



Adenilson Costa de Oliveira

**Um modelo de interação dinâmica entre os
elementos estruturais de uma via férrea**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio

Orientador: Prof. Ney Augusto Dumont

Rio de Janeiro
Julho de 2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



Adenilson Costa de Oliveira

**Um modelo de interação dinâmica entre os
elementos estruturais de uma via férrea**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Ney Augusto Dumont

Orientador

Departamento de Engenharia Civil — PUC-Rio

Prof. Webe João Mansur

Departamento de Engenharia Civil — Coppe-Rio

Prof. João Luís Pascal Roehl

Departamento de Engenharia Civil — PUC-Rio

Prof. Paulo Batista Gonçalves

Departamento de Engenharia Civil — PUC-Rio

Prof. Raul Rosas e Silva

Departamento de Engenharia Civil — PUC-Rio

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 17 de Julho de 2006

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Adenilson Costa de Oliveira

Graduou-se em Engenharia Civil na Universidade Federal do Pará – UFPA em 2003. Iniciou o curso de Mestrado na PUC-Rio em 2004, atuando na linha de pesquisa de Métodos de elementos de contorno e dinâmica das estruturas.

Ficha Catalográfica

Oliveira, Adenilson Costa de

Um modelo de interação dinâmica entre os elementos estruturais de uma via férrea / Adenilson Costa de Oliveira; orientador: Ney Augusto Dumont. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, 2006.

v., 114 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Civil – Tese. 2. Elementos de uma via férrea. 3. Análise modal avançada. 4. Elementos finitos híbridos. 5. Elementos finitos dinâmicos. I. Dumont, Ney Augusto. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD: 624

Agradecimentos

À Deus

Sobretudo, a minha mãe, Suely Costa de Oliveira por todo amor com que me criou, registro aqui meu orgulho por ela.

Aos meus avós Oneide Costa de Oliveira e Arlindo Ferreira de Oliveira, pela orientação nas situações mais complicadas.

À minha Tia, Samira Costa de Oliveira, pelo grande apoio durante o mestrado.

Ao meu irmão, Blendo Costa de Oliveira, parceiro de todos os momentos de descontração e lazer.

Ao Prof. Ney Augusto Dumont, pela orientação e motivação.

Ao Professor Remo Magalhães de Sousa, pelo incentivo e exemplo.

Aos amigos de mestrados, em especial Klessis Dias, Ygor Netto, Renato Mendes, Jean Aguilera, Rafael Araújo, Plínio Glauber, Sílvio do Valle, pelos momentos de descontração e esporte.

Aos meus amigos de sala 609, André Muller, Christiano, Frederico, Diego, Igor e Thiago Pecin.

À agência CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Oliveira, Adenilson Costa de; Dumont, Ney Augusto. **Um modelo de interação dinâmica entre os elementos estruturais de uma via férrea**. Rio de Janeiro, 2006. 114p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Em uma ferrovia, o veículo interage dinamicamente com a superestrutura (trilhos, palmilha e dormentes) e a subestrutura (lastro, sublastro e sub-base). O conforto dos passageiros, a vibração no solo e a frequência dos trabalhos, de manutenção tanto dos veículos como também dos trilhos são determinadas considerando-se que todos os elementos estruturais interagem entre si. A resposta de cada componente estrutural é sensível à pressão do eixo da roda no trilho, às irregularidades na superfície do trilho e à velocidade do trem, que está relacionada com a velocidade crítica na ferrovia (velocidade da fase mínima com que as ondas se propagam no trilho e no dormente). No projeto de uma nova ferrovia, como também na própria avaliação das condições de trabalho de ferrovias existentes, todos os aspectos brevemente mencionados acima têm que ser levados em conta em um modelo matemático. A interação trilho-palmilha-dormente-lastro é representada por um modelo unidimensional em que os trilhos são representados por vigas de Timoshenko, assim como os dormentes; o lastro é representado por uma fundação elástica com amortecimento viscoso. A interação local entre trilho e dormente é simulada utilizando um elemento de treliça com rigidez e amortecimento. As propriedades mecânicas de cada componente da ferrovia são na maioria dos casos desconhecidas, principalmente as propriedades do lastro. Para cada elemento, são desenvolvidas as equações de equilíbrio entre esforços e deslocamentos. As equações de equilíbrio global são dadas por um desenvolvimento em série das matrizes de massa, rigidez e amortecimento em função de uma frequência circular de vibração. O interesse final é a resposta transiente no domínio do tempo, obtida utilizando técnicas de superposição modal. Por fim, são propostos três modelos globais para a ferrovia, obtidos considerando algumas modificações no dormente.

Palavras-chave

Elementos de uma via férrea. Análise modal avançada. Elementos finitos híbridos. Elementos finitos dinâmicos.

Abstract

Oliveira, Adenilson Costa de; Dumont, Ney Augusto (advisor). **A dynamic Interaction model of track Railway Structural Elements**. Rio de Janeiro, 2006. 114p. MsC Thesis — Department of Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In a railway, the vehicle interacts dynamically with a track superstructure (rails, rail pad and sleepers) and sub-structure (ballast, sub-ballast, sub-grade). Passengers' comfort, environmental loading (ground vibration) and frequency of maintenance works of vehicles as well as of the track are determined by the way all the structural elements interact. The response of each single structural component is sensitive to the wheel-axle pressure on the track, the effects of joint in un welded rails, the unevenness of wheel and rail, and the train speed as referred to the track critical velocity (minimum phase velocity of bending waves propagating in the track rails, supported by the ballast). An important issue is for example how the ballast will be affected when old, soft, timber sleepers and replaced by much, stiffer, prestressed concrete elements, and how newly introduced irregularities propagate along the track, among uncountable mathematical model possibilities, the presents a rail-pad-sleeper-ballast model mainly based on an assemble of Timoshenko beam elements (for the rail) including, in case of the sleepers, elastic foundation (for the ballast) and viscous damping. The local interaction of the rail-pad-sleeper set is simulated with a bar element that includes damping. The dissertation reports on the numerical model, which relies on exact, dynamic beam and truss elements derived on a variational basis for the frequency-domain analysis. The model enable the assessment of the vibration characteristics of a rail track, the inverse evaluation of several mechanical properties of the structural components and eventually, if everything goes well, the assessment of a dynamic behavior of the rail track actual service load. Theoretical basis for transient analysis is the advanced mode superposition technique. Finally, are proposed three global models for the railway, obtained considering some modifications in the sleeper.

Keywords

Railway elements. Advanced modal analysis. Hybrid finite elements. Dynamic finite elements.

Sumário

1	Introdução	18
1.1	Organização do texto	19
1.2	Objetivos	20
2	Revisão Bibliográfica	21
2.1	Cenário ferroviário Brasileiro	21
2.2	Componentes estruturais de uma via férrea	22
2.3	Modelos Computacionais	29
2.4	Alguns modelos de interação dinâmica em ferrovias	31
2.5	Considerações sobre análise dinâmica em vigas	37
2.6	Considerações sobre elementos finitos dinâmicos.	38
3	Elementos Finitos Híbridos	40
3.1	Formulação do Problema	40
3.2	Formulação no domínio da frequência	41
3.3	Equações matriciais de equilíbrio	42
3.4	Expansão das matrizes na forma de séries de frequência	43
3.5	O Problema de Autovalor não-linear	45
3.6	Resposta transiente do sistema	45
3.7	Condensação dinâmica	47
4	Elementos finitos dinâmicos unidimensionais	49
4.1	Matriz de rigidez para um elemento de treliça	49
4.2	Elemento de viga de Timoshenko sobre base elástica e com amortecimento	51
4.3	Exemplo para o elemento de treliça	57
4.4	Exemplo para o elemento de viga	58
5	Modelos para representação da ferrovia	61
5.1	Considerações iniciais	62
5.2	Modelo com 5 graus de liberdade por dormente para a ferrovia (modelo 5)	63
5.3	Modelo com 3 graus de liberdade por dormente para a ferrovia (modelo 3)	64
5.4	Modelo com 2 graus de liberdade por dormente para a ferrovia (modelo 2)	64
5.5	Modelo com 7 graus de liberdade por dormente para a ferrovia (modelo 7)	65
5.6	Propriedades dos elementos da via férrea	65
6	Solução particular para o caso de viga de Timoshenko	72
6.1	Generalização da solução para um elemento viga de Timoshenko	72
6.2	Primeiro caso: Viga esbelta com amortecimento	74
6.3	Segundo caso particular: Carga Impulsiva	75

6.4	Terceiro caso particular: Carga móvel	76
7	Exemplos Numéricos	78
7.1	Trecho de ferrovia submetido a uma carga súbita	78
7.2	Pulso retangular	87
7.3	Comparação dos resultados entre os modelos 2, 3 e 5	90
7.4	Pulso Triangular simétrico	91
7.5	Sistema com amortecimento reduzido	94
7.6	Trecho de ferrovia com 20 dormentes	98
8	Conclusão	101
8.1	Sobre o método de formulação dos elementos finitos desenvolvidos em séries de frequência.	101
8.2	Quanto ao modelo de interação	102
8.3	Sugestões para trabalhos futuros	103
	Referências Bibliográficas	104
A	Procedimento de transferência de dados entre Maple, Fortran e Matlab	109

Lista de figuras

2.1	Elementos estruturais de uma ferrovia típica	23
2.2	Elementos de fixação longitudinal do trilho (Railway-2004)	24
2.3	Alguns sistemas de fixação e transferência de cargas em ferrovias. Fonte: (Railway-2004) p.63,70	25
2.4	Alguns tipos de dormentes em ferrovias (Rail-One) e (Railway-2004)	26
2.5	Seção transversal típica de uma ferrovia	28
2.6	Aspectos dinâmicos envolvidos na análise da interação entre veículo e ferrovia.	29
2.7	Programas computacionais desenvolvidos ou em uso na Universidade Técnica de Delft (Anuario) 97/98	30
2.8	Modelo dinâmico de análise da interação veículo-ferrovia-solo (Niakas-2001)	32
2.9	Modelo de interação veículo-ferrovia-solo (Martin-2003)	33
2.10	Modelo dinâmico experimental (Esveld-1998)	37
4.1	Sistemas de coordenadas para a obtenção da matriz de rigidez de um elemento de treliça de uma formulação híbrida	50
4.2	Elemento infinitesimal de viga submetido a uma carga distribuída e apoiado em base base elástica	52
4.3	Sistemas de coordenadas e convenção de esforços para a viga.	55
4.4	Barra com extremidades apoiada e livre submetida a uma força P constante ($t \geq 0$) discretizada em 5 elementos de treliça.	57
4.5	Resposta transiente do deslocamento no segundo nó ($x = 0.4L$) para $n = 1$ (teoria clássica) e $n = 4$ (expansão usando termos de ordem ω^8), comparadas com a solução analítica.	58
4.6	Viga biapoiada sob base elástica com amortecimento.	58
4.7	Respostas para as amplificações da viga no nó central	59
4.8	Comparação dos resultados em um pequeno intervalo de tempo e $n=2$.	60
5.1	Modelo global para os componentes estruturais da ferrovia.	61
5.2	Vista frontal do modelo global para os componentes estruturais da ferrovia.	61
5.3	Sistema 1 de coordenadas para o dormente.	62
5.4	Sistema 2 de coordenadas para o dormente.	63
5.5	Modelo 5 para representação da ferrovia.	63
5.6	Representação do engaste, com eliminação de um grau de liberdade e indicação dos graus de liberdade condensados.	63
5.7	Modelo 3 para representação da ferrovia.	64
5.8	Modelo 2 para representação da ferrovia.	65
5.9	Modelo 7 para representação da ferrovia.	65
5.10	Medidas geométricas da seção transversal do trilho UIC 60 em milímetros (CORUS).	66
5.11	Medidas geométricas do meio dormente e palmilha em metros.	66

5.12	Comparação dos autovalores obtidos em cada modelo para diferentes valores de n .	68
5.13	Comparação dos autovalores obtidos em cada modelo para diferentes valores de n para um sistema com pouco amortecimento.	71
7.1	Posição do carregamento.	78
7.2	Resposta para uma carga súbita no primeiro nó, grau de liberdade 1 para $n=2$ e deslocamento estático $d_0 = 1,20.10^{-5}m$, modelo 2.	79
7.3	Resposta para uma carga súbita no quinto nó, grau de liberdade 9 para $n=2$ e deslocamento estático $d_0 = -2,86.10^{-4}m$, modelo 2.	79
7.4	Comparação das respostas obtidas no grau de liberdade #9, variando n de 1 (termos na ordem de ω e ω^2) até 3 (termos de ordem de ω^5 e ω^6), model 2.	79
7.5	Resposta para uma carga retangular do grau de liberdade 1, model 3, para $n=3$ e deslocamento estático $d_0 = 1,24.10^{-5}m$.	80
7.6	Resposta para uma carga retangular do grau de liberdade 13, model 3, para $n=3$ e deslocamento estático $d_0 = -3,34.10^{-4}m$.	80
7.7	Resposta para uma carga retangular no primeiro dormente, grau de liberdade 3 fixando $n=3$ e $d_0 = -1,50.10^{-6}m$, model 3.	80
7.8	Resposta para uma carga retangular no quinto dormente, grau de liberdade 15 fixando $n=3$ e $d_0 = -2,45.10^{-4}m$, modelo 3.	80
7.9	Comparação das respostas obtidas no quinto dormente , grau #15, variando n de 1 (termos na ordem de ω e ω^2) até 3 (termos de ordem de ω^5 e ω^6), modelo 3.	81
7.10	Resposta para uma carga retangular do grau de liberdade 1, modelo 5, para $n=3$ e deslocamento estático $d_0 = 7,02.10^{-5}m$.	81
7.11	Resposta para uma carga retangular do grau de liberdade 21, modelo 5, para $n=3$ e deslocamento estático $d_0 = -3,57.10^{-4}m$.	81
7.12	Resposta para uma carga retangular no primeiro dormente, grau de liberdade 3, modelo 5, fixando $n=3$ e $d_0 = 3,66.10^{-6}m$.	82
7.13	Resposta para uma carga retangular no quinto dormente, grau de liberdade 23, modelo 5, fixando $n=3$ e $d_0 = -2,80.10^{-4}m$.	82
7.14	Comparação das respostas obtidas no quinto dormente , grau de liberdade 23, variando n de 1 (termos na ordem de ω e ω^2) até 3 (termos de ordem de ω^5 e ω^6), modelo 5.	82
7.15	Resposta para uma carga súbita no quinto dormente para $n=1$, modelos 5 e 7.	83
7.16	Resposta para uma carga retangular no quinto dormente para $n=1$, modelos 3 e 5.	83
7.17	Resposta para uma carga retangular no quinto dormente para $n=3$, modelos 3 e 5.	84
7.18	Deslocamentos nodais dos dormentes para $t=0,05s$ variando o valor de n , modelos 3 e 5.	84
7.19	Deslocamentos nodais ao longo do trilho para $t=0,05s$, modelo 3.	85
7.20	Deslocamentos nodais ao longo do trilho para $t=0,05s$, modelo 5.	85
7.21	Deslocamentos nodais ao longo dos dormentes para $t=0,05s$, modelo 3.	86
7.22	Deslocamentos nodais ao longo dos dormentes para $t=0,05s$, modelo 5.	86

7.23	Comparação dos deslocamentos nodais ao longo do trilho para $t=0.05s$ variando o valor de n , modelos 2 e 3.	86
7.24	Comparação dos deslocamentos nodais ao longo do trilho para $t=0,05s$ variando o valor de n , modelos 2 e 5.	87
7.25	Pulso retangular.	87
7.26	Deslocamento obtido no primeiro nó, grau de liberdade 1 para $n=2$, modelo 2, para um pulso retangular.	88
7.27	Deslocamento obtido no quinto nó, grau de liberdade 9 para $n=2$, modelo 2, para um pulso retangular.	88
7.28	Comparação dos deslocamentos obtidos no quinto nó, grau de liberdade 9, variando n de 1 (termos na ordem de ω e ω^2) até 3 (termos de ordem de ω^5 e ω^6), modelo 2.	88
7.29	Deslocamento obtido no trilho, grau de liberdade 1 para $n=3$, modelo 3, para um pulso retangular.	89
7.30	Deslocamento obtido no trilho, grau de liberdade 1 para $n=3$, modelo 5, para um pulso retangular.	89
7.31	Deslocamento obtido no primeiro dormente, grau de liberdade 3 para $n=3$, modelo 3, para um pulso retangular.	89
7.32	Deslocamento obtido no primeiro dormente, grau de liberdade 3 para $n=3$, modelo 5, para um pulso retangular.	89
7.33	Deslocamento no quinto dormente, grau de liberdade 15, modelo 3, para um pulso retangular.	90
7.34	Deslocamento no quinto dormente, grau de liberdade 23, modelo 5, para um pulso retangular.	90
7.35	Comparação dos deslocamentos nodais ao longo do trilho, modelos 2 e 3, para um pulso retangular.	90
7.36	Comparação dos deslocamentos nodais ao longo do trilho, modelos 2 e 5, para um pulso retangular.	90
7.37	Comparação dos deslocamentos nodais ao longo do trilho, modelos 3 e 5, para um pulso retangular.	91
7.38	Comparação dos deslocamentos nodais nos dormentes, modelos 3 e 5, para um pulso retangular.	91
7.39	Posição do carregamento.	91
7.40	Pulso triangular.	91
7.41	Comparação dos deslocamentos nodais no trilho obtidos nos modelos 2 e 7 para $t=0,025s$.	92
7.42	Comparação dos deslocamentos nodais no trilho obtidos nos modelos 3 e 7 para $t=0,025s$.	93
7.43	Comparação dos deslocamentos nodais no trilho obtidos nos modelos 5 e 7 para $t=0,025s$.	93
7.44	Comparação dos deslocamentos nodais nos dormentes obtidos nos modelos 3 e 7 para $t=0,025s$.	94
7.45	Comparação dos deslocamentos nodais nos dormentes obtidos nos modelos 5 e 7 para $t=0,025s$.	94
7.46	Deslocamento no primeiro dormente obtido no modelo 3, variando o número de matrizes de massa e amortecimento e $P(t) = 100kN$.	95
7.47	Deslocamento no primeiro dormente imediatamente abaixo do trilho, modelos 3 e 5 para $n = 2$.	96

7.48	Deslocamento no quinto dormente imediatamente abaixo do trilho, modelos 3 e 5 para $n = 2$.	96
7.49	Comparação dos deslocamentos nodais obtidos nos dormentes, imediatamente abaixo do trilho, modelos 3 e 5.	97
7.50	Deslocamentos nodais dos trilhos obtidos variando t e fixando $n = 1$.	97
7.51	Deslocamentos nodais dos trilhos obtidos variando t e fixando $n = 3$.	98
7.52	Distribuição dos graus de liberdade nodais no trecho simulado	98
7.53	Frequências (ao quadrado) em ordem crescente	99
7.54	Modos de vibração ao longo dos dormentes ($\times 10^{-3}m$)	99
7.55	Amplificação no grau de liberdade # 64, para $n = 2$.	100
7.56	Amplificação no grau de liberdade # 1, para $n = 2$.	100
A.1	Distribuição dos autovalores no plano real e imaginário	114

Lista de tabelas

4.1	Propriedades físicas e geométricas para os elementos de treliça.	57
4.2	Propriedades físicas e geométricas para a viga.	59
5.1	Propriedades físicas e geométricas para o trilho UIC 60. Fonte dos dados: (Zhai-2003).	67
5.2	Propriedades físicas e geométricas para o dormente. Fonte dos dados: (Zhai-2003).	67
5.3	Propriedades físicas e geométricas para a palmilha. Fonte dos dados: (Zhai-2003).	67
5.4	Autovalores obtidos no modelo 2 para $n=1, 2$ e 3 .	69
5.5	Autovalores obtidos no modelo 3 para $n=1, 2$ e 3 .	69
5.6	Autovalores obtidos no modelo 5 para $n=1, 2$ e 3 .	69
5.7	Autovalores obtidos no modelo 7 para $n=1, 2$ e 3 .	70
5.8	Propriedades físicas e geométricas para o trilho.	70
5.9	Propriedades físicas e geométricas para o dormente.	70
5.10	Propriedades físicas e geométricas para a palmilha.	70
5.11	Módulo dos seis primeiros autovalores obtidos nos modelos com a redução do amortecimento e rigidez.	71
7.1	Valores dos deslocamentos nodais ($\times 10^{-6}$) dos dormentes ao longo do trecho, modelos 3 e 5 fixando $t=0,05s$.	85

Lista de símbolos

Caracteres latinos

a_n, b_n	Constantes de normalização modal no modelo de Martin et al
K_{bi}	Coefficiente de rigidez do lastro no modelo de Niakas et al
K_{pi}	Coefficiente de rigidez da palmilha no modelo de Niakas et al
K_s	Coefficiente de Rigidez da suspensão do veículo no modelo de Martin et al
C_{bi}	Coefficiente de amortecimento do lastro no modelo de Niakas et al
C_{pi}	Coefficiente de amortecimento da palmilha no modelo de Niakas et al
C_s	Coefficiente de amortecimento na suspensão do veículo no modelo de Martin et al
M_{si}	Massa do dormente no modelo de Niakas et al
M_b	Massa do veículo no modelo de Martin et al
M_w	Massa da roda no modelo de Martin et al
Z_r	Deslocamento ao longo do trilho no modelo de Niakas et al
\mathbf{z}	Vetor de deslocamentos globais no modelo de Martin et al
z_0	Deslocamento inicial do sistema no modelo de Martin et al
$q_k(t)$	Função dependente do tempo no modelo de Niakas et al
m_r	Massa do trilho por unidade de comprimento no modelo de Niakas et al
$\mathbf{F}(t)$	Vetor de forças externas no modelo de Niakas et al

$\mathbf{Y}(t)$	Vetor de deslocamentos no modelo de Niakas et al
m_r	Massa do trilho por unidade de comprimento no modelo de Niakas et al
l, L	Comprimento do elemento
\mathbf{x}^t	Vetor de deslocamentos no modelo de Martin et al
\mathbf{M}^t	Matriz de massa no modelo de Martin et al
\mathbf{C}^t	Matriz de amortecimento no modelo de Martin et al
\mathbf{K}^t	Matriz de rigidez no modelo de Martin et al
\mathbf{F}^{wr}	Vetor de forças no modelo de Martin et al
\mathbf{y}^t	Vetor de deslocamentos e velocidades no modelo de Martin et al
\mathbf{x}_a^v	Vetor de deslocamento vertical da interface roda-trilho no modelo de Martin et al
\mathbf{N}	Função de forma no modelo de Martin et al
\mathbf{x}^{irr}	Vetor de irregularidades prescritas na superfície da ferrovia no modelo de Martin et al
\mathbf{P}^{rw}	Matriz modal no modelo de Martin et al
P_0	Força estática aplicada
t	Tempo
t_1	Duração do pulso
x	Coordenadas cartesianas
y	Coordenadas cartesianas
\mathbf{M}	Matriz de massa
\mathbf{C}	Matriz de amortecimento
\mathbf{K}	Matriz de rigidez
$\mathbf{u}(t)$	Vetor de deslocamentos no modelo de Esveld et al
FFT	Transformada rápida de Fourier
\mathbf{d}	Vetor de deslocamentos nodais

\mathbf{d}^b	Vetor de deslocamentos nodais da solução particular
\mathbf{p}	Vetor de forças nodais
\mathbf{p}^*	Parâmetro de forças nodais dependentes da frequência
\mathbf{p}^b	Vetor de forças nodais particular
\mathbf{F}	Matriz de flexibilidade
\mathbf{H}	Matriz de equilíbrio
\mathbf{U}^*	Matriz de deslocamentos
u_i^*	Solução fundamental de deslocamentos
u_i^p	Solução particular de deslocamentos
\bar{u}_i	Campo de deslocamentos discreto
E	Módulo de elasticidade longitudinal do material
G	Módulo de elasticidade transversal do material
A	Área da seção transversal do elemento
I	Momento de inércia da seção transversal
w	Constante elástica da fundação
M	Momento fletor na seção transversal
Q	Esforço cortante na seção transversal
y^*	Deslocamento transversal da solução homogênea
C_i	Constantes de integração
\mathbf{N}^*	Matriz de compatibilidade de deslocamentos
q	Carregamento ao longo do elemento

Caracteres gregos

$\Phi_k(x)$	Função de forma para os modos de vibração no modelo de Niakas et al
Ω	Domínio do corpo elástico
$\mathbf{\Omega}$	Matriz de autovalores
σ_{ij}	Tensões normais
σ_{ij}^*	Tensões referentes à solução fundamental
σ_{ij}^p	Tensões referentes à solução particular
ρ	Massa específica
μ	Coefficiente de amortecimento
σ_{ij}	Parâmetro de amortecimento
Γ	Contorno do elemento
Γ_u	Região do contorno onde se têm deslocamentos prescritos
Γ_σ	Região do contorno onde se têm forças prescritas
ω	Frequência circular de vibração
η	Vetor de amplitude modal
$\bar{\eta}$	Vetor conjugado de amplitude modal
Λ	Cossenos diretores de um elemento
Φ	Matriz de autovetores
$\bar{\Phi}$	Matriz conjugada de autovetores
ψ^*	Rotação da seção transversal
γ_0	Deformação da seção transversal devido ao esforço cortante
κ	Fator de forma
β_n	Número de onda
δ	Delta de Kronecker
ξ	Coordenada de aplicação do carregamento particular
α_i	Raízes da equação polinomial

1

Introdução

Com a evolução tecnológica da indústria ferroviária, a utilização de trens, no transporte de cargas e passageiros, vem sendo consolidada como opção de transporte viável, tanto economicamente como também em termos de tempo de transporte e confiabilidade.

Assim, para otimização do sistema, torna-se necessário que as vias férreas acompanhem esse desenvolvimento. Daí a motivação principal do estudo, a criação de modelos capazes de fornecer respostas estruturais adequadas às solicitações impostas e às propriedades do sistema em análise.

Uma estrutura ferroviária convencional é constituída por uma superestrutura, cujos elementos principais são o trilho, elementos de ligação, como fixadores e palmilhas, e dormentes. A subestrutura é constituída por uma camada de material granular denominada lastro, e por camadas subjacentes de base e subbase. Dependendo da finalidade da ferrovia, há a necessidade de estruturas especiais como pontes e túneis, entre outras.

Neste trabalho, o objetivo principal é a implementação de um modelo de interação entre os elementos da superestrutura sobre uma camada de lastro, para uma dada solicitação, utilizando elementos unidimensionais numa formulação híbrida de elementos finitos, desenvolvida por (Dumont-2003). O problema é formulado no domínio da frequência num desenvolvimento em série e posteriormente, são utilizadas técnicas avançadas de superposição modal para obtenção de respostas no domínio do tempo.

1.1

Organização do texto

No capítulo 2 apresenta-se a revisão bibliográfica. Esse capítulo está dividido em 6 seções onde primeiramente é apresentado um panorama geral sobre trabalhos na área experimental e numérica presentes na literatura, destacando os modelos propostos por (Niakas-2001, Martin-2003, Esveld-1998-2). Nas seções 2.4 e 2.5 são feitas breves considerações sobre análise dinâmica em vigas e elementos finitos dinâmicos. Posteriormente, seção 2.6, são apresentadas algumas noções básicas sobre ferrovias e seus componentes estruturais.

O capítulo 3 está dividido em 7 seções, onde primeiramente, seção 3.1, é apresentada a formulação dos elementos finitos híbridos aplicada de forma completamente geral para problemas dependentes do tempo. Na seção 3.2 é apresentada a formulação no domínio da frequência, que leva a um problema de autovalor não linear, seção 3.5. As equações matriciais de equilíbrio e o desenvolvimento das matrizes numa série de frequências são mostradas nas seções 3.3 e 3.4. Apresenta-se na seção 3.6 o processo de superposição modal avançada para análise do problema no domínio do tempo. Por fim, o processo de condensação dinâmica é mostrado na seção 3.7.

O capítulo 4 apresenta o desenvolvimento, a partir da formulação mostrada no capítulo anterior, das matrizes de rigidez dos elementos utilizados na modelagem da ferrovia. São obtidas nas seções 4.1 e 4.2, as matrizes de rigidez dos elementos de treliça e viga de Timoshenko. Na seção 4.3 e 4.4 são apresentados alguns exemplos utilizando os elementos desenvolvidos.

No capítulo 5 é apresentado o modelo global para representação da ferrovia. Em seguida, seções 5.2-5.5, são apresentados modelos alternativos para análise dos resultados, obtidos a partir de modificações feitas no dormente. Os valores das propriedades físicas dos elementos estruturais utilizadas neste trabalho são dadas na seção 5.6. Em seguida, seção 5.7 é feito um estudo de convergência dos modelos de interação.

O desenvolvimento de soluções particulares para diversas situações de carregamento, com ênfase no caso de cargas móveis e impactos é apresentado no capítulo 6.

No capítulo 7 são elaborados alguns exemplos numéricos para verificação dos modelos.

Por fim o capítulo 8 apresenta alguns comentários e conclusões sobre os resultados obtidos. Além de sugestões de desenvolvimentos e melhoramentos que possam vir a ser feitos em estudos futuros.

Vale ressaltar que os desenvolvimentos feitos nesse trabalho são baseados no método desenvolvido por (Dumont-2003), orientador desse trabalho, além

das notas de aulas e apostilas e artigos publicados referentes ao curso de Método Híbrido de Elementos de Contorno, desenvolvido e ministrado por Dumont, desde 1987. na PUC-Rio.

1.2

Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é a criação de um modelo de interação dinâmica entre os elementos da superestrutura de uma via férrea utilizando elementos finitos unidimensionais e conceitos de superposição modal.

Um segundo objetivo é a verificação do uso de modelos alternativos com um número menor de graus de liberdade, obtidos em diferentes níveis de condensação dinâmica.

2

Revisão Bibliográfica

A literatura técnica apresenta centenas de artigos sobre análise experimental e modelagem computacional de todos os elementos estruturais de uma via férrea, desde o veículo até a subbase, passando por trilhos, palmilhas, dormentes e lastro. Embora muito esteja sendo feito nos Estados Unidos, Austrália e Japão, são europeus a maioria dos trabalhos de pesquisa divulgados. Países europeus que investem em pesquisa ferroviária são predominantemente Alemanha, Áustria, França, Inglaterra, Itália, Holanda e Suécia, com grande destaque para os dois últimos.

A Holanda se destaca pela Universidade Técnica de Delft, com um grupo liderado há décadas pelo Professor de Engenharia Ferroviária Coenraad Esveld, autor do principal livro da área (Esveld-2001). A Suécia tem a Universidade de Tecnologia Chalmers, em Gotenburgo.

Os estudos de ferrovias disponíveis na literatura técnica dedicam-se quase exclusivamente a trens de passageiro de alta velocidade, com a preocupação de obter resultados e propostas concernentes ao conforto do passageiro e à interferência ambiental dos trens. Estados Unidos e Austrália, países desenvolvidos que mais utilizam trens de carga, disponibilizam muito pouco seus estudos.

No Brasil raramente são encontrados trabalhos nessa área. Isso se deve principalmente ao pouco investimento destinado ao setor ferroviário. Porém já se nota uma tendência ao aumento de investimentos, principalmente vindos da iniciativa privada, que devem motivar futuros trabalhos na área numérica e experimental.

2.1

Cenário ferroviário Brasileiro

A malha ferroviária brasileira está implantada com o objetivo de interligar vários estados do País, principalmente regiões próximas aos portos de Parati, Angra dos Reis e porto de Santos.

Comparando as condições atuais da malha ferroviária com o período anterior à desestatização, os índices apontam um crescimento na recuperação da atividade ferroviária no País, com possibilidades de aumento de sua parti-

cipação na matriz de transporte, sobretudo a médio e longo prazo, em função dos investimentos feitos pelas empresas concessionárias.

Desde 1996, quando iniciou o processo de desestatização, a quantidade de carga movimentada nas ferrovias brasileiras segundo (DNIT) aumentou em cerca de 26 %. Os investimentos permitiram um incremento da produção de transportes em 68 % entre 1996 e 2001, (DNIT). As melhorias decorrentes da desestatização têm contribuído para reduzir acidentes nas malhas em funcionamento. No Brasil existem ferrovias com padrões de competitividade internacional, e a qualidade das operações permite, por exemplo, a agilidade desejada para a integração multimodal.

O custo do frete, cobrado pelas operadoras nas ferrovias, é em média 50 % mais barato em relação ao transporte rodoviário (DNIT). Além disso as ferrovias oferecem rapidez e resistência a grandes cargas. A alternativa ferroviária, de fato, é importante para operadores que lidam com matérias-primas como empresas mineradoras e petroquímicas, que além de perigosas são transportadas em grandes volumes. Atualmente o sistema ferroviário brasileiro apresenta um cenário evolutivo favorável. Os constantes e progressivos investimentos nesse setor tendem a elevar o potencial de atração de novos clientes e de ampliação de sua importância nos transportes brasileiros.

2.2

Componentes estruturais de uma via férrea

2.2.1

Introdução

Genericamente, uma estrutura ferroviária pode ser subdividida em duas partes principais: superestrutura e subestrutura. A superestrutura é composta por dois trilhos paralelos entre si, sobre uma série de dormentes, conectados por elementos de fixação conhecidos como grampos e por elementos de transição denominados de palmilhas. A subestrutura, em geral, é constituída por camadas de material granular horizontais sucessivas. A primeira camada, na qual os dormentes se apóiam, é denominada de lastro. As camadas subjacentes são respectivamente o sublastro e a subbase.

Dependendo da finalidade à qual foi destinada, algumas ferrovias são constituídas, além dos elementos já citados, por estruturas especiais como pontes, túneis e bueiros.

A durabilidade e a capacidade de transporte de uma via férrea dependem diretamente da resposta dada pela superestrutura e subestrutura quando interagem ao movimento de trens e a efeitos ambientais decorrentes de chuvas,

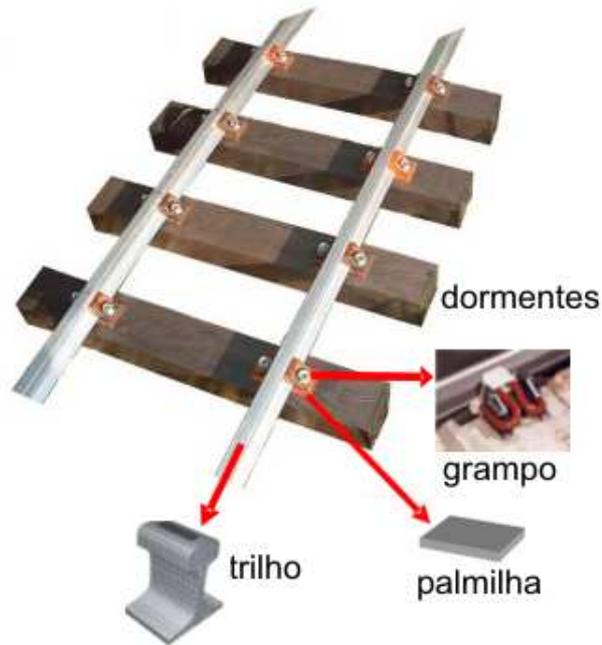


Figura 2.1: Elementos estruturais de uma ferrovia típica

tempestades e variações de temperatura. O adequado dimensionamento das seções transversais de trilhos e dormentes e da profundidade das camadas que constituem a subestrutura é fundamental para reduzir os efeitos de deterioração a níveis admissíveis, prolongando a vida útil da ferrovia. Esta seção tem a finalidade de apresentar esses componentes, que posteriormente serão representados por elementos unidimensionais na modelagem da via férrea.

