UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

JOÃO RICARDO VIOLA DOS SANTOS

O QUE ALUNOS DA ESCOLA BÁSICA MOSTRAM SABER POR MEIO DE SUA PRODUÇÃO ESCRITA EM MATEMÁTICA

LONDRINA – 2007

JOÃO RICARDO VIOLA DOS SANTOS

O QUE ALUNOS DA ESCOLA BÁSICA MOSTRAM SABER POR MEIO DE SUA PRODUÇÃO ESCRITA EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Prof. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco.

LONDRINA – 2007

Catalogação na publicação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

V795q Viola dos Santos, João Ricardo.
O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção
escrita em matemática / João Ricardo Viola dos Santos. – Londrina, 2007.
108f. : il. + anexo no final da obra.

Orientador: Regina Luzia Corio de Buriasco.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2007.
Bibliografia: f. 103-108.

1. Educação matemática – Teses. 2. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 3. Produção escrita em matemática – Teses. I. Buriasco, Regina Luzia Corio de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa

JOÃO RICARDO VIOLA DOS SANTOS

O QUE ALUNOS DA ESCOLA BÁSICA MOSTRAM SABER POR MEIO DE SUA PRODUÇÃO ESCRITA EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.
Orientadora: Prof. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco.

COMISSÃO EXAMINADORA

____
Prof. Dra. Maria Lucia Faria Moro
Universidade Federal Do Paraná

____
Prof. Dr. Dario Fiorentini
Universidade Estadual de Campinas

____
Prof. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco (Orient.)
Universidade Estadual de Londrina

Dedico este trabalho a meu pai Filadelfo pela oportunidade de aprender com ele os "substantivos" dos verbos confiar, sonhar e idealizar; a minha mãe Neide, pela oportunidade de aprender com ela os "substantivos" dos verbos trabalhar, dedicar e realizar, e a minha irmãzinha Mariana, os "substantivos" dos verbos sorrir, relaxar e aproveitar.

Agradeço a “Dotora” Regina Buriasco por me oportunizar conhecer algumas palavras.

Só de Sacanagem

Elisa Lucinda

Meu coração está aos pulos!
Quantas vezes minha esperança será posta à prova?
Por quantas provas terá ela que passar?
Tudo isso que está aí no ar, malas, cuecas que voam
entupidas de dinheiro, do meu dinheiro, que reservo
duramente para educar os meninos mais pobres que eu,
para cuidar gratuitamente da saúde deles e dos seus
pais, esse dinheiro viaja na bagagem da impunidade e
eu não posso mais.
Quantas vezes, meu amigo, meu rapaz, minha confiança
vai ser posta à prova? Quantas vezes minha esperança
vai esperar no cais?
É certo que tempos difíceis existem para aperfeiçoar o
aprendiz, mas não é certo que a mentira dos maus
brasileiros venha quebrar no nosso nariz.
Meu coração está no escuro, a luz é simples, regada ao
conselho simples de meu pai, minha mãe, minha avó e
dos justos que os precederam: "Não roubarás", "Devolva
o lápis do coleguinha",
" Esse apontador não é seu, minha filhinha".
Ao invés disso, tanta coisa nojenta e torpe tenho tido
que escutar.
Até *habeas corpus* preventivo, coisa da qual nunca
tinha visto falar e sobre a qual minha pobre lógica
ainda insiste: esse é o tipo de benefício que só ao
culpado interessará.
Pois bem, se mexeram comigo, com a velha e fiel fé do
meu povo sofrido, então agora eu vou sacanear:
mais honesta ainda vou ficar.
Só de sacanagem!
Dirão: "Deixa de ser boba, desde Cabral que aqui todo
o mundo rouba" e eu vou dizer: Não importa, será esse
o meu carnaval, vou confiar mais e outra vez. Eu, meu
irmão, meu filho e meus amigos, vamos pagar limpo a
quem a gente deve e receber limpo do nosso freguês.
Com o tempo a gente consegue ser livre, ético e o
escambau.
Dirão: "É inútil, todo o mundo aqui é corrupto, desde
o primeiro homem que veio de Portugal".
Eu direi: Não admito, minha esperança é imortal.
Eu repito, ouviram? IMORTAL!
**Sei que não dá para mudar o começo, mas, se a gente
quiser, vai dá para mudar o final!**

AGRADECIMENTOS

Agradeço a professora Dra Beatriz S. D'Ambrosio por me receber na Universidade de Miami, em Oxford-OH, EUA, por todas as oportunidades de aprendizagem que me ofereceu e pela experiência de conviver com uma outra cultura no tempo que passei.

Aos professores doutores componentes da minha banca, Maria Lucia Faria Moro, Dario Fiorentini, Ângela Marta P. das Dores Savioli e Márcia Cristina Trindade da Costa Cyrino, pela atenção e sugestões que ofereceram ao nosso trabalho.

Aos meus amigos interlocutores (Zé Ruelas) Julio Faria Correa e Sérgio Carrazedo Dantas, por todos os momentos que me ofereceram a falar sobre meu trabalho, minhas angústias, minhas idéias, e todas as sugestões por eles realizadas ao longo desses dois anos.

A minha prima Diamila pela convivência, incentivo e companheirismo na realização desse trabalho.

A todos os membros do GEPEMA, pelas discussões, sugestões, estudos, todas as oportunidades de aperfeiçoamento desse trabalho e, claro, todos os bolos de chocolates que desfrutamos em algumas de nossas alegres e construtivas reuniões.

A CAPES pela bolsa concedida para que eu pudesse ter dedicação integral a esse trabalho e ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina.

Por fim, agradeço a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da realização dessa investigação.

VIOLA DOS SANTOS, João Ricardo. **O que alunos da Escola Básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática**. 2007. 114 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo analisar a produção escrita de alunos na questão comum da Prova de Questões Abertas de Matemática da AVA–2002 da 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e da 3ª série do Ensino Médio. A pesquisa é de natureza qualitativa, baseada na análise textual discursiva, com a qual analisamos 147 provas. Investigamos o modo como alunos lidam com a questão aberta, suas interpretações das informações contidas em cada frase do enunciado, as estratégias elaboradas e os procedimentos utilizados, o pensamento e a linguagem algébrica, as características dos problemas que eles construíram a partir do enunciado da questão e os conteúdos escolares que eles mostram saber por meio de sua produção. Propõe o abandono da idéia de 'erro' para adotar a de 'maneiras de lidar'. Apresenta uma caracterização do pensamento algébrico para análise nas produções escritas. Em relação à interpretação dos alunos para o enunciado da questão tem-se que com o aumento da escolaridade eles fazem mais e melhores relações entre as informações contidas nas frases. Em relação ao pensamento algébrico expresso em suas produções, grande parte dos alunos mostra utilizá-lo para resolver a questão. Já os alunos que utilizaram linguagem algébrica resolveram a questão da maneira considerada correta. Os problemas construídos pelos alunos a partir do enunciado da questão se caracterizaram, parte por ter uma estrutura de resolução linear realizada por meio de interpretações passo-a-passo, e, parte por uma estrutura de resolução não-linear. Grande parte dos alunos que interpretou a idéia de recorrência da segunda frase resolveu a questão da maneira considerada correta. Neste trabalho mostramos que alunos da Escola Básica mostram saber, por meio de sua produção escrita, vários procedimentos que geralmente são trabalhados na escola, assim como suas maneiras particulares de lidar com uma questão aberta de matemática.

Palavras-chaves: Educação Matemática; produção escrita em matemática; avaliação em matemática, maneiras de lidar, interpreta-resolve-responde.

VIOLA DOS SANTOS, João Ricardo. **What Basic School students' show to know by means their mathematics written work**. 2007. 114 p. Dissertation Thesis (Master Degree in Science Teaching and Mathematics Education) – State University of Londrina.

ABSTRACT

The present work has objective to analyze the student written work of 4th grade of Elementary School, 8th grade of Middle School and 3rd grade of High School in common question of Mathematics Test of open-ended Question of AVA-2002 (Paraná Large-Scale Assessment-2002). The research nature is qualitative, based on discursive textual analysis in which we analyze 147 students written works. We investigate the way the students to handle with open-ended question, their interpretations about information in each phrase of enunciate; their strategies made and procedures used, their algebraic thinking and algebraic language, the characteristics of problems that the students built from question enunciate and the scholar contents that the students show they know in their written work. The work proposes to abandon "error" idea to adopt the "ways of handle" idea. It shows a characterization of algebraic thinking to analyze student written works. About students' interpretations to question enunciate, with the increase of school years they do more and better relations between the information in each phrase. About algebraic thinking express in students written works, many students show to use it to solve the question. The students that used algebraic language, they solved the question in the way to considered correct. The problems that students built from question enunciate describes, for one hand, they have a structure of linear solution by means of interpretation step by step, for other hand, they have a linear structure. Many students that interpreted the recurrence idea from second phrase solve the question in the way to considered correct. We show in this work that Basic School students show to know, by means their written work, many procedures that generally are worked at school, and their particular ways to handle with a mathematical open-ended question.

Key words: Mathematics Education; written work in mathematics; assessment in mathematics; ways of to handle, interpret-solve-answer.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 Introdução

Quando se trata de avaliação, nas provas escritas, é usual na escola o professor atribuir zero a uma questão em que um aluno apenas coloca a resposta correta, mas não apresenta cálculo algum. O professor atribui zero à questão, sob a alegação de que sem os cálculos não dá para saber se o aluno aprendeu ou não o conteúdo. Igualmente usual é atribuir zero a uma questão na qual o aluno apresenta os cálculos e a resposta, ou seja, resolve toda a questão, mas utiliza dados retirados erroneamente do enunciado, pois muitas vezes, o professor só olha o resultado final. Em outras situações, o aluno desenvolve uma estratégia diferente daquela ensinada pelo professor em sala de aula, fazendo relações que o próprio professor por vezes nem imaginava, mas, se por um mero descuido erra algum sinal e sua resposta fica equivocada, toda a resolução é considerada errada. O professor continua olhando apenas o resultado final. Contraditório? Sem sentido? Sim. A avaliação do professor frente à produção dos alunos, muitas vezes, é realizada em desacordo com seu discurso e poucas vezes a produção escrita é analisada para uma compreensão dos conhecimentos que os alunos mostram ter.

Essas ocorrências comuns na aula de matemática refletem uma visão de avaliação baseada apenas no certo ou errado, aprovado ou reprovado, bem sucedido ou mal sucedido.

Apesar de os professores geralmente praticarem uma “classificação contraditória” tomando-a como se fosse a avaliação, esta pode ser tomada como uma prática educativa de grande alcance, útil para propiciar um olhar sobre a aprendizagem de alunos e professores, para auxiliar e nortear modos de aprender e ensinar em sala de aula. A produção escrita dos alunos é uma rica fonte para entender os processos de ensino e aprendizagem bem como os procedimentos e as estratégias utilizados para resolver problemas (BURIASCO, 2004).

É possível, por meio da produção escrita dos alunos, compreender como eles lidam com as questões abertas de matemática, ou seja, investigar e analisar o modo como eles interpretam os enunciados das questões, as estratégias que elaboram e, quais procedimentos utilizam.

Nesse trabalho tivemos por objetivo analisar a produção escrita de alunos, da 4ª e 8ª série do Ensino Fundamental e da 3ª série do Ensino Médio, na questão comum da

Prova de Questões Abertas de Matemática da AVA-2002[1], bem como aprofundar os conhecimentos dos processos de aprender e ensinar matemática por meio da análise da produção desses alunos.

Os objetivos específicos são investigar:

- os modos de interpretação que os alunos fazem do enunciado da questão; as estratégias elaboradas e os procedimentos utilizados; o pensamento e a linguagem algébrica; as características dos problemas que os alunos construíram a partir do enunciado da questão; e, os conteúdos matemáticos escolares que eles mostram saber nesta sua produção escrita, nessa questão específica.

Este trabalho está dividido em cinco partes: Introdução, Fundamentação Teórica, Estratégia Metodológica, Análises e Resultados, e Algumas Considerações.

A segunda parte contém dois capítulos, um sobre avaliação e outro sobre educação algébrica. No capítulo sobre avaliação tecemos considerações tomando-a como uma prática de investigação, norteadora dos processos de ensino e aprendizagem dos alunos e professores na sala de aula. Para caracterizar seu papel, utilizamos uma metáfora da "câmera digital". Apresentamos uma discussão de alguns trabalhos relativos à análise dos erros, algumas das suas mudanças de perspectiva ao longo da história e uma caracterização, na qual a palavra *erros* é substituída pela expressão *maneiras de lidar*. Com isso apresentamos também uma discussão sobre uma caracterização dos alunos pela falta, *os erros*, e outra, pelo que eles têm, *as maneiras de lidar*. Ao fim desse segundo capítulo tecemos considerações sobre a análise da produção escrita de alunos e professores, mostrando alguns resultados que esse tipo de análise pode oportunizar. No segundo capítulo, apresentamos uma discussão sobre a Álgebra Escolar. Considerações sobre seu desenvolvimento, sobre o pensamento algébrico, e, alguns trabalhos que mostram resultados de se trabalhar a Educação Algébrica desde as primeiras séries do Ensino Fundamental. Discutimos algumas caracterizações que encontramos na literatura consultada, apresentamos uma caracterização para o pensamento algébrico possível de ser identificada por meio da produção escrita dos alunos, e uma breve discussão de uma caracterização da Educação Algébrica.

[1] AVA é o Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar da Rede Estadual do Paraná.

Na terceira parte temos dois capítulos que tratam da estratégia metodológica e das análises e resultados. No primeiro capítulo, apresentamos a *análise textual discursiva* que foi a estratégia metodológica utilizada. Esta estratégia é uma modalidade de pesquisa qualitativa. No quarto capítulo, apresentamos quatro agrupamentos da produção escrita dos alunos que dizem respeito: às estratégias elaboradas, interpretações feitas e procedimentos utilizados pelos alunos ao resolverem a questão; ao pensamento algébrico; aos problemas que os alunos construíram a partir do enunciado da questão; e, aos conteúdos da matemática escolar que os alunos mostram saber por meio da sua produção escrita, da questão estudada.

Na última parte apresentamos alguns resultados do nosso trabalho, alguns indicativos de futuras investigações a serem realizadas em relação ao modo como os alunos lidam com as questões abertas de matemática.

2 AVALIAÇÃO COMO UMA "CÂMERA DIGITAL"

As avaliações de rendimento que os órgãos educacionais, ligados ao governo, vêm realizando nos últimos quinze anos não têm possibilitado um inventário mais detalhado sobre os conhecimentos que os alunos constroem em sua história escolar durante o Ensino Fundamental e Médio. Geralmente, os instrumentos aplicados contêm itens de múltipla escolha, nos quais apenas o acerto ou o erro é contabilizado para um mapeamento do quanto os alunos conhecem sobre determinado conteúdo – acreditando na ilusão de que isso pode acontecer. Essas aferições contribuem pouco para uma compreensão sobre o processo de aprendizagem dos alunos. Como não são analisadas as estratégias nem os procedimentos utilizados, ou seja, o "como" esses alunos lidam com as questões, de quais conhecimentos eles fazem uso para resolvê-las e quais interpretações fazem em relação ao seu enunciado, essas avaliações pouco propiciam indicativos, sobre os modos como os alunos lidam com as questões apresentadas nas aulas.

Um estudo comparativo do SAEB (1995 e 1997, 1999, 2001) apresenta tabelas mostrando a diminuição, a estabilidade ou o aumento das médias de desempenho dos alunos por estados do Brasil. Tomando o estado do Paraná como exemplo, temos que, em matemática, os alunos da 4ª série do Ensino Fundamental apresentaram um aumento de 2 pontos de proficiência média, de 198 em 1995 para 200 em 1997. Já os alunos da 8ª série tiveram em 1995 uma proficiência média de 255 pontos e em 1997 de 263 pontos. Com relação aos alunos da 3ª série do Ensino Médio, o aumento foi de 8 pontos de média de proficiência, passando de 288 pontos em 1995 para 296 em 1997. (RELATÓRIO SAEB, 1997). Podemos lançar um olhar crítico para esse tipo de estudo fazendo-nos as seguintes perguntas: O que podemos fazer com esses resultados? O que eles nos mostram? É importante saber que nossos alunos estão melhorando, mas é importante também saber como eles estão melhorando?[2]

Em outro estudo, com dados referentes a 1999, os alunos da 4ª série apresentam seus desempenhos em dois níveis: de 160 a ≤ 175, primeiro nível, e de 175 a ≤ 225, segundo nível. No primeiro nível, o aluno é capaz de localizar objetos, reconhecer

[2] Sabemos que os objetivos dessas avaliações também englobam outros fatores e que elas são importantes para se ter um conhecimento da escola como um todo. Não estamos a desmerecê-las, entretanto elas possuem um alcance limitado para um conhecimento mais detalhado de como nossos alunos lidam com as questões abertas de matemática, ou seja, quais conhecimentos e estratégias engendram para resolver uma questão.

figuras geométricas simples, compreender dados apresentados em gráficos de colunas e interpretar medidas em situações cotidianas. No segundo nível, o aluno demonstra domínio na resolução de problemas que envolvem adição e subtração, situações cotidianas e reconhecimento de figuras geométricas simples (RELATÓRIO SAEB 1999). Este mesmo estudo indica que os alunos da 8ª série se encontram no nível de 225 a ≤ 275, o terceiro, que se caracteriza pelo domínio das quatro operações com números naturais, identificação dos elementos das figuras geométricas, interpretação de gráficos e tabelas, leitura de medidas de temperatura, estabelecimento de relações entre diversas unidades de tempo e manipulação do sistema monetário. De maneira geral, os alunos da 3ª série do Ensino Médio estão situados nos níveis de 225 a ≤ 275 e de 275 a ≤ 325, que correspondem aos níveis 3 e 4 de desempenho, respectivamente.

Em alguns estudos é possível identificar, pelos níveis de desempenho, os conhecimentos e habilidades dos alunos. Entretanto esses resultados não nos mostram a maneira como os alunos lidam com os problemas matemáticos, as dificuldades por eles apresentadas, as estratégias e procedimentos engendrados na resolução das questões. Mesmo apresentando esses níveis de desempenho, os resultados não permitem um olhar mais detalhado sobre a atividade matemática dos alunos. Infelizmente, como podemos notar, nossos alunos continuam situados em níveis muitos baixos de desempenho, chegando no máximo ao quarto – alunos da terceira série – sendo o sétimo o último nível.

O relatório do SAEB de 2001 mostra que grande parte dos alunos da 4ª série do Ensino Fundamental situa-se nos níveis 2 (21%), 3 (19%) e 4 (22%)[3]. Em comparação com os outros anos, houve uma queda no desempenho em matemática. Já na 8ª série, houve uma estabilidade na média de desempenho dos alunos. A maior parte dos alunos se situa nos níveis 3 (14%), 4 (38%) e 5 (28%), havendo um aumento de nível em relação à 4ª série. A maioria dos alunos da 3ª série do Ensino Médio se situa nos níveis 4 (33%), 5 (29%) e 6 (21%), sendo que houve um novo aumento de nível em relação à 8ª série. Em comparação com o ano de 1999, os níveis de desempenhos continuaram estáveis (RELATÓRIO SAEB, 2001).

Diante dessas considerações em relação às avaliações externas de rendimento, podemos nos questionar: *Será que os alunos não estão aprendendo nada na escola? Será que eles passam, no mínimo, 13 anos de suas vidas na escola e aprendem tão*

[3] Os níveis de desempenho vão de 1 a 10.

pouco da matemática escolar[4]*?* Como se pode notar, nossos alunos não estão nos níveis desejáveis de desempenho, no entanto, não podemos dizer que eles não sabem nada de matemática apenas por meio desses indicativos, visto as características e a dimensão de alcance dessas avaliações. De fato, o que queremos nesse trabalho é investigar o que os alunos sabem de alguma parte da matemática que aprendem na escola, de modo a fornecer subsídios para que os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem possam rever suas próprias atuações nesse mesmo processo. Para isso, estudaremos quais são os registros e o modo como os alunos constroem suas estratégias e utilizam seus procedimentos para responder uma questão aberta de matemática[5].

Olhando para as práticas avaliativas realizadas pelos professores dentro da escola, a situação fica mais drástica. Ilusões de poder quantificar conhecimento, de ter classes homogêneas e a possibilidade de poder determinar a aprovação ou a reprovação de alunos estão ainda presentes em sala de aula. Uma mudança nesse cenário implica em uma ruptura nos valores atrelados à aprendizagem, ao ensino, à escola, à sociedade e ao planeta.

No contexto da escola, a avaliação, que é sempre vista como a última etapa de um ciclo, uma espécie de validação de uma competição ou qualquer outra ação que tenha por objetivo determinar o vencedor ou perdedor, o melhor ou pior, o aprovado ou o reprovado, é coerente num sistema sócio-econômico em que, *a priori*, se estabelece a existência de uma grande diferença econômica, política e social entre os seres. A avaliação, como uma prática social, acompanhou esse movimento e, com isso, hoje se pauta, na maioria das escolas, como uma atividade de classificação, hierarquização e exclusão de alunos. Os vestibulares existem, pois não há vagas para todos nas universidades, os concursos são realizados, pois não há trabalho para todos. As diferenças sociais são imensas e a avaliação se apresenta como um instrumento que fortalece essas diferenças. Como afirma Esteban (2001) "a avaliação classificatória é uma prática de exclusão na medida em que vai selecionando o que pode ser aceito na escola, funcionando como um instrumento de controle no contexto escolar (p.4)".

A avaliação, como uma *demarcação de fronteiras estáticas* (BAHABHA, *apud* Esteban, 2002) e imóveis, supõe um contexto escolar frio, estático, determinado, linear e passível de uma leitura real (algumas ilusões do paradigma dominante). Um contexto

---

[4] Neste trabalho, sempre que nos referirmos à matemática estaremos nos referindo à matemática escolar.

[5] Questão Aberta de Matemática é aquela que não requer apenas que a pessoa que resolve assinale uma resposta, mas que encontre a resposta e mostre os caminhos trilhados para chegar a ela.

no qual todas as relações são lineares e têm causas e conseqüências imediatas, em que é possível identificar as falhas, em que sempre é possível efetivar uma separação entre sujeito e objeto. Entretanto isso não é possível, visto que na escola existem seres humanos e relações entre eles. Seres subjetivos, imprevisíveis, com contextos múltiplos, com maneiras distintas de aprender. Devido às vicissitudes da sala de aula, uma alternativa para pensar em avaliação é como uma prática de investigação. Uma atividade instigadora de indagações de alunos e professores no processo de ensino e de aprendizagem. Uma “câmera digital” na qual tiramos uma foto e logo em seguida olhamos o resultado, com a possibilidade imediata de sempre tirar outra foto. Uma avaliação para nortear os contextos com objetivos de construir interpretações inter-relacionadas e interdependentes com os agentes envolvidos, promovendo direções e caminhos para seguir no processo educativo.

Como afirma Esteban (2001), a avaliação como prática de investigação tem o sentido de romper as barreiras entre os participantes do processo ‘ensino/aprendizagem’ e entre os conhecimentos presentes no contexto escolar. Este contexto de reflexão possibilita ao professor recolher indícios para atingir níveis de complexidade na interpretação de seus significados e incorporá-los como eventos relevantes para a dinâmica ensino/aprendizagem. Um olhar processual, dinâmico, sobre o próprio caminhar, tomando-o como ponto de crivo pode ajudar na construção de conhecimento e ainda participar da mediação desse processo.

Para isso é preciso tomar as atividades de avaliação como atividades de aprendizagem. Em outras palavras, é preciso que as atividades de avaliação possam oportunizar aprendizagens nas práticas de sala de aula, de modo que os alunos possam se dar conta de que o que existe é a busca da aprendizagem de todos.

Como bem coloca Hadji (1995, 2001), três palavras são chave para compreendermos a avaliação nessa perspectiva: *verificar, situar e julgar*. *Verificar* no sentido de inventariar, diagnosticar os conhecimentos dos alunos e professores; *situar* para compreender, no cotidiano escolar, os avanços e retrocessos, os erros e suas naturezas e *julgar* para nortear os caminhos a serem trilhados, as alternativas a serem tomadas na busca de proporcionar ambientes que possam gerar aprendizagens.

Uma das faces do ato de avaliar é “colar” os critérios que estabelecemos naquilo que percebemos, incorporando a parcialidade da avaliação, sua limitação e com isso a presença da incerteza. A constituição de *referentes* para uma enunciação de um *referido* (Hadji, 1994), ou seja, o estabelecimento de critérios para incursões na sala de aula com objetivo de fazer compreensões dela, revela a subjetividade da avaliação, que é inerente ao modo como se faz e, aos instrumentos que se utilizam.

A cada momento que fazemos um corte no contexto escolar, perdemos algo de sua complexidade. Limitamo-nos a um olhar fragmentário, incompleto, carregado com nossas crenças, concepções e atrelado àquilo que queremos ver daquilo que buscamos enxergar. Bahabha (1998, *apud,* ESTEBAN, 2002) nos alerta para a *ambivalência* da avaliação, assim como Hadji (1994), no sentido de que “o olhar com que se foca o objeto está em relação com o que nele se procura (p. 52)”. A avaliação sempre nos deixa em um terreno tão comum em todas as relações existentes, inclusive na escola, mas muito freqüentemente ignorada por todos - a subjetividade. Por isso parece urgente o fim da demarcação das fronteiras entre as certezas e as incertezas, o feito e o não feito; este conteúdo este aluno sabe e aquele outro não. A subjetividade, enquanto característica inerente a todo processo de comunicação, bem como a toda ação de cada ser humano, caminha sempre ao lado de todo e qualquer tipo de avaliação realizada dentro e fora da escola. Entretanto, é exatamente este ponto, que muitas vezes causa angústia, medo e impotência, visto que foge ao controle, que nos permite engendrar interpretações, negociações, constituição de múltiplos conhecimentos entre os atores de uma sala de aula. Crescemos no diferente e não no igual. Por meio da subjetividade podemos nos assumir como produtores de conhecimentos diferentes e, assim, aprender uns com os outros.

2.1 Do erro para as maneiras de lidar

Ao assumirmos a avaliação como prática de investigação, um aspecto de extrema importância a ser considerado é como se “olha” para o “erro”[6] dos alunos. Muitas pesquisas foram realizadas em relação ao papel constitutivo que ele desempenha no processo de aprendizagem, no que pode ajudar os professores a fazerem interpretações da atividade matemática dos alunos, nas considerações dele como resultado de experiências prévias dos alunos em sala de aula, dele como poderosa ferramenta para diagnosticar dificuldades de aprendizagem, entre outros aspectos (RADATZ, 1979, 1980; BORASI, 1985, 1987, 1996; CURY 1995, 2004, 2006; RICO, 1995; ESTEBAN, 2003; BURIASCO, 1999, 2004; NAGY-SILVA E BURIASCO,

[6] Utilizaremos a palavra erro entre aspas para realçar a nossa discordância com essa denominação. Sempre que os autores estiverem falando de **erro**, estaremos interpretando como **maneiras de lidar**.

2005; GARNICA, 2006; FIORENTINI 2006). Como se pode ver, não é novo o olhar positivo sobre o "erro", mas é antiga a visão dos professores frente à sua significação.

Entretanto ainda se continua utilizando a palavra "erro" para se referir a um tipo de resolução do aluno que, olhando mais detalhadamente, nada mais é do que diferente daquela considerada correta. Algumas vezes, quando se fala em "erro", mesmo tomando-o como constituinte da aprendizagem, resultado das concepções prévias, entre outros fatores positivos, está se referindo ao que o aluno não fez em relação ao que ele deveria ter feito. Caracterizam-se os alunos pelo que lhes falta e não pelo que eles já têm. É nesse ponto nossa discordância e, por conta dela, buscamos uma outra maneira de caracterizar o "erro".

De acordo com Garnica, a "leitura pela falta" é aquela em que, a partir de uma enunciação do aluno, o professor detecta o que lhe falta:

> falta compreender conteúdos anteriores, falta a ele exercitar-se mais, faltam a eles certos conceitos, falta aprender a operacionalizar certos conceitos ou encaminhar melhor certas operacionalizações, falta a ele ler cuidadosamente o problema, falta um lar estruturado, etc etc etc (GARNICA, 2006, p. 4).

Em muitos trabalhos, como a seguir exemplificaremos, os autores fazem considerações ao que os alunos não fizeram, o que eles não sabem e o que deixaram de fazer, nas classificações dos seus "erros". Neste trabalho apresentamos uma mudança no foco dessa discussão, substituindo "**erro"**, que em muitos casos acreditamos estar ainda caracterizando os alunos pela falta, por **maneiras de lidar**, expressão que considerarmos mais adequada para os processos de resolução de uma questão, com a qual acreditamos estar caracterizando os alunos pelo que eles já têm num determinado momento[7]. Com isso, de acordo com Garnica, podemos fazer uma leitura positiva[8], que

> é aquela que quando o aluno "fala" ele diz algo, quando ele faz ele faz algo e é desse algo que ele diz ou faz que devemos partir, propondo estratégias de ação. Trata-se de analisar o que ele falou ou fez, não o que ele deixou de falar ou fazer (GARNICA, 2006, p. 4).

