UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

UM TRATAMENTO PARA OS NÚMEROS REAIS VIA MEDIÇÃO DE SEGMENTOS: UMA PROPOSTA, UMA INVESTIGAÇÃO

Regina Célia Guapo Pasquini

Orientador: Profa. Dra. Rosa Lúcia Sverzut Baroni

Tese de Doutorado elaborada junto ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática - Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos e Científicos para obtenção do Título de Doutor em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)

2007

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

UM TRATAMENTO PARA OS NÚMEROS REAIS VIA MEDIÇÃO DE SEGMENTOS: UMA PROPOSTA, UMA INVESTIGAÇÃO

Regina Célia Guapo Pasquini

Orientador: Profa. Dra. Rosa Lúcia Sverzut Baroni

Tese de Doutorado elaborada junto ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática - Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos e Científicos para obtenção do Título de Doutor em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)

2007

BANCA EXAMINADORA

_____

_____

_____

_____

_____

_____

aluna

Rio Claro, _____ de _____de 2007

Resultado: _____

D E D I C A T Ó R I A

Aos meus filhos
J o ã o G a b r i e l
J o ã o L u c a s
J o ã o F e l i p e
Meu tesouro precioso

Aos meus pais
J a n i r a e D e o r a n de
Minha inspiração

Ao meu esposo
J o s é A l m i r
Que guardou seus sonhos para que eu sonhasse
Que perdeu noites de sono para que eu dormisse tranqüila
Que sempre confiou em mim, apesar dos meus erros e conflitos.
Nunca se esqueça. . .
Você mora no meu coração.

A G R A D E C I M E N T O S

A Deus pelo sustento e pela minha vida.

Ao meu amado esposo, José Almir, companheiro de sempre
aos meus filhos João Gabriel, João Lucas e João Felipe
pelo entendimento e pela sensibilidade ao perceberem a importância deste trabalho
acadêmico para mim e por constituírem a minha Família.

A minha orientadora, a Profa. Dra. Rosa Lúcia Sverzut Baroni, pela orientação segura,
pela confiança, pela amizade, pela compreensão, pela bondade e pela sinceridade
que só que tem o prazer de conviver com ela é capaz de conhecer.

Aos autores do Material
pelas discussões, contribuições e pela possibilidade de realização desta pesquisa.

A Banca de Qualificação
que gentilmente aceitou o convite e
pelas contribuições que certamente enriqueram este trabalho.

A todos os Professores, sujeitos desta pesquisa,
pela colaboração e confiança nesta investigação.

Aos meus primeiros e eternos professores, meus pais, Janira e Deorande
pelo amor, pelo apoio constante, pela educação que me deram, que para mim, vale mais
que ouro.

Aos meus quatro irmãos, minha irmã e suas respectivas famílias (minhas também),
que acreditaram em mim, pelo incentivo e pelo apoio.

A minha Tia Maria que docemente cuidou do João Gabriel
pra que eu pudesse continuar esta caminhada.

Aos integrantes do Grupo de História da Matemática de Rio Claro,
Prof. Dr. Sérgio R. Nobre e Prof. Marcos V. Teixeira e colegas
pela oportunidade de convivência e amadurecimento.

A Luciana, Romélia e em especial, à Tânia
pela amizade, pelas contribuições e pelas sugestões de trabalho
e de vida.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina
pela oportunidade de realização deste trabalho a partir da licença concedida.

Aos colegas do Programa
que vieram, fizeram parte da minha vida nestes anos,
deixaram saudades dos bons momentos que passamos juntos.

À Sandra pelas longas conversas
pelo apoio e pela acolhida.

Às Professoras do Grupo de Educação Matemática, em especial,
Márcia Cyrino,Regina Buriasco e Magna Marin
pelo incentivo que me deram para que eu pudesse chegar aqui e
pelas contribuições tão bem vindas.

Às minhas avós Antonia e Darcília
As minhas avós de coração
Ana e Otília
pelas orações e pela torcida e pela confiança.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
de Rio Claro pelas contribuições na minha formação.

Aos todos os meus professores
que de alguma forma acreditaram que os meus esforços pudessem render frutos.

Aos médicos Dra. Lílian C. Vaccari e Dr. Maurílio de Oliveira e Dra. Regina Coimbra
pela atenção, pelo carinho dedicado a mim e a meus filhos durante alguns tropeços desta
caminhada e por ajudarem meu filho João Gabriel fazer parte de nossas vidas.

R E S U M O

Entendendo o Material “Um tratamento, via medição para os números reais” como uma alternativa para abordar os números reais em cursos de formação de professores, buscou-se as possibilidades que o mesmo poderia apresentar ao introduzir os números reais a partir de um processo de medição de segmentos. Esta investigação foi realizada a partir do acompanhamento da utilização do Material numa sala de aula, cujos alunos eram professores de Matemática. A análise foi conduzida em dois momentos. Um deles denominado Apresentação/Comentário, que situou os dados do Diário de Campo ao centro, e, o outro, que traz essas possibilidades da análise de Entrevistas. A literatura mostra que a forma como o conjunto dos números reais tem sido apresentada aos futuros professores furta a oportunidade de que noções e conceitos inerentes ao mesmo sejam discutidos. Introduzir os números reais via medição, oportuniza que noções e conceitos intrínsecos ao número real possam ser explorados, em particular, conceitos básicos da Análise, como convergência, continuidade, completude, etc., e mesmo que indiretamente àqueles relacionados a outros campos da Matemática como a Álgebra, a Geometria e a História da Matemática.

Palavras chaves: Educação Matemática, Números Reais, Formação de Professores.

A B S T R A C T

Understanding the Material “A treatment, via measurement for the real numbers” as an alternative to deal with the real numbers in teacher education courses, we looked for the possibilities the Material presents when introducing the real numbers from a process of measuring segments. This investigation was done through the observation of using the Material in a classroom, whose students were Mathematics teachers. The analysis was conducted in two moments. One of them denominated Presentation/Comment, sited the data of the Camp Diary to the center, and, the other one that brought these possibilities of the analysis of the Interviews. The literature shows that the way how the set of the real numbers has been presented to the future teachers steals the opportunity for notions and concepts inherent to this set to be discussed. Introducing the real numbers via measurement, gives the opportunity that notions and intrinsic concepts to the real number can be explored, in particular, basic concepts of Analysis as convergence, continuity, completion, etc; and even indirectly those related to other branches of Mathematics as Algebra, Geometry and History of Mathematics.

Key words: Mathematical Education, Real Numbers, Teacher Education

S U M Á R I O

R E S U M O vii

A B S T R A C T viii

S U M Á R I O ix

Í N D I C E x

INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO 1 9

CAPÍTULO 2 30

CAPÍTULO 3 45

CAPÍTULO 4 56

CAPÍTULO 5 131

CONSIDERAÇÕES FINAIS 153

R E F E R Ê N C I A S 166

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA 171

A N E X O S 174

Í N D I C E

R E S U M O vii
A B S T R A C T viii
S U M Á R I O ix
Í N D I C E x
INTRODUÇÃO 1
CAPÍTULO 1 9
CAPÍTULO 2 30
CAPÍTULO 3 45
CAPÍTULO 4 56
4.1 A composição do Material 59
4.2 Análise do Material 60
4.2.1. Seção 3: Traçando uma trajetória para o número 60
4.2.2. Seção 4: Uma pequena reflexão 63
4.2.3. Seção 5: Segmentos Proporcionais 68
4.2.4. Seção 6: Incomensurabilidade 88
4.2.5. Seção 7: O processo de medição de um segmento AB com relação a uma unidade U, e o símbolo que traduz esse processo 93
4.2.6. Subseção: 7.1. O processo e o símbolo que o traduz 94
4.2.7. Subseção: 7.2. O processo inverso 102
4.2.8. Seção 8. Operações 111
4.2.9. Seção 9. A Comensurabilidade Revista 119
4.2.10. Seção 10: Conclusão 128

CAPÍTULO 5 131
CONSIDERAÇÕES FINAIS 153
R E F E R Ê N C I A S 166
BIBLIOGRAFIA CONSULTADA 171
A N E X O S 174

INTRODUÇÃO

O C A M I N H O, OS P A S S O S: A ESCOLHA DO TEMA

Antes mesmo de me sentir "professora de Matemática", tive a oportunidade de me sentir "professora", ao concluir o Magistério em nível de Segundo Grau, o correspondente ao Ensino Médio. O que para muitos pode parecer apenas mais um título, ou mais uma oportunidade de trabalho, para mim, significou o começo da realização de um desejo enraizado desde os tempos de menina, o desejo de ser "professora de Matemática". Por circunstância do Magistério pude ter contato com a Escola Básica, desde a pré-escola até a quarta série, o que hoje integra o Ensino Fundamental.

Ao cursar a Licenciatura em Matemática, o que para mim representava o passo final para a realização do meu objetivo, outros horizontes foram se revelando, como a participação em um “projeto de reforço” da escola de primeira a quarta séries. Foi a partir daí que comecei a ter um contato maior e diferenciado com textos referentes ao ensino de Matemática nos cursos de capacitação que eram oferecidos aos participantes do projeto. Embora eu já fizesse parte de um curso de formação de professores, enquanto aluna da Licenciatura, a literatura a que recorria nos estudos em grupo por conta deste projeto era, para mim, algo inovador.

Com o término da Licenciatura em Matemática surge a minha primeira opção de trabalho como professora de quinta a oitava série, no Ensino Supletivo. E, em seguida, no Ensino Superior para cursos de Ciências Aplicadas, em caráter temporário. A partir daí passei a ter um interesse maior em atuar no Ensino Superior, muito mais pelos conteúdos de Matemática que eram apresentados do que pela faixa etária dos alunos envolvidos.

Com o objetivo de lecionar no Ensino Superior, fiz um curso de Pós-Graduação *Latu Sensu* em Matemática, atuando no Ensino Fundamental e Médio. Tive meus primeiros contatos com futuros professores de Matemática (alunos de um curso de Licenciatura em Ciências) ministrando as disciplinas de Matemática. Esses alunos poderiam atuar como professores de Matemática de quinta a oitava séries do Ensino Fundamental. As únicas disciplinas de Matemática continham ementas de Cálculo Diferencial e Integral de uma e de várias variáveis, mas com a bibliografia básica de um curso tradicional de Cálculo.

Com este contato foi que julguei fundamental para minha formação de professora do Ensino Superior freqüentar um curso de Pós-Graduação *Strictu Sensu,* obtendo o título de Mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo, em 1997, na área de Análise com a dissertação "Interpolação Hermiteana por Bases de Funções Radiais e Regradas" orientada pelo Prof. Dr. Valdir A. Menegatto.

No retorno à Universidade[1], passei a ter maior contato com os alunos, futuros professores de Matemática, como professora das disciplinas do curso de Licenciatura, contribuindo com Orientação e Supervisão de Estágio, além das orientações no curso de Especialização *Latu Sensu* em Educação Matemática. E foi por meio desse curso que passei a me envolver com o Grupo de Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina.

[1] Atualmente sou docente do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL) – Londrina – Paraná.

O mestrado em Matemática conduziu-me, de modo natural, ao envolvimento com a pesquisa em Matemática, na área de Análise, mais especificamente Teoria da Aproximação, subárea na qual desenvolvi meu projeto de dissertação de mestrado.

Surge a oportunidade da realização do Doutorado em Educação Matemática pela UNESP – Universidade Júlio de Mesquita Filho, Campus de Rio Claro, em 2003, por influência maior dos meus desejos, frente ao meu envolvimento com o Grupo de Educação Matemática da UEL, e por considerar a Educação Matemática uma área com diferentes possibilidades e com o significado adequado aos meus intuitos atuais de pesquisa. Mais ainda, escolho as palavras de Soares et al. (1998) para expressar um sentimento de incômodo, mas que, ao mesmo tempo, levam-me a uma intensa reflexão não somente sobre a minha formação, mas sobre a Educação Matemática dos meus alunos. Esses autores dizem que

> ... como é quase impossível 'dominar' um conhecimento em que não se vê sentido, o que costuma sobrar da vivência do licenciado é a relação com um mito: algo que ele não compreende, mas deve valorizar. (SOARES et al., 1998; p. 30)

Atribuo à minha formação, cuja trajetória efetuou um trânsito da Educação para a Matemática e da Matemática para a Educação Matemática, esta inquietação ao me deparar com essa e outras citações das quais os trabalhos de pesquisa se apropriam e que, de certa forma, refletem a situação em que se encontra o ensino de nosso país, situação pela qual me considero responsável.

O trabalho de pesquisa do qual advém esta citação influi na decisão do foco do meu trabalho para que, posteriormente, o Projeto de Doutorado pudesse ser elaborado. Como a minha experiência e o interesse pela área de pesquisa convergiam ambos para a Análise Matemática, considerei pertinente dedicar-me às questões inerentes ao ensino de Análise na formação de professores. E foi no

momento da escolha da orientação para o trabalho que indiquei [2] a Prof.ª Dr.ª Rosa Lúcia Sverzut Baroni. A indicação foi devida à sua formação e experiência como professora da disciplina Análise Matemática em cursos de graduação e pós-graduação.

Já com o projeto em mãos, aconteceu o primeiro contato com a orientadora desse trabalho, que se mostrou interessada pela pesquisa e, dessa forma, procedi com as primeiras alterações no projeto inicial para os devidos encaminhamentos frente à realização do projeto.

Com o início do Doutorado, comecei a ter um contato maior com os diversos trabalhos da área de Educação Matemática e foi assim que percebi o vão entre a minha formação de Professora de Matemática e a que pretendia ser, uma Educadora Matemática, o que, na minha concepção, deveriam ser sinônimos. Saliento aqui, que de encontro com essa diferença é que sustento, motivo e fortaleço meu trabalho de pesquisadora.

Foram diversas as questões que surgiram quando optei por realizar uma investigação relacionada à disciplina Análise Matemática na formação do professor de Matemática. Trabalhos relacionados, de forma direta ou indireta, com a disciplina ou com conceitos inerentes à mesma já tinham sido realizados, ou ainda, estavam sendo desenvolvidos, alguns deles, inclusive, centravam-se em questões que, *a priori*, estavam no rol das quais me vinham e eram de meu interesse.

Buscando por uma direção mais acirrada do trabalho, escolhi um trajeto que, a meu ver, seria um ponto inicial para a pesquisa, voltei o meu olhar para um conceito da disciplina – *os números reais*. Essa escolha não foi realizada somente com o objetivo de demarcar o campo de pesquisa, considerando que a disciplina, como um todo, demandaria, em minha opinião, um tempo demasiado, distante das

[2] Essa é a forma de escolha do orientador do trabalho, anterior ao processo de seleção.

minhas possibilidades. Essa escolha foi fruto da crença do papel que esse ente matemático possui na formação do professor e, mais ainda, ao considerar as noções inerentes a esse ente, a essência de conceitos básicos da disciplina Análise Matemática.

A relevância maior desta escolha está vinculada à literatura atual, que trata do ensino do *número real* e que aponta diversos problemas em relação ao ensino e a aprendizagem e às noções intrínsecas a esse conceito, não apenas em nível da Escola Básica, mas, também, em cursos de formação de professores, nosso maior interesse (FISCHBEIN, 1995; SOARES, 1998; MELO 1999; COBIANCHI, 2002; IGLIORI, 2003; MOREIRA, 2005; OUTROS). Nessas pesquisas, pode-se perceber quão latente é a fragilidade apresentada pelos alunos que, em final de cursos de formação de professores, desconhecem noções básicas relativas aos números reais. Dessa forma, instaura-se, a meu ver, uma problemática em relação ao ensino aprendizagem do *número real* nos cursos de formação de professores. Soares et al. (1998) escrevem sobre "*o estudo dos sistemas numéricos que é de fundamental importância na formação Matemática do futuro professor.*"

Grande parte dos livros utilizados em cursos para formação de professores de Matemática, aqui no Brasil, não tratam especificamente da construção dos *números reais*, restringindo-se a apresentar esse conjunto como um Corpo Ordenado Completo. Em concordância com os resultados das pesquisas citadas acima, pode-se afirmar que, para o futuro professor de Matemática, esse tipo de tratamento é considerado insuficiente, ou seja, a discussão da idéia de *número real* é fundamental para a formação de um professor de Matemática. O que se percebe é que o tratamento dado pela maioria tem, no mínimo, furtado os estudantes do sabor de conhecer relações justamente de um tema que é inspiração para grande parte da Matemática. Apoiando-se nessas pesquisas, juntamente com esses autores, visualizo a necessidade de uma abordagem para os *números reais*, especificamente voltada para a formação do futuro professor de matemática.

Conseqüentemente, eu pretendo, neste trabalho, investigar a utilização de uma proposta de tratamento do *número real*, via medição de segmentos, buscando por possibilidades dessa abordagem em uma sala de aula na disciplina Análise, para cursos de formação de professores de Matemática.

A sala de aula a que me refiro é de um curso de Pós-Graduação[3], com alunos professores de Matemática, alguns em exercício da profissão, outros não.

A composição

O **primeiro capítulo** compõe-se de um estudo detalhado dos trabalhos que sustentam esta pesquisa. Considerando diferentes questões de investigação referentes ao tema, os pesquisadores buscam apontar o que eles consideram relevante aos objetivos de cada uma de suas pesquisas. Utilizando diversos recursos, como questionários, entrevistas, análise de livros didáticos, documentos oficiais etc., os autores investigam diferentes sujeitos em níveis de escolaridade diversos. De certa forma, retratam o que busquei para o meu trabalho, caracterizando a problemática existente em relação ao ensino e a aprendizagem dos *números reais*, além de compartilharem indagações, inquietudes e colaborarem para o direcionamento dessa pesquisa. Justifico assim a composição desse capítulo, que caminha ao encontro dos apontamentos que assinalo como sinalizadores da realização deste trabalho.

No **segundo capítulo**, “Uma História da Matemática no que diz respeito à formalização do *número real*" apresento o que considero ser o ator coadjuvante deste trabalho de pesquisa. A História da Matemática contada nos livros, referente à formalização do conceito, consta parte no século XVIII e outra no século XIX. Apresento, nesse capítulo, o que se refere ao "Movimento da Aritmetização da

[3] De forma mais detalhada, o Capítulo 3 traz informações referentes à pesquisa de campo realizada a partir deste tratamento.

Análise" não num sentido usual da palavra movimento, mas, sim, pelo sentido dado por Félix Klein (1849 - 1925). Tecendo algumas palavras sobre a História da Matemática na formação do professor, apresento um arrazoamento de uma parte da História da Matemática que avalio essencial e necessária para o tratamento do ente *número real* na formação de professores de Matemática. Mais especificamente, considero, na História da Matemática, aspectos concernentes à formalização do conceito de *número real* que situa o Material frente aos últimos desenvolvimentos que deram origem ao conceito de número real.

No **terceiro capítulo**, descrevo a atividade prática da pesquisa, considerando o referencial teórico, apropriando-se dele e estabelecendo a metodologia de pesquisa: caracterização da amostra, instrumentos de coleta de dados e o delineamento da análise da pesquisa realizada em um contexto específico de uma sala de aula de Matemática.

O **quarto capítulo** vem com o intuito de trazer as considerações acerca das possibilidades que a utilização do Material enquanto Proposta ofereceu. Este capítulo vem no formato Apresentação/Comentário do Material utilizado num curso em que a Proposta de tratamento dos *números reais*, via medição de segmentos, considerada como o objeto dessa pesquisa, foi efetivada na prática. Realizo este capítulo a partir de uma junção dos dados obtidos pelos instrumentos de coleta às percepções e atilamentos do Material que se tornaram possível a partir destes. Entretanto, saliento que a tessitura apresentada atém-se ao Diário de Campo (composto a partir do acompanhamento das aulas) como instrumento principal de coleta e análise.

No **quinto capítulo** trago as vozes de alguns alunos que participaram da disciplina. Conforme os procedimentos explicitados no Capítulo Três, detenho-me a uma análise do discurso dos entrevistados perseguindo a todo momento os objetivos deste trabalho. Este capítulo vem com o intuito de apresentar uma fase primordial deste trabalho. Julgo que o empreendido corrobora de modo essencial

para que a leitura/interpretação das falas dos entrevistados possa ser explicitada e, ao mesmo tempo, possa revelar dados circunstanciais à utilização do Material enquanto Proposta.

E ocupo o último capítulo com inferências e **considerações finais** a partir da pesquisa desenvolvida, no que denomino como Perspectivas..., visando a um possível redimensionamento no processo ensino e aprendizagem desse tema – *os números reais* – alvo de tantos trabalhos de pesquisa no campo da Educação Matemática.

CAPÍTULO 1

A PROBLEMÁTICA DO ENSINO E DA APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS REAIS

Na literatura presente no campo da Educação Matemática é grande o número de publicações envolvendo o tema *números reais*, em particular nos cursos de formação de professores.

Os diversos trabalhos encontrados apresentam investigações realizadas de diferentes formas, utilizando como instrumentos, questionários, entrevistas, etc., cujos sujeitos foram alunos de cursos de Licenciatura em Matemática, de cursos da área de Ciências Exatas, de Ensino Médio e, em alguns casos, formadores de professores de Matemática. Esses trabalhos ocupam esta posição nesta tese por revelarem graves deficiências por parte dos sujeitos envolvidos, de noções e conceitos relacionados ao ensino e a aprendizagem dos *números reais*. E alguns deles mostram a forma frágil pela qual alguns cursos de Licenciatura lidam com o tema. Uma problemática instaura-se e a cada dia aumenta a quantidade de pesquisadores envolvidos. Está em destaque uma preocupação desses pesquisadores com a situação apresentada, localizada não somente no Brasil, mas também em outros países como França, Israel, EUA, Espanha (FISCHBEIN, 1995; SOARES, 1998; MELO 1999; COBIANCHI, 2002; IGLIORI, 2003; MOREIRA, 2005; OUTROS).

Com a intenção de caracterizar essa problemática é que componho este capítulo. Destaco alguns trabalhos, situando-os como pano de fundo para esta pesquisa, para que, dessa forma, questões possam ser levantadas, algumas inferências possam ser realizadas, oferecendo subsídios para esta investigação.

Começo por apresentar o trabalho de Soares *et al*. (1998), cujo título é "*Números reais: Concepções dos Licenciados e Formação Matemática na Licenciatura*". Esse artigo foi um dos trabalhos que me marcou de forma decisiva, contribuindo para um direcionamento da pesquisa em face dos resultados obtidos e dos apontamentos que os autores realizam. Acreditando que uma nova abordagem dos sistemas numéricos deve ser constituída especificamente voltada para a formação do professor, os pesquisadores tinham a intenção de conhecer as pré-concepções e imagens que pudessem servir como obstáculos na aprendizagem dos conceitos relativos aos números reais para os alunos da Licenciatura.

Soares *et al*. (1998) relatam, nesse trabalho, uma investigação que consiste da análise dos resultados obtidos a partir de um questionário aplicado a 84 alunos dos cursos de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) e da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).

O questionário foi elaborado da seguinte forma: algumas das questões pertenciam a um grupo que buscava, no aluno, algo mais do que simplesmente enunciar a definição de um número irracional, num sentido mais aprofundado do conceito de irracionalidade. Como resultado das respostas às questões desse grupo, 52% dos alunos não puderam citar uma razão que os levasse a acreditar que certas quantidades não podem ser expressas como razão de inteiros, ou seja, não argumentaram de forma convincente a insuficiência dos números racionais. (SOARES *et al*., 1998, p. 114) Nesse mesmo grupo de questões, os pesquisadores puderam também explorar a idéia da representação de uma medida por um número. Visualizo, nas respostas apresentadas a estas questões, a existência de uma confusão por parte dos sujeitos em relação a essa

representação. E, em relação a tal os autores colocam que o aluno tende a associar ao número irracional a idéia de imprecisão, não exatidão. Essa falta de significado para a representação decimal infinita e não periódica pode ser uma das responsáveis por isso, e, mais adiante eles escrevem:

> . . . se não se compreende o sentido e a razão de ser dos irracionais, é difícil superar as dificuldades na compreensão de vários conceitos ligados à estrutura dos reais. (SOARES *et al*., 1998, p. 115)

Ao concordar com os autores, penso que, além do comentado acima, um fator determinante nesse quadro se refere à forma com que o número irracional é tratado na maioria dos cursos de formação de professores.

Um outro grupo de questões buscou investigar a percepção dos alunos sobre a maneira como os racionais e os irracionais distribuem-se na reta real. Em uma das questões deste grupo, os pesquisadores buscavam explorar a infinidade de irracionais e racionais entre dois racionais. Essa questão foi respondida corretamente por apenas 42% dos alunos. Nas respostas incorretas, os alunos associaram dízimas periódicas com irracionalidade, ou seja, a qualquer representação decimal infinita com irracionalidade.

A possibilidade da divisão de um segmento indefinidamente foi reportada em um outro grupo de questões. Mais de 50% dos alunos mostraram incerteza sobre a possibilidade dessa subdivisão. Considero este índice muito alto, refletindo sobretudo a fragilidade com que a noção de infinito e a representação de uma medida apresentam-se para esses alunos.

Questões de outra natureza foram apresentadas, tratando de conceitos como incomensurabilidade e irracionalidade, envolvendo potência com expoente irracional; o infinito e a representação decimal; o conceito de *número real* e propriedades estruturais.

Nesse mesmo trabalho, os pesquisadores apresentam o que eles consideram inferências para o trabalho na formação de professores. Os autores avaliam de fundamental importância que um estudo dos sistemas numéricos faça parte da formação do futuro professor de Matemática. Mais ainda que uma abordagem especificamente voltada para a Licenciatura deve ser construída. (SOARES *et al*., 1998, p. 115)

Os pesquisadores mostraram, com esse trabalho, que alunos em final de curso, que provavelmente já cursaram a disciplina de Análise Matemática, revelaram um desconhecimento de noções básicas inerentes ao conceito de número real. Na disciplina, em geral, o Conjunto dos Números Reais é apresentado de forma axiomática como um Corpo Ordenado Completo e, a partir daí, os outros conceitos são abordados. Esses conceitos dependem de forma direta de noções como: aproximação, infinitude, completude, continuidade, compacidade, enumerabilidade, comensurabilidade, incomensurabilidade, etc..

Circunstanciada por estas e outras pesquisas que comento ainda neste capítulo, vejo a necessidade de uma abordagem alternativa para a apresentação dos *números reais*. Esta também é a percepção dos autores, que apontam para o significado da incomensurabilidade de dois segmentos e para o sentido e a necessidade dos irracionais como pontos centrais das dificuldades na compreensão de uma série de conceitos ligados à estrutura dos reais.

Acredito que esse sentido e essa necessidade poderão ser de fato encontrados/explicitados pela História da Matemática, na qual o número irracional ficou por mais de dois mil anos à espera de sua definição. A forma como esse conceito é colocado (quando é) desvinculado de sua história causa, no mínimo, um empobrecimento cultural para os nossos alunos, corroborando uma desvalorização do desenvolvimento da Matemática das diferentes épocas de toda uma humanidade.

O trabalho [4] "*The Concept of Irrational Numbers in High-School Students and Prospective Teachers*" [5], de Fischbein *et al*. (1995), tinha como sujeitos da pesquisa alunos, correspondentes ao final do Ensino Médio no Brasil, e professores em formação em faculdades de Tel Aviv. Volto minha atenção, com relação a este trabalho, somente aos dados e à análise respectiva referentes aos professores em formação.

Os pesquisadores comentam, no início do artigo, que o trabalho assumiu que o conceito de número irracional possui dois obstáculos intuitivos:
- a dificuldade de aceitação de que duas grandezas (dois segmentos de reta) podem ser incomensuráveis;
- a dificuldade de aceitação de que o conjunto dos números racionais, embora denso, não cobre toda a reta.

A investigação foi realizada com o objetivo de avaliar a presença e os efeitos desses obstáculos. Como instrumento desta pesquisa, os autores utilizaram um questionário que considerava
(i) o conhecimento formal do estudante (definições, hierarquia do sistema de números reais, localização de vários números nesta hierarquia);
(ii) a reação dos sujeitos frente às questões ao explorarem atitudes intuitivas envolvendo densidade e continuidade de conjuntos, a natureza do infinito e a operação de medir.

Embora o artigo traga uma gama de questões relacionadas ao tema *números reais*, apresento aquelas que me chamaram a atenção e que considero pertinentes ao tema desta pesquisa. Um grupo dessas questões exigia uma classificação dos números quanto a serem "número", "número racional", "número irracional", "número real". Destaco o índice de 30% dos professores em formação

[4] Todas as citações desse trabalho estão apresentadas em português segundo nossa tradução.
[5] "O conceito de Números Irracionais em Estudantes e Professores em Formação"

que classificaram o número $\sqrt{16}$ como irracional e, ainda, 28% destes afirmaram ser irracional o número 34,2727...

Os sujeitos foram questionados sobre a definição de número racional e número irracional e as respostas mais usadas para definir número racional foram: "*um decimal contendo um número finito de dígitos*", "*um inteiro positivo*", "*um número positivo*". Em relação ao ocorrido, trago um apontamento dos autores quando dizem:

> Esses estudantes certamente não possuem o verdadeiro significado do termo ''número irracional'', o algoritmo pelo qual uma decimal periódica infinita pode ser transformada em um quociente de dois inteiros e, mais importante, eles não têm um claro entendimento do porquê, em várias circunstâncias, eles obtêm um símbolo, um número que contradiz a ideia básica intuitiva de coleções comparáveis e de medida da qual o conceito de número inicialmente nasceu. (FISCHBEIN *et al*., 1995 , p. 35, tradução minha). [6]

Um grupo de questões explorava a infinidade de pontos de um intervalo *AB.* Nas questões que comparavam o conjunto dos números racionais e dos irracionais, como "*Existem mais elementos em Q*", [7] "*Existem mais elementos em J*", "*Existe a mesma quantidade de elementos em ambos*.". O índice de acertos foi dado por 69% dos professores em formação. Os pesquisadores observaram um fato óbvio, porém muito preocupante: "*Esses estudantes da faculdade supostamente começaram a ensinar Matemática a seguir!* ". E ressalto que, mesmo com as deficiências apresentadas, serão esses os futuros professores de Matemática, que poderão, inclusive, formar outros professores.

Os sujeitos foram chamados a justificar suas respostas e, a partir de algumas respostas destacadas pelos pesquisadores, constatou-se uma confusão em

---

[6]"These students certainly do not possess the true meaning of the term "irrational number", the algorithm by which a periodical infinite decimal may be transformed into a quotient of two integers and, still more important, they do not have a clear understanding of why, in various circumstances, one gets a symbol, a number which contradicts the basic intuitive idea of comparable collections and that of measure from which the concept of number, initially, was born."

[7] *Q* representa o conjunto dos números racionais e *J* o conjunto dos números irracionais.

relação a essa questão. Apareceram respostas curiosas como, por exemplo, "*Para cada número racional, existem nove números irracionais*."

Segundo os pesquisadores, as questões não revelaram a dificuldade intuitiva dos alunos em aceitar ou não, num mesmo intervalo, que existem dois conjuntos infinitos de elementos de tipos diferentes, relacionada à primeira hipótese dos pesquisadores mencionada anteriormente.

Duas questões foram destinadas à outra hipótese – conceito de incomensurabilidade e sobre o apelo ao intuitivo. A primeira "*É possível encontrar para dois pares de segmentos de reta AB e CD de comprimentos diferentes uma unidade comum?*" E a segunda, ". . . *é possível encontrar uma unidade comum para o lado de um quadrado e sua diagonal*?"

Dos professores em formação, 31% responderam afirmativamente a essas questões, ou seja, que sempre é possível. Deste modo, estes futuros professores mostram desconhecimento da possibilidade de dois segmentos serem incomensuráveis.

Uma outra questão, ainda com a intenção de observar o fundo intuitivo (a que os autores se referem) era a seguinte: "*Vamos considerar o segmento AB e vamos pegar um ponto M desse segmento. Vamos dividir o segmento AB em partes iguais e seja C o ponto dessa divisão. Vamos continuar a dividir, do mesmo modo, os segmentos nos quais o ponto M está localizado.*
_ É o processo de divisão finito ou infinito?
_Poderia um dos pontos dessa divisão, se continuássemos a dividir, coincidir com o ponto M?"

A resposta que dizia ser o processo finito foi dada por 10% dos professores em formação, com as seguintes justificativas: "*O segmento AB é limitado*", "*Porque*

não teria mais lugares para outros pontos". Responderam que o processo é infinito 90% dos professores em formação, com as justificativas, "*Porque os pontos não têm dimensão*", "*A distância entre dois pontos tende a zero, mas nunca se torna zero*". Algumas outras respostas apresentadas pelos sujeitos são citadas e comentadas pelos pesquisadores; porém, o que me parece relevante nesse trabalho é o fato de os estudantes investigados não revelarem um apelo ao intuitivo no qual o conceito de número irracional poderia ser construído, segundo conclusão dos autores.

> Mesmo entre os professores em formação (que aprenderam sistematicamente sobre números reais e irracionais) somente seis sujeitos, de um total de vinte e nove perceberam que um ponto que é irracional nunca seria alcançado por um processo de divisões sucessivas de um segmento em partes iguais. (FISCHBEIN *et al*., 1985, p. 45, tradução minha) [8]

Os autores apresentam algumas recomendações acerca do tratamento dos conjuntos numéricos no trabalho com professores. Eles consideram absolutamente inaceitável que currículos de Matemática da Educação Básica não contenham conhecimentos básicos do sistema dos números reais. Recomendam que os conceitos de número natural, racional, irracional e números reais devam ser explicitamente e sistematicamente ensinados, não somente visando ao mero conhecimento técnico, à apresentação de definições e à resolução de exercícios com cálculos. Referem-se também a problemas de fundo intuitivo, sem os quais a Matemática pode ser considerada como um mero esqueleto. (FISCHBEIN *et al.*, 1995, p. 43)

Embora esses pesquisadores tenham realizado seu trabalho em Israel, e mesmo supondo que a escola, como um todo, seja diferente da nossa escola, posso dizer que as pesquisas apresentadas no Brasil refletem a mesma realidade. Os conjuntos numéricos e as noções intrínsecas a eles são apresentados nas escolas

---

[8] "Even among the preservice teachers (who have learned systematically about real and irrational numbers) only six subjects, from a total of twenty-nine realized that a point which is irrational will never be reached by a process of successive division of a segment into equal parts."

com ênfase maior nos exercícios que exploram as operações e o conhecimento técnico sem um empreendimento para o que de intuitivo um conceito possa ter.

Se o processo de formação busca preparar o futuro professor de matemática da escola para uma prática de negociação e de construção de significados com os alunos, infere-se dos resultados obtidos que é necessário repensar esse processo, pelo menos no que concerne à abordagem dos sistemas numéricos. Uma condição básica para o desenvolvimento de uma prática pedagógica desse tipo é o domínio, por parte do professor, dos conceitos matemáticos numa forma multifacetada, isto é, capaz de se conectar a diferentes caminhos no processo de construção dos conceitos. (MOREIRA, 2004, p. 168)

O trabalho de Igliori e Silva (2001), cujo título é "*Concepções dos alunos sobre números reais*", apresenta uma investigação realizada pelos autores no Brasil, que, a partir de três trabalhos do exterior, extraíram questões e elaboraram o seu próprio instrumento de investigação, com um possível ajuste ao nosso sistema educacional.

Igliori e Silva tinham a intenção de verificar quais as concepções dos alunos da França e de Israel poderiam ser constatadas em alunos brasileiros. Escolhi apenas identificar estes trabalhos do exterior, fazendo um breve comentário sobre os mesmos, pois me atenho à investigação realizada aqui no Brasil. Convém destacar que um dos trabalhos do exterior estudados por Igliori e Silva, o artigo de Fischbein *et al*., foi o trabalho que acabei de comentar, apresentado acima. Num outro trabalho, "*Le réel: quels modèles en ont les eleves*?" [9] os pesquisadores objetivaram investigar a interação entre as concepções dos alunos sobre números reais e a aprendizagem de noções da Análise. E, neste trabalho, dos 483 alunos envolvidos, 257 pertenciam às séries finais do correspondente ao Ensino Médio brasileiro e 226 ao início de um curso de Licenciatura em Matemática. Um último trabalho do exterior, de D. Tirosh, intitulado "*The role of student's intuitions infinity*

[9]"O real: quais modelos possuem os alunos?"

in teaching the Cantorian Theory" [10], teve como objetivo avaliar as concepções que 1.380 alunos da faixa etária de 11 a 17 anos de escolas de Tel Aviv tinham sobre o infinito.

O questionário elaborado por Igliori e Silva a partir desses trabalhos citados foi aplicado, aqui no Brasil, a 36 alunos iniciantes do curso de Ciências da Computação e 14 alunos finalistas de um curso de Licenciatura em Matemática. Trago algumas das conclusões e/ou observações das questões do trabalho pertinentes ao tema desta tese para apresentá-los aqui.

Na primeira das questões, os alunos deveriam classificar uma lista de números reais em racionais ou irracionais e, na segunda questão, deveriam explicitar o critério usado nessa classificação. Desse primeiro grupo de questões, os critérios utilizados pelos alunos finalistas pouco se distanciaram dos utilizados pelos iniciantes. A confusão entre número e aproximação persistiu entre os alunos finalistas. (IGLIORI; SILVA, 2001, p. 64)

Segundo os autores, uma outra questão mostrou que, para alguns alunos, um número e uma de suas aproximações parecem ter o mesmo significado e quanto menor o erro nessa aproximação, mais força parece ter essa identificação. Acredito que, de forma implícita, apresenta-se a falta de domínio da noção de aproximação por parte dos alunos. No tratamento do conceito de número irracional, esse é um tema que deveria ser explorado.

Os pesquisadores apresentam de forma sintetizada a conclusão do seu trabalho, ou seja, o que os seus alunos reproduziram como concepção sobre os números reais.

1. Associação número–representação.
2. Associação irracionalidade–representação decimal ilimitada.

[10]"O papel da intuição do aluno sobre infinito no ensino da teoria Cantoriana" (Tradução nossa)

3. Associação irracionalidade–"não-exatidão". (Para os nossos alunos, exatidão poderia ser: números não inteiros, número negativo, número cuja representação decimal possuía pontos de suspensão em números infinitos ou não.)
4. Associação número–aproximação. (Associação efetuada percentualmente por mais alunos finalistas que iniciantes.)

Como conclusão final do seu trabalho de pesquisa, os autores colocam que

> Na análise comparativa das respostas dos alunos iniciantes e finalistas, pudemos avaliar que, apesar de na maior parte das vezes, ter havido evolução, relativamente ao índice de acertos, a maioria das concepções resistem (sic) após um curso introdutório de analise real, tratado de forma tradicional. (IGLIORI; SILVA 2001, p. 66, grifo nosso)

Uma reflexão sobre o grifo acima nos remete a uma discussão sobre a contribuição que um curso de análise, tratado de forma tradicional, pode oferecer para a formação de um professor de Ensino Fundamental e Médio.

Essa é uma questão em discussão no campo de pesquisa da Educação Matemática, e de nosso total interesse. Podemos encontrar alguns trabalhos que apontam para direcionamentos, como o de Batarce (2003), que apresenta uma proposta de encaminhamento, denominado "*Um Contexto Histórico para a Educação Matemática"*, com um ponto de vista estritamente histórico-epistemológico. Seu sentido é o de apresentar um contexto que concebe a Análise Matemática não como um consertar do Cálculo, fornecendo-lhe rigor e fundamento, mas como um conjunto de objetos histórico-matemáticos que criaram necessidades que não existiam *a priori* e, para elas, dispensou esforços que culminaram numa crise de fundamentos e no estabelecimento de novas concepções.

Concebendo o conjunto dos números reais como um fundamento sobre o qual se edifica a construção formal dos resultados da Análise Matemática, um espaço para o tratamento deste nos cursos de Matemática deve ser dedicado. Quando

apresentamos esse conjunto via construção, abrimos possibilidades para abarcar conceitos como continuidade, enumerabilidade, completude, convergência, aproximação, densidade, etc., que num curso de Análise Matemática são apresentados por si só. Dessa forma, alguns resultados, quando explorados anteriormente ao curso propriamente dito, podem mostrar uma cadeia histórico-lógico-formal dos próprios resultados de que se compõe a disciplina, atribuindo um significado para a apreensão de diferentes conceitos da mesma.

A relevância dessa discussão, para mim, consiste no reconhecimento, por parte dos professores responsáveis pela mesma, refletindo sobre o papel dessa e de outras disciplinas de Matemática dos Cursos de Licenciatura, levando sempre em conta o contexto pelo qual elas se propõem, cursos que visam a formar professores de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. Acrescento aqui que, embora as minhas intenções de pesquisa neste trabalho não estejam voltadas à Analise como disciplina da Licenciatura, como um todo, sinto a necessidade de fazer estes comentários, visto que, em geral, esta é a disciplina do currículo que se refere mais fortemente a todos os conceitos e características deste conjunto, o que me faz referenciar a importância de uma abordagem para o mesmo, diferenciada daquela como ele se apresenta.

Um outro trabalho que trago, e que também trata de questões relativas aos números reais, é o de Severino Barros de Mello. Trata-se de uma dissertação de mestrado intitulada "*A compreensão do conceito de número irracional: uma radiografia do problema e uso da História como uma alternativa de superação*". O pesquisador apresenta, entre outras coisas, uma investigação, realizada por ele, com 178 alunos dos três períodos das áreas de Ciências Exatas de quatro universidades de Pernambuco, sendo 43 destes licenciandos em Matemática do primeiro ao quarto período. O instrumento da pesquisa foi um questionário contendo nove perguntas relativas a aspectos históricos dos números, vinculados à compreensão do conceito de números irracionais.

Esse trabalho ilustra as deficiências no conhecimento da História da Matemática e a existência de lacunas quanto à compreensão do conceito de número irracional. O autor coloca que "*Com relação à História da Matemática, esta não faz parte da formação de nossos alunos. Em que afeta essa falta de perspectiva histórica do ensino de Matemática?*". (MELO, 1999, p. 42) Segundo ele, duas conseqüências podem ser desdobradas:

- o aluno torna-se incapaz de atribuir um significado aos conteúdos matemáticos, resumindo as perspectivas do conhecimento matemático ao aspecto estritamente operacional.
- o estudante deixa de adquirir uma visão mais ampla da Matemática e, portanto, culturalmente mais rica, perdendo a oportunidade de ver esta ciência na sua dimensão de intercâmbio com todas as outras áreas do conhecimento e com o desenvolvimento da própria humanidade.

O autor comenta que os alunos ficaram perplexos com relação ao enfoque apresentado por ele nas questões, sobretudo no que diz respeito à História da Matemática. Mais ainda, relacionado à inquietude por parte deles ao se perceberem alunos de um curso de nível superior e, no entanto, continuarem num estado de analfabetismo matemático. (MELO, 1999, p. 82) Estes alunos mostram a importância devida à História da Matemática quanto à referência à expressão alfabetização matemática.