2.2.2 Trilhos

Os trilhos, que formam a superfície rolante sobre a qual deslizam a locomotiva e os vagões, são feitos de aço, ainda e sempre o melhor material para o contato com o aço das rodas, num balanço de facilidade de fabricação, custo, dureza e resistência à abrasão. Esta superfície rolante deveria ser idealmente plana, assim como as rodas deveriam ser idealmente circulares. Porém, defeitos de assentamento dos trilhos e de confecção das rodas, além dos recalques e dos desgastes de utilização decorrentes das ondas de choque, são ao mesmo tempo causa e efeito de impactos progressivos no contato rodas-trilhos, que se propagam para o trem, causando progressivamente desgastes dos veículos e desconforto para os passageiros, de um lado, e distúrbios ambientais - vibração e ruído - por outro lado. Devido à sua produção em escala, os trilhos são padronizados em certos tipos de acordo com sua dimensão e peso específico. A AREA (American Railway Engineering Association) classifica os trilhos de

acordo com esse critério e as seções típicas são conhecidas como seções RE.

2.2.3

Lastro

O lastro (juntamente com o sublastro) distribui o efeito da passagem do trem para o subsolo, que é o elemento sustentador e dissipador de toda a ação dinâmica. Muitas vezes, como em trens urbanos e em túneis, o lastro consiste numa camada de concreto, sobre a qual se insere e assenta o trilho, de maneira contínua (nestes casos, usam-se também freqüentemente dormentes biblocos de concreto). Neste caso, um material com boas propriedades de amortecimento deve se entrepor entre trilho e lastro. Normalmente, porém, nas grandes extensões de ferrovia no campo e mesmo dentro de cidades, o lastro se constitui, por questão de economia, de uma camada de agregado grosso sobre sublastro de areia e solo tratado, com características específicas de resiliência e amortecimento, para prover uma adequada transferência da ação dinâmica do trem para o solo subjacente, com o mínimo de propagação de vibrações para as adjacências.

2.2.4

Grampos e fixadores

São os elementos responsáveis pela fixação do trilho nos dormentes. São em geral peças metálicas de variados tipos, que garantem a indeslocabilidade dos trilhos ao longo da ferrovia. Alguns tipos de grampos e demais elementos de fixação são mostrados nas figuras (2.2)e (2.3).

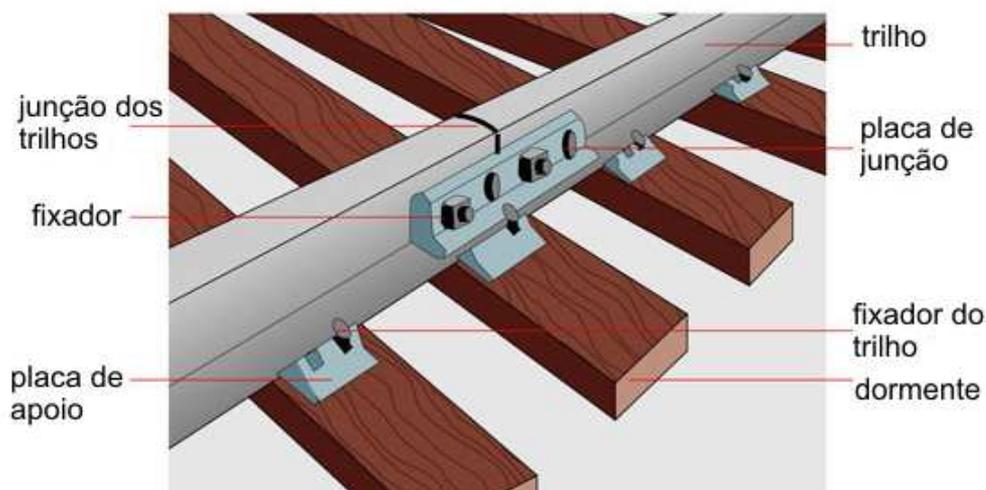
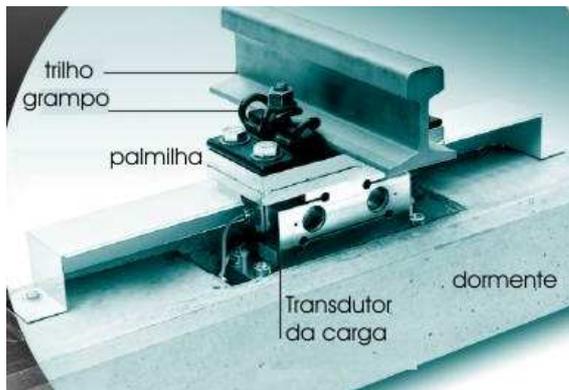
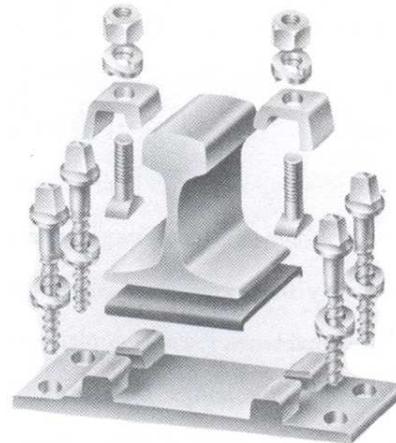


Figura 2.2: Elementos de fixação longitudinal do trilho (Railway-2004)



2.3(a): Sistema de fixação e transferência multi-rail



2.3(b): Sistema de fixação K-fastener

Figura 2.3: Alguns sistemas de fixação e transferência de cargas em ferrovias.
Fonte: (Railway-2004) p.63,70

2.2.5 Palmilhas

O elemento de transição entre a base do trilho e a parte superior do dormente é denominado de palmilha. Esse elemento consiste em uma placa elástica cuja função principal é reduzir a pressão transmitida pelo trilho nos dormentes, além de diminuir o desgaste que é provocado pelo contato entre o trilho e o dormente, já que o contato direto dessas superfícies pode ocasionar o aparecimento de uma zona preferencial de deterioração.

2.2.6 Dormentes

Os dormentes transferem as ações dinâmicas dos trilhos para o lastro de brita. Peças dispostas espaçadamente no leito da ferrovia, no sentido transversal aos trilhos, devem ser idealmente leves, resistentes ao tempo, flexíveis e com boas propriedades de amortecimento. Um bom amortecimento (capacidade de dissipação de vibrações) se consegue com muita massa e pouca rigidez (baixo módulo de elasticidade). Dormentes com muita massa, porém, são mais um fator de solicitação e degradação do lastro. O dormente pode assumir formas variadas, figura (2.4), mas geralmente consiste em uma viga de seção retangular com algumas variações ao longo do comprimento, em madeira, concreto, aço e materiais alternativos, como polímeros.

Dormentes de madeira

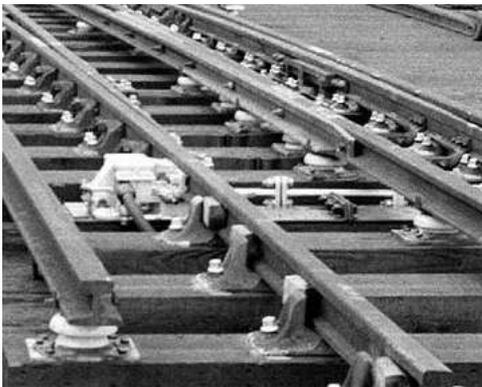
O material que melhor concilia as propriedades ideais de um dormente é a madeira. Por ser (ou ter sido) de grande disponibilidade na natureza, deu



2.4(a): Ferrovia com dormentes rígidos, Zuid-Holanda



2.4(b): Ferrovia com dormentes de concreto, Alemanha



2.4(c): Ferrovia de bitola variável com dormentes de madeira



2.4(d): Ferrovia com dormentes na forma de blocos de concreto sobre um lastro granular

Figura 2.4: Alguns tipos de dormentes em ferrovias (Rail-One) e (Railway-2004)

origem ao primeiro dormente e tem sido o tipo de dormente mais usado em todo o mundo. Seu uso atualmente tem diminuído, por maior dificuldade de obtenção e pela consciência que se tem do seu potencial poluidor da natureza, já que a madeira tem que ser tratada quimicamente para não se decompor rapidamente. Dormentes de madeira, por sua leveza, são de instalação barata e socialmente conveniente onde haja abundância de mão de obra pouco qualificada. A leveza da madeira confere ao dormente a função de uma grande palmilha, causando o mínimo de desgaste na ferrovia, principalmente nas curvas, em comparação com dormentes de concreto.

Dormentes de concreto

Segundo Kerr (Railway-2004), dormentes de concreto, principalmente monoblocos protendidos, têm sido cada vez mais utilizados, pela facilidade de fabricação em plantas que envolvem baixo nível tecnológico e que podem ser instaladas próximo às frentes de trabalho e pela boa disponibilidade das matérias primas. Para que sejam viáveis estruturalmente, isto é, resistam a

transporte e manipulação e tenham uma vida útil razoável, dormentes de concreto protendido são em geral pesados demais para que se dispense o uso de sofisticados equipamentos de assentamento, o que pode onerar seu custo final. Além disso, são muito rígidos, com pouca ou nenhuma capacidade de amortecimento das ações dinâmicas, e sobrecarregam o lastro bem mais que qualquer outro tipo de dormente, o que acarreta mais custo de manutenção.

Dormentes de borracha e polímeros

Atualmente têm sido pesquisado e desenvolvido dormentes de borracha (Rail-One), a partir de material reciclado, e de polímero (areia, cinza e resina), com propriedades que muito se aproximam das da madeira. Seu custo e sua disponibilidade são ainda temas de estudo, existindo apenas trechos experimentais de ferrovias construídos com estes materiais.

Dormentes de aço

Dormentes de aço também apresentam excelentes propriedades para a transferência das ações dinâmicas entre trilhos e lastro. Suas desvantagens são dificuldade de fabricação, por ser um produto de nível tecnológico mais alto, preço e pouca durabilidade, a menos que usados em condições climáticas muito especiais ou que sejam bem protegidos.

Estudos preliminares indicam que nos Estados Unidos os custos integrados de assentamento, manutenção, substituição e destinação final de dormentes de borracha, polímero ou aço são pelo menos 50 % maiores do que os de madeira (Railway-2004). Pela mesma conta, dormentes de concreto protendido seriam cerca de 30 % mais caros.

Para qualquer elemento estrutural (Railway-2004), aqui especialmente para os dormentes, há duas instâncias em que ensaios laboratoriais se fazem necessários: quando do desenvolvimento de um novo produto, inovador seja em termos de concepção estrutural seja em termos dos materiais empregados, e quando do controle rotineiro da qualidade de uma produção em série. É aconselhável, embora nem sempre factível, que os elementos trilho-dormente-lastro de uma ferrovia, nossos objetos de estudo, sejam avaliados em campo, com acompanhamento ao longo dos anos de seu desempenho na interação dinâmica e dos desgastes sofridos e causados.

Em ambos os casos de novo produto e de controle de qualidade é cada vez mais imprescindível o uso de modelos computacionais. Para novos produtos, a simulação computacional da interação dinâmica permite o entendimento dos fenômenos físicos de interesse, a identificação de parâmetros para ajuste ou otimização e a concepção de ensaios de laboratórios que possam substituir ou indicar observações de campo e estabelecer condições controladas de investigação de problemas específicos. O mais importante é que modelos com-

putacionais permitem que complexos fenômenos de campo sejam explicados em sua essência e eventualmente traduzidos para problemas simplificados que possam ser analisados sob condições controladas em laboratório. É o caso, por exemplo, do estabelecimento de um fator de amplificação de carga para que um problema dinâmico possa ser analisado como um problema estático correspondente. Modelos computacionais não-determinísticos com base em dados estatísticos obtidos em campo, seja de comportamento estrutural e de interferência ambiental, seja de estabelecimento de vida útil, são cada vez mais comuns.

2.2.7

Estrutura global de uma ferrovia

A seção transversal típica de uma ferrovia é esquematizada na figura (2.6). Pode-se observar a disposição dos elementos desde o trilho até a subbase. Verifica-se que a transferência de esforços é feita de elemento a elemento, de modo a reduzir a tensão no subleito. Sua simetria em relação a um plano vertical será considerada na modelagem.

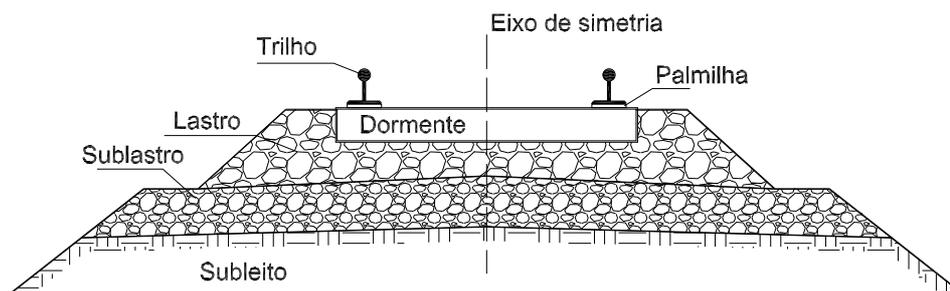


Figura 2.5: Seção transversal típica de uma ferrovia

Na estudo do comportamento da estrutura global, os aspectos considerados são as solicitações, na forma de forças periódicas, impactos e cargas móveis e as propriedades do sistema em termos de massa, rigidez e amortecimento (Esveld-2001).

A análise da interação dinâmica entre o veículo e via férrea consiste na determinação das frequências naturais e os modos de vibração que surgem em virtude das solicitações impostas ao sistema. Assim, podemos determinar as amplificações, os deslocamentos e os esforços nos trilhos, dormentes e subestrutura.

Conhecendo o comportamento do sistema, pode-se aumentar a vida útil dos seus componentes, diminuindo custos com manutenção e recuperação e melhorar as condições de conforto dos usuários.



Figura 2.6: Aspectos dinâmicos envolvidos na análise da interação entre veículo e ferrovia.

2.3 Modelos Computacionais

Os trabalhos dos principais centros de estudos ferroviários, produtos de décadas de pesquisa, denotam a existência de sofisticados laboratórios para experimentos de componentes da ferrovia e às vezes até de trechos inteiros, em escala real ou muito pouco reduzida. Nota-se também a existência de uma enorme quantidade de informações sobre as ferrovias em estudo. Quanto à modelagem computacional, há dezenas de desenvolvimentos, mais ou menos sofisticados, conforme a motivação momentânea, ou às vezes em decorrência de décadas de pesquisa consistente, como na Holanda e na Suécia. A propósito, o quadro da figura (2.7) sintetiza os tipos de modelos computacionais atualmente em uso ou desenvolvidos na Universidade Técnica de Delft (Anuario). Vê-se que os modelos evoluem dos mais simples, baseados em teoria linear e com o uso de poucos parâmetros, aos mais sofisticados, que usam complexas teorias não-lineares e análise não-determinística. Este quadro é bem representativo de desenvolvimentos feitos em todo o mundo, em geral.

Quando se está interessado na perturbação ambiental (acústica, vibração do solo) da passagem de um trem, complexos modelos do subsolo, baseados em elementos finitos (Martin-2003) ou em elementos de contorno (Celebi-1998) se justificam.

Para o estudo do conforto do passageiro, os vagões têm que ser modelados com um bom nível de detalhamento (ADAMS), no que diz respeito às propriedades geométricas, de rigidez e de amortecimento de seus diversos com-

ponentes.

A literatura apresenta estudos exaustivos, teóricos , estatísticos (Nilsen-1995) e de dados de campo (Esveld-2002, Kekesi-1998), sobre imperfeições das rodas e dos trilhos, causa primeira dos impactos dinâmicos que afetam toda a estrutura. Esforços laterais, principalmente de impacto no caso de curvas, são também objeto de estudos (Wu-2002).

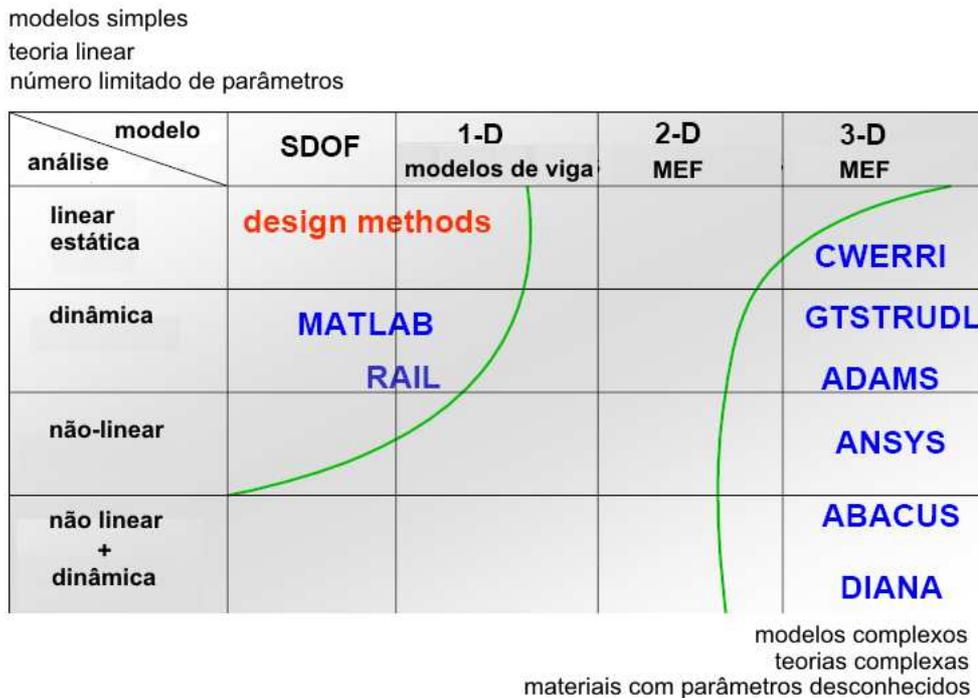


Figura 2.7: Programas computacionais desenvolvidos ou em uso na Universidade Técnica de Delft (Anuario) 97/98

Há também uma série de estudos de previsão da vida útil de uma ferrovia (Lichtberger-2001, Esveld-1997), com base em seu estado de conservação e suas condições de utilização.

No entanto, a grande maioria dos estudos computacionais diz respeito ao comportamento dinâmico de trilho, dormente e lastro, separados (Vicent-2001, Telliskivi-2001) ou em interação dinâmica (Martin-2003, Niakas-2001), afetados pela palmilha e o sub-lastro, às vezes considerando as, rodas, o eixo e o veículo como meros agentes do impacto dinâmico (Niakas-2001), às vezes considerando explicitamente a interação dinâmica de todo o conjunto (Martin-2003, Degrande-2001).

Nos modelos que simulam a interação dinâmica trilho-palmilha-dormente-lastro, o lastro e as camadas inferiores são representadas normalmente de maneira bem simplificada, agindo unidimensionalmente como molas e amortecedores (Winkler), sem acoplamento por cisalhamento . Rara-

mente o modelo não-linear de Hertz é usado. No entanto, alguns estudos são combinados, com modelos em dois níveis de aprimoramento, que se calibram reciprocamente (Zhai-1997).

Dentre os modelos computacionais, há predominância dos modelos mais simplificados (Verichev-1998), que se justificam pela necessidade de entendimento básico dos fenômenos físicos ocorridos, mais do que a tentativa de uma simulação fidedigna de um problema real.

Dentre os modelos mais simples, predomina o uso de vigas de Timoshenko, embora vigas de Euler também se façam presente (Andersen-2003, Heelis-1999, Niakas-2001).

As ações dinâmicas também são levadas em conta das maneiras mais variadas. Os modelos mais sofisticados consideram, de maneira não-determinística, os impactos gerados entre rodas e trilhos em virtude de imperfeições caracterizadas estatisticamente (Esveld-2002). Há trabalhos que impõem um perfil de velocidades aplicadas (Vostroukhov-2003, Krylov-2000), para então avaliar a resposta dinâmica. Muitos trabalhos também analisam a resposta a uma carga móvel (Degrande-2001, Heelis-1999). Estes últimos são em geral mascarados por uma roupagem matemática sofisticada, mas desprovidos de base experimental. Há de se considerar, por exemplo, que a aplicação de uma massa móvel é mais realística que a aplicação de uma carga móvel (desprovida de massa).

2.4

Alguns modelos de interação dinâmica em ferrovias

Na literatura são encontrados uma grande quantidade de trabalhos na área numérica e experimental, principalmente nos grandes centros Europeus. Em termos de análise numérica, a modelagem do sistema de interação trem-ferrovia é feita, em geral, utilizando elementos unidimensionais de viga e treliça para representação dos elementos estruturais da ferrovia. A seguir são detalhados os modelos de Niakas et al (Niakas-2001), Martin et al (Martin-2003) e Esveld et al (Esveld-1998).

2.4.1

Modelo proposto por Niakas et al

Niakas et al (Niakas-2001) utilizaram o modelo da figura (2.8) para a análise da interação dinâmica trem-ferrovia-solo.

O trilho é modelado como um elemento de viga de Euler-Bernoulli com comprimento finito. Por causa do comprimento finito, foram tomados os devidos cuidados para reduzir a influência das condições de contorno do trilho. Tanto o lastro como a palmilha são considerados elementos lineares de treliça

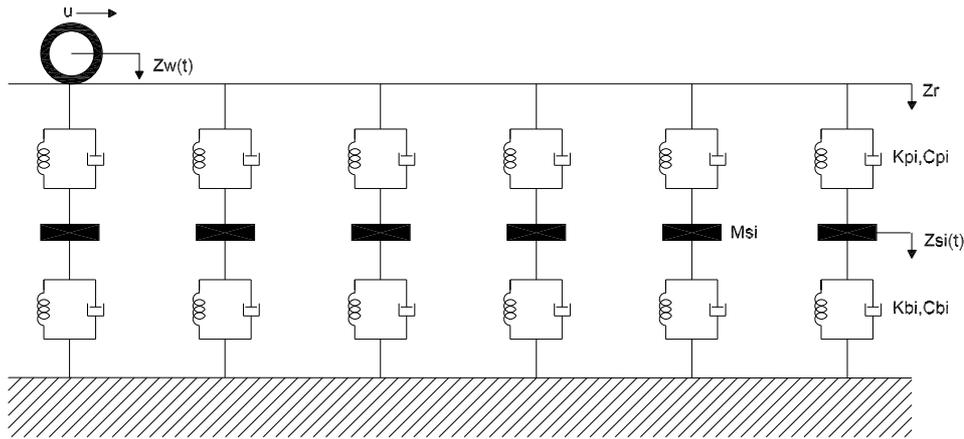


Figura 2.8: Modelo dinâmico de análise da interação veículo-ferrovia-solo (Niakas-2001)

de rigidez K_{bi} e K_{pi} e amortecimento C_{bi} e C_{pi} , respectivamente. O dormente é simulado como um elemento rígido de massa concentrada M_{si} .

Para cada elemento, as equações de movimento são desenvolvidas, fazendo-se as devidas considerações.

A solução para os deslocamentos é dada pela superposição da função de forma que descreve os modos de vibração que é conhecida, e uma função dependente do tempo, que é a incognita do problema.

$$Z_r = \sum_{k=1}^n \Phi_k(x) q_k(t) \quad (2-1)$$

Niakas et al (Niakas-2001) propuseram a seguinte função de forma para os modos de vibração:

$$\Phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{m_r l}} \sin \frac{k\pi x}{l} \quad k = 1, 2, 3, \text{ modos} \quad (2-2)$$

Levando em consideração n modos de vibração, o sistema total de equações pode ser formado,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{Y}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2-3)$$

onde $\mathbf{F}(t)$ é o vetor de forças externas atuante no sistema, \mathbf{K} , \mathbf{C} e \mathbf{M} são respectivamente as matrizes de rigidez, amortecimento e massa do sistema e $\ddot{\mathbf{Y}}(t)$, $\dot{\mathbf{Y}}(t)$ e $\mathbf{Y}(t)$ são os vetores de aceleração, velocidade e deslocamentos, que são as incógnitas do problema. Resolvendo-se o sistema de equações diferenciais de segunda ordem, a solução dependente do tempo pode ser obtida.

Para solucionar o sistema de equações (2-3), foi introduzida a seguinte transformação de variáveis ao problema:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{Y}(t) \quad \mathbf{X}_2 = \dot{\mathbf{Y}}(t) \quad (2-4)$$

e assim reduzi-lo a um sistema de equações de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_1 &= \mathbf{Y}(t) \\ \mathbf{M}\dot{\mathbf{X}}_2 + \mathbf{C}\mathbf{X}_2(t) + \mathbf{K}\dot{\mathbf{X}}_1(t) &= \mathbf{F}(t) \\ \text{ou} \\ \dot{\mathbf{X}}_1(t) &= \mathbf{Y}(t) \\ \mathbf{X}_2(t) &= \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{F}(t) - \mathbf{C}\mathbf{X}_2(t) - \mathbf{K}\dot{\mathbf{X}}_1(t) \right) \end{aligned} \quad (2-5)$$

Esse sistema de equações pode também ser resolvido iterativamente, utilizando o método de Runge-Kutta, para um intervalo de tempo adequado.

De posse da solução temporal, foi feito um estudo complementar para verificar a influência das propriedades físicas dos elementos no sistema, variando os valores de massa, rigidez e amortecimento. Notou-se a sensibilidade do sistema à alteração da relação entre as propriedades, principalmente nas frequências de vibração.

2.4.2 Modelo proposto por Martin et al

No modelo de proposto por Martin et al (Martin-2003) , a discretização do sistema ferrovia-solo foi realizada utilizando-se o método dos elementos finitos. Para o trilho foram utilizados elementos de viga com funções de interpolação na forma de polinômios cúbicos de Hermite. Para o lastro foram usados elementos de barra com dois nós e o solo foi considerado como um malha de elementos bilineares isoparamétricos de 4 nós.

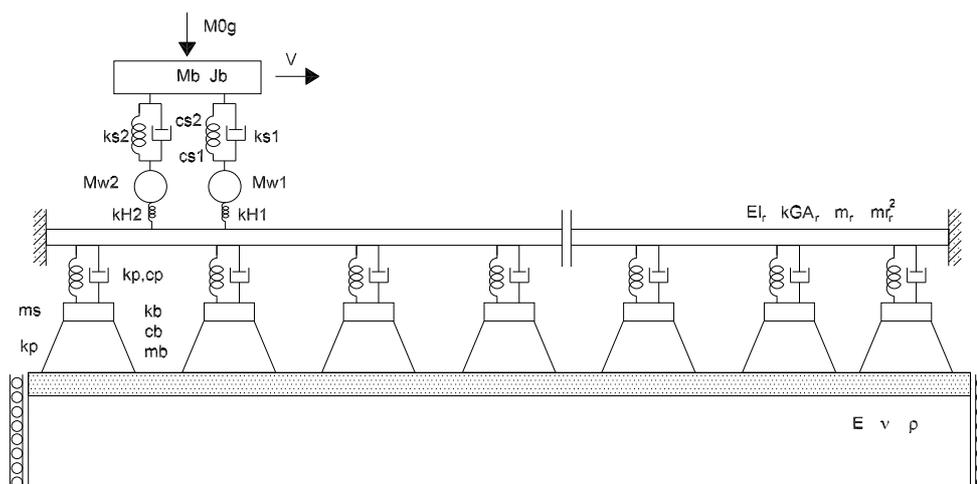


Figura 2.9: Modelo de interação veículo-ferrovia-solo (Martin-2003)

Após a discretização, as equações diferenciais parciais que governam o problema são reduzidas até segunda ordem, tornando-se equações diferenciais

ordinárias de segunda ordem no tempo. A equação dinâmica semi-discreta representativa do problema é representada abaixo:

$$\mathbf{M}^t \ddot{\mathbf{x}}^t + \mathbf{C}^t \dot{\mathbf{x}}^t + \mathbf{K}^t \mathbf{x}^t - \mathbf{F}^{wr} = 0 \quad (2-6)$$

onde \mathbf{x}^t é o vetor de deslocamentos do sistema ferrovia-solo, \mathbf{M}^t , \mathbf{C}^t e \mathbf{K}^t são respectivamente as matrizes de massa, amortecimento e rigidez desse sistema. As forças de contato provenientes da interação da roda do veículo com o trilho são representadas pelo vetor \mathbf{F}^{wr} . Para solucionar a equação (2-6), primeiramente, reformulam-se as equações de movimento de segunda ordem (1) para a forma,

$$\mathbf{A}^t \dot{\mathbf{y}}^t + \mathbf{B}^t \mathbf{y}^t = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{wr} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-7)$$

onde

$$\mathbf{y}^t = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}^t \\ \dot{\mathbf{x}}^t \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^t & \mathbf{M}^t \\ \mathbf{M}^t & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^t & 0 \\ 0 & -\mathbf{M}^t \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

A superposição modal foi a técnica usada para solução do problema de autovalor resultante da equação (2-6). A solução do problema de autovalor gera um conjunto de N pares complexos conjugados de autovalores e autovetores. Os pares modais mais baixos são considerados na síntese modal e montados na matriz modal como pares modais.

Martin et al (Martin-2003) ainda introduziram a transformação,

$$\mathbf{y}^t = \mathbf{P} \mathbf{q}^t(t), \quad \mathbf{Q}^t(t) = \mathbf{P}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^t(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-9)$$

para obter um conjunto de equações de movimento desacopladas com a seguinte forma,

$$\text{diag}(a_n) \dot{\mathbf{q}}^t(t) + \text{diag}(b_n) \mathbf{q}^t(t) = \mathbf{Q}^t(t) \quad (2-10)$$

$$\text{diag}(a_n) = \mathbf{P}^T \mathbf{A}^t \mathbf{P}, \quad \text{diag}(b_n) = \mathbf{P}^T \mathbf{B}^t \mathbf{P} \quad (2-11)$$

onde a_n e b_n são constantes de normalização modal ou assim chamadas de amortecimento modal e rigidez modal.

O modelo discreto de veículo adotado na análise é constituído de uma massa M_b que representa o corpo do veículo conectada a rodas de massas M_{w1} e M_{w2} por um sistema mola-amortecedor de rigidez K_{s1} e K_{s2} e amortecimento C_{s1} e C_{s2} . A equação correspondente ao modelo de veículo pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{bb}^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_a^v \\ \ddot{\mathbf{x}}_b^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{bb}^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_a^v \\ \dot{\mathbf{x}}_b^v \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa}^v & \mathbf{K}_{ab}^v \\ \mathbf{K}_{ba}^v & \mathbf{K}_{bb}^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a^v \\ \mathbf{x}_b^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{wr} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}^{\text{ext}} \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

onde \mathbf{x}_a^v é o vetor de deslocamento vertical da interface roda-veículo, \mathbf{x}_b^v é o vetor de deslocamento não-interfacial do veículo, \mathbf{M}^v , \mathbf{C}^v e \mathbf{K}^v são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do veículo e \mathbf{F}^{ext} o vetor de forças externas representadas pelo peso do veículo e da armação. O vetor \mathbf{F}^{wr} representa as forças atuantes na interface roda-trilho.

Partindo-se do modelo de veículo definido e das equações de movimento desenvolvidas anteriormente, (Martin-2003) criaram um modelo integrado de interação entre veículo e ferrovia, considerando as forças de contato, deslocamentos, velocidades e acelerações no sistema. Os deslocamentos são representados por

$$\mathbf{x}_n(t) = \mathbf{N}\mathbf{P}^{wr}\mathbf{q}^t(t) + \mathbf{x}^{irr} \quad (2-13)$$

onde \mathbf{N} são as funções de forma de elementos finitos para os elementos do trilho relativas ao contato interfacial do sistema roda-trilho, \mathbf{P}^{rw} é a matriz modal e \mathbf{x}^{irr} são as irregularidades prescritas na superfície da ferrovia. Supondo-se uma velocidade constante para o veículo ν , as velocidades e acelerações do contato roda-trilho são obtidas pelas equações algébricas

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}(t)\dot{\mathbf{q}}^t(t) + \mathbf{U}(t)\mathbf{q}^t(t) + \dot{\mathbf{x}}^{irr} \quad (2-14)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{R}(t)\dot{\mathbf{q}}^t(t) + \mathbf{S}(t)\mathbf{q}^t(t) + \ddot{\mathbf{x}}^{irr} \quad (2-15)$$

onde

$$\mathbf{T} = \mathbf{N}\mathbf{P}^{wr}, \quad \mathbf{U} = \frac{d\mathbf{N}}{d\xi}\nu\mathbf{P}^{wr} \quad (2-16)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^{irr} = \frac{d\mathbf{x}^{irr}}{d\xi}\nu, \quad \ddot{\mathbf{x}}^{irr} = \frac{d^2\mathbf{x}^{irr}}{d\xi^2}\nu^2 \quad (2-17)$$

Finalmente, o problema dinâmico de valor inicial para o sistema veículo-ferrovia pode ser representado na sua forma geral,

$$\mathbf{A}(\mathbf{z}, \mathbf{t})\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{B}(\mathbf{z}, \mathbf{t})\mathbf{z} = \mathbf{F}(\mathbf{z}, \mathbf{t}) \quad (2-18)$$

onde

$$\mathbf{z} = \left\{ \mathbf{q}^t \quad \mathbf{x}_a^v \quad \mathbf{x}_b^v \quad \dot{\mathbf{x}}_a^v \quad \dot{\mathbf{x}}_b^v \quad \mathbf{F}^{wr} \right\}^T \quad (2-19)$$

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|ccccc} \text{diag}(a_n) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{P}^{wrT}\mathbf{N}^T \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_{bb}^v & 0 & \mathbf{M}_{bb}^v & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{R} & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 & 0 \\ \mathbf{T} & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (2-20)$$

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|ccccc} \text{diag}(b_n) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{K}_{aa}^v & \mathbf{K}_{ab}^v & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & \mathbf{K}_{ba}^v & \mathbf{K}_{bb}^v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{S} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{U} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (2-21)$$

$$\mathbf{F} = \left\{ \begin{array}{cccccc} 0^T & 0^T & \mathbf{F}^{extT} & 0^T & -\ddot{\mathbf{x}}^{irrT} & -\dot{\mathbf{x}}^{irrT} \end{array} \right\}^T \quad (2-22)$$

Na equação acima, o vetor \mathbf{z} é uma mistura de estado espacial que consiste não apenas em deslocamentos modais do sistema ferroviário-solo, mas também nos impulsos produzidos pelas forças de contato provenientes da interação veículo-ferrovia. A equação (2-18) é resolvida especificando uma condição inicial $z(t = 0) = z_0$, sendo z_0 o deslocamento inicial do sistema.

2.4.3 Modelo proposto por Esveld et al

Esveld et al (Esveld-1998, Esveld-1998-2) desenvolveram uma pesquisa integrada numérica e experimental para avaliar o comportamento de estruturas ferroviárias. A modelagem numérica foi feita utilizando-se elementos lineares de viga com propriedades elásticas e dependentes do tempo. Foram consideradas apenas as deformações verticais provocadas pelas cargas móveis (forças por eixo de veículo). O trilho foi modelado como uma viga de Timoshenko, considerando-se a inércia rotacional e as deformações por esforço cortante. O amortecimento do aço, por sua pequena magnitude, foi desprezado. A massa de aço contribui para a inércia rotacional e translacional da ferrovia. Identicamente, modelou-se o dormente de concreto, fazendo-se apenas a consideração do amortecimento. A fundação foi modelada com uma base elástica de Winkler, ou fazendo-se a consideração das deformações por cisalhamento, como uma base de Pasternak.

Entre o trilho e o dormente é colocado um material com a função de transferir as cargas para a fundação. Nesta, são consideradas apenas as tensões diretas de flexão provenientes das cargas de veículo. A massa do material da fundação é adicionada à massa total do sistema. Deve-se mencionar que as propriedades dos veículos não foram discutidas no modelo.

