais e cruzados, foram definidos na seção 3.4.2

Assim, às matrizes de rigidez e amortecimento correspondentes ao primeiro e último elementos são adicionadas as matrizes

$$K_b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{yx} & k_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{xx} & k_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{yx} & k_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-37)$$

$$C_b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{yx} & c_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{xx} & c_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{yx} & c_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-38)$$

Os carregamentos são considerados no vetor de forças externas  $F$ . Assim, se uma força vertical  $wf(t)$  for aplicada no nó 2 (figura 4.4) com deslocamento  $x_3$ , o vetor  $F$  ficará

$$[F^1]^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad wf(t) \quad 0 \quad 0] \quad (4-39)$$

Se for aplicado um carregamento distribuído  $\bar{w}f(t)$ , onde  $\bar{w}$  é a carga unitária, o vetor  $F$  é encontrado aplicando-se a equação 4-14. Assim,

$$F = pf(t) \begin{Bmatrix} \int_0^l \left( 1 - 3\frac{z^2}{l^2} + 2\frac{z^3}{l^3} \right) dz \\ \int_0^l l \left( \frac{z}{l} - 2\frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3} \right) dz \\ \int_0^l \left( 3\frac{z^2}{l^2} - 2\frac{z^3}{l^3} \right) dz \\ \int_0^l l \left( -\frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3} \right) dz \end{Bmatrix} = pf(t) \begin{Bmatrix} l \\ l^2/2 \\ l^3/3 \\ l^4/4 \end{Bmatrix} \quad (4-40)$$

Assim, montadas as matrizes globais, teremos a equação diferencial

$$M\ddot{q} + (C + G)\dot{q} + Kq = Q \quad (4-41)$$

onde  $M$ ,  $C$ ,  $G$  e  $K$  são matrizes de dimensão  $n = 8p - 4$  e  $Q$ ,  $n \times 1$ , sendo  $p$  o número de elementos finitos em que foi dividido o rotor. Para  $p = 1$ ,  $n=8$ . A escolha de  $p$  depende do grau de precisão requerido para o problema.

#### 4.4

#### Solução da Equação de Movimento

Conforme o que foi visto na seção 4.3, as direções  $X$  e  $Y$  são acopladas pelas matrizes de rigidez e amortecimento através das condições de contorno, bem como pela matriz giroscópica. Além disso, estas matrizes assimetrizam

a matriz global. Portanto, o problema não pode ser resolvido pela análise modal clássica .

Faz-se necessário, então, analisar o sistema homogêneo em seu espaço de estado [14]

$$\dot{u}(t) = Au(t) + BQ(t) \quad (4-42)$$

onde

$$u(t) = [q^T(t) \quad \dot{q}^T(t)]^T$$

é um vetor de estado de dimensão  $2n \times 1$  e

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -M^{-1}K & -M^{-1}(C + G) \end{array} \right] \quad B = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ M^{-1} \end{array} \right] \quad (4-43)$$

onde  $A$  é a matriz não simétrica de dimensão  $2n$  e  $B$ ,  $2n \times n$ .

A solução da parte homogênea de 4-42 tem a forma

$$u(t) = e^{\lambda t}u \quad (4-44)$$

onde  $\lambda$  é uma constante escalar e  $u$  um vetor constante de dimensão  $2n$ . Substituindo 4-44 em 4-42, obtemos o problema de autovalor generalizado

$$Au = \lambda u \quad (4-45)$$

A equação 4-45 admite soluções na forma de autovalores  $\lambda_i$  e correspondentes autovetores  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n$ ) que satisfazem às equações

$$Au_i = \lambda_i u_i, \quad j = 1, 2, \dots, 2n \quad (4-46)$$

Para que esta base de autovetores sirva para diagonalizar a matriz  $A$ , é necessário que eles sejam ortogonais entre si e em relação a  $A$ . Entretanto, como  $A$  não é simétrica, não existe esta relação de ortogonalidade.

Lembrando que  $\det(A^T) = \det(A)$ , podemos concluir que

$$\det(A - \lambda I)^T = \det(A^T - \lambda I)$$

donde concluímos que  $A$  e  $A^T$  possuem os mesmos autovalores. Assim, podemos escrever o problema de autovalor associado com  $A^T$  na forma

$$A^T v = \lambda v \quad (4-47)$$

O problema de autovalor para  $A^T$  admite soluções na forma de autovalores  $\lambda_j$  e autovetores  $v_j$  que satisfazem às equações

$$A^T v_i = \lambda_i v_i, \quad j = 1, 2, \dots, 2n \quad (4-48)$$

Transpondo 4-47, obtém-se

$$v_j^T A = \lambda_j v_j^T \quad (4-49)$$

Em função da posição em relação à matriz  $A$ , os autovetores  $v_j$  são conhecidos como autovetores à esquerda de  $A$  e os autovetores  $u_i$  são conhecidos como autovetores à direita de  $A$ .

Em seguida, premultiplicamos a equação 4-46 por  $v_j^T$ , posmultiplicamos a equação 4-49 por  $u_i$  e subtraímos o segundo resultado do primeiro para obter

$$(\lambda_i - \lambda_j) v_j^T u_i = 0 \quad (4-50)$$

Entretanto, como todos autovalores são distintos, temos

$$v_j^T u_i = 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad (4-51)$$

A equação 4-51 diz que os autovetores à esquerda e os autovetores à direita de uma matriz real não simétrica de diferentes autovalores são ortogonais. Diz-se que os dois conjuntos de autovetores são biortogonais.

Em seguida, pré multiplicamos a equação 4-46 por  $v_j^T$  e substituímos 4-51, obtendo

$$v_j^T A u_i = 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad (4-52)$$

de modo que os autovetores à direita e à esquerda são biortogonais em relação à matriz  $A$ . Esses pares de autovetores podem ser normalizados fazendo-se  $v_j^T u_i = 1$ , satisfazendo às relações de biortonormalidade

$$v_j^T u_i = \delta_{ij} \quad (4-53)$$

$$\text{onde } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Além disso, premultiplicando 4-46 por  $v_j^T$  e substituindo 4-53, obtemos

$$v_j^T A u_i = \lambda_i \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 2n \quad (4-54)$$

Este desenvolvimento pode ser expresso em uma forma matricial compacta. Para este fim, introduziremos a matriz espectral

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_i) \quad (4-55)$$

bem como as matrizes dos autovetores à esquerda e à direita

$$V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{2n}], \quad U = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{2n}] \quad (4-56)$$

Assim, as relações de biortogonalidade 4-53 e 4-54 podem ser escritas

$$V^T U = I \quad (\text{a}) \quad V^T A U = \Lambda \quad (\text{b}) \quad (4-57)$$

$$V^T = U^{-1} \quad (4-58)$$

Substituindo 4-58 em 4-57 b, obtém-se

$$U^{-1} A U = \Lambda \quad (4-59)$$

Assim, assumindo que todos os autovalores são distintos, a matriz  $A$  pode ser diagonalizada por meio desta relação de semelhança.

Valendo-se desta transformação, consideraremos a solução da equação 4-42 a partir da seguinte transformação

$$q(t) = U \zeta(t) \quad (4-60)$$

onde  $\zeta(t)$  é o vetor das coordenadas modais

Substituindo 4-60 em 4-42, premultiplicando por  $V^T = U^{-1}$  e considerando as relações de biortogonalidade 4-57, obtém-se

$$\dot{\zeta}(t) = \Lambda \zeta(t) + Z(t) \quad (4-61)$$

onde  $Z(t) = V^T B Q(t)$  é o vetor força modal

A equação 4-62 representa um conjunto de  $2n$  equações independentes da forma

$$\dot{\zeta}_i(t) = \lambda_i \zeta_i(t) + Z_i(t) \quad (4-62)$$

e a solução é dada por

$$\zeta_i(t) = e^{\lambda_i t} \zeta_i(0) + \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} Z_i(\tau) d\tau \quad (4-63)$$

onde, premultiplicando 4-60 por  $V^T$  e fazendo  $t = 0$ , encontramos as coordenadas modais das condições iniciais. Assim,

$$\zeta_i(0) = V^T q(0) \quad (4-64)$$

Substituindo 4-63 e 4-64 em 4-60, encontra-se a solução nas coordenadas físicas

$$q(t) = U e^{\lambda_i t} V^T \zeta_i(0) + \int_0^t U e^{\Lambda_i(t-\tau)} V^T B Q(\tau) d\tau \quad (4-65)$$

Apesar de aparecerem unidades complexas em 4-65, somente a parte real é considerada, como demonstrado em seguida.

De 4-62 conclui-se que, para autovalores complexos conjugados aparecem pares de equações complexas conjugadas na forma

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_i(t) - \lambda_i \zeta_i(t) &= Z_i(t) \\ \dot{\bar{\zeta}}_i(t) - \bar{\lambda}_i \bar{\zeta}_i(t) &= \bar{Z}_i(t) \end{aligned} \quad (4-66)$$

onde a barra refere-se ao conjugado do vetor.

As soluções nas coordenadas modais dadas por 4-63 para autovalores complexos conjugados são complexas conjugadas entre si. Se considerarmos somente a contribuição do par modal dos complexos conjugados dada por 4-65 na transformação para as coordenadas físicas, tem-se

$$q(t) = v^T \zeta(t) + \bar{v}^T \bar{\zeta}(t) \quad (4-67)$$

podendo-se observar que a contribuição imaginária de  $v^T \zeta_i$  é cancelada pela contribuição imaginária de  $v^T \bar{\zeta}_i$  e que a parte real é igual. Assim, a equação 4-67 pode ser substituída por

$$q(t) = 2\text{Re}(v^T \zeta(t)) \quad (4-68)$$

onde  $Re$  significa a parte real do imaginário

## 4.5 Análise Rotodinâmica

A análise rotodinâmica de uma turbomáquina é composta de três partes: análise de velocidade crítica não amortecida, análise de resposta amortecida ao desbalanceamento e análise de estabilidade [1]. Estas análises serão conduzidas para o rotor objeto de estudo deste trabalho conforme critérios das normas de turbomáquinas do American Petroleum Institute

(API)[1]. A geometria do rotor será detalhada no capítulo seguinte, onde serão apresentados os dados experimentais.

Todos os diagramas das figuras 4.5, 4.6, 4.8, 4.10, 4.11, 4.12 e 4.13 são obtidos pelo programa ROMAC da University of Virginia. O programa faz a modelagem do rotor pelo Método dos Elementos Finitos, considerando os efeitos da inércia de rotação, cisalhamento e a ação giroscópica. A determinação das propriedades do mancal é feita através da solução numérica completa da Equação de Reynolds, considerando a variação da viscosidade no filme lubrificante.

#### 4.5.1

##### **Análise de Velocidade Crítica não Amortecida**

Como não leva em conta o amortecimento, bem como forças de desbalanceamento, a análise de velocidade crítica não amortecida serve como estimativa preliminar das velocidades críticas e características dos modos de vibrar.

As velocidades críticas, bem como seus modos associados são extremamente influenciados pela magnitude da rigidez do mancal, posição do mancal e da massa e rigidez do rotor. A análise de velocidade crítica é feita variando-se a rigidez principal do mancal para o modelo do rotor. A rigidez cruzada não é considerada na mapa de críticas. As velocidades críticas são, então, calculados para cada valor de rigidez. Deste modo, chega-se a curvas que representam o lugar geométrico das frequências naturais do rotor.

O resultado básico desta análise é o mapa de críticas, ilustrado na figura 4.5 que plota as quatro primeiras críticas como função da rigidez do mancal.

