

CÍCERO CARLOS RAMOS DE BRITO

**NOVOS MODELOS DE CRESCIMENTO RESULTANTES DA
COMBINAÇÃO E VARIAÇÕES DOS MODELOS DE CHAPMAN-
RICHARDS E SILVA-BAILEY, APLICADOS EM LEUCENA
[*Leucaena leucocephala* (Lam) de Wit] E TUBARÃO-
JUNTEIRO (*Carcharhinus porosus*).**

RECIFE

Pernambuco - Brasil

Outubro - 2005

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

CÍCERO CARLOS RAMOS DE BRITO

**NOVOS MODELOS DE CRESCIMENTO RESULTANTES DA
COMBINAÇÃO E VARIAÇÕES DOS MODELOS DE CHAPMAN-
RICHARDS E SILVA-BAILEY, APLICADOS EM LEUCENA
[*Leucaena leucocephala* (Lam) de Wit] E TUBARÃO-
JUNTEIRO (*Carcharhinus porosus*).**

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural de Pernambuco, para obtenção do título de Mestre em Biometria, Área de Concentração: Modelagem e planejamento de experimento

Orientador:

Prof. PhD. JOSÉ ANTÔNIO ALEIXO DA SILVA

Co-orientador:

Prof. Dr. RINALDO LUIZ CARACIOLO FERREIRA

Co-orientador:

Prof. Dr. EUFRÁZIO DE SOUZA SANTOS

RECIFE

Pernambuco - Brasil

Outubro – 2005

Ficha catalográfica
Setor de Processos Técnicos da Biblioteca Central – UFRPE

B862n Brito, Cícero Carlos Ramos de
Novos modelos de crescimento resultantes da combinação e das variações dos modelos de Chapman – Richards e Silva - Bailley aplicados em leucena [*Leucaena leucocephala* (Lam) de Wit] e tubarão-junteiro (*Carcharhinus porosus*) / Cícero Carlos Ramos de Brito. -- 2005.
141 f. : il.

Orientador: José Antônio Aleixo da Silva.
Dissertação (Mestrado em Biometria) – Universidade Federal Rural de Pernambuco. Departamento de Informática e Estatística.
Inclui bibliografia, apêndice e anexo.

CDD 574.018 2

1. Recurso florestal
2. Recurso pesqueiro
3. Modelos de crescimento
4. Chapman – Richards
5. Silva – Bailley
6. Leucena
7. Tubarão-junteiro
8. Biometria
 - I. Silva, José Antônio Aleixo da
 - II. Título

CÍCERO CARLOS RAMOS DE BRITO

**NOVOS MODELOS DE CRESCIMENTO RESULTANTES DA
COMBINAÇÃO E VARIAÇÕES DOS MODELOS DE CHAPMAN-
RICHARDS E SILVA-BAILEY, APLICADOS EM LEUCENA
[*Leucaena leucocephala* (Lam) de Wit] E TUBARÃO-
JUNTEIRO (*Carcharhinus porosus*).**

APROVADA em 11/10/2005.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Roberto de Andrade Lima – CRCN/CNEN

Prof. Dr. Rinaldo Luiz Caraciolo Ferreira - DCFL - UFRPE

Prof. Dr. Teodoro Vaske Júnior - DEPAq / UFRPE

Orientador:

Prof. PhD. José Antônio Aleixo da Silva - DCFL - UFRPE

RECIFE

2005

As duas mulheres da minha vida,
minha mãe D. Severina Ramos
de Brito “in memorian” e, minha
esposa Bárbara Cristina Silva de
Brito.

Dedico.

AGRADECIMENTOS

Ao meu bom Deus, por estar sempre presente nos momentos de alegrias e dificuldades.

À minha família, pois, sem ela não teria conseguido vencer mais esta batalha.

À Universidade Federal Rural de Pernambuco, em especial aos Departamentos de Ciência Florestal e Estatística e Informática, por terem dado todas as condições necessárias para a realização do presente trabalho.

Ao Professor PhD. José Antônio Aleixo da Silva, pela dedicação, ensinamentos, confiança, amizade e paciência sempre concedida.

Aos Professores Dr. Rinaldo Luiz Caraciolo Ferreira e Dr. Eufrásio de Souza Santos, por toda ajuda possível, pela grande amizade concedida durante todo o curso.

À Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Biometria, por ter dado todas as condições necessárias para o desenvolvimento do curso.

A todos os Professores do Programa de Pós-Graduação em Biometria que, diretamente ou indiretamente, contribuíram para o meu sucesso.

À Dra. Rosangela Lessa do Departamento de Pesca da UFRPE por gentilmente ceder os dados sobre tubarões.

À Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), Estação Experimental de Caruaru na pessoa do Engenheiro Agrônomo Msc Ivan Ferraz pela condução do experimento da leucena.

Aos amigos Emanuell Florêncio Passos Martins e João Silva Rocha, pelo grande apoio e incentivo a este trabalho.

BRITO, CÍCERO CARLOS RAMOS DE, Novos modelos de crescimento resultantes da combinação e variações dos modelos de Chapman-Richards e Silva-Bailey, aplicados em Leucena [*Leucena leucocephala* (Lam.) de Wit] e Tubarão-junteiro (*Carcharhinus porosus*), 2005. Orientador: Prof. PhD. José Antônio Aleixo da Silva. Co-Orientadores: Prof. Dr. Rinaldo Luiz Caraciolo Ferreira e Prof. Dr. Eufrázio de Souza Santos.

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi desenvolver novos modelos de crescimento aplicados em Leucena [*Leucaena leucocephala* (Lam.) de Wit], e Tubarão-junteiro (*Carcharhinus porosus*), tendo como base as hipóteses biológicas propostas por Chapman-Richards e Silva-Bailey. O experimento de leucena foi conduzido na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária – IPA, no município de Caruaru – PE. Foram utilizadas 544 árvores de leucena em um experimento com medidas repetidas em que foram realizadas 20 mensurações no período de 1990 a 2003. Foram comparados novos modelos matemáticos de crescimento, com os de Chapman-Richards e Silva-Bailey, bem como outros utilizados em estudos florestais e pesqueiros. As mensurações para os tubarões capturados na costa marinha do estado do Maranhão foram realizadas no período de 1984 até 1989. Para a seleção das equações resultantes, utilizaram-se o Índice de Ajuste (IA) e a distribuição gráfica dos resíduos. Os resultados indicam que, qualquer um dos modelos propostos pode ser aplicado para estimar o crescimento da leucena e do tubarão-junteiro.

BRITO, CÍCERO CARLOS RAMOS DE, New growth models, resulting of the combination and variations of Chapman-Richards and Silva-Bailey's models applied to Leucena [*Leucaena leucocephala* (Lam.) de Wit] and Tubarão-junteiro (*Carcharhinus porosus*). 2005. Adviser: Prof. PhD. José Antônio Aleixo da Silva. Co-Advisers: Prof. Dr. Rinaldo Luiz Caraciolo Ferreira and Prof. Dr. Eufrázio de Souza Santos.

ABSTRACT

The objective of this work was to develop new growth models for the leucena [*Leucaena leucocephala* (Lam.) of Wit], and small shark tail (*Carcharhinus porosus*) based on the biological hypotheses proposed by Chapman-Richards and Silva-Bailey. The experiment of the leucena was carried out in the Experimental Station of the Agricultural and Liverstock Research Company of Pernambuco - IPA, in the municipal district of Caruaru - PE. It was used 544 trees of *Leucaena leucocephala* (Lam.) of Wit, with 20 measures in the period of 1990 up to 2003. The measures for the small sharks tail captured in the sea coast of the state of Maranhão were taken in the period of 1984 up to 1989. It was compared new growth models resulting from the combination and variation of the Chapman-Richards and Silva-Bailey models, as well other models used in forest and fisheries resources. For the selection of the final equations, the fit of index and the graphic distribution of the residues were used. The results of the new models were as good as the above mentioned, being therefore, any one of them applied to estimate the growth of the leucena and small shark tail.

LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
1	Fluxograma das etapas da elaboração e seleção de modelos.....	34
2	Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Chapman-Richards para o tratamento 1 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE	67
3	Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Silva-Bailey para o tratamento 1 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE	67
4	Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Bertalanffy para o tratamento 1 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE	68
5	Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Brody para o tratamento 1 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE	68
6	Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Mitscherlich para o tratamento 1 leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE	69
7	Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Weibull para o tratamento 1 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE	69

8	Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Clutter e Jones para o tratamento 1 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE	70
9	Curvas de crescimento real e estimada pelo Modelo Proposto 1 para o tratamento 1 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE	70
10	Curvas de crescimento real e estimada pelo Modelo Proposto 2 para o tratamento 1 para a leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE	71
11	Curvas de crescimento real e estimada pelo Modelo Proposto 3 para o tratamento 1 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE	71
12	Curvas de crescimento real e estimada pelo Modelo Proposto 4 para o tratamento 1 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE	72
13	Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Chapman-Richadrs para o tratamento 2 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE	72
14	Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Silva-Bailey para o tratamento 2 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE	73
15	Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Bertalanffy para o tratamento 2 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE	73

- 16 Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Brody para o tratamento 2 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE 74
- 17 Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Mitscherlich para o tratamento 2 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE 74
- 18 Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Weibull para o tratamento 2 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE 75
- 19 Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Clutter e Jones para o tratamento 2 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE 75
- 20 Curvas de crescimento real e estimada pelo Modelo Proposto 1 para o tratamento 2 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE 76
- 21 Curvas de crescimento real e estimada pelo Modelo Proposto 2 no tratamento 2 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE 76
- 22 Curvas de crescimento real e estimada pelo Modelo Proposto 3 para o tratamento 2 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE 77
- 23 Curvas de crescimento real e estimada pelo Modelo Proposto 4 para o tratamento 2 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE 77

24	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Chapman-Richards para a média do tratamento 1	78
25	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Silva-Bailey para a média do tratamento 1	78
26	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Bertalanffy para a média do tratamento 1	79
27	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Brody para a média do tratamento 1	79
28	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Mitscherlich para a média do tratamento 1	80
29	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Weibull para a média do tratamento 1	80
30	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Clutter e Jones para a média do tratamento 1	81
31	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o Modelo Proposto 1 para a média do tratamento 1	81

32	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o Modelo Proposto 2 para a média do tratamento 1	82
33	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o Modelo Proposto 3 para a média do tratamento 1	82
34	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o Modelo Proposto 4 para a média do tratamento 1	83
35	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Chapman-Richards para a média do tratamento 2	83
36	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Silva-Bailey para a média do tratamento 2	84
37	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Bertalanffy para a média do tratamento 2	84
38	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Brody para a média do tratamento 2	85
39	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Mitscherlich para a média do tratamento 2	85

40	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Weibull para a média do tratamento 2	86
41	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Clutter e Jones para a média do tratamento 2	86
42	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o Modelo Proposto 1 para a média do tratamento 2	87
43	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o Modelo Proposto 2 para a média do tratamento 2.....	87
44	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o Modelo Proposto 3 para a média do tratamento 2	88
45	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o Modelo Proposto 4 para a média do tratamento 2	88
46	Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Chapman-Richars para tubarão-junteiro capturados na costa marinha dos estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989.	89
47	Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Silva-Bailey para tubarão-junteiro capturados na costa marinha dos estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989.	89

48	Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Bertalanffy para tubarão-junteiro capturados na costa marinha dos estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989.	90
49	Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Brody para tubarão-junteiro capturados na costa marinha dos estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989.	90
50	Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Mitscherlich para tubarão-junteiro capturados na costa marinha dos estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989.	91
50	Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Weibull para tubarão-junteiro capturados na costa marinha dos estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989.	91
52	Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Clutter Jones para tubarão-junteiro capturados na costa marinha dos estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989.	92
53	Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo proposto 1 para tubarão-junteiro capturados na costa marinha dos estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989.	92
54	Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo proposto 2 para tubarão-junteiro capturados na costa marinha dos estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989.	93
55	Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo proposto 3 para tubarão-junteiro capturados na costa marinha dos estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989.	93

56	Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo proposto 4 para tubarão-junteiro capturados na costa marinha do estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989.....	94
57	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação ao comprimento, para a estimativa do crescimento de tubarão-junteiro, obtidas com o modelo de Chapman-Richards.....	94
58	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação ao comprimento, para a estimativa do crescimento de tubarão-junteiro, obtidas com o modelo de Silva-Bailey.....	95
59	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação ao comprimento, para a estimativa do crescimento de tubarão-junteiro, obtidas com o modelo de Bertalanffy.....	95
60	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação ao comprimento, para a estimativa do crescimento de tubarão-junteiro, obtidas com o modelo de Brody.....	96
61	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação ao comprimento, para a estimativa do crescimento de tubarão-junteiro, obtidas com o modelo de Mitscherlich.....	96
62	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação ao comprimento, para a estimativa do crescimento de tubarão-junteiro, obtidas com o modelo de Weibull.....	97
63	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação ao comprimento, para a estimativa do crescimento de tubarão-junteiro, obtidas com o modelo de Clutter e Jones.....	97

64	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação ao comprimento, para a estimativa do crescimento de tubarão-junteiro, obtidas com o modelo proposto 1.....	98
65	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação ao comprimento, para a estimativa do crescimento de tubarão-junteiro, obtidas com o modelo proposto 2.....	98
67	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação ao comprimento, para a estimativa do crescimento de tubarão-junteiro, obtidas com o modelo proposto 3.....	99
68	Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação ao comprimento, para a estimativa do crescimento de tubarão-junteiro, obtidas com o modelo proposto 4.....	99
69	Foto 01 – leucenas no viveiro aos 2 meses	126
70	Foto 02 – Plantio definitivo de leucena aos 4 meses	126
71	Foto 03 – Plantio definitivo de leucena aos 4 meses	126
72	Foto 04 – Fustes de leucenas empilhados	126
73	Foto 05 – Tubarão-junteiro	127
74	Foto 06 – Tubarão-junteiro	127

LISTA DE TABELAS

Tabela		Página
1	Discriminação dos fatores e níveis testados na avaliação do crescimento em altura de <i>Leucaena leucocephala</i>	52
2	Datas das Medições.....	53
3	Equações diferenciais com sua respectiva soluções.....	61
4	Modelos testados e os seus respectivos parâmetros estimados, através da modelagem de crescimento de leucena, no tratamento 1, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE e seus Índices de Ajuste.....	63
5	Modelos testados e os seus respectivos parâmetros estimados, através da modelagem de crescimento de leucena, no tratamento 2, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE e seus Índices de Ajuste.....	64
6	Modelos testados e os seus respectivos parâmetros estimados, através da modelagem de crescimento de tubarão-junteiro capturados na costa marinha do estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989 e seus Índices de Ajuste.....	65
7	Estimativas das alturas de leucena, calculadas pelos modelos no tratamento 1	119
8	Estimativas das alturas de leucena, calculadas pelos modelos no tratamento 2	120
9	Cálculo dos resíduos das estimativas das alturas de leucena calculados pelos modelos no tratamento 1.....	121
10	Cálculo dos resíduos das estimativas das alturas de leucena calculados pelos modelos no tratamento 2.....	122

11	Estimativas dos comprimentos dos tubarões calculados pelos modelos.....	123
12	Cálculo dos resíduos das estimativas dos comprimentos dos tubarões calculados pelos modelos.....	124

LISTA DE APÊNDICE

	Página
Apêndice	110
Apêndice A (Dedução dos modelos matemáticos propostos).....	111
Apêndice B (Tabelas 7, 8, 9, 10, 11 e 12)	119

LISTA DE ANEXOS

		Página
1	Anexo	125
2	Anexo A (fotos de leucena e tubarão)	126
3	Anexo B (Método Simplex)	128
4	Anexo C (Dedução dos modelos de crescimento)	133

SUMÁRIO

	Página
1 INTRODUÇÃO	22
2 REVISÃO DE LITERATURA	25
2.1 Leucena [<i>Leucaena leucocephala</i> (Lam.) de Wit.].....	25
2.1.1 A importância da leucena para o semi-árido	26
2.2 Tubarão-junteiro (<i>Carcharinus porosus</i>).....	26
2.3 Modelagem: conceitos básicos.....	27
2.4 Modelos de crescimento	38
2.4.1 Modelo de Mitscherlich.....	39
2.4.2 Modelo de Shumacher.....	40
2.4.3 Modelo de Bertalanffy	41
2.4.4 Modelo de Chapman-Richards.....	44
2.4.5 Modelo de Silva-Bailey.....	46
2.4.6 Modelo de Brody.....	48
2.5 Coeficiente de determinação e Índice de Ajuste	48
2.6 Gráfico da distribuição residual	49
2.7 Gráfico da curva de crescimento	49
3 MATERIAL E MÉTODOS	51
3.1 Leucena.....	51
3.2 Tubarão-junteiro	54
3.2.1 Metodologia para determinação da idade e do crescimento do tubarão-junteiro	54
3.3 Modelos utilizados	55
3.4 Dedução dos modelos matemáticos propostos.....	57
3.4.1 1º modelo proposto.....	57
3.4.2 2º modelo proposto.....	58
3.4.3 3º modelo proposto.....	58
3.4.4 4º modelo proposto.....	59

4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	63
4.1	Estimativas dos parâmetros das equações não lineares.....	63
4.2	Análise das curvas de crescimento e da distribuição gráfica residual dos modelos testados.....	66
4.3	Análise das estimativas e resíduos das estimativas para alturas e comprimentos nos modelos testados	100
5	CONCLUSÕES	101
	REFERÊNCIAS	102
	APÊNDICE	110
	Apêndice A.....	111
	Apêndice B.....	119
	ANEXOS	125
	Anexo A.....	126
	Anexo B.....	128
	Anexo C.....	133

1 INTRODUÇÃO

Nos planejamentos de manejo de recursos florestais e pesqueiros uma variável é de extrema importância: o crescimento. Sua modelagem é fundamental na prognose da produtividade, qualidade do local e dinâmica de populações.

Com o avanço dos procedimentos computacionais, técnicas matemáticas mais sofisticadas são utilizadas no desenvolvimento de novos modelos matemáticos aplicados a estudos de crescimento, uma vez que, geralmente, as hipóteses básicas utilizadas geram modelos que alterando os valores de alguns coeficientes, estimativa do parâmetro, de positivo para negativo, as equações resultantes podem ser empregadas em estudos acréscimos ou decréscimos: produção, crescimento e sobrevivência/mortalidade.

Segundo Scolforo (1994), o conhecimento do crescimento e da produção presente e futura de árvores em povoamentos florestais é elemento fundamental no manejo florestal sustentável, sendo necessário possuir como uma das fontes de informações mais importante a existência de relações quantitativas e modelos matemáticos que sejam consistentes e, numericamente, compatíveis para a predição do desenvolvimento do povoamento em qualquer idade.

As técnicas para prognosticar a dinâmica de um povoamento florestal são conhecidas como modelos de crescimento e produção (AVERY e BURKHART, 1994). A predição da produção futura e da mortalidade é de fundamental importância para o planejamento das atividades florestais, constituindo um dos principais elementos do manejo florestal (DAVIS e JOHNSON, 1987).

Tais modelos são sínteses de observações e/ou fenômenos biológicos, aplicados nas condições sob as quais foram coletados os dados. Na Engenharia Florestal, os modelos são imprescindíveis na prognose dos futuros recursos florestais, na escolha de metodologias silviculturais e apoio à tomada de decisões no manejo e na política florestal (SPATHELF e NUTTO, 2000).

De igual modo, sente-se a necessidade de estender essas predições para recursos pesqueiros. O tubarão-junteiro (*Carcharhinus porosus*) que é uma espécie ameaçada em extinção no Brasil, nos estados de Alagoas, Amapá, Bahia, Ceará, Espírito Santo, Maranhão, Paraíba, Pernambuco, Piauí, Paraná, Rio de Janeiro, Rio Grande do Norte, Rio Grande do Sul, Sergipe, Santa Catarina e São Paulo (MMA,

Instrução Normativa nº 5, de 21/05/04), destaca-se como importante atividade secundária de pesca por ser uma espécie inofensiva. Segundo Lessa e Santana (1998) o tubarão-junteiro representa 43% de todos os elasmobrânquios capturados no estado do Maranhão, correspondendo a aproximadamente, 400 ton. ano⁻¹. Portanto, modelar o crescimento dessa espécie de tubarão se constitui em uma importante etapa no setor econômico, bem como na dinâmica populacional do tubarão-junteiro.

Tem crescido em todo o mundo e também no Brasil a captura de elasmobrânquios, sendo o Brasil responsável por 4% da captura mundial; seus subprodutos têm tido crescente valorização onde eles são consumidos tanto no mercado interno quanto no exterior.

No ambiente natural, as ameaças aos elasmobrânquios são a atividade pesqueira, destruição de seus habitats, características próprias do ciclo de vida, crescimento lento, maturação sexual tardia, entre outros fatores que têm sido limitantes para a reação das espécies à mortalidades excedentes.

É um problema em escala mundial e também no Brasil, que o manejo dos estoques de elasmobrânquios é complicado pela escassez de informações básicas sobre a dinâmica de suas populações. Por terem baixo valor econômico as raias e tubarões têm tido baixa prioridade no que diz respeito à pesquisa e conservação; entretanto, a demanda por subprodutos, como barbatanas, é alta, o que tem estimulado o aumento da exploração (SBEEL 2005).

Vale salientar que segundo Kotas et al., (1995) e Vooren, (1997) citados pela SBEEL, 2005 “De um modo geral, a pesquisa no Brasil não vem acompanhando o aumento de intensidade de pescarias, devido às características biológicas e à inexistência de política de conservação para os elasmobrânquios, que têm alcançado o ponto de colapso sem que medidas de manejo tenham sido tomadas. Vários exemplos desse fato têm sido registrados no país.”

Segundo a SBEEL (2005) se faz necessário um urgente estabelecimento de bases de manejo para pescarias, em decorrência da sobreexploração de peixes ósseos, cujas biomassas vêm declinando ao longo da costa brasileira nos últimos anos, antes que sejam totalmente direcionadas para a exploração dos elasmobrânquios, pois, o esgotamento de recursos tradicionais, faz com que o manejo dos estoques de elasmobrânquios se torne prioritário.

Percebe-se que a prática de pesca, como exemplo, o emprego de redes de arrasto com portas, em profundidades baixas tem sido tolerado ou tem escapado do sistema de fiscalização existente, o que causa a captura de espécies jovens que têm essas áreas como berçários e zona de parto, o que contribui para o colapso da espécie.

É também perceptível que a postura adotada pelos órgãos governamentais resguarda os interesses da exploração, evitando questionamentos sobre conservação. Essa postura contrasta com as observadas nos demais países onde esse tipo de pescaria é objeto de pesquisa, o que pode ser comprovado pelo crescente número de trabalhos científicos publicados (e.g. Buencuerpo. et al., 1998; Goodyear, 1999 citados por SBEEL, 2005) e por várias medidas de manejo já adotadas para essas pescarias, naqueles países.

Dada a dinâmica com que os modelos matemáticos vêm sendo aplicados nas pesquisas biológicas, gerando novos modelos para situações gerais e específicas, novos estudos nas áreas de ciências florestais e pesqueiros são, altamente, justificáveis.

O objetivo deste trabalho consiste em gerar novos modelos de crescimento através da combinação ou adaptações dos modelos de Chapman-Richards e Silva-Bailey, testando-os e comparando-os entre si e com os modelos comumente usados na pesquisa florestal e pesqueira.

2. REVISÃO DE LITERATURA

2.1 Leucena [*Leucaena leucocephala* (Lam.) de Wit.]

A Leucena, *Leucaena leucocephala* (Lam.) de Wit. tem despertado grande interesse científico devido a sua grande versatilidade dentre as leguminosas de clima tropical. Essa espécie é a mais comum dentre as espécies do gênero *Leucaena*, sendo conhecida também como ipil-ipil e ipil-ipil gigante nas Filipinas, koa haole no Hawai, auxin, yaje e guaje em parte da América Latina, lisina delen no Haiti e aroma branco ou esponjeira em Cuba. (VIEIRA, 1992).

Salermo e Seiffert (1986) apresentaram o gênero *Leucaena* como pertencente à família *Leguminosae*, subfamília *Mimosoidae* e tribo *Euminosae*.

Brewbaker (1985) afirma que o gênero *Leucaena* possui cerca de 51 espécies, das quais somente 13 são as mais estudadas. Todas as espécies têm potencial forrageiro, sendo *Leucaena leucocephala* (Lam.) de Wit. a mais explorada.

A leucena se desenvolve bem em regiões tropicais em diferentes tipos de ambientes com altitudes inferiores a 500 m, com temperaturas elevadas e pluviosidade anual entre 500 e 1700 mm (MENDES, 1986). Quanto às condições edafoclimáticas para o seu cultivo, pode-se comentar que os solos mais apropriados são aqueles bem drenados, profundos, de média a alta fertilidade; mas tolera grandes variações, desde solos pedregosos até bastante argilosos. Pode sobreviver em locais com pluviosidade mínima de até 230 mm. Desenvolve-se melhor em ambientes com temperaturas variando de 22° a 30° C (CARVALHO et al., 2001).

Nas condições edafoclimáticas do Nordeste, ela apresenta boa produção de folhagem e frutos durante todo o ano e produz abundante massa verde em solos ricos e neutros, embora seja capaz de vegetar relativamente bem em solos pobres e salinos (MENDES, 1986).

2.1.1 A importância da leucena para o semi-árido

A leucena é considerada por muitos produtores da região semi-árida como sendo a “rainha” das leguminosas. Essa consideração se deve ao fato da leucena, além de apresentar boa produtividade, que pode variar, dependendo do ano, de dois até oito toneladas de matéria seca comestível e de até 750 Kg de sementes/ha/ano, possui também excelente qualidade nutricional, apresentando uma boa composição química e alta aceitabilidade pelos animais (CARVALHO et al., 2001).

2.2 Tubarão-junteiro (*Carcharhinus porosus*)

O tubarão em estudo é da família *Carcharhinidae*, ordem *Carcharhiformes*, sub-classe *Elasmobranchii* do gênero *Carcharhinus* e espécie *Carcharhinus porosus*, sendo conhecido também como tubarão-junteiro, sendo encontrado no Atlântico ocidental do Golfo do México ao sul do Brasil (excluindo as ilhas caribenhas). No Pacífico oriental essa espécie se distribui do Golfo da Califórnia ao Peru. (FISHBASE, 2005)

Esse tubarão é encontrado nas encostas continentais, preferencialmente, em cima de fundos barrentos, e especialmente em estuários. Alimenta-se de pequenos peixes incluindo agulhas, jovens tubarões martelos e camarões (LESSA e SANTANA, 2000).

É vivíparo, com 2 a 7 embriões. O tamanho de nascimento varia entre 31 e 40 cm e o tamanho máximo não excede os 150cm (Compagno citado por LESSA e SANTANA, 1998). É a única espécie do gênero com a segunda nadadeira dorsal atrás da nadadeira anal e com focinho relativamente longo e afilado, origem da primeira nadadeira dorsal sobre a margem interna da nadadeira peitoral, coloração cinza no dorso e branca no ventre e pontas das nadadeiras um pouco mais escurecidas do que o restante do corpo (LESSA e SANTANA, 2000).

De acordo com Lessa et al (1999), citado em SBEEL 2005, essa espécie apresenta taxa de crescimento de comprimentos médios de 7.0 cm ano⁻¹ para os quatro anos e 4,0 cm ano⁻¹ após a maturidade.

2.3 Modelagem: conceitos básicos

Um modelo é uma formulação que simula um fenômeno do mundo real, de forma a ser possível fazer previsões, e pode ser utilizado nos mais diversos campos. Em suma, não se pretende que um modelo, independentemente da área em estudo, seja uma cópia exata do mundo real, mas sim uma simplificação que revele os processos chave do fenômeno em causa, de forma a ser possível perceber e prever novas situações dentro do universo em estudo. Sendo assim, um bom modelo é um espelho eficiente da realidade.

Também pode ser definido como uma formulação matemática baseada em hipóteses que tentam representar fenômenos físicos ou sistemas biológicos, com a finalidade de gerar uma equação que possa representar tal(is) fenômeno(s) a um determinado nível de confiabilidade α .

O modelo é a forma analítica proveniente de equações diferenciais, composta de variáveis (dependentes e independentes), parâmetros e um erro associado. Este erro existe quando se trata de modelos probabilísticos, por exemplo:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \dots + \beta_n X_{in} + \varepsilon_i$$

Em que:

Y_i = variável resposta;

X_{ji} = variáveis independentes;

$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ = parâmetros do modelo e

ε_i = erro aleatório

Existem também os modelos determinísticos que são aqueles em que o erro aleatório não existe, pois caso o fenômeno se repita n vezes o resultado será sempre o mesmo. Exemplo:

$$V_f = V_i (1+i)^t$$

Em que:

V_f = valor final

V_i = valor inicial

i = taxa de juros

t = tempo de aplicação de V_i

A equação já é a representação numérica do modelo, isto é, o resultado final do ajuste do modelo ao conjunto de dados. É, portanto a estimativa do modelo e é composta de coeficientes.

$$\hat{Y}_i = b_0 + b_1 X_{i1} + \dots + b_n X_{in}$$

Em que:

\hat{Y}_i = estimativa da variável reposta;

b_0, b_1, \dots, b_n = coeficientes (estimadores dos parâmetros)

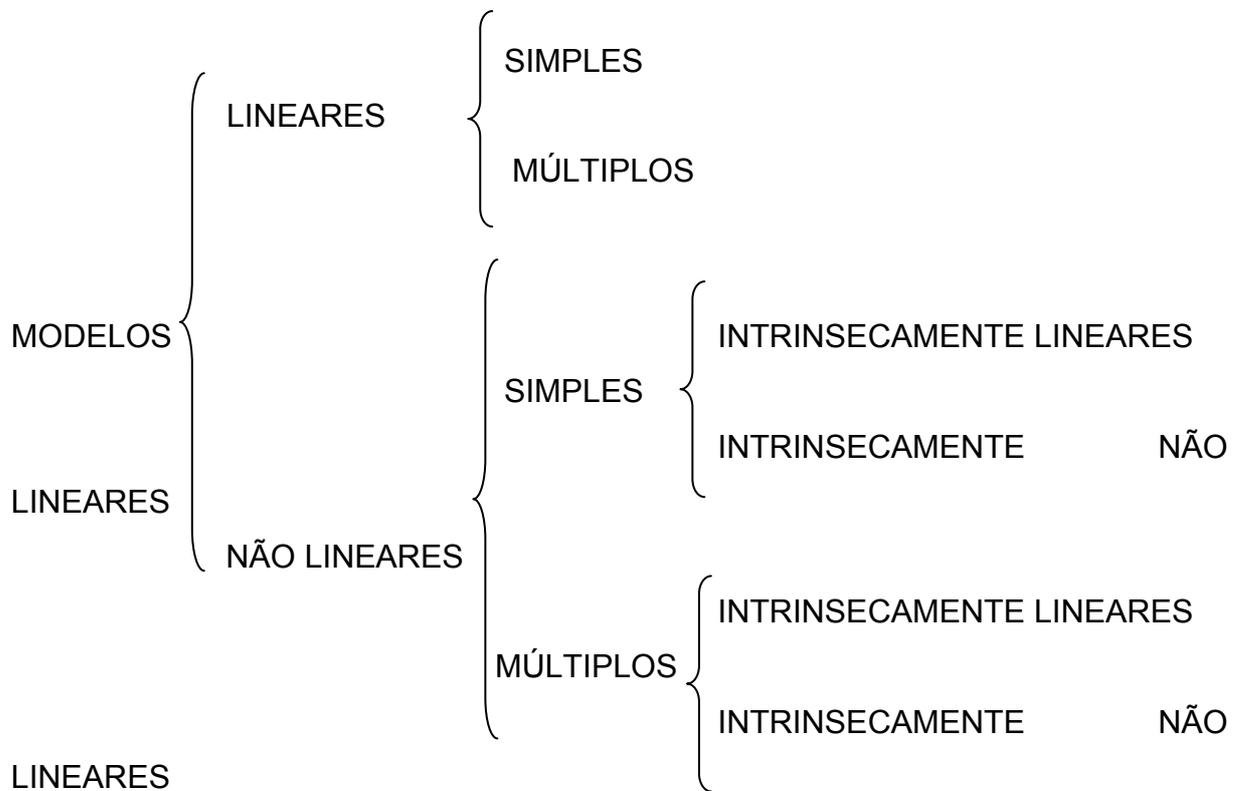
Uma equação deve ser aplicada para o conjunto de valores dos respectivos domínios em que ela foi gerada.

A diferença principal entre um modelo empírico e modelo de crescimento biológico é que o termo anterior recorre a uma expressão matemática de uma relação entre variáveis que podem ser esperadas logicamente, enquanto um modelo biológico é uma expressão de uma hipótese lógica relativa à biologia do processo de crescimento (PIENAAR, 1965).

Um modelo matemático somente representa um conjunto de suposições físicas ou biológicas. Essas suposições são sempre simplificações da realidade (FRANCE e THORNLEY, 1984).

Nas ciências, os modelos matemáticos são muito importantes, e usam uma ferramenta especial: as equações. Um modelo de crescimento ou mortalidade pode abranger um sistema de equações, sendo capaz de prognosticar a produção sob várias condições (SPATHELF e NUTTO, 2000).