Para caracterização do modelo experimental, as propriedades do sistema (massa, rigidez e amortecimento) são muito importantes, porém, desconhecidas na maioria dos casos. Assim, a utilização de modelos reduzidos em laboratório é uma forma bastante utilizada para obtenção desses parâmetros. Um dos métodos mais conhecido, é a utilização do instrumento do martelo para medição de acelerações em sistemas dinâmicos. Nessa experiência, utilizou-

se 50cm de um trilho de ferrovia. A amostra foi colocada em um canal de aço rígido com material de enchimento. Sobre o trilho foram colocados dois acelerômetros, dispostos simetricamente em relação ao ponto de aplicação da carga, na área que será carregada. A estrutura foi solicitada pelo impacto aplicado com o martelo. Foram registradas as acelerações devidas ao impacto, assim como a carga aplicada pelo martelo. As acelerações obtidas no tempo foram transformadas via FFT (Fast Fourier Transform) para o domínio da frequência. Devido ao tamanho reduzido do experimento, a estrutura foi modelada com apenas 1 grau de liberdade. O material de enchimento tem rigidez K e amortecimento C . A massa total do sistema M é igual a massa do trilho adicionada com a massa do material de enchimento.



Figura 2.10: Modelo dinâmico experimental (Esveld-1998)

A análise experimental foi estendida a um trecho de ferrovia de 4m de comprimento. O modelo de ensaio foi colocado sobre a fundação, constituída por uma camada densa de areia. As propriedades do material de enchimento já são conhecidas, sendo que as propriedades da fundação serão obtidas. Aplica-se o martelo na estrutura e registram-se as acelerações obtidas. Utiliza-se novamente a FFT para obtenção das acelerações dependentes da frequência.

Numericamente, a experiência foi simulada utilizando-se elementos finitos com as mesmas propriedades do modelo numérico apresentado. Foram integrados numericamente 200 elementos em pequenos intervalos de tempo, houve notável correspondência entre os modelos, o que mostrou que a modelagem numérica foi amplamente satisfatória para esta análise.

2.5

Considerações sobre análise dinâmica em vigas

O comportamento dinâmico de vigas sujeitas a diferentes condições de contorno e carregamento foi e continua sendo alvo de estudo de vários autores. Na modelagem de estruturas unidimensionais, a utilização de elementos de viga

é bastante corriqueira, tendo diversas aplicações em engenharia, principalmente em estruturas como pórticos, cabos e na representação dos componentes de uma estrutura ferroviária, como o trilho e o dormente.

Graff (Graff-1975) desenvolveu soluções para o comportamento de vigas esbeltas em regime de vibração livre ou forçada.

No regime de vibração livre, o problema é solucionado por meio de um processo de separação de variáveis no tempo e no espaço, em função de uma frequência circular de vibração. A solução geral é dada pelo produto das soluções espacial e temporal, obtidas, respectivamente, pela solução das equações diferenciais no espaço e no tempo. Conhecida essa solução são obtidas as expressões referentes a frequências e modos normais de vibrações da viga.

Para problemas de vibração forçada, onde a equação diferencial de movimento não é homogênea, Graff (Graff-1975) utiliza a série finita de Fourier e a transformada de Laplace. Essa expansão é feita para um número arbitrário de termos, considerando as propriedades de ortogonalidade dos modos normais e tomando o cuidado na interpretação das singularidades da solução.

Esse desenvolvimento também é estendido para a solução de alguns casos particulares de carregamento, como impacto e carga móvel, em uma viga com ou sem base elástica e sem amortecimento.

Graff (Graff-1975) também apresenta um estudo inicial para viga de Timoshenko, onde se consideram os efeitos da inércia à rotação e das deformações por efeito da força cortante. Nessa abordagem, as seções permanecem planas, mas não perpendiculares ao eixo neutro e, assim, a rotação tem uma contribuição adicional do termo referente ao efeito da força cortante.

Em termos gerais, a teoria de Timoshenko é mais geral e se mostra ideal para a análise de problemas de vibração, já que os resultados são mais satisfatórios e se aproximam dos resultados obtidos pela teoria exata de vigas.

Kolusek (Kolusek-1973) e Warburton (Warburton-1976) têm também desenvolvimentos importantes sobre o assunto, principalmente quanto a amortecimento, mas não foram aproveitados neste trabalho.

2.6

Considerações sobre elementos finitos dinâmicos.

Na literatura, encontramos vários trabalhos no campo de vibrações utilizando elementos finitos dinâmicos. Dentre esses, podemos citar os trabalhos de Gupta (Gupta-1975, Gupta-1976, Gupta-1978, Gupta-1984) para problemas de vibração livre além de Paz (Paz-1975) e Voss (Voss-1987). Estes trabalhos se basearam em Przemieniecki (Przemieniecki-1968), que introduziu o conceito de

matrizes de massa e rigidez dependentes da frequência, na análise de problemas de vibração livre em elementos de viga e treliça.

Dumont e Oliveira (Dumont-1997, Dumont-2001) e Dumont e Chaves (Dumont-2003), generalizaram o método para a análise de problemas transientes, formulados no domínio da frequência, para quaisquer condições de carregamento nodal e deslocamentos iniciais. Esses autores também desenvolveram técnicas para solução de problemas de autovalores não-lineares reais oriundos da expansão das matrizes de massa e rigidez como séries de frequência.

Mais adiante, (Dumont-2006), generalizou a solução do problema de autovalor não-linear para o caso de autovalores reais e complexos.

Utilizando os conceitos desenvolvidos por (Dumont-2003), surge a proposta da análise dinâmica de ferrovias no regime transiente, utilizando elementos finitos unidimensionais de viga e treliça, e fazendo-se uso de técnicas avançadas de superposição modal (Dumont-2001).

3 Elementos Finitos Híbridos

Neste capítulo é mostrada resumidamente a formulação híbrida de elementos finitos dinâmicos que será utilizada no desenvolvimento dos elementos de treliça e viga. São mostradas as equações matriciais de equilíbrio, de acordo com a formulação simplificada de elementos de contorno. Por fim é apresentada uma metodologia que faz uma análise no domínio do tempo a partir de uma formulação no domínio da frequência onde as matrizes são dadas na forma de séries em função de uma frequência circular de vibração.

3.1 Formulação do Problema

O efeito do tempo na abordagem abaixo surge devido a inércia do corpo elástico. Assim, tenta-se encontrar um campo de deslocamentos u_i (Dumont-2006-2), correspondente às tensões σ_{ij} , que satisfaça a equação de equilíbrio dinâmico

$$\sigma(x, y, z, t)_{ij,j} + b(x, y, z, t)_i - \rho \ddot{u}(x, y, z, t)_i - \mu \dot{u}(x, y, z, t)_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3-1)$$

para uma massa específica ρ , coeficiente de amortecimento $\mu = 2\zeta\rho$ e forças de massa b_i que são funções do espaço e do tempo. Os índices i e j podem assumir os valores 1, 2 e 3, para o caso de problemas tridimensionais. O índice após a vírgula indica uma derivada na direção considerada e o ponto indica derivada em relação ao tempo. Índices repetidos indicam um somatório de termos, em geral para problemas tridimensionais.

Na equação (3-1) o domínio Ω pode ser uma estrutura ou parte dela, isto é, uma subestrutura ou um elemento finito. O campo de deslocamentos deve satisfazer as condições de contorno

$$u(x, y, z, t)_i = \bar{u}(x, y, z, t)_i \quad \text{em } \Gamma_u, \quad (3-2)$$

onde $\bar{u}(x, y, z, t)_i$ são os deslocamentos prescritos no contorno Γ_u . O campo de tensões $\sigma(x, y, z, t)_{ij}$ também deve estar em equilíbrio com as forças de tração $\bar{t}(x, y, z, t)_i$ prescritas no contorno Γ_σ . Assim,

$$\sigma(x, y, z, t)_{ij}\eta_j = \bar{t}(x, y, z, t)_i \quad \text{em } \Gamma_\sigma. \quad (3-3)$$

onde η_j são os co-senos diretores de Γ em Ω . Além disso, os deslocamentos e velocidades iniciais devem ser conhecidos no instante inicial $t = 0$:

$$u(x, y, z, t = 0)_i = \bar{u}(x, y, z, t = 0)_i, \quad \dot{u}(x, y, z, t = 0)_i = \bar{v}(x, y, z, t = 0)_i \text{ em } \Omega \quad (3-4)$$

Deve-se mencionar que uma solução que satisfaça exatamente todas as condições acima é possível em certos casos particulares.

3.2

Formulação no domínio da frequência

Uma solução aproximada do problema proposto na seção anterior pode ser obtida investigando a resposta harmônica para ações dinâmicas variando no tempo de acordo com a função exponencial $e^{-i\omega t}$, onde ω é a frequência circular de vibração. Então, pode-se escrever os deslocamentos,

$$u(x, y, z, t)_i = \bar{u}(x, y, z, \omega)_i e^{-i\omega t} \quad (3-5)$$

ou por simplicidade de notação,

$$u(x, y, z, t)_i = u e^{-i\omega t} \quad (3-6)$$

onde a dependência de (x, y, z, ω) é implicitamente assumida.

Essa separação de variáveis e a notação simplificada também se aplicam para as tensões como também para as ações externas. Assim as equações (3-1) e (A-2) tornam-se

$$\sigma_{ji,j} + b_i + \rho k^2 u_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3-7)$$

$$u_i = \bar{u}_i \text{ ao longo } \Gamma_u, \quad \sigma_{ij}\eta_j = \bar{t}_i \text{ ao longo } \Gamma_\sigma \quad (3-8)$$

onde para uma dada frequência circular ω ,

$$k^2 = \omega^2 + 2i\zeta\omega \quad (3-9)$$

As condições iniciais da equação (3-4) serão utilizadas mais tarde, logo após a transformação da solução do problema para o domínio do tempo em termos de superposição modal, como será visto na seção (3.6).

As ações transformadas $b_i \equiv b(x, y, z, \omega)_i$ e $\bar{t}_i \equiv \bar{t}(x, y, z, \omega)_i$ aparecem formalmente nos desenvolvimentos no domínio da frequência e não há a necessidade de calculá-las.

Na presente formulação híbrida, assume-se um campo de deslocamentos discreto na forma

$$\bar{u}_i = u_{ir} d_r \quad \text{ao longo } \Gamma \quad (3-10)$$

em termos dos deslocamentos nodais $d_r \equiv d(\omega)_r$ no contorno do elemento e funções de interpolação,

$$u_{ir} = u(x, y, z)_{ir} \quad (3-11)$$

desde que $d_r = \bar{d}_r$ nos correspondentes pontos nodais r para deslocamentos prescritos \bar{u}_i ao longo de Γ_u .

Assume-se também um campo de deslocamento diferente,

$$u_i^f = u_i^* + u_i^b \quad \text{em } \Omega \quad (3-12)$$

para um domínio inteiro, de tal modo que o equilíbrio da equação (3-7) é identicamente satisfeito. Dessa forma se pode definir uma solução particular u_i^b tal que o campo de tensões correspondente σ_{ij}^b satisfaça a equação

$$\sigma_{ji,j}^b + b_i + \rho k^2 u_i^b = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3-13)$$

e também uma solução homogênea para o campo de tensões σ_{ij}^* tal que

$$\sigma_{ji,j}^* + b_i + \rho k^2 u_i^* = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3-14)$$

Isso caracteriza uma solução fundamental,

$$u_i^* = u_{is}^* p_s^*, \quad \sigma_{ij}^* = \sigma_{ijs}^* p_s^* \quad (3-15)$$

para ser obtida em termos de algum parâmetro nodal de forças p_s^* dependente da frequência, onde o subscrito s se refere a cada um dos graus de liberdade do modelo discreto.

3.3

Equações matriciais de equilíbrio

O método híbrido de elementos de contorno, introduzido por (Dumont-1987) como uma generalização dos conceitos desenvolvidos por Pian no método dos elementos finitos, só exige avaliação de integrais ao longo do contorno, desde que se usem soluções fundamentais como funções de interpolação no domínio.

O método trata de um domínio arbitrário na forma de um único macro elemento finito com tantos graus de liberdade como se requer em termos de precisão numérica. O método tem sido aplicado com sucesso em uma variedade de problemas de potencial e elasticidade, incluindo problemas dependentes do tempo, e da mecânica de fratura. Numa abordagem mais simplificada deste método desenvolvida mais recentemente (Chaves-2003), abdica-se do modelo original completo e consistente para chegar a uma formulação computacional mais rápida que a anterior. A formulação simplificada tem como resultado o par de equações matriciais

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^* \mathbf{p}^* &= \mathbf{d} - \mathbf{d}^b \\ \mathbf{H}^T \mathbf{p}^* &= \mathbf{p} - \mathbf{p}^b\end{aligned}\quad (3-16)$$

onde $\mathbf{d} \equiv d_r$ é o vetor de deslocamentos nodais introduzido na equação (3-10), $\mathbf{d}^b \equiv d_r^b$ é o vetor nodal de deslocamentos da solução particular u_i^b da equação (3-12) e (3-13), e \mathbf{U}^* é a matriz de deslocamentos, onde os coeficientes U_{sr}^* que pertencem a ela são os valores da solução fundamental u_i^* , equação (4-39), obtidas nos pontos nodais r para um parâmetro de força p_s^* . A matriz de equilíbrio \mathbf{H}^T e os vetores de forças nodais equivalente para tração e forças no domínio, \mathbf{p} e \mathbf{p}^b , são dados em termos das integrais:

$$[\mathbf{H}^T \quad \mathbf{p} \quad \mathbf{p}^b] \equiv \int_{\Gamma} \{u_{ir}\} \langle \sigma_{jis}^* \eta_j \quad \bar{t}_i \quad \sigma_{ji}^b \eta_j \rangle d\Gamma \quad (3-17)$$

Eliminado \mathbf{p}^* na equação (3-16), obtemos a equação da matriz de rigidez

$$\mathbf{K} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b, \quad \text{onde } \mathbf{K} = \mathbf{H}^T (\mathbf{U}^*)^{-1} \quad (3-18)$$

Pode-se demonstrar que a matriz de rigidez dada na equação acima, é simétrica se (e somente se) a função de interpolação u_{ir}^* introduzida na equação (3-10) pode representar analiticamente no contorno as expressões de u_{is}^* introduzidas na equação (4-39) para deslocamentos no domínio (Dumont-2003). Para o caso de elementos de treliça e viga, o contorno coincide com os pontos nodais (Prazeres-2005, Dumont-2006-2).

De acordo com a seção (3.1) a relação de rigidez vinda da equação (3-18) pode se referir ao domínio ou a uma parte dele, ou seja, um elemento finito. Então, todo o domínio pode ser composto com elementos finitos, desde que haja compatibilidade de deslocamentos entre esses elementos, como na equação (3-10) e como requer o método dos elementos finitos (que é conceitualmente o caso).

A seguir, no desenvolvimento das matrizes de rigidez, massa e amortecimento, não fica explícito se o desenvolvimento refere-se a um elemento único ou a um conjunto de elementos. Porém, o contexto sempre dirá qual é o caso.

3.4

Expansão das matrizes na forma de séries de frequência

As equações desenvolvidas anteriormente foram definidas como funções de uma dada frequência circular ω . Porém, ao invés de formularmos o problema para uma dada frequência, pode-se expressar as soluções fundamentais como uma série de potência de frequências. Assim, as matrizes \mathbf{F} , \mathbf{H} e \mathbf{U}^* , podem ser definidas como séries de frequência para um número n arbitrário de termos,

na seguinte forma:

$$\mathbf{F} = \sum_{j=0}^{2n} (-i\omega)^j \mathbf{F}_j, \quad \mathbf{H} = \sum_{j=0}^{2n} (-i\omega)^j \mathbf{H}_j, \quad \mathbf{U}^* = \sum_{j=0}^{2n} (-i\omega)^j \mathbf{U}_j^* \quad (3-19)$$

assim como a matriz de rigidez \mathbf{K} ,

$$\mathbf{K} = \sum_{j=0}^{2n} (-i\omega)^j \mathbf{K}_j \equiv \mathbf{K}_0 - \sum_{j=1}^n (i\omega^{2j-1} \mathbf{C}_j + \omega^{2j} \mathbf{M}_j) \quad (3-20)$$

onde \mathbf{K}_0 é a matriz de rigidez estática. As matrizes \mathbf{C} e \mathbf{M} , que surgem da expansão de \mathbf{K} , representam, respectivamente, matrizes de amortecimento e massa. A matriz \mathbf{M}_1 , que tem como coeficiente ω^2 , representa a matriz de massa da formulação clássica, cujos termos estão exclusivamente ligados à massa. As demais matrizes \mathbf{M} são denominadas aqui de matrizes de massa generalizada e seus termos representam uma mescla de massa e rigidez.

A obtenção da matriz \mathbf{K} como um série de freqüência requer a inversão da matriz \mathbf{F} , que também é dada por uma expansão em série de ω , segundo a equação (3-19), (Dumont-2006-1). Segundo (Dumont-2003), para um vetor de forças $\mathbf{p}(t)$ dependente do tempo atuando na viga, podemos modelar seu comportamento como

$$\left(\mathbf{K}_0 - \sum_{j=1}^n (i\omega^{2j-1} \mathbf{C}_j + \omega^{2j} \mathbf{M}_j) \right) (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^b(t) \quad (3-21)$$

onde os vetores de deslocamentos \mathbf{d} são as incógnitas do problema, a serem determinadas para forças, velocidades e deslocamentos iniciais.

Para n assumindo o valor de 2, por exemplo, a expressão resulta em

$$\sum_{j=1}^m (\mathbf{K}_0 - \omega_j \mathbf{C}_1 - \omega_j^2 \mathbf{M}_1 - \omega_j^3 \mathbf{C}_2 - \omega_j^4 \mathbf{M}_2) (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^b(t) \quad (3-22)$$

Alguns autores, como (Przemieniecki-1968), escrevem a matriz \mathbf{K} da equação (3-20), sem amortecimento, na forma,

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}_0 - \omega^4 (\mathbf{M}_2 - \mathbf{K}_4) + O(\omega^6) \quad (3-23)$$

A formulação clássica, utilizada em livros de dinâmica, é dada por

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}_0 - O(\omega^4) \quad (3-24)$$

correspondendo a uma expansão com n igual a 1 termo.

A vantagem da formulação baseada em séries de freqüência em relação à formulação clássica é que ela proporciona uma melhor satisfação da equação diferencial de equilíbrio dinâmico.

3.5

O Problema de Autovalor não-linear

O problema de autovalor não-linear associado à equação (3-21), tem a forma

$$\mathbf{K}_0 \Phi - \sum_{j=1}^n (i \mathbf{C}_j \Phi \Omega^{2j-1} + \mathbf{M}_j \Phi \Omega^{2j}) = \mathbf{0}, \quad (3-25)$$

onde Ω é uma matriz diagonal que contém os autovalores ω , e Φ é uma matriz cujas colunas são os autovetores. Essas grandezas representam, respectivamente, as frequências e modos de vibração. Este problema não-linear de autovalor tem difícil tratamento, visto que a convergência numérica não é facilmente assegurada e erros de arredondamento podem ocorrer.

A solução do problema de autovalor é dada por (Dumont-2006), que generalizou a solução para o caso de problemas com amortecimento, com Φ satisfazendo as seguintes condições de ortogonalidade:

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=2}^{2j} \Omega^{k-2} \Phi^T i \mathbf{C}_j \Phi \Omega^{2j-k} + \sum_{k=1}^{2j} \Omega^{k-1} \Phi^T \mathbf{M}_j \Phi \Omega^{2j-k} \right) = \mathbf{I} \quad (3-26)$$

$$\Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^{2j-2} \Omega^k \Phi^T i \mathbf{C}_j \Phi \Omega^{2j-k-1} + \sum_{k=1}^{2j-1} \Omega^k \Phi^T \mathbf{M}_j \Phi \Omega^{2j-k} \right) = \Omega \quad (3-27)$$

Deve-se comentar que a solução do problema que inclui ou não o amortecimento tem a mesma forma de tratamento no que diz respeito a álgebra linear. A diferença entre eles está nos próprios autovalores e autovetores, que são todos reais para o caso sem amortecimento e complexos quando se considera o amortecimento viscoso.

3.6

Resposta transiente do sistema

Alternativamente, pode-se escrever a equação (3-21) na forma

$$\left(\mathbf{K}_0 - \sum_{j=1}^n (-1)^j \left(\mathbf{C}_j \frac{\partial^{2j-1}}{\partial t^{2j-1}} + \mathbf{M}_j \frac{\partial^{2j}}{\partial t^{2j}} \right) \right) (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) \quad (3-28)$$

que corresponde a um sistema acoplado de equações diferenciais de alta ordem de tempo que faz uso das matrizes obtidas na formulação dependente da frequência (Dumont-2001, Dumont-2003, Dumont-2005).

Vamos introduzir um vetor auxiliar de deslocamentos \mathbf{d}_j , tal que

$$\mathbf{d}_j = (i)^j \frac{\partial^j \mathbf{d}(t)}{\partial t^j}, \quad j = 1 \cdots 2n. \quad (3-29)$$

Aplicando esse vetor à equação (3-28), pode-se reescrevê-la como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_1 & i\mathbf{C}_2 & \mathbf{M}_2 & \cdots & M_n \\ \mathbf{0} & i\mathbf{C}_2 & \mathbf{M}_2 & i\mathbf{C}_3 & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & i\mathbf{C}_3 & \ddots & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & M_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d} - \mathbf{d}^b \\ \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_1^b \\ \mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_2^b \\ \mathbf{d}_3 - \mathbf{d}_3^b \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{2n} \end{pmatrix} \\
 - \omega \begin{bmatrix} i\mathbf{C}_1 & \mathbf{M}_1 & i\mathbf{C}_2 & \mathbf{M}_2 & \cdots & M_n \\ \mathbf{M}_1 & i\mathbf{C}_2 & \mathbf{M}_2 & i\mathbf{C}_3 & \cdots & \mathbf{0} \\ i\mathbf{C}_2 & \mathbf{M}_2 & i\mathbf{C}_3 & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_2 & i\mathbf{C}_3 & \vdots & \ddots & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{d}} - \dot{\mathbf{d}}^b \\ \dot{\mathbf{d}}_1 - \dot{\mathbf{d}}_1^b \\ \dot{\mathbf{d}}_2 - \dot{\mathbf{d}}_2^b \\ \dot{\mathbf{d}}_3 - \dot{\mathbf{d}}_3^b \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{d}}_{2n} - \dot{\mathbf{d}}_{2n}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3-30)$$

Utilizando conceitos de superposição modal, pode-se aproximar os deslocamentos dependentes do tempo pela soma finita de parcelas dadas pelo produto entre os autovetores normalizados Φ , equação (3-26), com os vetores de amplitudes $\eta(t)$, que passam a ser as incógnitas do problema.

$$\mathbf{d} = \Phi \eta \quad (3-31)$$

Aplicando essa expressão à equação (3-30) obtemos

$$\Omega (\eta - \eta^b) - i (\dot{\eta} - \dot{\eta}^b) = \Phi^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) \quad (3-32)$$

que corresponde a um sistema desacoplado de equações de primeira ordem, que pode ser resolvido pelos métodos tradicionais de integração.

Para o caso particular de estruturas com amortecimento, os deslocamentos expressos em (3-33) assumem a forma

$$\mathbf{d} = \Phi \eta + \bar{\Phi} \bar{\eta} \quad (3-33)$$

sendo \mathbf{d} o vetor de deslocamentos nodais Φ os autovetores e $\bar{\Phi}$ os seus conjugados complexos. A coordenada modal η é a solução da equação (3-32) e representa o vetor temporal de amplitudes; $\bar{\eta}$ é seu respectivo conjugado complexo.

3.7

Condensação dinâmica

No capítulo (5) serão mostrados os modelos de interação dinâmica entre os elementos estruturais de uma via férrea. Esses modelos são obtidos através de modificações nas matrizes de rigidez, massa e amortecimento dadas pela condensação de alguns graus de liberdades no dormente. Nesta seção é mostrado o procedimento utilizado na inversão e condensação dessas matrizes.

No domínio da frequência a equação matricial de equilíbrio pode ser escrita,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{(ii)} & \mathbf{K}_{(ie)} \\ \mathbf{K}_{(ei)} & \mathbf{K}_{(ee)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{(i)} - \mathbf{d}_{(i)}^b \\ \mathbf{d}_{(e)} - \mathbf{d}_{(e)}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_{(i)} - \mathbf{p}_{(i)}^b \\ \mathbf{p}_{(e)} - \mathbf{p}_{(e)}^b \end{Bmatrix} \quad (3-34)$$

onde os subscritos i e e dentro dos parênteses são os graus de liberdade internos e externos da estrutura discreta. Então é possível se expressar os deslocamentos nodais internos em função dos externos, obtendo assim um sistema matricial condensado.

$$\left[\mathbf{K}_{(ee)} - \mathbf{K}_{(ei)} \mathbf{K}_{(ii)}^{-1} \mathbf{K}_{(ie)} \right] \{ \mathbf{d}_{(e)} \} = \left\{ (\mathbf{p}_{(e)} - \mathbf{p}_{(e)}^b) - \mathbf{K}_{(ei)} \mathbf{K}_{(ii)}^{-1} (\mathbf{p}_{(i)} - \mathbf{p}_{(i)}^b) \right\} \quad (3-35)$$

Para um sistema em equilíbrio estático, esse tipo de procedimento é conhecido como condensação estática. Entretanto, as matrizes desenvolvidas nesse trabalho foram obtidas na forma de séries de potência de uma frequência circular ω . Então a inversão de $\mathbf{K}_{(ii)}$ e dos produtos indicados na equação (3-35) devem ser interpretados na forma de séries de potência complexas, no caso geral de amortecimento viscoso. Nos desenvolvimentos seguintes, por motivo de conveniência, a matriz de rigidez efetiva \mathbf{K} da equação (3-20) é expressa como

$$\mathbf{K} = \sum_{j=0}^{2n} (-i\omega)^j \mathbf{K}_j + O(\omega^{2n+1}), \quad n \geq 0 \quad (3-36)$$

onde os termos \mathbf{K}_{2j-1} e \mathbf{K}_{2j} correspondem respectivamente às matrizes de amortecimento (C_j) e massa (M_j) dadas na equação (3-20), com mudanças alternadas de sinal. Então a inversa $\mathbf{K}_{(ii)}^{-1}$ de \mathbf{K}_{ii} , tal que

$$\mathbf{K}_{(ii)} \mathbf{K}_{(ii)}^{-1} = \mathbf{K}_{(ii)}^{-1} \mathbf{K}_{(ii)} = \mathbf{I} + O(\omega^{2n+1}) \quad (3-37)$$

é a série única

$$\mathbf{K}_{(ii)}^{-1} = \sum_{j=0}^{2n} (-i\omega)^j \mathbf{K}_{(ii)}^{-1} j + O(\omega^{2n+1}) \quad (3-38)$$

com os coeficientes das matrizes expressos de maneira recursiva

$$\mathbf{K}_{(ii)j}^{-1} = -\mathbf{K}_{(ii)0}^{-1} \sum_{k=1}^j \mathbf{K}_{(ii)k} \mathbf{K}_{(ii)j-k}^{-1}, \quad j = 0 \cdots 2n \quad (3-39)$$

Neste procedimento, somente é requerida a inversão direta de $\mathbf{K}_{(ii)0}$. Esse esquema falha quando $\mathbf{K}_{(ii)0}$ é uma matriz singular, pois não há meios de se obter uma inversa da matriz $\mathbf{K}_{(ii)0}^{-1}$ tal que $\mathbf{K}_{(ii)0}\mathbf{K}_{(ii)0}^{-1} = \mathbf{K}_{(ii)0}^{-1}\mathbf{K}_{(ii)0} = \mathbf{I}$, (Dumont-2006-1).

Além disso (Dumont-2006-2), não é possível reescrever a equação (3-36) como uma série de potência de ω^{-1} , desde que não só esta equação deva ser finita para $\omega \rightarrow 0$, mas também $\mathbf{K}_{(ii)2n}$ não possa ser o termo principal, já que é o coeficiente da matriz menos confiável em termos de precisão numérica e significado físico.

Coerentemente com isto, o produto $\mathbf{K}_{(ei)}\mathbf{K}_{(ii)}^{-1}\mathbf{K}_{(ie)}$ da equação (3-35) é expresso como

$$\mathbf{K}_{(ei)}\mathbf{K}_{(ii)}^{-1}\mathbf{K}_{(ie)} = \sum_{j=0}^{2n} (-i\omega)^j \sum_{k=0}^j \mathbf{K}_{(ei)j-k} \sum_{l=0}^k \mathbf{K}_{(ii)l}^{-1} \mathbf{K}_{(ie)k-l} + O(\omega^{2n+1}) \quad (3-40)$$

4

Elementos finitos dinâmicos unidimensionais

Neste capítulo serão desenvolvidos os elementos unidimensionais de treliça e viga utilizados na modelagem da via férrea. Para cada elemento são apresentadas as equações de equilíbrio, suas soluções e os procedimentos para a montagem das matrizes de rigidez no domínio da frequência. Por fim são apresentados 2 exemplos para a análise de resultados.

4.1

Matriz de rigidez para um elemento de treliça

4.1.1

Formulação do problema

Para um elemento de treliça com amortecimento, a equação diferencial referente ao problema é dada por

$$E \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial u(x, t)}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0, \quad (4-1)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal, ρ é a densidade específica (por unidade de volume) e $\mu = 2\zeta\rho$ é o coeficiente de amortecimento viscoso, definido por unidade de volume.

Supondo-se uma solução por separação de variáveis, o deslocamento $u(x, t)$ pode ser definido como:

$$u(x, t) = u^*(x) e^{-i\omega t} \quad (4-2)$$

Assim, a equação (4-1) se expressa

$$E \frac{\partial^2 u^*(x)}{\partial x^2} + \rho (\omega^2 + 2i\zeta\omega) u^*(x) = 0 \quad (4-3)$$

ou

$$\frac{\partial^2 u^*(x)}{\partial x^2} + k^2 u^*(x) = 0 \quad (4-4)$$

onde

$$k^2 = \frac{\rho}{E} (\omega^2 + 2i\zeta\omega) \quad (4-5)$$

4.1.2

Montagem da matriz de rigidez

A solução geral da equação (4-4) se expressa

$$u^*(x) = C_1 \frac{\sin(kx)}{k} + C_2 \cos(kx) \quad (4-6)$$

de tal modo que

$$\lim_{k \rightarrow 0} u^*(x) = C_1 x + C_2 \quad (4-7)$$

Como se está analisando um problema no domínio da frequência, em termos de uma superposição de harmônicos, pode-se usar

$$C_2 = 0 \quad (4-8)$$

para uma solução que oscila em torno de $u^*(0) = 0$, sem prejuízo da formulação geral, como se mostra a seguir.

O campo de deslocamentos pode ser expresso na forma

$$u^* = \frac{1}{EA} \left\langle \frac{\sin kx}{k} \quad \frac{\sin k(l-x)}{k} \right\rangle \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{u}^* \mathbf{p}^* \quad (4-9)$$

em função de dois parâmetros de forças, numa formulação híbrida de elementos finitos, conforme os sistemas de coordenadas da figura (4.1). Nota-se que o resultado será o mesmo se usarmos $u_2^* = \cos kx$ na equação (4-9), assim como não se usar a divisão pela constante k .

Conseqüentemente, obtém-se para as tensões normais:

$$\sigma^* = E \frac{du}{dx} = \frac{1}{A} \left\langle \cos kx \quad -\cos k(l-x) \right\rangle \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{Bmatrix} \equiv \sigma^* \mathbf{p}^* \quad (4-10)$$

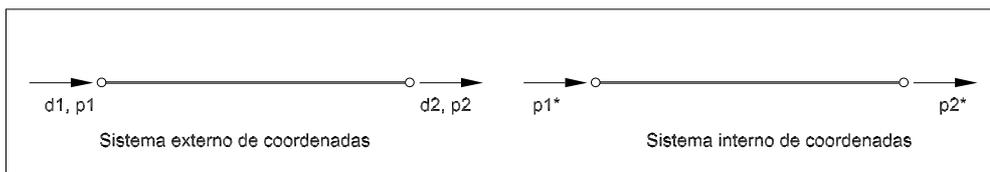


Figura 4.1: Sistemas de coordenadas para a obtenção da matriz de rigidez de um elemento de treliça de uma formulação híbrida

Por outro lado, pode-se descrever para os deslocamentos nas extremidades do elemento, definidas como contornos Γ_1 e Γ_2 :

$$u = \left\langle 1 \quad 0 \right\rangle \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}_1 \mathbf{d} \text{ em } \Gamma_1 \quad u = \left\langle 0 \quad 1 \right\rangle \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}_2 \mathbf{d} \text{ em } \Gamma_2 \quad (4-11)$$

A matriz \mathbf{H} de transformação cinemática entre os sistemas \mathbf{d} e \mathbf{p}^* se

expressa:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \int_{\Gamma} \sigma^{*T} \mathbf{N} d\Gamma = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\cos kl \end{Bmatrix} (-1) \langle 1 \ 0 \rangle + \begin{Bmatrix} \cos kl \\ -1 \end{Bmatrix} \langle 0 \ 1 \rangle \\ &= \begin{bmatrix} -1 & \cos kl \\ \cos kl & -1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4-12)$$

A matriz de flexibilidade no sistema interno \mathbf{p}^* se expressa

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \int_{\Gamma} \sigma^{*T} \mathbf{u}^* \mathbf{N} d\Gamma \\ &= \frac{1}{EA} \left[\begin{Bmatrix} 1 \\ -\cos kl \end{Bmatrix} (-1) \langle 0 \ \frac{\sin kl}{k} \rangle + \begin{Bmatrix} \cos kl \\ -1 \end{Bmatrix} \langle \frac{\sin kl}{k} \ 0 \rangle \right] \\ &= \frac{\sin kl}{kEA} \begin{bmatrix} \cos kl & -1 \\ -1 & \cos kl \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4-13)$$

com a correspondente inversa

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\sin kl}{kEA} \begin{bmatrix} \cos kl & -1 \\ -1 & \cos kl \end{bmatrix}\quad (4-14)$$

Finalmente, obtém-se para a matriz de rigidez

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} = \frac{kEA}{\sin kl} \begin{bmatrix} \cos kl & -1 \\ -1 & \cos kl \end{bmatrix} \quad \text{onde } k^2 = \frac{\rho}{E} (\omega^2 + 2i\zeta\omega) \quad (4-15)$$

pode-se verificar que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\quad (4-16)$$

4.2

Elemento de viga de Timoshenko sobre base elástica e com amortecimento

Seja um elemento de viga de Timoshenko de comprimento L e área de seção transversal A , sob uma base elástica e com amortecimento viscoso. Para este elemento consideram-se tanto a deformação por cisalhamento quanto a inércia de rotação.

