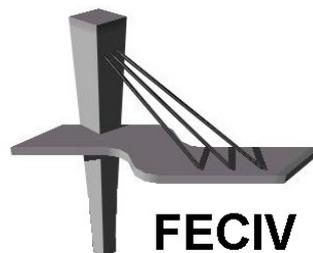


DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Nº 026

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO COMPORTAMENTO PÓS-
FISSURAÇÃO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO PELO
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

José Radi Neto



FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL
Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil



Nº 026

José Radi Neto

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO COMPORTAMENTO PÓS-
FISSURAÇÃO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO PELO
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **Mestre em Engenharia Civil**.

Área de Concentração: Engenharia Estrutural.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Antonio Romero Gesualdo
Co-orientadora: Profa. Dra. Maria Cristina Vidigal de Lima

UBERLÂNDIA, 23 DE FEVEREIRO DE 2007.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

R129s

Radi Neto, José, 1960-

Simulação numérica do comportamento pós-fissuração de vigas de concreto armado pelo método dos elementos finitos / José Radi Neto. - 2007.

88 f.: il.

Orientador: Francisco Antonio Romero Gesualdo.

Co-orientadora: Maria Cristina Vidigal de Lima.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Inclui bibliografia.

1. Concreto armado - Teses. I. Gesualdo, Francisco Antonio Romero. II. Lima, Maria Cristina Vidigal de. III. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

CDU: 624.012.45



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil



Aluno: José Radi Neto

Número da matrícula: 5031605-0

Área de concentração: ENGENHARIA ESTRUTURAL

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO COMPORTAMENTO PÓS-FISSURAÇÃO DE
VIGAS DE CONCRETO ARMADO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Orientador: PROF. Dr. FRANCISCO ANTONIO ROMERO GESUALDO

Co-orientadora: PROFa. Dra. MARIA CRISTINA VIDIGAL DE LIMA.

A Dissertação foi aprovada em sessão pública, realizada no dia 23 de fevereiro de 2007,
às 09:00 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

Nome / Instituição:

Assinatura:

Prof. Dr. Francisco Antonio Romero Gesualdo / UFU

Prof. Dr. Rogério de Oliveira Rodrigues / FEIS-UNESP

Prof. Dr. Paulo César Primo Agostinho / UFU

UBERLÂNDIA, 23 DE FEVEREIRO DE 2007.

*Aos meus pais pelo carinho,
exemplo de vida e educação; a
minha esposa Márcia pelo
companheirismo do dia a dia e
aos meus filhos José Gabriel e
Maria Marcella pelo sincero
amor.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida, pela oportunidade de ter participado desta pesquisa e pelo conhecimento adquirido ao longo deste trabalho.

A secretária da Pós-graduação Sueli Maria Vidal da Silva pelo incentivo, atenção e companheirismo que tem com todos os alunos da pós-graduação e que nos acompanha desde a seleção até a defesa das dissertações.

Ao meu orientador Francisco Antonio Romero Gesualdo e à minha co-orientadora Maria Cristina Vidigal de Lima, pelas idéias, empenho e apoio no desenvolvimento da dissertação.

Agradeço a todos os meus amigos pela força e motivação durante este período de estudo.

Aos meus colegas do curso de Pós-graduação em Engenharia Civil, que contribuíram de forma direta e indireta para a realização deste trabalho.

À Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Engenharia Civil, que forneceram o apoio necessário. À CAPES pela bolsa de estudo concedida no último ano deste trabalho.

RESUMO

O presente trabalho apresenta um método numérico para a determinação dos esforços e deslocamentos em vigas retas de concreto armado levando em consideração a fissuração e a influência das armaduras longitudinais e transversais. Para simular numericamente as fissuras, o elemento fissurado tem seu módulo de elasticidade reduzido em função das dimensões do elemento finito. Também é considerada a não-linearidade física dos materiais aço e concreto. Empregou-se o método dos elementos finitos com elementos retangulares de quatro nós para o concreto e elementos do tipo barra com capacidade de tração ou compressão para o aço. A validação do sistema computacional foi feita através de comparações entre resultados numéricos do programa com resultados experimentais desenvolvidos por outros pesquisadores. Os resultados são comparados entre si através das respostas mostradas em gráficos e tabelas mostrando que o método utilizado é bastante apropriado para a análise de vigas de concreto armado.

Palavras-chave: concreto armado, seção efetiva, fissuração, elementos finitos, deslocamentos.

ABSTRACT

Numerical simulation for the post-cracking behavior of reinforced concrete beams by finite element method

This work presents a numerical method for the evaluation of internal forces and displacements in reinforced concrete straight beams considering cracking and the influence of longitudinal and transversal reinforcement. In order to simulate cracking behavior, the elasticity module of the cracked element is reduced depending on the dimensions of the finite element. The physical non-linear behavior of concrete and steel is also considered. The finite element method was used for a rectangular element with four nodes representing the concrete. A hinged end bar element in tension and compression was used for steel. The numerical results obtained compared satisfactorily with the experimental ones available in the technical literature. The results were analyzed by graphs and tables. The analysis showed the proposed method is actually appropriate for reinforced concrete beams simulations.

Keywords: reinforced concrete, effective cross section, cracking, finite elements, displacements.

SÍMBOLOS

dx : Diferencial de x

dy : Diferencial de y

d_p : Distância da origem ao ponto

d_r : Distância da origem à reta

ϵ_x : Deformação linear média na direção x

ϵ_y : Deformação linear média na direção y

$\epsilon_{x'}$: Deformação linear média na direção da diagonal x'

$\epsilon_{y'}$: Deformação linear média na direção da diagonal y'

∂_u : Diferencial parcial de u

∂_x : Diferencial parcial de x

γ_{xy} : Distorção angular

ν : Coeficiente de Poisson

E_{ai} : Módulo de elasticidade inicial do aço

E_{ci} : Módulo de elasticidade longitudinal inicial do concreto

E_m : Módulo de elasticidade secante do concreto

E^* : Módulo de elasticidade fictício do concreto

$E_{inst,a}$: Módulo de elasticidade instantâneo do aço

$E_{inst,x}$: Módulo de elasticidade do concreto instantâneo na direção x

$E_{inst,y}$: Módulo de elasticidade do concreto instantâneo na direção y

f^* : Fator de redução do módulo de elasticidade inicial

f_{ck} : Resistência característica do concreto à compressão

f_{ctk} : Resistência característica à tração

G : Módulo de elasticidade transversal

σ_1 : Tensão principal de compressão

σ_2 : Tensão principal de tração

σ_x : Tensão normal na direção x

σ_y : Tensão normal na direção y

τ_{ext} : Trabalho das forças externas

τ_{xy} : Tensão tangencial

τ_b : Tensão de aderência entre o concreto e o aço

W_{int} : Trabalho das forças internas

W_{ext} : Trabalho das forças externas

$\Delta\ell$: Distância entre fissuras

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	9
INTRODUÇÃO	9
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	9
1.2 OBJETIVOS.....	9
1.3 APRESENTAÇÃO DO TRABALHO.....	10
CAPÍTULO 2	11
REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	11
2.1 ASPECTOS GERAIS.....	11
CAPÍTULO 3	14
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
3.1 CONCEITOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE E RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS.....	14
3.1.1 Considerações iniciais.....	14
3.1.2 Relações tensões × deformações para elementos em estado plano de tensões... 14	
3.1.3 Tensões principais nos elementos infinitesimais.....	20
3.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	22
3.2.1 Introdução.....	22
3.2.2 Formulação específica da matriz de rigidez do elemento retangular linear em estado plano de tensões.....	25
3.2.3 Determinação das deformações no elemento finito retangular linear.....	32
3.2.4 Determinação das tensões normais e cisalhantes no elemento finito retangular linear.....	32
3.2.5 Formulação da matriz de rigidez do elemento barra de armadura.....	33
CAPÍTULO 4	35
MODELOS FÍSICOS DO CONCRETO E DO AÇO	35

4.1	MODELOS FÍSICOS NÃO-LINEARES.....	35
4.1.1	Introdução.....	35
4.1.2	Concreto	35
4.1.3	Aço	38
4.1.4	Teoria da fissuração.....	38
4.1.5	Resistência do concreto a tensões normais combinadas.....	40
4.1.6	Variação do coeficiente de Poisson em função do nível de carregamento.....	41
4.2	CRITÉRIO DE RUPTURA.....	43
4.2.1	Envelope biaxial de falhas no concreto	43
CAPÍTULO 5.....		46
ASPECTOS COMPUTACIONAIS.....		46
5.1	DESCRIÇÃO DO MÉTODO.....	46
5.2	ALGORITMO DO MÉTODO	47
5.3	MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO FISSURADO	48
5.4	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	49
5.5	FLUXOGRAMA DO PROGRAMA	51
CAPÍTULO 6.....		54
ESTUDO DE CASOS.....		54
6.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	54
6.2	PRIMEIRO ESTUDO DE CASO	54
6.2.1	Estrutura analisada.....	54
6.2.2	Resultados obtidos.....	56
6.3	SEGUNDA ESTRUTURA ANALISADA	58
6.3.1	Estrutura analisada.....	58
6.3.2	Resultados obtidos.....	60
6.4	TERCEIRA ESTRUTURA ANALISADA.....	62
6.4.1	Estrutura analisada.....	62
6.4.2	Resultados obtidos.....	64
6.5	QUARTA ESTRUTURA ANALISADA.....	66
6.5.1	Estrutura analisada.....	66
6.5.2	Resultados obtidos.....	67

CAPÍTULO 7.....	70
CONSIDERAÇÕES FINAIS	70
7.1 CONCLUSÕES	70
7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	71

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A procura por modelos analíticos que traduzam a realidade do comportamento estrutural sempre foi o objetivo de todo pesquisador na área da engenharia civil, pois assim o dimensionamento dos elementos estruturais será mais confiável e seguro.

Os métodos convencionais de cálculo de esforços e deslocamentos nas estruturas de concreto armado não consideram a seção efetiva de concreto, ou seja, o cálculo é feito admitindo-se a seção constante, independentemente das fissurações provenientes das solicitações de tração ou compressão, como também não levam em consideração as armaduras presentes na estrutura. Isto representa uma deficiência na avaliação dos esforços e dos deslocamentos.

Desta forma, muitos parâmetros devem ser considerados na análise de estruturas de concreto armado, garantindo um melhor conhecimento dos parâmetros de dimensionamento.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo principal do trabalho é encontrar um procedimento que permita o cálculo de vigas de concreto armado de forma mais apropriada em relação à conduta usual, agregando à análise, diversos parâmetros que influenciam o comportamento do material concreto armado. O objetivo será atingido com a elaboração de um sistema computacional para automação do cálculo de vigas retas de concreto armado sob quaisquer condições de vinculações, considerando a interação entre as variáveis que influenciam o comportamento de vigas de concreto armado. Isto significa incluir os efeitos das armaduras longitudinais e transversais, dimensões das peças, não linearidade do módulo de elasticidade nas direções

perpendiculares, coeficiente de Poisson, abertura de fissuras e distância entre fissuras. Com este sistema será possível conhecer deslocamentos, esforços e tensões em qualquer ponto de vigas de concreto armado consideradas bidimensionalmente, de forma simples, rápida e com boa precisão.

1.3 APRESENTAÇÃO DO TRABALHO

O trabalho é constituído de sete capítulos organizados da seguinte maneira:

Capítulo 1: Faz-se uma breve explanação sobre o método utilizado para a determinação dos esforços e deslocamentos em vigas de concreto armado, levando em consideração o estado de fissuração.

Capítulo 2: Apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre o tema e elementos utilizados pelo método.

Capítulo 3: Neste capítulo apresentam-se conceitos de teoria da elasticidade e resistência dos materiais, necessários para a determinação da matriz de rigidez dos elementos retangulares de barras. São também descritos alguns conceitos do método dos elementos finitos e o desenvolvimento matemático das matrizes de rigidez dos elementos retangulares e do elemento tipo barra. O desenvolvimento matemático das tensões normais em um elemento infinitesimal pertencente ao elemento finito retangular é apresentado em função dos deslocamentos nodais.

Capítulo 4: Apresentam-se os procedimentos para se levar em consideração a não-linearidade física dos materiais concreto e aço, além de considerações sobre o critério de ruptura adotado no método.

Capítulo 5: Os aspectos computacionais relativos ao programa desenvolvido neste trabalho são abordados neste capítulo.

Capítulo 6: São apresentados estudos comparativos entre o método analítico e resultados numéricos experimentais relativos a duas vigas.

Capítulo 7: Este capítulo contém as considerações finais, conclusões e propostas para desenvolvimentos futuros.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 ASPECTOS GERAIS

Os métodos aplicados inicialmente para a modelagem de vigas de concreto armado utilizavam equações matemáticas diretas para a obtenção das flechas e esforços. Nem sempre estes métodos apresentavam respostas satisfatórias quando comparadas com resultados experimentais, pois neste caso a não-linearidade física e geométrica não eram consideradas. Com o uso do método dos elementos finitos foi possível a utilização de métodos iterativos empregando elementos com capacidade de representar o concreto, e assim obter respostas mais compatíveis com a realidade.

Vários pesquisadores têm apresentado métodos, na maioria iterativos, para representar o comportamento de uma viga fissurada de concreto armado, com base em diversos critérios de ruptura. A seguir são apresentados alguns trabalhos de pesquisa referente a esta área.

D'Avila e Campos (2001) apresentaram um modelo numérico para a simulação do comportamento pós-fissuração de vigas de concreto armado, onde foi utilizado para a simulação numérica dos elementos tracionados fissurados o modelo de amolecimento multilinear onde se distinguem três trechos:

1º trecho: Relativo ao período de formação de fissuras ocorrendo uma redução gradual de tensões com o aumento de deformações.

2º trecho: Relativo ao período de fissuração estabilizada, caracterizada pelo aumento de deformação com tensão constante.

3º trecho: Relativo ao período de pós-escoamento da armadura, novamente com diminuição da tensão e aumento da deformação.

O modelo apresentado por D'Avila e Campos (2001) foi implementado no sistema computacional DIANA. Para validar o modelo foi executado um plano experimental onde foram analisadas quatro vigas isoladas, com diferentes espessuras de alma e quatro vigas contínuas, com relação altura/vão livres diferentes. As respostas obtidas pelo programa foram comparadas às respostas obtidas experimentalmente. Concluiu-se que o método foi capaz de simular com precisão as vigas de concreto armado fletidas.

Souza (2002) apresentou trabalho mostrando análises numéricas dinâmicas de vigas de material frágil contendo fissuras. A abordagem utilizada foi a teoria da mecânica elástica linear de fratura. Utilizou o método dos elementos finitos em um programa computacional baseado no método dos elementos discretos para representar o contínuo. O interesse deste estudo foi o de compreender o fenômeno da fratura, observando o surgimento da fissura e a propagação da mesma.

Em artigo mais recente, Makoto (2003) apresentou um trabalho que faz a simulação numérica de pilares e vigas pré-fabricadas de concreto armado usando o programa computacional indicado pelo autor como ADINA. Utilizou o sistema de incremento direto, onde era aplicado um incremento de força, e analisada a estrutura, bem como os elementos fissurados. Utilizou para simular numericamente o concreto, o elemento bi-dimensional em estado plano de tensões. Para o critério de ruptura do elemento concreto foi utilizado o envelope biaxial de falhas, similar ao critério adotado pela NBR 6118 (ABNT, 2003). No processo foi considerado a abertura e fechamento das fissuras, as quais eram levadas em consideração tendo seu módulo de elasticidade reduzido. Foi feita uma comparação entre os resultados obtidos no programa, e os valores obtidos através de um modelo experimental, os quais apresentaram resultados similares.

Souza (2003) avaliou os recursos de análise não-linear e a confiabilidade do programa ADINA, para a simulação de vigas de concreto armado de alto desempenho. Para a modelagem do concreto, utilizou o modelo hipoeelástico baseado na relação tensão-deformação uniaxial, modelo este que se encontrava disponível no ADINA. Para a simulação de armaduras de aço no concreto armado, o modelo utilizado foi o “plástico-

linear”. Estes modelos são baseados no critério de escoamento de Von Mises. Chegou-se a conclusão de que os resultados obtidos com o programa foram muito bons.

Faglioni (2006) apresentou um trabalho onde fez simulação numérica de vigas de concreto armado usando o programa computacional denominado de FEISdec. Utilizou o elemento finito tridimensional, com etapas de carregamentos constantes, usando para a ruptura do elemento o critério de Mohr-Coulomb. Comparou seus resultados com modelos numéricos desenvolvidos por Carvalho (1994 apud FAGLIONI, 2006) onde foram usados os critérios de Branson e do CEB 90. Também comparou as respostas destes modelos com os resultados experimentais de Carvalho (1994 apud FAGLIONI, 2006). Os resultados foram considerados satisfatórios e serviram de base para as comparações feitas no primeiro estudo de caso desta dissertação.

CAPÍTULO 3

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 CONCEITOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE E RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

3.1.1 Considerações iniciais

A seguir serão apresentados alguns conceitos de resistência dos materiais e da teoria da elasticidade, necessários para o desenvolvimento das matrizes de rigidez do elemento retangular linear (concreto) e dos elementos tipo barra (utilizados para simular as armaduras). Estas informações também serão necessárias para a determinação do estado de fissuração e do comportamento dos elementos de concreto armado, avaliados pelo mapeamento das tensões em qualquer ponto do elemento finito.

3.1.2 Relações tensões × deformações para elementos em estado plano de tensões

Para representar o comportamento do concreto armado em vigas retas admitiu-se que a distribuição de tensões longitudinais (σ_x) para qualquer ponto situado a uma altura a partir da base da seção transversal é constante ao longo da espessura (direção perpendicular ao plano da viga), conforme constatado por Faglioni (2006). Assim, o elemento viga foi considerado como um elemento de espessura pequena em relação às demais dimensões e, portanto, como um elemento bidimensional com tensões nulas na direção perpendicular (σ_z) ao seu plano, ou seja, é um elemento em estado de plano de tensões, como ilustra a Figura 3.1.

Para o desenvolvimento das equações relacionadas com tensões, foi considerado que as tensões de tração são positivas e as de compressão são negativas.

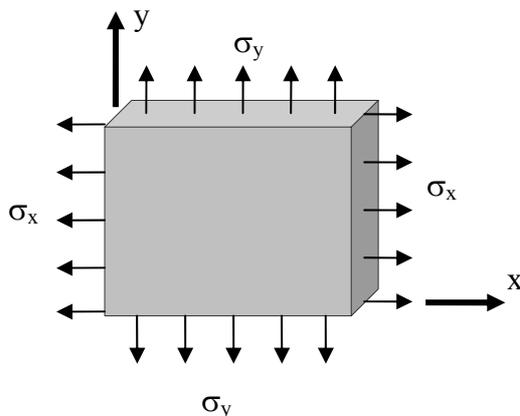


Figura 3.1 – Tipo de elemento considerado para o concreto armado – estado plano de tensões

Embora usualmente o concreto possa ser considerado como um material isótropo tendo apenas um valor do coeficiente de Poisson para qualquer direção, e módulos de elasticidade iguais nas direções x e y , neste trabalho considerou-se algo ligeiramente diferente por ser admitido o comportamento não-linear do concreto. Ao se trabalhar com o módulo de elasticidade secante do concreto, aqui chamado de instantâneo, têm-se valores diferentes nas direções x e y . Desta forma, as equações constitutivas (Lei de Hooke) envolvendo deformações e tensões equivalem ao caso de uma chapa ortotrópica.

É uma situação pouco usual, pois se trata de um material isótropo na sua concepção original por ter o mesmo comportamento em qualquer direção. No entanto, por ter comportamento não-linear, mesmo que igual em qualquer direção, apresenta propriedades diferentes nas diferentes direções para um determinado instante do carregamento. Isto significa que para cada nível de carregamento é preciso caracterizar cinco diferentes constantes: E_x , E_y , ν_{xy} , ν_{yx} e G .

Destas constantes, E_x e E_y são imediatas, pois são obtidas diretamente pelas equações que relacionam tensão e deformação do concreto, ou seja, para cada instante do carregamento têm-se as deformações calculadas, através das quais se obtêm as tensões e, conseqüentemente, os módulos de elasticidade secantes E_x e E_y pela relação σ/ϵ . Para os coeficientes de Poisson é necessário estabelecer relações que permita seu cálculo a partir das solicitações, como será visto na seção 5.4. Para a determinação do módulo de

deformação transversal será feito um desenvolvimento específico para relacioná-lo com os parâmetros associados ao concreto, conforme seção 3.2.2.

Por definição, os coeficientes de Poisson aqui empregados correspondem à relação entre deformações na direção passiva (perpendicular à direção da ação da força) e a deformação ativa (direção da força), com um sinal negativo, pois tração na direção ativa implica em encurtamento na direção passiva – Equação 3.1. Importante é notar que as deformações indicadas nestas equações correspondem exclusivamente àquelas associadas à aplicação isolada da tensão na respectiva direção x ou y.