Por outro lado, os modelos podem ser classificados em (SILVA e SILVA, 1995):



São exemplos de tais modelos:

a) Linear simples

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \varepsilon_i$$

b) Linear múltiplo

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \dots + \beta_n X_{ni} + \varepsilon_i$$

c) Não linear simples, intrinsecamente linear

$$Y_i = \beta_0 \cdot X_{1i}^{\beta_1} \cdot \varepsilon_i$$

Logaritmizando ambos os dados tem-se:

$$\text{Ln } Y_i = \text{Ln } \beta_0 + \beta_1 \text{Ln } X_{1i} + \text{Ln } \varepsilon_i$$

$$Y'_i = \beta'_0 + \beta_1 \cdot X'_i + \varepsilon'_i$$

Em que:

$$Y'_i = \text{Ln } Y_i$$

$$\beta'_0 = \text{Ln } \beta_0$$

$$X'_i = \text{Ln } X_i$$

$$\varepsilon'_i = \text{Ln } \varepsilon_i$$

d) Não linear simples, intrinsecamente não linear

$$Y_i = \beta_0 + X_i^{\beta_1} + \varepsilon_i$$

e) Não linear múltiplo, intrinsecamente linear

$$Y_i = \beta_0 \cdot X_i^{\beta_1} \cdot \dots \cdot X_{n_i}^{\beta_n} \cdot \varepsilon_i$$

$$\text{Ln } Y_i = \text{Ln } \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{Ln } X_i + \dots + \beta_n \cdot \text{Ln } X_{n_i} + \text{Ln } \varepsilon'_i$$

$$Y'_i = \beta'_0 + \beta_1 \cdot X'_i + \beta_2 \cdot X'_{2_i} + \dots + \beta_n \cdot X'_{n_i} + \text{Ln } \varepsilon_i$$

Em que:

$$X'_{j_i} = \text{Ln } X_{j_i}$$

f) Não linear múltiplo, intrinsecamente não linear

$$Y_i = \beta_0 + X_i^{\beta_1} + \dots + X_{n_i}^{\beta_n} + \varepsilon_i$$

Observa-se que os modelos intrinsecamente não lineares não podem se transformar em lineares pelo uso de logaritmos ou outra transformação de variáveis, sendo necessário o uso de procedimento de análise numérica para se obter as estimativas dos parâmetros que compõem o(s) modelo(s).

Nos modelos lineares e não lineares intrinsecamente lineares, as estimativas dos parâmetros, geralmente, são obtidas pelo emprego do método dos mínimos quadrados. Entretanto existem outros procedimentos tais como: método da máxima verossimilhança, ajuste gráfico e análise numérica (SILVA e SILVA, 1982).

Vale ressaltar que por conceituação, modelos do tipo:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_i + \beta_2 \cdot X_i^2 + \beta_3 \cdot X_i^3 + \varepsilon_i$$

são lineares, pois a linearidade de um modelo é caracterizada pela estrutura de seus parâmetros e não de sua(s) variável(is) independente(s).

Entretanto, dependendo da área de atuação, um mesmo tipo de modelo pode ter diferentes denominações.

Segundo Ferreira (2004), modelo é uma representação informal baseada em descrições formais de objetos, e que permite, por meio de variações, simular os efeitos de mudanças do fenômeno que representa. O mesmo autor afirma que a modelagem conceitual é a etapa da análise de um “sistema”, na qual são definidos os recursos, itens de dados e suas inter-relações.

Segundo Bertalanffy (1969), um “sistema” pode ser definido como um conjunto de elementos que se inter-relacionam. Inter-relação significa que alguns elementos (p) mantém relações com R, de forma tal que o comportamento de um elemento p é diferente de seu comportamento em outra relação R.

Valentin e Guimarães (2004) definem que modelos são formas simplificadas de representar a realidade.

Existem vários tipos de modelos, tais como:

Modelo físico: conjunto de hipóteses sobre a estrutura ou comportamento de um sistema físico pelo qual se procuram explicar ou prever, dentro de uma teoria científica as propriedades de um sistema (FERREIRA, 2004).

Modelo dinâmico: é aquele que utiliza equações diferenciais que podem ser resolvidas de forma analítica ou numérica, sendo que as estimativas e/ou simulações são realizadas em função do tempo (VALENTIN e GUIMARÃES, 2004).

Modelo estático: não incorporam a variável tempo, pois são representativos de uma situação em um determinado momento (HANNON e RUTH, 1997).

Os **modelos empíricos** ou para prognose não consideram hipóteses associadas à casualidade. No pressuposto dessa abordagem, é que se encontram padrões comuns no crescimento de indivíduos. Neste tipo de modelo a floresta é vista como um sistema para a produção (SPATHELF e NUTTO, 2000).

Tais modelos tentam representar, indiretamente, o efeito do ambiente e das práticas silviculturais no desenvolvimento das árvores de um povoamento florestal, utilizando fontes de variação como o sítio, a área basal e a idade. Modelos com propriedades biológicas e, amparados numa amostragem adequada, com informações precisas e remedições, propiciam prognoses do crescimento com elevado grau de confiabilidade. A partir deles se pode prescrever regimes de manejo

adequados para cada espécie, em cada sítio, que visem à qualidade do produto final como desbaste, rotação econômica ótima e planejamento da colheita (ABREU et al, 2002), bem como de recursos pesqueiros.

Segundo France e Thornley (1984) um **modelo empírico** tende, principalmente, a descrever um fenômeno, enquanto que um **modelo mecanicístico** trata de dar uma descrição com compreensão de um determinado fenômeno.

Os **modelos mecanicísticos** têm uma hipótese associada ao fenômeno descrito e servem para o entendimento de processos. Nesse tipo de modelo a floresta é vista como um sistema com ligações complexas entre os seus elementos, introduzindo mais funcionalidade na representação do crescimento e competição entre as populações, embora seu uso esclareça mais sobre a competição entre as espécies (SPATHELF e NUTTO, 2000).

Modelos baseados em processos constituem uma ciência em desenvolvimento crescente vinculada à fisiologia vegetal. Esse ramo de conhecimento tem evoluído, consideravelmente, nos estudos de interação planta x solo x atmosfera, conferindo uma visão mais generalista e, fisiologicamente, embasada para estimativa de crescimento (ABREU et al, 2002).

Um passo de extrema importância em modelagem é a sistemática de elaboração e seleção de modelos. Draper e Smith (1981) sugerem os seguintes passos (figura 1).

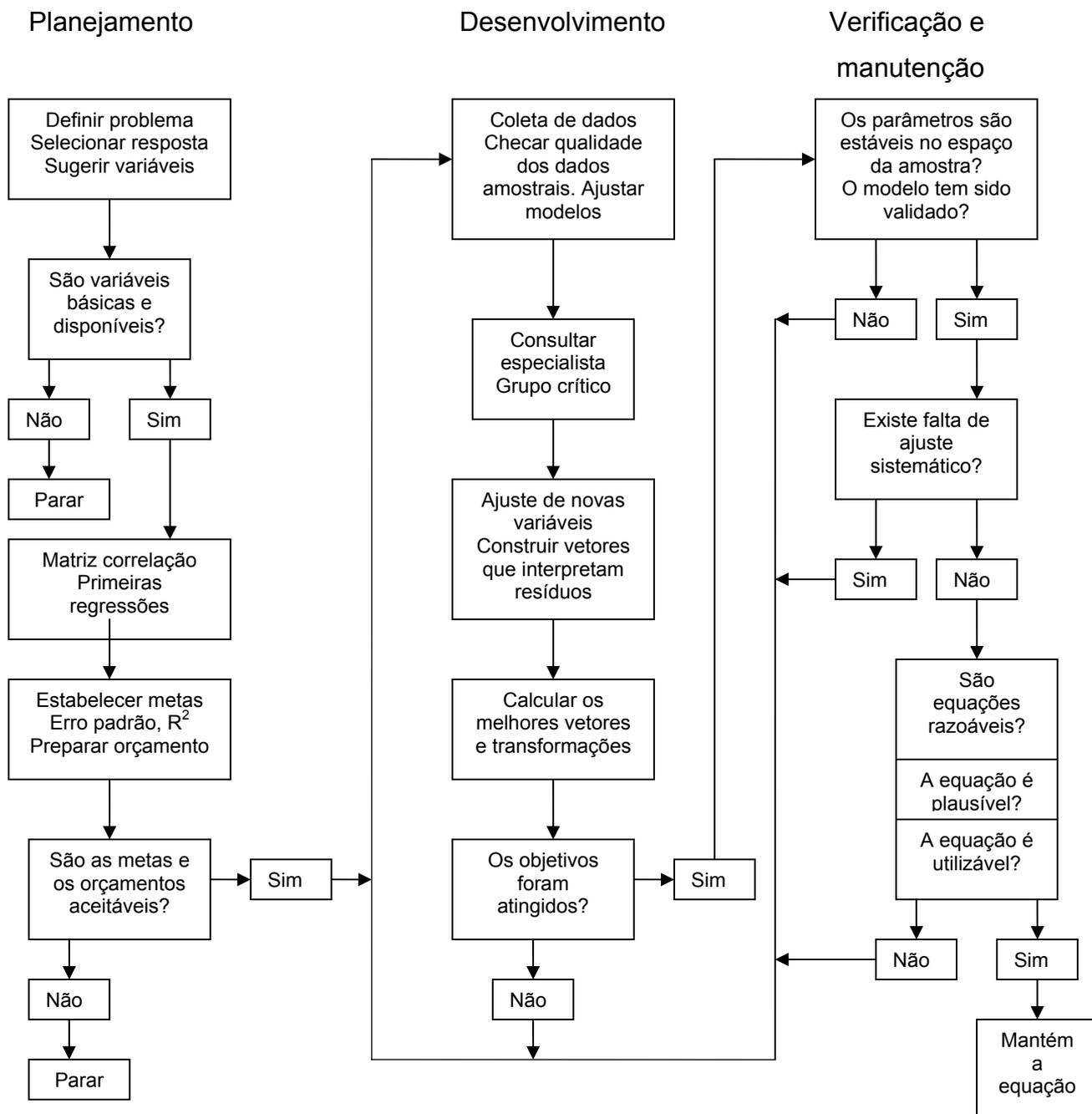


Figura 1 – Fluxograma das etapas da elaboração e seleção de modelos.

Segundo Clutter (1963) uma equação de crescimento, mesmo que apresente bons resultados em termos de ajuste a um determinado conjunto de dados, deve apresentar duas importantes características:

- a) convergência
- b) invariância

Por “convergência” se entende que quando o tempo final t_f tender para o tempo inicial t_i , ou vice-versa, o valor obtido para o crescimento final (W_f) deve ser igual ao obtido no tempo inicial (W_i).

Invariância por sua vez é a propriedade que uma equação possui de predizer um valor futuro no tempo t_f sem depender de valores intermediários do tempo, basta uma medida anterior t_i .

Considere a hipótese de mortalidade proposta por Clutter e Jones (1980) que assume que a variação do número de árvores (N) sobreviventes no tempo (t) é proporcional a um número inicial de árvores elevada a uma potência θ vezes o tempo elevado a uma potência γ .

Assim sendo:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha \cdot N^\theta \cdot t^\gamma$$

$$\int_{N_i}^{N_f} \frac{dN}{N^\theta} = \alpha \int_{t_i}^{t_f} t^\gamma \cdot dt$$

$$\int_{N_i}^{N_f} N^{-\theta} \cdot dN = \alpha \int_{t_i}^{t_f} t^\gamma \cdot dt$$

$$\frac{N^{-\theta+1}}{-\theta+1} \Big|_{N_i}^{N_f} = \alpha \cdot \frac{t^{\gamma+1}}{\gamma+1} \Big|_{t_i}^{t_f}$$

$$\frac{N_f^{-\theta+1} - N_i^{-\theta+1}}{-\theta+1} = \frac{\alpha}{\gamma+1} \cdot (t_f^{\gamma+1} - t_i^{\gamma+1})$$

Considere: $-\theta+1 = \beta_1$; $\frac{\alpha}{\gamma+1} = \beta_2$; $\gamma+1 = \beta_3$

$$\frac{N_f^{\beta_1} - N_i^{\beta_1}}{\beta_1} = \beta_2 (t_f^{\beta_3} - t_i^{\beta_3})$$

$$N_f^{\beta_1} - N_i^{\beta_1} = \beta_1 \cdot \beta_2 \left(t_f^{\beta_3} - t_i^{\beta_3} \right) \quad \text{considere } \beta_1 \cdot \beta_2 = \beta_4$$

$$N_f^{\beta_1} = \beta_4 \cdot \left(t_f^{\beta_3} - t_i^{\beta_3} \right) + N_i^{\beta_1}$$

$$N_f^{\beta_1} = N_i^{\beta_1} + \beta_4 \cdot \left(t_f^{\beta_3} - t_i^{\beta_3} \right)$$

$$N_f = \left[N_i^{\beta_1} + \beta_4 \left(t_f^{\beta_3} - t_i^{\beta_3} \right) \right]^{\frac{1}{\beta_1}}$$

Para ser compatível é necessário que quando $t_i=t_f$, $N_i=N_f$.

$$N_f = \left[N_i^{\beta_1} + \beta_4 \left(t_f^{\beta_3} - t_f^{\beta_3} \right) \right]^{\frac{1}{\beta_1}}$$

$$N_f = \left[N_i^{\beta_1} + 0 \right]^{\frac{1}{\beta_1}} = N_i$$

$$N_f = N_i$$

Provando a propriedade da convergência.

Para provar a invariância basta derivar a função de N_f em relação a t_f , e o resultado não deve conter t_i .

$$N_f^{\beta_1} = N_i^{\beta_1} + \beta_4 \cdot \left(t_f^{\beta_3} - t_i^{\beta_3} \right)$$

$$\frac{d \cdot N_f^{\beta_1}}{d \cdot t_f} = \varphi + \beta_4 \cdot \beta_3 \cdot t_f^{\beta_3-1}$$

Que não depende de t_i , sendo, portanto invariante.

Outra maneira de provar esta propriedade é considerar N em dois tempos (t) distintos.

$$N_i^{\beta_1} = N_{i-1}^{\beta_1} + \beta_4 \left(t_i^{\beta_3} - t_{i-1}^{\beta_3} \right) \quad (1)$$

$$N_{i+1}^{\beta_1} = N_i^{\beta_1} + \beta_4 \left(t_{i+1}^{\beta_3} - t_i^{\beta_3} \right) \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), tem-se:

$$N_{i+1}^{\beta_1} = N_{i-1}^{\beta_1} + \beta_4 \left(t_i^{\beta_3} - t_{i-1}^{\beta_3} \right) + \beta_4 \left(t_{i+1}^{\beta_3} - t_i^{\beta_3} \right)$$

$$N_{i+1}^{\beta_1} = N_{i-1}^{\beta_1} + \beta_4 \cdot t_i^{\beta_3} - \beta_4 \cdot t_{i-1}^{\beta_3} + \beta_4 \cdot t_{i+1}^{\beta_3} - \beta_4 \cdot t_i^{\beta_3}$$

$$N_{i+1}^{\beta_1} = N_{i-1}^{\beta_1} + \beta_4 \cdot t_{i+1}^{\beta_3} - \beta_4 \cdot t_{i-1}^{\beta_3}$$

$$N_{i+1}^{\beta_1} = N_{i-1}^{\beta_1} + \beta_4 \cdot \left(t_{i+1}^{\beta_3} - t_{i-1}^{\beta_3} \right)$$

Que não depende de t_i , sendo, portanto convergente e invariante. Se uma equação não possui estas duas propriedades ela pode gerar resultados inconsistentes e até absurdos.

Sendo a propriedade de convergência e da invariância condições para invalidar um modelo, podemos perceber que, segundo VANCLAY e SKOVSGAARD (1998), a avaliação de modelo é uma parte importante da sua construção, e algumas análises do modelo deveriam ser feitas em todas as fases de desenvolvimento do mesmo, ajustando e implementando o que convir. Uma avaliação completa de um modelo envolve vários passos, incluindo dois que são os chamados freqüentemente de verificação e validação.

Em modelagem de crescimento de floresta, verificações e validação denotam normalmente testes quantitativos e qualitativos do modelo, respectivamente.

Alguns passos envolvem exame de estrutura e propriedades de um modelo, com ou sem dados adicionais, para confirmar que não tem nenhuma inconsistência interna e realidade biológica, outros requerem comparações com dados adicionais para quantificação de desempenho do modelo, e foi conhecido em alguma literatura de silvicultura como referencial (cf. a marca de referência de agrimensor). Idealmente, os testes de referencia deveriam envolver dados que estão em algum senso distinto dos dados que ajustavam o modelo, mas também podem ser obtidas perspicácias úteis com os dados de calibração (VANCLAY e SKOVSGAARD, 1998).

Sendo salientado ainda pelos autores citados acima: estes testes não podem provar que um modelo é 'correto', mas pode ser usado em tentativas para invalidar conclusões feitas do modelo. Só pode ser avaliada a qualidade de um modelo em condições relativas, e sua habilidade de predição sempre permanece em aberto. Porém, o fracasso de várias tentativas para invalidar um modelo deveria aumentar sua credibilidade e confiança de usuário de construção. Este é o papel de avaliação do modelo. Assim, avaliação de modelo deveria ser um modo de procedimento que

começa durante o desenvolvimento do modelo e continua ao longo de sua construção até o seu uso.

2.4 Modelos de crescimento

Bertalanffy (1934) definiu crescimento como um aumento mensurável de um sistema orgânico como função da assimilação de material proveniente de seu ambiente.

Segundo Prodan (1968) nas várias ciências tais como: Florestais, Biológicas, Sociológicas, Econômicas, etc. um grande número de tentativas tem sido feito para exprimir o crescimento como fórmulas matemáticas. As tentativas em florestas estão, provavelmente, entre as primeiras no campo biológico, através de Spath em 1797, Hossfeld em 1822 e Smalian em 1857.

Segundo Spurr (1952), os estudos de prognose em florestas iniciaram na Europa, no final do século XVIII. Dessa época até os dias atuais, muitos trabalhos foram desenvolvidos.

Nas ciências biológicas, as funções de crescimento têm sido usadas por muitos anos, principalmente, para prover dados do crescimento de um organismo ou parte de um organismo em um determinado tempo. O termo função de crescimento é, geralmente, usado para denotar uma função analítica que pode ser descrita em uma equação simples.

Na literatura da biologia matemática, crescimento total é sinônimo de crescimento cumulativo ou a soma de incrementos contínuos. Uma equação de crescimento cumulativa deve ser expressa como uma função de tempo, ou idade, e tem que conter um parâmetro que especifica as condições iniciais (MOSER e HALL, 1969).

O desenvolvimento de novos modelos de crescimento e sobrevivência/mortalidade tem tido avanços consideráveis nas ciências florestais e pesqueiras, como o que ocorreu na generalização de Chapman-Richards para o modelo de Bertalanffy (1957) e trabalhos de Prodan (1968) dando um tratamento

compreensivo de várias funções de crescimento e leis de crescimento que têm já sido estudados com referência ao crescimento florestal.

2.4.1 Modelo de Mitscherlich

Em 1930, Mitscherlich utilizou um princípio usado na economia (a produção se aproxima de um limite e o incremento na produção tende a zero), traduzindo-o em termos de crescimento biológico como “Lei dos efeitos dos fatores de crescimento” (SILVA, 1986).

Essa lei diz que a taxa de crescimento dW/dt é proporcional a diferença entre o tamanho máximo (último nível de crescimento ou termo assintótico) e o próprio parâmetro de crescimento.

$$\frac{dW}{dt} = c \cdot (U - W)$$

Resultando em:

$$W = U \cdot [1 - \exp(-c' \cdot t)]^n$$

Em que:

W = parâmetro de crescimento

U = termo assintótico

$$c' = c_1 = c_2 = \dots = c_n$$

t = tempo

O parâmetro U que é termo assintótico, significa o último nível do crescimento. Em algumas áreas o termo W é representado por L e U por L_∞ .

2.4.2 Modelo de Schumacher

Schumacher (1939) desenvolveu um modelo para inicialmente, estimar índice de sítio, mas que por sua amplitude de aplicação também é usado nas estimativas de crescimento e sobrevivência/mortalidade.

A hipótese considerada foi que: “o crescimento relativo em volume varia inversamente com a idade”, sendo que, matematicamente, é expressa por:

$$\frac{dW}{W} = \kappa \cdot d\left(\frac{1}{A}\right)$$

Em que:

W=volume

A=idade

κ =parâmetro peculiar ao índice de sítio, densidade e estoque considerado.

Já com relação ao crescimento em altura a hipótese é a seguinte: O crescimento em altura é inversamente proporcional ao quadrado da idade:

$$\frac{dW}{dI} = \frac{\beta \cdot W}{I^2}$$

Resultando em:

$$W_f = W_i \cdot e^{-\beta \left(\frac{1}{I_f} - \frac{1}{I_i} \right)}$$

Em que:

W_f =altura no final do período considerado

W_i =altura no início do período considerado

I_f =idade no final do período considerado

I_i =idade no início do período considerado

β =parâmetro do modelo

Quando $I_f = I_i$, então $W_f = W_i$, conseqüentemente o modelo admite a propriedade de convergência.

Considere o período que vai de I_1 a I_3 .

$$W_2 = W_1 \cdot e^{-\beta \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right)}$$

$$W_3 = W_2 \cdot e^{-\beta \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right)}$$

$$W_3 = W_1 \cdot e^{-\beta \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right)} \cdot e^{-\beta \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right)}$$

$$W_3 = W_1 \cdot e^{-\beta \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right)}$$

$$W_3 = W_1 \cdot e^{-\beta \cdot \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right)}$$

É possível calcular W_3 a partir de W_1 sem depender de W_2 , conferindo ao modelo a propriedade de invariância.

2.4.3 Modelo de Bertalanffy

Bertalanffy (1934, 1957) derivou seu modelo de estudos das então chamadas relações alométricas dos organismos. A relação alométrica será compreendida por existir entre elementos dimensionais de um organismo, denominado P e Q, e foi expresso por:

$$P = \alpha \cdot Q^\theta$$

Em que

P = o comprimento do fêmur

Q = largura do crânio de certas espécies animais ou a área fotossintética e área do cambio do tronco de espécies vegetais

α e θ = parâmetros da relação

Isso sugere a suposição de que em indivíduos normais, o padrão de crescimento específico de P produzirá uma relação proporcional constante para o padrão de crescimento específico de Q, que é:

$$\frac{dP}{dt} = \left(\frac{\alpha}{Q} \right) \cdot \frac{dQ}{dt}$$

Estudos extensivos de muitos organismos aquáticos e terrestres levaram Bertalanffy à conclusão de que para uma classe principal de organismos a relação alométrica entre a área da superfície (também total, ou área absorviva total) e volume total pode ser adequadamente expresso como:

$$S = \alpha \cdot V^{\frac{2}{3}}$$

Em que S é área da superfície, V é o volume do organismo, α é o parâmetro a ser calculado e $2/3$ é constante alométrica.

Após prosseguimento dos estudos, o autor chegou à conclusão de que o crescimento segue um processo de síntese (anabolismo) e degradação (catabolismo). A fórmula original foi expressa da seguinte forma:

$$\frac{dW}{dt} = \eta W^{2/3} - kW$$

A vantagem da equação está na sua fundamentação teórica. A razão anabólica é proporcional à área da superfície do organismo, enquanto que a razão catabólica é proporcional ao volume da biomassa.

Chen et al. (1992) comparou o modelo de Bertalanffy com 5 equações polinomiais no ajuste de dados de crescimento de 16 populações de peixes de água doce. Eles concluíram que o modelo de Bertalanffy foi mais flexível para todas as populações que os modelos polinomiais usados.

Em recursos pesqueiros o modelo de Bertalanffy tem sido freqüentemente usado como:

$$L_t = L_\infty \{1 - \exp[-k(t - t_0)]\} \quad (3)$$

Em que:

L_t = comprimento na idade t;

L_∞ = tamanho assintótico;

k = parâmetro de crescimento;

t_0 = idade quando o crescimento é teoricamente zero.

Gallucci e Quinn II (1979) sugeriram um novo parâmetro para o modelo de Bertalanffy comparando o crescimento de molusco *Pelecypoda europeu* em diferentes regiões. Eles também sugeriram que outros modelos não lineares podem apresentar melhores resultados que o de Bertalanffy.

Springborn et al. (1994) trabalhando em experimentos em aquicultura mostraram que em peixes o parâmetro de crescimento e o tamanho assintótico são

muito variáveis, sugerindo mudanças no parâmetro de crescimento do modelo de Bertalanffy.

Sminkey & Musick (1995) obtiveram valores muito altos para L_{∞} quando comparado com o tamanho máximo para as espécies estudadas. Também encontrou que os valores de t_0 (-4.9 e -3.8) são altos porque o período de gestação das espécies de tubarão varia entre 9 meses e 1 ano. Este tipo de problema é muito comum quando se usa o modelo de Bertalanffy como em (3).

Entre as funções matemáticas aplicadas para crescimento de peixes, o modelo de Bertalanffy em sua forma original ou modificada é um dos mais utilizados (RICKER, 1975; GALLUCCI e QUINN II 1979, SANTOS, 1978; SIQUEIRA et al. 1989; CHEN et al. 1992; SPRINGBORN et al. 1994; ROSA, 1993, 1997; ROSA et al 1996; LESSA e SANTANA, 1998, 2000; LESSA et al 2004)

Mas, segundo Melo (1993), existem casos em crescimento de peixes que o modelo de Bertalanffy não é adequado, o que corrobora as afirmativas de Richards (1959) e Chapman (1961), sugerindo que outros ou novos modelos devem ser testados no estudo do crescimento de peixes.

2.4.4 Modelo de Chapman-Richards

Richards (1959), estudando o crescimento de plantas e Chapman (1961) o crescimento de peixes, consideraram que a constante alométrica de $2/3$ do modelo de Bertalanffy era muito restritiva, pois esse expoente pode assumir diferentes valores dependendo da natureza da população.

Nas Ciências Florestais, Richards foi o primeiro a aplicar a equação de crescimento desenvolvida por Bertalanffy para descrever o crescimento de animais (FRANCE e THORNLEY, 1984).

A generalização de Chapman-Richards do modelo de crescimento de Bertalanffy é uma expressão matemática de uma hipótese concernente a causas essenciais do fenômeno de crescimento, de tal modo que os parâmetros no modelo têm pelo menos uma total interpretação biológica ou fisiológica (TURNBULL, 1963; PIENAAR e TURNBULL, 1973).

Assim sendo, fazendo esta modificação obtém-se:

$$\frac{dW}{dt} = \alpha \cdot W^m - \gamma \cdot W \quad (4)$$

Resultando em:

$$W = U \cdot \left\{ 1 - \beta \cdot \text{EXP}[-k \cdot (t - t_0)] \right\}^{1/(1-m)}$$

Quando $t_0=0$

$$W = U \cdot \left\{ 1 - \beta \cdot \text{EXP}[-k \cdot t] \right\}^{1/(1-m)}$$

Em que:

U = valor assintótico (tamanho teórico máximo que o organismo pode atingir)

Este modelo foi nomeado como modelo de crescimento de Chapman-Richards por Turnbull (1963) e tem sido usada freqüentemente em pesquisas de florestas (PIENAAR, 1965; MACHADO, 1978; CAMPOS, 1980; CLUTTER et al, 1983; BARROS et al, 1984; MACTAGUE, 1985; SILVA, 1986; SCOLFORO, 1994; FEKEDULENG et al, 1999) e pesqueiras (CHAPMAN, 1961; SIQUEIRA et al, 1989; ROSA, 1993, 1997; ROSA et al, 1996).

Dependendo do valor do parâmetro m, o modelo de Chapman-Richards representa várias leis de crescimento, o modelo de Bertalanffy ($m=2/3$), a função de crescimento Monomolecular ($m=0$), a função de crescimento Gompertz ($m=1$) e a função de crescimento Logístico ($m=2$) são casos especiais da função de crescimento de Chapman-Richards (MACHADO, 1978)..

Clutter e Jones (1980) desenvolveram um procedimento em que o valor assintótico U que é constante no modelo, ser eliminado e substituído por um valor que corresponde um determinado valor de W no tempo i.

Para isto usou o método das diferenças de equações.

Considerando o modelo acima, tem-se:

Em um tempo inicial i, o modelo é:

$$W_i = U \cdot \left(1 - e^{-k \cdot t_i} \right)^{\frac{1}{1-m}} \quad (5)$$

Em que um tempo final f, o modelo é:

$$W_f = U \cdot \left(1 - e^{-k \cdot t_f} \right)^{\frac{1}{1-m}} \quad (6)$$

Como U é constante nos tempos i e f , pode-se conhecer seu valor, por exemplo, no tempo i

$$U = W_i \cdot (1 - e^{-k \cdot t_i})^{-\frac{1}{1-m}} \quad (7)$$

Substituindo (7) em (6), tem-se:

$$W_f = W_i \cdot (1 - e^{-k \cdot t_i})^{-\frac{1}{1-m}} \cdot (1 - e^{-k \cdot t_f})^{\frac{1}{1-m}}$$

$$W_f = W_i \cdot \left(\frac{1 - e^{-k \cdot t_f}}{1 - e^{-k \cdot t_i}} \right)^{\frac{1}{1-m}}$$

Desta forma, o valor assintótico que, às vezes, por ser teórico pode apresentar resultados fora da realidade, é eliminado do modelo para dar lugar a um valor real W_i .

2.4.5 Modelo de Silva-Bailey

Silva (1986) estudando o crescimento de *Pinus elliottii* Engelm var. *elliottii* em função de diferentes fontes de nutrientes, considerou a idéia de dinâmica de populações proposta por Leslie (1945) que diz que para qualquer distribuição arbitrária no tempo i , a estrutura de uma população pode ser expressa na forma de $n+1$ equações lineares, em que de n para $n+1$ é o último grupo de idade na tabela de distribuição etária.

O modelo expressa o tamanho da população (W_{i+1}) no tempo $i+1$ como função do tamanho da população no tempo i (W_i), da taxa de sobrevivência (S), do número médio de recrutamentos (F) produzido na população no tempo i . Sua expressão é:

$$W_{i+1} = W_i (SF)^n$$

Em populações florestais o problema de recrutamento (nascimento ou imigração) no período de investigação é desprezível, bem como migração, que são

fenômenos comuns em populações animais (móveis). Ocorre mortalidade, mas essa pode ser modelada sem maiores problemas. Dessa forma Silva (1986) considerou o plantio de *Pinus* como uma população fechada e o parâmetro F pode ser retirado do modelo.

O parâmetro S é desconhecido e depende da taxa de mortalidade, que pode ser regular ou irregular (URKART, 1974, citado por SILVA, 1986). Mortalidade regular é resultante de fatores tais como densidade de plantio, qualidade do sítio, tratamentos silviculturais, etc, enquanto que mortalidade irregular é devida a eventos catastróficos como fogo, doenças, pragas, ventos, etc.

Em populações de peixes, geralmente o parâmetro S é estimado pelos modelos de Beverton, Ricker e Schaefer (SILVA, 1986), que são expressos como:

a) Beverton

$$W_f = W_i (\alpha + \beta \cdot W_i)^{-t_i}$$

b) Ricker

$$W_f = W_i [\alpha \cdot \exp(-\beta \cdot W_i)]^{t_i}$$

c) Schaefer

$$W_f = W_i (\alpha - \beta \cdot W_i)^{t_i}$$

Esses modelos foram ajustados no plantio de *Pinus* e em todas as situações analisadas, a estimativa do parâmetro β não diferiu de zero, reduzindo todos os modelos a:

$$W_f = W_i \cdot \alpha^t$$

Que sugeriu a equação diferencial

$$\frac{dW}{dt} = \gamma \cdot W \cdot \alpha^t \quad (8)$$

Que se traduz por: a taxa de crescimento ou mortalidade é proporcional a uma condição inicial vezes uma função exponencial da idade (t).

A solução para (8) é a seguinte:

$$\frac{dW}{dt} = \gamma \cdot W \cdot \alpha^t$$

$$\frac{dW}{W} = \gamma \cdot \alpha^t \cdot dt$$

Resultando em:

$$W_f = W_i \cdot e^{\kappa(\alpha^{t_f} - \alpha^{t_i})}$$

Para o plantio de pinus considerado, quando comparados os modelos de Silva-Bailey e Chapman-Richards apresentam estimativas semelhantes, quer seja de mortalidade ou crescimento em área basal (SILVA, 1986).

O modelo de Silva-Bailey também foi aplicado com sucesso em modelagem de recursos pesqueiros (SIQUEIRA et al. 1989; ROSA, 1993; ROSA et al. 1996)

2.4.6 Modelo de Brody

De acordo com Ricker (1979), Brody estimou o crescimento de animais domésticos baseado em uma curva de crescimento, dividida em duas partes no ponto de inflexão.

$$\begin{aligned} L_{t1} &= \alpha e^{\kappa t} \\ L_{t2} &= \beta - \delta \cdot e^{-\kappa t} \end{aligned} \quad (9)$$

Em que:

L_{ti} = comprimento, $i = 1, 2$;

t = idade;

α , β e δ = parâmetros com dimensões de crescimento;

κ e κ' = parâmetros da taxa de acréscimo ou decréscimo.

A expressão (9) pode ser usada no último estágio do crescimento de peixes.

Reescrevendo (9) tem-se:

$$L_t = L_\infty - \delta \cdot e^{-\kappa t} \quad (10)$$

Em que L_∞ é o tamanho assintótico (tamanho máximo teórico que o peixe pode atingir).