4.2.1

Formulação do problema

Devido à deformação por cisalhamento, a rotação $\psi(x, t)$ de uma seção transversal, sobre a qual o momento fletor realiza trabalho:

$$M = EI \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \quad (4-17)$$

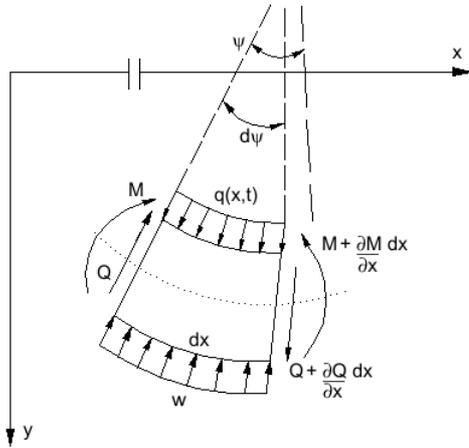
e a derivada da elástica $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$ diferem entre si de uma parcela $\gamma_0(x, t)$:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \psi + \gamma_0 \quad (4-18)$$

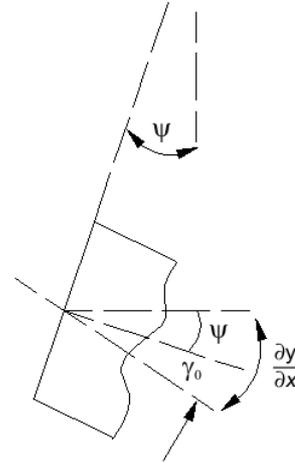
devido a deformação causada pelo esforço cortante:

$$Q = GA\kappa\gamma_0 \quad (4-19)$$

onde κ é um fator de forma que leva em conta como a seção se deforma sob cisalhamento. A equação (4-18) expressa a compatibilidade de deformações de uma seção de viga, para momento fletor M e esforço cortante Q obtidos segundo as equações constitutivas (4-17) e (4-19).



4.2(a): Equilíbrio de um elemento infinitesimal de viga de Timoshenko



4.2(b): Detalhes da adição cinemática devido às deformações por esforço cortante

Figura 4.2: Elemento infinitesimal de viga submetido a uma carga distribuída e apoiado em base base elástica

Um elemento infinitesimal da viga, figura (4.2), está em equilíbrio segundo as equações:

$$\sum F_y = 0 \implies \frac{\partial Q}{\partial x} + q - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 2\zeta m \frac{\partial y}{\partial t} - wy = 0 \quad (4-20)$$

$$\sum M = 0 \implies Q - \frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{mI}{A} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (4-21)$$

Considerando o carregamento transversal $q = 0$, tem-se das equações (4-17) a (4-21):

$$GA\kappa \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 2\zeta m \frac{\partial y}{\partial t} - wy = 0 \quad (4-22)$$

$$GA\kappa \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) + EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{mI}{A} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (4-23)$$

Fazendo

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y^*(x) e^{-i\omega t} \\ \psi(x, t) &= \psi^*(x) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (4-24)$$

têm-se as equações (4-22) e (4-23) na forma transformada:

$$GA\kappa \left(\frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) + (m\omega^2 + 2i\omega\zeta m - w) y^* = 0 \quad (4-25)$$

$$GA\kappa \left(\frac{\partial y^*}{\partial x} - \psi^* \right) + EI \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + \frac{mI}{A} \omega^2 \psi^* = 0 \quad (4-26)$$

Nestas equações, E é o módulo de elasticidade longitudinal, G é módulo de elasticidade transversal, I é o momento de inércia, m é a densidade específica, $\mu = 2\zeta m$ é o amortecimento viscoso, definido por unidade de comprimento, κ é o fator de forma para a deformação de uma seção por esforço cortante e w é a constante de rigidez da reação da fundação, definida por unidade de comprimento e proporcional ao deslocamento (constante de Winkler).

Eliminando-se $\psi^*(x)$ nas equações (4-25) e (4-26) tem-se a equação

$$\frac{\partial^4 y^*(x)}{\partial x^4} + T \frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2} - k^4 y^*(x) = 0 \quad (4-27)$$

onde

$$k^4 = \frac{m}{EI} \left(\omega^2 + 2i\zeta\omega - \frac{w}{m} - \frac{I}{GA\kappa} (m\omega^4 + 2i\zeta m\omega^3 + w\omega^2) \right) \quad (4-28)$$

$$T = \frac{m}{EI} \left[\left(1 + \frac{E}{G\kappa} \right) \frac{I}{A} \omega^2 + \frac{EI}{mGA\kappa} (2i\zeta m\omega - w) \right] \quad (4-29)$$

A solução da equação (4-27) é expressa convenientemente na forma

$$\begin{aligned} y^*(x) &= C_1 \frac{\sin k_1 x + \sinh k_2 x}{k} + C_2 \frac{\sin k_1 x - \sinh k_2 x}{k^3} \\ &+ C_3 \cos k_1 x + \cosh k_2 x + C_4 \frac{\cos k_1 x - \cosh k_2 x}{k^2} \end{aligned} \quad (4-30)$$

onde

$$k_1 = \sqrt{\sqrt{k^4 + \frac{T^2}{4}} + \frac{T}{2}}, \quad k_2 = \sqrt{\sqrt{k^4 + \frac{T^2}{4}} - \frac{T}{2}} \quad (4-31)$$

Analogamente, obtém-se da equação (4-25) a expressão de $\psi^*(x)$:

$$\begin{aligned} \psi^*(x) = & C_1 \frac{K_2 \cos k_1 x + K_1 \cosh k_2 x}{k} + C_2 \frac{K_2 \cos k_1 x - K_1 \cosh k_2 x}{k^3} \\ & + C_3 (-K_2 \sin k_1 x + K_1 \sinh k_2 x) + C_4 \frac{-K_2 \sin k_1 x - K_1 \sinh k_2 x}{k^2} \end{aligned} \quad (4-32)$$

onde

$$K_1 = \frac{k_1^2 - \frac{m\omega^2}{EA}}{k_2}, \quad K_2 = \frac{k_2^2 + \frac{m\omega^2}{EA}}{k_1} \quad (4-33)$$

As expressões de $y^*(x)$ e $\psi^*(x)$ foram obtidas de tal modo que

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow 0}} y^*(x) = 2C_3 + 2C_1 x - C_4 x^2 - C_2 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{EIx}{2GA\kappa} \right) \quad (4-34)$$

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow 0}} \psi^*(x) = 2C_1 - 2C_4 x - C_2 \left(x^2 + \frac{3EI}{2GA\kappa} \right) \quad (4-35)$$

4.2.2

Obtenção da matriz de rigidez

O campo de deslocamentos transversais $y^*(x)$ é expresso por

$$y^* = \left\langle y_1^* \quad y_2^* \quad y_3^* \quad y_4^* \right\rangle \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} = \mathbf{y}^* \mathbf{p}^* \quad (4-36)$$

onde

$$\begin{aligned} y_1^* &= \frac{\sin k_1 x + \sinh k_2 x}{k}, & y_2^* &= \frac{\sin k_1 x - \sinh k_2 x}{k^3} \\ y_3^* &= \cos k_1 x + \cosh k_2 x, & y_4^* &= \frac{\cos k_1 x - \cosh k_2 x}{k^2} \end{aligned} \quad (4-37)$$

As rotações $\psi^*(x)$ são expressas por

$$\psi^* = \left\langle \psi_1^* \quad \psi_2^* \quad \psi_3^* \quad \psi_4^* \right\rangle \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} = \psi^* \mathbf{p}^*$$

onde

$$\begin{aligned} \psi_1^* &= \frac{K_2 \cos k_1 x + K_1 \cosh k_2 x}{k}, & \psi_2^* &= \frac{K_2 \cos k_1 x - K_1 \cosh k_2 x}{k^3} \\ \psi_3^* &= -K_2 \sin k_1 x + K_1 \sinh k_2 x, & \psi_4^* &= \frac{-K_2 \sin k_1 x - K_1 \sinh k_2 x}{k^2} \end{aligned} \quad (4-38)$$

p_1^* , p_2^* , p_3^* e p_4^* são quatro parâmetros de força, numa formulação híbrida de elementos finitos. Os parâmetros \mathbf{p}^* não têm sentido físico definido, embora se pudesse fazer alguma atribuição a partir dos limites das equações (4-34) e (4-35).

Para efeito de estabelecimento das equações que governam o problema da viga, escreve-se, com a mesma notação usada para o elemento de treliça,

$$\begin{Bmatrix} y^* \\ \psi^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^* & y_2^* & y_3^* & y_4^* \\ \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{u}^* \mathbf{p}^* \quad (4-39)$$

Conseqüentemente, obtêm-se os esforços seccionais, segundos as equações (4-17) a (4-19):

$$\begin{Bmatrix} Q^* \\ M^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}^* \mathbf{p}^* \quad (4-40)$$

onde

$$\mathbf{N}^* = EI \begin{bmatrix} \frac{d^2\psi_1^*}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{EA}\psi_1^* & \frac{d^2\psi_2^*}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{EA}\psi_2^* & \frac{d^2\psi_3^*}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{EA}\psi_3^* & \frac{d^2\psi_4^*}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{EA}\psi_4^* \\ \frac{d\psi_1^*}{dx} & \frac{d\psi_2^*}{dx} & \frac{d\psi_3^*}{dx} & \frac{d\psi_4^*}{dx} \end{bmatrix} \quad (4-41)$$

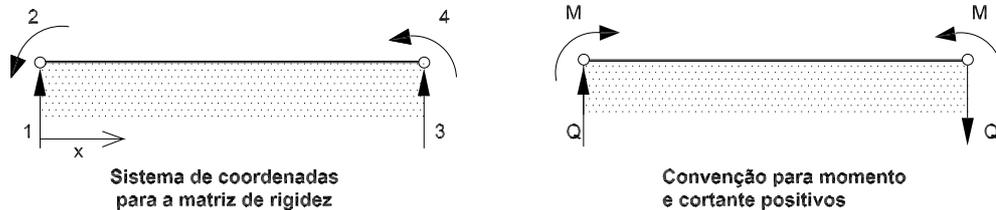


Figura 4.3: Sistemas de coordenadas e convenção de esforços para a viga.

Por outro lado, usando a primeira das figuras (4.3) para a definição das grandezas do sistema externo de coordenadas e a segunda para a convenção de momentos fletores e esforços cortantes positivos, pode-se descrever para os deslocamentos e rotações nas extremidades do elemento, definidas como os contornos Γ_1 e Γ_2 , assim como para as matrizes $\mathbf{\Lambda}$ com os co-senos diretores:

$$\begin{Bmatrix} y^* \\ \psi^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}_1 \mathbf{d} \quad \mathbf{\Lambda}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ em } \Gamma_1 \quad (4-42)$$

$$\begin{Bmatrix} y^* \\ \psi^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}_2 \mathbf{d} \quad \mathbf{\Lambda}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ em } \Gamma_2 \quad (4-43)$$

A matriz \mathbf{H} de transformação cinemática entre os sistemas \mathbf{d} e \mathbf{p}^* se expressa

$$\mathbf{H} = \mathbf{N}^{*\text{T}} \Big|_{x=0} \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}^{*\text{T}} \Big|_{x=l} \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{N}_2 \quad (4-44)$$

A matriz de flexibilidade no sistema interno \mathbf{p}^* se expressa

$$\mathbf{F} = \mathbf{N}^{*\text{T}} \Big|_{x=0} \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{u}^{*\text{T}} \Big|_{x=0} + \mathbf{N}^{*\text{T}} \Big|_{x=l} \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{u}^{*\text{T}} \Big|_{x=l} \quad (4-45)$$

Após a avaliação da inversa \mathbf{F}^{-1} , obtém-se a matriz de rigidez do elemento através da seguinte expressão:

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^{\text{T}} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} \quad (4-46)$$

Alternativamente, (Dumont-2003), podemos obter a matriz de rigidez utilizando a matriz \mathbf{U}^* , de acordo com a segunda das equações (3-17).

Apesar da grande quantidade de termos, podemos representar a matriz de rigidez do elemento de viga de Timoshenko de forma fechada, em função dos parâmetros definidos nas equações (4-28) e (4-29) e escrevendo, por simplicidade, $C = \cosh kx$, $c = \cos kx$, $S = \sinh kx$ e $s = \sin kx$. Considerando-se a simetria escrevemos

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{14} \\ \cdots & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{24} \\ \cdots & \cdots & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{K}_{44} \end{bmatrix} \quad (4-47)$$

em função dos termos cujas expressões são

$$\mathbf{K}_{11} = -\frac{EIK_1K_2(cK_1S + CK_2s)(K_1k_2 + K_2k_1)}{2K_2K_1Cc + (K_2^2 - K_1^2)sS - 2K_2K_1} \quad (4-48)$$

$$\mathbf{K}_{12} = \frac{EIK_2K_1((-K_1k_2 + K_2k_1)(-1 + cC) + (-k_2K_2 - k_1K_1)sS)}{2K_2K_1(-1 + cC) + (K_2^2 - K_1^2)sS} \quad (4-49)$$

$$\mathbf{K}_{13} = \frac{EIK_1K_2(K_1S + K_2s)(K_1k_2 + K_2k_1)}{2K_2K_1Cc + (K_2^2 - K_1^2)sS - 2K_2K_1} \quad (4-50)$$

$$\mathbf{K}_{14} = -\frac{EIK_1K_2(C - c)(K_1k_2 + K_2k_1)}{2K_2K_1Cc + (K_2^2 - K_1^2)sS - 2K_2K_1} \quad (4-51)$$

$$\mathbf{K}_{22} = \frac{EI(-sK_1C + K_2cS)(K_1k_2 + K_2k_1)}{2K_2K_1Cc + (K_2^2 - K_1^2)sS - 2K_2K_1} \quad (4-52)$$

$$\mathbf{K}_{23} = \frac{EIK_1K_2(C - c)(K_1k_2 + K_2k_1)}{2K_2K_1Cc + (K_2^2 - K_1^2)sS - 2K_2K_1} \quad (4-53)$$

$$\mathbf{K}_{24} = -\frac{EI(K_2S - sK_1)(K_1k_2 + K_2k_1)}{2K_2K_1Cc + (K_2^2 - K_1^2)sS - 2K_2K_1} \quad (4-54)$$

$$\mathbf{K}_{33} = -\frac{EIK_1K_2(cK_1S + CK_2s)(K_1k_2 + K_2k_1)}{2K_2K_1Cc + (K_2^2 - K_1^2)sS - 2K_2K_1} \quad (4-55)$$

$$\mathbf{K}_{34} = -\frac{EIK_1K_2((-K_1k_2 + K_2k_1)(-1 + cC) + (-k_2K_2 - k_1K_1)sS)}{2K_2K_1(-1 + cC) + (K_2^2 - K_1^2)sS} \quad (4-56)$$

$$\mathbf{K}_{44} = \frac{EI(-sK_1C + K_2cS)(K_1k_2 + K_2k_1)}{2K_2K_1Cc + (K_2^2 - K_1^2)sS - 2K_2K_1} \quad (4-57)$$

4.3

Exemplo para o elemento de treliça

Na figura (4.4) temos uma barra elástica com extremidades apoiada e livre representada por 5 elementos de treliça e submetida a uma carga constante P na extremidade livre. As propriedades mecânicas, em unidades coerentes (Dumont-2005), são apresentadas na tabela (4.1).

A	L	E	ρ	ζ
1	1	1000	1	5

Tabela 4.1: Propriedades físicas e geométricas para os elementos de treliça.

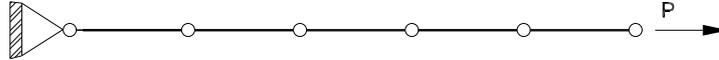


Figura 4.4: Barra com extremidades apoiada e livre submetida a uma força P constante ($t \geq 0$) discretizada em 5 elementos de treliça.

Para uma carga constante aplicada, com correspondente deslocamento independente do tempo $u(x) = Px/EA$, a solução transiente é obtida utilizando a equação (3-33) e impondo a condição inicial de deslocamentos $u(x, t = 0) = -Px/EA$. Na figura (4.5), observamos que os resultados obtidos utilizando $n = 4$ (expansão em série de frequência com termos acima de ω^8) são mais próximos aos valores analíticos, comparados com a abordagem clássica, que usa somente dois termos na expansão (ω e ω^2) para problemas com amortecimento.

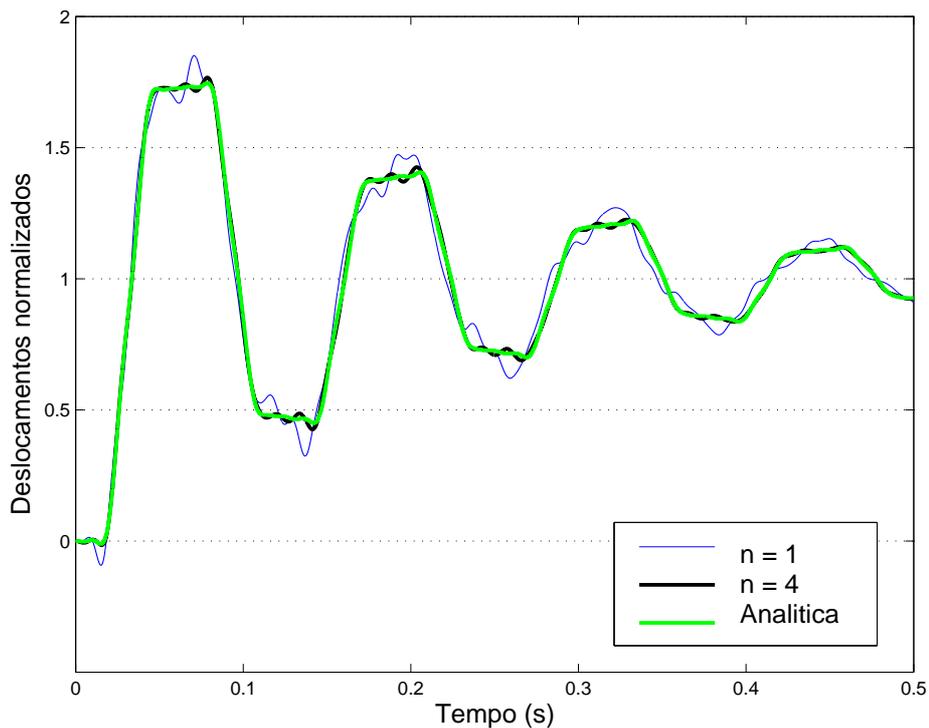


Figura 4.5: Resposta transiente do deslocamento no segundo nó ($x = 0.4L$) para $n = 1$ (teoria clássica) e $n = 4$ (expansão usando termos de ordem ω^8), comparadas com a solução analítica.

4.4 Exemplo para o elemento de viga

Vamos considerar uma viga biapoiada, figura (4.6), com propriedades conhecidas, submetida a uma carga retangular de $P(t) = 1000kN$ em $\frac{L}{2}$.

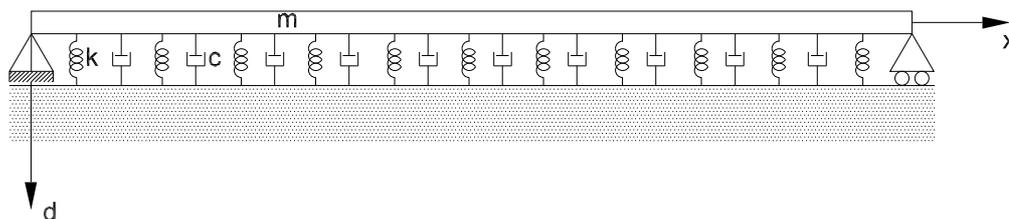
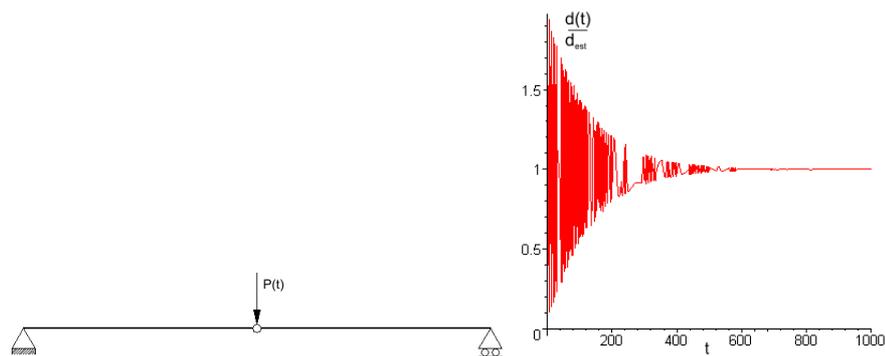


Figura 4.6: Viga biapoiada sob base elástica com amortecimento.

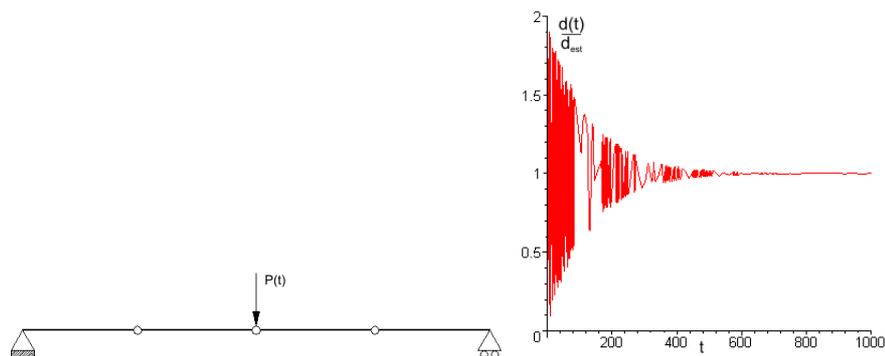
Utilizando o elemento de viga desenvolvido nas seções anteriores, iremos discretizar a viga da figura(4.6) utilizando 2, 4 e 6 elementos, respectivamente. As propriedades adotadas são listadas na tabela (4.2).

A (m ²)	I (m ⁴)	L (m)	κ	E (N/m ²)	m (kg/m)	ζ (1/s)	w (N/m ²)
0,09	0,0027	2,00	$\frac{5}{6}$	$2,1 \cdot 10^{10}$	60,25	0,49	$1,1 \cdot 10^8$

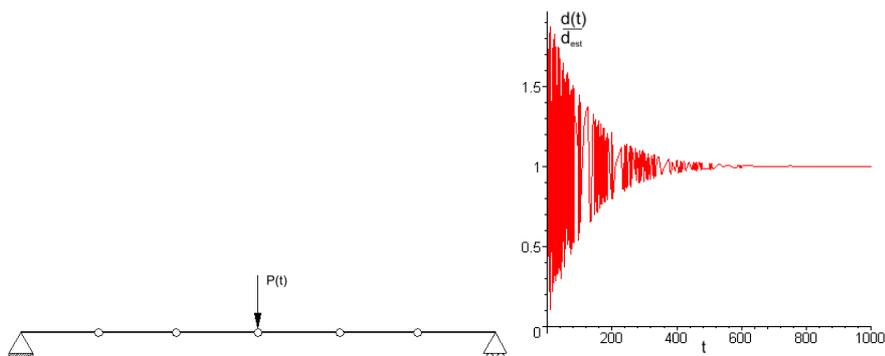
Tabela 4.2: Propriedades físicas e geométricas para a viga.



4.7(a): Discretização utilizando 2 elementos 4.7(b): Amplificações para $n=2$



4.7(c): Discretização utilizando 4 elementos 4.7(d): Amplificações para $n=2$



4.7(e): Discretização utilizando 6 elementos 4.7(f): Amplificações para $n=2$

Figura 4.7: Respostas para as amplificações da viga no nó central

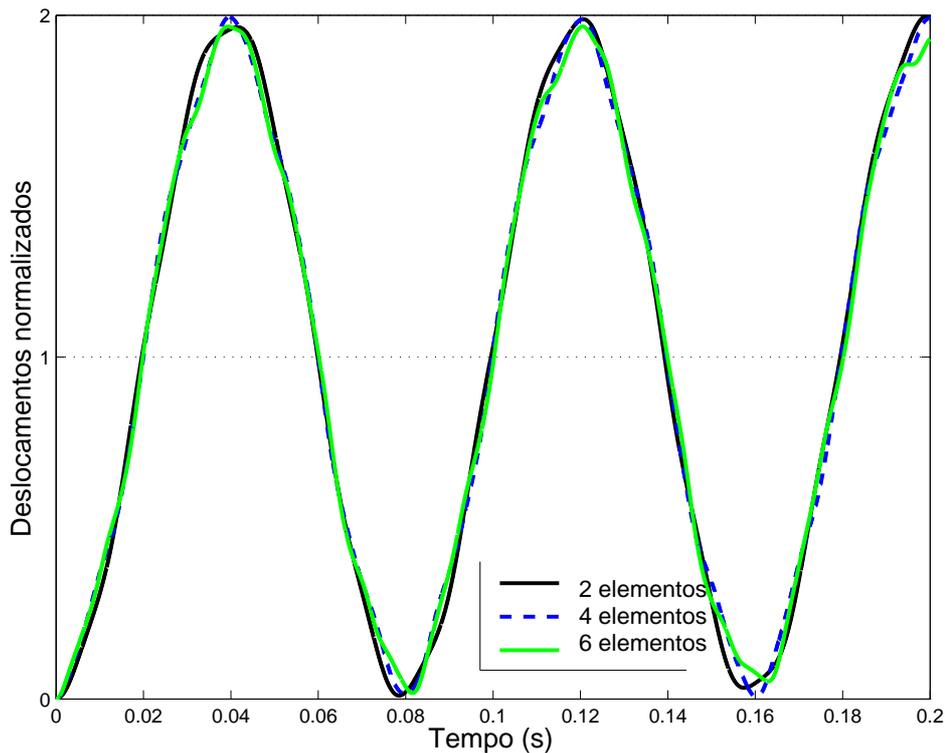


Figura 4.8: Comparação dos resultados em um pequeno intervalo de tempo e $n=2$.

A resposta transiente da viga é mostrada na figura (4.7b), (4.7d) e (4.7f). As amplitudes dos deslocamentos foram normalizadas em relação ao deslocamento estático em cada um dos casos.

Na figura (4.8) observa-se que houve uma boa correspondência dos resultados nos três modelos de discretização, para um mesmo número de matrizes de rigidez, massa e amortecimento utilizadas na expansão. Nas figuras (4.7) observamos que as amplitudes diminuem exponencialmente ao longo do tempo de acordo com a taxa de amortecimento ζ e os deslocamentos tendem ao valor estático.

5 Modelos para representação da ferrovia

O modelo adotado para análise da interação dinâmica entre trilho-palmilha-dormente-lastro é mostrado na figura (5.1). O trilho é representado por um elemento de viga de Timoshenko sem amortecimento e sem base elástica, considerando-se sua inércia à rotação e deformação por esforço cortante. O dormente é modelado utilizando o mesmo elemento de viga considerando-se o amortecimento e a base elástica. A palmilha é modelada como um elemento de treliça com amortecimento e rigidez e o lastro como uma base elástica.

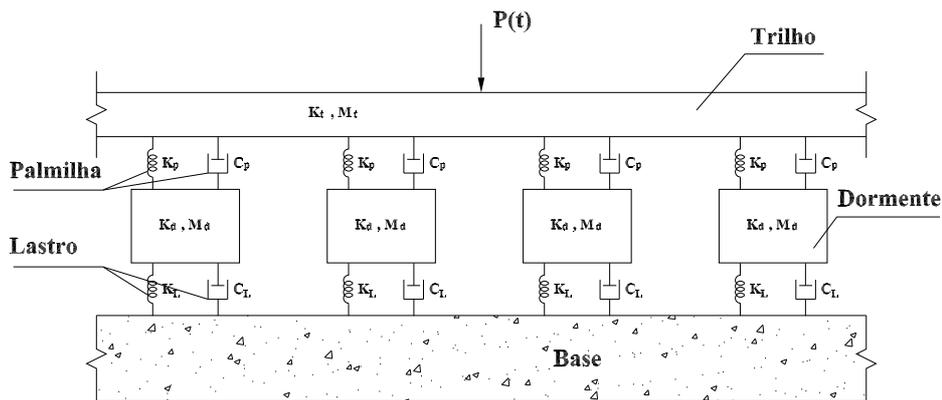


Figura 5.1: Modelo global para os componentes estruturais da ferrovia.

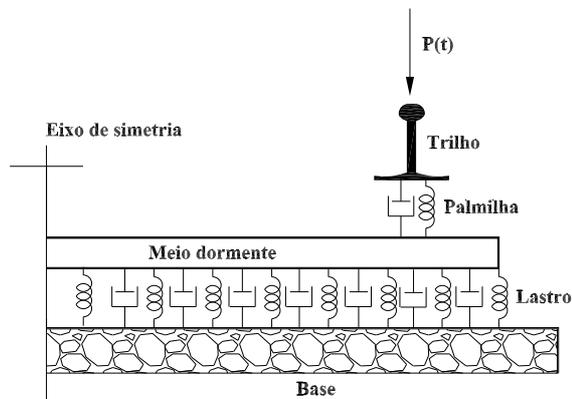


Figura 5.2: Vista frontal do modelo global para os componentes estruturais da ferrovia.

5.1

Considerações iniciais

A matriz de rigidez apresentada na equação (4-46) serve para cada elemento de trilho e cada dormente. Para o dormente, no entanto, é conveniente modificar a matriz, para que se tenha um menor número de graus de liberdade no modelo final. As seguintes modificações são feitas.

5.1.1

Consideração de uma metade de dormente como um único segmento de viga, com dois graus de liberdade localizados no ponto de apoio do trilho

Sejam dois elementos de viga de Timoshenko, de comprimentos L e b e matrizes de rigidez \mathbf{K} e \mathbf{K}_b , respectivamente, utilizados para a modelagem de meio dormente.

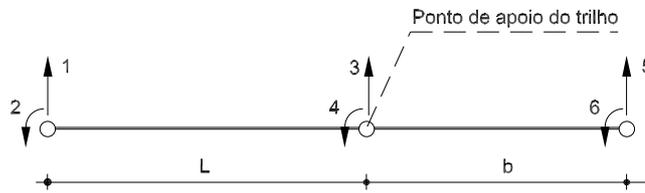


Figura 5.3: Sistema 1 de coordenadas para o dormente.

A condensação dos graus de liberdade 5 e 6, internos em 3 e 4, externos é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{K}_{\text{cond}} = \mathbf{K}_{ee} - \mathbf{K}_{ei} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ie} \quad (5-1)$$

onde \mathbf{K}_{ee} , \mathbf{K}_{ei} , \mathbf{K}_{ii} e \mathbf{K}_{ie} são submatrizes de \mathbf{K}_b :

$$\mathbf{K}_b = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} & \mathbf{k}_{13} & \mathbf{k}_{14} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & \mathbf{k}_{23} & \mathbf{k}_{24} \\ \hline \mathbf{k}_{31} & \mathbf{k}_{32} & \mathbf{k}_{33} & \mathbf{k}_{34} \\ \mathbf{k}_{41} & \mathbf{k}_{42} & \mathbf{k}_{43} & \mathbf{k}_{44} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{ee} & \mathbf{K}_{ei} \\ \hline \mathbf{K}_{ie} & \mathbf{K}_{ii} \end{array} \right] \quad (5-2)$$

Após a condensação, obtém-se uma nova matriz de rigidez \mathbf{K}_2 do dormente, equação (5-3), correspondente ao sistema da figura (5.4), sendo que nos graus de liberdade 3* e 4* foram adicionadas as parcelas devidas à condensação dos graus 5 e 6.

$$\mathbf{K}_2 = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{14} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{24} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} \\ \mathbf{K}_{41} & \mathbf{K}_{42} & \mathbf{K}_{43} & \mathbf{K}_{44} \end{array} \right] \quad (5-3)$$

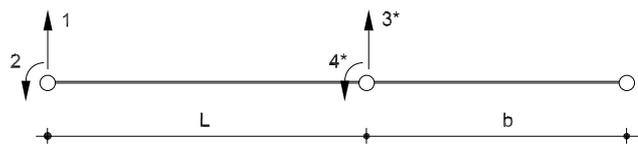


Figura 5.4: Sistema 2 de coordenadas para o dormente.

5.2

Modelo com 5 graus de liberdade por dormente para a ferrovia (modelo 5)

O modelo resultante das modificações anteriores é mostrado na figura (5.5). Nesse o modelo o dormente é representado pelos graus 3, 4 e 5; 8, 9 e 10 e assim sucessivamente.

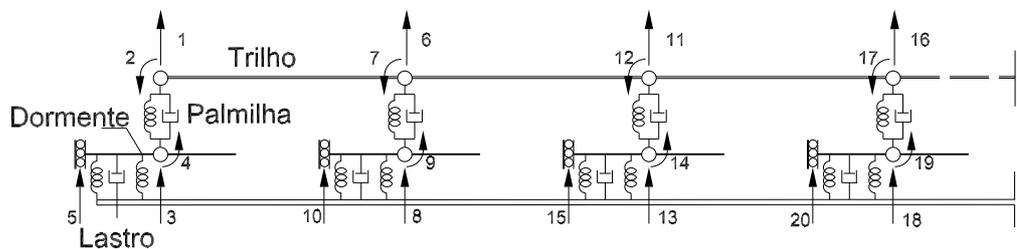


Figura 5.5: Modelo 5 para representação da ferrovia.

No entanto, vamos introduzir outras modificações de modo a reduzir ainda mais o número de graus de liberdade.

5.2.1

Eliminação do grau de liberdade 2 para a representação do engaste

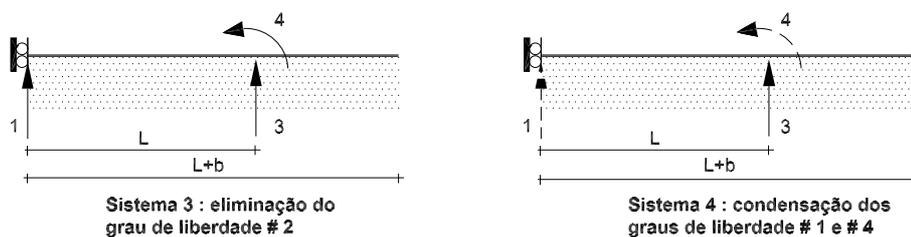


Figura 5.6: Representação do engaste, com eliminação de um grau de liberdade e indicação dos graus de liberdade condensados.

A matriz de rigidez do sistema 3 da primeira das figuras (5.6) se expressa, a partir dos coeficientes de \mathbf{K}_2 do sistema 2:

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{14} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} \\ \mathbf{K}_{41} & \mathbf{K}_{43} & \mathbf{K}_{44} \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

5.2.2

Condensação dos graus de liberdade 1 e 4, em função do grau 3

Renumeram-se inicialmente os graus de liberdade da matriz \mathbf{K}_3 da equação (5-4), na forma

$$\mathbf{K}_3^* = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{14} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{41} & \mathbf{K}_{44} & \mathbf{K}_{43} \\ \hline \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{34} & \mathbf{K}_{33} \end{array} \right] \quad (5-5)$$

Obtém-se finalmente a matriz condensada \mathbf{K}_4 correspondente ao sistema 4 da segunda das figuras (5.6):

$$\mathbf{K}_4 = \mathbf{K}_{33} - \left[\begin{array}{cc} \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{34} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{14} \\ \mathbf{K}_{41} & \mathbf{K}_{44} \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{43} \end{array} \right] \quad (5-6)$$

5.3

Modelo com 3 graus de liberdade por dormente para a ferrovia (modelo 3)

O modelo final global resultante das transformações sugeridas nas seções (5.1.1)-(5.2.2) é mostrado na figura (5.7). Nesse modelo o dormente é representado pelos graus 3, 6, 9, 12 e assim sucessivamente.

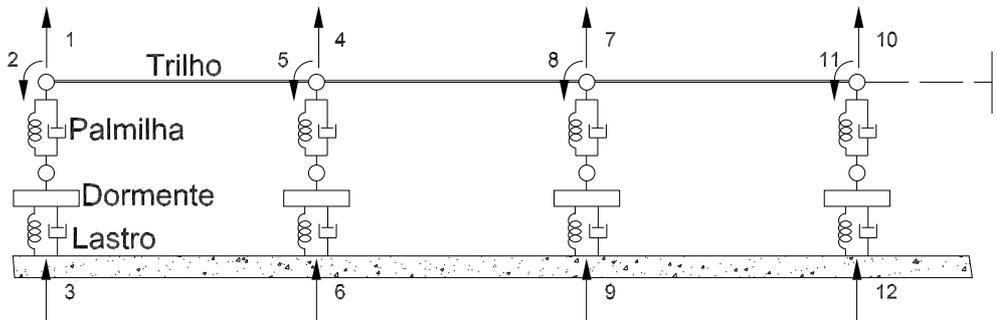


Figura 5.7: Modelo 3 para representação da ferrovia.