No trabalho de Antonio Sérgio Cobianchi, uma tese de doutorado intitulada "*Estudos de Continuidade e Números Reais: Matemática, Descobertas e justificativas de Professores*", foram entrevistados quarenta e três alunos do curso de pós-graduação *latu sensu* de Matemática da Faculdade de Engenharia Química de Lorena (Faenquil), Estado de São Paulo, quatro professores dos vários níveis de ensino, incluindo Ensino Fundamental e Médio e nível superior, e, por fim, quatro professores do Ensino Superior. O instrumento de pesquisa foi um questionário contendo quinze questões. Dessas questões, apresento apenas as

que são de meu interesse. Optei por trazer a análise de cada questão escolhida à medida que as apresento.

Começo com uma questão relacionada à razão de ser/necessidade dos números irracionais, que foi uma das questões exploradas e já comentadas anteriormente neste capítulo quando apresento o trabalho de Fischbein (1995). A questão é: *"10) Para você, qual a importância para a Educação Matemática, em se ensinar/aprender números reais e continuidade?"* (COBIANCHI, 2002, p. 295)

Cobianchi (2002) observa, em vários pontos de seu trabalho, que é muito grande o número de entrevistados que desconhecem a importância de se ensinar e aprender números reais: dezessete deles, 38% dos sujeitos. Olhando para a diversidade das respostas apresentadas, concordo com o autor quando escreve que muitos consideram fundamental essa questão para o ensino de Matemática, mas nenhum deles explorou a importância dos números reais e continuidade .(COBIANCHI, 2002, p. 298) Isto é característica da nossa própria formação. Vivemos num mundo "racional", com uma calculadora de apenas 9 dígitos, exceto por alguma apresentação de números como π e $\sqrt{2}$ em outras circunstâncias. A menos que se desenvolva um trabalho mostrando qual a relevância destes números na própria matemática e consequentemente no que dela depende, esta razão de se ensinar/aprender cai num vazio.

Uma outra questão explora a situação de ensino destes números:

"*11) Como você introduz didaticamente para seus alunos a questão de números reais e continuidade? Quais as maiores dificuldades que você encontra ao ensinar esse assunto? Quanto tempo gasta nesse assunto?*"

Convém observar que, para mim, essa questão é importante ao passo que investiga as dificuldades que os sujeitos apresentariam ao ensinar o assunto. Eis algumas das respostas encontradas em Cobianchi (2002):

"*A maior dificuldade é que os alunos não possuem domínio sobre a continuidade dos números; para eles os conjuntos são separados e não se complementam*."
"*Fazer com que eles entendam que, entre dois números inteiros existem outros infinitos números. Que a raiz quadrada, que é um número irracional, possui representação decimal infinita. Eles afirmam que a calculadora apresenta somente sete casas.*"
"*Para os alunos, a grande dificuldade é perceberem que os intervalos, por menores que sejam, ainda podem ser subdivididos.*"

Na sua análise, o autor coloca que os depoimentos dos entrevistados permitiram concluir que a compreensão necessária para a utilização de tão importante conjunto numérico não é alcançada e confirma um dos apontamentos realizados neste capítulo ao escrever que "*Talvez essa dificuldade de percepção se deva à maneira como os conjuntos numéricos são apresentados didaticamente, e também porque o assunto continuidade não seja tratado em sala de aula.*" (COBIANCHI, 2002, p. 303)

Quanto à questão: "*12) Na sua compreensão, é satisfatória a maneira como os livros didáticos abordam a questão números reais e continuidade?*" Algumas das respostas dos entrevistados ressaltam a importância de que a abordagem feita nos livros didáticos ainda não é uma questão resolvida pelos autores. O que concorda com os resultados observados nas pesquisas que investigam mais especificamente este tema. São apresentadas respostas como "*Eles apresentam esse conjunto numérico de uma forma já constituída e acabada, desprezando toda a evolução humana e científica para se atingir ao resultado pronto.*". Vale observar que a História da Matemática aparece de forma explícita na fala desse sujeito, ao concebê-la como elemento necessário na abordagem do tema números reais.

Em relação à questão: "*15) Que importância você atribui a Eudoxo e Richard Dedekind na questão números reais e continuidade?*" (COBIANCHI, 2002, p. 302),

41 dos entrevistados afirmaram desconhecimento desses dois matemáticos. As únicas duas respostas afirmativas foram:

"*Eudoxo começou os estudos dos números reais e Dedekind fez a ligação entre os números racionais e irracionais, para definir os números reais.*"

"*Ouvi falar sobre Eudoxo e Dedekind, mas não o suficiente para responder a essa questão.*"

Destaco aqui, mais uma vez, o desconhecimento por parte dos sujeitos da noção histórica relacionada às noções não somente específicas, como a explorada pelo autor, mas a outras referentes ao conjunto dos *números reais*, considerando a importância central que esses dois personagens desempenharam na Matemática conforme conta a história.

Em seu trabalho, Cobianchi (2002) chama a atenção para este desconhecimento por parte dos professores de Matemática, e conclusivamente sugere que, em uma construção de *números reais* para alunos de licenciatura, devem ser incluídos tópicos de História da Matemática, para que essa falha seja sanada.

> Julgamos válido o procedimento usado na disciplina Análise, introduzindo o conjunto dos números reais, como corpo ordenado completo. Mas, considerando que, além dessa construção, deveriam ser incluídas – principalmente nos cursos de Licenciatura em Matemática – outras construções de números reais, direcionadas para o futuro professor, e que proporcionassem subsídios a serem empregados na sua futura prática pedagógica nos ensinos fundamental e médio. (COBIANCHI, 2000, p. 420)

Das conclusões de Cobianchi, considero relevante observar que a maioria dos professores entrevistados introduz números reais como o conjunto formado pela união do conjunto dos números racionais e dos números irracionais, sendo o número irracional definido como aquele que não é racional, de forma considerada circular, termo usado comumente na literatura. Mais à frente, ainda neste capítulo, apresento algumas observações a respeito desta forma circular, ou circularidade apresentada na definição de *número real*.

Em relação a esta forma circular, uso as palavras conclusivas do autor quando diz que: "*Esta maneira de exposição talvez seja motivada pelas lacunas existentes em cursos de licenciatura com relação a esse tema, e pela maneira como os livros didáticos o abordam.*" (COBIANCHI, 2002, p. 395)

Outro dado relevante que percebo nesta pesquisa e que acrescento a este texto refere-se à receptividade dos entrevistados, em particular dos que já atuam como professores de Matemática, a futuras abordagens desse tema ou em acolher propostas didáticas que possam alterar os rumos, promovendo mudanças positivas em relação à abordagem nos diferentes níveis de ensino.

Um outro trabalho que trago nesta exposição refere-se à tese de doutorado "*O Conhecimento Matemático do Professor: Formação na Licenciatura e Prática Docente na Escola Básica*", de Plínio Cavalcanti Moreira, que teve como objeto de estudo a formação Matemática na Licenciatura e focalizou, de modo específico, as relações entre os conhecimentos veiculados no processo de formação e os saberes associados às questões que se colocam na prática profissional docente na escola. (MOREIRA, 2005, p. 1) Em um dos capítulos desse trabalho, o autor relata uma pesquisa realizada junto a alunos do curso de Licenciatura diurna em Matemática da UFMG. Essa pesquisa busca avaliar em que medida os alunos do curso dominam as formas escolares dos conhecimentos matemáticos a respeito dos números, ou seja, a matemática escolar [11] relativa aos sistemas numéricos. O instrumento utilizado nessa investigação foi um questionário com cinco perguntas selecionadas pelo autor. Participaram da pesquisa 25 alunos matriculados em uma disciplina do último período e 44 alunos freqüentes de uma disciplina do primeiro período.

Restrinjo-me a apresentar um recorte dessa investigação e atenho-me à Questão 5 do instrumento utilizado, já que a mesma se refere aos números irracionais. Os

[11] O autor refere-se à *Matemática escolar* como o conjunto de saberes "validados", associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em Matemática.

pontos apresentados vêm contribuir para a composição de um cenário no qual se insere este trabalho. Vejamos:

> Questão 5
>
> Os números naturais se prestam muito bem, entre outras coisas, para contar coleções de objetos. Os números racionais se prestam, entre outras coisas, para expressar uma medida fracionária. Para você, o que são números irracionais? E para que servem eles? (MOREIRA, 2005, p. 163)

Segundo o pesquisador, apenas um, entre os 24 alunos de final de curso, respondeu de forma consistente à noção de incomensurabilidade associada ao conceito de irracionalidade. E, entre os iniciantes, nenhum dos alunos faz essa associação.

As respostas apresentadas a esta questão ilustram a forma como a História da Matemática está sendo tratada quando o tema números reais é considerado, ou, ainda, no quanto a ausência do significado do conceito de número irracional ocupa frente ao desenvolvimento desta área de conhecimento. Dessa forma, é furtada a oportunidade para que conexões entre Matemática e História da Matemática possam ser estabelecidas, corroborando o fato de que as noções envolvidas no tratamento deste tema possam ser, de fato, próprias do futuro professor.

Por outro lado, esta deficiência (ou ausência, em muitos casos) das respostas apresentadas pelos futuros professores a tal questão pode estar associada à forma com que os livros didáticos apresentam (ou deixam de apresentar) o conceito de número irracional. É indiscutível a importância que o livro didático exerce no ensino, não somente no nível da Educação Básica, como também no nível superior. No contato que tive com os diversos livros de Análise durante minha vida acadêmica, na graduação, na especialização e no mestrado, pude observar que o tratamento ao conjunto dos números reais assemelha-se ao que é encontrado no livro de Elon Lages Lima, Curso de Análise – Volume 1:

> Frisamos, porém, que nosso ponto de vista coincide com o exposto na p. 511 de [Spivak]: "É inteiramente irrelevante que um número real seja, por acaso, uma coleção de números racionais; tal fato nunca deveria entrar na demonstração de qualquer teorema importante sobre números reais. Demonstrações aceitáveis deveriam usar apenas o fato de que os números reais formam um corpo ordenado completo [. . .]"
>
> Assim, um processo qualquer de construção dos números reais a partir dos racionais é importante apenas porque prova que corpos ordenados completos existem. A partir daí, tudo que interessa é que R é um corpo ordenado completo." (LIMA, 1976, p. 47, aspas do autor)

Essa citação elucida a preocupação do autor com a apresentação do conjunto dos *números reais* através da sua estrutura axiomática, justificada pelos interesses do próprio livro. Mais à frente, ele reforça:

> Já concordamos, no capítulo anterior, em adotar o método axiomático, <u>segundo o qual a natureza intrínseca dos objetos matemáticos é uma matéria irrelevante</u>, sendo o importante as relações entre esses objetos. (LIMA, 1976, p. 47, grifo do autor)

Esta é uma atitude característica da natureza da Matemática do ponto de vista do matemático. Porém, em questões de ensino, a situação atual revela que o caminho a ser percorrido vai além deste apresentado pelas palavras grifadas na citação acima. Os resultados das pesquisas apresentadas neste capítulo conclamam essas idéias.

Embora eu tenha trazido o livro didático a este cenário de discussão, convém explicitar que, neste trabalho, não me atenho a uma possível análise do livro didático em questão, ou de outros que sejam. Alguns trabalhos dos apresentados aqui tiveram esta preocupação sob diferentes perspectivas. Um deles é o de COBIANCHI (2002), que, como parte de sua pesquisa, analisa vinte e dois livros didáticos sobre o assunto e concludentemente observa que não existe um tratamento adequado ao conteúdo *números reais*, de uma maneira eficaz, e esse

fato prejudica o ensino desse importante tema da Matemática. (COBIANCHI, 2002, p. 417)

Em geral, nos trabalhos que optam por desenvolver algum tipo de análise de livros didáticos referentes ao tema *números reais*, uma abordagem destaca-se aos olhos dos pesquisadores. Refiro-me à abordagem que apresenta a definição do *número real* de forma circular, ou da circularidade apresentada na mesma: um *número real* é um número racional ou um número irracional, e um número irracional é um *número real* que não é racional (esta referência já foi comentada anteriormente neste capítulo).

A circularidade na definição é um dado emergente que estas pesquisas apresentam e que, embora eu tenha escolhido o final deste capítulo para comentar a este respeito, atribuo a ela um papel de grande relevância em face desta pesquisa. Ela apresenta-se, nesta investigação, como uma característica das mais reveladoras da necessidade de uma abordagem diferenciada para o tema. Convém citar que, em todas as pesquisas que tive contato, esta característica é apontada, visto que esta é uma das formas mais comuns usadas na apresentação da definição do número real. Posso citar uma delas, trata-se do trabalho de Baldino (1994) que discute esta questão.

È com base nos trabalhos apresentados e nas observações que os mesmos permitiram realizar, que levam-me a acreditar que a forma como os conceitos de número real e irracional têm sido abordados influi de forma direta para que concepções precárias, limitadas e inconsistentes a respeito destes conceitos estejam presentes na formação do futuro professor. Em contrapartida, percebemos que este cenário estará aquém do desejável se insistirmos nessas abordagens como, por exemplo, aquela que traz estes conceitos a partir de um enfoque formal dedutivo, apresentando o conjunto dos *números reais* como Corpo Ordenado Completo. Essa insistência faz com que exista o sério risco de

devolvermos nossos futuros professores à Educação Básica, agora na qualidade de Professores de Matemática, carregados de conhecimentos sobre o tema, mas distantes de sua prática docente e das questões que provavelmente permearão sua prática.

CAPÍTULO 2

ASPECTOS HISTÓRICOS DA FORMALIZAÇÃO DO NÚMERO REAL

Apresento neste capítulo parte do resultado dos estudos que fiz, relacionados à formalização do conceito número real, ao abordar o chamado "*movimento da aritmetização da análise*", usando a palavra movimento no sentido dado por Félix Klein (1849 - 1925).

Este texto surge, para mim, da busca pela compreensão do significado de conceito do número real na História da Matemática. De forma significativa surge este período, já que traz a formalização do conceito do qual este trabalho tem como tema. Acredito que

> *. . .* é imprescindível compreender a História da Matemática, não como uma ferramenta para a Educação Matemática, mas como uma Educação Matemática em si. Valorizando a materialização da Matemática nos contextos históricos, a História da Matemática torna-se Educação Matemática. (BATARCE, 2003, p. 25)

Este capítulo assume uma posição nesta tese ao situar o Material frente aos últimos desenvolvimentos que deram origem ao conceito de número real.

Em geral, o conceito de número real é tratado nos cursos de formação de professores de forma desvinculada do processo histórico no qual foi estabelecida a sua formalização. A referência que os textos dos livros de História da Matemática trazem é que a formalização do conceito de número real deu-se entre os séculos XVIII e XIX. Os cursos de História da Matemática, quando existentes no currículo das Licenciaturas, restringem-se a um tratamento que antecede a esse período. Penso que esse fato contribui para um empobrecimento das abordagens históricas e, de certa forma, compromete a formação do professor, considerando que o conceito de número está arraigado há mais de dois mil anos de história e o futuro professor desconhece essa história.

Concordo com D'Ambrosio quando escreve que:

> As práticas educativas se fundem em estilos de aprendizagem e nas tradições, e a história compreende o registro desses fundamentos. Portanto, é praticamente impossível discutir educação sem recorrer a esses registros e interpretações dos mesmos. Isso é igualmente verdade ao se fazer o ensino das várias disciplinas, em especial da Matemática, cujas raízes se confundem com a história da humanidade. (D'AMBROSIO,1999, p. 97)

Grande parte da Matemática tratada num curso de Licenciatura é fruto da produção de matemáticos que viveram no século XIX. Esse fato é do conhecimento de poucos. Pude presenciar quão grande é a reação de surpresa das pessoas ao perceberem que o conceito de número real tido como básico e inicial em todo curso de Cálculo ou Análise Matemática veio a ter seu fundamento sólido na Matemática muito depois de conceitos que na história da matemática surgiram depois destes, tais como funções, limites, seqüências, séries, integrais, etc..

Concentro esta abordagem no que concerne à construção dos números reais na apresentação das realizações dos matemáticos George Cantor (1845 – 1918), de Halle, Alemanha, e J. W. R. Dedekind (1831 – 1916), de Braunschweig,

Alemanha. Esta escolha deve-se ao fato de ser atribuído a esses matemáticos um papel de maior relevância nos livros de História da Matemática quando se trata da formalização do número real.

Concordo com a referência ao século XIX como a Idade do Rigor. Essa é a forma como muitos o consideram em face da fundamentação que a Análise Matemática recebeu e que ainda hoje é considerada como satisfatória. Esse processo de estabelecimento do rigor não pode ser considerado apenas como um processo de estabelecimento em bases sólidas de alguns conceitos ou de alguns teoremas básicos da Análise, mas foi o resultado de uma incursão em quase todos os domínios da Análise, colocando a disciplina no formato em que é ensinada hoje em escolas secundárias e em universidades. (JAHNKE, 2003, p. 155)

Como resultado desse movimento, áreas inteiras da Matemática puderam ser produzidas. Em particular, pontos importantes da Análise, que lidam com conceitos completamente novos, tais como: continuidade, continuidade uniforme, convergência uniforme, compacidade, completude etc. A grande maioria dos matemáticos da época trabalhou principalmente em perguntas técnicas, estendendo e aplicando as teorias analíticas que foram herdadas de pesquisas anteriores, obtendo, dessa forma, teoremas novos. Estes constituíram o pano de fundo principal para o interesse crescente relacionado à questão dos fundamentos.

A teoria de Séries de Fourier foi de particular importância, pois desafiava as idéias tidas, até então, sobre função, integral, convergência, continuidade etc.. As equações diferenciais, teoria do potencial, funções elípticas e outros temas também contribuíram com o processo de rigorização da análise. (JAHNKE, 2003, p. 155)

Uma outra motivação para a rigorização da Análise era a questão do ensino. Como por exemplo, Dedekind que dizia encontrar-se em uma situação desconfortável quando tivera que ensinar uma introdução à Análise, em que

questões eram respondidas e pediam pelo estabelecimento de um fundamento sólido para elas.

Segundo Jahnke (2003), no século XVIII e no início do século XIX, na França, a Análise esteve intimamente ligada às Físicas Teóricas, quando suas regras puderam ser confirmadas pelo sucesso nas aplicações. Na Alemanha, durante a primeira metade do século XIX, as escolas secundárias e universidades, em lugar de escolas secundárias técnicas, tornaram-se os centros de treinamento matemático e pesquisa, conduzindo a Matemática pura como um campo independente (WUSSING, 1998; p. 227). Dessa forma, dar à Matemática, incluindo a Análise, uma fundamentação sólida própria, independente de aplicações, tornou-se importante.

No período anterior ao século XIX, os números eram pensados em termos geométricos e essa formulação não era forte o suficiente para elucidar questões que surgiram na época. Uma substituição do modelo geométrico por um modelo muito mais formal, baseado na idéia de “números” (aritmetização), foi pensada de forma que tivesse o rigor necessário e, nesse modelo, as questões observadas pudessem ser abarcadas e resolvidas. Esse movimento foi denominado **Aritmetização da Análise.**

Embora Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897) tenha sido um dos precursores do movimento, Bernhard Bolzano (1781 – 1848) foi considerado, por Félix Klein (1849 – 1925), o pai da aritmetização da Análise, pois, por volta de 1817, mostrou em seus trabalhos estar consciente da necessidade de tal movimento. Segundo Eves (2004), Bolzano não foi um matemático reconhecido por seus colegas, porém foi ele quem construiu um primeiro exemplo de uma função contínua em todos os pontos de um intervalo e sem derivada em ponto algum desse intervalo. Mas, somente 45 anos mais tarde Weierstrass apresentou à Academia de Berlin, em 1872, um artigo exibindo uma função semelhante, que é contínua e não diferenciável em ponto algum, a função

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n x\pi)$$

onde a é par, $b \in [0,1)$ e $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

Durante a última metade do século XIX, um grande número de livros e artigos foi publicado e dedicado à definição precisa de número real e uma investigação de funções reais baseadas em tal definição foi implementada.

Em particular, o ano de 1872 foi um marco no desenvolvimento da Análise. Grandes contribuições de matemáticos, como H. C. R. (Charles) Méray (1835 – 1911), na Borgonha, França; Karl Weiertrass (1815 – 1879), Universidade de Berlin, Alemanha; H. Heini (1821 – 1881), de Halle, Alemanha; Hermann Hankel (1839 – 1873); George Cantor (1845 -1918), de Halle, Alemanha; J. W. R. Dedekind (1831 – 1916), de Braunschweig, Alemanha; foram feitas em direção ao movimento de aritmetização da Análise. O quadro[12] que apresento abaixo ilustra essas publicações.

1858	DEDEKIND trabalhou a idéia de “corte” nos números racionais para um curso introdutório em “Zürich Polytechnic”
Desde 1865	WEIERSTRASS apresentou sua teoria de números reais em conferências em Berlin
1867	HANKEL: Theorie der complexen Zahlsysteme (Teoria dos Números Complexos)
1869	MÉRAY: Remarques sur la nature des quantités (Observações sobre a Natureza dos Números)
1872	DEDEKIND: Stetigkeit und irrationale Zahlen (Continuidade e Números Irracionais)
1872	KOSSAK: Die Elemente der Arithmetik

[12] Quadro extraído de Jahnke (2003), cujos títulos em alemão foram traduzidos pelo Prof. Dr. Edson Luerdes.

	(Elementos de Aritmética)
1872	HEINE: Elemente der Functionenlhre (Elementos de Teoria das Funções)
1872	CANTOR: Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen (Sobre a Generalização de Um Teorema da Teoria das Séries Trigonométricas)
1877-1880	LIPSCHITZ: Grundlagen der Analysis (Fundamentos de Análise)
1878	DINI: Fondmenti per la teoria delle funzioni di variabili reali (Fundamentos da Teoria das Funções de Variável Real)
1880	THOMAE: Theorie der analytischen Functionen (Teoria das Funções Analíticas)
1898 – Segunda Edição	
1882	DU BOIS-REYMOND: Die allgemeine Functionentheorie (Teoria Geral das Funções)
1885-1886	STOLZ: Vorlesungen über allgemeine Arithmetik nach den neueren Ansichten (Conferências sobre Aritmética Geral Segundo os Novos Pontos de Vista)
1886	TANNERY: Introduction à la théorie dês fonctions (Introdução à Teoria das Funções)
1900	HILBERT: Über den Zahlbegriff (Sobre o Conceito de Número)
1903	FREGE: Grundgesetze der Arithmetik (Leis Fundamentais da Aritmética), Vol.2

Trago, a seguir, alguns aspectos históricos de duas apresentações na História da Matemática referentes à formalização do conceito de número real. Embora destas construções a matemática adjacente venha à tona, não me preocupei com uma exposição rigorosa do assunto.

CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS

Dedekind e os Cortes

Richard Dedekind realizou uma construção puramente aritmética para os números reais alguns anos depois das primeiras conferências de Weierstrass em Berlin, conforme o quadro acima. Ao considerar uma função como a que apresentei na página 33, Weiertrass e Dedekind vieram a considerar detalhadamente a questão do significado da irracionalidade. O envolvimento maior de Dedekind era com teoria de números algébricos, fortemente influenciado por Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) e Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866). (KATZ, 1993; YAHNKE, 2003)

No prefácio de sua breve obra *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, publicado em 1872, ele escreve que, como professor na Escola Politécnica Zürich, encontrou-se, pela primeira vez, obrigado a dissertar sobre os elementos do Cálculo Diferencial e, discutindo uma noção da aproximação de uma quantidade variável a um valor fixo limitado, teve que recorrer a evidências geométricas. Ele observa o estabelecimento de teoremas de continuidade e conclui sobre a necessidade de descobrir a verdadeira origem desses teoremas nos elementos da aritmética, assegurando, assim, uma real definição da essência de continuidade. Dedekind considera de suma importância, do ponto de vista didático, a intuição geométrica no Cálculo Diferencial. Porém, escreve que esta forma de introdução não pode ter nenhuma pretensão científica, dita sem reconhecimento. (DEDEKIND, 1872, p.1-2)

Isto mostra que Dedekind foi motivado não somente por um interesse sobre provas rigorosas, mas por reflexões sobre as relações entre análise (ou aritmética) e geometria.

A construção realizada por Dedekind ateve-se à definição de Eudoxo de proporcionalidade de quatro segmentos de reta, apresentada no livro V dos Elementos de Euclides. [13] Com uma interpretação independente de sua origem geométrica, Dedekind estabeleceu um conceito rigoroso de número real, interpretando a definição do seguinte modo:

> Qualquer razão entre segmentos de reta a, b produz um 'corte' no conjunto dos números racionais (i.e. o conjunto de todas as razões n/m entre inteiros) que decompõe em dois conjuntos disjuntos, de acordo com *ma* < *nb* ou sua negação. Duas razões são iguais (i.e., as quatro quantidades envolvidas estão em proporção) se, e somente se, os cortes correspondentes são o mesmo. (JAHNKE, 2003, p. 297, tradução livre)[14]

Vale observar que Dedekind usou conjuntos infinitos de números racionais em sua construção e insistiu em sua visão de que os "objetos" matemáticos, que nós chamamos números reais, são de fato criações da mente humana (Dedekind, 1872, p. 14).

Em adição ao propor uma construção aritmética para os números reais, Dedekind endereçou a questão de que esta construção tinha a ver com a idéia geométrica de pontos de uma linha reta, ou seja, com a noção intuitiva de uma quantidade contínua. Segundo Jahnke (2003), era claro para Dedekind que aquela razão entre segmentos de reta definiria um *corte* nos racionais. Mas, e a recíproca? Um

---

[13] Dedekind para Lipschitz, Junho 10, 1876 (LIPSCHITZ apud JAHNKE, 2003, p. 297)

[14] Tradução: "Any ratio between line segments a,b produces a "cut" in the set of rational numbers (i.e., the set of all ratios n/m between integers) wich decomposes it into two disjoint sets, according to whether ma<nb or its negation holds. Two ratios are equal (i.e, the four quantities involved are in proportion) if and only if cand only if the corresponding cuts are the same."

dado *corte* definiria uma possível razão entre segmentos de reta ou, se em um segmento unitário sendo fixado, cada *corte* corresponderia a um ponto bem definido da reta? Dedekind decidiu transferir ao domínio de número a propriedade que ele considerou a essência de continuidade da linha reta, isto é,

> Se todos os pontos de uma linha reta caem em duas classes de modo que cada ponto de uma primeira classe está a esquerda de cada ponto da segunda classe, então existe um, e somente um ponto que produz essa decomposição: de todos os pontos em duas classes, isto corta o segmento de reta em duas partes.(Dedekind, 1872, p. 3, tradução livre)[15]

O fato resultante dessa correspondência era, para Dedekind, uma garantia para constatar a analogia entre esta criação Matemática e a noção intuitiva de quantidade contínua.

Resumidamente, sem as intenções de um texto matemático, trazemos a idéia da construção de Dedekind da forma como é apresentada em Jahnke (2003).

Os Números de Dedekind

Considere todas as decomposições dos números racionais Q em dois conjuntos A_1, A_2 tais que $a_1 < a_2$ para todo $a_1 \in A_1$ e para todo $a_2 \in A_2$. O conjunto dos racionais é, então, a união disjunta de A_1 e A_2. Tal decomposição é chamada um corte (nos racionais). Se, para um corte (A_1, A_2), ou A_1 tem um elemento maximal ou A_2 tem um elemento minimal, $a \in Q$, o corte é dito ser produzido por a; nesta situação, dois possíveis cortes produzidos por a são considerados essencialmente o mesmo. Obviamente, existem muitos cortes que não são produzidos por números racionais. Um exemplo é dado por

$$\{a \in Q: a < 0 \text{ v } a^2 \leq 2\} \qquad \{a \in Q : a^2 > 2\}.$$

[15] Tradução: “If all points on a stright line fall into two classes in such a way that every point in the first class lies left of every point in the second class, then there exists one and only one point wich produces this decomposition of all points into two classes, this cut of the stright line into two parts.“

“Em qualquer caso em que um corte (A_1, A_2) dado não é produzido por um número racional, criamos um novo número, um número irracional α, que consideramos ser completamente definido pelo corte; diremos que o número *α* corresponde ao corte, ou que ele produz o corte (A_1, A_2)."

Se todos os pontos de uma linha reta caem em duas classes de modo que cada ponto de uma primeira classe está a esquerda de cada ponto da segunda classe, então existe um, e somente um ponto que produz essa decomposição: de todos os pontos em duas classes, isto corta o segmento de reta em duas partes.

O conjunto R dos números reais é, então, o resultado de uma ação intelectual pela qual cada corte (A_1, A_2) nos racionais é associado com um número real α (racional ou irracional criado).

Baseando-se na ordenação natural dos cortes, uma ordenação dos números reais pode ser introduzida. Dizendo respeito a essa ordenação, o conjunto dos reais satisfaz a chamada condição de corte:

Teorema: Se o conjunto de todos os números é decomposto em dois subconjuntos A_1 e A_2 tais que para todo $\alpha_1 \in A_1$ e $\alpha_2 \in A_2$ a relação $\alpha_1 < \alpha_2$ vale, então existe um único número $\alpha \in R$ que produz este corte, isto é, tal que $A_1 = \{\beta \in R : \beta < \alpha\}$ e $A_2 = R \setminus A_1$ ou $A_2 = \{\beta \in R : \beta > \alpha\}$ e $A_1 = R \setminus A_2$.

Esta propriedade era vista por Dedekind como uma propriedade característica de um continumm unidimensional. É um pouco complicado, porém não difícil, definir as operações aritméticas usuais nos números reais por cortes, bem como para verificar as leis que governam essas operações. Como nossa intenção é apenas a de expor a idéia da construção, escolhemos não trazer maiores detalhes aqui.

Passo a apresentar uma outra forma de construção dos números reais, via Seqüências de Fundamentais, ou Seqüências de Cauchy. Como observado

anteriormente, trarei, na seção seguinte, o trabalho de Cantor atenho-me a alguns comentários circunscritos a outros matemáticos que caminharam na mesma direção.

Cantor e as Seqüências Fundamentais

Outros trabalhos foram publicados na mesma direção, ou que tinham a meta de definir os números reais aritmeticamente, baseada na idéia geral de definir um número irracional em termos de sucessões de números racionais que satisfizessem o Critério de Cauchy.

Cantor atacou o problema de criar os números reais por um ponto de vista diferente de Dedekind. Ele estava interessado no antigo problema da convergência de séries de Fourier e a questão de quando uma série trigonométrica que representa uma dada função é necessariamente única.

Em 1870, dedicando-se à questão da convergência de uma série trigonométrica, obteve sucesso enfraquecendo condições sobre os pontos. Primeiramente, em 1871, ele mostrou que o teorema era verdadeiro se a representação fosse definida a menos de um número finito de pontos de um intervalo. No ano seguinte, foi capaz de provar a unicidade no caso em que o número destes excepcionais pontos é infinito, porém estes pontos deveriam estar distribuídos num modo específico. Para descrever esta distribuição de pontos, Cantor precisou de uma nova descrição dos números reais.

Assim como Dedekind, Cantor assumiu o conjunto de números racionais. Introduziu a noção de uma seqüência a_1, a_2 , ... , a_n, ... , chamada seqüência fundamental, com a propriedade que para qualquer valor racional positivo ε existe um inteiro n_1, tal que $|a_{m+n} - a_n| < \varepsilon$ para m e n $\geq n_1$, inteiros positivos. Hoje, conhecida como Seqüência de Cauchy, ou ainda, que satisfaz ao critério de Cauchy.

Para Cauchy, era óbvio que tal seqüência convergia a um número real b. Cantor, por outro lado, dizia que afirmar a existência de um número real b era cometer um erro lógico. Dessa forma, ele definiu o número real b a partir de uma seqüência fundamental de números racionais. Se b fosse racional, seria associado à seqüência b, b, b, . . ., b, . . . Mas também existiam sucessões que estavam associadas a números que não eram racionais. Por exemplo, a seqüência definida por $x_0 = 1$ e $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left[x_k + \frac{N}{x_k}\right]$ que converge para o número $\sqrt{N}$, se considerarmos por exemplo N = 2.

Como duas ou mais sucessões fundamentais poderiam convergir ao mesmo número real b, Cantor definiu uma relação de equivalência no conjunto de tais sucessões. Então, o número b, associado à seqüência $\{ a_i \}$ é tido como igual ao número b' associado à seqüência $\{ a'_i \}$ quando para todo $\varepsilon > 0$ existe n_1 tal que $| a_n - a'_n | < \varepsilon$, para $n > n_1$.

Dessa forma, o conjunto dos números reais é um **Conjunto de Classes de Equivalência de Seqüências Fundamentais**. Cantor quis mostrar que, num certo sentido, esse conjunto era o mesmo que a reta numérica.

Para ele, era claro que, a todo ponto da reta correspondia uma seqüência fundamental, mas ele percebeu que o estabelecimento da recíproca requeria um axioma, isto é, que para cada número real (classe de equivalência de sucessões de fundamentais) correspondia um ponto definido na reta.

Tendo definido o conjunto dos números reais, Cantor retornou à questão original. Envolvendo séries trigonométricas e usando sua identificação de números reais com os pontos da reta, foi capaz de resolver seu problema inicial, sobre representação de funções numa série de funções trigonométricas.

Cantor dedicou-se, também, à teoria do infinito e seu trabalho, num certo sentido, dá continuidade a argumentos ligados aos paradoxos de Zenão de Eléia (450 a.C.). A teoria de conjuntos estabelecida por Cantor invade quase todos os ramos da Matemática e mostrou-se importante na Topologia e nos fundamentos das funções reais. (EVES, 2004; p. 616).

Em torno do trabalho descrito acima, muitas questões surgiram para Cantor. Podemos citar como exemplo a da densidade do conjunto dos números racionais e da sua não continuidade. Ou, ainda, da sua intuição de que deveriam haver "mais" números irracionais que racionais. Cantor colocou numa carta, escrita em novembro de 1873 a Dedekind, a seguinte questão:

> Pegue a coleção de todos os números inteiros positivos n e denote por (n); então pense na coleção de todos os números reais x e denote por (x); a questão é, simplesmente, quando (n) e (x) podem ser correspondidos tal que cada indivíduo de uma coleção corresponde a um e somente um da outra? Estou inclinado à opinião de que (n) e (x) não permitem tal correspondência única, mas eu não encontro a razão. (KATZ, 1993, p. 662, tradução livre) [16]

Sem obter uma resposta de Dedekind, um mês mais tarde Cantor mostrou, por contradição, que a existência de tal correspondência era impossível.

Em 1874, em um trabalho que também incluía a demonstração do fato acima, Cantor mostrou que o conjunto dos números algébricos poderia ser posto em correspondência um-a-um com o conjunto dos números naturais e, em seguida, que havia um número infinito de números transcendentes. Porém, o que de mais importante ele estabeleceu foi uma técnica de contagem de coleções infinitas determinando uma diferença clara no "tamanho" (cardinalidade) do continumm de números reais e o conjunto de números racionais bem como dos números

[16] Tradução: "Take the collection of all positive whole numbers *n* and denote it by (*n*); then think of the collection of all real numbers *x* and denote it by (*x*) ; the question is simply whether (*n*) and (*x*) may be corresponded so that each individual of one collection corresponds to one and only one of the other? . . . As much as I am inclined to the opinion that (n) and (x) permit no such unique correspondence, I cannot find the reason."

algébricos. Cantor, numa outra carta enviada a Dedekind, indagou sobre a possibilidade de uma correspondência um-a-um entre um quadrado e um intervalo, obtendo a negativa como resposta, o que era de se esperar, pois alguns dos colegas de Cantor chegaram a classificar a questão como ridícula. Três anos após, Cantor descobriu que Dedekind estava enganado, ou seja, que de fato uma tal correspondência existia. Entretanto, havia um problema com esta correspondência, que foi corrigido por Cantor em seguida, estabelecendo, enfim, de fato a existência. O resultado causou um espanto na comunidade Matemática da época, inclusive a Dedekind, que mostrou que a aplicação construída por Cantor era descontínua. Além disso, outros matemáticos ofereceram prova de que nenhuma aplicação contínua dessa forma era possível e que, então, a dimensão era invariante sob correspondências um-a-um.

Ao perceber que o conceito de correspondência um-a-um poderia ser fundamentado numa teoria nova de conjuntos, em 1879, Cantor começou o estudo da cardinalidade de um conjunto infinito, tomando como base essa idéia.

Segundo KATZ (1993), a fim de entender as propriedades do *continuum*, Cantor foi levado a estabelecer, durante as próximas duas décadas, uma teoria detalhada de conjuntos infinitos, publicada, em parte, em 1895 e 1897, numa coleção com o título “Beiträge zur Begründung der transfinitem Mengenlehrede”. [17]

Foi Dedekind quem completou o processo de aritmetização da Análise. Juntamente com Cantor, ele desenvolveu algumas das idéias mais avançadas da teoria de conjuntos. No trabalho *Was sind und was sollen die Zahlen*, [18] desenvolvido num período de 15 anos, mas só publicado em 1888, Dedekind caracterizou os números naturais e os números racionais em termos de conjuntos. Ainda nesse trabalho, introduziu noções básicas da Teoria de Conjuntos.

---

[17] “Contribuições para os Fundamentos de Teoria de conjuntos Transfinitos.”

[18] “O que são os (naturais) números e o que querem dizer eles? “

Da caracterização de Dedekind dos números naturais, Cantor pôde deduzir o princípio de indução Matemática, como também dar uma definição e as propriedades de relação de ordem em **N**, as operações de adição e multiplicação.[19]

Giuseppe Peano (1858-1932) e Gottlob Frege (1848-1925) foram outros dois matemáticos que consideraram a mesma questão da construção dos números naturais. O trabalho de Frege apareceu impresso em 1884 e o de Peano em 1889. O trabalho citado no parágrafo anterior, junto com o trabalho de Weierstrass e sua escola, habilitou o Cálculo a ser colocado sob fundamentos firmes que, começando com as noções básicas de Teoria de Conjuntos, mostrava também a independência do Cálculo ao mundo físico de movimento e curvas.

Segundo EVES (2004), no início do século XX mostrou-se que o sistema dos números naturais pode ser definido em termos da teoria dos conjuntos e especialistas em lógica, como Bertrand Russel (1872 – 1970) e Alfred North Whitehead (1861 – 1947) empenharam-se em aprofundar esses fundamentos, deduzindo a teoria de conjuntos a partir de um embasamento no cálculo proposicional da lógica. Comenta, ainda, que o fato desse passo ter sido dado com êxito ou não, não é consenso de todos os matemáticos.

[19]**N** é o conjunto dos números naturais.

CAPÍTULO 3

OS CAMINHOS TRILHADOS

Considero que o sucesso de um trabalho investigativo está intrinsecamente ligado à metodologia de pesquisa utilizada. Dada à importância que atribuo a um detalhamento dos procedimentos utilizados para a coleta e para a análise dos dados obtidos, busco, neste capítulo, fundamentar e apresentar as justificativas que me permitiram percorrer o caminho escolhido, a partir da utilização das metodologias e dos procedimentos que adotei. Ainda que o exposto neste capítulo ocupe uma posição intermediária no texto desta Tese, quero explicitar aqui que as palavras que o compõem somente foram encontradas no momento em que a pesquisa já havia adquirido um contorno, mesmo que suave, mas capaz de prever os rumos deste trabalho e, embora possa parecer ambíguo, o caminho trilhado só pôde ser descrito após cada passo ter sido dado.

A escolha de desenvolver este trabalho de pesquisa por meio de uma abordagem qualitativa deve-se ao fato pelo qual compreendo esta abordagem.

> . . . a pesquisa qualitativa é o entender, é o caminho para escapar da mesmice. Lida e dá atenção às pessoas e às suas idéias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas. E a análise dos resultados permitirá propor os próximos passos. (D'Ambrosio in Borba e Araújo, 2004, p.7)

Segundo BOGDAN e BIKLEN (1991), um trabalho de investigação qualitativa pode ser assinalado por algumas características, as quais considero a seguir.

Na investigação qualitativa, a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. Dessa forma, os dados passam a ter relevância na investigação a partir do momento em que o pesquisador se concentra de forma a interpretá-los inserido no contexto no qual eles foram coletados.

> . . . os dados são recolhidos em situação e complementados pela informação que se obtém através do contacto directo. Além do mais, os materiais registrados mecanicamente são revistos na sua totalidade pelo investigador, sendo o entendimento que este tem deles o instrumento-chave de análise. (. . .) Os investigadores qualitativos freqüentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que as acções podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência. (BOGDAN; BIKLEN, 1991, p. 47)

Uma segunda característica a ser assinalada é a qualidade descritiva da investigação. A ênfase está na descrição do observado, não pura e simplesmente, mas carregada da interpretação serrada do investigador. Sendo assim,

> . . . os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação. Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registros oficiais. (BOGDAN; BIKLEN, 1991, p. 48)

Outra característica aponta para o processo de investigação ocupando uma posição central em relação aos interesses do pesquisador. Os resultados ou produtos puros desse processo são considerados, de certa forma, secundários. Desse modo, o significado passa a ter importância fundamental na abordagem qualitativa.

Os dados são analisados pelos investigadores qualitativos de forma indutiva, não são coletados a fim de confirmar ou enfraquecer hipóteses construídas previamente; em contrapartida, as abstrações são construídas à medida que os

dados particulares que foram recolhidos passam a se agrupar. (BOGDAN; BIKLEN, 1991, p. 50)

Considerando que não existe uma neutralidade por parte do investigador perante os dados, o processo de condução da investigação qualitativa reflete uma espécie de diálogo entre os investigadores e os sujeitos da pesquisa. Mais, ainda, "*os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador*." (BOGDAN; BIKLEN, 1991, p. 51)

Por conta dessas características é que concebo a abordagem qualitativa como vital para que este trabalho possa contribuir de forma explícita para o campo de pesquisa no qual ele está inserido, a Educação Matemática.

Convém observar a relevância que a revisão de literatura trouxe a este trabalho, sendo considerada para mim primordial. Não só para que eu pudesse delimitar o problema, mas por trazer o esclarecimento sobre a problemática referida no Capítulo 1, de forma a corroborar com a realização do mesmo.

> A revisão de literatura é importante não só para que 'não se reinvente a roda', refazendo o que já está feito, mas também porque o exercício de encontrar lacunas em trabalhos realizados ajuda na 'focalização da lente' do pesquisador. (BORBA; ARAÚJO, 2004, p. 39)

Esta etapa do trabalho intercepta todas as outras, em face da atenção dedicada a todo o momento às publicações que se referem ao nosso tema de estudo. Por este acompanhamento é que posso afirmar a carência de materiais que possam trazer encaminhamentos sob forma de proposta para o tratamento dos números reais. A literatura referente ao tema permite-me apenas trazer uma ilustração: o trabalho de Ripoll *et al* (2006). Este livro apresenta um tratamento para os conjuntos numéricos. Entretanto, a abordagem realizada dista das idéias contidas no trabalho de Baroni e Nascimento (2005) e, ao considerá-lo como uma Proposta

diferenciada para a apresentação do conjunto dos números reais num curso de formação de professores, passei a tê-lo como objeto de pesquisa.