Uma importante relação que governa as características gerais do mapa de crítica é a relação entre a rigidez do eixo e a rigidez do mancal. Quando a rigidez do mancal é baixa em relação à rigidez do eixo, a rigidez do mancal governa a frequência natural e o eixo se moverá com pequena deflexão. Ao contrário, quando os mancais são muito mais rígidos que o eixo, as frequências naturais mais baixas serão governada pela rigidez do eixo. Sob esta condição, os mancais tornam-se um nó e uma alta deflexão do eixo ocorre em seu modo de vibrar.

O mapa de críticas resume estas relações. Se observarmos a primeira crítica, pode-se notar que existe uma região onde a inclinação da curva é praticamente constante. Esta região é chamada de seção rotor rígido do mapa de críticas porque a rigidez do eixo é maior que a rigidez do mancal.

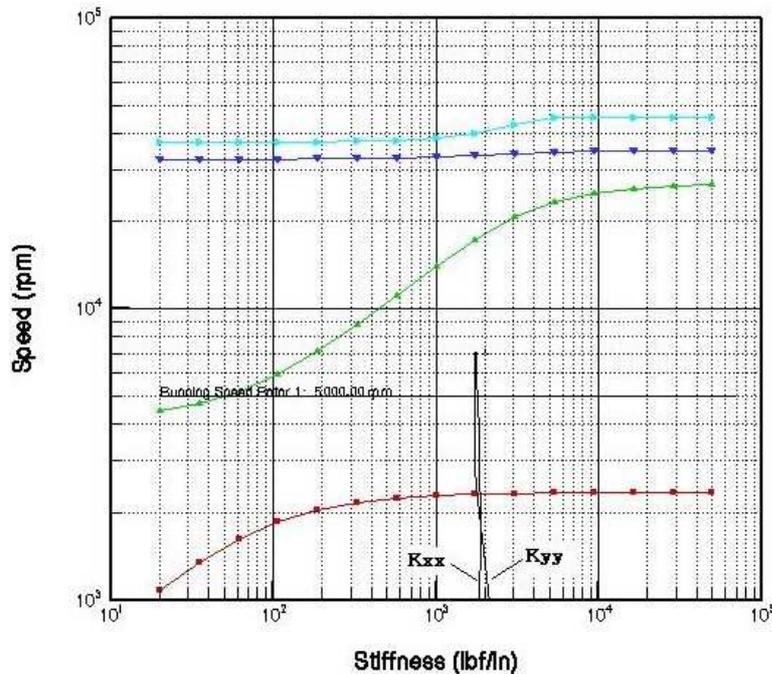


Figura 4.5: Mapa de críticas com dados da figura 4.6

No lado direito do mapa, a partir de 200 lb/in (35.316 N/m) de rigidez, a curva começa a tornar-se assintótica a uma velocidade de aproximadamente 2.400 *rpm*, o que significa que, a partir deste ponto, aumentar a rigidez do mancal não alterará a velocidade crítica. Esta região é chamada de seção mancal rígido porque a rigidez do eixo domina a dinâmica do sistema.

Com o mapa de crítica definido, o passo final é definir as características reais de rigidez do mancal  $k_{xx}$  e  $k_{yy}$ , mostrada na 4.6, como função da velocidade. A partir deste gráfico, pode-se notar que este mancal possui uma estreita margem de variação de 1.800 lb/in (313920 N/m) a 2.200 lb/in (385.533 N/m) e é aproximadamente isotrópico. Estes valores são plotados no mapa de críticas. As velocidades onde as curvas de rigidez do mancal interceptam o mapa de crítica, são potenciais velocidades críticas do sistema. Neste caso, a primeira velocidade crítica está em torno de 2400 *rpm*.

A partir das curvas de rigidez no mapa de críticas, pode-se inferir a característica geral da resposta amortecida ao desbalanceamento. Se a curva de rigidez interceptar a seção rotor rígido, então o fator de amplificação  $AF$  será baixo (menor que 8), e a resposta ao desbalanceamento será bem amortecida. No nosso caso ocorrerá o contrário, pois a interseção ocorre na seção mancal rígido do mapa.

A relação entre o mapa de críticas e o resultado da análise de resposta ao desbalanceamento pode ser melhor entendida se os modos de vibrar não amortecidos forem examinados para os casos de mancal rígido e mancal

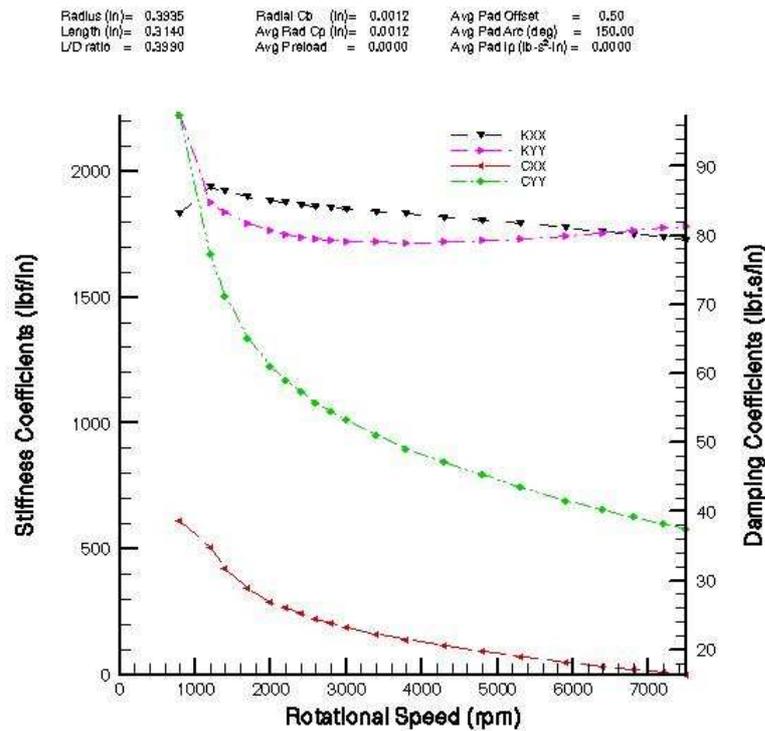


Figura 4.6: Propriedades do mancal

flexível conforme a figura 4.7. No caso dos mancais flexíveis, a deflexão do eixo é menor que a deflexão dos mancais. O amortecimento dos mancais será usado para atenuar as vibrações do rotor. Por outro lado, quando os mancais são mais rígidos que o eixo, mesmo se o amortecimento for alto, as forças de amortecimento serão pequenas porque o movimento do eixo no mancal é pequeno.

Os modos de vibrar não amortecidos são úteis pelas seguintes razões:

1. São planos ou bidimensionais, diferentemente das deflexões complexas tridimensionais que ocorrem no rotor devido à presença do amortecimento.
2. Dão uma indicação aproximada dos deslocamentos relativos do eixo quando o rotor opera na vizinhança da velocidade crítica associada.
3. Dão uma indicação da distribuição do desbalanceamento que será necessário para excitar a velocidade crítica associada. Esta informação é vital para determinar a localização do desbalanceamento na análise de resposta ao desbalanceamento. No nosso caso, pode-se concluir que a estação 8 (metade do disco) não é adequada para excitar o segundo modo, pois este ponto é um nó.

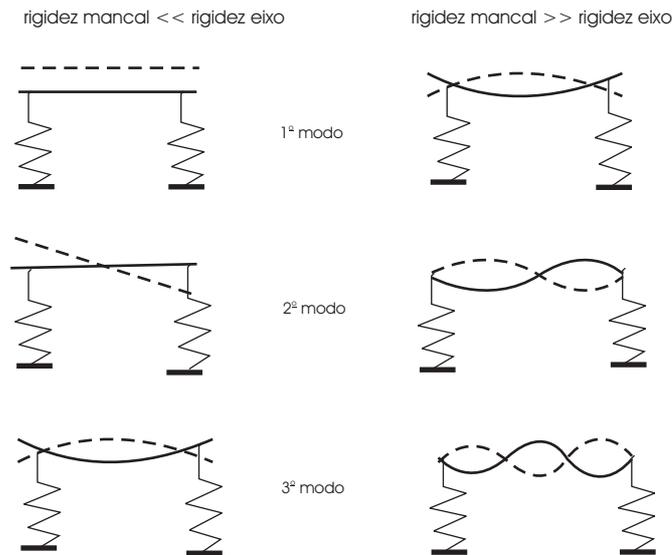


Figura 4.7: Modos de vibrar para mancal flexível e rígido

Os modos de vibrar do nosso rotor são mostrados na figura 4.8. Pode-se verificar que os modos 2, 3 e 4 são essencialmente giroscópicos.

#### 4.5.2

##### Análise de Resposta Amortecida ao Desbalanceamento

A análise de resposta amortecida nos dá a amplitude de vibração esperada. Seu objetivo é informar se a máquina atenderá aos requisitos de margem de separação e limites de vibração.

As normas do American Petroleum Institute (API) para turbomáquinas prescrevem a magnitude do desbalanceamento a ser aplicado na simulação, bem como sua localização. A deflexão máxima do eixo não deve exceder 75% da folga neste ponto.

O limite de vibração pico a pico em  $\mu m$  lido pelos sensores é dado pela relação

$$L_v = 25\sqrt{\frac{12.000}{N}} \quad \text{ou} \quad L_v = 250, \quad \text{o que for menor} \quad (4-69)$$

onde  $N$  é a máxima velocidade de operação contínua em  $rpm$ .

Este limite não deverá ser excedido, mesmo se o desbalanceamento aplicado for quatro vezes o residual  $u$ , dado pela relação

$$u = \frac{6350w}{N} \quad (4-70)$$

onde  $w$  é a carga estática total sustentada pelos mancais do rotor em  $Kg$ .

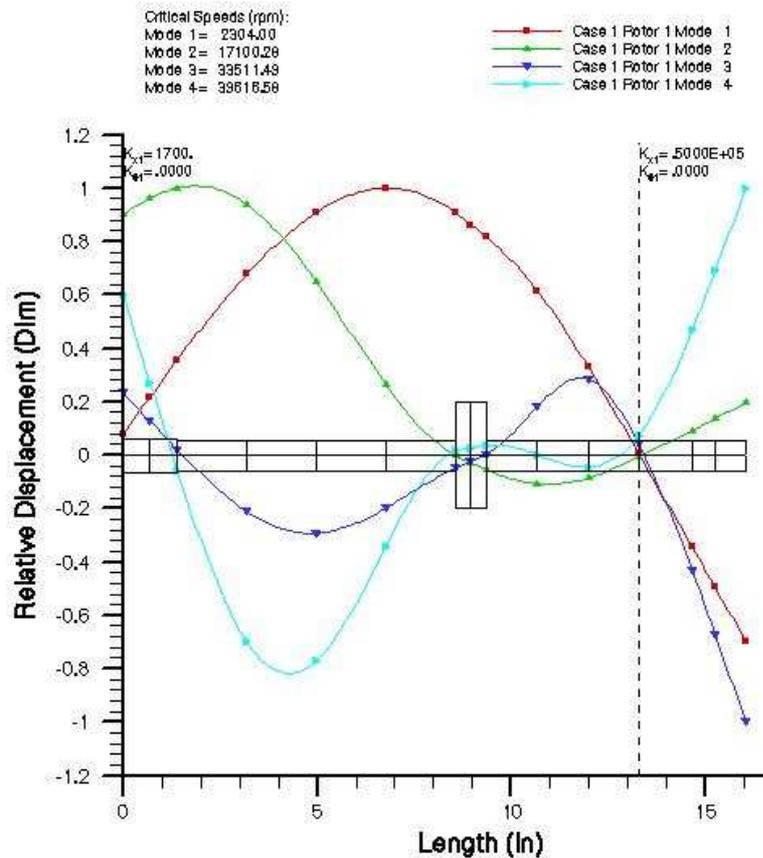


Figura 4.8: Modos de vibrar não amortecidos

O produto principal da análise de resposta ao desbalanceamento é o Diagrama de Bode contendo o fator de amplificação  $AF$  e a margem de separação  $SM$ . A margem de separação mede o quanto a velocidade de operação dista da velocidade crítica e é dada como um percentual da velocidade mínima de operação se a crítica estiver abaixo dela, ou da velocidade máxima, se acima. O fator de amplificação é uma medida indireta da quantidade do amortecimento disponível para atenuar o nível de vibração. Estes parâmetros estão ilustrados na figura 4.9 retirada da norma API para turbomáquinas [1].