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \quad \text{e} \quad \nu_{yx} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} \quad 3.1$$

3.1.2.1 Procedimento para determinação do módulo de elasticidade E_x , E_y e coeficiente de Poisson para material ortotrópico

Serão tratados separadamente os efeitos das deformações longitudinais (ε_x e ε_y) e da deformação transversal (γ_{xy}). Assim, no desenvolvimento a seguir serão considerados apenas os efeitos de ε_x e ε_y . Com esta simplificação, a Equação 3.2 representa as relações constitutivas para um material ortotrópico para o estado plano de tensões, aqui adotado como referência para o material em estudo. Estas equações são facilmente deduzidas, como é apresentado em detalhes em Carroll (1999, p.164), Lekhnitskii (1981), dentre outros.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_x} \sigma_x - \frac{\nu_{yx}}{E_y} \sigma_y \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu_{xy}}{E_x} \sigma_x + \frac{1}{E_y} \sigma_y \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \{\varepsilon\} = [D]^{-1} \{\sigma\} \quad 3.2$$

Como a matriz das constantes elásticas $[D]^{-1}$ é simétrica, os termos da diagonal ascendente podem ser trocados. Assim a Equação 3.2 pode ser reescrita na forma indicada na Equação 3.3.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E_x}\sigma_x - \frac{\nu_{xy}}{E_x}\sigma_y = \frac{1}{E_x}(\sigma_x - \nu_{xy}\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu_{yx}}{E_y}\sigma_x + \frac{1}{E_y}\sigma_y = \frac{1}{E_y}(-\nu_{yx}\sigma_x + \sigma_y)\end{aligned}\tag{3.3}$$

Desta forma, o módulo de elasticidade na direção x pode ser escrito usando a primeira equação de 3.3, resultando na Equação 3.4.

$$E_x = \frac{\sigma_x - \nu_{xy}\sigma_y}{\varepsilon_x}\tag{3.4}$$

O módulo de elasticidade E_y é então obtido usando a Equação 3.2 vinculada a ε_y . O uso desta equação mantém a dependência de ν_{xy} , resultando na Equação 3.5.

$$E_y = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y + \frac{\nu_{xy}\sigma_x}{E_x}}\tag{3.5}$$

Tendo-se os valores de E_x , E_y e ν_{xy} , torna-se possível determinar ν_{yx} tendo em vista a simetria da matriz $[D]^{-1}$, ou seja, $\frac{\nu_{yx}}{E_y} = \frac{\nu_{xy}}{E_x}$. Portanto: $\nu_{yx} = \frac{E_y}{E_x}\nu_{xy}$.

Deve ser lembrado que a matriz $[D]$ completa para materiais ortotrópicos (caso em questão) é dada pela Equação 3.6.

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{\nu_{yx}E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ \frac{\nu_{xy}E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}\tag{3.6}$$

3.1.2.2 Determinação do módulo de elasticidade transversal (G)

Como hipótese básica, será considerada a validade da superposição de efeitos, ou seja, a ação conjunta das tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} equivale à soma dos efeitos de cada uma agindo isoladamente. Portanto, nesta seção será considerado o caso de um elemento infinitesimal sujeito somente ao efeito das tensões de cisalhamento τ_{xy} , admitindo que esta tensão é a única responsável pela geração da distorção angular (γ). A Figura 3.2 esquematiza a situação considerada.

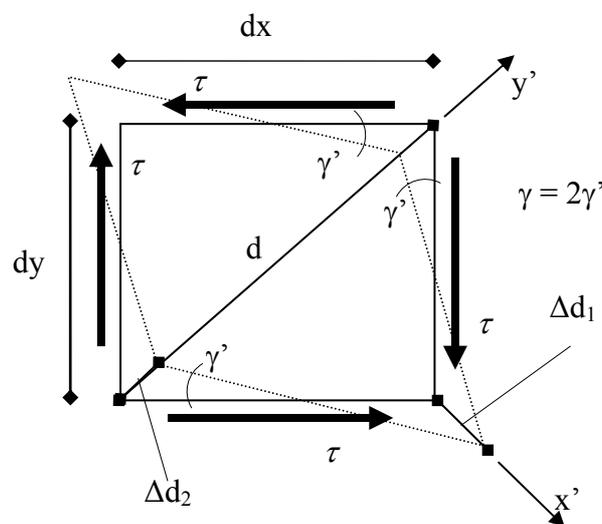


Figura 3.2-Elemento finito sujeito ao cisalhamento puro

As deformações em um instante de carregamento podem ser obtidas pelas Equações 3.7 e 3.8, onde Δd_1 e Δd_2 são os valores absolutos dos deslocamentos nas diagonais caracterizadas pelos eixos x' e y' , respectivamente, na forma de alongamento (positivo) e encurtamento (negativo).

$$\Delta d_1 = \varepsilon_{x'} \cdot d \quad 3.7$$

$$\Delta d_2 = \varepsilon_{y'} \cdot d \quad 3.8$$

Geometricamente a distorção angular γ vale $2 \gamma'$, portanto pode ser obtida pela Equação 3.9.

$$\gamma = \frac{\Delta d_1}{d} + \frac{\Delta d_2}{d} \quad 3.9$$

Substituindo a Equação 3.7 e 3.8 em 3.9 e lembrando que $\varepsilon_{x'}$ é positivo e $\varepsilon_{y'}$ é negativo, obtêm-se 3.10.

$$\gamma = \varepsilon_{x'} - \varepsilon_{y'} \quad 3.10$$

As equações de $\varepsilon_{x'}$ e $\varepsilon_{y'}$ são estabelecidas conforme a Equação 3.3.

$$\varepsilon_{x'} = \frac{1}{E_{x'}} (\sigma_{x'} - \nu'_{xy} \cdot \sigma_{y'}) \quad 3.11$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{1}{E_{y'}} (\sigma_{y'} - \nu'_{yx} \cdot \sigma_{x'})$$

Sabendo-se que $\sigma_{x'} = -\sigma_{y'} = \tau$ (por equilíbrio estático de forças do elemento da Figura 3.2), e substituindo as Equações 3.11 em 3.10, obtêm-se através da 3.12 a equação que relaciona distorção angular com a tensão cisalhante.

$$\frac{\gamma}{\tau} = \frac{1}{G} = \left(\frac{1 + \nu'_{xy}}{E_{x'}} + \frac{1 + \nu'_{yx}}{E_{y'}} \right) \quad 3.12$$

Portanto, com o inverso do valor dado na Equação 3.12, tem-se o módulo de deformação transversal (G) em função dos valores de $E_{x'}$, $E_{y'}$, ν'_{xy} e ν'_{yx} , determinados para cada instante do carregamento. Este mesmo valor é mostrado por Carroll (1999, p.168), cuja dedução é feita usando conceitos da energia de deformação.

Assim, a equação completa que transforma tensão em deformação, para tensões planas, corresponde à Equação 3.13.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1+\nu'_{xy}}{E_{x'}} + \frac{1+\nu'_{yx}}{E_{y'}} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad 3.13$$

3.1.3 Tensões principais nos elementos infinitesimais

Nos elementos infinitesimais de uma estrutura sob ação de solicitações surgem tensões normais de tração e/ou compressão (σ_x e σ_y), bem como tensões tangenciais (τ_{xy}), conforme ilustra a Figura 3.3. Estas tensões podem ser representadas matricialmente da seguinte forma:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad 3.14$$

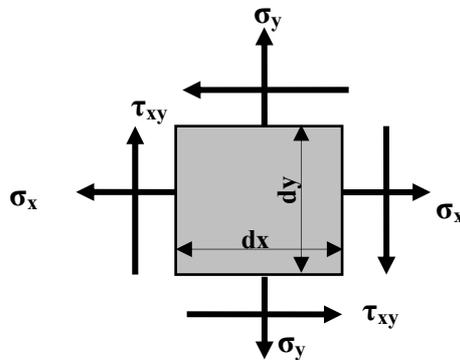


Figura 3.3 - Elemento infinitesimal sujeito a tensões normais e cisalhantes

Podem ser decompostas em direções preferenciais chamadas de principais, onde as tensões normais ortogonais têm um valor máximo e mínimo, como mostrado na Figura 3.4. Estas tensões ocorrem para o elemento infinitesimal girado de um ângulo α em relação à posição inicial, tal que a tensão tangencial seja nula.

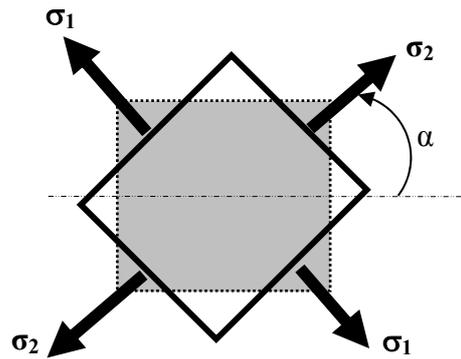


Figura 3.4 - Tensões principais em elemento infinitesimal

Para obter as tensões equivalentes sobre o elemento infinitesimal girado pelo ângulo α deve-se aplicar a Equação 3.15, onde α_{ij} é uma matriz transformação dada pela Equação 3.16. Isto corresponde à rotação do sistema de coordenadas retangulares.

$$[\bar{\sigma}] = [\alpha_{ij}]^T \cdot [\sigma] \cdot [\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{1\alpha} \\ \sigma_{2\alpha} \\ \tau_{\alpha} \end{bmatrix} \quad 3.15$$

$$[\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad 3.16$$

Desenvolvendo a Equação 3.15 e aplicando as relações trigonométricas apropriadas, obtêm-se as Equações 3.17, 3.18 e 3.19 para as tensões $[\bar{\sigma}]$.

$$\sigma_{1\alpha} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cdot \cos 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \text{sen} 2\alpha \quad 3.17$$

$$\sigma_{2\alpha} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cdot \cos 2\alpha - \tau_{xy} \cdot \text{sen} 2\alpha \quad 3.18$$

$$\tau_{\alpha} = - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cdot \text{sen} 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha \quad 3.19$$

Derivando as Equações 3.17, 3.18 e 3.19 parcialmente em relação a α e igualando-as a zero, obtêm-se os valores máximos e mínimos referentes às tensões principais, respectivamente, σ_1 e σ_2 .

$$\sigma_1 = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad 3.20$$

$$\sigma_2 = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad 3.21$$

Estas tensões ortogonais ocorrem para a rotação α que vale:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[\tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \right] \quad 3.22$$

3.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

3.2.1 Introdução

O método dos elementos finitos (MEF) consiste em uma técnica para a solução numérica de sistemas contínuos, onde o corpo é subdividido em partes de dimensões não infinitesimais, denominadas de elementos, interligados através de pontos denominados de nós. A formulação do comportamento do elemento é feita com base em princípios da mecânica do contínuo, que resultam em relações entre forças e deslocamentos para cada elemento.

Por se tratar de uma formulação bastante difundida no meio técnico, serão feitas apenas considerações gerais, sem detalhamentos. Informações mais enriquecedoras podem ser obtidas em Alves Filho (2005), Carroll (1999), Cook (1995), Knight (1993), Moaveni (1999), Rockey et. al. (1983) e Zienkiewicz (1980).

As relações constitutivas da teoria da elasticidade são fundamentais para qualquer tipo de aplicação, pois as formulações para problemas estruturais envolverão diretamente as relações tensão \times deformação, como já visto em 3.1.2 .

Para problemas mais simples utiliza-se o chamado método direto, onde a manipulação de informações baseia-se em relações constitutivas da teoria da elasticidade de forma direta.

Para problemas mais complexos que envolvem a solução de equações diferenciais de difícil solução pode-se utilizar a formulação com base nos resíduos ponderados ou variacional. O princípio dos trabalhos virtuais também pode ser utilizado com a mesma finalidade.

A formulação baseada nos resíduos ponderados faz com que a diferença entre a resposta aproximada e a real, chamada de resíduo, seja distribuída no domínio. Esta distribuição é ponderada por funções de diferentes naturezas. O método mais empregado é o de Galerkin que considera o erro (resíduo) distribuído com base nas funções de forma adotadas como funções aproximadoras.

Na formulação variacional o método de Rayleigh-Ritz é o mais conhecido para obtenção de soluções aproximadas de equações diferenciais. Baseia-se na escolha de uma função aproximadora que represente o fenômeno e na minimização da energia potencial total. A escolha adequada para estas funções é importante para se obter uma boa aproximação para a solução do problema.

Particularizando o MEF para problemas que são baseados em deslocamentos, essas funções aproximadoras são escritas em termos das componentes de deslocamentos nodais dos elementos finitos.

A referência para a solução deste tipo de problema é a Equação 3.23, onde $[K]$ é a matriz de rigidez, $\{u\}$ é o vetor dos deslocamentos nodais e $\{F\}$ representa o vetor de forças nodais.

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad 3.23$$

Esta transformação de deslocamentos em forças é aplicada para toda a estrutura. Contudo, para facilitar o processo de montagem da matriz de rigidez da estrutura global, utiliza-se uma equação semelhante para cada elemento. Desta forma, a matriz de rigidez global é montada a partir da sobreposição das contribuições de cada elemento. Assim, o objetivo inicial é encontrar a matriz de rigidez de cada elemento.

Neste trabalho empregaram-se dois tipos de elementos. Para o concreto foi usado o elemento bidimensional do tipo chapa com tensões planas. Para a armadura foi utilizado o elemento unidimensional com rigidez axial submetido a esforços de tração ou compressão.

A seguir será descrita, de forma sucinta, a formulação do elemento retangular para solução de problemas bidimensionais.

3.2.1.1 Formulação generalizada para elemento bidimensional

Na implementação computacional usada foi empregado o elemento plano retangular com quatro nós localizados nos encontros de suas arestas. Cada nó foi considerado com dois graus de liberdade definidos pelas translações em x e y.

Para avaliar o campo de deslocamentos deste problema plano, foi usada uma interpolação do tipo:

$$u(x,y) = [\varphi]\{u\} \quad 3.24$$

Nesta equação, a matriz $[\varphi]$ contém as funções de interpolação (forma) que transformam os deslocamentos nodais $\{u\}$ em deslocamentos para qualquer ponto do domínio.

Para o caso de pequenas deformações em problema plano, pode-se escrever as componentes do tensor de deformação de acordo com a Equação 3.25.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad 3.25$$

Para transformar deslocamentos nodais em deformações, utiliza-se a Equação 3.26, onde $[B]$ é a matriz dos operadores diferenciais usada para esta transformação.

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\} \quad 3.26$$

As relações constitutivas entre tensão e deformação são dadas por:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad 3.27$$

Empregando-se os diferentes métodos de cálculo descritos na literatura conclui-se que a matriz de rigidez de um elemento bidimensional de espessura “t” constante é dada por:

$$[k^e] = t \cdot \int_A [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dx \cdot dy \quad 3.28$$

Quando o elemento bidimensional não tem forma regular, faz-se uma transformação de coordenadas passando das coordenadas cartesianas (x e y) para as coordenadas naturais (ξ e η). Estas últimas têm seu domínio no intervalo de -1 a +1, Tendo-se então a chamada formulação isoparamétrica. Nesta nova referência surge a necessidade do emprego da matriz jacobiana dada por.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad 3.29$$

Então a matriz de rigidez do elemento transforma-se em:

$$[k^e] = t \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot \det(J) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad 3.30$$

A partir das matrizes de rigidez dos elementos determina-se a matriz de rigidez global. A solução deste sistema de equações permite o cálculo dos deslocamentos nodais. Com os deslocamentos nodais pode-se encontrar qualquer informação interna aos elementos. Observa-se que a matriz de rigidez da estrutura é simétrica e tem ordem igual a duas vezes o número de nós (dois graus de liberdade por nó).

3.2.2 Formulação específica da matriz de rigidez do elemento retangular linear em estado plano de tensões

Para simular o concreto, foi adotado o elemento finito retangular linear em estado plano de tensões, com quatro nós. Para o desenvolvimento da matriz de rigidez, tomou-se como

referência o elemento finito de dimensões $a \times b$ e espessura t , conforme mostra a Figura 3.5.

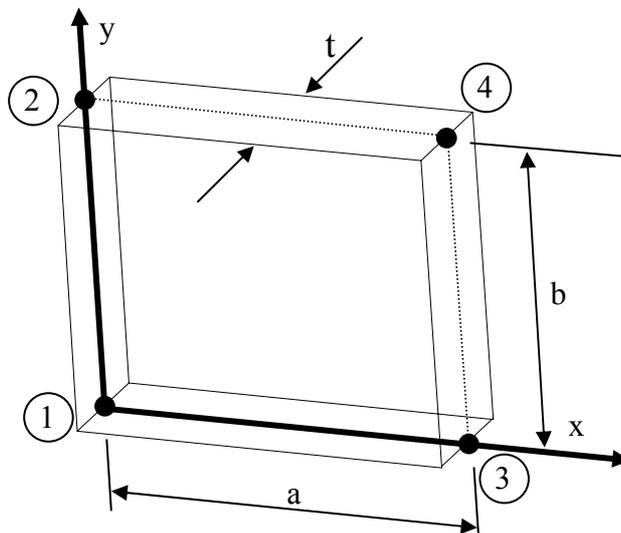


Figura 3.5 - Elemento finito retangular

A Figura 3.6 ilustra os deslocamentos nodais representados pelos pares u_i e v_i , respectivamente os deslocamentos na direção x e y do nó i , com i variando de 1 a 4.

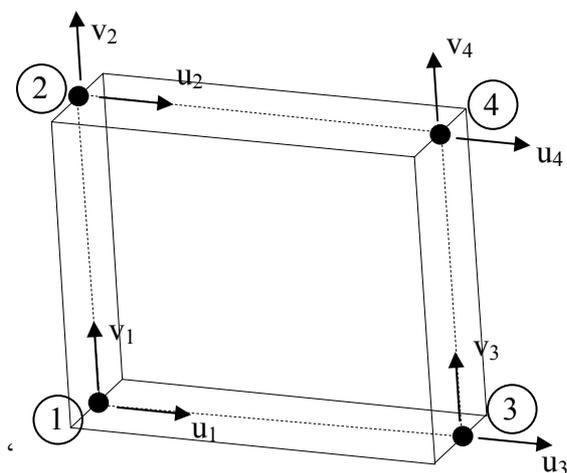


Figura 3.6 – Deslocamentos nodais do elemento finito retangular

Analogamente, as forças nodais podem ser representadas por F_{xi} e F_{yi} nas respectivas coordenadas mostradas na Figura 3.6. Esta mesma figura também indica a ordem de numeração dos nós do elemento.

Para a escolha da função de interpolação é necessário considerar o fato de que o elemento possui oito graus de liberdade (dois por nó). Para facilitar, os deslocamentos são separados para as direções x e y , ambos dependentes de x e y , portanto, tendo-se duas funções, uma para representar $u(x, y)$ e outra para $v(x, y)$. Como existem quatro graus de liberdade em cada direção, as funções aproximadoras para os deslocamentos podem ter até quatro coeficientes incógnitos. Assim, foram adotadas as funções indicadas nas Equações 3.31 e 3.32.

$$u(x, y) = C_1 + C_2x + C_3y + C_4xy \quad 3.31$$

$$v(x, y) = C_5 + C_6x + C_7y + C_8xy \quad 3.32$$

Representando 3.31 e 3.32 na forma matricial tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{Bmatrix} \quad 3.33$$

A Equação 3.33 pode ser representada na forma matricial simplificada pela 3.34.

$$\{\delta(x, y)\} = [H(x, y)]\{C\} \quad 3.34$$

Para a determinação dos coeficientes em função dos deslocamentos nodais, têm-se as seguintes condições de contorno:

$$p/x = 0, y = 0 \Rightarrow u(x, y) = u_1; v(x, y) = v_1 \quad 3.35$$

$$p/x = 0, y = b \Rightarrow u(x, y) = u_2; v(x, y) = v_2 \quad 3.36$$

$$p/x = a, y = 0 \Rightarrow u(x, y) = u_3; v(x, y) = v_3 \quad 3.37$$

$$p/x = a, y = b \Rightarrow u(x, y) = u_4; v(x, y) = v_4 \quad 3.38$$

Aplicando as condições 3.35, 3.36, 3.37 e 3.38 às Equações 3.31 e 3.32 obtém-se:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= C_1 \\
 v_1 &= C_5 \\
 u_2 &= C_1 + bC_3 \\
 v_2 &= C_5 + bC_7 \\
 u_3 &= C_1 + aC_4 \\
 v_3 &= C_5 + aC_3 \\
 u_4 &= C_1 + aC_2 + bC_3 + abC_4 \\
 v_4 &= C_5 + aC_6 + bC_7 + abC_8
 \end{aligned}
 \tag{3.39}$$

Transformando-se na forma matricial tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{Bmatrix}
 \tag{3.40}$$

Representando na forma matricial simplificada tem-se:

$$\{\delta\} = [A] \cdot \{C\}
 \tag{3.41}$$

Isolando $\{C\}$ tem-se:

$$\{C\} = [A]^{-1} \{\delta\}
 \tag{3.42}$$

Reescrevendo 3.42 tem-se:

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/a & 0 & 0 & 0 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ -1/b & 0 & 1/b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/ab & 0 & 1/a & 0 & -1/ab & 0 & 1/ab & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/a & 0 & 0 & 0 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & -1/b & 0 & 1/b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/ab & 0 & -1/ab & 0 & -1/ab & 0 & 1/ab \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad 3.43$$

Usando as relações diferenciais definidas em 3.25 (pág. 24), aplicadas à 3.31 e 3.32, obtém-se:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = C_2 + C_4 y \quad 3.44$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = C_7 + C_8 y \quad 3.45$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = C_3 + C_4 x + C_6 + C_8 y \quad 3.46$$

Pode-se escrever 3.44, 3.45 e 3.46 na forma matricial, conforme a Equação 3.47.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{Bmatrix} \quad 3.47$$

Ou na forma matricial simplificada tem-se:

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [G] \cdot \{C\} \quad 3.48$$

Substituindo 3.42 em 3.48 tem-se:

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [G] \cdot [A]^{-1} \{\delta\} \quad 3.49$$

Fazendo:

$$[G] \cdot [A]^{-1} = [B] \quad 3.50$$

Desta forma, a matriz [B] representa a matriz de transformação de deslocamentos nodais para deformações em qualquer ponto no elemento, ou seja:

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [B] \cdot \{\delta\} \quad 3.51$$

Usando a Equação 3.25 (pág. 24) de forma generalizada, obtém-se 3.52 para determinar as tensões em qualquer ponto do elemento.