2.5 Coeficiente de determinação e Índice de Ajuste

Quando se trabalha com modelos lineares ou não lineares intrinsecamente lineares, o coeficiente de determinação R^2 é comumente usado para representar a variabilidade dos dados explicada pela equação resultante.

Já para os modelos não lineares intrinsecamente não lineares o método dos mínimos quadrados ou da máxima verossimilhança não pode ser aplicado, e procedimentos de análise numérica são utilizados e o Índice de Ajuste (I.A.) se enquadra nessas condições (SCHAEDEL, 1981).

Para os modelos lineares e não lineares intrinsecamente lineares o I.A. corresponde ao R^2 .

2.6 Gráfico da distribuição residual

A análise gráfica da distribuição entre a variável dependente observada e estimada, constitui-se de grande importância na seleção de modelos, por possibilitar a verificação do ajuste da equação ao longo de toda a amplitude dos dados observados (SCHNEIDER, 1998). O exame visual de gráficos é uma opção informal e subjetiva, para analisar a distribuição de resíduo de regressão, embora, em muitas investigações, seja suficiente para uma adequada avaliação (AHRENS, 1982; SCOLFORO, 1993).

Segundo Paula Neto (1977), os valores dos resíduos, obtidos através da diferença entre os valores observados e estimados, devem se distribuir uniformemente, dentro dos limites dos dados, quando plotados contra os valores observados ou contra os valores estimados

2.7 Gráfico da curva de crescimento

A plotagem dos dados dá uma idéia da curva que representa o fenômeno, dando conseqüentemente sugestões de funções matemáticas que possui aquele comportamento (formato).

O gráfico da curva de crescimento gerado pelo modelo dá uma boa visão do ajuste do modelo em relação à massa de dados, porém, não é direto quanto o coeficiente de determinação ou o Índice de Furnival, dando apenas uma sugestão do que pode estar acontecendo, sendo uma representação visual dos resultados da função ou dos dados. Pode-se ainda salientar que esse resultado subjetivo cede espaço a diversas conclusões, conclusões essas que dependem da análise do especialista naquele fenômeno para a precisão do resultado.

3 MATERIAL E MÉTODOS

3.1 Leucena

Os dados de leucena foram provenientes de um experimento localizado na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), no município de Caruaru, no Estado de Pernambuco, que possui as seguintes coordenadas geográficas: latitude 08°14'18"S; 38°00'00" WGr. e altitude de 537 m, sendo enquadrada pela classificação climática de Thornthwaite no tipo Dd'a' (semi-árido megatérmico), sendo o solo caracterizado pela associação de Neossolo (EMBRAPA, 1999).

Foi implantado com sementes de *Leucaena leucocephala* (Lam.) de Wit, (Hawaii), variedade K8, de origem australiana, coletada em plantio experimental no município de Floresta – PE, semeadas em agosto de 1989, sendo que o plantio definitivo foi realizado em dezembro de 1989, 121 dias após o início do experimento (MEUNIER, 1991).

Os tratamentos foram constituídos de duas estirpes de rizóbio, mais tratamentos comparativos nitrogenados em três níveis de adubação fosfatada e na ausência ou presença de composto de resíduo urbano, perfazendo inicialmente, um total de 24 tratamentos com 24 repetições.

Para este estudo, baseando-se nas pesquisas de Meunier (1991), Souza (2003) e Santos Júnior (2005) em que se constatou que o efeito do composto orgânico foi o que realmente influenciou o crescimento das mudas e das plantas até o quarto ano, decidiu-se agrupar os tratamentos em dois grupos: os que não possuem composto orgânico (tratamentos 1 a 12) e os que possuem (tratamentos 13 a 24) conforme Tabela 1.

Foram utilizadas para este trabalho 544 árvores, sobreviventes das 576 árvores plantadas no início do experimento. A variável altura (H) foi medida em todos os indivíduos ao longo do tempo, durante 12 anos, sendo denominada como H1 a H20, indicando as 20 medidas obtidas conforme expresso na Tabela 2. O tempo inicial

considerado foi de 120 dias que correspondem à idade em que as mudas foram plantadas no campo (Tabela 2).

Tabela 1 - Discriminação dos fatores e níveis testados na avaliação do crescimento em altura de *Leucaena leucocephala*

Table 1 – Factors discrimination and tested levels in the evaluation of *Leucaena leucocephala*'s height growth

Fator	Níveis	Tratamentos	
Composto orgânico	Sem composto orgânico (C ₀)	C ₀ N ₀ P ₀	C ₁ N ₀ P ₀
	Com composto orgânico (100 ml/54 g) (C ₁)	C ₀ N ₀ P ₁	C ₁ N ₀ P ₁
Sem inoculação com rizóbio	Sem nitrogênio (N ₀)	C ₀ N ₀ P ₂	C ₁ N ₀ P ₂
	1,0 g de uréia/recipiente (N ₁)	C ₀ N ₁ P ₀	C ₁ N ₁ P ₀
Inoculação com rizóbio	Estirpe 1 (NFB 473) (N ₂)	C ₀ N ₁ P ₁	C ₁ N ₁ P ₁
	Estirpe 2 (NFB 466) (N ₃)	C ₀ N ₁ P ₂	C ₁ N ₁ P ₂
Adição de fósforo	Sem fósforo (P ₀)	C ₀ N ₂ P ₀	C ₁ N ₂ P ₀
	0,5g de superfosfato simples/recipiente (82,8 g/m ³) (P ₁)	C ₀ N ₂ P ₁	C ₁ N ₂ P ₁
	1,0g de superfosfato simples/recipiente (165,6 g/m ³) (P ₂)	C ₀ N ₂ P ₂	C ₁ N ₂ P ₂
		C ₀ N ₃ P ₀	C ₁ N ₃ P ₀
		C ₀ N ₃ P ₁	C ₁ N ₃ P ₁
		C ₀ N ₃ P ₂	C ₁ N ₃ P ₂

Tabela 2 – Datas das Medições.

MEDIDAS	H_i	DATAS	Nº DE DIAS
1	H_1	01/01/1990	121
2	H_2	07/02/1990	157
3	H_3	07/03/1990	185
4	H_4	09/04/1990	218
5	H_5	09/05/1990	248
6	H_6	09/06/1990	279
7	H_7	09/07/1990	309
8	H_8	09/08/1990	340
9	H_9	13/09/1990	375
10	H_{10}	15/10/1990	407
11	H_{11}	15/11/1990	438
12	H_{12}	28/12/1990	481
13	H_{13}	25/04/1991	599
14	H_{14}	26/07/1991	691
15	H_{15}	24/07/1992	1055
16	H_{16}	01/07/1993	1397
17	H_{17}	31/12/1993	1581
18	H_{18}	12/01/1995	1957
19	H_{19}	01/12/1998	3376
20	H_{20}	14/03/2003	4939

3.2 Tubarão-junteiro

Para o presente estudo foram utilizados 504 espécimes do tubarão-junteiro (*Charcarinus porosus*), capturados na costa marinha do estado do Maranhão, no período de 1984 a 1989.

Na captura, utilizaram-se barcos à vela com linhas longas e redes com brânquia flutuantes de até 900m de comprimento e 7,5m de altura com 8,0cm de malha em águas rasas em estuários fechados com profundidade aproximada de 36 m. Os espécimes foram capturados entre a Baía do Tubarão e a Baía do Turiaçu. (LESSA, 1998).

3.2.1 Metodologia para determinação da idade e do crescimento do tubarão-junteiro

Para se obter as idades dos espécimes, após abatidos, as vértebras foram removidas debaixo da primeira nadadeira dorsal dos indivíduos. O sexo era registrado e o comprimento total em cm (comprimento do focinho até o final da nadadeira caudal) de cada espécime foi medido de acordo com Compagno (1984), com comprimento total medido como comprimento 'esticado'. A terminologia relativa as vértebras seguiu a metodologia proposta por Wilson et al. (1983) e Cailliet et al. (1983) também citados por Lessa (1998).

Um conjunto de cinco ou seis vértebras foi cortado de cada espécime. Após limpar o excesso de tecido, as vértebras foram armazenadas em 4% formaldeído por 24 h, e finalmente, preservados em 70% álcool para até 5 anos. Devido as vértebras serem profundamente côncavas, elas eram seccionadas sagitalmente (Cailliet et al citados LESSA, 1998). Foram imersas em solução aquosa de alizarina vermelha-S para um período de minutos ou horas (dependendo das densidades de vértebras) e então enxaguados em água corrente. Óleo vegetal foi aplicado para aumentar a superfície de

contraste entre a zona translúcida (curta) e uma zona opaca (ampla). Foram contadas as bandas de crescimento, compostas por um anel opaco e outro translúcido, em cada vértebra. A distância do foco, à margem interna de cada anel translúcido avermelhado foi registrado.

O raio vertebral (a distância do foco à extremidade exterior da vértebra) foi medido por um microscópio binocular equipado, com uma ocular micrométrica. Foram feitas medidas sobre ampliação de 12 vezes (1 micrômetro unidade = 1,2mm) com luz refletida.

As vértebras do mesmo espécime eram lidas duas vezes, cada leitura a tempos diferentes e sempre pelo mesmo leitor. Todas as contagens foram feitas sem conhecimento do tamanho individual e contagem prévia. Sempre que as contagens diferiam entre os dois leitores, foi determinado um consenso e as medidas foram usadas para o retrocálculo dos comprimentos por idade (LESSA, 1998).

3.3 Modelos utilizados

Neste trabalho, todos os modelos empregados foram derivados usando a metodologia das diferenças de equações proposta por Clutter e Jones (1980), como se segue:

Chapman – Richards

$$W_f = W_i \cdot \left[\frac{1 - e^{k \cdot t_f}}{1 - e^{k \cdot t_i}} \right]^\beta + \varepsilon_i \quad (11)$$

Silva – Bailey

$$W_f = W_i \cdot e^{\beta \cdot (k \cdot t_f - k \cdot t_i)} + \varepsilon_i \quad (12)$$

Bertalanffy

$$W_f = W_i \cdot \left[\frac{1 - e^{k \cdot t_f}}{1 - e^{k \cdot t_i}} \right]^3 + \varepsilon_i \quad (13)$$

Brody

$$W_f = W_i - \beta \cdot \left[e^{k \cdot t_f} - e^{k \cdot t_i} \right] + \varepsilon_i \quad (14)$$

Mitscherlich

$$W_f = W_i - \beta \cdot (K^{t_f} - K^{t_i}) + \varepsilon_i \quad (15)$$

Weibull

$$W_f = W_i - \beta \cdot (e^{-K \cdot t_f^m} - e^{-K \cdot t_i^m}) + \varepsilon_i \quad (16)$$

Clutter e Jones

$$W_f = \left[W_i^\theta + \beta_1 (t_f^K - t_i^K) \right]^{\frac{1}{\theta}} + \varepsilon_i \quad (17)$$

Em que:

W_f = altura ou comprimento final;

W_i = altura ou comprimento inicial observado(a);

β , m , θ e K = parâmetros dos modelos;

t_i e t_f = Tempo inicial e final das medições das alturas de leucena ou comprimento de tubarão

ε_i = erro aleatório

Para comparar com os modelos considerados, modificações e adaptações dos modelos de Chapman-Richards e Silva-Bailey foram desenvolvidas como se segue:

3.4 Dedução dos modelos matemáticos propostos

3.4.1 1º modelo proposto

O primeiro modelo desenvolvido foi resultante da combinação (produto) dos modelos Chapman-Richards e Silva-Bailey, pelo fato de que são dois modelos que têm apresentado bons resultados nas estimativas de espécies florestais e pesqueiras.

Foram consideradas duas situações: a soma e o produto dos modelos. Como o proveniente do produto apresentou melhores resultados, este foi o considerado neste trabalho.

Sejam

$$W' = (\beta_1 + \beta_2 \cdot e^{-K \cdot t})^{\beta_3} \quad (\text{Chapman-Richards})$$

$$W'' = \beta_4 \cdot e^{\beta_5 \cdot \alpha^t} \quad (\text{Silva-Bailey})$$

Seja W uma estimativa do crescimento das árvores ou dos tubarões, logo pode-se escrever que:

$$W = (W' \cdot W'')$$

Logo substituindo tem-se que:

$$W = \left[(\beta_1 + \beta_2 \cdot e^{-K \cdot t})^{\beta_3} \cdot (\beta_4 \cdot e^{\beta_5 \cdot \alpha^t}) \right]$$

Resultando em:

$$W_f = W_i \cdot \left[\left(\frac{1 + \beta \cdot e^{-K \cdot t_f}}{1 + \beta \cdot e^{-K \cdot t_i}} \right) \cdot e^{\lambda \cdot (\alpha^{t_f} - \alpha^{t_i})} \right]^\theta$$

A dedução matemática deste modelo e dos demais se encontram no Apêndice A.

3.4.2 2º modelo proposto

Considere-se a hipótese biológica de que a variação do crescimento em função do tempo de um indivíduo é proporcional a uma condição inicial, multiplicado pela diferença entre o anabolismo e o catabolismo do indivíduo ao longo do tempo. Assim,

$$\frac{dW}{dt} = W \cdot (\alpha \cdot e^{\kappa \cdot t} - \gamma \cdot e^{\lambda \cdot t})$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 Condição inicial Anabólico Catabólico

$$\frac{dW}{dt} = W (\alpha \cdot e^{\kappa \cdot t} - \gamma \cdot e^{\lambda \cdot t})$$

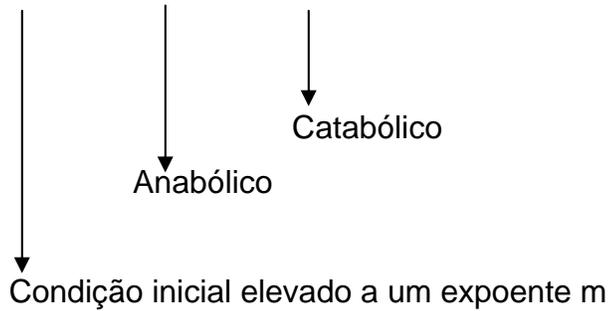
Resultando em:

$$W_f = W_i \cdot \left(\frac{e^{\beta \cdot e^{\kappa \cdot t_f} + \theta \cdot e^{\lambda \cdot t_f}}}{e^{\beta \cdot e^{\kappa \cdot t_i} + \theta \cdot e^{\lambda \cdot t_i}}} \right)$$

3.4.3 3º modelo proposto

Considere-se a hipótese biológica de que a variação do crescimento em função do tempo de um indivíduo é proporcional a uma condição inicial elevada a um expoente m , multiplicado pela diferença entre o anabolismo e o catabolismo do indivíduo ao longo do tempo. Assim,

$$\frac{dW}{dt} = W^m \cdot (\alpha_1 \cdot t^{K_1} - \gamma_1 \cdot t^{\lambda_1})$$



$$W^{-m} \cdot dW = (\alpha_1 \cdot t^{K_1} - \gamma_1 \cdot t^{\lambda_1}) dt$$

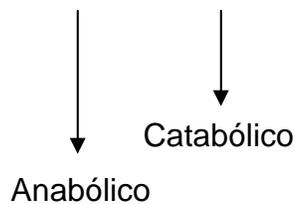
Resultando em:

$$W_f = W_i \cdot \left(\frac{\alpha \cdot t_f^K + \beta \cdot t_f^\lambda + 1}{\alpha \cdot t_i^K + \beta \cdot t_i^\lambda + 1} \right)^\omega$$

3.4.4 4° modelo proposto

Considerando-se que a variação do crescimento em função do tempo de um indivíduo é proporcional à diferença entre o anabolismo e o catabolismo do indivíduo ao longo do tempo, tem-se que:

$$\frac{dW}{dt} = \alpha \cdot W^m \cdot t^\lambda - \gamma \cdot W \cdot t^\lambda$$



$$\frac{dW}{dt} = \alpha \cdot W^m \cdot t^\lambda - \gamma \cdot W \cdot t^\lambda$$

Resultando em:

$$W_f = W_i \cdot \left(\frac{1 + \beta \cdot e^{\theta \cdot t_f^K}}{1 + \beta \cdot e^{\theta \cdot t_i^K}} \right)^\rho$$

Na Tabela 3 está um resumo de todos os modelos (equação diferença, solução e forma como foram usados)

MODELO	Hipótese (Eq. Diferencial)	Solução	Solução (usando o método das diferenças de equações)
Chapman-Richards	$\frac{dW}{dt} = \eta \cdot W^m - \lambda \cdot W$	$W = \alpha \cdot [1 - \beta \cdot e^{-k \cdot t}]^{\frac{1}{1-m}}$	$W_f = W_i \cdot \left[\frac{1 - e^{k \cdot T_f}}{1 - e^{k \cdot T_i}} \right]^\beta + \varepsilon_i$
Silva-Bailey	$\frac{dW}{dt} = \gamma \cdot W \cdot \alpha^t$	$W = \beta \cdot e^{k \cdot \alpha^t}$	$W_f = W_i \cdot e^{\beta \cdot (k \cdot T_f - k \cdot T_i)} + \varepsilon_i$
Bertalanffy	$\frac{dW}{dt} = \eta \cdot W^{\frac{2}{3}} - \lambda \cdot W$	$W = \alpha \cdot [1 - \beta \cdot e^{-k \cdot t}]^3$	$W_f = W_i \cdot \left[\frac{1 - e^{k \cdot T_f}}{1 - e^{k \cdot T_i}} \right]^3 + \varepsilon_i$
Brody	$\frac{dW}{dt} = \gamma \cdot (\eta - \lambda \cdot W)$	$W = \alpha - \beta \cdot e^{-k \cdot t}$	$W_f = W_i - \beta \cdot [e^{k \cdot T_f} - e^{k \cdot T_i}] + \varepsilon_i$
Mitscherlich	$\frac{dW}{dt} = \gamma \cdot (\eta - W)$	$W = \beta \cdot (1 - e^{-k \cdot t})$	$W_f = W_i - \beta \cdot (K^{T_f} - K^{T_i}) + \varepsilon_i$
Weibull	$\frac{dW}{dt} = \eta \cdot t^\lambda - \gamma \cdot W \cdot t^\lambda$	$W = \alpha - \beta \cdot e^{-k \cdot t^m}$	$W_f = W_i - \beta \cdot (e^{-K \cdot T_f^\theta} - e^{-K \cdot T_i^\theta}) + \varepsilon_i$
Clutter e Jones	$\frac{dW}{dt} = \gamma \cdot W^m \cdot t^\lambda$	$W = (\alpha + \beta \cdot t^k)^{\frac{1}{\theta}}$	$W_f = [W_i^\theta + \beta (t_f^K - t_i^K)]^{\frac{1}{\theta}} + \varepsilon_i$
Modelo Proposto 01	$W = [(\beta_1 + \beta_2 \cdot e^{-k \cdot t})^{\beta_3} \cdot (\beta_4 \cdot e^{\beta_5 \cdot \alpha^t})]$	$W = \gamma \cdot [(1 + \beta \cdot e^{-K \cdot t}) \cdot e^{\lambda \cdot \alpha^t}]^\theta$	$W_f = W_i \cdot \left[\left(\frac{1 + \beta \cdot e^{-K \cdot T_f}}{1 + \beta \cdot e^{-K \cdot T_i}} \right) \cdot e^{\theta(\alpha^{T_f} - \alpha^{T_i})} \right]^\lambda + \varepsilon_i$
Modelo Proposto 02	$\frac{dW}{dt} = W \cdot (\alpha \cdot e^{k \cdot t} - \gamma \cdot e^{\lambda \cdot t})$	$W = \alpha \cdot e^{\beta \cdot e^{k \cdot t} + \theta \cdot e^{\lambda \cdot t}}$	$W_f = W_i \cdot e^{\beta(e^{k \cdot T_f} - e^{k \cdot T_i}) + \theta(e^{\lambda \cdot T_f} - e^{\lambda \cdot T_i})} + \varepsilon_i$
Modelo Proposto 03	$\frac{dW}{dt} = W^m \cdot (\alpha_1 \cdot t^{K_1} - \gamma_1 \cdot t^{\lambda_1})$	$W = \theta \cdot (\alpha \cdot t^K + \beta \cdot t^\lambda + 1)^\theta$	$W_f = W_i \cdot \left(\frac{\beta \cdot t_f^K + \theta \cdot t_f^\alpha + 1}{\beta \cdot t_i^K + \theta \cdot t_i^\alpha + 1} \right)^\lambda + \varepsilon_i$
Modelo Proposto 04	$\frac{dW}{dt} = \alpha \cdot W^m \cdot t^\lambda - \gamma \cdot W \cdot t^\lambda$	$W = \alpha \cdot (1 + \beta \cdot e^{\theta \cdot t^K})^\varphi$	$W_f = W_i \cdot \left(\frac{1 + \beta \cdot e^{\theta \cdot T_f^K}}{1 + \beta \cdot e^{\theta \cdot T_i^K}} \right)^\alpha + \varepsilon_i$

As deduções de todos modelos estão no Apêndice A e no anexo.

Utilizou-se para a análise de regressão dos modelos não lineares intrinsecamente não lineares o procedimento NONLINEAR do Programa Computacional SYSTAT 05 for Windows (Demo) sendo empregado o método Simplex para calcular as estimativas dos parâmetros. (Anexo B)

Os critérios usados nas comparações das equações foram o Índice de Ajuste (I.A.) (SCHALAEGL, 1981) e a distribuição gráfica dos resíduos em %, (E_i) conforme se segue:

$$IA\% = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \cdot 100$$

Em que:

IA% = Índice de Ajuste em percentagem;

Y_i = Valor observado (real);

\hat{Y}_i = Valor estimado pela equação de regressão;

\bar{Y} = Médias dos valores observados.

Para equações ajustadas pelo método dos mínimos quadrados, o índice de ajuste é igual ao coeficiente de determinação (R^2).

Para o cálculo da análise da distribuição gráfica residual, os resíduos foram obtidos pela expressão:

$$E_i = \left(\frac{Y_i - \hat{Y}_i}{Y_i} \right) \cdot 100$$

Sendo:

E_i = resíduo da i-ésima observação;

Y_i = Variável dependente observada;

\hat{Y}_i = Variável dependente estimada pela regressão.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Estimativas dos parâmetros das equações não lineares

Nas Tabelas 4 e 5, são apresentadas as estimativas dos parâmetros dos modelos testados obtidos através da modelagem de crescimento de leucena na Estação citada anteriormente juntamente com os Índices de Ajustes.

Na Tabela 6, são apresentadas as estimativas dos parâmetros dos modelos testados, obtidos através da modelagem de crescimento de tubarão-junteiro juntamente com os Índice de Ajustes.

Tabela 4 – Modelos testados e os seus respectivos parâmetros estimados, através da modelagem de crescimento de leucena, no tratamento 1, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE e seus Índices de Ajuste.

TRATAMENTO 1						
MODELO	PARÂMETROS					ÍNDICES
	\hat{K}	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	IA (%)
Chapman-Richards	-0,026143215	0,724701552	X	X	X	99,110
Bertalanffy	-0,138007134	2/3	X	X	X	97,004
Brody	-0,028475573	4,535336554	X	X	X	99,178
Silva-Bailey	0,963046552	-1,400905270	X	X	X	99,016
Mitscherlich	0,971926035	4,535336554	X	X	X	99,178
Weibull	0,041556412	4,837531361	0,907562809	X	X	99,184
Clutter e Jones	-0,859050115	2,477980462	-0,540561330	X	X	98,979
Modelo Proposto 01	0,214684238	-0,675621649	-0,675625749	0,966738738	1,791687394	99,135
Modelo Proposto 02	-0,214684238	-1,741263269	-1,213841698	-0,033812604	X	99,150
Modelo Proposto 03	7,214626582	5,109767935	3,068280662	7,214621893	0,033015192	98,330
Modelo Proposto 04	0,413510405	2,524643222	-0,662373361	-2,942888544	X	99,109

Observa-se que todos os modelos resultaram em equações com altos valores dos Índices de Ajuste, sendo que a equação de Bertalanffy apresentou o menor I.A. porque trabalha com valores do parâmetro $m=2/3$, isto é, um valor fixo.

Os modelos Brody e Mitscherlich, com valores idênticos a 99,178. Observando as estruturas desses modelos, observa-se que eles são idênticos, ou melhor, iguais, pois se considerar o e^k do modelo de Brody igual a uma constante K , resulta, exatamente, no modelo de Mitscherlich. Por esta razão, todos os resultados, isto é, I.A., curvas de crescimento e gráficos dos resíduos foram iguais.

Mesmo não se tendo nenhum critério para afirmar que tais modelos apresentam resultados estatisticamente diferentes, observa-se que o modelo de Weibull foi o que apresentou maior valor de I.A.=99,184 e melhor distribuição residual.

Tabela 5 – Modelos testados e os seus respectivos parâmetros estimados, através da modelagem de crescimento de leucena, no tratamento 2, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE e seus Índices de Ajuste.

TRATAMENTO 2						
MODELO	PARÂMETROS					ÍNDICES IA (%)
	\hat{K}	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	
Chapman-Richards	-0,024752956	0,637527563	X	X	X	99,018
Bertalanffy	-0,139680117	2/3	X	X	X	96,589
Brody	-0,028723748	4,512904360	X	X	X	99,067
Silva-Bailey	0,964689536	0,294084585	X	X	X	98,844
Mitscherlich	0,971684857	4,512904360	X	X	X	99,067
Weibull	0,078534725	5,520878931	0,755432332	X	X	99,112
Clutter e Jones	0,000002403	0,477081E+06	1,016279492	X	X	98,885
Modelo Proposto 01	0,167924411	-0,359021318	-1,208931618	0,964617029	0,986636873	98,925
Modelo Proposto 02	-0,030002353	-0,980339884	-2,249096848	-0,209695335	X	99,108
Modelo Proposto 03	0,867289562	-0,061950990	1,055287925	0,440430126	1,664653677	98,904
Modelo Proposto 04	0,248836729	4,792309750	-1,641899757	-4,534227659	X	99,047

Observa-se que todos os modelos, de igual modo ao tratamento 1, resultaram em equações com altos valores dos Índices de Ajuste, sendo novamente a equação de Bertalanffy a apresentar o menor I.A. devido ao mesmo motivo: o parâmetro $m=2/3$, isto é, um valor fixo.

Apesar de não se ter nenhum critério para afirmar que tais modelos apresentam resultados estatisticamente diferentes, observa-se que o modelo de Weibull foi o que apresentou maior valor de I.A.=99,112 e melhor distribuição residual.

Pelo fato do tratamento 2 levar em consideração o efeito do composto orgânico, ocorreu maior variabilidade, resultando em valor de I.A. inferiores ao tratamento 1.

Tabela 6 – Modelos testados e os seus respectivos parâmetros estimados, através da modelagem de crescimento de tubarão-junteiro capturados na costa marinha do estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989 e seus Índices de Ajuste.

MODELO	PARÂMETROS					ÍNDICES
	\hat{K}	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	\hat{a}	$\hat{\lambda}$	IA (%)
Chapman-Richards	0,096460935	0,293867574	X	X	X	99,209
Bertalanffy	-2,892934722	2/3	X	X	X	95,297
Brody	-0,069733570	0,113773E+03	X	X	X	99,542
Silva-Bailey	0,856528476	-1,398274282	X	X	X	99,569
Mitscherlich	0,932642271	0,113773E+03	X	X	X	99,542
Weibull	-0,052770257	0,804504E+02	1,345674826	X	X	99,604
Clutter e Jones	4,712596412	0,340549E+15	9,989990528	X	X	99,634
Modelo Proposto 01	1,8981880293	0,153731E+03	-0,358496E+03	0,842513228	0,003530467	99,671
Modelo Proposto 02	-0,171671127	-1,264685774	4,129524678	0,001613951	X	99,715
Modelo Proposto 03	0,000000143	-1,000000140	0,000000228	0,643421647	0,488668842	99,588
Modelo Proposto 04	1,123939251	0,000236984	-0,127864034	-0,547798E+04	X	99,580

Observa-se que para os tubarões-junteiros os resultados foram ligeiramente superiores aos de leucena, o que provavelmente se justifica pelo fato de que para os tubarões a competição entre eles é menor que em plantio florestais, e talvez haja menor variabilidade genética entre eles quando comparados com a leucena, resultando

portanto em dados mais homogêneos e melhores ajustes, mesmo que, estatisticamente, não se possa admitir diferenças entre os comportamentos dos modelos em leucena e tubarões.

Entretanto, os modelos propostos se comportaram melhor para este conjunto de dados, sendo que o modelo Proposto 2 foi o que apresentou maior I.A. = 99,715.

Na realidade, praticamente, não existem diferenças entre os modelos propostos e os usados como critérios comparativos. Entretanto, isto era de se esperar dado aos altos valores de I.A. encontrados para os modelos tradicionais, justificando seus freqüentes usos na literatura florestal e pesqueira.

O intuito de desenvolver novos modelos teve como princípio a aplicabilidade da modelagem matemática em áreas biológicas, uma vez que as diferentes situações encontradas, podem gerar novas hipóteses biológicas e conseqüentemente novos modelos. E isto é um dos objetivos da Biometria, que fundamentalmente, é uma zona de transição (interseção) entre a matemática / estatística e a biologia.

4.2 Análise das curvas de crescimento e da distribuição gráfica residual dos modelos testados

As curvas de crescimento para a leucena estão nas Figuras 2 a 23 e a distribuição gráfica residual nas Figuras 24 a 45, para o tubarão-junteiro estão representados de 46 a 56 e 57 a 67, respectivamente.

Analisando as figuras citadas acima, tem-se a confirmação de que os modelos apresentados são em geral bons para a estimativa do crescimento em altura para a leucena e dos comprimentos para o tubarão, sendo ainda perceptível, graficamente que o modelo de Bertalanffy tem apresentado um resultado menos ajustado à massa de dados.