A maneira pela qual o aluno interpretou o enunciado, elaborou uma estratégia e utilizou um procedimento para resolver uma questão, em muitos casos, como veremos no capitulo 5, resulta de processos sistemáticos, tanto sintático como semânticos, que o

---

[7] Lembro-me da afirmação de Letícia Celeste, uma amiga do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, em um congresso de Educação Matemática que dizia: "Não dá para caracterizar os alunos pelo que eles têm falando de erro".

[8] A leitura positiva está atrelada à maiêutica, método atribuído a Sócrates, utilizado para fazer com que a resposta a uma pergunta brote exatamente daquele que fez a pergunta. A leitura positiva e também a maiêutica estão ligada à idéia de 'ler' os alunos pelo que eles têm.

próprio aluno construiu. O aluno não interpretou equivocadamente o enunciado da questão, não utilizou um procedimento incorretamente; ele fez essas ações, pelo seu modo idiossincrático de expressar suas maneiras de interpretar e resolver o problema que ele construiu do enunciado da questão[9]. Ele construiu a sua maneira de lidar com aquela situação. Como julgar uma resolução errada do aluno se a questão que ele interpretou foi outra? Entre outras coisas, a escola não é um lugar para determinar os corretos e os errados; os bons e os ruins; os aprovados e reprovados; os fracassados e os realizados. Muito pelo contrário, a escola deve ser um ambiente no qual se oportunizam e se potencializam as capacidades dos alunos de atingirem o seu melhor. Um ambiente que busque humanizar os alunos, que busque conhecimentos de solidariedade, cooperação e paz (D'AMBROSIO, 1999).

Assim, acreditamos ser necessário ter um olhar abrangente dos modos particulares dos alunos lidarem com as atividades matemáticas, negociando com os professores quais dessas maneiras permitem a todos resolver, de uma maneira eficiente, as situações dadas. Um dos principais objetivos desse trabalho é investigar como os alunos lidam com uma questão aberta de matemática e o que eles sabem da matemática escolar. Assim, não podemos caracterizá-los pela falta, ou seja, por seus "erros", e sim pelo que eles têm, isto é, suas maneiras de lidar.

Apresentaremos, a seguir uma discussão de alguns trabalhos que tratam de análise dos "erros", as transformações nos focos de pesquisa e nossos argumentos para tomá-los como maneiras de lidar. Mostraremos que não é apenas uma mudança de nomes, ou apenas um capricho para apresentar "novas" caracterizações. Nossos argumentos apontam para considerações de cunho epistemológico e metodológico nessa perspectiva de mudança.

Em uma classificação apresentada por Radatz (1979) dos erros cometidos pelos alunos, vemos a caracterização pela falta que o autor faz em relação à atividade matemática deles. As cinco categorias, que esse autor apresenta, são: 1ª) erros cometidos por dificuldades de linguagem; 2ª) erros cometidos por dificuldades na obtenção de informações espaciais; 3ª) erros cometidos no domínio deficiente de pré-requisitos de habilidades fatos e conceitos; 4ª) erros cometidos de associações incorretas ou rigidez do pensamento; e 5ª) erros cometidos na aplicação de regras e estratégias irrelevantes.

---

[9] Esclareceremos essa diferenciação que fizemos entre questão e o problema que o aluno construiu do enunciado da questão no capítulo da Estratégia Metodológica.

Tomando a primeira categoria como exemplo, erros cometidos por dificuldades de linguagem, fazemos as seguintes perguntas: O que seria uma dificuldade de linguagem? Não seria um modo particular de dar significado a uma determinada palavra ou expressão matemática? Será que ao se colocar dificuldades de linguagem como uma categoria dos "erros" dos alunos, não se está olhando pela sua falta em relação ao considerado correto e não pelo que de fato ele fez? Acreditamos que esta e as outras categorias também estão caracterizando os alunos pela falta, pois ressalta o que o aluno não tem, em relação ao que o aluno fez e o considerado como correto, ou seja, os "erros" de dificuldade de linguagem.

Também Radatz (1980) em sua revisão sobre os trabalhos que tratam da análise de erros, destaca a importância de se trabalhar com eles em sala de aula como resultado das experiências prévias dos alunos em aulas de matemática. Ele ressalta que a partir dessas análises temos a oportunidade de diagnosticar as dificuldades dos alunos, bem como, se pode sugerir um ponto de partida para pesquisas sobre os processos de ensino e aprendizagem, uma vez que a simples identificação dos "erros" como momentos constituintes da aprendizagem dos alunos, já é um indício de transformação.

Uma outra pesquisadora, Borasi (1985; 1987), amplia a visão da análise dos erros, que se pautava apenas na sua identificação, reparação e em seus diagnósticos, para tê-los como "um dispositivo motivacional e também um ponto de partida para explorações matemáticas criativas envolvendo atividades de representação e resolução de problemas matemáticos" (BORASI, 1987, p. 10). Admitindo-os como *trampolins*, eles podem oportunizar aos alunos uma reflexão sobre seus próprios processos de aprendizagem, seus modos idiossincráticos de atribuição de significados para os conhecimentos matemáticos. Em vários outros estudos dessa autora, a problemática da análise "erros" é discutida, apresentando-se vários exemplos de como trabalhar com eles para discutir a natureza da matemática, oportunidade de "novas" descobertas matemáticas, explorar o funcionamento da mente, entre outras.

Nesses estudos percebemos que os "erros" já são tratados como modos particulares de alunos expressarem seus conhecimentos matemáticos. Percebemos que a autora não se refere aos "erros" dos alunos como falta de seus conhecimentos, mas sim como *trampolins* para discussão sobre a atividade matemática.

Em outra classificação para os "erros", Movshovitz-Hadar *et all* (1987) apresentam seis categorias para os erros dos alunos da High School[10]: 1ª) utilização inadequada de dados; 2ª) interpretação equivocada da linguagem; 3ª) inferências logicamente inválidas; 4ª) distorções na utilização de teoremas ou definições; 5ª) solução não-verificada e,6ª) erro técnico. Percebemos alguma semelhança em relação à classificação de Radatz, anteriormente apresentada e novamente fazemos as mesmas considerações, tomando, por exemplo, a terceira categoria, inferências logicamente inválidas.

Ao julgar uma inferência feita por um aluno, apenas podemos dizer se é inválida ou não em relação àquela considerada correta, e não à realizada pelo aluno. Novamente estamos caracterizando os alunos pela falta. Uma determinada inferência, julgada inválida, pode, para o aluno, ser totalmente válida e fazer sentido para uma determinada interpretação que ele fez da situação.

Em seu estudo histórico das perspectivas da análise de "erros" em Educação Matemática, Cury (1995) identifica três fases: a primeira, nas primeiras décadas do século passado, na qual as pesquisas se restringiam ao domínio da aritmética; a segunda, a partir dos anos 1950, cujo enfoque era dado por meio da teoria da informação e a terceira, nas décadas de 1980 e 1990 que toma o "erro" como constituinte dos processos de aprendizagem. Ilustrando as mudanças de perspectivas nas maneiras de analisar e os fundamentos teóricos que circunscrevem os tipos de análises, a autora sintetiza os principais objetivos da análise de erros como sendo "a superação do erro através de sua eliminação ou através de suas potencialidades (CURY, 1995, p.12)". O primeiro, relativo à primeira metade do século XX, está ancorado, tanto na caracterização dos alunos pela falta, quanto no caráter de valorizar apenas o correto e exterminar o "erro". Já o segundo, superação dos erros pelas suas potencialidades, pode ou não estar caracterizando pela falta, pois vai depender do modo como se procedem essas discussões.

Em um estudo mais recente, Cury (2006) apresenta quatro classes para caracterizar os erros dos alunos no conteúdo envolvido nas questões. Estas classes trazem as seguintes expressões:

> [...] 1ª) o aluno não sabe trabalhar com módulo; 2ª) /.../ o aluno não leva em conta o sinal negativo; 3ª) /.../ o aluno não sabe substituir valores de x em f ou em g; 4ª) /.../ [resoluções] "compostas por soluções únicas e que apresentam detalhes que evidenciam problemas em outros conteúdos (CURY, 2006, p. 8).

---

[10] Tratando-se do contexto brasileiro, alunos do Ensino Médio.

Em relação a essas classes parece que a autora está caracterizando os alunos pela falta, pois afirma: “o aluno não sabe trabalhar com módulo (p. 8)”.

Nosso olhar para os alunos, nessa mudança, se caracteriza pela afirmação de Lins (1999)

> Não sei quem você é; preciso saber. Não sei também onde você está (sei apenas que está em algum lugar), preciso saber onde você está para que eu possa ir até lá falar com você e para que possamos nos entender e negociar um projeto no qual eu gostaria que estivesse presente a perspectiva de você ir a lugares novos (LINS, 1999, P. 85).

Tanto professores quanto pesquisadores precisam interpretar, analisar e tomar suas decisões em relação às maneiras idiossincráticas da atividade matemática dos alunos. Compreendendo os sentidos e significados que os mesmos atribuem a suas resoluções e negociando essas maneiras de lidar, podemos oportunizar aos alunos algumas outras maneiras que, dentro de um determinado contexto, podem ser consideradas corretas. Assim, convidando os alunos a legitimar esses diferentes tipos de conhecimentos, não em uma visão dicotômica, de certo/errado, mas em uma abrangente, a idéia de maneiras de lidar, tendo por objetivo quais estratégias e procedimentos fornecem condições de resolver as situações que alunos e professores interpretam.

Uma leitura aligeirada ou descuidada pode resultar em: *“Ah, então quer dizer que agora vale tudo; não existe mais certo e errado na escola; agora os alunos vão poder fazer o que quiser”*. Obviamente não é isso que queremos dizer, como buscamos mostrar com este trabalho.

Mesmo que alguns trabalhos, ao nosso ver, caracterizem os alunos pela falta, eles trazem considerações importantes sobre as potencialidades **das maneiras de lidar dos alunos** com as atividades matemáticas. No trabalho, já citado anteriormente, Radatz (1979) afirma que

> [...] considerações no diagnóstico e aspectos de causa dos erros podem dar ajuda especifica para os professores, permitindo integrar seu conhecimento do conteúdo do currículo com seus conhecimentos das diferenças individuais das crianças (p. 170, nossa tradução)”.

Em outro trabalho sobre análise dos “erros”, Cury (2004) afirma que, para pensar em perspectivas atuais para esse tipo de análise, devemos introduzir aos poucos outras idéias e tipos de planejamento que devem ir ao encontro das necessidades de alunos e professores. Assim, apresenta as premissas básicas para essa mudança:

> a) respeitar o aluno, devolvendo a ele a análise feita e discutindo os resultados, com objetivo de explorar suas próprias potencialidades; b) planejar as

> estratégias para trabalhar com conteúdos em que há maior incidência de erros, propondo questões que envolvam interesse dos alunos; c) aproveitar os recursos disponíveis (jogos, material concreto, computadores) para retomar os conteúdos de várias formas, explorando habilidades de formular hipóteses, testá-las e discuti-las; d) para cada questão proposta ou tarefa solicitada, fazer uma análise crítica dos erros que surgem, com o grupo de alunos, para aproveitar todas as oportunidades de fazê-los pensar sobre seus próprios pensamentos; (p. 8).

Esteban (2003) afirma que devemos ter uma visão sobre o "erro", num processo de construção de conhecimentos, que ofereça pistas de como estes estão sendo organizados pelos alunos. Tomados numa perspectiva processual da constituição dos conhecimentos podem não somente ampliar nossa leitura do contexto – sala de aula – ampliando nossas possibilidades para mediar a aprendizagem dos alunos, como também o entendimento das várias formas de interpretações dos fatos.

Hadji (1994), quando nos diz *"*que o erro não é absoluta certeza da ausência de conhecimento, assim como o acerto não é garantia absoluta da existência da competência pretendida (p.61)*",* confirma nossas idéias de que devemos encará-lo como um dos possíveis pontos de partida para uma melhor compreensão do processo de ensino e aprendizagem, fornecendo repertório para os professores sobre um amplo espectro de mediações na aprendizagem de seus alunos.

Já para Fiorentini.

> o erro escolar, na verdade, resulta do esforço dos alunos em participar do processo de aprendizagem, produzindo e negociando, a partir do seu mundo e da sua cultura, sentidos e significados sobre que se ensina e aprende na escola (FIORENTINI, 2006, p. 4).

Assim, neste trabalho tomamos essa caracterização buscando deixar para trás a idéia comumente veiculada de erro, para adotar as diferentes maneiras de lidar dos nossos alunos no seu processo de aprender matemática. Esta idéia está em acordo com a perspectiva de tomar a avaliação como prática de investigação aliada às análises da produção escrita dos alunos.

2.2 Sobre a análise da produção escrita

Uma das formas, atrelada à idéia de avaliação como prática de investigação, de buscar conhecer mais detalhadamente como os alunos lidam com os problemas matemáticos, como se configuram seus processos de aprendizagem, quais dificuldades encontram, tomando as maneiras de lidar dos alunos, diferentes da correta, como constituintes do processo de aprendizagem, é a análise da produção escrita de alunos e professores. Trabalhos nessa perspectiva apontam para caracterizações mais detalhadas sobre as estratégias que os alunos elaboram na abordagem de uma questão, quais as marcas de conhecimentos matemáticos encontradas nas suas produções e quais os tipos de "erro" cometidos ao resolvê-las (Buriasco, 1999, 2004; Nagy-Silva, 2005; Perego, 2005; Segura, 2005; Perego, 2006; Negrão de Lima, 2006; Alves, 2006). Indo de encontro às avaliações de rendimento – sobre as quais foi apresentada alguma caracterização no inicio desta seção – essas análises se configuram como uma forma mais próxima de conhecer as maneiras de alunos resolverem questões abertas de matemática.

A produção escrita possibilita tanto conhecer quais conteúdos os alunos demonstram ter, seus "erros" e dificuldades, quanto ter uma compreensão de como usam seus conhecimentos matemáticos escolares (Nagy-Silva 2005; Perego 2005; Perego, 2006; Negrão de Lima 2006; Alves 2006). A maneira como os alunos elaboram suas estratégias e utilizam seus procedimentos, lançando mão dos seus repertórios de conhecimentos matemáticos, é passível de uma caracterização por meio da análise da produção escrita.

De acordo com Nagy-Silva,

> [...] com informações sobre a produção escrita dos alunos, que apresentam tanto as suas dificuldades quanto suas possibilidades, é possível realizar uma intervenção que de fato contribua para o desenvolvimento dos alunos (NAGY-SILVA, 2005 p. 106).

Assim, ao buscarmos subsídios para conhecer como os alunos lidam com questões abertas de matemática, a produção escrita se mostra como uma alternativa promissora.

Nos trabalhos (NAGY-SILVA, 2005; PEREGO, 2005, OLIVEIRA, 2005, PEREGO, 2006; NEGRÃO DE LIMA, 2006; ALVES, 2006) realizados pelo grupo GEPEMA[11] sobre a produção de alunos do Ensino Fundamental relativa à 4ª e 8ª série do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio, de professores da Rede Pública do Paraná, de professores cursando a Especialização em Educação Matemática e de alunos da Licenciatura em Matemática, uma grande dificuldade apresentada na resolução dos problemas é relativa à interpretação da questão. Os alunos e professores dominam, com algumas restrições, os algoritmos e procedimentos matemáticos que usam na resolução

[11] GEPEMA - Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação - Universidade Estadual de Londrina.

dos problemas, porém a adoção de palavras chaves como estratégia para a compreensão do enunciado e a falta de conexão entre as informações contidas em cada uma das frases dos problemas parecem levar a interpretações incorretas. Assim, Perego (2006) afirma, em relação aos erros cometidos, eles dizem respeito à *"falta de compreensão e/ou interpretação das questões e, por conseguinte, a equivocada utilização das informações contidas nos enunciados"* (p. 97)[12].

Não podemos julgar os "erros" dos alunos sem uma análise das suas origens, visto a grande dificuldade estar na interpretação dos problemas e não nos cálculos que usam para as suas resoluções (ALVES, 2006). Ao se defrontarem com problemas cujos enunciados são pouco familiares, os alunos realizam outras interpretações e resoluções que nem sempre condizem com uma resolução considerada correta pelo professor. Negrão de Lima (2006) afirma que "quando uma questão não é familiar ao aluno, ou mesmo quando se trata de questões familiares, mas que exigem compreensão além do reconhecimento de palavras-chaves, os alunos encontram mais dificuldade para resolvê-las" (p. 172).

Em relação aos conhecimentos apreendidos por esses alunos, os estudos mostram que alunos da 4ª série dominam os algoritmos convencionais da multiplicação e da divisão simples naquilo que se pode ver da questão (NAGY-SILVA, 2005); assim como noções de construção de gráficos, de porcentagem e de regra de três são realizadas com sucesso por alunos da Licenciatura em Matemática (PEREGO, 2005). Mais de 60% dos alunos de 4ª série sabem efetuar as quatro operações (NEGRÃO, 2006), assim como alunos da 3ª série do Ensino Médio dominam cálculos relativos também às quatro operações (ALVES, 2006).

Por meio dessas considerações vemos, como afirma Buriasco (2004) que a análise da produção escrita dos alunos é uma alternativa promissora para fazer interpretações sobre a atividade matemática dos alunos e também sobre os processos de ensinar e aprender matemática.

Assim, como afirma Kazemi e Franke,

> O uso da produção escrita dos alunos tem um potencial de influenciar o discurso profissional sobre o ensino e a aprendizagem, engajar os professores em ciclo de experimentação e reflexão e mudar o foco dos professores de uma pedagogia geral para uma particularmente conectada a seus próprios alunos (p. 204, 2004, nossa tradução).

---

[12] Ressalvamos que em nossa análise já superamos esta afirmação, entretanto queremos deixar registrado que mesmo os trabalhos que tratam da análise da produção escrita e que contêm considerações nessa mesma direção de Perego (2006) foram ponto de partida para nossa análise.

Neste trabalho buscamos fornecer alguns subsídios para instaurar esse tipo de análise na prática dos professores.

Com essas considerações podemos tomar a avaliação como uma prática de investigação a favor da aprendizagem dos alunos e, para os professores, como uma alternativa para o trabalho desenvolvido nas aulas de matemática. Uma forma de olhar não mais sobre “erros” e sim sobre as maneiras idiossincráticas de lidar com uma questão aberta, tomando-as, na perspectiva de Borasi (1996), como *trampolins* constituintes dos processos de aprendizagem do aluno em relação aos conhecimentos com os quais está lidando e como constituinte do repertório dos professores sobre a atividade matemática deles. É preciso deixar para trás a velha *máquina fotográfica,* que registra um momento estático, único, ao “tirar” uma fotografia, para utilizar uma *câmera digital,* que disponibiliza um olhar processual, passÍvel de modificação, com vários ângulos a serem olhados, com vários instrumentos para várias “fotos” a serem constituídas.

3 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A ÁLGEBRA ESCOLAR

Para muitos alunos, a álgebra escolar representa um divisor de águas entre ter ou não sucesso em matemática. Geralmente eles a vêem apenas como uma manipulação de letras, com pouquíssimo entendimento das idéias matemáticas envolvidas tanto em questões estruturais quanto procedimentais. Eles manipulam as letras para resolver equações, sem saber por que um número num momento está multiplicando o “x” e em outro, “passa” a estar dividindo. Não distinguem quando elas são usadas como variáveis ou incógnitas e desconhecem as diferenças e aplicações. O processo de desenvolvimento da álgebra como um instrumento matemático oriundo do estabelecimento de padrões e regularidades nas resoluções de problemas em processos de generalizações, desenvolvidos a partir da geometria e da aritmética, é ainda muito obscuro para grande parte dos alunos. Em um belo dia, a professora, que sempre mostrou aos alunos que na matemática fazemos “contas” com números, aparece com um tal de “x” e diz que agora eles precisam aprender algumas “regrinhas” para resolver essa “coisa” que ela chama de equação.

A álgebra tratada como um corpo axiomático estritamente simbólico mostra-se ao aluno como um *monstro monstruoso* (LINS, 2004), que aparece apenas nas aulas de matemática e não segue as *regras da rua* (LINS e GIMENEZ, 1997). Esse tratamento descaracteriza seu potencial de se constituir como um conhecimento matemático a favor dos alunos, em suas vidas, e como uma ferramenta matemática dentro da própria matemática. Como afirma Rojano,

> Provavelmente um dos mais velhos erros no ensino de álgebra é o de tentar comunicar aos estudantes, desde seu primeiro contato com o objeto, as qualidades e virtudes no domínio da sua sintaxe em relação a sua utilidade em modelar e resolver problemas (ROJANO, 1996, p. 55, tradução nossa).

Aulas que tratam de problemas que exigem estabelecimento de padrões matemáticos em casos particulares, reconhecimento de regularidades nos conjuntos numéricos ou em figuras geométricas, em um processo de generalização usando alguma linguagem algébrica[13] e a perspectiva de propiciar ao aluno uma visão das idéias matemáticas que estão presentes, tanto na álgebra quanto na aritmética e na geometria, ainda são algo a ser instaurado nas práticas dos professores da Educação Básica.

---

[13] Estamos entendendo por linguagem algébrica uma linguagem constituída por meio de uma notação simbólica na qual os símbolos representam generalizações de invariâncias, padrões, regularidades.

Geralmente é apenas em meados da sexta série do Ensino Fundamental que aparecem as primeiras menções à álgebra escolar, em um ambiente estritamente mecânico, isolado dos outros conhecimentos matemáticos, aparentemente sem relação alguma entre eles.

No processo de desenvolvimento da álgebra, podemos encontrar muitos olhares para compreendermos as maneiras como eram concebidos o pensamento e a linguagem algébrica, assim como as mudanças e avanços ocorridos. Com isso, podemos ter subsídios para a construção de abordagens diferenciadas para o ensino da álgebra escolar. Como afirma Radford:

> [...] a construção histórica dos conceitos matemáticos pode fornecer-nos um melhor entendimento dos caminhos construídos, pelos nossos estudantes, de seus conhecimentos matemáticos (RADFORD, 1996, p. 51, nossa tradução).

Nossa intenção é fazer uma incursão em alguns aspectos do pensamento e da linguagem algébrica para podermos identificar nas produções escritas dos alunos as marcas desses conhecimentos, bem como apontar um caminho de *introdução* e *estruturação* do ensino da álgebra[14] (RADFORD, 2001).

A palavra *álgebra* tem origem na palavra árabe *al-jabr* que significa a ciência das equações, (EVES, 2004, p. 266) e constituiu-se de processos de generalizações tanto da aritmética como também da geometria possibilitando ao homem diversas ferramentas para resolver seus mais variados problemas. De acordo com Charbonneau (1996) a "Álgebra não é somente extensão do domínio numérico, é do geométrico também. Os símbolos podem representar segmentos, áreas e volumes" (p. 34), assim como a respeito da "geometria grega, podemos dizer que as equações são determinadas por curvas e não que as curvas são determinadas por equações (p.22)".

No que diz respeito ao seu desenvolvimento, e tomando como foco a linguagem, é possível dividir a história da álgebra em três grandes fases: retórica (ou verbal), sincopada e simbólica (EVES, 2004). Nessas fases notamos a constituição de uma linguagem simbólica para representar as generalizações tanto da aritmética quanto da geometria, chegando, com Viète, ao uso de letras para estudo de um objeto ao qual algumas regras se aplicam.

A primeira fase, retórica ou verbal, diz respeito ao processo de resolução de problemas – aritméticos ou geométricos – fazendo uso somente da linguagem usual

---

[14] Não queremos aqui apresentar todo o processo e muito menos acreditamos nessa possibilidade. Existem outras caracterizações para o desenvolvimento da álgebra como listam Fiorentini, Miorin e Miguel (1993) e Sfard (1995). Uma discussão dessas caracterizações foge do escopo desse trabalho, sendo que nele apresentaremos apenas uma caracterização que julgamos importante para nossas análises.

corrente, ou seja, os argumentos usados nas resoluções não tinham abreviações nem símbolos específicos. Essa fase se inicia por volta de 1700 a.C. e vai até o século III com os trabalhos de Diofanto. Um problema característico dessa etapa se encontra no papiro Rhind: *Divida 100 pães entre cinco pessoas de modo que as partes recebidas estejam em progressão aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores* (EVES, 2004, p.84).

A segunda fase, sincopada, caracteriza-se pelo uso de algumas abreviações ou símbolos específicos para quantidades ou elementos geométricos que se repetiam freqüentemente. Há uma mistura entre algumas abreviações de palavras, símbolos e a linguagem corrente na resolução dos problemas. Diofanto, com seus tratados, sendo o mais importante, *Aritmética,* uma abordagem da teoria algébrica dos números, foi um dos grandes promovedores da passagem da álgebra retórica para a álgebra sincopada. Como afirma Eves (2004), "Diofanto tinha abreviação para incógnita, potência de incógnita até a de expoente seis; subtração, igualdade e inverso (p.209)". Assim, notamos um grau bem sofisticado no uso de uma notação simbólica nas resoluções dos problemas.

A terceira fase do desenvolvimento da álgebra, a simbólica, tem início por volta do século XVI com os trabalhos do francês Viète (1540-1603). Essa fase é caracterizada pela utilização de letras para as quantidades dadas, expressão de soluções gerais e pela formulação de regras para as relações numéricas. Segundo Eves (2004), no tratado *In artem*, de Viète, aparece o uso de vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes. De acordo com Klein (1968 *apud* Rojano, 1996), as regras *Zetetics* (ou sintáticas) do livro de Viète, *Introdução da Arte Analítica* de 1593, representaram o primeiro sistema moderno e axiomático, pois ele criou um contexto sistemático que "define" o objeto ao qual algumas regras se aplicam. A álgebra agora não era apenas concebida como a "*ciência das equações*", mas como o estudo das estruturas algébricas. Como afirma Kieran (1992), "o uso de símbolos permite a eliminação de informação supérflua e um empenho a gerar outros conceitos matemáticos, tais como função (p.4)".

O desenvolvimento da álgebra durante as três fases consideradas caracterizou-se por avanços e mudanças de perspectivas tanto em relação à generalização de idéias matemáticas em formas de escritas mais simples e de fácil acesso, quanto na construção de um objeto próprio de estudo, sem relações com os problemas cotidianos - as estruturas algébricas. Percebemos que o homem constituiu abstrações de situações concretas em um momento, e que, em um momento seguinte, essas abstrações para ele já podiam ser tomadas como "concretas", desencadeando, assim, um processo sucessivo que possibilitou a apreensão de diferentes construtos algébricos para resolver os problemas.

Moura e Souza (2005) corroboram nossos argumentos afirmando que "/.../ o lógico-histórico da álgebra simbólica contém em seu bojo o desenvolvimento histórico da álgebra não simbólica (p. 11)". Assim, também o pensamento algébrico se constitui ao longo do desenvolvimento da humanidade, mesmo que no seu início sem alguma linguagem algébrica.

Em relação à Educação Algébrica podemos considerar que oportunizar aos nossos alunos somente algumas regras mecânicas de como resolver equações apenas em meados da sexta série do Ensino Fundamental é o mesmo que "roubar" seus direitos de se apropriar de vários conhecimentos no processo de constituição do pensamento e da linguagem algébrica. Propiciar o desenvolvimento de capacidades de reconhecer regularidades, estabelecer padrões e fazer generalizações devem compor o currículo de matemática desde as primeiras séries da Educação Básica. *Mas será que os pobrezinhos dos alunos que mal entendem simples equações nas séries finais do Ensino Fundamental são capazes de entender álgebra já nas primeiras séries?* Essa pergunta se enquadra, em primeiro lugar, no julgamento pela falta que muitos professores fazem dos seus alunos e, também, na manutenção de uma tradição que insiste na não oportunização desses conhecimentos.

Muitos autores (CARPENTER, FRANKE E LEVI 2003; SCHLIEMANN, BRIZUELLA 2004; BLANTON E KAPUT 2005; CARRAHER, *ET ALL*, 2006) têm sugerido a integração da aritmética com a álgebra já nas primeiras séries do Ensino Fundamental. Suas pesquisas têm apontado que crianças podem desenvolver o pensamento algébrico, bem como usar símbolos para generalizar relações aritméticas ou padrões geométricos, usar a noção algébrica para representar relação de funções e raciocinar algebricamente desde os 9, 10 anos de idade. A idéia de tratar o conhecimento aritmético separado do algébrico, com o primeiro antecedendo o segundo, tira oportunidades de conhecimentos matemáticos para a resolução de problemas. Existem muitas propriedades, estruturas e relações que são comuns tanto para a álgebra quanto para a aritmética e que podem ser desenvolvidas e conectadas trabalhando como se fosse um conhecimento integrado. Como bem enfatizam Lins e Kaput (2004) colocando uma pergunta e sua resposta: "Por que Álgebra [já nas primeiras séries]?