O limite estabelecido para a margem de separação é dado pela expressão

$$SM = 17 \left( 1 - \frac{1}{AF-1,5} \right) \quad \text{ou} \quad SM = 16, \quad \text{o que for menor} \quad (4-71)$$

Fazendo a simulação, considerando a faixa de operação de 5.000  $rpm$  a 7.000  $rpm$  e aplicando  $u = 7,0$  g.mm, temos o diagrama de Bode na figura 4.10, onde podemos ver que  $AF = 13,7$  e  $SM = 52\%$ , maior que a requerida  $SM_R = 15\%$ . O alto  $AF$  encontrado confirma a análise de

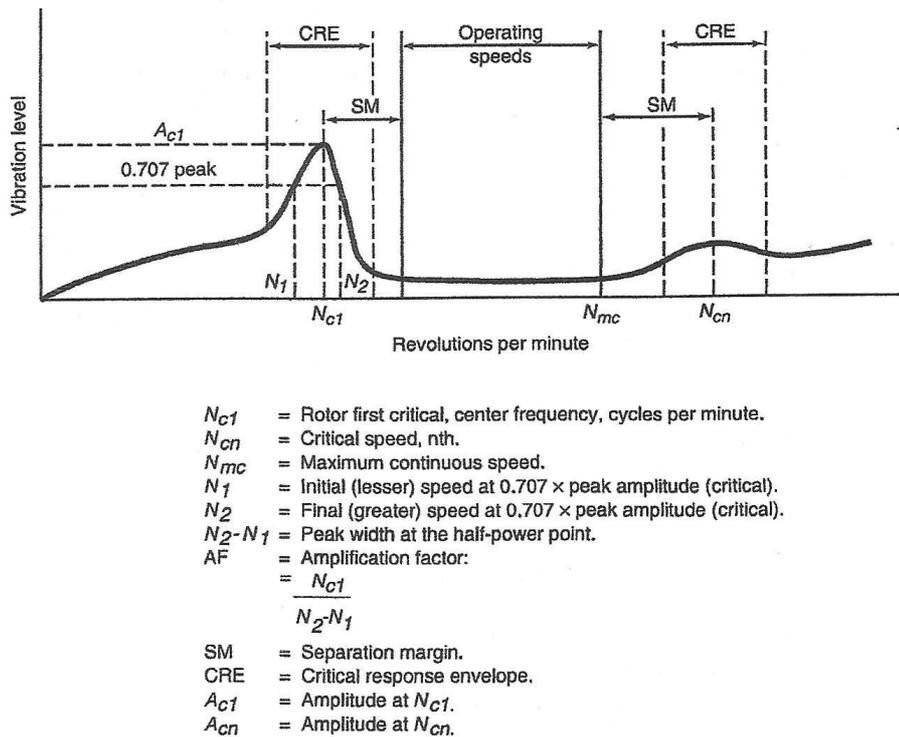


Figura 4.9: Fator de amplificação e margem de separação

velocidade crítica feita na seção 4.5.1, onde vimos que a curva de rigidez do mancal intercepta o mapa de crítica na seção mancal rígido.

Se compararmos o pico de vibração de 0,8 mils ( $20 \mu m$ ) zero a pico e compararmos com o limite  $L_v = 1,31(32 \mu m)$  pico a pico estabelecido por 4-69, concluímos que o limite de vibração foi ultrapassado.

Os modos de vibrar tridimensionais são mostrados nas figuras 4.11, 4.12 e 4.13 mostram a resposta ao desbalanceamento. Pode-se observar nestas figuras que a linha elástica do rotor não está contida num plano, o que ilustra o significado dos autovetores complexos de uma matriz não simétrica.

### 4.5.3

#### Análise de estabilidade

O anexo A contém a análise de estabilidade, onde podemos ver que a 4.800rpm o primeiro autovalor possui a parte real  $\sigma = 0,1765$ , positiva, correspondente ao fator exponencial. O respectivo decremento logarítmico é  $-0,01$ , o que indica que a esta rotação o rotor está sujeito à instabilidade.

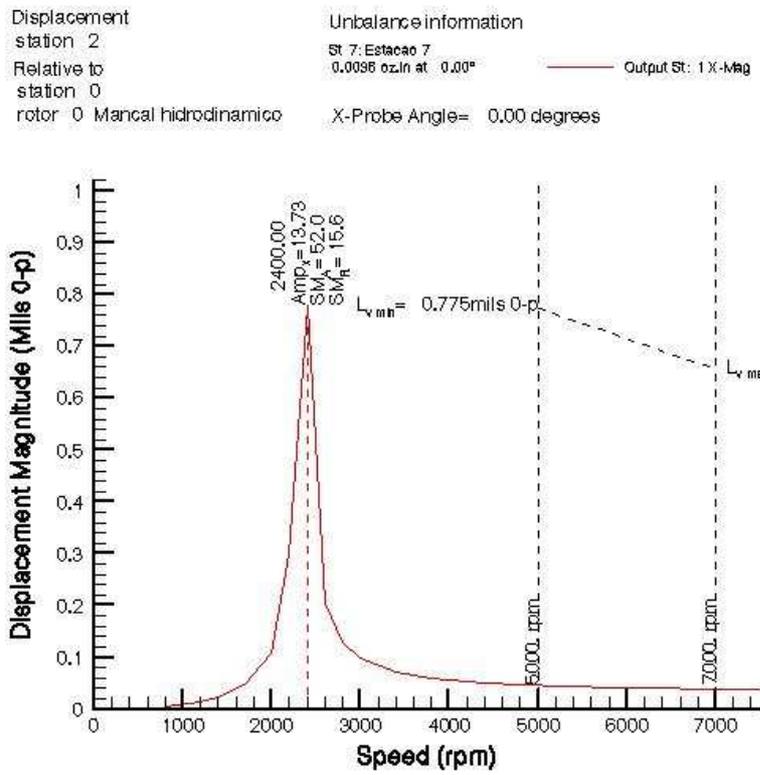


Figura 4.10: Diagrama de Bode

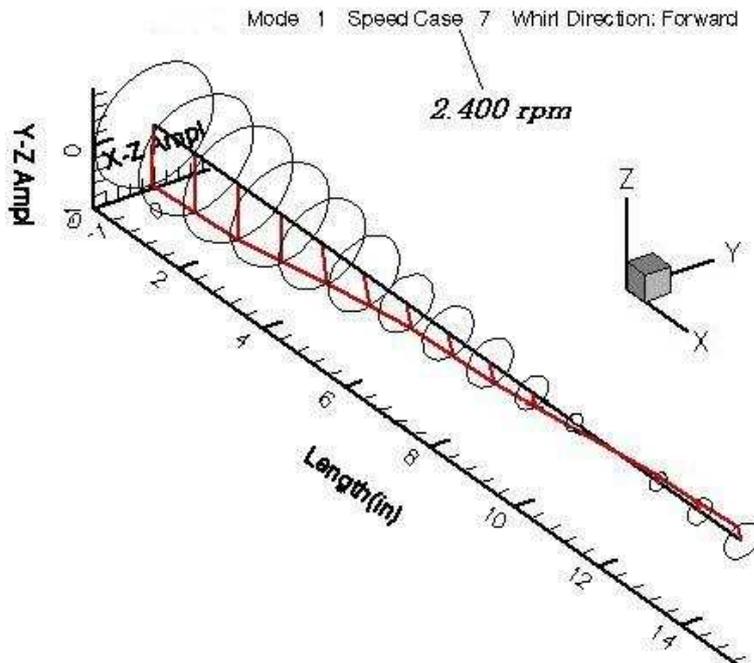


Figura 4.11: 1º modo e vibrar

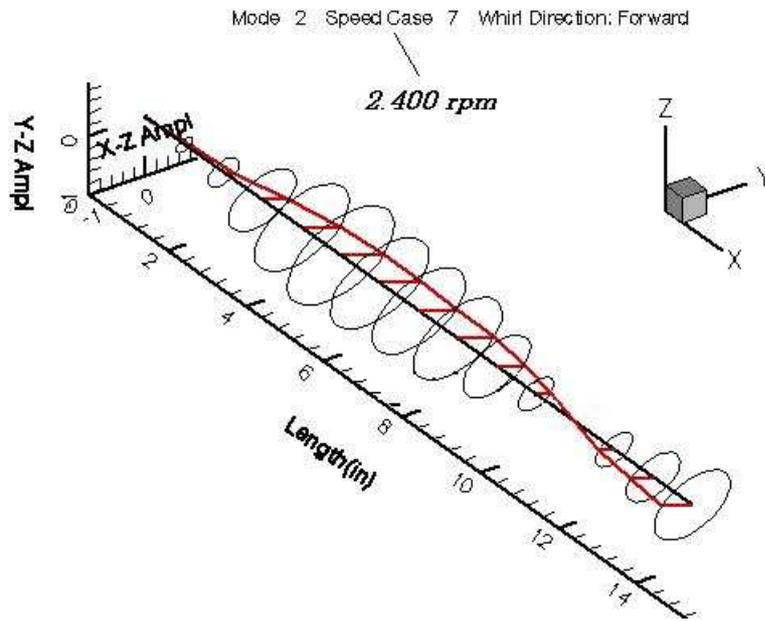


Figura 4.12: 2º modo de vibrar

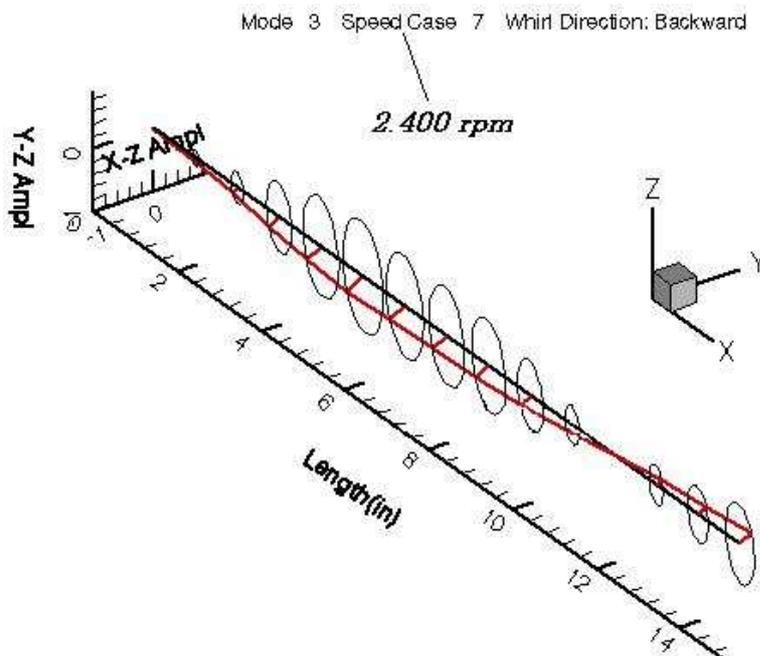


Figura 4.13: 3º modo de vibrar

## 5 Concepção e Projeto da Bancada

### 5.1 Introdução

O principal objetivo no projeto da bancada é simular o fenômeno da instabilidade em um rotor. O rotor foi desenvolvido a partir de um preexistente no Laboratório de Dinâmica e Vibrações do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-RIO. Foram feitas modificações a fim de introduzir um mancal hidrodinâmico que apresentasse instabilidade abaixo do limite de velocidade de  $7.500 \text{ rpm}$  permitido pelo motor elétrico e inversor de frequência. É feita uma descrição do rotor, instrumentação usada e apresentados resultados dos ensaios experimentais.