As matrizes globais de rigidez, massa e amortecimento são obtidas de acordo com a numeração indicada na figura (5.7), e desenvolvidas utilizando a abordagem mostrada na seção (3.4).

5.4

Modelo com 2 graus de liberdade por dormente para a ferrovia (modelo 2)

Um modelo alternativo para modelagem da ferrovia, figura (5.8), é obtido pela condensação dinâmica dos graus de liberdade correspondente aos dormentes, figura (5.7), nos graus de liberdade verticais referentes ao trilho.

Obtém-se assim, um modelo simplificado com dois graus de liberdade por dormente, onde os graus de liberdade com numeração ímpar são os novos graus condensados.

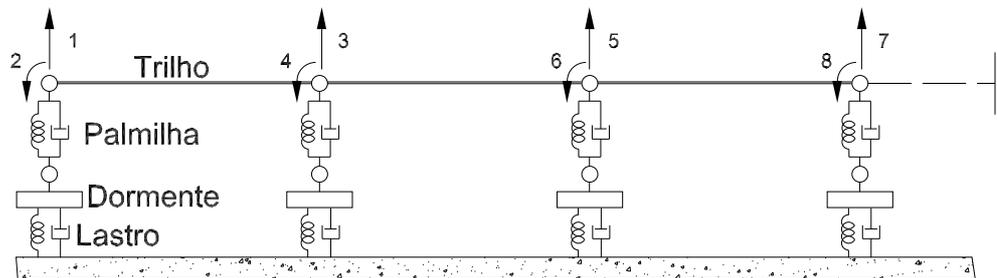


Figura 5.8: Modelo 2 para representação da ferrovia.

5.5

Modelo com 7 graus de liberdade por dormente para a ferrovia (modelo 7)

Para uma melhor avaliação dos resultados, considera-se um quarto modelo, figura (5.9), onde as modificações realizadas nas seções (5.1.1) a (5.2.2) são ignoradas, com exceção da consideração da simetria da via férrea. Nesse o modelo o dormente é representado pelos graus de liberdade 3, 4, 5, 6 e 7; 10, 11, 12, 13 e 14 e assim sucessivamente.

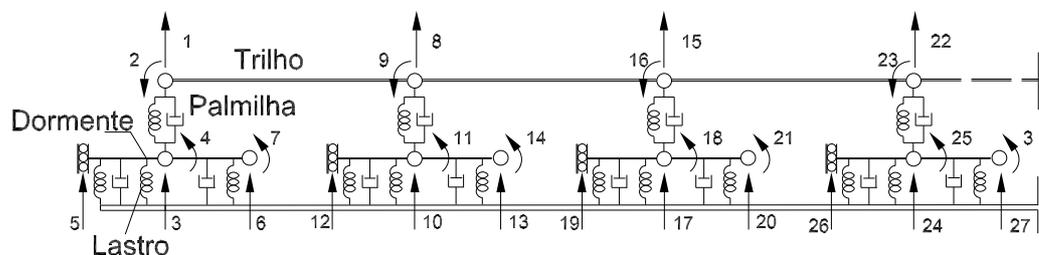


Figura 5.9: Modelo 7 para representação da ferrovia.

5.6

Propriedades dos elementos da via férrea

Na maioria dos casos, a obtenção de resultados condizentes com o problema físico real é dificultada pela ausência de informações referentes à real distribuição de amortecimento e rigidez, principalmente ao longo da subestrutura de uma via férrea.

Essas informações só podem ser obtidas pela realização de ensaios rigorosos, que requerem a utilização de equipamentos sofisticados e conseqüentemente geram altos custos.

Neste trabalho, os parâmetros físicos dos componentes estruturais da via férrea listados nas tabelas (5.1) a (5.3) são obtidos tomando-se como referência dados experimentais apresentados por (Zhai-2003).

Para o trilho considera-se a seção UIC 60, padronizada e cujas dimensões são apresentadas na figura (5.10). Para o dormente, figura (5.11), adota-se o modelo NS90 de monobloco de concreto com pretensão.

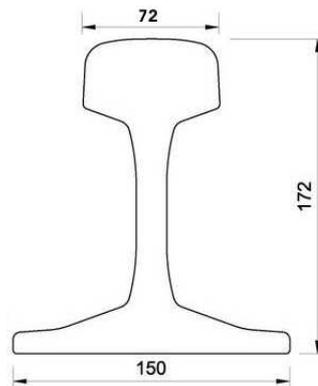


Figura 5.10: Medidas geométricas da seção transversal do trilho UIC 60 em milímetros (CORUS).

Os valores numéricos dos parâmetros físicos e geométricos utilizados na implementação numérica foram obtidos levando-se em conta as definições dadas no capítulo 4.

Para o elemento de palmilha, temos

$$\zeta = \frac{\mu}{2\rho A} \tag{5-7}$$

onde μ é definido como força por unidade de comprimento dividida por velocidade. O parâmetro ζ tem unidade de frequência. A massa específica ρ é definida por unidade de volume. O módulo de elasticidade E tem a mesma unidade de tensão.

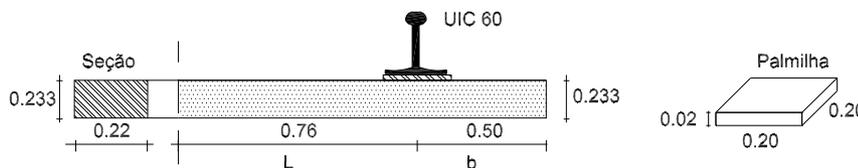


Figura 5.11: Medidas geométricas do meio dormente e palmilha em metros.

O meio dormente tem sua massa total distribuída ao longo de seu comprimento assim como seu amortecimento, de acordo com as definições de m e μ dadas anteriormente.

$$\zeta = \frac{\mu}{2m} \quad (5-8)$$

Em relação ao trilho, a massa m também é definida por unidade de comprimento. Para o trilho e dormentes, o módulo de elasticidade transversal é calculado utilizando a relação

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (5-9)$$

com ν igual a 0,25. Assim, $G \cong \frac{E}{2.5}$.

A rigidez w do lastro é definida da mesma forma que do módulo E e o coeficiente de amortecimento segue as definições anteriores de μ .

$L(m)$	$A(m^2)$	$I(m^4)$	κ	$E(N/m^2)$	$m(kg/m)$
0,545	$76,86 \cdot 10^{-4}$	$3,217 \cdot 10^{-5}$	1	$2,059 \cdot 10^{11}$	60,640

Tabela 5.1: Propriedades físicas e geométricas para o trilho UIC 60. Fonte dos dados: (Zhai-2003).

$L(m)$	$A(m^2)$	$I(m^4)$	κ	$E(N/m^2)$	$m(kg/m)$	$\zeta(1/s)$
1,26	$5,126 \cdot 10^{-2}$	$2,310 \cdot 10^{-4}$	5/6	$2,1 \cdot 10^{10}$	99,603	$2,343 \cdot 10^2$

Tabela 5.2: Propriedades físicas e geométricas para o dormente. Fonte dos dados: (Zhai-2003).

$L(m)$	$A(m^2)$	$E(N/m^2)$	$m(kg/m)$	$\zeta(1/s)$
0,02	0,04	$3,25 \cdot 10^8$	3,920	$4,783 \cdot 10^4$

Tabela 5.3: Propriedades físicas e geométricas para a palmilha. Fonte dos dados: (Zhai-2003).

O valor da rigidez do lastro é $w = 1,1 \cdot 10^8$ em kN/m^2 , (Zhai-2003).

Utilizando as propriedades das tabelas (5.1)-(5.3) são plotados na figura (5.12) o módulo dos seis primeiros autovalores obtidos em cada modelo, variando-se o número de matrizes n na expansão em série de frequências.

Os modelos 3 e 5 apresentam melhores resultados, os módulos dos seus autovalores (frequências) tendem a se aproximar a medida que aumentamos n .

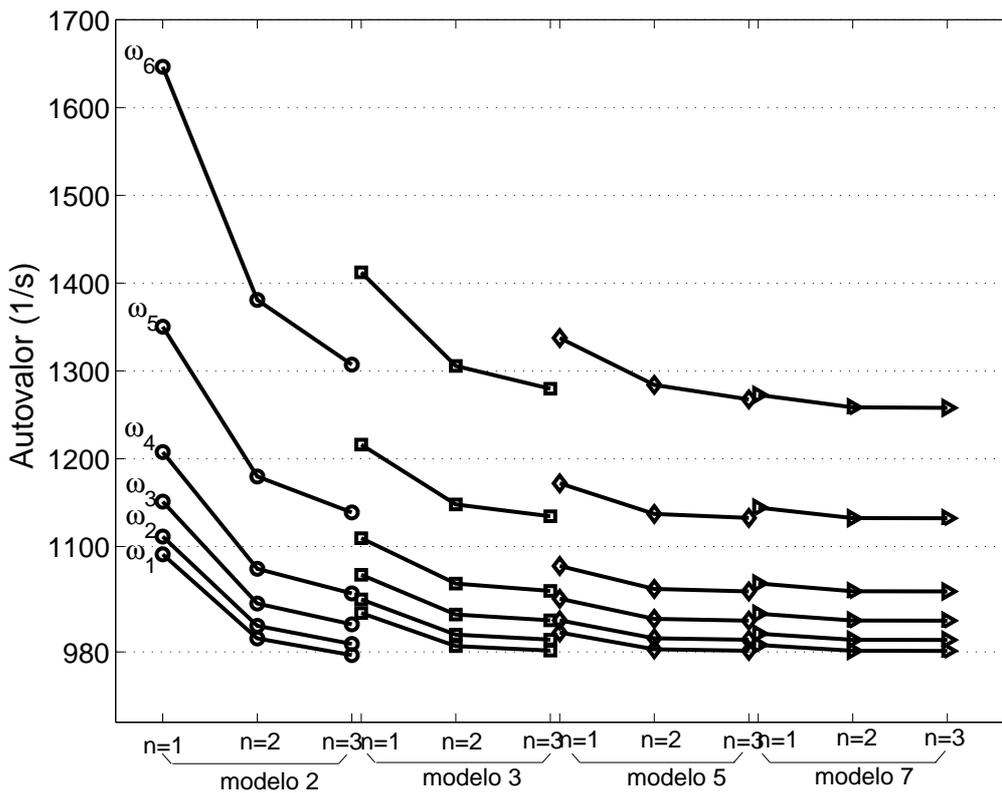


Figura 5.12: Comparação dos autovalores obtidos em cada modelo para diferentes valores de n .

Da figura (5.12), nota-se que o modelo 2 apresenta autovalores não tão próximos aos obtidos nos outros modelos, principalmente para $n=1$. A explicação é que, devido ao grande número de condensações envolvidas na obtenção das matrizes de rigidez, massa e amortecimento do dormente, algumas informações são perdidas. Porém nota-se a convergência dos autovalores quando aumentamos o valor de n .

Para melhor visualização dos resultados, nas tabelas (5.4) a (5.7) são listados os valores dos dez primeiros autovalores obtidos em cada modelo, para cada valor de n .

n = 1		n = 2		n = 3	
Real	Imaginária	Real	Imaginária	Real	Imaginária
1061,6918	252,0004	974,0830	204,3204	957,7665	189,3837
1081,6048	255,8349	988,3609	206,2398	970,6360	190,4549
1118,5326	272,4925	1012,7770	213,8824	992,4275	195,5518
1174,0517	282,9143	1053,0683	214,7916	1028,5676	193,8387
1321,9085	276,0447	1162,3991	201,9211	1124,8752	177,7392
1624,0620	269,6184	1368,3500	184,8619	1297,8612	155,2702
2070,4524	267,9407	1640,6254	168,2424	1511,0000	133,5230
2617,1061	270,7127	1931,7526	154,9230	1721,5391	117,0423
3189,3632	278,4279	2194,5724	145,9861	1898,2729	106,4810
3660,1983	289,3882	2381,7663	141,1532	2017,2412	100,8018

Tabela 5.4: Autovalores obtidos no modelo 2 para $n=1, 2$ e 3 .

n = 1		n = 2		n = 3	
Real	Imaginária	Real	Imaginária	Real	Imaginária
998,7066	227,9218	967,2634	194,5363	963,4900	187,2182
1014,0868	230,2758	980,3658	195,5029	976,1439	187,7096
1040,6584	239,8594	1002,7203	200,6026	997,7488	191,6020
1082,8149	242,0456	1038,9804	198,5218	1032,5819	188,1523
1194,6068	227,9931	1133,6146	180,3583	1122,1434	167,6875
1397,0736	207,0622	1296,8017	152,7692	1272,3994	136,4304
1637,1339	182,4718	1477,5698	123,2936	1431,9819	104,4399
1847,5393	159,3975	1625,3030	99,7874	1556,8429	80,7164
1993,7337	142,6514	1722,8087	84,9406	1636,6376	66,6649
2074,8553	133,2496	1775,3988	77,2899	1678,8829	59,7098

Tabela 5.5: Autovalores obtidos no modelo 3 para $n=1, 2$ e 3 .

n = 1		n = 2		n = 3	
Real	Imaginária	Real	Imaginária	Real	Imaginária
980,8802	204,9658	964,7840	188,0464	963,6633	185,0840
994,8070	206,1232	977,5575	188,5180	976,2969	185,3297
1018,8147	212,0949	999,4194	192,4128	997,9537	188,6835
1057,1104	210,4234	1034,5888	188,7892	1032,6765	184,3447
1156,3350	190,7116	1124,8148	167,1368	1121,2295	160,8518
1328,1575	157,0330	1277,2786	131,3029	1267,6215	5,8073
1395,2413	6,0318	1292,7876	4,2539	1269,5926	3,3506
1396,2564	3,2952	1293,7029	2,8500	1270,4896	2,8247
1396,9471	2,7619	1294,1525	2,5646	1270,8563	2,6689
1397,2279	2,6151	1294,3351	2,4824	1273,2074	1,1989

Tabela 5.6: Autovalores obtidos no modelo 5 para $n=1, 2$ e 3 .

n = 1		n = 2		n = 3	
Real	Imaginária	Real	Imaginária	Real	Imaginária
969,5208	190,0283	963,8149	184,6012	963,7304	184,4265
982,5473	190,3885	976,4548	184,7817	976,2969	184,5952
1004,9687	194,1468	998,1493	187,9959	998,0348	187,7803
1132,2370	189,9851	1032,8798	183,4082	1032,7271	183,1593
1040,7811	165,5736	1121,2711	158,9886	1120,9761	158,6897
1272,6474	6,7176	1258,4841	6,2954	1257,9428	6,2700
1275,3149	3,6815	1260,8841	3,5304	1260,3258	3,5215
1276,5100	3,0034	1261,9557	2,9228	1261,3898	2,9181
1277,0023	2,7986	1262,3954	2,7405	1261,8264	2,7371
1278,7467	19,4787	1264,5074	17,5174	1262,3954	2,7405

Tabela 5.7: Autovalores obtidos no modelo 7 para $n=1, 2$ e 3 .

Observando os valores, nota-se que os autovalores diminuem à medida que aumenta-se o número de matrizes. Comparando-se com modelo não condensando (model 7), melhores resultados foram obtidos para $n = 3$, principalmente nos modelos 3 e 5.

Com a intenção de verificar a convergência dos autovalores obtidos no modelo 2, 3 e 5, utiliza-se um sistema com amortecimento pequeno, onde os elementos (trilho, palmilha e dormente) passam a ter as seguintes propriedades listadas a seguir:

$A (m^2)$	$I (m^4)$	$L (m)$	κ	$E (N/m^2)$	$m (kg)$
$76,56 \cdot 10^{-4}$	$3,217 \cdot 10^{-5}$	0,545	1	$2,059 \cdot 10^8$	125,5

Tabela 5.8: Propriedades físicas e geométricas para o trilho.

$A (m^2)$	$I (m^4)$	$L (m)$	κ	$E (N/m^2)$	$m (kg/m)$	$\zeta(1/s)$	$w (N/m^2)$
0,09	0,0027	1,40	$\frac{5}{6}$	$2,1 \cdot 10^7$	60,25	0,49	$1,1 \cdot 10^5$

Tabela 5.9: Propriedades físicas e geométricas para o dormente.

$A (m^2)$	$L (m)$	$E (N/m^2)$	$\rho (kg/m^3)$	$\zeta(1/s)$
0,09	0,02	$6,5 \cdot 10^4$	0,98	0,30

Tabela 5.10: Propriedades físicas e geométricas para a palmilha.

Na figura (5.13), pode-se verificar a convergência dos resultados. Os autovalores são menores comparados aos resultados anteriores pela redução nos valores das propriedades dos elementos.

Observando os resultados da tabela (5.11) e comparando-se os primeiros autovalores, percebe-se que há convergência dos resultados à medida que se aumenta o número de matrizes.

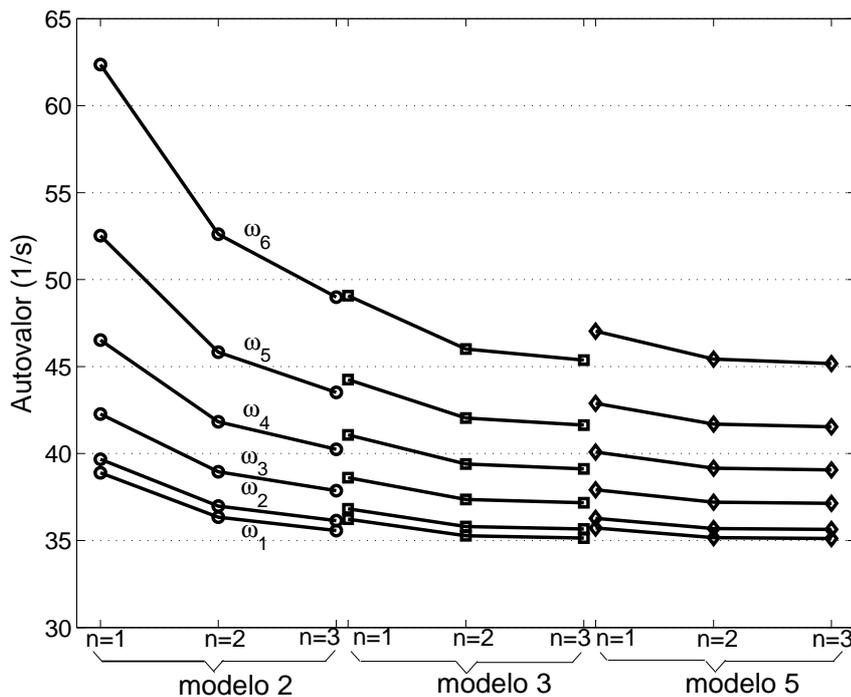


Figura 5.13: Comparação dos autovalores obtidos em cada modelo para diferentes valores de n para um sistema com pouco amortecimento.

modelo 2			modelo 3			modelo 5		
$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
38,8943	36,3414	35,5705	36,2288	35,2709	35,1394	35,7197	35,1657	35,1176
39,6745	36,9785	36,1462	36,8246	35,8066	35,6629	36,2785	35,6910	35,6382
42,2711	38,9468	37,8636	38,6140	37,3604	37,1689	37,9177	37,2036	37,1326
46,5247	41,8260	40,2416	41,0676	39,3944	39,1156	40,0875	39,1605	39,0557
52,5251	45,8272	43,5113	44,2515	42,0410	41,6362	42,8845	41,6903	41,5346
62,3639	52,6118	48,9948	49,0774	46,0084	45,3725	47,0365	45,4284	45,1703

Tabela 5.11: Módulo dos seis primeiros autovalores obtidos nos modelos com a redução do amortecimento e rigidez.

O modelo 3 apresenta autovalores mais próximos ao modelo 5 do que o modelo 2.

Esse estudo é importante, pois verifica-se que há a convergência dos resultados obtidos nos modelos de interação dinâmica.

6

Solução particular para o caso de viga de Timoshenko

6.1

Generalização da solução para um elemento viga de Timoshenko

Na seção (4.2) foi desenvolvida a solução geral homogênea para uma viga de Timoshenko, com carregamento transversal q nulo. Agora deseja-se obter uma solução particular geral, para qualquer carregamento $q(x, t)$.

Nas equações de equilíbrio apresentadas anteriormente, considera-se agora um carregamento q não nulo, tal que

$$GA\kappa \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 2\zeta m \frac{\partial y}{\partial t} - wy = -q \quad (6-1)$$

$$GA\kappa \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) + EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{mI}{A} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (6-2)$$

Primeiramente assume-se que o carregamento

$$q(x, t) = q^*(x)e^{-i\omega t} \quad (6-3)$$

possa ser representado pelo produto de duas funções dependentes do espaço e do tempo.

Aplicando-se esta equação juntamente com as definições dadas na equação (4-24) têm-se as equações (6-1) e (6-2) na forma transformada:

$$GA\kappa \left(\frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) + (m\omega^2 + 2i\omega\zeta m - w) y^* = q^* \quad (6-4)$$

$$GA\kappa \left(\frac{\partial y^*}{\partial x} - \psi^* \right) + EI \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + \frac{mI}{A} \omega^2 \psi^* = 0 \quad (6-5)$$

Eliminando-se ψ^* nas equações (6-4) e (6-5), têm-se a equação

$$\frac{\partial^4 y^*(x)}{\partial x^4} + T \frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2} - k^4 y^*(x) = \left(\frac{m\omega^2}{EGA^2\kappa} - \frac{1}{EI} \right) q^* + \frac{1}{GA\kappa} \frac{\partial^2 q^*}{\partial x^2} \quad (6-6)$$

onde os parâmetros k e T são os mesmos definidos nas equações (4-28) e (4-29).

A equação (6-6) no domínio do tempo tem a forma

$$y^{IV} - \left(\frac{m}{EA} + \frac{m}{GA\kappa}\right)\ddot{y}'' - \frac{2\zeta m}{GA}\dot{y}'' - \frac{w}{GA}y'' + \frac{m^2}{EGA^2\kappa}\ddot{y} + \left(\frac{m}{EI} + \frac{mw}{EGA^2\kappa}\right)\ddot{y} - \frac{2\zeta m^2}{EGA^2\kappa}\dot{y} + \frac{2\zeta m}{EI}\dot{y} + \frac{w}{EI}y = -\frac{m}{EGA^2\kappa}\ddot{q} + \frac{1}{GA\kappa}q'' - \frac{1}{EI}q \quad (6-7)$$

onde o ponto indica uma derivada em relação ao tempo e as aspas indicam a ordem das derivadas em relação a x .

A solução particular da equação (6-7) terá a seguinte forma

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)y_n(x) \quad (6-8)$$

em que a função $y_n(x)$ é um modo normal da solução homogênea, tão simples quanto possível. Escolhe-se, da equação (4-30)

$$y_n(x) = \sin \beta_n x \quad (6-9)$$

onde $\beta_n = \frac{n\pi}{L}$, com $n = 1, 2, \dots$

No caso,

$$\beta_n = \sqrt{\sqrt{k_n + \frac{T_n^2}{4}} + \frac{T_n}{2}} \quad (6-10)$$

para

$$k_n = \left(\frac{m}{EI} \left(\omega_n^2 + 2i\zeta\omega_n - \frac{w}{m} - \frac{I}{GA\kappa} (m\omega_n^4 + 2i\zeta m\omega_n^3 + w\omega_n^2) \right) \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$T_n = \frac{m}{EI} \left[\left(1 + \frac{E}{G\kappa} \right) \frac{I}{A} \omega_n^2 + \frac{EI}{mGA\kappa} (2i\zeta m\omega_n - w) \right] \quad (6-11)$$

Pode-se obter diretamente ω_n a partir de $\beta_n = \frac{n\pi}{L}$, com $n = 1, 2, \dots$; mas não se faz necessário, conforme se verá.

Tem-se, portanto,

$$y_n'' = -\beta_n^2 y_n; \quad y_n^{IV} = \beta_n^4 y_n \quad (6-12)$$

Substituindo a expressão de $y(x, t)$ da equação (6-8) na equação (6-7) e tendo em vista a equação (6-12), para amortecimento:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{A_n q_n + D_n \dot{q}_n + B_n \ddot{q}_n + E_n \dot{\dot{q}}_n + C_n \ddot{\dot{q}}_n\} y_n(x) = Q(x, t) \quad (6-13)$$

sendo

$$\begin{aligned} A_n &= \beta_n^4 + \frac{\beta_n^2 w}{GA} + \frac{w}{EI}, & D_n &= 2\zeta m \left(\frac{1}{EI} + \frac{\beta_n^2}{GA} \right) \\ B_n &= \beta_n^2 \left(\frac{m}{EA} + \frac{m}{GA} \right) + \left(\frac{m}{EI} + \frac{mw}{EGA^2\kappa} \right) \\ E_n &= -\frac{2\zeta m}{EGA^2\kappa}, & C_n &= \frac{m^2}{EGA^2\kappa} \end{aligned} \quad (6-14)$$

com $A_n > 0$, $B_n > 0$, $A_n > B_n$, $D_n \geq 0$, $E_n \leq 0$ e $C_n \geq 0$.

Multiplicando a equação (6-13) por $y_n(x)$ e integrando de zero a L, obtêm-se, pela condição de ortogonalidade,

$$A_n \dot{q}_n + D_n \dot{q}_n + B_n \ddot{q}_n + E_n \ddot{q}_n + C_n \ddot{q}_n = \frac{2}{L} \int_0^L Q(x, t) y_n(x) dx \quad (6-15)$$

ou

$$A_n \dot{q}_n + D_n \dot{q}_n + B_n \ddot{q}_n + E_n \ddot{q}_n + C_n \ddot{q}_n = F_n \quad n = 1, 2, \dots \quad (6-16)$$

Uma solução particular para esta equação (com todas as constantes de integração nulas) tem a forma:

$$q_n(t) = \int_0^t F_n(\tau) \sum_{\alpha_i} \frac{e^{\alpha_i(t-\tau)}}{\Delta_i} d\tau, \quad \Delta_i = D_n + 2B_n\alpha_i + 3E_n\alpha_i^2 + 4C_n\alpha_i^3 \quad (6-17)$$

onde α_i são as 4 raízes de $A_n + D_n\alpha_i + B_n\alpha_i^2 + E_n\alpha_i^3 + C_n\alpha_i^4 = 0$.

A seguir, serão desenvolvidas soluções para uma viga esbelta e alguns casos particulares de carregamento.

6.2

Primeiro caso: Viga esbelta com amortecimento

Para o caso particular de uma viga esbelta, têm-se na equação (6-14):

$$A_n = \beta_n^4, \quad B_n = \frac{m}{EI}, \quad C_n = 0; \quad D_n = \frac{2\zeta m}{EI}; \quad E_n = 0.$$

Assim, a equação (6-13) se expressa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \beta_n^4 q_n + \frac{2\zeta m}{EI} \dot{q}_n + \frac{m}{EI} \ddot{q}_n \right\} y_n(x) = -\frac{1}{EI} q \quad (6-18)$$

Pode-se definir $\beta_n^4 = \frac{m}{EI} \bar{\omega}_n^2$, onde $\bar{\omega}_n \neq \omega_n$. Substituindo esta expressão em (6-18), obtêm-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \bar{\omega}_n^2 q_n + 2\zeta \dot{q}_n + \ddot{q}_n \right\} y_n(x) = -\frac{1}{m} q \quad (6-19)$$

ou, eliminando-se $y_n(x)$

$$\bar{\omega}_n^2 q_n + 2\zeta \dot{q}_n + \ddot{q}_n = F_n \quad n = 1, 2, \dots \quad (6-20)$$

em que $F_n = -\frac{2}{mL} \int_0^L qy dx$.

Por fim, utilizando a equação (6-17)

$$q_n = \frac{1}{mL\sqrt{\bar{\omega}^2 - \zeta^2 i}} \int_0^t q(\tau) \left[e^{(-\sqrt{\bar{\omega}^2 - \zeta^2 i} - \zeta)(t-\tau)} - e^{(-\sqrt{\bar{\omega}^2 - \zeta^2 i} + \zeta)(t-\tau)} \right] d\tau \quad (6-21)$$

A partir desta equação pode-se obter os casos particulares de impacto e carga móvel, para viga esbelta.

6.3

Segundo caso particular: Carga Impulsiva

De acordo com equação (6-7), podemos representar o carregamento $Q(x, t)$ na forma

$$Q(x, t) = -\frac{m}{EGA^2\kappa} \ddot{q} + \frac{1}{GA\kappa} q'' - \frac{1}{EI} q \quad (6-22)$$

Para o caso particular de uma carga de impacto, cuja expressão matemática é $q(x, t) = P\delta(x - \xi)\delta(t)$, onde δ é o delta de Dirac, a equação (6-22) assume a forma

$$Q(x, t) = -\frac{m}{EGA^2\kappa} P\delta(x - \xi)\ddot{\delta}(t) + \frac{1}{GA\kappa} P\delta''(x - \xi)\delta(t) - \frac{1}{EI} P\delta(x - \xi)\delta(t) \quad (6-23)$$

Tem-se que

$$\begin{aligned} \int_0^L \delta(x - \xi)f(x)dx &= f(x), & \int_0^L \delta'(x - \xi)f(x)d\xi &= -f'(\xi) \\ \int_0^L \delta''(x - \xi)f(x)d\xi &= f''(\xi), & \text{para } 0 \leq \xi \leq L. \end{aligned} \quad (6-24)$$

onde ξ é a coordenada ao longo de x do ponto de aplicação do impacto .

Utilizando a definição de F_n dada na equação (6-15), obtemos

$$F_n = \frac{2}{L} \int_0^L Q(x, t) \sin \beta_n x dx = \frac{2P}{L} \sin \beta_n \xi \left[\frac{-m}{EGA^2\kappa} \ddot{\delta}(t) - \left(\frac{\beta_n^2}{GA\kappa} + \frac{1}{EI} \right) \delta(t) \right] \quad (6-25)$$

Utilizando a equação (6-17)

$$q_n(t) = \frac{-2P}{L} \sin \beta_n \xi \left[\frac{m}{EGA^2\kappa} \sum_{\alpha_i} \frac{\alpha_i^2 e^{\alpha_i t}}{\Delta_i} + \left(\frac{\beta_n^2}{GA\kappa} + \frac{1}{EI} \right) \sum_{\alpha_i} \frac{e^{\alpha_i t}}{\Delta_i} \right] \quad (6-26)$$

obtem-se a solução no domínio do tempo para a carga de impacto.

E por fim, de acordo com a equação (6-8)

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2P}{L} \sin \beta_n \xi \sin \beta_n x \left[\frac{m}{EGA^2\kappa} \sum_{\alpha_i} \frac{\alpha_i^2 e^{\alpha_i t}}{\Delta_i} + \left(\frac{\beta_n^2}{GA\kappa} + \frac{1}{EI} \right) \sum_{\alpha_i} \frac{e^{\alpha_i t}}{\Delta_i} \right] \quad (6-27)$$

obtem-se a expressão para a solução particular da equação (6-7) para uma carga de impacto.

6.4

Terceiro caso particular: Carga móvel

Uma carga móvel pode ser representada por

$$q(x, t) = P\delta(x - Vt), \quad 0 \leq Vt \leq L \quad (6-28)$$

onde V é a velocidade uniforme com que a carga se movimenta.

Utilizando novamente a equação (6-15), obtemos

$$F_n = \frac{2P}{L} \int_0^L \left[\left(\frac{-mV^2}{EGA^2\kappa} + \frac{1}{GA\kappa} \right) \delta''(x - Vt) - \frac{1}{EI} \delta(x - Vt) \right] \sin \beta_n x dx \quad (6-29)$$

Observar que

$$\frac{\partial^2 \delta(x - Vt)}{\partial x^2} = \delta''(x - Vt); \quad \frac{\partial^2 \delta(x - Vt)}{\partial t^2} = V^2 \delta''(x - Vt) \quad (6-30)$$

Integrando a equação (6-29) e agrupando-se os termos chega-se a expressão para F_n .

$$F_n = \frac{2P}{L} \left[\frac{m\beta_n^2 V^2}{EGA^2\kappa} - \frac{\beta_n^2}{GA\kappa} + \frac{1}{EI} \right] \quad (6-31)$$

Obtem-se, a partir da equação (6-17):

$$q_n(t) = \frac{2P}{L} \left[\frac{m\beta_n^2 V^2}{EGA^2\kappa} - \frac{\beta_n^2}{GA\kappa} + \frac{1}{EI} \right] \sum_{\alpha_i} \frac{\beta_n V (e^{\alpha_i} - \cos \beta_n Vt) - \alpha_i \sin \beta_n Vt}{(\alpha_i^2 + \beta_n^2 V^2) \Delta_i} \quad (6-32)$$

A solução particular final para uma carga móvel de acordo com a equação (6-8) tem a forma

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2P}{L} \sin \beta_n x \Omega_n \sum_{\alpha_i} \frac{\beta_n V (e^{\alpha_i} - \cos \beta_n V t) - \alpha_i \sin \beta_n V t}{(\alpha_i^2 + \beta_n^2 V^2) \Delta_i} \right) \quad (6-33)$$

onde

$$\Omega_n = \left[\frac{m\beta_n^2 V^2}{EGA^2\kappa} - \frac{\beta_n^2}{GA\kappa} + \frac{1}{EI} \right] \quad (6-34)$$

O resultado acima pode ser dado diretamente para valores numéricos e $n = 1, 2, \dots$, usando de preferência uma rotina em maple. Para amortecimento nulo, em ambos os casos particulares, o resultado pode ser obtido em forma explícita, considerando na equação (6-13), $D_n = 0$ e $E_n = 0$.

7

Exemplos Numéricos

7.1

Trecho de ferrovia submetido a uma carga súbita

Considere um trecho de ferrovia constituída por 10 dormentes sujeito a uma carga súbita $P(t)$ constante e igual a $100kN$, aplicada na posição indicada na figura (7.1), correspondente ao nó localizado imediatamente acima do quinto dormente.

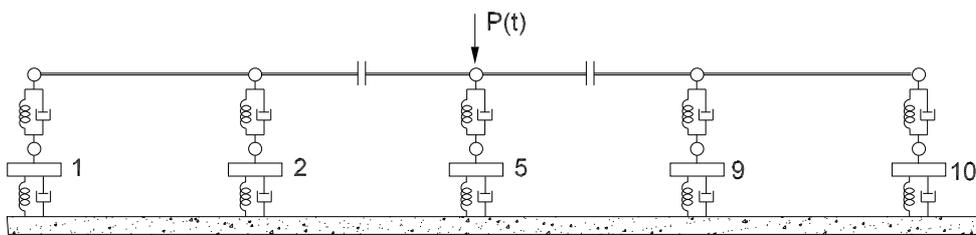


Figura 7.1: Posição do carregamento.

Para cada um dos modelos, as matrizes globais de rigidez, massa e amortecimento são obtidas de acordo com a numeração indicada nas figuras (5.8), (5.7) e (5.5), e desenvolvidas utilizando a abordagem mostrada na seção (3.4).

A resposta transiente do sistema é obtida utilizando a formulação desenvolvida nas seções (3.5)-(3.6). As propriedades físicas do trilho, dormentes e palmilhas são dadas nas tabelas (5.1) a (5.3), respectivamente.

Primeiramente será apresentado os resultados obtidos em cada modelo para em seguida iniciar uma análise comparativa dos mesmos, avaliando a convergência quando se varia o número de termos da expansão em série das matrizes.