Mais precisamente, a Proposta a que me atenho encontra-se no Material[20] elaborado pela Prof.ª Rosa Lúcia Sverzut Baroni e pelo Prof. Dr. Vanderlei M. Nascimento, [21] "Um tratamento, via medição, para os números reais", publicado sob forma de mini-curso no VI Seminário Nacional de História da Matemática, ocorrido em Brasília em março de 2005, do qual tive a oportunidade de participar.

Apropriando-se das idéias de Henri Lebesgue (1875-1941), contidas no livro "*Measure and Integral*", os autores retomam o processo de medição de segmentos para apresentar uma construção geométrica para os números reais positivos.

Como dito na introdução, pretendo, neste trabalho, investigar a utilização dessa Proposta, buscando pelas possibilidades desse tratamento para o número real, via medição de segmentos, para cursos de Formação de Professores de Matemática em uma sala de aula na disciplina Análise.

A análise dessa Proposta dar-se-á sob a luz do observado na literatura relacionada à fragilidade apresentada pelos alunos e nas pesquisas que tratam de questões concernentes ao ensino e aprendizagem dos números reais. O que atribui ao Capítulo 1 papel de relevância neste trabalho.

O primeiro contato que tive com o Material (faço essa referência ao trabalho) foi por meio de um olhar desprendido de uma sala de aula, ou seja, sem a intenção de uma professora que pudesse usufruir dele para a possível utilização num curso, mas, sim, como uma estudante; olhei da mesma forma como olhei para os livros-textos de Matemática na minha formação buscando pela compreensão do mesmo.

---

[20] Esse material esteve em nossas mãos a partir de novembro de 2004.
[21] Ambos Professores do Departamento de Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP) de Rio Claro-SP

A partir do momento em que modifiquei esse olhar para o de uma educadora matemática, percebi que um estudo daquele Material poderia ser mais bem realizado se eu pudesse vê-lo em um momento em que fosse utilizado em sala de aula, por outras pessoas. Esse momento foi proporcionado e, desse modo, decidi acompanhar as aulas na qual seria utilizado como texto central por parte de uma disciplina. Foi o curso de Análise do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática ao qual pertenço.

Procuro, nas próximas páginas, apresentar de forma detalhada o desenvolvimento do curso no que diz respeito às aulas nas quais o Material foi utilizado. Dessa forma, esta utilização permitiu que diversos pontos pudessem ser observados e pormenorizados, dúvidas puderam ser esclarecidas, idéias surgiram e, de forma intensa, uma reflexão sobre as questões e os apontamentos que capturei na revisão bibliográfica com a qual pude compor o Primeiro Capítulo.

Sobre a observação realizada na sala de aula nos encontros/aulas

Esta fase da pesquisa foi realizada na sala de aula onde ocorreram os encontros/aulas da disciplina Análise do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, sob a responsabilidade da Prof.ª Dr.ª Rosa Lúcia Sverzut Baroni, no primeiro semestre do ano de 2005. Os encontros/aulas foram realizados nas quartas-feiras no período da manhã, das oito às doze horas, com carga horária de quatro horas semanais, totalizando 13 encontros. O Material foi utilizado apenas em uma parte destes encontros.

É importante ressaltar que, embora o objeto de estudo deste trabalho seja o Material utilizado no curso, há de se considerar todo o cenário no qual ele foi utilizado, dessa forma, tenho este cenário como parte dos dados sob os quais se veste esta pesquisa. Este cenário é composto de uma sala de aula num determinado tempo histórico, composto por um grupo de alunos, uma professora, uma metodologia de ensino e as circunstâncias possíveis para que o Material

pudesse ser utilizado. O que me faz considerar este conjunto é o fato de conceber os resultados obtidos nesta investigação imbuídos desta estrutura. Por conta desta concepção é que considero a relevância do detalhamento que trago a seguir.

Observo que, no primeiro encontro da Professora com os alunos, foi realizado o processo de seleção da turma em relação aos alunos com a matrícula na condição de aluno especial. [22]

A turma deveria ser composta de 20 alunos. Foi aplicado um questionário aos alunos, especiais e regulares, organizado de modo que a professora pudesse conhecê-los, levantando alguns pontos que poderiam ajudar a professora no momento da escolha dos alunos que cursariam a disciplina em caráter de aluno especial. O início do curso propriamente dito aconteceu na semana seguinte. Optei por observar todos os encontros do curso.

"*Sabendo que o meio nunca pode ser completamente capturado, ele ou ela dedicam-se a transmitir o máximo possível para o papel, dentro dos parâmetros dos objectivos de investigação do projecto*." (BOGDAN; BIKLEN, 1991, p. 163). De posse de um caderno, à medida que as aulas ocorriam, procurei anotar o que julgava pertinente, incluindo aí os comentários dos alunos, da professora, algumas reações de ambos, fragmentos de algumas falas etc.

Segundo Bogdan e Biklen (1991)

> . . . são as notas de campo: o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e reflectindo sobre os dados de um estudo qualitativo. (p. 150)

[22]O Programa possui alunos na condição de aluno com matrícula especial, ou seja, alunos que não participam de forma regular e, eventualmente, em disciplinas. Em função do grande número de alunos que buscam essa condição, há a necessidade de uma seleção por parte do professor para essa escolha, que normalmente é feita no primeiro dia de aula, com critério a ser estabelecido pelo professor da disciplina. As turmas devem ter no máximo 20 alunos, incluindo as condições regular e especial.

Em alguns momentos de discussão cheguei a usar um gravador para ter um prejuízo menor em face do acontecido. O arquivo de fitas gravadas também foi uma fonte utilizada, de forma que eu pudesse agrupar essas gravações às notas de campo que compunha. Num momento posterior aos encontros/aulas, eu retornava às anotações a fim de acrescentar algo mais que viesse da lembrança a respeito do observado. Desse modo, elaborei o Diário de Campo.

Sobre a dinâmica das aulas

As aulas aconteceram sob forma de seminários. A turma foi dividida em grupos de até quatro alunos. Em cada encontro todos os alunos falariam ou apresentariam seminário. A professora escolheria no encontro anterior o conteúdo a ser apresentado no seminário, de forma que todos os alunos soubessem com antecedência o assunto a ser tratado na aula seguinte. Porém, a parte que cabia a cada grupo seria distribuída sob forma de sorteio somente no dia a ser apresentado o seminário. As aulas teriam início às 8h00min e os alunos teriam um tempo de 30 minutos para que pudessem se organizar, para que pudessem distribuir entre eles o conteúdo da aula, ou até conversarem entre os grupos ou com a professora. Conseqüentemente, os seminários começariam às 8h30min com término às 12h00min. [23]

A dinâmica adotada pela professora permitiu que todos os alunos pudessem falar em todos os encontros. [24] Durante a exposição dos seminários, os grupos tinham autonomia para, quando necessário, interromper a apresentação, a fim de que pudessem esclarecer qualquer dúvida que tivessem. Por outro lado, poderiam também ser interrompidos pelos demais alunos para possíveis comentários ou esclarecimentos. Essa foi a dinâmica dos encontros/aulas.

---

[23] Intervalo de 20 min. Por volta de 10:00.
[24] Eventualmente, por falta de tempo, algum grupo ou aluno deixou de apresentar na seqüência prevista.

Ainda neste período, percebi que minha compreensão poderia ser ampliada ouvindo alguns alunos sobre aspectos por mim considerados complementares à pesquisa. Sendo assim, investi num tipo particular de triangulação de métodos, que consiste na utilização de vários e distintos procedimentos para a obtenção de dados. (Alvez-Mazzotti,1998; Borba e Araújo, 2004)

Dessa forma, parti para o emprego das entrevistas. Mais precisamente, o que fiz foi tornar a possibilidade dessa escuta um ponto a mais a ser obtido, sob a forma de dados para esta investigação. Ao invés de construir minhas conclusões a partir de observações, utilizei as entrevistas para cercar algum detalhe ou para compreender melhor algum fato ocorrido durante as observações, promovendo, assim, uma maior credibilidade da pesquisa. (Alves-Mazzotti, 1998; Lincoln e Guba, 1985; Borba e Araújo, 2004) Entretanto, já no desenvolvimento desta etapa da pesquisa, passei a atribuir às entrevistas um papel além do que eu almejava e, ao considerar os resultados da análise essenciais às intenções desta pesquisa, apresento-os em destaque neste trabalho.

Alves-Mazzotti (1998) nos diz que existem outros procedimentos que podem aumentar a credibilidade de uma pesquisa qualitativa além da triangulação, como, por exemplo: a permanência prolongada no campo, a checagem pelos participantes, o questionamento por pares, a análise de hipóteses alternativas e a análise de casos negativos. (p. 172-174) A minha permanência nos encontros da disciplina foi durante todo o curso.

Sobre as entrevistas realizadas com alguns alunos da disciplina

As entrevistas foram semi-estruturadas; conseqüentemente, não estabeleciam uma ordem rígida nas questões, permitindo aos entrevistados discorrerem sobre a questão proposta, partindo das informações que eles detinham. De acordo com Bogdan e Biklen (1991), as entrevistas vieram para que dados descritivos na linguagem do próprio sujeito pudessem ser obtidos.

Em nenhuma das entrevistas o tempo foi limitado e procurei não influenciar no discurso dos entrevistados. Para Lüdke e André (1986, p. 34), a "*entrevista semi-estruturada se desenrola a partir de um esquema básico, porém não aplicado rigidamente, permitindo que o entrevistador faça as necessárias adaptações*".

A entrevista é uma das principais técnicas de trabalho em quase todos os tipos de pesquisa utilizados nas Ciências Sociais. Uma de suas mais importantes características é a interação que se estabelece entre entrevistador e entrevistado.Na abordagem qualitativa, utiliza-se, freqüentemente, a observação participante, que coloca o pesquisador diante da realidade estudada. A entrevista permite um maior aprofundamento das informações obtidas e a análise documental que complementa os dados obtidos através da observação. (LUDKE; ANDRÉ, 1986, p. 9)

Para que eu pudesse realizar as entrevistas, escolhi, antes mesmo do término da disciplina, quatro alunos. O critério de escolha foi estabelecido em função da diversidade em relação à formação e ao campo de atuação dos diferentes entrevistados. Os escolhidos eram professores do Ensino Fundamental e Médio; professores do Ensino Superior, formadores de professores; e professores recém-formados sem o exercício da profissão. As entrevistas aconteceram em uma das salas de aula das dependências do Departamento de Matemática da UNESP – Rio Claro, em horários diferenciados, em comum acordo com o entrevistado. No texto deste trabalho, refiro-me aos entrevistados como Professores P1, P2, P3 e P4.

Os sujeitos P1, P3 e P4 foram entrevistados no dia 23 de junho, e o sujeito P2 no dia 28 junho. Todas as entrevistas ocorreram após o término da disciplina.

As entrevistas foram áudio-gravadas para que os dados coletados pudessem conter um maior número de detalhes possíveis. Posteriormente, foram transcritas,

para que pudessem ser analisadas, embora eu acredite que o momento da análise iniciou-se já em seguida à transcrição.

Porém, foi somente após uma leitura com afinco dessas entrevistas que busquei identificar os pontos nas falas dos entrevistados que suscitassem alguma convergência ou divergência entre elas. De modo natural, esses **pontos** emergiram. Foi a atenção que detive neles que me permitiu definir a estrutura desta análise, apresentada no Capítulo 5. Este capítulo situa as entrevistas como fonte principal, vistas, entretanto, sob a luz das observações realizadas nos encontros, ou nas aulas. Mais precisamente, esta parte do trabalho de análise ocorreu de forma conectada à etapa das observações em sala, apresentada no Diário de Campo.

É no Capítulo Quatro que dedico a apresentação/comentário do Material. Anterior e posterior ao momento em que tive as notas de campo e as entrevistas em mãos, procurei por um movimento das partes que compõe o texto " Um tratamento, via medição, para os números reais", de Baroni e Nascimento (2005). Este movimento vem com a intenção de explicitar da melhor forma possível as compreensões que tive dele. Considero de grande relevância essa etapa do trabalho, pois acredito que essa apresentação/comentário poderá trazer contribuições diretas à adoção das idéias que o Material contém para utilização em sala de aula, quer seja num aprimoramento do próprio texto que o Material contém.

A escolha de nomear este capítulo como Apresentação/Comentário surgiu exatamente do significado que essas palavras,[25] quando agrupadas, expressam, para mim, o sentido que quero dar à elaboração e à presença do Capítulo 4 neste trabalho de pesquisa.

---

[25] Apresentar: submeter à apreciação; indicar; propor
Comentário: série de observações com que se esclarece e/ou critica uma produção literária ou científica; anotação, nota.
Fonte: Novo Dicionário Aurélio da Língua portuguesa. 2004. Editora Positivo

Destaco o modo pelo qual as fontes puderam se entrelaçar/complementar, visto que ambas trouxeram-me elementos que, em diferentes formatos, contribuíram explicitamente para a efetiva realização desta pesquisa, trazendo os resultados possíveis de todo este processo.

CAPÍTULO 4

APRESENTAÇÃO/COMENTÁRIO DO M A T E R I A L

Este capítulo traz uma apresentação/comentário do texto "Um tratamento para os números reais via medição de segmentos", elaborado pelos professores Rosa Lúcia Sverzut Baroni e Vanderlei Marcos do Nascimento, ambos do Departamento de Matemática da Unesp – Rio Claro. Esse texto foi apresentado pela primeira vez sob a forma de Mini-curso no VI Seminário Nacional de História da Matemática em Brasília no primeiro semestre do ano de dois mil e cinco, do qual tive a oportunidade de participar.

Baroni e Nascimento (2005) apropriam-se das idéias de Henri Lebesgue (1875 – 1941) contidas no livro *Measure and the Integral*, e retomam o processo de medição de segmentos para apresentarem uma construção geométrica para os *números reais* positivos.

A realização desta etapa da pesquisa deu-se a partir do acompanhamento das aulas da disciplina de Análise do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática para alunos de Mestrado e Doutorado, cujo texto foi a principal referência da bibliografia utilizada por parte da disciplina.

Mesmo antes deste acompanhamento, já havia me dedicado ao estudo do Material "*Um tratamento para os via medição de segmentos*", sendo que o primeiro contato que tive com o mesmo ocorreu de maneira informal, como o de

uma aluna que estuda um determinado assunto num livro sem o auxílio de um professor. Estudei o texto, resolvendo os exercícios propostos e obtendo, conseqüentemente, minhas primeiras notas. Porém, desse estudo, dúvidas surgiram. Algumas em relação ao conteúdo, mas, com força maior, aquelas que obtive a partir do momento em que foquei o olhar para o Material como proposta, ao colocar-me como uma educadora matemática em busca de um texto que pudesse abarcar questões relativas à apresentação dos *Números reais* em cursos de formação de professores.

Conforme explicitei no capítulo três, o que trata especificamente dos procedimentos metodológicos utilizados nesta pesquisa, foi a minha presença como pesquisadora numa sala de aula, na qual o texto estava sendo utilizado como bibliografia principal, para um curso cujos alunos eram professores, uns em exercício da profissão, outros não, que possibilitou que as notas de campo fossem constituídas, consideradas fonte principal para a composição deste capítulo.

Deste modo, diversos pontos puderam ser observados e pormenorizados, dúvidas puderam ser esclarecidas, idéias foram surgindo, sedimentando e compondo essa etapa do trabalho, constituída após uma intensa reflexão sobre as questões e os apontamentos até então colocados.

Explicito o desejo de que essa apresentação/comentário possa contribuir com o Material, acreditando que as idéias nele contidas possam ser uma alternativa no tratamento dos *Números reais* em cursos de formação de professores. Pretendo trazer esclarecimentos, compartilhando uma maior compreensão deste texto, frisando que essa compreensão advém do acompanhamento das aulas em que o Material foi utilizado.

Escolhi organizar os resultados obtidos para essa **apresentação/comentário**, em dois momentos. Inicialmente, constituirei um texto no qual, embora se denomine **descrição**, minha intenção é de que não possua apenas o poder descritivo.

Espero que este texto apresente-se com um poder elucidativo: ao utilizar-me de fragmentos do próprio texto, explicito algumas compreensões e, por um movimento, trago-as como pano de fundo para esta redação. Posteriormente, trago o que denominei **discussão**. O momento de discussão pode ser explicitado de forma maior ao considerar que

> A abordagem investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a idéia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 43)

Sendo assim, é essa a inspiração que me orienta a compor essa discussão, elaborada mais intimamente a partir dos dados pertencentes ao Diário de Campo, sem, entretanto, desprezar o conteúdo das Entrevistas. Atendo-me ao objetivo deste trabalho, apresentarei nesta seção os resultados da pesquisa no que se refere às formas como vi as possibilidades que o Material apresenta para o tratamento do *Número real* em cursos de formação de professores.

Acredito que essa escolha contribuirá para que a percepção acerca do observado possa se expressar de uma forma satisfatória.

Os apontamentos que trago no momento da discussão servirão como diretrizes/balizadores para que as conclusões alcançadas estejam em consonância com o objetivo deste trabalho. Poderão ser descritos pontualmente ou, quando necessário, acompanhado da sua origem, como, por exemplo, um comentário de um aluno, uma definição, um exercício, um trecho do texto ou, ainda, algo isolado do contexto da sala de aula, mediante um apontamento/percepção de minha parte.

Com o intuito de facilitar a leitura deste capítulo, busquei uma organização que proporcionasse uma melhor maneira de conseguir esta tessitura – o Material, o Diário de Campo e as Entrevistas. Escolhi organizá-lo respeitando a própria seção do Material. Sendo assim, a cada seção seguem: a “descrição” e a “discussão”.

Convém acrescentar que, *a priori*, pensamos numa organização isenta desta separação, porém considerei-a de leitura complexa, contrariando o que me havia proposto fazer. Como os dados foram coletados aula a aula, naturalmente existiram encontros/aulas em que as notas de campo às vezes me ofereceram apontamentos mais detalhados, possibilitando, então, um comentário mais sintetizado sobre o assunto em questão, o que, considerando seção a seção, implicou num volume maior do texto, ou não.

Começo por explicitar a forma como é composto o Material:

4.1 A composição do Material

O Material é composto de um Resumo, uma Apresentação e ainda, nove seções. São elas:

1. Resumo
2. Apresentação
3. Traçando uma trajetória para o número
4. Uma pequena reflexão
5. Segmentos proporcionais
6. Incomensurabilidade
7. O processo de medição de um segmento *AB* com relação a uma unidade *U*, e o símbolo que traduz esse processo
    - 7.1 O processo e o símbolo que o traduz
    - 7.2 O processo inverso
8. Operações
9. A comensurabilidade revista
10. Conclusão
11. Bibliografia

Respeitando a ordem pela qual o Material é apresentado, que foi a mesma ordem seguida no curso, passo à descrição da primeira seção.

4.2 Análise do Material

4.2.1. Seção 3: Traçando uma trajetória para o número

Descrição

A seção inicia-se com a citação[26]

> . . . the questions are the following:
> _What is a derivate really? Answer: a limit.
> _What is an integral really? Answer: a limit.
> _What is an infinite series $a_1+a_2+a_3+...$ really? Answer: a limit.
> This leads to
> -What is a limit? Answer: a number.
> And, finally, the last question:
> -What is a number?
> (HAIRER e WANNER apud BARONI e NASCIMENTO, 2005, p. 2)

Em seguida os autores usam da questão: "*O que é um número?*" para lembrar ao leitor que, cedo ou tarde, nos deparamos com essa pergunta, dizendo ainda que "*Seja ela qual for, nunca nos sentimos satisfeitos e fica sempre a sensação de que algo está faltando*" (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 2).

Para colocar o leitor numa posição mais confortável em relação a esta questão, os autores escrevem que mesmo grandes matemáticos se posicionaram diferentemente perante esse tema. Eles buscam por trechos de trabalhos de três matemáticos para ilustrar este comentário. Trago uma das citações ". . . *Não respondemos a pergunta: 'O que é um número?' pois matemáticos não precisam fazer essa pergunta – e ela não ocorreria a ninguém mais!*" (GRIFFITHS e

---

[26]Tradução:
. . .as questões são as seguintes:
_O que é uma derivada realmente? Resposta: um limite.
_O que é uma integral realmente? Resposta: um limite.
_O que é uma série infinita $a_1+a_2+a_3+...$ realmente? Resposta: um limite.
_O que é um limite? Reposta: um número.
E, finalmente, a última questão:
_O que é um número?

HILTON apud BARONI e NASCIMENTO, 2005, p. 3, aspas no original). Mais à frente os autores escrevem:

> Como também não pretendemos dar uma resposta pronta e acabada à questão, apresentamos agora algo que podemos chamar, copiando o termo de Griffiths & Hilton, de *motivação histórica*, com o objetivo de mostrar que essa questão não tem resposta fácil nem rápida. Nem sequer, uma resposta apenas. (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 3)

Essa motivação histórica, como os próprios autores observam, trata-se de uma sucinta apresentação composta de alguns dados históricos acerca dos processos infinitos, expondo um pouco sobre a crise da escola pitagórica, o descobrimento da incomensurabilidade de segmentos, apontando o tratamento que os gregos davam aos números. Os autores escrevem

> A dicotomia entre números e grandeza contínua exigia um novo método pra tratar a álgebra (álgebra aritmética) que os pitagóricos haviam herdado dos babilônios. Essa nova álgebra (álgebra geométrica) tratava dos problemas algébricos com a ajuda de construções geométricas. (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 4)

Expondo de forma concisa alguns pontos da História da Matemática, os autores usam as palavras de Toeplitz para observar que, no livro V dos Elementos de Euclides, pode ser encontrado o edifício acabado da teoria das proporções, que desde então formou a base e que, mesmo hoje, embora com transformações, ainda é a característica decisiva do conceito de número e da teoria dos processos infinitos. (TOEPLITZ *apud* BARONI e NASCIMENTO, 2005, p. 4).

Os autores comentam superficialmente sobre o movimento da aritmetização da Análise colocando que, com o estabelecimento do conceito de *Número real* por processos infinitos a partir dos números inteiros, o conceito de quantidade foi desvinculado de todas as suas <u>conotações geométricas</u>, e escrevem: "*Neste trabalho, entretanto, queremos, mesmo, explorar, até onde possível, aquelas conotações*." (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 5). Com isto, eles encerram a

primeira seção e, conforme explicitei na página 60 deste trabalho, começo a apresentar a discussão da mesma.

Discussão

Um primeiro apontamento que faço refere-se à citação que abre esta descrição, e que, sem dúvida, remete o leitor a um exercício de reflexão sobre a relevância que esse ente “número” possui na Matemática. Muitas vezes, atravessamos um curso de cálculo nos preocupando com fórmulas, técnicas, definições e resultados, sem ao menos prestarmos atenção ao que realmente é um número. Mas, o que é um número? Embora seja essa uma questão imbuída de diferentes concepções e preceitos filosóficos acerca do nível de ensino que estamos lidando, acredito que o leitor, quando indagado a respeito, pode trazer à tona um interesse por questões relacionadas a esse ente, pois concordo com Griffiths & Hilton quando escrevem que essa pergunta só ocorreria para os matemáticos e eles não precisam fazer essa pergunta.

Isso reforça o que comentei no primeiro capítulo, a respeito da forma como o *Número real* é apresentado axiomaticamente num curso de Análise Matemática, “apenas” como um Corpo Ordenado Completo, porque somente isso interessa ali.

Entretanto, concordo com Shulman (1986) quando chama a atenção para a necessidade que o professor tem de conhecer bem os conteúdos que ensina. Para ele, o professor não tem de conhecer estes conteúdos do mesmo modo que o cientista, mas de um modo diferente. Muito em especial, tem de conhecer modos de torná-los compreensíveis e relevantes para os alunos.

Vale mencionar que os diferentes recortes da História da Matemática, com algumas informações sobre o assunto em questão, embora tenham sido feitos de um modo breve, sem dúvida, enriquecem o texto. Foram alvo de muitos

comentários por parte dos alunos. O que extraí deste momento foi o interesse por parte dos alunos, reforçando, dessa forma, a presença deles no texto.

Passo a descrever a próxima seção.

4.2.2. Seção 4: Uma pequena reflexão

Descrição

O texto apresenta duas questões que convidam o leitor a uma discussão, ou, como os próprios autores dizem: a uma pequena reflexão. As questões são as seguintes:

> Questão 1 – Suponha que você esteja tentando explicar 'número negativo' a alguém que nunca tenha tido contato com o conceito e você se depara com o comentário:
> 'números negativos não podem existir porque não podemos ter menos que nada'
> Como você responderia?
>
> Questão 2 – 'O conjunto dos números naturais 1, 2, 3, 4, ... etc. é infinito'. Dê uma explicação ao significado da palavra 'infinito' neste contexto. (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 5, aspas no original)

A seguir, o Material apresenta um trecho do poeta português Fernando Pessoa que, usando dois de seus heteronômios, Álvaro de Campos e Alberto Caeiro, apresenta uma conversa entre esses personagens.

A partir da leitura do "Texto" como se referem os autores, o leitor é convidado a repensar nas respostas das questões propostas anteriormente. E, caso ocorram mudanças, os autores sugerem que o leitor as registre.

Em seguida, os autores colocam que, numa determinada ocasião, alguns alunos teceram os seguintes comentários sobre o "Texto":

> **“Uma pequena discussão sobre Obras em Prosa de Fernando Pessoa .**
> Esse pequeno texto é uma conversa entre Álvaro de Campos e seu mestre Caeiro (dois dos heterônimos de Fernando Pessoa) a respeito de **conceito**. Esse diálogo fomenta algumas discussões na disciplina, tendo em vista que algumas das idéias giram em torno do conceito de número e de infinito. Os personagens do texto discutem também a idéia de generalização e particularização, idéia essa constantemente utilizada em Matemática.
> A idéia de limite também está presente no texto de Fernando Pessoa: a existência de algo só era concebida por mestre Caeiro se este algo fosse limitado, tivesse contornos. Nesse ponto, pode ser introduzida uma discussão acerca dos domínios sobre os quais estão os participantes de um diálogo, percebendo no movimento das argumentações a mudança no campo de conhecimento a que se pertencia inicialmente.
> O que se perseguiu durante o curso foi tentar olhar os conceitos matemáticos como se fosse a primeira vez que os víamos – desenraizados de nossas crenças. É da leitura desse texto que se obtém a primeira discussão sobre o que se pensa sobre infinito, e como abordar esse assunto em Matemática.”
> Você concorda? Tem algo a acrescentar? (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 9-10, grifo e aspas no original)

A seção é encerrada com o trecho acima.

Discussão

Em relação às questões que são apresentadas para o leitor logo no início da seção, acredito, assim como MOREIRA (2004), que questões dessa natureza suscitam da prática pedagógica de um professor de Matemática e que, portanto, é pertinente que uma discussão ampla em torno delas aconteça e o fato do Material trazê-las diretamente é uma propriedade.

No que se refere ao “Texto” de Fernando Pessoa, quero colocar que, desde a primeira leitura que fiz, percebi a relevância da sua apresentação nesse momento do Material e, mais fortemente, quando assisti à discussão na sala de aula. Antes mesmo de tecer qualquer comentário sobre o texto, explicito a tamanha importância que considero dessa iniciativa dos autores, de inserirem numa aula de Matemática um texto tão atípico, já que o assunto em questão é a Matemática.

Esta atitude ilustra o fato de que formas diferentes de conduzir uma aula de Matemática possam ser passíveis de acontecer. Em geral, uma aula de Matemática considera textos especificamente de conteúdo matemático e esta atitude mostrou que mudanças podem ocorrer neste sentido. Não somente com o intuito de “fazer algo diferente”, mas, como os próprios alunos disseram, “de modo interessante”, uma aula de matemática pôde ser desenvolvida. Espero que essa tenha sido a intenção dos autores, a partir do momento em que observei por vias diretas essa mudança e os resultados positivos que a mesma trouxe.

Mais ainda: a presença do “Texto” no Material provocou uma larga discussão, possibilitando que diferentes questões ligadas à prática docente viessem à tona, mesmo sem a intenção de, por exemplo, apresentar soluções, ou apresentar algum tratamento desses conceitos na prática do professor na sala de aula.

Considerada a relevância deste “Texto” no Material, apresento alguns fragmentos, juntamente com algumas considerações, em concordância com a percepção/interpretação que tivemos, em especial a esse trecho do Material.

O “Texto” começa com a colocação:

> Referindo-me, uma vez, ao conceito direto das coisas, que caracteriza a sensibilidade de Caiero, citei-lhe, com perversidade amiga, que Wordsworth designa um insensível pela expressão:
> “A primrose by river’s brim
> A yellow primrose was to him,
> And it was nothing more.”
> E traduzi (omitindo a tradução exata de “primrose”, pois não sei nomes de flores nem de plantas): "Uma flor à margem do rio para ele era uma flor amarela e não era mais nada”.
> O meu mestre Caeiro riu. “Esse simples via bem: uma flor amarela não é realmente senão uma flor amarela”.
> <u>Mas, de repente, pensou</u>.
> “Há uma diferença”, acrescentou. “Depende se considera a flor amarela como uma das várias flores amarela, ou como aquela flor amarela só”.
> (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p.6, aspas no original, grifo meu)

Um dos elementos que o Texto me leva a considerar é a importância/necessidade da reflexão do que lemos/vemos, contrárias à atitude da crença a partir do que um primeiro olhar possa trazer para as coisas, quer sejam elas os objetos matemáticos a serem considerados no Material. E, como conseqüência dessa reflexão para o poeta, vem a frase: "*Depende se considera a flor amarela como uma das várias flores amarelas, ou como aquela flor amarela só*" (PESSOA *apud* BARONI e NASCIMENTO, 2005, p. 6), que traz imbricada nessas palavras a idéia de generalização/particularização. Essas foram também algumas das idéias presentes à discussão realizada nessa aula.

A frase "*Toda coisa que vemos, devemos vê-la sempre pela primeira vez, porque realmente é a primeira vez que a vemos*." (PESSOA *apud* BARONI e NASCIMENTO, 2005, p.6) traz para mim uma mensagem no sentido de adotar uma postura perante o modo de pensar/conduzir a forma pela qual devemos olhar para os conceitos/relações tratadas no texto, em especial o "número". Considero esse movimento como um desestruturar das concepções do aluno sobre "número", proporcionando, ao mesmo tempo, um repensar sobre esse ente matemático. Mas esse pensar, imbuído de conceitos matemáticos adjacentes ao número, de forma expressiva, considerando que, provavelmente, esse tema tenha sido tratado de forma fragmentada, porém natural, na formação do professor, aluno da dsiciplina. Em convergência com os dados obtidos nas Entrevistas, exponho essa minha interpretação, e destaco um fragmento da fala do Professor P1, colocando de forma positiva a sua opinião sobre esse movimento de desestruturação, ao qual ele se refere como um *reconstruir partindo de um desconstruir*.

"*A outra questão que foi muito difícil pra todos, foi o reconstruir partindo de um desconstruir... Esse processo é um processo muito bom, eu acho muito interessante pra ser feito*." (P1)

Mais adiante o Texto traz a frase “Vou definir isto da maneira em que se definem as coisas indefiníveis – pela cobardia do exemplo.” (PESSOA *apud* BARONI; NASCIMENTO, 2005, p.6). Inicialmente, interpretei a palavra cobardia usada de forma pejorativa. Entretanto, ela me levou a refletir sobre a forma que costumeiramente agimos no senso comum ou até na sala de aula em determinadas situações. Também pude observar esse comentário por parte de alguns alunos por meio das suas falas no momento da discussão do Texto durante a aula.

Trazendo à tona o “conceito de infinito”, o “Texto” chama a atenção para a repugnância dos gregos em relação ao infinito. Embora não acrescente nada a essa contenda, novamente favorece que essa seja uma das idéias a serem repensadas/destacadas na discussão do Material e, de um modo extremamente frutífero, essa discussão proporcionou o aparecimento de outras idéias. Refiro-me aqui ao que presenciei em sala de aula, como, por exemplo, a palavra contextualização, que foi um tema amplamente discutido. Questões como as dificuldades que os professores da Educação Básica enfrentam para estabelecer conceitos e regras da Matemática que, segundo eles, não permitem contextualização com situações do dia-a-dia.

Para encerrar a discussão do Texto, juntamente ao término dessa aula, a Professora fez algumas considerações, de forma que os alunos tivessem claro que o número, ali, ocupava papel principal na disciplina e que o objetivo maior daquela aula seria exatamente mostrar isso. Mais ainda, que deveríamos ver o número como se fosse a primeira vez que o víssemos. Acredito que o “Texto” apresentado no Material certamente desempenhou esse papel. Ela acrescentou, ainda, que, embora a disciplina não apresentasse algo inédito, colocou que:

“*Nesta disciplina, vamos... parar e pensar nesse objeto matemático. Quando fazemos isso revelam-se coisas que não havíamos pensado antes. Vamos ver o número como se fosse a primeira vez que o vemos. O que veremos nessa*

disciplina não é novo, mas a forma com que veremos é diferente. O texto vai trazer questões sobre as quais pensar é interessante..." (Professora)

Certamente o entrevistado P4 percorreu esse caminho, pois, ao final de sua entrevista, manifestou-se dizendo:

"*às vezes, é mais importante ao invés de você trilhar novos caminhos, você olhar com outros olhos os caminhos que você tem*". (P4)

4.2.3. Seção 5: Segmentos Proporcionais

Descrição

> There is nothing in the whole body of elements of a more subtile invention, nothing more solidly established, and more accurately handled than the doctrine of proporcionals" (BARROW apud BARONI e NASCIMENTO, 2005, p. 10)

Os autores escolhem a citação acima para abrir a seção. Uma escolha que revela explicitamente a grandiosidade da *Teoria das Proporções* de Eudoxo, aquela que ocupa um papel principal na História da Matemática em relação ao tema a que se refere esta seção. Entretanto, as palavras de Barrow, extraídas de HEATH (1956), não estão no texto apenas para dizerem a beleza desta teoria; segundo os autores, elas vêm com a intenção de encorajar o leitor na busca pelo livro V de *Os Elementos*, a fim de que possa conhecê-la de uma maneira mais própria, já que "*De nossa parte, nesta seção trataremos apenas as idéias elementares que, certamente, antecederam a Teoria das Proporções*." (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 10)

Os autores observam que nesta seção a denominação "número natural" refere-se a "número natural positivo", cujo escopo é estabelecer uma correspondência entre

pares de segmentos de reta e pares de números naturais. Sendo desenvolvida e baseada na noção intuitiva de tamanho de um segmento, esta seção vem "*com o desejo de, uma vez estabelecida a correspondência, podermos concluir acerca dos segmentos, a partir de conclusões dos pares de naturais correspondentes.* (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p.10)

Dessa forma, serão apresentadas algumas definições, resultados e exercícios caminhando a um aprimoramento da teoria de forma que esta correspondência possa ser estabelecida.

Em seguida, o texto traz um esclarecimento do que seria essa noção intuitiva de tamanho de segmento, colocando que um segmento iguala-se a outro segmento em tamanho se, e somente se, um pode ser sobreposto ao outro mediante um movimento rígido, sem se preocupar com a posição.

> . . .dados um segmento *AB* e um número natural m, denotaremos por *mAB* qualquer dos segmentos obtidos pela justaposição, ao longo de uma reta, de m cópias de um segmento de mesmo tamanho que *AB*. Pela mesma razão, *AB = CD* equivale a dizer que os segmentos *AB* e *CD* têm o mesmo tamanho. (BARONI ; NASCIMENTO, 2005, p. 10).

Estabelecida a noção intuitiva de tamanho, vem a definição de *proporcionalidade de segmentos*, e os autores utilizam a notação $\frac{AB}{CD} : \frac{p}{q}$ para indicar a proporcionalidade dos segmentos *AB* e *CD.* Extraio a definição do texto:

> **Definição:** Se AB e CD são segmentos para os quais existem números naturais p e q tais que qAB = pCD, dizemos que esses segmentos são *proporcionais*. Nesse caso escrevemos $\frac{AB}{CD} : \frac{p}{q}$.
> (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 10-11)

Considero conveniente introduzir uma nota nesse ponto do texto, contendo alguma informação acerca de como a notação $\frac{AB}{CD} : \frac{p}{q}$ deveria ser lida. Convém já

citar aqui que, em decorrência dessa notação, diversos desdobramentos ocorreram, os quais apresentarei na discussão adiante.

Na seqüência da seção é apresentada uma observação composta de três itens decorrentes da existência dos números p e q da definição de proporcionalidade de segmentos. São eles:

> Note que, portanto, uma vez garantida a existência de tais p e q, temos
> p > q se, e somente se, AB é maior que CD;
> p < q se, e somente se, AB é menor que CD;
> p = q se, e somente se, têm mesmo tamanho.
> É simples observar que se tivermos $\frac{AB}{CD} : \frac{p}{q}$, então também teremos $\frac{AB}{CD} : \frac{kp}{kq}$, qualquer que seja o natural k.
> (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p.11)

Os autores não trazem comentário algum sobre como o leitor deve concluir as três afirmações acima. Implicitamente, ficaria a cargo de o leitor buscar pela intuição e concordar com o referido acima.

A seguir, os autores colocam que o momento é conveniente para que a seguinte interrogação seja feita:

Considerando os segmentos AB e CD *segmentos proporcionais* e observando que se tivermos, $\frac{AB}{CD} : \frac{p}{q}$ então também teremos, $\frac{AB}{CD} : \frac{kp}{kq}$ qualquer que seja k natural, quais são todos os pares de naturais que traduzem o mesmo que o par formado por p e q?

O que vem em seguida no texto é uma proposição que estabelece uma relação entre pares de números naturais, quando estes determinam a proporcionalidade entre segmentos, trazendo uma garantia para que os autores possam, a partir dela, estabelecer a correspondência acima citada. Os autores fazem um

apontamento mais à frente, na página 20, sobre isso. A proposição a que me refiro é enunciada: "***Proposição**: $\frac{AB}{CD} : \frac{p}{q}$ e $\frac{AB}{CD} : \frac{m}{n}$ se, e somente se, $\frac{AB}{CD} : \frac{p}{q}$ e* mq = np." *(*BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 11)

Na demonstração dessa proposição, surge novamente um apelo ao intuitivo quando os autores admitem e usam a igualdade qnAB = nqAB. Os alunos sentiram a necessidade de exibir uma demonstração para tal; entretanto, após discussão em sala, admitiram a igualdade e prosseguiram com a demonstração da proposição. Comentaremos este fato mais detalhadamente na Discussão.

Mais um passo é dado para que o estabelecimento da correspondência seja alcançado: é a definição de pares ordenados de números naturais equivalentes: "*Definição: Dados dois pares ordenados* (p,q) *e* (m,n)*, de números naturais, dizemos que* (m,n) *é equivalente a* (p,q*), quando* np = mq." (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 11)

Embora os autores não comentem, é a definição que nos permite criar uma relação no conjunto de pares de números naturais e, para que a partir dela, o conceito de *classe* poderá ser instituído. Em outras palavras, a igualdade np = mq permite identificar os pares de números naturais a fim de que as classes sejam formadas, ou seja, "*Dado um par ordenado* (p,q) *, denotaremos por* [(p,q)] *o conjunto de todos os pares ordenados equivalentes a* (p,q), *e chamaremos esse conjunto uma classe." (*BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 11)

E exemplificam com a classe do par ordenado (1,2), ou seja:

[(1,2)] = {(1,2), (2,4), (3,6),. . .}

Os autores não introduzem a noção de relação de equivalência, mas o objetivo deles é claramente apresentá-la numa situação particular com um forte apelo geométrico.

O texto chama a atenção para o fato de que nem sempre quaisquer dois segmentos são proporcionais, e reforça que a existência de segmentos não proporcionais será discutida mais à frente, na seção que trata da incomensurabilidade (Seção 6), lembrando que o interesse nesta seção, ainda é o conjunto dos segmentos proporcionais e é nesse campo que continuamos restritos.

É importante salientar, e os autores fazem isso, que dados segmentos proporcionais AB, CD tais que $\frac{AB}{CD} : \frac{p}{q}$, a proposição caracteriza quais são exatamente os pares que devem ser agrupados, formando uma só classe, a classe [(p,q)].

E que, a partir dessa classe, que representa uma coleção de segmentos, e que está sendo concebida como um único objeto matemático, pode ser estabelecida uma correspondência entre o conjunto dos pares de segmentos proporcionais e o conjunto de todas as classes [(p,q)], ou seja, "*Dado um par tal que* $\frac{AB}{CD} : \frac{p}{q}$*, a ele fazemos corresponder à classe* [(p,q)]." (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 12)

Entretanto, essa correspondência não é a desejada, aquela na qual os autores trazem como o objetivo desta seção. Os autores mostram isto por meio dos exercícios 1 e 2. No Exercício 1 é explorada a sobrejetividade da correspondência, e no Exercício 2 é visto que a injetividade não é uma característica da correspondência, obstante a garantia da bijetividade. Os dois exercícios seguem abaixo:

> Exercício 1: Mostre que a correspondência acima é sobrejetora; isto é, dado [(p,q)] existe um par (AB,CD) tal que $\frac{AB}{CD}:\frac{p}{q}$.
>
> Exercício 2: Mostre que a correspondência acima não é injetora. Mostre mais: dado [(p,q)], existem infinitos pares AB e CD de segmentos tais que $\frac{AB}{CD}:\frac{p}{q}$.
>
> (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 12)

Seria natural que, em busca dessa bijetividade, cada agrupamento fosse constituído por todos os pares cuja imagem fosse a classe [(p,q)], ou seja, dados (AB, CD) e (A'B', C'D'), pares de segmentos proporcionais, estes segmentos seriam agrupados a partir do par (p,q), quando o mesmo existisse, sendo $\frac{AB}{CD}:\frac{p}{q}$ e $\frac{A'B'}{C'D'}:\frac{p}{q}$. Os autores comentam sobre isso e escrevem. "*Essa não é a maneira usual de proceder*." (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 12) Esse comentário refere-se ao procedimento de modo análogo ao que foi feito com os pares para que a classe [(p,q)] pudesse ser definida, em geral busca-se por essa maneira que é a chamada *usual* no texto pelos autores.

Como dizem os autores, esse *procedimento usual* consiste em escolher um *segmento padrão* para a comparação e este segmento será denotado no texto por U.

A seguir, os autores trazem uma informação acerca do segmento AB+CD obtido pela justaposição dos segmentos AB e CD. "***Notação:*** *Um segmento que se obtém ao justapor, ao longo de uma reta, uma cópia de* AB *e uma cópia* CD*, será denotado por* AB+CD." (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 13, destaque dos autores)

Definida a justaposição de segmentos, coloco que é natural questionarmos se a justaposição de segmentos proporcionais preserva essa "relação" de "proporcionalidade", e os autores trazem no texto alguns exercícios que exploram

essa “relação”. O primeiro deles é o Exercício 3. No momento de discussão desta seção faço alguns comentários relacionados a este e a outros exercícios.