### 5.2 Descrição do Rotor

Após diversas simulações no programa ROMAC, variando-se parâmetros como diâmetro  $D$ , largura  $L$  e folga do mancal  $f$ , bem como peso  $w$  do disco, chegou-se à configuração final mostrada na figura 5.1. A fim de facilitar o escoramento axial do rotor, foi especificado mancal de rolamento em dos lados do rotor.

O acionamento do rotor é feito através de um motor trifásico ligado a um inversor de frequência.

O sistema hidráulico, cuja finalidade é fornecer óleo (ISO 32) para o mancal, está representado na figura 5.2. A bomba de deslocamento positivo do tipo engrenagem envia óleo do reservatório 1 à caixa do mancal 3 através de mangueiras de plástico flexíveis. A pressão de alimentação é ajustada através da válvula 4 de  $1/2''$  que controla a recirculação de óleo ao reservatório. A pressão de alimentação é ajustada em  $0,2 \text{ Kg/cm}^2$ , lida pelo manômetro 5. O óleo que circula pelo mancal é captado em um dreno

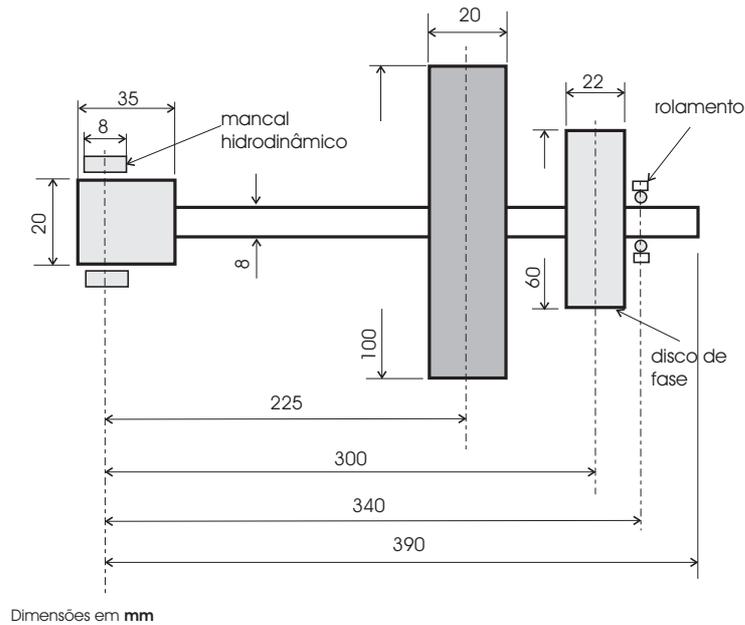


Figura 5.1: Rotor experimental conforme construído

na caixa de mancal e conduzido ao reservatório. O detalhamento do mancal pode ser visto no anexo C

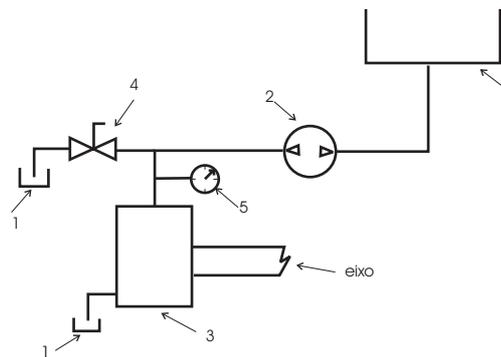


Figura 5.2: Sistema de lubrificação do mancal

A figura 5.3 mostra uma foto do rotor e o sistema de alimentação de óleo.

### 5.3

#### Analizador de Vibração

Os sinais de vibração são captados através de sensores de deslocamento marca Balluf, modelo 2000 e são dispostos a  $90^\circ$ . Um terceiro sensor oferece a referência para a determinação do sinal de fase através de uma ranhura no disco de fase. Estes sensores possuem uma faixa de trabalho em que a voltagem varia linearmente com a distância à superfície metálica que será

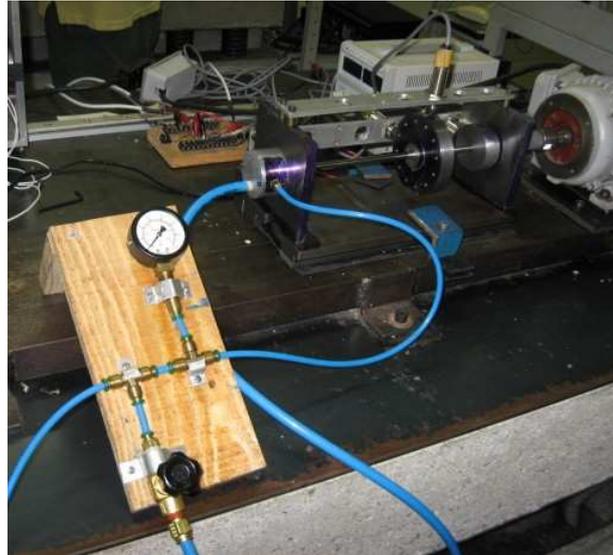


Figura 5.3: Sistema de lubrificação do mancal

objeto de medição. O ganho do sensor é  $1,61 \text{ volts/mm}$ , obtido da curva de calibração, obtida de trabalho anterior [26].

A aquisição dos sinais foi feita através de um analisador portátil ADRE para Windows e 208 DAIU da Bently Nevada, especialmente projetado para completo diagnóstico de máquinas rotativas, incorporando características e recursos de osciloscópio, analisador de espectro, filtro digital e gravador. A figura 5.4 mostra o aparelho.



Figura 5.4: Painel frontal do 208 DAIU

O 208 DAIU (Data Acquisition Interface Unit) é uma unidade de processamento de 8 canais que usa como interface um computador que controla a aquisição dos dados salvando-os em sua memória.

O ADRE (Automated Diagnostics for Rotating Equipment) é um controlador de aquisição de dados, que, durante e após a amostragem,

permanecem na memória RAM do computador até que sejam salvos para o disco rígido ou outro meio de armazenamento. O esquema do fluxo dos dados está ilustrado na figura 5.5.

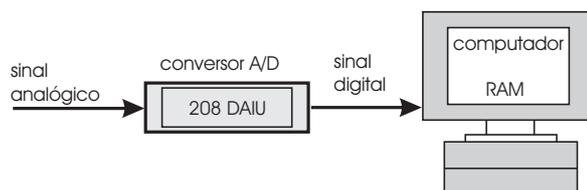


Figura 5.5: Fluxo de dados do analisador

## 5.4

### Resultados Experimentais

Foram realizados basicamente dois tipos de medição, a saber: uma durante o processo transiente no qual o rotor é acelerado do repouso a uma velocidade máxima de  $7600\text{ rpm}$ , e outra, em regime permanente, em diferentes rotações. O desbalanceamento presente no rotor refere-se ao residual.

O ensaio no regime transiente tem como objetivo obter o Diagrama de Bode, gerado a partir da medição do vetor de vibração, amplitude e fase, para cada velocidade no incremento configurado no analisador. O objetivo do diagrama é identificar as velocidades críticas do rotor. Na ressonância ocorre um pico da amplitude da vibração e a fase inverte em  $180^\circ$ . A figura 5.6 mostra o diagrama obtido, onde pode-se identificar que há um pico de vibração em  $2.520\text{ rpm}$  com a respectiva inversão de fase, donde se conclui que a primeira velocidade crítica é  $2.520\text{ rpm}$ . Pode-se observar que, após a inversão de fase, a leitura de fase sofre alteração não esperada. Isto deve-se a um erro de leitura do sinal de fase, fato que tende a ocorrer quando a amplitude da vibração é muito baixa, o que ocorre após a passagem pela crítica. Como o fator de amplificação é muito alto, foi necessário configurar o range de voltagem do analisador no máximo, pois em fatores menores, acontecia erro de sobreescala. Comparando-se com o Bode resultante da simulação numérica na figura 4.10, verifica-se que o erro da simulação está em torno de  $-4,8\%$ , que pode ser explicado, principalmente, por erro na leitura no processo transiente. Isto fica evidenciado pelo espectro coletado em regime permanente a  $2.512\text{ rpm}$  mostrado na figura 5.7. Se a crítica fosse  $2520\text{ rpm}$ , não seria possível coletar a medição a esta velocidade cuja amplitude de vibração é  $0,9\text{ mm}$ , menor que aquela medida no Diagrama

de Bode, 1,5 mm. Parte do erro pode, também, ser atribuído a erros de usinagem e montagem do rotor.

Se compararmos o valor encontrado para a velocidade crítica com o mapa de críticas (figura 4.5), podemos afirmar que ela encontra-se na região rotor flexível do mapa, ou seja, a dinâmica é governada pela flexibilidade do eixo.

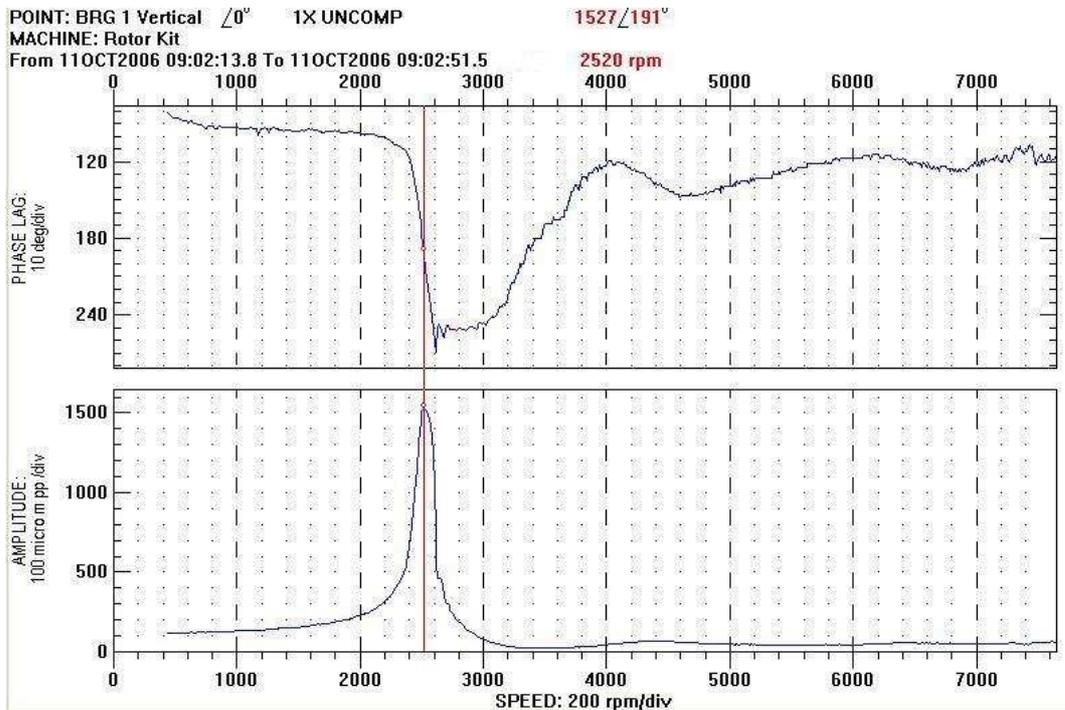


Figura 5.6: Diagrama de Bode obtido experimentalmente

No ensaio em regime permanente são obtidos o espectro de vibração, forma de onda e a órbita. Através do espectro são identificadas as frequências envolvidas na vibração do rotor. A órbita mostra como o disco desloca-se no plano de medição. A forma de onda refere-se ao deslocamento medido pelo sensor no domínio do tempo. Estes gráficos são bastante úteis no diagnóstico de falhas em turbomáquinas.