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \{\varepsilon(x, y)\} \quad 3.52$$

Substituindo 3.51 em 3.52 obtém-se a relação de transformação de deslocamentos nodais em tensões:

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \cdot [B] \cdot \{\delta\} \quad 3.53$$

Tem-se, portanto, todas as equações necessárias para relacionar os parâmetros envolvidos no equacionamento que representam as condições para determinação da matriz de rigidez do elemento quadrangular. Neste trabalho a matriz de rigidez será deduzido com o uso do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Para isto, deve-se calcular o trabalho das forças externas (W_{ext}) e o trabalho das forças internas (W_{int}).

O trabalho das forças externas (W_{ext}) é dado pela Equação 3.54 onde aparece o somatório das parcelas do trabalho externo realizado em cada nó do elemento (forças pelos seus correspondentes deslocamentos nodais).

$$W_{ext} = F_{x1} \cdot u_1 + F_{y1} \cdot v_1 + F_{x2} \cdot u_2 + F_{y2} \cdot v_2 + F_{x3} \cdot u_3 + F_{y3} \cdot v_3 + F_{x4} \cdot u_4 + F_{y4} \cdot v_4 \quad 3.54$$

Escrevendo 3.54 na forma matricial simplificada tem-se:

$$W_{ext} = \{\delta\}^T \{F\} \quad 3.55$$

Trabalho das forças internas (W_{int}):

Nesta equação tem-se que $p = \frac{a}{b}$ e as constantes d_{ij} , para o caso de material ortotrópico no estado plano de tensões, são obtidas pela Equação 3.61 (idem à Equação 3.6). Caso o problema a ser resolvido fosse outro, bastaria usar a matriz $[D]$ correspondente.

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{\nu_{yx}E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ \frac{\nu_{xy}E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad 3.61$$

3.2.3 Determinação das deformações no elemento finito retangular linear

Como a aplicação do método dos elementos finitos é feita a partir da equação básica $[K]\{u\}=\{F\}$, isto significa que os deslocamentos nodais são os primeiros valores determinados no processo, e portanto, estes devem ser a referência para a determinação de qualquer outra informação associada ao problema. Assim, para determinação das deformações deve-se usar a Equação 3.51, onde a matriz $[B]$, dada pela Equação 3.50, vale:

$$[B] = \frac{1}{a \cdot b} \begin{bmatrix} -b+y & 0 & b-y & 0 & y & 0 & -y & 0 \\ 0 & -a+x & 0 & -x & 0 & x & 0 & a-x \\ -a+x & -b+y & -x & b-y & x & y & a-x & -y \end{bmatrix} \quad 3.62$$

3.2.4 Determinação das tensões normais e cisalhantes no elemento finito retangular linear

Para a determinação das tensões principais em um elemento finito é necessário conhecer as tensões normais (σ_x e σ_y) e cisalhantes (τ_{xy}) neste mesmo elemento. Como dito na seção anterior, os deslocamentos nodais são a referência para a determinação de qualquer outra informação associada ao problema.

Então, para determinar as tensões deve-se aplicar a Equação 3.53. Para facilitar a manipulação destas informações é adequado desenvolver a multiplicação $[D][B]$ que será chamada de matriz $[H]$, dada pela Equação 3.63.

$$[H] = \begin{bmatrix} -d_{11}(b-y) & -d_{21}(a-x) & -d_{11}y & d_{21}(a-x) & d_{11}(b-y) & -d_{21}x & d_{11}y & d_{21}x \\ -d_{21}(b-y) & -d_{22}(a-x) & -d_{21}y & d_{22}(a-x) & d_{21}(b-y) & -d_{22}x & d_{21}y & d_{22}x \\ -d_{33}(a-x) & -d_{33}(b-y) & d_{33}(a-x) & -d_{33}y & -d_{33}x & d_{33}(b-y) & d_{33}x & d_{33}y \end{bmatrix}$$

3.63

3.2.5 Formulação da matriz de rigidez do elemento barra de armadura

Para simular as armaduras longitudinais e transversais, foi adotado o elemento finito do tipo barra articulada nas extremidades, com dois graus de liberdades por nó. Para o desenvolvimento da matriz de rigidez deste tipo de elemento, considerou-se uma barra articulada nas extremidades de comprimento L , área da seção transversal A , módulo de elasticidade E_a e inclinação α , conforme mostra a Figura 3.7. Para o caso deste trabalho, o ângulo α vale 0° para a armadura longitudinal e 90° para estribos.

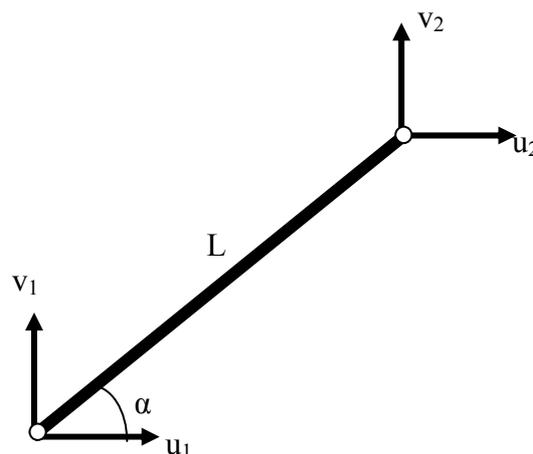


Figura 3.7-Elemento barra articulada nas extremidades

Considerando que se trata de um problema bastante simples e estas informações estão disponíveis em qualquer publicação com o tema de análise matricial das estruturas, então serão omitidas todas as deduções. Assim, a matriz de rigidez do elemento no sistema de coordenadas global é dado por:

$$[K^e] = \frac{A \cdot E}{L} \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) & \sin(\alpha)\cos(\alpha) & -\cos^2(\alpha) & -\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) & \sin^2(\alpha) & -\sin(\alpha)\cos(\alpha) & -\sin^2(\alpha) \\ -\cos^2(\alpha) & -\sin(\alpha)\cos(\alpha) & \cos^2(\alpha) & \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha)\cos(\alpha) & -\sin^2(\alpha) & \sin(\alpha)\cos(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{bmatrix} \quad 3.64$$

CAPÍTULO 4

MODELOS FÍSICOS DO CONCRETO E DO AÇO

4.1 MODELOS FÍSICOS NÃO-LINEARES

4.1.1 Introdução

O concreto e o aço são materiais considerados isotrópicos, mas apresentam para determinados níveis de tensões um comportamento físico não-linear conforme já comentado anteriormente. Por este motivo deve ser considerada no processo a variação do módulo de elasticidade, em função da variação das tensões, porém considerado instantaneamente linear.

A equação básica $[K]\{u\}=\{F\}$ tem como hipótese o fato do sistema ser linear. Assim, as matrizes de rigidez desenvolvidas para os elementos retangulares e para a barra articulada (armadura) foram consideradas para materiais de comportamento linear. Para contornar o problema utilizou-se o processo incremental de carregamento, onde em cada etapa (iteração) o módulo de elasticidade é linearizado, conforme a Figura 4.1 (concreto comprimido), Figura 4.2 (concreto tracionado) e Figura 4.3 (armadura). Trabalhou-se, então, com o módulo de elasticidade secante para cada iteração.

4.1.2 Concreto

4.1.2.1 Determinação do módulo de elasticidade instantâneo do concreto à compressão

De acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2003) a relação tensão \times deformação para o concreto comprimido é dada pela Equação 4.1 para deformação até 2%. A partir deste nível de deformação, considera-se que a tensão seja constante e igual a f_{ck} , como pode ser visto na Figura 4.1.

$$\sigma_c = f_{ck} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\text{‰}} \right)^2 \right] \quad 4.1$$

Esta mesma equação pode ser escrita de outra forma, logicamente, com o mesmo resultado:

$$\sigma_c = (-250.000 \cdot \varepsilon^2 + 1000 \cdot \varepsilon) \cdot f_{ck} \quad 4.2$$

Dividindo 4.2 por ε obtém-se a Equação 4.3 que relaciona o módulo de elasticidade instantâneo secante ($E_{inst.}$) com a deformação.

$$E_{inst} = -250.000 \cdot f_{ck} \cdot \varepsilon + 1000 \cdot f_{ck} \quad 4.3$$

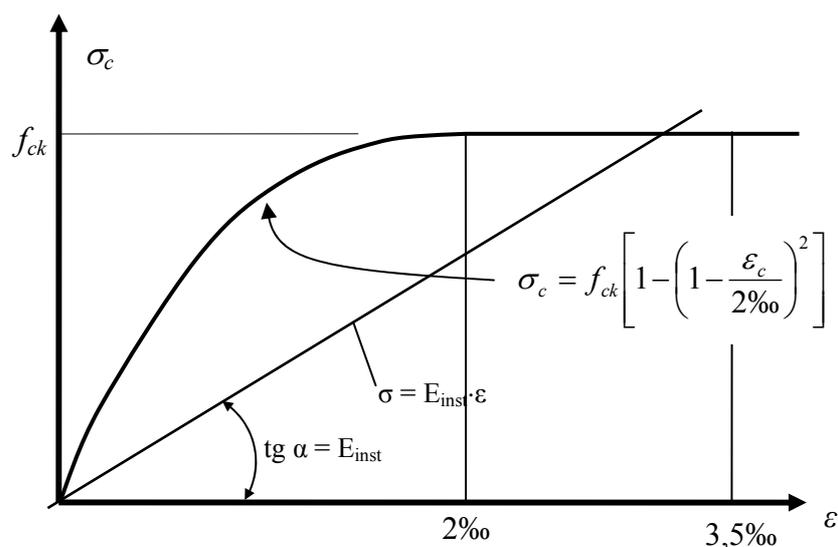


Figura 4.1 - Módulo de elasticidade instantâneo para o concreto comprimido (NBR 6118, 2003)

4.1.2.2 Determinação do módulo de elasticidade instantâneo na tração do concreto

De acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2003) a relação tensão \times deformação para o concreto tracionado segue um modelo bilinear indicado na Figura 4.2. Portanto, o módulo de elasticidade instantâneo do elemento concreto na tração dependerá do nível de tensão. Para tensões até $0,9f_{ctk}$, utiliza-se o módulo de elasticidade inicial (E_{ci}). Para tensões acima deste

valor, o módulo de elasticidade é obtido pela Equação 4.4, que depende da deformação da etapa anterior de carregamento.

$$\sigma_{ct} = \frac{f_{ctk}}{\left(0,0015 - \frac{9f_{ctk}}{E_{ci}}\right)} \left(\varepsilon - \frac{0,9f_{ctk}}{E_{ci}} \right) + 0,9f_{ctk} \quad 4.4$$

Dividindo a Equação 4.4 por ε obtém-se na equação 4.5 o módulo de elasticidade instantâneo, E_{inst} .

$$E_{inst} = \frac{f_{ctk}}{\left(0,0015 - \frac{9f_{ctk}}{E_{ci}}\right)} \left(1 - \frac{0,9f_{ctk}}{E_{ci}\varepsilon} \right) + \frac{0,9f_{ctk}}{\varepsilon} \quad 4.5$$

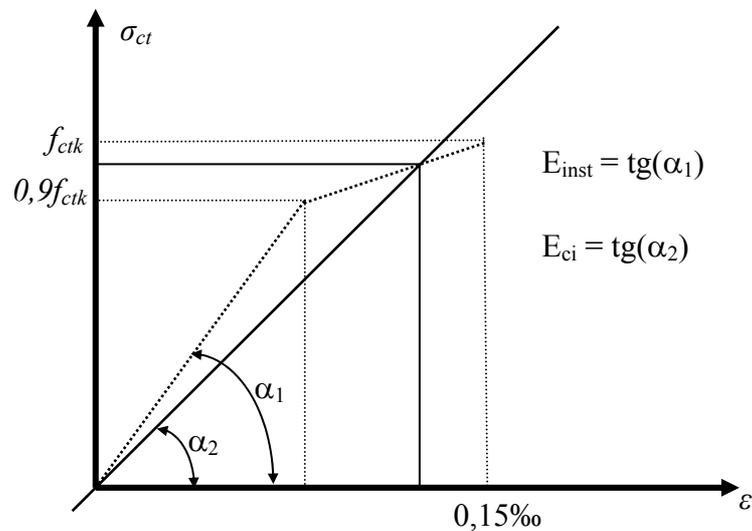


Figura 4.2 - Diagrama tensão×deformação bilinear à tração do concreto (NBR 6118, 2003)

4.1.3 Aço

4.1.3.1 Determinação do módulo de elasticidade instantâneo do aço à tração e compressão

A NBR 6118 (ABNT, 2003) permite que para os estados limite de serviço e último pode-se utilizar o diagrama simplificado indicado na Figura 4.3, para armaduras passivas de aço com ou sem patamar de escoamento.

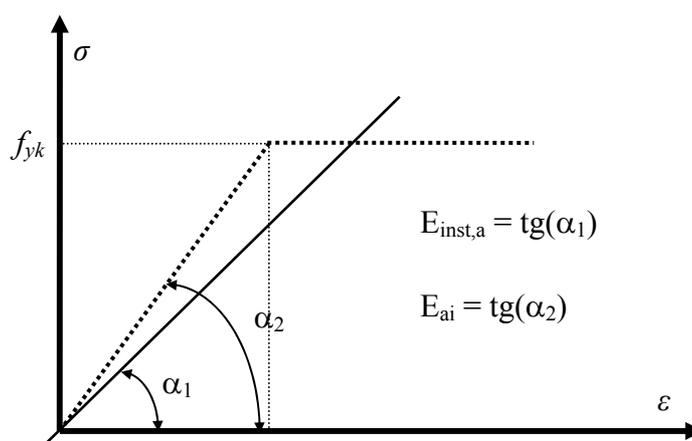


Figura 4.3 - Diagrama tensão×deformação bilinear para o aço (NBR 6118, 2003)

4.1.4 Teoria da fissuração

Com o objetivo de acompanhar no método o comportamento das aberturas e a localização das fissuras, são apresentadas algumas informações sobre a teoria da fissuração.

Devido à aderência entre o concreto e a armadura, as fissuras se desenvolvem ao longo da estrutura. A aderência possibilita a transmissão da tensão de tração do concreto para a armadura e vice-versa, fazendo com que o concreto entre as fissuras permaneça com uma significativa capacidade de absorver solicitações. Este fenômeno é chamado de “tension-stiffening”, pois acarreta uma resposta mais rígida do que a resposta de comportamento frágil. Portanto, na verificação da fissuração do concreto armado (tracionado), deve-se considerar a contribuição da rigidez do concreto entre fissuras (D’AVILA e CAMPOS FILHO, 2001).

Alguns modelos numéricos foram implementados computacionalmente por Lima (2002), a fim de simular o comportamento não-linear físico de vigas de concreto armado e protendido sob ação conjunta de torção, flexão bi-lateral e força axial. Nos casos em que a flexão é predominante sobre a torção e, portanto, o mecanismo estrutural da peça fissurada é governado pela flexão, a rigidez à torção pós-fissuração depende da abertura da fissura, do espaçamento entre fissuras, da taxa de armadura e do efeito de pino oferecido por esta última. O comportamento do concreto à tração foi modelado considerando a zona de envolvimento da armadura, efeito de *tension-stiffening*, e nas regiões da seção transversal sem enrijecimento, foi utilizado o modelo proposto por Vebo e Ghali (1977 apud LIMA, 2002). As armaduras passivas foram modeladas considerando comportamento elastoplástico perfeito ou com encruamento positivo, por meio de diagrama bi-linear, representando o efeito de *hardening*. Neste caso, o módulo de elasticidade do trecho após o escoamento foi admitido igual a 1% do módulo E da reta inicial.

Segundo Mason (1976) no estágio de fissuração de uma viga reta de concreto armado, quando é formada uma primeira fissura, uma segunda fissura se formará a uma distância sempre maior que o valor $\Delta\ell$ desta primeira, e ainda mais, se existir previamente uma segunda fissura a uma distância da primeira, menor que $2\Delta\ell$, não surgirá uma terceira fissura entre as duas.

O valor de $\Delta\ell$ pode ser obtido através da seguinte equação:

$$\Delta\ell = \frac{1}{4} \frac{f_{ctk}}{\tau_b} \frac{\phi}{\mu_i} \quad 4.6$$

Fazendo:

$$k = \frac{1}{4} \frac{f_{ctk}}{\tau_b} \quad 4.7$$

Tem-se:

$$\Delta\ell = k \frac{\phi}{\mu_i} \quad 4.8$$

Onde:

k : constante que depende da resistência e da aderência do concreto com o aço.

$\mu_i = A_s/A_c$, onde A_s é a área de armadura e A_c é a área de concreto que envolve as armaduras.

\varnothing : diâmetro das barras de aço.

τ_b : tensão de aderência (cisalhante) entre o concreto e o aço

4.1.5 Resistência do concreto a tensões normais combinadas

Com o objetivo de justificar a utilização do envelope biaxial de falhas no concreto empregado no modelo usado neste trabalho, são apresentados alguns experimentos realizados, que comprovam a eficácia do envelope.

Segundo Carrazedo (2002), resultados experimentais indicam que o concreto submetido à compressão biaxial apresenta um ganho de resistência. O aumento máximo de resistência ocorre quando σ_2 / σ_1 está próximo de 0,5 e pode representar um acréscimo superior a 25% sobre a resistência uniaxial. Num estado de compressão biaxial em que $\sigma_2 / \sigma_1 = 1$ a resistência apresenta um aumento da ordem de 16%.

Segundo Pfeil (1985), a resistência do concreto simples a esforços combinados foi determinada em ensaios especiais, onde as tensões solicitantes eram aplicadas por meio de êmbolos, com a finalidade de se permitir a livre deformação do concreto.

O equipamento utilizado permite a realização de ensaios com tensões normais planas ou triaxiais. Ele foi utilizado nas pesquisas da universidade de Munique, na Alemanha. Na Figura 4.4 são apresentados os resultados dos ensaios de resistência do concreto sob ação de tensões normais solicitantes em duas direções ortogonais, de acordo com Pfeil (1985).

Na região tração-tração a ruptura ocorre sob ação da tensão principal de tração σ_1 . A resistência à tração é praticamente igual à obtida nos ensaios de tração simples.

Na região tração-compressão, a ruptura se dá por tração sob ação da tensão principal σ_1 . A resistência à tração decresce com a tensão de compressão σ_2 . Para valores muito pequenos de σ_1 ($\sigma_1 \leq 0,01 \sigma_2$) a ruptura se dá por compressão.

Na região compressão-compressão, observa-se um aumento da resistência à compressão ($\sigma_2 \geq f_{cc}$). Para ($\sigma_{cc1} \geq 0,03\sigma_2$), obtém-se, aproximadamente, uma resistência 20% superior à resistência à compressão simples do concreto.

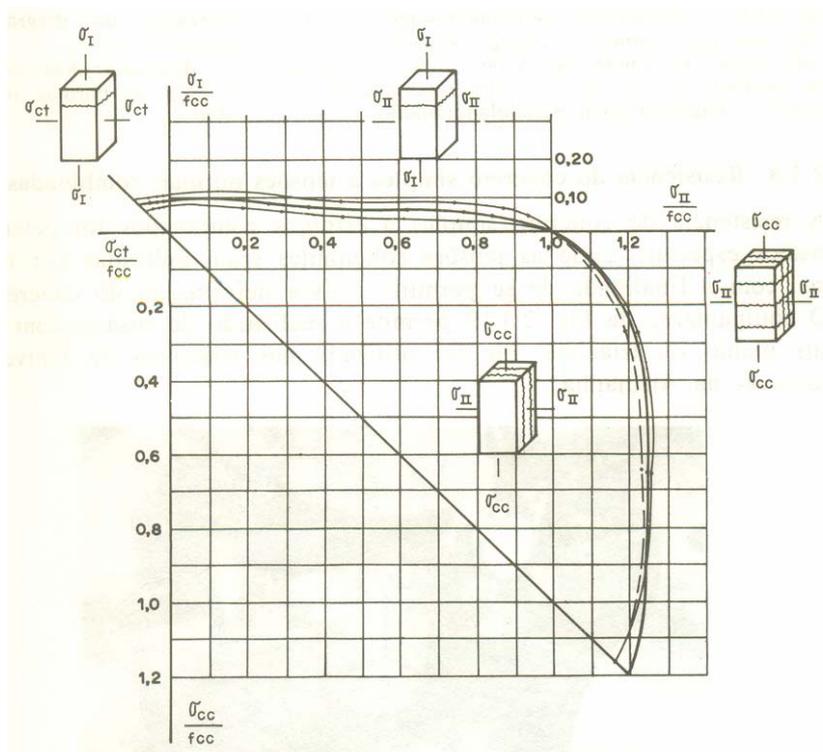


Figura 4.4 - Resistência do concreto simples a tensões normais solicitantes combinadas biaxiais.