> <u>Exercício 3</u>: Sejam U e U’ segmentos que não são proporcionais. Tome AB = CD = U e BE = 2DF = 2U’. Assim $\frac{AB}{CD}:\frac{1}{1}$ e $\frac{BE}{DF}:\frac{2}{1}$.
> Sejam AE = AB + BE e CF = CD + DF.
> Mostre que AE e CF não são proporcionais.
> (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 13-14)

A partir do segmento U fixado é considerado, no texto, *o conjunto de todos os segmentos* AB *proporcionais a* U, e está sendo denotado por $\wp$(U).

Como agora o texto restringe-se a considerar $\wp$(U), os autores chamam a atenção para que os exercícios 1 e 2 sejam reconsiderados e colocam que o Exercício 1, que toca na sobrejetividade da correspondência, continua válido, ou seja, ". . . d*ada uma classe* [(p,q)], *existe um segmento* AB *tal que* $\frac{AB}{CD}:\frac{p}{q}$*.*" (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 14). Pode-se dizer que esse segmento fica agora caracterizado, ou seja, "*Basta tomar* AB *como sendo* p *cópias de um segmento obtido pela divisão de* U *em* q *partes iguais*." (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 14).

Vale observar que, até então, nada foi comentado no texto sobre partes de um segmento, ou algo semelhante, como dividi-lo em partes iguais. Mas, já em seguida à frase citada acima, os autores explicitam:

> **Notação:** Denotaremos por $\frac{p}{q}U$ um segmento que se obtêm ao tomar *p* cópias de um dos segmentos obtidos pela divisão de *U* em *q* partes iguais.”
> (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p.14)

Entretanto, nada é dito sobre a possibilidade de divisão de um segmento. Os autores assumem a divisão como possível, e uma justificativa que trago aqui para assegurar essa possibilidade é o Teorema de Thales. Pois, por uma construção

geométrica por meio de régua e compasso, essa divisão torna-se possível, qualquer que seja o número de partes que se deseja dividir um segmento qualquer.

Mas, e quanto ao Exercício 2, o que explora a injetividade? Com o segmento U fixado, a injetividade da correspondência pode ser garantida e os autores escrevem que, se $\frac{AB}{U}:\frac{p}{q}$ e $\frac{A'B'}{U}:\frac{p}{q}$, segue que $\frac{AB}{A'B'}:\frac{1}{1}$ (o que significa que AB e A'B' são iguais).

Mais ainda, com U fixado, podemos nos referir à bijeção desejada, a que faz corresponder elementos do conjunto $\wp(U)$ a elementos do conjunto das classes [(p,q)].

Por meio de uma observação os autores esclarecem que a escolha de uma única letra para denotar o segmento U tem o seguinte propósito: "*O propósito dessa notação diferenciada é evidenciar que esse segmento é distinguido dos demais, uma vez que o pensamos escolhido e fixado de uma vez por todas*." (BARONI; NASCIMENTO, p.14)

Em continuidade, o Exercício 4 é proposto. Nele são apresentados dois pares de segmentos proporcionais a U e a relação que estabelece esta proporcionalidade. A partir desses dados pode-se mostrar que o segmento obtido pela justaposição destes segmentos é proporcional a U, explicitando, inclusive, a relação entre eles, ou seja, quais são os números naturais que tornam a relação possível. Escolhi apresentá-lo: "<u>Exercício 4</u>: Sejam AB e BE dados por $\frac{AB}{U}:\frac{p}{q}$ e $\frac{BE}{U}:\frac{m}{n}$. Mostre que $\frac{AB+BE}{U}:\frac{np+mq}{qn}$." (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 14)

O Exercício 6 é proposto na respectiva ordem no Material; entretanto, acredito que, dada à sua forma, ele estaria mais bem posto neste ponto, logo após o Exercício 4. "Exercício 6: Sejam AB, BE, CD, DF $\in \wp(U)$ tais que $\frac{AB}{CD} : \frac{p}{q}$ e $\frac{BE}{DF} : \frac{m}{n}$. Mostre que AB+BE e CD+DF pertencem a $\wp(U)$ e que, portanto, são proporcionais." (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p.14-15)

Para explicitar a intenção deste deslocamento, digo que, no Exercício 4, são dadas as relações dos segmentos AB e BE com U e pede-se sobre a relação da justaposição dos segmentos AB e BE. Já no Exercício 6, não são dadas as relações dos segmentos com U, tem-se apenas a informação de que existe a proporcionalidade dos segmentos com U; porém são dadas as relações de proporcionalidade entre os segmentos AB e BE, CD e DF, e mesmo assim pode-se conhecer sobre a relação de proporcionalidade da justaposição pretendida. Vale observar que, neste caso, não se obtém como se dá a relação dos segmentos obtidos pela justaposição com U.

Uma outra observação pode ser feita com relação ao Exercício 6. Parece-me que uma das intenções dos autores seria provocar o leitor quanto a um erro que poderia ser cometido, quando o fato de AB, CD pertencerem a $\wp(U)$ induzir o leitor a cometer um erro, ou seja, da proporcionalidade, como AB = pU e CD = qU; conseqüentemente, o leitor escreveria $\frac{AB}{CD} : \frac{p}{q}$; para que essa relação pudesse ser escrita ("que seria cortar o U, o que não faz sentido!"), e isto poderia ser explorado neste exercício. De certa forma, viria para reforçar os cuidados que se deve ter ao ver esta "flor amarela" como se não a tivesse visto antes.

A posteriori, já com o Material editado, mas anterior ao momento da aula do curso de Análise, os autores resolveram fazer algumas modificações no texto. Uma

delas foi incluir um exercício que foi levado para a sala de aula. As outras alterações não. Das alterações, trazemos abaixo este exercício:

Exercício 4': Sejam AB e CD em $\wp(U)$. Mostre que se $\frac{AB}{U} : \frac{p}{q}$ e $\frac{CD}{U} : \frac{m}{n}$, então AB e CD são proporcionais entre si.

Este exercício infere sobre a transitividade da proporcionalidade, e da sua resolução resulta o fato de que os segmentos AB e CD são proporcionais segundo $\frac{AB}{CD} : \frac{pn}{qm}$.

Um outro exercício foi acrescentado ao texto e discutido em sala. Ele chama a atenção para a igualdade abaixo. A razão deste acréscimo é a possibilidade da utilização desta igualdade na resolução dos exercícios subseqüentes.

<u>Exercício</u> : Mostre que $\frac{m}{n}\left(\frac{p}{q}U\right) = \frac{mp}{nq}U$.

Mais três exercícios são apresentados: os Exercícios 5, 6 (ao qual já me referi acima) e o Exercício 7.

> <u>Exercício 5</u>: Sejam AB e BE como no Exercício 4 e sejam CD, DF $\in \wp(U)$ dados por $\frac{CD}{U} : \frac{r}{s}$ e $\frac{DF}{U} : \frac{k}{l}$. Mostre que $\frac{AB + BE}{CD + DF} : \frac{(np + mq)sl}{(sk + lr)qn}$.
> . . .
> <u>Exercício 7</u>: Sejam AB e AC tais que $\frac{AB}{U} : \frac{p}{q}$ e $\frac{AC}{U} : \frac{m}{n}$. Mostre que B está entre A e C se, e somente se, mq – np ≥ 0. O que está acontecendo quando mq – np = 0?
> (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 14-15)

O Exercício 5 explora o fato de, conhecida a relação que expressa a proporcionalidade dos segmentos AB, BE, CD, DF com U, é possível determinar a relação que expressa a proporcionalidade do segmento obtido pela justaposição proposta no exercício. O Exercício 7 envolve a noção do “estar entre” e vale observar que esta noção não foi apresentada no texto.

É perceptível a posição dos autores quanto a não detalhar, trazendo no texto, certos conceitos ou noções pelos quais eles esperam que o leitor aceite de forma natural. A noção do “estar entre” é uma delas. Comento algo mais a respeito desta posição na Discussão.

É apresentada a proposição abaixo juntamente com a demonstração de uma das implicações, uma vez que a outra implicação é imediata. “*Proposição:* $\frac{AB}{CD} : \frac{p}{q}$ *se, e somente se, existe um segmento U tal que* $\frac{AB}{U} : \frac{p}{1}$ *e* $\frac{CD}{U} : \frac{q}{1}$*.”* (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 15)

E, já em seguida, a definição de comensurabilidade de dois segmentos:

> Definição: Dizemos que segmentos AB e CD são comensuráveis (ou seja, podem ser medidos com a mesma unidade de medida), se existem um segmento U e naturais p e q tais que AB = pU e CD = qU. (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 15)

Os autores observam que, a partir da definição de comensurabilidade de dois segmentos, a proposição acima pode ser reescrita da seguinte forma: AB e CD são segmentos proporcionais se, e somente se, AB e CD são segmentos comensuráveis. (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 15)

Com a introdução da definição de comensurabilidade de segmentos, é natural que se indague qual a razão da demora, ou de só então esta definição vir a fazer parte do texto. Em resposta a isso, os autores chamam a atenção do leitor: “O ponto é

que, em geral, pares distintos de segmentos proporcionais demandam diferentes Us como na proposição (compare com o Exercício 3).” (BARONI ; NASCIMENTO, 2005, p. 15-16) Esse é a explicação da escolha dos autores para a atitude tomada.

Discussão

Uma notação que é crucial, e que pode ser considerada como a responsável desta seção comentada, é a criada após a definição de proporcionalidade entre dois segmentos. Refiro-me a $\frac{AB}{CD} : \frac{p}{q}$, que expressa a proporcionalidade dos segmentos AB e CD com p e q números naturais. Desde que a lembrança das palavras do texto de Fernando Pessoa, discutido no início do Material, pudesse ainda estar presente: ver a flor amarela como se fosse a primeira vez. Entretanto, pude perceber que, para grande parte dos alunos, a definição não foi suficiente para tal, ou ainda, que as palavras já estavam esquecidas. Dessa forma, acredito que a definição, mesmo que oralmente, quando da utilização deste Material, deve ser bem explorada, assim como a forma pela qual essa igualdade deve ser lida, ou, quem sabe, as palavras de Fernando Pessoa sejam referenciadas neste ponto. Faço essa observação amparada no desenvolvimento da aula.

Isso mostra o papel imperativo que a notação apresenta no texto. Ligada a essa ausência de, por exemplo, uma nota ou observação que contenha informações acerca da leitura de tal sentença, e reforçando, por exemplo, que AB representa, ali, um segmento e não “a medida” [27] dele.

Trago alguns desdobramentos advindos da observação do momento da aula no qual este assunto foi tratado. O primeiro deles refere-se à ausência de um apontamento no texto sobre como ler a sentença: começou quando o aluno que

[27] Medida de um segmento é um conceito que será definido mais à frente no Material, a princípio, os autores trazem apenas a idéia de tamanho de um segmento com a intenção de comparar um segmento com um outro.

apresentava o tema no quadro referiu-se a sentença $\frac{AB}{CD} : \frac{p}{q}$ dizendo: "AB sobre CD é igual a p sobre q". A princípio, acreditei que ler dessa forma era apenas um problema pontual, especificamente ligado à leitura, por conta da ausência dessa informação e não propriamente relacionado ao objeto matemático em si. No entanto, com o decorrer da aula, pude perceber que não era pontual, pois ali existiam questões mais sérias a serem consideradas que surgiram a partir deste "modo de ler" do aluno.

Uma dessas questões diz respeito ao modo pelo qual alguns alunos usaram a notação de segmento como se fosse a sua medida, um número, e a representação $\frac{p}{q}$ foi imediatamente identificada com uma fração, sem que o texto tivesse essa intenção. Busco pelo momento em que o grupo apresentava o tema no quadro, quando o aluno atribuiu propriedades de números a um segmento por conta dessa confusão, como, por exemplo, a lei do cancelamento para a divisão de números inteiros ou simplificação de fração; utilizando "produto dos meios pelos extremos" do estudo de frações, referindo-se a cópias de um segmento como um número vezes um segmento (anterior ao comentário de um dos alunos que fiz mais acima), tratando ali de algum tipo de operação de multiplicação, da notação de desigualdade e suas respectivas propriedades, etc..

Como uma ilustração do ocorrido, trago dois trechos que "fotografei" da lousa nesses momentos, resultante da tentativa de um aluno de exibir uma demonstração para “p > q se, e somente se, AB é maior que CD", o primeiro dos três itens que são apresentados logo a seguir da definição de proporcionalidade de segmentos.

"p > q
p CD > q CD
p CD.AB > q CD.AB

$q\ AB.AB > p\ CD.CD$

$q\ AB^2 > p\ CD^2$ $\qquad$ $AB^2 > CD^2 \Rightarrow AB > CD$."

Já numa outra ocasião o aluno escreveu:

"(p,q) e (m,n) são equivalentes quando pn = qm (escrevendo) $\frac{p}{q} \times \frac{m}{n}$"

Uma observação que faço decorrente desta ação do aluno é a seguinte: será que este aluno atribui algum significado geométrico à regra do produto utilizada? Ao que me parece, não. É muito comum observarmos nas resoluções dos nossos alunos procedimentos que, ao se depararem com a igualdade pn = qm, imediatamente escrevem: $\frac{p}{q} \times \frac{m}{n}$, sem ao menos verificar a necessidade de tal, ou mesmo da possibilidade de que uma outra ação seja feita.

Um fato a comentar, relacionado a essa ilustração que trago acima, refere-se à forma como as operações sobre as frações são definidas. Elas são apresentadas algebricamente, sem um significado (MOREIRA, 2004). Em posse dos resultados e da forma como foi apresentada esta seção no Material, abre-se uma possibilidade para atribuir um significado às operações, com um apelo geométrico, a partir do que foi apresentado nesta seção. Refiro-me aos exercícios que nela são apresentados. Passo a comentar essas possibilidades que visualizo.

Em relação ao Exercício 4, vejo-o como uma ilustração da possibilidade de como a operação soma é definida no Corpo de Frações. Embora no Material os símbolos $\frac{p}{q}$ não possuam significado, pode-se perceber que, por trás deles, ou seja, se os considerarmos "sem desconsiderar" os segmentos que lhes atribuem sentido, podemos intuir que, de fato, esta operação pode ser definida, pois o

exercício, além de expressar a possibilidade de considerarmos a soma, expressa a regra pela qual ela pode ser realizada. Ou seja, $\frac{AB+BE}{U}:\frac{np+mq}{qn}$.

Vale acrescentar que, neste mesmo sentido, o Exercício 3 pode ser explorado como uma ilustração da "impossibilidade" de considerarmos esta operação, a soma de frações, quando na tentativa de obter, como resultado, "o numerador como soma dos numeradores e o denominador como soma de denominadores", já que nem ao menos faz sentido considerá-la, visto que AB+BE e CD+DF não são segmentos proporcionais, como o exercício apresenta.

Um outro comentário que faço sobre os exercícios refere-se àquele que foi acrescentado: "<u>Exercício</u>: Mostre que $\frac{m}{n}\left(\frac{p}{q}U\right)=\frac{mp}{nq}U$." Se AB = $\frac{p}{q}U$, a mudança de unidade, em relação ao segmento U, de AB para U, pode ser explorada.

Todas essas conexões que comentei acima foram estabelecidas em sala de aula, à medida que o assunto fluía.

Recorrendo aos dados coletados nas Entrevistas, trago um outro fato importante de ser colocado, ainda relacionado a essa questão da notação e que diz respeito à fala de um dos alunos, o aluno P1. É o exame que o entrevistado faz em relação a ela, a notação de proporcionalidade de segmentos, $\frac{AB}{CD}:\frac{p}{q}$.

O aluno acredita que a notação utilizada no Material pode ser substituída por uma outra, a fim de que confusões, como as assinaladas acima, pudessem ser evitadas. Escolhi o fragmento da sua própria fala, extraído do texto transcrito das Entrevistas para ilustrar essa observação.

"*Eu acho que o Material, (. . .) esse "a está para b assim como p está para q" já é de certo consenso que não ficou uma notação muito boa porque faz aquele negócio assim de você multiplicar assim em x, . . . Então, é fração, mas não é fração, a gente olha pensa que é fração, mas não é fração, é só notação e tal, e isso talvez seja assim a parte mais, assim. . . problemática e que talvez vocês precisem rever, sei lá, talvez pensem como colocar.*" (P1)

Por outro lado, apresento um outro ponto que, de certa forma, depara-se contrário a uma possível mudança na notação, e que me ocorreu por meio de uma análise mais apurada dessas circunstâncias. Pensando num conjunto das atitudes da sala de aula como um todo, incluindo aí professor e aluno, não posso deixar de considerar que, ao mesmo tempo em que a notação levanta questões que soam como problemas, como destaca o aluno P1, ela permitiu que outras questões num ambiente de ensino e aprendizagem venham à tona. Cito, por exemplo, a questão da linguagem que surge para mim como um exercício de abstração, quando um aluno lida com uma notação similar a uma que ele já conhece, mas sem a possibilidade de tratamento que a similar proporciona, da natureza dos objetos matemáticos em questão. De volta ao texto de Fernando Pessoa, "é a flor amarela que deve ser vista como se fosse a primeira vez . . ." E, <u>necessariamente</u>, essa é a postura que professor e aluno devem ter ao lidarem com este Material.

Da mesma forma, que considero ainda relacionada à representação do número racional, vem um ponto que destaquei da fala de um dos entrevistados. É a referência que ele faz quanto ao modo que os alunos da Educação Básica lidam com as representações desses números. É marcante, para esse entrevistado, o tratamento que os professores dedicam a essa questão, colocando-se nessa posição, sem perceber ou, talvez, admitir o quão conflitante pode ser para os seus alunos esse tratamento e ele faz uso das palavras, "de forma natural" à forma como os professores lidam com essa questão. Para ele, o fato de o Material apresentar uma construção a partir de elementos que você conhece, no caso os números naturais e alguns conceitos e noções geométricas, sem poder considerar

outros objetos que você, *a priori*, conhece, mas não pode admiti-los, foi um exercício capaz de provocar essa reflexão sob sua prática docente. Essa discussão está sendo apresentada no Capítulo V, que traz a análise dos dados coletados nas Entrevistas sob um outro ângulo. O entrevistado conclui:

"*Esse processo é um processo muito bom,* (o processo da desestruturação atrelado às palavras do texto de Fernando Pessoa) *eu acho muito interessante pra ser feito. Porque geralmente. . . a gente não consegue perceber isso e a gente acaba na hora de dar aula lá no ensino básico misturando tudo, fração é decimal, é dízima, é uma confusão, e que a gente leva como natural e que pro aluno muitas vezes não é natural,. . .*" (P1)

Embora esse comentário possa estar ligado ao fato de o Material trazer uma "construção" e esse exercício de abrir mão de objetos conhecidos, bem como de suas propriedades, seja uma característica inerente ao processo, acredito que essa percepção do aluno só se tornou possível a partir de uma propriedade do Material. Porque o texto possibilita que conexões sejam estabelecidas a partir dos objetos considerados na Seção 5 e o conjunto dos números racionais, pensando na representação de fração para os seus elementos, eles, bem como algumas de suas propriedades operatórias, aparecem na construção quando o texto lida com o tema *Segmentos Proporcionais*, conforme citei anteriormente.

Mais ainda, considero essa observação do entrevistado, ao comentar sobre situações que ele vivencia na sua prática profissional, como decorrente do Material, ao resgatar o conceito de proporcionalidade de segmentos a partir de uma notação análoga à de frações e ao dar continuidade ao desenvolvimento da teoria seguindo essa notação. Ou seja, sempre lembrando que a *flor amarela deve ser vista como se fosse a primeira vez* . . .

Considerando os desdobramentos referentes a essa questão da notação no início da Seção 5, quando os autores dizem: "*De nossa parte, nesta seção trataremos*

apenas as idéias elementares que, certamente, antecederam a Teoria das Proporções.", acredito que esse seria um momento plausível para que, de uma forma mais ampla, os autores pudessem apresentar comentários alertando ou reforçando que o texto apresenta uma teoria e, portanto, alguns conceitos seriam assumidos, outros construídos, o que é constitutivo do processo.

Um outro comentário a ser colocado, relativo a uma característica distinta e própria do Material, vem do fato de ele apresentar uma "construção geométrica" para os *Números reais*. Refiro-me ao papel que a intuição exerce no Material, ou melhor, que o intuitivo, uma ação explorada em alguns pontos pelos autores, está sendo utilizado no desenvolvimento de alguns pontos do texto.

A relevância deste comentário surge a partir da mostra de um sentimento de “obrigação” dos alunos em relação à necessidade de oferecer uma prova formal para qualquer resultado apresentado. O relato deles conta que esse comportamento era decorrente de uma sensação que eles tinham perante o Material, e diziam que enunciar um resultado, tecer algum comentário ou fazer alguma afirmação era como "pisar em ovos". Entretanto, mesmo com toda esta insegurança, os alunos mostraram maturidade, de modo que esse comentário só se tornou possível de ser realizado porque eles mesmos se abriram, explicitando este sentimento.

Destaco aqui um ponto do Material que traz uma situação em particular com a intenção de ilustrar esse comentário. Refiro-me à aula em que os alunos apresentaram uma suposta demonstração para os três itens que seguem logo após a definição da página 10 que, segundo a professora, deveriam ser aceitos de forma intuitiva. Confesso que a sensação dessa busca por uma demonstração fez parte muitas vezes do meu próprio trabalho no preparo das minhas aulas. Penso que isso é conseqüência da minha formação, em que o apelo ao intuitivo, muitas vezes, era visto como uma aberração. Entretanto, considero essa minha postura, anterior aos estudos relacionados a este doutoramento, fato do passado, dando

mais uma mostra do quanto estes estudos contribuíram para uma mudança em relação a essa minha postura. Assim como Moreira, vejo que, em situações de ensino da Matemática,

> As relações com os conceitos primitivos, com as definições, com os axiomas, com a própria linguagem e simbolismo, com o rigor etc., são necessariamente mais flexíveis, pois não se trata de convencer a comunidade científica de que o fato em questão pode ser inscrito no conjunto de resultados matemáticos 'verdadeiros'. (MOREIRA, 2005, p. 28, aspas no original)

Por conta do comportamento dos alunos ao desejarem exibir uma demonstração para os três itens, vale comentar que, nesse momento da aula, a Professora teceu algumas considerações a respeito dessas duas palavras tão antagônicas, comentando, inclusive, situações referentes à prática do professor, como, por exemplo, a necessidade que um tratamento intuitivo de muitas questões, que se faz necessário lá na Educação Básica, sem abdicar do rigor que também se deve fazer presente. Nessa discussão, alguns alunos trouxeram exemplos da sala de aula que eles puderam vivenciar, todos referentes a trazer a intuição como elemento dessa vivência.

O que procuro considerar neste ponto de análise é a dificuldade de aceitação, por parte dos alunos, da validade das afirmações constantes naqueles três itens. Dessa forma, essas atitudes revelam-se, para mim, como um subproduto de uma tensão entre a intuição e o rigor, assim como a considerada na Tese de Doutorado de REIS (2001), intitulada "A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos". Este autor conclusivamente escreve:

> De fato, se por um lado, com a Aritmetização da Análise chegou-se à "Idade do Rigor" (BOYER, 1974), mais de um século depois é necessário reconhecer a existência de diferentes "níveis de rigor" (GRATTAN-GUINESS, 1997). Isso, no contexto da prática docente universitária, significa que o "rigor acadêmico", dominante no mundo das publicações e apresentações de trabalhos, artigos

> científicos e outros, não pode ser transposto de uma maneira direta, mecânica ou simplista para o ensino. Essa transposição, na verdade, deveria proporcionar uma exploração múltipla e flexível (LLINARES & SÁNCHES, 1996) dos conceitos, de modo que os mesmos sejam intuitivamente significativos e compreensíveis, tendo um tratamento de validação e demonstração (isto é, rigor) compatível ao contexto de ensino (instituição; Licenciatura ou Bacharelado; conhecimento prévio dos alunos; etc.), numa perspectiva muito próxima daquela defendida por Baldino. [28] (REIS, 2001, p.196 -197, grifo meu)

Sem dúvida, na Educação Básica, a intuição é um elemento de presença constante e, conseqüentemente, o futuro professor ou o professor em serviço carece de um pensamento elaborado em relação a essa questão. Discussões dessa natureza enriquecem a formação do professor e podem levá-lo a se interessar por esse tema tão instigante. Mais ainda, o licenciando deve ter consciência da importância dessas discussões frente à atividade de docência para a qual ele está sendo preparado. Segundo orientações de documentos oficiais para a Educação Básica, o ensino de Matemática deve garantir o desenvolvimento de diferentes capacidades como observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como a intuição, a indução, a dedução, a analogia e a estimativa. (BRASIL, 1998)

Voltando ao Material, acreditamos que ele poderá proporcionar um trabalho que, no mínimo, trará à tona a questão da intuição e do rigor. Acreditamos que, da mesma forma que o rigor se faz presente na constituição de conceitos elementares, a intuição, sob múltiplas faces, permeia o desenvolvimento de idéias avançadas.

Encerro aqui os comentários desta seção.

---

[28] Baldino foi um dos professores-pesquisadores entrevistados pelo pesquisador.

4.2.4. Seção 6: Incomensurabilidade

Descrição

A última definição da seção anterior trazia o conceito de comensurabilidade de segmentos. Em continuidade, na Seção 5, os autores trazem à tona o conceito de incomensurabilidade de segmentos, quando dizem: “. . . *há pares de segmentos não comensuráveis*.” (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 16)

Iniciam a seção com um exemplo, extraído do livro "*The calculus: a genetic approach*", de Otto Toeplitz, expondo algumas considerações geométricas envolvendo o lado e a diagonal de um quadrado qualquer. O exemplo é utilizado para que afirmações com respeito à incomensurabilidade de segmentos possam ser tecidas. Mais ainda, é o exemplo que torna possível aos autores afirmarem que o lado e a diagonal de um quadrado são exemplos de segmentos incomensuráveis, ou seja, que não existe um segmento capaz de medir a ambos (a prova é indireta).

Os autores comentam que, de fato, este é um problema muito antigo; trazem algumas palavras de Wussing (1998) para dizer que o descobrimento da existência de segmentos incomensuráveis ocorreu no seio da escola pitagórica, e que existem controvérsias a respeito da origem dessa descoberta, mais precisamente, sobre qual é o problema que traz a origem da incomensurabilidade: alguns autores atribuem à figura do pentágono, e outros, à do quadrado.

Acrescento aqui que, como a este problema é atribuída a crise da escola pitagórica, uma discussão mais detalhada, quando desejada, pode ser feita a respeito. (KATZ, 1993; WUSSING, 1998; FOWLER, 1999; LINTZ, 1999; OUTROS)

Em posse deste exemplo, os autores reforçam sobre a existência de pares de segmentos incomensuráveis. Destacam que, fixado U, existem segmentos que

não pertencem a $\wp$ (U) e a diagonal de um quadrado cujo lado é U é um desses segmentos.

A seguir, o Exercício 8 é proposto: "*Seja* AB $\notin \wp$ (U). *Mostre que* mAB $\notin \wp$(U), *qualquer que seja o natural* m." (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 19). A intenção deste exercício é observar que, qualquer que seja U fixado, existe uma infinidade de segmentos que não pertencem a $\wp$(U).

Quando os autores, na seção anterior, atribuem a cada segmento fixado U uma classe [(p,q)], eles estabelecem um processo de comparação. Entretanto, considerando a existência dos segmentos que com U são incomensuráveis, que não são comparáveis a U a partir deste processo, é sugestivo que um outro processo de comparação seja estabelecido. Dessa forma, os autores se expressam,

> . . . necessitamos criar um novo processo de comparação, bem como criar um novo símbolo que venha traduzir essa comparação, substituindo os símbolos $\frac{p}{q}$ (ou as classes [(p,q)] !). (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 19)

Ainda no término da Seção 5, os autores fazem uma referência relacionada ao processo de comparação que será explicitado mais à frente; eles dizem:

> . . . mas queremos adiantar que se trata de um processo que não termina; é o preço a ser pago por não querer deixar de fora um sem fim de segmentos. Se isso causa desconforto ao leitor, talvez seja boa a hora para reler o texto do Fernando Pessoa. (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 19)

Discussão

Essa seção surge no texto com o objetivo de explicitar a existência de segmentos que não são mutuamente comparáveis (comensuráveis), mostrando,

conseqüentemente, a insuficiência do critério de comparação descrito na seção anterior.

Anterior à apresentação do exemplo que trata da existência de segmentos incomensuráveis, ainda que numa conversa informal entre aluno e professor, surgiu um fato interessante na sala de aula. Detenho-me a esse fato para apresentar um primeiro comentário desta seção, proveniente dos dados pertencentes ao Diário de Campo. Refiro-me às palavras de um dos alunos da turma. Com a maior naturalidade possível, ele disse *não acreditar que pudessem existir segmentos não proporcionais*. E o interessante foi que, após a fala deste aluno, outros alunos também se manifestaram concordando com ele. A partir daí pude perceber que essa questão – a incomensurabilidade de segmentos – não era uma questão de fácil aceitação para muitos deles, quem sabe em concordância com nossos antepassados, quando nos remetemos ao contexto do que a história conta sobre a crise da incomensurabilidade.

Atrelado a esse momento, em que o exemplo citado acima estava sendo apresentado na aula, assuntos concernentes à existência de pares de segmentos incomensuráveis foram considerados e comentários dos alunos a respeito do assunto foram realizados, vivências da prática docente, localizados cada um no nível de ensino em que atuavam. Sem dúvida que a presença desta seção do Material foi a responsável por esse momento ímpar. Por conta das discussões e desta possibilidade, o momento foi eleito como gratificante pela turma, não exatamente pelas questões em si, mas pela oportunidade de discuti-las. Segundo alguns comentários, explicito essa possibilidade como de grande importância para os alunos.

Embora o problema da incomensurabilidade não venha no texto a partir de uma perspectiva histórica, pois os autores referem-se aos aspectos históricos no final da seção, o texto abre uma discussão a partir do exposto. Essa referência foi o suficiente para despertar o interesse da turma por informações mais detalhadas

acerca de aspectos históricos relativos ao tema. Alguns alunos trouxeram observações e elementos que puderam contribuir com a exposição, chegando, inclusive, a estendê-las a outros pontos do Material (pertencentes à Seção 9: Comensurabilidade Revista).

Nas pesquisas que tratam dos diversos trabalhos referentes ao tema n*úmeros reais*, citados no Capítulo 1, o conceito de incomensurabilidade foi considerado de diferentes formas. Depois de apresentar de forma imperativa a necessidade de uma abordagem para o tema no contexto formação do professor, os autores que estudaram mais atentamente esta questão apontaram conclusivamente para uma apresentação dos números reais, na qual o conceito de número irracional deve ser construído a partir da incomensurabilidade de segmentos, faceado a um caráter geométrico. Mais ainda, os autores sinalizam para que neste tema seja feita uma abordagem que o considere a partir do seu desenvolvimento histórico, embora não explicitem o modo pelo qual esta abordagem é concebida. Coloco-me junto a esses autores nesta posição, ao ver a História da Matemática como uma possibilidade/oportunidade para que o tema incomensurabilidade seja apresentado.

Coloco, ainda, que as opiniões de alguns alunos do curso ratificam o que as pesquisas apresentam sobre esta possibilidade. Entretanto, ambos deixaram transparecer dúvidas sobre o modo pelo qual, na prática, isto poderia ser feito. Refiro-me à(s) forma(s) pela qual essa abordagem, esse desenvolvimento, ou, em uma palavra mais comum da literatura, essa *inserção* poderia ser feita e vejo esta possibilidade como um desafio.

Uma discussão ampla sobre as possibilidades e dificuldades da *inserção* da História da Matemática não somente nos cursos de formação de professores, mas no ensino como um todo, é realizada no campo da Educação Matemática. Diversos são os pesquisadores que se dedicam ou que já trataram de questões relacionadas. (FISCHBEIN, 1995; MIGUEL, 1997; SOARES, 1998; MELO 1999;

FAUVEL e MAANEN, 2000; COBIANCHI, 2001; BATARCE, 2003; GASPAR, 2003; MOREIRA, 2005; OUTROS).

Das dificuldades apontadas em alguns trabalhos, destaco uma que tem a ver com a amplitude do termo *inserção* da História da Matemática. E, apesar de estas não serem as intenções deste meu trabalho, gostaria de, ao menos, demonstrar o interesse por tal ao colocar que, junto às minhas intenções futuras de pesquisa, encontra-se esta: a busca por apontamentos que tragam uma forma de desenvolver questões relacionadas a números, mas que, na minha concepção, necessitam de um aprofundamento a respeito deste desenvolvimento, ao caracterizá-lo como uma *inserção* da História da Matemática.

O que considero é o crédito que a História da Matemática possui ao oferecer oportunidades de contextualizações importantes do conhecimento matemático. É como situar um assunto frente ao seu desenvolvimento na história da humanidade. Digo que

> . . . é imprescindível compreender a História da Matemática, não como uma ferramenta para a Educação Matemática, mas como uma Educação Matemática em si. Valorizando a materialização da Matemática nos contextos históricos, a História da Matemática torna-se Educação Matemática. (BATARCE, 2003, p. 25)

Em relação ao tema *números, a*rticulações poderão ser feitas numa perspectiva, tais como a crise dos incomensuráveis no desenvolvimento da ciência grega, que tem conexão com as limitações até hoje presentes na aprendizagem desse conceito. O conceito de número irracional, quando construído a partir do aspecto histórico, abre uma possibilidade maior para que suas relações possam tornar-se mais significativas e compreensíveis para o aluno. "[. . .] *Se não se compreende o sentido e a razão de ser dos irracionais, é difícil superar as dificuldades na compreensão de vários conceitos ligados à estrutura dos reais*." (SOARES *et al.*, 1999, p. 115)

A próxima seção explicitará um processo que possibilitará a comparação de qualquer que seja o segmento AB com um segmento U, dito unitário. A seção será composta de duas subseções, sendo que, em uma delas, será apresentado, digamos, o processo direto, e na outra, da forma como está intitulada – o processo inverso.

4.2.5. Seção 7: O processo de medição de um segmento AB com relação a uma unidade U, e o símbolo que traduz esse processo

Descrição

A seção é introduzida acerca de um breve arrazoamento do que intuitivamente seja um processo de medição, trazendo, por exemplo, a contagem como um processo para identificar a pluralidade de certos conjuntos. Os símbolos 2, 5, 14 etc. são tidos como identificadores destas diferentes pluralidades. Porém ". . . *há situações em que a mente concebe apenas uma noção de grandeza, ou extensão, sem possibilidade de identificar os objetos que compõem o conjunto*." (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 19); como exemplo, os autores referem-se aos termos região e caminho, trazendo a idéia de medição como o resultado do reconhecimento da grandeza de certos conjuntos, como um processo que envolve contagens sucessivas.

> A cada medição fazemos, portanto, corresponder uma sucessão de dígitos, um para cada contagem. A sucessão de dígitos obtida numa medição é chamada *medida*. A medida quando resultado da medição de um segmento recebe o nome especial de *comprimento*, enquanto aquele resultado da medição de uma região recebe o nome de *área*.
> (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 19-20)

Convém acrescentar que a partir deste ponto há a necessidade, no texto, da inclusão do zero no conjunto dos números naturais, já que o mesmo é considerado no processo de medição a que se refere à seção. Vale lembrar que,

desde o início do texto, o zero não era considerado, e que esta foi uma observação dos alunos.

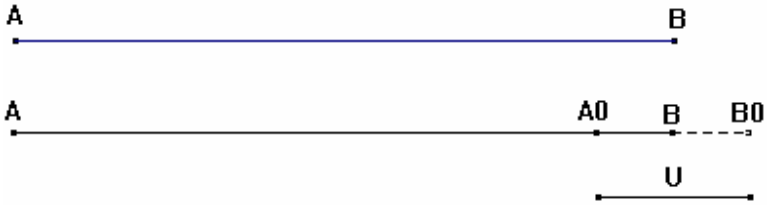
Seguimos para a primeira subseção, aquela que considero trazer o coração deste Material. Nela, os autores apresentam o processo que permite medir um segmento qualquer AB, a partir de um segmento fixado U e, por esse processo de medição, tem-se a oportunidade de apresentar/construir (geometricamente) o conjunto dos *números reais*.

4.2.6. Subseção: 7.1. O processo e o símbolo que o traduz

Descrição

A partir de um segmento U fixado e com o desejo de reconhecer a grandeza de um determinado segmento AB sob uma semi-reta de origem em A, em relação a esse segmento U, inicia-se um processo de comparação do segmento U com o segmento AB. Essa seção descreve de forma detalhada e, a nosso ver, satisfatória, esse processo de comparação. Dele é que provém a medida ou comprimento do segmento AB como sendo o símbolo que traduz um processo de medição. Como a descrição do processo no Material apresenta-se, na minha concepção, de um modo claro e conciso, optei por reproduzi-la fielmente como está.

> Sobre a semi-reta de origem A, determinada por AB, dispomos o segmento U, primeiro de A até A_α , depois de A_α até A_β, etc. Seja A_1 o último ponto que pode ser atingido dessa maneira sem ultrapassar o ponto B. Se B é atingido (i.e, se $A_1 = B$) ao dispormos U digamos três vezes, dizemos que o comprimento de AB, em termos de U, é 3. Se esse não for o caso, então B será um dos pontos do segmento igual a U e de origem A_1 (chamemos A_1B_1 tal segmento) e dizemos que o comprimento de AB em termos de U é maior ou igual a 3, mas menor que 4.
> Dividamos U em 10 partes iguais (tomemos U_1 um desses segmentos) e repitamos esse procedimento. Obteremos um segmento A_2B_2 contido em A_1B_1. O número máximo de cópias de U_1 em AA_2 estará entre 30 e 39. Suponha, por exemplo, que seja

> 37. Até o comprimento de AB em termos de U_1 é, então, dito ser pelo menos igual a 37, mas menor que 38.
> Se, do mesmo modo vamos de U_1 a um segmento U_2, obteremos figuras tais como 376 e 377, por exemplo; depois 3760 e 3761; depois 37602 e 37603, etc.
>
> 
>
>
> Agora, necessitamos imaginar um símbolo o qual chamaremos uma medida, ou comprimento de AB em relação a U, e consideramos como um relato completo ou resultado dessa seqüência ilimitada de procedimentos. Podemos consegui-lo bem facilmente pelas observações seguintes: em cada estágio do processo, obtemos dois números inteiros 37 e 38 ou 37602 e 37603, que diferem por exatamente uma unidade. Portanto, é suficiente conhecer a seqüência dos números inferiores que são obtidos nos diferentes estágios.
> Agora, essa seqüência 3, 37, 376, 3760, 37602, ... é tal que cada número é obtido escrevendo-se um dígito extra à direita do número precedente. Portanto, conhecer qualquer dos números da seqüência, permite conhecer todos os estágios que o precedem, desde que se saiba em qual estágio tal número foi obtido. Sem o conhecimento do estágio, saber que 37 foi obtido permitiria duas alternativas: (1) o número 37 foi obtido no primeiro estágio; (2) 37 foi obtido no segundo estágio e 3 foi obtido no primeiro.
> Para deixar claro qual foi o número obtido no primeiro estágio, é que utilizamos a vírgula (ou ponto decimal).
> Ainda que quando $B = A_i$ para algum i, já temos atribuído um comprimento a AB, bem podemos imaginar a continuação do processo de medição; a partir desse estágio i obteríamos apenas dígitos zero. Nesse sentido, tais zeros tanto podem ser escritos quanto omitidos.
> (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 20-21, grifos dos autores) [29]

Dessa forma, a *medida* é uma seqüência infinita de dígitos à direita e contendo um ponto decimal. A cada segmento de reta AB corresponde uma *medida* - o processo de medir um segmento está descrito.

É natural interrogarmos o contrário, ou seja, a toda seqüência de dígitos ilimitada à direita e contendo um ponto decimal pode-se fazer corresponder um segmento?

[29] As palavras figura e relato são próprias de Lebesgue.

Essa pergunta é a principal motivação para que a próxima seção seja desenvolvida, cujo título é "O processo inverso".

4.2.6.2. Discussão

Uma primeira colocação que trago vem de um comentário feito por um dos alunos quanto à ausência em dizer que, de fato, o processo de medição às vezes continua indefinidamente. Neste ponto do texto não há menção sobre isso; porém a Seção 9, que revê a comensurabilidade de segmentos, deixa isto evidente.

Por mais simples que possa parecer esta observação do aluno, ela mostra que o infinito novamente pode vir à tona, lembrando que o Material já faz uma referência direta ao infinito, no início, ao apresentar o Texto de Fernando Pessoa. Nesta seção (o processo de medição), o infinito reaparece, e de uma forma mais marcante. Como resultado desse reaparecimento gostaria de explicitar as reações dos alunos em relação a essa questão. Posso relatar aqui, circunstanciada nos dados do Diário, que essa aula foi, de certa forma, reveladora. Após muitos comentários e discussões acerca do infinito, pude perceber quão grande é a insegurança por parte dos alunos em lidar com os processos infinitos na prática docente, frente às suas declarações. Dos diferentes comentários, relatos ou observações, trago pontualmente, como ilustração, um questionamento de um dos alunos: "Mas, se continuar indefinidamente, o processo é de medição?"

Esta indagação do aluno, acompanhada deste momento do curso, soa para mim como mais uma ilustração das dificuldades de alunos e professores em relação ao tema – o infinito – ao encontro da literatura explorada no Capítulo 1. Refiro-me às questões apresentadas aos sujeitos das pesquisas realizadas concernentes a ele, mais precisamente, aos conceitos que são construídos a partir dos processos infinitos. Amadei (2005), em seu trabalho de pesquisa coloca,

> Ao mergulharmos nos diversos aspectos do tema infinito, deparamo-nos com nossas próprias dificuldades e pudemos

> constatar com este estudo (a pesquisa do autor) que há a necessidade de um conhecimento profundo sobre este assunto, o qual tem sido pouco desenvolvido nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral e Análise Matemática, podendo ser fonte de entraves no ensino dessas disciplinas. (AMADEI, 2005, p. 94)

O que cabe nesta discussão é esta possibilidade de referência ao tema. Da mesma forma como Lebesgue, acreditamos que, embora polêmico, é um assunto que deve ser discutido. Ele coloca, de modo sutil, algumas palavras que evocam sua concepção sobre tal, referindo-se a um caso em especial, mas que, na minha concepção, estende-se a outros níveis de ensino.

Também, ensinamos os alunos a trabalharem com frações. Quer seja quando efetuando divisões como de 1 por 3, quer seja extraindo raízes quadradas as crianças encontram números que podem ser escritos na forma decimal apenas por meio de uma seqüência infinita de dígitos. <u>Nós certamente evitamos chamar muito a atenção deles para esse fato, ou de dizer-lhes que ele é assustador e desconcertante</u> – e crianças nunca ficam assustadas ou desconcertadas. (LEBESGUE apud BARONI e NASCIMENTO, 2005, p. 33, grifo meu)

Em correspondência, observo que, entre a construção do conceito de número irracional e os processos infinitos, existe um amálgama, e a história (e as pesquisas do Capítulo 1) nos mostra que não é possível chegar ao conceito de número irracional sem passar pelos processos infinitos, ou seja,

> . . .parece não ser possível associar, consistentemente, um sentido numérico para os decimais infinitos não periódicos (e, portanto, para os irracionais) sem enfrentar o desafio de atribuir sentido a certos processos que se reproduzem indefinidamente, ou seja, que “não tem fim”. (MOREIRA, 2004, p. 135, aspas no original)

Embora seja este um ponto de perspicaz delicadeza, apresentar o conjunto dos Números reais envolvendo processos infinitos é, para mim, a maneira honesta de realizar tal feito. O que fica evidente nas formas como o conjunto dos Números

reais tem sido tratado é um percurso que foge dos possíveis desconfortos que o infinito possa causar ao aluno e ao professor.