Estes gráficos foram plotados em diferentes velocidades. O primeiro gráfico apresentado na figura 5.7 mostra o espectro e a órbita em três velocidades diferentes na vizinhança da velocidade crítica.

No próximo grupo de gráficos identifica-se o início da instabilidade na figura 5.8. Pode-se verificar que em 4.661 rpm aparece uma frequência subsíncrona, 2.340 cpm, correspondente a 50% da velocidade de rotação, indicando o fenômeno do "oil whirl".

No terceiro conjunto de gráficos é possível identificar o fenômeno do "oil whip" em torno de 7000 rpm. Neste caso, a frequência subsíncrona é

constante em 2340 *cpm*, correspondente à frequência natural na velocidade correspondente, coincidindo com o valor obtido na simulação numérica de estabilidade, apresentada no anexo A.

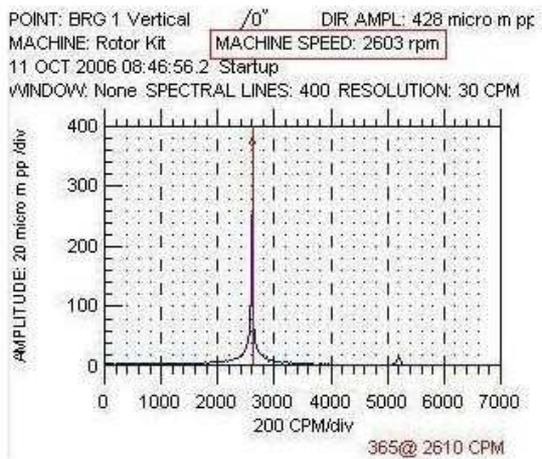
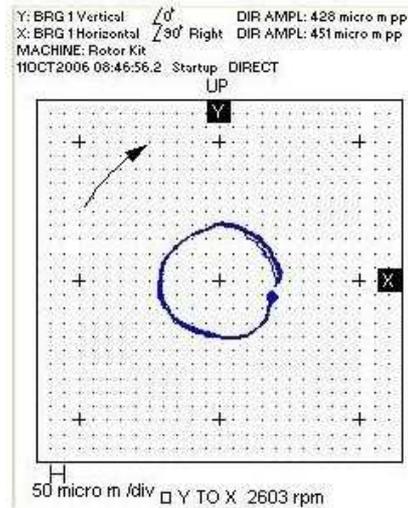
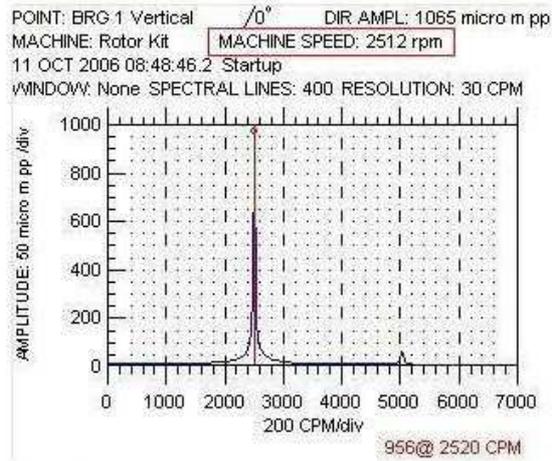
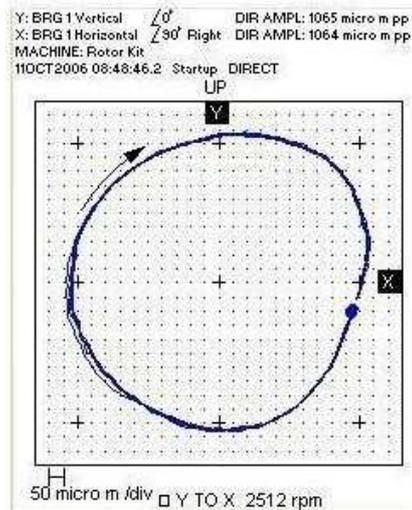
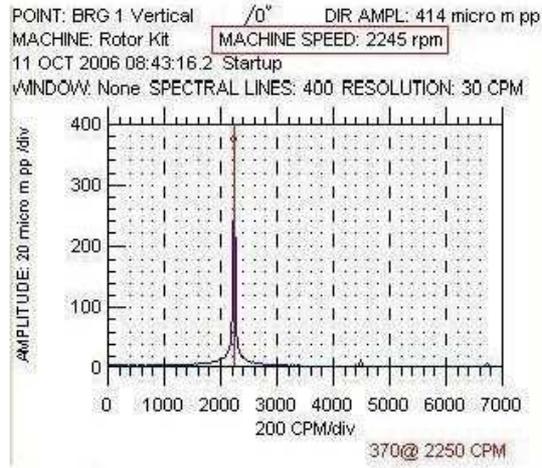
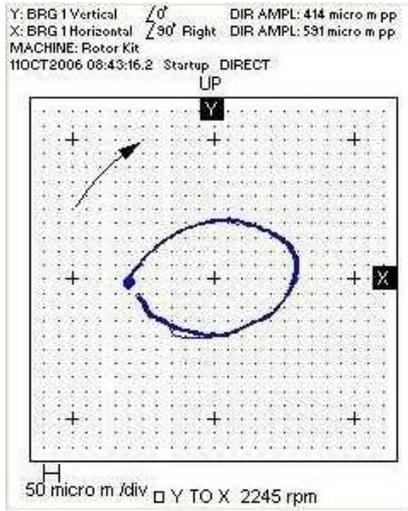


Figura 5.7: Espectro e órbita nas vizinhanças da velocidade crítica

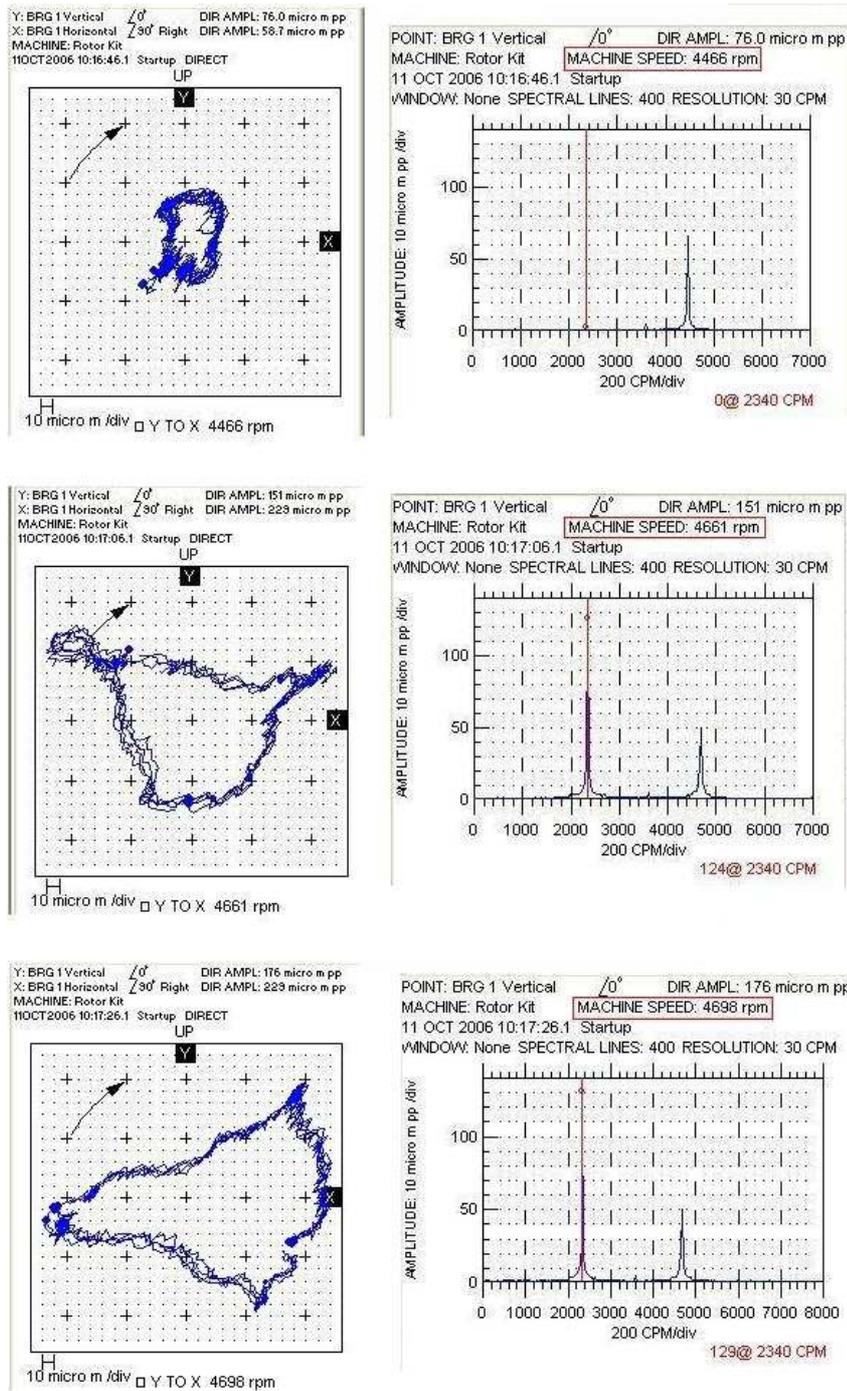


Figura 5.8: Fenômeno do oil whirl

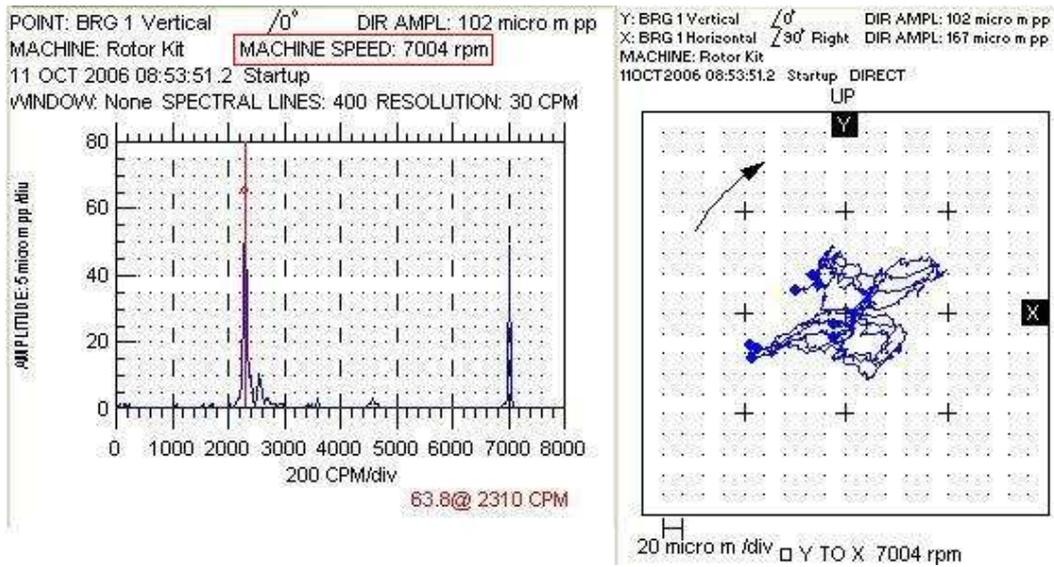


Figura 5.9: Fenômeno do oil whip

Os gráficos apresentados na figura 5.10 mostram a amplitude da vibração no domínio do tempo em três velocidades, sem filtro. Pode-se observar que a forma de onda altera-se substancialmente em 4.466 *rpm* e 7.004 *rpm* devido à presença da frequência subsíncrona correspondente à instabilidade.