Fonte: Pfeil (1985)

4.1.6 Variação do coeficiente de Poisson em função do nível de carregamento

Conforme destacado por Leonhardt e Monnig (1982, p.21) e Rüsç (1981, p.99), o coeficiente de Poisson varia com a intensidade do carregamento. Portanto, no método empregado onde a solicitação é aplicada gradativamente existirá um par de valores ν_{xy} e ν_{yx} para cada etapa do carregamento, assim como ocorre para E_x e E_y . Esta informação não é facilmente encontrada na literatura técnica.

Tendo em vista a escassa quantidade de informações sobre esta questão, tomou-se como base o trabalho experimental desenvolvido por Cho e Alemu (2002). Estes desenvolveram trabalho experimental para relacionar o coeficiente de Poisson com tensões aplicadas em cinco corpos-de-prova. Os resultados estão mostrados na Figura 4.5. Observa-se uma grande dispersão dos resultados, onde numa observação geral não é possível notar qual é a

tendência da relação entre tensão e coeficiente de Poisson. Os autores apenas mencionam que o valor médio do coeficiente de Poisson é 0,1197. No entanto, para efeito desta dissertação, foi estabelecida uma relação numérica, aplicando-se análise de regressão linear ao conjunto de dados, gerando o diagrama mostrado na Figura 4.6.

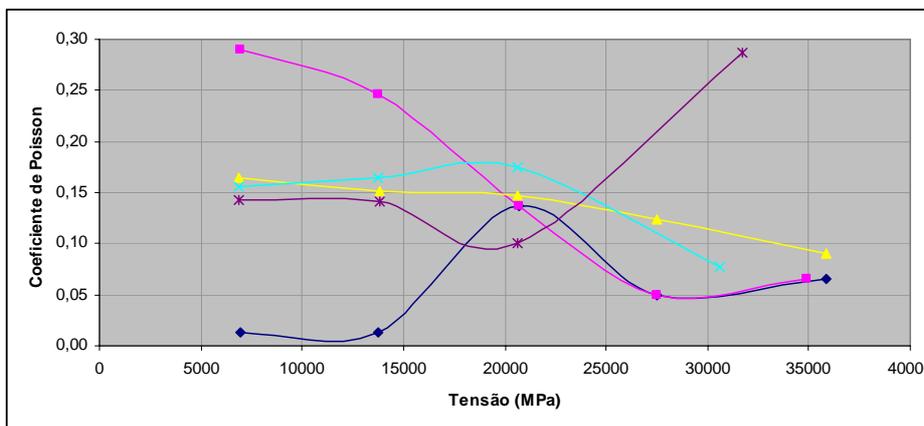


Figura 4.5 – Resultados experimentais de Cho e Alemu (2002)

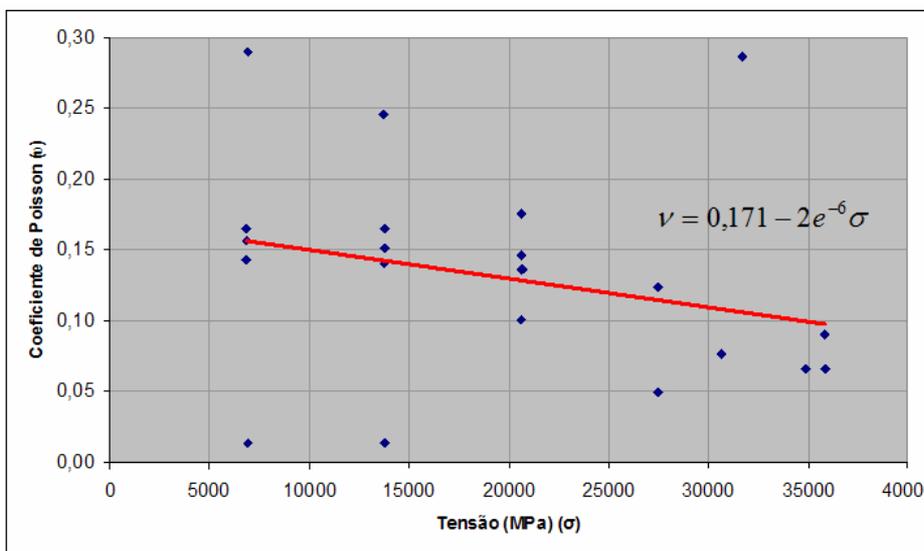


Figura 4.6 – Relação tensão × coeficiente de Poisson resultante do trabalho de Cho e Alemu (2002)

Como já mencionado, a relação aqui encontrada foi adotada internamente no programa computacional desenvolvido, ou seja, $\nu = 0,171 - 2e^{-6}\sigma$.

4.2 CRITÉRIO DE RUPTURA

4.2.1 Envelope biaxial de falhas no concreto

Para a verificação da ruptura do elemento, bem como para a localização do elemento sujeito à maior tensão, foi utilizado o critério do envelope biaxial de falha no concreto, com a simplificação apresentada na NBR 6118 (ABNT, 2003), conforme mostra a Figura 4.7. Em função das tensões principais σ_1 e σ_2 o elemento terá suas tensões localizadas em um dos oitos setores mostrados na Figura 4.7.

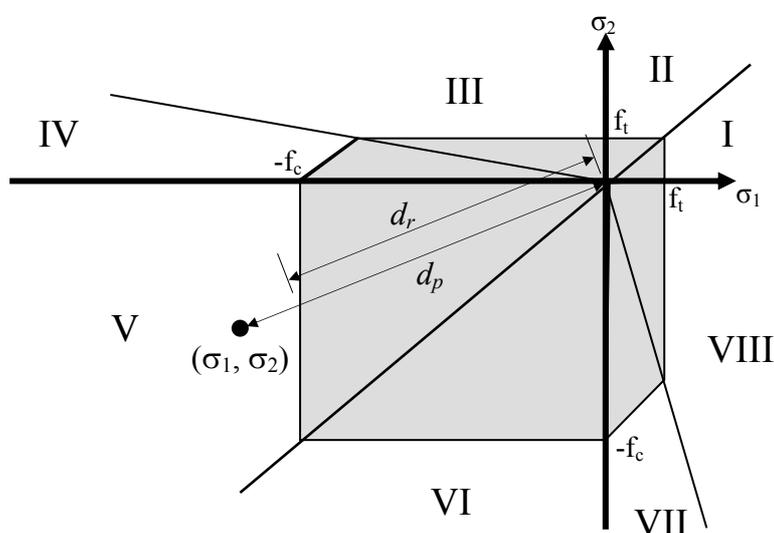


Figura 4.7 - Envelope biaxial de falha no concreto e zonas das tensões principais

Para a verificação do elemento fissurado, é comparada a distância (d_p), com a distância (d_r) da origem até a intersecção com a reta limite do envelope. Para a identificação do elemento mais solicitado para a ruptura (no caso de existirem vários), toma-se aquele com a maior distância proporcional em relação ao limite do envelope (d_p / d_r).

Deve ser observado que as tensões de tração são consideradas positivas, enquanto as de compressão negativas.

Para a determinação da distância da origem até o ponto de coordenadas (σ_1, σ_2) , foi utilizada a Equação 4.9.

$$d_p = \sqrt{(\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2} \quad 4.9$$

A seguir são apresentadas as condições para a localização dos trechos em que estão as tensões principais, e suas respectivas equações que permitem calcular a distância (d_r) da origem dos eixos cartesianos, até a intersecção com as retas limites, observando que as retas utilizadas para a determinação da distância, passam pelo ponto de coordenadas (σ_1, σ_2) .

Setor I: $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ e $(\sigma_2/\sigma_1) < 1$

$$d_r = \sqrt{(\sigma_t)^2 + \left(\frac{\sigma_t \cdot \sigma_2}{\sigma_1}\right)^2} \quad 4.10$$

Setor II: $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ e $(\sigma_2/\sigma_1) > 1$

$$d_r = \sqrt{(\sigma_t)^2 + \left(\frac{\sigma_t \cdot \sigma_1}{\sigma_2}\right)^2} \quad 4.11$$

Setor III: $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 > 0$ e $(-\sigma_2/\sigma_1) > -\sigma_t/(\sigma_c \cdot 0,6)$

$$d_r = \sqrt{(\sigma_t)^2 + \left(\frac{\sigma_t \cdot \sigma_1}{\sigma_2}\right)^2} \quad 4.12$$

Setor IV: $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 > 0$ e $(-\sigma_2/\sigma_1) < -\sigma_t/(\sigma_c \cdot 0,6)$

$$d_r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_t}{\left(\frac{0,4 \cdot \sigma_2}{\sigma_1} + \frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right)}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 \cdot \sigma_t}{\sigma_1 \cdot \left(\frac{0,4 \cdot \sigma_2}{\sigma_1} + \frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right)}\right)^2} \quad 4.13$$

Setor V: $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 < 0$ e $(\sigma_2/\sigma_1) < 1$

$$d_r = \sqrt{(\sigma_c)^2 + \left(\frac{\sigma_c \cdot \sigma_2}{\sigma_1}\right)^2} \quad 4.14$$

Setor VI: $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 < 0$ e $(\sigma_2/\sigma_1) > 1$

$$d_r = \sqrt{(\sigma_c)^2 + \left(\frac{\sigma_c \cdot \sigma_1}{\sigma_2}\right)^2} \quad 4.15$$

Setor VII: $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$ e $(-\sigma_1/\sigma_2) < -\sigma_t/(\sigma_c \cdot 0,6)$

$$d_r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_c}{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \frac{0,4 \cdot \sigma_c}{\sigma_t}\right)}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 \cdot \sigma_c}{\sigma_1 \cdot \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \frac{0,4 \cdot \sigma_c}{\sigma_t}\right)}\right)^2} \quad 4.16$$

Setor VIII: $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$ e $(-\sigma_1/\sigma_2) > -\sigma_t/(\sigma_c \cdot 0,6)$

$$d_r = \sqrt{(\sigma_t)^2 + \left(\frac{\sigma_t \cdot \sigma_2}{\sigma_1}\right)^2} \quad 4.17$$

CAPÍTULO 5

ASPECTOS COMPUTACIONAIS

5.1 DESCRIÇÃO DO MÉTODO

Os modelos empregados para análise são as vigas retas de concreto armado sob quaisquer condições de vinculações com armaduras longitudinais e transversais.

O processo de cálculo aplicado baseia-se no método dos elementos finitos, cujas matrizes de rigidez dos elementos do tipo concreto e do tipo armadura foram apresentadas nos capítulos anteriores. Esta implementação computacional é clássica. Contudo, diversos procedimentos devem ser adotados para acomodar todas as variáveis do problema em um método generalizado capaz de representar o comportamento do concreto e do aço ao mesmo tempo, incluindo os efeitos de não-linearidade física considerados no problema.

São consideradas no processo, além do elemento concreto, representado pelo elemento retangular linear em estado plano de tensões, as armaduras longitudinais e transversais, representadas pelo elemento finito do tipo barra articulada nas extremidades com capacidade de tração ou compressão axial.

O processo é iterativo, sendo que a cada iteração é adicionada uma parcela da força total aplicada na estrutura. Em cada passo de força é verificada a distribuição de tensões e, conseqüentemente, de deformações, para detectar a presença de fissuras em cada um dos elementos. Pode ocorrer que vários elementos apresentem fissuras ao mesmo tempo. Portanto, é necessária que em cada etapa do processo seja feita uma varredura para identificar estes elementos. Ao ocorrer a fissura no elemento, este será considerado com um módulo de elasticidade reduzido. Para continuar o processo, repete-se o mesmo nível de carregamento para o qual se detectou a fissuração. A repetição deste nível de carregamento é feita com os elementos fissurados. Esta repetição ocorrerá até que não haja

mais elementos fissurados naquela iteração. Pelo fato do método consistir na aplicação de ações na estrutura na forma escalonada, esta repetição faz com que o processo de fissuração do método possa se aproximar bem da realidade.

Paralelamente a este processo é verificado para cada iteração o nível de tensão para o concreto e para o aço, para que a curva tensão \times deformação destes materiais possam ser consideradas no processo, representando a não-linearidade física, conforme descrito no Capítulo 4.

A implementação computacional da não-linearidade física do elemento concreto e do elemento aço é feita a cada iteração, quando é calculado o módulo de elasticidade instantâneo.

Embora a não-linearidade geométrica deva ser considerada no cálculo para se atingir um grau de realismo maior para a análise, esta não foi considerada por se tratar de problema restrito ao caso de vigas onde os deslocamentos não são muito significativos. Futuramente este efeito será implementado no programa computacional.

5.2 ALGORITMO DO MÉTODO

É apresentado a seguir um algoritmo simplificado do método usado para cada etapa de carregamento. Vale lembrar que o carregamento é aplicado gradativamente em número de parcelas definidas pelo usuário. O procedimento pode ser descrito por:

- a) Cálculo da estrutura com carregamento correspondente à parcela de carga da etapa. Caso já existam elementos fissurados, estes serão considerados no processo com seu módulo de elasticidade reduzido;
- b) Determinação das tensões principais e do módulo de elasticidade instantâneo;
- c) Pesquisar para todos os elementos da estrutura o surgimento de fissuras. Se o elemento estiver fissurado e posicionado a uma distância menor que $\Delta\ell$ (definido na Equação 4.6, pág. 39) de outra fissura, o elemento não será considerado como fissurado;

- d) No caso de se encontrar mais de um elemento fissurado na etapa de cálculo em questão, somente o elemento com maior tensão será considerado fissurado. Caso existam vários elementos com a mesma tensão, estes serão considerados fissurados também – caso de estruturas elástica e geometricamente simétricas com carregamento simétrico;
- e) Caso seja encontrado pelo menos um elemento fissurado na etapa de carregamento atual, voltar ao item a) repetindo-se o mesmo nível (etapa) de carregamento. Caso contrário continuar o processo. Havendo, ou não, elementos fissurados o programa sempre busca a estabilização da estrutura em função do número máximo de repetições definido para os passos de carga (fornecido pelo usuário);
- f) Se foram completados todos os ciclos (etapas), ir para o item g); caso contrário retornar ao passo a) incrementando o carregamento;
- g) Apresentação dos resultados.

5.3 MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO FISSURADO

Uma fissura em uma viga de concreto armado, quando representado numericamente pela simples eliminação do elemento, fica incoerente quando este tem dimensões desproporcionais ao tamanho da fissura. Pelo fato de nem sempre conseguir elementos bastante reduzidos, optou-se pela substituição do elemento fissurado, por um elemento com o módulo de elasticidade multiplicado por um fator de redução f^* , com o objetivo de representar melhor o comportamento do concreto fissurado para o elemento que tem dimensões proporcionais ao tamanho da malha adotada.

O valor de f^* a ser usado em cada passo de carga, pode ser obtido através da Equação 5.1, a qual foi obtida empiricamente através de calibração com as análises realizadas nos quatro estudos de caso. O módulo de elasticidade multiplicado pelo fator de redução é aqui designado por módulo de elasticidade pós-fissura, e será representado por E^* , ou seja, $E^* = f^* \cdot E_{ci}$.

$$f^* = 3,6 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{np}{(np + pc^{1,8})} \cdot \frac{E_{ci}}{f_{ck}} \quad 5.1$$

Nesta equação os parâmetros são dados valem:

E_{ci} : módulo de elasticidade longitudinal inicial

np : número total de passos

pc : número do passo atual

f_{ck} : resistência do concreto à compressão

5.4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O método exposto foi implementado computacionalmente através de um programa na linguagem DELPHI. Para a determinação dos esforços nos elementos, foi utilizado o método dos elementos finitos, com dois tipos de elementos: o elemento retangular linear em estado plano de tensões, para representar o concreto; o elemento barra articulada nas extremidades, para representar as armaduras longitudinais e transversais.

O concreto fissurado foi simulado numericamente pelo elemento finito retangular com o seu módulo de elasticidade reduzido, conforme apresentado no Capítulo 2. A princípio tinha-se a idéia de que a retirada de todo o elemento poderia ser uma alternativa. Após verificações constatou-se que este procedimento é impróprio, pois a retirada completa do elemento fissurado resulta em perda significativa de material, tendo em vista as dimensões do mesmo. Assim, a redução do módulo de elasticidade representa melhor a resposta do elemento fissurado, pois este ainda apresenta alguma resistência mecânica uma vez que efetivamente o concreto continua resistindo no entorno da fissura.

Foi utilizado o método de Cholesky para a resolução do sistema linear gerado no método dos elementos finitos.

A matriz de rigidez do elemento retangular linear gerado pelo programa é quadrada de ordem 8. A matriz de rigidez da estrutura tem ordem N , onde: $N = 2 \times$ número de nós da estrutura.

Para o elemento barra articulada nas extremidades, o programa gera uma matriz de rigidez quadrada de ordem 4.

A numeração dos nós da viga é feita de baixo para cima, e da esquerda para a direita. Considerando ndx como o número de divisões da malha em x e ndy o número de divisões em y, tem-se que o número total de nós (N_n) é igual a $(ndx + 1) \cdot (ndy + 1)$.

A Figura 5.1 ilustra a tela principal do programa mostrando uma viga fissurada e a distribuição de tensões representadas pela escala de cores.

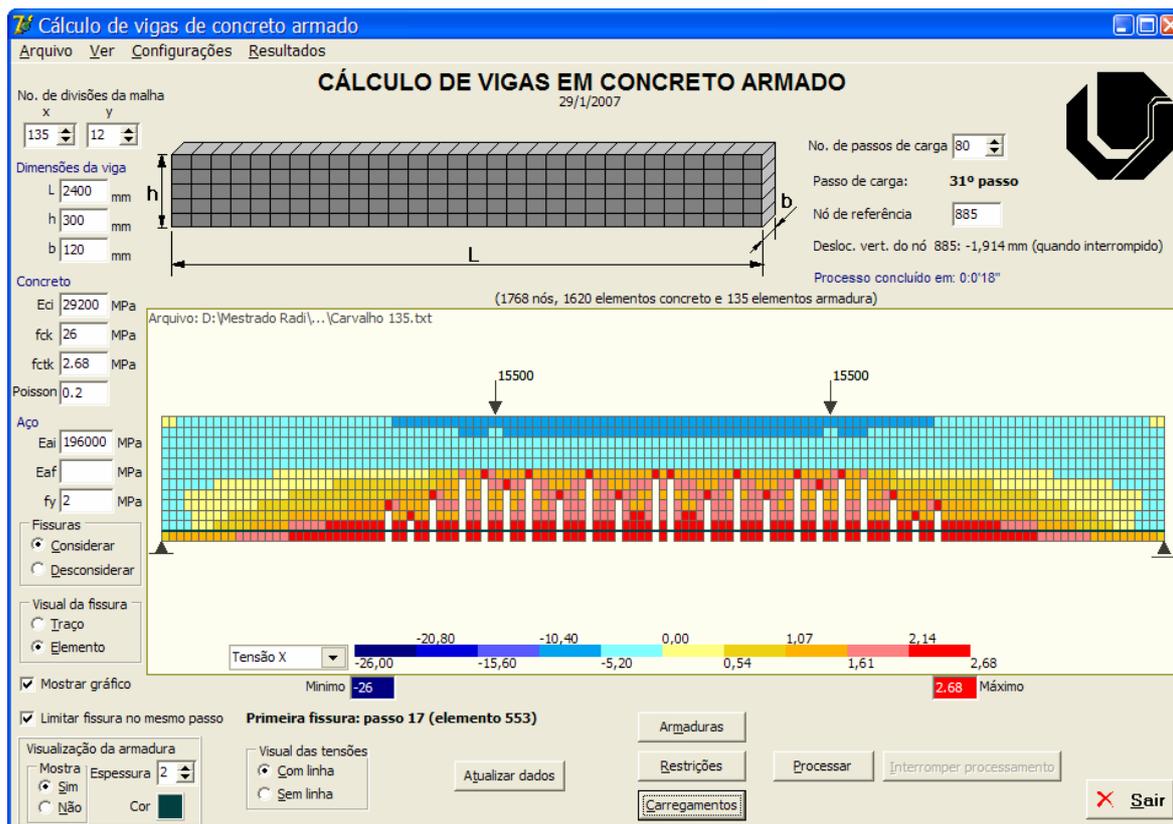


Figura 5.1 - Tela principal do programa para um instante de carregamento

A tela mostrada é atualizada para cada passo de carga. Nesta tela pode ser observado que diversos parâmetros podem ser definidos pelo usuário, tais como:

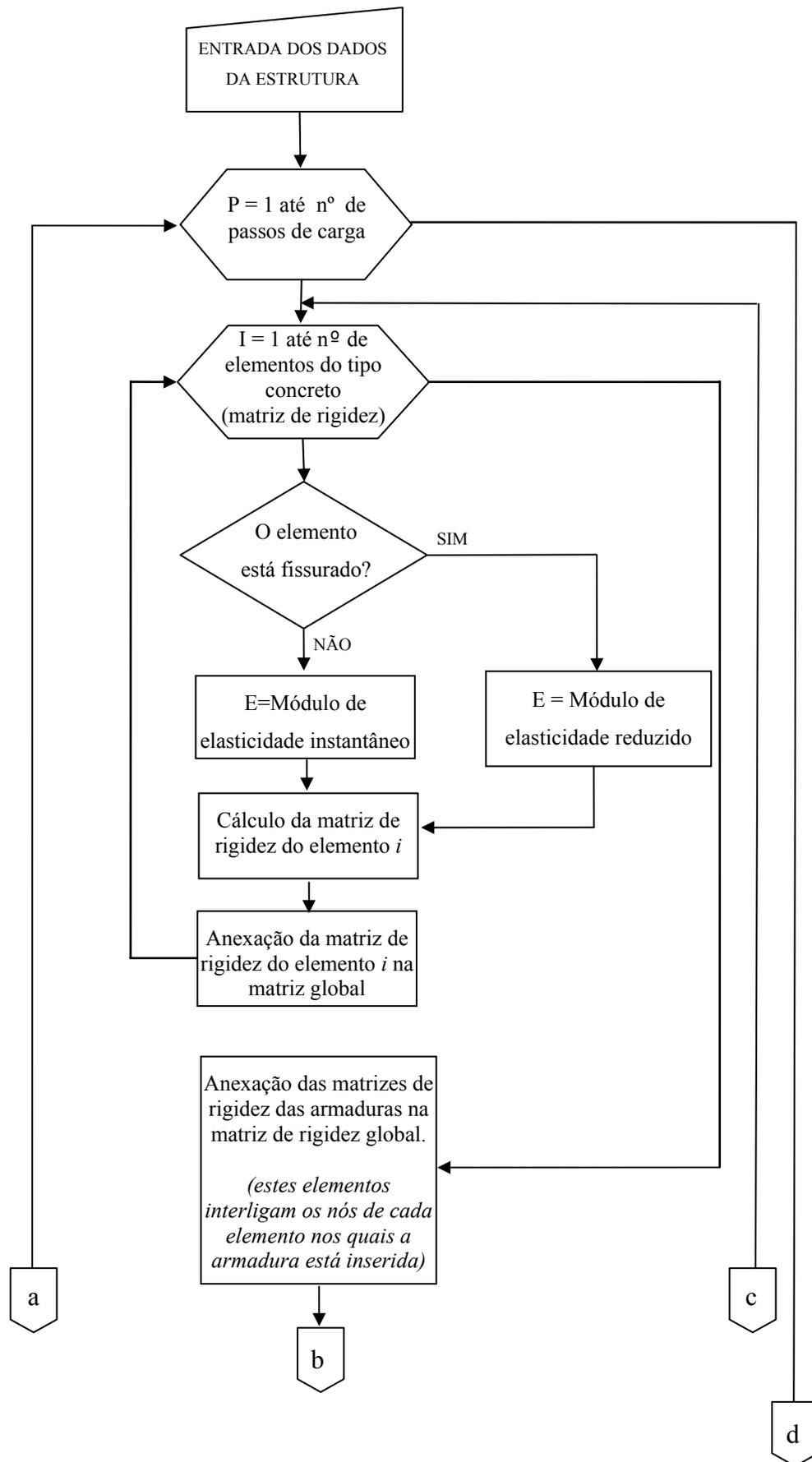
- as fissuras podem ou não ser consideradas no programa; a não consideração das fissuras pode ser útil para alguma avaliação comparativa;
- visualização das fissuras: pode ser feita por eliminação do elemento ou por desenho de linha vertical;
- ao executar o programa os diagramas podem ou não ser visualizados em tempo real;
- após a execução, todos os pares de valores de passos de carga \times deslocamentos poderão ser visualizados, ou impressos ou direcionados para arquivos;

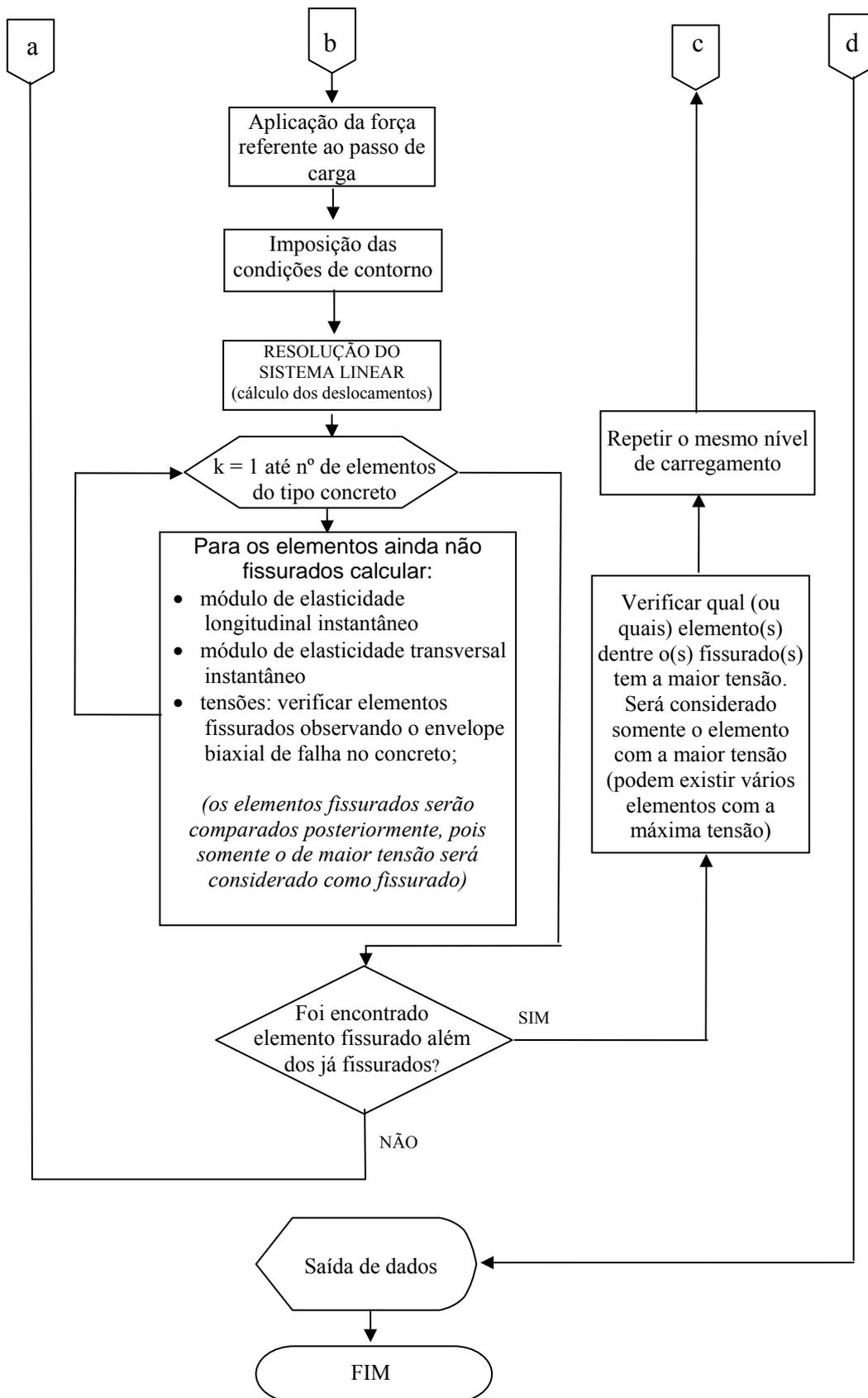
- o usuário poderá limitar ou não fissuras de elementos vizinhos durante o mesmo passo de carga. Isto não evita o impedimento de fissuração quando dois elementos vizinhos têm o mesmo nível de tensão;
- as armaduras podem ou não ser visualizadas, bem como a espessura dos traços associados às mesmas pode ser definido pelo usuário;
- a visualização das tensões pode ser feita incluindo, ou não, o contorno dos elementos;
- pode ser escolhida qual tensão será visualizada: tensão σ_x , σ_y , τ_{xy} , σ_1 ou σ_2 ;
- os níveis de tensões a serem visualizadas podem ser estabelecidos pelo usuário indo de um valor negativo para o positivo. Caso o usuário não interfira no processo, o programa considerará os limites $-f_{ck}$ e f_{ctk} ; tem função meramente visual;
- sempre é apresentado na tela o número total de nós, de elementos do tipo concreto e de elementos associados à armadura. Ao ser movido o mouse sobre o desenho da viga, o usuário terá o número do elemento;
- as coordenadas dos nós e o número dos nós associados a cada elemento também podem ser listados usando a opção “Ver” do menu principal;
- a opção “Configurações” permite definir a distância mínima entre fissuras e o número de repetições máxima para ajuste em cada passo de carga;
- todos os dados e configurações são gravados em arquivos e podem ser abertos a qualquer momento. Toda vez que o programa é aberto, os dados do último projeto executado serão carregados automaticamente.

Enfim, o programa computacional foi elaborado para permitir grande praticidade por meio de recursos visuais que garantam maior confiabilidade nas informações fornecidas pelo usuário.

5.5 FLUXOGRAMA DO PROGRAMA

A seguir é apresentado o fluxograma resumido do programa utilizado no método exposto.





CAPÍTULO 6

ESTUDO DE CASOS

6.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Com o objetivo de validar o método, e também verificar a influência do refinamento da malha adotada, foram feitos quatro estudos de caso, que foram comparados com os resultados obtidos experimentalmente. Foram utilizados para o primeiro estudo os resultados do experimento e modelo numérico de Carvalho (1994 apud Faglioni, 2006) e a análise do modelo numérico desenvolvido por Faglioni (2006). No segundo caso foram comparados os dados experimentais obtidos por Santos (2006), que ensaiou uma viga biapoiada com armaduras longitudinais e transversais, com duas forças iguais aplicadas nos terços centrais. No terceiro caso foram avaliados os resultados do experimento desenvolvido por Juvandes (1999 apud CHIMELLO, 2004), que também ensaiou uma viga biapoiada com uma força aplicada no centro do vão. No quarto caso foram avaliados os resultados do experimento de Souza (2000).

6.2 PRIMEIRO ESTUDO DE CASO

6.2.1 Estrutura analisada

A primeira estrutura utilizada para a comparação dos resultados é composta por uma viga biapoiada conforme o esquema mostrado na Figura 6.1. As características físicas dos materiais são apresentadas na Tabela 6.1. A viga ensaiada por Carvalho (1994 apud FAGLIONI, 2006) foi dimensionada segundo critérios de cálculo prescritos na Norma Brasileira de estruturas de concreto vigente na época. O sistema de carregamento adotado consistiu na aplicação de duas forças concentradas nos terços médio do vão, com aplicação de estágios de carregamento crescente.

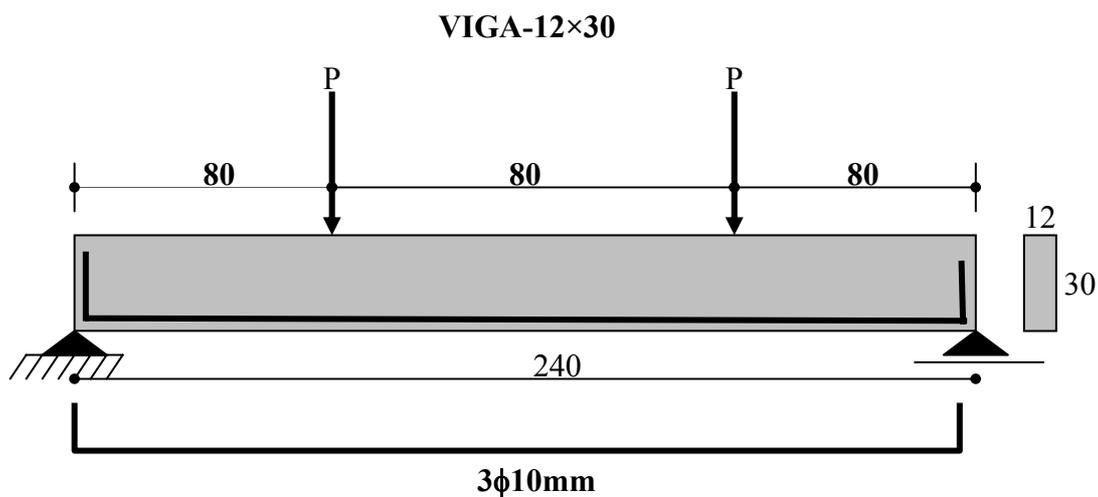


Figura 6.1 - Esquema da viga biapoiada utilizada no estudo de caso (medidas em cm)

Tabela 6.1 – Características elásticas dos materiais

Módulo de elasticidade do concreto	Resistência característica à tração	Resistência característica à compressão	Módulo de elasticidade do aço
29.200MPa	2,68MPa	26,0MPa	196.000MPa

Foi adotada para este caso uma malha de 96×12 e outra de 135×12 e um número de ciclos igual a 80 (Figura 6.3). A força limite aplicada foi de 40kN. Os detalhes e armaduras usadas estão mostrados na Figura 6.1.

A Figura 6.3 mostra a numeração dos nós para a malha de 96×12 e a Figura 6.4 mostra os nós para a malha de 135×12 .

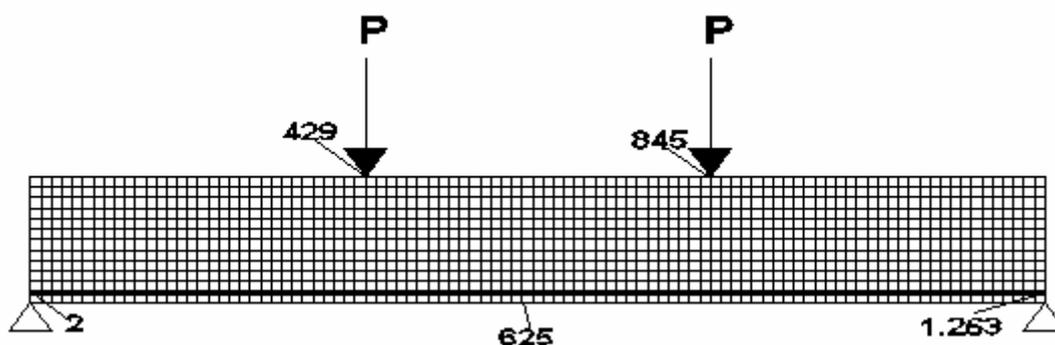


Figura 6.2 - Viga biapoiada discretizada em 1152 elementos finitos.

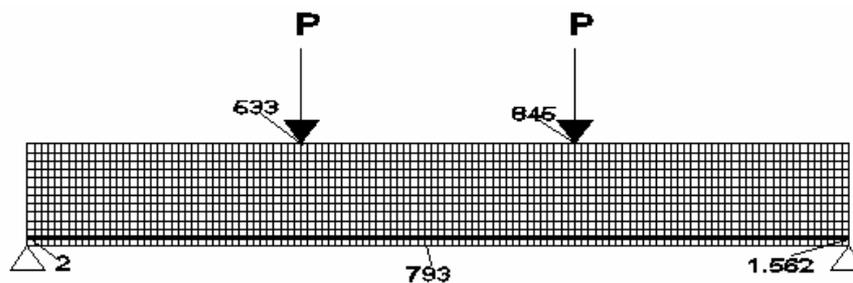


Figura 6.3 - Viga biapoada discretizada em 1620 elementos finitos

6.2.2 Resultados obtidos

Os dados numéricos obtidos pelo programa com malha de 96×12 e de 135×12 , os dados experimentais de Carvalho (1994 apud FAGLIONI, 2006), bem como os resultados de Faglioni (2006) usados para comparação, os quais estão apresentados no Anexo 1.

Para este estudo de caso foram comparados os deslocamentos do nó central da parte inferior da viga em questão.

A Figura 6.4 mostra os três resultados disponíveis para o primeiro estudo de caso, onde é mostrada a tela gráfica do programa desenvolvido. Esta tela é atualizada ao longo da execução do programa, permitindo o acompanhamento do carregamento gradativo.

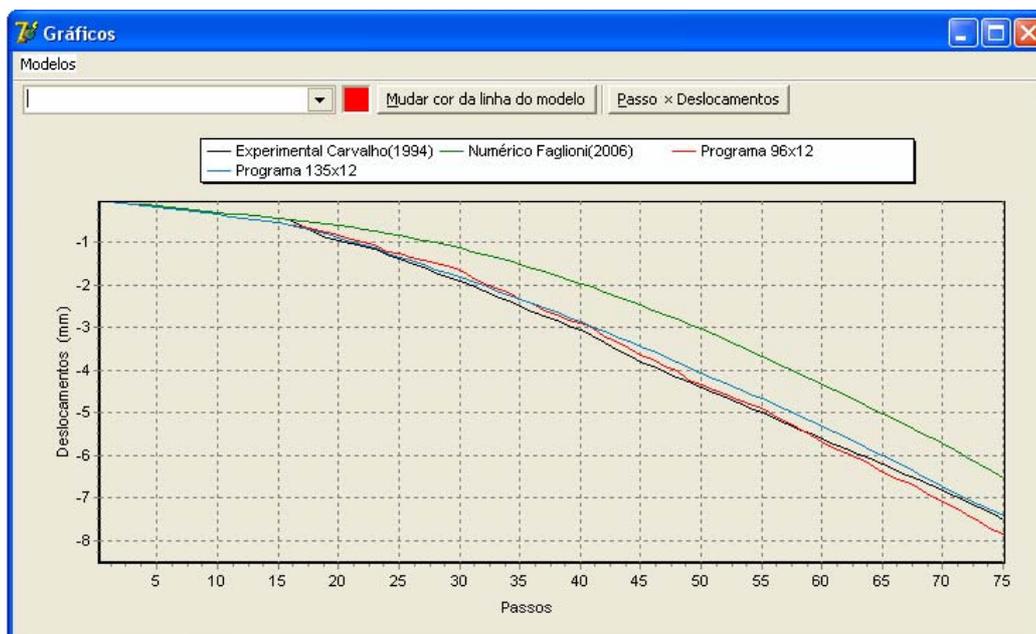
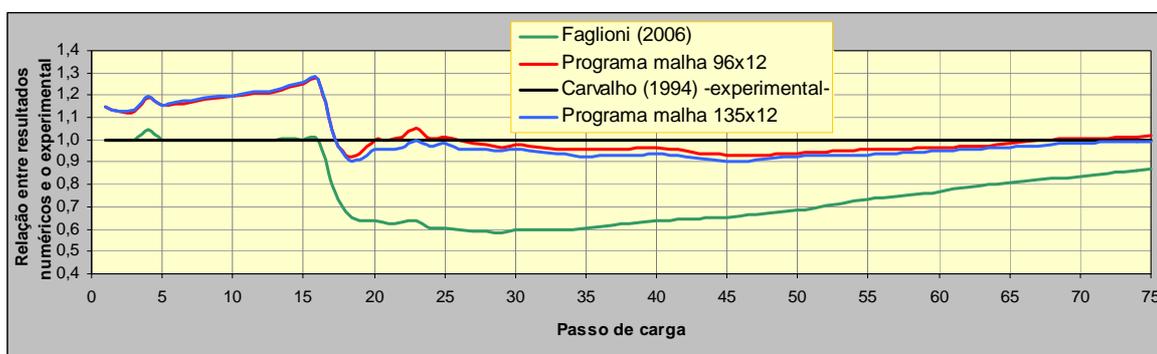


Figura 6.4 - Diagrama comparativo de deslocamentos entre os resultados experimentais de Carvalho (1994 apud FAGLIONI, 2006), os numéricos de Faglioni (2006) e os do programa computacional desenvolvido neste trabalho com malha de 96×12 e de 135×12

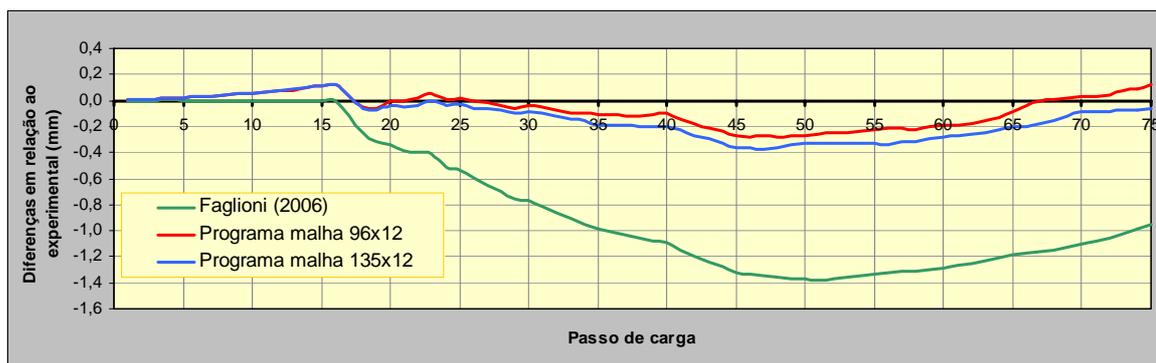
A Figura 6.5 apresenta diagramas onde são feitas comparações entre os resultados obtidos por três modelos numéricos e o experimental. Por ser considerado como resultado efetivo (real) o experimental foi admitido como referência para todas as comparações.

Ao analisar os diferentes diagramas mostrados na Figura 6.5 pode-se observar que o modelo adotado neste trabalho produz resultados bons, principalmente quando comparados com os resultados de outros modelos numéricos mencionados por Faglioni (2006) (modelos de Branson e do CEB 90 desenvolvidos por outros autores). Como estes modelos apresentam resultados muito próximos, considerou-se o modelo de Faglioni (2006) como referência para esta dissertação. Faglioni (2006) considera o modelo Mohr-Coulomb e usa os dados experimentais de Carvalho (1994 apud FAGLIONI, 2006) para comparação de resultados.