Destaco que o Material, além de apresentar uma construção deste escopo, pode ainda trazer este tema à tona e, quem sabe, levar o aluno a ter um pouco mais de familiaridade com o mesmo. A palavra familiaridade surge aqui no contexto de ser colocada em discussão, para que vivências da prática docente possam ser ditas e exploradas. É tratar do tema, e não desviar dele, como o fazem aqueles que seguem o curso da circularidade [30] para apresentar uma definição para o Número real ou, ainda, que optam por apresentar um tratamento por vezes fragmentado do assunto.

Uma observação de um outro aluno refere-se a uma outra possibilidade que o processo de medição pode trazer – ele se refere ao contínuo (e o discreto). Julgo que, em qualquer tratamento que se aspira dar aos Números reais, esta é uma característica do conjunto que necessariamente deve ser analisada, já que ela foi uma das motivações para que, por exemplo, Dedekind pudesse realizar a sua teoria (a que apresenta a construção formal para o conjunto dos Números reais via cortes) (Jahnke, 2003, p.155). Lembrando ainda que um destaque pode ser dado ao papel que essas duas palavras (o contínuo e o discreto) exerceram nos entraves do desenvolvimento da própria Matemática, evidenciando concepções que diferentes renomados matemáticos tinham a respeito delas. No final do Capítulo 2 comento algo a respeito.

Coloco, ainda, que o fato de o conjunto dos Números reais se apresentar como um continuum é um dos obstáculos apontados em alguns dos trabalhos que investigam dificuldades relacionadas à apreensão do conceito de Número real, conforme descrito no Capítulo 1. De fato, o que história nos mostra, e que ainda é uma preocupação de professores e pesquisadores, é essa tensão entre o discreto e o contínuo que incide no ensino da matemática de um modo geral.

[30] Outros comentários sobre a circularidade na definição são apresentadas no final do Capítulo 1.

Voltando às percepções dos alunos, chamo a atenção para uma outra observação de aluno ao explicitar um descontentamento em relação à forma pela qual os livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio apresentam o conceito de número racional (ele se refere aqui à forma a/b com a e b números inteiros, $b \neq 0$). E estende seu comentário à definição de Número real, referindo-se à forma circular da apresentação na definição.

Considero oportuno sugerir, neste ponto do Material, uma discussão mais detalhada relacionada à circularidade da definição de Número real apresentada nos livros didáticos da Educação Básica, já mencionada no final do Capítulo 1. Esta discussão pode ser efetivada por meio de uma atividade complementar às que são propostas no Material, como uma atividade de caráter investigativo referente ao tema. Visualizo-a, por exemplo, contando com uma análise de trechos de livros didáticos que trazem a definição até uma discussão amparada em alguma publicação científica. Cito o artigo de Baldino (1994), para que os próprios alunos possam figurar de modo mais aprofundado o problema em diferentes tratamentos.

Na adoção do tratamento apresentado pelo Material, via medição, esse tipo de atividade reforçaria a essência de como o *Número real* está sendo apresentado, esquivando-se da circularidade.

Esta é uma das propriedades do Material – não seguir o curso desta circularidade – que, sem dúvida, diferencia-o dos demais textos. Nos últimos parágrafos do texto são apresentadas algumas citações provindas de Lebesgue (1966), traduzidas livremente pelos autores. Trago-as aqui para que, de certa forma, possam mostrar que, embora os autores não tenham se preocupado em falar diretamente sobre esta propriedade, a contemplam com as palavras de Lebesgue ao escolherem algumas citações para apresentarem no Material finalizando o texto. Como, por exemplo, "*Nenhuma tentativa é feita para definir os números racionais e irracionais... Esses números aparecem em todo lugar e em todo lugar*

se evita falar deles claramente." (LEBESGUE apud BARONI e NASCIMENTO, 2005, p. 33-34)

Eu não poderia deixar de acrescentar a essa redação uma mostra do quão marcante foram, para mim, as reações dos alunos, em particular no dia em que o processo de medição, a Seção 7, foi considerado. Os alunos fizeram questão de explicitar, durante o desenvolvimento da aula, sentimentos de satisfação em relação ao processo. Mais detalhadamente, comento esses resultados no parágrafo seguinte.

Convém salientar que os objetos matemáticos que o Material traz, bem como as definições e os resultados, em sua grande maioria, apresentaram-se como uma "novidade" para os alunos, inclusive a idéia de trazê-lo a partir do que considero o coração do Material, que é o ato de medir. Mais ainda, para os alunos, conhecer esse processo na disciplina foi uma atividade gratificante. Para todos os alunos, sem exceção, aquela era a primeira vez que esse processo estava sendo apresentado e as Entrevistas reforçam essa minha percepção. Recorto, das Entrevistas, algumas dessas falas, para evidenciar esse estado de surpresa e satisfação em relação à abordagem, considerando aqui a forma de apresentação e o processo de medir.

Eu confesso que fiquei assim, bastante surpreso, no sentido de satisfação com essa abordagem desenvolvida pela professora conosco. (. . .)
Eu acho que não teria tanta dificuldade de explicar pros meus alunos os números reais com essa abordagem, via medição, do que fala daquela análise que eu vou chamar de tradicional. (P3)

. . . essa abordagem de medição, eu achei que foi o grande diferencial do curso, que é uma coisa que você não vê . . . Pelo menos não é comum de se trabalhar, eu pelo menos jamais tive acesso a esse tipo de abordagem. Eu acho que isso é

uma coisa interessante. Então, eu acho que todo esse processo que a gente viveu, eu acho que foi o diferencial. (P2)

Veja, a gente sabe, por exemplo, que uma fração é um número decimal, a gente sabe isso, só que a gente tinha que partir de algo que. . . A gente estava nos números naturais, a gente não pode usar isso ainda. . . A gente estava nos números inteiros positivos, a gente não pode usar determinado tipo de coisa, olha, e a gente só tem aqui seqüência de dígitos, a gente não sabe o que é fração, então. . . Esse processo é um processo muito bom, eu acho muito interessante pra ser feito. (P1)

Eu achei a proposta do curso bem interessante. Quando eu me matriculei no curso de Análise, eu . . . obviamente estava esperando outra coisa e eu fui surpreendida . . . de forma positiva. (P4)

Encerrando aqui os comentários referentes à subseção que traz o processo de medição, no sentido dito direto, passo a descrever a seção que considera o processo inverso. Nesta seção será apresentada a resposta para a seguinte pergunta: Se a cada segmento AB associamos uma decimal a_0, a_1 a_2. . . como a medida desse segmento, será que a cada decimal existe um segmento cuja medida seja dada por aquela decimal? Veremos que a resposta é afirmativa, mas, sob certas condições. Extraindo sua essência, é a completude de R que é explorada nesta seção, e para desenvolvê-la, os autores trazem dois axiomas já bem conhecidos daqueles que tiveram a oportunidade de cursar Análise. Refiro-me ao Axioma de Arquimedes e ao Axioma da Continuidade, ambos considerados em uma forma geométrica. Segue a descrição do processo inverso.

4.2.7. Subseção: 7.2. O processo inverso

Descrição

". . . *toda tal seqüência origina-se como relato da medição de algum segmento* AB com um segmento unitário U?". (BARONI e NASCIMENTO, 2005, p. 21) Os autores fazem uso dessa pergunta para trazer quais são as intenções dessa subseção. E, como já citei acima, para responder a ela, os autores amparam-se em dois axiomas: o Axioma de Arquimedes e o Axioma da Continuidade. Cito-os abaixo:

> **Axioma de Arquimedes**: Quaisquer que sejam os segmentos AB e CD, existe um número natural n tal que n CD é maior que AB. (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 21)
>
> **Axioma da Continuidade**: Seja $\alpha_i\beta_i$ uma seqüência de segmentos encaixados. Suponha que, para cada natural n exista um correspondente natural k tal que $\alpha_i\beta_i$ é menor que $\frac{1}{n}$U para todo i > k. Então existe B $\in \bigcap_{i\in N}\alpha_i\beta_i$.(BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 22)

Os autores começam por considerar a seqüência nula 0,000. . . comentando que, embora a intuição nos leve a pensar que essa seqüência não seja a medida de segmento algum, é o Axioma de Arquimedes, já apresentado no texto, que nos oferece a oportunidade de afirmarmos a respeito. O texto traz um exercício para evidenciar esse caso. "*Exercício 9: Demonstre a afirmação feita sobre a seqüência nula, utilizando o Axioma de Arquimedes.*" (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 21)

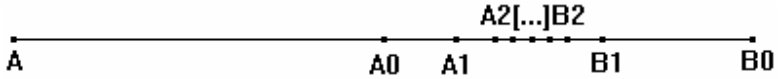
Em seguida:

> Seja, então, uma seqüência não nula $a_0, a_1a_2a_3$... Tomemos uma semi-reta AX de origem A, e tentemos construir sobre ela um segmento AB cuja medida, com relação a U, seja a seqüência dada. (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 21-22)

Em busca desse ponto B, os autores descrevem o processo, ilustrando com uma figura, de forma a contribuir com a visualização. Esse processo é considerado do mesmo modo como se intitula a Seção 7.2: O processo inverso. O que os autores fazem é estabelecer, a partir do ponto A, uma sucessão de segmentos encaixados A_iB_i , de forma que, a partir desse comportamento da sucessão e do modo como os extremos à direita dos intervalos são determinados, a hipótese do Axioma da Continuidade seja satisfeita. Conseqüentemente, a existência do ponto B, ainda que possa ser percebida de maneira intuitiva, é garantida por esse Axioma.

Utilizo as palavras dos próprios autores para a descrição do processo inverso.

> "B deve pertencer ao segmento A_0B_0, onde A_0 é obtido justapondo-se a_0 cópias de U sobre AX, a partir de A, e B_0 é obtido justapondo-se uma cópia mais, a partir de A_0; também, B deve ser diferente de B_0. (Por que?) (sic)



> *B* deve pertencer ao segmento A_1B_1, onde A_1 é obtido justapondo-se $a_1$cópias de $U_1 = \frac{1}{10}U$ a partir de A_0, e B_1 é obtido justapondo-se uma cópia mais a partir de A_1; também *B* deve ser diferente de B_1. (Por que?) (sic) Assim sucessivamente, obteremos uma sucessão de segmentos A_iB_i, cada um deles encaixado no precedente; um ponto *B* tal como buscamos, deve ser comum a todos esses segmentos e deve não coincidir com a extremidade direita de nenhum deles. Que exista um ponto comum a todos esses segmentos, parece-nos bastante intuitivo, tanto quanto a intuição de que uma reta é um contínuo, isto é, sem 'furos'." (BARONI e NASCIMENTO, 2005, p. 22, aspas e parêntesis do original)

No entanto, os autores preferem garantir a existência do ponto *B* acatando o Axioma da Continuidade e, sendo assim, a partir dessa garantia da existência, é natural indagarmos sobre a unicidade desse ponto B. É proposto o seguinte exercício para explorar a questão da unicidade: "*<u>Exercício 10</u>: Dê exemplo de uma*

seqüência de segmentos encaixados, tal que B*, a intersecção dos* $\alpha_i\beta_i$ *, não seja único.*" (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 22)

Observe que, no exercício, deve ser exibida uma sucessão de segmentos encaixados, que se comportam de modo análogo ao estabelecido no processo inverso. O que deve diferenciar a seqüência criada no processo inverso, e fica por conta do leitor perceber isso, é a não validade da hipótese do Axioma de Arquimedes, mais um ponto para a pertinência desse axioma na teoria.

Fazendo as devidas conexões, percebe-se que os dois axiomas são os responsáveis para que possamos garantir que o segmento AB seja determinado. O Axioma da Continuidade garante a existência do ponto B e o Axioma da Arquimedes garante a unicidade. Essa é a relevância desses dois axiomas na teoria.

E essa questão é, por fim, estabelecida no texto pelo exercício abaixo:

> <u>Exercício 11</u>: Considere a seqüência A_iB_i de segmentos que construímos acima. Então o tamanho de A_iB_i é o mesmo que o tamanho de $U_i = \frac{1}{10^i}U$. Mostre que, pelos axiomas de Arquimedes e da Continuidade, existe um único $B \in \bigcap_{i \in N} A_iB_i$. (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 22)

O que o Exercício 11 ainda informa ao leitor é que o ponto B, além de ocupar a posição de único candidato a formar o segmento AB, vem com a finalidade de mostrar a forma como ele foi determinado.

> Consideremos então o segmento AB. Para compará-lo com U, em cada estágio i devemos encontrar o inteiro positivo m tal que $m(\frac{1}{10^i}U)$ seja <u>menor</u> que, ou <u>igual</u> a, AB, e $(m+1)(\frac{1}{10^i}U)$ seja maior que AB. Como, da construção de A_i, $AA_i = (a_0\ a_1\ ...$

> $a_i)(\frac{1}{10^i}U)$ e como, pela construção de B, AA_i é menor ou igual a AB, temos que $m = a_0\, a_1 \ldots a_i$ é um candidato. Faltaria garantir que $(m+1)(\frac{1}{10^i}U)$ é <u>maior</u> que AB. Equivalentemente, como $AB_i = (a_0\, a_1 \ldots a_i + 1)(\frac{1}{10^i}U)$, faltaria garantir que $B \neq B_i$. Gostaríamos que isso valesse em todo estágio; ou seja, faltaria garantir que $B \neq B_i$ para todo i.
> (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 23, grifos no original)

Entretanto, como os próprios autores colocam no texto, não se pode, em geral, ter essa garantia, e o único tipo de exceção é mostrado na proposição que cito mais abaixo. Esta proposição apresenta sobre que condição a resposta à pergunta apresentada no início da seção pode ser afirmativa. Fundamentalmente, a Proposição exclui os casos das seqüências da forma $a_0, a_1a_2a_3 \ldots a_{i-1}999\ldots$ Nesse caso, em que a partir de um determinado estágio os dígitos encontrados são todos iguais a nove, o ponto B coincide com ponto B_i – aquele que determina o segmento correspondente a partir da seqüência construída. Vejamos a proposição seguida de sua demonstração:

> **Proposição**: $B = B_i$ para algum i se, e somente se, em a_0, $a_1a_2\ldots$ tem-se $a_j = 9$ para todo $j \geq i$.
>
> Demonstração: Se $B = \bigcap_{i \in N} A_iB_i = B_i$ para algum i, então, como $A_jB_j \supset A_{j+1}B_{j+1}$ para todo j, devemos ter $B = B_i = B_j$ para todo $j \geq i$. Agora, por construção, temos $A_kB_k = \frac{1}{10^k}U$ para todo k e, portanto, para $j \geq i$ temos $A_{j+1}B = A_{j+1}B_{j+1} = \frac{1}{10^{j+1}}U$ e $A_jB = A_jB_j = \frac{1}{10^j}U$. Isso diz que $A_jA_{j+1} = \frac{9}{10^{j+1}}U$ para todo $j \geq i$ e que, então, $a_j = 9$ para todo $j \geq i$.
>
> Reciprocamente, suponhamos $a_j = 9$ para todo $j \geq i$, e mostremos que $B = B_i$. Sabemos que dizer $a_j = 9$ para todo $j \geq i$ é dizer $A_jA_{j+1} = \frac{9}{10^{j+1}}U$ para todo $j \geq i$. Observemos também que, pela definição de B, temos $A_jB_i \geq BB_i$ para todo j. Portanto, para todo k, obtemos

> $\frac{1}{10^i}U = A_iB_i = A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2} + \ldots + A_{i+k}A_{i+k+1} + A_{i+k+1}B_i =$
> $\frac{9}{10^{i+1}}U + \frac{9}{10^{i+2}}U + \ldots + \frac{9}{10^{i+k+1}}U + A_{i+k+1}B_i = \frac{9\times10^k + 9\times10^{k-1} + \ldots + 9}{10^{i+k+1}}U +$
> $A_{i+k+1}B_i$, pelo exercício 6.
>
> Assim, ficamos com $\frac{1}{10^{i+k+1}}U = A_{i+k+1}B_i \geq BB_i$, para todo k. Se, contrário ao afirmado, tivéssemos $B \neq B_i$, teríamos uma contradição com o Axioma de Arquimedes. Portanto, devemos ter $B = B_i$.
> (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 23-24)

Por meio de uma nota, os autores colocam resumidamente, mas de uma forma bem clara, uma suma dos dois processos que estabelecem a medição, apresentados nas subseções anteriores: o processo direto e o processo inverso. Eles dizem:

> <u>Resumindo</u>: Dado um segmento AB, a ele fazemos corresponder, via medição, um símbolo a_0 , a_1 a_2 a_3 .... Uma vez acatados os axiomas de Arquimedes e da continuidade, esse símbolo não será todo de zeros e nem seus dígitos tornam-se todos 9 a partir de alguma posição. Reciprocamente, dado um símbolo a_0 , a_1 a_2 a_3 ...., cujos dígitos não se tornam todos iguais a 9 a partir de um deles e cujos dígitos não são todos zero, então, como acabamos de ver, temos um segmento AB ao qual fazemos corresponder, também pela medição, justamente o símbolo dado. (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 24)

Em seguida, os autores explicam que, a impossibilidade de obter um segmento cuja medida seja um símbolo da forma $a_0, a_1a_2a_3...a_{i-1}999...$ deve-se à forma como é constituído o processo de medição, e que, no exposto até então, nada do que foi feito diz ser impossível fazer corresponder um segmento a esse símbolo, seja por um outro processo que não esse. Eles completam, reescrevendo o resultado da proposição: "*. . . no processo de medição temos* $B \neq B_i$ *para todo* i *o que, como vimos, acontece se, e somente se, a seqüência não se torna constituída toda de* 9 *a partir de alguma posição.*" (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 24)

Acompanhada dessa discussão, os autores denominam por Δ o conjunto de todos os símbolos a_0 , a_1 a_2 a_3 ...., excluindo aquele que tem todos os dígitos iguais a zero e aqueles da forma a_0 , a_1 ... a_{i-1} 999.... Mais ainda, para que permaneça a lembrança de que esses símbolos foram criados a partir de um processo em que foram consideradas *subdivisões sucessivas do segmento U em 10 partes iguais*, cada símbolo do conjunto Δ passa a ser denominado no texto como **uma decimal***.*

Sendo assim, os símbolos a_0 , a_1 a_2 a_3 ... são as decimais. E lembrando que todos os segmentos de mesmo tamanho estão sendo considerados iguais, e somente eles, os autores denotam por S o conjunto de todos os segmentos diferentes (são aqueles que diferem apenas pelo tamanho, conforme noção estabelecida no início do texto). Dessa forma, a partir do processo de medição e do processo inverso, podemos, enfim, fazer referência à correspondência almejada desde o início da Seção 7, a correspondência denominada, no texto, $\mu = \mu_U$: $S \rightarrow \Delta$, chamada uma *medida* sobre S, que é uma função bijetora, como era esperado.

Vale observar que a função μ estabelecida depende do segmento U, ou seja, a associação acima depende de U; sem exageros, o índice U deve estar presente na notação para que esse fato não se torne esquecido.

Essa seção termina com uma “Observação – Definição” dos autores a respeito das seqüências do tipo $\{ A_iB_i \}_{i\in N}$ construídas. O objetivo é reforçar que, qualquer que seja o processo de medição que se considere, deseja-se criar um modelo numérico para a reta concebida com a propriedade do contínuo e com o que mais de intuitivo ela ainda possa ter, relacionado ao tamanho de seus segmentos. Lembrando que as seqüências produzidas pelo processo de medição referem-se a “esse processo”, tal como concebido, isto é, com U fixado e as divisões sucessivas, em 10 partes. Esse comentário vem para reforçar que o fato de os axiomas poderem ter sido utilizados da forma como foram, em relação às seqüências construídas pelo processo, não é inerente a esse processo; o que torna isso possível é o constitutivo do conjunto dos *números reais* – um conjunto

arquimediano com a propriedade do *continuum*. Isso é o que possibilita a escrita da última frase desta citação.

> **Observação – Definição**: Os axiomas de Arquimedes e da Continuidade não privilegiam as seqüências do tipo A_iB_i que construímos; um pouco de reflexão há de mostrar que um tal privilégio não teria mesmo razão de ser, já que podemos imaginar muitas outras seqüências que dariam origem a um mesmo ponto. Por exemplo, aquelas em que tomássemos outro segmento unitário. Sendo assim, queremos reformular a junção daqueles axiomas a qual, ao final, permite caracterizar B, na seguinte forma: determinar um segmento AB ao longo de uma linha AX cuja origem, A, conhecemos, é saber que a outra extremidade, B, pertence a uma seqüência infinita de segmentos encaixados $\alpha_i\beta_i$ dispostos sobre AX, de tal forma que, para cada natural n, existe um correspondente índice i, suficientemente alto para que U contenha n cópias de todos os segmentos $\alpha_j\beta_j$, com $j \geq i$. Portanto, nossos axiomas realmente equivalem a uma definição. (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 25)

Ainda nesta observação, os autores consideram as seqüências de intervalos $A\alpha_i$ e $A\beta_i$ e os símbolos $\mu(A\alpha_i)$ e $\mu(A\beta_i)$ que eles dizem *determinar* $\mu(AB)$. A palavra determinar é empregada no mesmo sentido da Geometria. O restante da observação a que se refere esse apontamento segue abaixo:

> Da mesma forma que dizemos que $A\alpha_i$ e $A\beta_i$ determinam AB, dizemos que $\mu(A\alpha_i)$ e $\mu(A\beta_i)$ <u>determinam</u> $\mu(AB)$. Dizemos mais: $\mu(A\alpha_i)$ é um valor aproximado de $\mu(AB)$, mas menor ou igual a $\mu(AB)$, e $\mu(A\beta_i)$ é um valor aproximado de $\mu(AB)$ mas maior ou igual a $\mu(AB)$; <u>dizemos</u> também que essas seqüências tornam-se arbitrariamente próximas uma da outra. (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 25, grifo meu)

E, para reforçar em que sentido esta observação deve ser considerada uma definição, os autores sugestivamente fazem uso de algumas palavras de Courant & Robbins (2000, p. 83), as quais referencio, trazendo-as nesta descrição:

> ...Temos aqui um exemplo típico da posição filosófica descrita na introdução deste livro; descartar a abordagem ingênua “realista” que considera um objeto matemático como uma “coisa em si mesma” da qual nós despretensiosamente investigamos as propriedades, e ao invés, compreender que a única existência relativa a objetos matemáticos está em suas propriedades matemáticas e na relação pela qual eles estão interligados. Estas relações e propriedades esgotam os possíveis aspectos sob os quais um objeto pode entrar no domínio da atividade matemática. Desistimos da “coisa em si” matemática, da mesma forma que a Física desistiu do éter inobservável. Este é o significado da definição “intrínseca” de um número. (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 25, aspas no original)

Discussão

Começo por resgatar a citação do Material para tecer alguns comentários a respeito:

> Da mesma forma que dizemos que $A\alpha_i$ e $A\beta_i$ determinam AB, dizemos que $\underline{\mu(A\alpha_i) \text{ e } \mu(A\beta_i)}$ determinam $\mu(AB)$. Dizemos mais: $\mu(A\alpha_i)$ é um valor aproximado de $\mu(AB)$, mas menor ou igual a $\mu(AB)$, e $\mu(A\beta_i)$ é um valor aproximado de $\mu(AB)$ mas maior ou igual a $\mu(AB)$; dizemos também que essas seqüências tornam-se arbitrariamente próximas uma da outra. (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 25, grifo meu)

Esta seção novamente torna oportuno que sejam discutidas questões referentes à presença do infinito na matemática. Mais ainda, observei que a citação acima traz a noção de limite, ao passo que, implicitamente, recorre a uma versão geométrica de um resultado da teoria de limites, o Teorema do Sanduíche (Confronto). Dizer isso é querer transferir para o conjunto das decimais o que os axiomas de Arquimedes e da Continuidade traduzem na reta, a noção de completude.

O fato de o texto apresentar dois axiomas como parte da teoria levantou algumas discussões na sala, como, por exemplo, o papel que um axioma exerce numa teoria matemática. No texto em particular, os alunos trabalharam em torno de qual

seria a necessidade dos autores apresentarem/assumirem esses dois axiomas nessa teoria. Convém comentar que esta não era uma atitude que normalmente os alunos faziam, segundo observação deles mesmos. Dessa discussão pude perceber que, para alguns alunos, até então os resultados eram desconhecidos; para outros, estes nunca haviam pensado sobre a sua importância na Análise.

> ... o conhecimento matemático é trabalhado no processo de formação a partir da perspectiva e dos valores da matemática acadêmica, ignorando-se importantes questões escolares que não se ajustam a essa perspectiva e a esses valores. (MOREIRA, 2004, p.178)

Alguns alunos tentaram entrar na questão histórica do assunto em questão, mas faltaram elementos para a discussão e/ou argumentação que a possibilitasse, por desconhecimento de informações sobre o tema. Dessa forma, pude perceber um interesse dos alunos sobre estas questões, sendo que eles mesmos sentiram a necessidade de conhecerem um pouco mais sobre a natureza de conceitos e idéias, que muitas vezes podem ser consideradas elementares, mas que refletem sobremaneira na forma como é concebido um objeto matemático. Questões relativas à própria estrutura da Matemática relativas à sua constituição como, axiomas, definições, teoremas e demonstrações foram consideradas e, desse modo, decisões que envolviam a aceitação ou não do que lhes estava sendo apresentado no curso.

A partir das duas subseções apresentadas, o processo de medição torna-se estabelecido e, dessa forma, as decimais definidas a partir da medição são os *números reais*.

Voltando às palavras da Observação – Definição que os autores apresentam no final desta seção, acrescento ainda que, desta observação, nasce a idéia de querer explorar um pouco mais além do explicitado, pois, ao abandonar as bases geométricas a partir das quais o Material foi construído, surge a possibilidade de olhar não só para a seqüência de números racionais que descreve uma decimal

obtida pelo processo de medição apresentado, mas para todas as seqüências de números racionais que poderão descrevê-la.

Se a intenção é apresentar um outro modelo para o conjunto dos *números reais*, estabelecer esta ligação é o que de mais natural considero. Estende-se uma ponte para que as idéias envolvidas na construção formal dos *números reais* elaborada por Cantor, definindo um *Número real* como uma Classe de Equivalência de Seqüências de Cauchy, [31] possa ser apresentada.

Em continuidade, no Material, os autores apresentam a Seção 8. Nela, são consideradas as operações adição e multiplicação no conjunto das decimais.

4.2.8. Seção 8. Operações

Descrição

Os autores começam observando que o processo de medição apresentado na Seção 7 pode ser iniciado partindo-se de qualquer ponto ω de *AB* e, nesse caso, para que a medição seja feita a partir deste ponto, o segmento U e suas subdivisões U_i devem ser dispostos a partir de ω em ambas as direções.

Considerando ω um ponto do segmento AB, o mesmo pode ser escrito como a justaposição dos segmentos $A\omega$ e ωB ao longo de uma reta, ou seja, $AB = A\omega + \omega B$, e os autores partem de ω para que a medida $\mu(AB)$ possa ser determinada a partir da medida desses dois segmentos $\mu(A\omega)$ e $\mu(\omega B)$.

Primeiramente, eles elaboram um procedimento partindo de ω, fazendo algumas considerações para que a medida de AB possa ser determinada a partir de $\mu(A\omega)$ e $\mu(\omega B)$. Eles escrevem:

[31] Alguns aspectos históricos desta construção estão apresentados no Capítulo 2.

> Seja a_i o último ponto alcançado, à esquerda de ω, pela justaposição de cópias de U_i sem ultrapassar A; analogamente, seja b_i o último ponto alcançado, à direita de ω, sem ultrapassar B. Também, seja $a'_i b'_i$ o segmento contendo um U_i a mais em cada extremo.
>
>
>
>
> A translação que leva a_i em A, leva b_i em, digamos, β_i situado sobre Ab_i e, portanto, sobre AB. A translação que leva a'_i em A, leva b'_i em, digamos, β'_i, situado à direita de b'_i e, portanto, de B. Além disso, $\beta_i\beta'_i = 2U_i = 2\frac{1}{10^i}U = \frac{5}{10^{i-1}}U$ o que mostra que $\mu(a'_i b'_i)$ e $\mu(a_i b_i)$ são valores aproximados de $\mu(AB)$ os quais são respectivamente maior e menor que $\mu(AB)$. (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 26)

A expressão $\beta_i\beta'_i = 2U_i = 2\frac{1}{10^i}U = \frac{5}{10^{i-1}}U$ que faz parte do trecho acima, possui um erro na última igualdade, a forma correta é $2\frac{1}{10^i}U = \frac{1}{5\cdot 10^{i-1}}U$.

Com o empreendido acima, os autores consideram a justaposição $AB = A\omega + \omega B$ e escrevem: "*Gostaríamos de determinar* $\mu(AB)$, *conhecendo* $\mu(A\omega) = k_o$, k_1k_2... e $\mu(\omega B) = m_0$, m_1m_2...." (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 26)

Partindo de ω como descrito, os autores constroem duas seqüências de valores aproximados, respectivamente menores ou igual, e maiores ou igual a $\mu(AB)$, arbitrariamente próximas uma da outra, de forma que, $\mu(AB)$ fica determinado. Eles continuam:

> O segmento $a_i\omega$ contém $k_ok_{1....}k_i$ cópias de U_i, enquanto ωb_i contém $m_0m_{1\ ...}m_i$ tais cópias. Assim, a_ib_i contém $d_i = (k_ok_{1...}k_i + m_0m_{1\ ...}m_i)$ cópias de U_i, enquanto $a'_ib'_i$ contém $e_i = d_i + 2$ dessas cópias. Escrevendo d_i na forma $d_i = d_{io}.10^i + r_i$, com $0 \leq 10^i$, ou seja, com r_i na forma $r_i = d_{i1}d_{i2}.....d_{ii}$, temos $\mu(a_ib_i) = d_{io}$, $d_{i1}d_{i2}.....d_{ii}$; analogamente para e_i obtemos $\mu(a'_i\ b'_i)$. Essas são seqüências de valores aproximados, respectivamente menor ou igual a $\mu(AB)$ e

> maior ou igual a $\mu(AB)$, arbitrariamente próximas uma da outra e, portanto, <u>determinam</u> $\mu(AB)$.
> (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 26, grifo meu)

Dessa forma, $\mu(AB)$ está definindo e sendo definido pela soma de $\mu(A\omega)$ com $\mu(\omega B)$ e escrito como $\mu(AB) = \mu(A\omega) + \mu(\omega B)$.

Observe que, na primeira linha da citação acima, a referência à variação de r_i deve ser $0 \leq r_i \leq 10^i$.

Os autores fazem um comentário sobre a forma escolhida para que a medida de AB pudesse ser determinada. Eles observam que o fato de $\mu(AB)$ ser obtido de um modo distinto do descrito na Seção 7.1, contando indefinidamente o número máximo de subunidades U_i contidas em A_iB_i , poderá causar um certo desconforto ao leitor. Entretanto, o processo para calcular $\mu(AB)$ a partir de $\mu(A\omega)$ e $\mu(\omega B)$, que será descrito a seguir, é considerado pelos autores como: "... *até onde conhecemos, é o que mais se assemelha ao processo de medição*." (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 27). Para isto, eles escrevem:

> Consideremos a seqüência $\{\mu(a_ib_i)\}$ de decimais
> $\mu(a_0b_0) = d_{00}$, 0000.....
> $\mu(a_1b_1) = d_{10}$, d_{11}000.....
> $\mu(a_2b_2) = d_{20}$, $d_{21}d_{22}$000.....
> .....
> Onde os d_{i0} são inteiros e d_{ij} , $j \neq 0$, são dígitos de 0 a 9.
> (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 27)

Um exercício é proposto no meio da apresentação do processo. Ele explora a identificação dos elementos que irão compor a seqüência. Desse modo, o leitor poderá verificar se ele está acompanhando o desenvolvimento do processo, permitindo que a medida de *AB* seja determinada a partir das medidas de $A\omega$ e ωB. Trago aqui este exercício: "*<u>Exercício</u> <u>12</u>*; *Exiba os quatro primeiros termos da*

seqüência acima para $\mu(A\omega) = 0,989898...$ *e* $\mu(\omega B) = 0,3333...$*"*(BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 27)

Dando continuidade à apresentação do processo, os autores escrevem:

> Percorramos agora de cima para baixo a coluna de inteiros d_{10}, d_{20}, d_{30}, ... Uma vez que a seqüência $\{\mu(a_ib_i)\}$ é limitada (por $e_0 = d_0 + 2$), estes inteiros não podem crescer indefinidamente, e uma vez que a seqüência é crescente (Por que?) (sic), a seqüência de inteiros d_{10}, d_{20}, d_{30}, ... permanecerá constante após atingir seu valor máximo. Chamemos este valor máximo de A, e suponhamos que ele seja atingido na N_0-ésima linha. Percorramos agora de cima para baixo a segunda coluna d_{11}, d_{21}, d_{31}, ..., concentrando a atenção nos termos a partir da N_0-ésima linha. Se x_1 for o maior dígito a aparecer nesta coluna após a N_0-ésima linha, então x_1 aparecerá constantemente após sua primeira aparição, que podemos supor, ocorrerá na N_1-ésima linha, onde $N_1 \geq N_0$; isto porque, se o dígito nesta coluna decrescesse posteriormente, a seqüência $\{\mu(a_ib_i)\}$ não seria crescente. Consideremos agora os dígitos d_{22}, d_{32}, ... da terceira coluna. Um raciocínio semelhante mostra que após um certo inteiro $N_2 \geq N_1$ os dígitos da terceira coluna são constantemente iguais a algum dígito x_2. Se repetirmos este processo para a quarta, quinta, ... colunas, obteremos dígitos x_3, x_4, x_5, ... e inteiros correspondentes N_3, N_4, N_5, ... A decimal $A,x_1x_2x_3...$ goza da seguinte propriedade: o segmento, construído de acordo com o processo inverso, e que dá origem
>
> a essa decimal, deve estar contido em todos os segmentos $a'_ib'_i$ e deve conter todos os segmentos a_ib_i sendo, portanto, o próprio segmento AB. Desse modo,
> $\mu(AB) = A, x_1x_2x_3...$
> (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 27)

Convém observar que a letra A da decimal não é a mesma que determina o extremo direito do segmento AB.

Em suma, o que os autores fazem até aqui é definir a operação adição no conjunto das decimais. Porém, é extremamente importante observar que o

processo apresentado descreve as decimais finitas que compõem uma seqüência que, diríamos, converge para o resultado dessa adição, a soma, ou seja, a decimal resultante da soma, que é um limite e não pode ser exibida, a menos de um número finito de dígitos, já que a mesma possui infinitas casas decimais.

Antes mesmo de se referir a operação de multiplicação, que permite considerar o produto de decimais, os autores trazem algumas observações acerca do empreendido. Comentam que o processo descrito acima demanda que, em cada estágio, seja percorrida uma lista infinita de dígitos e que pode ser entendida da seguinte forma:

> ... em cada estágio i que medimos $A\omega$ e ωB, sabemos que cada um deles não contém uma mais subunidade correspondente U_i, mas o mesmo não sabemos quando são justapostos já que o que resta de cada um poderia suprir uma dessa subunidade a mais. Como isso ocorre em cada estágio, para decidirmos será necessário considerar todos os estágios. Isso, de certa forma, já está presente no processo inverso; de fato, o uso do axioma da continuidade demanda que a seqüência de intervalos encaixados $\alpha_i\beta_i$ satisfaça: para cada n a existência de um correspondente k tal que $\alpha_i\beta_i$ seja menor que $\frac{1}{n}U$ para os infinitos i > k. Basta pensarmos que dar n é dar um estágio (uma coluna) no processo acima e existir k é poder tomar $k = N_n$ no processo acima. A exigência $\alpha_i\beta_i$ menor que $\frac{1}{n}U$ pode ser pensada como dizendo que aquilo que resta de $A\omega$ e ωB, em cada estágio da medição, está controlado de forma a não alterar o estágio anterior.
> (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 28)

Logo após essas observações os autores completam a seção apresentando a operação de multiplicação no conjunto das decimais. Chamo a atenção para a ausência das operações subtração e divisão no conjunto das decimais, lembrando que o objetivo, desde o início do Material, é oferecer uma apresentação para o conjunto dos *números reais* positivos.

Para tratar da multiplicação, os autores escrevem que o procedimento realizado para que a adição entre duas decimais pudesse ser considerada,

conseqüentemente viabilizou considerarmos o produto de duas decimais. Para isso, se $\mu_1 = a_0, a_1a_2...$ e $\mu_2 = b_0, b_1b_2...$ basta considerar os pares de decimais finitas:

$$(a_0 ; b_0)$$
$$(a_0 , a_1 ; b_0 , b_1)$$
$$(a_0 , a_1a_2 ; b_0 , b_1b_2)$$
$$. . .$$

e buscarmos pela regra que cada leitor conhece, a fim de que o produto de duas decimais seja obtido. Dessa forma, obtemos para cada par ordenado acima uma nova decimal. Os autores escolhem não trazer essa regra aqui. Embora possa parecer estranho, trago comentários acerca desta atitude na discussão desta seção. Eles explicam:

> E multiplica-se da forma usual que aprendemos no ensino médio. Cada desses produtos fornece uma nova decimal, com as quais formamos uma seqüência de decimais análoga a $\{\mu(a_i, b_i)\}$ considerada acima.
> (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 28)

Considera-se, a partir dessa seqüência $\{\mu(a_i, b_i)\}$ obtida, o mesmo processo explicitado para o tratamento da adição, e os autores limitam-se apenas a comentar sobre esse seguimento da teoria para que, enfim, a decimal seja determinada e denominada o produto de μ_1 por μ_2.

Uma observação interessante, e que poderia considero importante destacar, refere-se ao que os autores colocam a seguir. Segundo eles dizem, seria uma outra forma de estabelecer o produto de decimais, amparando-o em bases intuitivas. Eles colocam: "... *podemos partir de um processo de medição de um retângulo com relação a um quadrado unitário e nisso criar as decimais*." (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 29) O que, ligeiramente falando, consiste em a partir de um retângulo ABCD, determinar o produto de μ_1 por μ_2 , onde μ_1 seria a

medida do lado AB, e μ_2 a medida do lado CD, ou seja $\mu_1 = \mu(AB)$, $\mu_2 = \mu(CD)$. Assim, $\mu_1 . \mu_2$ seria a medida do retângulo ABCD.
A observação dos autores quanto a essa possibilidade está ancorada nas idéias apresentadas em Lebesgue (1966).

Logo após apresentar essa possibilidade, os autores encerram a Seção 8. Seguindo o curso deste trabalho, passo a discuti-la.

Discussão

Uma observação que faço, decorrente ainda da primeira vez que tive contato com o Material, refere-se à ausência de algum comentário sobre os objetivos da seção. Mais ainda, uma conexão com o exposto anteriormente no texto. Embora possa, muitas vezes, ser propriedade de um texto matemático cujo propósito seja apresentar um "novo" conjunto de elementos, considerar em seguida algum tipo de operação sobre os elementos desse conjunto, considero que essa informação é necessária para que o Material seja concebido como uma proposta de modo a explicitar a suas intenções com a seção.

A princípio, senti um incômodo em relação à referência dos autores, admitindo o algoritmo do produto entre duas decimais finitas como já conhecido pelo leitor, para que, a partir daí, a operação de multiplicação no conjunto das decimais pudesse ser determinada. Posso garantir que escutei isso também dos alunos que, em consenso com a professora, chegaram a comentar que esta seção do Material deveria ser reestruturada, sofrendo alterações.

A posteriori, estudando com mais profundidade essa questão, conclui que, por conta apenas desta questão, não existe a necessidade de uma reestruturação da seção. Ao admitir como conhecido o algoritmo do produto de decimais finitas, os autores poderiam apenas deixar isso claro, dizendo, por exemplo, que eles se apóiam nesse algoritmo para o desenvolvimento da seção. Por outro lado, vejo

esta como uma oportunidade ímpar para que um detalhamento a respeito do assunto possa ser feito.
O algoritmo do produto de decimais finitas é uma herança da escolaridade dos alunos que, até então, não tinha sido sequer revista pelos mesmos. Considero que essa seria uma boa oportunidade para que os alunos pudessem trazê-lo previamente para a aula, quer seja como uma tarefa, promovendo novamente o contato do aluno, com conteúdos que ele deverá se apropriar para o desenvolvimento da sua prática, mas que, agora, poderiam ser vistos sob um outro ponto de vista.

Um outro detalhamento que considero pertinente poderia partir da inserção de alguns exercícios que explorassem o processo em si, explicitando, por exemplo, as noções implícitas ou intrínsecas, ao considerarmos a decimal $\mu(A,B)$ como determinada. Como noções implícitas, posso citar a noção de limite, que está sendo explorada ao considerar o teorema do sanduíche, mesmo que intuitivamente. Esse apontamento que faço provém não somente da minha percepção, mas também da fala dos alunos em sala.

Outro ponto a considerar refere-se ao fato de esta seção realizar uma tarefa que, em relação à natureza das operações com as decimais, em geral não é cumprida.

Coloco a referência que nós, eu juntamente com os alunos, tínhamos em relação a essas operações, que é a mesma considerada nos livros da Educação Básica, a qual, em resumo, restringe-se a aplicar um algoritmo considerando apenas as decimais finitas. A nós não foi apresentado um tratamento sobre tal, e sequer nos questionamos sobre a possibilidade de definirmos operações sobre o conjunto das decimais de um modo geral. Mais uma vez desvia-se de tratamentos que impliquem na consideração de processos infinitos.

Vejo o conteúdo desta seção como uma propriedade destacada em relação ao tratamento do tema.

> A nosso ver, uma etapa de re-elaboração e aprofundamento das visões e saberes que os licenciandos trazem da escola é necessária e importante, pois se trata, agora, de uma construção de conhecimentos visando a ação *profissional* como *docente* e não como *aluno*, num processo de *escolarização básica*. (MOREIRA, 2004, p.140, grifo nosso)

4.2.9. Seção 9. A Comensurabilidade Revista

Descrição

Antes mesmo de descrever o objetivo desta seção, os autores apresentam uma introdução e, basicamente, o que é exposto refere-se às correspondências até então obtidas. Esta atitude faz-se necessária em face do desenvolvimento da própria seção, já que, como referido anteriormente, de um modo geral, são feitas conexões acerca dos resultados apresentados nas seções anteriores.