Para o modelo 2, figura (5.8), são plotados os deslocamentos normalizados em relação ao valor estático obtido no grau de liberdade #9 (Fator de amplificação) nos pontos nodais central e extremo do trecho sugerido.

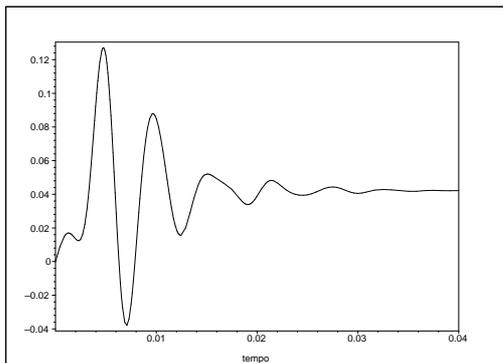


Figura 7.2: Resposta para uma carga súbita no primeiro nó, grau de liberdade 1 para $n=2$ e deslocamento estático $d_0 = 1, 20 \cdot 10^{-5}m$, modelo 2.

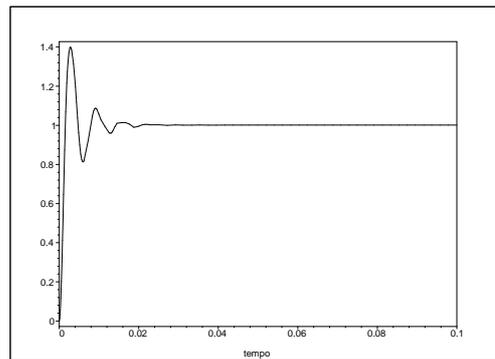


Figura 7.3: Resposta para uma carga súbita no quinto nó, grau de liberdade 9 para $n=2$ e deslocamento estático $d_0 = -2, 86 \cdot 10^{-4}m$, modelo 2.

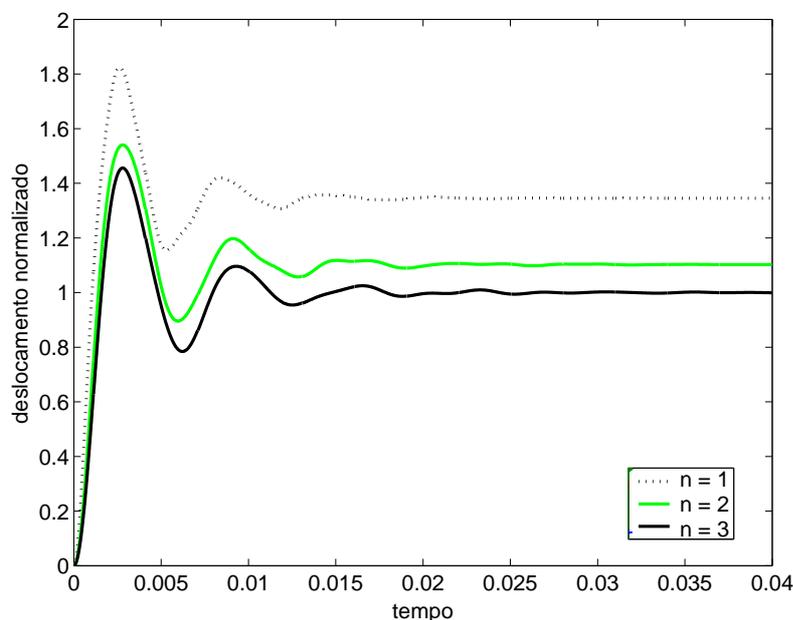


Figura 7.4: Comparação das respostas obtidas no grau de liberdade #9, variando n de 1 (termos na ordem de ω e ω^2) até 3 (termos de ordem de ω^5 e ω^6), modelo 2.

Os resultados mostram que os deslocamentos oscilam em torno da resposta estática, ou seja, as amplitudes diminuem rapidamente devido ao amortecimento, até convergirem ao valor unitário. Na figura (7.2) a amplificação é pequena, na ordem de 12% do deslocamento estático obtido no grau de liberdade 9. Na figura (7.3), ponto onde é aplicada a carga, a amplificação é na ordem de 40% maior que a resposta estática. Observa-se na figura (7.4) que os resultados obtidos utilizando $n = 2$ e $n = 3$ são próximos comparados com $n=1$. Nota-se que há uma variação na resposta permanente quando se varia n pelo truncamento da série de frequências.

Nas figuras (7.5) a (7.8) são plotados os deslocamentos nodais do model 3, figura (5.8), em alguns pontos do trilho e dormentes.

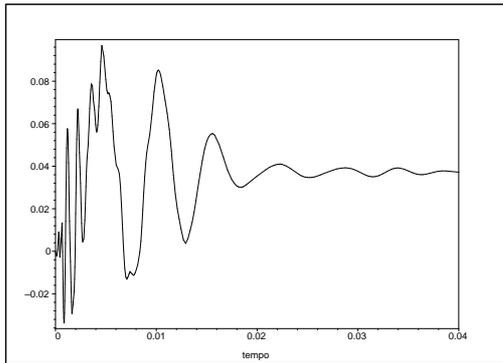


Figura 7.5: Resposta para uma carga retangular do grau de liberdade 1, model 3, para $n=3$ e deslocamento estático $d_0 = 1,24 \cdot 10^{-5}m$.

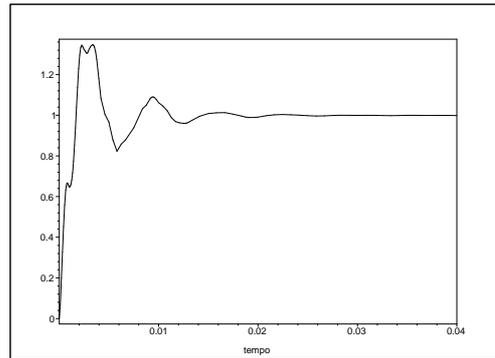


Figura 7.6: Resposta para uma carga retangular do grau de liberdade 13, model 3, para $n=3$ e deslocamento estático $d_0 = -3,34 \cdot 10^{-4}m$.

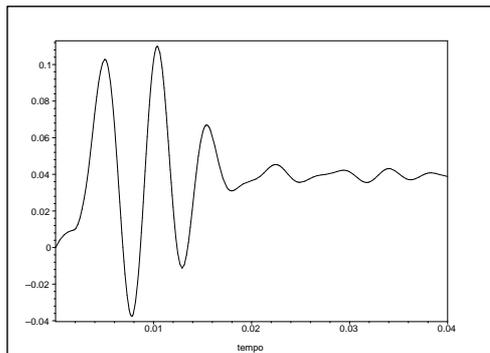


Figura 7.7: Resposta para uma carga retangular no primeiro dormente, grau de liberdade 3 fixando $n=3$ e $d_0 = -1,50 \cdot 10^{-6}m$, model 3.

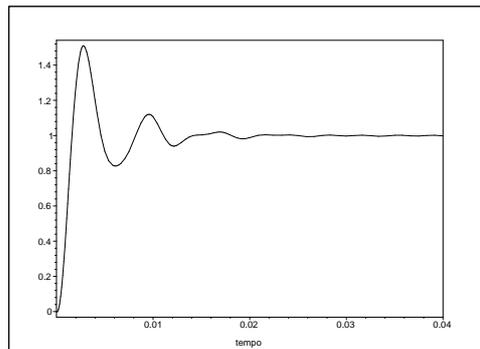


Figura 7.8: Resposta para uma carga retangular no quinto dormente, grau de liberdade 15 fixando $n=3$ e $d_0 = -2,45 \cdot 10^{-4}m$, modelo 3.

Nos pontos nodais onde a carga foi aplicada, figuras (7.6) e (7.8), o sistema oscila com ampliações de 1.4 e 1.5 (em relação ao deslocamento estático do grau #15), respectivamente; e devido ao grande amortecimento, rapidamente converge à resposta estática. Nos pontos extremos, figuras (7.5) e (7.7), há uma perturbação inicial com amplitudes pequenas que após um curto intervalo de tempo tende à resposta estática.

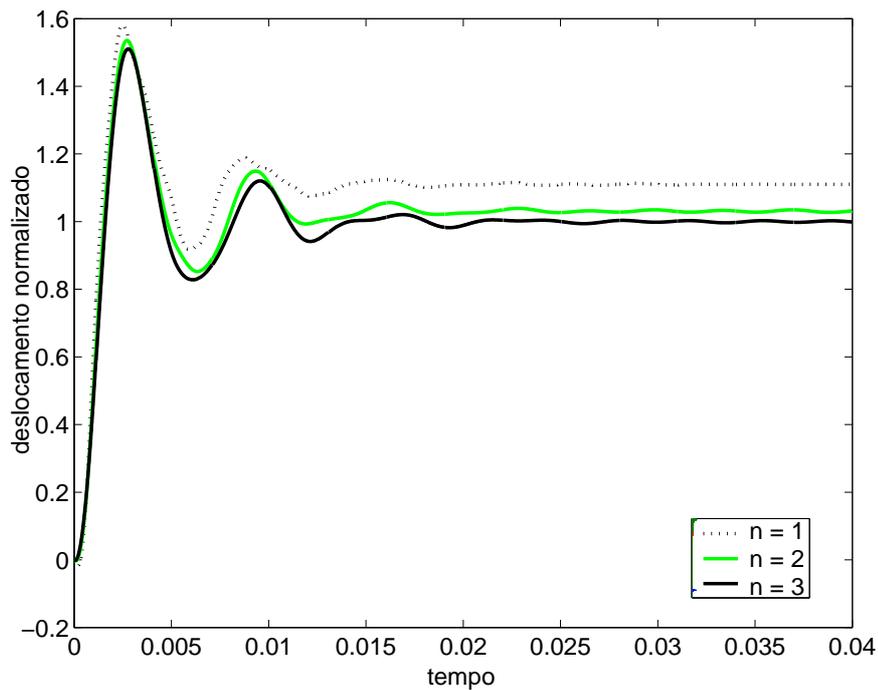


Figura 7.9: Comparação das respostas obtidas no quinto dormente , grau #15, variando n de 1 (termos na ordem de ω e ω^2) até 3 (termos de ordem de ω^5 e ω^6), modelo 3.

Na figura (7.9) percebe-se novamente que os resultados são melhores com o uso de mais matrizes de massa e amortecimento.

Para modelo 5, figura (5.5), são plotados nas figuras (7.10) à (7.13) os deslocamentos normalizados nos mesmos pontos nodais do modelo 3.

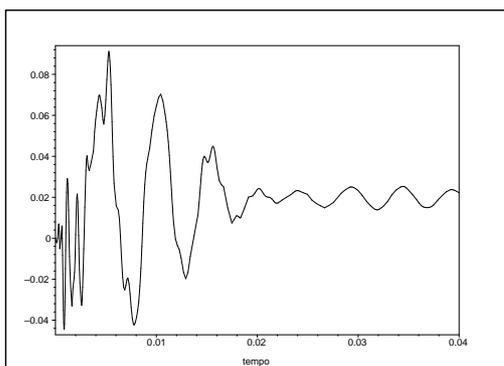


Figura 7.10: Resposta para uma carga retangular do grau de liberdade 1, modelo 5, para $n=3$ e deslocamento estático $d_0 = 7,02 \cdot 10^{-5} m$.

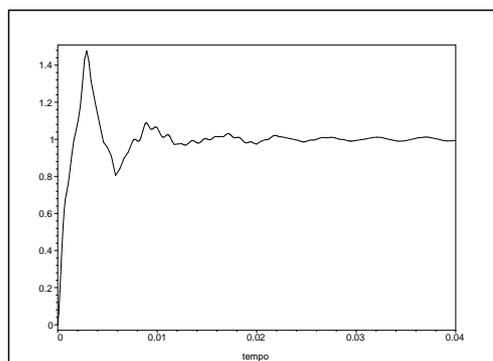


Figura 7.11: Resposta para uma carga retangular do grau de liberdade 21, modelo 5, para $n=3$ e deslocamento estático $d_0 = -3,57 \cdot 10^{-4} m$.

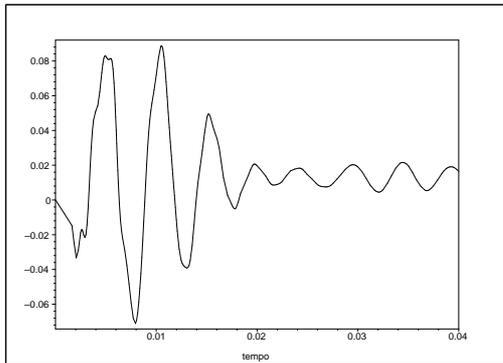


Figura 7.12: Resposta para uma carga retangular no primeiro dormente, grau de liberdade 3, modelo 5, fixando $n=3$ e $d_0 = 3,66 \cdot 10^{-6}m$.

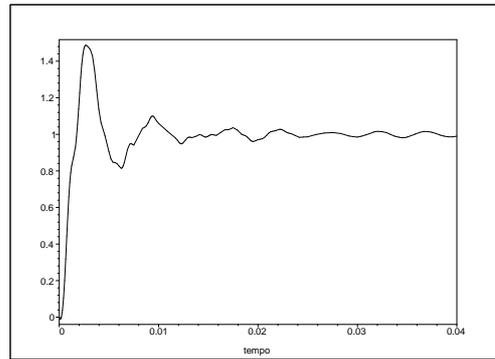


Figura 7.13: Resposta para uma carga retangular no quinto dormente, grau de liberdade 23, modelo 5, fixando $n=3$ e $d_0 = -2,80 \cdot 10^{-4}m$.

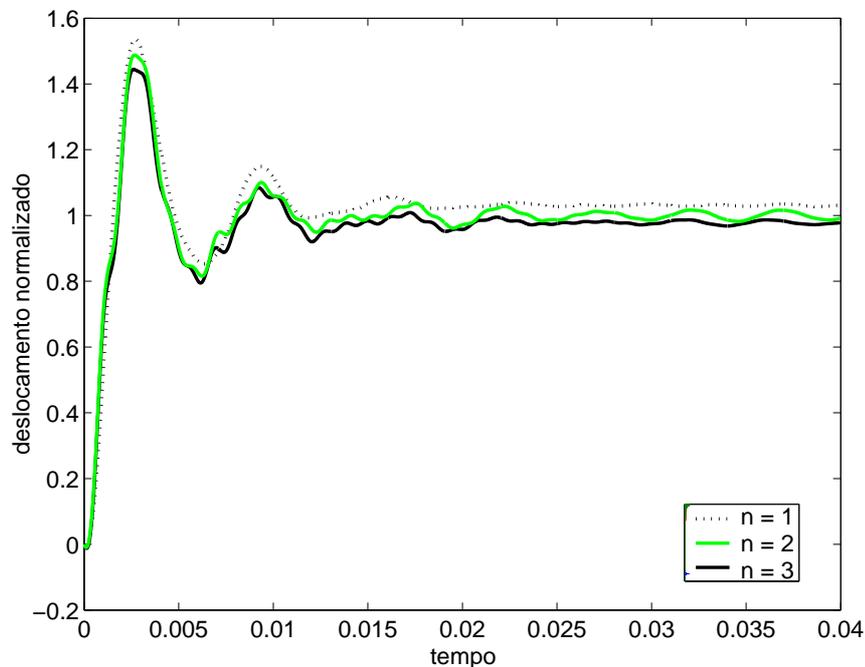


Figura 7.14: Comparação das respostas obtidas no quinto dormente, grau de liberdade 23, variando n de 1 (termos na ordem de ω e ω^2) até 3 (termos de ordem de ω^5 e ω^6), modelo 5.

Percebe-se que o sistema apresenta o mesmo comportamento dos modelos anteriores, ou seja, oscila e tende rapidamente à resposta estática. Na figura (7.14) pode-se verificar a convergência dos resultados. Nota-se ainda nessa mesma figura que o modelo 5 apresentou uma maior aproximação dos mesmos quando se varia n , comparados aos obtidos nos modelos 2 e 3.

7.1.1 Análise comparativa dos modelos 2, 3 e 5

Nas figuras (7.16) e (7.17), são plotados os deslocamentos normalizados obtidos nos modelos 3 e 5 em um mesmo ponto (quinto dormente), num certo intervalo de tempo. Observa-se que os resultados apresentam uma boa aproximação, que melhora à medida que aumenta-se o número de matrizes.

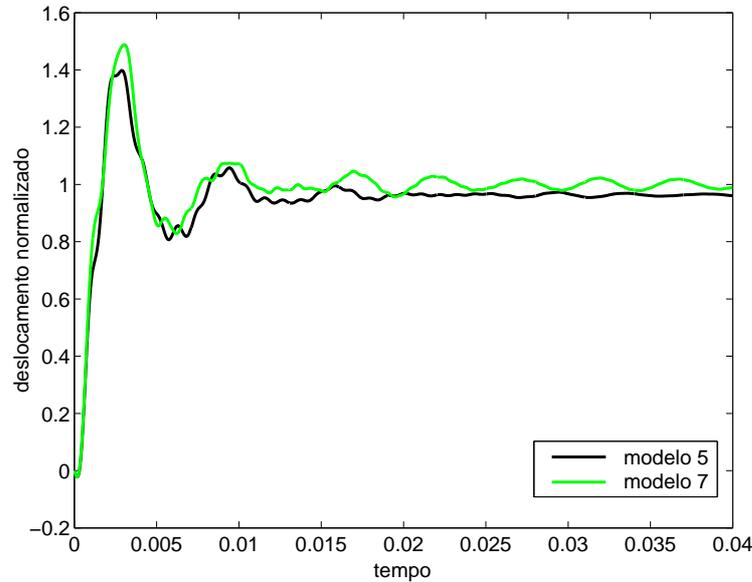


Figura 7.15: Resposta para uma carga súbita no quinto dormente para $n=1$, modelos 5 e 7.

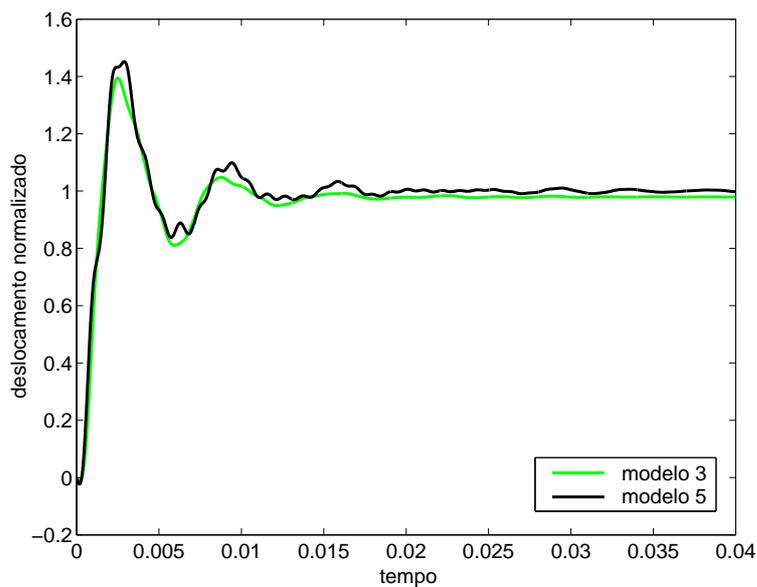


Figura 7.16: Resposta para uma carga retangular no quinto dormente para $n=1$, modelos 3 e 5.

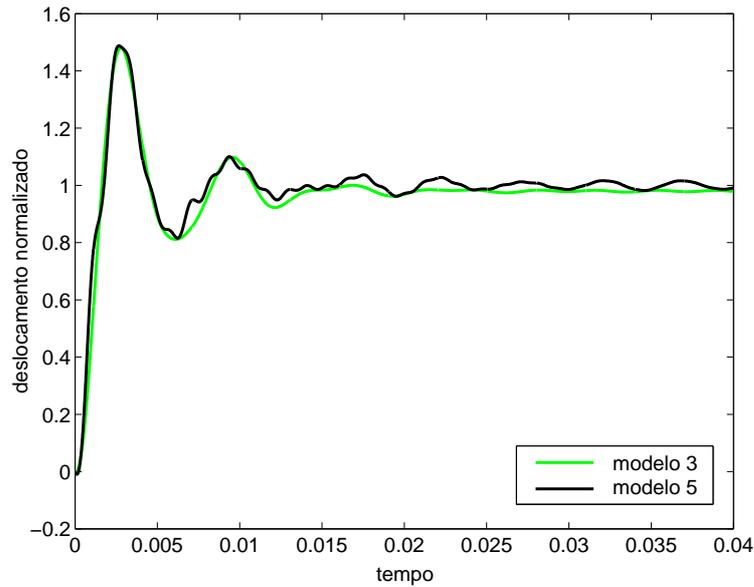


Figura 7.17: Resposta para uma carga retangular no quinto dormente para $n=3$, modelos 3 e 5.

Na figura (7.18), são plotados os deslocamentos nodais dos dormentes no ponto imediatamente abaixo do trilho (ver figuras (5.7) e (5.5)) obtidos ao longo do trecho de ferrovia, para um certo valor de tempo.

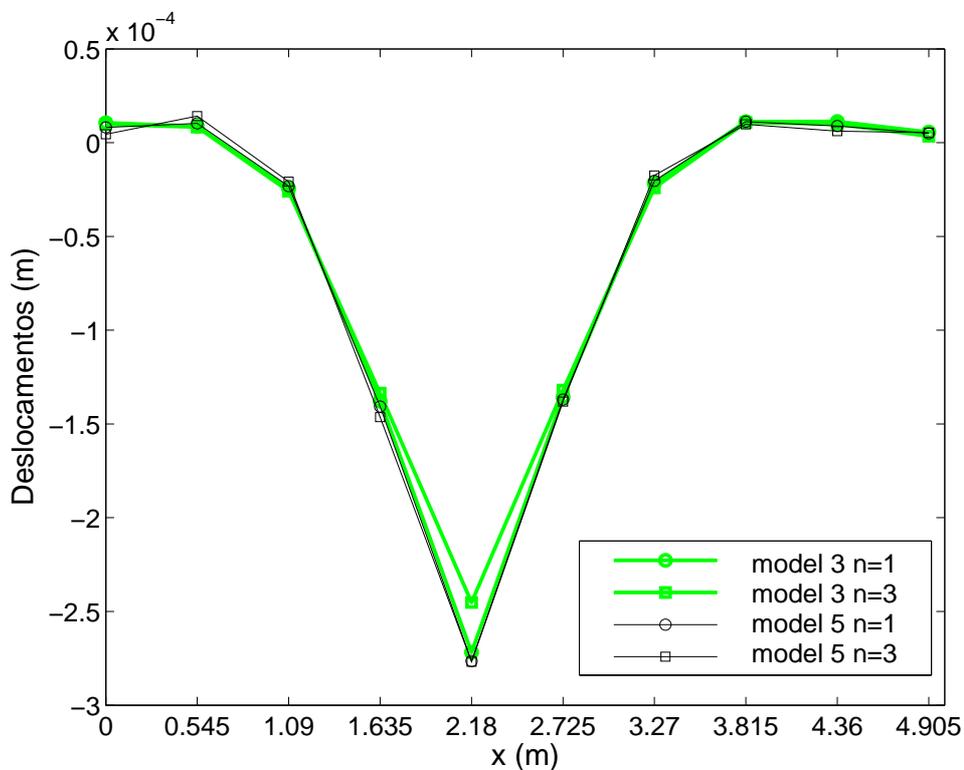


Figura 7.18: Deslocamentos nodais dos dormentes para $t=0,05s$ variando o valor de n , modelos 3 e 5.

Nota-se que na região central da figura (7.18) há uma diferença no valor

do deslocamento do modelo 3 obtido variando-se n . Conforme visto na tabela (7.1), na expansão com $n=3$, ou seja, com mais matrizes, os deslocamentos tendem a serem menores que os obtidos para $n=1$, pelo acréscimo de rigidez, massa e amortecimento ao elemento. Comparando-se os modelos, os resultados obtidos para $n=1$ no modelo 3 são próximos aos obtidos no modelo 5. Isso acontece porque no modelo 3 o grau de liberdade que representa o dormente detém as propriedades dos graus de liberdade presentes no modelo 5, incluindo a do grau de liberdade comparado.

Nas figuras (7.19) à (7.22) são plotados os deslocamentos ao longo do trilho e dormentes obtidos nos modelos 3 e 5. Percebe-se ao se variar n no modelo 5 que há pouca alterações nos resultados. No modelo 3, é notada uma diferença comparando-se os resultados utilizando $n=1$ e $n=3$.

	model 3 ($\times 10^{-6}$)		model 5 ($\times 10^{-6}$)	
nó	$n = 1$	$n = 3$	$n = 1$	$n = 3$
1	10,5835	9,7948	8,0892	4,4648
2	8,7301	8,3127	10,2888	14,1814
3	-24,4846	-25,959	-23,1966	-20,7618
4	-137,864	-133,612	-140,719	-146,376
5	-271,801	-245,186	-276,415	-276,875
6	-135,655	-131,918	-136,999	-138,092
7	-21,5031	-24,1037	-20,377	-17,5002
8	11,2053	10,7479	11,189	9,7739
9	11,2511	9,9793	8,8333	6,157
10	5,643	3,3641	4,9514	5,3297

Tabela 7.1: Valores dos deslocamentos nodais ($\times 10^{-6}$) dos dormentes ao longo do trecho, modelos 3 e 5 fixando $t=0,05s$.

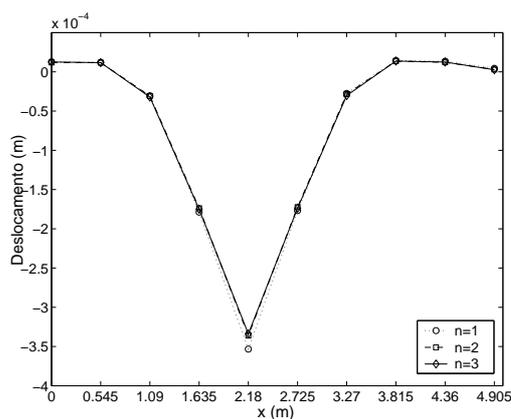


Figura 7.19: Deslocamentos nodais ao longo do trilho para $t=0,05s$, modelo 3.

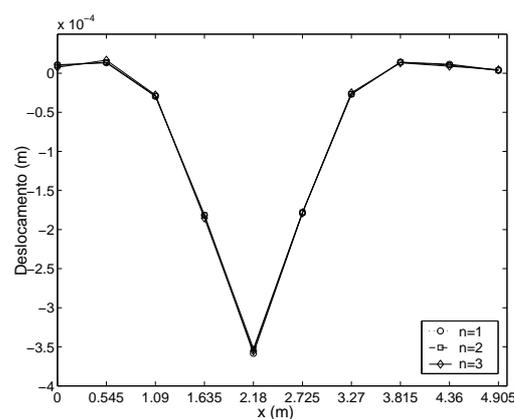


Figura 7.20: Deslocamentos nodais ao longo do trilho para $t=0,05s$, modelo 5.

Nas figuras (7.23) e (7.24) pode-se observar que os valores dos deslocamentos ao longo do trilho obtidos no modelo 2 são menores aos obtidos no

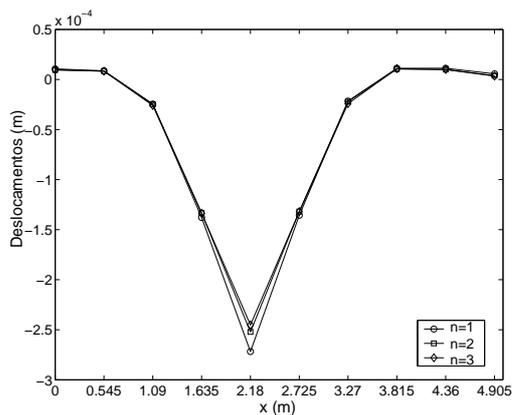


Figura 7.21: Deslocamentos nodais ao longo dos dormentes para $t=0,05s$, modelo 3.

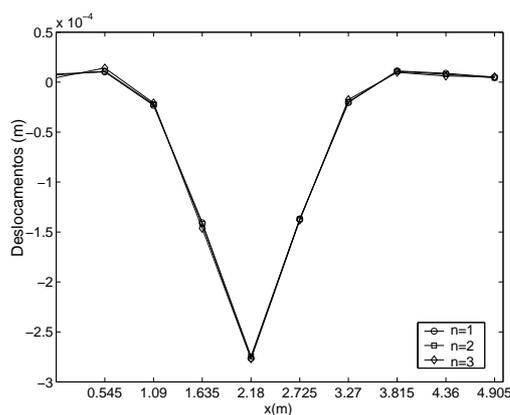


Figura 7.22: Deslocamentos nodais ao longo dos dormentes para $t=0,05s$, modelo 5.

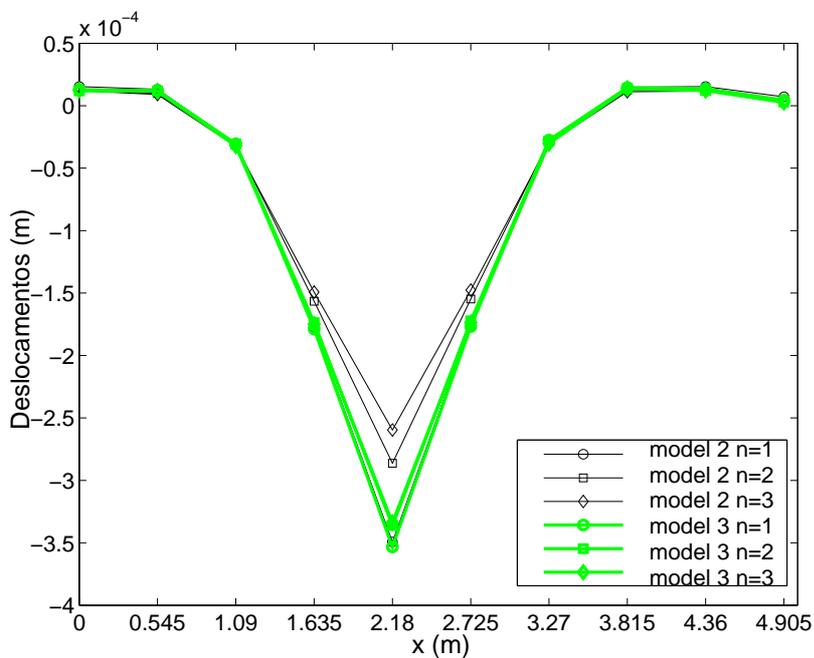


Figura 7.23: Comparação dos deslocamentos nodais ao longo do trilho para $t=0.05s$ variando o valor de n , modelos 2 e 3.

modelo 3 e 5. Isso se deve novamente ao fato que no modelo 2 o grau de liberdade referente ao deslocamento vertical do trilho detém as propriedades do dormente, de acordo com as condensações feitas na seção (5.4).

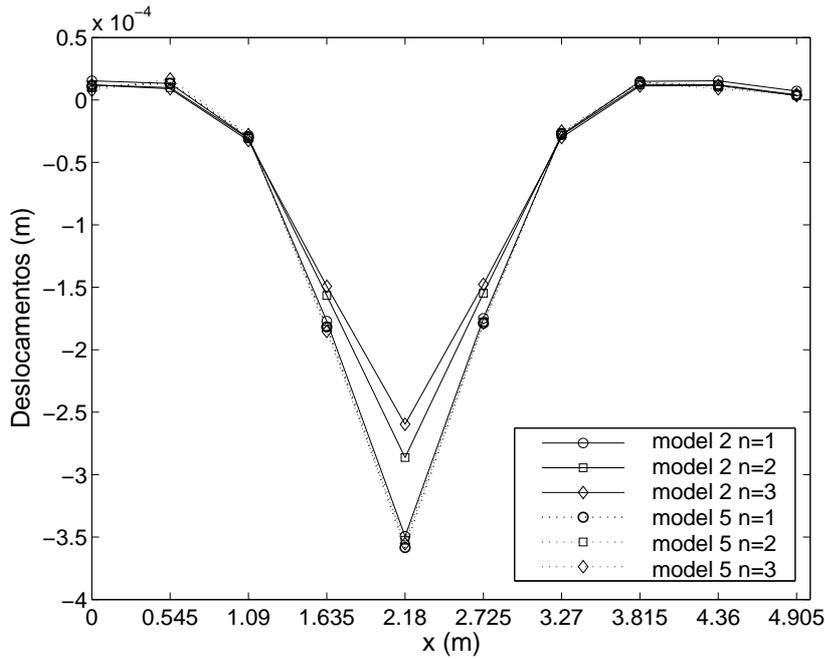


Figura 7.24: Comparação dos deslocamentos nodais ao longo do trilho para $t=0,05s$ variando o valor de n , modelos 2 e 5.

7.2 Pulso retangular

Com o intuito de observar o comportamento dos modelos para uma ação de curta duração, aplica-se o pulso retangular, equação (7-1), com $P_0 = 100kN$ e $t_1 = 0,04s$, na mesma posição indicada na figura (7.1),

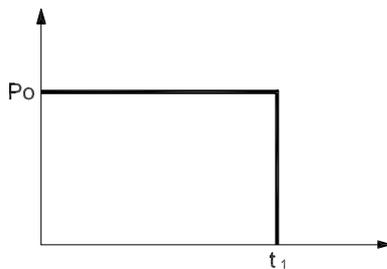


Figura 7.25: Pulso retangular.

$$P(t) = P_0 Heaviside(t) Heaviside(t_1 - t) \tag{7-1}$$

onde a função *Heaviside* assume valor 0 para $t < 0$ e 1 para $t > 0$, podendo ser definida pela relação

$$\frac{d}{dt}(Heaviside(t)) = \delta(t) \tag{7-2}$$

onde δ é o delta de Dirac.

Para cada um dos modelos, são plotados ao longo do tempo os deslocamentos verticais obtidos no primeiro e quinto nós do trilho e nos pontos nodais referentes aos dormentes localizados imediatamente abaixo.

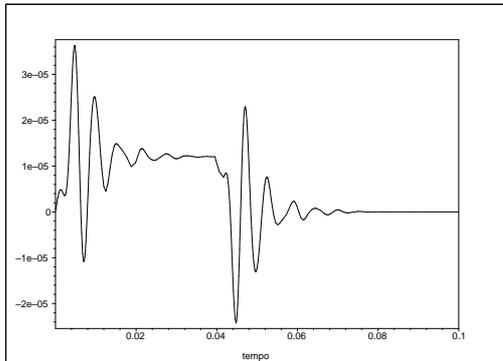


Figura 7.26: Deslocamento obtido no primeiro nó, grau de liberdade 1 para $n=2$, modelo 2, para um pulso retangular.

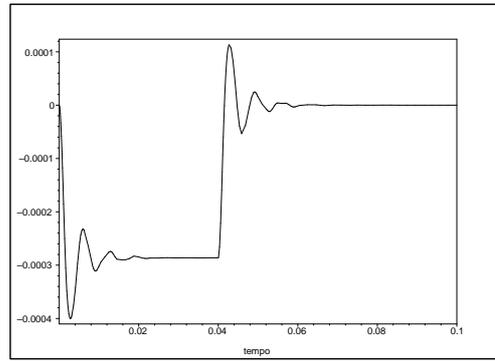


Figura 7.27: Deslocamento obtido no quinto nó, grau de liberdade 9 para $n=2$, modelo 2, para um pulso retangular.