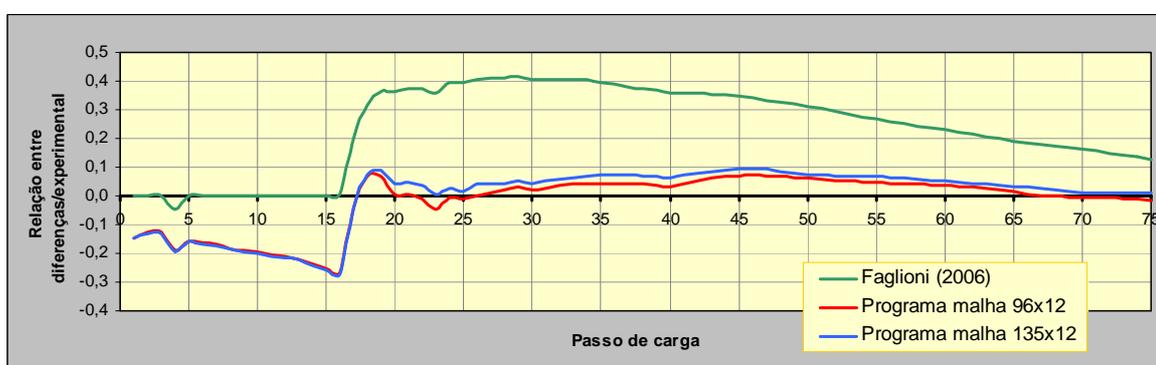
Embora de pequena magnitude, o refinamento da malha produz uma espécie de enrijecimento da viga. Isto pode ser explicado pelo fato de que o elemento fissurado representa uma redução de rigidez. Assim, sendo menor a largura do elemento com o refinamento da malha, isto gerará menores reduções nas características do material. Há que ser destacado também que na malha menos refinada o número de elementos horizontais foi considerado igual a 96, ou seja, um número par, enquanto que no outro caso foi de 135 (ímpar). Isto também representa um aspecto importante, pois sendo a viga simétrica, o número par implica em duas linhas de fissuras ocorrendo ao mesmo tempo numa região restrita e, portanto, gerando uma redução de rigidez do sistema. Isto também pode justificar esta redução.



(a) Relação entre o resultado experimental e os numéricos



(b) Diferenças entre o resultado experimental e os numéricos



(c) Relação entre as diferenças de deslocamentos obtidos numericamente e os deslocamentos obtidos experimentalmente

Figura 6.5 – Diferentes formas de comparação entre os resultados numéricos e o experimental para o primeiro estudo de caso

6.3 SEGUNDA ESTRUTURA ANALISADA

6.3.1 Estrutura analisada

Para testar a eficácia do método em simular as armaduras transversais (estribos), é apresentado um segundo estudo de caso onde a viga analisada contém este tipo de armadura. A segunda estrutura analisada é composta por uma viga biapoiada solicitada por uma força “P”, contendo armaduras longitudinais e transversais, conforme o esquema mostrado na Figura 6.6. As características físicas dos materiais são apresentadas na Tabela 6.2. A viga foi ensaiada por Santos (2006) e foi dimensionada segundo critérios de cálculo prescritos pela NBR-6118 (ABNT, 2003). O sistema de carregamento adotado consistiu na aplicação de uma força concentrada no centro do vão.

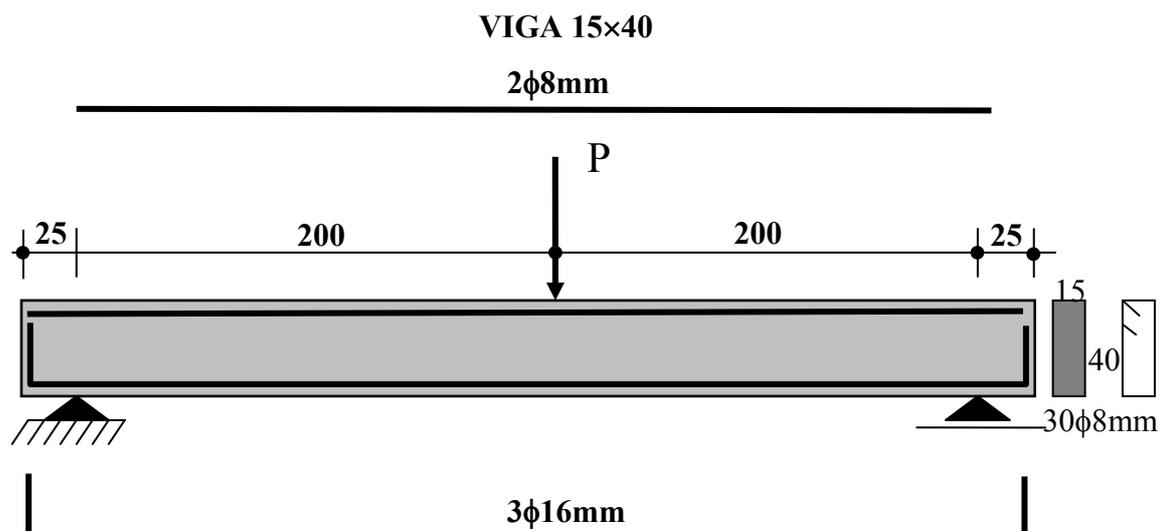


Figura 6.6 - Esquema da viga biapoiada utilizada no estudo de caso (medidas em cm)

Tabela 6.2 - Características físicas dos materiais

Módulo de elasticidade do concreto	Resistência característica à tração	Resistência característica à compressão	Módulo de elasticidade do aço
31.000MPa	2,6MPa	31,0MPa	188.000MPa

Para este segundo estudo de caso foi adotada uma malha de 120×12 e outra de malha de 150×20 , e um número de passos igual a 60. Uma força limite de 120kN foi aplicada no ponto central, conforme mostra a Figura 6.7.

A Figura 6.7 mostra a numeração dos nós para a malha de 120×12 e a Figura 6.8 ilustra os nós para a malha de 150×12 .

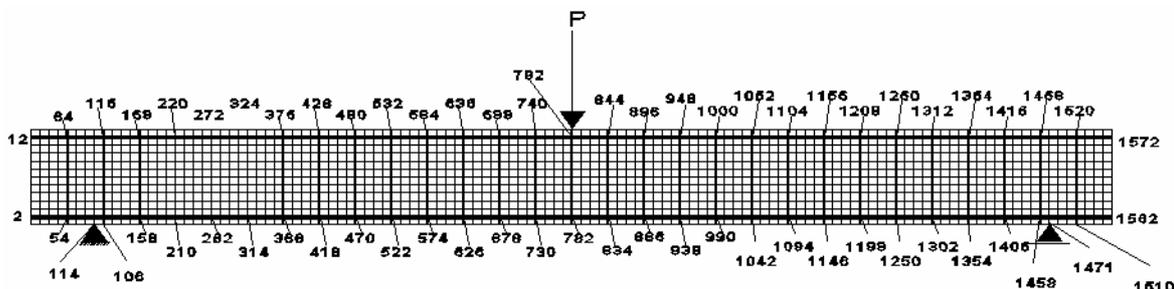


Figura 6.7 - Viga biapoiada discretizada em 1440 elementos finitos

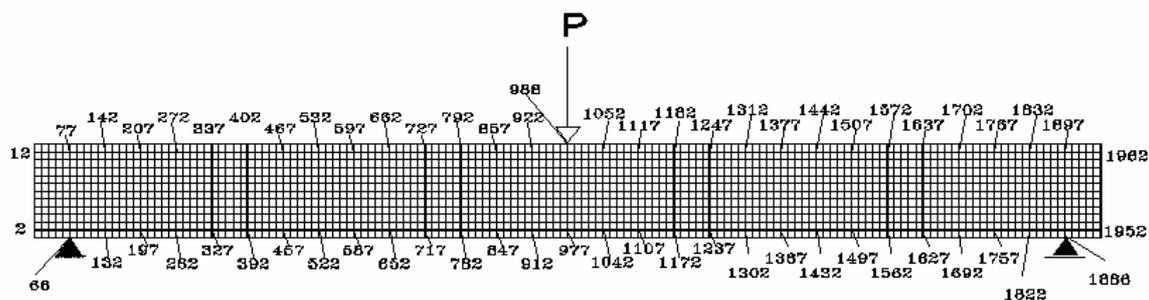


Figura 6.8 - Viga biapoiada discretizada em 1800 elementos finitos

6.3.2 Resultados obtidos

Os resultados obtidos pelo programa e os dados experimentais de Santos (2006) usados para comparação estão mostrados no Anexo 2.

Para o estudo de caso, considerou-se para comparação os deslocamentos do nó central da viga em questão.

Os resultados relativos ao comportamento da viga ensaiada por Santos (2006) e os resultados fornecidos pelo programa utilizando o método apresentado com malha de 120×12 e de 150×12 são apresentados graficamente na Figura 6.9.

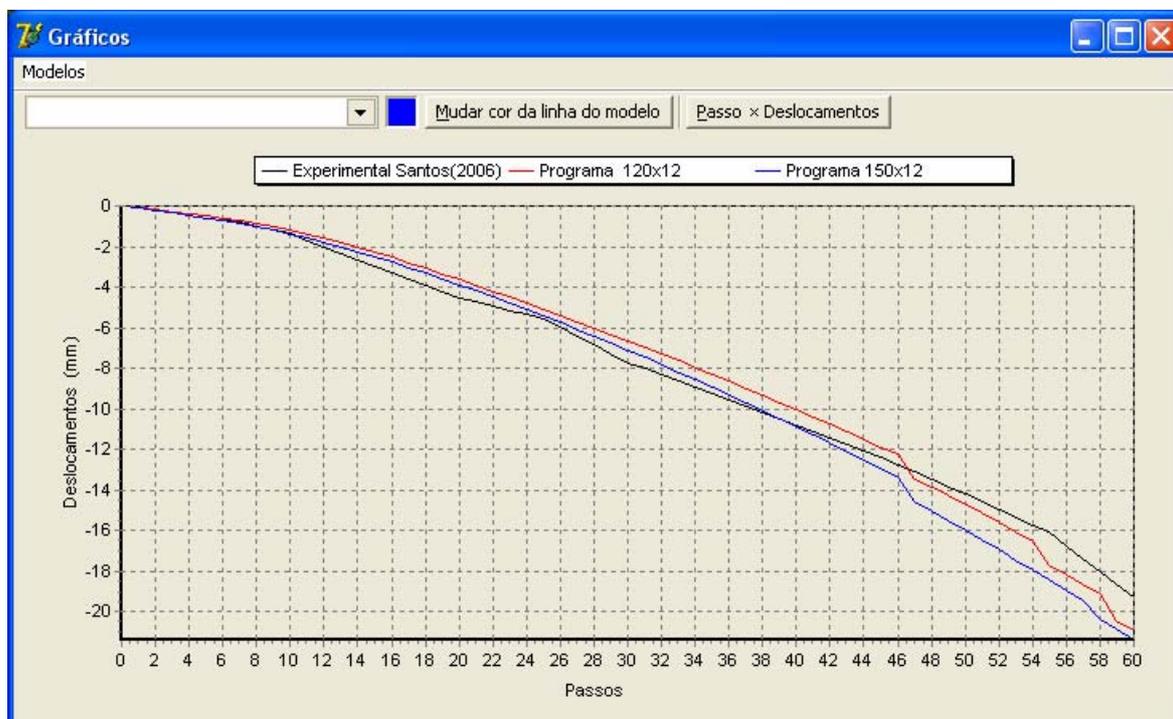
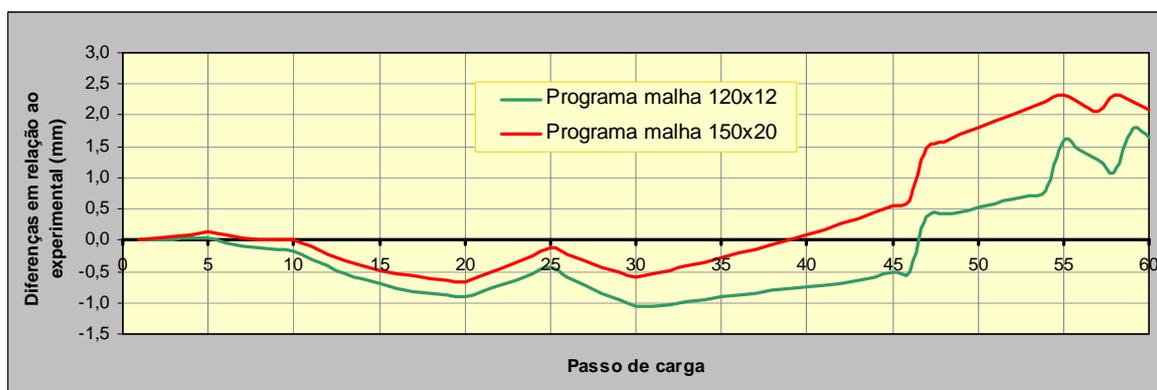


Figura 6.9 – Gráfico comparativo dos deslocamentos do 2º estudo de caso

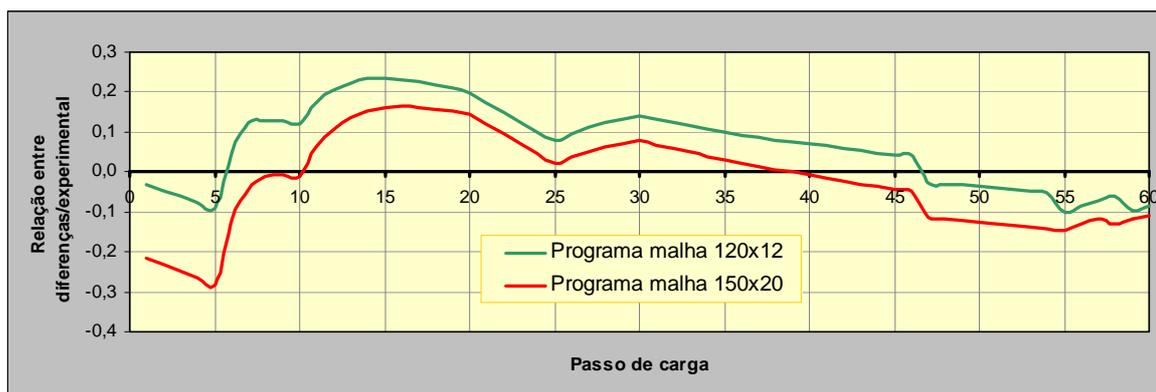
A Figura 6.10 apresenta três diferentes comparações entre os dados experimentais de Santos (2006) e os dados numéricos do programa, com diferentes tipos de malhas. Observa-se que até o 46º passo, o programa simulou bem o experimento, principalmente ao refinar a malha, ficando o erro absoluto em torno de 0,5mm, o que representa 2,5% do deslocamento máximo. A partir deste ponto, ocorreram variações mais significativas resultantes de um ajuste ocorrido neste ponto.



(a) Relação entre o resultado experimental e o numérico do programa



(b) Diferenças entre o resultado experimental e o numérico do programa



(c) Relação entre as diferenças de deslocamentos obtidos numericamente e os deslocamentos obtidos experimentalmente

Figura 6.10 – Diferentes formas de comparação entre os resultados numéricos e o experimental para o segundo estudo de caso

6.4 TERCEIRA ESTRUTURA ANALISADA

6.4.1 Estrutura analisada

A estrutura analisada é composta por uma viga biapoiada solicitada por uma força “P”, contendo armaduras longitudinais e transversais, conforme o esquema mostrado na Figura 6.11. As características físicas dos materiais são apresentadas na Tabela 6.2. A viga foi ensaiada por Juvandes (1999 apud CHIMELLO, 2003) e foi dimensionada segundo critérios de cálculo prescritos pela NBR-6118 (ABNT, 2003). O sistema de carregamento adotado consistiu na aplicação de uma força concentrada no centro do vão.

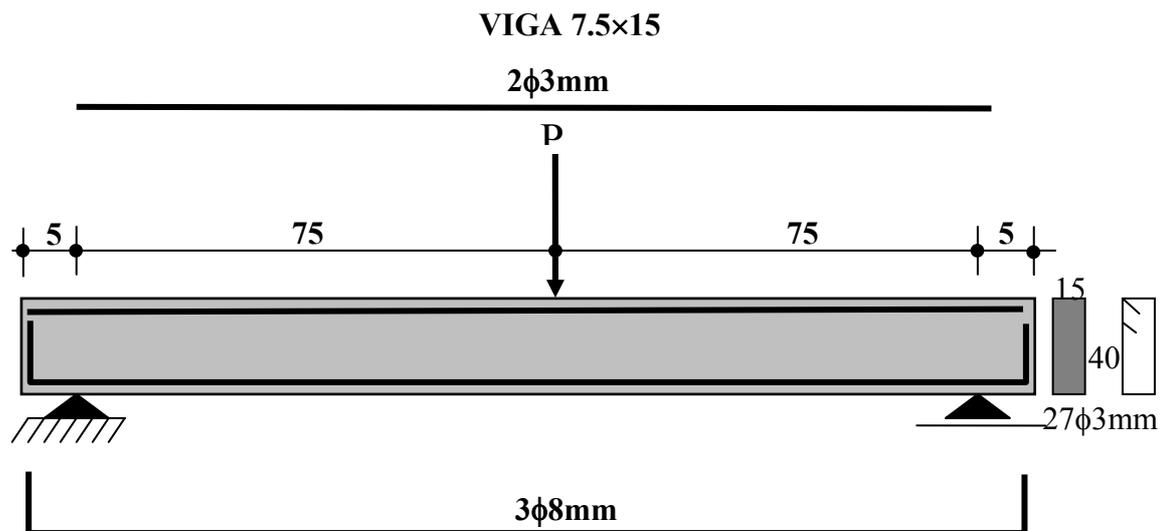


Figura 6.11 - Esquema da viga biapoiada utilizada no estudo de caso (medidas em cm)

Tabela 6.3 - Características físicas dos materiais

Módulo de elasticidade do concreto	Resistência característica à tração	Resistência característica à compressão	Módulo de elasticidade do aço
35.000 MPa	2,6 MPa	38,1 MPa	174.000 MPa

Para este terceiro estudo de caso foi adotada uma malha de 120×12 para a primeira simulação e de 150×12 a segunda, com um número de passos igual a 50. A força limite aplicada no ponto central foi de 25kN, conforme mostra a Figura 6.11.

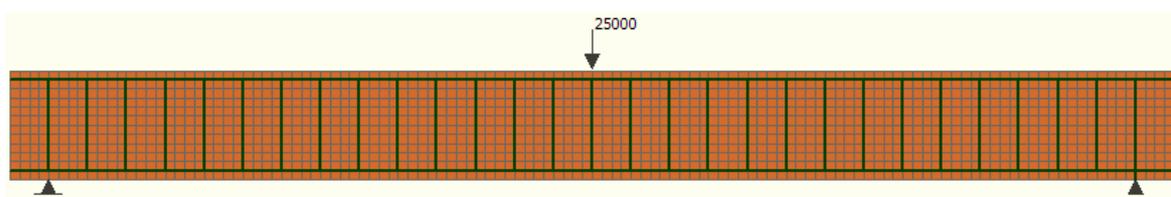


Figura 6.12-Viga biapoiada discretizada em 1440 elementos finitos com armaduras longitudinais e transversais

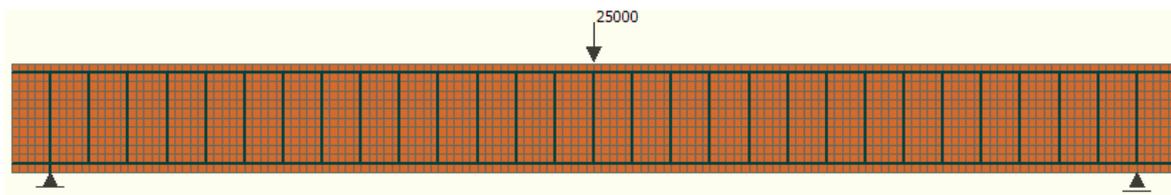


Figura 6.13-Viga biapoada discretizada em 1800 elementos finitos com armaduras longitudinais e transversais

6.4.2 Resultados obtidos

Os resultados obtidos pelo programa e os dados experimentais de Juvandes (1999 apud CHIMELLO, 2003) usados para comparação estão mostrados no Anexo 3.

Para o estudo de caso, considerou-se para comparação os deslocamentos do nó central inferior da viga em questão.

Os resultados relativos ao comportamento da viga ensaiada por Juvandes (1999 apud CHIMELLO, 2003) e os resultados fornecidos pelo programa utilizando o método apresentado são apresentados graficamente na Figura 6.14.