Recapitulando: a referência que eles fazem a respeito das correspondências pode ser abordada em duas partes. Fixado um segmento U, ao considerarmos um segmento AB proporcional a U, ou seja, $\frac{AB}{U} : \frac{p}{q}$ e, conseqüentemente, a classe [(p,q)], vimos, na Seção 5, que podemos estabelecer uma correspondência bijetora entre pares de segmentos, em particular, o segmento U e o segmento AB e a classe [(p,q)]

$$[(p,q)] \leftrightarrow AB$$

Da mesma forma, ainda fixado U, podemos estabelecer uma correspondência bijetora entre o segmento AB e sua medida, a decimal a_0 , $a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ (é o que foi feito na seção 7)

$$AB \leftrightarrow a_0 \,,\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$$

Consideradas essas duas correspondências, por composição, podemos pensar na correspondência

$$[(p,q)] \leftrightarrow a_0 , a_1 a_2 a_3 \ . \ . \ .$$

entre as classes [(p,q)] e um certo conjunto de decimais.

E os autores chamam a atenção para o uso da palavra *certo*: "*Devemos, mesmo, dizer* <u>*certo*</u> *conjunto, pois estamos considerando aqui somente os segmentos que estão em* $\wp$(U)." (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 29, grifo no original)

Estabelecida a correspondência desejada, com U fixado, os autores procuram por uma identificação das decimais correspondentes a essas classes, pensando que as decimais possam ter alguma particularidade.

O texto não chama a atenção para o fato de que as proposições constantes nesta seção também caracterizam as decimais não-periódicas, como medidas de segmentos incomensuráveis com o segmento U.

Os autores não fazem um arrazoamento dessa natureza no texto. O que eles fazem é trazer o exercício 15 (citado mais à frente) que, mesmo de maneira implícita, aborda esta questão. Considero pertinente apresentar esses comentários aqui, já que é exatamente esta característica buscada para as decimais que permite que estes apontamentos sejam feitos. É a proposição abaixo que traz o cerne desta questão.

> **Proposição**: Se AB $\in$ $\wp$(U), então μ(AB) é da forma a_0 , $a_1 a_2$ .... a_n a_{n+1} ... a_{n+i} a_{n+1} ... a_{n+i} a_{n+1} ... a_{n+i} ... para certo i.
> (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 29)

Um outro fato crucial que julgo relevante apontar refere-se à demonstração desta proposição: sobre o resgate que ela faz de uma das certezas que trazemos da nossa vida escolar, a denominada "Regra da Chavinha". Trata-se do procedimento que exibe a representação de uma fração na sua forma decimal, e vice-versa, e, mais ainda, ele justifica essa passagem ao apoiar-se no modo como o processo para a obtenção da decimal é descrito a partir do segundo estágio, quando começam a ser explicitados os dígitos subseqüentes das subdivisões de U. Muitas vezes, o algoritmo de Euclides é confundido com o procedimento que possibilita essa passagem de um campo ao outro; mas ele refere-se somente a números inteiros. Segue abaixo a demonstração da Proposição e um grifo para essa explicação.

> Demonstração: Como AB $\in \wp$(U), temos qAB = pU para certos p e q. Decompondo p = $a_o q + r_o$, com $0 \leq r_o < q$, podemos escrever qAB = $(a_o q + r_o)U = a_o qU + r_o U$. Como $0 \leq r_o < q$, vemos que qAB contém a_0 cópias de qU, e não mais. Portanto, AB contém a_0 cópias de U, e não mais. Isso significa que o primeiro estágio da medição de AB com relação a U é representado por a_0. <u>No segundo estágio</u>, devemos encontrar o número máximo de cópias de $\frac{1}{10}$ U contidas em AB. Repetimos, então, o raciocínio:
>
> qAB = $10\, a_o q\, (\frac{1}{10} U) + 10\, r_o\, (\frac{1}{10} U)$ e, decompondo $10\, r_o = a_1 q + r_1$, com $0 \leq r_1 < q$, ficamos com qAB = $(10\, a_o + a_1)q\, (\frac{1}{10} U) + r_1\, (\frac{1}{10} U)$.
>
> Disso concluímos que AB contém $10\, a_o + a_1$ cópias de $\frac{1}{10}$ U, e não mais, de modo que o segundo estágio da medição é representado por a_0 , a_1. Assim sucessivamente.
> Finalmente, observamos que cada r_i, i > 1, é obtido como resto da divisão de $10r_{i-1}$ por q. Assim, os possíveis r_i, i > 1, são 0, 1,..., q-1. Havendo infinitos estágios, algum r_i deve repetir-se, bem como o a_i correspondente. Como a continuação depende apenas do último resto obtido, uma vez que r_i seja obtido, todos os demais o serão na mesma ordem anterior. (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 29-30)

O exercício 14 convida o leitor a reconsiderar o seu conhecimento sobre o método ou regra da chavinha. "*<u>Exercício 14</u>: Constate que a demonstração acima explica o algoritmo da divisão (da chavinha) que você aprendeu no ensino fundamental.*" (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 30)

Uma observação que faço está relacionada a um comentário da professora em sala de aula e que não se apresenta no Material. Refiro-me ao fato de que, desse algoritmo, não obteremos as decimais terminadas em nove, aquelas que foram excluídas para que a teoria pudesse ser estabelecida.

Em face da característica que distingue as decimais apresentadas na proposição, os autores as denominam – **dízimas periódicas**. Conforme a definição: "***Definição:*** *As decimais que têm a forma proposta na proposição acima, são chamadas dízimas periódicas.*" (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 30)

A seguir, é apresentado, no Material, o exercício 15, que, como comentei anteriormente, aborda a questão da existência de infinitos segmentos incomensuráveis. De minha parte, faço uma relação com a proposição anterior para inferir a respeito da infinidade de dízimas que não possuem a característica da periodicidade – apesar dos autores não comentarem a respeito, essas podem ser denominadas como **dízimas não-periódicas**. "*Exercício 15: Utilizando a proposição acima, mostre que há infinitos segmentos que não estão em* $\wp$(U). *Podem eles ser todos menores que U*?" (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 30)

O que o exercício traz é uma alusão à comparação destes infinitos segmentos que estão em $\wp$(U) e U. Ao concluir sobre a infinidade de segmentos que não estão em $\wp$(U), pode-se perceber que, desta infinidade de segmentos, há uma infinidade deles que são menores que U, e, claro, maiores também. A garantia desta infinidade quem nos dá é o Axioma de Arquimedes. Mais ainda, dizer que existem infinitos segmentos menores que U que não comensuráveis a U, se pensarmos nas medidas desses segmentos, é o mesmo que dizer que existem infinitas decimais que não são periódicas entre 0 e 1 (esta é uma questão ligada à densidade deste intervalo).

O texto apresenta um questionamento sobre a recíproca da proposição, ou seja, podemos afirmar que a cada dízima periódica corresponde um segmento cuja medida é essa dízima? Os autores respondem tal questão no raciocínio que segue abaixo:

> Dada a dízima periódica a_0 , a_1 a_2 .... a_n a_{n+1} ... a_{n+i} a_{n+1} ... a_{n+i} a_{n+1} ... a_{n+i} ..., consideremos a seqüência de intervalos encaixados
> $A_{n+i}B_{n+i}$; $A_{n+2i}B_{n+2i}$; ... ; $A_{n+ki}B_{n+ki}$; ....
> que, claramente, determina o ponto B que desejamos. Assim, o segmento AB é tal que $AA_{n+ki} \leq AB < AB_{n+ki}$ para todo k, ou equivalentemente,
> $A_nA_{n+ki} \leq A_nB < A_nB_{n+ki}$ para todo k
> Chamando b = a_{n+1} ... a_{n+i} temos
> $A_nA_{n+i} = AA_n + \frac{b}{10^{n+i}}U$
> $A_nA_{n+2i} = A_nA_{n+i} + A_{n+i}A_{n+2i} = AA_n + \frac{b}{10^{n+i}}U + \frac{b}{10^{n+2i}}U = \frac{b}{10^{n+i}}(1+\frac{1}{10^i})U$
> ....
> $A_nA_{n+ki} = A_{n+(k-1)i}A_{n+ki} = \frac{b}{10^{n+i}}(1+\frac{1}{10^i} + ... + \frac{1}{10^{ki}})U$
>
> Um argumento simples de indução mostra que
> $(1+\frac{1}{10^i} + ... + \frac{1}{10^{ki}}) = \frac{10^{i(k+1)} - 1}{(10^i - 1)10^{ik}}$ para todo k e que, portanto,
> $A_nA_{n+k} = \frac{b}{10^{n+i}}(\frac{10^{i(k+1)} - 1}{(10^i - 1)10^{ik}})U$
> Assim, a questão é buscar, se existem, naturais p e q tais que
> $\frac{b}{10^{n+i}}(\frac{10^{i(k+1)} - 1}{(10^i - 1)10^{ik}})U \leq \frac{p}{q}U < \frac{b+1}{10^{n+i}}(\frac{10^{i(k+1)} - 1}{(10^i - 1)10^{ik}})U,$ para todo k. (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 30)

A tarefa de encontrar esses naturais p e q (para determiná-los estão implícitas, aqui, várias operações/procedimentos/propriedades que são extensões daquelas apresentadas na Seção 5) é deixada a cargo do leitor no exercício a seguir:

> <u>Exercício 16</u>: Verifique que $\frac{p}{q} = \frac{10^i}{10^i - 1}\frac{b}{10^{n+i}}$ satisfaz as desigualdades acima. Você tem idéia de como $\frac{p}{q}$ foi conseguido? (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 31)

Observe que deve ter havido um erro de digitação no texto no exercício acima, ao colocar a igualdade $\frac{p}{q} = \frac{10^i}{10^i - 1}\frac{b}{10^{n+i}}$ pois o correto seria *que* $\frac{p}{q}U = \frac{10^i}{10^i - 1}\frac{b}{10^{n+i}}U$, já que da forma como foi posta, a simbologia não faz sentido no texto.

Os autores completam usando a seguinte frase para finalizar a seção: "*Finalmente, como* $AA_n = \frac{a_0a_1...a_n}{10^n}U$*, ficamos com* $AB = (\frac{a_0a_1...a_n}{10^n} + \frac{b}{(10^i - 1)10^n})U$, mostrando que $AB \in \wp(U)$." (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 31)

Vale observar que, no raciocínio apresentado na citação da página anterior, exige-se um pouco mais do exposto em relação às operações realizadas. Encerro aqui o momento Descrição da Seção 9.

Discussão

A presença desta seção é, sem dúvida, de extrema relevância no Material.

Primeiro, porque ela proporciona que sejam estabelecidas conexões entre os diferentes momentos pelo qual o Material é constituído: a Seção 5, que nos motiva a apresentar o processo de medição; a pertinência da Seção 6, que trata da incomensurabilidade. E, enfim, a identificação dos segmentos de $\wp(U)$, cujas medidas são representadas pelas decimais denominadas dízimas periódicas, ligando, dessa forma, os campos geométrico e algébrico no tratamento do conceito de número racional ao apresentá-lo por vias de um processo de medição. Considero que essa idéia elaborada de medir torna mais transparente e compreensível o vínculo da irracionalidade com os processos infinitos sem a necessidade de recorrer a uma apresentação das dízimas não-periódicas como uma soma de infinitas parcelas.

> O tipo de visão que se veicula na licenciatura, [axiomatizando o conjunto dos *números reais*] além de não oferecer alternativas

> para o tratamento dado nos textos escolares, ainda acaba legitimando uma forma inadequada (no contexto da educação matemática escolar) de apresentação da idéia de número irracional. (MOREIRA, 2004, p. 122)

Em segundo, pelas possibilidades de tratar de questões relacionadas diretamente à prática profissional do professor.

Um ponto a considerar está relacionado ao exercício 14, aquele que convida o aluno a constatar que a demonstração da proposição explicita o procedimento que permite representar uma fração num número racional, e vice-versa. O que vejo como uma possibilidade que o Material apresenta, além disso, o fato de trazer o assunto à sala de aula possibilitou que questões adjacentes viessem à tona, trazidas pelos alunos. Essas questões referiam-se à natureza de um determinado objeto, um conceito, uma noção. Um comentário feito por um aluno apontava que o Material "mexe com o aluno neste sentido". Quanto ao exercício 14, em particular, alguns alunos disseram que o procedimento passava despercebido, e que nunca tinham ao menos se questionado sobre o assunto: "o procedimento era usado e só". O que eles perceberam e comentaram é que, enquanto professores, na sua prática, diversos questionamentos poderão surgir acerca de números, basta que existam oportunidades para que eles possam acontecer, considerando a imprevisibilidade desses momentos. Enquanto pesquisadora, acredito que

> Quando um profissional reflecte na e sobre a sua prática, os objetos da sua reflexão são tanto mais variados quando mais vasto, rico e profundo for o conhecimento que ele traz consigo para essa prática. (ALARCÃO, 2003, p. 34)

Uma observação pertinente, proveniente dos alunos, refere-se à forma como alguns livros didáticos mencionam alguns números irracionais ao, erroneamente, utilizar de reticências para indicar a continuação dos algarismos omissos, como por exemplo, o caso do número π escrito da forma:

"π = 3,1415..."

E, ao mesmo tempo, utilizam as reticências para a repetição de períodos em dízimas periódicas, por exemplo.

Atreladas a este comentário, diversas considerações surgiram no momento da aula. Aponto, como resultado de uma reflexão dos alunos, o papel que o livro didático exerce na sala de aula, quando estes consideraram a influência que ele exerce no processo ensino e aprendizagem, que, neste caso, por exemplo, provoca, no mínimo, uma confusão acerca da representação de um número irracional (segundo comentário em sala).

Observo que, várias vezes, os alunos referiam-se ao livro didático para trazer alguma observação ou comentário a respeito de um assunto. Considero a idéia de trazer à tona o livro didático da Educação Básica essencial para que o licenciando possa se dar conta de questões como a que resgatei do Diário de Campo colocada acima. De certa forma, fomenta a necessidade do reconhecimento de possíveis deficiências na forma com que um assunto é abordado no livro texto adotado, bem como a necessidade da tomada de decisão de forma a superar esta deficiência. No trabalho de sala de aula, reconhecer e superar as deficiências reconhecidas de um texto adotado é um trabalho de extrema importância e que faz parte das tarefas que o professor da educação Básica deve ser capaz de realizar.

> O fato é que o domínio dos conhecimentos envolvidos no trabalho didático com a idéia de incomensurabilidade e sua vinculação com o significado dos números irracionais pode ser essencial no desempenho de eventuais tarefas de avaliação, seleção, adaptação ou mesmo a construção e implementação de possíveis propostas de abordagem escolar do tema “números reais”. (MOREIRA, 2004, p. 123)

E, juntamente com esse autor, concebemos a possibilidade de tratamento para os *números reais* no Ensino Fundamental e Médio sobre as mesmas bases do Material, percorrendo as idéias de Lebesgue. No momento das Entrevistas, essa possibilidade foi considerada, mesmo com cautela. E era mesmo de se considerar. Os alunos responderam positivamente quanto à utilização de um tratamento nestes moldes para esse nível de ensino. Esse é um dos pontos que o capítulo 5 traz, e que antecipo aqui, apresentando a fala de um dos alunos, que explora essa questão:

“A questão do número, principalmente lá na quinta série, sexta, é muito difícil de ser tratada. E a minha formação de matemático puro não dava conta das demandas que tinham lá, alunos chegavam na quinta série e não sabiam as operações básicas e o momento que a gente pode perceber que teve um retorno melhor foi quando a gente usou Material concreto, quando a gente usou cartolina. . . e. . . cortasse e trabalhasse com frações a partir de uma medição, que a gente pegava um retângulo, era uma unidade e você repartia aquele retângulo em subunidades em três partes, quatro, pegava frações equivalentes pra somar, e recortava aquilo, e ia encaixando, um meio, dois quartos encaixados certinho uma em cima da outra, então. . . era uma medição. Esse processo de medição foi mais natural pro aluno do que você tira mmc e tal, e mínimo múltiplo comum dos denominadores, já deu pra perceber que com a medição, com o Material concreto é algo que possivelmente pra maioria e pra uma boa parte dos alunos foi algo que foi mais natural,. . . “(P1)

Visualizando a idéia do Material como uma alternativa para cursos de formação de professores, acredito que a associação das decimais periódicas a medidas de segmentos proporcionais a U, e conseqüentemente, as não-periódicas a segmentos não proporcionais a U como um ponto central desta seção é um ponto que deve ser ressaltado.

O fato de o Material atrelar a noção de número a uma medida, para mim, vai além de uma construção geométrica. Convém salientar que essa minha afirmação está amparada nas conclusões de diversos pesquisadores que se referem ao tema (MOREIRA, 2004; FISCHBEIN *et al*, 1995; REIS, 2003; e outros). Subliminar a esse “contexto” geométrico permanece a noção de limite e, como já comentei em alguns pontos, esta noção poderá ser explorada em vários pontos do Material. O fato de conceber um número racional ou irracional como gerado por um processo que envolve infinitos passos é um ponto em que a noção de limite está implícita. A noção de limite de uma seqüência pode ser apontada como um instrumento fundamental para que conflitos existentes entre processos infinitos e a

representação de número possam existir. MOREIRA (2004, p. 135) coloca a seguinte questão para ilustrar um desses conflitos "[...] *que número uma determinada forma decimal não periódica poderia representar se é impossível, muitas vezes, expressar completamente os dígitos da própria forma decimal que o representaria*?", ou, ainda, a noção pode dar sentido e significado àquilo que se projeta como o fim de um processo. Mas, embasada nos resultados apresentados pelas pesquisas constantes do capítulo 1, posso afirmar que o tratamento formal e rigoroso da noção de limite na Licenciatura não parece ajudar no trabalho docente escolar com as noções de número irracional e real, mesmo porque os próprios licenciandos demonstraram dificuldades com essas noções. (MOREIRA, 2004)

Um outro ponto a salientar, mais explícito, porém não aparente, é o que os autores remetem ao exercício 16, em relação ao número $\frac{p}{q}U = \frac{10^i}{10^i - 1}\frac{b}{10^{n+i}}U$. Observe que para a obtenção do mesmo, há de considerar a noção de limite. Essa é a resposta que os autores buscam quando dizem: "Você tem idéia de como $\frac{p}{q}U$ foi conseguido?" (BARONI e NASCIMENTO, 2005, p. 31)

Para finalizar os comentários desta seção, faço um apontamento relacionado à redação do Material, como um todo, sobre a falta de uma enumeração nos resultados e nas definições, o que facilitaria sua referência.

Na redação final do Material vem a seção intitulada Conclusão. Finalizo a exposição deste capítulo trazendo apenas alguns comentários sobre a mesma.

4.2.10. Seção 10: Conclusão

Esta seção é a finalização do Material. Nela, os autores tecem alguns comentários sobre o empreendido, destacando alguns pontos considerados relevantes quanto aos objetivos e à escolha do caminho, para que essa produção – o Material –

pudesse tornar-se o texto que é. Escolhi marcar sua presença trazendo alguns trechos que compõem a sua redação.

O primeiro deles apresenta algumas palavras dos autores em relação ao ensino do tema:

Ainda que na *Apresentação* disséssemos que não faríamos proposta alguma de uso deste trabalho em sala de aula, queremos registrar nossa crença em que, em questões de ensino, a transparência é fundamental: ao introduzirmos novas definições e, conseqüentemente, novas formas de pensar, devemos evidenciar em que ponto exatamente as velhas formas se mostraram ineficazes; somente isso pode conectar uma questão com nosso pensamento subseqüente. Noutras palavras, não se pode abandonar a História a qualquer momento. (BARONI; NASCIMENTO, 2005, p. 32)

Estas palavras vêm acompanhadas das de Lebesgue, citadas no texto. São elas:

> ... the teachers isolate each question from the whole of mathematics and create for this question alone a perfect language without bothering with its relationships to other questions. Mathematics is no longer a monument but a heap. (Lebesgue, 1966, p. 32)

Depois de uma suma sobre o conteúdo do Material, localizando e destacando três momentos dele, os autores apresentam um comentário sobre a Seção 9. E considero relevante chamar a atenção para tal, pois, nele, estão expostas algumas considerações relacionadas a questões de ensino.

> A Seção 9 aparece com propósito duplo. Um deles é justamente conectar os fatos, exibindo de que modo a introdução da medição resgata a comensurabilidade. É tentador dizer que o processo de medição amplia o processo de comparação por comensurabilidade; mas, insistimos, não se trata de ampliação; é um novo processo, que sendo motivado pelo outro, põe luz sobre este. Nossa insistência justifica-se: a maioria dos textos do ensino fundamental continuam (sic) dizendo que um número racional é

um número que pode ser escrito na forma de fração. Como, nesse momento, talvez não seja possível ter apresentado um modelo completo para números, pensamos que a definição é sem sentido, uma vez que não seria, então, possível justificar que há aqueles que não podem ser escritos na forma de fração. É curioso observar que se diga pode ser escrito e não se diga é escrito. Nota-se aí o desejo de distinguir – identificar os objetos. Contudo, a distinção – identificação não é possível ser justificada sem a concepção do processo infinito, conforme utilizado no final da Seção 9, e isso torna pretensioso e não transparente o tratamento que os textos dão às dízimas periódicas. (BARONI; NASCIMENTO, 2006, p.32-33)

CAPÍTULO 5

A S E N T R E V I S T A S – uma análise

A palavra *reflexão* tem sido o foco de estudo de muitos trabalhos no campo da Educação Matemática. Diversos autores tratam da reflexão como parte do processo da profissão docente. (D'AMBROSIO, 1986; PEREZ GÓMEZ, 1992; SHÖN, 1995; ALARCÃO, 1996; MIZUKAMI, 1996; BICUDO, 1999).

Segundo Bicudo (1999), a *reflexão* é apontada como eixo fundamental da atividade do aluno e do professor, voltando-se sobre o realizado, interrogando o sentido do mundo. Para a autora, é fundamental a formação do professor como pesquisador atento e crítico e do aluno como cidadão consciente e conseqüente.

Concebemos o professor como um profissional reflexivo, e a reflexão como uma característica própria, natural e necessária da profissão docente a qual idealizo. Alarcão (1996) nos traz que "*O pensamento reflexivo é uma capacidade. Como tal, não desabrocha, mas pode desenvolver-se. Para isso, tem de ser cultivado e requer condições favoráveis para o seu desabrochar*." (p. 181).

Pensando a reflexão como algo a ser adubado, acredito que a pergunta é base da reflexão, e que são as perguntas que nos permitem passar do nível descritivo ao nível interpretativo, dar sentido ao que se observou e ao que depois se define como objeto a seguir. (ALARCÃO, 1996, p.174)

Para que os futuros professores tornem-se profissionais reflexivos, os professores formadores devem tomar como condição necessária a criação de um espaço capaz de tornar a reflexão-na-ação parte do contexto escolar. Devem tomar esse espaço a fim de encorajar os seus alunos, futuros professores, no futuro, a ouvirem seus alunos.

No momento em que aceitamos o sujeito reflexivo, seja ele o professor ou o aluno, estamos aceitando o sujeito em formação como ser humano que pensa, dando-lhe o direito de construir seu saber. Dessa forma,

> Valoriza-se a experiência como fonte de aprendizagem, a metacognição como processo de conhecer o próprio modo de conhecer e a metacomunicação como processo de avaliar a capacidade de interagir. Reconhece-se a capacidade de tomar em mãos a própria gestão da aprendizagem. (ALARCÃO, 1996, p. 175)

A palavra *reflexão* vem à tona nessa análise por considerá-la constantemente presente no Material. Confiro esta característica ao Material em função de três fatores. O primeiro é a forma como é apresentado o texto, os conceitos e as noções que ele traz e a relação direta entre eles e a prática docente daqueles alunos. O segundo resulta da fonte composta a partir da minha presença na sala de aula. E o terceiro, dos comentários daqueles professores, alunos da disciplina, no momento das entrevistas. Quero ressaltar que, por diversas vezes, tive o desejo de compreender estes fatores isoladamente; no entanto, o envolvimento que os três possuem um com o outro tornam esta separação impossível.

No Capítulo 3 existe uma referência detalhada do conjunto que apresento nos próximos parágrafos. A composição deste Capítulo tornou-se possível a partir da realização das entrevistas. Vejo aqui o conteúdo destas entrevistas com maior luz, mas sem pôr à parte os dados pertencentes ao Diário de Campo. Das convergências ou divergências das falas dos entrevistados suscitaram o que denomino *pontos de convergência*, e é em torno destes pontos que registro os resultados obtidos desta etapa da investigação. Apresento-os a seguir:

Disciplinas de conteúdo matemático na formação do professor

Um primeiro ponto a ser observado refere-se à formação inicial do professor de Matemática no que tange às disciplinas de conteúdo matemático. O Professor P1 chama a atenção para as pesquisas que apontam as formas como as disciplinas de Matemática se apresentam no currículo e considera essa uma questão a ser repensada. Apresento parte da fala deste professor relacionada a este ponto:

"*Eu acho que foram várias as reflexões que o curso pode ter provocado na gente uma delas é o papel da* ***própria disciplina de Matemática de formação do professor,*** *do educador matemático. Eu acho que é uma questão que tem que ser repensada, já tem publicações que começam a revelar essa questão, eu acho que essa é uma das questões*." (P1)

Considerada por nós como relacionada a esse ponto, na fala do Professor P4 percebemos um estado de surpresa em relação à abordagem realizada, quando ele diz que esperava outra coisa. Acreditamos que essa referência deve-se não somente ao fato da construção dos números via medição de segmentos, mas, também, à forma como o curso foi desenvolvido. A saber, em geral, as disciplinas de conteúdo matemático, quando apresentadas nos cursos de formação de professores, apresentam formatos que atualmente sofrem questionamentos. (MOREIRA; DAVID, 2003) A fala do entrevistado é uma ilustração de como esse formato é recebido pelos alunos, quando ele diz:

"*Eu achei a Proposta do curso bem interessante. Quando eu me matriculei no curso de Análise, eu . . . obviamente estava* ***esperando outra coisa****, como de costume... e eu fui surpreendida... de forma positiva.* [. . .] *Acho que é uma Proposta interessante*" (P4)

O Professor P3 também faz apontamento sobre o desconforto em lecionar a disciplina Análise como ela é composta atualmente nos currículos. Segundo o

professor, a abordagem para os números realizada está mais próxima do entendimento do aluno, trazendo de uma forma mais familiar o tratamento dos números. (Quando o professor P3 se refere à disciplina Análise ele não se refere à disciplina como um todo, mas em relação aos conteúdos que foram tratados na mesma, conforme esclarecimento posterior)

" *. . ., apesar de sempre eu. . . quis, eu sempre quis ter condição de dar uma Análise na graduação, mas eu nunca tive coragem, eu me sentia desconfortável quando falava de Análise, a disciplina de Análise, agora essa nova abordagem (em relação ao Material), eu usei a palavra* ***familiar****, eu insisto nela, uma coisa que parece mais próximo daquilo que eu entendo*." (P3)

Reflexão na prática

Um outro ponto emergente desta pesquisa diz respeito ao tratamento do número racional no Ensino Fundamental e às dificuldades relativas às representações desse número que os alunos possam ter. O Professor P1 faz uma menção ao colocar que essas representações são levadas para o aluno de forma natural, sendo o professor incapaz de perceber as possíveis confusões que, em geral, o aluno tem em relação a essas representações. Parto do princípio que muitas vezes só falar não basta, é preciso "chacoalhar o futuro professor" e o Material faz isso.

"A *outra questão que foi muito difícil pra todos, foi o reconstruir partindo de um desconstruir. Veja, a gente sabe, por exemplo, que uma fração é um número decimal, a gente sabe isso, só que a gente tinha que partir de algo que. . . A gente estava nos números naturais, a gente não pode usar isso ainda. . . A gente estava nos números inteiros positivos, a gente não pode usar determinado tipo de coisa, olha, e a gente só tem aqui seqüência de dígitos, a gente não sabe o que é fração, então. . . Esse processo é um processo muito bom, eu acho muito interessante pra ser feito. Porque geralmente. . . a gente não consegue perceber isso e a gente*

acaba na hora que dando aula, lá no ensino básico misturando tudo, fração é decimal, é dízima, é uma confusão, e que a gente leva como natural e, que, pro aluno muitas vezes não é natural, (. . .) Esse processo é um processo muito bom, eu acho muito interessante pra ser feito" (P1)

A palavra “desconstruir”, usada pelo Professor P1 no trecho acima, foi causada nos momentos iniciais do texto, quando os autores BARONI e NASCIMENTO iniciam uma discussão em torno da pergunta “O que é um número?”, ou seja, o desconstruir refere-se à desestruturação das concepções do aluno sobre este objeto matemático reunida à necessidade do repensar sobre o mesmo. Implicitamente, esta é a intenção dos autores quando fazem a pergunta e apresentam as palavras de Fernando Pessoa (denominado o Texto) que trazem imbricadas noções matemáticas que possivelmente virão à tona quando o Texto é considerado. Estas mesmas noções estão presentes no Material e, conseqüentemente, serão consideradas; é um convite ao leitor para percorrer as próximas páginas, que trazem a construção geométrica para os números reais, com a possibilidade desse reconstruir .

As dificuldades dos alunos

Ainda em relação às palavras do Professor P1, destaco a compreensão de sua parte das dificuldades que os alunos do ensino básico possam ter, em particular com o estudo dos números racionais. Esta é uma reflexão que considero essencial em qualquer situação de ensino em que professor e aluno possam estar envolvidos, é compreender o aluno como ser humano, considerar as possíveis diversidades que uma sala de aula possa ter. Esta mesma característica é apresentada nas palavras do Professor P3 quando demonstra sua preocupação com o aluno sob um outro ângulo.

"*Eu fiz duas disciplinas nesse semestre, e uma delas, análise, foi a que me deu mais trabalho durante o semestre, não há dúvida não, exigiu muito,* [. . .]*, mas*

também a que despertou mais atenção na atividade de ensinar, que a gente não pode ensinar pensando naquilo que você quer ensinar, tem que ensinar aquilo que a gente quer ensinar mas compreendendo também que aquele que tá do outro lado, que é o aluno, é capaz também de . . . de entender." (P3)

Discussão matemática que o Material permitiu

Segundo MOREIRA (2005)

> . . . a atividade pedagógica que consiste em submeter à crítica dos outros uma determinada cadeia de argumentos construída por um deles pode levar a um entendimento mais significativo do resultado que é objeto da argumentação; pode levar também a um refinamento dos próprios argumentos ou mesmo da linguagem utilizada para apresentá-los. (MOREIRA, 2005, p. 28)

O Professor P1 comenta que a forma de desenvolvimento da disciplina proporcionou um ambiente de discussão matemática, incomum a um tratamento onde o professor expõe o conteúdo de forma tradicional.

"*aliando a tudo isso a questão de formar dentro da disciplina um coletivo assim, que* ***discutia Matemática****, que o que é muito bacana e que comparando com o curso tradicional, . . .*" (P1)

Mais adiante respondendo a outra questão o Professor P1 refere-se novamente à discussão Matemática que o tratamento possibilitou:

"*Segundo que o Material pode colocar, como um dos pontos fundamentais, que eu já comentei, que é a* ***discussão Matemática****. Você está colocando professores de Matemática ou futuros professores de Matemática a discutirem Matemática. E não só discutirem Matemática, mas as dificuldades que aquela Matemática pode levar, pode trazer, formando um coletivo de cooperação ali, você viu que a gente tinha várias equipes, então a equipe tal era a página um e dois, mas se a equipe tal não resolveu o exercício, outra ia lá e ajudava, a gente dava contribuição, outras*

equipes davam contribuição pra gente, então, eu achei muito bacana esse ***cooperativo*** *que se formou na sala.*" (P1)

O Professor P2 refere-se a esse ponto na fala seguinte:

"*Olha. . . eu senti, eu senti muitas dificuldades, eu entendo isso como uma maneira muito interessante,* ***a discussão****, eu acho que o meu grupo de uma maneira geral discutia muito, eu sou meio pentelho, eu fico cutucando, mas sempre dificuldades que eu via como saudável*" (P2)

Embora eu já tenha comentado que o centro deste trabalho é o Material como Proposta, a metodologia empregada para a utilização está intrinsecamente ligada a esse momento de análise. Não como foco, mas como complemento. Desse modo, surge um dos pontos, considerado a forma como foi esta utilização.

Os seminários, a metodologia empregada.

O fato das aulas terem se desenvolvido em forma de seminários proporcionou um envolvimento dos alunos, com todos participando, interrogando e sugerindo. Isso foi observado pelos entrevistados P1 e P2 e considerado fundamental por ambos.

"*Pra essa disciplina eu acho fundamental, mesmo em nível da licenciatura, da graduação eu acho muito bacana e que estimula o estudo constante, toda semana a gente tem material pra estudar, e dá muito trabalho. Tem coisa que a gente fica batendo a cabeça e tem que procurar os grupos, mas a interação com os grupos, e, o estudo coletivo eu acho que é muito gratificante.*" (P1)

"*Acho fundamental, achei fundamental, espetacular a metodologia empregada, eu fiquei encantado, no princípio eu fiquei com receio. Mas acho que é natural, a gente não conhecia todo mundo ainda, não se sentia a vontade com todos, mas no desenvolvimento do curso eu achei que foi brilhante.*" (P2)

P1 e P2 apontam para algumas dificuldades inerentes a essa forma de desenvolvimento da disciplina, como a inibição dos alunos perante uma platéia, considerando o fato de que o aluno pode conceber a exposição como algo pronto e acabado, embora a Professora tivesse deixado claro que dúvidas poderiam surgir nas exposições, complementando o processo. O entrevistado Professor P2 sugeriu, também, um momento de discussão de forma maior por parte dos Professores organizadores do curso. Apresento a fala do Professor P2 que faz esse destaque:

"*Olha, eu vou dizer o que eu sentia falta. Primeiro, eu adoro essa coisa de trabalho, de grupo de trabalho, porque nós nos reuníamos e a gente tinha que discutir o texto, e eu achava isso maravilhoso.*
[. . .] *Se eu tivesse que fazer uma sugestão, eu faria isso, faria essa sugestão: porque embora eu tenha gostado muito desse trabalho dos grupos, havia uma pressão, de alguma forma, de que, ah! Quando nós fossemos lá na frente já teria que saber tudo* [. . .] *e esse processo, ele não dá margem pras pessoas, como é que eu posso falar? Pras pessoas se exporem mais, se entende o que eu estou falando eu acho que isso intimida um pouco, por falta, em minha opinião, desse momento de interação, por exemplo, com vocês* [. . .] *eu acho que, se eu tivesse que acrescentar, eu acrescentaria isso, não tiraria nada . . . que as apresentações são legais, ela treina, re-elabora, eu achei legal.*"(P2)

O entrevistado Professor P4 comenta sobre um sentimento de ansiedade causado pelo entendimento parcial anterior às aulas, do assunto a ser tratado na aula seguinte, mas esclarece que as apresentações foram suficientes para que suas dúvidas pudessem ser supridas.

"*Porque gera uma ansiedade, eu tinha conversado isso com a Professora, que a gente estuda em casa, muitas vezes a gente acaba não entendendo, às vezes de forma parcial, e durante as aulas quando os grupos vão explicando, ah! Eu entendi, e você quer subir na mesa. Entendi*!" (P4)

Entretanto, com todos esses comentários, os entrevistados consideram a forma de desenvolvimento da disciplina gratificante e positiva.

O desenvolvimento das aulas por meio de seminários é considerado por nós como uma forma muito positiva de estudar Matemática. É um momento ímpar, em que o aluno pode tecer seus comentários de forma quase que obrigatória. Tivemos a oportunidade de ter essa experiência dos dois lados, como aluna e como professora. E, mais ainda, como aluna depois de ter sido professora, o que me concede uma visão mais ampla da situação. No caso dos licenciandos. consideramos também que a metodologia contribui para um desinibir do aluno frente a um grupo que o escuta. Concordando com Baldino,

> Ensina-se ouvindo, aprende-se falando! Se quiser ensinar, comece a ouvir o que o seu aluno tem a dizer, comece a ouvir o que o aluno pensa, tente entrar no pensamento do aluno e explicar pro aluno o que ele está dizendo, por mais doido que seja, por mais errado que seja . . . (Ent. Baldino – ago/98)
> (Reis, 2001, p. 140)

A situação de conforto sobre o objeto número

Uma das características que ficou explícita, tanto nos momentos de observação dos encontros/aulas quanto nas falas dos entrevistados, foram os pontos positivos pertencentes ao curso, em se tratando das questões referentes ao objeto matemático número. Questões que comumente não são tratadas puderam ser discutidas, elucidadas, ilustradas ou exemplificadas. Resgato alguns trechos das entrevistas que se referem a essa minha percepção. Começo pelo Professor P1, quando comenta que a abordagem feita na disciplina proporcionou um maior conforto para ele em referência ao objeto matemático número, e justifica:

"*Porque eu acho que este tratamento via medição dá pra você uma noção melhor do que é um número. Não tem definição do número, é difícil você definir, "o que é*

número", até no dicionário[32] *é difícil, provavelmente. Eu nunca fui lá ver, mas deve ser difícil você falar sobre. . . Agora, as representações dele fazem com que a gente possa ter um conforto melhor, ou maior, não sei, talvez, do que seja esse objeto número.*"(P1)

E, mais adiante, ele faz mais um comentário sobre esse conforto.

"*Ah, é mais consciente, hoje eu consigo falar com mais propriedade, é mais fácil pra mim falar determinadas coisas com relação a antes.*" (P1)

O Professor P3 relata um encontro para explanar essa compreensão do objeto número.

"*Ontem mesmo eu comentava com um colega sobre isso, refletindo sobre o curso, é, acho que me fez pensar um pouco mais a respeito desse ente . . . de uma forma . . . mais familiar. Eu acho que, ainda não posso me considerar muito ... tão familiar a ele, mas pelo menos eu vi por onde a gente pode tá entendendo, compreendendo melhor esse. . . objeto*." (P3)

Ele observa que a abordagem realizada está muito distante da que ele teve na graduação, e coloca que as discussões proporcionadas na sala puderam dar a ele uma aproximação maior do conceito; comenta ainda que a abordagem permitiu um aprofundamento de questões relacionadas a número que antes desse curso o entrevistado não teve a oportunidade de ter.

"*Eu diria que o outro curso*[33] *de análise que eu fiz na graduação está muito distante, muito distante. Eu quero dizer assim, distante, com esse curso que nós fizemos agora, não só nas discussões dentro da sala de aula, mas nas discussões*

---

[32] Segundo o Dicionário Aurélio, Número é uma entidade abstrata que corresponde a um aspecto ou a uma característica mensurável de algo (quantidade, grandeza, intensidade, etc.) e que é matematicamente definida como conjunto de todos os conjuntos equivalentes a um conjunto dado.
[33] Embora a referência do professor aqui seja ao curso como um todo, em particular, podemos restringi-la à parte do curso na qual o Material foi utilizado.

do grupo também, constitui, nos aproximou mais, a mim particularmente, dos números reais." (P3)

Está explícita na fala do aluno sua satisfação, ao conforto proporcionado pelo tratamento, ou quanto à abordagem dos números reais, via medição. Na sua fala ele visualiza uma possibilidade de tratamento deste tema a partir das idéias desenvolvidas no curso quando ele a compara com a tradicional[34].

"*Eu diria que . . . eu me sentiria mais confortável em falar sobre os números reais com essa abordagem pros meus alunos. Eu acho que não teria tanta dificuldade de explicar pros meus alunos os números reais, com essa abordagem, via medição, do que falar daquela da Análise que eu vou chamar de tradicional. Você me entende o que é tradicional? Essa que tem aí nos livros, tipo Elon, Djairo, Ávila, nessa linha. Eu penso que eu teria agora mais segurança de falar nos números reais diante dessa abordagem do que nessa modalidade que eu vou chamar de tradicional*. " (P3)

O Professor P2 transparece na sua fala o sentimento de conforto que a abordagem lhe propiciou, porém realiza alguns questionamentos em relação a algo mais que esse curso provocou. Considero essa provocação de forma positiva, pois ele visualizou a Proposta sob um outro aspecto, pensando numa possível adaptação a outros níveis de ensino.

"*Acho que eu me sinto com muito mais conforto. Algumas coisas eu acho que me dão certa angústia, angústia no bom sentido* [. . .] *porque o grande desafio do professor, aí eu tô pendendo na perspectiva do professor, na prática, o grande desafio dele é traduzir tudo isso que ele tem, que ele estuda de Matemática.*

[34] A abordagem tradicional refere-se a apresentar R como um corpo ordenado completo, axiomaticamente.

[. . .] *pra que as pessoas possam entender, criar o processo, eu acho que é isso, então nesse sentido eu acho que há um desafio, eu acho que é um dos grandes passos que esse curso pode dar, incentivar . . .*"(P2)

O professor P4 fez alguns comentários que considero relacionados aos parágrafos anteriores e ao encontro das falas dos entrevistados que acabei de citar. Para ele, questões advindas de reflexões sob conceitos e noções inerentes ao objeto número possibilitaram um maior avanço em relação às mesmas, levando-o a uma maior conscientização sobre esse objeto.

" *. . .e muitas dúvidas que eu tinha naquela folhinha não foram esclarecidas. Mas eu acho que, valeu apostar no tempo, nas reflexões sobre o que é número, medida e fazer a gente parar pra pensar que coisas que a gente acha muito normal fazer não são tão triviais assim, que fração. . . trabalhar com irracionais . . . Eu tinha, é, já tinha pensado um pouco sobre os irracionais, o que seriam os irracionais, mas também eu não tinha conseguido avançar muito, eu acho que nesse sentido o curso foi muito interessante*." (P4)

A análise dos dados, de um modo geral, leva-me a acreditar que a intenção dos autores com o Material utilizado em relação ao processo de desestruturação foi alcançada. Pois, ao mesmo tempo em que o Material permitiu o levantamento de questões relativas ao ente matemático número, desestruturando algumas concepções dos alunos a respeito, ele as aborda de forma que, satisfatoriamente, essas mesmas questões possam ser consideradas.

Numa de suas falas, o Professor P1 faz alguns apontamentos em relação a uma de suas frustrações em relação à abordagem e destes apontamentos surge um outro ponto:

A História da Matemática no tratamento.