Para as figuras 2 a 23 e 46 a 56 temos:

V Est. = Valor Estimado

V. Real = Valor Real ou Valor experimental

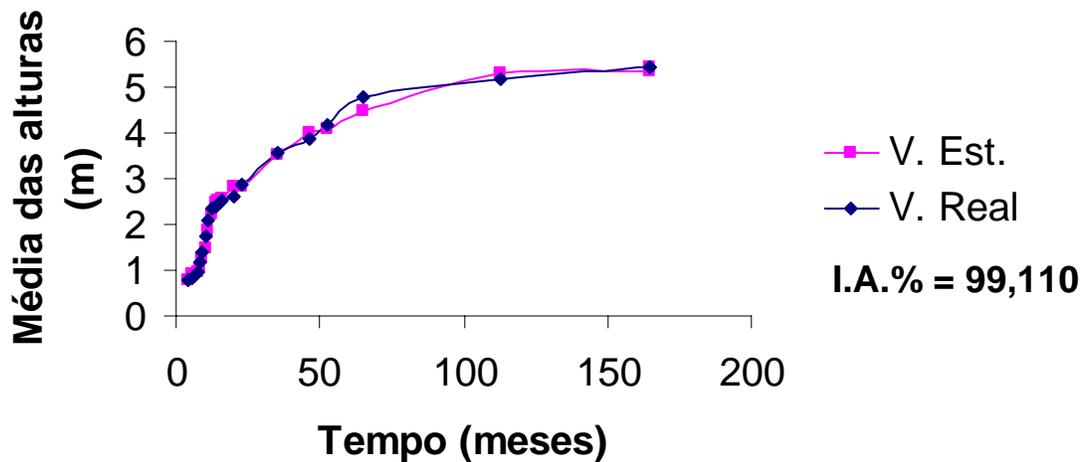


Figura 2 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Chapman-Richards para o tratamento 1 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE

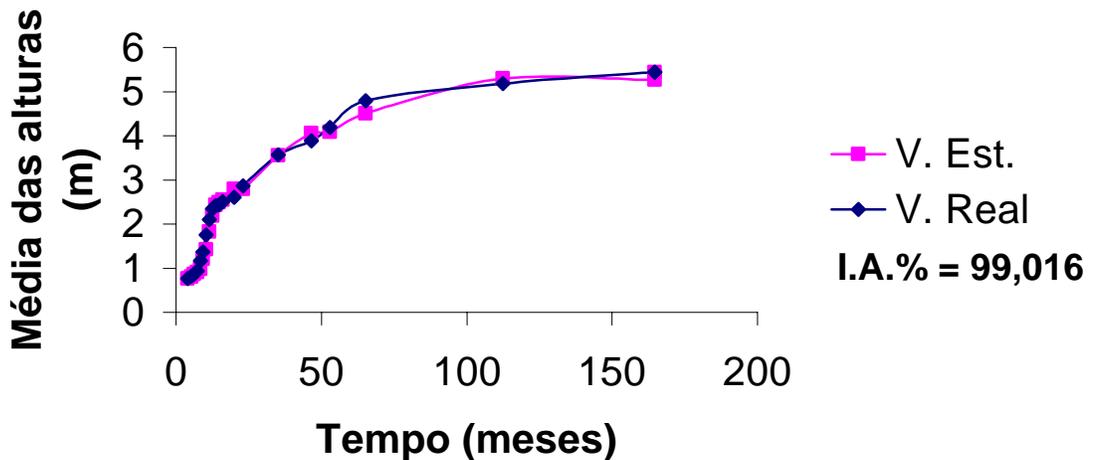


Figura 3 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Silva-Bailey para o tratamento 1 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE

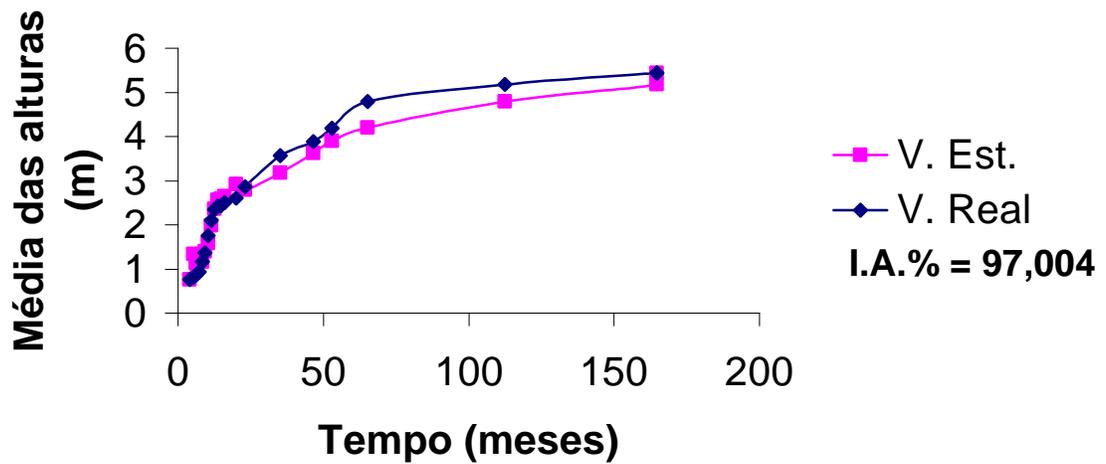


Figura 4 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Bertalanffy para o tratamento 1 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE

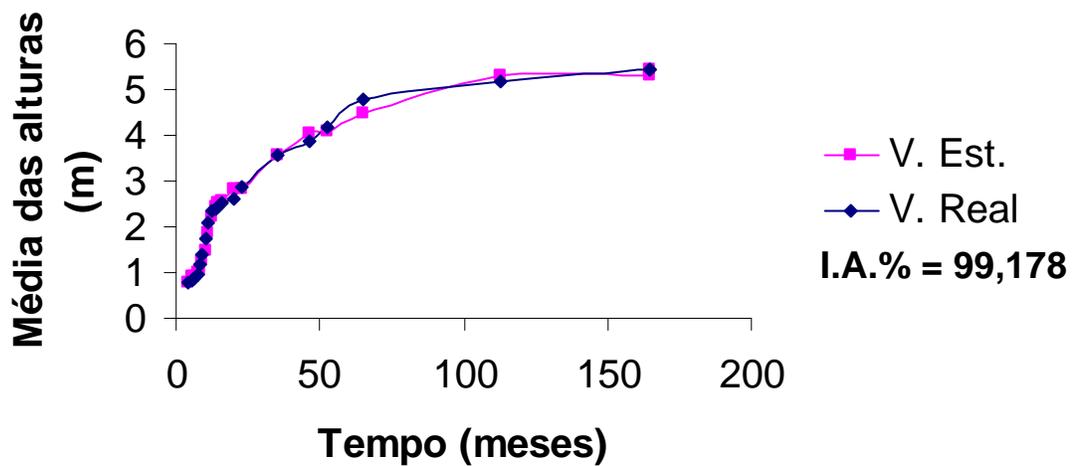


Figura 5 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Brody para o tratamento 1 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE

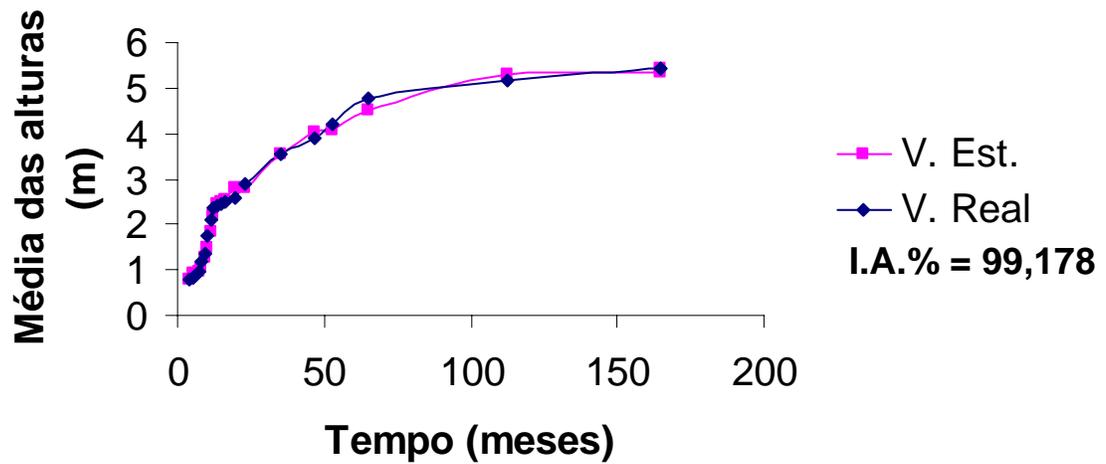


Figura 6 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Mitscherlich para o tratamento 1 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE

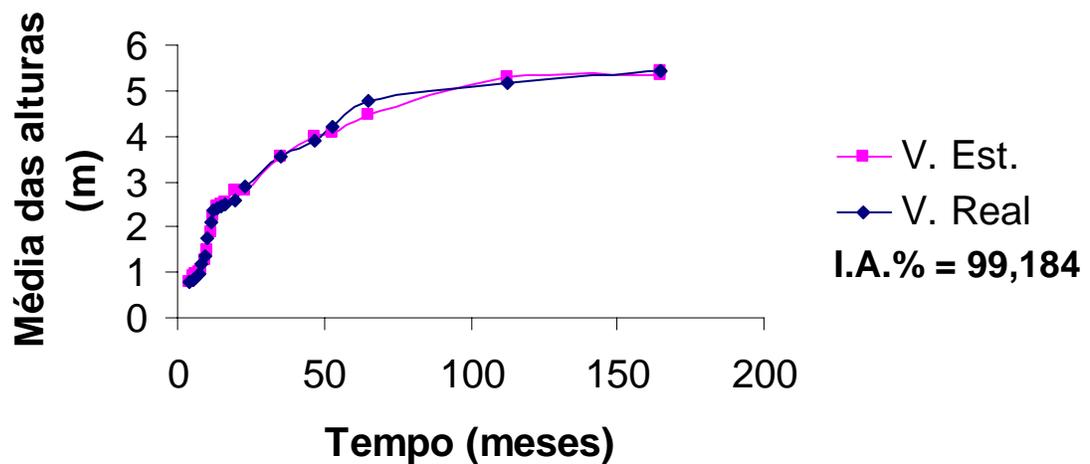


Figura 7 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Weibull para o tratamento 1 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE

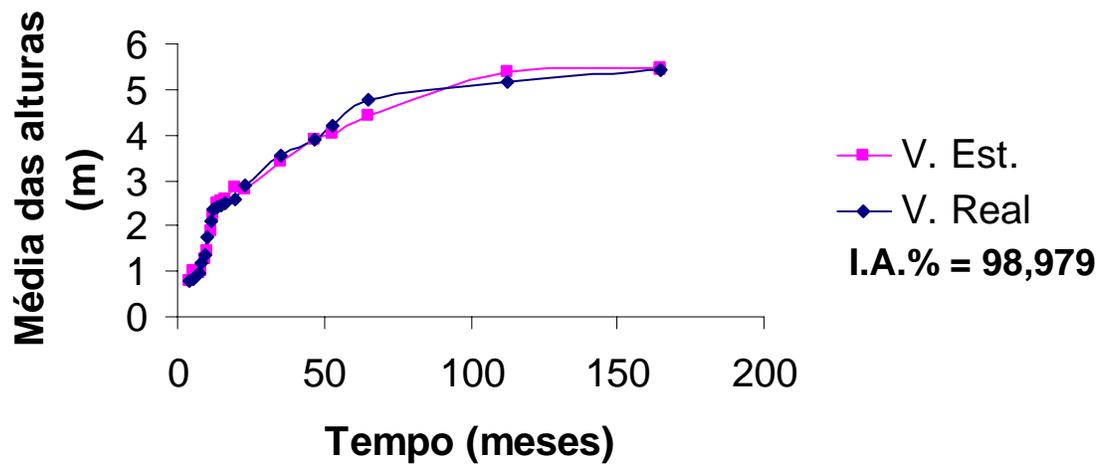


Figura 8 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Clutter e Jones para o tratamento 1 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE

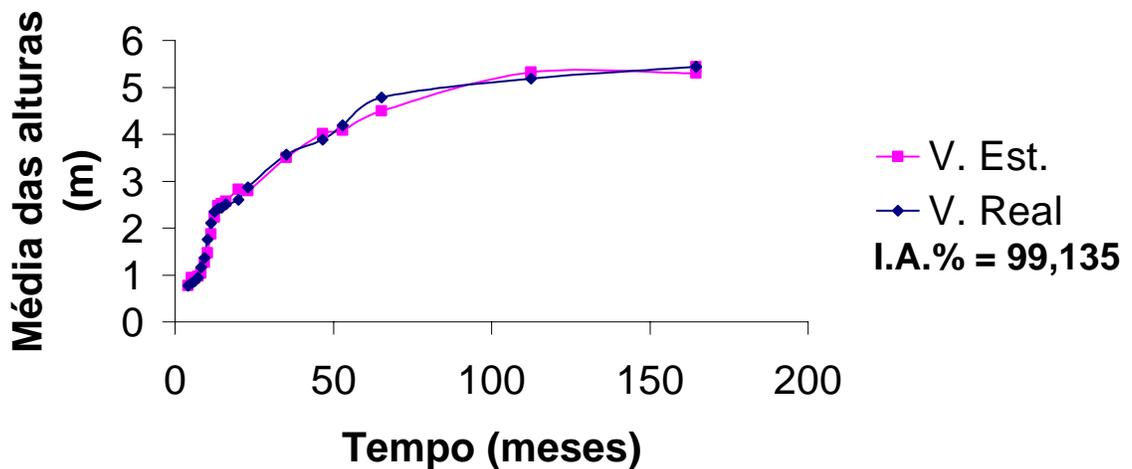


Figura 9 - Curvas de crescimento real e estimada pelo Modelo Proposto 1 para o tratamento 1 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE

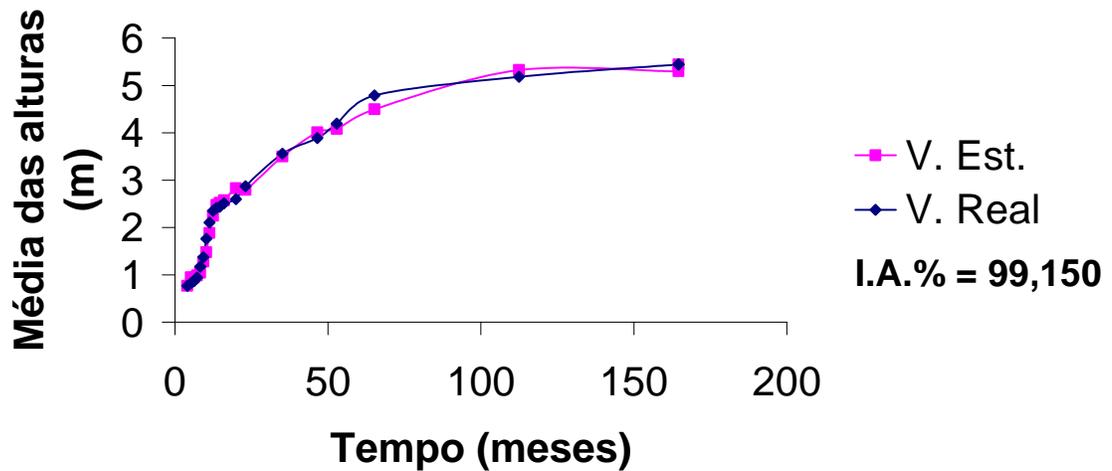


Figura 10 - Curvas de crescimento real e estimada pelo Modelo Proposto 2 para o tratamento 1 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE

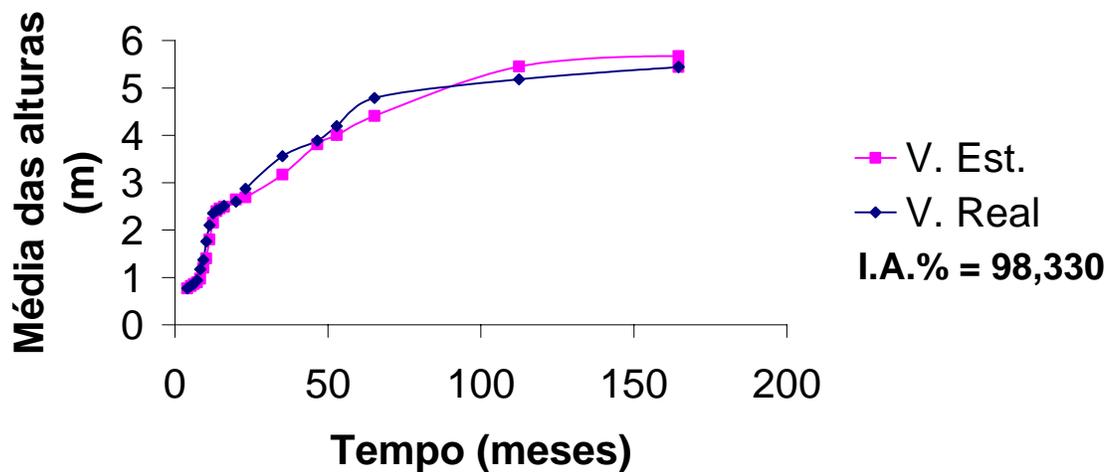


Figura 11 - Curvas de crescimento real e estimada pelo Modelo Proposto 3 para o tratamento 1 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE

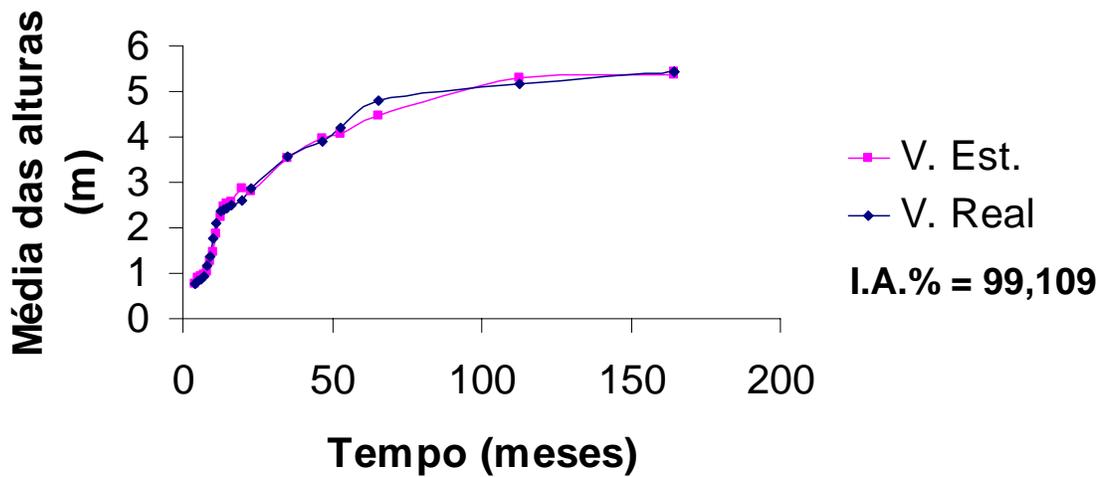


Figura 12 - Curvas de crescimento real e estimada pelo Modelo Proposto 4 para o tratamento 1 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE

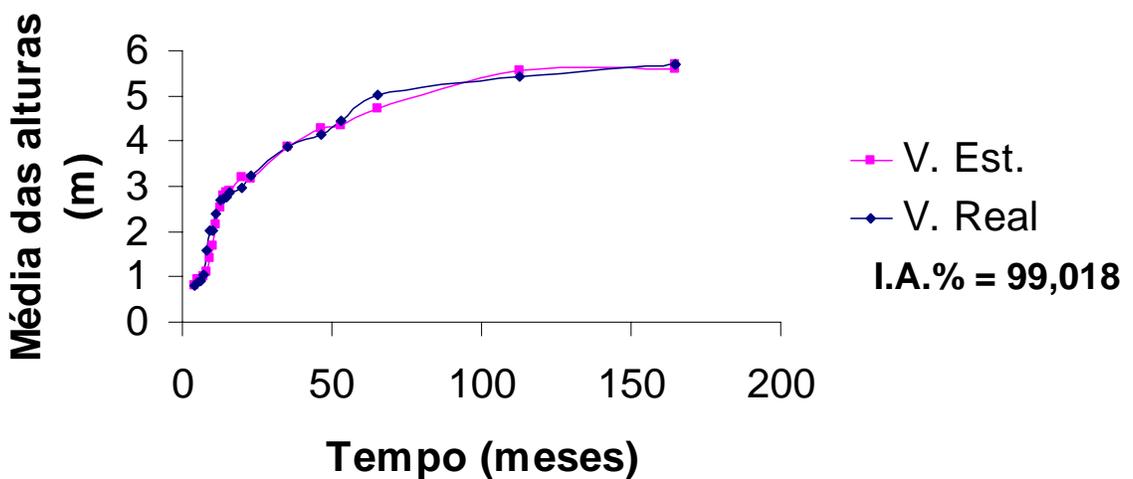


Figura 13 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Chapman-Richards para o tratamento 2 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE

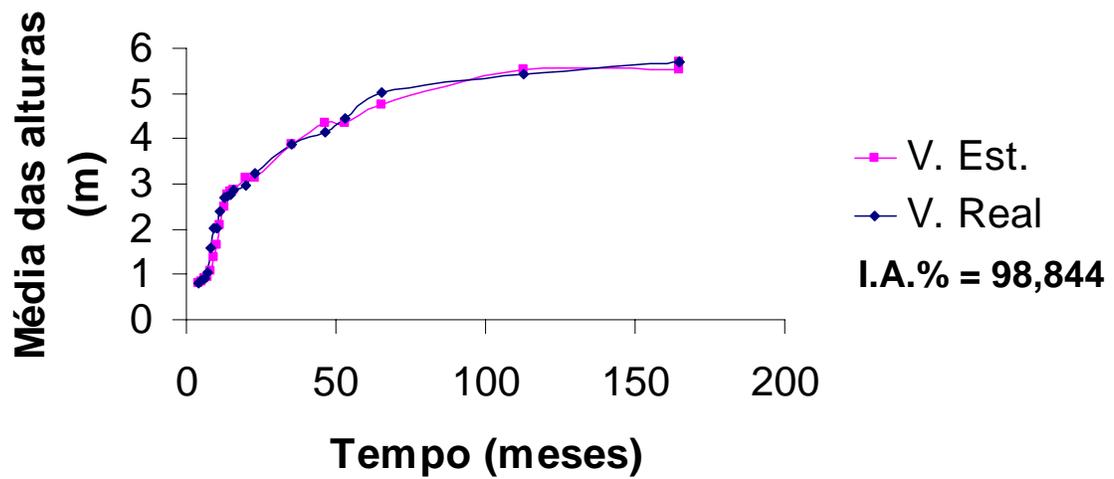


Figura 14 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Silva-Bailey para o tratamento 2 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE

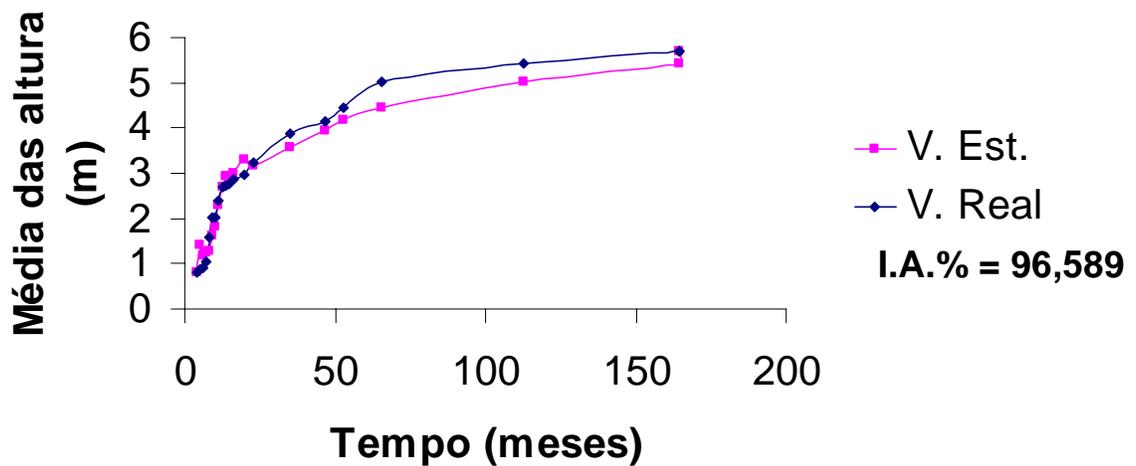


Figura 15 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Bertalanffy para o tratamento 2 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE

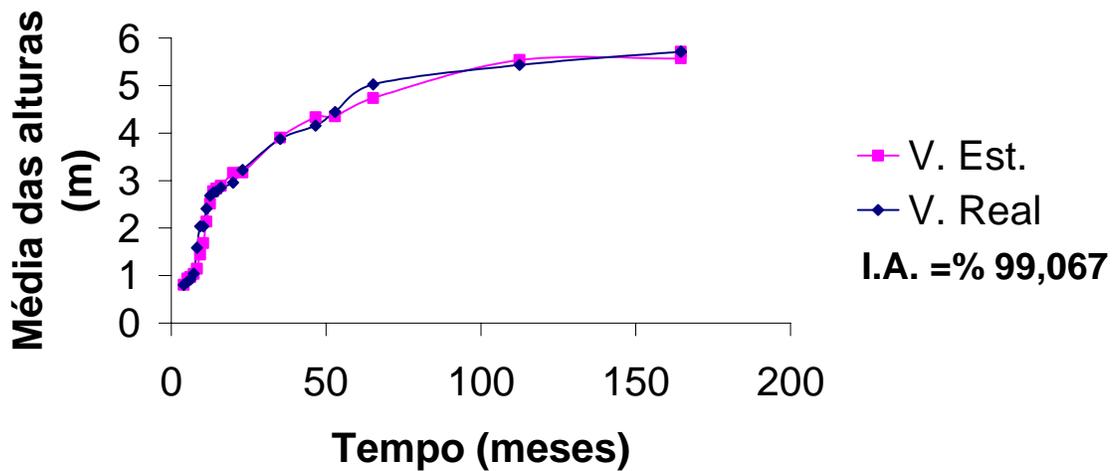


Figura 16 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Brody para o tratamento 2 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE

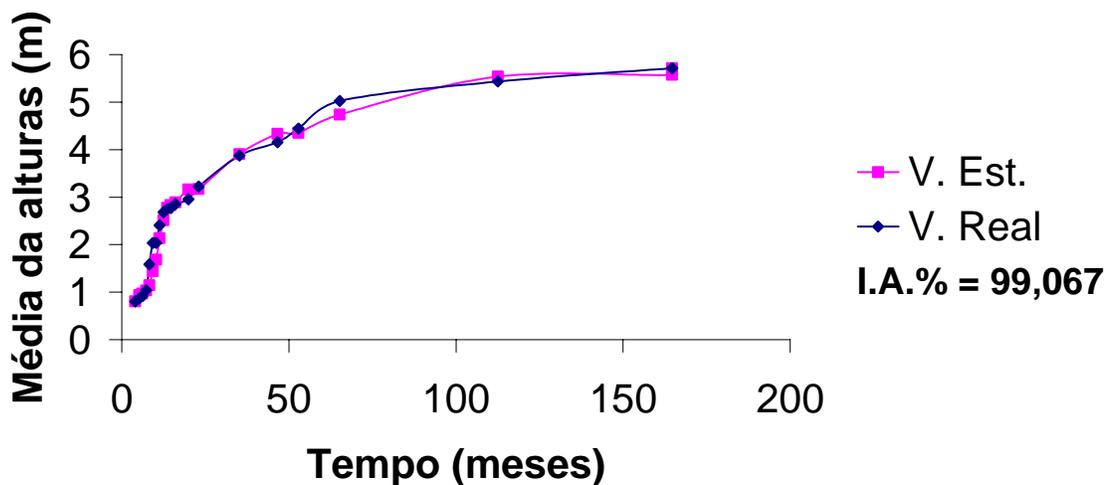


Figura 17 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Mitscherlich para o tratamento 2 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE

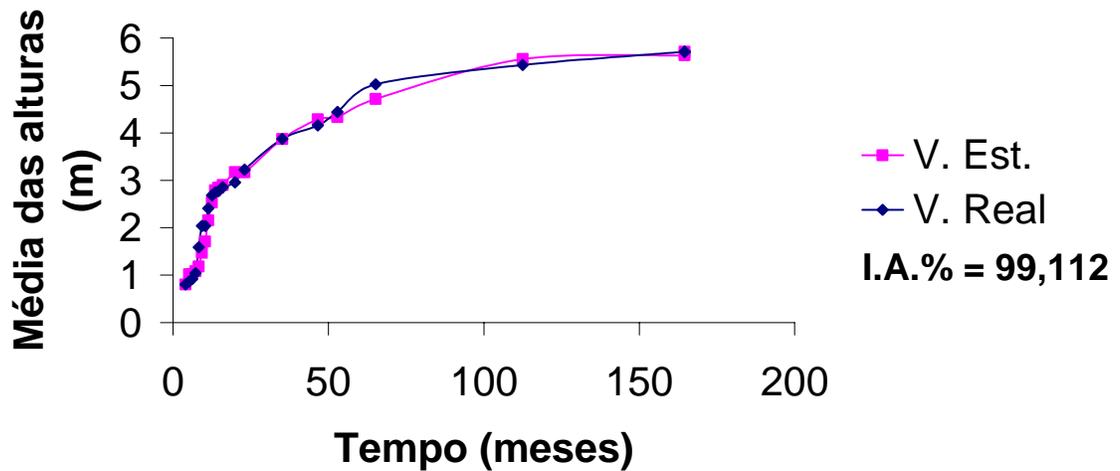


Figura 18 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Weibull para o tratamento 2 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE

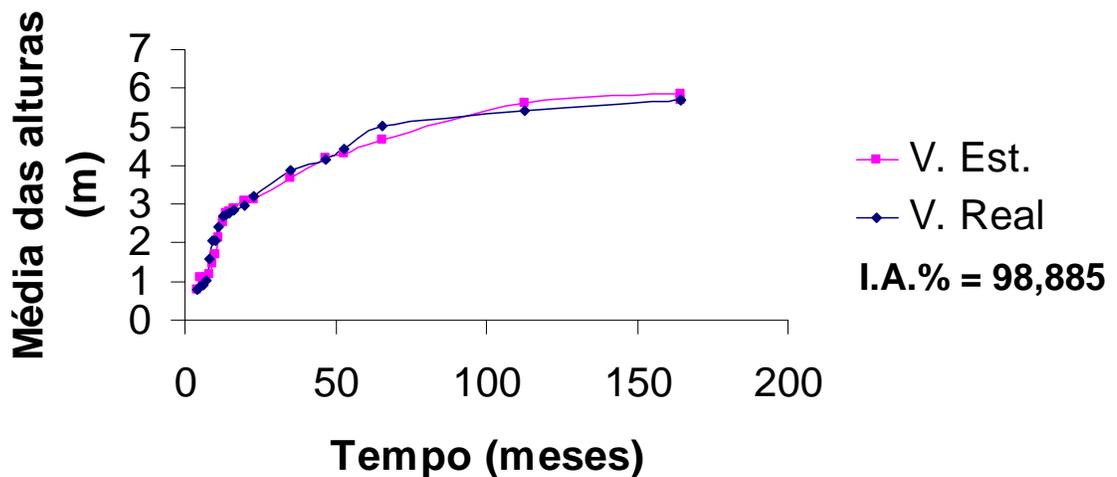


Figura 19 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Clutter e Jones para o tratamento 2 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE

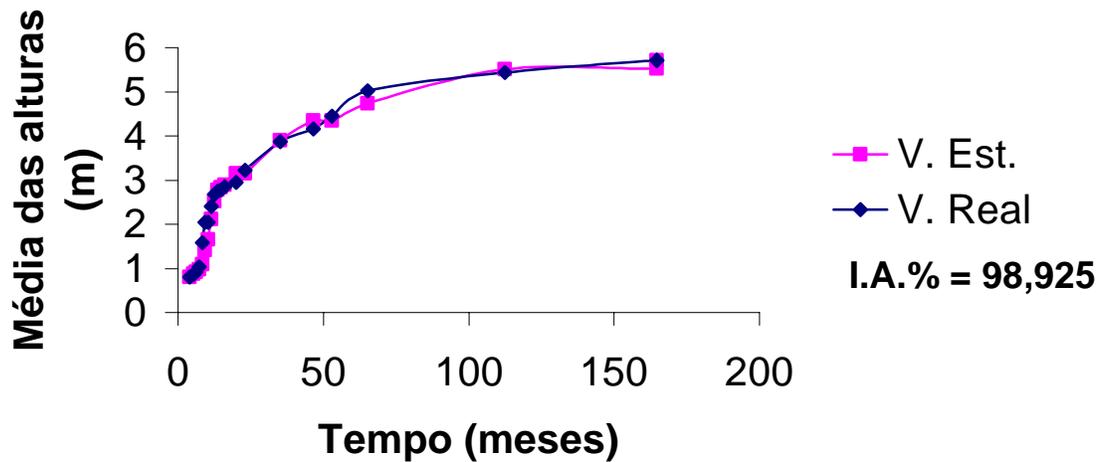


Figura 20 - Curvas de crescimento real e estimada pelo Modelo Proposto 1 para o tratamento 2 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE

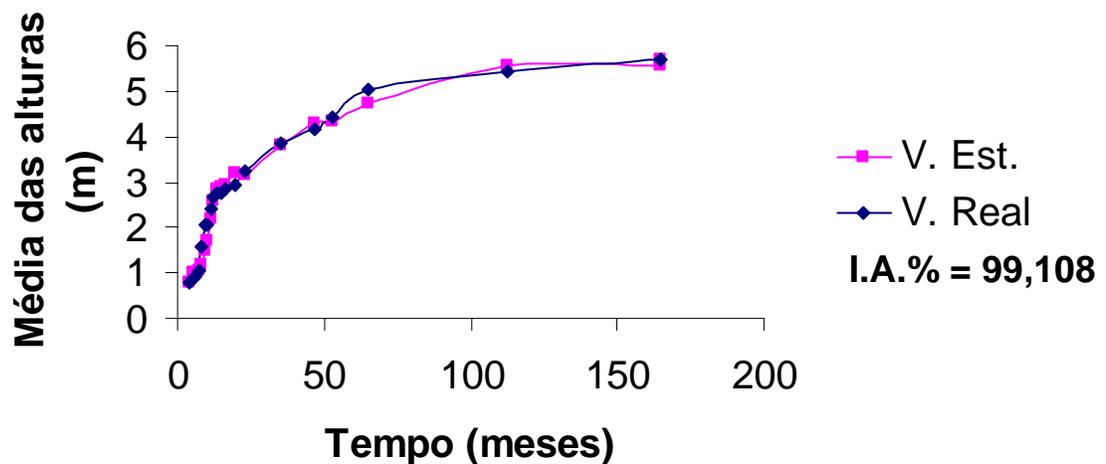


Figura 21 - Curvas de crescimento real e estimada pelo Modelo Proposto 2 para o tratamento 2 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE

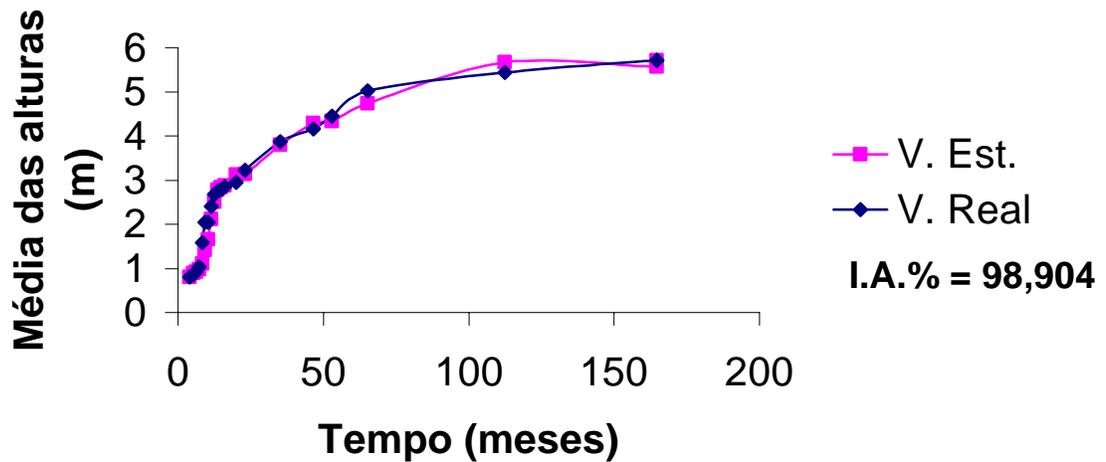


Figura 22 - Curvas de crescimento real e estimada pelo Modelo Proposto 3 para o tratamento 2 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE

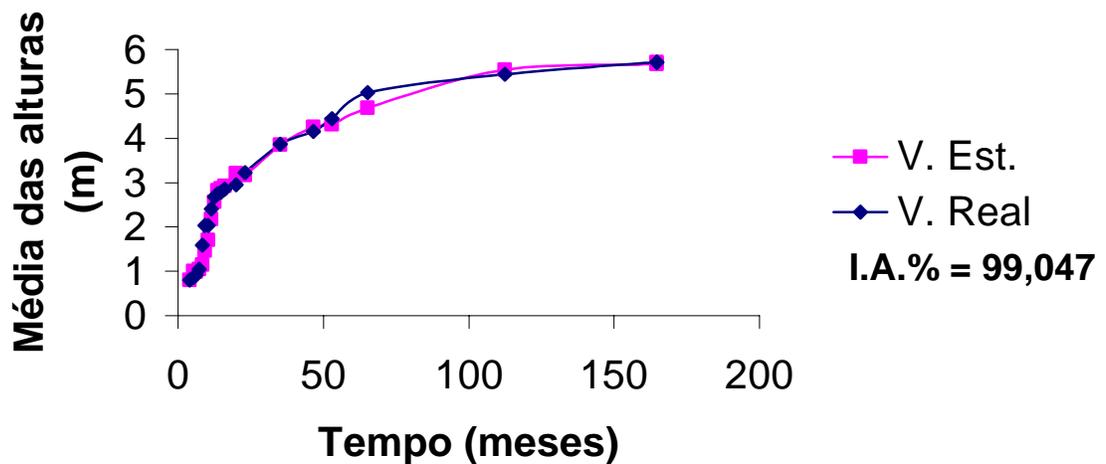


Figura 23 - Curvas de crescimento real e estimada pelo Modelo Proposto 4 para o tratamento 2 de leucena, na Estação Experimental da Empresa Pernambucana de Pesquisa Agropecuária (IPA), em Caruaru – PE

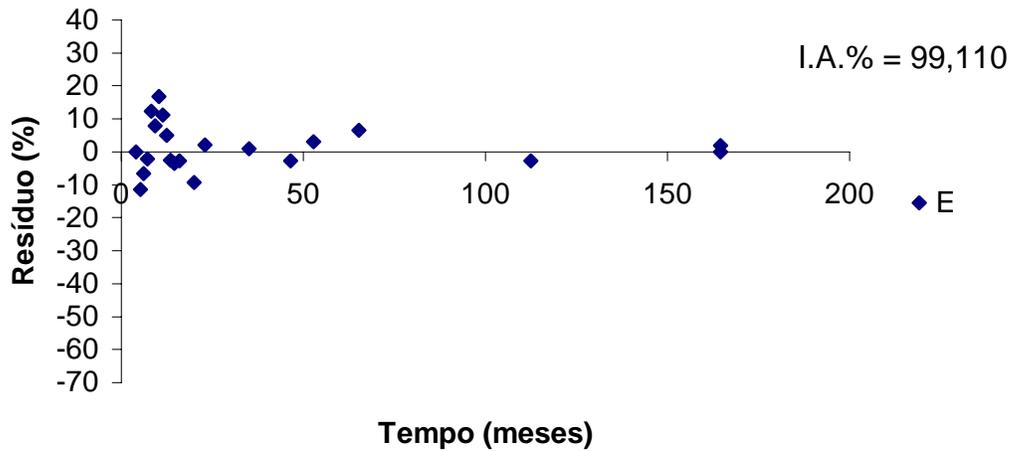


Figura 24 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Chapman-Richards para a média do tratamento 1

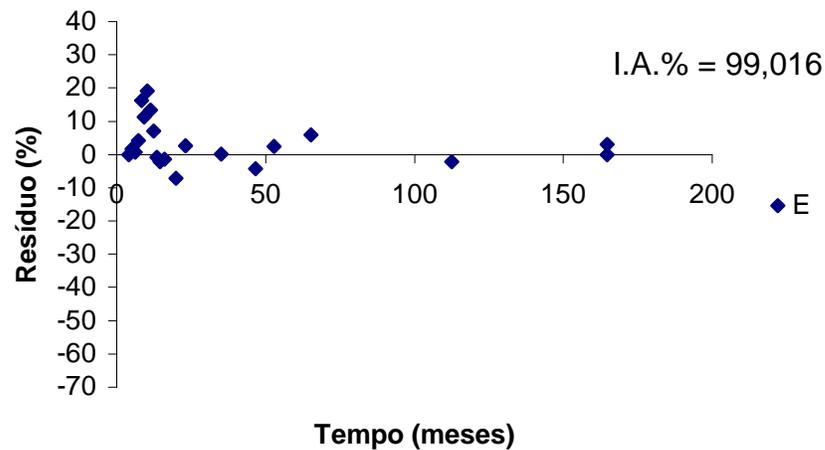


Figura 25 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Silva-Bailey para a média do tratamento 1

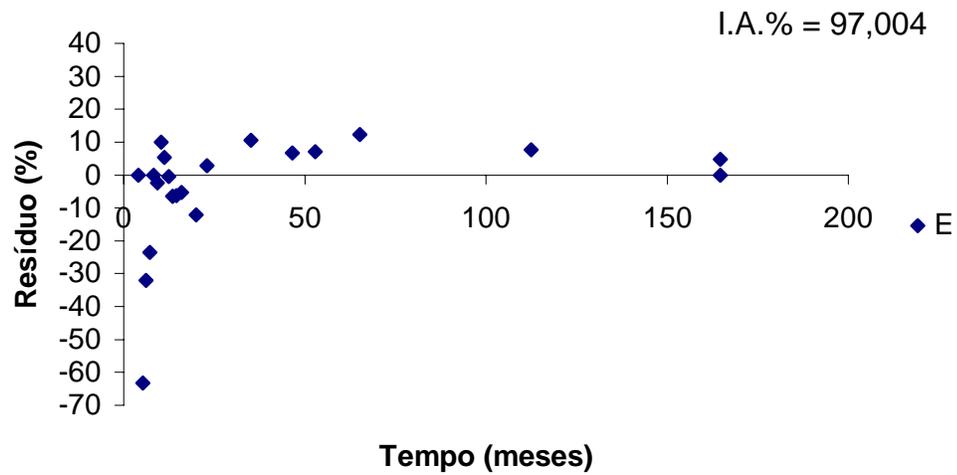


Figura 26 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Bertalanffy para a média do tratamento 1

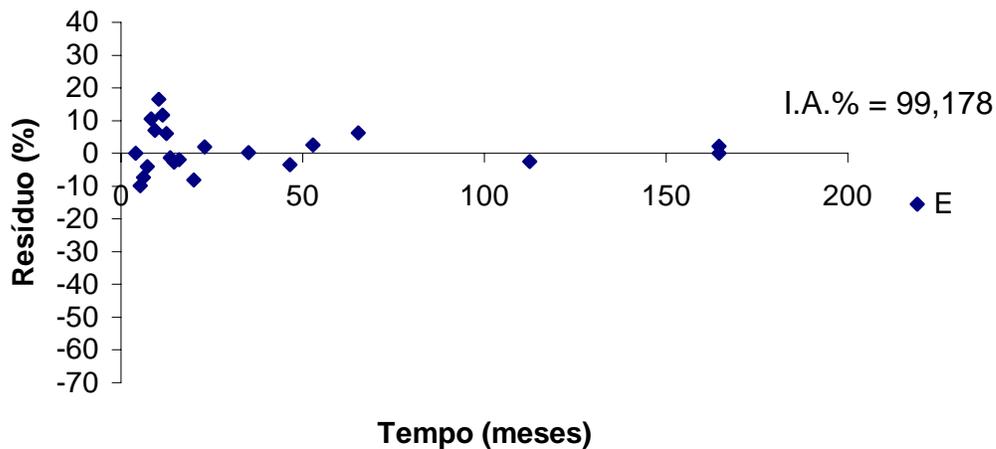


Figura 27 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Brody para a média do tratamento 1

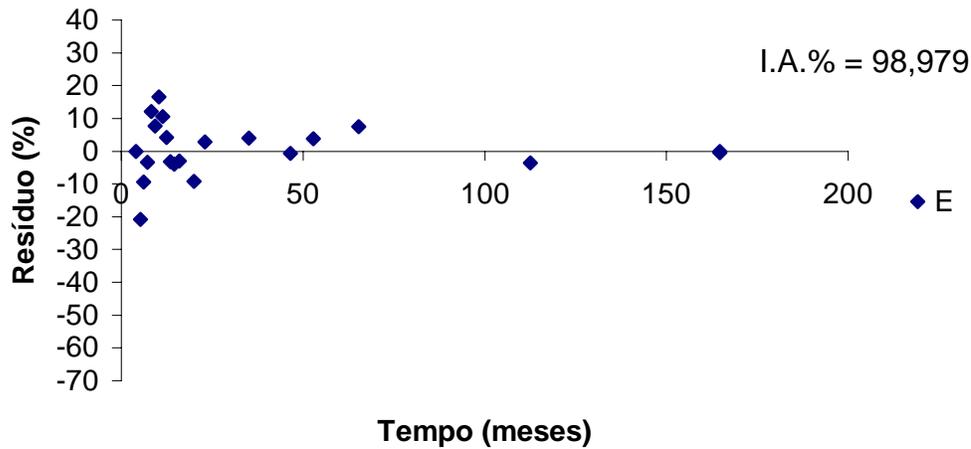


Figura 30 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Clutter e Jones para a média do tratamento 1

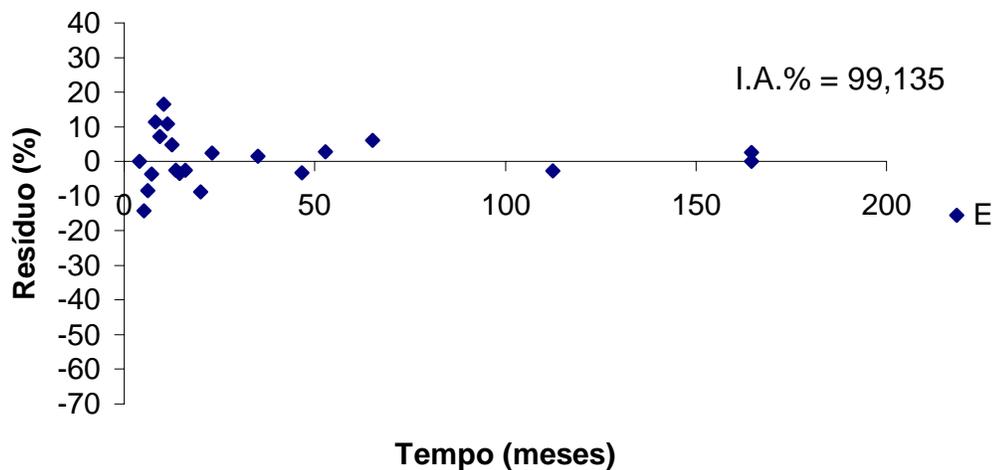


Figura 31 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o Modelo Proposto 1 para a média do tratamento 1

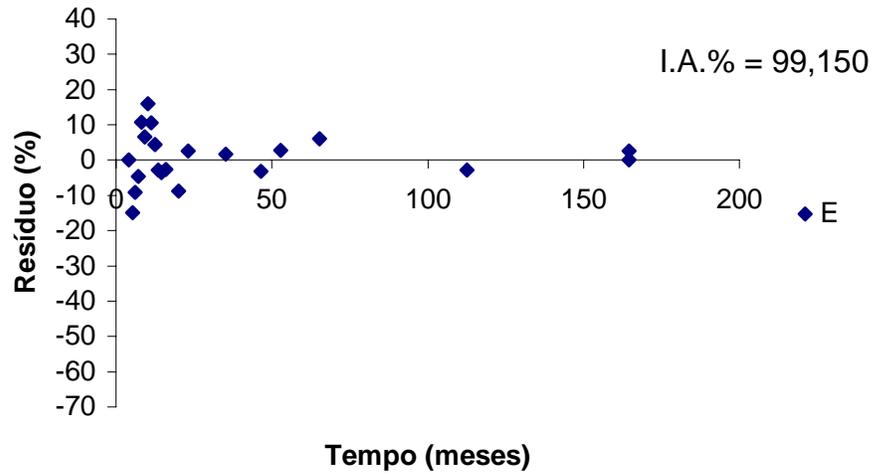


Figura 32 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o Modelo Proposto 2 para a média do tratamento 1

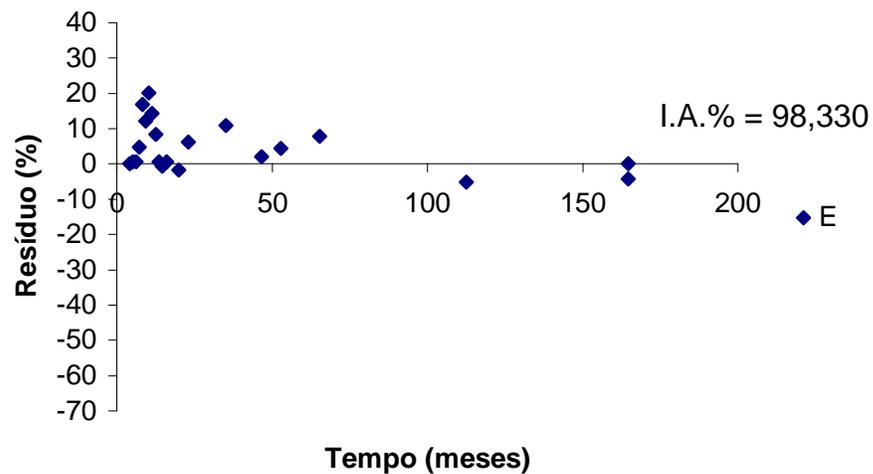


Figura 33 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o Modelo Proposto 3 para a média do tratamento 1

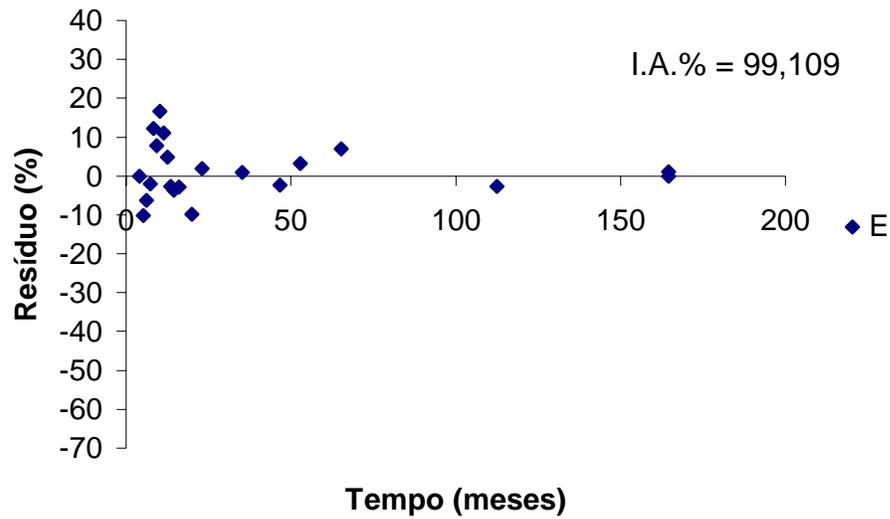


Figura 34 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o Modelo Proposto 4 para a média do tratamento 1

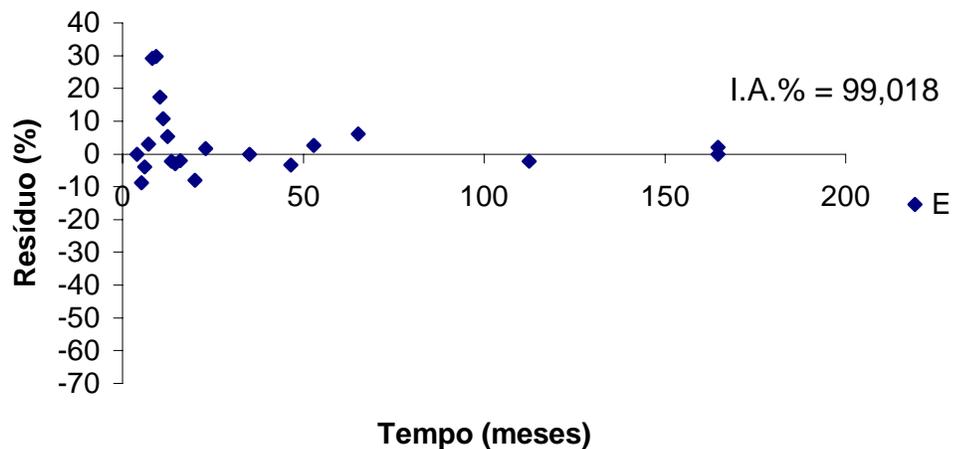


Figura 35 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Chapman-Richards para a média do tratamento 2

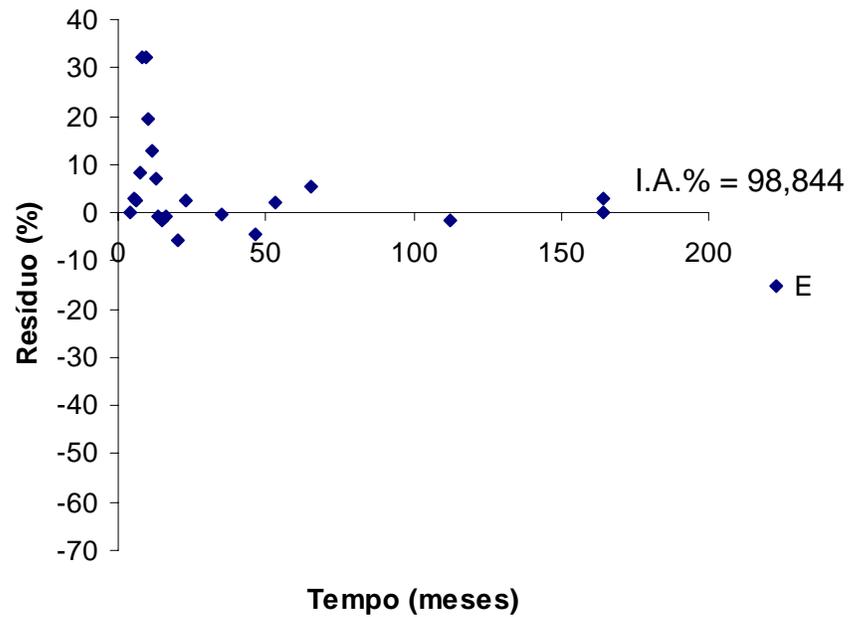


Figura 36 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Silva-Bailey para a média do tratamento 2

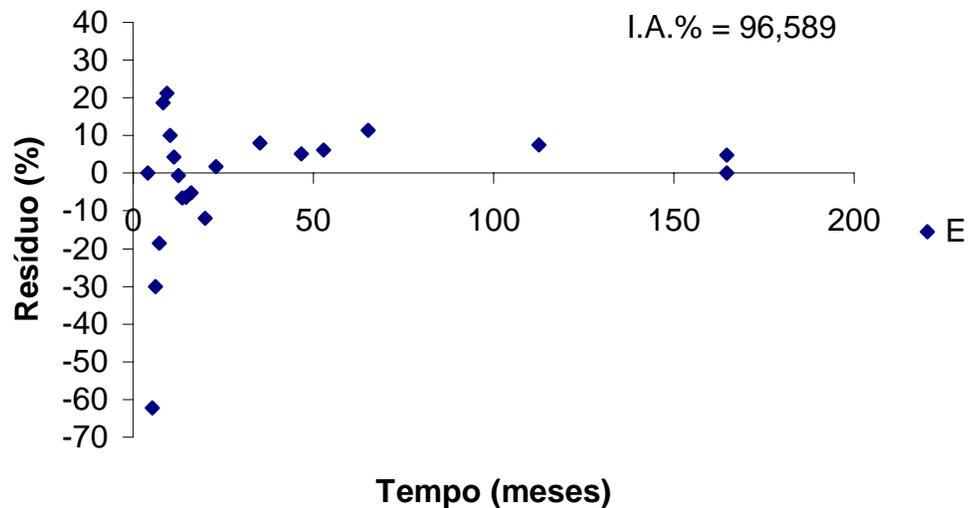


Figura 37 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Bertalanffy para a média do tratamento 2

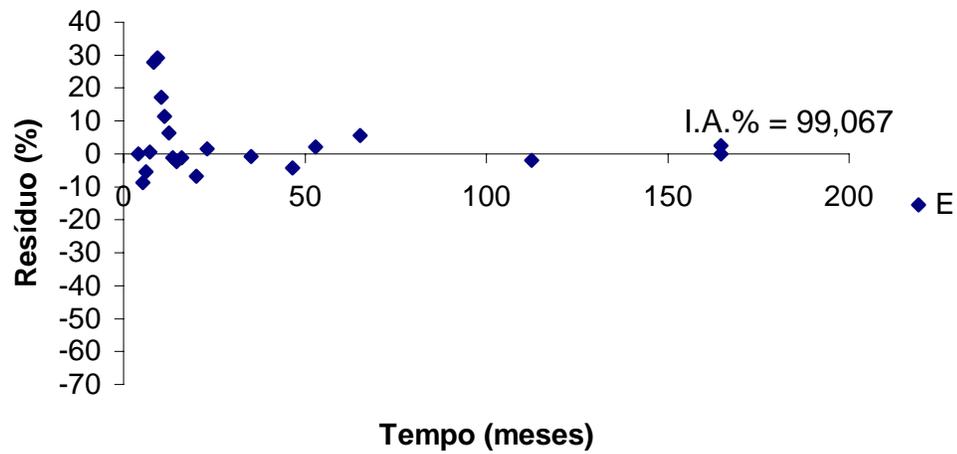


Figura 38 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Brody para a média do tratamento 2

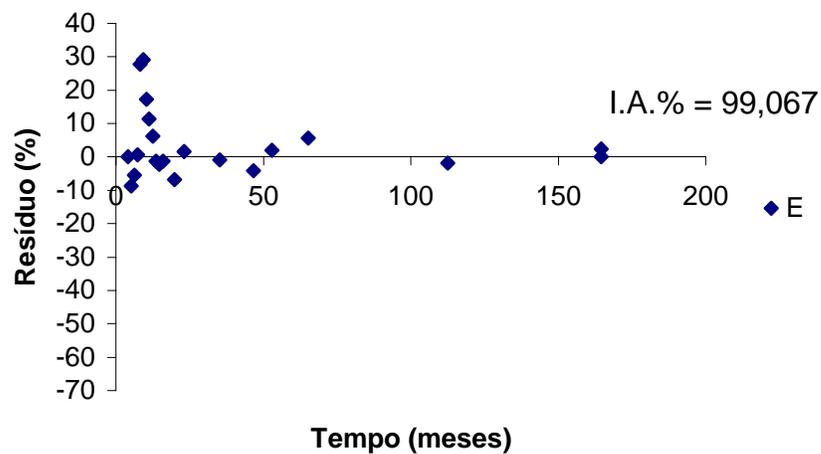


Figura 39 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Mitscherlich para a média do tratamento 2

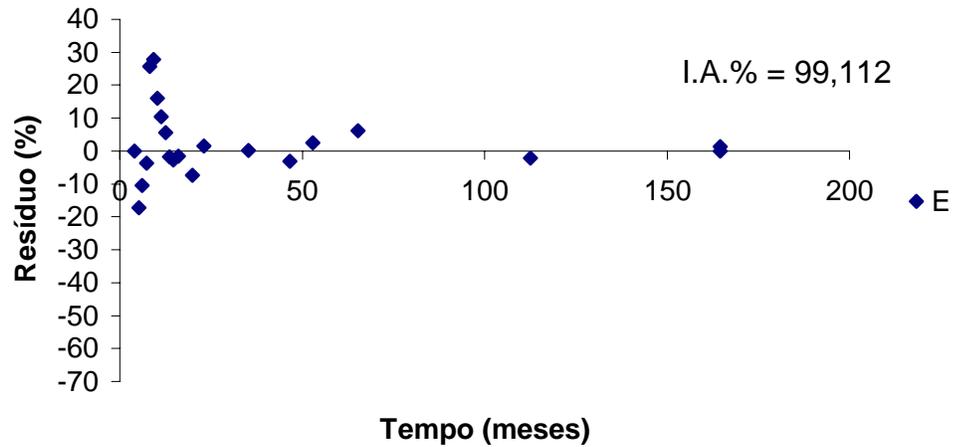


Figura 40 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Weibull para a média do tratamento 2

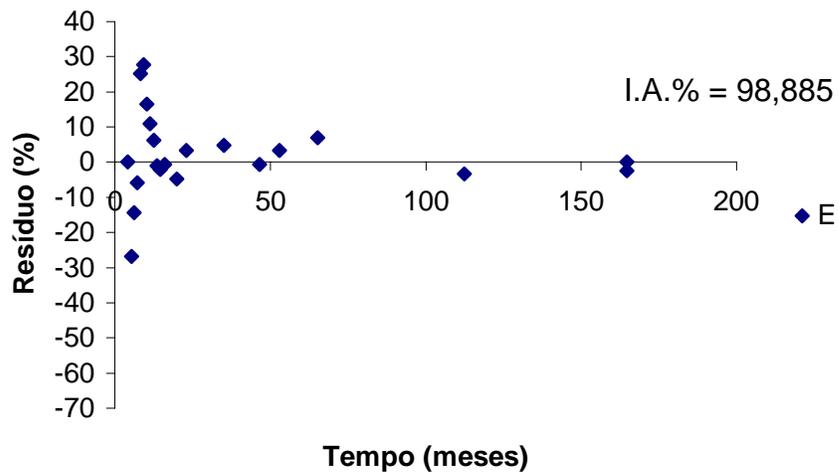


Figura 41 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o modelo de Clutter e Jones para a média do tratamento 2

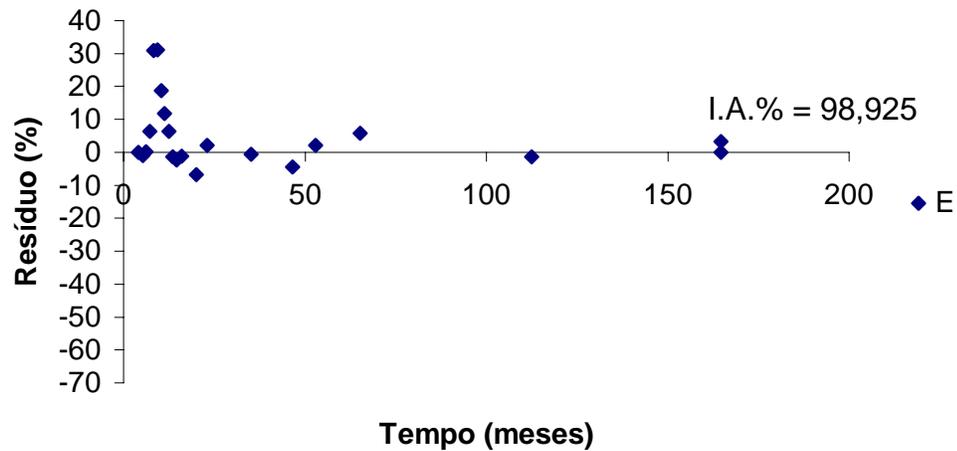


Figura 42 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o Modelo Proposto 1 para a média do tratamento 2

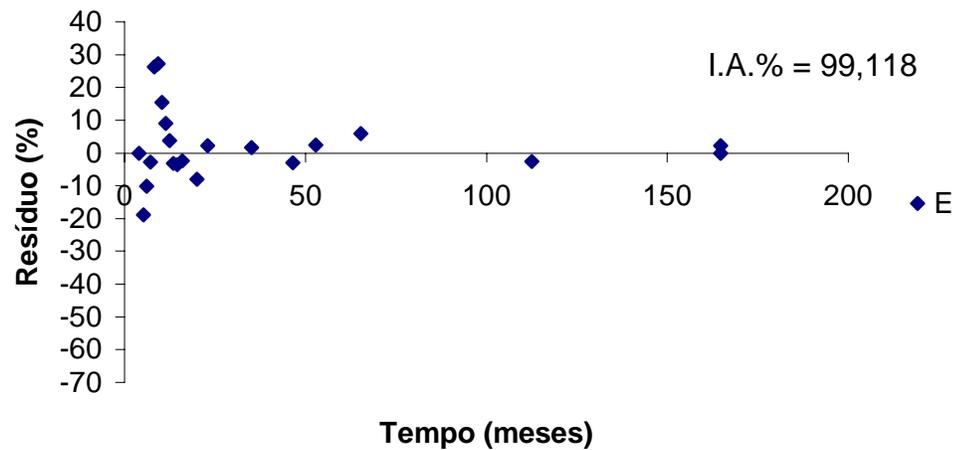


Figura 43 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o Modelo Proposto 2 para a média do tratamento 2

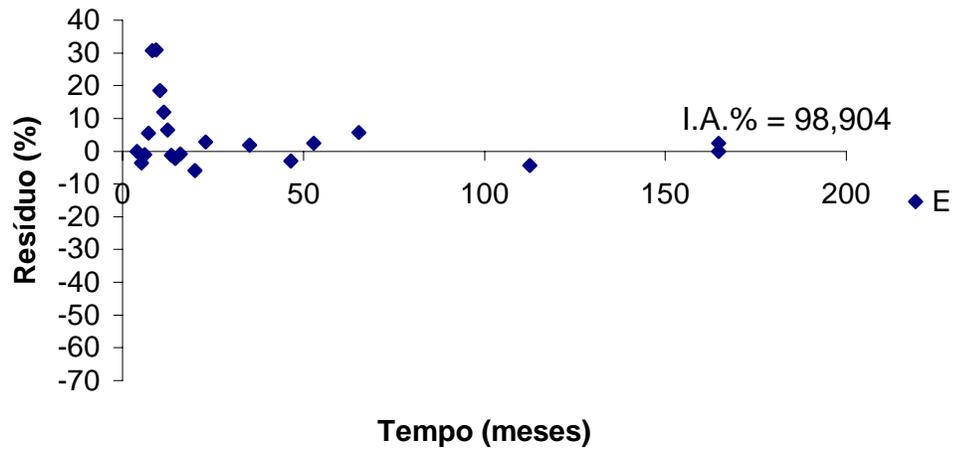


Figura 44 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o Modelo Proposto 3 para a média do tratamento 2

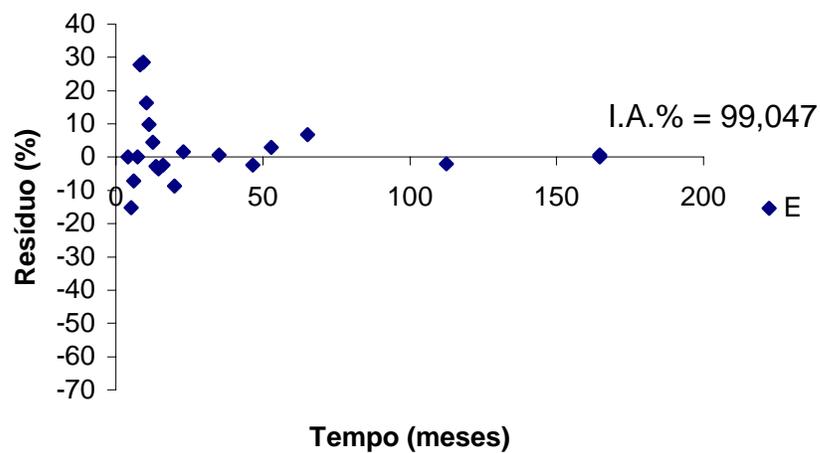


Figura 45 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação à altura, para a estimativa do crescimento de leucena, obtidas com o Modelo Proposto 4 para a média do tratamento 2

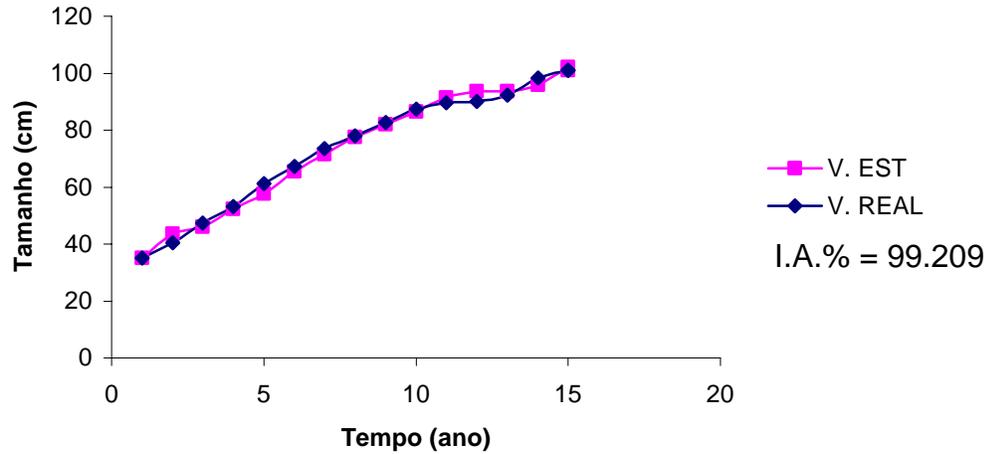


Figura 46 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Chapman-Richards para tubarão-junteiro capturados na costa marinha do estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989.

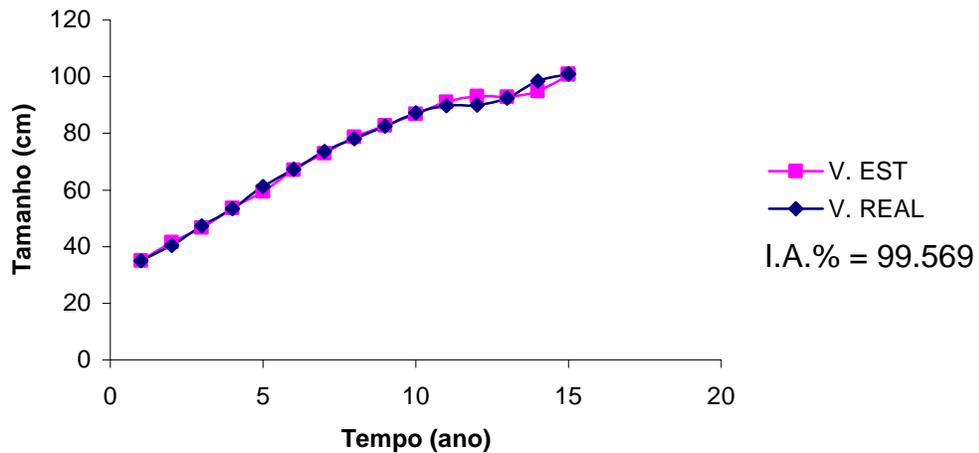


Figura 47 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Silva-Bailey para tubarão-junteiro capturados na costa marinha do estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989.

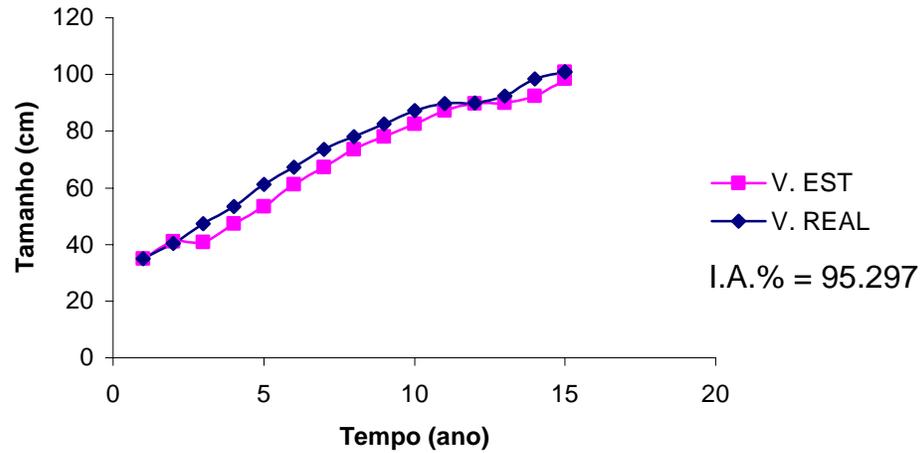


Figura 48 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Bertalanffy para tubarão-junteiro capturados na costa marinha do estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989.

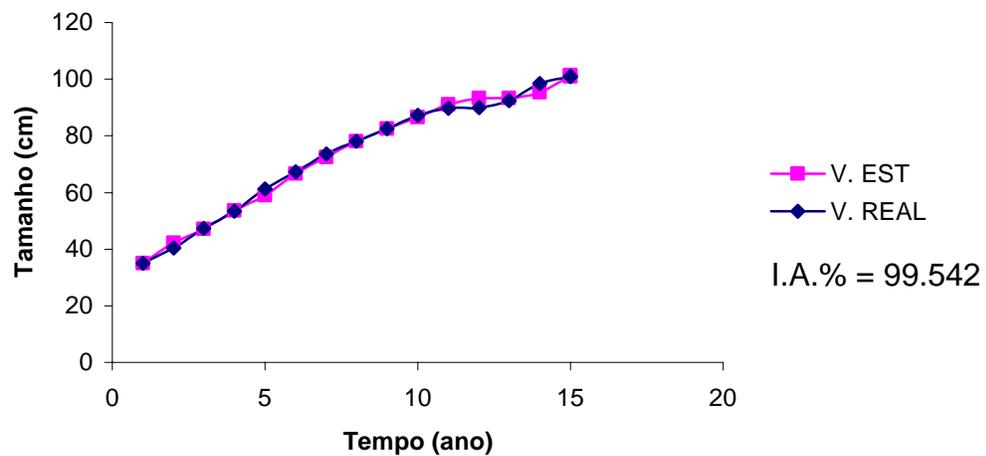


Figura 49 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Brody para tubarão-junteiro capturados na costa marinha do estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989.

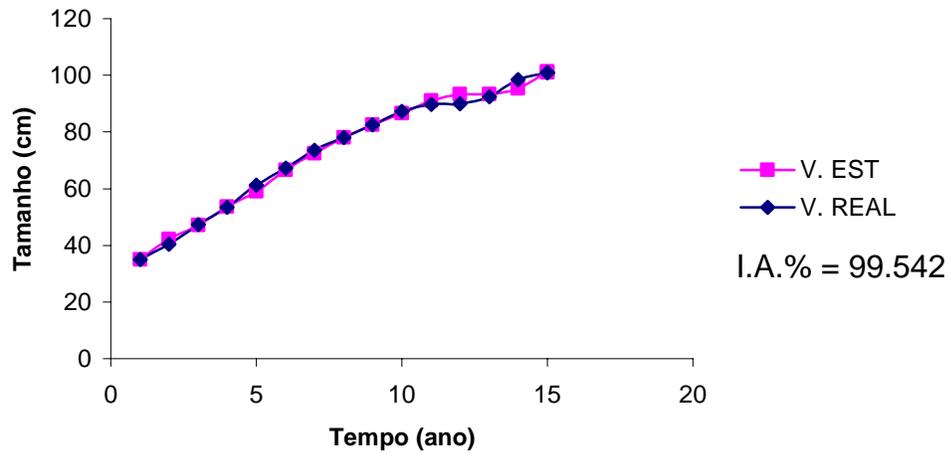


Figura 50 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Mistcherlich para tubarão-junteiro capturados na costa marinha do estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989.

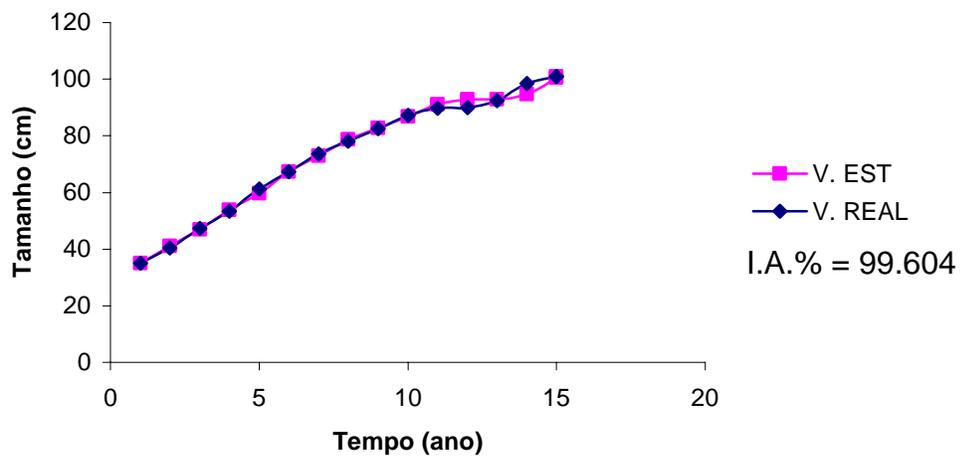


Figura 51 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Weibull para tubarão-junteiro capturados na costa marinha do estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989.

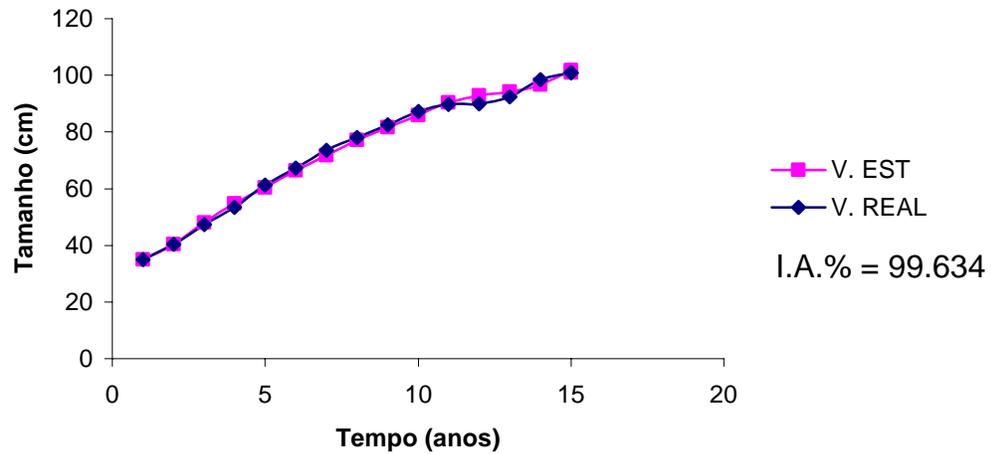


Figura 52 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo de Clutter e Jones para tubarão-junteiro capturados na costa marinha do estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989.

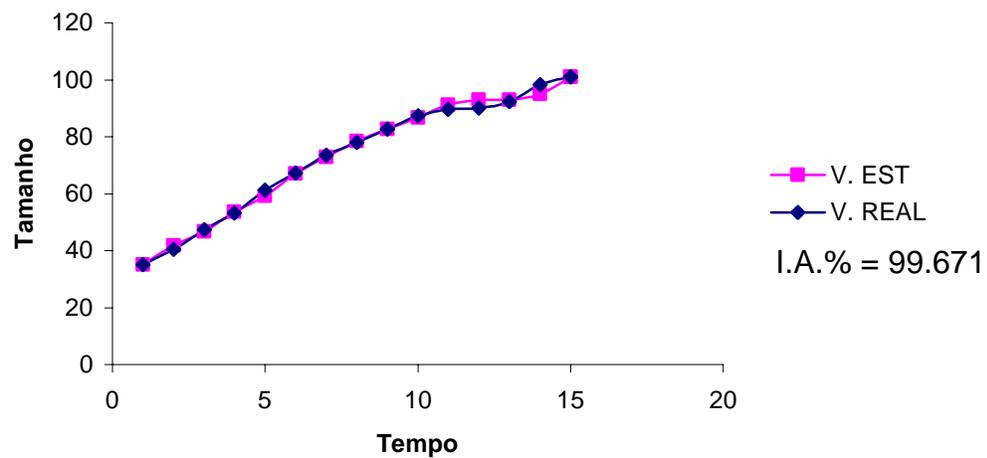


Figura 53 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo proposto 1 para tubarão-junteiro capturados na costa marinha do estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989.

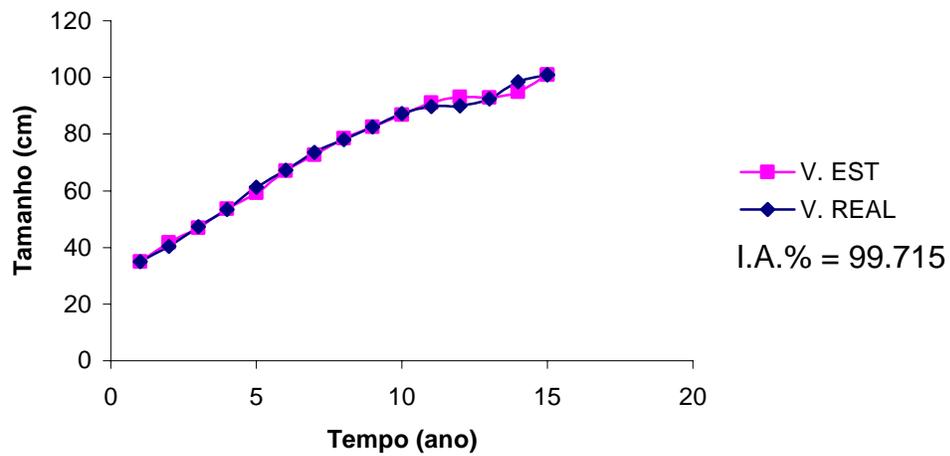


Figura 54 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo proposto 2 para tubarão-junteiro capturados na costa marinha do estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989.

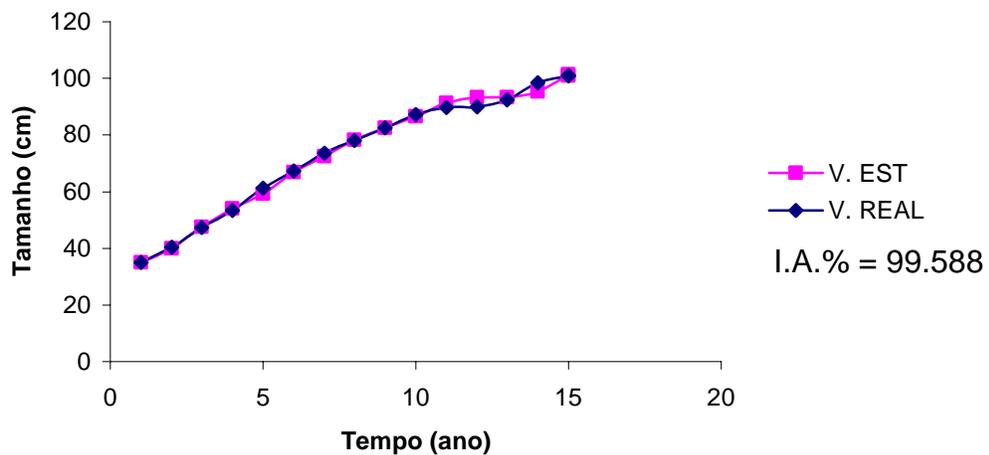


Figura 55 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo proposto 3 para tubarão-junteiro capturados na costa marinha do estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989.

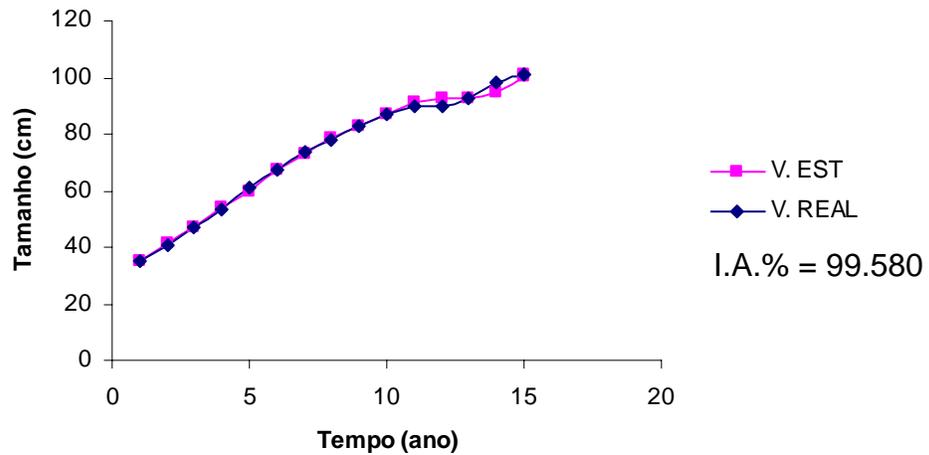


Figura 56 - Curvas de crescimento real e estimada pelo modelo proposto 4 para tubarão-junteiro capturados na costa marinha do estado do Maranhão, no período de 1984 até 1989.

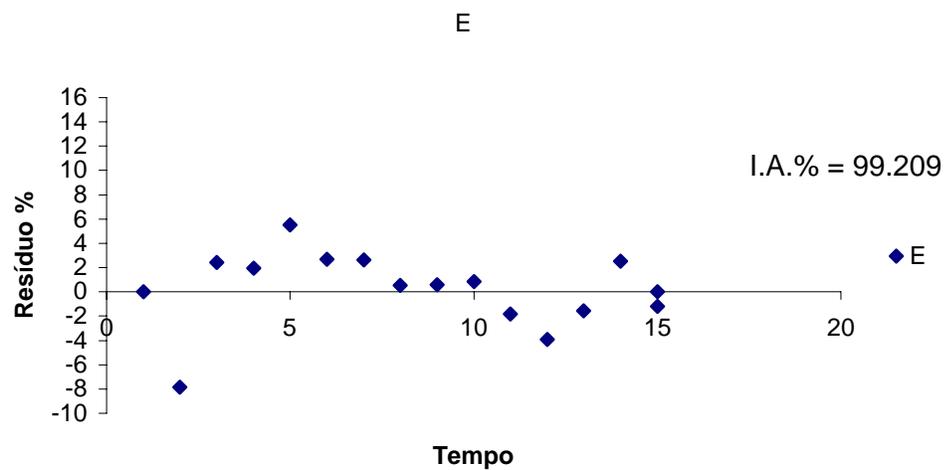


Figura 57 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação ao comprimento, para a estimativa do crescimento de tubarão-junteiro, obtidas com o modelo de Chapman-Richards

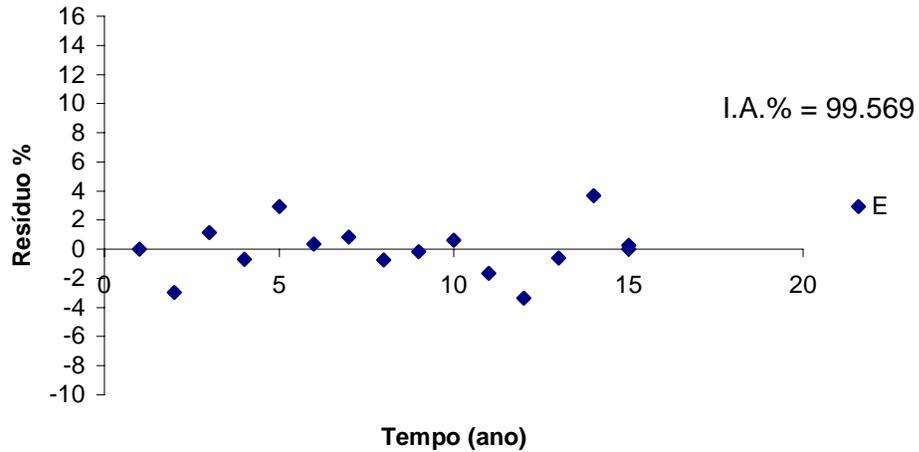


Figura 58 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação ao comprimento, para a estimativa do crescimento de tubarão-junteiro, obtidas com o modelo de Silva-Baiely

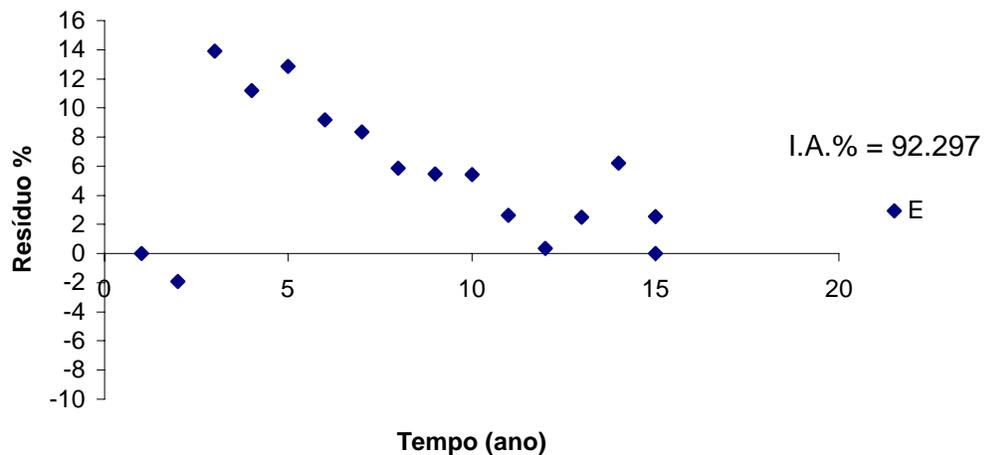


Figura 59 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação ao comprimento, para a estimativa do crescimento de tubarão-junteiro, obtidas com o modelo de Bertalanffy

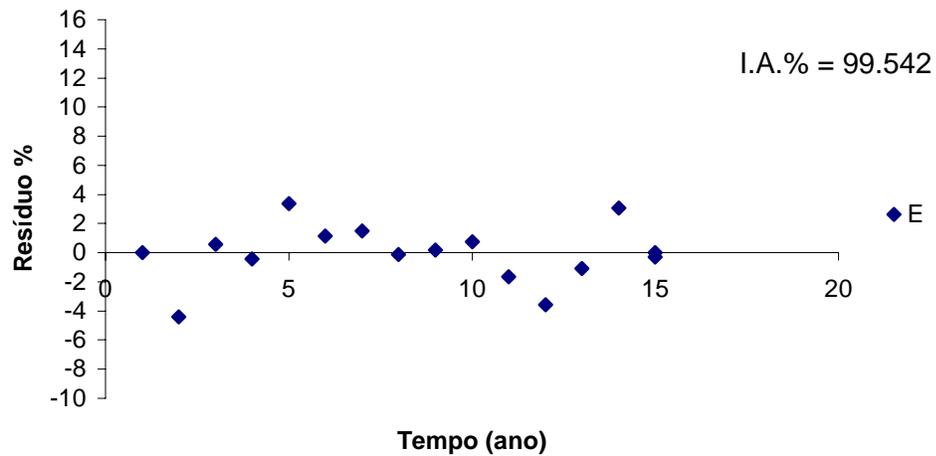


Figura 60 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação ao comprimento, para a estimativa do crescimento de tubarão-junteiro, obtidas com o modelo de Brody

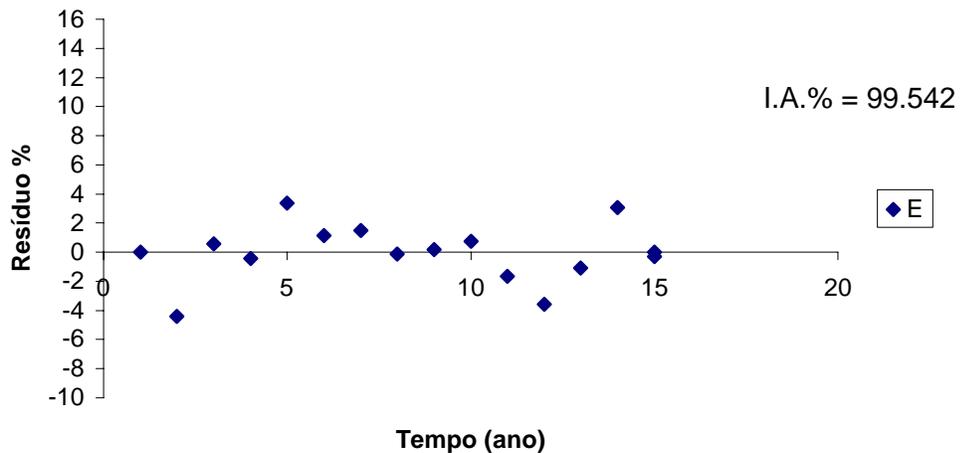


Figura 61 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação ao comprimento, para a estimativa do crescimento de tubarão-junteiro, obtidas com o modelo de Mitscherlich

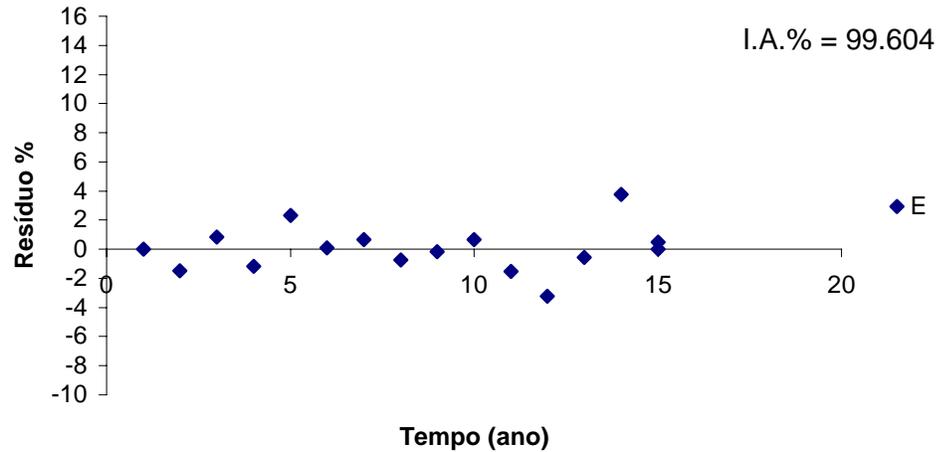


Figura 62 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação ao comprimento, para a estimativa do crescimento de tubarão-junteiro, obtidas com o modelo de Weibull

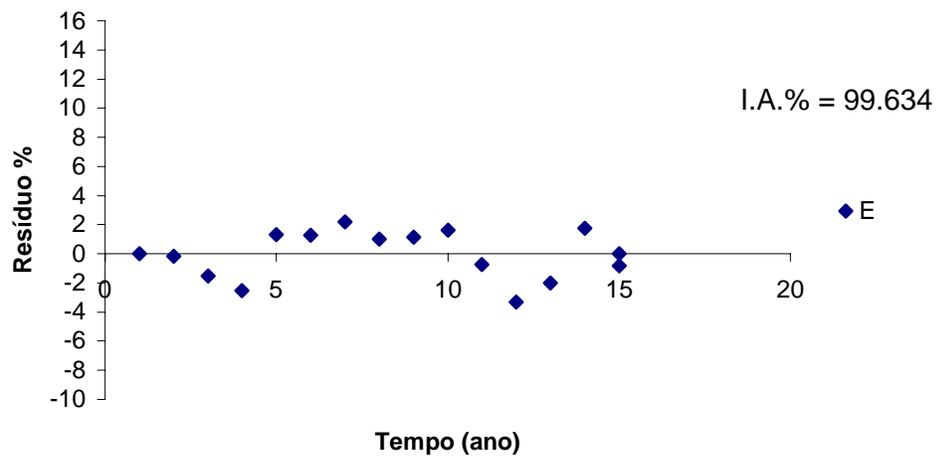


Figura 63 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação ao comprimento, para a estimativa do crescimento de tubarão-junteiro, obtidas com o modelo de Clutter e Jones

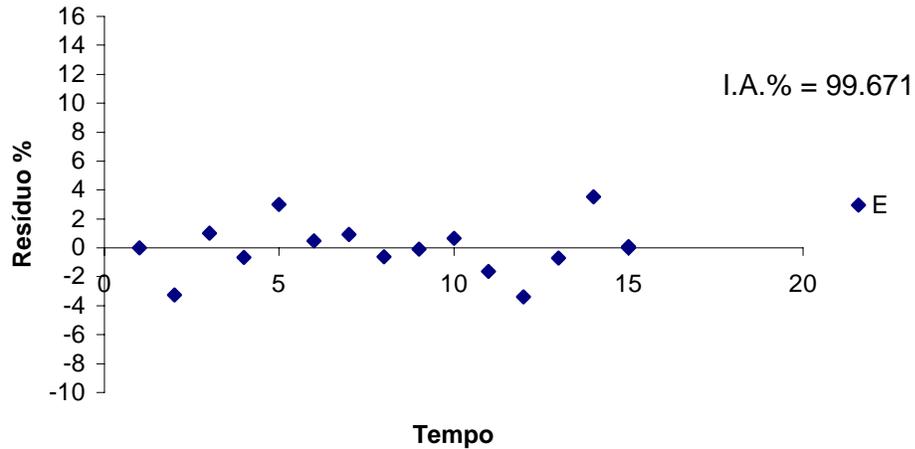


Figura 64 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação ao comprimento, para a estimativa do crescimento de tubarão-junteiro, obtidas com o modelo proposto 1

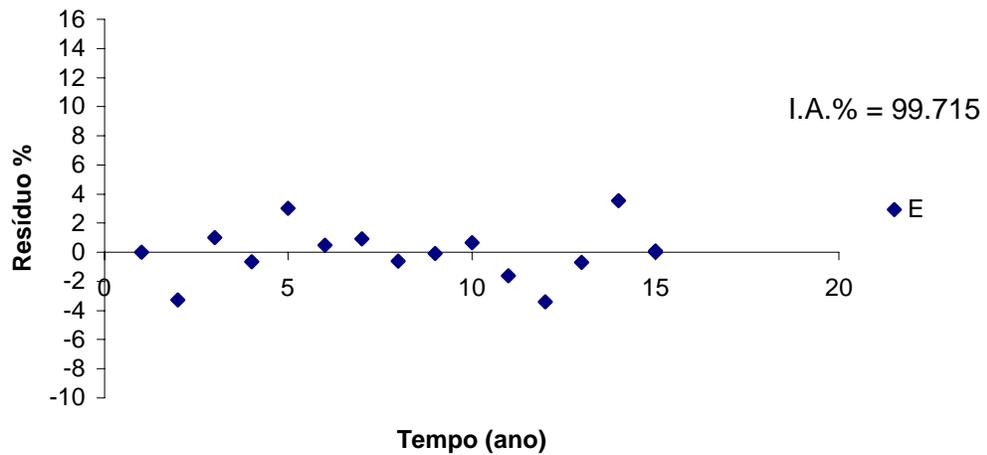


Figura 65 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação ao comprimento, para a estimativa do crescimento de tubarão-junteiro, obtidas com o modelo proposto 2

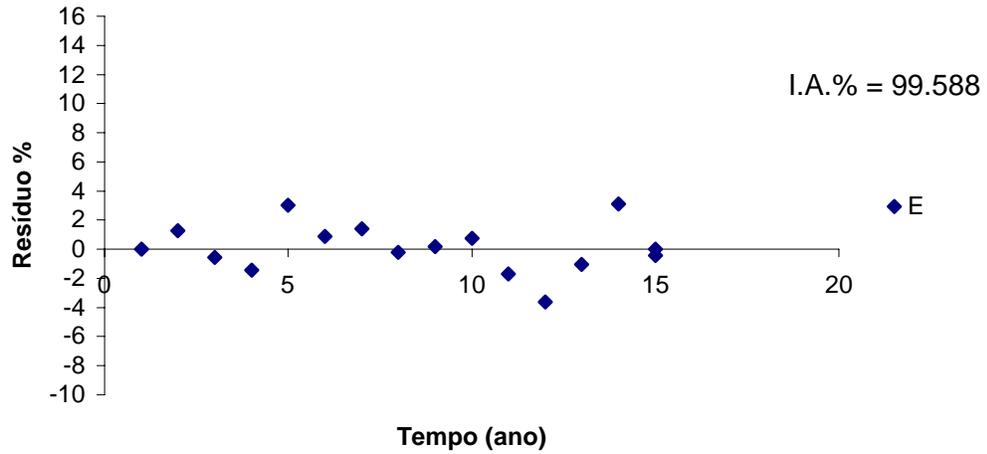


Figura 66 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação ao comprimento, para a estimativa do crescimento de tubarão-junteiro, obtidas com o modelo proposto 3

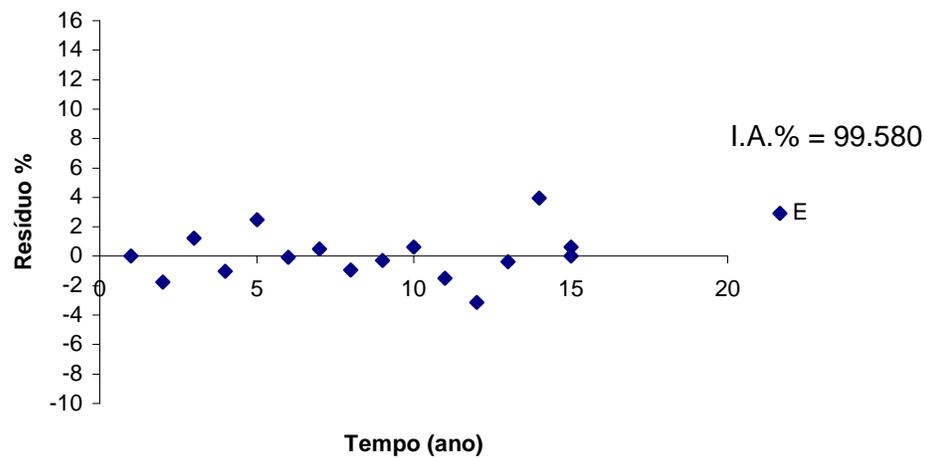


Figura 67 - Distribuição gráfica dos resíduos percentuais, em relação ao comprimento, para a estimativa do crescimento de tubarão-junteiro, obtidas com o modelo proposto 4

4.3 Análise das estimativas e resíduos das estimativas para alturas e comprimentos nos modelos testados

Nas Tabelas 7, 8 e 9 temos, respectivamente, a representação das estimativas das alturas da leucena nos tratamentos 1 e 2 e, comprimento dos tubarões, bem como, as Tabelas 10, 11 e 11, a representação dos resíduos das estimativas. Verifica-se que o modelo de Bertalanffy começou a subestimar os valores reais antes dos 50 meses para a leucena, nos tratamentos 1 e 2 e, a partir do segundo ano no caso dos tubarões.

Pode-se ainda verificar, no caso dos tubarões que, os modelos utilizados apresentam erros menores, apresentando assim uma melhor estimação dos comprimentos.

5. CONCLUSÕES

Após as análises dos modelos, dos gráficos das curvas de crescimento e das distribuições residuais, pode-se observar que os modelos propostos e alguns comumente utilizados em recursos florestais ou pesqueiros se assemelham nas estimativas de crescimento da leucena e do tubarão-junteiro.

Ao observar os Índices de Ajustes e analisar os gráficos dos resíduos, percebe-se que os modelos utilizados para leucena apresentaram uma pequena diminuição de precisão no segundo tratamento em relação ao primeiro tratamento, com exceção do terceiro modelo proposto, o que comprova resultados anteriores que indicaram o efeito do composto orgânico, no crescimento de leucena.

Para o tubarão-junteiro o comportamento dos modelos se repetiu, sendo portanto, todos eles bons estimadores do crescimento da espécie, sendo que o modelo de Bertalanffy devido sua restrição de um parâmetro ser igual a $2/3$, foi o que apresentou resultados com menor precisão.

Com a inclusão de novos modelos de crescimento derivados de modelos existentes, como era de se esperar, constatou-se que os seus resultados são semelhantes aos que serviram de base para as derivativas, entretanto, mostra que o estudo de modelagem é dinâmico e nunca se pode admitir que o que já existe é suficiente, principalmente, quando se considera outros campos nas ciências biológicas, que podem gerar novos modelos baseados em hipóteses biológicas específicas para cada ramo de pesquisa.

REFERÊNCIAS

ABREU, E. C. R. et al. Modelagem para prognose precoce do volume por classe diamétrica para *Eucalyptus grandis* **Scientia Forestalis**, Piracicaba, n. 61, p. 86-102, 2002.

AHRENS, S. Importância da distribuição dos resíduos de regressão na seleção de equações de volume. In: CONGRESSO FLORESTAL BRASILEIRO, 4., 1982, Curitiba. **Anais...** Curitiba: EMBRAPA, 1982, p. 7-25.

ANDRADE, J. C., CUSTÓDIO, R. **Métodos de otimização em química**. São Paulo; Universidade Estadual de Campinas, 2005. Disponível em: <<http://www.chemkeys.com>>. Acesso em: 07 set 2005.

AVERY, T. E.; BURKHART, H. **Forest management**. 4 ed. New York: McGraw-Hill, 1994, 432p.

BARROS et al. Análise do crescimento de *Eucalyptus saligna* em solos do cerrado sob diferentes níveis de N, P e K no vale do Jequitinhonha, MG. **Instituto de Pesquisa Engenharia florestal**, Piracicaba, n. 26, p.13-17, 1984.

BERTALANFFY, L. von. A quantitative theory of organic growth, **Human Biology**, Detroit, v. 10, p. 181-213, 1934.

BERTALANFFY, L. von. Quantitative laws for metabolism and growth. **Quarterly Review of Biology**, Stony Brook, v. 32, p. 217-231, 1957.

BERTALANFFY, L. von, **General system theory: foundations, development, applications**. New York: George Braziller, 1969, 295 p.

BREWBAKER, J. L. Revisions in the systematics of the genus *Leucaena*. **Leucaena Research Reports**, Taipei, v. 6, p. 78-80, 1985.

CAMPOS, J. C. C. Análise do crescimento e produção em plantações desbastadas. **Revista árvore**, Belo Horizonte, n. 4, p. 157-169, 1980.

CARVALHO, M. M.; ALVIM, M. J., CARNEIRO, J. C. **Sistema agroflorestais pecuários**: opções de sustentabilidade para áreas tropicais e subtropicais. Brasília: EMBRAPA, 2001. 413 p.

CHAPMAN, D. E. Statistical problems in dynamics of exploited fishing populations. In BERKELEY SYMPOSIUM ON MATHEMATICAL STATISTIC AND PROBABILITY, 1961, p. 153 – 158, **Procededings...** [S.l.: s.n.], 1961.

CHEN, Y., D. A. et al. A comparison of von Bertalanffy and polynomial functions in modeling fish growth data. **Canadian Journal Fisheries and Aquatic Sciences**, Ottawa, v. 49, p. 1228-1235, 1992.

CLUTTER, J. L. et al. **Timber management**: a quantitative approach. New York: John Wiley & Sons, 1983, 333 p.

CLUTTER, J. L. Compatible growth and yield models for loblolly pine. **Forest Science**, Bethesda, v. 9, p. 354-371, 1963.

CLUTTER, J. L.; JONES, E. P. **Prediction of growth after thinning in old-field slash pine plantation**. USDA, 1980. 12 p.

DAVIS, L. S.; JOHNSON, K. N. **Forest management**. 3. ed. New York: McGraw-Hill Inc., 1987. 720 p.

DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied regression analysis**. New York: John Wiley e Sons, 1981. 709 p.

EMBRAPA. **Sistema brasileiro de classificação de solos**. Brasília, 1999. 421 p.

FEKEDULEGN, D. et al. Parameter estimation of nonlinear growth models in forestry. **Silva Fennica**, Helsinki, v. 33, n. 4, p. 327-336, 1999.

FERREIRA, A. B. de H. **Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa**, 3. ed. Curitiba: Ed. Positivo, 2004. 2120 p.

FISHBASE. ***Carcharhinus porosus***. Species Summary. Disponível em: <<http://www.fishbase.org>> Acesso em 15 set. 2005.

FRANCE, J.; THORNLEY, J. H. M. **Mathematical models in agriculture**. London: Butterworks, 1984. 335 p.

GALLUCCI, V. F.; T. J.; QUINN II. Reparameterizing, fitting and testing a simple growth model. **Transactions of the American Fisheries Society**, v. 108, p. 14-25, 1975.

HANNON, R; RUTH, M. **Modeling dynamic biological systems**. New York: Springer Verlag, 1997. 399 p.

LESLIE , P.H. On the use of matrices in certain populations mathematics **Biometrika**, London, v. 35, p. 183 – 212 , 1945.

LESSA, R. P. T; SANTANA, F. M. Age determination and growth of the smalltail shark, *Carcharhinus porosus*, from northern Brazil. **Mar. Freshwater, Research**, [São Luiz], v. 49, p 705 - 711, 1998.

LESSA, R. P. T.; SANTANA, F. M. Age and growth of the daggernose shark, *Isogomphodon oxyrhunchus*, from northern Brazil. **Mar. Freshwater, Research**, [São Luiz], v. 51, p 339 - 347, 2000.

LESSA, R. P. T., SANTANA, F. M.; HAZIN, F. H. V. Análise demográfica preliminar do tubarão-azul (*Prionace glauca*) no Atlântico Sudoeste Equatorial. *In: REUNIÃO DA*

SOCIEDADE BRASILEIRA PARA O ESTUDO DOS ELASMOBRÂNQUIOS - SBEEL, 4. 2004, Recife. **Anais...** Recife: Bagaço, 2004. p. 168-169.

MACHADO, S. A. **Studies in growth and yield estimation for *Pinus taeda* L. plantations in the State of Parana – Brazil.** 1978. 170 f. 1978 Thesis (Doctor of Philosophy) – University of Washington, Washington, 1978.

McTAGUE, J. P. **Growth and yield of slash and loblolly pine in the state of Santa Catarina, Brazil.** 219 f. 1985. Dissertação - University of Georgia, Athens, 1985.

MELO, J. S. C. **Efeitos da taxa de alimentação sobre o crescimento e a eficiência de utilização de ração pelo tambacu.** Dissertação - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

MENDES, B. V. **Alternativas tecnológicas para a agropecuária do semi-árido.** 2. ed. São Paulo: Nobel, 1986. 171 p.

MEUNIER, I. M. J. **Crescimento de mudas de *leucaena leucocephala* (Lam.) de Wit. em função do uso do composto de resíduo urbano, adubação fosfatada e inoculação com *Rhizobium loti*.** 110 f. 1991. Dissertação (Mestrado em Agronomia, Ciência do Solo) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

MMA. Instrução Normativa nº 05 de 21 de maio de 2004. Diário Oficial da União. Brasília, DF, 28 de maio de 2004, Seção 1, p.

MOSER, J. W.; HALL, O. F. Derived growth and yield function for uneven aged forest stands. **Forest Science**, Bethesda, v. 15, p. 183 – 188, 1969.

PAULA NETO, F. **Construction of standard volume table for *Eucalyptys saligna* in the Iron Region of Brazil**. 140f. 1977. Thesis (Doctor of Philosophy) – Purdue University, Lafayette.

PIENAAR, L. V.. **Quantitative theory of forest growth**. 1965. 167f. Thesys (Doctor of Philosophy) University of Washington, Washington.

PIENAAR, L. V.; TURNBULL, K. J. The Chapman-Richards generalization of von Bertalanffy's growth model for basal area growth and yield in even-aged stands. **Forest Science**, Bethesda, v. 19, p. 2-22, 1973.

PRODAN, M. **Forest biometrics**. Pergamon Press, 1968. 447 p.

RICHARDS, F. J. A flexible growth function ofr empirical use. **Journal of Experimental Botany**, Oxford, v. 10, p. 290 – 300, 1959.

RICKER, W. E. Computation and interpretation of biological statistics of fish population, 3th edition. **Bull. Of the Fisheries Research Board of Canada**, 382 p., 1975.

RICKER, W. E. Growth rates and models. In: HOAR, W. S.; RANDALL, D.J.; BRETT, J. R. (Ed.). **Fish Physiology**. New York, 1979. p. 677-743.

ROSA. M. C. C. Estudo comparativo de modelos matemáticos de crescimento aplicados a dados de peixes cultivados. 1993. 23f. Trabalho de conclusão de curso (Especialização em Aqüicultura) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, 1993.

ROSA, M. C. C. et al. Comparative study about growth models for aquaculture. In: ANNUAL MEETING OF THE WORLD AQUACULTURE SOCIETY, 1996, Bankok. **Abstracts...** Bankok, Thailand: World Aquaculture Society, 1996. v.1, p. 345-346.

ROSA, R. S. Espécies de elasmobrânquios ameaçadas no Brasil. REUNIÃO DA SOCIEDADE BRASILEIRA PARA ESTUDO DOS ELASMOBRÂNQUIOS, 1997, **Resumos...** Ilhéus: [s.n.], 1997. p. 111-113.

SALERMO, A. R.; SEIFFERT, N. F. **Leucaena**: características agrônômicas e recomendações de manejo. Florianópolis: EMPASC, 1986. 9 p. (Comunicado Técnico, 105).

SANTOS, E. P. **Dinâmica de populações aplicada à pesca e piscicultura**. São Paulo: HUCITEC, 1978. 129 p.

SANTOS JÚNIOR, R. C. B. **Modelagem matemática na estimativa de crescimento em altura de leucena (*Leucaena leucocephala* (Lam.) de Wit), no Agreste de Pernambuco**. 2005. 95 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Florestais) –Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

SOCIEDADE BRASILEIRA PARA O ESTUDO DE ELASMOBRANQUIOS – SBEEL. Sociedade Brasileira para o estudo de elasmobrânquios. **Plano nacional de ação para a conservação e o manejo dos estoques de peixes elasmobrânquios no Brasil**. Recife, 2005. 100 p.

SCHLAEGEL, B. E. Testing, reporting, and using biomass estimation models. In: SOUTHERN FORES BIOMASS WORKSHOP, 1981, [S.I.]. **Proceedings...** [S.I.: s.n.], 1981. 95 – 112.

SCHNEIDER, P. R. **Análise de regressão aplicada à Engenharia Florestal**. 2 ed. Santa Maria: UFSM/CEPEF, 1998. 236 p.

SCHUMACHER, F. X. A new growth curve and its applications to timber-yield studies. **Journal of Forestry**, Bethesda, v. 37, p. 819-820, 1939.

SCOLFORO, J. R. **Mensuração florestal 3: relações quantitativas em volume, peso e a relação hipsométrica.** Lavras: ESAL/FAEP, 1993. 932 p.

SCOLFORO, J. R. **Modelos para expressar o crescimento e a produção florestal: Parte 1.** Lavras: ESAL / FAEPE, 1994. 182 p.

SILVA, J. A. A. **Dynamics of stand structure in fertilized slash pine plantations.** 1986. 133f. Thesis (Doctor of Philosophy) – University of Georgia, Athens.

SILVA, J. A. A. da; SILVA, I. P. da. **Estatística experimental aplicada à ciência florestal.** Recife, UFRPE, 1982. 292 p.

SILVA, R. A. et al, Método Simplex supermodificado como estratégia de otimização para respostas combinadas em sistemas alimentares. São Paulo: SCIELO. FAPESP, [200?]. Disponível em: <<http://www.scielo.br>> Acesso em 07 set 2005.

SIQUEIRA, A. T. et al. Estimativa do tempo ideal de despesca em dois cultivos de *Penaeus subtilis* (Perez-Farfante). In: SIMPÓSIO BRASILEIRO SOBRE CULTIVO DE CAMARÃO, 3., 1989, João Pessoa. **Anais...** João Pessoa: [UFPB], 1989. p. 451-455.

SMINKEY, T.R.; MUSICK, J.A. Age and growth of the sandbar shark, *Carcharhinus plumbeus*, before and after population depletion. **Copeia**, Gainesville, v. 4, p. 871-883, 1995.

SOUZA, C. M. de **Avaliação do crescimento em altura de leucena *Leucaena leucocephala* (Lam.) de Wit. no Agreste de Pernambuco, por meio da análise de medidas repetidas.** 2003. 123f. Dissertação (Mestrado em Biometria) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

SPATHELF, P.; NUTTO, L. **Modelagem aplicada ao crescimento florestal.** Santa Maria: [s.n], 2000. 70 p.

SPRINGBORN, R. R. et al. A variable growth rate modification of von Bertalanffy's equation for aquaculture. **Aquaculture and Fisheries Management**, Oxford, v. 25, p. 259-267, 1994.

SPURR, S. H. **Forest inventory**. New York: Ronald Press, 1952. 476 p.

TURNBULL, K. J. **Population dynamics in mixed forest stands**: A system of mathematical models of mixed stand growth and structure. 1963. 186f. Dissertação. University of Washington, W.A., Washington.

VALENTIN, J. L.; GUIMARÃES, M. A. **A modelagem ecológica em Limnologia**. In: BICUDO, C.E.M.; BICUDO, D.C. (Org.). **Amostragem em Limnologia**. São Carlos: Rima, 2004. 251 p.

VIEIRA, M. E. Q. **O feno de leucena *Leucaena leucocephala* (Lam.) de Wit., como ingrediente não ortodoxo de rações para frangos de corte**. 1992. 30 f. Dissertação (Mestrado em Zootecnia) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 1992.

VANCLAY, J.K.; SKOVSGAARD, J.P. Evaluating Forest growth modelos. **Ecological Modelling**, Amsterdam, p. 1-12, 1998.

VISGRAF. Resumo do método Simplex. IMPA. São Paulo: IMPA, [200?]. Disponível em: <<http://www.visgrafimpa.br>> Acesso em: 07 set 2005.

APÊNDICE

APÊNDICE A

Dedução dos modelos matemáticos propostos

1º modelo proposto

Considere:

$$W' = (\beta_1 + \beta_2 \cdot e^{-K \cdot t})^{\beta_3} \quad (\text{Chapaman-Richards})$$

$$W'' = \beta_4 \cdot e^{\beta_5 \cdot \alpha t} \quad (\text{Silva-Bailey})$$

Seja W uma estimativa do crescimento das árvores ou dos tubarões, logo pode-se escrever que:

$$W = (W' \cdot W'')$$

Logo substituindo tem-se que:

$$W = \left[(\beta_1 + \beta_2 \cdot e^{-K \cdot t})^{\beta_3} \cdot (\beta_4 \cdot e^{\beta_5 \cdot \alpha t}) \right]$$

$$W = \left[\beta_1^{\beta_3} \cdot \left(1 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot e^{-K \cdot t} \right)^{\beta_3} \cdot (\beta_4 \cdot e^{\beta_5 \cdot \alpha t}) \right]$$

$$W = (\beta_1^{\beta_3} \cdot \beta_4) \cdot \left[\left(1 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot e^{-K \cdot t} \right)^{\beta_3} \cdot (e^{\beta_5 \cdot \alpha t}) \right]$$

$$W = (\beta_1^{\beta_3} \cdot \beta_4) \cdot \left[\left(1 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot e^{-K \cdot t} \right) \cdot \left(e^{\frac{\beta_5 \cdot \alpha^t}{\beta_3}} \right) \right]^{\beta_3}$$

Sejam $\frac{\beta_2}{\beta_1} = \beta$,

$$\frac{\beta_5}{\beta_3} = \lambda,$$

$$\beta_3 = \theta,$$

$$(\beta_1^{\beta_3} \cdot \beta_4) = \gamma$$

Logo substituindo tem-se que:

$$W = \gamma \cdot \left[\left(1 + \beta \cdot e^{-K \cdot t} \right) \cdot e^{\lambda \cdot \alpha^t} \right]^{\theta}$$

Usando o método das diferenças de equações, tem-se:

Para $t = t_i$, tem-se:

$$W_i = \gamma \cdot \left[\left(1 + \beta \cdot e^{-K \cdot t_i} \right) \cdot e^{\lambda \cdot \alpha^{t_i}} \right]^{\theta} \quad (18)$$

Para $t = t_f$, tem-se:

$$W_f = \gamma \cdot \left[\left(1 + \beta \cdot e^{-K \cdot t_f} \right) \cdot e^{\lambda \cdot \alpha^{t_f}} \right]^{\theta} \quad (19)$$

Como γ é o valor assintótico (tamanho final), portanto constante em qualquer tempo, pode-se isolá-lo como se segue:

$$\gamma = \frac{W_i}{\left[\left(1 + \beta \cdot e^{-K \cdot t_i} \right) \cdot e^{\lambda \cdot \alpha^{t_i}} \right]^{\theta}} \quad (20)$$

substituindo (20) em (19) temos:

$$W_f = \frac{W_i}{\left[\left(1 + \beta \cdot e^{-K \cdot t_i} \right) \cdot e^{\lambda \cdot \alpha^{t_i}} \right]^{\theta}} \cdot \left[\left(1 + \beta \cdot e^{-K \cdot t_f} \right) \cdot e^{\lambda \cdot \alpha^{t_f}} \right]^{\theta}$$

$$W_f = W_i \cdot \left[\left(\frac{1 + \beta \cdot e^{-K \cdot t_f}}{1 + \beta \cdot e^{-K \cdot t_i}} \right) \cdot e^{\lambda \cdot (\alpha t_f - \alpha t_i)} \right]^\theta$$

2º modelo proposto

Considere:

$$\frac{dW}{dt} = \alpha \cdot W \cdot e^{\kappa \cdot t} - \gamma \cdot W \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

$$\frac{dW}{dt} = W (\alpha \cdot e^{\kappa \cdot t} - \gamma \cdot e^{\lambda \cdot t})$$

$$W^{-1} \cdot dW = (\alpha \cdot e^{\kappa \cdot t} - \gamma \cdot e^{\lambda \cdot t}) dt$$

$$\int W^{-1} \cdot dW = \int (\alpha \cdot e^{\kappa \cdot t} - \gamma \cdot e^{\lambda \cdot t}) dt$$

$$\text{Ln } W = \frac{\alpha}{\kappa} \cdot e^{\kappa \cdot t} - \frac{\gamma}{\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot t} + c$$

$$W = e^c \cdot e^{\frac{\alpha}{\kappa} \cdot e^{\kappa \cdot t} - \frac{\gamma}{\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot t}}$$

Sejam $\frac{\alpha}{\kappa} = \beta$ e $-\frac{\gamma}{\lambda} = \theta$, logo:

Substituindo tem-se:

$$W = e^c \cdot e^{\beta \cdot e^{\kappa \cdot t} + \theta \cdot e^{\lambda \cdot t}}$$

Para $t = t_i$, tem-se:

$$W_i = e^c \cdot e^{\beta \cdot e^{K \cdot t_i} + \theta \cdot e^{\lambda \cdot t_i}}$$

(21)

Para $t = t_f$, tem-se:

$$W_f = e^c \cdot e^{\beta \cdot e^{K \cdot t_f} + \theta \cdot e^{\lambda \cdot t_f}} \quad (22)$$

Como e^c é o valor assintótico (tamanho final), portanto constante em qualquer tempo, pode-se isolá-lo como se segue:

$$e^c = \frac{W_i}{e^{\beta \cdot e^{K \cdot t_i} + \theta \cdot e^{\lambda \cdot t_i}}} \quad (23)$$

substituindo (23) em (22) temos

$$W_f = \frac{W_i}{e^{\beta \cdot e^{K \cdot t_i} + \theta \cdot e^{\lambda \cdot t_i}}} \cdot e^{\beta \cdot e^{K \cdot t_f} + \theta \cdot e^{\lambda \cdot t_f}}$$

$$W_f = W_i \cdot \left(\frac{e^{\beta \cdot e^{K \cdot t_f} + \theta \cdot e^{\lambda \cdot t_f}}}{e^{\beta \cdot e^{K \cdot t_i} + \theta \cdot e^{\lambda \cdot t_i}}} \right)$$

3° modelo proposto:

Considere:

$$W^{-m} \cdot dW = (\alpha_1 \cdot t^{K_1} - \gamma_1 \cdot t^{\lambda_1}) dt$$

$$\int W^{-m} \cdot dW = \int (\alpha_1 \cdot t^{K_1} - \gamma_1 \cdot t^{\lambda_1}) dt$$

Seja $m \neq 1$, logo

$$\frac{W^{1-m}}{1-m} = \frac{\alpha_1}{K_1+1} \cdot t^{K_1+1} - \frac{\gamma_1}{\lambda_1+1} \cdot t^{\lambda_1+1} + c$$

$$W^{1-m} = (1-m) \left[\frac{\alpha_1}{K_1+1} \cdot t^{K_1+1} - \frac{\gamma_1}{\lambda_1+1} \cdot t^{\lambda_1+1} + c \right]$$

Sejam

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{k_1 + 1} \cdot (1 - m),$$

$$\beta_1 = \frac{\gamma_1}{\lambda_1 + 1} \cdot (1 - m),$$

$$\omega = \frac{1}{1 - m},$$

$$\theta_1 = c \cdot (1 - m),$$

$K = K_1 + 1$ e $\lambda = \lambda_1 + 1$ logo substituindo temos:

$$W = \left(\alpha_2 \cdot t^K + \beta_1 \cdot t^\lambda + \theta_1 \right)^\omega$$

Colocando θ_1 em evidência temos:

$$W = \left[\theta_1 \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\theta_1} \cdot t^K + \frac{\beta_1}{\theta_1} \cdot t^\lambda + 1 \right) \right]^\omega$$

$$W = \theta_1^\omega \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\theta_1} \cdot t^K + \frac{\beta_1}{\theta_1} \cdot t^\lambda + 1 \right)^\omega$$

supondo que $\frac{\alpha_2}{\theta_1} = \alpha$ e $\frac{\beta_1}{\theta_1} = \beta$, logo substituindo na expressão acima temos:

$$W = \theta_1^\omega \cdot \left(\alpha \cdot t^K + \beta \cdot t^\lambda + 1 \right)^\omega$$

Para $t = t_i$ temos:

$$W_i = \theta_1^\omega \cdot \left(\alpha \cdot t_i^K + \beta \cdot t_i^\lambda + 1 \right)^\omega \quad (24)$$

Para $t = t_f$ temos:

$$W_f = \theta_1^\omega \cdot \left(\alpha \cdot t_f^K + \beta \cdot t_f^\lambda + 1 \right)^\omega \quad (25)$$

Como θ_1^ω é o valor assintótico (tamanho final), portanto constante em qualquer tempo, pode-se isolá-lo como se segue:

$$\theta_1^\omega = \frac{W_i}{\left(\alpha \cdot t_i^K + \beta \cdot t_i^\lambda + 1\right)^\omega} \quad (26)$$

Substituindo (26) em (25), temos:

$$W_f = \frac{W_i}{\left(\alpha \cdot t_i^K + \beta \cdot t_i^\lambda + 1\right)^\omega} \cdot \left(\alpha \cdot t_f^K + \beta \cdot t_f^\lambda + 1\right)^\omega$$

$$W_f = W_i \cdot \left(\frac{\alpha \cdot t_f^K + \beta \cdot t_f^\lambda + 1}{\alpha \cdot t_i^K + \beta \cdot t_i^\lambda + 1}\right)^\omega$$

4º modelo proposto:

Considere:

$$\frac{dW}{dt} = \alpha \cdot W^m \cdot t^\lambda - \gamma \cdot W \cdot t^\lambda \quad (27)$$

Multiplicando a expressão 27 por $(1-m) \cdot W^{-m}$ temos:

$$(1-m) \cdot W^{-m} \cdot \frac{dW}{dt} = \alpha \cdot (1-m) \cdot t^\lambda - (1-m) \cdot \gamma \cdot W^{1-m} \cdot t^\lambda \quad (28)$$

Seja $u = W^{1-m}$, logo temos que:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d(W^{1-m})}{dt} = (1-m) \cdot W^{-m} \cdot \frac{dW}{dt}$$

Substituindo as expressões acima na expressão 28 temos:

$$\frac{du}{dt} = \alpha \cdot (1-m) \cdot t^\lambda - (1-m) \cdot t^\lambda \cdot \gamma \cdot u$$

Ou ainda:

$$\frac{du}{dt} + (1-m) \cdot t^\lambda \cdot \gamma \cdot u = \alpha \cdot (1-m) \cdot t^\lambda$$

Temos uma equação diferencial linear de primeira ordem.

Para resolver a equação diferencial acima mencionada, uma forma é a soma da solução geral da equação diferencial homogênea com uma solução particular da não homogênea.

Uma outra forma é aplicando a fórmula de resolução da equação diferencial.

Calculando as integrais temos:

$$\int P \cdot dt = \int (1-m) \cdot t^\lambda \cdot \gamma \cdot dt = \frac{(1-m) \cdot \gamma}{\lambda+1} \cdot t^{\lambda+1}$$

$$\int Q \cdot e^{\int P \cdot dt} \cdot dt = \int (1-m) \cdot t^\lambda \cdot \alpha \cdot e^{\frac{(1-m) \cdot \gamma}{\lambda+1} \cdot t^{\lambda+1}} \cdot dt = \frac{\alpha}{\gamma} \cdot e^{\frac{(1-m) \cdot \gamma}{\lambda+1} \cdot t^{\lambda+1}}$$

$$u = e^{\int P \cdot dt} \cdot \left[c + \int Q \cdot e^{\int P \cdot dt} \cdot dt \right]$$

$$u = e^{\frac{-\alpha \cdot (1-m)}{\lambda+1} \cdot t^{\lambda+1}} \cdot \left[c + \frac{\alpha}{\gamma} \cdot e^{\frac{\gamma \cdot (1-m)}{\lambda+1} \cdot t^{\lambda+1}} \right]$$

$$u = \frac{\alpha}{\gamma} + c \cdot e^{\frac{\gamma \cdot (1-m)}{\lambda+1} \cdot t^{\lambda+1}}$$

Como $W^{1-m} = u$, logo temos:

$$W^{1-m} = \frac{\alpha}{\gamma} + c \cdot e^{\frac{\gamma \cdot (1-m)}{\lambda+1} \cdot t^{\lambda+1}}$$

$$W = \left(\frac{\alpha}{\gamma} + c \cdot e^{\frac{\gamma \cdot (1-m)}{\lambda+1} \cdot t^{\lambda+1}} \right)^{\frac{1}{1-m}}$$

$$\text{Sejam } \frac{\alpha}{\gamma} = \beta_0,$$

$$c = \beta,$$

$$\frac{\gamma \cdot (1-m)}{\lambda+1} = \theta,$$

$\lambda + 1 = K$ e $\frac{1}{1-m} = \varphi$, logo temos:

$$W = \left(\beta_0 + \beta \cdot e^{\theta \cdot t^K} \right)^\varphi$$

Colocando β_0 em evidência temos:

$$W = \left[\beta_0 \cdot \left(1 + \beta \cdot e^{\theta \cdot t^K} \right) \right]^\varphi$$

$$W = \beta_0^\varphi \cdot \left(1 + \beta \cdot e^{\theta \cdot t^K} \right)^\varphi$$

Para $t = t_i$, tem-se:

$$W_i = \beta_0^\varphi \cdot \left(1 + \beta \cdot e^{\theta \cdot t_i^K} \right)^\varphi \quad (29)$$

Para $t = t_f$, tem-se:

$$W_f = \beta_0^\varphi \cdot \left(1 + \beta \cdot e^{\theta \cdot t_f^K} \right)^\varphi \quad (30)$$

Como β_0^φ é o valor assintótico (tamanho final), portanto constante em qualquer tempo, pode-se isolá-lo como se segue:

$$\beta_0^\varphi = \frac{W_i}{\left(1 + \beta \cdot e^{\theta \cdot t_i^K} \right)^\varphi} \quad (31)$$

substituindo (31) em (30) temos:

$$W_f = \frac{W_i}{\left(1 + \beta \cdot e^{\theta \cdot t_i^K} \right)^\varphi} \cdot \left(1 + \beta \cdot e^{\theta \cdot t_f^K} \right)^\varphi$$

$$W_f = W_i \cdot \left(\frac{1 + \beta \cdot e^{\theta \cdot t_f^K}}{1 + \beta \cdot e^{\theta \cdot t_i^K}} \right)^\varphi$$

APÊNDICE B

TABELA 7 - Estimativas das alturas de leucena, calculadas pelos modelos no tratamento 1

ESTIMATIVAS DAS ALTURAS - TRATAMENTO 1											
VR	CR	SB	BE	B	M	W	CJ	MP 1	MP 2	MP 3	MP 4
0,824	0,918	0,811	1,345	0,905	0,905	0,930	0,995	0,941	0,947	0,818	0,908
0,863	0,920	0,857	1,140	0,926	0,926	0,943	0,944	0,935	0,943	0,857	0,917
0,942	0,962	0,903	1,164	0,980	0,980	0,996	0,974	0,976	0,986	0,897	0,961
1,169	1,025	0,980	1,169	1,046	1,046	1,058	1,027	1,035	1,043	0,971	1,025
1,370	1,261	1,216	1,402	1,273	1,273	1,283	1,266	1,270	1,279	1,202	1,263
1,758	1,462	1,421	1,583	1,468	1,468	1,476	1,467	1,469	1,477	1,404	1,464
2,102	1,867	1,823	1,991	1,856	1,856	1,863	1,880	1,872	1,881	1,798	1,870
2,351	2,233	2,186	2,360	2,209	2,209	2,216	2,254	2,237	2,245	2,152	2,238
2,412	2,471	2,433	2,567	2,446	2,446	2,451	2,490	2,472	2,478	2,397	2,476
2,437	2,521	2,491	2,591	2,501	2,501	2,505	2,532	2,520	2,523	2,455	2,525
2,509	2,575	2,543	2,644	2,557	2,557	2,561	2,583	2,572	2,575	2,492	2,581
2,600	2,842	2,788	2,917	2,813	2,813	2,819	2,839	2,826	2,828	2,644	2,854
2,869	2,809	2,794	2,787	2,815	2,815	2,815	2,786	2,797	2,795	2,690	2,814
3,562	3,526	3,560	3,184	3,557	3,557	3,542	3,417	3,508	3,501	3,173	3,527
3,888	3,994	4,057	3,629	4,024	4,024	4,007	3,913	4,013	4,012	3,808	3,979
4,194	4,066	4,092	3,899	4,086	4,086	4,078	4,034	4,080	4,080	4,007	4,057
4,788	4,472	4,504	4,201	4,493	4,493	4,483	4,432	4,495	4,496	4,409	4,456
5,182	5,323	5,291	4,790	5,312	5,312	5,319	5,365	5,325	5,327	5,452	5,316
5,442	5,337	5,273	5,182	5,324	5,324	5,350	5,473	5,299	5,299	5,674	5,381

Em que: VR = valor real de H_i ; CR = Chapman-Richards; SB = Silva-Bailey; BE = Bertalanffy; B = Brody; M = Mitscherlich; W = Weibull; CJ = Clutter e Jones; MP 1 = Modelo Proposto 1; MP 2 = Modelo Proposto 2; MP 3 = Modelo Proposto 3; MP 4 = Modelo Proposto 4

TABELA 8 - Estimativas das alturas de leucena, calculadas pelos modelos no tratamento 2

ESTIMATIVAS DAS ALTURAS - TRATAMENTO 2											
VR	CR	SB	BE	B	M	W	CJ	MP 1	MP 2	MP 3	MP 4
0,824	0,942	0,842	1,405	0,941	0,941	1,016	1,099	0,875	1,029	0,897	0,997
0,863	0,955	0,895	1,196	0,969	0,969	1,015	1,051	0,917	1,013	0,928	0,986
0,942	1,012	0,955	1,237	1,037	1,037	1,081	1,104	0,977	1,072	0,985	1,041
1,169	1,124	1,078	1,292	1,147	1,147	1,180	1,188	1,097	1,171	1,102	1,146
1,370	1,432	1,384	1,603	1,443	1,443	1,472	1,471	1,404	1,481	1,408	1,455
1,758	1,682	1,638	1,833	1,686	1,686	1,709	1,702	1,657	1,724	1,659	1,703
2,102	2,148	2,101	2,303	2,135	2,135	2,155	2,144	2,122	2,190	2,122	2,170
2,351	2,540	2,489	2,699	2,514	2,514	2,532	2,516	2,512	2,580	2,509	2,563
2,412	2,804	2,763	2,925	2,778	2,778	2,791	2,774	2,782	2,832	2,778	2,822
2,437	2,855	2,821	2,946	2,834	2,834	2,844	2,826	2,836	2,872	2,832	2,868
2,509	2,910	2,874	3,003	2,891	2,891	2,901	2,875	2,890	2,925	2,882	2,925
2,600	3,191	3,126	3,309	3,159	3,159	3,172	3,098	3,156	3,191	3,128	3,214
2,869	3,167	3,146	3,163	3,170	3,170	3,170	3,114	3,157	3,150	3,133	3,172
3,562	3,878	3,892	3,563	3,907	3,907	3,868	3,690	3,899	3,805	3,799	3,851
3,888	4,297	4,350	3,942	4,332	4,332	4,288	4,183	4,341	4,281	4,281	4,255
4,194	4,332	4,355	4,168	4,353	4,353	4,334	4,297	4,350	4,335	4,335	4,312
4,788	4,716	4,746	4,451	4,740	4,740	4,716	4,675	4,737	4,729	4,738	4,686
5,182	5,556	5,528	5,025	5,538	5,538	5,555	5,621	5,513	5,579	5,667	5,546
5,442	5,599	5,535	5,435	5,573	5,573	5,641	5,853	5,531	5,581	5,571	5,673

Em que: VR = valor real de H_i ; CR = Chapman-Richards; SB = Silva-Bailey; BE = Bertalanffy; B = Brody; M = Mitscherlich; W = Weibull; CJ = Clutter e Jones; MP 1 = Modelo Proposto 1; MP 2 = Modelo Proposto 2; MP 3 = Modelo Proposto 3; MP 4 = Modelo Proposto 4

TABELA 9 - Cálculo dos resíduos das estimativas das alturas de leucena calculados pelos modelos no tratamento 1

ESTIMATIVAS DOS RESÍDUOS – TRATAMENTO 1											
VR	CR	SB	BE	B	M	W	CJ	MP 1	MP 2	MP 3	MP 4
0,824	-11,464	1,78	-63,259	-9,809	-9,809	-12,845	-20,770	-14,221	-14,958	0,702	-10,177
0,863	-6,616	0,650	-32,042	-7,356	-7,356	-9,215	-9,375	-8,327	-9,215	0,713	-6,237
0,942	-2,147	4,164	-23,590	-4,070	-4,070	-5,754	-3,346	-3,655	-4,691	4,734	-2,033
1,169	12,332	16,182	-0,018	10,562	10,562	9,530	12,121	11,467	10,742	16,905	12,284
1,370	7,939	11,264	-2,323	7,086	7,086	6,319	7,574	7,272	6,613	12,244	7,812
1,758	16,841	19,176	9,940	16,513	16,513	16,027	16,548	16,449	15,988	20,152	16,698
2,102	11,198	13,276	5,301	11,699	11,699	11,347	10,539	10,928	10,536	14,439	11,025
2,351	5,012	7,008	-0,387	6,026	6,026	5,734	4,108	4,849	4,504	8,480	4,803
2,412	-2,449	-0,887	-6,408	-1,412	-1,412	-1,623	-3,222	-2,491	-2,728	0,609	-2,647
2,437	-3,427	-2,200	-6,320	-2,641	-2,641	-2,805	-3,906	-3,390	-3,547	-0,720	-3,607
2,509	-2,642	-1,345	-5,400	-1,901	-1,901	-2,070	-2,954	-2,508	-2,635	0,679	-2,864
2,600	-9,310	-7,231	-12,177	-8,208	-8,208	-8,430	-9,177	-8,711	-8,768	-1,677	-9,787
2,869	2,103	2,607	2,857	1,890	1,890	1,878	2,896	2,502	2,570	6,239	1,909
3,562	1,015	0,053	10,620	0,151	0,151	0,550	4,065	1,518	1,725	10,914	0,970
3,888	-2,715	-4,341	6,661	-3,494	-3,494	-3,050	-0,649	-3,222	-3,199	2,048	-2,336
4,194	3,043	2,423	7,034	2,580	2,580	2,764	3,825	2,717	2,710	4,452	3,257
4,788	6,600	5,938	12,260	6,166	6,166	6,370	7,434	6,124	6,107	7,909	6,927
5,182	-2,729	-2,101	7,569	-2,500	-2,500	-2,637	-3,534	-2,761	-2,799	-5,204	-2,591
5,442	1,931	3,105	4,778	2,160	2,160	1,690	-0,569	2,629	2,620	-4,262	1,129

Em que: VR = valor real de H_t ; CR = Chapman-Richards; SB = Silva-Bailey; BE = Bertalanffy; B = Brody; M = Mitscherlich; W = Weibull; CJ = Clutter e Jones; MP 1 = Modelo Proposto 1; MP 2 = Modelo Proposto 2; MP 3 = Modelo Proposto 3; MP 4 = Modelo Proposto 4

TABELA 10 - Cálculo dos resíduos das estimativas das alturas de leucena calculados pelos modelos no tratamento 2

ESTIMATIVA DOS RESÍDUOS - TRATAMENTO 2											
VR	CR	SB	BE	B	M	W	CJ	MP 1	MP 2	MP 3	MP 4
0,824	-8,732	2,794	-62,227	-8,681	-8,681	-17,281	-26,913	-1,002	-18,820	-3,593	-15,097
0,863	-3,876	2,561	-30,090	-5,410	-5,410	-10,464	-14,392	0,197	-10,204	-0,979	-7,252
0,942	2,991	8,475	-18,636	0,616	0,616	-3,691	-5,861	6,335	-2,738	5,533	0,178
1,169	29,236	32,097	18,611	27,789	27,789	25,682	25,177	30,925	26,241	30,611	27,814
1,370	29,695	32,050	21,299	29,156	29,156	27,753	27,779	31,054	27,297	30,877	28,554
1,758	17,425	19,593	10,037	17,240	17,240	16,117	16,432	18,655	15,343	18,568	16,403
2,102	10,751	12,723	4,309	11,293	11,293	10,484	10,945	11,856	9,008	11,850	9,845
2,351	5,337	7,236	-0,583	6,284	6,284	5,622	6,227	6,391	3,846	6,467	4,487
2,412	-2,163	-0,655	-6,573	-1,206	-1,206	-1,676	-1,052	-1,332	-3,164	-1,197	-2,815
2,437	-3,014	-1,814	-6,297	-2,287	-2,287	-2,647	-2,001	-2,357	-3,662	-2,185	-3,516
2,509	-1,943	-0,652	-5,176	-1,250	-1,250	-1,611	-0,696	-1,240	-2,439	-0,959	-2,462
2,600	-7,936	-5,751	-11,931	-6,874	-6,874	-7,308	-4,808	-6,768	-7,948	-5,806	-8,714
2,869	1,699	2,356	1,829	1,600	1,600	1,617	3,343	2,015	2,237	2,750	1,558
3,562	-0,140	-0,501	8,012	-0,885	-0,885	0,117	4,730	-0,667	1,744	1,900	0,572
3,888	-3,376	-4,652	5,172	-4,208	-4,208	-3,159	-0,617	-4,418	-2,982	-2,988	-2,362
4,194	2,530	2,005	6,212	2,046	2,046	2,474	3,312	2,119	2,460	2,445	2,971
4,788	6,114	5,522	11,391	5,643	5,643	6,121	6,921	5,690	5,845	5,681	6,706
5,182	-2,220	-1,717	7,550	-1,889	-1,889	-2,206	-3,427	-1,431	-2,646	-4,269	-2,051
5,442	1,997	3,123	4,866	2,444	2,444	1,254	-2,444	3,181	2,310	2,493	0,693

Em que: VR = valor real de H_i ; CR = Chapman-Richards; SB = Silva-Bailey; BE = Bertalanffy; B = Brody; M = Mitscherlich; W = Weibull; CJ = Clutter e Jones; MP 1 = Modelo Proposto 1; MP 2 = Modelo Proposto 2; MP 3 = Modelo Proposto 3; MP 4 = Modelo Proposto 4

TABELA 11 - Estimativas dos comprimentos dos tubarões calculados pelos modelos

ESTIMATIVAS DOS COMPRIMENTOS - TUBARÃO											
VR	CR	SB	BE	B	M	W	CJ	MP 1	MP 2	MP 3	MP 4
40.36	43.53	41.56	41.13	42.15	42.15	40.96	40.43	41.68	40.36	39.85	41.07
47.29	46.14	46.76	40.71	47.02	47.02	46.88	48.00	46.81	47.34	47.56	46.70
53.28	52.24	53.64	47.31	53.51	53.51	53.90	54.63	53.64	54.08	54.05	53.81
61.14	57.76	59.36	53.28	59.08	59.08	59.72	60.33	59.30	59.67	59.29	59.62
67.31	65.51	67.06	61.14	66.55	66.55	67.24	66.46	66.98	67.29	66.73	67.35
73.46	71.54	72.86	67.31	72.35	72.35	72.98	71.86	72.77	72.99	72.44	73.10
78.05	77.62	78.62	73.46	78.16	78.16	78.64	77.26	78.53	78.66	78.23	78.78
82.58	82.11	82.72	78.05	82.44	82.44	82.73	81.64	82.65	82.70	82.45	82.80
87.33	86.58	86.79	82.58	86.67	86.67	86.76	85.93	86.77	86.72	86.68	86.78
89.67	91.31	91.13	87.33	91.14	91.14	91.02	90.34	91.13	91.01	91.20	91.03
90.00	93.54	93.00	89.67	93.23	93.23	92.91	92.97	93.05	92.86	93.25	92.82
92.30	93.72	92.86	90.00	93.32	93.32	92.82	94.16	92.94	92.70	93.27	92.62
98.43	95.96	94.81	92.30	95.40	95.40	94.74	96.68	94.94	94.63	95.37	94.52
101.00	102.20	100.71	98.43	101.32	101.32	100.52	101.83	100.90	100.53	101.44	100.38

Em que: VR = valor real de C_f ; CR = Chapman-Richards; SB = Silva-Bailey; BE = Bertalanffy; B = Brody; M = Mitscherlich; W = Weibull; CJ = Clutter e Jones; MP 1 = Modelo Proposto 1; MP 2 = Modelo Proposto 2; MP 3 = Modelo Proposto 3; MP 4 = Modelo Proposto 4

TABELA 12 - Cálculo dos resíduos das estimativas dos comprimentos dos tubarões calculados pelos modelos

ESTIMATIVAS DOS RESÍDUOS – TUBARÕES											
VR	CR	SB	BE	B	M	W	CJ	01	02	03	04
40.36	-7.866	-2.977	-1.901	-4.428	-4.428	-1.492	-0.179	-3.266	-0.003	1.255	-1.754
47.29	2.426	1.122	13.912	0.559	0.559	0.858	-1.503	1.022	-0.107	-0.570	1.241
53.28	1.956	-0.682	11.200	-0.426	-0.426	-1.173	-2.539	-0.667	-1.493	-1.443	-0.997
61.14	5.525	2.920	12.853	3.372	3.372	2.326	1.324	3.001	2.397	3.024	2.488
67.31	2.678	0.365	9.166	1.133	1.133	0.105	1.259	0.481	0.034	0.860	-0.059
73.46	2.614	0.818	8.372	1.506	1.506	0.660	2.173	0.940	0.644	1.392	0.487
78.05	0.549	-0.727	5.881	-0.146	-0.146	-0.756	1.019	-0.617	-0.786	-0.229	-0.943
82.58	0.570	-0.170	5.486	0.173	0.173	-0.178	1.138	-0.089	-0.142	0.160	-0.262
87.33	0.862	0.613	5.439	0.754	0.754	0.657	1.606	0.657	0.701	0.744	0.634
89.67	-1.826	-1.633	2.610	-1.646	-1.646	-1.510	-0.754	-1.631	-1.499	-1.705	-1.512
90.00	-3.939	-3.339	0.367	-3.587	-3.587	-3.234	-3.297	-3.385	-3.174	-3.612	-3.136
92.30	-1.536	-0.606	2.492	-1.104	-1.104	-0.564	-2.014	-0.699	-0.429	-1.049	-0.348
98.43	2.504	3.681	6.228	3.083	3.083	3.750	1.775	3.547	3.859	3.109	3.970
101.00	-1.194	0.282	2.545	-0.314	-0.314	0.471	-0.824	0.097	0.468	-0.443	0.609

Em que: VR = valor real de C_i ; CR = Chapman-Richards; SB = Silva-Bailey; BE = Bertalanffy; B = Brody; M = Mitscherlich; W = Weibull; CJ = Clutter e Jones; MP 1 = Modelo Proposto 1; MP 2 = Modelo Proposto 2; MP 3 = Modelo Proposto 3; MP 4 = Modelo Proposto 4

ANEXOS

ANEXO A

Fotos leucena – *Leucaena leucocephala* (Lam.) de Wit



Foto 01. Leucenas no viveiro aos 2 meses



Foto 02. Plantio definitivo de leucena aos 4 meses



Foto 03. Plantio de leucena aos 4 anos



Foto 04. Fustes de leucena empilhados

Fotos tubarão-junteiro (*Carcharhinus porosus*)



Foto 05. Tubarão-junteiro



Foto 06. Tubarão-junteiro

ANEXO B

Método Simplex

O método Simplex, introduzido na sua forma original por Spendley; Hext e Himsworth (1962), não se baseia em fatoriais e por isso requer poucas interações para se mover na direção do valor ótimo. O método Simplex original, ao longo dos anos, tem sofrido modificações que obrigaram a distinção do mesmo dentre as estratégias de otimização, assim o método Simplex original passou a ser chamado de Método Simplex Básico (MSB). (ANDRADE e CUSTÓDIO, 1996)

Fundamentos teóricos do Simplex

O método Simplex é um método seqüencial de otimização e pode ser empregado, assim como o método univariado, tanto para maximizar como minimizar uma resposta. Um simplex é uma figura geométrica em n dimensões, constituído de $n+1$ pontos. Cada dimensão corresponde a uma variável a ser otimizada. Um simplex em duas dimensões é um triângulo, em três dimensões é um tetraedro e assim sucessivamente. O método pode ser estendido para maiores dimensões, mas não será fácil a visualização do Simplex. Apesar disto, o método Simplex pode ser aplicado, teoricamente, para a otimização de qualquer número de variáveis. (ANDRADE e CUSTÓDIO, 1996)

Pode-se ainda dizer que o Simplex é um algoritmo. Genericamente, entende-se por algoritmo qualquer estratégia para solucionar problemas, contudo, para maior precisão, reserva-se para a palavra algoritmo um conceito diferente de procedimento.

Assim, um **procedimento** é uma sequência finita de instruções e que:

Um algoritmo é um procedimento que termina em um número finito de operações (passos).

O Simplex é um algoritmo que se utiliza de uma ferramenta baseada na Álgebra Linear para determinar, por um método iterativo, a solução ótima de um Problema de Programação Linear (PPL). Sua concepção básica é simples e, por isso mesmo, eficiente. Em linhas bastante gerais, o algoritmo parte de uma solução viável do sistema de equações que constituem as restrições do PPL, solução essa normalmente extrema (vértice). A partir dessa solução inicial vai identificando novas soluções viáveis de valor igual ou melhor que a corrente. O algoritmo, portanto, possui um critério de escolha que permite encontrar sempre novos e melhores vértices da envoltória convexa do problema, e um outro critério que consegue determinar se o vértice escolhido é ou não um vértice ótimo (SILVA, R.A., et al, 2005).

Visão geral do algoritmo primal Simplex

O algoritmo Simplex descreve uma sequência de passos para a solução de sistemas de equações lineares sujeitos a uma função objetivo. Basicamente, ele dispõe sobre três situações:

1. O método de inversão da matriz básica $m \times m$ deduzida a partir de A , uma matriz de restrições $m \times n$.
2. As condições de troca de variáveis dentro da matriz básica, para que exista garantia de uma contínua melhoria da solução ao longo do desenvolvimento dos passos do algoritmo.
3. As regras de parada do algoritmo e a interpretação dessa situação final.

Eventualmente, o algoritmo pode ser adaptado para promover a escolha da base viável inicial, ou solução viável de partida. Contudo, a essência do método desconhece o problema da escolha de uma base viável inicial. A discussão do primeiro aspecto envolvido no algoritmo, ou seja, o método de inversão da matriz básica, é bastante evidente na apresentação dos "quadros" do Simplex e de suas operações de "pivoteamento". O método normalmente sugerido na literatura é o das operações elementares. Essa técnica permite que a cada passo do algoritmo o esforço de inversão já despendido em iterações anteriores seja completamente aproveitado. É importante que se entenda que não existe, de fato, um compromisso do algoritmo com um método de inversão específico para a matriz básica. Em última análise, o método Simplex não obriga que a matriz tenha que ser invertida por um método de pivoteamento, apesar de que todo o seu raciocínio seja aplicado tradicionalmente junto com essa técnica.

O segundo ponto é abordado por um critério bastante simples que envolve o cálculo da possível contribuição para o acréscimo ou decréscimo da função objetivo (conforme o caso: maximização ou minimização) com a possível entrada na base de uma variável não básica. O critério aponta a escolha da variável de maior contribuição imediata. A eficiência do método Simplex e seu extraordinário poder de funcionar na prática está associado ao critério adotado nesse cálculo.

O terceiro tema diz respeito ao teste de parada que inclui a identificação das condições em que não existe mais a possibilidade de que uma troca de variáveis na base possa melhorar o critério de otimização, ou ainda situações em que é identificado um comportamento patológico de crescimento indefinido ou de inviabilidade do problema (SILVA, R.A., et al, 2005).

Resumo do método Simplex

Fase I:

$$\max z = c \cdot x$$

$$\text{s. a. } Ax = b \quad (c_{1 \times n}, A_{m \times n}, b_{m \times 1}, x_{n \times 1})$$

$$x \geq 0$$

$$(\text{com } b \geq 0)$$

1. Obtenha uma base viável B , através da Fase I. O sistema pode ser escrito, então, como

$$Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow B^{-1}Bx_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \Rightarrow Ix_B + \bar{A}x_N = \bar{b}$$

$$z = c_B x_B + c_N x_N = c_B (B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N x_N = c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N = \bar{z} + \bar{c}x_N$$

Ou seja:

$$\begin{array}{rcll} x_1 & + & \bar{a}_{1,m+1}x_{m+1} & + \dots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ x_m & + & \bar{a}_{m,m+1}x_{m+1} & + \dots + \bar{a}_{mn}x_n = \bar{b}_m \\ -z & + & \bar{c}_{m+1}x_{m+1} & + \dots + \bar{c}_n x_n = -\bar{z} \end{array}$$

Ou ainda:

	-Z	x_1	...	x_r	...	x_m	x_{m+1}	...	x_s	...	x_n	
x_1	0	1	...			0	$\bar{a}_{1,m+1}$		\bar{a}_{1s}		\bar{a}_{1n}	\bar{b}_1
...												
x_r	0	0	...	1		0	$\bar{a}_{r,m+1}$		\bar{a}_{rs}		\bar{a}_{rn}	\bar{b}_r
...												
x_m	0	0	...			1	$\bar{a}_{m,m+1}$		\bar{a}_{ms}		\bar{a}_{mn}	\bar{b}_m
-Z	1	0	...	0		0	\bar{c}_{m+1}		\bar{c}_s		\bar{c}_n	$-\bar{z}$

2. Se $\bar{c}_j \leq 0$ para todo j , a solução atual é ótima. Senão, selecione uma coluna s tal que $\bar{c}_s > 0$.

3. Se $\bar{a}_{is} \leq 0$ para todo i , o problema é ilimitado. Senão selecione uma linha r tal que

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0 \right\}$$

4. Faça as operações elementares necessárias no sistema para transformar

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_{1s} \\ \dots \\ \bar{a}_{rs} \\ \dots \\ \bar{a}_{ns} \\ \bar{c}_s \end{pmatrix} \quad \text{em} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left(\text{ou seja } \bar{a}_{ij} \leftarrow \bar{a}_{ij} - \frac{\bar{a}_{is} \bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}}, \quad \bar{c}_j \leftarrow \bar{c}_j - \frac{\bar{c}_s \bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}}, \quad \bar{b}_i \leftarrow \bar{b}_i - \frac{\bar{a}_{is} \bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} \right)$$

$$\begin{array}{ccc} \bar{a}_{ij} & \rightarrow & \bar{a}_{is} \\ \downarrow & & \dots \\ \bar{a}_{rj} & \dots & \bar{a}_{rs} \end{array}$$

5. Vá para 2.

Observação: Implementações eficientes do algoritmo Simplex exploram a usual esparsidade do sistema $Ax = b$. Ao invés de armazenar suas sucessivas formas como uma matriz, armazenam somente B^{-1} (que também pode ser atualizada pelas mesmas operações elementares) e só calculam uma coluna $\bar{a}_{\cdot j}$ quando necessário (isto é, quando a variável correspondente entra na base). (VISGRAF, 2005)

ANEXO C

Dedução dos Modelos de crescimento

Modelo de Mitscherlich

Considere:

$$\frac{dW}{dt} = c \cdot (U - W)$$

$$\frac{dW}{U - W} = c \cdot dt$$

$$-\ln(U - W) = c \cdot t + k$$

$$\ln(U - W) = -c \cdot t - k$$

$$U - W = \exp(-c \cdot t - k)$$

$$U - W = U \cdot \exp(-c \cdot t)$$

$$W = U \cdot [1 - \exp(-c \cdot t)]$$

Se vários efeitos de (n) fatores são considerados a expressão passa a ser:

$$W = U [1 - \exp(-c_1 \cdot t)] \cdot [1 - \exp(-c_2 \cdot t)] \cdots [1 - \exp(-c_n \cdot t)]$$

Resultando em:

$$W = U \cdot [1 - \exp(-c' \cdot t)]^n$$

Em que:

$$c' = c_1 = c_2 = \dots = c_n$$

t = tempo

Modelo de Schumacher

Considere:

$$\frac{dW}{W} = \kappa \cdot d\left(\frac{1}{A}\right)$$

Em que:

W=volume

A=idade

κ =parâmetro peculiar ao índice de sítio, densidade e estoque considerado.

Já com relação ao crescimento em altura a hipótese é a seguinte: O crescimento em altura é inversamente proporcional ao quadrado da idade:

$$\frac{dW}{dI} = \frac{\beta \cdot W}{I^2}$$

$$\frac{dW}{W} = \frac{\beta \cdot dI}{I^2} \rightarrow \frac{dW}{W} = \beta \cdot I^{-2} \cdot d \cdot I$$

$$\int_{W_i}^{W_f} \frac{dW}{W} = \beta \cdot \int_{I_i}^{I_f} I^{-2} \cdot d \cdot I$$

$$\text{Ln}W_f - \text{Ln}W_i = -\beta \cdot \left(\frac{1}{I_f} - \frac{1}{I_i} \right)$$

$$W_f = W_i \cdot e^{-\beta \cdot \left(\frac{1}{I_f} - \frac{1}{I_i} \right)}$$

Em que:

W_f =altura no final do período considerado

W_i =altura no início do período considerado

I_f =idade no final do período considerado

I_i =idade no início do período considerado

β =parâmetro do modelo

Modelo de Chapman-Richards

Considere:

$$\frac{dW}{dt} = \alpha \cdot W^m - \gamma \cdot W \quad (32)$$

Multiplicando a expressão 32 por $(1 - m) \cdot W^{-m}$ temos:

$$(1 - m) \cdot W^{-m} \cdot \frac{dW}{dt} = \alpha \cdot (1 - m) - (1 - m) \cdot \gamma \cdot W^{1-m} \quad (33)$$

Seja $u = W^{1-m}$, logo temos que:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d(W^{1-m})}{dt} = (1 - m) \cdot W^{-m} \cdot \frac{dW}{dt}$$

Substituindo a expressão acima na expressão 33 temos:

$$\frac{du}{dt} = \alpha \cdot (1 - m) - (1 - m) \cdot \gamma \cdot u$$

Ou ainda:

$$\frac{du}{dt} + (1 - m) \cdot \gamma \cdot u = (1 - m) \cdot \alpha$$

Temos então uma equação diferencial linear de primeira ordem.

Para resolver a equação diferencial acima mencionada, uma forma é a soma da solução geral da equação diferencial homogênea com uma solução particular da não homogênea, como se segue:

Solução geral da equação diferencial homogênea

$$\frac{du}{dt} + \gamma \cdot (1 - m) \cdot u = 0$$

$$\frac{du}{dt} = -\gamma \cdot (1 - m) \cdot u$$

$$\frac{1}{u} \cdot du = -\gamma \cdot (1 - m) \cdot dt$$

$$\int \frac{1}{u} \cdot du = -\gamma \cdot (1 - m) \cdot \int dt$$

$$\text{Ln } u = -\gamma \cdot (1 - m) \cdot t + c$$

$$u = e^{-\gamma(1-m)t+c}$$

$$u = e^c \cdot e^{-\gamma(1-m)t}$$

Seja $e^c = \beta_2$

$$u = \beta_2 \cdot e^{-\gamma(1-m)t}$$

Para a solução particular da equação diferencial não homogênea, tem-se:

$$\frac{du}{dt} + \gamma \cdot (1 - m) \cdot u = \alpha \cdot (1 - m)$$

Considerando $u_1 = \frac{\alpha}{\gamma}$ e substituindo na expressão anterior temos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right) + \gamma \cdot \frac{\alpha(1-m)}{\gamma} = \alpha \cdot (1 - m)$$

$$\alpha \cdot (1 - m) = \alpha \cdot (1 - m)$$

que é uma solução particular.

Logo a solução geral da equação diferencial não homogênea fica:

$$u = \frac{\alpha}{\gamma} + \beta_2 \cdot e^{-\gamma(1-m)t}$$

Como $u = W^{1-m}$

Tem-se que:

$$W^{1-m} = \frac{\alpha}{\gamma} + \beta_2 \cdot e^{-\gamma(1-m)t}$$

$$W = \left[\frac{\alpha}{\gamma} + \beta_2 \cdot e^{-\gamma(1-m)t} \right]^{\frac{1}{1-m}}$$

Sejam $\frac{\alpha}{\gamma} = \beta_1$, $\frac{1}{1-m} = \theta$ e $\gamma \cdot (1-m) = k$

Logo substituindo na equação acima, tem-se:

$$W = (\beta_1 + \beta_2 \cdot e^{-k \cdot t})^\theta$$

Após integração do modelo com m assumindo ser um valor variável, o modelo torna-se:

$$W = U \cdot \{1 - \beta \cdot \text{EXP}[-k \cdot (t - t_0)]\}^{1/(1-m)}$$

Quando $t_0=0$

$$W = U \cdot \{1 - \beta \cdot \text{EXP}[-k \cdot t]\}^{1/(1-m)}$$

Em que:

U = valor assintótico (tamanho teórico máximo que o organismo pode atingir)

Em um tempo inicial i , o modelo é:

$$W_i = U \cdot (1 - e^{-k \cdot t_i})^{\frac{1}{1-m}} \quad (34)$$

Em que um tempo final f , o modelo é:

$$W_f = U \cdot (1 - e^{-k \cdot t_f})^{\frac{1}{1-m}} \quad (35)$$

Como U é constante nos tempos i e f , pode-se conhecer seu valor, por exemplo, no tempo i

$$U = W_i \cdot (1 - e^{-k \cdot t_i})^{-\frac{1}{1-m}} \quad (36)$$

Substituindo (36) em (35), tem-se:

$$W_f = W_i \cdot (1 - e^{-k \cdot t_i})^{-\frac{1}{1-m}} \cdot (1 - e^{-k \cdot t_f})^{\frac{1}{1-m}}$$

$$W_f = W_i \cdot \left(\frac{1 - e^{-k \cdot t_f}}{1 - e^{-k \cdot t_i}} \right)^{\frac{1}{1-m}}$$

Desta forma, o valor assintótico que, às vezes, por ser teórico pode apresentar resultados fora da realidade, é eliminado do modelo para dar lugar a um valor real W_i .

Modelo de Silva-Bailey

Considere:

$$\frac{dW}{dt} = \gamma \cdot W \cdot \alpha^t \quad (37)$$

Que se traduz por: a taxa de crescimento ou mortalidade é proporcional a uma condição inicial vezes uma função exponencial da idade (t).

A solução para expressão 37 é a seguinte:

$$\frac{dW}{dt} = \gamma \cdot W \cdot \alpha^t$$

$$\frac{dW}{W} = \gamma \cdot \alpha^t \cdot dt$$

$$\int_{w_i}^{w_f} \frac{dW}{W} = \gamma \cdot \int_{t_i}^{t_f} \alpha^t \cdot dt$$

$$\text{Ln } W \Big|_{w_i}^{w_f} = \gamma \cdot \frac{\alpha^t}{\text{Ln } \alpha} \Big|_{t_i}^{t_f}$$

Considerando $\frac{\gamma}{\text{Ln } \alpha} = \kappa$ tem-se que:

$$\text{Ln } W \Big|_{w_i}^{w_f} = \kappa \cdot \alpha^t \Big|_{t_i}^{t_f}$$

$$\text{Ln } W_f - \text{Ln } W_i = \kappa \cdot (\alpha^{t_f} - \alpha^{t_i})$$

$$\text{Ln } W_f = \text{Ln } W_i + \kappa \cdot (\alpha^{t_f} - \alpha^{t_i})$$

$$W_f = W_i \cdot e^{\kappa(\alpha^{t_f} - \alpha^{t_i})}$$

Modelo de Brody

Considere:

$$\frac{dW}{dt} = \gamma - \lambda \cdot W$$

$$\frac{dW}{\gamma - \lambda \cdot W} = dt$$

$$\int \frac{dW}{\gamma - \lambda \cdot W} = \int dt$$

$$-\frac{1}{\lambda} \cdot \text{Ln}(\gamma - \lambda \cdot W) = t + c$$

$$\text{Ln}(\gamma - \lambda \cdot W) = -\lambda \cdot t - \lambda \cdot c$$

$$\gamma - \lambda \cdot W = e^{-\lambda \cdot t - \lambda \cdot c}$$

$$W = \frac{\gamma}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda \cdot c}}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Sejam

$$\alpha = \frac{\gamma}{\lambda},$$

$$\beta = \frac{e^{-\lambda \cdot c}}{\lambda} \quad e$$

$$\kappa = -\lambda$$

logo substituindo, tem-se que:

$$W = \alpha - \beta \cdot e^{\kappa \cdot t}$$

Para $t=t_i$, tem-se que:

$$W_i = \alpha - \beta \cdot e^{\kappa \cdot t_i} \quad (38)$$

Para $t=t_f$, tem-se que:

$$W_f = \alpha - \beta \cdot e^{\kappa \cdot t_f} \quad (39)$$

Como α é o valor assintótico (tamanho final), portanto constante em qualquer tempo, pode-se isolá-lo como se segue:

$$\alpha = W_i + \beta \cdot e^{k \cdot t_i} \quad (40)$$

substituindo (40) em (39) temos

$$W_f = W_i + \beta \cdot e^{k \cdot t_i} - \beta \cdot e^{k \cdot t_f}$$

$$W_f = W_i - \beta \cdot (e^{k \cdot t_f} - e^{k \cdot t_i})$$

Modelo de Weibull

Considere:

$$\frac{dW}{dt} = \varphi \cdot t^\lambda - \gamma \cdot W \cdot t^\lambda$$

$$\frac{dW}{dt} = t^\lambda \cdot (\varphi - \gamma \cdot W)$$

$$\frac{dW}{\varphi - \gamma \cdot W} = t^\lambda \cdot dt$$

$$\int \frac{dW}{\varphi - \gamma \cdot W} = \int t^\lambda \cdot dt$$

$$-\frac{1}{\gamma} \cdot \text{Ln}(\varphi - \gamma \cdot W) = \frac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1} + c$$

$$\text{Ln}(\varphi - \gamma \cdot W) = -\frac{\gamma}{\lambda+1} \cdot t^{\lambda+1} - \frac{\gamma \cdot c}{\lambda+1}$$

$$\varphi - \gamma \cdot W = e^{-\frac{\gamma}{\lambda+1} t^{\lambda+1} - \frac{\gamma \cdot c}{\lambda+1}}$$

$$W = \frac{\varphi}{\gamma} - \frac{e^{-\frac{\gamma \cdot c}{\lambda+1}}}{\gamma} \cdot e^{-\frac{\gamma}{\lambda+1} t^{\lambda+1}}$$

Sejam

$$\alpha = \frac{\varphi}{\gamma},$$

$$\beta = \frac{e^{\frac{-\lambda \cdot c}{\lambda+1}}}{\gamma},$$

$$\kappa = \frac{\gamma}{\lambda+1} \text{ e}$$

$$\theta = \lambda + 1$$

logo substituindo, tem-se que:

$$W = \alpha - \beta \cdot e^{-\kappa \cdot t^\theta}$$

Para $t=t_i$, tem-se que:

$$W_i = \alpha - \beta \cdot e^{-\kappa \cdot t_i^\theta} \quad (41)$$

Para $t=t_f$, tem-se que:

$$W_f = \alpha - \beta \cdot e^{-\kappa \cdot t_f^\theta} \quad (42)$$

Como α é o valor assintótico (tamanho final), portanto constante em qualquer tempo, pode-se isolá-lo como se segue:

$$\alpha = W_i + \beta \cdot e^{-\kappa \cdot t_i^\theta} \quad (43)$$

substituindo (43) em (42) temos

$$W_f = W_i + \beta \cdot e^{-\kappa \cdot t_i^\theta} - \beta \cdot e^{-\kappa \cdot t_f^\theta}$$

$$W_f = W_i - \beta \cdot \left(e^{-\kappa \cdot t_f^\theta} - e^{-\kappa \cdot t_i^\theta} \right)$$

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)