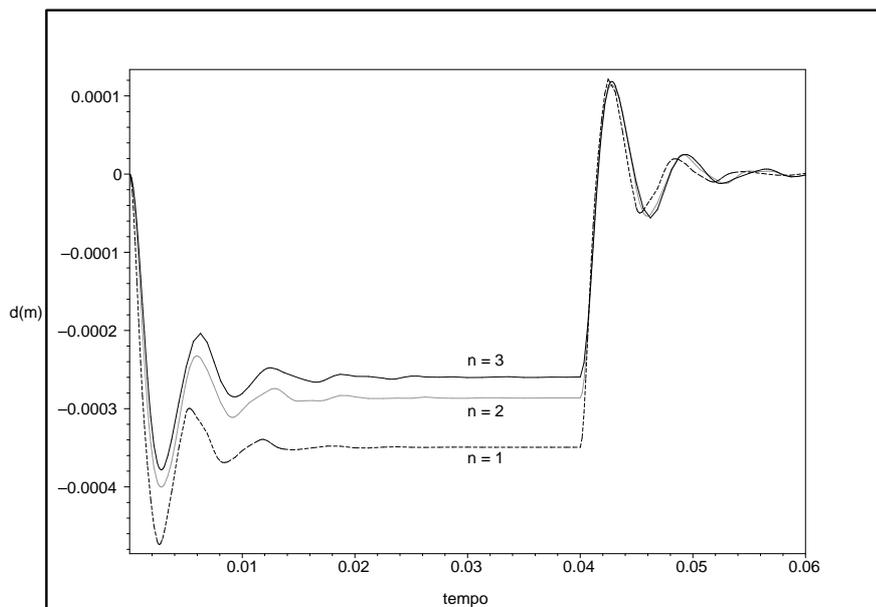


Figura 7.28: Comparação dos deslocamentos obtidos no quinto nó, grau de liberdade 9, variando n de 1 (termos na ordem de ω e ω^2) até 3 (termos de ordem de ω^5 e ω^6), modelo 2.

Nas figuras (7.26) e (7.27) são plotados os deslocamentos obtidos no modelo 2. Pode-se observar que durante o pulso ($t \leq t_1$) os deslocamentos oscilam em torno do valor correspondente ao deslocamento estático da carga retangular do exemplo anterior. Após o pulso ($t > t_1$) os deslocamentos passam a oscilar em torno de zero diminuindo exponencialmente até assumirem o valor nulo.

Ainda no modelo 2, na figura (7.49) verificamos o comportamento do deslocamento variando n . Assim como no exemplo anterior percebe-se que os resultados utilizando mais matrizes são mais próximos.

Nas figuras (7.31) à (7.34) são plotados os resultados obtidos nos modelos 3 e 5.

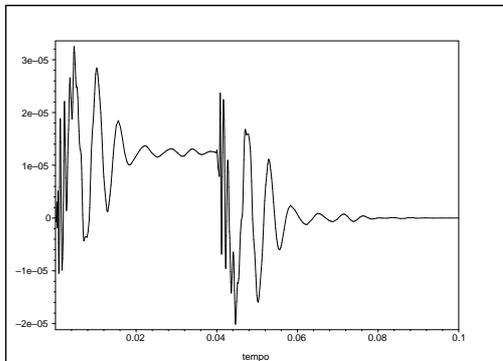


Figura 7.29: Deslocamento obtido no trilho, grau de liberdade 1 para $n=3$, modelo 3, para um pulso retangular.

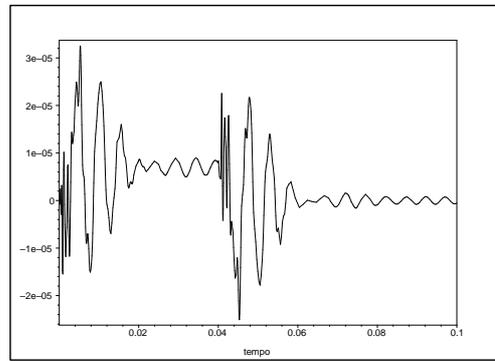


Figura 7.30: Deslocamento obtido no trilho, grau de liberdade 1 para $n=3$, modelo 5, para um pulso retangular.

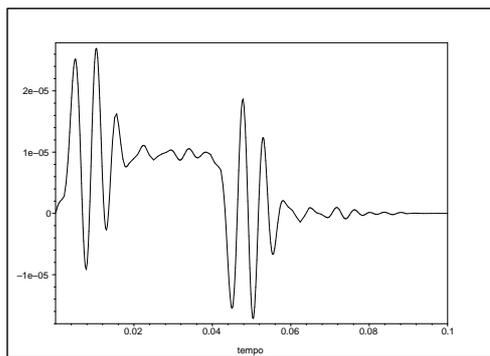


Figura 7.31: Deslocamento obtido no primeiro dormente, grau de liberdade 3 para $n=3$, modelo 3, para um pulso retangular.

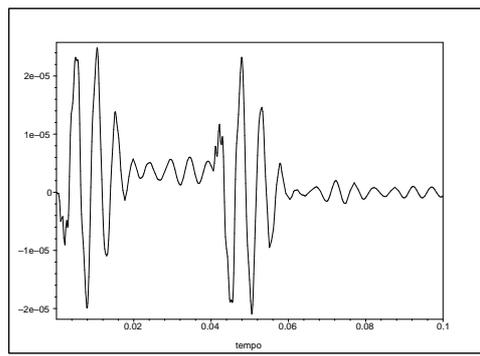


Figura 7.32: Deslocamento obtido no primeiro dormente, grau de liberdade 3 para $n=3$, modelo 5, para um pulso retangular.

O comportamento dinâmico é similar ao obtido no modelo 2. Nota-se nas figuras (7.29) e (7.30) que na região próxima a origem dos eixos, principalmente no modelo 5, há uma maior perturbação comparada ao modelo 2, figura (7.26). Isso ocorre porque no modelo 2 houve a condensação do grau de liberdade que representa o deslocamento do dormente no trilho.

Na figura (7.34) percebe-se que ao variar n , o modelo 5 é menos sensível a alterações nos valores dos deslocamentos, já no modelo 3, figura (7.33), essa diferença é notada.

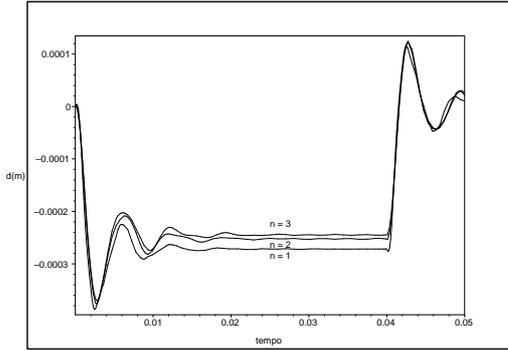


Figura 7.33: Deslocamento no quinto dormente, grau de liberdade 15 , modelo 3, para um pulso retangular.

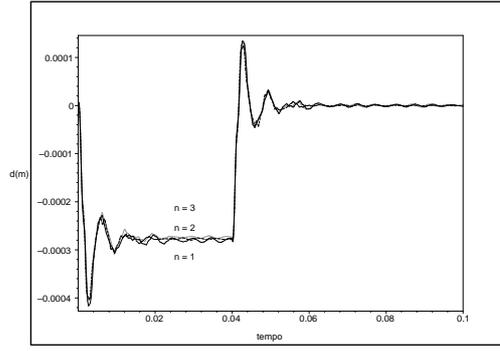


Figura 7.34: Deslocamento no quinto dormente, grau de liberdade 23 , modelo 5, para um pulso retangular.

7.3

Comparação dos resultados entre os modelos 2, 3 e 5

Nas figuras (7.35) e (7.36) são feitas comparações entre os resultados obtidos no modelos 2 com os modelos 3 e 5, respectivamente com $t = 0,003s$, lembrando que o resultado comparado é o deslocamento do grau de liberdade vertical dos trilhos.

Por fim, nas figuras (7.37) e (7.38) são comparados os resultados obtidos para os deslocamentos verticais ao longo do trilho e dormentes obtidos nos modelos 3 e 5 com $t = 0,003s$.

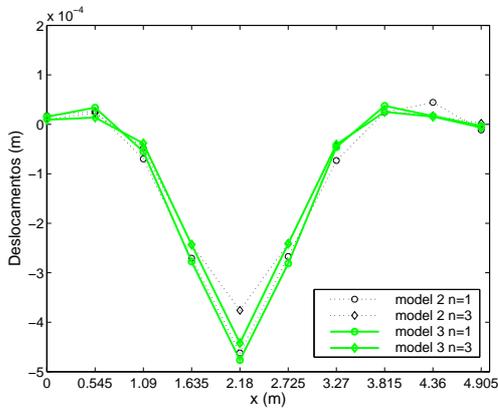


Figura 7.35: Comparação dos deslocamentos nodais ao longo do trilho , modelos 2 e 3, para um pulso retangular.

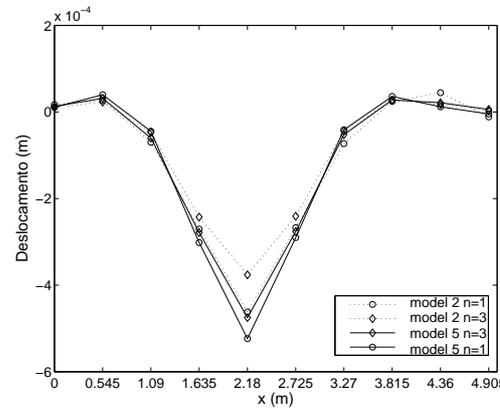


Figura 7.36: Comparação dos deslocamentos nodais ao longo do trilho , modelos 2 e 5, para um pulso retangular.

Observando esses últimos resultados, nota-se a correspondência entre os modelos. Devido ao processo de condensação, há uma diferença de resultados, principalmente entre os modelos 2 e 5. Nas comparações entre os deslocamentos verticais ao longo do trilho e dormentes percebeu-se que o valor do deslocamento é menor nos modelos 2 e 3 comparado ao modelo 5.

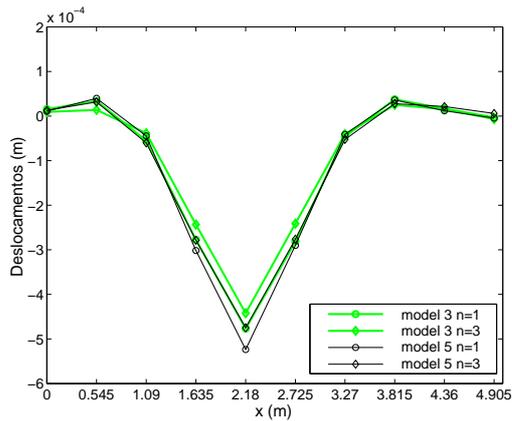


Figura 7.37: Comparação dos deslocamentos nodais ao longo do trilho, modelos 3 e 5, para um pulso retangular.

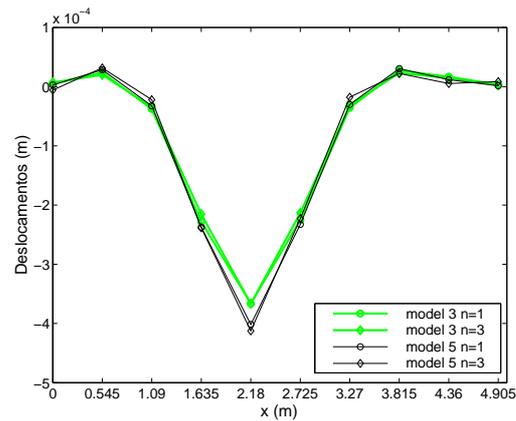


Figura 7.38: Comparação dos deslocamentos nodais nos dormentes, modelos 3 e 5, para um pulso retangular.

7.4 Pulso Triangular simétrico

Considera-se como solicitação o pulso triangular da figura (7.40) com $P_0 = 1000kN$ e $t_1 = 0,04s$ atuando em três pontos nodais, figura(7.39).

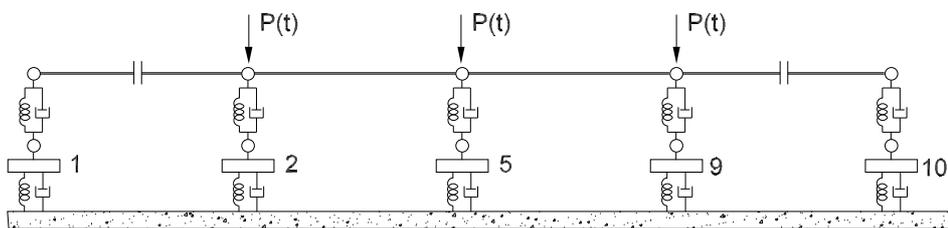


Figura 7.39: Posição do carregamento.

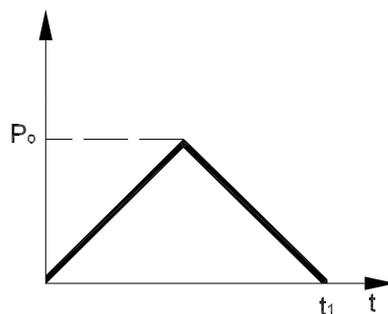


Figura 7.40: Pulso triangular.

$$P(t) = \frac{2P_0}{t_1} Heaviside(t) Heaviside\left(\frac{t_1}{2} - t\right) t +$$

$$Heaviside\left(t - \frac{t_1}{2}\right) Heaviside(t_1 - t) (t_1 - t) \quad (7-3)$$

São plotados nas figuras (7.41)-(7.43) os deslocamentos nodais verticais ao longo do trilho e dormentes (ponto imediatamente abaixo do trilho) obtidos nos modelos 2, 3 e 5 em relação ao modelo 7 (não condensado). O modelo 5 apresentou resultados quase idênticos aos obtidos no modelo 7 (não condensado). Comparando-se os modelos 3 e 7, percebe-se uma pequena diferença nos resultados. O modelo 2 apresentou a maior diferença, devido ao grande número de condensações.

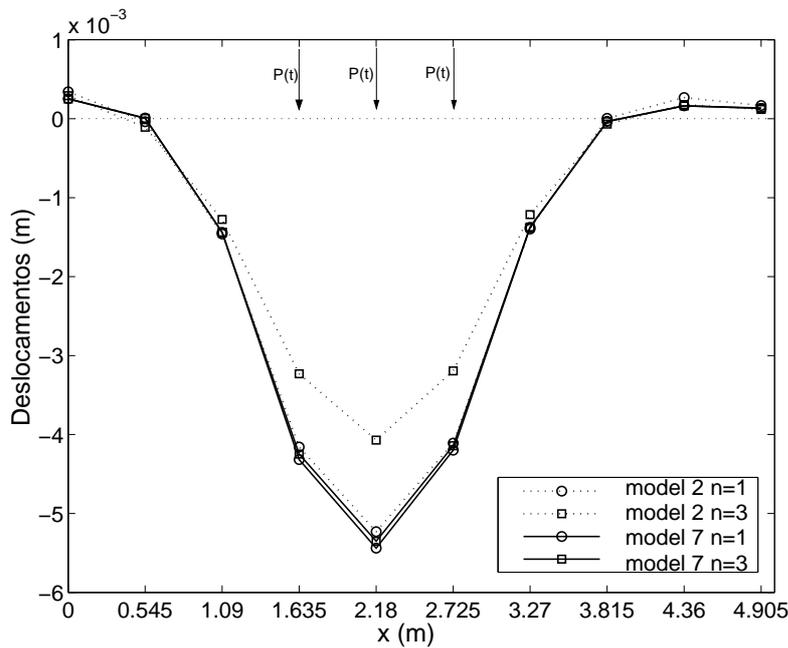


Figura 7.41: Comparação dos deslocamentos nodais no trilho obtidos nos modelos 2 e 7 para $t=0,025s$.

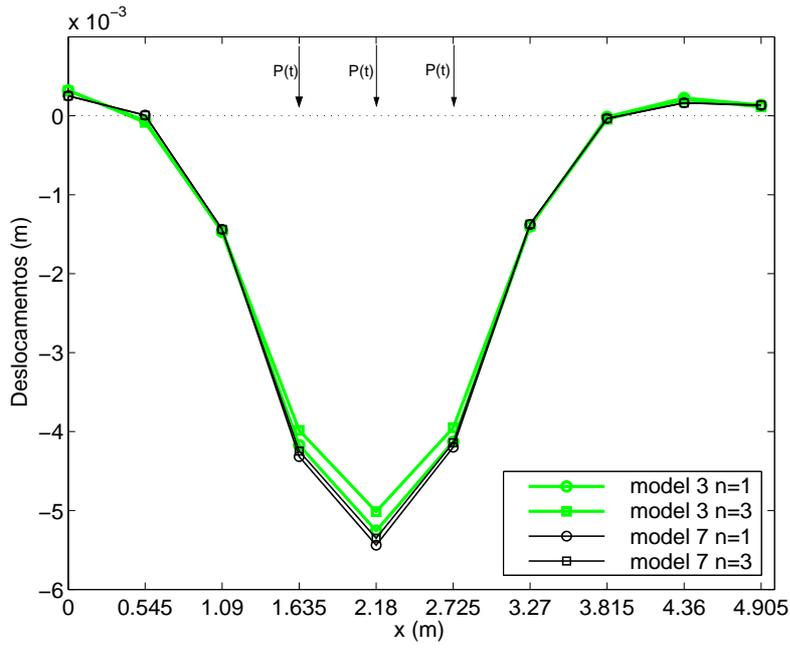


Figura 7.42: Comparação dos deslocamentos nodais no trilho obtidos nos modelos 3 e 7 para $t=0,025s$.

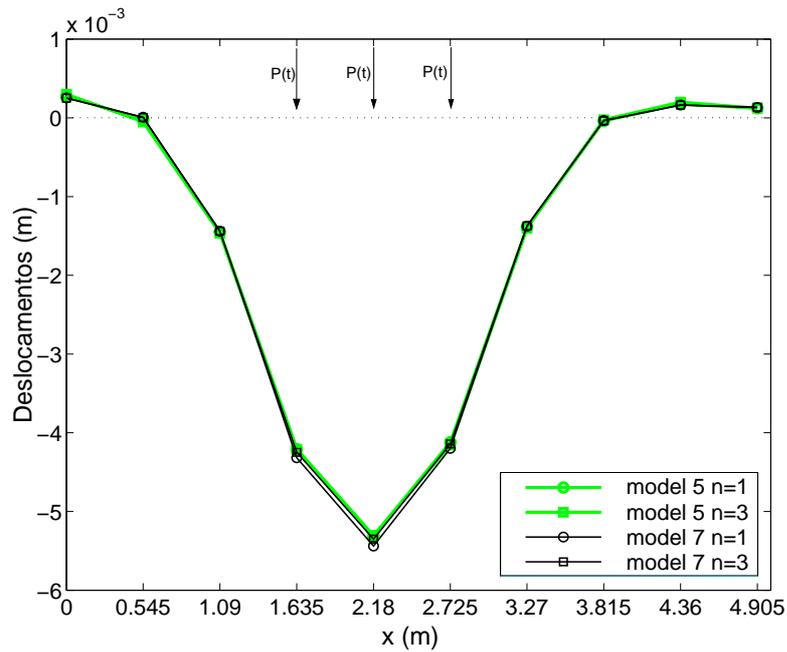


Figura 7.43: Comparação dos deslocamentos nodais no trilho obtidos nos modelos 5 e 7 para $t=0,025s$.

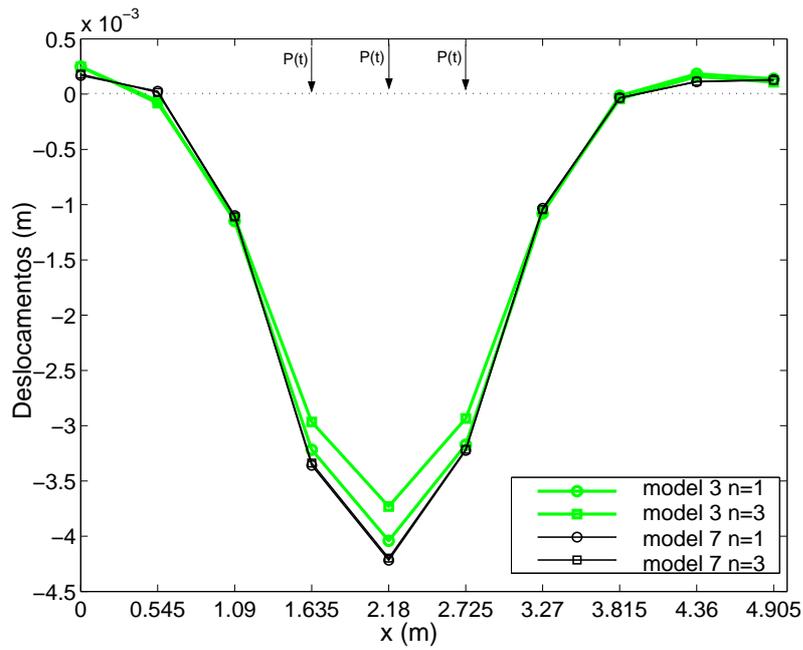


Figura 7.44: Comparação dos deslocamentos nodais nos dormentes obtidos nos modelos 3 e 7 para $t=0,025s$.

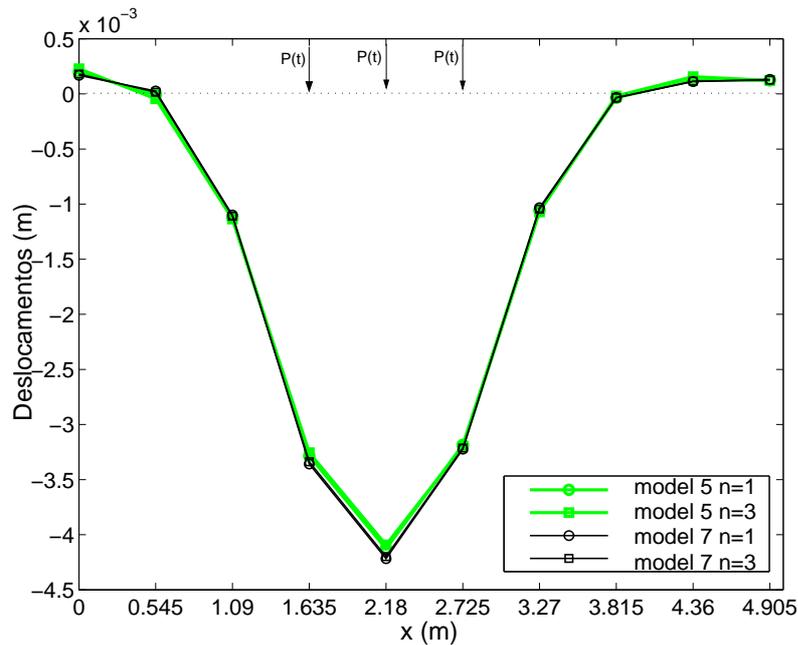


Figura 7.45: Comparação dos deslocamentos nodais nos dormentes obtidos nos modelos 5 e 7 para $t=0,025s$.

7.5 Sistema com amortecimento reduzido

Utilizando as propriedades listadas nas tabelas (5.8), (5.9) e (5.10), avalia-se agora o comportamento dos modelos quando se reduz consideravel-

mente o amortecimento.

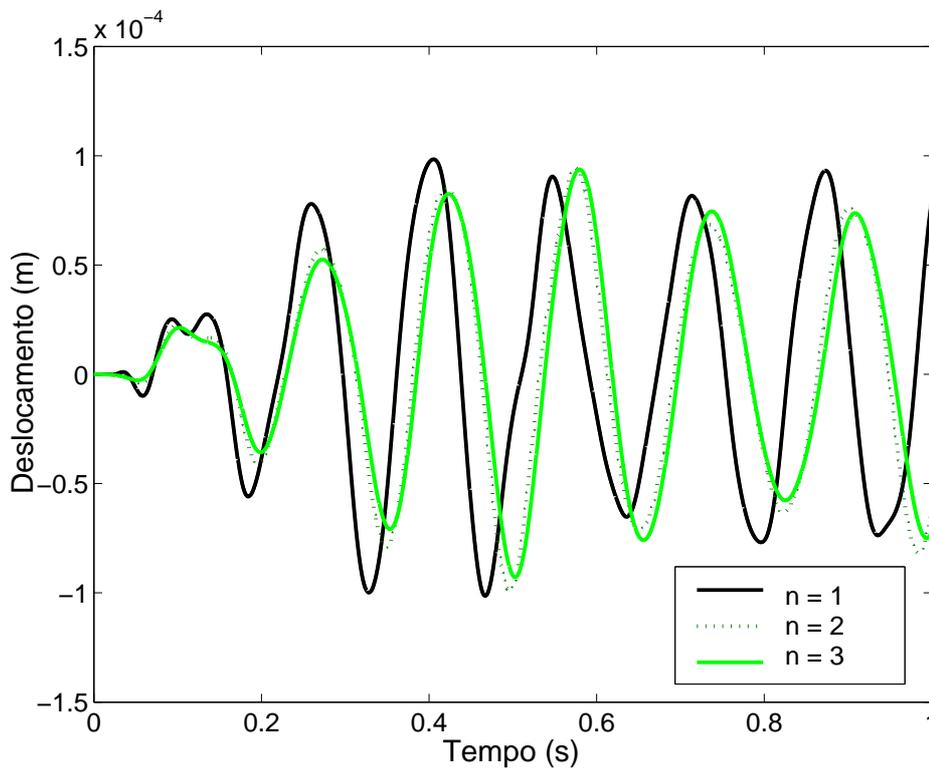


Figura 7.46: Deslocamento no primeiro dormente obtido no modelo 3, variando o número de matrizes de massa e amortecimento e $P(t) = 100kN$.

Com pouco amortecimento, o sistema oscila sem se notar uma redução nas amplitudes nos primeiros instantes. Na figura (7.46) observa-se o comportamento do deslocamento no primeiro dormente obtido no modelo 3, variando n .

Percebe-se, figuras (7.47) e (7.48), a aproximação dos resultados obtidos nos modelos 3 e 5. Na figura (7.49) é notada uma variação maior dos valores nodais dos deslocamentos ao longo dos dormentes, entre os modelos 3 e 5 se comparados aos resultados obtidos no primeiro exemplo.

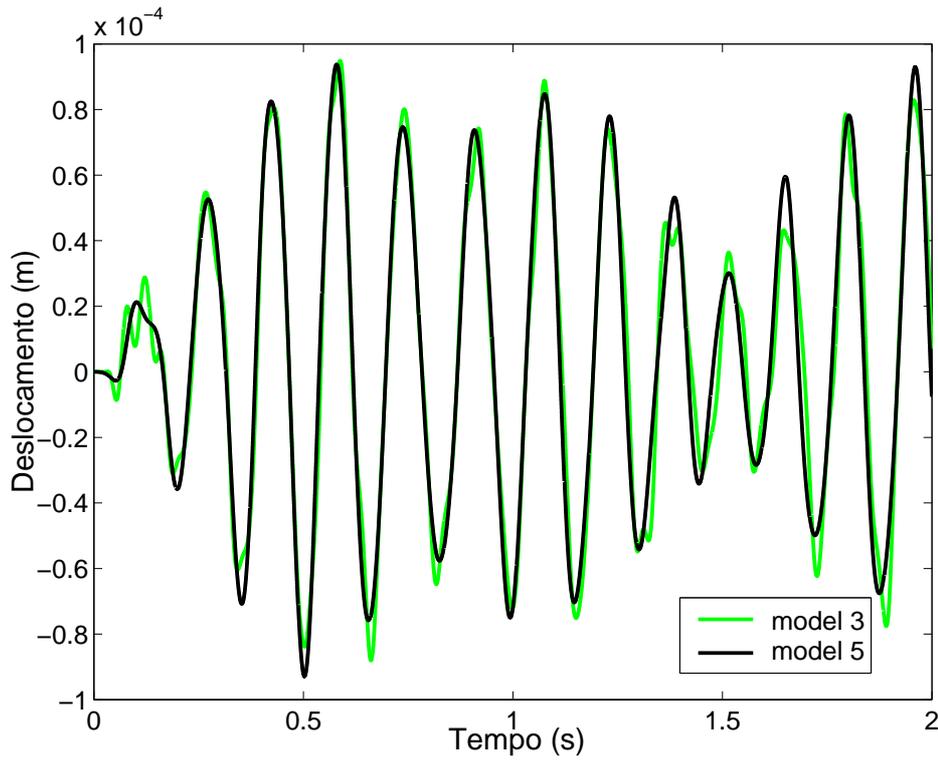


Figura 7.47: Deslocamento no primeiro dormente imediatamente abaixo do trilho, modelos 3 e 5 para $n = 2$.

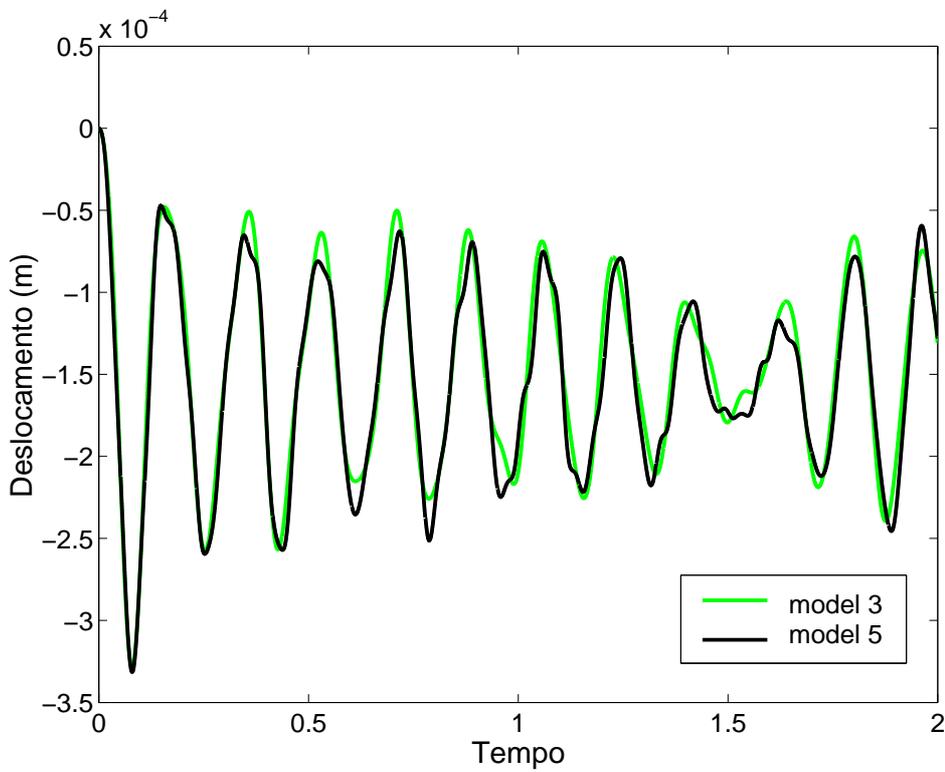


Figura 7.48: Deslocamento no quinto dormente imediatamente abaixo do trilho, modelos 3 e 5 para $n = 2$.

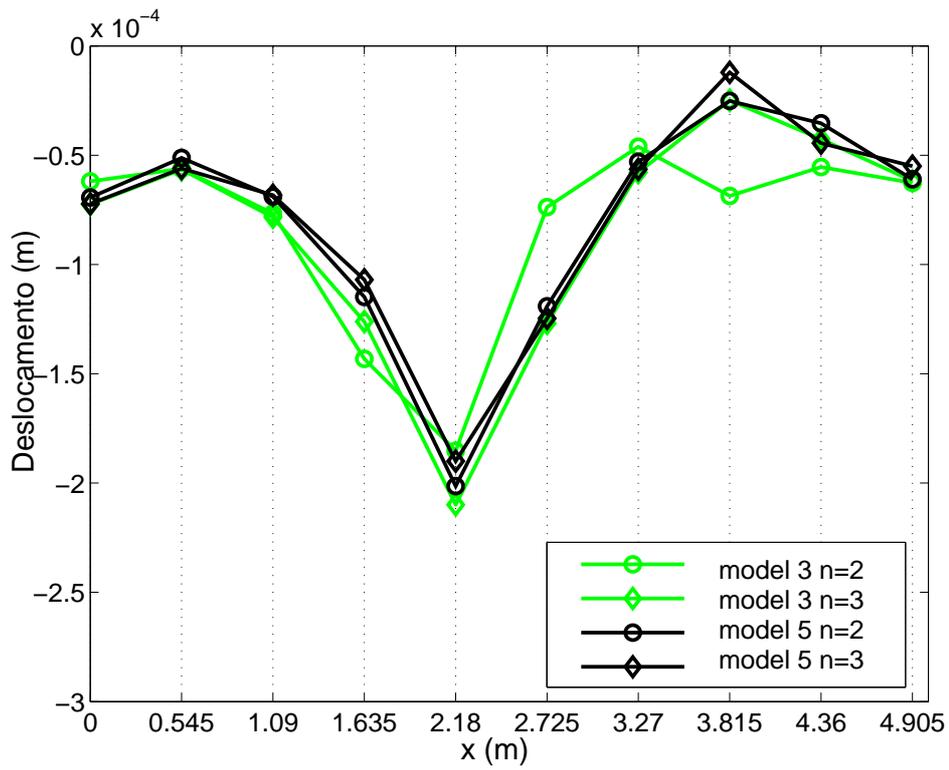


Figura 7.49: Comparação dos deslocamentos nodais obtidos nos dormentes, imediatamente abaixo do trilho, modelos 3 e 5.

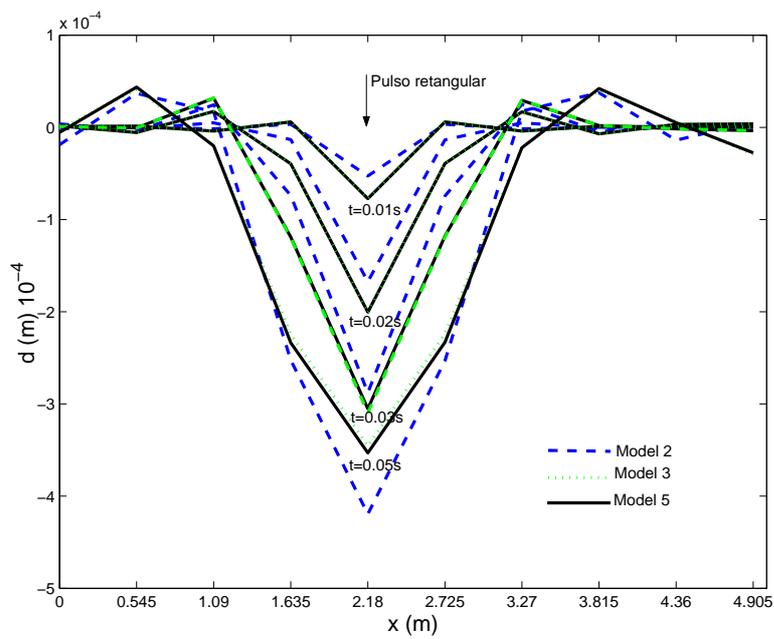


Figura 7.50: Deslocamentos nodais dos trilhos obtidos variando t e fixando $n = 1$.