Simplesmente porque nossos alunos merecem a chance para desenvolver o melhor de seus potenciais (p. 64)", e, sendo assim, devemos desde muito cedo propiciar essas oportunidades.

Carpenter, Franke e Levi (2003), propondo a integração da aritmética com a álgebra já nas séries iniciais do Ensino Fundamental, afirmam que os alunos podem "aprender aritmética em um caminho gerativo no qual esse conhecimento sirva de base para o aprendizado da álgebra (p. 137)". Assim, algumas questões principais para o desenvolvimento do raciocínio algébrico, nas séries iniciais, são as discussões das diferenças do sinal de igual tanto no campo aritmético quanto no algébrico, o desenvolvimento do pensamento relacional entre as expressões numéricas, a construção de conjecturas matemáticas e suas representações simbólicas, o trabalho com equações com diversas variáveis sendo elas repetidas, a justificação e prova de algumas conjecturas matemáticas, a construções de igualdades de múltiplas operações e as relações de implicações tanto da aritmética quanto da álgebra (CARPENTER, FRANKE e LEVI, 2003). Essas idéias nos permitem tomá-las como as *grandes idéias* que perfazem tanto o conhecimento aritmético quanto o algébrico. A questão principal se situa na forma como essa integração é realizada por meio de alguma abordagem da Educação Algébrica.

Os alunos trazem vários conhecimentos matemáticos antes de entrarem na escola, e várias generalizações são por eles constituídas no processo de seu desenvolvimento cognitivo (BURIASCO, 1988). Valorizar esses conhecimentos, assim como apresentar outros em uma negociação de significados produzidos, pode oportunizar aprendizagens para os alunos. Nesse processo, acreditamos que o ponto chave está na idéia da *legitimação* (LINS, 2001), para as produções de significados produzidos por alunos e professores. A questão é sempre tentar explicitar o que os alunos estão entendendo sobre as notações, símbolos e entes matemáticos, para que possamos estar, se possível, "falando a mesma língua"[15], respeitando e valorizando, ou seja, estabelecer um espaço comunicativo. Assim, para a introdução do pensamento e da linguagem algébrica, inter-relacionada com o conhecimento aritmético e também, ao nosso ver, com o geométrico, é necessário valorizar as maneiras como os alunos representam suas expressões e engendram suas generalizações.

[15] Lins e Gimenez (1997) exemplificam como justificações diferentes podem ser produzidas para a mesma equação na sala de aula da Professora Tânia e seu esperto aluno, Robertinho.

Brizuela e Shilemman (2004) introduziram notações algébricas com alunos de 10 anos de idade por meio de caminhos espontâneos, por eles utilizados para representar problemas verbais. Em um estudo longitudinal, um terço dos 70 alunos participantes utilizaram uma expressão algébrica para representar o problema. A valorização dos conhecimentos que os alunos trazem das suas realidades, e dos modos que eles próprios constroem para representar suas idéias matemáticas pode ser um dos pontos de partida para a introdução da álgebra nas séries iniciais. Assim, como afirmam Blantom e Kaput,

> a integração do raciocínio algébrico nas primeiras séries oferece uma alternativa para construir um desenvolvimento conceitual da matemática, desde muito cedo, mais profundo e complexo dentro das experiências dos alunos (2005, p. 413, tradução nossa).

Carraher, *et all* (2006), em seus estudos com crianças das séries iniciais, indicam que elas podem lidar com conceitos e usar notações algébricas para representar problemas abertos que envolvem o uso das estruturas aditivas. Tomando as operações como funções e os processos de generalização como o "coração" do raciocínio algébrico, seus estudos propiciam alguns exemplos para uma caracterização do ensino e da aprendizagem da Educação Algébrica já nas primeiras séries.

Na perspectiva desses autores, "a aritmética tem um caráter inerentemente algébrico o qual diz respeito a casos gerais como estruturas que podem ser sucintamente capturadas com a notação algébrica (CARRAHER; *et all*, 2006, p. 89, tradução nossa)".

Em vistas dos exemplos da introdução de uma Educação Algébrica para alunos das primeiras séries do Ensino Fundamental, podemos ter duas, entre outras, implicações para os alunos das séries posteriores, como bem colocam Lins e Kaput:

> 1ª) [os] tópicos que os estudantes tradicionalmente encontrariam nas últimas séries já teriam sido estudados. Isso não significa que esses tópicos não serão totalmente explorados, mas que nas séries finais poderão existir futuros estudos deles, ao invés de uma introdução; 2ª) por isto é razoável supor que expor os estudantes para a álgebra, mesmo apenas em alguns aspectos, é comprometer mudança no seu pensamento sobre outros tópicos em muitos caminhos (2004, p. 63).

Não podemos ficar com a triste ilusão de que nossos alunos não são capazes de aprender conteúdos matemáticos que tradicionalmente são oportunizados apenas em séries mais avançadas. A álgebra não deveria ser introduzida apenas na sexta série se, como vimos, alunos de 10 anos já conseguem resolver equações lineares. Entretanto essas idéias têm como conseqüência uma grande reformulação do currículo da Escola Básica, que está infelizmente ancorado em conteúdos obsoletos, repetitivos e não nas idéias matemáticas que permeiam as diversas áreas – álgebra, aritmética, geometria, entre outras. Assim, implantar a Educação Algébrica já nas primeiras séries do Ensino Fundamental é uma questão de cunho político e não apenas metodológico.

3.1 Sobre o pensamento algébrico

Ancorado em uma tradição pedagógica que implica uma linguagem algébrica para sua existência, o pensamento algébrico é pouco discutido nas salas de aula. Essa maneira específica de organizar, modelar, pensar e assim constituir contextos é geralmente esquecida como conteúdo matemático a ser trabalhado pela grande maioria dos professores. Não menos importante que qualquer discussão sobre um outro conteúdo matemático, caracterizações do pensamento algébrico, bem como detalhamentos de quais atividades podem oferecer oportunidades para o seu desenvolvimento, devem estar presentes nas pautas de pesquisa e, também, na prática de professores em sala de aula.

Apresentaremos a seguir algumas caracterizações do pensamento algébrico na literatura consultada e, a partir disso, constituiremos uma, a qual julgamos apropriada para nossas análises da produção escrita dos alunos.

Lins (1992) apresenta uma caracterização para o pensamento algébrico, e, para ele, pensar algebricamente é,

> (i) pensar aritmeticamente, e
> (ii) pensar internamente, e
> (iii) pensar analiticamente (LINS, 1992, p. 12, nossa tradução).

De imediato essa caracterização de Lins nos diz que para os alunos pensarem algebricamente não é necessário terem alguma notação simbólica, sendo ela literal ou não. Para esse autor, o pensamento algébrico é um modo, entre outros, de *produzir significado* para a álgebra (LINS, 1994). Ao afirmar que pensar algebricamente é *pensar aritmeticamente*, ele nos remete "à idéia de modelar com os números" (LINS, 1992, p.12). *Pensar aritmeticamente* significa que os objetos com os quais estou lidando são exclusivamente os números, operações aritméticas e uma relação de igualdade (LINS, 1994). Temos com isso que é no bojo da linguagem aritmética que o pensamento algébrico emerge em suas primeiras características.

Em relação a *pensar internamente*, Lins (1992) deixa claro que ao se pensar algebricamente está se tomando por referência as propriedades das operações. Significa que as propriedades destes objetos, que sustentam a ação dos alunos, não fazem referência a nada, fora do domínio desses objetos (LINS, 1994). Com isso percebemos a existência de modelos não-aritméticos como outros modos de produzir significado (LINS, 1992).

Quanto a essa segunda característica do pensamento algébrico temos que:

> [...] o *internalismo /.../* é, precisamente, dirigido a possibilidade para nós de distinguir soluções internas, isto é, aquelas produzidas dentro das fronteiras dos campos semânticos dos números e das operações aritméticas, e não pela manipulação de modelos não-aritméticos (Lins, 1992, p.14).

Já a última característica do pensamento algébrico, *pensar analiticamente*, serve para caracterizá-lo "como um método de procura das verdades e que no pensamento algébrico o desconhecido é tratado como conhecido (Lins, 1992, p.16)". Significa que os números genéricos são tratados exatamente como se fossem específicos; "incógnitas" são tratadas exatamente como se fossem "dados" (LINS, 1994).

Essa caracterização apresentada por Lins (1992, 1994) nos remete a algumas implicações. A primeira é que o pensamento algébrico não necessita somente acontecer em um contexto de notação simbólica, sendo literal ou não; a segunda é que, nos contextos do pensamento algébrico, os números podem ser entendidos somente simbolicamente; a terceira implicação é que essa caracterização oferece um quadro teórico que possibilita um entendimento das soluções dos alunos; e a última implicação diz respeito a um olhar para o pensamento algébrico como mais um modo de pensamento, tão importante quanto o pensamento geométrico, combinatório (LINS, 1992).

Concernente a essa caracterização, percebemos uma valorização da aritmética para o desenvolvimento do pensamento algébrico e que pensar algebricamente é apenas uma, entre outras formas de pensar. Acreditamos que investigar essa maneira de pensar é de suma importância para fazermos caracterizações para a atividade matemática dos alunos.

Fiorentini, Miorin e Miguel (1993), em sua caracterização do pensamento algébrico, apontam os elementos caracterizadores desse tipo de pensamento, sendo eles:

> [...] percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste a outros que não variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação problema e a presença de processos de generalização (p. 87)

Esses mesmos autores definem três fases para o desenvolvimento do pensamento algébrico: a *pré-algébrica,* em que a aluno usa casualmente um elemento considerado algébrico, mas ainda não o concebe como um número generalizado; a fase de *transição,* na qual o aluno concebe a existência de um número qualquer, fazendo algumas generalizações usando ou não símbolos, e o *pensamento algébrico mais desenvolvido,* em que o aluno concebe a existência de grandezas abertas ou variáveis dentro de um intervalo numérico, sendo capaz de expressar e operar com elas (FIORENTINI, *et all*, 2005). Percebemos que, para esses autores, o desenvolvimento do pensamento algébrico está ligado à apropriação da linguagem algébrica, entretanto ela não determina o desenvolvimento, apenas potencializa.

Essas características do desenvolvimento gradativo do pensamento algébrico podem se tornar visíveis com a utilização de várias atividades em vários momentos dos alunos na escola. Visto que o nosso material para estudo é a produção escrita de alunos da mesma questão, em três séries distintas, poderemos encontrar apenas algumas marcas desse tipo de conhecimento.

Em seus estudos, Bell (1996) como reposta à pergunta - O *que é o pensamento algébrico?* - aponta o seguinte:

> 1) a resolução de complexos problemas aritméticos;
> 2) a codificação e o uso de métodos sistemáticos gerais para diferentes tipos de problemas;
> 3) o encontro e a prova de generalizações numéricas e geométricas;
> 4) o reconhecimento e o uso de propriedades gerais do sistema numérico e suas operações;
> 5) o reconhecimento, nomeação, e o uso de funções padrões, por exemplo, $y = kx^2$;
> 6) o uso de uma linguagem simbólica manipulada (p. 151, nossa tradução).

Esse mesmo autor afirma que os tópicos 1, 2 e 6 estão ligados à perspectiva da resolução de problemas como uma abordagem para a introdução da álgebra escolar.

Percebemos uma convergência entre essas três caracterizações apresentadas para o pensamento algébrico, em razão das primeiras características do pensamento algébrico estarem ligadas ao campo da aritmética. Esse é um ponto importante, pois, como estamos defendendo uma Educação Algébrica desde as primeiras séries do Ensino Fundamental, caracterizar o pensamento algébrico no campo da aritmética nos permite pensar no seu desenvolvimento desde muito cedo nas crianças. É possível ver um alto nível de desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos, sem que tenha sido utilizada uma linguagem usualmente "dita" algébrica.

Lins e Kaput (2004) fazem duas caracterizações para o pensamento algébrico. A primeira "envolve ato de generalização deliberada e expressão de generalidades*"*, já a segunda "envolve*,* usualmente como um comportamento separado, raciocínio baseado em formas de generalizações sintaticamente-estruturadas, incluindo ações guiadas sintaticamente e semanticamente (p. 48, tradução nossa)".

Lins e Gimenez (1996) definem a atividade algébrica e não o pensamento algébrico. Para eles, essa atividade consiste "no processo de produção de significado para álgebra", sendo a álgebra, para eles, um "conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade*"* (p. 137). Em relação a esse processo de produção de significados, para esses autores o pensamento algébrico é uma, entre outras, das maneiras de produzir significado para a álgebra.

Já Blantom e Kaput (2005) e Carraher *et all* (2006) também não caracterizam o pensamento algébrico, mas o raciocínio algébrico. Para Blantom e Kaput (2005), o raciocínio algébrico

> [...] é um processo no qual os alunos generalizam idéias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações por meio do discurso da argumentação, e as expressa, cada vez mais, em caminhos formais e de idade apropriada (2005, p. 413, nossa tradução).

Carraher *et all* (2006), o raciocínio algébrico pode tomar várias formas, incluindo:

> a) o uso da aritmética como um domínio pra expressar e formalizar generalizações (aritmética generalizada); b) generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional); c) modelagem como um domínio pra expressar e formalizar generalizações, e; generalização sobre sistemas matemáticos abstratos de cálculos e relações (CARRAHER *et all,* 2006, p. nossa tradução).

Em relação a esses autores que falam de atividade algébrica e raciocínio algébrico, percebemos que estão mais ligados ao desenvolvimento da atividade algébrica como um todo, ou seja, as ações realizadas pelos alunos em relação ao aprendizado da álgebra e o seu uso nas diversas situações. Eles enfatizam todo o processo da atividade algébrica, desde as primeiras características do pensamento algébrico até a utilização de uma linguagem simbólica para estabelecer algumas generalizações.

Moura e Souza (2005), em um estudo sobre o lógico-histórico da Álgebra simbólica e não simbólica, listam alguns elementos, historicamente construídos, que constituem os nexos conceituais do pensamento algébrico: o conceito de fluência, de variável e de campo de variação. Essa caracterização do pensamento algébrico não se assemelha às outras que apresentamos anteriormente. Como as próprias autoras afirmam, ela abarca alguns elementos primários da dinâmica do pensamento humano (MOURA e SOUZA, 2005):

> [...] queremos encontrar regularidades nos movimentos da vida para que possamos elaborar generalizações. Queremos criar fórmulas gerais para tentarmos compreender os diversos movimentos do mundo. Só conseguimos elaborar essas fórmulas quando conseguimos apreender movimentos regulares que se apresentam nos fenômenos da vida (p. 33-34).

Em vista dessas caracterizações para o pensamento ou raciocínio algébrico, e a atividade algébrica, acreditamos que precisamos constituir uma, baseada nas apresentadas, que nos permita reconhecer na produção escrita dos alunos, que é objeto deste estudo, algumas marcas do pensamento algébrico.

O contexto ao qual nossa questão foi aplicada é o escolar. É possível resolver a questão com estratégias e procedimentos que geralmente são trabalhados nas escolas. Nosso interesse é investigar quais são os conhecimentos matemáticos escolares que os alunos mostram saber por meio da sua produção escrita, isto é, quais conteúdos matemáticos; também quais estratégias elaboradas e quais procedimentos, que geralmente são trabalhados nas escolas, os alunos mostram saber. Assim, partimos das caracterizações apresentadas para constituir uma identificável por meio da produção escrita.

Em relação à 4ª e 8ª série do Ensino Fundamental e à 3ª série do Ensino Médio, temos que nossos alunos geralmente estão habituados a um contexto no qual os números e as quatro operações e algumas estratégias e procedimentos para resolver as questões são, de alguma forma, comuns e habituais. Já na 8ª série do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio foram oportunizados conhecimentos matemáticos relativos à álgebra.

Assim, por se tratar de uma análise dos conhecimentos matemáticos dos alunos do contexto escolar, caracterizaremos o *pensamento algébrico* pela expressão de um processo que envolva alguma relação entre *estruturas aritméticas* por meio de ações sintáticas, que sigam regras procedimentais e formais, e, semânticas, que atribuam algum sentido lógico para a relação dessas estruturas. Por *estrutura aritmética* estamos entendendo o resultado da construção do procedimento utilizado na realização de uma operação por meio de um enunciado.

Não apresentamos nada de novo, visto que essa caracterização foi construída a partir das apresentadas anteriormente. Entretanto, visto que nossos dados se constituem da produção escrita de alunos de três séries, acreditamos que poderemos analisar o pensamento algébrico desses alunos por meio dessa caracterização.

3.2 Sobre uma possibilidade de Educação Algébrica

Várias abordagens estão sendo desenvolvidas para trabalhar a álgebra escolar. Já em 1996, Nadine Bernadz, Carolyn Kieran e Lesley Lee editaram um livro – *Approaches to Álgebra: Perspectives for Research and Teaching* – no qual vários autores apresentam suas pesquisas em 4 abordagens: generalização, resolução de problema, modelagem e funcional (relativa à função). Cada uma dessas abordagens foca uma maneira de trabalhar a álgebra, com pontos positivos e negativos. Acreditamos que todas podem coexistir na prática de sala de aula dos professores, pois cada uma dá importância a uma maneira de se trabalhar o conhecimento matemático, relativo à álgebra.

Kieran (2004) sintetiza as principais características da educação algébrica conceituando a atividade algébrica como: atividade de geração, atividade de transformação e atividade de nível meta/global.

A primeira atividade algébrica, atividade de geração, “envolve a formação de expressões e equações que são os objetos da álgebra” (p. 20). Assim, exemplos desse tipo de atividade são: a expressão de generalizações a partir de padrões geométricos e numéricos; a representação de quantidades por meio de incógnita em situações-problema e a expressão de regras de relações numéricas (KIERAN, 2004).

A segunda atividade, atividade de transformação, diz respeito à parte mecânica e operacional da álgebra e

> [...] contém a fatoração, a substituição, a adição ou multiplicação de expressões polinomiais, exponenciação, resolução de equações, simplificação de expressões, trabalho com equivalência de expressões e equações (KIERAN, p. 24, 2004, tradução nossa).

A terceira atividade, a atividade de nível meta/global, caracteriza-se pelo uso da álgebra como uma ferramenta na resolução de problemas dos mais variados tipos, tais como a modelagem, a generalização, a análise de relações, a justificação, a prova, entre outros (KIERAN, 2004). São atividades nas quais a álgebra poderia ser substituída por outra ferramenta matemática para a resolução de problemas de modo geral.

Percebemos que essa conceituação acompanha, em alguns aspectos, o desenvolvimento da álgebra nas três fases mencionadas no início deste capitulo. A educação algébrica escolar pode, de certo modo, desencadear uma introdução e desenvolvimento do conhecimento algébrico dos alunos, por meio dessas três atividades.

Entretanto acreditamos que as atividades devem estar em comunhão com o conhecimento aritmético e o geométrico no decorrer da Educação Básica. De fato, existem algumas particularidades entre os três que precisam ter seus momentos, para as questões procedimentais e operacionais. Porém temos a obrigação de propiciar conhecimentos matemáticos aos alunos, direcionado para a constituição de um inventário de ferramentas, estratégias e construtos matemáticos para seu desenvolvimento intelectual e social.

Lins e Gimenez (1997) corroboram nossos argumentos afirmando que

> [...] numa proposta para Educação Matemática, a álgebra, a aritmética e a geometria, devem ser vistas não como conteúdos justificados por sua própria existência, mas como instrumentos que participam da organização da atividade humana (p. 28).

O pensamento matemático, em particular os pensamentos aritmético, geométrico e algébrico, deve ser desenvolvido nos alunos como modo de organizar e constituir contextos e realidade. Nesse trabalho analisamos, em relação ao pensamento algébrico, quais conhecimentos os alunos mostram saber por meio de sua produção escrita.

4 ESTRATÉGIA METODOLÓGICA

Entre as diversas modalidades de pesquisa qualitativa, realizamos neste trabalho uma *análise textual discursiva* (Moraes, 2003; Moraes e Galiazzi, 2006). Segundo esses autores, a análise textual discursiva "é uma abordagem de análise de dados que transita entre duas formas consagradas de análise de pesquisa qualitativa, que são a análise de conteúdo e análise de discurso (p. 118)".

Segundo Moraes, a análise textual discursiva

> [...] pode ser compreendida como um processo auto-organizado de construção de compreensão em que novos entendimentos emergem de uma seqüência recursiva de três componentes: desconstrução do *corpus,* **a unitarização** , o estabelecimento de relações entre os elementos unitários, **a categorização**, e o **captar do novo emergente** em que nova compreensão é comunicada e validada (2003, p.192; negrito nosso).

A unitarização, primeira etapa da análise textual discursiva, caracteriza-se por uma leitura cuidadosa e aprofundada dos dados em um movimento de separação das unidades significativas. Segundo Moraes e Galiazzi (2006), os dados são "recortados, pulverizados, desconstruídos, sempre a partir das capacidades interpretativas do pesquisador (p. 132)".

Nesta primeira fase, uma condição necessária é o estabelecimento de uma relação íntima e aprofundada do pesquisador com seus dados. É o momento em que o pesquisador olha de várias maneiras para os dados, descrevendo-os incessantemente; constrói várias interpretações para um mesmo registro escrito, surgem as unidades de significados. Como ressalta Moraes (2003), essa fase se aproxima do caos em um processo de extrema desorganização.

Já a segunda fase, a categorização, caracteriza-se por um "processo de comparação constante entre as unidades definidas no processo inicial de análise, levando ao agrupamento de elementos semelhantes (MORAES, 2003, p. 197)". De acordo com algum critério, em razão dos objetivos do trabalho, constroem-se as categorias por meio dos elementos semelhantes, sendo que a todo o momento elas podem ser modificadas e reorganizadas num processo em espiral. Como afirmam Moraes e Galiazzi (2006),

> [...] as categorias não saem prontas, e exigem um retorno cíclico aos mesmos elementos para sua gradativa qualificação. O pesquisador precisa avaliar

> constantemente suas categorias em termos de sua validade e pertinência (p. 125).

Ainda de acordo com esses autores, “a unitarização representa um movimento para o caos, de uma desorganização de verdades estabelecidas. A categorização é o movimento construtivo de uma ordem diferente do original (p. 125)”.

Na análise textual discursiva, o processo de categorização das unidades de significados caracteriza-se por três propriedades, as quais dizem respeito a: 1ª) validade ou pertinência; 2ª) homogeneidade; e 3ª) a não exclusão mútua.

A primeira propriedade está ligada à representatividade das descrições e interpretações feitas dos dados por meio do conjunto de categorias (MORAES, 2003). Estas precisam ser válidas e pertinentes aos objetivos da análise, bem como representar os dados em relação à fundamentação teórica adotada pelo pesquisador.

A segunda propriedade diz respeito à homogeneidade, ou seja, “as categorias de um mesmo conjunto precisam ser construídas a partir de um mesmo princípio, de um mesmo contínuo conceitual (MORAES, 2003, p. 199)”. Sobre essa propriedade, o autor ressalta que, dependendo da complexidade dos dados, podemos construir vários conjuntos de categorias e subcategorias, entretanto cada conjunto deve ser homogêneo (MORAES, 2003).

A terceira categoria apontada pelo autor diz respeito à “exclusão mútua”. Entretanto esse autor não concorda que seja necessário acontecer uma exclusão mútua entre as unidades de significado. Moraes (2003) afirma que

> [...] uma mesma unidade pode ser lida de diferentes perspectivas, resultando em múltiplos sentidos, dependendo do foco ou da perspectiva em que seja examinada. Por essa razão aceitamos que uma mesma unidade possa ser classificada em mais de uma categoria, ainda que com sentidos diferentes (p. 199).

Nas considerações sobre essa característica, que não é consenso na literatura, Moraes afirma que a obrigatoriedade da exclusão mútua para a construção de categorias “não se sustenta frente às múltiplas leituras (Moraes, 2003, p. 199)” dos dados, e que “isso representa um movimento positivo no sentido da superação da fragmentação, em direção a descrições e compreensões mais holísticas e globalizadas (Moraes, 2003, p. 199)”.

A terceira e última fase da análise textual discursiva diz respeito à captação do novo emergente, ou seja, a construção de um metatexto pelo pesquisador tecendo considerações sobre as categorias que ele construiu.

Segundo Moraes (2003),

> [...] os metatextos são constituídos de descrição e interpretação, representando o conjunto um modo de compreensão e teorização dos fenômenos investigados. A qualidade dos textos resultantes das análises não depende apenas de sua validade e confiabilidade, mas é, também, conseqüência do pesquisador assumir-se como autor de seus argumentos (p. 202).

Nessa fase, o pesquisador se esforça em expressar suas intuições e novos entendimentos a partir da sua rigorosa e ostensiva análise dos dados.

A validade e confiabilidade dos resultados de uma análise, segundo Moraes (2003) depende "do rigor com que cada etapa da análise foi construída (p.206)", uma vez que "uma unitarização e uma categorização rigorosas encaminham para metatextos válidos e representativos dos fenômenos investigados (p. 206)".

Realizamos nossas análises em consonância com esses três momentos da análise textual discursiva que acontecem de maneira cíclica e ao longo de todo o processo. Levamos nossos dados ao limite do caos, num processo de desorganização para a constituição das nossas unidades de significados, constituindo assim a unitarização. A partir da busca entre as possíveis relações entre essas unidades, por meio de critérios bem estabelecidos, construímos nossas categorias, que descreveremos a seguir sob três tipos de critérios. Nesse processo construímos um metatexto, no qual nos assumimos por inteiro para tecer algumas considerações sobre a investigação realizada.

4.1 Da recolha dos dados

Para o presente trabalho de pesquisa temos como objeto de estudo uma amostra da Prova de Questões Abertas de Matemática da Avaliação Estadual de Rendimento Escolar do Paraná aplicada em 2002, contendo a produção escrita dos alunos na questão comum às três séries avaliadas – da 4ª e 8ª série do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio. Apresentamos a seguir a distribuição das questões nas séries avaliadas.

Distribuição das questões nas séries avaliadas

	4ª Série E.F.	**8ª Série E.F.**	**3ª Série E.M.**
Questão 1	X		
Questão 2	X	X	
Questão 3	**X**	**X**	**X**
Questão 4		X	X
Questão 5		X	
Questão 6			X

De todos os alunos que resolveram a AVA-2002, um terço fez uma prova de matemática contendo seis questões abertas, enquanto os outros fizeram a prova de redação. Uma amostra significativa de 1047 provas foi colhida pela SEED/PR e enviada para os estudos do GEPEMA.

Sendo impossível analisar em um prazo de dois anos essa quantidade de provas, foi realizada uma amostra por conveniência dessas 1047 provas. Para compor essa nova amostra, foram retiradas as provas dos alunos das três séries que não estavam com a relação idade/série adequada, aquelas que continham alguma questão sem resolução - em branco. Com isso, por meio de um processo de amostragem sistemática, aplicada a cada uma das séries, foram selecionadas 147 provas, sendo 50 provas da 4ª série, 53 da 8ª série do Ensino Fundamental e 44 da 3ª série do Ensino Médio.

Em relação às provas da 4ª série do Ensino Fundamental, tínhamos 399 da primeira amostra. Destas foram retiradas 83 provas de alunos que não estavam com a relação idade/série adequada no momento da realização da prova e mais 6, por não apresentarem produção alguma. Assim, depois desses passos, tínhamos 310 provas. Com o auxílio da consultora de estatística do projeto de pesquisa[16], realizamos uma amostragem sistemática de maneira a deixarmos um número de provas em torno de 50, pois com esse número poderíamos realizar um estudo dentro de um prazo de dois anos.

Na composição da amostra significativa da 8ª Série do Ensino Fundamental tínhamos 422 provas. Desta foi colhida uma nova amostra para chegar a um número de mais ou menos 50 provas. Retiramos 178 provas em que os alunos não estavam com a idade/série adequada, sobrando 244 provas. Retiramos também as provas nas quais os alunos deixaram uma ou mais questões em branco e, com isso, sobraram 138 provas. A

[16] Professora Dra Tiemi Matsuo, docente do Departamento de Estatística da Universidade Estadual de Londrina.

partir delas, foi então realizada uma amostragem sistemática, deixando um total de 53 provas dos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental para nosso estudo.

Inicialmente tínhamos 403 provas da 3ª Série do Ensino Médio na amostra significativa colhida pela SEED/PR. Desse modo análogo à 4ª e à 8ª série do Ensino Fundamental, retiramos as provas que não estavam com relação idade/série adequada e as provas que tinham uma ou mais questões em branco. Assim, chegamos ao número de 221 provas. Realizando uma amostra sistemática, ficamos com um número de 44 provas da 3ª série do Ensino Médio.