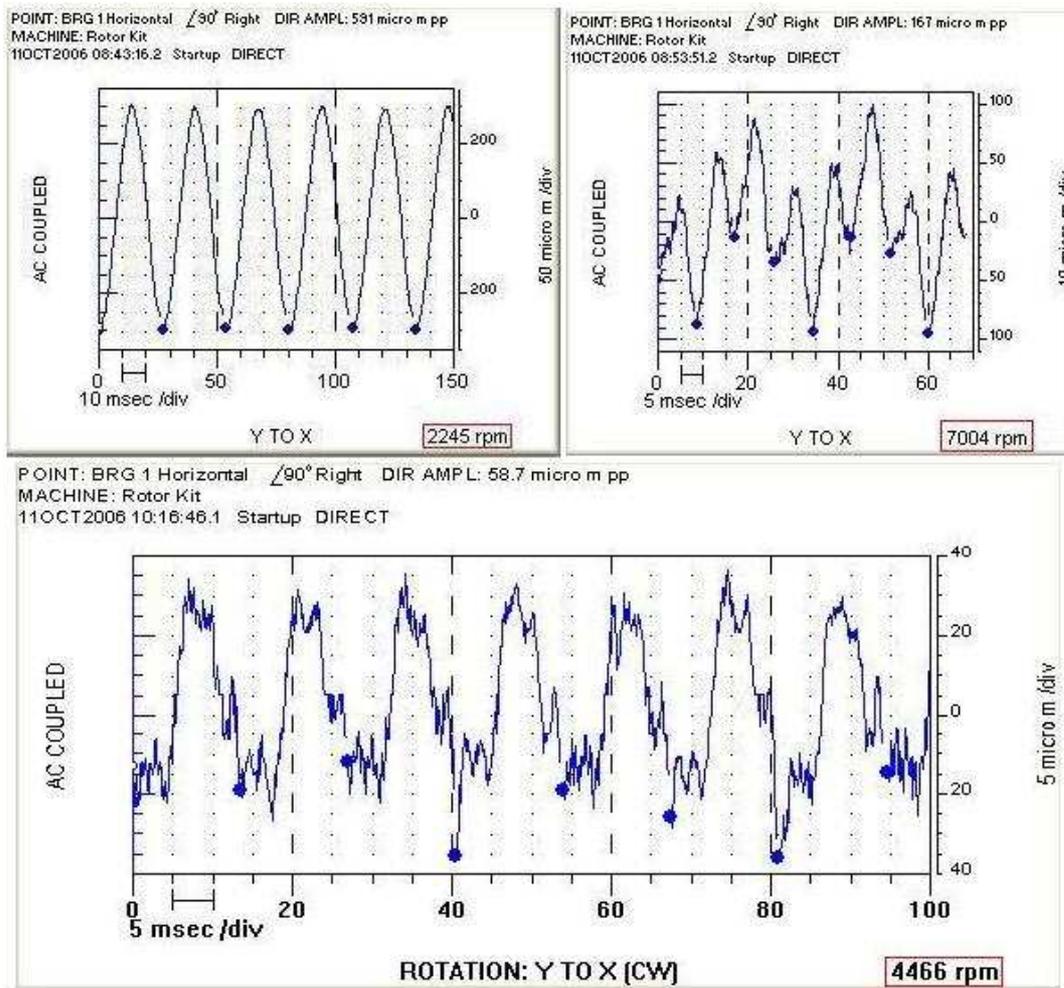


Figura 5.10: Forma de onda

## 6

### Conclusões e Trabalhos Futuros

O objetivo deste trabalho foi analisar o comportamento dinâmico de rotores montados em mancais hidrodinâmicos. A maior dificuldade nesta análise é o cálculo das propriedades de rigidez e amortecimento do filme lubrificante. Aqui foi usada a aproximação do mancal curto para este fim, que permite uma solução analítica da Equação de Reynolds. Os resultados obtidos nesta abordagem não são muito precisos conforme pode ser verificado quando se compara o cálculo das propriedades do mancal através do ROMAC para 4.100 *rpm* no anexo B com o mapa de estabilidade para o rotor rígido. No primeiro caso obtém-se a velocidade limite em 12.852 *rpm* e no segundo, 21.296 *rpm*. Esta diferença tende a aumentar quando as cargas e velocidades são muito elevadas, o que torna a influência da variação da viscosidade no filme significativa, bem como do fluxo turbulento. No entanto, a abordagem é muito útil na compreensão dos fenômenos envolvidos, bem como na verificação imediata da influência de parâmetros como, diâmetro do mancal, folga, velocidade, viscosidade e carga estática sobre as propriedades do mancal.

Com base em simulações numéricas foi desenvolvido um rotor experimental. Espectros de frequência identificaram componentes típicos de “*whirl*” e “*whip*”, característicos de instabilidade, o que validou a simulação numérica.

Trabalhos anteriores têm analisado rotores com dois mancais hidrodinâmicos. Por razões de redução de custos e simplificação da montagem foi usada a combinação com um mancal de rolamento. Se fossem empregados dois mancais hidrodinâmicos, o fator de amplificação na velocidade crítica seria menor, pois estes apresentam amortecimento que não existe em mancais de rolamento.

Como proposta de estudos futuros, segue:

- Proposta de solução da instabilidade encontrada através de um novo projeto do mancal, como por exemplo, o elíptico.
- Estudo não linear dos mancais hidrodinâmicos.

- Estudo da influência da inércia de rotação da seção transversal do eixo, bem como do cisalhamento.

## Bibliografia

- [1] API Standard Paragraphs Rotordynamic Tutorial: Lateral Critical Speeds, Unbalance Response, Stability, Train Torsionals, and Rotor Balancing, 2. ed edition, 2005.
- [2] ALLAIRE, P. E.; FLACK, R. D.. **Design of journal bearings for rotating machinery**. Proceedings of the Tenth Turbomachinery Symposium, p. 25–45, 1995.
- [3] LEIXAS, A. G.; JÚNIOR, C. C. B.. **Avaliação do comportamento dinâmico em partidas e paradas de caixas de engrenagens de eixos paralelos**. In: 4. FORUM DE TURBOMÁQUINAS. Petrobras, Março 2005.
- [4] AZEVEDO, H. R. T.; WEBER, H. I.. **Physical interpretation and some properties of complex eigenvectors in rotordynamics by a time domain approach**. Proceedings of the International Conference on Rotating Machine Dynamics, p. 8, 1992.
- [5] BENTLY, D. E.. **Fundamentals of Rotating Machinery Diagnostics**. Bently Pressurized Bearing Press, Minden, NV, USA, 2002.
- [6] CASTILHO, A.; PRODONOFF, V.. **Precessão de rotores flexíveis**. In: III CONGRESSO BRASILEIRO DE ENERGIA, p. 879–890.
- [7] CHILDS, D.. **Turbomachinery Rotordynamics: phenomena, modeling, and analysis**. John Wiley & Sons, INC, New York, NY, USA, 1993.
- [8] DIMAROGONAS, A. D.. **Vibration for Engineers**. West Publishing Co., USA, 1976.
- [9] EHRIC, F. F.. **Handbook of Rotordynamics**. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, USA, 2004.

- [10] ENGELS, R. C.. **Finite elements modelling of dynamic behavior of some basic structural members.** Journal of Sound and Vibration, p. 3–9, 1992.
- [11] GREEN, R. B.. **Gyroscopic effects on the the critical speeds of flexible rotors.** American Society of Mechanical Engineers, p. 3–9, 1992.
- [12] GUNTER, E. J.; CHEN, W. J.. **Introduction to Dynamics of Rotor-Bearing Systems.** Eigen Technologies, Inc, New York, NY, USA, 2005.
- [13] JUNKINS, J. L.; KIM, Y.. **Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures.** American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Washington,DC,USA, 1993.
- [14] MEIROVITCH, L.. **Principles and Tehniques of Vibration.** Prentice-Hall,Inc., Upper Sadle River, NJ,USA, 1997.
- [15] MUSZINSKA, A.. **Rotordynamics.** Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, USA, 2005.
- [16] NELSON, H. D.; MCVAUGH, J. M.. **The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements method.** Journal of Engineering for Industry, p. 593–600, 1976.
- [17] PAZ, M.. **Structural Dynamics: theory and computation.** Chapman & Hall, New York,NY,USA, 1997.
- [18] PRODONOFF, V.. **Vibrações Mecânicas.** Maity Comunicação e Editora, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1990.
- [19] RITTO, T. G.. **Análise de vibrações no contexto da formulação fraca:análise modal e decomposição de karhunen-lòeve.** Master's thesis, Departamento de Engenharia Mecânica,PUC-Rio, Rio de Janeiro,RJ, Brasil, 2005.
- [20] M.VANCE, J.. **Rotordynamics of Turbomachinery.** John Wiley & Sons,Inc, New York, NY, USA, 1988.
- [21] WANG, J. K.; KHONSARI, M. M.. **A new derivation for journal bearing stiffness and damping coefficients in polar coordinates.** Journal of Sound and Vibration, p. 500–507, 2005.
- [22] WEBER, H. I.. **Raciocinando a dinâmica da rotação.** Junho 1996.

- [23] YAMAMOTO, T.; ISHIDA, Y.. **Linear and Nonlinear Rotordynamics**. John Wiley & Sons, Inc, New York, NY, USA, 2001.
- [24] ALLAIRE, P. E.. **Basics of lubrication theory**. Junho 1992.
- [25] CAMERON, A.. **The Principles of Lubrication**. John Wiley and Sons Inc., New York, NY, USA, 1966.
- [26] CHÁVEZ, R. G. D.. **Dinâmica de um rotor horizontal em apoios elásticos**. Master's thesis, Departamento de Engenharia Mecânica, PUC-RIO, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2003.

# A

## Análise de Estabilidade

FORSTAB VERSION 1.72 (MAY 21 2004 )  
 COMPUTER PROGRAM RESP2V3  
 LABVIB-PUC - Análise de estabilidade

Data read from file: C:\romac\FORSTAB\Examp1\Forstab\pucFORST\stabPuc6.dat

Output File: C:\romac\FORSTAB\Examp1\Forstab\pucFORST\stabpuc6.out

Plot File: C:\romac\FORSTAB\Examp1\Forstab\pucFORST\stabpuc6.plt

Speed Case : 14

Rotor 1 = 4800.0000 (rpm)

EIGVAL NO.	DAMPING EXPONENT (1/SEC)	DAMPED FREQUENCY (RPM)	UNBALANCE FREQUENCY (RPM)	AMP. FACTOR (DIM)	LOG DECREMENT (DIM)	NO. ITER
1	0.1765E+00	0.2329E+04	0.2329E+04	-.6909E+03	-.4547E-02	12
2	-.7413E+00	0.2359E+04	0.2359E+04	0.1666E+03	0.1885E-01	5
3	-.1443E+03	0.2443E+04	0.3900E+04	0.1169E+01	0.3543E+01	6
4	-.1682E+02	0.3236E+05	0.3236E+05	0.1008E+03	0.3118E-01	18
5	-.7009E+01	0.3235E+05	0.3235E+05	0.2417E+03	0.1300E-01	5
6	-.2689E+05	0.2837E-06				6

Speed Case: 14 Mode Number: 1  
 Eigenvalue= 0.176546785E+00 +/- 0.243935245E+03 j  
 Damped Frequency= 2329. rpm  
 Log Decrement= -0.004547