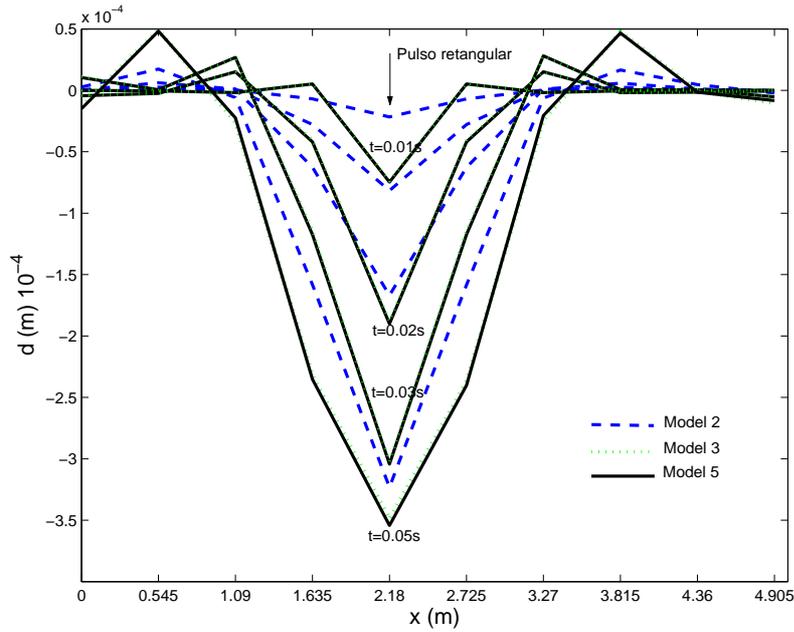


Figura 7.51: Deslocamentos nodais dos trilhos obtidos variando t e fixando $n = 3$.

Para o pulso retangular, (7-1), nas figuras (7.50) e (7.51) são plotados os deslocamentos nodais do trilho, englobando todos os modelos e fixando $n = 1$ e $n = 3$, respectivamente. O modelo 2 apresenta a maior dispersão de resultados, comparada aos modelos 3 e 5. Pode-se observar que os resultados obtidos nos modelos 3 e 5 são praticamente idênticos, principalmente para $n = 3$.

7.6 Trecho de ferrovia com 20 dormentes

Utiliza-se o modelo 7, figura (7.52), para simular um trecho de ferrovia constituída por 20 dormentes. Como solicitação aplica-se uma carga súbita de intensidade igual a $P_0 = 1MN$ no grau de liberdade 64 de cima para baixo.

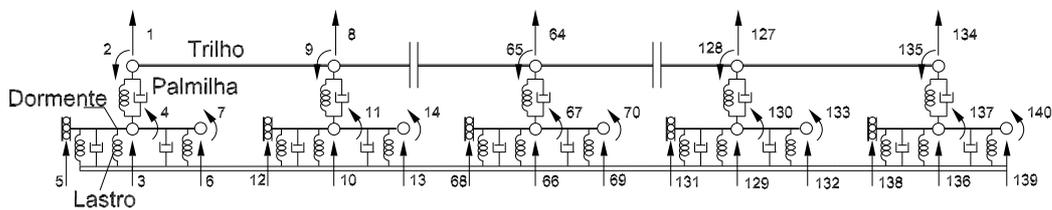


Figura 7.52: Distribuição dos graus de liberdade nodais no trecho simulado

Na figura (7.53) são plotadas as 140 frequências do problema em ordem crescente. Devido a simetria do problema, verifica-se a presença de zonas onde os valores das frequências são próximas (trecho horizontal do gráfico).

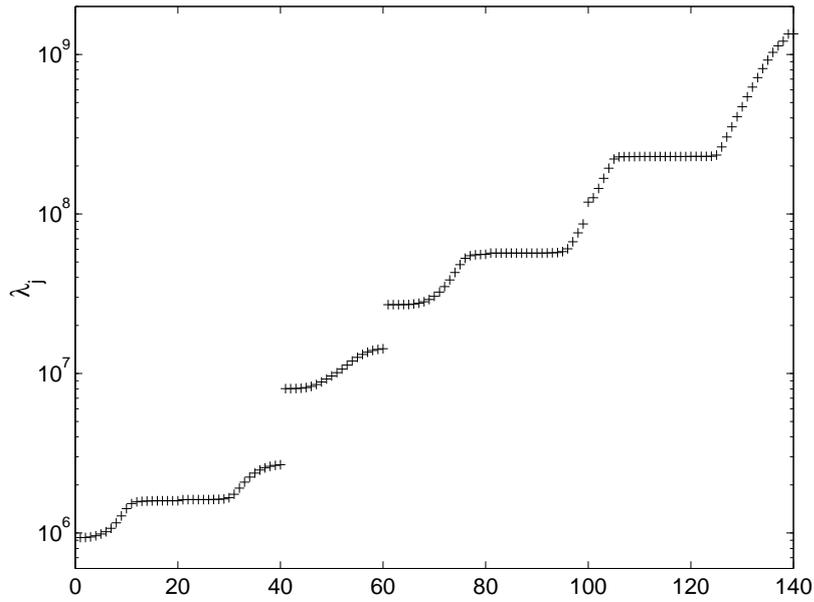


Figura 7.53: Freqüências (ao quadrado) em ordem crescente

Na figura (7.54), são plotados os modos de vibração $\phi_1, \phi_2, \phi_{84}, \phi_{85}, \phi_{94}$ e ϕ_{95} da estrutura. Observa-se que os modos ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_{94} são simétricos e que os modos ϕ_{84}, ϕ_{85} e ϕ_{95} são anti-simétricos.

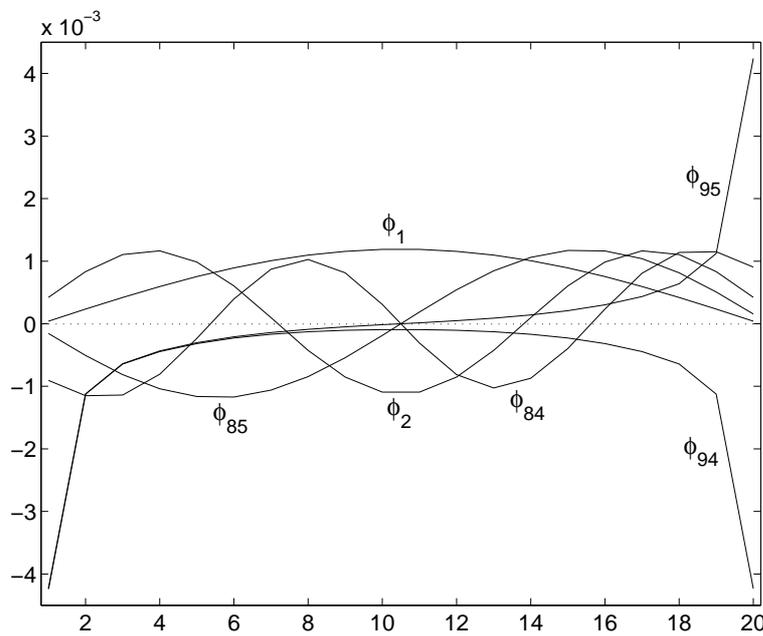


Figura 7.54: Modos de vibração ao longo dos dormentes ($\times 10^{-3}m$)

A resposta transiente dos graus de liberdade 64 e 1 são mostradas nas figuras (7.55) e (7.56).

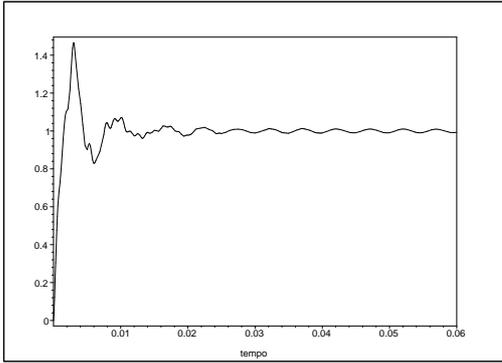


Figura 7.55: Amplificação no grau de liberdade # 64, para $n = 2$.

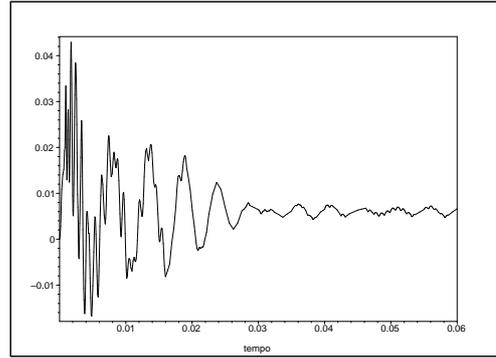


Figura 7.56: Amplificação no grau de liberdade # 1, para $n = 2$.

Percebe-se que a amplificação obtida no grau de liberdade 64 é de 1,5 vezes o valor do deslocamento estático ($d_0 = 3,61 \cdot 10^{-3}m$) nesse mesmo nó. No grau de liberdade 1, a amplificação em relação ao nó central é bem reduzida ($0,045d_0$).

8

Conclusão

8.1

Sobre o método de formulação dos elementos finitos desenvolvidos em séries de frequência.

O método híbrido de elementos finitos utilizado na formulação dos elementos unidimensionais de viga e treliça, permite o tratamento de problemas dependente do tempo no contexto do domínio da frequência para quaisquer condições de contorno.

O desenvolvimento em série das matrizes fornece resultados próximos da solução analítica, como verifica-se na figura (4.5), comparada a teoria clássica que utiliza apenas uma matriz de rigidez, massa e amortecimento. A utilização de técnicas avançadas de superposição modal permite a conversão de problemas no domínio da frequência para o domínio do tempo, como alternativa ao uso de transformadas.

Embora não implementada neste trabalho, a análise modal permite a consideração de condições iniciais não homogêneas e de carregamentos gerais, inclusive cargas móveis.

Na modelagem dos elementos, uma desvantagem é o tempo de processamento dos dados quando utilizamos termos de alta ordem na série de frequências. Isso pode ser contornado em problemas nos quais os elementos são iguais, e assim necessitam apenas que se calculem as matrizes para um único elemento, para então repeti-las nos demais elementos.

8.2

Quanto ao modelo de interação

O modelo de interação de dinâmica desenvolvido neste trabalho, embora acadêmico e sem base experimental, mostrou-se adequado para uma análise de efeitos dinâmicos provenientes de solicitações súbitas e forças de curta duração.

Uma contribuição preliminar do trabalho diz respeito ao desenvolvimento de soluções particulares em uma viga de Timoshenko para o caso de solicitações na forma de forças impulsivas e cargas móveis.

Neste trabalho, também foi implementada e testada uma técnica de condensação dinâmica dos graus de liberdade internos em vários níveis de condensação. Os modelos resultantes do processo de condensação em geral apresentaram resultados satisfatórios, tanto para uma carga súbita quanto para uma ação de curta duração. Entretanto, comparando-se os modelos deve-se destacar que:

- O modelo 5, resultante do primeiro nível de condensação, apresenta resultados muito próximos aos obtidos modelo 7 (modelo onde não houve condensação).
- O modelo 3, resultante do segundo nível de condensação, apresenta resultados próximos aos modelos 5 e 7. Observa-se que houve correspondência, tanto em termos de deslocamentos nodais ao longo do tempo, como das frequências de vibração, principalmente para $n=3$.
- O modelo 2 (com um número menor de graus de liberdade resultante do terceiro nível de condensação) apresenta a maior diferença de resultados comparado ao modelo 7. Porém tomando-se como parâmetro de comparação as frequências de vibração do modelo, nota-se que para uma expansão com um número maior de matrizes, os resultados se aproximam do obtidos nos modelos 3, 5 e 7, figura(5.12), comprovando a convergência do modelo.

8.3

Sugestões para trabalhos futuros

Como sugestões para trabalhos futuros em continuação ao que foi desenvolvido neste trabalho, apresentam-se:

- A realização de medições experimentais, ao longo de uma ferrovia, para a obtenção dos parâmetros físicos do lastro e demais componentes, além da medição in loco de deslocamentos e acelerações.
- A utilização de modelos bi e tridimensionais na modelagem dos elementos constituintes da via férrea, principalmente o lastro e o dormente.
- O cálculo de deslocamentos e acelerações em pontos internos dos elementos considerando o efeito de uma massa móvel.

Referências Bibliográficas

- [ADAMS] ADAMS. **The Specialized Virtual Prototyping Environment for Railcar Engineering**. California. 2.3
- [Andersen-2003] ANDERSEN, L.; NIELSEN, S.. **Vibrations of a track caused by variation of the foundation stiffness**. p. 171–184, Aalborg, Denmark, 2003. 2.3
- [Anuario] DELFT, T.. **Annual Reports**. Holanda, 1996-2001. (document), 2.3, 2.7
- [CORUS] RAIL, C.. **The Track Handbook**. California. (document), 5.10
- [Celebi-1998] CELEBI, E.; KUTANIS, M. ; FIRAT, S.. **Application of Numerical Methods for Analysis of Propagation of Vibrations generated by Moving Load**. Germany., 1998. 2.3
- [Chaves-2003] CHAVES, R. A. P.. **O método híbrido simplificado dos elementos de contorno aplicado a problemas dependentes do tempo**. 182 f. Tese de Doutorado - Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003. 3.3
- [DNIT] Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes, Brasília, Brazil. **Ferrovias Brasileiras**. 2.1
- [Degrande-2001] DEGRANDE, G.; SCHILLEMANS, L.. **Free field vibrations during the passage of a high speed train**. p. 131–144, Lewven, Belgium., 2001. 2.3
- [Dumont-1987] DUMONT, N. A.. **The hybrid boundary element method**. In: BREBBIA, C.A.; WENDLAND, W.; KUHN, G, editor, **BOUNDARY ELEMENTS IX**, v. 1, **Mathematical and Computational Aspects**, p. 125–138, Southampton, 1987. Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag. 3.3

- [Dumont-2001] DUMONT, N. A.; OLIVEIRA, R.. **From frequency-dependent mass and stiffness matrices to the dynamic response of elastic systems.** *Int. J. Sol. Struct.*, p. 1813–1830, 2001. 2.6, 3.6
- [Dumont-2003] DUMONT, N. A.; CHAVES, R. A. P.. **General time-dependent analysis with the frequency-domain hybrid boundary element method.** *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, n. 10, p. 431-452 2003. 1, 1.1, 2.6, 3.3, 3.4, 3.6, 4.2.2
- [Dumont-1997] DUMONT, N. A.; OLIVEIRA, R.. **The exact dynamic formulation of the hybrid boundary element method.** In: *Procs. XVIII CILAMCE-XVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, p. 357–364, 2003. 2.6
- [Dumont-2005] DUMONT, N. A.. **An advanced mode superposition technique for the general analysis of time dependent problems.** In: *ADVANCES IN BOUNDARY ELEMENT TECHNIQUES VI*, p. 333–344, England, 26-24 maio 2005. 3.6, 4.3
- [Dumont-2006] DUMONT, N. A.. **On the solution of generalized non-linear complex-symmetric eigenvalue problems.** *International Journal for Numeric Methods in Engineering*, May 2006. 2.6, 3.5
- [Dumont-2006-2] DUMONT, N. A.; OLIVEIRA, A. C.. **A dynamic interaction model of railway track structural elements.** In: *IN: PROCS. CILAMCE-2006 IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING*, p. 15 pp on CD, Belém, Brazil, 3-6 Setembro 2006. 3.1, 3.3, 3.7
- [Dumont-2006-1] DUMONT, N. A.. **On the inverse of generalized λ -matrices with singular leading term.** *International Journal for Numeric Methods in Engineering*, p. 66:571–603, 2006. 3.4, 3.7, A
- [Esveld-1997] ESVELD, C.. **Innovations in Railway Track.** Netherlands, 1997. 2.3
- [Esveld-1998] ESVELD, C.; KOK, A. W. M. ; MAN, A. P.. **Integrated numerical and experimental research of railway track structures.** *Fourth International Workshop on Design Theories and their Verification of Concrete Slabs for Pavements and Railroads*, 10-12 September 1998. (document), 2.4, 2.4.3, 2.10

- [Esveld-1998-2] ESVELD, C.; KOK, A. W. M.. **Interaction between moving vehicles and railway track at high speed**. TU Delft, 10-12 September 1998. 1.1, 2.4.3
- [Esveld-2001] ESVELD, C.. **Modern Railway Track**. MRT-Productions, Netherlands, 2001. 2, 2.2.7
- [Esveld-2002] ESVELD, C.; MAN, A. D.. **Use of railway track vibration behaviour for design and maintenance**. TU Delft, 2002. 2.3, 2.3
- [Graff-1975] GRAFF, K. F.. **Wave motion in elastic solids**. Clarendon Press, Oxford, 1975. 2.5
- [Gupta-1975] GUPTA, K. K.. **On a finite element method for free vibration analysis of structure**. p. 105–120, 1975. 2.6
- [Gupta-1976] GUPTA, K. K.. **Development of a finite dynamic element for free vibration analysis of two-dimensional structure**. p. 1311–1327, 1976. 2.6
- [Gupta-1978] GUPTA, K. K.. **Finite dynamic element formulation for a plane triangular element**. p. 1431–1448, 1978. 2.6
- [Gupta-1984] GUPTA, K. K.; ASCE, M.. **Frequency-dependent matrices for tapered beams**. volumen 112, 1984. 2.6
- [Heelis-1999] HEELIS, M.; CHAPMAN, D. ; KRYLOV, V.. **Predicting and measuring vertical track displacements on soft subgrades**. Railway Engineering, 1999. 2.3
- [Kekesi-1998] KEKESI, L.; KAZINCZY, L.. **Dynamical measurements on the ballast railway track**. Symposium in Civil Engineering, 1998. 2.3
- [Kolusek-1973] KOLUSEK, V.. **Dynamics in Engineering Structural**. Butterworths, 1973. 2.5
- [Krylov-2000] V. V. KRYLOV, A. R. DAWSON.2, M. E. H.; COLLOP, A. C.. **Rail movement and ground waves caused by high speed trains approaching track soil critical velocities**. volumen 214 Part F, 2000. 2.3
- [Lichtberger-2001] LICHTBERGER, B.. **Track maintenance strategies for ballasted track - a selection**. Netherlands, 2001. 2.3

- [Martin-2003] MARTIN, X. D.; TORBJÖRN, E. ; WIBERG, N. E.. **An integrated vehicle-track-ground model for investigating the wheel-rail dynamics forces due to high axle loads.** 6th International on Contact mechanics and Wear of Rail Wheel Systems (CM2003), 10-13 junho 2003. (document), 1.1, 2.3, 2.3, 2.4, 2.4.2, 2.9, 2.4.2, 2.4.2
- [Niakas-2001] NIAKAS, T. N.; PAPADOPOULOS, C. A.. **Parametric study of the response of a rail track.** First Nat. Conf. on Recent Advances in Mech. Eng., 17-20 September 2001. (document), 1.1, 2.3, 2.4, 2.4.1, 2.8, 2.4.1
- [Nilsen-1995] NIELSEN, J. C. O.; IGELAND, A.. **Vertical dynamic interaction between train and track influence of wheel and track imperfections.** Journal of Sound and Vibration, p. 714–728, 1995. 2.3
- [Paz-1975] PAZ, M.; DUNG, L.. **Power series expansion of the general stiffness matrix for beam elements.** p. 449–459, 1975. 2.6
- [Prazeres-2005] PRAZERES, P. G. C.. **Desenvolvimento de elementos finitos híbridos para a análise de problemas dinâmicos usando superposição modal avançada.** 172 f. Dissertação de Mestrado - Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005. 3.3
- [Przemieniecki-1968] PRZEMIENIECKI, J. S.. **Theory of Matrix Structural Analysis.** Dover Publications, New York, 1968. 2.6, 3.4
- [Rail-One] RAIL ONE GmbH Pfleiderer track systems, Neumarkt, Germany. **Railway Technology.** (document), 2.4, 2.2.6
- [Railway-2004] KERR, A. D.. **Fundamentals of Railway Track Engineering.** Simmons Boardman Books, Universidade de Delaware, EUA, 2004. (document), 2.2, 2.3, 2.4, 2.2.6
- [Telliskivi-2001] T. TELLISKIVI, ULF. OLOFSSON, U. S.; KRUSE, P.. **A tool and a method for fe analysis of wheel and rail interaction.** Stockholm, Sweden, 2001. 2.3
- [Verichev-1998] VERICHEV, S. N.; METRIKINE, A. V.. **Dynamic rigidity of a beam in a moving contact.** volumen 41, p. 1111–1117, 2000. 2.3
- [Vicent-2001] VICENT, G.. **Modal analysis and numerical modeling of a concrete railway sleeper.** 130 f. MastersThesis - Division of

Structural Engineering at Chalmers, Chalmers University of Technology, Gothenburg, 2001. 2.3

[Voss-1987] VOSS, H. A.. **A new justification of finite dynamic element methods.** volumen 83, p. 232–242, 1987. 2.6

[Vostroukhov-2003] VOSTROUKHOV, A. V.; METRIKINE, A. V.. **Periodically supported beam on a visco-elastic layer as a model for dynamic analysis of a high-speed railway track.** p. 572585, 2003. 2.3

[Warburton-1976] WARBURTON, G. B.. **The Dynamical Behaviour of Structures.** Pergamon Press, Oxford, 1976. 2.5

[Wu-2002] WU, T. X.; THOMPSON, D. J.. **Wheel/rail interaction with coupling between vertical and lateral directions.** August 2002. 2.3

[Zhai-1997] ZHAI, W. M.; CAI, Z.. **Dynamic interaction between a lumped mass vehicle and discretely supported continuous rail track.** p. 987–997, 1997. 2.3

[Zhai-2003] ZHAI, W. M.; WANG, K. Y. ; LIN, J. H.. **Modelling and experiment of railwayballast vibrations.** p. 673–683, 2003. (document), 5.6, 5.1, 5.2, 5.3, 5.6

A

Procedimento de transferência de dados entre Maple, Fortran e Matlab

A implementação computacional dos elementos unidimensionais de viga e treliça utilizados na modelagem de uma via férrea foi feita utilizando o software Maple. Para cada elemento, as matrizes de rigidez, massa e amortecimento foram obtidas utilizando-se de um desenvolvimento em série em função de uma frequência circular de vibração ω . Como resultado deste desenvolvimento, chega-se a um problema de autovalor não-linear. O problema é solucionado por um método iterativo de sub-espço denominando Jacobi-Davidson . Utilizando-se desses conceitos, (Dumont-2006-1) desenvolveu uma rotina em fortran para solução geral de problemas de autovalor não-linear. Entretanto, como as matrizes foram desenvolvidas em Maple, houve a necessidade de criar um procedimento de interação entre Maple e fortran, onde os dados de entrada são fornecidos pelo Maple e os autovalores e autovetores são calculados pela rotina NL_eigen_complex em fortran.

A seguir, é apresentado o procedimento utilizado para obtenção dos autovalores e autovetores, fazendo-se uso da rotina NL_eigen_complex (Dumont-2006-1).

Procedimento para entrada de dados

Entrada de dados

net *Dimensão das matrizes*
nw *Número de matrizes de massa*
nn *Número de linhas da matriz*
num_inter *Número limite de interações*

Gravando as matrizes

- [1] arq1:=‘ K.txt ‘: *Nomeando o arquivo txt*
- [2] fd1:=fopen(arq1,WRITE,TEXT): *Declara a função do arquivo txt*
- [3] fprintf(arq1,‘ %q \n’,‘exemplo com elementos de Ferrovia’): *Gravando o título do arquivo txt*
- [4] fprintf(arq1,‘ %g %g %g \n ‘ , net, nw, num_ iter): *Gravando, respectiva-*

mente, a dimensão , o número de matrizes e o limite de interações no arquivo *txt*

[5] *Início do Loop para armazenamento das matrizes*

[5.1] **for** *inw* **from** 0 **to** *nw* **do** *Percorrendo o número de matrizes*

[5.2] **for** *i* **to** *net* **do** *Percorrendo o número de linhas*

[5.3] **for** *j* **to** *net* **do** *Percorrendo o número de colunas*

[5.4] **fprintf**(*arq1*, '%.16E \t ', *Kest_{inw(i,j)}*): *Gravando as matrizes no arquivo arq1.txt*

[5.5] **od**: *Fim do loop [5.1]*

[5.6] **fprintf**(*arq1*, '\n '): *Imprime as matrizes em arq1.txt*

[5.7] **od**: **od**: *Fim dos loops [5.2] e [5.3]*

[6] **fclose**(*arq1*): *Fecha o arquivo arq1.txt*

[7] **system**(*NL_ eigen_ complex*): *Chama a rotina em fortran que determina os autovalores e autovetores do problema*

[8] *npal* *Número de palavras no título (exemplo: Teste com elementos de Ferrovia = 5 palavras)*

Procedimento para saída de dados

Lendo Autovalores Reais

[9] *arq:= 'Omega_ phi.txt ' : Nomeia o arquivo de saída dos autovalores*

[10] *fd:=fopen(arq,READ,TEXT): Abre o arquivo de saída dos autovalores*

[11] *titulo:=vector(npal,0): Cria um vetor para armazenar o título*

[12] **for** *i* **to** *npal* **do** *Loop para armazenar o título*

[12.1] *titulo_i:=fscanf(fd, '%s ')[1]: Leitura do título*

[12.2] **od**: *Fim do loop [12]*

[12.3] **print**(*titulo*): *Imprime na tela o título*

[13] *nauto:=fscanf(fd, '%d ')[1]: Leitura do número de autovalores*

[14] *n:=fscanf(fd, '%d ')[1]: Leitura do número de matrizes de massa*

[15] *num_iter:=fscanf(fd, '%d ')[1]: Leitura do número limite de interações*

[16] *ω:=vector(nauto, 0): Cria um vetor nulo para armazenar os autovalores*

[16.1] **for** *i* **to** *nauto* **do** *Loop para armazenar os autovetores*

[16.2] *ω_i:=fscanf(fd, '%f ')[1]: Leitura dos autovalores*

[16.3] **od**: *Fim do loop [16.1]*

[16.4] **print**(*ω*): *Imprime na tela os autovalores*

[17] *Φ:=matrix(nauto, nn, 0): Cria uma matriz nula para armazenar os autovetores*

[17.1] **for** *i* **to** *nauto* **do** *Loop para leitura do número de autovalores*

[17.2] **for** *j* **to** *nn* **do** *Loop para leitura do número de colunas*

- [17.3] $\Phi_{i,j} := \text{fscanf}(\text{fd}, \%f \%)[1]$; *Leitura dos autovetores*
- [17.4] **od**; *Fim do loop* [17.1]
- [17.5] **od**; *Fim do loop* [17.2]
- [17.6] **print**(Φ); *Imprime na tela os autovetores*
- [18] **fclose**(arq); *Fecha o arquivo arq.txt*

Lendo Autovalores Complexos

- [19] arqc := 'Complex_omega_phi.txt'; *Nomeia o arquivo de saída dos autovalores*
- [20] fc := **fopen**(arqc, READ, TEXT); *Abre o arquivo de saída dos autovalores*
- [21] cauto := **fscanf**(fc, \%d \%)[1]; *Leitura do número de autovalores*
- [22] n := **fscanf**(fd, \%d \%)[1]; *Leitura do número de matrizes de massa*
- [23] num.iter := **fscanf**(fd, \%d \%)[1]; *Leitura do número limite de interações*
- [24] $\omega := \text{vector}(\text{cauto}, 0)$; *Cria um vetor nulo para armazenar os autovalores*
- [24.1] **for** i **to** cauto **do** *Loop para armazenar os autovalores*
- [24.2] $\omega_i := \text{fscanf}(\text{fc}, \%a \%)[1]$; *Leitura dos autovalores*
- [24.3] **od**; *Fim do loop* [16.1]
- [24.4] **print**(ω); *Imprime na tela os autovalores*
- [25] $\Phi := \text{matrix}(\text{cauto}, nn, 0)$; *Cria uma matriz nula para armazenar os autovetores*
- [25.1] **for** i **to** cauto **do** *Loop para leitura do número de autovalores*
- [25.2] **for** j **to** nn **do** *Loop para leitura do número de colunas*
- [25.3] $\Phi_{i,j} := \text{fscanf}(\text{fd}, \%a \%)[1]$; *Leitura dos autovetores*
- [25.4] **od**; *Fim do loop* [25.1]
- [25.5] **od**; *Fim do loop* [25.2]
- [25.6] **print**(Φ); *Imprime na tela os autovetores*
- [26] **fclose**(arqc); *Fecha o arquivo arqc.txt*

Colocando os autovalores na forma $a + bi$

- [27] $\Omega := \text{vector}(\text{cauto}, 0)$; *Cria um vetor nulo Ω*
- [27.1] **for** j **to** cauto **do** *Início do Loop*
- [27.2] $\Omega_j := (\omega_j)_{[1]} + (\omega_j)_{[2]} * I$; *Coloca os autovalores na forma $a + bi$*
- [27.3] **od**; *Fim do Loop*
- [27.4] **print**(Ω) *Imprime na tela os autovalores na forma $a+bi$*
- [28] $\phi := \text{matrix}(\text{cauto}, nn, 0)$; *Cria uma matriz nula ϕ*
- [28.1] **for** i **to** cauto **do** *Loop para leitura do número de autovalores*
- [28.2] **for** j **to** nn **do** *Loop para leitura do número de colunas*
- [28.3] $\phi_{i,j} := (\Phi_{i,j})_{[1]} + (\Phi_{i,j})_{[2]} * I$; *Coloca os autovetores na forma $a+bi$*
- [28.4] **od**; *Fim do Loop* [28.1]

[28.5] **od:** *Fim do Loop* [28.2]

[28.6] **print**(ϕ) *Imprime na tela os autovetores na forma $a+bi$*

Exemplo

Considere uma estrutura com 8 graus de liberdade com rigidez, massa e amortecimento conhecidos e geometria definida. Assim pode-se modelar seu comportamento dinâmico tendo em vista a equação, para $n = 2$

$$(K_0 - i\omega C_1 - \omega^2 M_1 - i\omega^3 C_2 - \omega^4 M_2) \phi = 0 \quad (\text{A-1})$$

onde K , M e C são, respectivamente, as matrizes de rigidez, massa e amortecimento e ϕ é uma matriz cujas colunas são os autovetores do problema.

Utilizando a norma de Frobenius, podemos representar a ordem de grandeza das matrizes em série por um número, assim

$$(1,6507 \cdot 10^9 - 1,2045 \cdot 10^5 i\omega - 2,0990 \cdot 10^2 \omega^2 - 1,7331 \cdot 10^{-2} i\omega^3 - 4,9878 \cdot 10^{-5} \omega^4) \phi = 0 \quad (\text{A-2})$$

Fornecendo os dados de entrada no Maple,

$$net := 8, \quad nw := 4, \quad nn := 8, \quad e \quad num_iter := 100 \quad (\text{A-3})$$

a rotina `NL_eigen_complex` calcula e fornece inicialmente os autovalores (A-4) e autovetores reais

1	$0,1026 \cdot 10^7$	5	$0,9329 \cdot 10^8$
2	$0,1097 \cdot 10^7$	6	$0,1368 \cdot 10^9$
3	$0,1639 \cdot 10^7$	7	$0,3322 \cdot 10^9$
4	$0,3954 \cdot 10^7$	8	$0,1246 \cdot 10^{10}$

(A-4)

e em seguida os autovalores (A-5) e autovetores complexos.

1	(994,0559; -210.3218)	5	(9659,1417; -0.3341)
2	(1027,6393; -223.6788)	6	(11698,6081; -1,0153)
3	(1265,7678; -203.5979)	7	(18226,4981; -0.6475)
4	(1981,5970; -155.0148)	8	(35302,1539; -0.0049)

(A-5)

Por fim, esses autovalores (A-6) e seus correspondentes autovetores são colocados na forma $a + bi$

1	$(994, 0559 - 210, 3218i)$	5	$(9659, 1417 - 0, 3341i)$	(A-6)
2	$(1027, 6393 - 223, 6788i)$	6	$(11698, 6081 - 1, 0153i)$	
3	$(1265, 7678 - 203, 5979i)$	7	$(18226, 4981 - 0, 6475i)$	
4	$(1981, 5970 - 155, 0148i)$	8	$(35302, 1539 - 0, 0049i)$	

Para a plotagem de pontos (x, y) gerados no Maple em Matlab, podemos utilizar o seguinte esquema:

Armazenamento dos pontos gerados no Maple em um arquivo txt

[1] **retart with**(plots): *Reinicializando o Maple e chamando o pacote de plot*

[2] $x := \mathbf{vector}([\mathbf{seq}(f(i), i = 1..np)])$: *Criando um vetor de coordenadas x*

[3] np : *Número de pontos*

[4] **system**(delall): *Limpendo informações anteriores*

[5] $\text{pontos} := \text{'pontos.txt'}$: *Nomeando o arquivo de coordenadas*

[6] $y := \mathbf{vector}(np, 0)$: *Criando um vetor nulo de coordenadas y*

[7] **for** j **to** np **do** *Loop para geração dos pontos*

[7.1] $y_j = f(x_j)$: *Relação entre as coordenadas*

[7.2] **fprintf**(pontos, '%.16E \t', x_j): *Escreve a coordenada x_j em pontos.txt*

[7.3] **fprintf**(pontos, '%.16E \t', y_j): *Escreve a coordenada y_j em pontos.txt*

[7.4] **fprintf**(pontos, '\n'): *Distribui as coordenadas em coluna*

[7.5] **od**: *Fim do Loop*

[7.6] **print**(x, y): *Imprime as coordenadas*

[8] **fclose**(pontos) *Fecha o arquivo pontos.txt*

Leitura dos pontos no Matlab e plotagem do gráfico

[9] **load** pontos.txt *Carrega o arquivo txt de coordenadas*

[10] $x = \text{pontos}(:, 1)$; *Lê a primeira coluna de dados*

[11] $y = \text{pontos}(:, 2)$; *Lê a segunda coluna de dados*

[12] **plot**(x, y); *Gera o gráfico (x_i, y_i) no Matlab*

Como ilustração, são plotados na figura (A.1) os autovalores e seus respectivos conjugados no plano real e imaginário, utilizando os pontos gerados no Maple e plotados no Matlab.

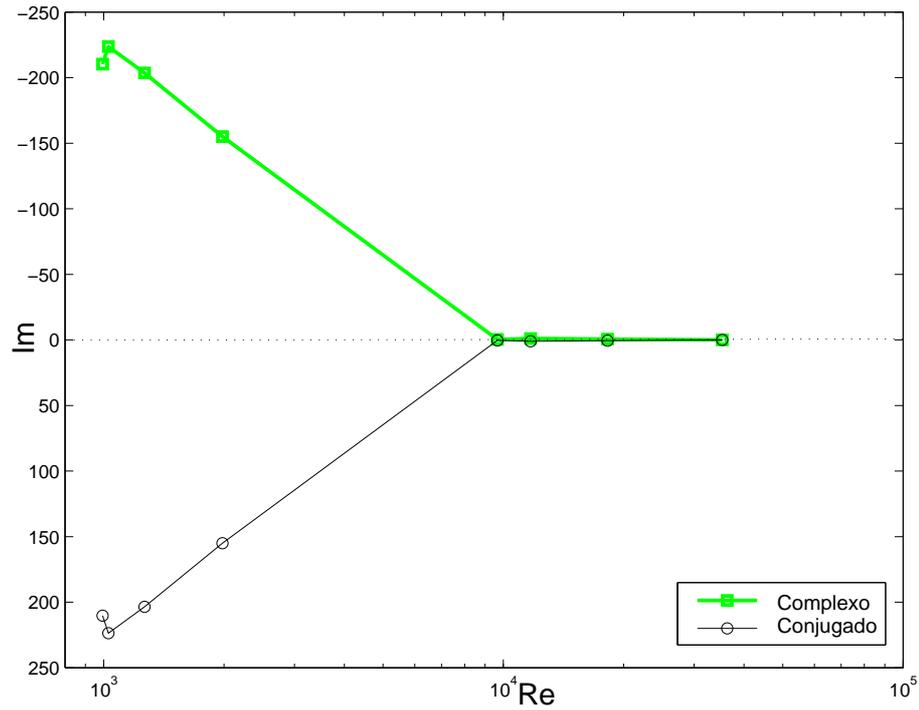


Figura A.1: Distribuição dos autovalores no plano real e imaginário

A justificativa para utilização do Matlab para geração de gráficos está vinculada a qualidade que este programa proporciona, principalmente quando requer-se figuras nos formatos ps e eps, utilizadas em ambiente Latex.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)