4.2 Do caminho percorrido

Iniciamos nossas análises descrevendo cada uma das resoluções contidas nas 147 provas que compõem a amostra do nosso estudo. Cada operação, rabisco, observações deixadas pelos alunos, ou seja, toda a produção escrita dos alunos em cada prova foi detalhadamente descrita. Cada vez que olhávamos para a produção escrita dos alunos, conseguíamos fazer uma interpretação algumas vezes diferente da anterior. Assim, essa fase se caracterizou pela busca das unidades de significado, ou seja, a unitarização. Essa estratégia foi sendo refinada a cada vez que olhávamos para as provas, porque mais detalhes das resoluções dos alunos e outras interpretações, eram a todo o momento construídas.

Focamos nossa atenção em cada uma das séries, tentando separar as provas pelas resoluções que continham semelhanças. Num primeiro momento, depois de muitas idas e vindas à produção escrita dos alunos, conseguimos juntar as provas de cada uma das séries estudadas em 6 grupos, utilizando alguns critérios preliminares.

Com base nesses 6 grupos, fizemos uma primeira análise, que denominamos descritiva e que gerou um inventário dos procedimentos, das relações entre os dados do enunciado, das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução da questão estudada. Entretanto apenas esse inventário, por si só, mostrou-se insuficiente para uma possível caracterização da interpretação do aluno para a resolução da questão. Contudo a familiaridade desenvolvida nas muitas leituras da produção escrita para essa análise descritiva, resultou em uma outra análise, esta de cunho interpretativo.

Essa segunda análise, feita a partir do inventário resultante da análise descritiva, consiste em construir interpretações baseadas na produção escrita de cada aluno para buscar algum entendimento sobre o modo de lidar com a questão. As estratégias, os procedimentos utilizados, o levantamento dos dados, as respostas, ou seja, toda a produção que se mostra disponível nas provas foi tomada para construir um possível entendimento que o aluno teve da questão. Partimos da resolução do aluno, mediante um modo lógico e sistemático de leitura, para tentar descobrir qual, possivelmente, foi a interpretação que ele fez do enunciado da questão.

Acreditamos que por meio dessa análise podemos ter uma visão mais ampliada do modo como os alunos estão interpretando o enunciado da questão e inferir algumas de suas interpretações para cada frase, ou para cada informação contida nela.

Neste estudo, estamos sempre caracterizando a efetiva produção escrita que foi encontrada nas provas, e não o que faltou a ela. Tentamos não caracterizar os alunos pela falta, ou seja, evitamos afirmações tais como *esse aluno <u>não</u> sabe tal procedimento, aquele aluno <u>não</u> interpretou corretamente*. Porquanto nossos dados foram retirados da produção escrita dos alunos, acreditamos que não podemos dizer, por exemplo, que eles não sabem tal coisa apenas pelo fato de não a termos encontrado nas provas. O fato de um aluno não usar uma estratégia para resolver o problema não garante que ele a desconheça.

Assim, para investigar o modo como os alunos lidam com uma questão aberta construímos nossas interpretações com base na fundamentação teórica adotada e nos registros que estão disponíveis na sua produção escrita. Por meio dessa produção, inferimos uma possível interpretação que o aluno fez do enunciado da questão, um motivo por ter utilizado um determinado procedimento, uma estratégia elaborada para resolver a questão.

Ressaltamos também que nossas inferências, em relação a quais conteúdos matemáticos escolares os alunos mostram saber, devem ser tomadas dentro dos limites deste trabalho, uma vez que estamos analisando a produção escrita dos alunos apenas numa única questão, de uma única prova.

Interpretamos, atribuímos significados e com isso construímos nosso conhecimento tendo a produção escrita dos alunos como ponto de partida. Por meio dos registros escritos contidos nas provas, construímos uma interpretação da possível interpretação que os alunos fizeram do enunciado da questão, inferimos as estratégias que utilizaram, bem como o que eles mostram saber da matemática escolar, que aquela específica questão pudesse mostrar.

Apresentamos no capítulo seguinte uma análise composta de quatro agrupamentos. O primeiro diz respeito à maneira como os alunos interpretam o enunciado da questão e os procedimentos que utilizam resultantes dessa interpretação. Realizamos esse primeiro agrupamento utilizando cada frase do enunciado da questão. Formamos oito grupos para cada série, baseados nas interpretações que fizemos sobre a maneira de alunos lidarem com o enunciado da questão, a resolução registrada por meio dos procedimentos que utilizaram e a apresentação da resposta oriunda desses procedimentos. Como resultado, construímos um quadro das estratégias dos alunos. Para isso, utilizamos uma tríade de palavras para caracterizar as resoluções encontradas: *interpreta-resolve-responde*[17].

No segundo agrupamento, mediante nossa caracterização, analisamos o pensamento algébrico presente na produção escrita dos alunos e estabelecemos cinco níveis de desempenho para as três séries. Ao final desse agrupamento apresentamos uma discussão a respeito da linguagem algébrica.

O terceiro agrupamento diz respeito aos problemas resultantes da interpretação que os alunos fizeram do enunciado da questão e que de fato resolveram. Contudo não apresentamos os enunciados desses problemas, mas algumas das suas características, aquelas que foi possível inferir. Fazemos então, uma diferença entre a *questão proposta*, com sua resolução considerada correta pelos organizadores das provas e *os problemas* que os alunos resolveram a partir da interpretação que fizeram do enunciado da questão[18].

O último agrupamento diz respeito a quais conteúdos da matemática escolar, possíveis de serem envolvidos na resolução da única questão aqui estudada, usualmente trabalhados pelos professores, os alunos mostram saber. Nesse agrupamento, como no segundo, construímos níveis de desempenho para a produção escrita dos alunos.

Ao final de cada agrupamento tecemos considerações gerais sobre as três séries estudadas. Acreditamos que por meio desses quatro agrupamentos, construídos com critérios bem definidos a serem mostrados no capítulo seguinte, respondemos as questões colocadas na introdução deste trabalho.

---

[17] Estamos considerando nesse trabalho estratégia como a maneira pela qual o aluno abordou a questão, ou seja, sua interpretação do enunciado, os procedimentos que utilizou oriundos dessa interpretação, e a apresentação da resposta oriunda desses procedimentos. Já por procedimentos estamos entendendo os algoritmos das operações, as regras algébricas de uma equação, ou seja, os resultados que os alunos usam para elaborar a sua estratégia. Uma estratégia é constituída de procedimentos.

[18] No capítulo seguinte mostraremos com mais detalhes essa diferenciação e o seu motivo.

5 ALGUMA ANÁLISE E RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos uma análise da produção escrita dos alunos encontrada na questão comum às provas das três séries avaliadas na AVA-2002, que compuseram a amostra estudada, feita a partir de quatro agrupamentos:

1) das estratégias;
2) do pensamento e da atividade algébrica;
3) dos problemas construídos a partir do enunciado da questão;
4) dos conteúdos matemáticos que os alunos mostram saber.

Esta análise, que não é a única possível, focalizou esses quatro agrupamentos que não são independentes, nem excludentes. Entretanto preferimos focar cada aspecto da produção escrita a ser analisado em um momento especifico.

5.1 Agrupamento pela estratégia

Nesse primeiro agrupamento de nossa análise as provas foram reunidas independentemente da série, de acordo com os seguintes critérios: a) a interpretação que o aluno faz de cada frase da questão; b) quais procedimentos eles utilizam oriundos da maneira como interpretaram a questão e c) a resposta que apresentaram. Buscando descrever a estratégia construída pelo aluno ao resolver a questão utilizamos uma expressão composta por uma tríade de palavras, *interpreta-resolve-responde*

Os resultados de estudos anteriores (NAGY-SILVA, 2005; PEREGO, 2005, OLIVEIRA, 2005, PEREGO, 2006; NEGRÃO DE LIMA, 2006; ALVES, 2006) mostraram que a grande dificuldade dos alunos apresenta-se na interpretação do enunciado da questão, portanto, procuramos desvelar como os alunos lidam com isso. Nossa questão tem o seguinte enunciado:

Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias. A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior. Quantos telegramas entregou em cada dia?

Separando cada frase da questão tentamos explicitar as informações que nelas estão contidas e depois, por meio de uma interpretação da produção escrita dos alunos, buscamos conhecer as conexões que os alunos fizeram entre as informações contidas nas frases e caracterizar os seus modos de interpretação.

1ª Frase:

Um carteiro	*entregou*	*100 telegramas*	*em*	*5 dias*
	↓	↓		↓
	verbo no passado que indica uma ação já realizada	quantidade de telegramas entregue		número de dias em que os telegramas foram entregues

Podemos notar que a primeira frase da questão informa a quantidade de telegramas e em quantos dias eles foram entregues. O carteiro entregou apenas 100 telegramas nos cinco dias. O tempo do verbo no passado é um fator importante, pois em muitas provas, como veremos, não há indícios dessa informação na resolução da questão, ou seja, que os alunos consideraram que o carteiro entregou apenas 100 telegramas no decorrer dos cinco dias.

2ª Frase:

A cada dia,	a partir do primeiro, entregou 7 telegramas	a mais	que no dia anterior
↓	↓	↓	↓
em todos os dias o carteiro entregou uma certa quantidade de telegramas	o carteiro entregou 7 telegramas a mais <u>a partir</u> do 1° dia e não no 1° dia	expressão que indica a recorrência, ou seja, a ‘regra’segundo a qual foi feita a entrega dos telegramas em cada dia	o carteiro entregou mais telegramas no 2º. dia do que no 1º. dia; mais telegramas no 3º. dia do que no 2º. dia; mais telegramas no 4º. dia do que no 3º. dia; mais telegramas no 5º. dia do que no 4º. dia;

A frase toda indica que o número de telegramas entregues em cada dia, a partir do primeiro, depende da quantidade entregue no dia anterior começando no segundo, conforme mostrado no diagrama a seguir.

Dias	1°	2°	3°	4°	5°
Telegramas	6	13	20	27	34
	6 + 7	13 + 7	20 + 7	27 + 7	

Na segunda frase, temos a indicação de qual foi à distribuição da quantidade de telegramas que o carteiro entregou em cada dia. Essa frase indica a idéia de recorrência, necessária para os alunos resolverem a questão da maneira considerada correta. Notamos que a frase contém uma expressão explicativa – a partir do primeiro – o que acreditamos não ser usual na escrita dos alunos, principalmente na 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental.

Como veremos a seguir essa informação da segunda frase foi interpretada de diferentes maneiras pelos alunos.

3ª Frase:

Quantos telegramas entregou em cada dia?

↓

Indica o que é desconhecido no problema, e, por conseguinte, indica aquilo que o aluno por meio das informações contidas nas duas frases anteriores deve apresentar como resposta à questão.

A terceira frase indica o que é desconhecido, ou seja, qual o número de telegramas entregues em cada dia, enquanto as duas primeiras frases contêm informações que devem ser relacionadas entre si para que a questão possa ser resolvida da maneira considerada correta.

Apresentamos a seguir considerações a respeito da estratégia que os alunos elaboraram, o modo como interpretaram a questão, e os procedimentos que utilizaram. para cada série estudada e, depois, para todas juntas.

5.1.1 Da produção escrita encontrada nas provas da 4ª série do Ensino Fundamental.

Nas provas da 4ª série encontramos um número muito elevado de resoluções que parecem apresentar uma interpretação do enunciado da questão diferente da considerada correta. Nossa análise indica que o grande problema está na interpretação da segunda frase. Apenas 6 alunos responderam a questão corretamente, entretanto muitos alunos construíram uma estratégia de resolução, diferente da considerada correta, e apresentaram uma resposta. Com isso, inferimos que provavelmente esses alunos acreditaram que estavam resolvendo a questão da maneira correta.

Das 50 provas de 4ª série que compõem nossa amostra de estudo, agrupamos 47 provas em 8 grupos sobre os quais fizemos nossas análises. Três provas ficaram fora desses grupos, pois não se enquadravam nas características deles, mesmo assim elas serão discutidas.

Tabela 1 - Análise Interpretativa da produção escrita dos alunos da 4ª série do Ensino Fundamental.

Grupos(N)	Interpretação feita pelo aluno		Procedimentos
	da 1ª. frase: *Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias.*	da 2ª. frase: *A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior.*	
G1 (11)	O carteiro entregou 100 telegramas em cinco dias.	Não há registro na resolução que indique alguma interpretação.	Faz uma divisão $(100 \div 5 = 20)$ e apresenta o resultado como resposta.
G2 (8)	O carteiro entregou 100 telegramas em cinco dias.	O número de telegramas aumenta e é o mesmo para cada um dos cinco dias.	Faz uma divisão $(100 \div 5 = 20)$. Adiciona ou multiplica 7 ao resultado do primeiro procedimento.
G3 (4)	O carteiro entregou 100 telegramas em cada um dos cinco dias.	O número de telegramas aumenta e é o mesmo para cada um dos cinco dias.	Faz uma multiplicação de 5 por 100. Adiciona ou multiplica 7 ao resultado do primeiro procedimento.
G4 (3)	O carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias.	O número 7 é o número de dias.	Faz uma divisão $(100 \div 7 = 14)$ e apresenta o resultado como resposta.
G5 (2)	O carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias.	Em pelo menos um dos cinco dias o número de telegramas é diferente.	Aumenta 7 a partir do primeiro dia (idéia de recorrência), ou aumenta 7 apenas no primeiro dia.
G6 (6)	O carteiro entregou 100 telegramas em cinco dias.	A cada dia, a partir do primeiro, ele entregou sete a mais que no dia anterior.	Apresenta uma resposta considerada correta do problema, usando tentativa e erro e estratégias aritméticas direcionadas.
G7 (5)	O aluno retira arbitrariamente dados do problema e opera com eles.		Adiciona os números na ordem em que aparecem, ou, adiciona 5 a 7, ou multiplica 7 com 5.
G8 (8)	Não foi possível construir uma interpretação para essas provas.		

No grupo 1 temos 11 provas. Nele os alunos resolveram a questão dividindo corretamente 100 por 5 e apresentaram o resultado dessa operação como resposta: *“o carteiro entregou 20 telegramas em cada dia.”* Podemos inferir que, de alguma forma, esses alunos interpretaram apenas a primeira e a terceira frase da questão. Não há registros na sua produção escrita de alguma interpretação da segunda frase, a qual informa a maneira como o carteiro entregou os telegramas. Assim, provavelmente, os alunos acreditaram ter resolvido corretamente o problema. O enunciado da questão com a interpretação apenas da primeira e da segunda frase, poderia ser esta:

Problema: Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias. Εμ χαδα δια, α παρτιρ δο πριμειρο, ελε εντρεγου 7 τελεγραμασ α μα ισ θυε νο δια αντεριορ. Quantos telegramas ele entregou em cada dia?

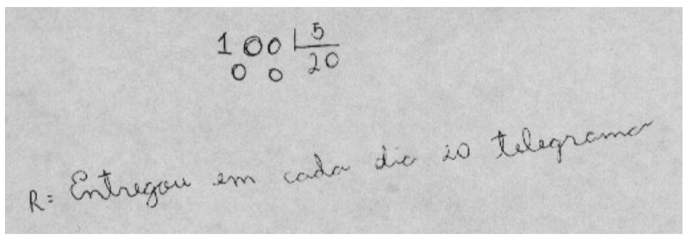


Figura 1 – Resolução presente na prova 4LO1091

Nesse grupo ainda temos uma prova em que o aluno apresentou a ‘prova real’ da operação de divisão que realizou, o que nos confirma nossa caracterização de que para esses alunos essa estratégia resolvia o problema.

O grupo 2 é composto por 8 provas que apresentam resoluções nas quais a segunda frase interfere apenas na adição do número 7 ao resultado da divisão de 100 por 5. A interpretação do aluno, da segunda frase, se faz a partir da palavra-chave, *7 a mais*. Assim, não há registros nas provas de que os alunos levaram em conta a informação da primeira frase, que indicava que o número de telegramas entregue pelo carteiro foi de apenas 100 e não 135.

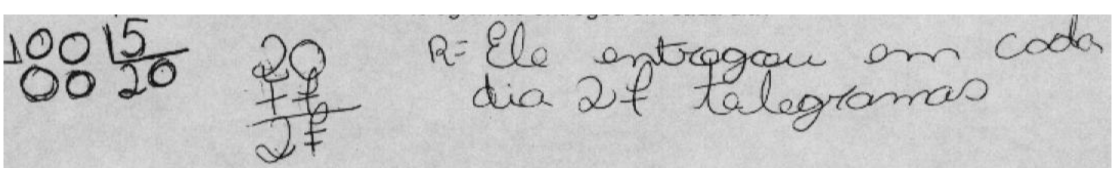


Figura 2 – Resolução presente na prova 4CO315

Temos também, uma prova em que o aluno divide corretamente 100 por 5 e apresenta como resposta *"27 telegramas"*. Não está em sua prova a adição de 20 com 7, entretanto podemos inferir que realizou esse cálculo mentalmente o que nos apresenta mais indicativos do uso da palavra chave.

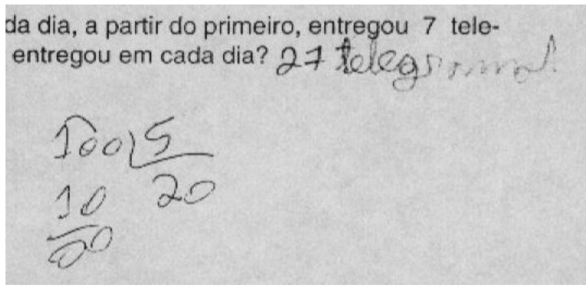


Figura 3 – Resolução presente na prova 4L5135

Já em outra prova, o aluno divide corretamente 100 por 5; adiciona corretamente 7 ao resultado, adiciona corretamente cinco vezes o número 27 e não apresenta registro de resposta. Inferimos que esse aluno percebeu que o carteiro entregou apenas 100 telegramas e não 135, o que nos mostra que o aluno fez uma relação entre a informação contida na primeira frase do problema e sua estratégia.

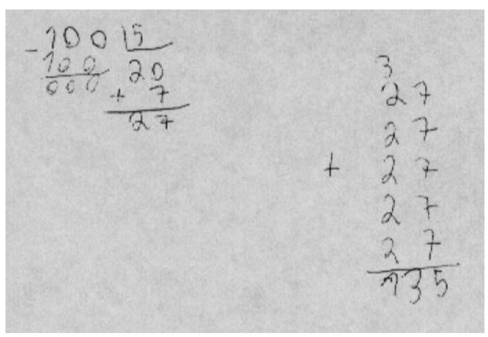


Figura 4 – Resolução presente na prova 4L10021

O grupo 3 apresenta 4 provas, nas quais os alunos interpretaram que o carteiro entregou 100 telegramas em cada um dos cinco dias. Na prova a seguir, o aluno multiplica corretamente 100 por 5 e adiciona a esse resultado 7, apresentando este último como resposta. Mais uma vez a interpretação que o aluno faz da segunda frase foca apenas na palavra-chave, *7 a mais*.

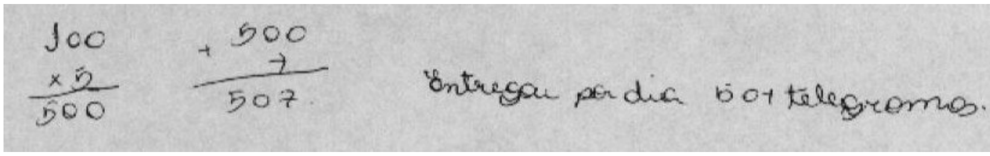


Figura 5 – Resolução presente na prova 4LO5155

Em outra prova do mesmo grupo, o aluno multiplica 100 por 5 e, ao resultado 500 multiplica 7 apresentando como resposta. Podemos inferir que a interpretação desse aluno da segunda frase é de que o carteiro entregou 7 vezes o número de telegramas, que já era 500, em cada um dos 5 dias.

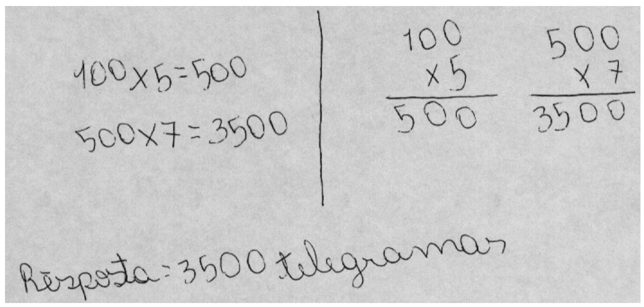


Figura 6 – Resolução presente na prova 4CO3094

No grupo 4 encontram-se 3 provas nas quais os alunos interpretaram que o carteiro entregou 100 telegramas divididos em cinco dias. Entretanto esses alunos tomaram o número 7, que indica a quantidade de telegramas que o carteiro entregou a mais em cada dia, a partir do primeiro, como sendo o número de dias e fizeram uma divisão de 100 por 7, apresentando o resultado como resposta.

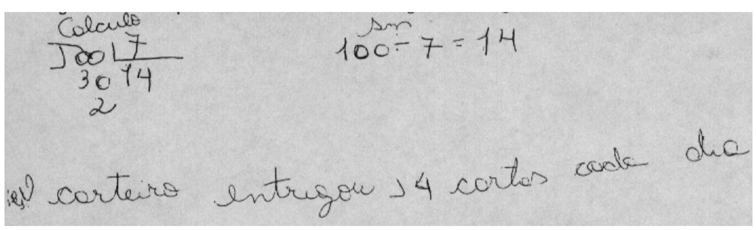


Figura 7 – Resolução presente na prova 4CO3096

Uma possível causa para a utilização dessa estratégia é que esses alunos interpretaram que se tratava de uma questão que envolvia a divisão de telegramas. Como eles também sabem que em uma divisão de números naturais sempre o número menor é o divisor, e como aparece o número 7 no enunciado da questão, concluíram que ele era o divisor.

No grupo 5 temos 2 provas nas quais o número de telegramas entregues pelo carteiro em pelo menos um dia é diferente. Notamos que nesse grupo os alunos fizeram uma interpretação da segunda frase um pouco mais próxima da considerada correta. Na prova 4CO3119, apresentada a seguir, o aluno divide 100 por 5; conclui que o resultado é o número de telegramas do primeiro dia e, a partir dele, adiciona 7 para encontrar o número de telegramas dos outros quatro dias. Nessa prova vemos um entendimento da idéia de recorrência. Apenas não há registros de que o aluno tenha notado que o carteiro entregou um total de 100 telegramas e não de 170.

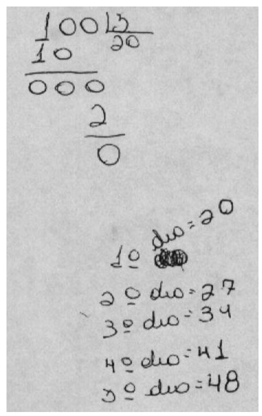


Figura 8 – Resolução presente na prova 4CO3119

Em outra prova desse grupo, o aluno também inicia sua resolução dividindo 100 por 5, mas apresenta como resposta que o carteiro entregou 7 telegramas a mais no primeiro dia e nos outros ele entregou 20 telegramas. Podemos inferir que a interpretação da segunda frase para esse aluno foi que apenas no primeiro dia o número de telegramas aumentou.

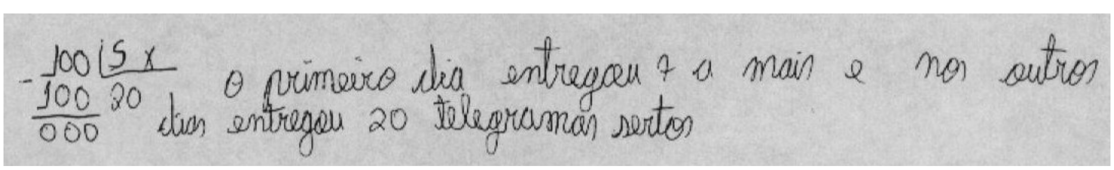


Figura 9 – Resolução presente na prova 4CO4034

No grupo 6 temos 6 provas dos alunos que resolveram corretamente a questão. Em 5 provas os alunos apresentaram a resposta correta do problema e uma adição dos números de telegramas entregues em cada dia como uma verificação. A estratégia utilizada por eles, provavelmente, foi de tentativa e erro, o que era esperado para essa série.

Apenas um aluno apresenta a adição incorreta dos números de telegramas e, com isso, uma resposta também incorreta para o problema. Entretanto consideramos, ainda assim, que essa prova pertence no grupo 7 pois percebemos que a interpretação do enunciado da questão e sua estratégia foram feitas da maneira considerada correta. Só a maneira como adicionou o número de telegramas de cada dia, e com isso também sua resposta, ou seja, seu procedimento, foi diferente da considerada correta.

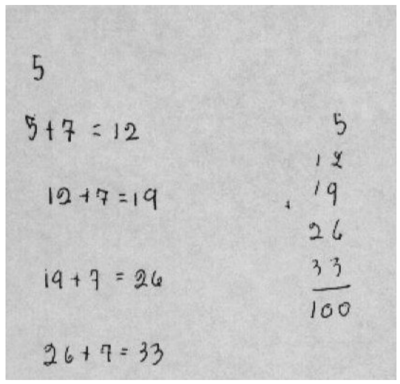


Figura 10 – Resolução presente na prova 4LO5147

Outro aluno desse grupo apresentou uma estratégia aritmética direcionada[19], subtraindo corretamente 70 de 100, e dividindo corretamente o resultado 30 por 5, encontrando assim o número de telegramas entregues no primeiro dia. Notamos que o número 70 vem da adição dos 7 telegramas a mais que o carteiro entregou em cada dia, a partir do primeiro. (2° dia: 7 ; 3° dia: 14; 4° dia: 21; e, 5° dia: 28; adicionando todos os telegramas entregues a mais, temos o número 70).

[19] Estamos chamando de estratégia aritmética direcionada, neste trabalho, aquela que o aluno parece saber quais procedimentos deve utilizar para obter a resposta da questão. Esses procedimentos são utilizados de uma maneira encadeada, sistemática e lógica, possivelmente por meio de um raciocínio abdutivo, considerado aqui como aquele que envolve um "chute", mas com algum conhecimento de causa.

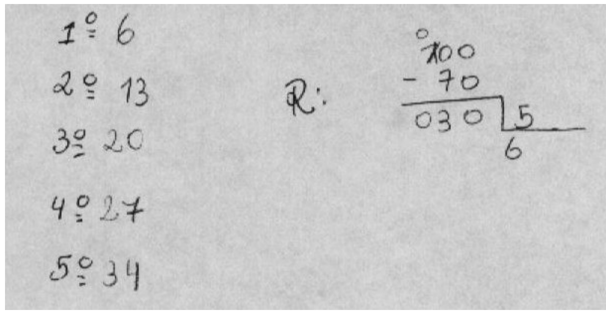


Figura 11 – Resolução presente na prova 4CO8019

O grupo 7 contém as 5 provas nas quais os alunos operaram os dados que aparecem no enunciado da questão. Eles adicionam ou multiplicam esses números e apresentam suas respostas oriundas dessas operações. Na prova 4CO8009, o aluno adicionou 100 a 5 e a 7, apresentando esse resultado como resposta do problema. Podemos notar que esses dados encontram-se na ordem em que aparecem no enunciado da questão. Com isso podemos inferir que, para esse aluno, resolver a questão é adicionar todos os números na ordem em que aparecem e apresentar a resposta.

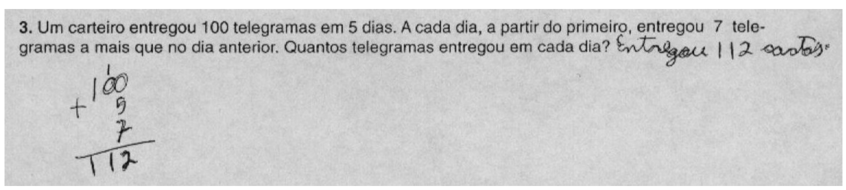


Figura 12 – Resolução presente na prova 4CO8009

No último grupo da 4ª série temos 8 provas para as quais não foi possível construir uma interpretação para a produção escrita nelas contidas. Essas provas caracterizam-se por não apresentar resposta ou algumas relações entre os dados do enunciado da questão, das quais não conseguimos atribuir algum sentido lógico. Ressaltamos que essa é uma limitação nossa em relação a construir interpretações dos registros escritos dos alunos. Mas também uma limitação desse tipo de análise.