Rotor Number: 1

Bancada Mestrado PUC 2 - como construido

ROTOR -- UMA RODA IN SYNCHRONOUS WHIRL

Rotor Data read from File: C:\romac\CRTSP2\pucCRTP\rotpuc5.mod

Rotor Speed: 4800.0000 rpm

St #	Major axis	Minor axis	Ellipse angle	Phase angle	Rotor amplitude	Phase angle	X-Z Plane amplitude	Y-Z Plane amplitude
1	0.104E+01	0.940E+00	49.63	-37.48	0.100E+01	95.69	-.996E-01	-.100E+01
2	0.396E+01	0.358E+01	49.63	-35.28	0.384E+01	97.81	-.522E+00	-.380E+01
3	0.685E+01	0.618E+01	49.63	-34.94	0.664E+01	98.14	-.940E+00	-.657E+01
4	0.136E+02	0.123E+02	49.63	-34.68	0.132E+02	98.40	-.193E+01	-.131E+02
5	0.187E+02	0.168E+02	49.63	-34.56	0.181E+02	98.51	-.267E+01	-.179E+02
6	0.208E+02	0.188E+02	49.63	-34.49	0.202E+02	98.57	-.301E+01	-.199E+02
7	0.190E+02	0.171E+02	49.63	-34.45	0.184E+02	98.61	-.275E+01	-.182E+02
8	0.181E+02	0.163E+02	49.63	-34.45	0.175E+02	98.62	-.262E+01	-.173E+02
9	0.171E+02	0.155E+02	49.63	-34.44	0.166E+02	98.62	-.249E+01	-.164E+02
10	0.129E+02	0.116E+02	49.63	-34.43	0.125E+02	98.63	-.188E+01	-.124E+02
11	0.694E+01	0.626E+01	49.63	-34.43	0.673E+01	98.63	-.101E+01	-.665E+01
12	0.113E+00	0.102E+00	49.63	-34.40	0.109E+00	98.66	-.164E-01	-.108E+00
13	0.715E+01	0.645E+01	49.63	-34.44	0.693E+01	-81.38	0.104E+01	0.686E+01
14	0.103E+02	0.927E+01	49.63	-34.44	0.996E+01	-81.38	0.149E+01	0.985E+01
15	0.145E+02	0.130E+02	49.63	-34.44	0.140E+02	-81.38	0.210E+01	0.139E+02

Speed Case: 14 Mode Number: 2  
 Eigenvalue= -.741317715E+00 +/- 0.247037405E+03 j  
 Damped Frequency= 2359. rpm  
 Log Decrement= 0.018855

Rotor Speed: 4800.0000 rpm

St #	Major axis	Minor axis	Ellipse angle	Phase angle	Rotor amplitude	Phase angle	X-Z Plane amplitude	Y-Z Plane amplitude
1	0.100E+01	-.432E+00	-85.33	-2.02	0.100E+01	86.20	0.665E-01	-.100E+01
2	0.122E+02	-.525E+01	-85.33	-71.55	0.629E+01	137.58	-.465E+01	-.425E+01
3	0.240E+02	-.103E+02	-85.33	-73.83	0.120E+02	141.39	-.934E+01	-.746E+01
4	0.523E+02	-.225E+02	-85.33	-75.28	0.255E+02	143.95	-.206E+02	-.150E+02
5	0.742E+02	-.320E+02	-85.33	-75.82	0.359E+02	144.93	-.294E+02	-.207E+02
6	0.846E+02	-.364E+02	-85.33	-76.13	0.408E+02	145.52	-.336E+02	-.231E+02
7	0.781E+02	-.337E+02	-85.33	-76.30	0.376E+02	145.83	-.311E+02	-.211E+02
8	0.745E+02	-.321E+02	-85.33	-76.32	0.358E+02	145.87	-.296E+02	-.201E+02
9	0.708E+02	-.305E+02	-85.33	-76.34	0.340E+02	145.90	-.282E+02	-.191E+02
10	0.535E+02	-.230E+02	-85.33	-76.38	0.257E+02	145.98	-.213E+02	-.144E+02
11	0.287E+02	-.124E+02	-85.33	-76.38	0.138E+02	145.97	-.114E+02	-.773E+01
12	0.471E+00	-.203E+00	-85.33	-76.52	0.226E+00	146.24	-.188E+00	-.126E+00
13	0.295E+02	-.127E+02	-85.33	-76.34	0.142E+02	-34.10	0.118E+02	0.796E+01
14	0.424E+02	-.183E+02	-85.33	-76.33	0.204E+02	-34.11	0.169E+02	0.114E+02
15	0.597E+02	-.257E+02	-85.33	-76.33	0.287E+02	-34.11	0.238E+02	0.161E+02

Speed Case: 14 Mode Number: 3  
 Eigenvalue= -.144299776E+03 +/- 0.255874784E+03 j  
 Damped Frequency= 2443. rpm  
 Log Decrement= 3.543383

Rotor Speed: 4800.0000 rpm

st #	Major axis	Minor axis	Ellipse angle	Phase angle	Rotor amplitude	Phase angle	X-Z Plane amplitude	Y-Z Plane amplitude
1	0.110E+01	0.962E+00	-30.42	56.08	0.101E+01	82.83	0.126E+00	-.100E+01
2	0.117E+01	0.102E+01	-30.42	52.93	0.108E+01	79.55	0.195E+00	-.106E+01
3	0.121E+01	0.106E+01	-30.42	50.02	0.113E+01	76.58	0.261E+00	-.110E+01
4	0.116E+01	0.102E+01	-30.42	42.07	0.110E+01	68.66	0.400E+00	-.103E+01
5	0.899E+00	0.785E+00	-30.42	29.61	0.872E+00	56.82	0.478E+00	-.730E+00
6	0.597E+00	0.521E+00	-30.42	6.16	0.596E+00	35.81	0.483E+00	-.349E+00
7	0.432E+00	0.377E+00	-30.42	-21.56	0.425E+00	11.39	0.416E+00	-.838E-01
8	0.406E+00	0.355E+00	-30.42	-25.31	0.397E+00	7.98	0.394E+00	-.552E-01
9	0.383E+00	0.334E+00	-30.42	-29.52	0.372E+00	4.11	0.371E+00	-.267E-01
10	0.289E+00	0.252E+00	-30.42	-37.88	0.275E+00	-3.77	0.275E+00	0.181E-01
11	0.155E+00	0.135E+00	-30.42	-37.57	0.148E+00	-3.47	0.147E+00	0.893E-02
12	0.282E-02	0.246E-02	-30.42	-64.89	0.253E-02	-31.36	0.216E-02	0.132E-02
13	0.159E+00	0.138E+00	-30.42	-29.22	0.154E+00	-175.62	-.154E+00	0.118E-01
14	0.228E+00	0.199E+00	-30.42	-28.28	0.222E+00	-174.74	-.221E+00	0.203E-01
15	0.321E+00	0.280E+00	-30.42	-27.48	0.313E+00	-174.01	-.311E+00	0.326E-01

Speed Case : 19

Rotor 1 = 7000.0000 (rpm)

EIGVAL NO.	DAMPING EXPONENT (1/SEC)	DAMPED FREQUENCY (RPM)	UNBALANCE FREQUENCY (RPM)	AMP. FACTOR (DIM)	LOG DECREMENT (DIM)	NO. ITER
1	0.1552E+01	0.2342E+04	0.2342E+04	-.7901E+02	-.3976E-01	14
2	-.7281E+00	0.2359E+04	0.2359E+04	0.1697E+03	0.1852E-01	5
3	-.1693E+03	0.3646E+04	0.4868E+04	0.1349E+01	0.2786E+01	6
4	-.1992E+02	0.3236E+05	0.3236E+05	0.8508E+02	0.3693E-01	17
5	-.8318E+01	0.3235E+05	0.3235E+05	0.2036E+03	0.1543E-01	5
6	-.2288E+05	0.3126E-06				6

Speed Case: 19 Mode Number: 1  
 Eigenvalue= 0.155189027E+01 +/- 0.245228472E+03 j  
 Damped Frequency= 2342. rpm  
 Log Decrement= -0.039762

Rotor Speed: 7000.0000 rpm

st #	Major axis	Minor axis	Ellipse angle	Phase angle	Rotor amplitude	Phase angle	X-Z Plane amplitude	Y-Z Plane amplitude
------	------------	------------	---------------	-------------	-----------------	-------------	---------------------	---------------------

1	0.100E+01	0.860E+00	79.20	-9.27	0.100E+01	92.85	-.498E-01	-.100E+01
2	0.448E+01	0.384E+01	79.20	19.96	0.441E+01	118.06	-.208E+01	-.389E+01
3	0.807E+01	0.691E+01	79.20	23.50	0.790E+01	121.20	-.409E+01	-.676E+01
4	0.166E+02	0.142E+02	79.20	26.09	0.162E+02	123.54	-.894E+01	-.135E+02
5	0.230E+02	0.197E+02	79.20	27.15	0.224E+02	124.49	-.127E+02	-.185E+02
6	0.259E+02	0.222E+02	79.20	27.79	0.252E+02	125.07	-.145E+02	-.206E+02
7	0.238E+02	0.203E+02	79.20	28.13	0.231E+02	125.39	-.133E+02	-.188E+02
8	0.226E+02	0.194E+02	79.20	28.17	0.220E+02	125.42	-.127E+02	-.179E+02
9	0.215E+02	0.184E+02	79.20	28.21	0.208E+02	125.46	-.121E+02	-.170E+02
10	0.162E+02	0.139E+02	79.20	28.30	0.157E+02	125.53	-.914E+01	-.128E+02
11	0.872E+01	0.746E+01	79.20	28.29	0.845E+01	125.53	-.491E+01	-.688E+01
12	0.142E+00	0.122E+00	79.20	28.59	0.138E+00	125.80	-.805E-01	-.112E+00
13	0.897E+01	0.768E+01	79.20	28.21	0.870E+01	-54.54	0.505E+01	0.709E+01
14	0.129E+02	0.110E+02	79.20	28.20	0.125E+02	-54.55	0.725E+01	0.102E+02
15	0.181E+02	0.155E+02	79.20	28.20	0.176E+02	-54.56	0.102E+02	0.143E+02

Speed Case: 19 Mode Number: 2  
 Eigenvalue= -.728087212E+00 +/- 0.247050994E+03 j  
 Damped Frequency= 2359. rpm  
 Log Decrement= 0.018517

Rotor Speed: 7000.0000 rpm

St #	Major axis	Minor axis	Ellipse angle	Phase angle	Rotor amplitude	Phase angle	X-Z Plane amplitude	Y-Z Plane amplitude
1	0.100E+01	-.497E+00	-87.49	-1.25	0.100E+01	88.11	0.330E-01	-.100E+01
2	0.124E+02	-.615E+01	-87.49	-71.58	0.703E+01	143.64	-.566E+01	-.417E+01
3	0.244E+02	-.121E+02	-87.49	-73.83	0.135E+02	147.20	-.113E+02	-.730E+01
4	0.533E+02	-.265E+02	-87.49	-75.25	0.290E+02	149.55	-.250E+02	-.147E+02
5	0.757E+02	-.376E+02	-87.49	-75.78	0.409E+02	150.45	-.356E+02	-.202E+02
6	0.862E+02	-.428E+02	-87.49	-76.09	0.464E+02	150.98	-.406E+02	-.225E+02
7	0.797E+02	-.396E+02	-87.49	-76.26	0.428E+02	151.27	-.376E+02	-.206E+02
8	0.759E+02	-.377E+02	-87.49	-76.27	0.408E+02	151.30	-.358E+02	-.196E+02
9	0.722E+02	-.358E+02	-87.49	-76.29	0.388E+02	151.33	-.340E+02	-.186E+02
10	0.545E+02	-.271E+02	-87.49	-76.33	0.293E+02	151.40	-.257E+02	-.140E+02
11	0.293E+02	-.146E+02	-87.49	-76.33	0.157E+02	151.40	-.138E+02	-.754E+01
12	0.481E+00	-.239E+00	-87.49	-76.47	0.258E+00	151.63	-.227E+00	-.122E+00
13	0.301E+02	-.150E+02	-87.49	-76.29	0.162E+02	-28.67	0.142E+02	0.777E+01
14	0.433E+02	-.215E+02	-87.49	-76.29	0.233E+02	-28.68	0.204E+02	0.112E+02
15	0.609E+02	-.302E+02	-87.49	-76.28	0.327E+02	-28.68	0.287E+02	0.157E+02

Speed Case: 19 Mode Number: 3  
 Eigenvalue= -.169302365E+03 +/- 0.381797463E+03 j  
 Damped Frequency= 3646. rpm  
 Log Decrement= 2.786184

Rotor Speed: 7000.0000 rpm

St #	Major axis	Minor axis	Ellipse angle	Phase angle	Rotor amplitude	Phase angle	X-Z Plane amplitude	Y-Z Plane amplitude
1	0.107E+01	0.966E+00	-34.07	53.17	0.100E+01	84.38	0.984E-01	-.100E+01
2	0.110E+01	0.998E+00	-34.07	51.51	0.104E+01	82.69	0.132E+00	-.103E+01
3	0.112E+01	0.101E+01	-34.07	49.90	0.106E+01	81.06	0.164E+00	-.104E+01
4	0.988E+00	0.892E+00	-34.07	45.02	0.941E+00	76.16	0.225E+00	-.914E+00
5	0.643E+00	0.580E+00	-34.07	35.20	0.623E+00	66.56	0.248E+00	-.571E+00
6	0.287E+00	0.259E+00	-34.07	1.57	0.287E+00	35.48	0.234E+00	-.167E+00
7	0.226E+00	0.204E+00	-34.07	-60.57	0.210E+00	-23.93	0.192E+00	0.850E-01
8	0.227E+00	0.205E+00	-34.07	-66.72	0.209E+00	-30.45	0.180E+00	0.106E+00
9	0.231E+00	0.209E+00	-34.07	-72.71	0.211E+00	-36.91	0.168E+00	0.126E+00
10	0.201E+00	0.181E+00	-34.07	-82.50	0.182E+00	-47.64	0.123E+00	0.134E+00
11	0.107E+00	0.967E-01	-34.07	-82.77	0.969E-01	-47.93	0.649E-01	0.719E-01
12	0.282E-02	0.254E-02	-34.07	74.57	0.256E-02	-72.93	0.752E-03	0.245E-02
13	0.949E-01	0.857E-01	-34.07	-73.79	0.864E-01	141.92	-.680E-01	-.533E-01
14	0.134E+00	0.121E+00	-34.07	-72.66	0.122E+00	143.15	-.978E-01	-.733E-01
15	0.186E+00	0.168E+00	-34.07	-71.67	0.170E+00	144.22	-.138E+00	-.992E-01

## B

### Propriedades do mancal para 4.100 rpm

MaxBrg Output File  
MAXBRG Version 3.0 (May 2005)

Fitzgerald and Neal Bearing, MAXBRG Bancada Puc  
(MaxBrg Data File) Minhui He, May 2003  
Fixed Geometry Bearing  
Regular Flooded Flow Condition

OVERALL GEOMETRY:  
Journal Diameter= 0.787 IN Radial clearance (Cb) =0.00118 IN  
Pad Thickness= 0.390 IN

PAD GEOMETRY (DEG, IN)

Pad #	Pivot Angle	Arc Length	Axial Length	Preload	Offset
1	90.00	150.00	0.31	0.00	0.50
2	270.00	150.00	0.31	0.00	0.50

Pad #	Inlet Angle	Taper Depth	Taper Arc Length
1	15.00	0.00	0.00
2	195.00	0.00	0.00

LUBRICANT PROPERTIES:  
Mu( 104.0 F) =0.4090E-05 LB-SEC/IN2  
Mu( 212.0 F) =0.7880E-06 LB-SEC/IN2

Lubricant Density= 0.800E-04 LB-S2/IN4  
Lubricant Specific Heat= 0.180E+03 BTU-IN/(LB-S2-F)  
Lubricant Heat Conductivity=0.2000E-05 BTU/(IN-S-F)  
Lubricant Supply Temperature= 90.00 F  
Pad Heat conductivity =0.1160E-02 BTU/(IN-S-F)

BEARING MATERIAL PROPERTIES:  
Pad Youngs Modulus=0.1500E+08 LB/IN2  
Pad Poissons Ratio=0.38  
Manufacturing Temperature=70.00 F  
Pad Thermal Expansion=0.9600E-05 1/F

OPERATING CONDITION:

Shaft speed	ws	Fx	Fy	Qsupply	whirl ratio
4100.0	1.2	0.0	0.0	0.050	1.00

High Ambient Pressure= 0.000 PSI  
Low Ambient Pressure= 0.000 PSI  
Cavitation Pressure= 0.000 PSI  
Lubricant Supply Pressure= 0.000 PSI  
Leading/Trailing Edge Heat Convection Coefficients:  
h=0.2500E-03 BTU/(S-IN2-F)  
Hot Oil carry-over Factor= 0.80  
Lower Critical Re = 500.00  
Upper Critical Re =1000.00

SELECTED OPTIONS:  
Thermal Effects with Conduction Included  
Journal Temperature Model: Averaged Film Temperature  
Ambient Temperature Equals Supply Temperature  
Supply Lubricant Used in Groove Mixing Model  
Pad Mechanical and Thermal Deformation Included  
Journal Equilibrium Position Matches the Load

SPEED/LOAD CASE # 1  
Speed(RPM)= 4100.0 Specific Load(PSI)= 4.9  
Applied Loads(LBF): X= 0.0 Y= 0.0 Total= 1.2  
Sommerfeld Number= 7.8447

## MAXBRG RESULTS OF CASE # 1:

Operating Journal Position: (Xj/Cb)= 0.1016 (Yj/Cb)= -0.0208  
Eccentricity Ratio=0.10 Attitude Angle= 78.4 Deg

Calculated Hydrodynamic Forces: Fx= 0.00 LB Fy= 1.21 LB  
 Power loss (HP)= 0.010

Pad #	Hin (IN)	Hexit (IN)	Hmin (IN)	Fx (LB)	Fy (LB)
1	0.107E-02	0.130E-02	0.107E-02	0.00	0.00
2	0.129E-02	0.106E-02	0.106E-02	0.00	1.21

Journal Temperature= 100.76 F  
 Maximum Pad Temperature= 100.83 F on Pad # 1  
 Maximum Pressure= 9.88 Psi on Pad # 2  
 The sump temperature= 92.48 F

Pad #	Tin (F)	Texit (F)	Texit (F, Bulk)	hback (BTU/(S-IN <sup>2</sup> -
1	98.78	101.02	101.13	0.2500E-03
2	97.42	101.04	101.13	0.2500E-03

## Flow Rates(GPM)

Pad #	Carryover	Inlet	Exit	Side
1	0.01	0.01	0.01	0.00
2	0.01	0.01	0.01	0.00

Differential Flow Rate= 0.00 GPM  
 Journal Thermal Expansion= 0.0000 IN  
 Shell Thermal Expansion= 0.0000 IN

## Reduced Stiffness Coefficients (LB/IN)

Kxx= 1824.3 Kxy= 4387.6  
 Kyx= -10304. Kyy= 1718.2

## Reduced Damping Coefficients (LB-S/IN)

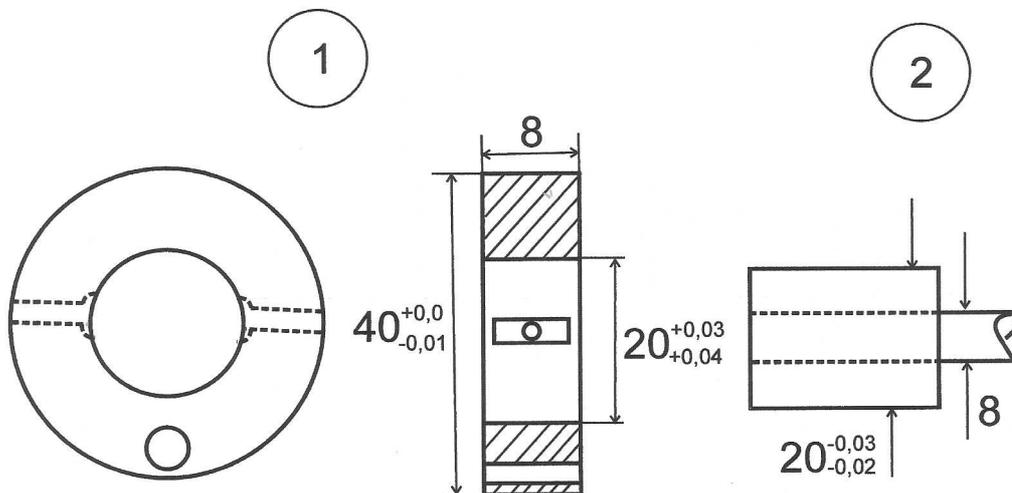
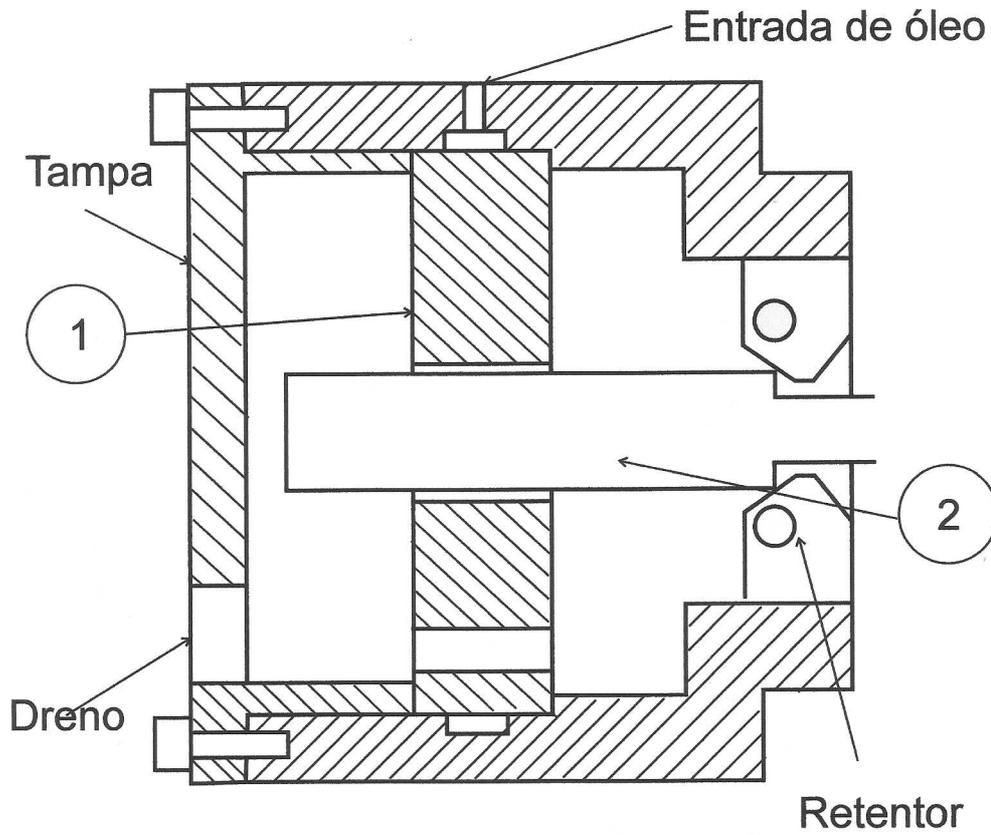
Cxx= 20.851 Cxy= -4.2448  
 Cyx= -4.2448 Cyy= 47.816

Rigid Rotor Stability Threshold Speed = 0.12852686E+05 RPM

Whirl Frequency Ratio = 0.501

Laminar Flow Predicted on Pad # 1  
 Laminar Flow Predicted on Pad # 2

**C**  
**Detalhamento do mancal**



# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)