"*Eu acho que essa construção, apesar de que eu já falei pra você antes, vou falar de novo, de que essa construção não foi um processo histórico e talvez seja uma das minhas frustrações desse curso. Eu imaginava, pelo que a Professora estava fazendo com história, e que seria construir os números eu imaginei que seria um resgate histórico, que foi também, mas que não privilegiou a cronológica, a seqüência cronológica, então eu imaginava que fosse. . . e assim. . . Eu acho que olhando o objeto número, e aí mais especificamente o número negativo, que foi tão polêmico, sei lá no século dezenove, eu acho que esta questão também deveria ser tratada, mas, eu acho que o tempo foi muito curto pra introduzir mais coisa, eu acho que Análise II, mais algumas aulas, seria mais interessante, mas assim, quem sabe no futuro vocês voltam a pensar sobre.*"(P1)

A análise dessa fala do Professor P1 desencadeou questões por mim consideradas pertinentes a esse estudo. Uma delas foi o fato de o Professor P1 conceber o tratamento via medição como um processo histórico, mas não como um resgate histórico, devido ao fato de a ordem cronológica não ter sido seguida. E a outra é a forma com que os trabalhos tratam das diferentes formas com que a História da Matemática pode ser inserida no ensino. Esta questão já foi colocada no Capítulo 4, mais especificamente na discussão da seção 4. Mas, observo ainda, na sua fala, o anseio do Professor P1 por um tratamento histórico que traga referências sobre os números negativos. A meu ver, isso mostra que esse tipo de abordagem é bem-vinda e desejada por ele. A inserção da História da Matemática, em particular, no tratamento do objeto matemático número na formação de professores, há algum tempo vem sendo recomendada. Um trabalho realizado nesta direção, ou para que esta direção seja seguida, foi realizado por Táboas (1993), que fez um estudo histórico-cultural da noção de número, da ampliação dos campos numéricos e dos sistemas de numeração e propôs que a história cultural dos números seja parte do tratamento do tema na Licenciatura. E que

também possa servir para a utilização da História da Matemática em outros temas do currículo em cursos de formação de professores.

O processo de medir como contexto de apresentação para o número real

O resgate das palavras do Professor P1 permite-me tecer alguns comentários a respeito de uma propriedade destacada do Material. Refiro-me ao processo de construção dos números reais a partir da medição de segmentos que, na minha concepção, permite que este conjunto seja abordado num contexto, considerado o processo de medir. Apesar de o Professor considerar o processo de medir algo da Geometria, penso que vale apostar nele, por acreditar que a medição é algo muito mais próximo do aluno, embora numa situação do dia-a-dia usemos apenas decimais finitos para expressar os resultados das medições. Entretanto, concordo com o Professor P1 quando este comenta sobre a ligação do contextualizar a um pragmatismo da Matemática.

"Essa é uma questão polêmica que o PCN coloca, contextualizar, como alternativa, um dos nossos professores lá da especialização coloca que, sempre há contexto, que geralmente a gente liga a contextualização a algo prático, algo do dia-a-dia, mas e o contexto da Matemática? Porque a gente tá aqui no contexto da Matemática pura, nós investigamos, nós discutimos, nós debatemos, mas praticamente no contexto da Matemática, e vocês, a medição que vocês trabalharam foram de segmentos, que é algo também da Matemática, da Geometria, então eu acho que mesmo assim se pode discutir." (P1)

Influência da abordagem no tratamento de outros conceitos da Análise

Na interpretação de trechos das falas do Professor P1 e do Professor P3, convém destacar a menção a uma credibilidade na abordagem, relacionada à contribuição que ela possa dar, subsidiando e influenciando de forma positiva um tratamento posterior de outros conceitos da Análise, realizado de uma forma mais

aprofundada. Acredito que, sendo o conjunto dos números reais um fundamento sobre o qual se edifica a construção formal dos resultados da Análise Matemática, o envolvimento de conceitos inerentes ao tratamento do número via medição pode abrir possibilidades para que conceitos como continuidade, enumerabilidade, convergência, aproximação, densidade, seqüências fundamentais etc. possam ser tratados anteriormente a um curso de Análise; e que, dessa forma, esse tratamento possa contribuir para seu ensino e aprendizagem. E são exatamente estas as idéias que estão assentadas no Material. Destacamos as falas que contribuíram para que pudéssemos inferir a respeito destas asserções.

"*. . . Eu acredito que sim, por exemplo, a gente pega do limite, lá, e vê aquela seqüência de dígitos e tal, eu acho que fica mais razoável. Eu acho que dá pra fazer uns links, assim. . . E legal essa disciplina, que além de você poder falar um pouco mais dos conceitos da análise, a gente passou um pouco pela álgebra, e até poderia trazer pelo cálculo determinado tipo de coisa,* [. . .] *mas poderia ser pensado, talvez até num cálculo pra licenciatura de Matemática isso poderia ser pensado. Assim . . . Limite eu acho que poderia ser explorado mais, mas eu acho que a questão do tempo, eu acho que também vocês preferiram não explorar tanto, mas o limite com uma seqüência de dígitos lá, que converge pra um determinado valor, e, mas eu acho que pode ser feito, que dá pra ser feito, foi assim. . . Que está em movimento e que esse movimento pode crescer muito mais.*" (P1)

“Eu acredito sim Regina (em relação à utilização deste Material num curso anterior a um curso de Análise), ainda sentimos, eu estou lembrando das discussões no grupo, há alguns hiatos ainda, que nós vimos aí no meio do desenvolvimento do conteúdo. Mas a minha visão hoje, a minha compreensão, talvez pela própria experiência, que como eu estudei Análise eu era novinho ainda eu não tinha um amadurecimento pra poder enxergar também, talvez seja por isso, mas eu me sinto mais confortável diante dessa abordagem sim." (P3)

“*Sim, eu acho que sim, eu acho que, por exemplo, no meu curso de Análise que eu fiz não se pensou nisso, se fala do conjunto dos números reais, com as suas estruturas e tudo mais, e vamos embora, e... o que foi feito antecedeu esse processo. Eu acho que para um futuro curso de Análise, eu acho super legal, eu acho super bom*” (P2)

Receptividade a novas propostas

Vale observar, na fala anterior do Professor P1, uma receptividade em relação a novas propostas, em acordo com os entrevistados nas pesquisas apresentadas no Capítulo 1, e o reconhecimento de que o Material. Considerando que a Proposta, bem como o Material estão ainda em construção, pontos ainda poderão ser observados, mudanças poderão ocorrer para versões futuras, ainda que permaneçam apenas as idéias que eles contenham.

Tratamento do número no Ensino Fundamental e Médio

As idéias apresentadas por Lebesgue, das quais os autores se apoiaram para a elaboração do Material, são, para mim, o coração da Proposta, como comentei no Capítulo 4. Com o intuito de interpretar a credibilidade que o Professor P1 deu à construção do número, ao processo de medição explorado pelo Material, direcionei uma questão especificamente voltada para esse fim. Perguntei diretamente se acreditava que essas idéias poderiam ser adaptadas para o Ensino Fundamental e Médio. O Professor P1 respondeu:

"*Eu acho que sim. Eu trabalhei em quase todas as séries, de quinta série em diante eu só não passei pelo segundo ano.*" (P1)

Embora o professor não deixe explícita sua concepção sobre a possibilidade de uma proposta de tratamento do número real, via medição, no Ensino Fundamental ou Médio, a literatura que trata desse nível de ensino nos mostra que o conceito de número irracional deve vir ao aluno a partir da idéia de incomensurabilidade, ou

seja, a partir de um processo de comparação. De forma que uma abordagem que apresenta o número real a partir de um processo de medição capaz de trazer à tona esta idéia tem total credibilidade nesta perspectiva, como as palavras do autor:

> O fato é que o domínio dos conhecimentos envolvidos no trabalho didático com a idéia de incomensurabilidade e sua vinculação com o significado dos números irracionais pode ser essencial no desempenho de eventuais tarefas de avaliação, seleção, adaptação ou mesmo a construção e implementação de possíveis propostas de abordagem escolar do tema "números reais".(MOREIRA, 2005, p.123, grifo nosso)

Considero conveniente comentar a dificuldade enfrentada pelo Professor P1 quanto ao tratamento do número no Ensino Fundamental, destacando a insuficiência da sua formação para lidar com as questões que envolvem o ensino-aprendizagem nessa faixa escolar.

"*A questão do número, principalmente lá na quinta série, sexta, é muito difícil de ser tratada. E a minha formação de matemático puro não dava conta das demandas que tinham lá, os alunos chegavam na quinta série e não sabiam as operações básicas, coisas do tipo, e o momento que a gente pode perceber que teve um retorno melhor foi quando a gente usou material concreto.* " (P1)

Nesse ponto o Professor P1 faz referência ao uso do material concreto para auxiliar o tratamento do número racional e, considera o trabalho com medição adequado e natural para os alunos desse nível de ensino.

"... *quando a gente usou cartolina e cortasse e trabalhasse com frações a partir de uma medição, que a gente pegava um retângulo era tipo uma unidade e você repartia aquele retângulo em subunidades em três partes, quatro, tal e pegava frações equivalentes pra somar e tal e recortava aquilo e ia encaixando, um meio, dois quartos encaixados certinho uma em cima da outra, então. . . era uma*

medição. Então esse processo de medição foi mais natural pro aluno do que você tira mmc e tal, e mínimo múltiplo comum dos denominadores e tal, então, já deu pra perceber com a medição, com o material concreto é algo que possivelmente pra maioria e pra uma boa parte dos alunos foi algo que foi mais natural, então, já tem um ponto positivo com isso, mas, eu acho que dá pra trabalhar com mais coisas, pra complementar com mais questões, repensar talvez a quinta e a sexta série, nessa parte de números e talvez estendendo pras outras séries, até fechar o conjunto dos reais enfim, e tentar considerá-lo como natural a partir do ensino médio. Eu acho que dá pra fazer um bom link, e acho que dá uma boa pesquisa no futuro também quem sabe num doutorado. Que faça esse link que vocês estão fazendo com o material e de pesquisa com o ensino básico e que tem que ser feita, e defendida por muita gente, a gente não pode pesquisar pra ficar aqui pra gente, na biblioteca e tal, e que é um caminho que vocês têm que trilhar. "(P1)

Esta fala nos mostra que o entrevistado possuiu uma atitude reflexiva e observadora que lhe permite uma reformulação constante de sua prática docente, adequando-se aos interesses e às necessidades dos seus alunos. Poderíamos considerar esse processo como uma reflexão-na-ação, ao passo que ele consegue, através de uma fina percepção, apontar seus problemas e dificuldades, bem como suas disposições e possibilidades. Acreditando numa abordagem dessa natureza para os números reais, o Professor P1 faz uma sugestão para uma futura pesquisa, a elaboração de um material em nível de Ensino Fundamental e Médio. Embora não tenhamos nos dedicado em nossas leituras a questões referentes ao tratamento do número em cursos distintos da Licenciatura, já que nosso trabalho se refere à formação de professores, nos deparamos com diversos trabalhos que apontam falhas no processo de ensino e de aprendizagem dos números na Educação Básica.

Considerando as dificuldades que os professores enfrentam, já citadas pelo Professor P1, em relação ao tema, venho concordar quando ele faz referência à

possibilidade de uma abordagem envolvendo as mesmas idéias que o Material traz, obviamente adaptadas àquela necessidade.

Contribuições na formação

Espera-se que, quais propostas sejam ou qualquer encaminhamento para o tratamento do conceito de número real em cursos de formação de professores, venham lidar com as questões levantadas no Capítulo 1, de forma a contribuir com o ensino e a aprendizagem.

A forma como o Material se apresenta, junto às possibilidades que traz, corrobora para o emergir de questões que venham ao encontro da citação,

> . . . parte-se da análise das práticas dos professores quando enfrentam problemas complexos da vida escolar, para a compreensão do modo como utilizam o conhecimento científico, como resolvem situações incertas e desconhecidas, como elaboram e modificam rotinas, como experimentam hipóteses de trabalho, como utilizam técnicas e instrumentos conhecidos e como recriam estratégias e inventam procedimentos e recursos. (PEREZ GÓMEZ, 1992; p. 102)

"*Olha, eu achei muito bacana não só o material como a Proposta, como esse passar. . .* [. . .] *Pessoas "com maior formação Matemática" contribuindo com a pesquisa na Educação Matemática, pessoas que têm uma formação boa em Matemática pura, virem pra Educação Matemática pra repensarem isso e primeiro que tem mais credibilidade.* [. . .]
Desse semestre foi uma das disciplinas, das mais válidas que eu fiz, valeu a pena ter feito, realmente.."(P1)

"*A colaboração eu acho que foi no olhar. . . ampliou o olhar para as questões relacionadas ao número, nesse sentido eu acho que colaborou até mesmo no ponto de vista da abordagem. . .*
[. . .] *eu acho que ouve no sentido de refletir, isso provoca muitas reflexões e eu acho que isso é legal, de refletir sobre a apresentação dos próprios cursos,*

inclusive o de Análise. E vem um dado novo que é aí esse processo, que é um processo diferente, que tem bastante coisa pra fazer, mas eu achei que colabora muito." (P2)

"*Com certeza, com certeza, e houve discussão de conceitos . . . bem elaborados na minha opinião, e eu achei coisas que eu não tinha pensado antes. Eu acho que a gente tem algumas pendências, pra mim, quando eu começo a falar do número irracional do jeito que ele aparece por aí, é um nó, eu acho que pensando nesse processo de medição, pode ser uma saída pra um material muito diferenciado, ...*" (P2)

O material como uma Proposta diferenciada

Um ponto fundamental que observamos na análise refere-se à característica fundamental dessa abordagem realizada no curso ser diferenciada. Sinto liberdade para afirmar que a percepção dos alunos (não somente os entrevistados) sobre essa diferenciação concorda com a minha, de que esse é um material individualizado que trata do assunto. Alguns dos trabalhos na literatura que dizem respeito a esse tema tratam dessa problemática, fazem alguns apontamentos; entretanto, nenhum deles possui as mesmas idéias que o Material. Muitas das recomendações, ou inferências como chamam os autores, retratam a necessidade da apresentação de novas abordagens que possam considerar as questões postas, como as descritas no Capítulo 1. E o que de relevante destaco é a direção indicada, exatamente para o caminho que os autores trilharam, conforme referenciado nas citações abaixo.

> O ensino dos números com enfoque na linguagem formal, desvinculado da associação com a medida, é um dos fatores da dificuldade da aprendizagem conceitual dos números racionais e tem conseqüência na matemática e na física, cuja aprendizagem dos conceitos está vinculada a leitura e interpretação tanto das medidas quer sejam de comprimento linear, massa, tempo, comprimento angular ou outros. (CUNHA ; MOURA, 2004, p. 2)

> No caso da conceituação de número irracional como aquele que não é razão de inteiros, também não há como fugir, a nosso ver, a uma discussão de natureza geométrica através da associação dos reais a medidas de segmentos e da consideração da possibilidade da incomensurabilidade. (MOREIRA, 2005, p.122)

Também enfatizada, na fala dos entrevistados.

"*(. . .) Em princípio a gente estava com dificuldade pra compreender a notação* (*relacionada à medição), não conhecíamos esse tipo de abordagem, é diferente em toda e qualquer notação, a gente procurava livro, pra vê que tipo de notação que significado a gente poderia produzir a partir dali e não encontrava, então nós tivemos que entrar pra dentro do Material, eu acho que isso nós conseguimos, nós entramos pra dentro do Material e do jeito que nós entramos pra dentro do Material, eu acho que nós crescemos, eu digo, nós o grupo inteiro, de uma maneira bastante homogênea (em relação à sua formação)*". (P3)

"*Olha, eu achei o seguinte: que o curso, por exemplo, essa abordagem de* <u>*medição*</u>*, eu achei que foi o grande diferencial do curso, que é uma coisa que você não vê . . . Pelo menos não é comum de se trabalhar, eu pelo menos jamais tive acesso a esse tipo de abordagem. Eu acho que isso é uma coisa interessante . . . Mas eu acho que foi pra mim um grande diferencial, a gente pensa naquele processo dos intervalos encaixados com todo aquele tratamento, a construção das seqüências, o processo de medição, eu achei aquilo muito interessante. Do curso eu achei que o grande diferencial foi esse.* " (P2)

Escolhemos destacar a transcrição da fala do Professor P4, sobre o caminho escolhido pelos autores para a elaboração deste instrumento e pela decisão da Professora quanto a usá-lo para ministrar parte da disciplina de Análise. O Professor cita uma frase que manifesta suas conclusões, as quais resumem sobremaneira as contribuições que a abordagem proporcionou à sua formação.

"*Nossa, eu acho que veio muito a contribuir, que. . . é. . . tem uma frase, <u>'Às vezes é mais importante ao invés de você trilhar novos caminhos, você olhar com outros</u>*

olhos os caminhos que você tem'. . . Muitas vezes, mais importante é você olhar pra o que você tem e com outro olhar de forma a conhecer bem do que você sair fazendo conta, demonstrando teorema, de forma sem pensar no que você está fazendo, eu achei muito interessante, muito interessante. Acho que contribuiu muito mais do que se a gente pegasse os grandes livros de Análise e Teorema 1, vamos demonstrar . . . exercício, igual a gente fez até agora. Acho que o curso . . . eu percebo isso, ele tem me mostrado novas formas de ver as coisas.."(P4)

E para encerar esta parte do trabalho que apresenta a análise das falas dos entrevistados, trago uma observação que revela o fato de esta exposição ancorar-se no que, para mim, é considerado como um marco para o desempenho de uma atividade docente – *a reflexão*.

> A reflexão é vista como um processo em que o professor analisa sua prática, compila dados, descreve situações, elabora teorias, implementa e avalia projetos e partilha suas idéias com colegas e alunos, estimulando discussões em grupo. Para isso, o professor precisa ter ausência de preconceitos e disposição para aceitar e implementar novas idéias, assumir atitudes de responsabilidades, baseadas em princípios éticos, e ter entusiasmo e coragem para adotar atitudes novas. (PEREZ; COSTA; VIEL, 2002, p. 61)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Frente à problemática existente na literatura no campo da Educação Matemática no que tange a ensino e a aprendizagem dos números reais, este trabalho tem como objeto de estudo uma Proposta de tratamento para os números reais apresentada pelo Material "*Um tratamento, via medição, para os números reais*" [35] – elaborado a partir das idéias de Henri Lebesgue (1875-1941), contidas no livro "*Measure and Integral*". Os autores deste Material, BARONI e NASCIMENTO (2005) trazem o processo de medição de segmentos para apresentar uma construção geométrica para os números reais positivos.

Entendendo este Material como uma Proposta para o tratamento do tema em cursos de formação de professores, minha intenção foi buscar pelas possibilidades que este tratamento oferece neste nível de ensino. Esta busca esteve amparada no desejo de que o distanciamento entre a formação do professor e a prática docente possa ser minimizado. A compreensão para que esta busca pudesse ser realizada tornou-se possível a partir da utilização do Material em uma sala de aula. Conseqüentemente, a análise do Material foi circunstanciada pela reunião, não mais disjunta, dos dados coletados e das minhas concepções, embebida do conhecimento que adquiri sobre esta dimensão pela qual este trabalho transita – a formação do professor de Matemática.

A princípio, tive a intenção de destacar resultados da pesquisa, extraindo-os, pontuando-os, esquematizando-os e expondo-os neste momento conclusivo da

[35] Publicado pela Sociedade Brasileira de História da Matemática como Mini-curso para o VI Seminário Nacional de História da Matemática ocorrido em Brasília, Brasil.

Tese. Porém, decidi não fazê-lo. A tentativa de apresentá-los num outro formato, diferente daquele, foi como considerá-los arrancados de todo o contexto pelo qual eles foram capazes de ser constituídos, correndo o risco até de perderem os seus significados. E, sobretudo por entender a amplitude deste contexto, já que nele estão inseridos o conteúdo do Material, concepções dos sujeitos e da Professora, as metodologias, as atitudes, bem como sons, expressões, sentimentos aflorados, etc., dos quais o trabalho de campo é constituído e, especialmente, das compreensões alcançadas acerca das particularidades deste conjunto.

Escolho este momento para dizer que os resultados aqui apresentados são frutos de uma pesquisa feita a partir de um quadro de referência, uma abordagem, um tratamento específico, inseridos num determinado contexto, em determinadas condições materiais, a partir do Material utilizado em uma turma específica, com determinados sujeitos, num determinado momento, por uma determinada professora. Por conseguinte, o que se apresenta é a tradução das descobertas geradas a partir de uma interpretação possível, com base na qual, neste momento histórico, estudei o assunto em questão. Sendo assim, é desejável o desenvolvimento de estudos paralelos que venham a complementar esses resultados, seja por meio de crítica e divergência, seja pela convergência ou aprofundamento.

A mim, cabem as diversas interrogações que puderam se apresentar relacionadas ao tema. Algumas resolvidas, outras transformadas e, ainda, aquelas que, pela natureza da investigação, pelo foco ou pela direção tomada, não puderam sequer ser meditadas. Estas levo como sementes, pensando que podem vingar ou não, oferecendo oportunidades e idéias para que futuras pesquisas possam ser realizadas.

As leituras que realizei para considerar o tema “números reais” nesta tese levaram-me a perceber que a introdução dos conceitos de medida de grandezas e dos *números reais* são dois temas maltratados ou ignorados nos cursos de

formação de professores. Devido a sua complexidade e importância dentro da prática escolar, este é um tema que deve ser sistematicamente tratado no espaço de formação de professores.

Introduzir os números reais a partir de um processo de medição é uma oportunidade para que outras noções e conceitos possam ser explorados, em particular, noções e conceitos básicos da Análise, como convergência, continuidade, completude, etc., e mesmo que indiretamente, aqueles relacionados a outros campos da Matemática, como a Álgebra e a Geometria e, sobretudo, a História da Matemática. Os conhecimentos dos números e da sua gênese devem constituir um objeto prioritário na formação do professor de Matemática de forma a lhe dar uma capacidade mais ampla para uma abordagem mais rica sobre números na prática docente.

"De nada adianta o discurso competente
se a ação pedagógica
é impermeável a mudanças."
Paulo Freire

P e r s p e c t i v a s . . .

Tendo como pressuposto o trabalho de pesquisa que realizei e, conseqüentemente, as possibilidades que busquei no Material, objeto de estudo deste trabalho, sinto-me no dever de tecer algumas considerações frente ao caminho percorrido para que este trabalho pudesse ser finalizado. Estas considerações manifestam-se para mim como um dos resultados obtidos por esta pesquisa. Não obstante ocupem a posição última neste texto, concebo-as, como um ponto de partida para uma trajetória a seguir, com altos e baixos, curvas e

tropeços, por vezes linearmente, porém, ao mesmo tempo, visualizo-as como **uma perspectiva** . . .

É uma reunião de idéias, reflexões, adequações, interpretações, expectativas confluências e comprometimento. . . suscitados desde o dia em que decidi investigar este tema tão instigante: *os números reais*. Destaco que tudo isso só pode ser alcançado pelo contato direto que tive com os autores do Material durante a realização deste trabalho, e a eles devo total crédito das idéias envolvidas nos próximos parágrafos que apresentarei. Trago a sugestão de uma ementa para um curso composto de duas etapas, um tratamento geométrico e um tratamento analítico, para o conceito de número real. E, para que esta sugestão possa ser mais explicitada, denomino-a como uma *Ementa Comentada* [36].

São as possibilidades que circunscrevem estes momentos que relevam esta composição da ementa, ao considerá-la como uma alternativa de tratamento para o conjunto dos números reais em cursos de formação de professores.

[36] Esta ementa é exposta livremente, sem atender à formatação vigente de alguma Instituição de Ensino, embora contenha os elementos principais.

E M E N T A c o m e n t a d a

1. Apresentação

A proposta está centrada no principal conceito a ser trabalhado: o número real. Foi elaborado em dois momentos, denominados tratamento geométrico e tratamento analítico para os números reais.

Anterior a estes dois momentos, a proposta tem, como ponto de partida, uma atividade caracterizada pela busca do significado de número para cada aluno, prevendo que possa causar, no mínimo, uma sensação de incompletude e desconforto ou insegurança em relação ao tema. Essa busca é auxiliada pelo Material ao trazer, já no início, um texto sugestivo para que este ente e noções matemáticas subjacentes a ele possam vir à tona. Uma discussão pode ser elaborada, de forma a elucidar o objetivo do curso, que é “ver este ente com os olhos de quem nunca os viu” – uma metáfora em face das intenções do curso, já que nele será construído o conceito de *número real*.

O tratamento geométrico – via medição – é realizado anteriormente ao tratamento analítico. O tratamento geométrico está arraigado nas idéias propostas por Lebesgue e esta escolha está fundamentalmente amparada neste trabalho de pesquisa, em face das pesquisas apresentadas no Capítulo 1 e na análise que fazemos do Material, objeto de estudo deste trabalho.

Já a escolha do tratamento analítico vem com o intuito de trazer o conjunto dos números reais, estabelecendo possíveis conexões com a teoria apresentada. Deste tratamento advém a possibilidade de trazer a construção formal do conceito de *número real* a partir das idéias que foram considerados anteriormente à sua construção, no tratamento geométrico. É ele que possibilita esta conexão, visto que o processo de medição envolve, mesmo que implicitamente, seqüências de

Cauchy, o infinito, noções de convergência, densidade, continuidade, completude, etc.. Dessa forma, o modelo de Cantor para o conjunto dos *números reais* e a sua relação com as decimais apresentam-se de forma mais natural, ou mais visível que em um outro modelo.

O conteúdo programático é dividido em duas partes, respeitando os momentos nos quais se divide o curso, os tratamentos geométrico e analítico.

2. E M E N T A

Proporcionalidade de Segmentos – Comensurabilidade e Incomensurabilidade de Segmentos – Medição de Segmentos – Decimais – Aspectos Históricos sobre o Número Real.
Relações de Equivalência – Conjunto Quociente – Conjunto dos Números Racionais, corpo de frações – Seqüências – Conjunto dos Números Reais – Supremo, Ínfimo, e R como Corpo Ordenado Completo – Decimais.

3. CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

i. Primeira Parte: tratamento geométrico

Segmentos proporcionais, comparação de segmentos, comensurabilidade de segmentos.
A crise da Incomensurabilidade.
A necessidade de um novo processo de comparação frente aos segmentos incomensuráveis.
O processo de medição.
Processo direto de medição de segmentos em relação a uma unidade. A medida de um segmento.
Processo inverso. Axioma de Arquimedes e Axioma da Continuidade.
Decimais.

Operações com decimais. Adição e Multiplicação.
Comensurabilidade de Segmentos e proporcionalidade de segmentos.
Decimais periódicas e não periódicas.

ii. Segunda Parte: tratamento analítico e conexões com o tratamento analítico.

Relação de Equivalência, Classes de Equivalência, Conjunto Quociente.
Conjunto dos Números Racionais como Corpo de Frações. Operações e Propriedades.
Relações entre os tratamentos geométrico e analítico em face do Conjunto dos Números Racionais.
Seqüências de Números Racionais. Seqüências Fundamentais ou de Cauchy.
O Conjunto dos Números Reais.
Operações e propriedades: R como a estrutura de Corpo.
Relação de ordem em R: a estrutura de Corpo Ordenado.
Relação com a medição: Decimais.
Supremo e Ínfimo de um Conjunto.
R como uma estrutura de Corpo Ordenado Completo.

C o m e n t á r i o s

As idéias que nos levaram à proposta acima têm o suporte de uma bibliografia que considero apropriada. Apresento-a em seguida.

4. BIBLIOGRAFIA

O tratamento geométrico. O primeiro momento do curso tem como base as idéias apresentadas no Material, seguindo, por instantes, a sua própria estrutura. Essas idéias são encontradas também no livro "*Measure and the Integral"* de Henry Lebesgue, já citado no capítulo três deste trabalho. Porém, mesmo que

escrito e editado ainda com alguns pontos a reconsiderar, o Material oferece um tratamento com uma teoria construída que o livro de Lebesgue apenas sugere.

O tratamento analítico. O segundo momento pode ser desenvolvido utilizando-se uma bibliografia, já existente, que trata de cada assunto em questão encontrado em livros, revistas, artigos científicos ou textos de História da Matemática. Apresento algumas sugestões:

i. Livros

O Material:
BARONI, R. L., NASCIMENTO, V. M. Um tratamento, via medição, para os números reais, VI SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA.

Outros:
COURANT, R.; ROBBINS, H.: O que é Matemática?. Tradução: Adalberto S. Brito, Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2000.

GRIFFITHS, H.B.; HILTON, P.J. Matemática Clássica uma interpretação contemporânea, vol.3, Tradução: Elza Gomide, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1976.

HAIRER, E.; WANNER, G. Analysis by its History, Undergraduate texts in mathematics, Springer – Verlag, 1995.

LEBESGUE, H. Measure and the Integral. Traduzido e editado por Kenneth O. May, Holden-Day, Inc. 1966.

ii. Artigos científicos

BALDINO, R.R. A ética da definição circular de número real, Bolema, UNESP – Rio Claro, n10, p.31-52, 1994.

MIGUEL, A. 1997. As potencialidades pedagógica da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. Zetetiké, 5 (8) 73-105.

iii. Textos e Livros de História da Matemática

BOYER, C. B. *História da matemática*. São Paulo: Edgar Blucher, 1974.

EVES, H. Introdução à História da Matemática. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

KATZ, V. J. A History of Mathematics: an introduction. New York: Harpercoliins, 1993

C o m e n t á r i o s (continuação . . .)

Como dito anteriormente, de forma introdutória e a título de apresentação, o curso inicia-se a partir da discussão de um texto oferecido pelo Material, do poeta português Fernando Pessoa. Inicia-se o primeiro momento do curso:

Sobre o tratamento geométrico.

Os momentos são compostos de etapas, determinadas pelas seções que subdividem o Material, a referência principal deste curso. A primeira etapa é explicitada pela terceira seção do Material, que traz as bases da teoria para que o conceito de *número real* seja construído a partir desse tratamento geométrico. Refiro-me aqui aos conceitos e resultados necessários para que um primeiro processo de comparação seja apresentado (que não é o processo de medição desejado), como: segmento de reta, tamanho de segmento, proporcionalidade de segmentos, comensurabilidade de segmentos. Na tentativa de comparar segmentos, a noção de proporcionalidade permite-nos comparar apenas determinados segmentos. Vem à tona a etapa que explora a crise da incomensurabilidade para apresentar os segmentos não comparáveis, nesse

processo, com uma unidade de medida U (segmento unitário ou segmento padrão), os segmentos incomensuráveis com a unidade. Esta etapa é a motivação para que a próxima etapa torne-se necessária no desenvolvimento da teoria.

Na busca por um outro processo vem a Seção 5 do Material. Ela traz um processo de comparação que nos permite comparar, medir qualquer segmento, sem a menção de proporcionalidade. Esse processo, como dito anteriormente, é apresentado por Lebesgue no livro "*Measure and the Integral"*. Fundamentada por duas subseções, essa seção inicia-se com o processo direto, que, num procedimento com infinitas etapas, associa um segmento qualquer AB a um símbolo, chamado medida (esse símbolo será a decimal). Já o processo inverso responde a questão: "todo símbolo é medida de um segmento?". (Existe um ponto da reta que determina um segmento que tenha como medida uma decimal qualquer, periódica ou não?) Essa questão perpassa pela noção de continuidade dos *números reais*.

A resposta afirmativa a esta pergunta é respondida a partir da axiomática proporcionada pela Propriedade Arquimediana e pela Propriedade do Contínuo, apresentada numa forma geométrica nesta seção pelo Material, trazendo os Axiomas de Arquimedes (relacionado à ordenação do conjunto) e da Continuidade.

Os processos direto e inverso permitem-nos definir as decimais como sendo a medida de um segmento AB em relação a um segmento unitário U. Dessa forma, a etapa que tem as decimais como objeto principal pode ser construída e, nela, são definidas as operações adição e multiplicação sobre o conjunto das decimais. É apresentado um processo que permite realizar a soma de duas decimais infinitas sem o truncamento, no sentido contra o usual, da esquerda para a direita, mostrando, de certa forma, que operar com decimais infinitas é possível, já que é definida a operação. Entretanto, o resultado desta operação, uma decimal também infinita, não é totalmente descrito nos termos de exibir esta decimal.

A partir desta etapa torna-se possível estabelecer uma correspondência entre o conjunto das decimais e o conjunto das classes construído na seção três, que se refere à proporcionalidade de segmentos. (Essas classes, obtidas a partir da definição de proporcionalidade, podem ser identificadas como os números racionais representados sob a forma de fração. Com esta identificação, surge a possibilidade de identificar também a definição de adição, multiplicação e algumas propriedades operatórias, nos resultados apresentados no desenvolvimento da teoria que concerne aos segmentos proporcionais).

A correspondência entre as classes e as decimais permite-nos fazer algumas observações e uma delas é identificar as decimais periódicas como medida de segmentos comensuráveis com a unidade (números racionais) e, conseqüentemente, as não periódicas como medidas de segmentos incomensuráveis com a unidade (os números irracionais). O que liga de modo significativo as decimais à comensurabilidade de segmentos e, nas entrelinhas, as periódicas como uma representação para certos números racionais. A proposição que garante esta ligação constante no Material ainda permite que seja justificada a passagem de um número racional da sua representação fracionária para a decimal, e vice-versa.

Sobre o tratamento analítico

O tratamento analítico é o passo final para que o conceito de *número real* seja formalmente construído, mesmo que sem esgotá-lo. Para tanto, faz-se necessário apresentar alguns conceitos anteriores a esse momento e que, circunstancialmente, podem ser conectados à teoria desenvolvida no tratamento geométrico, no que diz respeito à proporcionalidade de segmentos. Precisamos do conceito de relação de equivalência, classe de equivalência e conjunto quociente, que serão vistos/revistos no curso. Apresenta-se o conjunto dos números racionais Q como “O Corpo de Frações”, o conjunto das classes de equivalência

mediante uma relação de equivalência que determina estas classes. Estas classes são compostas por frações equivalentes (implícito está o conceito de frações equivalentes da Educação Básica). Dessa forma, podem ser estabelecidas conexões entre as frações (números racionais) e a seção contida no Material que trata da proporcionalidade de segmentos, já explicitada anteriormente, mas que agora pode ser dita, já que Q está definido. (Observe que só agora o conjunto dos números racionais é conhecido, ou seja, os símbolos $\frac{p}{q}$ passam a ter significado "independente".) Podemos, inclusive, retornar à teoria dos segmentos proporcionais, para que sejam identificadas essas "semelhanças" e conexões acerca do exposto sejam abarcadas.

Uma outra etapa traz o conceito de seqüência numérica (de racionais) e as denominadas seqüências fundamentais, ou de Cauchy, com o intuito de construir o conceito de número real via seqüências de Cauchy, ou seja, como uma classe de equivalência de seqüências de Cauchy.

São definidas as operações sobre **R**, possibilitando que **R** possua as propriedades que o levem a uma estrutura de Corpo.

Ao atribuir uma relação de ordem em **R** vem a estrutura de Corpo Ordenado.

É o momento de desenvolvermos uma etapa, trazendo a correspondência de R com esta estrutura e, assim, fazendo cada elemento de **R** corresponder a uma decimal.

Com os conceitos de supremo e ínfimo de um conjunto, **R** pode ser apresentado como um **Corpo Ordenado Completo**.

P a r a e n c e r r a r

Quero deixar claro que as idéias que apresento aqui são os frutos que colhi do contato que tive com livros, textos, artigos, páginas da Web e, principalmente, com as idéias do ilustre matemático e, educador matemático em seu tempo, Henry Lebesgue. Ele teceu considerações que revelam sua preocupação com questões relacionadas aos cursos de formação de professores desde tempos outrora, questões que pertencem, atualmente, ao cenário da Educação Matemática quando o assunto é o tema desta pesquisa.

Porém, a oportunidade de realizar este trabalho na forma como está sendo apresentado tornou-se possível com a possibilidade do contato com o Material, que traz estas idéias, e que, para mim, vai muito além do esperado, mesmo que escrito e editado ainda que em uma primeira forma pelos autores. Vejo este Material, aliado a esta pesquisa, como o começo de uma mudança rumo a uma caminhada longínqua. . . que certamente terá esta caminhante, quer seja para contar as suas próprias histórias.

Espero que os resultados apresentados e o aprimoramento profissional que adquiri no desenrolar desse trabalho de pesquisa permitam-me assumir uma maior responsabilidade na formação dos professores de Matemática, na qualidade de formadora, educadora e pesquisadora de um tema atual, polêmico e alvo de preocupação de tantos pesquisadores da área.

R E F E R Ê N C I A S

ALARCÃO, I. *Professores reflexivos em uma escola reflexiva*. 2ª. Edição. São Paulo: Cortez, 2003. (Coleção Questões da Nossa Época)

BALDINO, R.R. *A ética da definição circular de número real,* Bolema, UNESP – Rio Claro, n10, p.31-52, 1994.

BARONI, R. L., NASCIMENTO, V. M. *Um tratamento, via medição, para os números reais*, VI SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA.

BATARCE, M. S. *Um contexto Histórico para Análise Matemática para uma Educação Matemática*. 2003. (Mestrado em Educação Matemática) Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

BICUDO, M. A. V. (Org.), 1987. *Educação Matemática*. São Paulo: Moraes.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação qualitativa em educação:* uma introdução à teoria e ao métodos. Portugal: Porto, 1991.

BRASIL. Ministério da Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de matemática, Bacharelado e Licenciatura. Brasília. 2003*

_____. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1998

BROLEZZI, A. C. *A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática*. 1996. (Doutorado em Educação) Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

COBIANCHI, A. S. *Estudos de Continuidade e Números Reais:* Matemática, Descobertas e Justificativas de Professores, Tese de Doutorado em Educação matemática, Departamento de matemática, UNESP – Rio Claro, 2001

COURANT, R.; ROBBINS, H.: *O que é Matemática*?. Tradução: Adlberto S. Brito, Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2000.

D'AMBROSIO, U. 1996. *Educação matemática*: da teoria à prática. Campinas: Papirus

_____ . *História da Matemática e Educação*. In: Cadernos CEDES - História e Educação Matemática. Campinas: Papirus, n. 40, 1996. 96 p. p. 7-17.

DEDEKIND, R., *Essays on the Theory of Numbers*. New York: Dover Publications, Inc., 1963.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FISCHBEIN, E. ; JEHIAM, R.; COHEN, D. *The concept of Irrational Numbers in High-School* :Students and Prospective Teachers. Educational Studies in Mathematics, v.29, p. 29-44, 1995.

FOWLER,D. *The Mathematics of Plato's Academy:* A new reconstruction. 1999

GRIFFITHS, H.B.; HILTON, P.J. *Matemática Clássica uma interpretação contemporânea*, vol.3, Tradução: Elza Gomide, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1976

HAIRER, E.; WANNER, G. *Analysis by its History*, Undergraduate texts in mathematics, Springer – Verlag, 1995.

IGLIORI, S. Silva, B. *Concepções dos alunos sobre números reais*. In: LAUDARES, J. B. & LACHINI, J.(Org.) *Educação matemática:* a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: Fumarc, p. 39-67, 2001

JAHNKE, H. N. *A History of Analysis*. American Mathematical Society and London Mathematical Society, 2003.

KATZ, V. J. *A History of Mathematics*: an introduction. New York: Harpercoliins, 1993

LEBESGUE, H. *Measure and the Integral*. Traduzido e editado por Kenneth O. May, Holden-Day, Inc. 1966.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*, Rio de Janeiro: IMPA: Instituto de matemática Pura e Aplicada, 1976.

LINCOLN , Y. S. & GUBA, E. G. *Naturalistic Inquiry*. California: Sage Publications, 1984. 416p.

LÜDKE, M. & ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em Educação*: Abordagens Qualitativas. São Paulo: EPU, 1986. 99 p. (Temas básicos de Educação e Ensino)

MELLO, S. B. A Compreensão do Conceito de Número Irracional: Uma radiografia do problema e uso da história como uma alternativa de superação. Dissertação de Mestrado da Universidade Federal rural de Pernambuco, UFPE, Brasil. 1999

MIGUEL, A. 1997. *As potencialidades pedagógica da História da Matemática em questão*: argumentos reforçadores e questionadores. Zetetiké, 5 (8) 73-105.

MOREIRA, P.C. *O conhecimento matemático do professor :* formação na licenciatura e prática docente na escola básica. Tese de Doutorado em Educação. Faculdade de Educação. UFMG, Belo Horizonte, 2004.

MOREIRA, P.C.; DAVID, M.M.M.S. *Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores*. Zetetiké, v.11, n.19, p.57-81, 2003a.

NÓVOA, A. (Org.). *Os professores e sua formação.* Lisboa, Portugal: Publicações Dom Quixote, 1992.

PEREZ, G. *Prática reflexiva do professor de matemática*. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). *Educação matemática:* pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

PEREZ, G., COSTA, G.L.M., VIEL, S.R. *Desenvolvimento Profissional e Prática reflexiva*. BOLEMA, Ano15, no. 17, pp, 59 a 70, 2002.

PESSOA, F. *Obras em Prosa*, Editora Nova Aguilar S.A., Rio de Janeiro, 1986

REIS, F.S. *A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise*: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas.

RIPOLL, J. B.; RIPOLL, C.C.; SILVEIRA, J.F.P. *Números Racionais, Reais e Complexos*. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2006

ROBINET, J. *Lês réels: quels modeles em ont lês élèves*?. Chier de didactique dês mathematiques no. 21, I.R.E.M. Université Paris 7. Paris, 1993.

SOARES, E. F. E., FERREIRA, M.C.C., MOREIRA, P. C. *Números Reais:* concepção dos licenciandos e formação Matemática na licenciatura. Revista Zetetiké, VOL. 7. No. 12. Julho/Dezembro de 1999.

SZTAJN, *P. O que precisa saber um professor de matemática*? Uma revisão da literatura americana dos anos 90. Educação Matemática em Revista. SBEM. ANO 9. No. 11 A – Abril 2002.

TÁBOAS, C. G. *O número e sua história cultural*: fundamento necessário na formação do professor. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas.

TIROSH, D. *The role of student's intuitions of infinity in teaching the Cantorian Theory*. Advanced mathematical Thinking, Kluver Academic Publishers, pp. 199-214. Boston, 1995.

WUSSING, H. *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Trad. E. Ausejo, J. L. Escorihuela, M. Hormigón (dir), D. Kara-Murzá, A. Millán. México, Siglo XXI de España Editores S/A, 1998.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ÁVILA, G. *Grandezas Incomensuráveis e Números irracionais.* Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 5, p.6-11, 1984.

BARDIN, L. *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edição 70, 1979.

BARON, Margaret E. ; BOS, H. J. M. *Curso de história da matemática:* origens e desenvolvimento do cálculo. Brasília:UNB, 1985. V. 5

BOYER, C. B. *História da matemática*. São Paulo: Edgar Blucher, 1974.

CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Sá da Costa, 1984.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática*: da realidade à ação, 1986, Editora Summus.

FAUVEL, J; MAANEN, J.V.(Ed.) *History in Mathematics Education*: The ICMI Study. Dordrecht: Kluwer, 2000.

FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M. (Orgs.) *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática.* São Paulo: Musa Editora; Campinas, SP:GEPFPM-PRAPEM-FE/UNICAMP, 2005.

HEATH, Thomas. *The thirteen books of Euclid´s Elements*. Dover Publications, Inc. New York, 1956.

HOBSON, E.W. *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*, vol.1, Dover Publications, Inc, New York, 1957.

MIGUEL, A., BRITO, A. J. *A História da Matemática na formação do professor de Matemática.* Cadernos Cedes - História e Educação Matemática, Campinas: Papirus, n. 40, 1996. 96 p. p. 47-61.