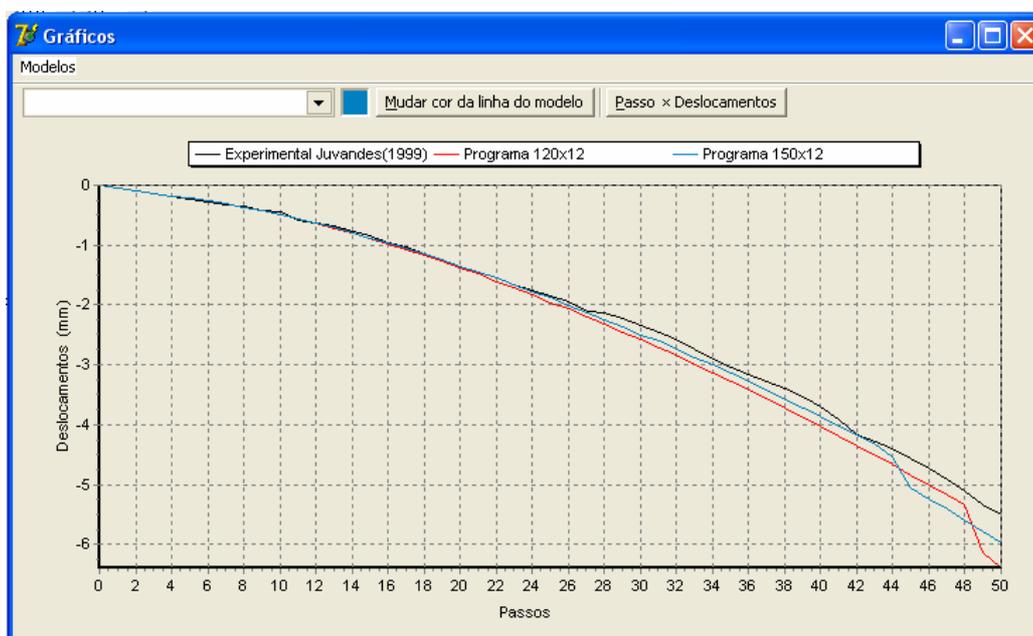
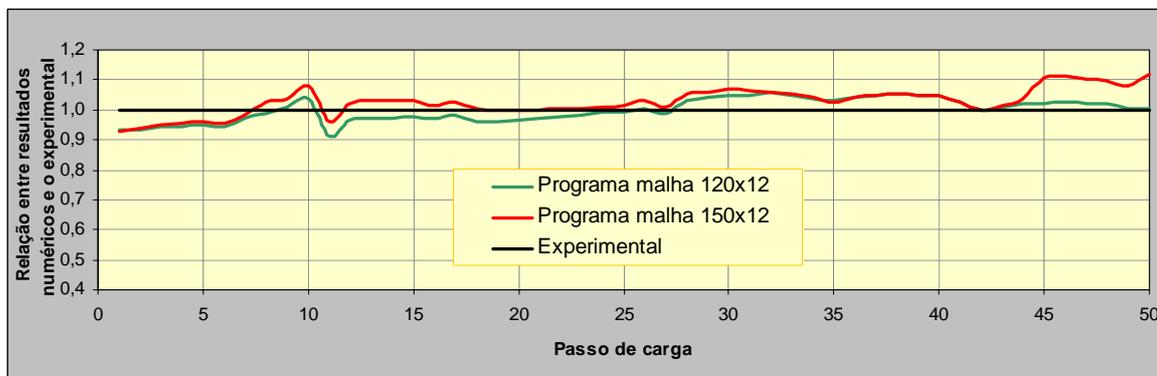


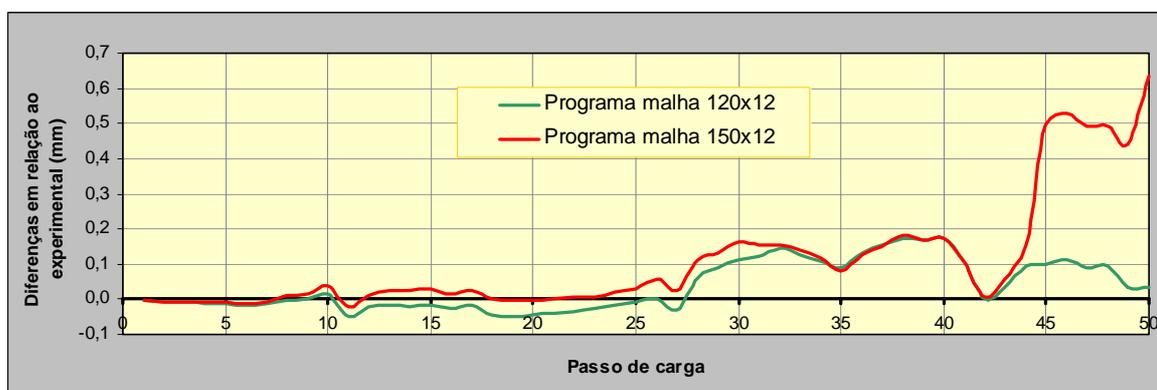
Figura 6.14 - Gráfico comparativo dos deslocamentos do 3º estudo de caso

A Figura 6.15 apresenta três diferentes comparações entre os dados experimentais de Juvandes (1999 apud CHIMELLO, 2003) e os dados numéricos do programa. Nota-se que

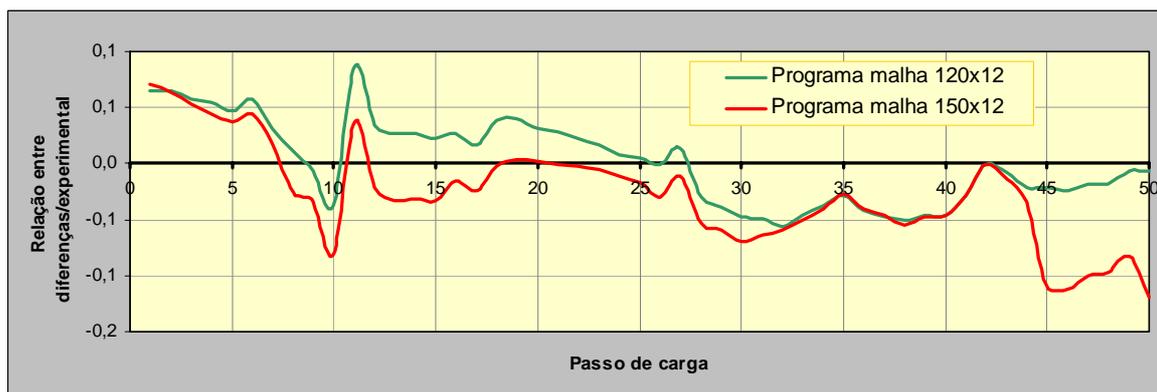
a diferença máxima foi inferior a 10%. Assim, considera-se que o modelo usado no programa ficou muito bem ajustado para o caso real.



(a) Relação entre o resultado experimental e o numérico do programa



(b) Diferenças entre o resultado experimental e o numérico do programa



(c) Relação entre as diferenças de deslocamentos obtidos numericamente e os deslocamentos obtidos experimentalmente

Figura 6.15 – Diferentes formas de comparação entre os resultados numéricos e o experimental para o terceiro estudo de caso

6.5 QUARTA ESTRUTURA ANALISADA

6.5.1 Estrutura analisada

A quarta estrutura analisada é composta por uma viga biapoiada solicitada por duas forças “P”, conforme o esquema mostrado pela Figura 6.16. As características físicas dos materiais são apresentadas na Tabela 6.4. A viga foi ensaiada por Souza (2000) e foi dimensionada segundo critérios de cálculo prescritos pela Norma Brasileira vigente no ano de 2000. O sistema de carregamento adotado consistiu na aplicação de duas forças concentradas nos terços médio do vão, aplicadas em 80 passos de carga.

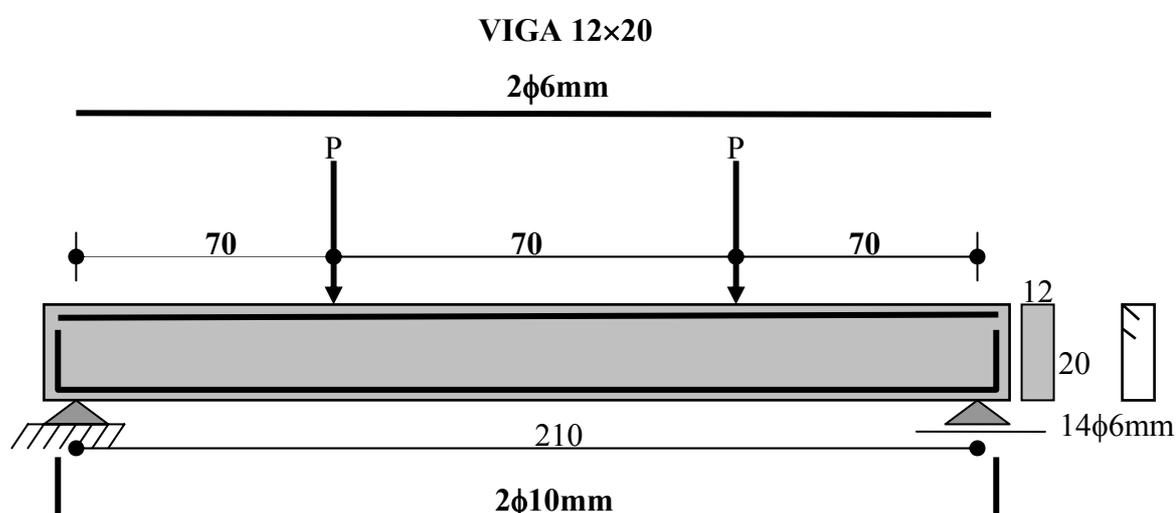


Figura 6.16 - Esquema da viga biapoiada utilizada no estudo de caso (unidades em cm)

Tabela 6.4 - Características elásticas dos materiais

Módulo de elasticidade do concreto	Resistência característica à tração	Resistência característica à compressão	Módulo de elasticidade do aço
30.000MPa	2,60MPa	30,00MPa	215.000MPa

Para este caso foi adotada para a primeira simulação uma malha de 97×12 e, para a segunda, uma malha de 125×16, com um número de passos igual a 80. A força limite (P) aplicada foi de 20kN, conforme mostra a Figura 6.16.

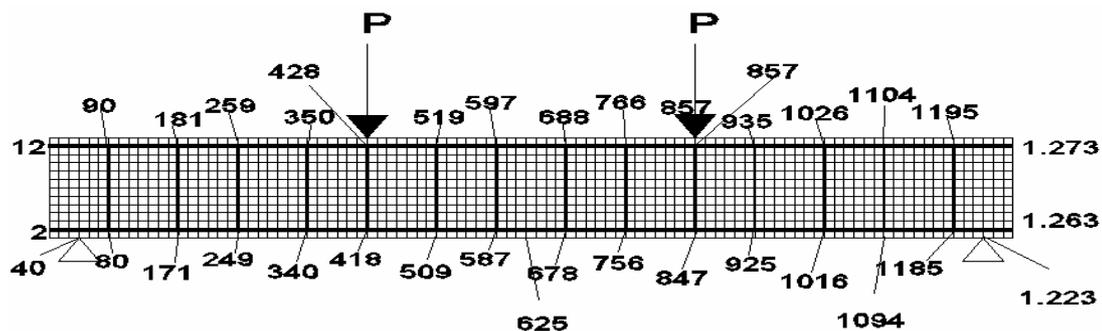


Figura 6.17-Viga biapoada discretizada em 1164 elementos finitos – 4º estudo de caso

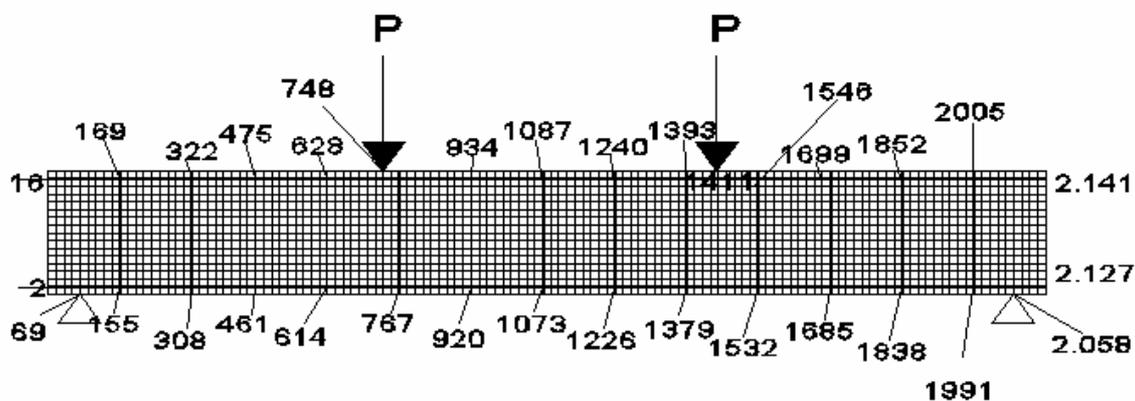


Figura 6.18-Viga biapoada discretizada em 2000 elementos finitos – 4º estudo de caso

6.5.2 Resultados obtidos

Os resultados obtidos pelo programa e os dados experimentais de Souza (2000) usados para comparação estão mostrados no Anexo 4.

Para o estudo de caso, considerou-se para comparação os deslocamentos do nó central da viga em questão.

Os resultados relativos ao comportamento da viga ensaiada por Sousa (2000) e dos fornecidos pelo programa com diferentes tipos de malhas são apresentados na Figura 6.20.

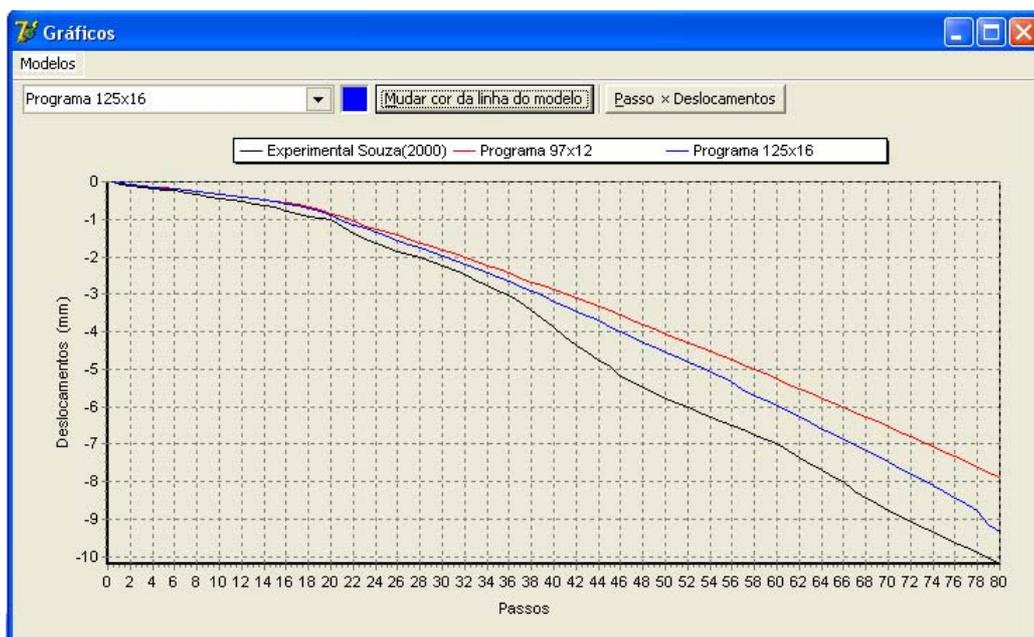
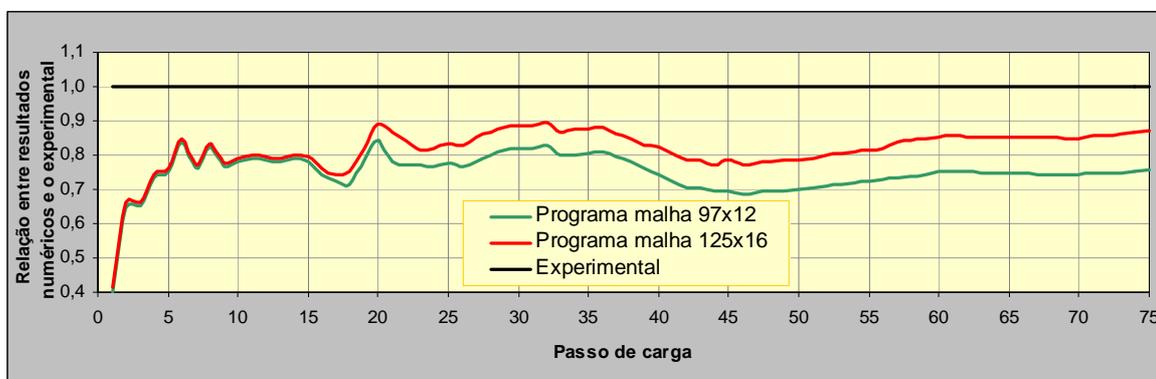
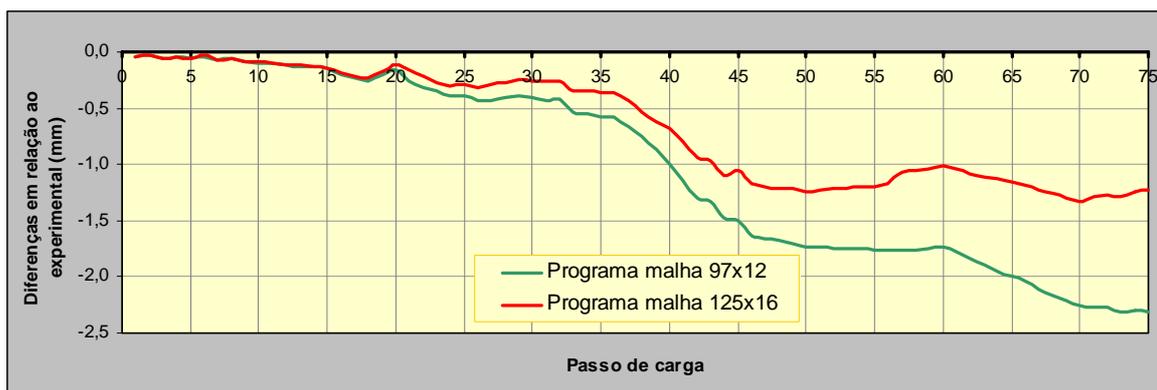


Figura 6.19-Diagrama comparativo dos deslocamentos do 4º estudo de caso

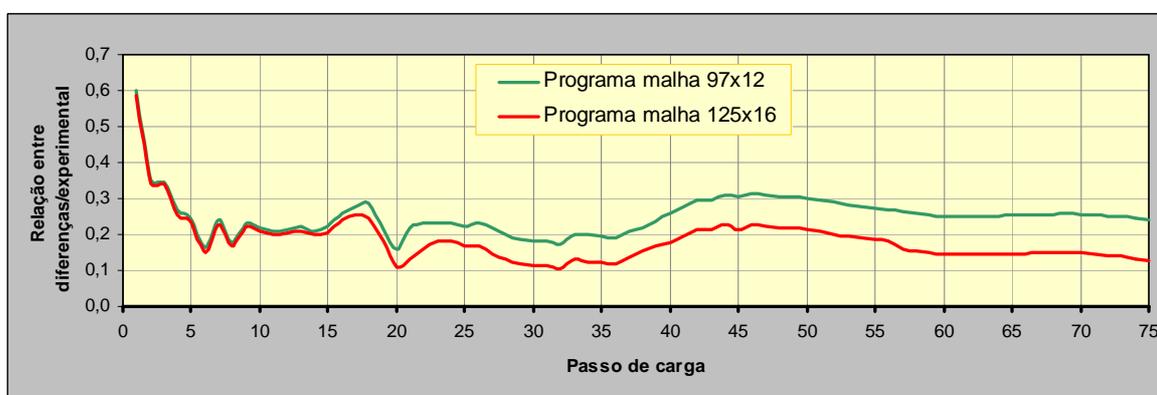
A Figura 6.20 apresenta três comparações entre os dados experimentais de Souza (2000), os dados numéricos do programa com malha de 97×12 e os do programa com malha de 125×16 . Observou-se que com o aumento da malha os resultados melhoraram significativamente em relação ao anterior e se aproximaram bem do experimental, conforme pode ser observado pela Figura 6.20b. Observando a Figura 6.20c, pode-se concluir que o erro máximo foi da ordem de 20%, o que poderia ser melhorado com o uso de malha mais refinada. O refinamento da malha exige equipamentos com grande capacidade de processamento.



(a) Relação entre o resultado experimental e os numéricos



(b) Diferenças entre o resultado experimental e os numéricos



(c) Relação entre as diferenças de deslocamentos obtidos numericamente e os deslocamentos obtidos experimentalmente

Figura 6.20 – Diferentes formas de comparação entre os resultados numéricos e o experimental para o quarto estudo de caso.

CAPÍTULO 7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta um procedimento computacional para o cálculo de vigas retas de concreto armado sob quaisquer condições de vinculações, levando em conta a abertura de fissuras, os níveis de tensões e a interação com as características físicas dos materiais, tais como, módulo de elasticidade longitudinal e transversal, coeficiente de Poisson e resistências. A formulação considera a envoltória de tensões biaxiais como critério de ruptura. Para níveis de tensões além destes limites, os elementos de concreto fissurado foram considerados com redução em seu módulo de elasticidade, em função da intensidade do carregamento.

Com base nos resultados obtidos, as principais conclusões deste trabalho estão descritas a seguir:

- O modelo proposto produz respostas satisfatórias, especialmente quando se compara com os modelos desenvolvidos por diversos autores mencionados neste trabalho, mesmo não considerando a não-linearidade geométrica;
- A expressão proposta para a redução gradativa do módulo de elasticidade do concreto apresentou resultados que se aproximaram muito bem dos resultados experimentais analisados;
- Embora o concreto seja usualmente, para fins de dimensionamento, um material isotrópico, com apenas um valor do coeficiente de Poisson e módulo de elasticidade em qualquer direção, foram consideradas neste trabalho as variações destes parâmetros

elásticos em função do nível do carregamento. Isto significa assumir o concreto como um material ortotrópico, ou seja, por ter comportamento não-linear, apresenta propriedades diferentes nas diferentes direções para um determinado instante do carregamento;

- Com base nos estudos de caso, observou-se uma tendência de melhora das respostas numéricas em função do refinamento da malha;
- Na geração dos dados de entrada devem ser evitados pontos de simetria onde o nível de tensão é o mesmo. Isto produz duas filas verticais de elementos vizinhos fissurados ao mesmo tempo, prejudicando a resposta do modelo.

Enfim, o programa computacional desenvolvido neste trabalho permite sua aplicação na análise de vigas retas de concreto armado.

7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Observa-se a importância de adotar uma malha que possa ser refeita em função da distribuição de fissuras. Isto produziria um modelo bem mais preciso, pois as fissuras seriam acompanhadas efetivamente, ao contrário do que ocorre no atual modelo onde a fissuração do elemento é representada por uma redução do módulo de elasticidade do elemento. Incorporando-se esta proposta, a ruptura produzida pelas fissuras seria considerada pela desconexão dos elementos vizinhos. Isto demandaria a geração de nova malha para a região, onde os elementos fissurados seriam divididos em dois. É sem dúvida um trabalho árduo a ser executado.

Valerá analisar o efeito da não-linearidade geométrica da estrutura, embora este efeito não deva representar modificações significativas de respostas por se tratar de um estudo de vigas retas. Para isto é necessário implementar a formulação isoparamétrica, pois os elementos retangulares passarão a ter uma forma quadrangular qualquer após as deformações.

Embora o modelo tenha sido desenvolvido para vigas retas de concreto armado, ele poderá ser testado para outros elementos. Devem ser também avaliadas vigas hiperestáticas e pórticos, onde certamente outros parâmetros irão contribuir para o comportamento da mesma. Um caso importante é a ligação viga-pilar. Outros exemplos a serem investigados

são as vigas parede, pilares, blocos de fundação e sapatas. Fazendo-se algumas adaptações, o modelo poderá ser empregado para o cálculo de vigas de concreto de seção vazada transversalmente.

Portanto, podem ser investigados aspectos complementares para aprimorar o modelo com base nas informações apresentadas, o que proporcionará maior consistência à formulação.

REFERÊNCIAS

ALVES FILHO, AVELINO. **Elementos finitos: a base da tecnologia CAE**. 4. ed. São Paulo: Érica, 2005.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto: Procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

CARRAZEDO, R. **Mecanismo de confinamento e suas implicações no reforço de pilares de concreto por encamisamento com compósito de fibras de carbono**. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002. 208p.

CARROLL, W. F. **A primer for finite elements in elastic structures**. New York: John Wiley & Sons. 1999.

CHIMELLO, A. A. **Análise não-linear de vigas de concreto armado reforçadas com laminados de PRFC**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina-UFSC, Florianópolis, 2003. 178p.

CHO, Benjie; ALEMU Mulugojam. Disponível em: <http://www-classes.usc.edu/engr/ce/334/2002_06.ppt>. Acesso em 05/01/07.

COOK, R.D. **Finite element modeling for stress analysis**. New York: John Wiley & Sons, 1995. 320p.

D' AVILA, V.M.R.; CAMPOS F^o, A. Simulação numérica do comportamento pós-fissuratório de vigas de concreto armado. **Teoria e Prática na Engenharia Civil**, sl, n. 2, p.45-53, maio 2001.

FAGLIONI, A. F. **Análise não-linear física de vigas de concreto armado utilizando o elemento finito prismático regular linear associado ao de barra unidimensional**. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira UNESP, Ilha Solteira, 2006. 112p.

KNIGHT, Charles E. **The finite element method in mechanical design**. Boston: PWS-Kent Publishing Company, 1993. 326p.

LEKHNITSKII, S. G. **Theory of elasticity of an anisotropic body**. Moscow: Mir Publishers. 1981.

LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. **Construções de concreto: princípios básicos do dimensionamento de estruturas de concreto armado**. Tradução de David Fridman. Rio de Janeiro: Interciência, v.1, 1982.

LIMA, M. C. V. **Contribuição ao estudo da instabilidade lateral de vigas pré-moldadas**. São Carlos. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, Brasil, 2002. 170p.

MAKOTO, Kawakami. Nonlinear finite element analysis of prestressed concrete members using ADINA. **Computer and Structures**. v. 81, p.727-734, 2003.

MASON, JAYME. **Concreto armado e protendido: princípios e aplicações**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1976.

MOAVENI, S. **Finite element analysis: theory and application with ANSYS**. New Jersey: Prentice-Hall, 1999.

PFEIL, Walter. **Concreto armado**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1985.

ROCKEY, K.C.; EVANS, H.R.; GRIFFITHS, D.W.; NETHERCOT, D.A. **The finite element method**. 2.ed. London: Collins Professional and Technical Books, 1983. 239p.

RÜSH, H. **Concreto armado e protendido: propriedades dos materiais e dimensionamento**. Tradução de Yara Penha Melichar. Rio de Janeiro: Campus, 1981.

SANTOS, F. W. E. **Reforços de vigas de concreto armado à flexão por encamisamento parcial**. 2006. 168f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

SOUZA, R. A. **Análise não-linear de vigas de concreto armado de alto desempenho**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Campinas, Campinas, SP, 2003.

SOUZA, REGINA H. F. **A influência das propriedades físicas e mecânicas dos sistemas de reparação no comportamento estrutural de vigas de concreto armado**

reparadas. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, 2000.

SOUZA, W. R. M. Propagação de fissuras em vigas submetidas a diferentes estados de carregamento. In: JORNADA SUL AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, XXX, Brasília, 2002. 18p.

ZIENKIEWICZ, O. C. **El método de los elementos finitos.** Barcelona: Reverte. 1980.

ANEXO 1

PRIMEIRO ESTUDO DE CASO

Dados experimentais de Carvalho (1994 apud FAGLIONI, 2006), numéricos de Faglioni (2006) e do programa computacional usado neste trabalho

Passo	Força (kN)	Deslocamento (mm)			
		Carvalho (1994 apud FAGLIONI, 2006) (experimental)	Faglioni (2006)	Programa malha 96x12	Programa malha 135x12
1	0,50	-0,028	-0,028	-0,032	-0,032
2	1,00	-0,057	-0,057	-0,064	-0,064
3	1,50	-0,086	-0,086	-0,097	-0,097
4	2,00	-0,110	-0,115	-0,131	-0,131
5	2,50	-0,143	-0,143	-0,165	-0,166
6	3,00	-0,172	-0,172	-0,200	-0,201
7	3,50	-0,201	-0,201	-0,235	-0,236
8	4,00	-0,229	-0,229	-0,271	-0,272
9	4,50	-0,258	-0,258	-0,307	-0,308
10	5,00	-0,287	-0,287	-0,343	-0,344
11	5,50	-0,315	-0,315	-0,380	-0,381
12	6,00	-0,344	-0,344	-0,416	-0,418
13	6,50	-0,372	-0,372	-0,453	-0,455
14	7,00	-0,400	-0,401	-0,495	-0,497
15	7,50	-0,430	-0,430	-0,538	-0,540
16	8,00	-0,460	-0,458	-0,584	-0,586
17	8,50	-0,615	-0,491	-0,642	-0,642
18	9,00	-0,770	-0,525	-0,718	-0,712
19	9,50	-0,878	-0,559	-0,820	-0,799
20	10,00	-0,940	-0,598	-0,937	-0,899
21	10,50	-1,020	-0,638	-1,017	-0,974
22	11,00	-1,080	-0,679	-1,094	-1,042
23	11,50	-1,133	-0,726	-1,189	-1,129
24	12,00	-1,284	-0,774	-1,292	-1,249
25	12,50	-1,365	-0,823	-1,381	-1,340
26	13,00	-1,476	-0,881	-1,473	-1,414
27	13,50	-1,587	-0,939	-1,568	-1,519
28	14,00	-1,698	-0,998	-1,664	-1,627
29	14,50	-1,809	-1,058	-1,750	-1,716
30	15,00	-1,895	-1,130	-1,859	-1,810
31	15,50	-2,016	-1,201	-1,963	-1,915
32	16,00	-2,137	-1,273	-2,059	-2,016
33	16,50	-2,258	-1,346	-2,165	-2,118
34	17,00	-2,379	-1,421	-2,278	-2,220
35	17,50	-2,500	-1,509	-2,389	-2,315
36	18,00	-2,610	-1,597	-2,497	-2,421

37	18,50	-2,720	-1,685	-2,605	-2,525
38	19,00	-2,830	-1,773	-2,712	-2,634
39	19,50	-2,940	-1,862	-2,829	-2,741
40	20,00	-3,050	-1,954	-2,949	-2,851
41	20,50	-3,200	-2,047	-3,058	-2,972
42	21,00	-3,350	-2,155	-3,176	-3,084
43	21,50	-3,500	-2,262	-3,287	-3,202
44	22,00	-3,650	-2,370	-3,410	-3,327
45	22,50	-3,800	-2,477	-3,532	-3,440
46	23,00	-3,920	-2,585	-3,639	-3,551
47	23,50	-4,040	-2,694	-3,769	-3,667
48	24,00	-4,160	-2,802	-3,882	-3,802
49	24,50	-4,280	-2,916	-4,007	-3,945
50	25,00	-4,400	-3,031	-4,131	-4,077
51	25,50	-4,520	-3,145	-4,262	-4,191
52	26,00	-4,640	-3,275	-4,395	-4,313
53	26,50	-4,760	-3,404	-4,513	-4,435
54	27,00	-4,880	-3,534	-4,648	-4,551
55	27,50	-5,000	-3,664	-4,775	-4,669
56	28,00	-5,122	-3,795	-4,912	-4,787
57	28,50	-5,240	-3,925	-5,025	-4,919
58	29,00	-5,367	-4,055	-5,143	-5,055
59	29,50	-5,489	-4,185	-5,287	-5,198
60	30,00	-5,612	-4,323	-5,418	-5,330
61	30,50	-5,730	-4,462	-5,545	-5,456
62	31,00	-5,848	-4,600	-5,674	-5,592
63	31,50	-5,965	-4,739	-5,808	-5,723
64	32,00	-6,083	-4,877	-5,956	-5,860
65	32,50	-6,200	-5,016	-6,116	-5,996
66	33,00	-6,325	-5,155	-6,287	-6,125
67	33,50	-6,451	-5,293	-6,451	-6,271
68	34,00	-6,576	-5,432	-6,587	-6,425
69	34,50	-6,701	-5,571	-6,721	-6,582
70	35,00	-6,827	-5,724	-6,857	-6,740
71	35,50	-6,962	-5,878	-6,993	-6,877
72	36,00	-7,096	-6,042	-7,143	-7,014
73	36,50	-7,231	-6,208	-7,304	-7,156
74	37,00	-7,365	-6,376	-7,458	-7,291
75	37,50	-7,500	-6,543	-7,619	-7,432
Máximo		-0,028	-0,028	-0,032	-0,032
Mínimo		-7,500	-6,543	-7,619	-7,432

ANEXO 2

SEGUNDO ESTUDO DE CASO

Dados experimentais de Santos (2006) e numéricos do programa computacional usado neste trabalho

Passo	Força (kN)	Deslocamento (mm)		
		Santos (2006) (experimental)	Programa malha 120x12	Programa 150x12
1	0,25	-0,092	-0,095	-0,112
2	0,50	-0,184	-0,193	-0,227
3	0,75	-0,276	-0,293	-0,345
4	1,00	-0,368	-0,396	-0,466
5	1,25	-0,460	-0,501	-0,590
6	1,50	-0,640	-0,608	-0,715
7	1,75	-0,820	-0,719	-0,857
8	2,00	-1,000	-0,871	-1,013
9	2,25	-1,180	-1,030	-1,189
10	2,50	-1,360	-1,198	-1,376
11	2,75	-1,688	-1,396	-1,582
12	3,00	-2,017	-1,605	-1,799
13	3,25	-2,346	-1,820	-2,029
14	3,50	-2,675	-2,051	-2,267
15	3,75	-3,003	-2,299	-2,514
16	4,00	-3,310	-2,547	-2,769
17	4,25	-3,618	-2,804	-3,042
18	4,50	-3,926	-3,073	-3,303
19	4,75	-4,232	-3,348	-3,594
20	5,00	-4,540	-3,635	-3,880
21	5,25	-4,740	-3,921	-4,173
22	5,50	-4,940	-4,212	-4,479
23	5,75	-5,140	-4,502	-4,786
24	6,00	-5,340	-4,805	-5,100
25	6,25	-5,540	-5,102	-5,427
26	6,50	-5,976	-5,395	-5,752
27	6,75	-6,412	-5,697	-6,083
28	7,00	-6,848	-6,008	-6,423
29	7,25	-7,284	-6,321	-6,768
30	7,50	-7,720	-6,650	-7,118
31	7,75	-8,018	-6,971	-7,472
32	8,00	-8,316	-7,295	-7,832
33	8,25	-8,614	-7,632	-8,196
34	8,50	-8,912	-7,971	-8,567
35	8,75	-9,210	-8,307	-8,943
36	9,00	-9,528	-8,654	-9,321
37	9,25	-9,846	-9,004	-9,706
38	9,50	-10,164	-9,354	-10,095

39	9,75	-10,482	-9,703	-10,490
40	10,00	-10,800	-10,052	-10,888
41	10,25	-11,120	-10,396	-11,292
42	10,50	-11,440	-10,755	-11,697
43	10,75	-11,760	-11,130	-12,114
44	11,00	-12,080	-11,499	-12,529
45	11,25	-12,400	-11,879	-12,958
46	11,50	-12,760	-12,243	-13,386
47	11,75	-13,120	-13,483	-14,598
48	12,00	-13,480	-13,896	-15,060
49	12,25	-13,840	-14,298	-15,534
50	12,50	-14,200	-14,719	-16,000
51	12,75	-14,580	-15,155	-16,477
52	13,00	-14,960	-15,615	-16,959
53	13,25	-15,340	-16,057	-17,448
54	13,50	-15,720	-16,513	-17,940
55	13,75	-16,100	-17,702	-18,432
56	14,00	-16,740	-18,191	-18,934
57	14,25	-17,380	-18,665	-19,452
58	14,50	-18,020	-19,132	-20,347
59	14,75	-18,660	-20,448	-20,869
60	15,00	-19,300	-20,937	-21,391
Máximo	0,25	-0,092	-0,095	-0,112
Mínimo	15,00	-19,300	-20,937	-21,391

ANEXO 3

TERCEIRO ESTUDO DE CASO

Dados experimentais de Juvandes (1999 apud CHIMELLO, 2003) e numéricos do programa computacional usado neste trabalho

Passo	Força (kN)	Deslocamento (mm)		
		Juvandes (1999 apud CHIMELLO, 2003)	Programa malha 120x12	Programa malha 150x12
1	1	-0,046	-0,043	-0,043
2	2	-0,092	-0,086	-0,086
3	3	-0,138	-0,130	-0,131
4	4	-0,184	-0,174	-0,176
5	5	-0,230	-0,219	-0,221
6	6	-0,280	-0,264	-0,268
7	7	-0,320	-0,310	-0,314
8	8	-0,360	-0,356	-0,369
9	9	-0,410	-0,413	-0,424
10	10	-0,450	-0,467	-0,486
11	11	-0,580	-0,530	-0,559
12	12	-0,620	-0,599	-0,633
13	13	-0,690	-0,671	-0,713
14	14	-0,770	-0,749	-0,794
15	15	-0,850	-0,831	-0,878
16	16	-0,950	-0,924	-0,965
17	17	-1,030	-1,013	-1,056
18	18	-1,150	-1,105	-1,152
19	19	-1,250	-1,200	-1,247
20	20	-1,350	-1,307	-1,346
21	21	-1,450	-1,409	-1,451
22	22	-1,550	-1,514	-1,554
23	23	-1,650	-1,623	-1,658
24	24	-1,750	-1,735	-1,769
25	25	-1,850	-1,841	-1,881
26	26	-1,950	-1,953	-2,008
27	27	-2,100	-2,070	-2,123
28	28	-2,130	-2,194	-2,245
29	29	-2,230	-2,318	-2,363
30	30	-2,330	-2,441	-2,492
31	31	-2,450	-2,571	-2,605
32	32	-2,580	-2,725	-2,733
33	33	-2,730	-2,856	-2,869
34	34	-2,890	-2,997	-3,006
35	35	-3,050	-3,138	-3,132
36	36	-3,150	-3,281	-3,277
37	37	-3,270	-3,426	-3,421

38	38	-3,390	-3,563	-3,574
39	39	-3,540	-3,706	-3,708
40	40	-3,690	-3,862	-3,863
41	41	-3,910	-4,020	-4,020
42	42	-4,170	-4,173	-4,174
43	43	-4,280	-4,316	-4,337
44	44	-4,390	-4,486	-4,543
45	45	-4,560	-4,660	-5,055
46	46	-4,720	-4,833	-5,247
47	47	-4,920	-5,009	-5,414
48	48	-5,100	-5,196	-5,593
49	49	-5,340	-5,376	-5,781
50	50	-5,500	-5,567	-5,974
Máximo		-0,092	-0,095	-0,043
Mínimo		-5,500	-5,567	-5,974

ANEXO 4

QUARTO ESTUDO DE CASO

Dados experimentais de Souza (2000) e do programa computacional usando malha de 97×12 e malha de 125×16

Passo	Força (kN)	Deslocamento (mm)		
		Souza(2000) (experimental)	Programa com malha 97×12	Programa com malha 125×16
1	0,25	-0,080	-0,032	-0,033
2	0,50	-0,100	-0,065	-0,066
3	0,75	-0,150	-0,098	-0,099
4	1,00	-0,180	-0,132	-0,134
5	1,25	-0,220	-0,166	-0,168
6	1,50	-0,240	-0,201	-0,204
7	1,75	-0,310	-0,236	-0,239
8	2,00	-0,330	-0,272	-0,275
9	2,25	-0,400	-0,307	-0,311
10	2,50	-0,440	-0,343	-0,348
11	2,75	-0,480	-0,380	-0,384
12	3,00	-0,530	-0,416	-0,421
13	3,25	-0,580	-0,452	-0,458
14	3,50	-0,620	-0,489	-0,497
15	3,75	-0,680	-0,530	-0,542
16	4,00	-0,770	-0,572	-0,586
17	4,25	-0,850	-0,616	-0,632
18	4,50	-0,930	-0,664	-0,700
19	4,75	-0,970	-0,762	-0,793
20	5,00	-1,000	-0,841	-0,891
21	5,25	-1,190	-0,928	-1,033
22	5,50	-1,380	-1,062	-1,163
23	5,75	-1,530	-1,178	-1,249
24	6,00	-1,660	-1,275	-1,361
25	6,25	-1,740	-1,352	-1,446
26	6,50	-1,870	-1,437	-1,552
27	6,75	-1,950	-1,521	-1,665
28	7,00	-2,030	-1,628	-1,759
29	7,25	-2,120	-1,729	-1,871
30	7,50	-2,230	-1,828	-1,977
31	7,75	-2,350	-1,923	-2,087
32	8,00	-2,450	-2,030	-2,193
33	8,25	-2,670	-2,131	-2,317
34	8,50	-2,780	-2,230	-2,433
35	8,75	-2,900	-2,328	-2,541
36	9,00	-3,020	-2,445	-2,663
37	9,25	-3,230	-2,561	-2,791
38	9,50	-3,430	-2,676	-2,902
39	9,75	-3,650	-2,779	-3,028
40	10,00	-3,880	-2,883	-3,200
41	10,25	-4,130	-2,984	-3,332
42	10,50	-4,390	-3,090	-3,457

43	10,75	-4,540	-3,206	-3,575
44	11,00	-4,790	-3,320	-3,696
45	11,25	-4,940	-3,438	-3,886
46	11,50	-5,190	-3,555	-4,014
47	11,75	-5,340	-3,684	-4,144
48	12,00	-5,490	-3,813	-4,282
49	12,25	-5,640	-3,934	-4,419
50	12,50	-5,790	-4,059	-4,547
51	12,75	-5,910	-4,170	-4,682
52	13,00	-6,030	-4,283	-4,814
53	13,25	-6,150	-4,404	-4,940
54	13,50	-6,270	-4,522	-5,077
55	13,75	-6,400	-4,642	-5,207
56	14,00	-6,520	-4,757	-5,345
57	14,25	-6,640	-4,882	-5,573
58	14,50	-6,760	-5,003	-5,710
59	14,75	-6,880	-5,125	-5,845
60	15,00	-7,000	-5,265	-5,983
61	15,25	-7,180	-5,400	-6,138
62	15,50	-7,360	-5,525	-6,283
63	15,75	-7,540	-5,647	-6,433
64	16,00	-7,720	-5,775	-6,595
65	16,25	-7,900	-5,902	-6,737
66	16,50	-8,06	-6,026	-6,882
67	16,75	-8,260	-6,150	-7,033
68	17,00	-8,440	-6,274	-7,178
69	17,25	-8,620	-6,405	-7,324
70	17,50	-8,800	-6,545	-7,472
71	17,75	-8,940	-6,672	-7,648
72	18,00	-9,080	-6,807	-7,803
73	18,25	-9,250	-6,935	-7,958
74	18,50	-9,360	-7,064	-8,118
75	18,75	-9,500	-7,193	-8,273
76	19,00	-9,640	-7,336	-8,429
77	19,25	-9,780	-7,472	-8,608
78	19,50	-9,920	-7,614	-8,769
79	19,75	-10,060	-7,762	-9,165
80	20,00	-10,200	-7,901	-9,324
Máximo		-0,080	-0,032	-0,033
Mínimo		-10,20	-7,901	-9,324

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)