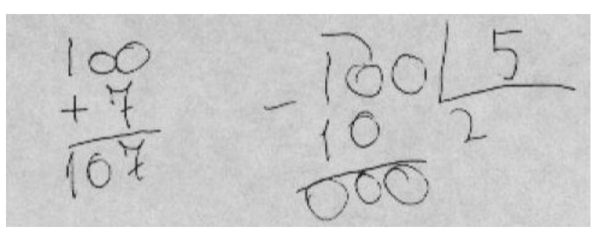


Figura 13 – Resolução presente na prova 4CO3058

Três provas que não foram alocadas nos grupos apresentados anteriormente por não terem características comuns a eles. Assim, analisaremos essas provas uma a uma, começando com a prova 4LO5129, na qual o aluno faz uma interpretação da segunda frase considerando que o carteiro entregou 35 telegramas a mais nos cinco dias. Ele multiplica, corretamente, 7 por 5 e adiciona, corretamente, esse resultado com 100 encontrando o total de telegramas, 135, que segundo sua interpretação, o carteiro entregou. A seguir divide, corretamente, 135 por 5 e apresenta o resultado, 27, como resposta da questão.

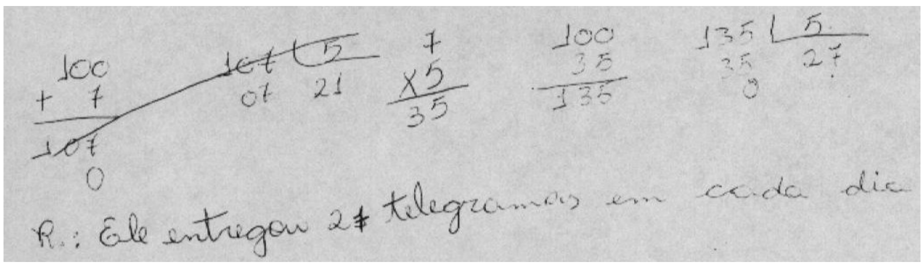


Figura 14 – Resolução presente na prova 4LO5129

Na prova 4CO2013, o aluno adiciona, corretamente, 100 com 7 e apresenta o resultado como resposta da questão. Podemos inferir que ele fez uma interpretação da primeira frase na qual o carteiro entregou 100 telegramas em cada um dos cinco dias. Da segunda frase, faz uma interpretação, provavelmente ligada a palavra-chave, *7 a mais*, aumentando em 7. Para esse aluno, o número de telegramas entregue em cada um dos cinco dias é o mesmo.

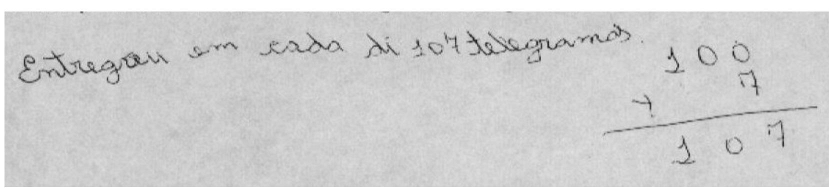


Figura 15 – Resolução presente na prova 4CO2013

Na prova 4CO3053b o aluno adiciona corretamente 100 a 75 e apresenta o resultado dessa operação como resposta da questão. Nessa prova, também podemos inferir que a interpretação do aluno da primeira frase foi a de que o carteiro entregou 100 telegramas em cada um dos 5 dias. Não conseguimos interpretar de que relação, entre os dados do problema, se origina o número 75. Nessa prova, o número de telegramas entregue nos cinco dias também foi o mesmo.

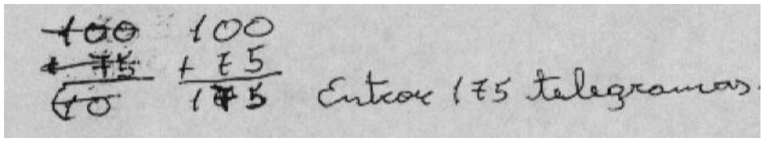


Figura 16 – Resolução presente na prova 4CO3053b

5. 1.2 Da questão estudada nas provas da 8ª série do Ensino Fundamental

Da mesma maneira realizada com as provas da 4ª série, iniciaremos as discussões das provas da 8ª série apresentando na Tabela 2 os agrupamentos feitos. Alguns grupos da 8ª série coincidem com grupos da 4ª série, mas mesmo assim, faremos considerações. Apenas não iremos mostrar algumas provas.

Tabela 2 - Análise Interpretativa da produção escrita dos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental.

Grupos(N)	Interpretação feita pelo aluno		Procedimentos
	da 1ª. frase: *Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias.*	da 2ª. frase: *A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior.*	
G1 (5)	O carteiro entregou 100 telegramas em cinco dias.	Não há registro na resolução que indique alguma interpretação.	Faz uma divisão ($100 \div 5 = 20$) e apresenta o resultado como resposta.
G2 (9)	O carteiro entregou 100 telegramas em cinco dias.	O número de telegramas aumenta e é o mesmo para cada um dos cinco dias.	Faz uma divisão ($100 \div 5 = 20$). Adiciona ou multiplica 7 ao resultado do primeiro procedimento.
G3 (0)	O carteiro entregou 100 telegramas em cada um dos cinco dias.	O número de telegramas aumenta e é o mesmo para cada um dos cinco dias.	Faz uma multiplicação de 5 por 100. Adiciona ou multiplica 7 ao resultado do primeiro procedimento.
G4 (3)	O carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias.	O número 7 é o número de dias.	Divide 95 por 7; ou divide 100 por 7 e usa a idéia de recorrência adicionando sete, já no primeiro dia; ou divide 100 por 7 e adiciona (20 + 14 + 14 +14 +14).
G5 (7)	O carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias.	Em pelo menos um dos cinco dias o número de telegramas é diferente.	Aumenta 7 a partir do primeiro dia (idéia de recorrência); ou aumenta 7 apenas no primeiro dia, sendo no segundo dia 13 e nos outros 20; ou, o número de telegramas do 1° dia é 20 e dos outros 4 dias é 27; ou o número do primeiro dia é 72 e dos outros dias é 7, ao todo resultando 100.
G6 (16)	O carteiro entregou 100 telegramas em cinco dias.	A cada dia, a partir do primeiro, ele entregou sete a mais que no dia anterior.	Apresenta uma resposta do problema considerada correta utilizando uma linguagem algébrica; ou, tentativa e erro; ou, estratégias aritméticas direcionadas.
G7 (1)	O aluno retira arbitrariamente dados do problema e opera com eles.		Adiciona 5 a 7.
G8 (8)	Não foi possível construir uma interpretação para essas provas.		

No grupo 1 temos 5 provas que os alunos resolveram o problema dividindo 100 por 5 e apresentando o resultado dessa operação como resposta do problema: *"o carteiro entregou 20 telegramas em cada dia."*

O grupo 2, contêm 9 provas nas quais os alunos dividiram corretamente 100 por 5, adicionaram ou multiplicaram corretamente sete ao resultado e apresentaram este último como resposta.

No grupo 3 não há prova alguma na qual o aluno tenha interpretado a primeira frase como se o carteiro tivesse entregado 100 telegramas em cada um dos cinco dias.

O grupo 4 contêm 7 provas nas quais os alunos tomaram o número 7 como a quantidade de dias. Na prova 8LO5045, o aluno divide, corretamente, 100 por 7; entende a idéia de recorrência, entretanto aumenta sete telegramas no primeiro dia e não <u>a partir</u> do primeiro dia.

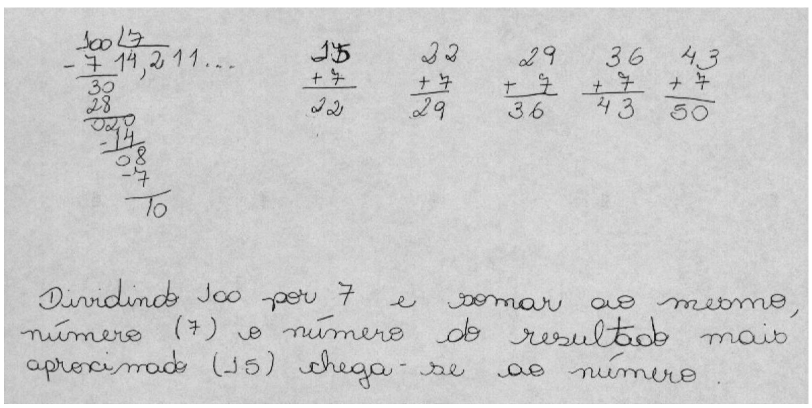
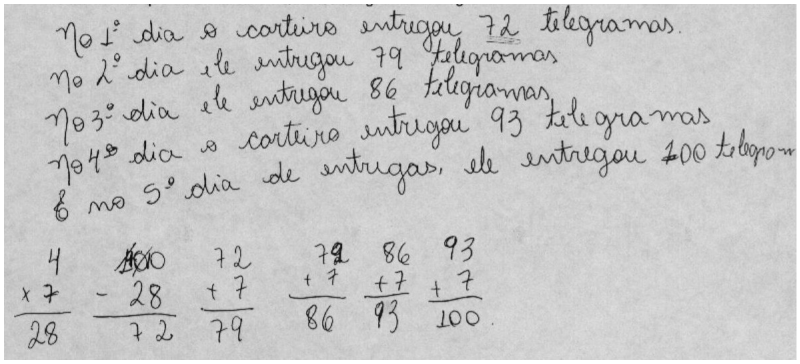


Figura 17 – Resolução presente na prova 8LO5045

Em relação ao grupo 5, temos 7 provas nas quais os alunos interpretam que o número de telegramas entregue ao longo dos cinco dias não é o mesmo e constroem uma estratégia. Percebemos algumas conexões entre as duas primeiras frases e a presença da idéia de recorrência na produção escrita desses alunos.

Na prova 8L10180, o aluno multiplica, corretamente, 4 por 7 e retira, corretamente, 28 de 100. Assim, adiciona, corretamente, 7 a partir do primeiro dia e apresenta uma resposta para a questão. Percebemos que o aluno fez uma interpretação da segunda frase condizente com a considerada correta, entretanto não há registros na sua prova que mostrem que ele notou, da primeira frase, que o carteiro entregou apenas 100 telegramas.


No 1º dia o carteiro entregou 72 telegramas.
No 2º dia ele entregou 79 telegramas
No 3º dia ele entregou 86 telegramas,
No 4º dia o carteiro entregou 93 telegramas
E no 5º dia de entregas, ele entregou 100 telegram

$4 \times 7 = 28$ $\quad 100 - 28 = 72$ $\quad 72 + 7 = 79$ $\quad 79 + 7 = 86$ $\quad 86 + 7 = 93$ $\quad 93 + 7 = 100$.

Figura 18 – Resolução presente na prova 8L10180

Nas provas 8CO3028, 8CO3106 e 8CO3090 desse mesmo grupo, os alunos interpretaram que o carteiro entregou um número diferente de telegramas ao longo dos cinco dias. Especificamente eles apresentam diferentes interpretações para a informação: *entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior* .

Na primeira dessas provas, o aluno divide, corretamente, 100 por 5; interpreta que o carteiro entregou 7 telegramas a mais apenas no primeiro dia, sendo que retira, corretamente, 7 telegramas do segundo dia, deixando-o com 13, e para os outros dias, informa que o carteiro entregou 20 telegramas.

Na segunda, o aluno subtrai, corretamente, 28, oriundo da multiplicação de 4 por 7, de 100, e apresenta esse resultado como o número de telegramas do primeiro dia. Para os outros quatro dias apresenta 7 telegramas entregue pelo carteiro como resposta.

Na terceira prova, o aluno interpreta que o carteiro entregou 20 telegramas no primeiro dia e 27 telegramas nos outros dias. Para esse aluno, a interpretação da informação da segunda frase, diz respeito aos últimos quatro dias. Para a primeira frase, o aluno faz uma interpretação diferente da considerada correta.

No grupo 6 temos 16 provas nas quais os alunos interpretaram e resolveram a questão da maneira considerada correta. Nas provas 8CO1009, 8LO5080, 8CO6015, os alunos equacionam os dados do problema, resolvem corretamente a equação e apresentam uma resposta correta. Vale lembrar que essa era a resolução esperada pelos organizadores da prova para a 8ª série do Ensino Fundamental.

Nas provas 8LO8161 e 8CO1018 temos uma estratégia que mistura alguma linguagem algébrica com tentativa e erro. Esses alunos interpretaram o problema corretamente, entretanto não apresentaram a resolução da equação que indica o número de telegramas entregue no primeiro dia. Eles usam a letra *x* para representar os dados desconhecidos e operam com ela. Com isso, apresentaram a resposta correta da questão[20].

Nesse grupo temos algumas provas em que os alunos interpretam e resolvem corretamente a questão por meio de estratégias aritméticas, num total de 11 alunos.

Nas provas 8CO3102, 8CO1011, os alunos apenas apresentam a resposta correta. Provavelmente utilizaram o cálculo mental ou, apagaram suas tentativas.

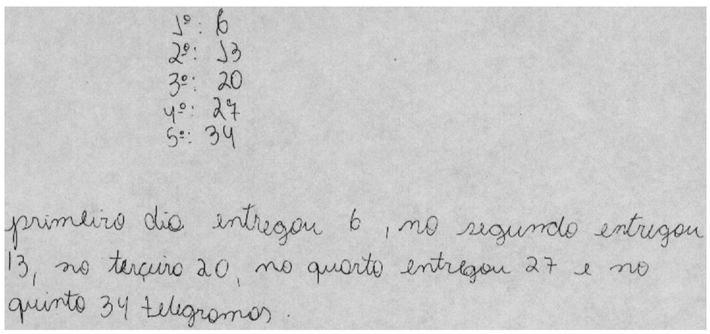


Figura 19 – Resolução presente na prova 8CO3102

Nas provas 8LO8152, 8L10179 e 8LO9205, os alunos apresentaram a resposta correta e uma verificação, que é a adição dos números de telegramas entregue em cada dia. Analogamente às provas 8CO3102, 8CO1011, os alunos podem ter apagado suas tentativas ou utilizado algum cálculo mental.

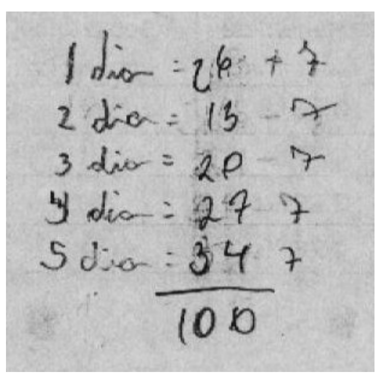


Figura 20 – Resolução presente na prova 8LO8152

[20] No segundo agrupamento de nossa análise iremos detalhar as provas que contêm alguma linguagem algébrica.

Temos 3 provas, 8LO4109, 8CO1014 e 8LO4124, nas quais os alunos utilizaram uma estratégia aritmética direcionada.

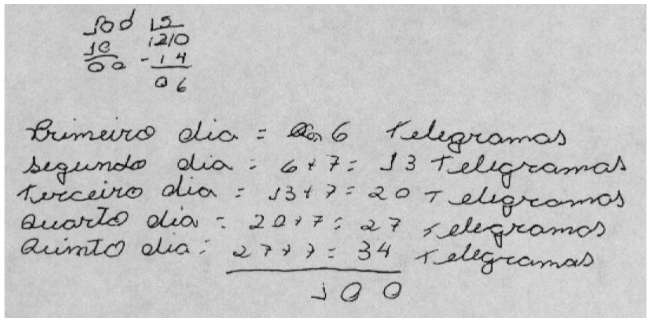


Figura 21 – Resolução presente na prova 8CO4124

Nas provas 8CO3015, 8CO3040 e 8CO6012, temos as provas em que os alunos apresentaram algumas tentativas, a partir de ‘chutar’uma resposta até encontrar a resposta correta do problema.

No grupo 7 temos apenas uma prova a qual o aluno adiciona, corretamente, 5 com 7 e apresenta o resultado como resposta.

Já no último grupo da 8ª série temos 8 provas as quais não foi possível construir uma interpretação para a produção escrita contida nelas. Essas provas caracterizam-se por não ter resposta para o problema ou por apresentar algumas relações entre os dados do enunciado da questão às quais não conseguimos atribuir algum sentido lógico.

A seguir discutiremos as provas que não foram incluídas em nenhum dos grupos apresentados. Na prova 8CO7012, o aluno interpreta, da segunda frase, que o carteiro entregou 7 telegramas a mais em cada um dos cinco dias e, sendo assim, é preciso subtrair 35 de 100 para dividir esse resultado por 5 e encontrar o número de telegramas entregue nos cinco dias. Inferimos que esse aluno interpretou que o carteiro não entregou todos os 100 telegramas nos cinco dias.

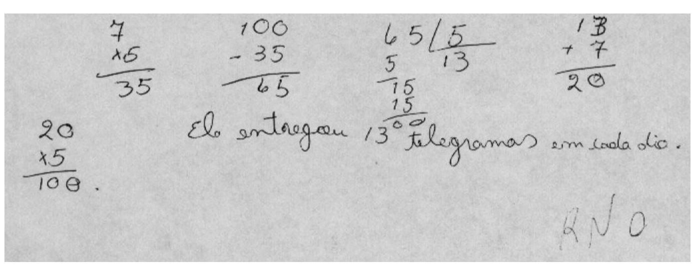


Figura 22 – Resolução presente na prova 8CO7012

Na prova 8LO4130, o aluno interpreta que o número de telegramas entregues nos cinco dias deve ser multiplicado por 7, sendo esse resultado dividido por 5 e esse último dividido mais uma vez por 5. Não há registros na produção desse aluno a informação da primeira frase, isto é, que o carteiro entregou apenas 100 telegramas.

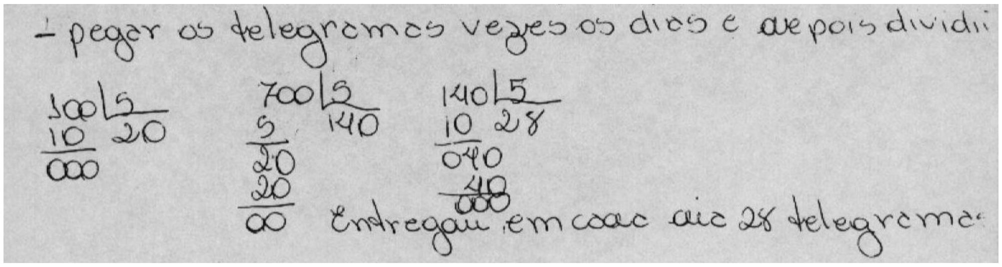


Figura 23 – Resolução presente na prova 8LO4130

Nas provas 8LO8145, 8CO3069, os alunos montam uma equação com os dados da questão e a resolvem corretamente. Apresentam como resposta o valor numérico correspondente à incógnita da equação resolvida, que é 6. Provavelmente para esses alunos, quando se tem uma questão para resolver que envolve uma equação, a resposta da questão sempre é o resultado da equação.

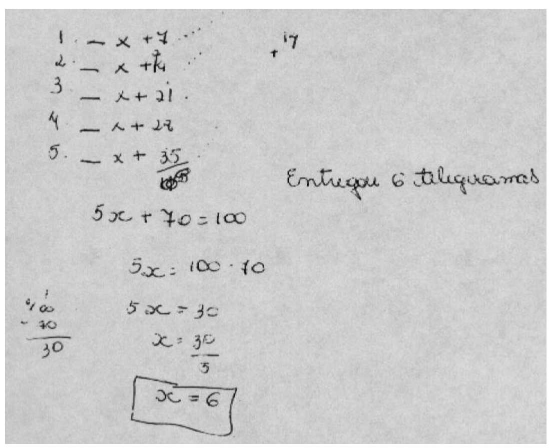


Figura 24 – Resolução presente na prova 8CO3069

6. 1.3 Da questão estudada nas provas da 3ª série do Ensino Médio

Igualmente ao realizado para a 4ª e 8ª série do Ensino Fundamental, iniciaremos nossa análise da produção escrita dos alunos da 3ª série do Ensino Médio apresentando na tabela 3 os agrupamentos das interpretações inferidas e das estratégias e procedimentos utilizados ao resolver a questão.

Tabela 3 - Análise Interpretativa da produção escrita dos alunos da 3ª série do Ensino Médio.

Grupos(N)	Interpretação feita pelo aluno		Procedimentos
	da 1ª. frase: *Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias.*	da 2ª. frase: *A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior.*	
G1 (1)	O carteiro entregou 100 telegramas em cinco dias.	Não há registro na resolução que indique alguma interpretação.	Faz uma divisão $(100 \div 5 = 20)$ e apresenta o resultado como resposta.
G2 (3)	O carteiro entregou 100 telegramas em cinco dias.	O número de telegramas aumenta e é o mesmo para cada um dos cinco dias.	Faz uma divisão $(100 \div 5 = 20)$. Adiciona ou multiplica 7 ao resultado do primeiro procedimento.
G3 (0)	O carteiro entregou 100 telegramas em cada um dos cinco dias.	O número de telegramas aumenta e é o mesmo para cada um dos cinco dias.	Faz uma multiplicação de 5 por 100. Adiciona ou multiplica 7 ao resultado do primeiro procedimento.
G4 (1)	O carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias.	O número 7 é o número de dias.	Faz uma divisão $(100 \div 7 = 14)$ e apresenta o resultado como resposta.
G5 (7)	O carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias.	Em pelo menos um dos cinco dias o número de telegramas é diferente.	Usa a idéia de recorrência aumentando 7 já no 1° dia ou a partir do 1° dia; O número de telegramas do 1° dia é 27 e nos outros 4 dias é 18; Aumenta 7 apenas no 1° dia, sendo no 2° dia 13 e nos outros 20.
G6 (26)	O carteiro entregou 100 telegramas em cinco dias.	A cada dia, a partir do primeiro, ele entregou sete a mais que no dia anterior.	Apresenta uma resposta considerada correta para a questão utilizando linguagem algébrica; ou tentativa e erro; ou estratégias aritméticas direcionadas.
G7 (2)	O aluno retira arbitrariamente dados do problema e opera com eles.		Multiplica 5 por 7; ou adiciona 5 com 7 e multiplica por 100 o resultado;
G8 (3)	Não foi possível construir uma interpretação para essas provas.		

No grupo 1 temos apenas uma prova na qual o aluno divide corretamente 100 por 5 e apresenta o resultado como resposta.

O grupo 2 tem 3 provas em que os alunos dividem, corretamente, 100 por 5, adicionam corretamente 7 ao resultado, e apresentam como resposta: "*entregou 27 telegramas em cada dia*".

Já para o grupo 3 não temos nenhuma prova com tais características.

No grupo 4 temos apenas uma prova na qual o aluno divide, corretamente,100 por 7 e apresenta o resultado como resposta.

O grupo 5 temos 7 provas nas quais os alunos construíram uma estratégia na qual o número de telegramas entregues ao longo dos cinco dias não é o mesmo. Percebemos algumas conexões entre as duas primeiras frases e a presença da idéia de recorrência na produção escrita desses alunos.

Em duas provas, o número de telegramas entregues a mais pelo carteiro inicia-se no primeiro dia e, o primeiro procedimento das suas resoluções está na divisão, correta, de 100 por 5. Percebemos que esses alunos não inter-relacionam as frases do problema, visto que da primeira frase utilizam um procedimento, da segunda, outro e apresentam uma resposta. Podemos também inferir que, para esses alunos, as interpretações para a primeira informação da segunda frase, "A cada dia, a partir *do primeiro*", se faz já para o primeiro dia e não começando no segundo.

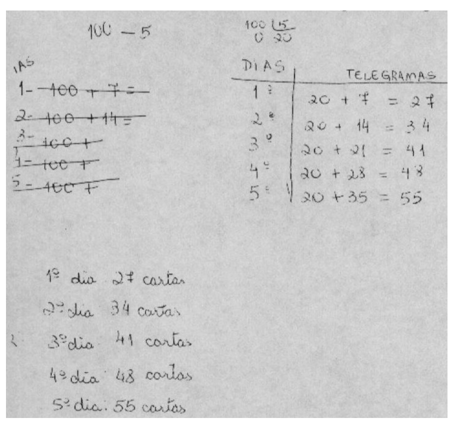


Figura 25 – Resolução presente na prova 3CO3113

Em outras 3 provas desse grupo temos os alunos que interpretaram a segunda frase da forma considerada correta, aumentando 7 telegramas em cada dia, a partir do primeiro. Na prova 3CO3073, o aluno utiliza a fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética para encontrar o número de telegramas que o carteiro entregou no primeiro dia. Para esse aluno o a_1 corresponde ao primeiro dia, a razão é 7 e o a_5 é 100 telegramas. Ele substitui esses números na fórmula e encontra o suposto a_1.

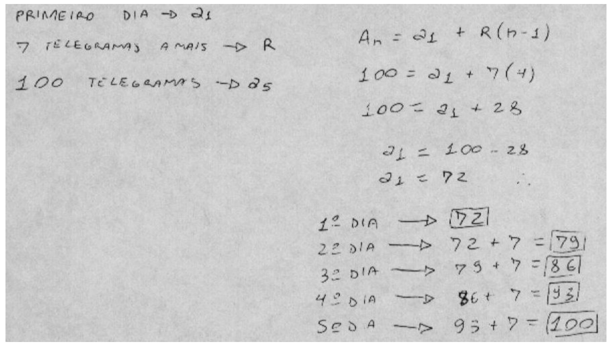


Figura 26 – Resolução presente na prova 3CO3073

Já na prova 3CO5041, o aluno supõe que o carteiro entregou 28 telegramas a mais, resultado da operação de multiplicação de 4 por 7. Assim, subtrai 28 de 100 e encontra o número de telegramas do primeiro dia. Apresenta a reposta para todos os dias e reconhece que isso resulta em uma Progressão Aritmética. Apenas essas duas provas apresentam alguns conhecimentos de Progressão Aritmética, das 44 provas que compuseram a amostra estudada.

Na prova 3CO3039 desse grupo, o aluno divide, 100 por 5, subtrai 7 desse resultado, ambos corretamente e encontra o número de telegramas entregues no primeiro dia.

Ainda no grupo 5 temos 2 provas em que os alunos fazem uma interpretação da segunda frase, na qual o número de telegramas entregue pelo carteiro aumenta apenas no primeiro ou no segundo dia. Em ambas as provas, eles sabem que o carteiro entregou apenas 100 telegramas no total, e o número de telegramas entregues nos outros dias é apresentado de uma maneira, que essa informação não seja contrariada.

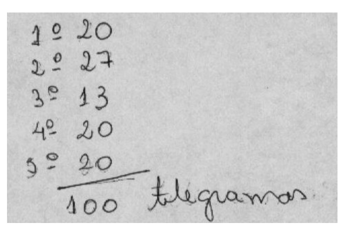


Figura 27 – Resolução presente na prova 3LO8103

No grupo 6 temos 26 alunos que interpretam-resolvem-respondem a questão da maneira considerada correta. Seis alunos usaram alguma linguagem algébrica para resolver o problema. Grande parte desses alunos equaciona os dados do problema, resolve a equação, encontra o número de telegramas do primeiro dia e, a partir deste, o número dos outros dias[21].

Nesse grupo também 10 alunos fizeram suas tentativas, mas não as deixaram nas provas, ou usaram o cálculo mental para resolver o problema. Temos apenas a resposta de telegramas entregues em cada um dos cinco dias e uma verificação, representada pela adição desses telegramas. Temos outras 9 provas em que os alunos apresentam algumas de suas tentativas, uma verificação e a resposta para o número de telegramas que o carteiro entregou.

Ainda nesse grupo temos uma prova em que um aluno apresenta uma estratégia aritmética direcionada. Nessa prova, 3CO5068, o aluno divide, corretamente, 100 por 5 e subtrai corretamente 7 do resultado duas vezes, encontrando o número 6, que é o número de telegramas que o carteiro entregou no primeiro dia. Adiciona 7, a partir do primeiro e apresenta a resposta para todos os dias.

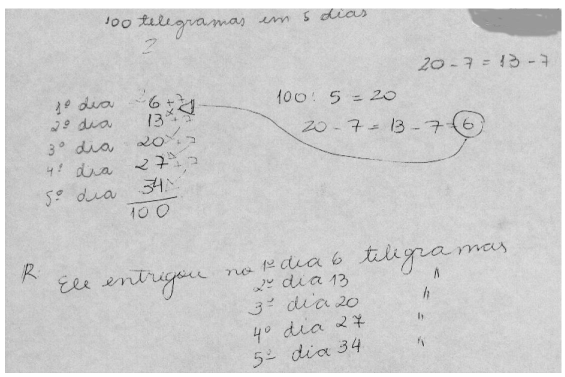


Figura 28 – Resolução presente na prova 3CO5068

No grupo 7 temos 2 provas nas quais os alunos operam arbitrariamente dados da questão. Um aluno multiplica corretamente 5 por 7 e apresenta uma suposta resposta: "35 telegramas a mais". Outro adiciona, corretamente, 7 a 5 e multiplica, corretamente ,o resultado por 100, apresentando este último como resposta.

No último grupo da 3ª série temos 8 provas nas quais não foi possível construir uma interpretação para a produção escrita nelas contidas. Essas provas caracterizam-se por não apresentarem uma resposta ou algumas relações entre os dados do enunciado as quais não conseguimos atribuir algum sentido lógico.

Apenas uma prova não foi agrupada na 3ª série do Ensino Médio. Nessa prova o aluno faz uma interpretação do enunciado da questão na qual ele monta uma regra de

[21] Teceremos considerações mais detalhadas das prova do grupo 6 no segundo agrupamento.

três para encontrar o número de telegramas, que na sua interpretação, é o mesmo para os cinco dias.

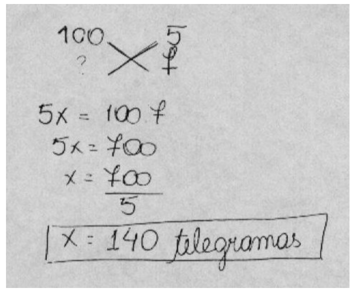


Figura 29 – Resolução presente na prova 3CO3119

6. 1. 4 Algumas considerações em relação as três séries

Em relação às provas da 4ª série do Ensino Fundamental, percebemos que muitos alunos fizeram uma interpretação da questão diferente da maneira que é considerada correta. As interpretações dos alunos referentes à segunda frase foram muitas vezes ligadas a palavra chave, *7 a mais*, e em poucos casos os alunos notaram a idéia de recorrência. Nas questões procedimentais, ligadas a execução de algoritmos, notamos que eles operam da maneira considerada correta. Poucos alunos fazem de uma maneira diferente.

Já nas provas da 8ª série, percebemos que os alunos tiveram menos variedade de interpretações para o problema e que o número de estratégias consideradas corretas para a questão aumentou consideravelmente. Eles também fazem mais conexões com as informações contidas na segunda frase, o que demonstra interpretações mais completas.

Os alunos da 3ª série do Ensino Médio foram os que tiveram o menor número de diversidade de interpretações para o enunciado da questão. Eles, como era de se esperar, foram os que mais acertaram. Temos um grande número de alunos no grupo 7, o qual é caracterizado pelas resoluções consideradas corretas. Entretanto, não há muitos registros nas provas de conteúdos, que geralmente são trabalhados na 3ª série do Ensino Médio, utilizados nas estratégias de resolução.

Em relação as três séries notamos que com o aumento da escolaridade dos alunos a diversidade de suas interpretações, diferentes da considerada correta, vão diminuindo e, com isso, o número de alunos que constroem resoluções, da maneira considerada correta, vai aumentando. Em relação aos primeiros 4 grupos, relativos a produção escrita dos alunos que interpretaram e resolveram a questão linearmente[22], temos a quantidade de 26 provas na 4ª série; 17 na 8ª série; e, apenas 5 para a 3ª série do Ensino Médio. Este é um ótimo indicativo, pois mostra que ao passar pelas séries os alunos vão construindo conhecimentos que os permitem resolverem corretamente uma questão. Claro, que existem outros fatores ligados a isso, mas com certeza a matemática escolar é um deles.

Comparando o grupo 1 da 4ª série com o grupo 1 da 8ª série notamos uma diminuição do número de provas, sendo que na 4ª série tivemos 11 provas e já na 8ª série apenas 5 provas. Em relação ao grupo 2 temos um total de 9 provas da 8ª série e de 8 da 4ª série. Entretanto, não consideramos este aumento negativo, pois notamos que os alunos da 8ª série fazem mais relações entre as frases do que os alunos da 4ª série.

Em relação aos grupos 5 e 6 das três séries, temos os alunos que apresentam uma interpretação e resolução não linear da questão, isto é, fazem inter-relações entre as informações contidas nas frases. Em várias provas notamos que eles identificam a idéia de recorrência na segunda frase. Temos quantidade de 8 provas para a 4ª série; 24 provas da 8ª série; e, 34 provas da 3ª série do Ensino Médio. Novamente vemos um aumento da quantidade de provas, no decorrer das séries.

Visto essas considerações podemos afirmar que com o aumento de sua escolaridade os alunos têm melhor desempenho ao resolver a questão. Os procedimentos utilizados em suas resoluções são mais sofisticados, no decorrer das três séries e o número de alunos que solucionaram a questão da maneira considerada correta aumenta consideravelmente.

Tomando as três últimas tabelas apresentadas, relativas ao modo de interpretação dos alunos de cada frase da questão e os procedimentos por eles utilizados, podemos agora construir uma nova tabela, relativa às estratégias que eles elaboraram. Ao descrever as provas das três séries, fomos apontando algumas de suas características, entretanto não as sistematizamos. Ressaltamos a diferença que fizemos, neste trabalho, entre as estratégias e os procedimentos, sendo que a estratégia, de certa forma, é todo caminho que o aluno construiu para resolver a questão. Ela é composta pela

[22] Estamos aqui considerando uma interpretação e uma resolução linear da questão, aquela em que o aluno faz uma interpretação para a primeira frase e utiliza um procedimento; faz uma interpretação para segunda e utiliza outro procedimento, sendo que este está ligado ao resultado do primeiro. Ele resolve passo a passo a questão encadeando suas interpretações e seus procedimentos, sendo que ao fim, apresenta uma resposta.

interpretação que o aluno fez do enunciado, os procedimentos que utilizou e a resposta que apresentou oriunda desses. A estratégia que o aluno elaborou é resultado da nossa interpretação da sua produção escrita por meio da tríade de palavras: interpreta-resolve-responde. Já os procedimentos são os algoritmos ou conjunto de algoritmos utilizados para resolver a questão. Na questão analisada tivemos procedimentos, como as operações de divisão, multiplicação e subtração, a idéia de recorrência, entre outros. A seguir, temos na tabela 4 as estratégias elaboradas pelos alunos das 3 séries.

Tabela 4 – Freqüência das Estratégias por série.

Série / **Estratégias**	**4ª Série E.F.**	**8ª Série E.F.**	**3ª Série E.M.**	**TOTAL**
G1 - Estratégia aritméticas.	32	25	13	**70**
G2 - Estratégia aritmética direcionada.	1	3	1	**5**
G3 - Estratégia tentativa e erro.	0	5	9	**14**
G4 - Estratégia aritmética direcionada e alguma linguagem algébrica.	0	2	1	**3**
G5 - Estratégia equação	0	5	6	**11**
G6 – Estratégia regra de três	0	0	1	**1**
G7 - Não foi possível construir uma interpretação	17	13	13	**43**
Total	**50**	**53**	**44**	**147**

No grupo 1 temos as provas nas quais os alunos elaboraram estratégias aritméticas, ou seja, por meio de operações aritméticas, e/ou idéia de recorrência, mas que não resolveram a questão da maneira considerada correta. Temos um número de 82 alunos nesse grupo.

Em relação ao grupo 2 temos as provas dos alunos que elaboraram as estratégias aritméticas direcionadas, ou seja, aquelas que eles parecem saber quais procedimentos deve utilizar para obter a resposta da questão. Esses procedimentos são utilizados de uma maneira encadeada, sistemática e lógica, possivelmente por meio de um raciocínio abdutivo, considerado aqui como aquele que envolve um “chute”, mas com algum conhecimento de causa. Temos um total de 5 alunos que elaboraram essa estratégia.

O grupo 3 contem as provas dos alunos que elaboraram a estratégia de tentativa e erro, ou seja, uma estratégia com a qual ele aborda um problema de cujo enunciado ele consegue retirar corretamente informações, e com elas, inferir alguns possíveis resultados indutivamente, para em seguida testá-los, buscando ajustá-los a partir dos seus erros para chegar a uma resposta que seja condizente com as “regras” da situação. Nesse grupo temos o total de 12 alunos.

No grupo 4 temos as provas dos alunos que elaboraram uma estratégia aritmética direcionada junto com alguma linguagem algébrica[23]. Na 4ª série não temos prova alguma, sendo que na 8ª série temos 2 provas e na 3ª série do Ensino Médio 1.

Em relação ao grupo 5 temos as provas nas quais os alunos construíram uma equação como estratégia para resolução da questão.Temos um total de 10 provas, sendo 5 para a 8ª série e 5 para a 3ª série do Ensino Médio.

O grupo 6 contem apenas uma prova na qual o aluno construiu uma regra de três como estratégia para resolução da questão.

No último grupo temos as provas dos alunos nas quais não foi possível construir uma interpretação para a estratégia que eles elaboraram. Na 4ª série temos um total de 13 provas, sendo que, em 5 delas, os alunos apresentaram a resposta correta da questão. Na 8ª série, o número de provas é também de 13 sendo que, em 5 delas, os alunos apresentaram a resposta correta da questão. Já na 3ª série do Ensino Médio esse número é de 11, sendo que, em 9 delas, os alunos apresentaram a resposta correta para questão. Não podemos afirmar qual foi a estratégia que de fato esses alunos elaboraram, mas podemos inferir que pode ter sido a estratégia tentativa e erro ou alguma estratégia aritmética direcionada.

Feito essas considerações em relação ao nosso primeiro agrupamento iremos para nosso segundo agrupamento que diz respeito ao pensamento e à atividade algébrica dos alunos.

5.2 Análise do pensamento algébrico e atividade algébrica em relação as três séries.

[23] Estamos caracterizando nesse trabalho como linguagem algébrica uma linguagem constituída por meio de uma notação simbólica na qual os símbolos representam generalizações de invariâncias, padrões ou regularidades.

Apresentaremos, a seguir, nosso segundo agrupamento, do pensamento algébrico dos alunos por meio de sua produção escrita. Como já descrevemos grande parte das provas no primeiro agrupamento, relativa à interpretação, estratégias e procedimentos dos alunos, apresentaremos nosso agrupamento relativo já às três séries juntas.

No terceiro capitulo construímos uma discussão de algumas caracterizações para o pensamento algébrico. A partir delas, constituímos uma, com a qual caracterizamos o pensamento algébrico pela expressão de um processo que envolva alguma relação entre estruturas aritméticas por meio de ações sintáticas, que sigam regras procedimentais e formais, e semânticas, que atribuam algum sentido lógico para a relação dessas estruturas. Por meio dessa caracterização não é preciso ter uma notação simbólica nas produções escritas para identificarmos algum pensamento algébrico. É claro, que no decorrer do desenvolvimento desse modo de pensar, uma linguagem simbólica potencializa esse modo de pensamento.

O enunciado oferece um contexto para os alunos estabelecerem algumas relações entre estruturas aritméticas para encontrar a resposta. É necessário que os alunos identifiquem a idéia de recorrência, por meio das informações da segunda frase do enunciado da questão, para que a resolvam da maneira considerada correta. Assim, será possível identificar o pensamento algébrico nas produções escritas dos alunos, de maneira mais sofisticada e gradativa, a medida que as inter-relações entre estruturas aritméticas forem expressas nas suas resoluções tendo a idéia de recorrência presente. Iremos apresentar alguns exemplos para ilustrar essas considerações sobre o pensamento algébrico.

Na tabela 5 temos o agrupamento da produção escrita dos alunos das três séries, relativa ao pensamento algébrico, sendo que a partir deste teceremos nossas considerações.

Tabela 5 – Níveis de Pensamento Algébrico encontrado nas provas por três séries.

Série / Níveis	4ª Série E.F.	8ª Série E.F.	3ª Série E.M.	TOTAL
G1 – Expressa uma estrutura aritmética para resolver a questão.	24	11	4	**39**
G2 – Expressa uma relação entre estruturas aritméticas para resolver a questão.	19	17	7	**43**
G3 – Expressa relações entre estruturas aritméticas para resolver a questão, nas quais está presente a idéia de recorrência.	7	17	23	**47**
G4 – Expressa relações entre estruturas aritméticas utilizando alguma linguagem algébrica para resolver a questão.	0	2	1	**3**
G5 – Expressa relações utilizando uma equação pra resolver a questão.	0	6	9	**15**

No primeiro grupo, em um total de 39 provas, notamos que elas não se caracterizam por apresentar o pensamento algébrico, ou seja, uma relação entre estruturas aritméticas. Nessas provas os alunos, geralmente, utilizaram o algoritmo da divisão para encontrar o número de telegramas que o carteiro entregou nos 5 dias. De um contexto, o enunciado da questão, o aluno identifica uma estrutura, o algoritmo da divisão, e por meio dela, apresenta uma resposta. Entretanto essa ação, tanto sintática quanto semântica, origina-se apenas de uma interpretação da primeira frase do problema. Não há registros de uma inter-relação de interpretações e estruturas aritméticas nesse grupo, e por isso não se caracteriza a presença do pensamento algébrico.

Nesse grupo também agrupamos as provas nas quais os alunos operaram arbitrariamente dados da questão, por meio de uma estrutura aritmética. Nessas não conseguimos estabelecer uma ação semântica, a não ser a de operar com os dados que os alunos encontram no enunciado da questão.

Em relação às três séries vemos que o número de provas do grupo 1 diminui consideravelmente com o aumento da escolaridade, sendo 24 provas na 4ª série do Ensino Fundamental; 11 na 8ª série do Ensino Fundamental e 4 na 3ª série do Ensino Médio.

No grupo 2, temos 43 provas dos alunos nas quais já podemos caracterizar algum pensamento algébrico. Encontramos nas resoluções dessas provas uma relação entre estruturas aritméticas, por meio de ações sintáticas e semânticas, e podemos notar, interpretações de informações contidas nas três frases da questão. Geralmente nessas provas, os alunos constroem uma estrutura aritmética oriunda de informações da primeira frase, utilizam o resultado do primeiro procedimento para construir outro, oriundo de alguma interpretação da segunda frase, e apresentam o resultado desse último como resposta da questão.

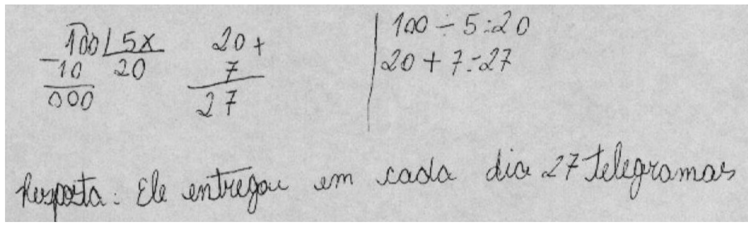


Figura 30 – Resolução presente na prova 4CO4009

Nesse grupo também temos algumas provas em que o número de telegramas entregues em cada dia é diferente. Esses alunos expressam relações entre o número de telegramas de cada dia, por meio de alguma interpretação das informações da segunda frase.

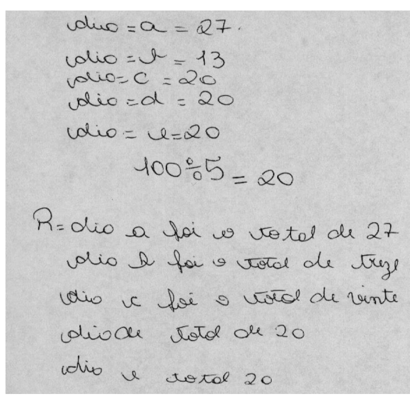


Figura 31 – Resolução presente na prova 8CO3028

Nessas provas podemos notar que o tipo de estrutura aritmética não se caracteriza apenas por um algoritmo de alguma operação, mas sim por um conjunto de relações entre o número de telegramas entregues em cada dia.

No grupo 3 temos 47 provas que os alunos expressam algumas relações aritméticas nas quais está presente a idéia de recorrência. Em relação ao contexto que nossa questão oferece para o estabelecimento dessas relações, a expressão da idéia de recorrência, caracteriza o pensamento algébrico dos alunos de uma maneira mais sofisticada.

Podemos notar que o número de provas nesse grupo vai crescendo com o aumento de escolaridade. Na 4ª série temos 7 provas; já na 8ª série temos 17; e na 3ª série do Ensino Médio esse número é de 23. Este é o grupo que tem o maior número de provas.

Na prova 3LO7038, temos um aluno que fez várias tentativas para encontrar o número de telegramas entregues em cada dia pelo carteiro. Em todas elas, ele fazia sua tentativa e verificava se o total de telegramas resultava em 100. Percebemos, por meio da expressão do seu processo de relação de estruturas aritméticas, que, para esse aluno, o número 7 já é uma invariância, o carteiro entregou 7 a mais a partir do primeiro dia, resultando um total de 100 telegramas nos cinco dias.

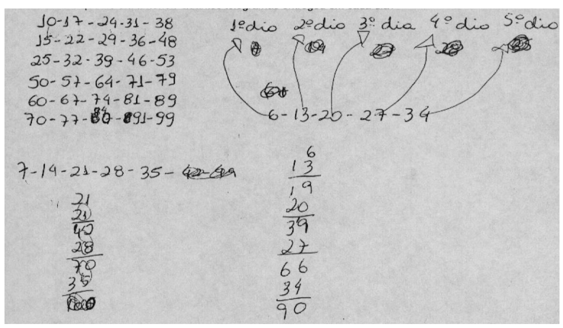


Figura 32 – Resolução presente na prova 3LO7038

Já em outra prova desse grupo, 3CO3113, temos que na primeira frase, o aluno fez uma interpretação que resultou na divisão de 100 por 5. Da segunda frase ele aumenta 7 telegramas a mais a cada dia, porém, começando já no primeiro dia. Ele expressa relações entre estruturas aritméticas e também evidencia o número de telegramas que esta aumentando a cada dia. Nessa prova, notamos que o aluno explicita um processo no qual ele encontrou uma invariância.

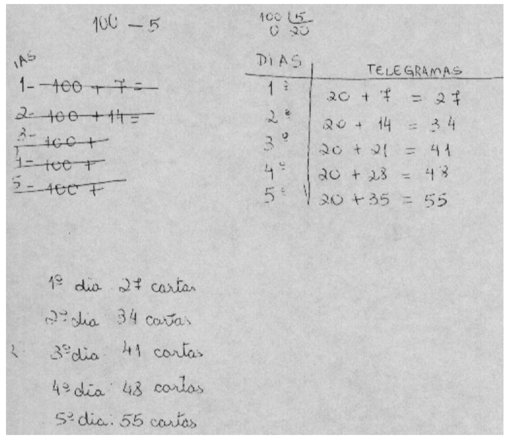


Figura 33 – Resolução presente na prova 3CO3113

Em uma outra prova desse mesmo grupo, temos uma resolução que expressa e coloca em evidência o número de telegramas que aumenta a partir do primeiro dia. Apesar de não utilizar uma linguagem algébrica, percebemos que o número 7 se comporta como uma regularidade, ou seja, um símbolo que é comum para todos os dias, a partir do primeiro.

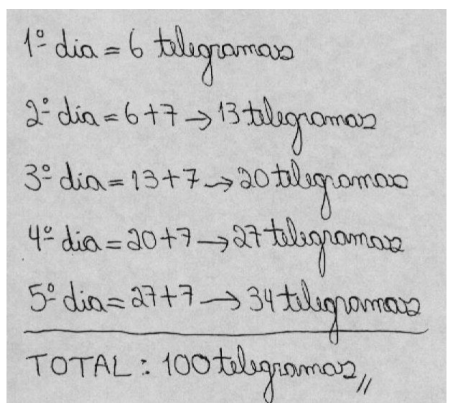


Figura 34 – Resolução presente na prova 3CO1023

Um último exemplo para caracterizar o grupo 3 é a prova 8LO4124, na qual o aluno resolve a questão por meio de uma estratégia aritmética direcionada. Por meio de ações sintáticas e semânticas, encontra o número de telegramas que o carteiro entregou no primeiro dia. Divide 100 por 5 e subtrai 14 desse resultado encontrando o número 6. Essa é uma estratégia muito sofisticada.

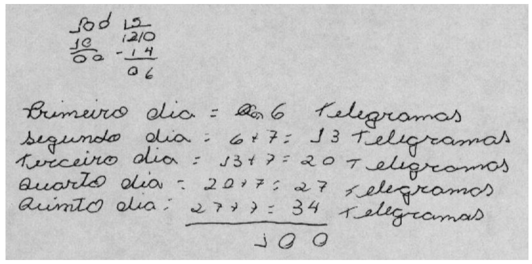


Figura 35 – Resolução presente na prova 8LO4124

No grupo 4 temos apenas 3 provas, que apresentam já uma linguagem algébrica. Nesse grupo podemos inferir que o pensamento algébrico já está bem desenvolvido, pois eles já encontram uma regularidade e estabelecem uma generalização com o uso de uma linguagem simbólica para representar essas duas ações. Na prova 8LO8161 percebemos que o aluno utiliza a notação simbólica para auxilia-lo a encontrar o valor de telegramas que o carteiro entregou em cada dia. O desconhecido para ele é tratado como conhecido, por meio da notação simbólica.

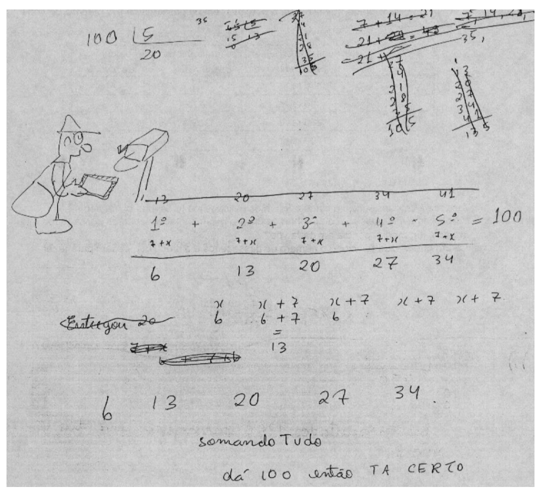


Figura 36 – Resolução presente na prova 8LO8161

Entretanto notamos que nesse grupo a linguagem algébrica está presente nas relações entre as estruturas aritméticas, ou seja, os alunos usam os símbolos para representar algumas de suas ações na resolução da questão. Esses símbolos se misturam com os números, caracterizando um pouco da álgebra sincopada.

Temos uma prova em que o aluno começa equacionar os dados do problema, de uma maneira aparentemente incorreta da considerada, mas pára afirmando: *Não consegui usar a fórmula, fui chutando o n° de cartas pro primeiro dia até acertar p/ dar*

100 telegramas. Notamos, por meio dessa explicação, que para esse aluno a equação se mostra como uma ‘fórmula’ que pode ser aplicada em alguns casos. Provavelmente, ele domine questões operacionais da resolução de equações, entretanto encontra dificuldade em usar esse conhecimento para a resolução de um problema, ou seja, seu domínio sobre equação não chega a permitir o seu uso enquanto ferramenta.

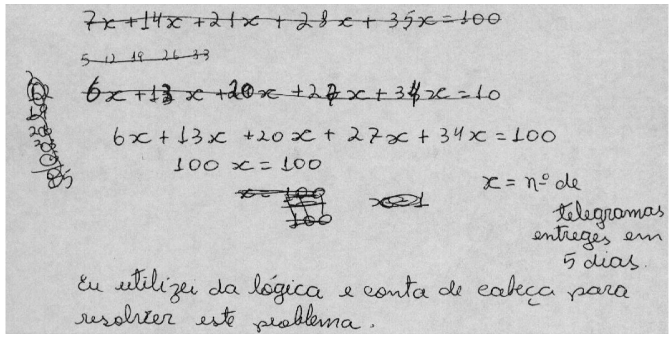


Figura 37 – Resolução presente na prova 3LO9046

O último grupo contém 15 provas nas quais os alunos utilizam uma equação como ferramenta para resolver a questão. Nesse grupo os alunos mostram ter um grande domínio da manipulação da linguagem algébrica e da aplicação de uma equação. O pensamento algébrico dos alunos nessas provas parece estar bem desenvolvido, pois eles expressam relações entre as estruturas aritméticas e usam regras da linguagem algébrica para resolver a questão.

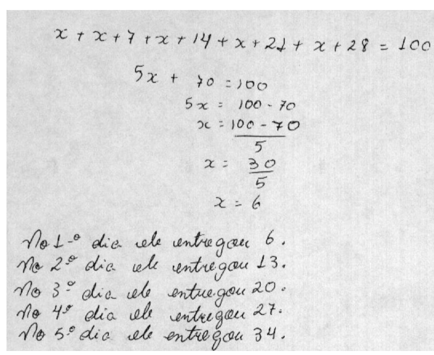
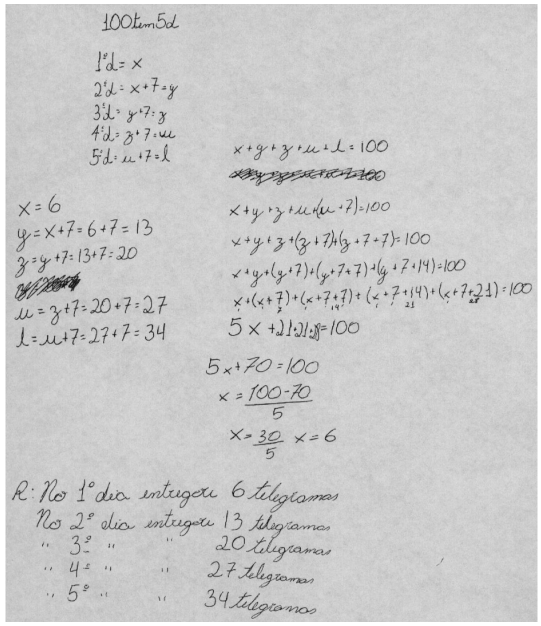


Figura 38 – Resolução presente na prova 8CO1009

Temos uma prova que o aluno apresenta uma resolução que para cada dia utiliza uma incógnita diferente. Percebemos que para esse aluno como a cada dia o número de telegramas é diferente, com para cada dia deve usar uma letra diferente. Notamos também que esse aluno tem um grande domínio dos aspectos operacionais das equações e que tem consciência do que está fazendo a todo o momento de sua resolução.



100 tem 5 d

1°d = x
2°d = x+7 = y
3°d = y+7 = z
4°d = z+7 = u
5°d = u+7 = l

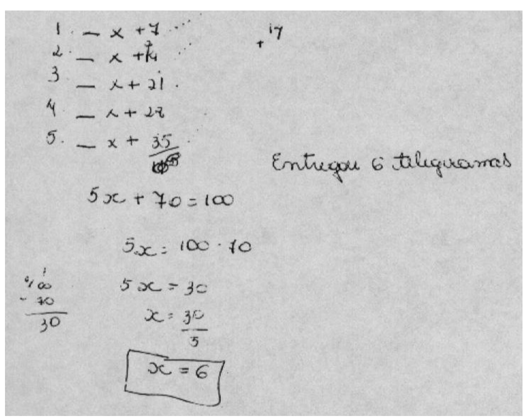
x+y+z+u+l = 100
x+y+z+u+(u+7)=100
x+y+z+(z+7)+(z+7+7)=100
x+y+(y+7)+(y+7+7)+(y+7+14)=100
x+(x+7)+(x+7+7)+(x+7+14)+(x+7+21)=100
5x+70=100
x = (100-70)/5
x = 30/5 x = 6

x = 6
y = x+7 = 6+7 = 13
z = y+7 = 13+7 = 20
u = z+7 = 20+7 = 27
l = u+7 = 27+7 = 34

R: No 1° dia entregou 6 telegramas
No 2° dia entregou 13 telegramas
" 3° " " 20 telegramas
" 4° " " 27 telegramas
" 5° " " 34 telegramas

Figura 39 – Resolução presente na prova 3CO3091

Esse grupo também contém 2 provas que os alunos montaram uma equação com os dados do problema cuja solução é o número de telegramas que o carteiro entregou no primeiro dia. Com isso, responderam a questão informando que o carteiro entregou 6 telegramas.



1. — x+7
2. — x+14
3 — x+21
4 — x+28
5. — x+35

Entregou 6 telegramas

5x+70=100
5x = 100-70
5x = 30
x = 30/5
x = 6

Figura 40 – Resolução presente na prova 3CO3069

Inferimos que para esses alunos a solução da equação é a resposta das questões e assim por isso, responderam que o carteiro entregou 6 telegramas.

5.3 Análise sobre as características dos problemas que os alunos construíram a partir do enunciado da questão.

Ao analisarmos a produção escrita, percebemos que muitos alunos construíram interpretações e elaboraram estratégias a partir do enunciado da questão, diferentes das consideradas corretas. Como nossa questão exige uma inter-relação entre as informações contidas em suas frases para resolvê-la, encontramos vários tipos de resoluções, das quais inferimos que os alunos constituíram uma outra questão. Há uma interpretação e resolução que é considerada correta, tanto pelas normas da Língua Portuguesa quanto da Matemática, e acreditamos, obviamente, que nossos alunos devem se apropriar desse modo de resolver à questão. Entretanto, por meio de nossas análises, inferimos que os alunos não fizeram as mesmas interpretações para as informações contidas nas frases da questão. Com isso, a questão resolvida por eles não foi a mesma, pensada pelos organizadores da prova. Assim, se admitirmos que nossos alunos resolveram uma questão diferente da considerada correta, não podemos tecer considerações sobre suas resoluções apenas tomando por base a interpretação e a resolução considerada correta, mas sim segundo aquela que o aluno interpretou e resolveu.

Tendo por referência a discussão apresentada no Capítulo 2, apresentamos uma diferenciação entre **a questão** e **os problemas** para lidar com as resoluções encontradas. A *questão*, neste trabalho, é aquela cuja interpretação e resolução, são consideradas corretas, segundo a comunidade e as normas e regras tanto da Língua Portuguesa quanto da Matemática. Daqui em diante, sempre que utilizarmos a palavra *questão*, estaremos nos referindo àquela considerada como correta. Já o *problema* é aquele que o aluno, de fato resolveu, ou seja, constituiu-se a partir da interpretação e resolução que ele construiu daquele enunciado e, portanto, diferente da *questão.* As maneiras idiossincráticas dos alunos construírem uma interpretação, utilizarem seus procedimentos e com isso, elaborarem uma estratégia apresentando uma resposta ao seu problema construído são aspectos a serem discutidos nessa parte da nossa análise.

Muitas vezes as interpretações feitas e as estratégias elaboradas pelos alunos constituindo assim seus problemas a partir do enunciado da questão coincidem com a questão. Porém, como veremos, muitas vezes não. Vários alunos provavelmente construíram um problema, muito diferente da questão e com isso sua resolução também não é a que usualmente seria considerada correta. Tecemos nossas considerações em relação às características dos problemas que os alunos construíram a partir do enunciado e não da questão que esperávamos que eles tivessem resolvido. Contudo, retomando a discussão do capítulo 2, não estamos em um contexto do “vale tudo”, apenas queremos compreender o modo como os alunos lidam com essa questão aberta de matemática, quais são as suas interpretações, suas estratégias e procedimentos, e, com isso, quais foram às características dos problemas que eles podem ter construído a partir do enunciado da questão.

A seguir listamos, por meio de agrupamentos, as características desses problemas que os alunos construíram do enunciado da questão e tecemos algumas considerações.

Acreditamos não termos condições de esboçar exatamente o enunciado do problema que os alunos construíram do enunciado da questão, pois com esse enunciado construído, quem nos garante que os alunos não resolveriam um outro problema que constituiriam desse novo enunciado? Assim, inferimos apenas em algumas características desses problemas por meio das resoluções dos alunos.

Tabela 6 – Características dos problemas que os alunos construíram a partir do enunciado da questão.

Grupos	**4ª Série E.F.**	**8ª Série E. F.**	**3ª Série E. M.**	**Total**
G1 - uma resolução linear; $100 \div 5 = 20$; mesmo número de telegramas em cada dia.	**11**	**5**	**1**	**17**
G2 – uma resolução linear; interpretação de uma idéia de multiplicação da primeira frase; mesmo número de telegramas em cada dia.	**5**	**0**	**0**	**5**
G3 - uma resolução linear; $100 \div 5 = 20$ em seguida adiciona ou multiplica 7 a esse resultado; mesmo número de telegramas em cada dia.	**11**	**8**	**3**	**22**
G4 – uma resolução linear; $100 \div 7 \cong 14$; $95 \div 7 \cong 13$; mesmo número de telegramas em cada dia.	**3**	**1**	**1**	**5**
G5 – uma resolução não linear; pelo menos em um dia o número de telegramas é diferente; ou o número de telegramas no primeiro dia é 7 a mais; ou no segundo dia é 7 a mais; ou nos últimos 4 dias é 7 mais.	**1**	**3**	**2**	**6**
G6 – uma resolução linear; está presente a idéia de recorrência, sendo que aumenta 7 já para o primeiro dia.	**0**	**0**	**2**	**2**
G7 – uma resolução não linear; está presente a idéia de recorrência, aumentando 7 a partir do primeiro dia;	**1**	**3**	**1**	**5**
G8 **–** uma resolução não linear; está presente a idéia de recorrência , aumentando 7 a partir do primeiro dia; o número de telegramas do primeiro dia é o resultado da subtração $(100 - 28 = 72$ **).**	**0**	**1**	**2**	**3**
G9 – uma resolução não linear; esta presente a idéia de recorrência, aumentando 7 a partir do primeiro dia; utiliza uma equação para encontrar o número de telegramas do primeiro dia, sendo que a solução da equação é apresentada como resposta; o número de telegramas entregues em cada dia é o mesmo.	**0**	**2**	**0**	**2**
G10 – Problema construído coincide com a questão	**6**	**16**	**26**	**48**
G11 - Opera dados retirados arbitrariamente do enunciado; mesmo número de telegramas em cada dia.	**4**	**1**	**2**	**7**
G12 - Não foi possível construir uma interpretação para essas provas.	**9**	**9**	**3**	**21**

No grupo 1 temos 17 alunos que construíram um problema do enunciado da questão cuja algumas características são interpretação linear do enunciado da questão e o mesmo número de telegramas entregues em cada um dos cinco dias. Eles dividem 100 por 5 e apresentam como resposta o resultado desse procedimento.

O grupo 2 contém a produção escrita dos alunos que constroem um problema cuja interpretação da primeira frase é que o carteiro entregou 100 telegramas em cada um dos 5 dias. Temos 4 provas nesse grupo nas quais os alunos multiplicam 100 por 5 e/ou multiplicam esse resultado por 7 e apresentam esse último como resposta, ou adicionam 7 ao resultado e apresentam esse último como resposta. Nesse grupo os alunos interpretam que o carteiro entregou o mesmo número de telegramas nos cinco dias e, da segunda frase há registro de interpretações e ações por meio de procedimentos no aumento desse número de telegramas. Ressaltamos que temos somente provas da 4ª série do Ensino Fundamental nesse grupo.

Em relação ao grupo 3, temos 19 provas nas quais os alunos construíram um problema no qual interpretaram e resolveram linearmente. Assim, os alunos dividiram 100 por 5; adicionaram 7 ao resultado e apresentaram esse último como resposta. Inferimos que da segunda frase, os alunos apenas adicionam 7 ao resultado do procedimentos realizado anteriormente. Eles resolveram um problema no qual o carteiro entregou o mesmo número de telegramas em cada um dos cinco dias.

No grupo 4 temos 5 provas nas quais os alunos constroem um problema tomando o número 7 como número de dias, faz uma divisão sendo este número o divisor e apresenta uma resposta para o problema. O número de telegramas que o carteiro foi o mesmo em cada um dos 5 dias. Caracterizamos esses problemas de resolução e interpretação linear, pois não há uma relação entre as informações contidas nas frases.

O grupo 5 contém 6 provas nas quais os alunos constroem e resolvem um problema que em pelo menos 1 dia o número de telegramas é diferente. Em algumas provas o número de telegramas aumenta 7 apenas para o primeiro dia, já em outras apenas para o segundo dia. Esses alunos construíram um problema e o resolveram de uma maneira não linear, ou seja, eles inter-relacionaram informações contidas nas 2 frases do problema, por meio de procedimentos que são utilizados de maneira não encadeada.

Em relação ao grupo 6 temos 2 provas nas quais os alunos construíram um problema que da primeira frase resolveram uma divisão de 100 por 5, em seguida utilizaram a idéia de recorrência, aumentando 7 já no primeiro dia. Os alunos encadeiam dois procedimentos para resolverem o problema que construíram, e assim, mesmo utilizando a idéia de recorrência, esses alunos construíram um problema de interpretação e resolução linear.

No grupo 7 temos 5 provas nas quais os alunos constroem um problema no qual está presente a idéia de recorrência, aumentando 7 a partir do primeiro dia. Eles resolvem por meio de tentativas, mas o número total de telegramas que o carteiro entregou é superior a 100.

O grupo 8 contém 3 provas nas quais os alunos constroem um problema que interpretam, da segunda frase, que o carteiro entregou 28 telegramas a mais, resultado da multiplicação de 4 por 7. Assim, subtraem 28 de 100 e encontram o número de telegramas entregue no primeiro dia. Utilizam a idéia de recorrência, aumentando 7 a partir do primeiro dia e apresentam uma resposta.

Em relação ao grupo 9 temos 2 alunos que construíram um problema com características muito parecidas com as da questão. Eles montam uma equação, e a resolvem corretamente, entretanto apresentam como resposta o valor da incógnita, isto é, o número 6. Na resolução desse problema construído está presente a idéia de recorrência, mas mesmo assim esses alunos apresentaram uma resposta com o mesmo número de telegramas para os 5 dias.

No grupo 10 temos 48 alunos que construíram um problema que coincide com a questão. Nesse grupo os alunos interpretaram, resolveram e apresentaram uma resposta da maneira considerada correta. Os alunos compreendem que o carteiro entregou apenas 100 telegramas nos cinco dias, a idéia de recorrência a partir do primeiro dia, e a resposta sendo um número diferente de telegramas para cada um dos cinco dias.

No grupo 11 temos a produção escrita dos alunos que construíram um problema que sua resolução se constrói operando arbitrariamente os dados do enunciado. Esses 7 alunos adicionam os números na ordem que aparecem no enunciado e apresentam o resultado como resposta. Podemos inferir que esses alunos construíram um problema no qual, se aparecem números, eles devem ser operados e o resultado dessa operação é a resposta do problema.

Para o último grupo desse nosso agrupamento estão as produções escritas dos alunos as quais não foi possível construir uma interpretação. Temos a quantidade de 21 provas.

Apresentaremos a seguir 2 provas que não foram agrupadas nos grupos acima. Na prova 8LO4130 o aluno construiu um problema que em sua resolução multiplicou 7 por 100; dividiu 700 por 5; e, dividiu 140 por 5, três operações realizadas da maneira considerada correta. Do último resultado apresentou a resposta para o problema, sendo o número de telegramas o mesmo para cada um dos cinco dias.

Na prova 3CO3119 o aluno construiu um problema no qual identificou uma regra de três, com 100 estando para 5, assim como, um número desconhecido está para 7. Esse problema construído foi bem específico, sendo o único dentre as 147 provas analisadas. Das 147 provas analisadas, 5 não foram alocadas em alguns dos 12 grupos apresentados anteriormente.

5.4 Agrupamento do que os alunos mostram saber por meio de sua produção escrita

Analisamos a produção escrita dos alunos e inventariamos quais conteúdos matemáticos, geralmente trabalhados na escola, eles mostram saber. Identificamos os procedimentos e tecemos algumas considerações sobre quais eles utilizaram na resolução da questão. Poucos foram os alunos que utilizaram um conteúdo especifico da sua série para resolver a questão. Entretanto, isso não significa que eles não sabem tais conteúdos, pois o fato de não encontrarmos registros desses conteúdos na produção escrita, não implica em um desconhecimento por parte dos alunos. Portanto tecemos nossas considerações apenas sobre aquilo que de fato eles fizeram, ou seja, o que eles mostram saber dos conteúdos matemáticos que geralmente são trabalhados na escola.

Apenas 10 provas não estão nessa tabela, sendo que 4 por não conseguirmos fazer uma interpretação; 3 por serem muitos especificas, que discutiremos em particular; e, 3 por apresentarem apenas um procedimentos diferente do considerado correto.

A seguir temos na tabela 7 os níveis de conteúdos matemáticos que os alunos mostram saber por meio de sua produção escrita.

Tabela 7 – Níveis dos conteúdos da matemática escolar os alunos mostram saber por meio de sua produção escrita.

Série / Descrição sintética dos níveis	4ª Série E.F.	8ª Série E.F.	3ª Série E.M.	TOTAL
G1 - Resolve uma operação aritmética.	24	8	2	**33**
G2 - Resolve duas ou mais operações aritméticas.	16	19	8	**43**
G3 - Resolve um problema por meio de operações aritméticas e da idéia de recorrência.	1	5	5	**11**
G4 - Resolve um problema utilizando uma estratégia (tentativa e erro; aritmética direcionada) como ferramenta na qual está presente à idéia de recorrência.	6	11	20	**37**
G5 - Resolve um problema utilizando alguma linguagem algébrica na qual está presente à idéia de recorrência.	0	7	6	**13**

Em relação ao grupo 1 temos o número de 23 alunos da 4ª série que resolvem uma operação aritmética. Essa operação, em geral, é a divisão de 100 por 5, pois é um procedimento oriundo de uma interpretação dos alunos para a primeira frase. Na produção escrita também encontramos algumas multiplicações, de 5 por 7; e, algumas adições, 100 com 5 e com 7. Esses alunos fazem essas operações da maneira considerada correta. Já para a 8ª série do Ensino Fundamental e a 3ª série do Ensino Médio esse número é consideravelmente menor, sendo de 9 e 2 respectivamente.

No grupo 2 temos a produção escrita dos alunos que realizaram duas ou mais operações aritméticas. Na 4ª série tivemos 16 alunos, e na 8ª série 19 alunos que utilizaram esses procedimentos. Geralmente, esses alunos dividem 100 por 5; adicionam 7 a esse resultado e apresenta uma resposta para o problema. Apenas 6 alunos da 3ª série do Ensino Médio realizaram esse procedimento.

O grupo 3 contém as produções escritas dos alunos que resolveram um problema por meio de operações aritméticas e pela idéia de recorrência. Esses alunos mostram ter conhecimento da idéia de recorrência e fazem algumas inter-relações com procedimentos utilizados por meio de interpretações da primeira frase do problema. O número de alunos das três séries que procederam dessa maneira é baixo, sendo 1 e 5 na 4ª e 8ª série do Ensino Fundamental, respectivamente, e 5 na 3ª séries do Ensino Médio.

No grupo 4 temos as provas nas quais os alunos elaboraram uma estratégia, ou tentativa e erro ou aritmética direcionada, e, a usaram como uma ferramenta para resolver um problema, na qual está presente também a idéia de recorrência. Esse é o grupo tem 37 provas, sendo o maior, em quantidade, em relação aos outros. Na 4ª série temos 6 provas, na 8ª série 11 e, na 3ª série do Ensino Médio 20 provas. Nas resoluções que a estratégia utilizada é a de tentativa e erro e aritmética direcionada, estão presentes vários procedimentos relativos às quatro operações e também à idéia de recorrência.

Já no grupo 5 temos a produção escrita dos alunos que utilizaram alguma linguagem algébrica como ferramenta para um problema no qual está presente a idéia de recorrência. Não encontramos produção escrita na 4ª série de alunos que resolveram dessa maneira. Já na 8ª série temos 5 alunos e, na 3ª série do Ensino Médio 6 alunos.

Temos 4 provas de alunos que não foi possível construir uma interpretação para sua produção escrita.. Nesse grupo temos 4 provas, sendo 1 da 4ª série, 2 da 8ª série, e, 2 provas da 3ª séries do Ensino Médio.

Por meio desses critérios construídos para a construção de agrupamento, 3 provas não puderam ser agrupadas por apresentarem características muito específica. Assim, iremos discuti-las uma a uma.

Na prova 8CO3122 um aluno monta uma equação com os dados do enunciado da questão, começa resolvê-la, mas, pára por algum motivo que não conseguimos interpretar. A seguir, podemos inferir, que ele monta uma outra equação, mas também não a resolve por completo. Podemos notar que mesmo o aluno não resolvendo a questão da maneira considerada correta, inferimos que ele sabe retirar dados do enunciado da questão e montar uma equação. Ele mostra saber, também, as regras de manipulação de uma equação e provavelmente como resolver.

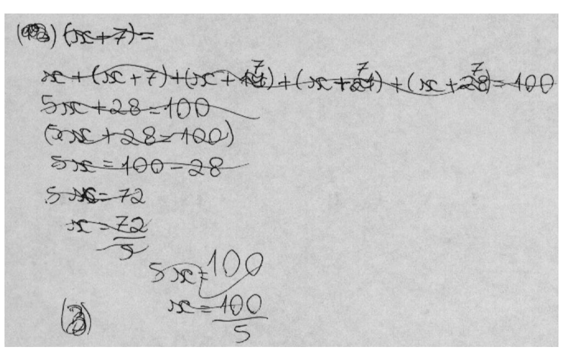


Figura 41 – Resolução presente na prova 8CO3122

Na prova 3CO3119 temos a produção de um aluno que montou uma regra utilizando dados do enunciado da questão. Resolve, corretamente, uma equação e apresenta uma resposta para o problema, sendo ela o valor da incógnita. Como discutido no agrupamento anterior percebemos que para o problema que o aluno construiu, a partir da sua interpretação do enunciado da questão, o resolveu corretamente. Ele mostra também saber um procedimento relativo a regra de três.

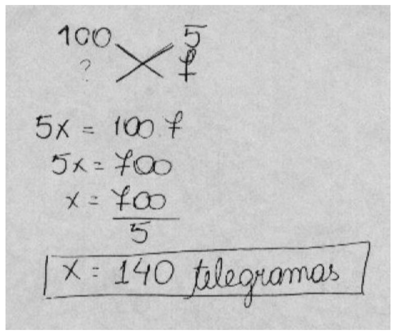


Figura 42 – Resolução presente na prova 3CO3119

Já na prova 3CO5075 temos um aluno que elaborou várias estratégias para resolver a questão, entretanto, riscou todas e afirmou: *"Não sei a resolução deste exercício"*. Mesmo tendo feito essa afirmação, podemos notar que ele mostra saber conteúdos matemáticos relativos a equação e as operações aritméticas.

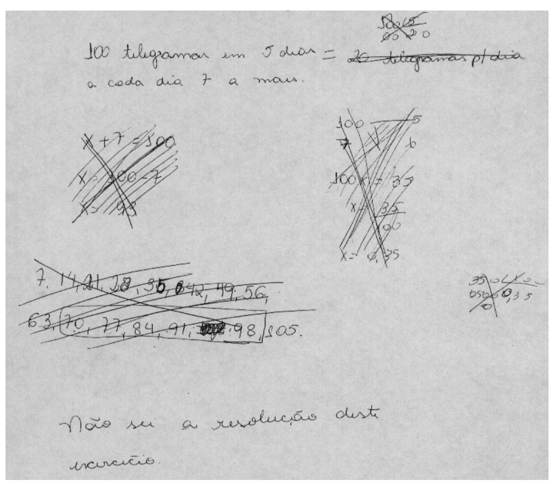


Figura 43 – Resolução presente na prova 3CO5075

Por meio desse três exemplos discutimos vemos que mesmo quando um aluno não apresente uma resolução correta para a questão, ele mostra saber vários conteúdos matemáticos. Elabora estratégia para o problema que tentou ou de fato resolveu e utiliza procedimentos da maneira considerada correta.

Das 147 provas analisadas, somente 3 apresentaram apenas um procedimento diferente da maneira considerada correta. Ressaltamos que estas são da 4ª série do Ensino Fundamental. Como elas não foram agrupadas nos 5 grupos apresentamos uma para nossas discussões.

Na prova 4L1001 o aluno montou o algoritmo da adição utilizando os três números que aparecem no enunciado e o resolve de uma maneira diferente da considerada correta.

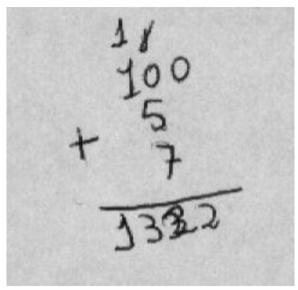


Figura 44 – Resolução presente na prova 4L10001

6 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

A primeira, e uma das mais importantes considerações que apresentamos com este trabalho, é que a avaliação deve ser encarada como uma prática de investigação pelos professores e alunos em sala de aula, e a análise da produção escrita se apresenta como uma estratégia para sua implementação. A avaliação deve ser tomada como uma "câmera digital" dos trabalhos dos alunos, um processo de apresentar indicativos de suas aprendizagens, indicativos incompletos, imprecisos, sempre com a possibilidade de remediação, de retomada. Parece-nos que tomar a avaliação nessa perspectiva pode ser uma condição necessária na busca de efetivar uma prática de educação com e para todos.

Quando um aluno resolve uma questão e deixa seus registros escritos na prova, estes marcam o caminho que percorreu por meio de suas estratégias e procedimentos, possibilitando análises de seus modos de lidar com as questões. Essas análises, que têm por objetivo oportunizar compreensões para desvendar e interpretar o caminho percorrido, mostram-se como uma alternativa a propiciar conhecimentos sobre a atividade matemática dos alunos.

Por meio dos registros escritos dos alunos é possível inferir sobre seus modos de interpretar o enunciado da questão, bem como analisar as estratégias elaboradas e os procedimentos utilizados. Este trabalho mostra que os alunos em sua grande maioria, interpretam o enunciado da questão linearmente e elaboram suas estratégias de acordo com essa interpretação, conectando passo a passo alguns procedimentos e apresentam ao final uma resposta. Será que na escola acontece uma discussão das interpretações que os alunos fazem e de como se espera que interpretem o enunciado de uma questão? Os alunos mostram ter algum domínio, com pouquíssimas exceções, dos procedimentos matemáticos que aprenderam na escola, porém fazem interpretações diferentes das consideradas corretas para o enunciado da questão. Com isso, eles constroem problemas diferentes a partir do enunciado da questão dada e os resolvem de uma maneira considerada correta.

Assim, nossos alunos não devem ser rotulados como fracassados, que não sabem coisa alguma da matemática escolar, visto que, como demonstram nossos dados, são poucas as maneiras de lidar, relativas aos procedimentos, que são realizadas por eles, diferentes da considerada correta. Portanto, temos que repensar não somente as dificuldades dos alunos, mas também as dificuldades referentes aos professores.

Identificar a dificuldade dos alunos em interpretar enunciados das questões nos remete, também, a pensar em qual tipo de matemática está sendo apresentada em sala de aula. Uma atividade que oportuniza a construção/apropriação de estratégias e ferramentas para os alunos se constituírem como seres humanos atuantes em seus contextos, ou uma linguagem mecanizada, cuja existência faz sentido apenas na escola para efetuar as ditas "contas" e resolver as tais equações? Infelizmente é essa última, uma matemática mecanizada, que geralmente domina os contextos das salas de aula. Para propiciar alternativas para mudanças, devemos reconfigurar o ensino da matemática não apenas em questões metodológicas, mas também em questões epistemológicas e sociais relativas ao conhecimento matemático. Precisamos pensar em Educação Matemática e não mais em ensino de matemática.

Apresentamos uma mudança saindo da análise dos "erros" para as maneiras de lidar dos alunos e, com isso, investigamos quais estratégias e procedimentos nossos alunos efetivamente elaboraram para resolver um problema construído a partir do enunciado de uma questão. Caracterizamos nossos alunos pelo que eles têm e não pelo que lhes falta, e essa mudança nos permitiu fazer essa caracterização. Assim, tomar as maneiras de lidar dos alunos ao invés de "erros" não é apenas uma mudança metodológica e sim epistemológica, pois valoriza os modos particulares que os alunos constroem, buscando legitimá-los não como certos ou errados, mas como diferentes, possibilitando com isso interpretar e valorizar as atividades matemáticas dos alunos.

Cada aluno tem seu modo idiossincrático de lidar com o conhecimento matemático. Esses modos devem ser tomados como ponto de partida para construir um espaço de negociação e legitimação dos significados atribuídos para tais conhecimentos. Assim, as maneiras de lidar que são diferentes das consideradas corretas apresentam-se a favor da aprendizagem dos alunos, permitindo aos professores oportunidades de leitura do modo como os alunos pensam sobre um determinado conteúdo. A partir dessa leitura, eles podem planejar suas ações para promover a aprendizagem, as atividades, as discussões a serem estabelecidas com os alunos. Conseqüentemente, os professores podem deixar de "mostrar os caminhos" e passar a indagar sobre os caminhos que os alunos estão construindo, provocando momentos de instabilidade, reflexão e confirmação nos quais aconteçam suas aprendizagens.

Outro ponto importante, que diz respeito à caracterização das pessoas pela falta, é que ao fazermos isso, sempre estamos interessados apenas nos ditos corretos, nos aclamados heróis e apenas naqueles que obtiveram sucesso. De certa forma, é praticar uma política de exclusão fazendo um corte para privilegiar e exaltar alguns, em detrimento de outros. É reafirmar as enormes desigualdades sociais e culturais, apenas informando aqueles que não estão nos padrões, sem oferecer oportunidades para, partindo do que efetivamente eles têm, buscar o desejado. *Falta você aprender tal conhecimento; você não tem tal informação; você não tem capacidade para realizar tal ação. E ai, o que adiantou você me dizer todas essas coisas que me faltam?* Ao buscarmos uma mudança saindo do que falta aos nossos alunos, os "erros", para olhar o que eles têm, suas maneiras de lidar, estamos oportunizando um outro modo de pensar na sociedade e com isso uma alternativa para construir um outro mundo menos cruel e injusto. Um modo holístico e respeitoso para com as diferenças, e não particular e fragmentário, indiferente a elas.

Em relação à Educação Algébrica, confirmamos que sua iniciação pode e deve acontecer desde as primeiras séries do Ensino Fundamental. Não existem motivos, a não ser de cunho político e de tradição pedagógica, para não começarmos a pensar em colocar nos currículos tópicos que tratam do desenvolvimento do pensamento e da atividade algébrica. Esse modo específico de organizar e modelar situações, o pensamento algébrico, é de suma importância para outras áreas da matemática como também para diversos contextos da vida fora da escola. Por isso deve ser pensado como um conteúdo importante no decorrer das séries.

Em relação aos nossos dados, identificamos a presença do pensamento algébrico em várias produções escritas dos alunos da 4ª série do Ensino Fundamental. Esse pensamento vai se desenvolvendo ao longo das séries e também é potencializado pelo uso de uma linguagem simbólica. Nossa caracterização para investigarmos o pensamento algébrico por meio das produções escritas dos alunos se mostrou eficiente e de acordo com a abordagem de iniciar os trabalhos da Educação Algébrica por meio da Resolução de Problemas.

Junto ao conhecimento algébrico deve estar o conhecimento aritmético, o geométrico, oportunizando aos alunos modos de pensamento e estratégias de resoluções das mais diversas situações. Não podemos separar esses conhecimentos durante a vida escolar dos nossos alunos.

Em todas as análises que fizemos da produção escrita dos alunos das três séries avaliadas, o aumento de escolaridade trouxe consigo alguma melhoria no desempenho.

Em relação ao modo de interpretação do enunciado da questão, na 4ª série do Ensino Fundamental 26 alunos interpretam o problema linearmente, ou seja, fazem uma interpretação de cada frase do enunciado, uma a uma, utilizam algum procedimento encadeando-o passo a passo no decorrer de sua leitura e ao final apresentam uma resposta oriunda desses procedimentos. Na 8ª série do Ensino Fundamental esse número diminui para 17 e na 3ª série do Ensino Médio diminui ainda mais, sendo apenas de 5. A diminuição dessa quantidade é um aspecto importante, pois no decorrer das séries menos alunos interpretam o enunciado da questão linearmente. Isso mostra que com mais escolaridade os alunos fazem mais e melhores relações entre as frases do enunciado e seus modos de interpretação consideram mais informações contidas nele. No decorrer das séries, os alunos constroem conhecimentos que propiciam uma olhar mais abrangente, atento e cuidadoso para a leitura de um enunciado e uma melhor compreensão dele. Assim, a atividade matemática dos alunos sai da manipulação de uma linguagem apenas procedimental, para a resolução de situações, elaborando hipóteses e tomando decisões por meio de alguns procedimentos e estratégias.

Já em relação à interpretação do enunciado da questão considerada correta, 6 alunos da 4ª série, 16 da 8ª série do Ensino Fundamental e 26 da 3ª série do Ensino Médio, fizeram esse modo de interpretação. Vemos um grande aumento com decorrer das séries e esse resultado nos indica que, ao longo dos anos de escolaridade, nossos alunos vão constituindo conhecimentos que oportunizam interpretar o enunciado de uma questão da maneira considerada correta.

Ao investigarmos o pensamento algébrico que os alunos mostram ter por meio da sua produção escrita, temos, segundo nossa caracterização, que 26 das 50 provas dos alunos da 4ª série do Ensino Fundamental mostram indicativos da existência desse tipo de pensamento. Dessas 26 provas, 19 estão categorizadas no primeiro nível, que é o de expressar uma relação entre estruturas aritméticas para resolver a questão, e 7 estão no segundo nível, que é o de expressar relações entre estruturas aritméticas para resolvê-la, nas quais está presente a idéia de recorrência. Para o terceiro nível, que é o de expressar relações entre estruturas aritméticas utilizando alguma linguagem algébrica, e o quarto, que é o de expressar relações utilizando uma equação, não temos prova alguma. Na 8ª série do Ensino Fundamental, número de provas dos alunos que mostram ter o pensamento algébrico é de 42, sendo 17 no primeiro nível; 17 no segundo nível; 2 no terceiro nível; e, 6 no último nível. Já para a 3ª série do Ensino Médio temos 39 produções escritas que demonstram algum pensamento algébrico. Dessas provas 6 estão no primeiro nível; 23 no segundo; 1 no terceiro e 9 no último nível. Notamos que 47 dos nossos alunos, nas três séries, se encontram no segundo nível, que é o de expressar relações entre estruturas aritméticas para resolver a questão, nas quais está presente a idéia de recorrência. Ressaltamos que grande parte dos alunos, que resolveram a questão da maneira considerada correta, elaboraram uma estratégia que se enquadra nesse nível do pensamento algébrico.

Muitos foram os problemas construídos pelos alunos a partir do enunciado da questão, como discutimos no capítulo anterior. Entretanto 58 alunos das três séries construíram um problema cujas características de interpretação e resolução são lineares. Por meio do enunciado da questão construíram um problema passo a passo conectando procedimentos encadeados e apresentando ao fim uma resposta. Já para as características de interpretação e resolução não-lineares, ou seja, que envolvem alguma relação não encadeada passo a passo, entre as informações das duas primeiras frases, tivemos 15 alunos, nas três séries. Em relação aos problemas construídos pelos alunos que coincidem com a questão, temos o número de 48 alunos. Por fim tivemos 14 provas, para as quais não foi possível construir uma interpretação.

Em relação aos conteúdos da matemática escolar que os alunos mostram saber, em relação às três séries, temos 33 provas em que os alunos mostram saber resolver uma operação aritmética e 43 nas quais eles mostram saber duas ou mais operações. Esses alunos não resolveram a questão proposta da maneira considerada correta, mas em seus registros escritos é possível observar o conhecimento desses procedimentos. Temos 37 provas nas quais os alunos mostram saber resolver a questão utilizando as estratégias de tentativa e erro ou aritmética direcionada como ferramenta, na qual está presente a idéia de recorrência. Temos também 13 alunos que mostram saber, por meio de sua produção escrita, utilizar alguma linguagem algébrica, na qual também está presente à idéia de recorrência. Apenas em 6, das 147 provas, não foi possível fazer uma interpretação do que os alunos mostram saber.

Nossos resultados apontam que a grande maioria dos alunos mostra saber os procedimentos que geralmente são trabalhados na escola, ou seja, eles sabem sim muitas coisas da matemática escolar. Apenas com análises, sejam elas por meio da produção escrita ou outro tipo de dados, podemos inferir sobre o que nossos alunos sabem. Diferentemente dos resultados amplamente divulgados das avaliações em massa, afirmamos que nossos alunos sabem, sim, muitos procedimentos da matemática escolar.

No decorrer do trabalho consideramos a construção de vários tipos de análises e optamos, em razão do tempo e dos objetivos do projeto como um todo, por realizar aquela que apresentamos no capítulo anterior. Entretanto, como uma dissertação ou qualquer trabalho de pesquisa nunca acaba, apenas fechamos com aquilo que temos em mãos, apresentamos alguns indicativos de investigações futuras a serem realizadas por interessados em caracterizar os modos como os alunos lidam com as questões abertas de matemática.

Ao resolver uma questão, os alunos não apenas utilizam seus conhecimentos matemáticos, mas também os conhecimentos da sua vida prática fora da escola que são constituídos inter-relacionados com os da escola. Percebemos vários indícios e vários indicativos, por meio da produção escrita dos alunos, de que os contextos que circunscrevem suas vidas estão efetivamente presentes na interpretação do enunciado da questão, bem como na elaboração de uma estratégia e na utilização de procedimentos. Inferimos que alguns alunos ao fazerem suas interpretações do enunciado da questão podem ter se questionado: *Por que um carteiro entrega 6 telegramas em um dia, 13 no outro, 20 no próximo e assim por diante? Por que ele não entrega a mesma quantidade em todos os dias? Eu nunca vi um carteiro entregar uma quantidade tão pequena de telegramas em um dia, 6, e outra tão grande, 34, em outro.* Acreditamos que estas, entre outras, devem ser perguntas que passam pelas cabeças dos nossos alunos ao interpretar o enunciado de uma questão aberta de matemática. Assim, investigar quais as interferências e relações que os contextos efetivamente fazem no modo dos alunos lidarem com as questões matemáticas pode ser um indicativo para futuras pesquisas.

Outro ponto em relação ao contexto diz respeito ao modo e à linguagem com a qual a questão foi apresentada aos alunos. Pesquisas[24] apontam para o fato desta variável estar relacionada ao desempenho dos alunos ao resolverem a questão, mas isto ainda permanece como tema para mais investigações. Será que se o enunciado da questão estivesse escrito em uma linguagem, sem um aposto, por exemplo, na segunda frase, os alunos interpretariam da maneira considerada correta? Será que o enunciado da nossa questão que tem uma "roupagem" da vida real, mas que ainda fica distante da rotina dos carteiros, em geral, ofereceu oportunidades para outros tipos de interpretações e resoluções por parte dos alunos? Essas também são perguntas que ficam sem resposta neste trabalho.

Em relação à produção escrita encontrada nas provas, continuamos com uma dúvida em relação a um determinado procedimento utilizado por alguns alunos. Estes, por algum motivo, tomaram o número 7, que indica a quantidade de telegramas que o

---

[24] HEUVEL-PANHUIZEN, 2005; D'AMBROSIO 2004; KASTEBERG, S. *et all* 2005

carteiro entregou a mais a partir do primeiro dia, como o número total de dias e assim realizaram uma divisão que tem como divisor o número 7. Não conseguimos inferir o motivo dessa troca de natureza das quantidades representadas pelos números e acreditamos que não temos condições de compreender essa ação dos alunos apenas por meio da produção escrita em uma única questão de uma única prova. É necessário realizar um trabalho no qual, por meio de entrevistas, se investiguem os motivos desses alunos fazerem essa interpretação do enunciado da questão.

Essas três considerações pensadas ao longo do trabalho ficam como indicativo para futuras pesquisas. Acreditamos que elas são de grande importância e relevância para compreensões da atividade matemática dos nossos alunos.

Não a última, mas apenas mais uma importante consideração deste trabalho é que nossos alunos mostraram ter algum domínio de vários conteúdos matemáticos. Alguns resultados de avaliações de rendimento nacionais e mesmo internacionais mostram uma péssima imagem do desempenho dos nossos alunos. Entretanto, como já foi colocado neste trabalho, o alcance dessas provas é limitado. A correção está ancorada apenas no certo e no errado, no que fracassou e naquele que teve sucesso. Por meio dos nossos resultados, temos que, mesmo os alunos que não resolveram a questão proposta, resolvem corretamente um problema que construíram do enunciado da questão. Claro que isso apenas não basta. É preciso que de fato nossos alunos resolvam as Questões. Mas para isso é importante tomarmos como ponto de partida o que eles efetivamente mostram saber e como eles lidam com elas. Para isso, nosso trabalho pode servir de subsidio para uma caracterização da atividade matemática escolar dos alunos.

Não queremos saber apenas o que falta para nossos alunos, mas sim, o que efetivamente eles têm, para, a partir destes conhecimentos, que são muitos, buscarmos com eles construir um mundo justo, solidário e de paz. **Sei que não dá para mudar o começo, mas, se a gente quiser, vai dar para mudar o final!**

Essa é a nossa esperança.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, R. M F. **Uma análise da Produção Escrita de Alunos do Ensino Médio em Questões abertas de Matemática**. 2006 158 p. Londrina. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Departamento de Matemática.. Universidade Estadual de Londrina, 2006.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Tradução: Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições: 70, 1977.

BELL, A. Algebraic Thought an the Role of a Manipulative Symbolic Language. In: Nadine Bednarz, Carolyn Kieran, and Lesley Lee (Eds). **Approaches to Algebra:** Perspectives for Research and Teaching Boston: Kluwer, 1996. p. 151-154.

BLANTON, MARIA L.; JAMES J. KAPUT. Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education,** v.36, n.5, p. 412-443, Novembro, 2005.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em educação**. (1. ed. 1991) Trad. Maria J. Alvez, Sara B. dos Santos e Telmo M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BORASI, R. Exploring Mathematics through the Analysis of Errors. **For the Learning of Mathematics**. v.7, n.3, p. 2-8, Novembro, 1987.

___________. Brainstorming about errors. **Focus on Learning Problens in Mathematics**. v.7, n. 3, p. 91-103, 1985.

___________. **Reconceiving Mathematics Instruction**: A Focus on Errors. Norwood: Ablex Publishing Corporation, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. Relatórios do SAEB 1995 – **Níveis de desempenhos em Língua Portuguesa e Matemática**. In: www.inep.gov.br

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. Relatórios do SAEB 1997 – **Níveis de desempenhos em Língua Portuguesa e Matemática**. In: www.inep.gov.br

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. Relatórios do SAEB 1999 – **Níveis de desempenhos em Língua Portuguesa e Matemática**. In: www.inep.gov.br

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. Relatórios do SAEB 2001 – **Níveis de desempenhos em Língua Portuguesa e Matemática**. In: www.inep.gov.br

BRIZUELLA, B.; SCHLIEMNN, A.; Ten-year-old Students Solving Linear Equations. **For the Learning Mathematics,** v.24 n 2, 2004.

BURIASCO, Regina L. C. De. **Matemática de fora e de Dentro da Escola: do Bloqueio a Transição**. 1988. Rio Claro. Dissertação. Universidade Estadual Paulista (UNESP).

_____________________. **Avaliação em Matemática**: um estudo das respostas de alunos e professores. 1999. Marília. Tese. Universidade Estadual Paulista (UNESP).

_____________________. Sobre Avaliação em Matemática: uma reflexão. **Educação em Revista**. Belo Horizonte, n.36, Dezembro, p. 255-263, 2002.

____________________. Análise da Produção Escrita: a busca do conhecimento escondido. **XII ENDIPE.** In: ROMANOVSKI, Joana Paulin; MARTINS, Pura Lúcia Oliver; JUNQUEIRA, Sérgio R. A. (orgs.). **Conhecimento local e conhecimento universal: a aula, as aulas nas ciências naturais e exatas, aulas nas letras e artes.** Curitiba: Champagnat, 2004.

BURIASCO, R. L. C.; CYRINO, Marcia Cristina de Costa Trindade ; SOARES, Maria Tereza Carneiro . Um estudo sobre a construção de um manual para correção das provas com questões abertas de Matemática - AVA 2002. In: XIV SIEM - Seminário de Investigação em Educação Matemática, 2003, Lisboa - Portugal. **Actas**.. Lisboa - Portugal : Associação de Professores de Matemática, 2003. p. 65-80.

CARPENTER, THOMAS P., MEGAN L. FRANKE, AND LINDA LEVI. **Thinking Mathematically**: Integrating Arithmetic & Algebra in Elementary School. Portsmouth, NH: Heinemann, 2003.

CARRAHER, DAVID W.; *et all*. Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. **Journal for Research in Mathematics Education** n.37, v.2, p. 87-115, Março, 2006.

CHARBONNEAU, L. From Euclid to Descartes: Algebra and its Relation to geometry. In: Nadine Bednarz, Carolyn Kieran, and Lesley Lee (Eds). **Approaches to Algebra:** Perspectives for Research and Teaching Boston: Kluwer, 1996. p. 15-38.

CURY, Helena Noronha. Análise de erros em Educação Matemática. In: **Veritati,** Salvador, v. 3, n. 4, junho, 2004.

_____________________Retrospectiva Histórica e Perspectivas Atuais na Análise de erros em Educação Matemática. **Zetetike**. Campinas v.3, n.2, p 39-50. Novembro 1995.

_____________________ Análise de erros em disciplinas matemáticas de cursos superiores. In: III Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2006, Águas de Lindóia. **Anais**... Águas de Lindóia, 2006

D'AMBROSIO, B. S.; *et all.* (2004) Beyond Reading Graphs: Student Reasoning With Data. In: Peter Kloosterman and Frank K. Lester, Jr. (Eds), **Results and Interpretations of the 1990 through 2000 Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress**. NCTM, 2004.

D'AMBROSIO, U. **Educação para uma Sociedade em Transição**. Campinas: Papirus Editorial, 1999; 167 pp.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**, Unicamp, Campinas, 1997.

ESTEBAN, Maria Teresa. Avaliar: **Ato Tecido pelas Imprecisões do Cotidiano.** Disponível em <http://www.amped.org.br/0611t.htm>. Acesso em: 10/05/2002.

___________________________. **O que sabe quem erra?** Reflexões sobre avaliação e fracasso escolar. 3ª ed. – Rio de Janeiro: DP&A, 2002. p. 200.

___________________________. A avaliação no processo ensino/aprendizagem: os desafios postos pelas múltiplas faces do cotidiano. In: **24º Reunião Anual da Associação NAcional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação**, 2001, Caxambu. Intelectuais, conhecimento e espaço público, 2001. Disponível em <http://www.anped.org.br/24/T0682499156560.doc>. Acessado em 23/2/2003

_______________________. (Org.) **Escola, currículo e avaliação**. 1. ed. São Paulo: Cortez, 2003. v. 1. 167 p.

FIORENTINI, D. Erros e acertos no ensino-aprendizagem da matemática: problematizando uma tradição cultural. In: I Jornada Nacional de Educação Matemática e XIV Jornada Regional de Educação Matemática, 2006, Passo Fundo., **Anais**..., Universidade de Passo Fundo, 2006

FIORENTINI, D.; MIORIM, M.A. ; MIGUEL, A. . Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, v. 4, n.1, p. 78-91, 1993.

FIORENTINI, D.; *et all*. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: V-Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática, 2005, Porto. v.1. p. 1-13.

GARNICA; A. V. M. História Oral e Educação Matemática. In: **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** BORBA, M. C.; ARAUJO, J. L. (orgs.) Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GARNICA; A. V. M. Erros e Leitura Positiva: propostas, exercícios e possibilidades. . In: I Jornada Nacional de Educação Matemática e XIV Jornada Regional de Educação Matemática, 2006, Passo Fundo., **Anais**..., Universidade de Passo Fundo, 2006

HADJI, Charles. **Avaliação Desmistificada.** Porto Alegre: ARTMED, 2001.

______________. **A avaliação, Regras do Jogo** Das Intenções aos Instrumentos**.** 4ª ed. Portugal: Porto Editora, 1994.

HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. The role of contexto in assessment problemas in mathematics. **For the Learning Mathematics** v.25, n 2, Julho, 2005

KASTEBERG, S. *et all*. Context Matters in assessing student´s mathematical power. **For the Learning Mathematics** v. 25 n 2 Julho, 2005

KAZEMI, ELHAM, AND MEGAN L. FRANKE. Teacher Learning in Mathematics: Using Student Work to Promote Collective Inquiry. **Journal of Mathematics Teacher Education** n.7, p. 203-235, 2004.

KIERAN, C. (1992). **The learning and teaching of school algebra**. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan Publishing Company

_____________. The Core of Algebra: Reflections on it's main Activities. In: Kaye Stacey; Helen Chick;. (Org.). **The future of the teaching and learning of algebra**. Dordrecht: Kluwer, 2004, p.21-34.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. 1992. PhD Thesis. University of Nothing , UK.

LINS, R. C. O Modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. **Dynamis**, v. 1, n. 7, p. 29-39, 1994.

LINS, R.C. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções e Perspectivas. BICUDO, M.A..V. (ed). São Paulo: Unesp, 1999.

LINS, R. C. . The production of Meaning for Algebra: a perspective based on a theoretical model of semantic fields. In: R. Sutherland; T. Rojano; A. Bell; R.Lins. (Org.). **Perspectives on School Algebra**. Dordrecht: Kluwer , 2001, p.37-60.

LINS, R.C. Matemática, Monstros, Significados e Educação Matemática. In: **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. BICUDO, M.A..V e BORBA, M.C. (eds). São Paulo: Cortez, 2004.

LINS, R. C. ; GIMENEZ, J. . **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Editora Papirus, 1997. v. 1. 250 p.

LINS, R. C. ; KAPUT, J. The early development of algebraic thinking. In: Kaye Stacey; Helen Chick;. (Org.). **The future of the teaching and learning of algebra**. Dordrecht: Kluwer, 2004, p. 47-70

MOVSHOVITZ-HADAR, N.; ZASLAVSKY, O. An empirical classification model for errors in hight school mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education** v.18, n.1, p. 3-14, Março,1987.

MORAES, R. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. **Ciência & Educação**, v.9, n. 2, p.191-211, 2003

MORAES, R; GALIAZZI, M. C. Análise textual discursiva: processo construído de múltiplas faces. **Ciência & Educação**, v.12, n.1, p.117-128, 2006

MOURA, A. R. L.; SOUSA, M. C. O lógico-Histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares. **Zetetike**. v.13, n.24, p.11-45, 2005.

NAGY-SILVA, M. C. **Do Observável ao Oculto: um estudo da produção escrita de alunos da 4ª série em questões de matemática**. 2005. 114 p. Londrina. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Departamento de Matemática.. Universidade Estadual de Londrina, 2006.

NAGY-SILVA, M. C; BURIASCO, Regina L.C. de. Análise da produção escrita em matemática: algumas considerações. **Ciência & Educação**, v.11, n.3, p.499-511, 2005.

NEGRÃO. R. C. **Avaliação em Matemática: Análise da Produção Escrita de Alunos da 4ª série do Ensino Fundamental em Questões Discursivas**. 2006 181 p. Londrina. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Londrina, 2006.

OLIVEIRA, R. S. **Estudo da Produção Escrita de Professores em Questões discursivas de Matemática**. 2005 176 p. Londrina. Londrina. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Londrina, 2006.

PEREGO, S. C. **Questões Abertas de Matemática: Um estudo de Registros Escritos**. 2005. 103 p. Londrina. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Departamento de Matemática.. Universidade Estadual de Londrina, 2006.

PEREGO, F. **O que a produção escrita pode revelar? Uma análise de questões de matemática**. 2006. 128 p. Londrina. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Departamento de Matemática.. Universidade Estadual de Londrina, 2006.

RADATZ, Hendrik. Error Anaalyses in Mathematics Education. **Journal for Research in Mathematics Education** v.10, n.2, p. 163-172, Maio, 1979.

RADATZ, Hendrik. Students' Errors in the Mathematics Learning Process: a Survey. **For the Learning of Mathematics.** v.1, n.1, julho, 1980.

RADFORD, L. The Roles of Geometry and Arithmetic in the development of Algebra: Historical Remarks from a Didact perspective. In: Nadine Bednarz, Carolyn Kieran, and Lesley Lee (Eds). **Approaches to Algebra:** Perspectives for Research and Teaching Boston: Kluwer, 1996. p. 39-54.

___________. The Historical Origens of Algebraic Thinking. In: R. Sutherland; T. Rojano; A. Bell; R.Lins. (Org.). **Perspectives on School Algebra**. Dordrecht: Kluwer, 2001, p. 13-36.

RICO, Luis. Errores en el aprendizaje de las matemáticas. In: KILPATRICK, J.; GOMES, P. e RICO, L. **Educación Matemática.** Colômbia: Grupo Editorial Iberoamericano, pp. 69-108, 1995.

ROJANO, T. The role of problems and problem solving in the development of algebra. In: Nadine Bednarz, Carolyn Kieran, and Lesley Lee (Eds). **Approaches to Algebra:** Perspectives for Research and Teaching Boston: Kluwer, 1996. p. 55-64.

ANEXO

ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA DE ALUNOS E PROFESSORES NAS PROVAS DE QUESTÕES ABERTAS DE MATEMÁTICA[1]

Regina Luzia Corio de Buriasco
coordenadora do projeto

O projeto é constituído de investigações a serem realizadas por docentes, alunos dos programas de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, de Educação, e, alunos da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina, articuladas em torno do eixo temático da Avaliação em Matemática tendo como foco dos estudos a Prova de Questões Abertas de Matemática da AVA 2002.

Pretende-se desenvolver um estudo qualitativo envolvendo a produção escrita de alunos e professores que ensinam matemática na resolução da Prova de Questões Abertas de Matemática da Avaliação Estadual do Rendimento Escolar do Paraná – AVA/2002.

Os registros que os alunos fazem ao resolver as questões dão valiosas informações sobre o modo como compreenderam e registraram suas idéias a respeito da situação apresentada. Tais informações fornecem rico material para o professor incorporar ao seu repertório no planejamento das aulas e para orientar suas escolhas didáticas, servindo como referência para conversar sobre matemática com o aluno.

Ao analisar uma produção escrita, mantém-se um diálogo com as respostas dadas, indaga-se sua configuração, procura-se encontrar quais as relações que as constituem. O erro, então, não é considerado como algo negativo e sim como um indício importante sobre os conhecimentos, processos de relação das informações, valores, presentes na relação do sujeito com o objeto do conhecimento, quase sempre invisíveis e ignorados na prática educativa escolar.

---

[1] Projeto financiado pela Fundação Araucária, sob protocolo no. 5998 do PROGRAMA DE APOIO À PESQUISA BÁSICA E APLICADA – Chamada de Projetos 06/2003. Modalidade B.

Pretende-se estudar tanto erros como acertos, pois “tal como o sucesso não é garantia absoluta da existência da competência pretendida, o erro não é a prova absoluta da sua ausência” (HADJI, 1994, p.123), por conseguinte neste estudo todas as respostas e as estratégias utilizadas por quem as obtém serão fontes de investigação.

No caso deste estudo, não se pretende apresentar ‘receitas’ sobre avaliação ou correção de provas escritas, mas sim conhecer mais e melhor como alunos e professores lidam com questões abertas de matemática. Dessa forma, buscará subsidiar a realização de uma das tarefas do professor que é a de fazer com que o erro, aos poucos se torne *observável* ao aluno para que este tome consciência daquele. Essa é uma das contribuições possíveis do presente projeto na tentativa de diminuir o fracasso escolar.

Objetivos Gerais

- Analisar a produção escrita de alunos e professores em questões abertas de matemática.
- Aprofundar o conhecimento dos processos de aprender e ensinar matemática, mediante um estudo da produção escrita de alunos e professores.

Material e Participantes

Para o desenvolvimento deste estudo serão utilizadas:

a) uma amostra retirada do universo das provas de Matemática realizadas pelos alunos de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio das escolas públicas que participaram da AVA-2002, atendendo ao sistema de referência estatístico definido para este estudo, de modo a que seja representativa do universo dos participantes da AVA- 2002. Por conseguinte, será levado em conta o total de alunos, séries, dependência administrativa (pública), a amostra aleatória previamente selecionada e turno em que os alunos estavam matriculados. O sistema de referência será estruturado tendo como base as 10 meso-regiões em função da localização geográfica dos municípios. Deste modo, serão selecionadas, por sorteio aleatório, dentro da cota de participação de cada meso-região, sendo 400 provas de 4ª série e 422 provas da 8ª série do Ensino Fundamental e 327 provas da 3ª série do Ensino Médio;

b) uma prova composta por todas as questões da prova estadual de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio a qual será resolvida por professores que ensinam matemática no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, da rede pública do estado do Paraná, e, por alunos do curso de Licenciatura em Matemática.

O presente estudo terá, então, como participantes alunos de escolas públicas paranaenses que realizaram a AVA/2002; alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL; alunos que cursaram, em 2002, a 4ª. série do Ensino Fundamental numa escola municipal de Cambé; professores que ensinam matemática no Ensino Fundamental e Médio em escolas públicas na região de Londrina.

Indicadores previstos para a análise

Reafirmando que um dos propósitos principais é o de estimar a proficiência matemática examinando, atentamente, toda produção escrita na busca de indícios dos modos e estratégias utilizados na resolução de cada questão, e, devido à natureza da prova, os registros escritos dos alunos e professores serão separados inicialmente em três blocos - "resolve adequadamente a questão" (crédito completo), "resolve parcialmente a questão"(crédito parcial) e "não resolve a questão" (nenhum crédito).

Há duas razões para isto: levar em consideração o grau de compreensão demonstrado pelo aluno/professor na interpretação do enunciado da questão e em sua resolução, sempre, tendo como objetivo identificar o que ele já sabe e o que está a caminho de saber, para que, posteriormente, possa se esclarecer aos professores a existência de respostas que podem receber "crédito completo" mesmo não sendo aquelas 'perfeitas' de acordo com o modelo por eles conhecido.

Relevância Estimada do Projeto

Com relação a esta investigação espera-se que:

- a tradução das descobertas geradas possa contribuir nos programas de formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática, bem como para a área de estudos sobre avaliação em matemática;

- seus resultados e as informações inventariadas possam se converter em subsídios para instrumentalizar a prática pedagógica do professor que ensina matemática;
- possa servir de mote para outros estudos, para a elaboração de material que subsidie a prática pedagógica do professor na busca de superar os obstáculos didáticos por eles encontrados.

Têm-se, ainda, como meta e indício de sua relevância que o presente estudo incorpore e gere produções acadêmicas, especificamente: dissertações de mestrado; trabalhos de iniciação científica; publicações de artigos e apresentações em eventos das áreas de Educação Matemática e de Educação em geral, por exemplo, em eventos como o ENEM, SIPEM, ANPED; ENDIPE e outros similares, nacionais e internacionais.

Até o momento

a)estão concluídas as seguintes dissertações:

PEREGO, Sibéle Cristina. *Questões Abertas de Matemática: um estudo de registros escritos*. [produção de alunos da Licenciatura em Matemática] 2005. Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Depto. de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina – Paraná. Orientadora: Regina Luzia Corio de Buriasco.

NAGY-SILVA, Marcia Cristina. *Do observável para o oculto: um estudo da produção escrita de alunos da 4ª. série em questões de matemática*. 2005. Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Depto. de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina – Paraná. Orientadora: Regina Luzia Corio de Buriasco.

SEGURA, Raquel de Oliveira. *Estudo da Produção Escrita de Professores em Questões Discursivas de Matemática*. 2005. Programa de Mestrado em Educação, Depto. de Educação, Universidade Estadual de Londrina, Londrina – Paraná. Orientadora: Regina Luzia Corio de Buriasco.

PEREGO, Franciele. *O que a Produção Escrita Pode Revelar? Uma análise de questões de matemática*. 2006. Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Depto. de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina – Paraná. Orientadora: Regina Luzia Corio de Buriasco.

NEGRÃO DE LIMA, Roseli Cristina. *Avaliação em Matemática: análise da produção escrita de alunos da 4ª. série do Ensino Fundamental em questões discursivas.* 2006. Programa de Mestrado em Educação, Depto. de Educação, Universidade Estadual de Londrina, Londrina – Paraná. Orientadora: Regina Luzia Corio de Buriasco.

ALVES, Rose Mary Fernandes. *Estudo da produção escrita de alunos do Ensino Médio em questões de matemática.* 2006. Programa de Mestrado em Educação, Depto. de Educação, Universidade Estadual de Londrina, Londrina – Paraná. Orientadora: Regina Luzia Corio de Buriasco.

b) estão em andamento as seguintes dissertações:

Jader Otavio Dalto - este mestrando está investigando a produção escrita de alunos encontrada na questão comum de uma amostra retirada do universo das Provas de Questões Abertas de Matemática da 8ª. série do Ensino Fundamental e 3ª. série do Ensino Médio, das escolas públicas paranaenses que participaram da AVA-2002, para compreender o sentido/significado que os alunos atribuem às informações contidas nos enunciados das questões e a utilização que fazem delas; inventariar e analisar os acertos e erros mais freqüentes e sua natureza; identificar as estratégias/procedimentos mais utilizados; verificar se a produção escrita destes alunos apresenta marcas de conteúdo matemático compatíveis com o seu nível de escolaridade e, identificar os possíveis fatores intervenientes.

c) está em andamento a investigação:

Magna Natalia Marin Pires - esta colaboradora está iniciando uma investigação sobre a produção escrita de alunos encontrada na questão comum de uma amostra retirada do universo das Provas de Questões Abertas de Matemática da 4ª. e 8ª. séries do Ensino Fundamental, das escolas públicas paranaenses que participaram da AVA-2002, para compreender o sentido/significado que os alunos atribuem às informações contidas nos enunciados das questões e a utilização que fazem delas; inventariar e analisar os acertos e erros mais freqüentes e sua natureza; identificar as estratégias/procedimentos mais utilizados; verificar se a produção escrita destes alunos apresenta marcas de conteúdo matemático compatíveis com o seu nível de escolaridade e, identificar os possíveis fatores intervenientes.

b) estão em andamento os seguintes trabalhos de Iniciação Científica:

Pamela Emanueli Alves Ferreira - com uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo, esta estudante da Licenciatura em Matemática está investigando a produção escrita de alunos contida na questão específica da Prova de Questões Abertas de Matemática da 8ª. série do Ensino Fundamental de uma amostra retirada pela SEED/PR do universo das provas realizadas pelos alunos das escolas públicas paranaenses que participaram da AVA-2002. Com este estudo pretende inventariar e analisar os acertos e erros mais freqüentes e sua natureza; identificar as estratégias/procedimentos mais utilizados.

Sérgio Luis Lima Filho - com uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo, este estudante da Licenciatura em Matemática está investigando a produção escrita de alunos contida na questão específica da Prova de Questões Abertas de Matemática da 3ª. série do Ensino Médio de uma amostra retirada pela SEED/PR do universo das provas realizadas pelos alunos das escolas públicas paranaenses que participaram da AVA-2002. Com este estudo pretende inventariar e analisar os acertos e erros mais freqüentes e sua natureza; identificar as estratégias/procedimentos mais utilizados.