MIGUEL, A.; MIORIN, A. História na Educação Matemática: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica. 2004

MOREIRA, P. C. , DAVID, M. M. M. S. *A formação matemática do professor*: Licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte Autêntica, 2005.

_____ .*Da prática do matemático para a prática do professor:* mudando o referencial da formação matemática do licenciado. Revista Zetetiké, VOL. 5. No. 7. janeiro/junho de 1997.

NOBRE, S. R. *Alguns "porquês" na História da Matemática e suas contribuições para a Educação Matemática.* Cadernos Cedes - História e Educação Matemática, Campinas, n. 40, p. 29-35, 1996.

PIRES, C. M. C. *Reflexões sobre os cursos de licenciatura em matemática*. Educação Matemática em Revista. SBEM. ANO 9. No. 11 A – Abril 2002.

_____. *Novos desafios para os cursos de licenciatura em matemática.* Educação Matemática em Revista. SBEM. ANO 7. No. 8 – Julho 2000.

SHÖN, D. *The reflective practitioner*. New York: Basic Books.1983

SKOVSMOSE, O. *Educação Matemática Crítica*: A Questão da Democracia. Papirus Editora. 2001 Campinas – SP

TALL. D. O., SCHWARZENBERGER, R. L. E. *Conflicts in the Learnig of Real Numbers and Limits*. Mathematics Teaching . Vol. 82, p. 44-49, 1978.

TALL, D. O. 1991. *Advanced Mathematical Thinking*. Londres: Kluwer Academic Publisher.

TARDIF, M. *Saberes Docentes e Formação Profissional*. Petrópolis: Vozes, 2002.

TOEPLITZ, Otto: The Calculus: a genetic approach. Trad. L. Lange. Phoenix Science Series, The University of Chicago Press, 1969.

ZEICHNER, K. M. *Formando professores reflexivos para a educação centrada no aluno*: possibilidades e contradições. VI Congresso Estadual Paulista sobre Formação de Educadores. Organizadora Raquel Lazzari Leite Barbosa. São Paulo: Editora UNESP; 2003.

A N E X O S

E N T R E V I S T A S

Data: 23 de junho de 2005

Entrevistado: P1

E: Como foi dito no início do semestre, esse curso de Análise seria desenvolvido de um modo diferente do que a gente conhece por um curso de Análise, dessa forma eu gostaria de conversar com você a respeito das impressões que você teve do curso levando sempre em consideração a sua formação, não a anterior, mas a sua formação como educador matemático. Então o que você diria em relação às reflexões que suscitaram do curso?

P1: Eu acho que foram várias as reflexões que o curso pode ter provocado na gente, uma delas é o papel da própria disciplina de matemática de formação do professor, do educador matemático. Eu acho que é uma questão que tem que ser repensada, já tem publicações que começam a revelar essa questão, eu acho que essa é uma das questões. A outra questão que foi muito difícil pra todos, foi o reconstruir partindo de um “desconstruir’. Veja, a gente sabe, por exemplo, que uma fração é um número decimal, a gente sabe isso, só que a gente tinha que partir de algo que. . . A gente estava nos números naturais, a gente não pode usar isso ainda. . . A gente estava nos números inteiros positivos, a gente não pode usar determinado tipo de coisa, olha, e a gente só tem aqui seqüência de dígitos, a gente não sabe o que é fração, então. . . Esse processo é um processo muito bom, eu acho muito interessante pra ser feito. Porque geralmente. . . a gente não consegue perceber isso e a gente acaba na hora que dando aula, lá no ensino básico misturando tudo, fração é decimal, é dízima, é uma confusão, e que a gente leva como natural e que pro aluno muitas vezes não é natural, então eu acho que essas reflexões foram as mais centrais, aliando a tudo isso a questão de forma dentro da disciplina um coletivo assim, que discutia matemática, que o que é muito bacana e que geralmente não acontece num curso de analise, e só o professor expondo, axiomatizando tudo, muitas pessoas não entendendo nada, a maioria absoluta, decorando definições e demonstrações e se você muda um

pouquinho ninguém faz nada, ou quase ninguém faz nada, então eu acho que essas foram as reflexões, assim . . . as mais interessantes do curso.

E: E, você sente agora um conforto maior em falar sobre o objeto matemático número?

P1: Sim, sim, porque eu acho que este tratamento via medição dá pra você uma noção melhor do que é um número. Não tem definição do número, é difícil você definir, "o que é número", até no dicionário é difícil, provavelmente. Eu nunca fui lá ver, mas deve ser difícil você falar sobre. . . Agora, as representações dele fazem com que a gente possa ter um conforto melhor, ou maior, não sei, talvez, do que seja esse objeto número. Eu acho que essa construção apesar de que eu já falei pra você antes, vou falar de novo, de que essa construção não foi um processo histórico e talvez seja uma das minhas frustrações desse curso. Eu imaginava, pelo que a Rosa estava fazendo com história, e que seria construir os números eu imaginei que seria um resgate histórico, que foi também, mas que não privilegiou a cronológica, a seqüência cronológica, então eu imaginava que fosse. . . e. assim. . . Eu acho que olhando o objeto número, e aí mais especificamente o número negativo, que foi tão polêmico, sei lá no século dezenove, eu acho que esta questão também deveria ser tratada, mas, eu acho que o tempo foi muito curto pra introduzir mais coisa, eu acho que Análise II, mais algumas aulas, seria mais interessante, mas assim, quem sabe no futuro vocês voltam a pensar sobre.

E: Em relação à consciência desse objeto matemático número, isso aí pra você agora. . .

P1: Ah, é mais consciente, hoje eu consigo falar com mais propriedade, é mais fácil pra mim falar determinadas coisas com relação a antes.

E: Com uma abordagem dessa forma, você acredita que agora você possa ter mais subsídios pra tratar outros conceitos da análise?

P1: Bom, essa é uma questão difícil, é. . . Mais eu acredito que sim, por exemplo, a gente pega do limite lá e vê aquela seqüência de dígitos e tal, eu acho que fica mais razoável. Eu acho que dá pra fazer uns links, assim. . . E legal essa disciplina que, além de você poder falar um pouco mais dos conceitos da análise, a gente passou um pouco pela álgebra, e até poderia trazer pelo cálculo, determinado tipo de coisa, eu acho que talvez não, mas poderia ser pensado, talvez até num cálculo pra Licenciatura de Matemática isso poderia ser pensado. Assim . . . limite eu acho que poderia ser explorado mais, mas eu acho que a questão do tempo, eu acho que também vocês preferiram não explora tanto, mas o limite com uma seqüência de dígitos lá, que converge pra um determinado valor, e, mas eu acho que pode ser feito, que dá pra ser feito, foi assim. . . que tá em movimento e que esse movimento pode crescer muito mais.

E: Você lembra assim de alguma dificuldade que você sentiu em relação ao material, notação, alguma coisa. . .

P1: Eu acho que o material, é . . . em alguns momentos ele deixa algumas coisas assim . . . que não ficam muito claras, é difícil. . . eu posso até procurar e te mostrar, depois algumas coisas mais pontuais, mas, por exemplo, esse "a está para b assim como p está para q" já é de um certo consenso que não ficou uma notação muito boa porque faz aquele negócio assim de você multiplicar assim em x, . . . então, é fração, mas não é fração, a gente olha pensa que é fração, mas não é fração, é só notação e tal, e isso talvez seja assim a parte mais, assim. . . problemática e que talvez vocês precisam rever sei lá talvez pensa como coloca. Ah! Eu não sei, muitos índices, e em determinados momentos fica um pouco confuso. Mas, eu acho que está num processo inicial, e essa parte aqui dos a-enes, eu não sei até que ponto essas notações podem ser confusas e podem fugir um pouco do que a gente quer chegar, sabe. . . eu não sei, mas é uma coisa que. . . vocês podem pensar, eu acho que . . . eu não sei, a notação às vezes complica muito, às vezes é necessária . . . porque tem coisa de abstração, e tal, tem que pôr na balança até que ponto é interessante.

E: Ok. Você acredita que a idéia desse material possa ser adaptada para o ensino fundamental e médio.

P1: Eu acho que sim. Eu trabalhei em quase todas as séries, de quinta série em diante eu só não passei pelo segundo ano. A questão do número, principalmente lá na quinta série, sexta, é muito difícil de ser tratada. E a minha formação de matemático puro não dava conta das demandas que tinham lá, alunos chegavam na quinta série e não sabiam as operações básicas e o momento que a gente pode perceber que teve um retorno melhor foi quando a gente usou material concreto, quando a gente usou cartolina. . . e. . . cortasse e trabalhasse com frações a partir de uma medição, que a gente pegava um retângulo, era uma unidade e você repartia aquele retângulo em subunidades em três partes, quatro, pegava frações equivalentes pra somar, e recortava aquilo, e ia encaixando, um meio, dois quartos encaixados certinho uma em cima da outra, então. . . era uma medição. Esse processo de medição foi mais natural pro aluno do que você tira mmc e tal, e mínimo múltiplo comum dos denominadores, já deu pra perceber que com a medição, com o material concreto é algo que possivelmente pra maioria e pra uma boa parte dos alunos foi algo que foi mais natural,. . . , já tem um ponto positivo com isso, mas, eu acho que dá pra trabalhar com mais coisas, pra complementar com mais questões, repensar talvez a quinta e a sexta série, nessa parte de números e talvez estendendo pras outras séries, até fechar o conjunto dos reais enfim, e tentar considerá-lo como natural a partir do ensino médio, vamos chamar assim. Eu acho que dá pra fazer um bom link, e acho que dá uma boa pesquisa no futuro também quem sabe num doutorado. Que faça esse link que vocês estão fazendo com o material e de pesquisa com o ensino básico e que tem que ser feita, e defendida por muita gente, a gente não pode pesquisar pra ficar aqui pra gente, na biblioteca e tal, e que é um caminho que vocês tem que trilhar,

E: Então se você tivesse na mão essa proposta, pra aplica, adequadamente, você faria isso.

P1: Ah sim, não tenha dúvida, e pelo menos eu faria uma experiência, eu acho que a primeira vez seria uma experiência pra ver que resultados teriam e a partir da segunda já taria adaptando, a partir até da primeira dependendo do contexto lá da minha escola e tal, então estaria assim, Regina, experimentando no caso pra ver o que aconteceria pelo menos numa alternativa pra optar.

E: Falando agora em relação a sua formação, de que forma você acha que fica a contribuição desse curso, desse material, dessa proposta, o que você poderia falar pra gente?

P1: Olha, eu achei muito bacana não só o material como a proposta, como esse passar, vamos dizer assim, a Professora com a formação em matemática já tá com os dois pés na educação matemática, e você também, nesse processo de mudança, eu acho assim fundamental, pessoas que tem uma formação boa em matemática pura, virem pra educação matemática pra repensarem isso e primeiro que tem mais credibilidade. Segundo que o Material pode colocar, como um dos pontos fundamentais, que eu já comentei, que é a discussão matemática. Você está colocando professores de matemática ou futuros professores de matemática a discutirem matemática. E não só discutirem matemática, mas as dificuldades que aquela matemática pode levar, pode trazer, formando um coletivo de cooperação ali, você viu que a gente tinha várias equipes, então a equipe tal era a página um e dois, mas se a equipe tal não resolveu o exercício, outra ia lá e ajudava, a gente dava contribuição, outras equipes davam contribuição pra gente, então, eu achei muito bacana esse cooperativo que se formou na sala.

E: Essa metodologia de seminários, você gostou também?

P1: Ah, sim. Pra essa disciplina eu acho fundamental, mesmo em nível da Licenciatura, da graduação eu acho muito bacana e que estimula o estudo constante, toda semana a gente tem material pra estuda, e dá muito trabalho. Tem

coisa que a gente fica batendo a cabeça e tem que procura os grupos, mas a interação com os grupos, e, o estudo coletivo eu acho que é muito gratificante.

E: Então agora pra finalizar, em relação à contextualização do trabalho que foi feito, como que você vê isso?

P1: Essa é uma questão polêmica que o PCN coloca, contextualizar, como alternativa, tal, um dos nossos professores lá da especialização, que fez doutorado aqui também na Unesp, ele coloca que, sempre há contexto, que geralmente a gente liga a contextualização a algo prático, algo do dia a dia, mas e o contexto da matemática? Porque a gente tá aqui no contexto da matemática pura, nós investigamos, nós discutimos, nos debatemos, mas praticamente no contexto da matemática, e vocês, a medição que vocês trabalharam foram de segmentos, que é algo também da matemática, da geometria, então, eu acho que mesmo assim se pode discutir. Existem pessoas que dizem: “Ah! Vamos aplicar tudo, contextualizar tudo, o que não for útil jogar fora”, então... análise não é útil, muitos licenciandos podem até pensar assim, análise não é útil, não vou usar análise pra nada. É só demonstrar, e teoremas e demonstrações de limites, e definições, então eu não vou usar aquilo na escola pública, em particular no ensino básico, eu não vou usar aquilo, é uma disciplina que dá muita dor de cabeça, e talvez porque seja axiomatizada e talvez por ser da matemática pura por si só, que não justifique nada de contexto, eu acho que junta com aquilo que eu falei na outra pergunta do objeto número, e aí com o ensino básico, eu acho que dá pra contextualizar, olhando o contextualizar, não como pragmatismo, pra fazer o link, eu acho que dá. É isso.

E: Mais alguma coisa que você gostaria de comentar?
Eu acho que o comentário que eu fiz lá na avaliação que você fez é que, a disciplina é muito boa, isso já é bem relevante, não tem muito a discutir, é que às vezes a gente quer força algumas barras, eu acho que tem que pensar um pouco melhor isso, tipo. . . esse final aqui do material aqui que a Rosa deu caem muitas

coisas aqui do céu, o corpo ordenado completo, e em determinados momentos eu pensava, ta parecendo muito com o livro de análise, muitos epsilons e deltas, diferenças, eu acho que essa parte aqui precisa ser repensada. . .

E: Mas essa é a construção formal, é como foi feito.

P1: Aham, mas assim, pelo que foi feito anteriormente, com o livro aqui da Rosa e do Vanderlei, deu pra entender que vocês iam construir mesmo não usando a parte da cronologia, usando os números negativos por último que esse final fosse algo, tipo que fosse uma extensão disso, sabe? Usando medição, também, não assim axiomatizado, usando epsilons e deltas, não que não aparecesse, mas que também tivesse isso, e aí eu acho que também faltou, foi um pouco corrido pra fazer isso, acho que é isso, foi notório, mas... eu acho que é algo que está em construção, eu acho que vocês têm que pensar, foi uma disciplina muito válida. Desse semestre foi uma das disciplinas, das mais válidas que eu fiz, valeu a pena ter feito, realmente. E pode dar contribuições belíssimas, e o mais bacana é que vocês podem abranger desde o trabalho da Rosa e dos outros orientandos dela que estiverem trabalhando com essas coisas, com números e tal, podem abranger desde o fundamental, desde a primeira série, lá até as últimas séries da pós-graduação, então, a sua pesquisa é um grão de um mundo, de uma praia inteira, eu acho que é bem bacana sim, e que abre muito pras pesquisas, só posso parabenizar vocês.

E: Muito obrigada.

Data: 28 de junho de 2005

Entrevistado: P2

E: como foi dito no início do semestre esse curso de análise seria desenvolvido de um modo diferente do que a gente conhece. dessa forma, eu gostaria de conversar com você a respeito do que foi feito durante o curso perante a sua formação. em primeiro, o que você diria sobre as reflexões que suscitaram do curso?

P2: você quer que eu compare em relação a minha formação... de análise...

E: não em relação a uma comparação. . .

P2: olha, eu achei o seguinte: que o curso, por exemplo, essa abordagem de medição, eu achei que foi o grande diferencial do curso, que é uma coisa que você não vê . . . pelo menos não é comum de se trabalhar, eu pelo menos jamais tive acesso a esse tipo de abordagem. eu acho que isso é uma coisa interessante. então, eu acho que todo esse processo que a gente viveu, eu acho que foi o diferencial, embora eu entenda que há uma, ainda há uma ruptura muito grande do momento que você ta trabalhando com medições e como ele termina, esse processo termina, é dessa passagem para a parte algébrica, entendeu? eu vi o curso assim com dois momentos bem distintos, mas não necessariamente relacionados. entende? assim como . . . termina. as conclusões. . . isso a gente já conversou lá no curso, a parte do caderninho. depois quando vem os outros textos, eu falei até pra rosa, o nosso grupo falou, olha tem ainda aí uma ruptura muito grande. mas eu acho que foi pra mim um grande diferencial, a gente pensa naquele processo dos intervalos encaixados com todo aquele tratamento, a construção das seqüências, o processo de medição, eu achei aquilo muito interessante. do curso eu achei que o grande diferencial foi esse. não sei se a pergunta. . .

E: dessa forma você sente um pouco mais de conforto em relação ao objeto matemático número?

P2: eu acho que eu me sinto com muito mais conforto. algumas coisas eu acho que me dão uma certa angústia, angústia no bom sentido. um incômodo, se eu pudesse falar, é . . . eu sempre penso assim, falar com o matemático, falar com um leigo, uma pessoa que não é da matemática. porque o grande desafio do professor, aí eu tô pendendo na perspectiva do professor, na prática, o grande desafio dele é traduzir tudo isso que ele tem, que ele estuda de matemática, inclusive outras coisas não só essa questão do número, nós estudamos aí a construção dos reais e tal, mas é traduzir isso pra que as pessoas possam entender, criar o processo, eu acho que é isso. então nesse sentido eu acho que há um desafio, eu acho que é um dos grandes passos que esse curso pode dar, incentivar ... . nesse sentido eu acho que ainda não traduzi, eu precisava pensar bem, eu não me sinto confortável, por exemplo eu precisava pensar bem, ainda muito, pra desenvolver um material, ou falar por exemplo sobre os conjuntos numéricos, dar um tratamento legal no ensino fundamental e no ensino médio. e quando a gente conversa com os matemáticos, mesmo a gente, que não tem uma formação com olhar do matemático, mas a gente consegue falar com determinada linguagem com determinados termos, teoremas tais e tais, e nós mesmos acabamos . . . acabamos criando um processo de ser convencido, você acaba sendo convencido, mas eu acho que o salto disso aí, é refletir, do ponto de vista da formação do professor. é como traduzir isso num material operacional, mas eu me sinto bem mais confortável.

E: você acredita que uma abordagem dessa forma, do tratamento dos conjuntos numéricos, como foi feito, poderia te dar um subsidio pra tratar outros conceitos da analise, que foram levantados no curso pra um outro curso de analise.
P2: sim, eu acho que sim, eu acho que, por exemplo, no meu curso de análise que eu fiz não se pensou nisso, se fala do conjunto dos números reais, com as suas estruturas e tudo mais, e vamos embora, e . . . o que foi feito antecedeu esse

processo, eu acho que para um futuro curso de análise, eu acho super legal, eu acho super bom, e acho até que, que em função do tempo, que tem que se pensar, alguma coisa de análise. uma análise ii, uma reestruturação da forma de apresentar, realmente pro cara se sentir mais confortável pra trabalhar essa construção numérica e aí vamos pra outras teorias.

E: você sentiu alguma dificuldade em relação ao material?

P2: olha. . . eu senti, eu senti muitas dificuldades, eu entendo isso como uma maneira muito interessante, a discussão, eu acho que o meu grupo de uma maneira geral discutia muito, eu sou meio pentelho, eu fico cutucando, mas sempre dificuldades que eu via como saudável, agora . . . ah . . . é. . . o texto como um todo ele é denso, eu acho que ele é denso, eu já tava também um bom tempo sem estudar . . . matemática de nível superior. acabei retomando, você vai relembrando, umas coisas, eu acho que. . . eu até tinha falado, tem umas entrelinhas aqui, mas aí a rosa falou, precisa ter as entrelinhas pra gente descobrir as entrelinhas. eu acho que o texto poderia, eu acho, ser um pouquinho transformado, em algumas situações ele tem umas passagens que parecem óbvias e não são, tem algumas passagens lá eu não sei te dizer precisamente, é, algumas passagens que são mais densas, matematicamente falando. que eu lembro por exemplo, no grupo de uma maneira geral, como é a gente vai entender isso aqui, precisava de um tempo maior de discussão, e tal, isso depende do propósito do texto.

E: esse tipo de metodologia, de fazer os seminários, os sorteios, você gostou?

P2: olha, eu vou dizer o que eu sentia falta. primeiro, eu adoro essa coisa de trabalho, de grupo de trabalho, porque nós nos reuníamos e a gente tinha que discutir o texto, e eu achava isso maravilhoso. agora eu senti falta, senti falta de uma coisa, é, que dentro da aula, se eu tivesse que fazer uma sugestão, eu faria isso, faria essa sugestão: que dentro da aula tivesse o trabalho em grupo também,

pra que por exemplo, as pessoas que estão organizando o curso, pudesse ter um momento de interagir com os grupos, e não que o grupo tivesse já tudo pronto pra falar lá na frente, porque de alguma, por exemplo, de coisas não resolvidas, tá certo? porque embora eu tenha gostado muito desse trabalho dos grupos, havia uma pressão, de alguma forma que de que ah! “quando nós fossemos lá na frente já teria que saber tudo”. entende? e esse processo, ele não dá margem pras pessoas, como é que eu posso falar? pras pessoas se exporem mais, se entende o que eu to falando eu acho que isso intimida um pouco, por falta, na minha opinião, desse momento de interação por exemplo com vocês. chega e fala assim, dentro da sala de aula, os grupos estarem trabalhando, e chama, e fala, olha, tem isso aqui a gente não tá saindo, não tá resolvendo, embora a gente tenha procurado vocês lá, eu acho que, se eu tivesse que acrescenta, eu acrescentaria isso, não tiraria nada. que as apresentações são legais, ela treina, reelabora, eu achei legal.

E: se você tivesse uma proposta pra implementar esse material, pronta pro ensino fundamental e médio, com essa idéia de medição, o que você pensa a respeito disso, você faria?
P2: só vendo a proposta, é difícil, a gente consegui fazer essa . . .

E: você não consegue visualizar alguma coisa . . .

P2: eu consigo visualiza algumas coisas práticas, esse processo de medição eu achei muito legal, por isso que, é . . . eu vou te dar um exemplo, é. . . vou construir com os alunos jornais com o metro quadrado e vão cobrir o chão da sala pra ver quantos metros quadrados tem e sempre vão sobrar alguns pedacinhos, tá certo, a questão das subdivisões, das subdivisões, etc, eu não sei, se isso seria, uma imagem que eu faço, por exemplo, pra, pra discutir a necessidade e falo assim, e agora, como é que fica isso num objeto matemático, que aí se tem que saí, isso aqui tudo bem, fisicamente vai acabar. agora vamos falar do físico e,

agora, preciso, primeiro vê a proposta é o que mais me preocupa, por isso que eu falei, o grande desafio é esse.

E: agora, no geral, em relação a contribuição, do curso da abordagem em relação à sua formação, você tem algo a comentar?

P2: olha, eu acho que eu tenho, a colaboração eu acho que foi no olhar. primeiro que você me perguntou, te dá alguma segurança? dá. ao mesmo tempo que não são todas as coisas que são resolvidas, mas, me dá muito mais segurança, ampliou o olhar para as questões relacionadas ao número, nesse sentido eu acho que colaborou até mesmo no ponto de vista da abordagem.

E: coisas que você não tinha percebido antes?

P2: com certeza, com certeza, e houve discussão de conceitos . . . bem elaborados na opinião, e eu achei coisas que eu não tinha pensado antes . eu acho que a gente tem algumas pendências. pra mim, quando eu começo a falar do número irracional do jeito que ele aparece por aí, é um nó, eu acho que pensando nesse processo de medição, pode ser uma saída pra um material muito diferenciado, mas se você pergunta como fazer. . . ainda, eu preciso pensar muito.

E: mais alguma coisa que você gostaria de falar?

P2: não, de uma maneira geral o curso trouxe experiência . . . acho que é só isso.

E: então, muito obrigada.

P2: eu vou mandar uma pergunta. do ponto de vista da minha formação, eu acho que eu tenho uma formação que me possibilitou refletir matematicamente sobre várias coisas, ainda bem. eu achei que foi uma formação interessante, embora tivesse uma carência razoável de outras coisas, mas . . . eu queria fazer a

seguinte pergunta: se hoje você pegasse os professores, vamos supor que você tivesse sido convidada pra dar uma curso para professores da rede, e aí a minha pergunta é: será que essa abordagem daria conta? não tô falando de um material para os alunos.

E: dá conta do quê?

P2: de atender essa demanda profissional, entendeu . . . eu acho que vale a pena esse exercício e se for um curso para professores, futuros professores, se for um curso dessa natureza, é se, o cara consegue estabelecer uma relação entre a atividade profissional dele com a proposta, porque eu acho que isso é um avanço grande, nem falando das coisas que a gente conversou no começo, que é um material para o aluno. que tipo de conexões eu posso fazer com uma proposta dessa e com uma atividade profissional. porque eu acho que se conseguisse responder isso, daria conta, seria muito bem justificado, por exemplo um curso desse, na licenciatura em matemática, que eu acho que deveria ser muito interessante. não só simplesmente pra dar segurança, segurança eu acho que é uma coisa, interessante, importante e tal, mas do ponto de vista da operacionalização também, não se ele. . . não se trata de . . . uma transferência daquele material para a sala de aula, não, material para o professor, assim como vocês fizeram o material pra gente. e eu acho que vale a pena pensar. vamos ver se eu consigo ser claro, você tem um material, esse material você vai comentar, tudo bem? então vamos pensar em algumas direções, como ficaria esse material? em algumas direções. na verdade, aí a gente dá esse fechamento. primeira direção, pro cara ensina análise, é uma direção, é formação de professores também. aí eu vou perguntar: ensina analise pra quem? ensinar análise pra outro futuro professor, ou ensina analise para o matemático, que são duas necessidades absolutamente distintas mesmo que tenham intersecção. bom, então nessa dimensão do terceiro grau. a outra, continua o mesmo material? pra você dar um curso, pra já, pros atuais professores, já tão aí trabalhando. e a outra como fica o material para professores, ou, desculpa, material diretamente para o

aluno do professor, entendeu? o aluno do professor, o professor que já ta trabalhando e o futuro professor também de terceiro grau. a apresentação do material é que tem que ser pensada. ah! uma estrutura que tenha axiomas, teoremas tal, tal, tal, serve pra quê? uma estrutura . . . que . . . entendeu? sei lá, pode ser pensada diferente, será que serve para o professor? o professor que eu digo, que já tá trabalhando lá, uma estrutura que sirva, por exemplo, para o aluno. é só pensar qual é o foco, que foco é? eu consigo direcionar, mas, de uma maneira geral, eu achei que, eu acho que ouve no sentido de refletir, isso provoca muitas reflexões e eu acho que isso é legal, de refletir sobre a apresentação dos próprios cursos, inclusive o de analise. e vem um dado novo que é aí esse processo, que é um processo diferente, que tem bastante coisa pra fazer, mas eu achei que já colabora muito.

23 de junho de 2006

Entrevistado: P3

E: Como foi dito no início do semestre, esse curso seria realizado de um modo diferente de um curso de Análise que a gente conhece, desta forma eu gostaria de conversar com você a respeito do que foi feito, lembrando sempre a sua formação. Em primeiro, eu gostaria de conversar com você, a respeito do que você diria em relação às reflexões que suscitaram pra você no curso.

P3: Bem Regina, estar lembrando a minha formação em termos de graduação, foi assim uma análise mais formal, dos livros que hoje são colocados aí à disposição de alunos e professores. Eu confesso que fiquei assim, bastante surpreso, no sentido de satisfação com essa abordagem desenvolvida pela professora Rosa conosco, porque propiciou acima de tudo refletirmos mais sobre o que, mesmo um curso de análise, numa dimensão mais elementar para a compreensão de alunos até mesmo se possível no ensino médio.

E: Então, agora com o curso, você acredita que você sente um conforto pra falar no objeto matemático número?

P3: Ontém mesmo eu comentava com um colega sobre isso, refletindo sobre o curso, é, acho que me fez pensar um pouco mais a respeito desse ente . . . de uma forma . . . mais familiar. Eu acho que, ainda não posso me considerar muito ... familiar a ele, mas pelo menos eu vi por onde a gente pode tá entendendo, compreendendo melhor esse objeto.

E: Essa consciência pra você, em relação a esse objeto matemático. . .

P3: Eu diria que, o outro curso de análise que eu fiz na graduação está muito distante, muito distante. Eu quero dizer assim, distante, com esse curso que nós

fizemos agora, não só nas discussões dentro da sala de aula, mas nas discussões do grupo também, constitui, nos aproximou mais, a mim particularmente, dos números reais.

E: Essa distância que você fala da consciência do objeto matemático. . . , isso é em relação a sua formação anterior?

P3: É, eu atribuo mais a minha formação, porque é . . ., apesar de sempre eu. . . quis, eu sempre quis ter condição de dar um análise na graduação, mas eu nunca tive coragem, eu me sentia desconfortável quando falava de análise, a disciplina de análise, agora essa nova abordagem, eu usei a palavra familiar, eu insisto nela, uma coisa que parece mais próximo daquilo que eu entendo. . .

E: Mais voltado pra sua prática?

P3: Eu diria que . . . eu me sentiria mais confortável em falar sobre os números reais com essa abordagem pros meus alunos. Eu acho que não teria tanta dificuldade de explicar pros meus alunos os números reais com essa abordagem, via medição, do que fala daquela da análise que eu vou chamar de tradicional. Você me entende o que é tradicional? Essa que tem aí nos livros, tipo Elon, Djairo, Ávila, nessa linha. Eu penso que eu teria agora mais segurança de falar nos números reais diante dessa abordagem do que nessa modalidade que eu vou chamar de tradicional.

E: Com uma abordagem dessa forma você acredita ter mais subsídios pra tratar outros conceitos da análise, que não foram considerados no curso?

P3: Eu acredito sim, Regina, ainda sentimos, eu estou lembrando das discussões no grupo, há alguns hiatos ainda, que nós vimos aí no meio do desenvolvimento do conteúdo. Mas a minha visão hoje, a minha compreensão, talvez pela própria experiência, que como eu estudei análise eu era novinho ainda eu não tinha um

amadurecimento pra poder enxergar também, talvez seja por isso, mas eu me sinto mais confortável diante dessa abordagem sim.

E: Bom, o tratamento para a construção dos reais, foi feito todo via medição, o que você pensa a respeito de contextualização a respeito do trabalho que a gente fez?

P3: Bom, eu não vejo assim que seria tão fácil explicar pra aluno do ensino fundamental, eu acho que não seria . . . não teria coragem de enfrentar isso no ensino fundamental. Mas eu acredito que via medição é possível a gente, não aprofundando tanto quanto nós tivemos condição de aprofundar no curso aqui, mas a nível de ensino médio eu vejo possibilidades sim de com algumas adaptações, algumas transformações didáticas aí. . . eu acho aí, que se a gente fizer uma transposição didática é possível a gente tratar assim com essa abordagem, construção dos números reais no ensino médio, eu vejo sim. Eu vejo sim.

E: E pensando no ensino superior, na formação continuada, nesse sentido, contextualizar nesse sentido.

P3: Perfeito, o próprio texto, frente às correções que estão sendo encaminhadas, perfeitamente possível ser desenvolvido num curso de graduação, prontamente, prontamente, ainda mais com essa aproximação, tirando os nós, fazendo o que você chama de limpeza, eu acho que tranqüilamente.

E: Você sentiu alguma dificuldade assim em relação ao material?

P3: No principio sim, no começo do curso a gente sentiu muita dificuldade, mais a gente por causa do . . . ao material, no principio. Eu tô falando a gente por causa das discussões do grupo. Em principio a gente tava com dificuldade pra compreender a notação, não conhecíamos esse tipo de abordagem, é diferente em toda e qualquer notação, a gente procurava livro, pra vê que tipo de notação

que significado a gente podia produzir a partir dali e não encontrava, então nós tivemos que entrar pra dentro do material, eu acho que isso nós conseguimos, nós entramos pra dentro do material e do jeito que nós entramos pra dentro do material, eu acho que nós crescemos, eu digo nós o grupo inteiro, de uma maneira bastante homogênea.

E: Se você tivesse uma proposta pra adaptar esse tipo de idéia no ensino fundamental e médio você adaptaria?

P3: Com receio no ensino fundamental, mas no ensino médio eu teria muita satisfação assim . . .em tentar implementar, talvez não . . assim. . .

E: Lembrando que como a gente estaria trabalhando com o ensino fundamental , estaria no nível de cada fase.

P3: Eu vejo assim, que. . . o . . em função do . . . talvez, pensando em mim mesmo, o amadurecimento ajuda muito a compreender certas situações e, eu acho que um aluno do ensino fundamental ele se solta mais e, eu acho que essa abordagem via medição, eu falei agora pouco, se a gente não entra pra dentro do conteúdo, fica mais difícil, só olhar a gente não consegue compreender a profundidade, e aí, eu acho que o aluno do ensino médio ele tem mais experiência já e ele pode entrar nessa viagem com a gente, com mais facilidade. No ensino fundamental eu não teria receio de promover algumas adaptações de forma que ele compreendesse o que é um número real.

E: Você acha que o tipo de metodologia, dos seminários, de vocês colocarem a mão na massa, isso contribuiu também?

P3: Acho fundamental, achei fundamental, espetacular a metodologia empregada, eu fiquei encantado, no principio eu fiquei com receio. Mas acho que é natural, a

gente não conhecia todo mundo ainda, não se sentia a vontade com todos, mas no desenvolvimento do curso eu achei que foi brilhante.

E: Você queria comentar mais alguma coisa em relação a sua formação?

P3: Bom, eu poderia dizer mais o que? Eu fiz duas disciplinas nesse semestre, e uma delas, análise, foi a que me deu mais trabalho durante o semestre, não há dúvida não, exigiu muito, mas talvez em função das minhas dificuldades, a distância de onde eu moro, de ter que vir toda semana, mas também a que despertou mais atenção na atividade de ensinar, que a gente não pode ensinar pensando naquilo que você quer ensinar, tem que ensinar aquilo que a gente quer ensinar mas compreendendo também que aquele que tá do outro lado, que é o aluno, é capaz também de . . . de entender.

E: Mais alguma coisa?

P3: Bom trabalho.

23 DE JUNHO DE 2005

Entrevistado: P4

E: como foi dito no início do semestre, esse curso seria realizado, desenvolvido de um modo diferente do que é um curso de análise que a gente conhece. dessa forma, eu queria conversar com você, a respeito, lembrando sempre a sua formação, do curso em si. O que você diria em relação às reflexões que suscitaram do curso?

P4: Eu achei a proposta do curso bem interessante. Quando eu me matriculei no curso de análise, eu . . . obviamente estava esperando outra coisa, como de costume, e eu fui surpreendida . . . de forma positiva. Eu gostei do material, acho que tem alguns problemas, e . . . Com relação ao material deixa só eu fazer algumas . . . é que na minha opinião, a minha maior dificuldade com esse material foi com relação a notação de segmento, e de medida de segmento, porque, eu inclusive disse isso em sala de aula, que, pra mim, segmento é AB com traço em cima e a medida do segmento é o AB. Então sempre que eu me deparava com o AB eu tinha idéia que era a medida do segmento e não o segmento. Com relação a notação de AB está pra CD assim como p está para q, pra mim já era uma notação conhecida porque eu fiz um curso de geometria que o livro texto era os elementos de Euclides, então aquela notação pra mim era clara. Bom, mas continuando com relação às reflexões: eu achei uma abordagem interessante. Com relação às dificuldades que eu tive em análise, na minha graduação eu acho que algumas coisas continuam, acho que a última aula foi corrida, e muitas dúvidas que eu tinha naquela folhinha não foram esclarecidas. Mas eu acho que, valeu apostar no tempo, nas reflexões sobre o que é número, medida e fazer a gente parar pra pensar que coisas que a gente acha muito normal fazer não são tão triviais assim, que fração. . . trabalhar com irracionais . . . Eu tinha, é, já tinha pensado um pouco sobre os irracionais, o que seriam os irracionais, mas também

eu não tinha conseguido avançar muito, eu acho que nesse sentido o curso foi muito interessante.

E: Você sente mais conforto em falar desse objeto matemático número?
P4: Um pouco, não muito. tanto que eu peguei a folinha novamente e, eu não sei se você sabe, durante as aulas, a todo momento, eu perguntava muito ansiosa, “o que é número?”. e, eu acho que aquele dia que o ... Vanderlei foi na aula, ele ajudou um pouco, na questão. eu achei essa aula bem interessante, um pouco cansativa, porque a gente não estava acostumado mais com um pessoa falando quatro horas, mas . . . ajudou um pouco, mas ao ter que escrever o que é número eu vi que não é tão claro assim, mas clareou, não que seja uma coisa assim . . . se alguém me pergunta uma coisa: o que é número? senta aqui que eu vô te explicar, acho que uma coisa assim...

E: Você tem consciência pelo menos do que é o objeto? do que você está tratando...
P4: SIM.
E: Pensando agora nos outros conceitos da análise que não foram tratados, você acha que esse tipo de abordagem dá segurança, vai contribui pra você tratar de algumas questões, avançar um pouco mais nesse curso que a gente tem por aí.

P4: Não tinha pensado. acho que é uma proposta interessante, eu não to falando isso porque você ta gravando porque você vai usar na sua tese, não, eu acho uma proposta interessante. eu tinha um professor na graduação que ele sempre falava, ele é meio odiado no imecc, porque ele diz grandes verdades, sabe . . . e ele sempre falava, pra mim a passagem de um segmento pra medida dele não foi é uma coisa clara. foi um dos primeiros grandes sustos que eu tive na minha vida, na graduação. porque era uma coisa muito clara, um segmento ab é igual a 2, é ridículo isso, a gente faz, é uma coisa muito natural e fica muito natural e essa passagem não é simples e não é clara mas que ele também não sabia fazer e foi um dos grandes sustos e quando eu vi isso, eu me lembrei muito dele. eu inclusive

. . . eu penso que um dia quando o material tiver formulado, mandar uma cópia pra ele, porque ele é uma pessoa que sempre me ajudou muito. então, por isso que eu acho que essa proposta é interessante, só que eu não sei e não parei pra pensar, pra refletir, e não parei pra pensar o quanto isso me ajuda naquela análise, na integral, não sei, não sei te dizer.

E: em relação a contextualização, no ensino superior, você lembra que a proposta, o material, a preocupação dele é a formação do aluno.

P4: Esse curso, ele é voltado a pós-graduação?

E: De certa forma a gente não pode dizer que não, porque foi ali que ele foi aplicado. não estou levando em conta que você tinha ali conceitos anteriores.

E: Em relação a contextualização... você tem algo a dizer?

P4: Eu tenho a dizer o que eu disse até agora, que eu acho uma proposta muito interessante. só que eu acho que nossa aula final, tem que ser deixado mais tempo pra ela. porque gera uma ansiedade, eu tinha conversado isso com a rosa, que a gente estuda em casa, muitas vezes a gente acaba não entendendo, às vezes de forma parcial, e durante as aulas quando os grupos vão explicando, ah! eu entendi, e você quer subir na mesa. entendi. o curso gera muita ansiedade e eu achei que na ultima aula, não supriu, é claro. Eu não tô falando que a última aula não serviu, não é isso. é que eu acho que deveria ter sido destinado mais tempo porque, o fechamento, talvez. . . é . . . o supremo é uma coisa muito importante, e talvez passou um pouco corrido, talvez não, eu acho que passou um pouco corrido.

E: Você já comentou alguma coisa em relação à dificuldade em relação ao material, você queria complementar com algo mais?

P4: O negócio é a dificuldade com a notação e a classe mostrou bem . . . assim . . . umas possíveis falhas no material, a rosa mesmo falou, ah! aqui deveria ter um exercício, deveria ter outro, eu acho que tudo isso foi sanado. a minha proposta é só com relação a notação, talvez pensar melhor se vai ficar mesmo essa notação, ou tentar de alguma forma diferenciar segmento da medida dele na notação, porque isso tá muito claro. é, eu acho que durante o curso isso fica muito claro, segmento é segmento, eu comparo segmento com segmento, medida de segmento eu comparo com medida de segmento. eu não posso . . . aquela mistura que a gente faz, eu não posso fazer isso, então talvez a notação ela tenha que diferenciar, não sei talvez m(ab), é só uma sugestão.

E: Você acredita que essa abordagem, a construção dos reais, ela pode de alguma forma ser adaptada para o ensino fundamental e médio?

P4: Eu acho que pode, só que se for sentar, é uma coisa que ver do principio, o cara no colegial, ele já tem toda uma carga e daí você chega e . . . embola tudo e daí você chega e . . . não dá.

E: com a realização de um outro material com a mesma idéia, levando em conta o nível . . .

P4: eu acho que é possível, acho que realmente é possível sim, só que, é, tem que ser desde o principio mesmo, e que eles não tem maturidade, agora eu vou enxergar com outros olhos, eu acho que, daí fica difícil, mas se for uma proposta nova, implantada desde o principio, então não vai ser o segmento ou a medida do segmento, eles não vão trata isso da mesma forma, se você já começa separando, mostrando: essas são as regras, eu acho que dá perfeitamente. agora muda as regras no meio do jogo é complicado, principalmente, se é complicado pra gente que tá na pós-graduação, foi perceptível, “olha agora nós estamos mudando as regras”, eu acho que você entendeu o que eu quis dizer com regras,

se é complicado pra pessoas que tenham uma maturidade matemática, imagine pros nosso alunos, agora eu acho bem interessante, inclusive.

E: se você tivesse essa proposta pronta, você implementaria?

P4: teria que lê, teria que vê, mas acho que sim.

E: então olhando agora por cima, em relação a contribuição, em relação a sua formação.

P4: nossa, eu acho que veio muito a contribuir, que... é. . . tem uma frase que eu usei inclusive na minha iniciação, “às vezes é mais importante ao invés de você trilhar novos caminhos, você olhar com outros olhos os caminhos que você tem”. é mais ou menos isso. eu acho que foi isso o que o curso fez. muitas vezes, mais importante você olhar pra o que você tem e com outro olhar de forma a conhecer bem do que você sai fazendo conta, demonstrando teorema, de forma sem pensar no que você tá fazendo, eu achei muito interessante, muito interessante. acho que contribuiu muito mais do que se a gente pegasse os grandes livros de analise e teorema 1, vamos demonstrar . . . exercício, igual a gente fez até agora. acho que a pós-graduação . . . eu percebo isso, ela tem me mostrado novas formas de ver as coisas. então, mesmo nas aulas, não o professor mais o professor que fala, a gente fala. eu até tava falando que na pós-graduação a gente vira gente, se tem o direito de ter opinião. na graduação você não tem o direito de ter opinião. e, então você começa a olhar os olhos de uma maneira diferente, tudo é diferente, metodologia de aula é diferente, é, você vira gente, você tem direito a ter opinião e acho que esse curso ele tá bem nessa proposta, assim, de tenta olhar as coisas de um olhar diferente e acho que isso é muito útil.

E: você tem algo mais a falar?

P4: não, acho que é só isso.

E: Obrigada.

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo