

**"ANÁLISE DO COM PORTAMENTO  
EM SERVIÇO DE PILARES ESBELTOS  
DE CONCRETO ARMADO"**

João Augusto Lobo Pereira

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

---

Prof. Dr. Sebastião Salvador Real Pereira  
DEES - UFMG - (Orientador)

---

Prof. Dr. Gilson Queiroz  
DEES - UFMG

---

Prof. Dr. Ney Amorim Silva  
DEES - UFMG

---

Prof. Dr. Adriano de Paula e Silva  
DEMC - UFMG

Belo Horizonte, 15 de setembro de 2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

## **DEDICATÓRIA**

Este trabalho é dedicado à Sandra, pela compreensão,  
e a meus pais pelo incentivo.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao professor Sebastião Salvador Real Pereira pela paciência, orientação acadêmica e profissional, incentivo e compreensão

à minha esposa Sandra pelo carinho e companheirismo

ao engenheiro Márcio Maia Tepedino pelos ensinamentos transmitidos e confiança depositada

## SUMÁRIO

<b>1. Introdução .....</b>	<b>1</b>
<b>2. Revisão Bibliográfica .....</b>	<b>4</b>
<b>2.1. Dissertação de mestrado José Milton de Araújo – UFRGS – RGS</b>	
<b>1984 .....</b>	<b>4</b>
2.1.1. Considerações .....	4
2.1.2. Determinação do estado de deformações e dos esforços resistentes da seção .....	5
2.1.3. Caracterização de ruptura da seção .....	7
2.1.4. Cálculo dos deslocamentos (Estabilidade de Pilares) .....	8
2.1.5. Considerações de fluência e retração .....	8
2.1.6. Histórico do carregamento e análise no tempo .....	9
2.1.7. Dimensionamento .....	10
2.1.8. Resumo .....	11
<b>2.2. Dissertação de mestrado Nivaldo Benedito Ferreira Campos – USP- SC</b>	
<b>1994 .....</b>	<b>12</b>
2.2.1. Considerações .....	12
2.2.2. Equações de compatibilidade .....	12
2.2.3. Determinação do estado de deformações .....	14
2.2.4. Resumo .....	17
<b>2.3. Dissertação de mestrado Ismael Wilson Cadamuro Júnior – USPSC –</b>	
<b>1997 .....</b>	<b>18</b>
2.3.1. Considerações .....	18
2.3.2. Determinação dos esforços resistentes das seções .....	19
2.3.3. Determinação dos estados de deformações da seção .....	20
2.3.4. Análise de seções do ELU .....	22
2.3.5. Estabilidade de pilares .....	23

2.3.6. Resumo .....	26
<b>3. Reologia do Concreto .....</b>	<b>27</b>
3.1. Introdução .....	27
3.2. Fluência .....	27
3.3. Retração .....	29
<b>4. Análise do Comportamento de Seções Transversais Sob Flexão</b>	
<b>Plana .....</b>	<b>30</b>
4.1. Introdução .....	30
4.2. Determinação das Tensões Atuantes em Serviço .....	33
4.2.1. Tensões Atuantes em Elementos de Concreto .....	33
4.2.2. Tensões Atuantes de Elementos de Armadura Passiva .....	36
4.3. Determinação das Tensões Atuantes no Estado Limite Último .....	36
4.4. Deformações de Seção Transversal de Barras .....	37
4.5. Esforços Resistentes .....	38
4.6. Deformada de Barras .....	40
<b>5. Métodos Numéricos .....</b>	<b>44</b>
5.1. Introdução .....	44
5.2. Deformações de Seções Transversais de Concreto Submetidas à Flexão	
Plana .....	45
5.3. Deformações de Barras .....	46
5.4. Métodos de Minimização Utilizados .....	47
<b>6. Exemplos .....</b>	<b>52</b>
6.1. Introdução .....	52
6.2. Exemplo 1 .....	53
6.2.1. Resultados aos 28 dias .....	53
6.2.2. Resultado aos 10.000 dias .....	58
6.3. Exemplo 2 .....	63

6.3.1. Resultados aos 28 dias .....	63
6.3.2. Resultados aos 10.000 dias .....	68
<b>7. Análise dos Resultados e Conclusões .....</b>	<b>73</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Distribuição Linear de Deformações – JMA – UFRGS – 1984 .....	6
Figura 2.2	Distribuição Linear de Deformações – NBFC – USP – SC – 1994 ..	13
Figura 2.3	Distribuição Linear de Deformações – IWCJ – USP – SC – 1997 ...	22
Figura 4.1	Projeções das linhas 1a 4, utilizadas na definição do contorno da viga. Plano de interseção $P_z$ , utilizado na definição da seção transversal de contorno $S_z$ .....	31
Figura 4.2	Seção Transversal de contorno $S_z$ resultante da interseção do conjunto de linhas longitudinais com o plano $P_z$ , paralelo ao plano x-y .....	31
Figura 4.3	Discretização da seção $S_z$ , em 11 elementos de concreto .....	32
Figura 4.4	Deformações Diferidas Negativas .....	37
Figura 4.5	Deformações Diferidas Positivas .....	37
Figura 5.1	Método da seção Áurea .....	50
Figura 6.1	Pilar Exemplo 1 .....	53
Figura 6.2	Deslocamentos do Pilar aos 28 dias – Análise de 1ª Ordem e 2ª Ordem, em serviço – Exemplo 1 .....	57
Figura 6.3	Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias – Análises de 1ª Ordem e 2ª Ordem, em serviço – Exemplo 1 . .....	61
Figura 6.4	Deslocamentos do Pilar aos 28 e aos 10.000 dias – Análises de 1ª Ordem e 2ª Ordem, em serviço – Exemplo 1 .....	62
Figura 6.5	Pilar Exemplo 2 .....	63
Figura 6.6	Deslocamentos do Pilar aos 28 dias - Análises de 1ª Ordem e 2ª Ordem, em serviço – Exemplo 2 .....	67
Figura 6.7	Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias – Análises de 1ª Ordem e 2ª Ordem, em serviço – Exemplo 2 .....	71
Figura 6.8	Deslocamentos do Pilar aos 28 e 10.000 dias – Análises de 1ª Ordem e 2ª Ordem, em service – Exemplo 2 .....	72

## LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1	Deslocamentos do Pilar aos 28 dias – Análise de 1ª Ordem – Exemplo 1 .....	54
Tabela 6.2	Deslocamentos do Pilar aos 28 dias – 1ª Iteração – Análise de 2ª Ordem – Exemplo 1 .....	55
Tabela 6.3	Deslocamentos do Pilar aos 28 dias - 2ª Iteração – Análise de 2ª Ordem – Exemplo 1 .....	55
Tabela 6.4	Deslocamentos do Pilar aos 28 dias - 3ª Iteração – Análise de 2ª Ordem – Exemplo 1 .....	56
Tabela 6.5	Deslocamentos do Pilar aos 28 dias - 4ª Iteração – Análise de 2ª Ordem – Exemplo 1 .....	56
Tabela 6.6	Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias – Análise de 1ª Ordem – Exemplo 1 .....	58
Tabela 6.7	Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias - 1ª Iteração – Análise de 2ª Ordem – Exemplo 1 .....	59
Tabela 6.8	Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias - 2ª Iteração – Análise de 2ª Ordem – Exemplo 1 .....	59
Tabela 6.9	Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias - 3ª Iteração – Análise de 2ª Ordem – Exemplo 1 .....	60
Tabela 6.10	Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias - 4ª Iteração - Análise de 2ª Ordem – Exemplo 1 .....	60
Tabela 6.11	Deslocamentos do Pilar aos 28 dias – Análise de 1ª Ordem – Exemplo 2 .....	64
Tabela 6.12	Deslocamentos do Pilar aos 28 dias – 1ª Iteração – Análise de 2ª Ordem – Exemplo 2 .....	64
Tabela 6.13	Deslocamentos do Pilar aos 28 dias - 2ª Iteração – Análise de 2ª Ordem – Exemplo 2 .....	65
Tabela 6.14	Deslocamentos do Pilar aos 28 dias - 3ª Iteração – Análise de 2ª Ordem – Exemplo 2 .....	65
Tabela 6.15	Deslocamentos do Pilar aos 28 dias - 4ª Iteração – Análise de 2ª Ordem – Exemplo 2 .....	66

<b>Tabela 6.16</b>	<b>Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias – Análise de 1ª Ordem – Exemplo 2 .....</b>	<b>68</b>
<b>Tabela 6.17</b>	<b>Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias - 1ª Iteração – Análise de 2ª Ordem – Exemplo 2 .....</b>	<b>68</b>
<b>Tabela 6.18</b>	<b>Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias - 2ª Iteração – Análise de 2ª Ordem – Exemplo 2 .....</b>	<b>69</b>
<b>Tabela 6.19</b>	<b>Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias - 3ª Iteração – Análise de 2ª Ordem – Exemplo 2 .....</b>	<b>69</b>
<b>Tabela 6.20</b>	<b>Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias - 4ª Iteração - Análise de 2ª Ordem – Exemplo 2 .....</b>	<b>70</b>

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma formulação matemática capaz de descrever de maneira mais eficiente que os métodos convencionais o comportamento de pilares esbeltos de concreto armado em serviço, de seção geométrica qualquer e submetidos à flexão normal composta.

É feita a análise do comportamento em serviço do pilar para determinação das deformações diferidas que ocorrem em cada elemento de concreto que compõem as diversas seções transversais do pilar. Para tanto, a fluência será considerada um fenômeno linear.

Somente peças isostáticas serão consideradas.

São apresentados os gráficos de resultados, com o método proposto, para dois pilares estudados. Um deles com índice de esbeltez  $\lambda = 90$  e o outro com  $\lambda = 140$ .

A análise do pilar em estado limite último será elaborada em estudo posterior, onde se pretende analisar também os pilares hiperestáticos sujeitos a flexão normal composta.

## **ABSTRACT**

This work presents a mathematical formulation able to describe, in a more efficient way than the conventional methods, the behavior in service of slender reinforced concrete columns of any geometric section submitted to normal flexural forces.

An analysis of the columns behavior in service is developed to determine the long-term deformations that occur at each concrete element that form the several transversal sections of the column. For this, the creep is considered as a linear phenomenon.

Only isostatic columns are considered.

Graphics with results of two columns using the proposed method are presented. One of the graphics was made for the slenderness ratio of  $\lambda = 90$ , the other for  $\lambda = 140$ .

The column in the ultimate limit state will be analyzed in a posterior study, in which the hyperstatic columns submitted to normal flexural forces will be also analyzed.

# 1

## Introdução

O projeto de estruturas de concreto armado tem se apoiado na utilização de modelos geralmente simplistas, que simulem de maneira simplista o comportamento deste material. De maneira geral, no dimensionamento e verificação de pilares, os modelos utilizados consideram as deformações de fluência variando linearmente na seção transversal, além de não considerarem o histórico das solicitações para mais rigorosa determinação desta distribuição.

O comportamento estrutural de pilares esbeltos é, de certa forma, bastante complexo. Devido aos deslocamentos transversais, os momentos fletores solicitantes numa seção genérica do pilar deformado ficam aumentados em relação aos momentos atuantes no pilar considerado indeformado. Esses incrementos nos esforços solicitantes alteram a deformada do pilar que provoca novo acréscimo nos momentos fletores. Esse processo pode convergir para uma posição de equilíbrio ou levar o pilar à ruína. É a não linearidade geométrica.

Os materiais constituintes dos elementos estruturais de concreto armado, concreto e aço, não têm comportamento elástico linear, ou seja, as tensões não variam de maneira linear com as deformações. A essa não linearidade dos materiais que compõem o concreto armado, chama - se de não linearidade física.

É de grande complexidade trabalhar as duas não linearidades ao mesmo tempo, particularmente quando se consideram as propriedades reológicas do concreto. Isso só se torna possível através de uma análise não linear feita com o auxílio de um computador que utiliza rotinas de cálculos que combinam processos incrementais e iterativos.

Por ser de grande complexidade a análise de pilares do ponto de vista das não linearidades físicas e geométricas, as hipóteses e métodos de cálculo propostos na maioria das literaturas são bastante simplistas na simulação do comportamento desses elementos estruturais em serviço e estado limite último.

As hipóteses e métodos propostos nessas literaturas podem até simular de forma razoável o comportamento de pilares com índice de esbeltez não muito elevado. Mas, à medida que a esbeltez de um pilar cresce, os erros cometidos por esses métodos são maiores.

Esses métodos aproximados também se limitam a certas formas de seções transversais o que acaba por restringir o engenheiro na escolha do tipo de seção que, em muitos casos, não é a mais adequada para a estrutura em estudo.

O aspecto econômico também deve ser lembrado. Os métodos aproximados são, na maioria das vezes, muito a favor da segurança e, portanto, contra a economia.

Com os avanços da informática e a utilização cada vez maior dos computadores, torna-se possível estabelecer modelos mais realistas para descrever estes elementos estruturais. Faz-se necessário o estudo e desenvolvimento de uma formulação matemática consistente do ponto de vista da análise estrutural e que venha colaborar de

forma efetiva na solução do problema, tornando a análise de pilares mais econômica, confiável e abrangente.

O objetivo desse trabalho é o desenvolvimento de um modelo matemático capaz de simular de maneira rigorosa o comportamento de pilares esbeltos de concreto armado, de seção geométrica qualquer e submetidos à flexão normal composta no ELS (estado limite de serviço). Propõem-se também, fazendo-se uso deste modelo, o desenvolvimento e implementação de um sistema PAC – Projeto Assistido por Computador, aplicável às estruturas de pilares esbeltos. O modelo deverá possibilitar a determinação do estado de sollicitação, tensão e deformação no pilar em qualquer idade.

O pilar será discretizado longitudinalmente em “n” seções transversais. Cada seção transversal será composta por diversos conjuntos de elementos. Cada conjunto é caracterizado pelas propriedades geométricas dos elementos que o compõem e pelo tipo de material (concreto ou aço).

A relação tensão x deformação no concreto será aquela preconizada na NBR6118:2003, porém deslocada das deformações diferidas a que um determinado conjunto de elementos de concreto estará sujeita no instante considerado da análise. Assim sendo, cada conjunto de elementos de concreto terá sua própria relação tensão x deformação para cada instante particular da análise.

Já o aço seguirá a relação tensão x deformação preconizada pela NBR6118:2003, para esse material.

Todo o processo de cálculo descrito nessa dissertação será realizado para cada um dos diversos conjuntos de elementos que compõem a seção transversal do pilar em estudo.

# 2

## Revisão Bibliográfica

### 2.1. Dissertação de Mestrado de José Milton de Araújo – UFRGS - 1984

**Título: Dimensionamento de Pilares Esbeltos de Concreto Armado**

#### 2.1.1. Considerações

Em 1984, com objetivo de adquirir o título de mestre em engenharia civil, José Milton de Araújo apresentou à banca examinadora da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul o trabalho intitulado "Dimensionamento de Pilares Esbeltos de Concreto Armado".

O objetivo do trabalho era apresentar uma sistematização para o dimensionamento de pilares esbeltos sujeitos a cargas de curta e longa duração, incluindo-se as duas não

linearidades (física e geométrica) simultaneamente, além das deformações diferidas do concreto.

Foi descrito um processo iterativo para dimensionamento de pilares isostáticos, de seção transversal genérica, podendo variar ao longo do eixo do pilar e submetidos a um carregamento qualquer, desde que respeitando a condição de flexo-compressão normal. A não linearidade física é imposta através da utilização de diagramas não lineares tanto para o concreto quanto para o aço. A não linearidade geométrica é tratada por iterações sucessivas que buscam determinar os deslocamentos do pilar em diversos pontos ao longo do seu eixo.

Para o cálculo das deformações diferidas foi usada a formulação sugerida pelo CEB/78. Os diagramas tensão x deformação utilizados são aqueles preconizados na NBR6118/80.

Como o objetivo do trabalho era a dimensionamento de pilares, foram utilizados dois diagramas tensão x deformação para o concreto e dois também para o aço. O primeiro deles foi utilizado no cálculo das deformações e trata-se de um diagrama característico, ou seja, sem minoração de resistência dos materiais. O segundo é o diagrama de cálculo. É um diagrama de resistência minorado, utilizado na verificação à ruptura.

Vale ressaltar algumas considerações feitas:

- 1) Hipótese de seções planas;
- 2) Total aderência entre concreto e aço;
- 3) Desconsideração da resistência à tração do concreto;
- 4) Deformações de encurtamento e alongamento máximos, respectivamente, do concreto e do aço segundo a norma brasileira;
- 5) Validade da teoria de pequenos deslocamentos;

### **2.1.2. Determinação do Estado de Deformações e dos Esforços Resistentes da Seção**



$$M_d = \text{Parc. Conc. (Função de } \chi \text{ e } x) \times Z + \text{Parc. aço (função de } \chi \text{ e } x) \times (h-d_i) + N_d \times c^2; \quad (2.2)$$

Sendo:  $M_d$  = Momento solicitante de cálculo;

$N_d$  = Força Normal Solicitante de cálculo;

$Z$  = Distância da resultante de compressão até a borda da seção. É também função de  $\chi$  e  $x$ ;

$h$  = Altura da seção;

$d_i$  = Distância da armadura em questão até a borda da seção;

$c^2$  = Distância do ponto de aplicação da força normal até a borda da seção.

O problema passa a ser resolvido com a solução do sistema de duas incógnitas ( $\chi$  e  $x$ ) e duas equações não lineares disposto acima. A solução do sistema é, no entanto, realizada iterativamente (conforme descrito a seguir), uma vez que não se consegue uma expressão analítica para as incógnitas.

Conhecendo-se a força normal atuante e um valor pré-fixado (arbitrário) para  $\chi$ , através da equação I obtêm-se um valor para  $x$ . A determinação do valor dessa raiz  $x$  é conseguida com a utilização de um método numérico e o intervalo de busca desse método é tal que as deformações resultantes estejam dentro dos limites descritos na NBR6118/78 (10‰ para o aço e 3,5 ‰ ou 2‰ para o concreto). Com o valor de  $x$  obtido e a equação II calcula-se diretamente uma primeira aproximação para o valor do momento fletor  $M_d$ . Esse valor de  $M_s$  é comparado com o momento atuante  $M_d$ . Se forem diferentes, a não ser de uma certa tolerância, altera-se o valor de  $\chi$  e repete-se todo o processo até que se tenha  $M_d=M_s$ . Nessa fase tem-se a curvatura da seção que está submetida àquele par de esforços  $N_d, M_d$ .

### 2.1.3. Caracterização de Ruptura da Seção

Utilizando os diagramas tensão-deformação para o concreto e aço e constadando-se que o valor de  $x$  que resolve a equação I está fora do intervalo que limita as deformações aos limites pré-fixados pela NBR, conclui-se que a seção entrou em ruína.

#### **2.1.4. Cálculo de Deslocamentos em Pilares de Concreto Armado (Estabilidade de Pilares)**

Até aqui só foi incluída na análise a não linearidade física (dos materiais). Para inclusão da não linearidade geométrica, será necessário um processo iterativo.

Inicialmente o pilar deve ser discretizado ao longo de seu eixo em diversos elementos. Para cada elemento será resolvido o sistema de equações descrito acima. Com a solução desse sistema para cada elemento do pilar, obtêm-se a curvatura de diversas seções do pilar. Determinado esse gráfico das curvaturas, uma dupla integração fornece os deslocamentos laterais ao longo do eixo do pilar ( $\chi = d^2w/dx^2$ ). De posse desses deslocamentos laterais e da força normal, calculam-se os momentos de segunda ordem. Somam-se os momento de primeira ordem com esses últimos de segunda ordem e inicia-se novamente o processo até obter a convergência desejada. A instabilidade é detectada quando três iterações sucessivas mostram a divergência dos deslocamentos. Ou seja, a variação entre deslocamentos sucessivos passa a aumentar e não diminuir como o esperado.

Para determinação da carga de ruína do pilar, incrementos sucessivos de carga são dados no pilar. Para cada incremento, procede-se a análise iterativa acima até a convergência dos deslocamentos. Repete-se todo o processo até que, em determinado nível de carga ocorra a ruína do pilar por instabilidade (divergência dos deslocamentos) ou ruptura (deformações em alguma seção excedendo os limites de norma).

#### **2.1.5. Considerações de Fluência e Retração**

Para análise de deformações de fluência e retração, foram utilizadas as formulações do CEB/78

A consideração de fluência consiste simplesmente em se proceder a uma alteração no diagrama tensão-deformação do concreto através de uma transformação afim de razão  $\phi(t,t_0)$ .

A retração é incluída no algoritmo de análise, considerando-se que a deformação total do concreto é composta de uma parcela mecânica e da deformação específica de retração no instante em questão.

#### **2.1.6. Histórico do Carregamento e Análise no Tempo**

Em estruturas de concreto armado deve ser considerado que parte das cargas de serviço são de longa duração e parte de curta duração. As cargas de longa duração são, portanto, constituídas parte por cargas permanentes e parte por cargas acidentais. É sabido que apenas as cargas de longa duração geram deformações por fluência.

Como uma simplificação para o histórico de carregamento desse trabalho, é considerado que a parcela de longa duração do carregamento atua no pilar do início do carregamento ( $t_0$ ) até o instante considerado  $t$ . Nesse instante é que passam a atuar as cargas de curta duração.

Como a fluência, a retração e a própria resistência do concreto variam com o tempo, a análise dos deslocamentos do pilar é feita segundo o algoritmo a seguir:

Carrega-se o pilar com as cargas de longa duração no instante  $t_0$ . Calculam-se neste instante os deslocamentos de eixo do pilar e o momento fletor  $M_0$  utilizando o método iterativo já descrito anteriormente. A força normal atuante é  $N_0$ . Incrementa-se o tempo  $t_0$  de um valor  $\Delta t$  e calcula-se um novo valor para a resistência do concreto, coeficiente de fluência e retração. Com os dados obtidos (momento, curvatura, deslocamento) no final da iteração anterior, repete-se todo o processo agora com os valores de fluência e retração já corrigidos para o novo valor de  $t$ . No final do processo, novos valores de  $M$ ,  $\chi$  e  $N$  são determinados. Repete-se todo esse processo até que se tenha  $t = t_{\text{final}}$ . Da  $\chi$  obtida no final do processo é subtraído o valor da  $\chi_0$  da primeira iteração  $t_0$ , para se

obter as curvaturas diferidas totais. Esse processo é realizado em todas as seções do pilar.

Após a etapa anterior, o pilar é submetido ao carregamento total, porém sem serem levados em conta os efeitos da fluência e retração. Obtêm-se assim as curvaturas devido a esforços de curta duração. A essas curvaturas somam-se as curvaturas diferidas para se obter os deslocamentos finais do pilar.

### **2.1.7. Dimensionamento do Pilar**

Existe uma infinidade de soluções possíveis para uma peça sujeita a uma flexo-compressão. Porém só existe uma solução para a mesma peça caso a disposição da porcentagem de armadura da mesma já esteja definida. Daí a necessidade de se arbitrar de antemão a disposição e proporcionamento da armadura.

Para o dimensionamento de pilares são inicialmente fixados a disposição da armadura e o proporcionamento da mesma. Feito isto, é determinado o diagrama ruína-armadura para o pilar da seguinte maneira:

Arbitra-se  $A_s=0$ . Divide-se o carregamento de projeto por um número inteiro “n”. Inicia-se o processo iterativo com o par de esforços  $F_0/n$  e  $M_0/n$ . Ao final desse processo iterativo sabe-se se o pilar rompeu ou não. Caso não tenha rompido incrementa-se os esforços atuantes de  $F_0/n$  e  $M_0/n$  e repete-se o processo quantas vezes forem necessárias até que se tenha o par de esforços que causa a ruína daquele pilar com aquela armadura. Obtêm-se dessa forma o primeiro ponto da curva ruína-armadura.

Arbitra-se, então, um novo valor para  $A_s$  e repete-se todo o processo acima. Determina-se dessa forma um novo ponto do diagrama.

Determinado o diagrama ruína-armadura, o dimensionamento é direto.

O processo de dimensionamento descrito pelo autor desse trabalho consiste inicialmente em se determinar um intervalo de valores de  $A_s$  dentro do qual se encontre a solução. Determinado esse intervalo segue-se uma análise incremental como a descrita anteriormente. Um valor dentro do intervalo é testado e o par de esforços ( $F_d, M_d$ ) encontrado é comparado aos esforços de projeto. Caso a relação entre esses pares de esforços (encontrados e atuantes) não atenda a uma determinada tolerância, um novo valor para  $A_s$  deve ser adotado e toda a análise refeita. Esse procedimento é repetido até que a precisão requerida seja alcançada.

Para o dimensionamento do pilar para carga de longa duração, admitiu-se que o pilar entre em carga aos 28 dias. Com isso, a deformação total no instante  $t_0$  é dado por:

$$\varepsilon_{\text{tot}}(t, t_0) = \varepsilon_{ci} [1 + \phi(t, t_0)]. \text{ Adotou-se ainda que em } t = t_{\infty} \rightarrow \phi(t, t_0) = 2. \quad (2.3)$$

Para análise da retração, foi considerado um tempo  $t_0 = 7$  dias. Adotou-se ainda  $\varepsilon_{cs}(t_{\infty}, t_0) = 15E-05$ .

Como histórico de carga foi admitido que aos 28 dias o pilar fica submetido a todo o carregamento de serviço. Foi admitido ainda que toda a carga que atua no pilar é de longa duração.

### 2.1.8. Resumo

- Pilares isostáticos;
- Seção genérica;
- Flexão normal composta;
- Desconsideração da resistência à tração do concreto;
- Uma única etapa de concretagem;
- Inclusão da fluência através de um deslocamento afim de razão  $\phi(t, t_0)$  no diagrama tensão x deformação do concreto.
- Inclusão das deformações devidas à retração.

## **2.2. Dissertação de Mestrado de Nivaldo Benedito Ferreira Campos – USP – SC - 1994**

**Título: Contribuição ao Estudo de Pilares de Concreto Armado com Seção  
Qualquer Submetidos à Flexão Oblíqua**

### **2.2.1. Considerações**

Nesse trabalho foram desenvolvidas formulações válidas para barras com seção de forma qualquer, sujeitas à flexão composta oblíqua e utilizando-se o Método Geral para considerações da instabilidade. As não linearidades físicas e geométricas são levadas em consideração. Não foi incluída qualquer consideração sobre fluência e retração.

Para o estudo em análise, foram admitidas as seguintes hipóteses básicas:

- 1) Hipóteses de seções planas;
- 2) Manutenção da forma da seção;
- 3) Perfeita aderência entre os materiais concreto/aço;
- 4) Inexistência de tensões e deformações iniciais e residuais;

Nesse trabalho não é abordado o estado limite de utilização, trata-se apenas das situações em que se tem estado limite último com a ruína da seção.

Foram utilizados os diagramas tensão-deformação definidos na NBR-6118/80 para o aço e para o concreto.

### **2.2.2. Equação de Compatibilidade**

A hipótese de seções planas implica em uma distribuição linear de deformações ao longo da seção transversal. Assim é necessário o conhecimento de três parâmetros para a determinação completa do estado de deformações da seção (Para a determinação da equação de um plano são necessários três parâmetros). Os seguintes parâmetros são

utilizados  $\varepsilon_{c1}$  (Máxima deformação de encurtamento ou mínimo alongamento da seção),  $\theta$  (Inclinação da linha neutra) e  $1/r(\theta)$  (Curvatura da seção).

A curvatura  $1/r$  de uma seção qualquer, admitindo-se hipótese de seções planas, pode ser escrita como sendo a razão entre a diferença da deformação da fibra mais comprimida e a mais alongada ou menos comprimida e a distância  $d(\theta)$  entre elas ( $1/r = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/d(\theta)$ ). De posse da curvatura, é possível obter a deformação em qualquer ponto da seção uma vez que  $\varepsilon = (v - v_{\max} + x) \cdot 1/r$ .

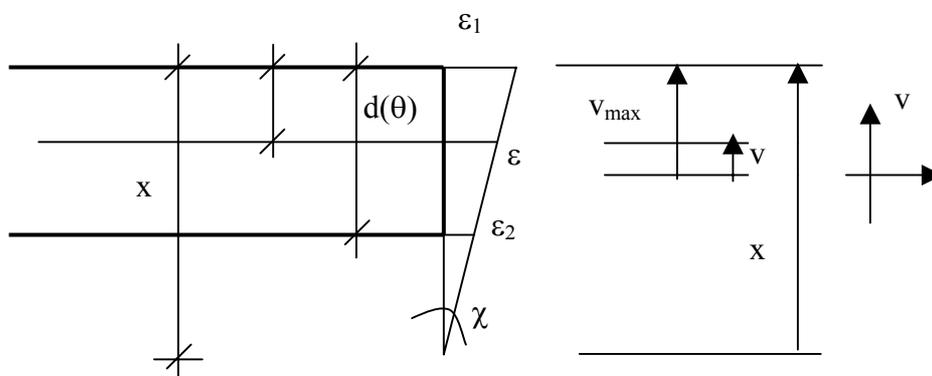


Fig. 2.2 – Distribuição Linear de Deformações – NBFC – USP – SC – 1994

Sendo  $v$  a ordenada do ponto em questão,  $v_{\max}$  a ordenada da fibra mais comprimida ou menos tracionada e  $x$  a distância da fibra mais comprimida ou menos tracionada em relação à LN. Definindo-se os parâmetros  $\beta_v$ ,  $\beta_{v_{\max}}$  e  $\beta_x$  como sendo  $v/d(\theta)$ ,  $v_{\max}/d(\theta)$  e  $x/d(\theta)$ , respectivamente, a equação de  $\varepsilon$  pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\varepsilon = d(\theta) \cdot (\beta_v - \beta_{v_{\max}} + \beta_x) \cdot 1/r. \quad (2.4)$$

Como o trabalho foi desenvolvido para análise no ELU, o parâmetro  $\beta_x$  foi limitado de tal modo que as deformações obtidas não ultrapassassem os limites, que caracterizam ELU, preconizados na norma. Assim,  $\beta_x$  fica sendo, segundo Paula (1989):

No mínimo:

$$\beta_x = 1 - 0,01 / (d(\theta)/r) \text{ limitado pela deformação máxima no aço de } 10\%,$$

No máximo:

$\beta_x = 0,0035 / (d(\theta)/r)$  limitado pela máxima deformação no concreto de 3,5‰,  
ou

$\beta_x = 0,002 / (d(\theta)/r) + (3/7) / (h(\theta) / d(\theta))$  limitado pela máxima deformação no concreto, a  $3/7 h$ , de 2‰.

Com as deformações obtidas pela equação acima e os diagramas Tensão x Deformação dos materiais, pode-se obter as tensões que atuam em cada elemento.

Os esforços atuantes equilibram-se aos resistentes e, assim, são válidas as equações de equilíbrio abaixo relacionadas:

$$N_u = \iint_{Acc} \sigma_{cd} \cdot dx dy + \sum A_{si} \cdot \sigma_{sid}; \quad (2.5)$$

$$M_{xu} = - (\iint_{Acc} \sigma_{cd} \cdot y \cdot dx dy + \sum A_{si} \cdot \sigma_{sid} \cdot y_{si}); \quad (2.6)$$

$$M_{yu} = - (\iint_{Acc} \sigma_{cd} \cdot x \cdot dx dy + \sum A_{si} \cdot \sigma_{sid} \cdot x_{si}); \quad (2.7)$$

O trabalho se resume à determinação de um estado de deformações para uma seção em estudo, a partir do qual se obtêm o estado de tensões e respectivos esforços resistentes.

Para determinação da parcela de esforços resistida pelo concreto é necessária a resolução das integrais acima descritas. A solução destas integrais é aqui obtida transformando-se as integrais de superfície que se estendem sobre a área da seção, em integrais curvilíneas, estendidas de seu contorno, suposto poligonal, através da aplicação do teorema de Green.

### 2.2.3. Determinação do Estado de Deformações

Dado o terno de esforços ( $N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ), determinar o estado de deformações ( $\theta$ ,  $\beta$ ,  $1/r$ ) que equilibra o sistema. Para a obtenção desse estado é utilizado um processo iterativo.

#### 2.2.3.1. Processo Iterativo para Equilibrar a Força Normal Atuante Resistente

Inicialmente adota-se um par  $(\theta, 1/r)$  para o qual é obtido o valor de  $\beta_x$  que equilibra as normais (atuante e resistente).

Com os limites máximo( $\beta_{xs}$ ) e mínimo( $\beta_{xi}$ ) de  $\beta_x$ , delimitados por norma, e a equação 1) descrita na página anterior, obtêm-se dois valores para força normal. Um limite superior ( $N_{sup}$ ) e um limite inferior ( $N_{inf}$ ). A força normal atuante deve estar dentro da faixa delimitada por esses dois valores de N. Caso contrário a seção estará rompida e um novo par  $(\theta, 1/r)$  deve ser adotado.

Caso o valor da força atuante esteja bem próximo ao valor de um dos dois limites, a não ser de uma tolerância pré-fixada, fim do processo.

No entanto, se a força obtida se distanciar de um valor acima da tolerância dos valores de  $N_{sup}$  ou  $N_{inf}$ , calcula-se um novo valor para  $\beta_x$ , interpolando-se linearmente os valores de  $\beta_{xi}$ ,  $\beta_{xs}$ , assim:

$$\beta_x = \{[(N_{atuante} - N_{inf}) \cdot (\beta_{xs} - \beta_{xi})] / (N_{sup} - N_{inf})\} + \beta_{xi} \quad (2.8)$$

Para esse novo valor de  $\beta_x$  repete-se todo o processo. A cada iteração dessa, substitui-se convenientemente  $N_{sup}$  ou  $N_{inf}$  pelo valor de N calculado após a interpolação de  $\beta_x$ . O valor de  $\beta_{xi}$  ou  $\beta_{xs}$  também deve ser substituído pelo  $\beta_x$  calculado após a interpolação.

Para cada valor de N calculado deve-se verificar sua “proximidade” com os esforços atuantes. Caso essa “proximidade” seja menor que a tolerância pré-fixada, calcula-se o momento resistente e fim do processo. Caso contrário interpola-se novamente  $\beta_x$  e retoma-se o processo deste ponto em diante.

#### 2.2.3.2. Processo Iterativo para Determinação do Estado de Deformações da Seção

Considera-se para essa verificação que:  $|M_u| = [(M_{xu})^2 + (M_{yu})^2]^{0,5}$  e  $|M_d| = [(M_{xd})^2 + (M_{yd})^2]^{0,5}$ .

$M_u$  = Resultante dos momentos resistentes;

$M_d$  = Resultante dos momentos atuantes;

Sendo  $\alpha$  o valor do ângulo formado entre  $|M_u|$  e  $|M_d|$ , num sistema de coordenadas  $M_x$  x  $M_y$ , o problema resume-se em buscar a igualdade de  $|M_u|$  e  $|M_d|$  e fazer  $\alpha$  igual a zero.

O valor de  $\alpha$  é definido como sendo uma função do 2º grau da inclinação  $\theta$  da linha neutra:  $\alpha = 0 \rightarrow \cos(\alpha) = 1 \rightarrow f_\alpha = 1 - \cos(\alpha) \rightarrow f_\alpha = f(\theta) \rightarrow f_\alpha = A.\theta^2 + B.\theta + C$ . Para se determinar A, B e C, três valores de  $\theta$  e  $f(\theta)$  devem ser conhecidos.

Apresenta-se, a seguir, um algoritmo, segundo PAULA (1988), para resolução do problema exposto acima:

Adotam-se, inicialmente, três valores quaisquer para  $\theta$ . Aconselha-se  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_2 = 120^\circ$  e  $\theta_3 = 240^\circ$ . Para cada um desses valores procura-se determinar a curvatura capaz de produzir o equilíbrio dos esforços atuantes e resistentes.

Com o valor assumido para  $\theta$  e adotando-se  $(1/r)_1 = 0$  (curvatura mínima adimensional), tem-se o primeiro par  $(\theta, 1/r)$ . Com esse par de valores e o procedimento descrito no item imediatamente superior a esse, obtêm-se o esforço resistente N1, que equilibra a normal atuante. Calcula-se um momento resistente M1 da seção em análise.

Adota-se agora  $(1/r)_2 = 0,0135 / d$  (curvatura máxima adimensional considerando a deformação máxima no aço e no concreto acontecendo ao mesmo tempo) e o mesmo valor de  $\theta$ . Repete-se o procedimento do item anterior e obtêm-se o esforço resistente N2, que equilibra a normal atuante, e um momento resistente M2 da seção em análise.

Caso com o valor da curvatura  $(1/r)_2$  o esforço normal atuante não seja equilibrado, um novo valor para  $(1/r)_2$  é determinado da seguinte forma:

$$(1/r)_2 = (1/r)_1 / 2 + (1/r)_2 / 2 \quad (2.9)$$

Para esse novo valor de  $(1/r)_2$  repete-se todo o processo até que se consiga equilibrar  $N_{atua}$  com  $N_{resiste}$ . Calcula-se o valor do  $M$  resistente

Interpolam-se, então, os valores  $(1/r)_1$ ,  $M_1$ ,  $(1/r)_2$  e  $M_2$ , juntamente com o momento fletor  $M$ , atuante na seção, e obtém-se um novo valor para  $(1/r)_2$ . Com esse novo valor de  $(1/r)_2$  calcula-se um novo valor de  $M$  resistente. Repete-se esse processo até que se tenha  $M_{resiste} = M_{atua}$ .

Com o valor do momento obtido, calcula-se o valor de  $f_\alpha$ . Caso esse valor seja zero, o estado de deformações da seção está definido e interrompe-se o processo. Caso contrário, para cada um dos três valores de  $\theta$  descrito inicialmente, repete-se todo o processo obtendo-se, assim, três valores para  $f_\alpha$ .

Com os três pares  $(f(\alpha), \theta)$  calcula-se os valores de  $A$ ,  $B$  e  $C$  da equação do 2º grau que descreve  $f_\alpha$ . Calcula-se, então, um novo valor para  $\theta_2$ , assim,  $\theta_2 = -B / 2.A$ .  $\theta_1$  passa ser o valor imediatamente inferior e  $\theta_3$  o valor imediatamente superior. Repete-se todo o processo descrito acima até que se tenha  $f(\alpha) = 0$ .

Para o cálculo das excentricidades de 2ª ordem procede-se da seguinte maneira: O pilar é discretizado em diversas seções. Para cada seção, determinam-se os esforços de primeira ordem atuantes. Com o procedimento descrito nos parágrafos anteriores obtém-se a curvatura para cada seção do pilar. Uma dupla integração dessas curvaturas nos leva à deformada do pilar; as excentricidades de 2ª ordem. De posse dessas excentricidades, recalculam-se os momentos em todas as seções e a nova deformada do pilar. Repete-se todo esse procedimento até que em duas iterações sucessivas a deformada numa mesma seção do pilar seja menor que uma tolerância pré-fixada. Encerra-se o procedimento.

#### 2.2.4. Resumo

- Pilares isostáticos;
- Seção genérica;

- Flexão oblíqua composta;
- Desconsideração da resistência à tração do concreto;
- Não inclusão das deformações devidas à fluência;
- Não inclusão das deformações devidas à retração;

### **2.3. Dissertação de Mestrado de Ismael Wilson Cadamuro Júnior – USP – SC - 1997**

**Título:** Dimensionamento de Pilares Esbeltos de Concreto Armado com seção qualquer solicitados por flexão composta oblíqua.

#### **2.3.1. Considerações**

Ismael Cadamuro, em 1997, elaborou um modelo matemático para análise de pilares esbeltos sujeitos à flexão composta oblíqua.

Assim como nos trabalhos descrito anteriormente, o pilar aqui analisado é de seção qualquer com disposição qualquer de armadura. As duas não linearidades (física e geométrica) são levadas em consideração na análise do mesmo. É abordada também a análise de seções isoladas no Estado Limite Último de ruptura. O efeito de longa duração é levado em consideração.

A análise da estabilidade da peça como um todo diz respeito a pilares isolados, onde se conhecem a priori os esforços de 1ª ordem. São considerados elementos isolados:

- 1) As peças isostáticas;
- 2) Os elementos das estruturas contraventadas;
- 3) Os elementos das estruturas de contraventamento de nós fixos;

Por se tratar de um problema que envolve conjuntamente as não linearidades físicas e geométricas, o processo para resolução é um processo iterativo e incremental em que se torna obrigatório, o uso do computador.

Para o efeito de carregamento de longa duração é utilizada a Teoria Linear de Fluência. Essa é uma teoria simplificada que admite que a função  $\Phi$  de fluência varia com a umidade relativa do ar, a espessura fictícia da peça, a idade do concreto, mas é independente da tensão aplicada. A NBR6118:2003 admite tal simplificação desde que o concreto esteja submetido a tensões menores que  $0,5 f_c$  quando do primeiro carregamento.

Foram admitidas as seguintes hipóteses básicas:

- 5) Hipóteses de seções planas;
- 6) Manutenção da forma da seção;
- 7) Perfeita aderência entre os materiais concreto/aço;
- 8) Inexistência de tensões e deformações iniciais e residuais;
- 9) Validade da teoria de pequenos deslocamentos;
- 10) Teoria Linear de Fluência ( $\varepsilon_{tot} = (1+\phi) \times \varepsilon_{c0}$ );
- 11) Seção transversal de forma poligonal qualquer (a área da armadura não é descontada da área de concreto);

Foram utilizados os diagramas tensão-deformação definidos na NB1/78 para o aço.

Já para o concreto, admite-se que o diagrama tensão-deformação seja formado por uma seqüência de polinômios de graus qualquer. Para consideração do carregamento de longa duração, tais polinômios devem ser corrigidos do fator  $(1+\phi)$ .

### **2.3.2. Determinação dos Esforços Resistentes da Seção**

Os esforços aos quais a seção é capaz de resistir, nada mais é que a soma da parcela de esforços resistidos pelo aço com a parcela de esforços resistida pelo concreto.

Com o conhecimento das deformações e do diagrama tensão-deformação do aço, são calculadas as tensões em cada elemento de aço e, conseqüentemente, a parcela dos esforços resistentes pertencentes ao aço.

Para determinação da parcela de esforços resistentes pertencente ao concreto, devem ser resolvidas as seguintes integrais:

$$N_{rc} = \int_{Acc} \sigma_c \cdot dA; \quad (2.10)$$

$$M_{ruc} = \int_{Acc} \sigma_c \cdot u \cdot dA; \quad (2.11)$$

$$M_{rvc} = \int_{Acc} \sigma_c \cdot v \cdot dA; \quad (2.12)$$

Na dissertação de José Milton, essas integrações foram aproximadas por um somatório, já que a seção transversal foi dividida em diversos elementos e a tensão em cada um deles considerada constante. Já na dissertação atual, o autor não concorda com tal discretização. Segundo relata, para obtenção de uma boa precisão é necessária uma grande quantidade de elementos o que torna o cálculo muito trabalhoso.

O método utilizado foi o Processo da poligonal com integração analítica. Segundo o autor esse processo é menos trabalhoso que o da discretização da seção, levando a um tempo menor de processamento.

### **2.3.3. Determinação do Estado de Deformação da Seção**

Não é um problema de solução direta uma vez que não se consegue explicitar analiticamente o estado de deformações em função dos esforços resistentes da seção. Lançou-se mão, então, do seguinte processo iterativo:

Inicialmente arbitra-se um estado de deformações. De posse deste calculam-se os esforços resistentes da seção. Comparam-se esses esforços obtidos com os esforços solicitantes. Caso não sejam iguais, a menos de uma tolerância previamente estabelecida, arbitra-se um novo valor do estado de deformações e repete-se todo o processo.

A hipótese de seções planas implica em uma distribuição linear de deformações ao longo da seção transversal. Assim é necessário o conhecimento de três parâmetros para a determinação completa do estado de deformações da seção. (Para a determinação da equação de um plano são necessários três parâmetros). Os seguintes parâmetros foram

utilizados  $\epsilon_{cg}$  (Deformação do CG da seção),  $\theta$  (Curvatura majorada) e  $\alpha$  (ângulo entre o eixo X e a direção da LN).

O método de iteração utilizado foi o indireto em que cada um dos parâmetros é arbitrado separadamente. Assim:

Algoritmo I:

$$3^{\circ} \left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ Arbitra-se } \theta; \\ A. \left\{ \begin{array}{l} \text{Arbitra-se } \alpha; \\ 2^{\circ} \left\{ \begin{array}{l} 1^{\circ} \left\{ \begin{array}{l} \text{i. Arbitra-se } \epsilon_{cg}; \\ \text{ii. Calcula-se } N_r, M_{rx}, M_{ry}; \\ \text{iii. Se } N_r < N_s \rightarrow \text{Volta-se ao passo i;} \end{array} \right. \\ B. \left\{ \begin{array}{l} \text{Se } \beta_r < \beta_s \rightarrow \text{Volta-se ao passo a; } (\beta_r = \arctang(M_y / M_x)); \end{array} \right. \end{array} \right. \\ 2) \text{ Se } |M_r| < |M_s| \rightarrow \text{Volta-se ao passo 1.} \end{array} \right.$$

1º) Conhecida a seção geométrica, a curvatura, a posição da linha neutra e a força normal solicitante, deve ser calculado o valor de  $\epsilon_{cg}$  que iguale o valor do esforço solicitante ao resistente. É importante salientar que nessa fase do problema não se está preocupado em limitar o valor de  $\epsilon_{cg}$ , podendo o mesmo adquirir valores acima dos valores limites de norma.

2º) Conhecida a seção geométrica, a curvatura majorada e a direção do momento solicitante  $\beta_s$ , calcula-se o valor de  $\alpha$  que faz com que a direção do momento resistente  $\beta_r$  se iguale a  $\beta_s$ . Nessa fase do problema a condição  $N_r = N_s$ , já foi atendida.

3º) Conhecida a seção geométrica e o módulo do momento solicitante  $|M_s|$ , calcula-se a curvatura majorada que faz com que  $|M_r| = |M_s|$ . Nessa fase do problema as condições  $N_r = N_s$  e  $\beta_r = \beta_s$ , já foram atendidas.

Repete-se o processo descrito acima quantas vezes forem necessárias

Para otimização dos processos, métodos numéricos são utilizados.

### 2.3.4. Análise de Seção no ELU

Trata-se da verificação e do dimensionamento de seções no ELU de ruptura. Como se trata de análise de seção isolada, são dados do problema os esforços solicitantes totais que agem na seção (soma dos esforços de primeira ordem, segunda ordem, acidentais, equivalentes à fluência, etc. ....).

Como se tratam de seções isoladas, os efeitos da fluência do concreto não aumentam os esforços solicitantes na seção, apenas os redistribui de maneira diferente entre o concreto e o aço. Para se considerar o efeito da fluência no pilar como um todo, aconselha-se utilizar o conceito de excentricidade equivalente de fluência, que é um processo aproximado.

A resolução desse problema é dada por um algoritmo semelhante ao algoritmo I, citado anteriormente, em que todos os parâmetros necessários para sua solução devem ser inicialmente arbitrados. No ELU isso passa a não ser necessário. Arbitrando-se  $\alpha$  e  $\varepsilon_{cg}$ , o valor de  $\theta$  pode ser calculado em função das deformações limites prescritas em norma para o ELU.

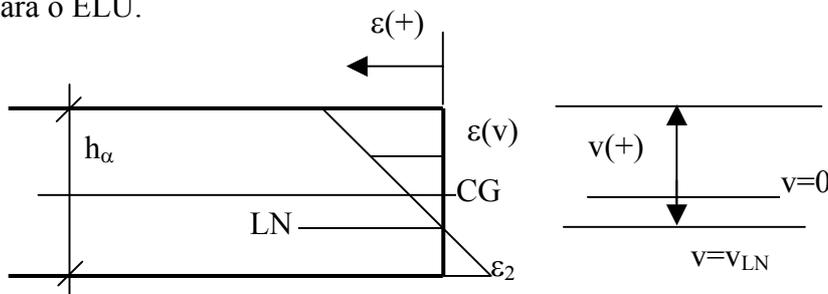


Fig. 2.3 – Distribuição Linear de Deformações – IWCIJ – USP – SC – 1997

$$\varepsilon = \varepsilon_{cg} + (\theta / h_{\alpha}) * v, \text{ sendo } \theta = 1000 * h_{\alpha} * (1/r); \quad (2.13)$$

Como no ELU a deformação  $\varepsilon$  é limitada,  $\varepsilon_{cg}$  fica em função de  $\theta$  e vice versa.

Assim sendo, o algoritmo adaptado passa a ser o seguinte:

Algoritmo II:

- 2° {
  - 1) Arbitra-se  $\alpha$  variando de 0 a 360°;
    - 1° {
      - a. Arbitra-se  $\epsilon_{cg}$ ;
        - i. Calcula-se  $\theta$  obedecendo-se às prescrições para ELU;
        - ii. Calcula-se  $N_r, M_{rx}, M_{ry}$ ;
        - iii. Se  $N_r < N_s \rightarrow$  Volta-se ao passo a;
      - b. Se  $\beta_r = \beta_s \rightarrow$  Calcula-se  $M_r$ ;
  - 2) Volta-se ao passo 1 até que se tenha arbitrado  $\alpha$  de 0 a 360°.

1°) Conhecida a seção geométrica, a força normal solicitante e a direção da LN ( $\alpha$ ), calculam-se  $\epsilon_{cg}$  e  $\theta$  que levam a  $N_r = N_s$ .

2°) Conhecida a força normal solicitante  $N_s$  e a direção do momento solicitante  $\beta_s$ , calcula-se a direção da LN ( $\alpha$ ) que leva a  $\beta_r = \beta_s$ . Nessa fase do problema, a condição  $N_r = N_s$  já foi atendida.

Variando-se  $\alpha$  de 0° a 360° constrói-se o diagrama de interação de uma determinada seção de concreto sujeita a uma força normal pré-estabelecida. Caso o momento solicitante  $M_s$  esteja dentro dessa curva, a seção não rompeu. Caso contrário a seção estará rompida.

Para otimização do processo deve-se lançar mão de algum método numérico para diminuir o número de iterações.

### 2.3.5. Estabilidade de Pilares

Somente são analisados pilares com as seguintes vinculações:

- Biapoiados;
- Rigidamente engastados na base;
- Elasticamente engastados na base.

### 2.3.5.1. Método do Equilíbrio

#### 2.3.5.1.1. Processo Exato

O pilar é discretizado em diversas seções. Para cada seção é calculada sua curvatura e por uma integral dupla dessas curvaturas, obtém-se a deformada do eixo do pilar. De posse dessa deformada, são calculados os momentos de 2º ordem nas referidas seções. A aproximação desse processo está no fato de a curvatura variar linearmente entre duas seções consecutivas. Assim, quanto mais discretizado estiver o pilar mais preciso será o cálculo.

Algoritmo III:

- 1) Calculam-se momentos fletores totais ( $1^{\text{a}} + 2^{\text{a}}$  ordem) atuantes em todas as seções do pilar;
- 2) Com esses momentos calcula-se  $\theta$  (curvatura majorada),  $\alpha$  (direção da LN) e  $h_s$  (altura da seção transversal na direção da LN) em todas as seções (Algoritmo I);
- 3) Se alguma seção transversal atingir ELU  $\rightarrow$  fim do processo  $\rightarrow$  Pilar Instável;
- 4) Calcula-se a curvatura de todas as seções  $1/r = \theta / 1000 \cdot h_s$ ;
- 5) Calculam-se os deslocamentos transversais de todas as seções (dupla integração);
- 6) Calculam-se os momentos de  $2^{\text{a}}$  ordem em todas as seções;
- 7) Se em todas as seções os deslocamentos calculados forem iguais (dentro de uma certa tolerância)  $\rightarrow$  fim do processo  $\rightarrow$  Pilar Estável;
- 8) Se o deslocamento em alguma seção divergir  $\rightarrow$  fim do processo  $\rightarrow$  Pilar Instável;
- 9) Voltar ao passo 1.

#### 2.3.5.1.2. Processo do Pilar Padrão

Nesse processo supõe-se que a deformada do pilar seja senoidal. Assim, a cada iteração, só se calcula o momento de 2ª ordem e a curvatura em uma única seção (seção de referência), o que torna o cálculo menos trabalhoso. Porém, esse processo somente é válido para pilares de seção, armadura e força normal constantes ao longo do seu eixo. Esse método é descrito e utilizado em diversas normas inclusive na brasileira.

O algoritmo utilizado para tal cálculo é o mesmo do processo exato (Algoritmo III), porém, no passo 5) somente os deslocamentos transversais da seção de referencia são calculados.

#### 2.3.5.2. Método Geral

O método do equilíbrio descrito acima tem por objetivo determinar apenas se o pilar é estável ou não, não informando nada a respeito da carga máxima a que o pilar pode estar sujeito. O método geral tem por objetivo determinar essa carga máxima do pilar.

O método geral nada mais é que a determinação do diagrama carga-deslocamento do pilar. Esse diagrama é traçado da seguinte maneira. Pequenos incrementos são feitos nas cargas atuantes no pilar (Cargas normais ou momentos fletores). Para cada incremento de carga, é utilizado ou o método exato ou o do pilar padrão e é verificado se o pilar rompe ou não. Esse processo é repetido até se obter a carga de ruptura do pilar.

No dimensionamento de pilares é também utilizado um processo iterativo. O algoritmo abaixo descreve sucintamente esse processo:

- 1) Arbitra-se  $A_s$  (armadura da seção);
- 2) Verifica-se se o pilar rompe ou não. Para isso usa-se um dos processos descritos anteriormente (Exato ou Pilar padrão);
- 3) Se rompe → Volta-se em 1.
- 4) Fim do processo.

### 2.3.6. Resumo

- Pilares isostáticos;
- Seção genérica;
- Flexão oblíqua composta;
- Desconsideração da resistência à tração do concreto;
- Inclusão da fluência através de um deslocamento afim de razão  $\phi(t,t_0)$  no diagrama tensão x deformação do concreto.
- Não inclusão das deformações devida à retração;

# 3

## Reologia do Concreto

### 3.1. Introdução

A reologia do concreto trata da variação de suas propriedades e deformações com o tempo. Em condições constantes definimos:

- Fluência é o acréscimo, com o tempo, das deformações devidas a tensão permanente;
- Retração é o encurtamento do concreto, não sujeito a sollicitação, durante o processo do endurecimento.

### 3.2. Fluência

Na faixa de tensões de serviço, as deformações de fluência devidas a incrementos de tensões aplicados em instantes diferentes, são consideradas aditivas, hipótese da superposição. Resulta daí que a deformação de fluência sob tensão constante é proporcional a essa tensão (Teoria Linear de Fluência).

Geralmente a fluência só é considerada quando a peça está submetida a solicitações de serviço, uma vez que não é comum uma estrutura ficar por muito tempo sob efeito de esforços últimos. No entanto, as deformações que a peça sofre por fluência podem aumentar substancialmente os efeitos de segunda ordem, influenciando, assim, no comportamento da mesma, inclusive no estado limite de serviço.

A deformação por fluência do concreto  $\varepsilon_{cc}(t, t_0)$  compõe-se de duas parcelas, uma rápida e outra lenta. A deformação rápida é totalmente irreversível, enquanto a lenta é parte irreversível e parte reversível.

Para uma tensão constante aplicada num tempo  $t_0$ , tem-se pela norma brasileira NBR-6118:2003:

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = ( \sigma_c(t_0) / E_{c28} ) \cdot \varphi(t, t_0) \quad (3.1)$$

onde

$\varphi(t, t_0)$  - coeficiente de fluência num instante “t” de um carregamento iniciado em “t<sub>0</sub>”.

$E_{c28}$  - módulo de elasticidade aos 28 dias

A deformação dependente da tensão,  $\varepsilon_c(t, t_0)$ , pode ser expressa por

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \sigma_c(t_0) \cdot [ 1 / E_c(t_0) + \varphi(t, t_0) / E_{c28} ]. \quad (3.2)$$

Quando há variação de tensão ao longo do intervalo, a deformação do concreto pode ser calculada:

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \sigma_c(t_0) \cdot [ 1 / E_c(t_0) + \varphi(t, t_0) / E_{c28} ] + \int [ \partial \sigma_c / \partial \tau \cdot ( 1 / E_{c\tau} + \varphi(\tau, t_0) / E_{c28} ) ] \cdot d\tau \quad (3.3)$$

### 3.3. Retração

Entre os instantes  $t_0$  e  $t$  o valor total da retração pode ser calculada, segundo a NBR6118:2003:

$$\varepsilon_{cs}(t,t_0) = \varepsilon_{cs\infty} \cdot [\beta_s(t) - \beta_s(t_0)] \quad (3.4)$$

onde

$\varepsilon_{cs\infty}$  - o coeficiente básico de retração

$t$  - a idade qualquer, em dias.

$t_0$  - a idade de início da retração, em dias.

$\beta_s(t)$  - o coeficiente relativo à retração no instante  $t$

$\beta_s(t_0)$  - o coeficiente relativo à retração no instante  $t_0$

Assim, quando há variação de tensão ao longo do intervalo, introduzida por ações externas ou agentes de diferentes propriedades reológicas, a deformação total no concreto pode ser calculada por:

$$\varepsilon_c(t) = \sigma_c(t_0) \cdot [1 / E_c(t_0) + \varphi(t,t_0) / E_{c28}] + \varepsilon_{cs}(t,t_0) + \int [\partial \sigma_c / \partial \tau \cdot (1 / E_{c\tau} + \varphi(\tau,t_0) / E_{c28})] \cdot d\tau \quad (3.5)$$

em que os três primeiros termos representam a deformação não impedida. E a integral, os efeitos da variação e tensão ocorridas no intervalo.

# 4

## **Análise do Comportamento de Seções Transversais Sob Flexão Plana**

### **4.1. Introdução**

A formulação apresentada considera a seção transversal discretizada em diversos conjuntos de elementos como dito anteriormente.

A geometria do pilar será definida através das projeções nos planos x-z e y-z das linhas longitudinais que definem seu contorno. O eixo z será sempre paralelo ao eixo do pilar.

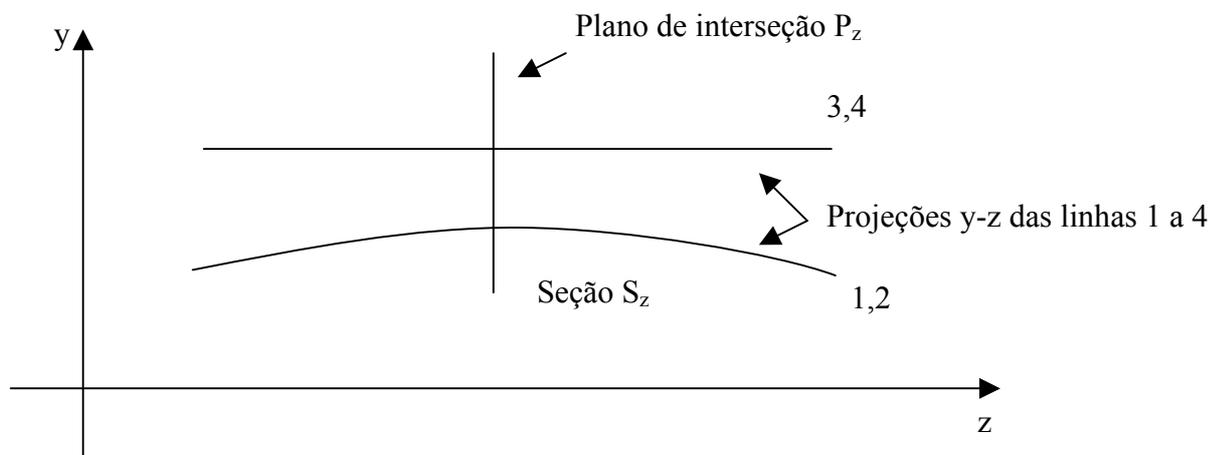


Fig. 4.1 – Projeções das linhas 1 a 4, utilizadas na definição do contorno da viga. Plano de interseção  $P_z$ , utilizado na definição da seção transversal de concreto  $S_z$ .

O pilar será discretizado em diversas seções transversais ao longo de seu eixo. Cada seção transversal será definida interceptando-se o conjunto de linhas por planos perpendiculares ao eixo  $z$ . (ver fig.4.1)

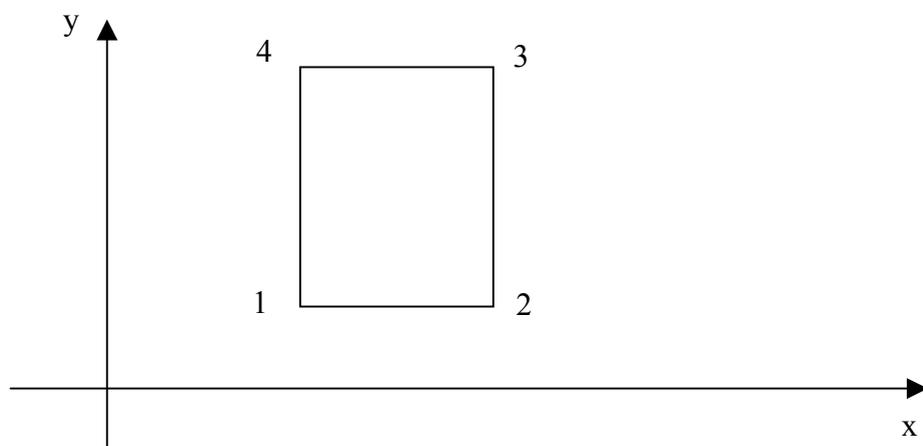


Fig. 4.2 – Seção transversal de concreto  $S_z$ , resultante da interseção do conjunto de linhas longitudinais com o plano  $P_z$ , paralelo ao plano  $x$ - $y$

Os pontos 1, 2, 3 e 4 do polígono acima são o resultado da interseção do plano  $P_z$  com o conjunto de linhas que definem a geometria do pilar. Os centros de gravidade de todos

os polígonos gerados deverão ter a mesma abscissa  $x_{cg}$  do centro de gravidade da seção geométrica.

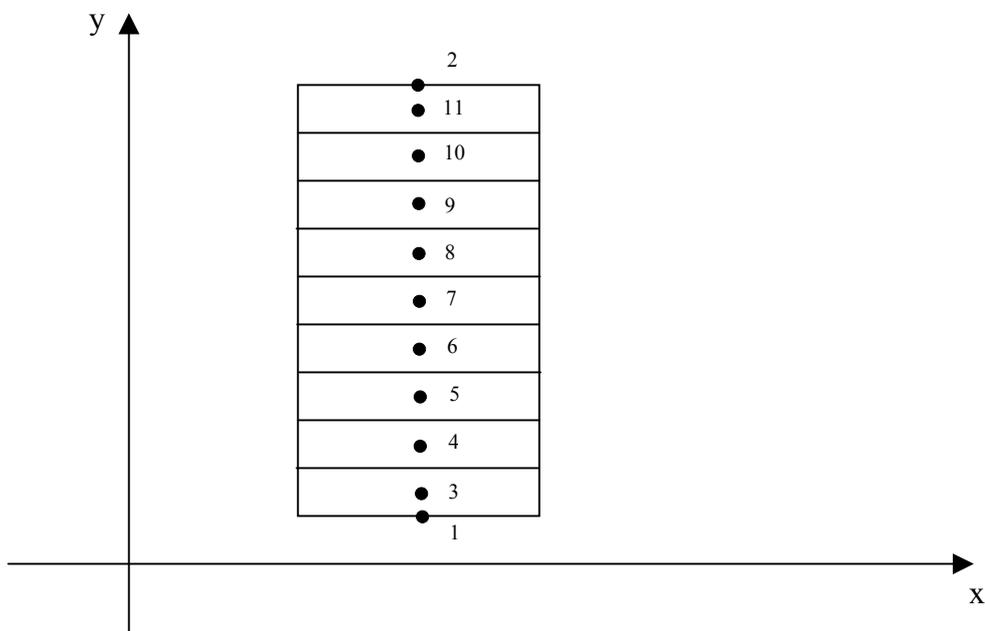


Fig. 4.3 – Discretização da seção  $S_z$ , em 11 elementos de concreto.

Como se trata de flexão normal composta com flexão em torno do eixo  $x$ , cada seção de concreto é discretizada paralelamente ao eixo  $x$  em  $n$  elementos. Os dois primeiros se localizam nas bordas da seção e têm área nula. Os demais  $n - 2$  elementos são de espessuras iguais, numerados de 3 a  $n$  com a numeração iniciando-se naquele de menor ordenada  $y$ .

Assim como a geometria da seção de concreto, as barras da armadura são definidas através de projeções nos planos  $x$ - $z$  e  $y$ - $z$ .

Para cada barra de armadura, é associado um elemento em cada seção transversal. Para cada elemento de armadura é associado um elemento de concreto, na mesma posição, com mesma área, porém negativa de maneira que no cômputo dos esforços resistentes será considerada a área líquida de concreto. Um conjunto de armadura passiva só pode ser envolvido por um único conjunto volumétrico de concreto.

## 4.2. Determinação das Tensões Atuantes em Serviço

“Conhecido o histórico de tensões e deformações até o instante  $t_u$ , o problema se resume em determinar este estado no instante  $t_{u+1}$ . Supondo conhecidas as solicitações externas atuantes neste instante, impõe-se um estado de deformações, buscando-se a igualdade entre esforços solicitantes e resistentes.

As equações para determinação das tensões atuantes em cada elemento, necessárias para avaliação dos esforços resistentes, são apresentadas a seguir. Permitem considerar elementos com históricos diversos, o que se traduz através dos valores do módulo de elasticidade, dos coeficientes de fluência e retração, do tempo final de cura, etc., característicos de cada conjunto de elementos” (PEREIRA, 1999, p.22).

Pelo fato de em condições de serviço as tensões e deformações nos pilares serem relativamente baixas será considerada, nessa etapa, linearidade física.

### 4.2.1. Tensões Atuantes em Elementos de Concreto

A relação funcional entre tensões e deformações para elementos de concreto, é dada por:

$$\varepsilon_c(t_u, t_0) = \int_{t_0}^{t_u} \left\{ \left[ 1 / E_c(\tau) + \varphi(t_u, \tau) / E_c \right] \cdot d\sigma(\tau) / d\tau \right\} \cdot d\tau + \varepsilon_{cso} \cdot \beta_s(t_u - t_s) \quad (4.1)$$

Onde

$\varepsilon_c(t_u, t_0)$  - deformação total na idade  $t_u$ , para início de carregamento começado na idade  $t_0$ .

$t_0$  - instante em que o estado de tensão na seção transversal começa a se alterar. Corresponde ao final de cura do concreto ou ao início de aplicação de solicitação externa.

$E_c(\tau)$  - módulo de elasticidade da idade  $\tau$ .

$E_c$  - módulo de elasticidade aos 28 dias.

$\varphi(t_u, \tau)$  - coeficientes de fluência

$\varepsilon_{cso}$  - coeficiente básico de retração

$t_s$  - instante em que termina a cura

$\beta_s(t_u - t_s)$  - coeficiente que descreve o desenvolvimento da retração com o tempo

Dividindo o intervalo de tempo em  $u$  subintervalos, podemos discretizar a equação acima, resultando:

$$\varepsilon_c(t_u, t_0) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^u \left\{ \frac{1}{E_c(t_j)} + \frac{1}{E_c(t_{j-1})} + \frac{[\varphi(t_u, t_j) + \varphi(t_u, t_{j-1})]}{E_c} \right\} \cdot \Delta\sigma_c(t_j, t_{j-1}) + \varepsilon_{cso} \cdot \beta_s(t_u - t_s) \quad (4.2)$$

Onde

$E_c(t_j)$  - módulo de elasticidade na idade  $t_j$

$\varphi(t_u, t_j)$  - coeficiente de fluência;

$\Delta\sigma_c(t_j, t_{j-1})$  - variação de tensão que ocorre entre os instantes  $t_{j-1}$  e  $t_j$

Para a correta avaliação da deformação total  $\varepsilon_c(t_u, t_0)$ , no caso de variação discreta de tensão no instante  $t_j$ , as idades  $t_j$  e  $t_{j-1}$  deverão ser iguais. Ou seja, quando houver uma variação brusca de tensão, deverá ser feita uma análise imediatamente antes dessa variação e uma imediatamente após essa variação. Ambas com a mesma idade ( $t_j = t_{j-1}$ ).

Analogamente, para o instante  $t_{u+1}$  tem-se

$$\varepsilon_c(t_{u+1}, t_0) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{u+1} \left\{ \frac{1}{E_c(t_j)} + \frac{1}{E_c(t_{j-1})} + \frac{[\varphi(t_{u+1}, t_j) + \varphi(t_{u+1}, t_{j-1})]}{E_c} \right\} \cdot \Delta\sigma_c(t_j, t_{j-1}) + \varepsilon_{cso} \cdot \beta_s(t_{u+1} - t_s) \quad (4.3)$$

que pode ser reescrita por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_c(t_{u+1}, t_0) = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^u \{ 1 / E_c(t_j) + 1 / E_c(t_{j-1}) + [\varphi(t_{u+1}, t_j) + \varphi(t_{u+1}, t_{j-1})] / E_c \} \cdot \\ \Delta\sigma_c(t_j, t_{j-1}) + & \frac{1}{2} \cdot \{ 1 / E_c(t_{u+1}) + 1 / E_c(t_u) + [\varphi(t_{u+1}, t_{u+1}) + \varphi(t_{u+1}, t_u)] / E_c \} \cdot \Delta\sigma_c(t_{u+1}, t_u) + \\ \varepsilon_{cso} \cdot \beta_s(t_{u+1} - t_s) & \end{aligned} \quad (4.4)$$

Na expressão acima, o único fator a determinar é o termo  $\Delta\sigma_c(t_{u+1}, t_u)$ , que pode ser explicitado por:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_c(t_u, t_{u+1}) = & \{ \varepsilon_c(t_{u+1}, t_0) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^u \{ 1 / E_c(t_j) + 1 / E_c(t_{j-1}) + [\varphi(t_{u+1}, t_j) + \varphi(t_{u+1}, t_{j-1})] \\ / E_c \} \cdot \Delta\sigma_c(t_j, t_{j-1}) - & \varepsilon_{cso} \cdot \beta_s(t_{u+1} - t_s) \} / \{ \frac{1}{2} \cdot \{ 1 / E_c(t_{u+1}) + 1 / E_c(t_u) + [\varphi(t_{u+1}, t_{u+1}) + \\ \varphi(t_{u+1}, t_u)] / E_c \} \} & \end{aligned} \quad (4.5)$$

Essa é a variação de tensão ocorrida no elemento entre os instantes  $t_u$  e  $t_{u+1}$ .

A tensão atuante no elemento no instante  $t_{u+1}$  será então

$$\sigma_c(t_{u+1}) = \sum_{j=1}^u \Delta\sigma_c(t_j, t_{j-1}), \quad (4.6)$$

Que é a soma de todas as variações de tensão ocorridas até o instante  $t_{u+1}$ .

Caso seja admitida fissuração da seção, vem:

$$\sigma_c(t_{u+1}) \leq f_{ctm}(t_{u+1}) \quad (4.7)$$

neste caso, se a tensão resultante  $\geq f_{ctm}(t_{u+1})$ , faz-se

$$\sigma_c(t_{u+1}) = 0$$

o que é equivalente a tomar

$$\Delta\sigma_c(t_{u+1}) = -\sum_{j=1}^u \Delta\sigma_c(t_j, t_{j-1}) \quad (4.8)$$

Neste caso, deve-se observar que a partir do instante que a tensão de tração supera o valor de  $f_{ctm}(t_{u+1})$ , o elemento não trabalha mais à tração.

A análise em serviço tem como objetivo a determinação das deformações diferidas em cada elemento de concreto, em todas as seções transversais, para cada idade de análise.

#### **4.2.2. Tensões Atuantes em Elementos de Armadura Passiva**

“A tensão nos elementos de armadura passiva pode ser calculada por:

$$\sigma_s(t_{u+1}, t_s) = E_s \cdot \varepsilon_s(t_{u+1}, t_s) \quad (4.9)$$

onde

$\sigma_s(t_{u+1}, t_s)$  tensão no elemento de armadura passiva, no instante  $t_{u+1}$ ,

$E_s$  módulo de elasticidade da armadura passiva;

$\varepsilon_s(t_{u+1}, t_s)$  deformação do elemento de armadura passiva no instante  $t_{u+1}$ ,

$t_s$  idade de montagem do elemento.” (PEREIRA, 1999, p.26).

#### **4.3. Determinação das Tensões Atuantes no Estado Limite Último**

Determinadas as deformações diferidas numa análise em serviço da estrutura, os diagramas tensão x deformação em ELU para cada elemento de concreto ficam determinados.

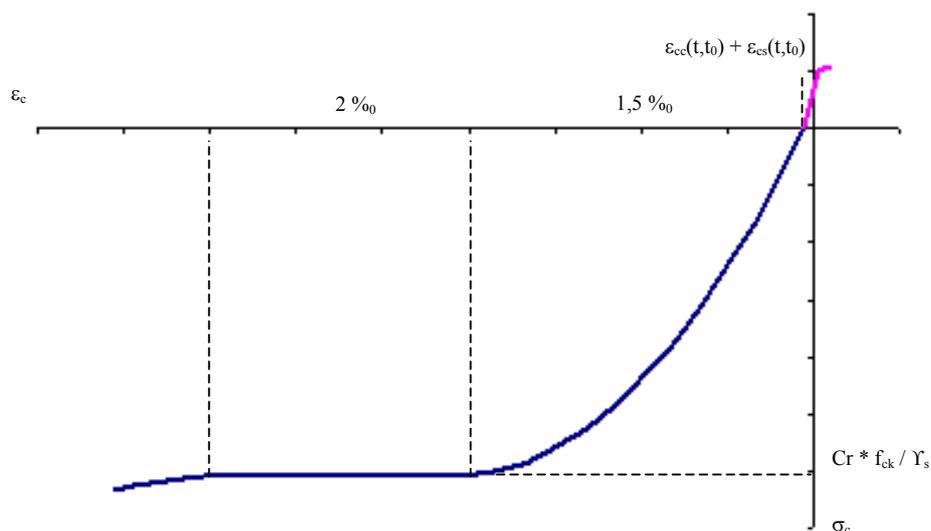


Fig. 4.4 - Deformações Diferidas Negativas

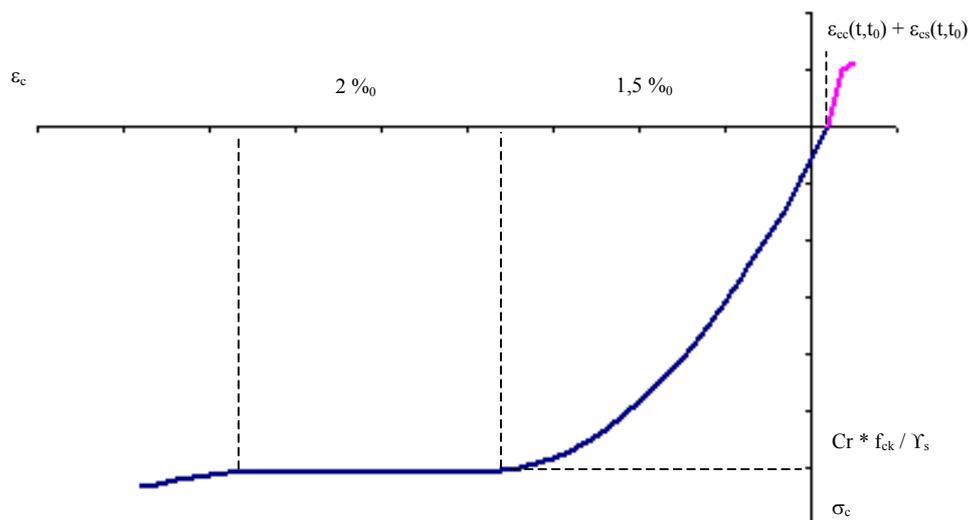


Fig. 4.5 - Deformações Diferidas Positivas

Conhecidas as solicitações externas em um instante  $t$  da análise, o estado de deformações último procurado é aquele que iguala os esforços solicitantes aos resistentes.

A equação do plano de deformações ( $a + by$ ) definida pelos parâmetros “a” e “b”, é obtida através de método iterativo, em que se busca a igualdade entre os esforços solicitantes e resistentes. Conhecido o estado de deformações da seção, as tensões serão

calculadas considerando-se as deformações diferidas calculadas na fase preliminar (análise no ELS).

#### 4.4. Deformações de Seções Transversais de Barras

A hipótese de seções planas permanecerem planas implica em uma distribuição linear de deformações ao longo da seção transversal. Assim é necessária a determinação de três parâmetros para o conhecimento do estado de deformações da seção.

O plano de deformações de uma determinada seção transversal é dado por:

$$\varepsilon = a + by + cx \quad (4.10)$$

O plano procurado é aquele que iguala os esforços resistentes aos solicitantes.

Na equação exposta acima, o parâmetro “a” se relaciona à força normal enquanto “b” e “c” estão relacionadas às curvaturas em torno de x e y, respectivamente.

Como o problema proposto é de flexão normal composta com essa flexão ocorrendo em torno do eixo x, a equação acima pode ser reescrita:

$$\varepsilon = a + by \quad (4.11)$$

e apenas os valores de “a” e “b” são necessários.

O processo para determinação das variáveis “a” e “b” é não linear o que torna indispensável a utilização de métodos numéricos iterativos, gerando soluções a cada passo. Isto acarreta algumas dificuldades, tais como a de obter uma solução de partida para início do processo. Outra dificuldade advém do uso do computador, exigindo cuidados, tal como escalonamento de variáveis, para reduzir os erros numéricos computacionais.

Nosso problema nada mais é que a determinação dos valores das variáveis “a” e “b” que compõem a equação do plano de deformações ( $\varepsilon = a + by$ ) de uma seção qualquer do pilar, num instante qualquer.

Os métodos numéricos que serão utilizados na determinação dos valores de “a” e “b” serão descritos posteriormente.

Definidos “a” e “b”, tem-se o valor da deformada de qualquer ponto da seção transversal num determinado instante  $t$  da análise.

#### 4.5. Esforços Resistentes

O estado de tensão de cada seção transversal  $k$ , em qualquer instante  $t_{u+1}$ , deverá ser compatível com os esforços solicitantes atuantes na seção transversal nesse instante.

Os esforços resistentes são calculados por:

$$N_{zT}(t_{u+1}, t_0) = \int_{A_C} \sigma_c(t_{u+1}, t_0) dA_c + \int_{A_S} \sigma_s(t_{u+1}, t_s) dA_s \quad (4.12)$$

$$M_{xT}(t_{u+1}, t_0) = \int_{A_C} \sigma_c(t_{u+1}, t_0) \cdot y_c \cdot dA_c + \int_{A_S} \sigma_s(t_{u+1}, t_s) \cdot y_s \cdot dA_s \quad (4.13)$$

Onde

$N_{zT}(t_{u+1}, t_0)$  força normal resistente,

$\sigma_c(t_{u+1}, t_0)$  tensão no concreto no instante  $t_{u+1}$ ,

$\sigma_s(t_{u+1}, t_s)$  tensão na armadura passiva no instante  $t_{u+1}$ ,

$A_c$  área de concreto na seção no instante  $t_{u+1}$ ,

$A_s$  área de armadura passiva na seção no instante  $t_{u+1}$ ,

$M_{xT}(t_{u+1}, t_0)$  momento fletor resistente na direção  $y$  no instante  $t_{u+1}$ ,

$y_c$  ordenada de um ponto da seção de concreto,

$y_s$  ordenada de um ponto da armadura passiva,

Discretizando as equações acima vem:

$$N_{zr}(t_{u+1}, t_0) = \sum_{i=1}^c \sigma_{c(i)}(t_{u+1}, t_0) A_{c(i)} + \sum_{i=1}^s \sigma_{s(i)}(t_{u+1}, t_s) A_{s(i)} \quad (4.14)$$

$$M_{xr}(t_{u+1}, t_0) = \sum_{i=1}^c \sigma_{c(i)}(t_{u+1}, t_0) y_{c(i)} A_{c(i)} + \sum_{i=1}^s \sigma_{s(i)}(t_{u+1}, t_s) y_{s(i)} A_{s(i)} \quad (4.15)$$

Onde

$\sigma_{c(i)}(t_{u+1}, t_0)$  tensão em elemento de concreto  $i$  no instante  $t_{u+1}$ ,

$\sigma_{s(i)}(t_{u+1}, t_s)$  tensão em elemento de armadura passiva  $i$  no instante  $t_{u+1}$ ,

$A_{c(i)}$  área do elemento de concreto  $i$ ,

$A_{s(i)}$  área do elemento de armadura passiva  $i$ ,

$y_{c(i)}$  ordenada do elemento de concreto  $i$ ,

$y_{s(i)}$  ordenada do elemento de armadura passiva  $i$ ,

os contadores  $c$  e  $s$  referem-se ao número de elementos de concreto e de barras de armadura passiva, respectivamente.

O estado de deformação da seção deve ser alterado até que se tenha a igualdade entre os esforços solicitantes e resistentes:

$$N_{zr} = N_z \quad (4.16)$$

$$M_{xr} = M_x \quad (4.17)$$

Onde

$N_z$  força normal solicitante

$M_x$  Momento fletor solicitante na direção de  $y$

## 4.6. Deformada de Barras

Para obtenção da deformada de uma barra, basta uma dupla integração das curvaturas das diversas seções transversais da mesma. Ou seja, para determinação da posição deslocada de uma barra, basta que se tenha em mãos as curvaturas das diversas seções transversais que compõem essa barra.

A equação diferencial que rege a lei de variação da deformada da barra, sendo  $z$  o eixo coordenado paralelo ao eixo da barra é dada por:

$$d^2v(t_{u+1}) / dz^2 = - 1 / r(t_{u+1}) \quad (4.18)$$

onde

$v(t_{u+1})$  – deslocamento linear na direção  $y$  no instante  $t_{u+1}$

$r(t_{u+1})$  – raio de curvatura no plano  $yz$  no instante  $t_{u+1}$

Integrando a equação acima vem:

$$\theta(t_{u+1}) = \theta_1(t_{u+1}) + \int_{Z_1}^z [ 1 / r(t_{u+1}) ] dz \quad (4.19)$$

onde

$\theta(t_{u+1})$  – rotação em relação ao eixo  $x$  no instante  $t_{u+1}$

$\theta_1(t_{u+1})$  – rotação em relação ao eixo  $x$ , na seção de abscissa  $z_1$ , no instante  $t_{u+1}$

De uma nova integração vem:

$$v(t_{u+1}) = v_1(t_{u+1}) + \theta_1(t_{u+1})(z-z_1) + \int_{Z_1}^z \theta(t_{u+1}) dz \quad (4.20)$$

onde

$v(t_{u+1})$  – deslocamento na direção  $y$  no instante  $t_{u+1}$ ,

$v_1(t_{u+1})$  – deslocamento na direção  $y$ , na seção de abscissa  $z_1$ , no instante  $t_{u+1}$

O deslocamento axial, de um ponto de ordenada  $y$ , numa seção de abscissa  $z$  pode ser calculado por:

$$w_y(t_{u+1}) = w_{y1}(t_{u+1}) + \int_{Z_1}^z \left\{ 1 / r(t_{u+1}) [ y - y_d(t_{u+1}) ] \right\} dz \quad (4.21)$$

onde

$w_y(t_{u+1})$  – deslocamento linear na direção z, no ponto de ordenada y, no instante  $t_{u+1}$

$w_i(t_{u+1})$  – deslocamento linear na direção z, no ponto de ordenada y, na seção de abscissa  $z_1$  no instante  $t_{u+1}$ .

Adota-se a Regra dos Trapézios para integração numérica das funções descritas acima, por permitir pontos desigualmente espaçados no domínio de integração e, também, porque pode haver descontinuidade na função que descreve a variação da curvatura.

Considerando as seções da barra numeradas sequencialmente a partir de 1 e discretizando as equações de rotação ( $\theta$ ), deslocamento horizontal ( $v$ ) e deslocamento axial ( $w$ ) dispostas acima, vem:

$$\theta_i(t_{u+1}) = \theta_1(t_{u+1}) + (1/2) \sum_{i=1}^{v-1} [ 1 / (r_{(i,d)}(t_{u+1})) + 1 / ( r_{(i+1,e)}(t_{u+1}) ) ] \Delta l_{i,i+1} \text{ para } 1 \leq i \leq v \quad (4.22)$$

onde

$\theta_i(t_{u+1})$  – rotação da seção i, no instante  $t_{u+1}$

$\theta_1(t_{u+1})$  – rotação da seção 1, de abscissa  $z_1$ , no instante  $t_{u+1}$

$1 / (r_{(i,d)}(t_{u+1}))$  – curvatura da seção i, à direita, no instante  $t_{u+1}$

$1 / (r_{(i,e)}(t_{u+1}))$  – curvatura da seção i, à esquerda, no instante  $t_{u+1}$

$\Delta l_{i,i+1}$  – distância z entre as seções i, i+1

v – número total de subdivisões da viga

$$v_i(t_{u+1}) = v_1(t_{u+1}) + \theta_1(t_{u+1})(z-z_1) + (1/2) \sum_{i=1}^{v-1} [ \theta_i(t_{u+1}) + \theta_{i+1}(t_{u+1}) ] \Delta l_{i,i+1} \text{ para } 1 \leq i \leq v \quad (4.23)$$

onde

$v_i(t_{u+1})$  deslocamento da seção i no instante  $t_{u+1}$ ,

$v_1(t_{u+1})$  deslocamento da seção 1, de abscissa  $z_1$ , no instante  $t_{u+1}$ ,

$$w_{yi}(t_{u+1}) = w_{y1}(t_{u+1}) + (1/2) \sum_{i=1}^{v-1} \{ [( y - y_{d,d}(t_{u+1}) ) / (r_{(i,d)}(t_{u+1})) ] + [ ( y - y_{d,e}(t_{u+1}) ) / (r_{(i+1,e)}(t_{u+1})) ] \} \Delta l_{i,i+1} \text{ para } 1 \leq i \leq v \quad (4.24)$$

onde

$w_y(t_{u+1})$  deslocamento da seção  $i$  no instante  $t_{u+1}$ ,

$w_{y1}(t_{u+1})$  deslocamento da seção 1, de abscissa  $z_1$ , no instante  $t_{u+1}$ ,

# 5

## Métodos Numéricos Utilizados

### 5.1. Introdução

A solução para análise de pilares se baseia na determinação das deformações nas diversas seções transversais ao longo do pilar e da deformada desse pilar.

Como as equações que representam os problemas acima são equações não lineares, está-se diante de problemas de PLN – Programação Não Linear, das quais as soluções são obtidas por métodos incrementais e iterativos, o que torna indispensável a utilização do computador.

Os Problemas de determinar o estado de deformação de seções transversais e de deformada de barras podem ser descritos por funções denominadas “Funções Objetivo”, definidas em um intervalo  $(+\infty, -\infty)$ , sem restrições impostas, cujo mínimo global é a solução do problema. Dentro de um domínio definido, essas funções só possuem um mínimo local que é, portanto, mínimo global.

## 5.2. Deformações de Seções Transversais de Concreto Submetidas à flexão Plana

Já foram descritas em capítulos anteriores as equações que descrevem o estado de deformações da seção transversal e seus esforços resistentes. O problema se resume na determinação de um estado de deformações que iguale os esforços resistentes com os solicitantes.

Define-se uma função chamada DNM como sendo:

$$DNM = | N_{zr} - N_z | + | M_{xr} - M_x | \quad (5.1)$$

A solução do problema se resume na determinação do valor mínimo dessa função. A existência de um único valor mínimo para DNM fica garantida desde que N e M sejam funções monótonas e estritamente crescentes ou decrescentes.

Para que N e M obedeçam às características descritas acima, assume-se que:

- a) A seção transversal é composta por pelo menos um conjunto de armadura passiva contendo pelo menos dois elementos, de área não nula, dispostos em posições diferentes em relação ao eixo y;
- b) Os diagramas tensão x deformação dos materiais sejam funções estritamente crescentes.

Como já dito anteriormente, em condições de serviço, tanto o concreto quanto o aço, têm comportamento elástico linear crescendo indefinidamente, verificando-se, assim, as condições impostas acima. Em outras palavras a relação momento x curvatura deve ser contínua.

No caso de em alguma iteração o concreto romper à tração, o diagrama momento x curvatura deixa de ser contínuo. Para todo momento que romper algum elemento de concreto, existirá uma descontinuidade no diagrama. Essas descontinuidades no

diagrama fazem com que existam mais de um estado de deformações que iguale os esforços atuantes aos resistentes. Ou seja, se um determinado valor do momento fletor rompe algum elemento de concreto, no momento da ruptura, há um salto na curvatura da seção que passa, com esse mesmo valor de momento fletor por diversas curvaturas diferentes. O que caracteriza diversos estados de deformações.

Para solução deste problema é considerado que a resistência tanto à tração quanto à compressão do concreto é ilimitada. Com isso, apenas um estado de deformações da seção será capaz de equilibrar esforços atuantes com resistentes. Determinado esse estado de deformações e a tensão atuante em cada elemento de concreto, é então feita uma comparação dessas tensões com aquelas que o concreto realmente é capaz de resistir. Os elementos de concreto que estiverem com tensão de tração maior que a capacidade de resistência do concreto, passarão a atuar com tensão nula e todo o processo é, então, reiniciado. Esse procedimento é repetido até que se tenha todos os elementos tracionados com tensão dentro dos limites de resistência. Satisfeita essa condição, a solução encontrada passa a ser a procurada desde que as deformações em cada elemento de concreto rompido não resultassem em tensões de tração abaixo das admissíveis para o concreto. Caso existam elementos que não satisfaçam essa condição, esses devem voltar a ser considerados resistentes à tração e todo o processo é repetido, até que todas as condições impostas acima sejam satisfeitas.

### **5.3. Deformações de Barras**

No caso de estruturas isostáticas, os esforços solicitantes podem ser determinados aplicando-se as equações de equilíbrio. O estado de deformações de cada seção transversal pode ser obtido minimizando-se DNM.

Já para estruturas hiperestáticas os esforços solicitantes devem ser obtidos através de processos iterativos o que torna a solução do problema bem mais complexa.

Para determinação das rotações, deslocamentos transversais e deslocamentos axiais das barras são utilizadas as equações (4.22), (4.23) e (4.24) já descritas anteriormente.

## 5.4. Métodos de Minimização Utilizados

“A programação não linear (PNL) caracteriza-se por não possuir um método geral de resolução de seus problemas, tal qual o método Simplex na programação linear. Seus métodos são ainda limitados e voltados para aplicações específicas. Não existem critérios absolutos para comparação entre vários algoritmos existentes. O que se faz é comparar algumas características não definidas precisamente, tais como: simplicidade computacional, tempo de máquina necessário para atingir um ponto de mínimo a partir de um ponto inicial qualquer, memória necessária, rapidez de convergência, sensibilidade a erros computacionais, etc. Torna-se com isto, uma área experimental de pesquisa e desenvolvimento” (PEREIRA, 1999, p.40).

O objetivo dos métodos numéricos aqui descritos é a busca com conseqüente determinação do valor da variável  $x$  que minimiza a função  $f(x)$

$$\min f(x), x \in R$$

Todos os métodos para resolução desse tipo de problema têm uma estrutura comum, como a representada a seguir:

```

início
  {inicialização}
  escolha um ponto inicial  $x^0 \in R$ 
   $k = 0$ ; {contador de iterações}
  {processo iterativo}
  enquanto “ $x^k$  não for desejável” faça
    {execute busca}
    “determine, por um processo de busca, o ponto  $x^{k+1}$  tal que  $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ ”.
  fim enquanto;
fim;
```

A escolha do ponto de inicialização do processo,  $x^0$ , é de suma importância já que influencia no número de iterações e na convergência dos dados. Sua escolha deve ser feita com conhecimento prévio do comportamento da função.

Em um processo de busca unidirecional, a busca por um ponto desejável se faz em uma determinada direção. A cada iteração, determina-se um ponto  $x^{k+1}$ , tal que  $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ . Em um processo deste tipo, está-se interessado em:

- (i) ou encontrar um ponto próximo ao ponto de mínimo, dentro de uma tolerância pré definida, devido à impossibilidade computacional de determinar o ponto de mínimo exato;
- (ii) ou encontrar um ponto desejável que simplesmente decresça bastante o valor da função, sem tentar minimizá-la.

Para os problemas aqui apresentados, interessa algoritmos do tipo (i).

Dois métodos de reduções sucessivas de intervalos serão aqui descritos.

O primeiro deles (Algoritmo cercar  $\lambda^*$ ) terá como objetivo cercar o ponto de mínimo  $\lambda^*$  construindo um intervalo  $[a,b]$  tal que  $\lambda^* \in [a,b]$ .

O segundo (Método da Seção Áurea) terá como objetivo reduzir o intervalo  $[a,b]$  até a precisão desejada.

### **Algoritmo 1 – Cercar $\lambda^*$**

Cercar  $\lambda^*$  a partir de  $x^k$  consiste em dar saltos na direção  $h$  enquanto a função  $g(\lambda) = f(x^k + \lambda h)$  decrescer. Assim que a função volta a crescer significa que passou-se por um ponto de mínimo  $\lambda$  naquela direção. Basta, então, fechar o intervalo  $[a,b]$  que contém aquele ponto  $\lambda$ .

```

“início
  {inicialização}
  a:= 0;
  b:= s; {s é o tamanho inicial do passo na direção h, s ≠ 0}
  calcule  $g(a) = g(0) = f(x^k)$ ;
  calcule  $g(b)$ ;
  NCF = 2; {intervalo de vezes em que o valor da função foi avaliado}
  {intervalo inicial definido para um salto inicial de tamanho s. Testar se a
  função decresce, caso positivo dar novo salto. Caso contrário, o intervalo
  [a,b] está definido}
  enquanto  $g(b) < g(a)$  faça
    a = b;
     $g(a) = g(b)$ ;
    b = 2b;
    calcule  $g(b)$ ;
    NCF1 = NCF1 + 1;
  fim enquanto;
  se  $NCF1 \leq 3$  então a = 0 senão a = a/2;
fim;” (PEREIRA, 1999, p.42)

```

### **Algoritmo 2 – Método da Seção Áurea**

O método da Seção Áurea procura a cada passo definir dois pontos internos ao intervalo  $[a,b]$ ,  $v$  e  $w$ . Testando o valor da função nestes pontos tem-se um dos dois casos indicados abaixo, reduzindo-se o intervalo  $[a,b]$  de  $([w,b]$  ou  $[a,v])$ .

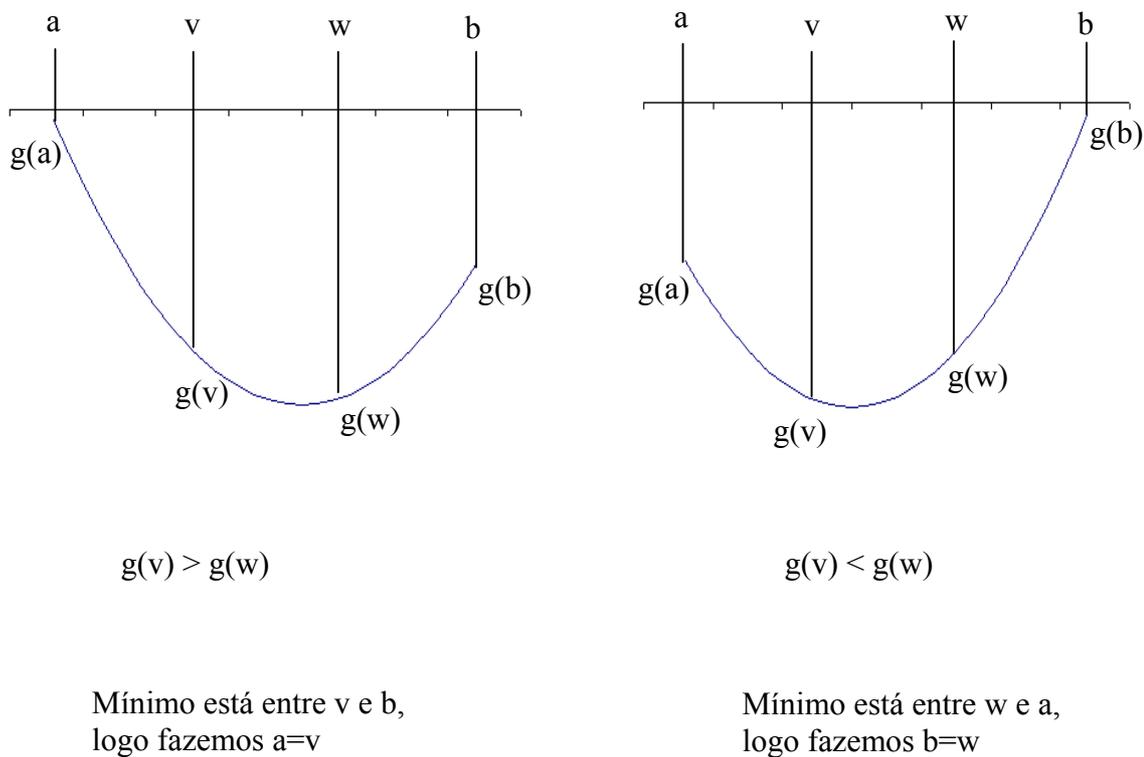


Fig. 5.1 – Método da seção Áurea

Pelo método da Seção Áurea o número de pontos internos (v, w) em que se divide o intervalo é infinito.

“início

{dados  $g:[0,\infty] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , função unimodal

$F = 0,618$  – seção áurea

$\xi$  precisão do intervalo  $[a,b]$

{inicialização}

“aplicar o algoritmo 1 (cercar  $\lambda$ ), determinando o intervalo  $[a,b]$  e NCF1”;

NCF2 := 0;

{verificar se o intervalo  $[a,b]$  atende a precisão  $\xi$ }

se  $(a-b) > \xi$  então

{montar segmento inicial avwb}

$v := b - F(b - a)$ ;  $w := a + F(b - a)$ ;

calcule  $g(v)$ ,  $g(w)$ ;

```

NCF2 := 2;
{reduzir o intervalo enquanto a precisão não for atendida}
enquanto  $0,618 (b - a) > \xi$  faça
  {reduzir o intervalo}
  se  $g(v) < g(w)$  então
     $b := w$ ;  $w := v$ ;  $g(w) := g(v)$ ;  $v := b - F(b - a)$ ;
    calcule  $g(v)$ ;
  senão
     $a := v$ ;  $v := w$ ;  $g(v) := g(w)$ ;  $w := a + F(b - a)$ ;
    calcule  $g(w)$ ;
  fim se;
  NCF2 := NCF2 + 1;
fim enquanto;
{última redução}
se  $g(v) < g(w)$  então  $b := w$  senão  $a := v$ ;
fim se;
{determinar  $\lambda^*$  e número de cálculos de funções}
 $\lambda^* := (a + b) / 2$ ;
NCF := NCF1 + NCF2;
fim;” (PEREIRA, 1999, p.48)

```

# 6

## Exemplos

### 6.1. Introdução

Neste capítulo serão apresentados dois exemplos numéricos para avaliação dos resultados e da eficiência do método matemático proposto.

Para os dois exemplos, o pilar é analisado na idade de 28 dias, idade na qual é considerado o início da atuação do carregamento permanente e aos 10.000 dias, idade correspondente a 30 anos. Nessa idade é considerado que as deformações diferidas já ocorreram na sua totalidade.

Os resultados para cada idade são apresentados em 5 tabelas e um gráfico. A primeira tabela mostra o resultado das deformações imediatas do pilar. As demais são as iterações feitas pelo programa até a convergência dos resultados numa análise de segunda ordem.

Com os resultados apresentados nas tabelas para cada idade, é plotado um gráfico para comparação dos resultados a cada iteração feita.

Num mesmo gráfico são plotados, ainda, os resultados aos 28 e aos 10.000 dias.

## 6.2. Exemplo 1

O exemplo 1 é o caso de um pilar em balanço com seção transversal (40x100) submetido ao carregamento permanente e armadura descritos abaixo. Trata-se de um pilar com  $\lambda = 90$ . A flexão se dá em torno do eixo “x”.

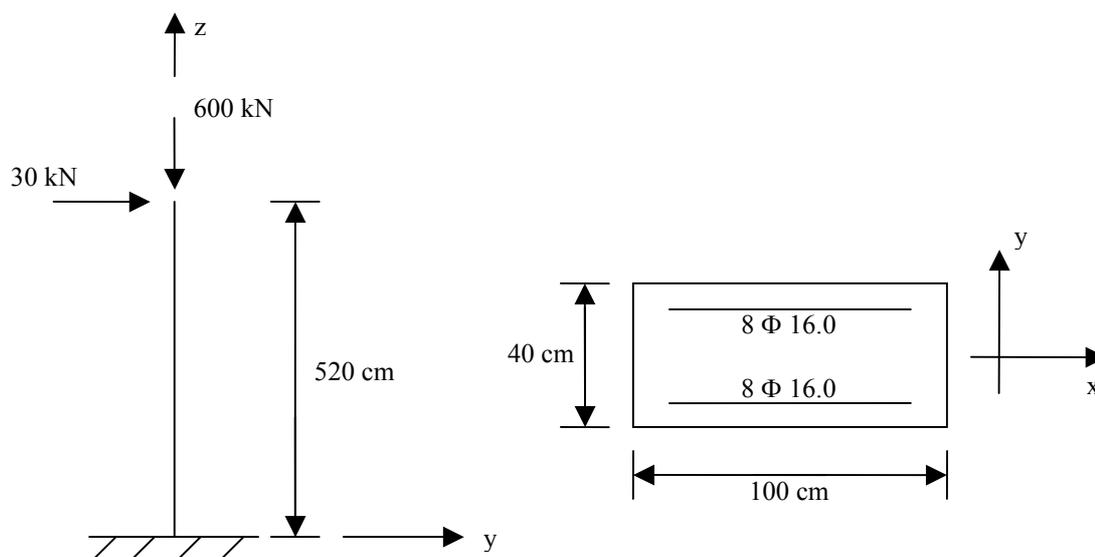


Fig. 6.1 – Pilar Exemplo 1

O pilar foi discretizado em dez segmentos ao longo de seu comprimento. Os resultados são apresentados em 11 pontos ao longo do seu eixo, à direita e à esquerda desses pontos, e também nas duas extremidades.

### 6.2.1. Resultados aos 28 dias:

A primeira coluna das tabelas contém a numeração das seções do pilar. A segunda indica a posição da seção ao longo do eixo do pilar. A terceira indica se o resultado é à direita ou esquerda da seção. A quarta e a quinta contém, respectivamente, aos deslocamentos transversais e axiais. E a sexta e última a rotação em cada seção.

Como foram obtidos os momentos de segunda ordem, é descrito quando da apresentação dos resultados aos 10.000 dias

	Deslocamentos do pilar - 1ª Ordem					
	28 dias					
	secao	z	E/D	uy	uz	rx
	cm		cm	cm	rad	
Deslocamentos devido a esforços de 1ª ordem	1	0	D	0.00	0.00	0.0000
	2	52	E	0.04	0.01	-0.0015
			D	0.04	0.01	-0.0015
	3	104	E	0.15	0.01	-0.0028
			D	0.15	0.01	-0.0028
	4	156	E	0.33	0.01	-0.0038
			D	0.33	0.01	-0.0038
	5	208	E	0.54	0.00	-0.0044
			D	0.54	0.00	-0.0044
	6	260	E	0.78	0.00	-0.0047
			D	0.78	0.00	-0.0047
7	312	E	1.03	-0.01	-0.0050	
		D	1.03	-0.01	-0.0050	
8	364	E	1.29	-0.02	-0.0052	
		D	1.29	-0.02	-0.0052	
9	416	E	1.57	-0.02	-0.0053	
		D	1.57	-0.02	-0.0053	
10	468	E	1.85	-0.03	-0.0054	
		D	1.85	-0.03	-0.0054	
11	520	E	2.13	-0.04	-0.0055	

Tabela 6.1 – Deslocamentos do Pilar aos 28 dias – Análise de 1ª Ordem – Exemplo 1

Deslocamentos na primeira iteração para análise de 2ª ordem	Deslocamentos do Pilar - 1ª Iteração - Análise de 2ª Ordem					
	28 dias					
	secao	z	E/D	uy	uz	rx
		cm		cm	cm	rad
1	0	D	0.00	0.00	0.0000	
2	52	E	0.06	0.01	-0.0022	
		D	0.06	0.01	-0.0022	
3	104	E	0.22	0.02	-0.0040	
		D	0.22	0.02	-0.0040	
4	156	E	0.47	0.03	-0.0056	
		D	0.47	0.03	-0.0056	
5	208	E	0.79	0.03	-0.0069	
		D	0.79	0.03	-0.0069	
6	260	E	1.17	0.03	-0.0077	
		D	1.17	0.03	-0.0077	
7	312	E	1.58	0.02	-0.0081	
		D	1.58	0.02	-0.0081	
8	364	E	2.01	0.01	-0.0083	
		D	2.01	0.01	-0.0083	
9	416	E	2.45	0.01	-0.0085	
		D	2.45	0.01	-0.0085	
10	468	E	2.89	0.00	-0.0087	
		D	2.89	0.00	-0.0087	
11	520	E	3.34	-0.01	-0.0087	

Tabela 6.2 – Deslocamentos do Pilar aos 28 dias – 1ª Iteração – Análise de 2ª Ordem -

Exemplo 1

Deslocamentos na segunda iteração para análise de 2ª ordem	Deslocamentos do Pilar - 2ª Iteração - Análise de 2ª Ordem					
	28 dias					
	secao	z	E/D	uy	uz	rx
		cm		cm	cm	rad
1	0	D	0.00	0.00	0.0000	
2	52	E	0.06	0.02	-0.0024	
		D	0.06	0.02	-0.0024	
3	104	E	0.24	0.03	-0.0045	
		D	0.24	0.03	-0.0045	
4	156	E	0.52	0.03	-0.0063	
		D	0.52	0.03	-0.0063	
5	208	E	0.88	0.04	-0.0077	
		D	0.88	0.04	-0.0077	
6	260	E	1.31	0.04	-0.0088	
		D	1.31	0.04	-0.0088	
7	312	E	1.78	0.03	-0.0093	
		D	1.78	0.03	-0.0093	
8	364	E	2.27	0.03	-0.0096	
		D	2.27	0.03	-0.0096	
9	416	E	2.78	0.02	-0.0098	
		D	2.78	0.02	-0.0098	
10	468	E	3.29	0.01	-0.0100	
		D	3.29	0.01	-0.0100	
11	520	E	3.82	0.00	-0.0101	

Tabela 6.3 – Deslocamentos do Pilar aos 28 dias – 2ª Iteração – Análise de 2ª Ordem -

Exemplo 1

Deslocamentos na terceira iteração para análise de 2ª ordem	Deslocamentos do Pilar - 3ª Iteração - Análise de 2ª Ordem				
	28 dias				
	secao	z	E/D	uy	uz
	cm		cm	cm	rad
1	0	D	0.00	0.00	0.0000
2	52	E	0.06	0.02	-0.0025
		D	0.06	0.02	-0.0025
3	104	E	0.25	0.03	-0.0046
		D	0.25	0.03	-0.0046
4	156	E	0.54	0.04	-0.0065
		D	0.54	0.04	-0.0065
5	208	E	0.91	0.04	-0.0080
		D	0.91	0.04	-0.0080
6	260	E	1.35	0.04	-0.0091
		D	1.35	0.04	-0.0091
7	312	E	1.84	0.04	-0.0097
		D	1.84	0.04	-0.0097
8	364	E	2.35	0.03	-0.0100
		D	2.35	0.03	-0.0100
9	416	E	2.88	0.02	-0.0102
		D	2.88	0.02	-0.0102
10	468	E	3.41	0.01	-0.0104
		D	3.41	0.01	-0.0104
11	520	E	3.95	0.01	-0.0104

Tabela 6.4 – Deslocamentos aos 28 dias – 3ª Iteração – Análise de 2ª Ordem -

Exemplo 1

Deslocamentos na quarta e ultima iteração para análise de 2ª ordem	Deslocamentos do Pilar - 4ª Iteração - Análise de 2ª Ordem				
	28 dias				
	secao	z	E/D	uy	uz
	cm		cm	cm	rad
1	0	D	0.00	0.00	0.0000
2	52	E	0.06	0.02	-0.0025
		D	0.06	0.02	-0.0025
3	104	E	0.25	0.03	-0.0047
		D	0.25	0.03	-0.0047
4	156	E	0.54	0.04	-0.0065
		D	0.54	0.04	-0.0065
5	208	E	0.92	0.04	-0.0080
		D	0.92	0.04	-0.0080
6	260	E	1.37	0.04	-0.0092
		D	1.37	0.04	-0.0092
7	312	E	1.86	0.04	-0.0098
		D	1.86	0.04	-0.0098
8	364	E	2.38	0.03	-0.0101
		D	2.38	0.03	-0.0101
9	416	E	2.91	0.02	-0.0103
		D	2.91	0.02	-0.0103
10	468	E	3.45	0.01	-0.0105
		D	3.45	0.01	-0.0105
11	520	E	4.00	0.01	-0.0106

Tabela 6.5 – Deslocamentos do Pilar aos 28 dias – 4ª Iteração – Análise de 2ª Ordem -

Exemplo 1

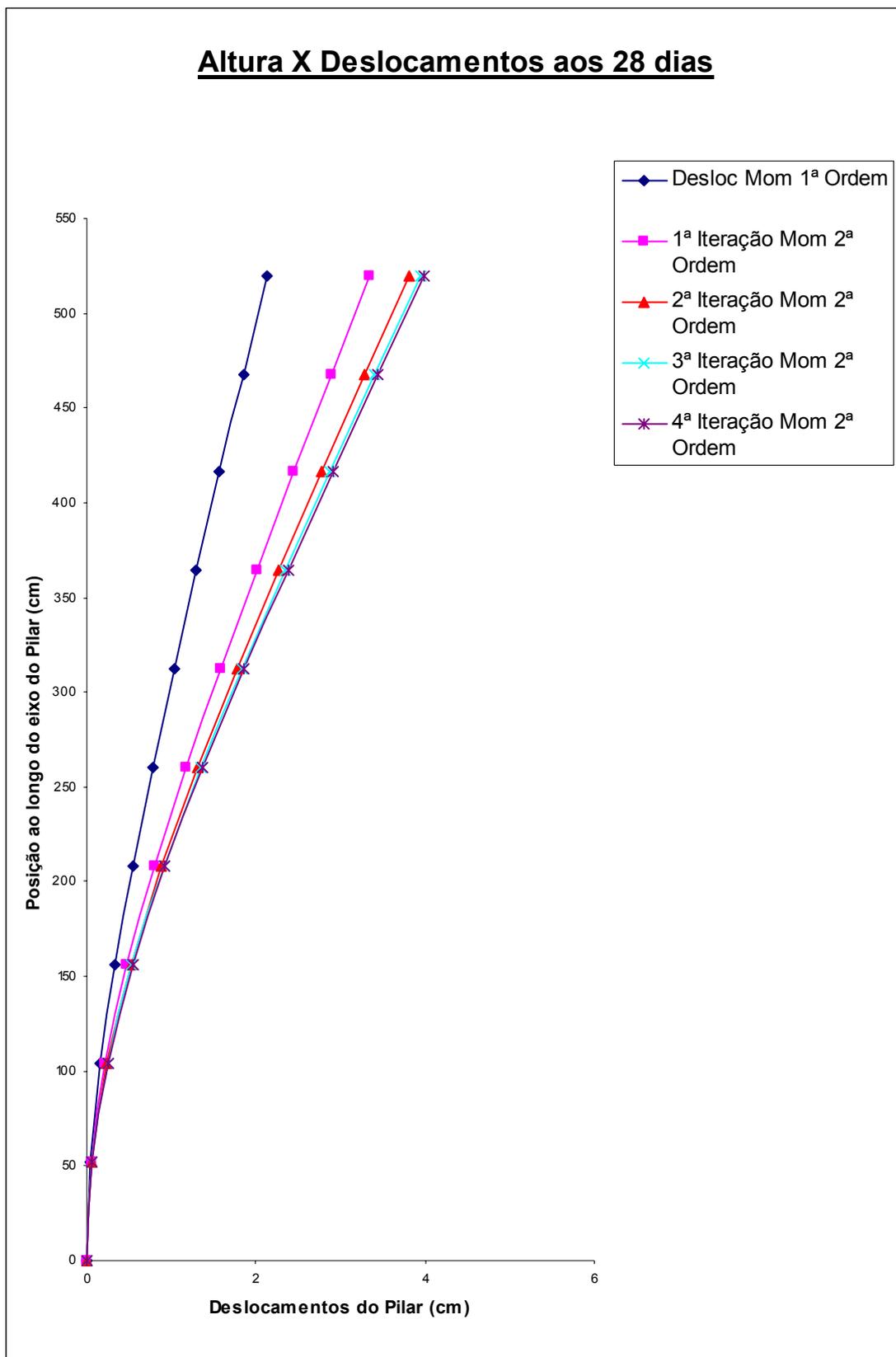


Fig. 6.2 – Deslocamentos do Pilar aos 28 dias – Análises de 1ª Ordem e 2ª Ordem, em serviço – Exemplo 1

### 6.2.2. Resultados aos 10.000 dias:

A primeira parte da tabela é exatamente a mesma já disposta e explicada para análise aos 28 dias. A sétima coluna, assim como a primeira, indicam a posição da seção ao longo do eixo do pilar.

Na coluna de (DDN) são apresentadas as diferenças entre os deslocamentos de duas seções consecutivas. Essa diferença multiplicada pela carga normal atuante (N) fornece o momento de segunda ordem (MN) concentrado atuante na seção considerada. Para obtenção dos momentos de segunda ordem devido ao peso próprio é feita uma média (DM) entre os deslocamentos de duas seções consecutivas. A coluna (DD) é a diferença entre os valores de (DM) da seção (i) e (i-1). Esses valores de (DD) multiplicados pelo peso próprio do pilar até a seção considerada, fornece o momento de segunda ordem devido o peso próprio (MP) atuante na seção. A esses últimos se somam os valores da coluna MN para obtenção do momento total de segunda ordem concentrado atuante na seção.

Deslocamentos devido a esforços de 1º Ordem	Deslocamentos do Pilar - 1ª Ordem					Carga Atuante (N) -600 kN							
	10.000 dias					Posição	Dif-Def-N (DDN)	Mom (MN)	Def-Media (DM)	PP		Mom Total	
	secao	z	E/D	uy	uz					rx	Dif-Def (DD)		Mom (MP)
	cm	cm		cm	cm	rad	uy <sub>i+1</sub> - uy <sub>i</sub>	N * DDN	Media(uy <sub>i+1</sub> ; uy <sub>i</sub> )	DM <sub>y<sub>i+1</sub></sub> - DM <sub>y<sub>i</sub></sub>	PP*DD°C	Tamanho Trecho	MN + MP
1	0	D	0.00	0.00	0.0000								
2	52	E	0.09	-0.02	-0.0035	0.00	0.09	-54.66	0.05	0.05	-2.37	520.00	-57.03
		D	0.09	-0.02	-0.0035								
3	104	E	0.36	-0.04	-0.0067	52.00	0.26	-158.34	0.22	0.18	-8.31	468.00	-166.65
		D	0.36	-0.04	-0.0067								
4	156	E	0.77	-0.07	-0.0094	104.00	0.42	-250.20	0.56	0.34	-14.16	416.00	-264.36
		D	0.77	-0.07	-0.0094								
5	208	E	1.31	-0.11	-0.0112	156.00	0.54	-321.00	1.04	0.48	-17.33	364.00	-338.33
		D	1.31	-0.11	-0.0112								
6	260	E	1.91	-0.15	-0.0121	208.00	0.61	-363.00	1.61	0.57	-17.78	312.00	-380.78
		D	1.91	-0.15	-0.0121								
7	312	E	2.56	-0.20	-0.0129	260.00	0.65	-390.60	2.24	0.63	-16.33	260.00	-406.93
		D	2.56	-0.20	-0.0129								
8	364	E	3.25	-0.25	-0.0136	312.00	0.69	-412.80	2.91	0.67	-13.93	208.00	-426.73
		D	3.25	-0.25	-0.0136								
9	416	E	3.97	-0.29	-0.0141	364.00	0.72	-432.00	3.61	0.70	-10.98	156.00	-442.98
		D	3.97	-0.29	-0.0141								
10	468	E	4.71	-0.34	-0.0145	416.00	0.74	-445.80	4.34	0.73	-7.61	104.00	-453.41
		D	4.71	-0.34	-0.0145								
11	520	E	5.47	-0.38	-0.0147	468.00	0.76	-455.40	5.09	0.75	-3.91	52.00	-459.31

Tabela 6.6 – Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias – Análise de 1ª Ordem – Exemplo

Para as tabelas de análise de segunda ordem descritas abaixo foi introduzida a coluna  $MP_{i+1} - MP_i$  que indica o acréscimo de momento total de segunda ordem a cada iteração. É obtido através da diferença entre o momento total na iteração em questão e o da iteração anterior.

Deslocamentos na primeira iteração para análise de 2ª Ordem	Deslocamentos do Pilar - 1ª Iteração - Análise de 2ª Ordem						Carga Atuante -600 kN								
	10.000 dias														
	secao	z	E/D	uy	uz	rx	Posição	Dif-Def-N (DDN)	Mom (MN)	Def-Media (DM)	PP	-0.1	kN/cm	Mom Total	Difer Mom
		cm		cm	cm	rad		uy <sub>i+1</sub> - uy <sub>i</sub>	N * DDN	Media(uy <sub>i+1</sub> - uy <sub>i</sub> )	DM <sub>y<sub>i+1</sub></sub> - DM <sub>y<sub>i</sub></sub>	PP*DD°C	Tamanho Trecho		
1	0	D	0.00	0.00	0.0000	0.00	0.11	-66.00	0.06	0.06	-2.86	520.00	-68.86	-11.83	
2	52	E	0.11	-0.01	-0.0042	0.00	0.32	-192.00	0.27	0.22	-10.06	468.00	-202.06	-35.42	
		D	0.11	-0.01	-0.0042	52.00	0.51	-306.60	0.69	0.42	-17.28	416.00	-323.88	-59.52	
3	104	E	0.43	-0.03	-0.0081	52.00	0.68	-407.40	1.28	0.60	-21.66	364.00	-429.06	-90.73	
		D	0.43	-0.03	-0.0081	104.00	0.82	-493.20	2.03	0.75	-23.42	312.00	-516.62	-135.83	
4	156	E	0.94	-0.05	-0.0115	104.00	0.93	-555.00	2.90	0.87	-22.71	260.00	-577.71	-170.78	
		D	0.94	-0.05	-0.0115	156.00	0.99	-591.60	3.86	0.96	-19.87	208.00	-611.47	-184.75	
5	208	E	1.62	-0.07	-0.0146	156.00	1.02	-612.60	4.86	1.00	-15.65	156.00	-628.25	-185.27	
		D	1.62	-0.07	-0.0146	208.00	1.05	-628.80	5.90	1.03	-10.76	104.00	-639.56	-186.15	
6	260	E	2.44	-0.11	-0.0170	208.00	1.07	-639.00	6.95	1.06	-5.49	52.00	-644.49	-185.19	
		D	2.44	-0.11	-0.0170	260.00									
7	312	E	3.37	-0.14	-0.0186	260.00									
		D	3.37	-0.14	-0.0186	312.00									
8	364	E	4.35	-0.19	-0.0193	312.00									
		D	4.35	-0.19	-0.0193	364.00									
9	416	E	5.37	-0.23	-0.0199	364.00									
		D	5.37	-0.23	-0.0199	416.00									
10	468	E	6.42	-0.28	-0.0204	416.00									
		D	6.42	-0.28	-0.0204	468.00									
11	520	E	7.49	-0.33	-0.0206	468.00									

Tabela 6.7 – Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias – 1ª Iteração - Análise de 2ª Ordem – Exemplo 1

Deslocamentos na segunda iteração para análise de 2ª Ordem	Deslocamentos do Pilar - 2ª Iteração - Análise de 2ª Ordem						Carga Atuante -600 kN								
	10.000 dias														
	secao	z	E/D	uy	uz	rx	Posição	Dif-Def-N (DDN)	Mom (MN)	Def-Media (DM)	PP	-0.1	kN/cm	Mom Total	Difer Mom
		cm		cm	cm	rad		uy <sub>i+1</sub> - uy <sub>i</sub>	N * DDN	Media(uy <sub>i+1</sub> - uy <sub>i</sub> )	DM <sub>y<sub>i+1</sub></sub> - DM <sub>y<sub>i</sub></sub>	PP*DD°C	Tamanho Trecho		
1	0	D	0.00	0.00	0.0000	0.00	0.12	-70.20	0.06	0.06	-3.04	520.00	-73.24	-4.38	
2	52	E	0.12	-0.01	-0.0045	0.00	0.34	-204.60	0.29	0.23	-10.72	468.00	-215.32	-13.26	
		D	0.12	-0.01	-0.0045	52.00	0.54	-326.40	0.73	0.44	-18.41	416.00	-344.81	-20.92	
3	104	E	0.46	-0.03	-0.0086	52.00	0.73	-435.60	1.37	0.64	-23.11	364.00	-458.71	-29.66	
		D	0.46	-0.03	-0.0086	104.00	0.88	-528.60	2.17	0.80	-25.07	312.00	-553.67	-37.05	
4	156	E	1.00	-0.04	-0.0123	104.00	1.00	-597.00	3.11	0.94	-24.39	260.00	-621.39	-43.68	
		D	1.00	-0.04	-0.0123	156.00	1.06	-635.40	4.13	1.03	-21.36	208.00	-656.76	-45.29	
5	208	E	1.73	-0.07	-0.0156	156.00	1.10	-658.80	5.21	1.08	-16.82	156.00	-675.62	-47.37	
		D	1.73	-0.07	-0.0156	208.00	1.13	-675.00	6.32	1.11	-11.56	104.00	-686.56	-47.00	
6	260	E	2.61	-0.09	-0.0183	208.00	1.14	-685.80	7.46	1.13	-5.90	52.00	-691.70	-47.20	
		D	2.61	-0.09	-0.0183	260.00									
7	312	E	3.60	-0.13	-0.0200	260.00									
		D	3.60	-0.13	-0.0200	312.00									
8	364	E	4.66	-0.18	-0.0208	312.00									
		D	4.66	-0.18	-0.0208	364.00									
9	416	E	5.76	-0.22	-0.0214	364.00									
		D	5.76	-0.22	-0.0214	416.00									
10	468	E	6.89	-0.27	-0.0219	416.00									
		D	6.89	-0.27	-0.0219	468.00									
11	520	E	8.03	-0.31	-0.0221	468.00									

Tabela 6.8 – Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias – 2ª Iteração - Análise de 2ª Ordem – Exemplo 1

Deslocamentos na terceira iteração para análise de 2º Ordem	Deslocamentos do Pilar - 3ª Iteração - Análise de 2ª Ordem						Carga Atuante -600 kN								
	10.000 dias														
	secao	z	E/D	uy	uz	rx									
	cm			cm	cm	rad	Posição	Dif-Def-N (DDN)	Mom (MN)	Def-Media (DM)	FP	-0.1	kN/cm	Mom Total	Difer Mom
							$u_{y_{i+1}} - u_{y_i}$	N * DDN	Media( $u_{y_{i+1}} - u_{y_i}$ )	$DM_{y_{i+1}} - DM_{y_i}$	PP*DD°C	Tamanho Trecho	MN + MP	$MP_{i+1} - MP_i$	
1	0	D	0.00	0.00	0.0000										
2	52	E	0.12	-0.01	-0.0046	0.00	0.12	-71.40	0.06	0.06	-3.09	520.00	-74.49	-1.25	
		D	0.12	-0.01	-0.0046										
3	104	E	0.47	-0.02	-0.0088	52.00	0.35	-207.60	0.29	0.23	-10.88	468.00	-218.48	-3.16	
		D	0.47	-0.02	-0.0088										
4	156	E	1.02	-0.04	-0.0125	104.00	0.55	-331.80	0.74	0.45	-18.70	416.00	-350.50	-5.69	
		D	1.02	-0.04	-0.0125										
5	208	E	1.76	-0.06	-0.0158	156.00	0.74	-442.20	1.39	0.65	-23.48	364.00	-465.68	-6.96	
		D	1.76	-0.06	-0.0158										
6	260	E	2.65	-0.09	-0.0186	208.00	0.90	-537.60	2.20	0.82	-25.47	312.00	-563.07	-9.41	
		D	2.65	-0.09	-0.0186										
7	312	E	3.66	-0.13	-0.0203	260.00	1.01	-607.20	3.16	0.95	-24.80	260.00	-632.00	-10.62	
		D	3.66	-0.13	-0.0203										
8	364	E	4.74	-0.18	-0.0211	312.00	1.08	-646.80	4.20	1.05	-21.74	208.00	-668.54	-11.77	
		D	4.74	-0.18	-0.0211										
9	416	E	5.86	-0.22	-0.0218	364.00	1.12	-669.60	5.30	1.10	-17.11	156.00	-686.71	-11.09	
		D	5.86	-0.22	-0.0218										
10	468	E	7.00	-0.27	-0.0222	416.00	1.14	-686.40	6.43	1.13	-11.75	104.00	-698.15	-11.59	
		D	7.00	-0.27	-0.0222										
11	520	E	8.16	-0.31	-0.0225	468.00	1.16	-697.20	7.58	1.15	-6.00	52.00	-703.20	-11.50	

Tabela 6.9 – Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias – 3ª Iteração - Análise de 2ª Ordem – Exemplo 1

Deslocamentos na quarta iteração para análise de 2º Ordem	Deslocamentos do Pilar - 4ª Iteração - Análise de 2ª Ordem						Carga Atuante -600 kN								
	10.000 dias														
	secao	z	E/D	uy	uz	rx									
	cm			cm	cm	rad	Posição	Dif-Def-N (DDN)	Mom (MN)	Def-Media (DM)	FP	-0.1	kN/cm	Mom Total	Difer Mom
							$u_{y_{i+1}} - u_{y_i}$	N * DDN	Media( $u_{y_{i+1}} - u_{y_i}$ )	$DM_{y_{i+1}} - DM_{y_i}$	PP*DD°C	Tamanho Trecho	MN + MP	$MP_{i+1} - MP_i$	
1	0	D	0.00	0.00	0.0000										
2	52	E	0.12	-0.01	-0.0046	0.00	0.12	-71.40	0.06	0.06	-3.09	520.00	-74.49	0.00	
		D	0.12	-0.01	-0.0046										
3	104	E	0.47	-0.02	-0.0088	52.00	0.35	-208.20	0.29	0.23	-10.90	468.00	-219.10	-0.62	
		D	0.47	-0.02	-0.0088										
4	156	E	1.02	-0.04	-0.0126	104.00	0.56	-333.00	0.74	0.45	-18.76	416.00	-351.76	-1.26	
		D	1.02	-0.04	-0.0126										
5	208	E	1.76	-0.06	-0.0159	156.00	0.74	-444.00	1.39	0.65	-23.57	364.00	-467.57	-1.89	
		D	1.76	-0.06	-0.0159										
6	260	E	2.66	-0.09	-0.0187	208.00	0.90	-539.40	2.21	0.82	-25.57	312.00	-564.97	-1.89	
		D	2.66	-0.09	-0.0187										
7	312	E	3.68	-0.13	-0.0204	260.00	1.02	-609.60	3.17	0.96	-24.90	260.00	-634.50	-2.49	
		D	3.68	-0.13	-0.0204										
8	364	E	4.76	-0.17	-0.0212	312.00	1.08	-648.60	4.22	1.05	-21.81	208.00	-670.41	-1.87	
		D	4.76	-0.17	-0.0212										
9	416	E	5.88	-0.22	-0.0219	364.00	1.12	-671.40	5.32	1.10	-17.16	156.00	-688.56	-1.85	
		D	5.88	-0.22	-0.0219										
10	468	E	7.02	-0.27	-0.0223	416.00	1.15	-688.80	6.45	1.13	-11.79	104.00	-700.59	-2.44	
		D	7.02	-0.27	-0.0223										
11	520	E	8.19	-0.31	-0.0225	468.00	1.17	-699.60	7.61	1.16	-6.02	52.00	-705.62	-2.42	

Tabela 6.10 – Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias – 4ª Iteração - Análise de 2ª Ordem – Exemplo 1

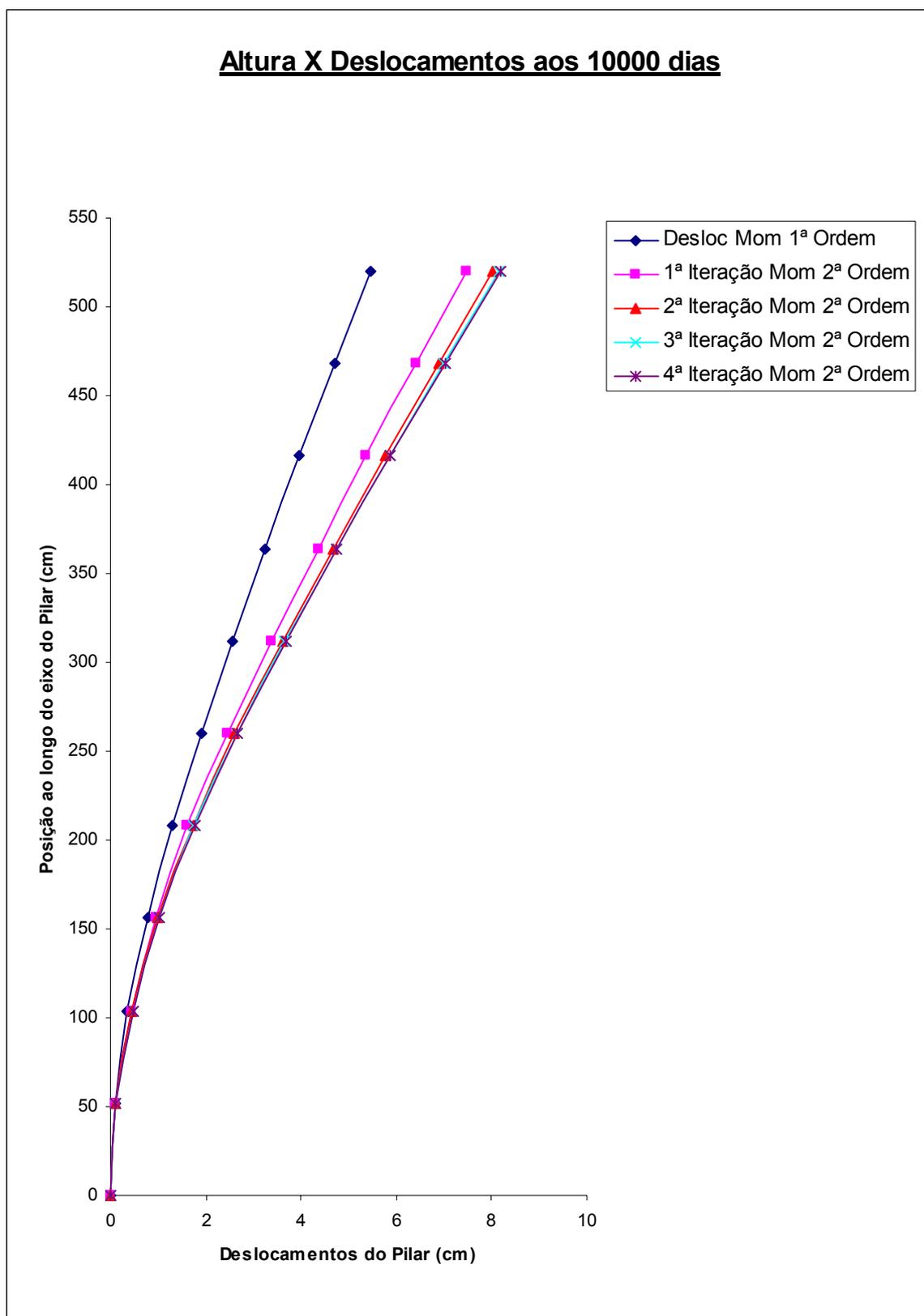


Fig. 6.3 – Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias – Análises de 1ª Ordem e 2ª

Ordem, em serviço – Exemplo 1

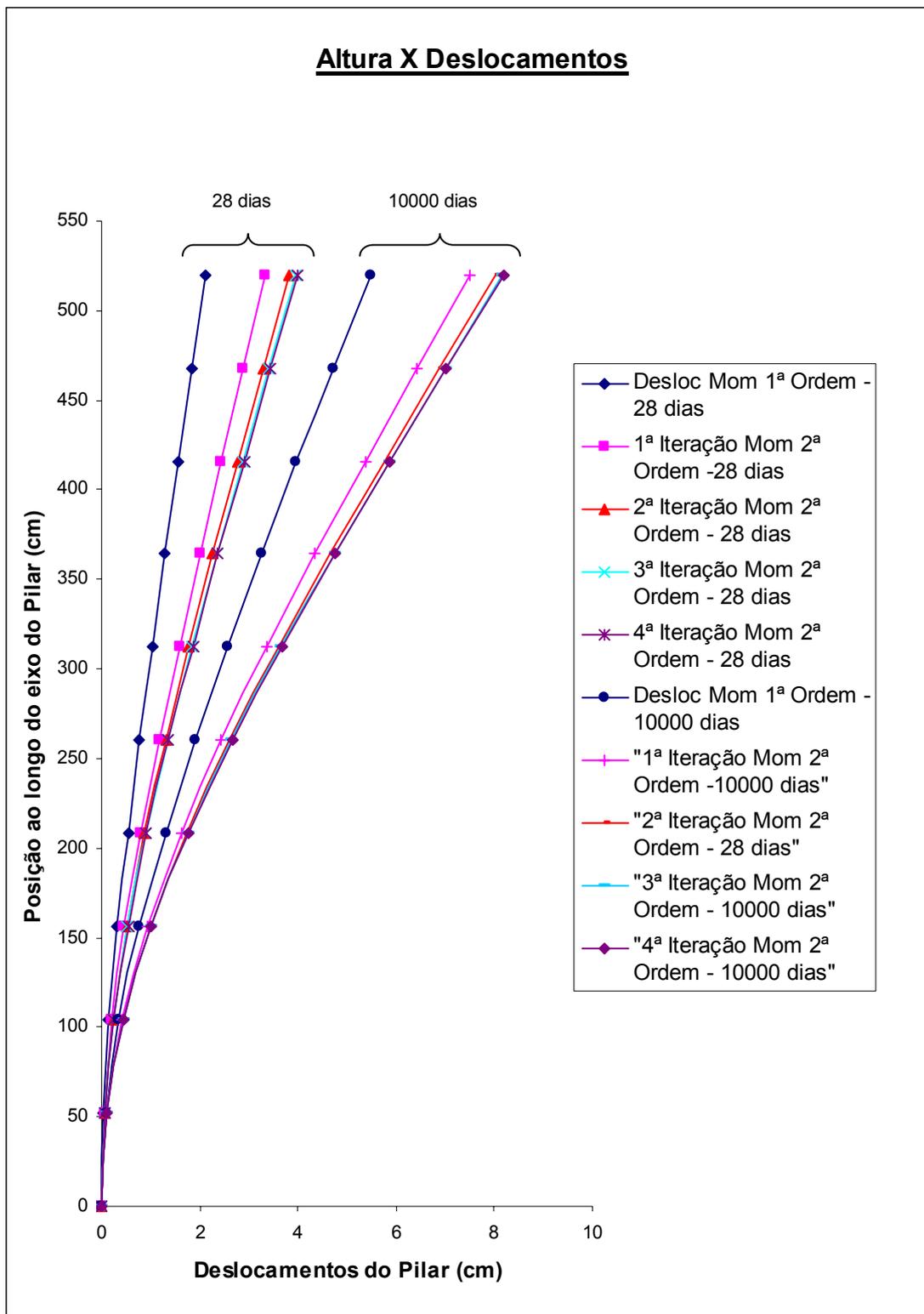


Fig. 6.4 – Deslocamentos do Pilar aos 28 e aos 10.000 dias – Análises de 1ª Ordem e 2ª

Ordem, em serviço – Exemplo 1

### 6.3. Exemplo 2

O exemplo 2 é o caso de um pilar também em balanço com mesma seção transversal (40x100) do exemplo 1 submetido ao carregamento permanente e armadura descritos abaixo. Trata-se de um pilar com  $\lambda = 140$ . A Flexão se dá em torno do eixo “x”.

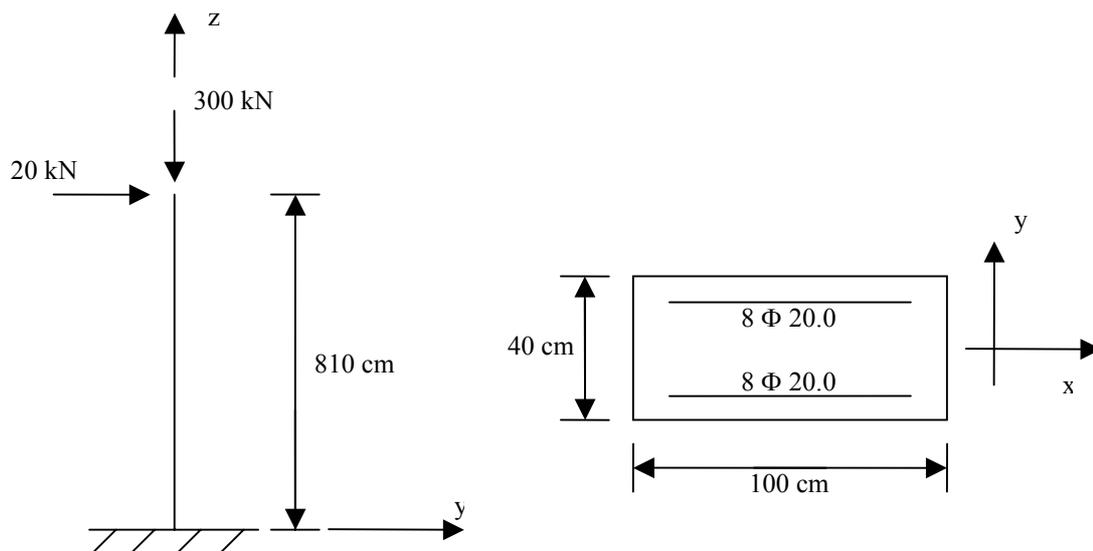


Fig. 6.5 – Pilar Exemplo 2

O pilar foi discretizado em quinze segmentos ao longo de seu comprimento. Os resultados são apresentados em 16 pontos ao longo do seu eixo, à direita e à esquerda desses pontos, e também nas duas extremidades.

#### 6.3.1. Resultados aos 28 dias:

		Deslocamentos do Pilar - 1ª Ordem			
		28 dias			
secao	z	E/D	uy	uz	rx
	cm		cm	cm	rad
1	0	D	0.00	0.00	0.0000
2	54	E	0.05	0.01	-0.0020
		D	0.05	0.01	-0.0020
3	108	E	0.21	0.02	-0.0037
		D	0.21	0.02	-0.0037
4	162	E	0.45	0.03	-0.0054
		D	0.45	0.03	-0.0054
5	216	E	0.78	0.04	-0.0069
		D	0.78	0.04	-0.0069
6	270	E	1.19	0.04	-0.0082
		D	1.19	0.04	-0.0082
7	324	E	1.66	0.04	-0.0093
		D	1.66	0.04	-0.0093
8	378	E	2.19	0.05	-0.0103
		D	2.19	0.05	-0.0103
9	432	E	2.77	0.04	-0.0111
		D	2.77	0.04	-0.0111
10	486	E	3.39	0.04	-0.0116
		D	3.39	0.04	-0.0116
11	540	E	4.02	0.03	-0.0119
		D	4.02	0.03	-0.0119
12	594	E	4.67	0.03	-0.0121
		D	4.67	0.03	-0.0121
13	648	E	5.33	0.02	-0.0122
		D	5.33	0.02	-0.0122
14	702	E	5.99	0.02	-0.0124
		D	5.99	0.02	-0.0124
15	756	E	6.66	0.01	-0.0125
		D	6.66	0.01	-0.0125
16	810	E	7.34	0.00	-0.0125

Deformação devido a esforços de 1º ordem

Tabela 6.11 – Deslocamentos do Pilar aos  
28 dias – Análise de 1ª Ordem  
Exemplo 2

		Deslocamentos Pilar - 1ª Iteração - Análise de 2ª Ordem			
		28 dias			
secao	z	E/D	uy	uz	rx
	cm		cm	cm	rad
1	0	D	0.00	0.00	0.0000
2	54	E	0.08	0.02	-0.0028
		D	0.08	0.02	-0.0028
3	108	E	0.30	0.04	-0.0055
		D	0.30	0.04	-0.0055
4	162	E	0.66	0.06	-0.0080
		D	0.66	0.06	-0.0080
5	216	E	1.16	0.07	-0.0102
		D	1.16	0.07	-0.0102
6	270	E	1.76	0.08	-0.0123
		D	1.76	0.08	-0.0123
7	324	E	2.48	0.09	-0.0142
		D	2.48	0.09	-0.0142
8	378	E	3.29	0.10	-0.0158
		D	3.29	0.10	-0.0158
9	432	E	4.18	0.11	-0.0172
		D	4.18	0.11	-0.0172
10	486	E	5.14	0.11	-0.0184
		D	5.14	0.11	-0.0184
11	540	E	6.16	0.11	-0.0193
		D	6.16	0.11	-0.0193
12	594	E	7.22	0.11	-0.0198
		D	7.22	0.11	-0.0198
13	648	E	8.30	0.10	-0.0201
		D	8.30	0.10	-0.0201
14	702	E	9.39	0.09	-0.0202
		D	9.39	0.09	-0.0202
15	756	E	10.48	0.09	-0.0204
		D	10.48	0.09	-0.0204
16	810	E	11.58	0.08	-0.0204

Deslocamentos na primeira iteração para análise de - 2º Ordem

Tabela 6.12 – Deslocamentos do Pilar  
aos 28 dias – 1ª Iteração  
Análise de 2ª Ordem –  
Exemplo 2

Deslocamentos Pilar - 2ª Iteração - Análise de 2ª Ordem					
28 dias					
secao	z	E/D	uy	uz	rx
	cm		cm	cm	rad
1	0	D	0.00	0.00	0.0000
2	54	E	0.08	0.02	-0.0031
		D	0.08	0.02	-0.0031
3	108	E	0.33	0.05	-0.0061
		D	0.33	0.05	-0.0061
4	162	E	0.74	0.06	-0.0089
		D	0.74	0.06	-0.0089
5	216	E	1.29	0.08	-0.0114
		D	1.29	0.08	-0.0114
6	270	E	1.96	0.10	-0.0138
		D	1.96	0.10	-0.0138
7	324	E	2.77	0.11	-0.0159
		D	2.77	0.11	-0.0159
8	378	E	3.67	0.12	-0.0178
		D	3.67	0.12	-0.0178
9	432	E	4.68	0.13	-0.0194
		D	4.68	0.13	-0.0194
10	486	E	5.76	0.13	-0.0208
		D	5.76	0.13	-0.0208
11	540	E	6.91	0.14	-0.0219
		D	6.91	0.14	-0.0219
12	594	E	8.11	0.13	-0.0225
		D	8.11	0.13	-0.0225
13	648	E	9.33	0.13	-0.0227
		D	9.33	0.13	-0.0227
14	702	E	10.56	0.12	-0.0229
		D	10.56	0.12	-0.0229
15	756	E	11.80	0.11	-0.0230
		D	11.80	0.11	-0.0230
16	810	E	13.05	0.11	-0.0231

Tabela 6.13 – Deslocamentos do Pilar aos  
28 dias – 2ª Iteração  
Análise de 2ª Ordem  
Exemplo 2

Deslocamentos Pilar - 3ª Iteração - Análise de 2ª Ordem					
28 dias					
secao	z	E/D	uy	uz	rx
	cm		cm	cm	rad
1	0	D	0.00	0.00	0.0000
2	54	E	0.09	0.02	-0.0032
		D	0.09	0.02	-0.0032
3	108	E	0.35	0.05	-0.0063
		D	0.35	0.05	-0.0063
4	162	E	0.76	0.07	-0.0092
		D	0.76	0.07	-0.0092
5	216	E	1.33	0.09	-0.0118
		D	1.33	0.09	-0.0118
6	270	E	2.03	0.10	-0.0142
		D	2.03	0.10	-0.0142
7	324	E	2.86	0.12	-0.0165
		D	2.86	0.12	-0.0165
8	378	E	3.80	0.13	-0.0184
		D	3.80	0.13	-0.0184
9	432	E	4.84	0.13	-0.0201
		D	4.84	0.13	-0.0201
10	486	E	5.97	0.14	-0.0215
		D	5.97	0.14	-0.0215
11	540	E	7.16	0.14	-0.0227
		D	7.16	0.14	-0.0227
12	594	E	8.41	0.14	-0.0235
		D	8.41	0.14	-0.0235
13	648	E	9.68	0.13	-0.0238
		D	9.68	0.13	-0.0238
14	702	E	10.98	0.13	-0.0240
		D	10.98	0.13	-0.0240
15	756	E	12.28	0.12	-0.0241
		D	12.28	0.12	-0.0241
16	810	E	13.58	0.12	-0.0242

Tabela 6.14 – Deslocamentos do Pilar  
aos 28 dias – 3ª Iteração  
Análise de 2ª Ordem –  
Exemplo 2

Deslocamentos Pilar - 4ª Iteração - Análise de 2ª Ordem					
28 dias					
secao	z	E/D	uy	uz	rx
	cm		cm	cm	rad
1	0	D	0.00	0.00	0.0000
2	54	E	0.09	0.02	-0.0033
		D	0.09	0.02	-0.0033
3	108	E	0.35	0.05	-0.0064
		D	0.35	0.05	-0.0064
4	162	E	0.77	0.07	-0.0093
		D	0.77	0.07	-0.0093
5	216	E	1.35	0.09	-0.0120
		D	1.35	0.09	-0.0120
6	270	E	2.06	0.10	-0.0144
		D	2.06	0.10	-0.0144
7	324	E	2.90	0.12	-0.0167
		D	2.90	0.12	-0.0167
8	378	E	3.85	0.13	-0.0186
		D	3.85	0.13	-0.0186
9	432	E	4.90	0.14	-0.0204
		D	4.90	0.14	-0.0204
10	486	E	6.04	0.14	-0.0218
		D	6.04	0.14	-0.0218
11	540	E	7.25	0.14	-0.0230
		D	7.25	0.14	-0.0230
12	594	E	8.51	0.14	-0.0238
		D	8.51	0.14	-0.0238
13	648	E	9.81	0.14	-0.0241
		D	9.81	0.14	-0.0241
14	702	E	11.12	0.13	-0.0243
		D	11.12	0.13	-0.0243
15	756	E	12.44	0.12	-0.0245
		D	12.44	0.12	-0.0245
16	810	E	13.76	0.12	-0.0245

Tabela 6.15 – Deslocamentos do Pilar aos 28 dias

4ª Iteração Análise de 2ª Ordem

Exemplo 2

### Altura X Deslocamentos aos 28 dias

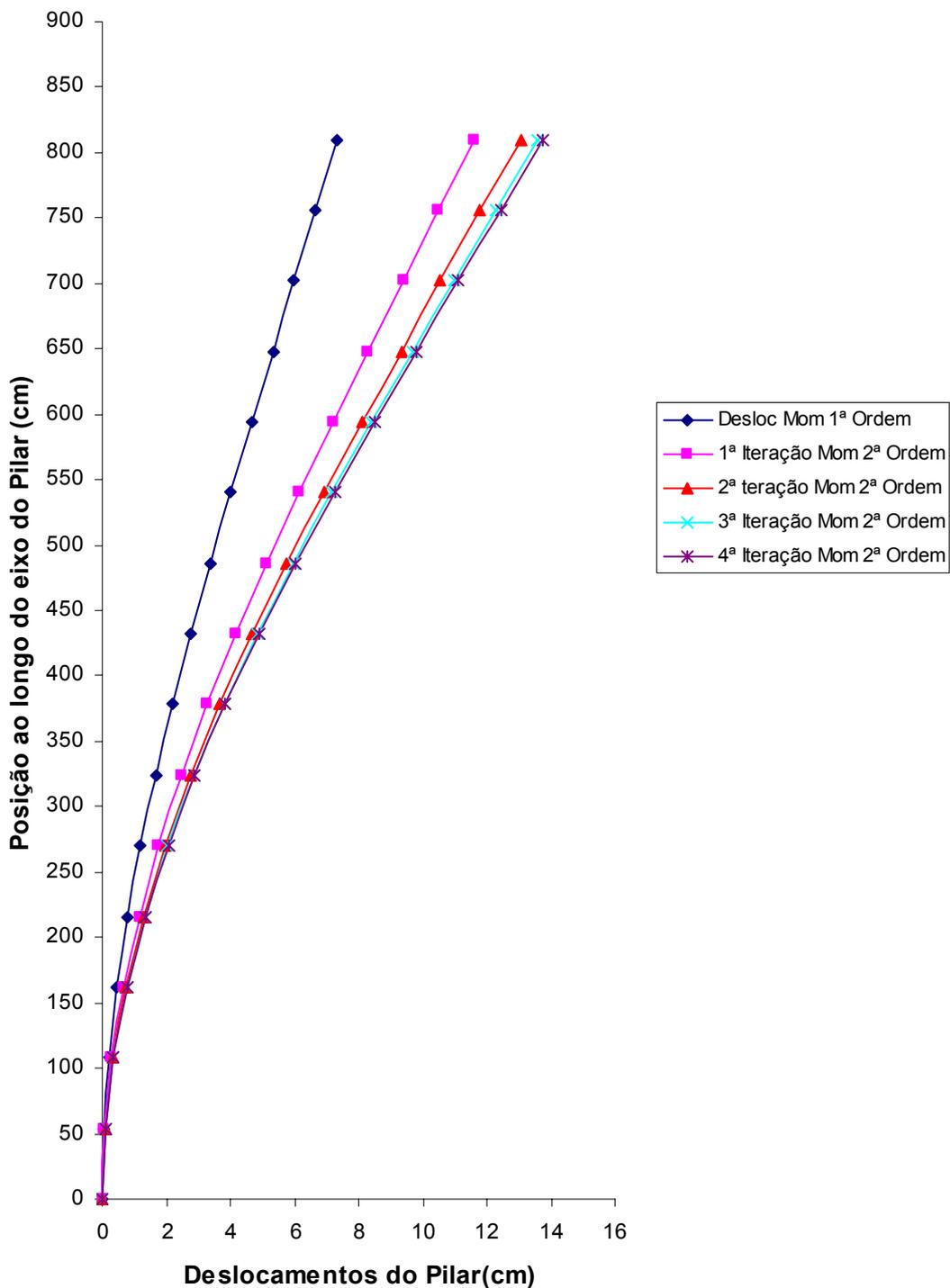


Fig. 6.6 – Deslocamentos do Pilar aos 28 dias – Análises de 1ª Ordem e 2ª Ordem, em Serviço – Exemplo 2

### 6.3.2. Resultados aos 10.000 dias:

secao	Deslocamentos do Pilar - 1ª Ordem						Carga Atuante -400 kN						
	10.000 dias						PP -0.1 kN/cm						
	z	E/D	uy	uz	rx	Posição	Dif-Def-N	Momento	Def-Media	Dif-Def	Momento	Comp	Mom Total
	cm		cm	cm	rad								
1	0	D	0.00	0.00	0.0000								
2	54	E	0.10	-0.01	-0.0038	0.00	0.10	-40.40	0.05	0.05	-4.09	810.00	-44.49
		D	0.10	-0.01	-0.0038								
3	108	E	0.40	-0.03	-0.0073	54.00	0.30	-119.60	0.25	0.20	-15.12	756.00	-134.72
		D	0.40	-0.03	-0.0073								
4	162	E	0.89	-0.04	-0.0106	108.00	0.49	-194.00	0.64	0.39	-27.52	702.00	-221.52
		D	0.89	-0.04	-0.0106								
5	216	E	1.54	-0.06	-0.0138	162.00	0.66	-263.60	1.21	0.57	-37.07	648.00	-300.67
		D	1.54	-0.06	-0.0138								
6	270	E	2.37	-0.08	-0.0167	216.00	0.82	-329.20	1.96	0.74	-44.02	594.00	-373.22
		D	2.37	-0.08	-0.0167								
7	324	E	3.34	-0.10	-0.0194	270.00	0.98	-390.00	2.85	0.90	-48.55	540.00	-438.55
		D	3.34	-0.10	-0.0194								
8	378	E	4.46	-0.13	-0.0219	324.00	1.11	-445.20	3.90	1.04	-50.74	486.00	-495.94
		D	4.46	-0.13	-0.0219								
9	432	E	5.70	-0.15	-0.0241	378.00	1.24	-496.40	5.08	1.18	-50.85	432.00	-547.25
		D	5.70	-0.15	-0.0241								
10	486	E	7.05	-0.18	-0.0261	432.00	1.36	-542.00	6.37	1.30	-49.06	378.00	-591.06
		D	7.05	-0.18	-0.0261								
11	540	E	8.50	-0.21	-0.0274	486.00	1.45	-578.00	7.77	1.40	-45.36	324.00	-623.36
		D	8.50	-0.21	-0.0274								
12	594	E	9.99	-0.25	-0.0280	540.00	1.50	-598.80	9.24	1.47	-39.72	270.00	-638.52
		D	9.99	-0.25	-0.0280								
13	648	E	11.52	-0.29	-0.0285	594.00	1.53	-611.20	10.76	1.51	-32.67	216.00	-643.87
		D	11.52	-0.29	-0.0285								
14	702	E	13.07	-0.33	-0.0289	648.00	1.55	-620.40	12.30	1.54	-24.94	162.00	-645.34
		D	13.07	-0.33	-0.0289								
15	756	E	14.64	-0.38	-0.0292	702.00	1.57	-628.00	13.86	1.56	-16.85	108.00	-644.85
		D	14.64	-0.38	-0.0292								
16	810	E	16.22	-0.42	-0.0294	756.00	1.58	-632.80	15.43	1.58	-8.51	54.00	-641.31

Tabela 6.16 – Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias – Análise de 1ª Ordem –

#### Exemplo 2

secao	Deslocamentos do Pilar - 1ª Iteração - Análise de 2ª Ordem						Carga Atuante -300 kN							
	10.000 dias						PP -0.1 kN/cm							
	z	E/D	uy	uz	rx	Posição	Dif-Def-N	Momento	Def-Media	Dif-Def	Momento	Comp	Mom Total	Dif Mom
	cm		cm	cm	rad									
1	0	D	0.00	0.00	0.0000									
2	54	E	0.13	-0.01	-0.0048	0.00	0.13	-52.00	0.07	0.07	-5.27	810.00	-57.27	-12.77
		D	0.13	-0.01	-0.0048									
3	108	E	0.52	-0.01	-0.0094	54.00	0.39	-154.00	0.32	0.26	-19.47	756.00	-173.47	-38.75
		D	0.52	-0.01	-0.0094									
4	162	E	1.14	-0.02	-0.0138	108.00	0.63	-250.80	0.83	0.51	-35.52	702.00	-286.32	-64.80
		D	1.14	-0.02	-0.0138									
5	216	E	2.00	-0.03	-0.0179	162.00	0.86	-342.00	1.57	0.74	-48.02	648.00	-390.02	-89.35
		D	2.00	-0.03	-0.0179									
6	270	E	3.07	-0.05	-0.0217	216.00	1.07	-428.40	2.53	0.96	-57.20	594.00	-485.60	-112.39
		D	3.07	-0.05	-0.0217									
7	324	E	4.34	-0.06	-0.0253	270.00	1.27	-508.00	3.70	1.17	-63.21	540.00	-571.21	-132.66
		D	4.34	-0.06	-0.0253									
8	378	E	5.79	-0.08	-0.0286	324.00	1.46	-582.40	5.07	1.36	-66.24	486.00	-648.64	-152.70
		D	5.79	-0.08	-0.0286									
9	432	E	7.42	-0.09	-0.0316	378.00	1.63	-650.40	6.61	1.54	-66.57	432.00	-716.97	-169.72
		D	7.42	-0.09	-0.0316									
10	486	E	9.20	-0.12	-0.0343	432.00	1.78	-711.20	8.31	1.70	-64.34	378.00	-775.54	-184.47
		D	9.20	-0.12	-0.0343									
11	540	E	11.11	-0.14	-0.0366	486.00	1.91	-765.20	10.15	1.85	-59.79	324.00	-824.99	-201.63
		D	11.11	-0.14	-0.0366									
12	594	E	13.14	-0.16	-0.0386	540.00	2.03	-812.40	12.13	1.97	-53.24	270.00	-865.64	-227.13
		D	13.14	-0.16	-0.0386									
13	648	E	15.26	-0.20	-0.0398	594.00	2.12	-847.20	14.20	2.07	-44.81	216.00	-892.01	-248.14
		D	15.26	-0.20	-0.0398									
14	702	E	17.42	-0.24	-0.0403	648.00	2.16	-865.60	16.34	2.14	-34.68	162.00	-900.28	-254.94
		D	17.42	-0.24	-0.0403									
15	756	E	19.61	-0.28	-0.0407	702.00	2.19	-874.80	18.52	2.18	-23.50	108.00	-898.30	-253.44
		D	19.61	-0.28	-0.0407									
16	810	E	21.81	-0.32	-0.0408	756.00	2.20	-880.00	20.71	2.19	-11.84	54.00	-891.84	-250.53

Tabela 6.17 – Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias – 1ª Iteração - Análise de 2ª

Ordem - Exemplo 2

Deslocamentos do Pilar - 2ª Iteração - Análise de 2ª Ordem							Carga Atuante -300 kN							
10.000 dias							PP -0.1 kN/cm							
secao	z	E/D	uy	uz	rx	Posição	Dif-Def-N	Momento	Def-Media	Dif-Def	Momento	Comp	Mom Total	Dif Mom
	cm		cm	cm	rad									
1	0	D	0.00	0.00	0.0000									
2	54	E	0.14	0.00	-0.0052	0.00	0.14	-56.00	0.07	0.07	-5.67	810.00	-61.67	-4.41
		D	0.14	0.00	-0.0052									
3	108	E	0.55	-0.01	-0.0101	54.00	0.41	-165.60	0.35	0.28	-20.94	756.00	-186.54	-13.07
		D	0.55	-0.01	-0.0101									
4	162	E	1.23	-0.02	-0.0149	108.00	0.68	-270.40	0.89	0.55	-38.26	702.00	-308.66	-22.34
		D	1.23	-0.02	-0.0149									
5	216	E	2.15	-0.02	-0.0193	162.00	0.92	-368.80	1.69	0.80	-51.78	648.00	-420.58	-30.56
		D	2.15	-0.02	-0.0193									
6	270	E	3.31	-0.03	-0.0235	216.00	1.16	-462.00	2.73	1.04	-61.69	594.00	-523.69	-38.08
		D	3.31	-0.03	-0.0235									
7	324	E	4.68	-0.05	-0.0273	270.00	1.37	-548.80	3.99	1.26	-68.23	540.00	-617.03	-45.82
		D	4.68	-0.05	-0.0273									
8	378	E	6.25	-0.06	-0.0309	324.00	1.57	-629.20	5.47	1.47	-71.56	486.00	-700.76	-52.12
		D	6.25	-0.06	-0.0309									
9	432	E	8.01	-0.08	-0.0341	378.00	1.76	-702.80	7.13	1.67	-71.93	432.00	-774.73	-57.76
		D	8.01	-0.08	-0.0341									
10	486	E	9.93	-0.10	-0.0371	432.00	1.92	-768.80	8.97	1.84	-69.53	378.00	-838.33	-62.80
		D	9.93	-0.10	-0.0371									
11	540	E	12.00	-0.12	-0.0396	486.00	2.07	-827.60	10.97	2.00	-64.65	324.00	-892.25	-67.26
		D	12.00	-0.12	-0.0396									
12	594	E	14.20	-0.14	-0.0418	540.00	2.20	-878.80	13.10	2.13	-57.59	270.00	-936.39	-70.75
		D	14.20	-0.14	-0.0418									
13	648	E	16.49	-0.17	-0.0431	594.00	2.29	-916.40	15.34	2.24	-48.47	216.00	-964.87	-72.86
		D	16.49	-0.17	-0.0431									
14	702	E	18.83	-0.22	-0.0436	648.00	2.34	-936.00	17.66	2.32	-37.51	162.00	-973.51	-73.23
		D	18.83	-0.22	-0.0436									
15	756	E	21.19	-0.26	-0.0440	702.00	2.37	-946.00	20.01	2.35	-25.41	108.00	-971.41	-73.11
		D	21.19	-0.26	-0.0440									
16	810	E	23.57	-0.30	-0.0441	756.00	2.38	-951.20	22.38	2.37	-12.81	54.00	-964.01	-72.16

Tabela 6.18 – Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias – 2ª Iteração - Análise de 2ª Ordem – Exemplo 2

Deslocamentos do Pilar - 3ª Iteração - Análise de 2ª Ordem							Carga Atuante -300 kN							
10.000 dias							PP -0.1 kN/cm							
secao	z	E/D	uy	uz	rx	Posição	Dif-Def-N	Momento	Def-Media	Dif-Def	Momento	Comp	Mom Total	Dif Mom
	cm		cm	cm	rad									
1	0	D	0.00	0.00	0.0000									
2	54	E	0.14	0.00	-0.0053	0.00	0.14	-57.20	0.07	0.07	-5.79	810.00	-62.99	-1.32
		D	0.14	0.00	-0.0053									
3	108	E	0.57	-0.01	-0.0104	54.00	0.42	-169.20	0.35	0.28	-21.39	756.00	-190.59	-4.05
		D	0.57	-0.01	-0.0104									
4	162	E	1.26	-0.01	-0.0152	108.00	0.69	-276.40	0.91	0.56	-39.10	702.00	-315.50	-6.84
		D	1.26	-0.01	-0.0152									
5	216	E	2.20	-0.02	-0.0197	162.00	0.94	-377.20	1.73	0.82	-52.94	648.00	-430.14	-9.57
		D	2.20	-0.02	-0.0197									
6	270	E	3.38	-0.03	-0.0240	216.00	1.18	-472.40	2.79	1.06	-63.08	594.00	-535.48	-11.80
		D	3.38	-0.03	-0.0240									
7	324	E	4.78	-0.04	-0.0280	270.00	1.40	-561.20	4.08	1.29	-69.77	540.00	-630.97	-13.94
		D	4.78	-0.04	-0.0280									
8	378	E	6.39	-0.06	-0.0316	324.00	1.61	-643.60	5.59	1.51	-73.19	486.00	-716.79	-16.03
		D	6.39	-0.06	-0.0316									
9	432	E	8.19	-0.07	-0.0349	378.00	1.80	-718.80	7.29	1.70	-73.57	432.00	-792.37	-17.64
		D	8.19	-0.07	-0.0349									
10	486	E	10.16	-0.09	-0.0379	432.00	1.97	-786.40	9.17	1.88	-71.12	378.00	-857.52	-19.19
		D	10.16	-0.09	-0.0379									
11	540	E	12.27	-0.11	-0.0405	486.00	2.12	-846.80	11.21	2.04	-66.14	324.00	-912.94	-20.69
		D	12.27	-0.11	-0.0405									
12	594	E	14.52	-0.14	-0.0427	540.00	2.25	-898.40	13.40	2.18	-58.90	270.00	-957.30	-20.91
		D	14.52	-0.14	-0.0427									
13	648	E	16.86	-0.17	-0.0440	594.00	2.34	-937.20	15.69	2.29	-49.56	216.00	-986.76	-21.89
		D	16.86	-0.17	-0.0440									
14	702	E	19.26	-0.21	-0.0446	648.00	2.39	-957.20	18.06	2.37	-38.36	162.00	-995.56	-22.05
		D	19.26	-0.21	-0.0446									
15	756	E	21.67	-0.25	-0.0449	702.00	2.42	-966.80	20.46	2.41	-25.97	108.00	-992.77	-21.37
		D	21.67	-0.25	-0.0449									
16	810	E	24.10	-0.29	-0.0451	756.00	2.43	-972.80	22.89	2.42	-13.09	54.00	-985.89	-21.89

Tabela 6.19 – Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias – 3ª Iteração - Análise de 2ª Ordem – Exemplo 2

Deslocamentos do Pilar - 4ª Iteração - Análise de 2ª Ordem						Carga Atuante		-300		kN					
secao	z	E/D	10.000 dias			Posição	Dif-Def-N	Momento	Def-Media	Dif-Def	Momento	Comp	Mom Total	Dif Mom	
			uy	uz	rx										
			cm	cm	rad										
1	0	D	0.00	0.00	0.0000										
2	54	E	0.14	0.00	-0.0053	0.00	0.14	-57.60	0.07	0.07	-5.83	810.00	-63.43	-0.44	
		D	0.14	0.00	-0.0053										
3	108	E	0.57	-0.01	-0.0104	54.00	0.43	-170.40	0.36	0.29	-21.55	756.00	-191.95	-1.35	
		D	0.57	-0.01	-0.0104										
4	162	E	1.26	-0.01	-0.0153	108.00	0.69	-277.60	0.92	0.56	-39.31	702.00	-316.91	-1.41	
		D	1.26	-0.01	-0.0153										
5	216	E	2.21	-0.02	-0.0199	162.00	0.95	-380.00	1.74	0.82	-53.27	648.00	-433.27	-3.12	
		D	2.21	-0.02	-0.0199										
6	270	E	3.40	-0.03	-0.0242	216.00	1.19	-475.20	2.81	1.07	-63.50	594.00	-538.70	-3.22	
		D	3.40	-0.03	-0.0242										
7	324	E	4.82	-0.04	-0.0281	270.00	1.41	-565.20	4.11	1.30	-70.23	540.00	-635.43	-4.46	
		D	4.82	-0.04	-0.0281										
8	378	E	6.43	-0.05	-0.0318	324.00	1.62	-647.60	5.62	1.52	-73.68	486.00	-721.28	-4.49	
		D	6.43	-0.05	-0.0318										
9	432	E	8.24	-0.07	-0.0352	378.00	1.81	-723.20	7.34	1.71	-74.02	432.00	-797.22	-4.85	
		D	8.24	-0.07	-0.0352										
10	486	E	10.22	-0.09	-0.0381	432.00	1.98	-791.60	9.23	1.89	-71.57	378.00	-863.17	-5.65	
		D	10.22	-0.09	-0.0381										
11	540	E	12.35	-0.11	-0.0407	486.00	2.13	-852.00	11.29	2.05	-66.57	324.00	-918.57	-5.62	
		D	12.35	-0.11	-0.0407										
12	594	E	14.61	-0.13	-0.0430	540.00	2.26	-904.40	13.48	2.20	-59.28	270.00	-963.68	-6.38	
		D	14.61	-0.13	-0.0430										
13	648	E	16.97	-0.17	-0.0443	594.00	2.36	-943.20	15.79	2.31	-49.89	216.00	-993.09	-6.32	
		D	16.97	-0.17	-0.0443										
14	702	E	19.38	-0.21	-0.0449	648.00	2.41	-963.60	18.17	2.38	-38.61	162.00	-1002.21	-6.65	
		D	19.38	-0.21	-0.0449										
15	756	E	21.81	-0.25	-0.0452	702.00	2.43	-973.20	20.60	2.42	-26.15	108.00	-999.35	-6.57	
		D	21.81	-0.25	-0.0452										
16	810	E	24.26	-0.29	-0.0454	756.00	2.45	-979.20	23.04	2.44	-13.18	54.00	-992.38	-6.49	

Tabela 6.20 – Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias – 4ª Iteração - Análise de 2ª Ordem – Exemplo 2

### Altura X Deslocamentos aos 10000 dias

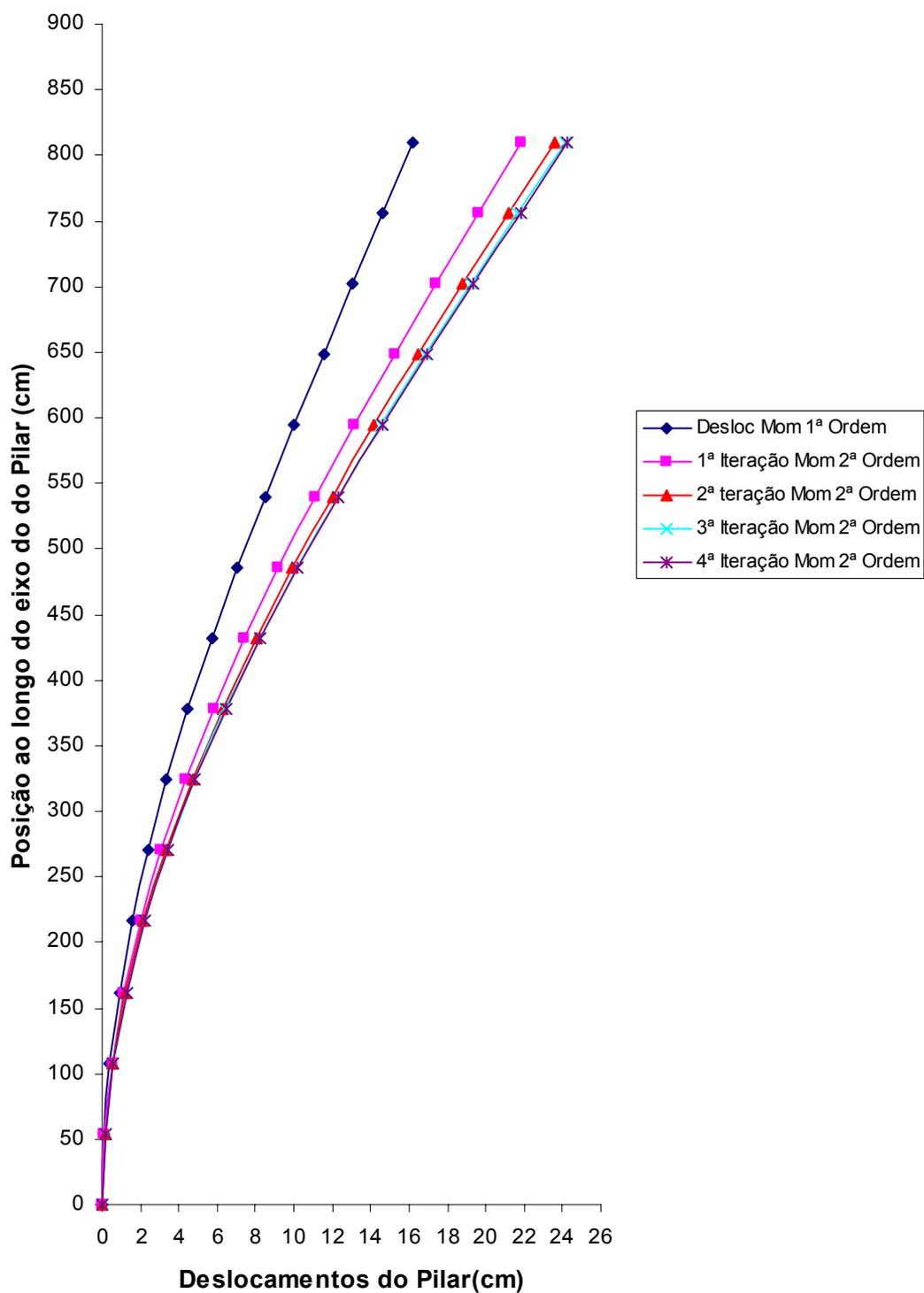


Fig. 6.7 – Deslocamentos do Pilar aos 10.000 dias – Análises de 1ª Ordem e 2ª Ordem, Serviço – Exemplo 2

### Altura X Deslocamentos

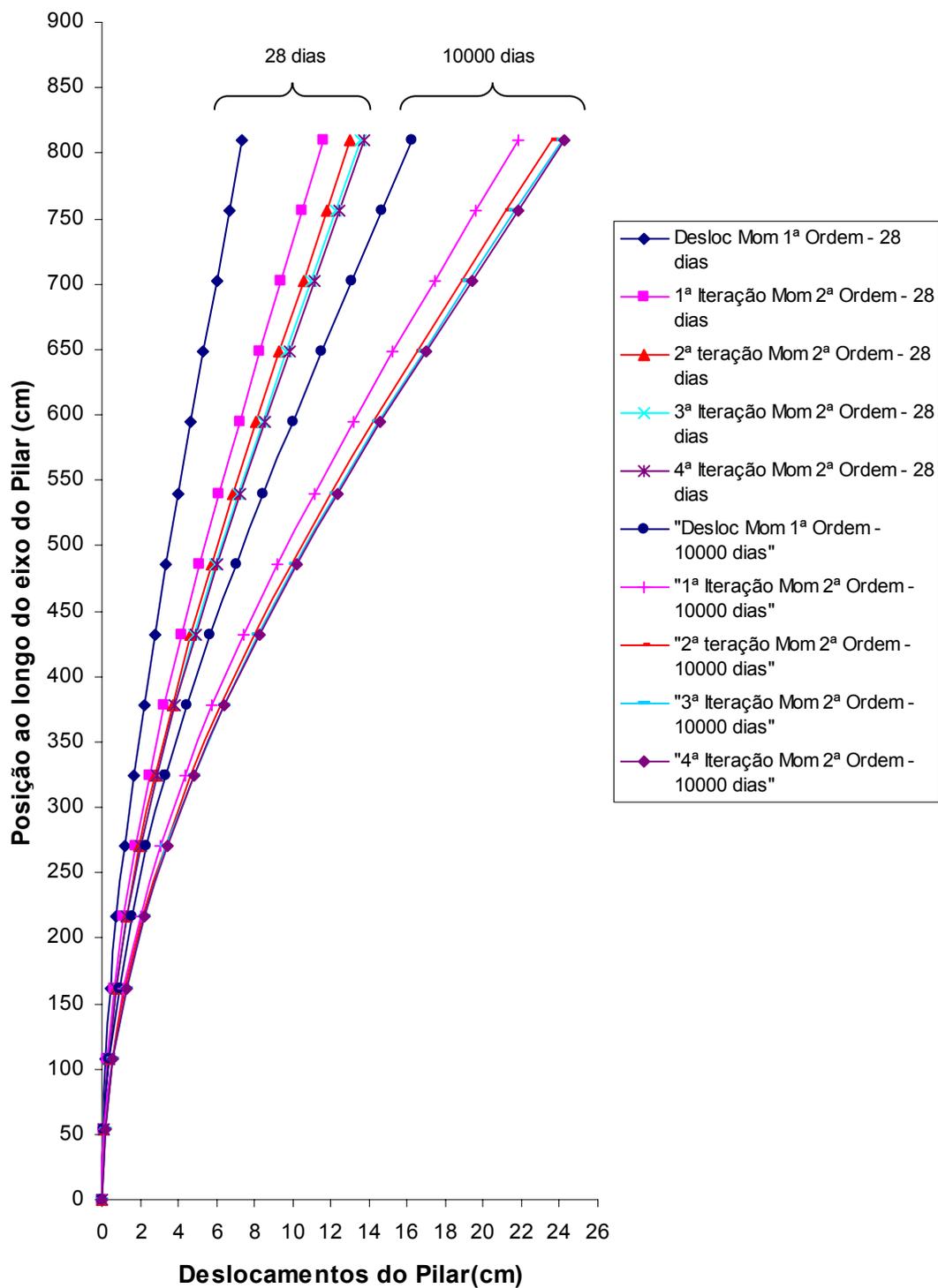


Fig. 6.8 – Deslocamentos do Pilar aos 28 e 10.000 dias – Análises de 1ª Ordem e 2ª Ordem, sem serviço - Exemplo 2

# 7

## **Análise dos Resultados, Conclusões e Recomendações Futuras**

O objetivo desse trabalho era o desenvolvimento de um modelo matemático capaz de simular de maneira mais rigorosa o comportamento em serviço de pilares esbeltos isostáticos de concreto armado de seção geométrica qualquer submetidos a flexão normal composta. Analisando os dois exemplos descritos anteriormente, algumas conclusões podem ser tiradas:

No exemplo 1, as deformações imediatas máximas são de aproximadamente 2,13cm (28 dias) e as finais de 5,47cm (10.000 dias). Ou seja, há um aumento de 156% quando são consideradas as deformações diferidas. Fazendo-se, então, uma análise de 2ª ordem para esse pilar, chegou-se a um deslocamento final da ordem de 8,19cm. Um aumento de cerca de 50% em relação ao deslocamento para a análise de primeira ordem.

No exemplo 2, também houve um aumento significativo dos deslocamentos quando considerados os efeitos de 2ª ordem. O deslocamento do topo do pilar passa de 16,2 cm

em análise de 1ª ordem para 24,36 cm em 2ª ordem. Um aumento também da ordem de 50%.

Estes exemplos demonstram a importância de se considerar os efeitos de 2ª ordem para determinação das deformações diferidas em serviço.

Para dar continuidade a este trabalho, o modelo matemático proposto deve ainda ser capaz de simular:

- a) O comportamento do pilar em estado limite último, considerando as deformações diferidas determinadas através do modelo aqui proposto;
- b) pilares hiperestáticos;
- c) pilares sujeitos à flexão oblíqua composta;
- d) as diversas etapas de construção;
- e) alterações das condições de contorno ao longo do tempo.

É nossa intenção trabalhar com um modelo que satisfaça a algumas destas condições em minha tese de doutorado.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Araújo, J.M. – **Dimensionamento de Pilares Esbeltos de Concreto Armado** – Dissertação de Mestrado, UFRGS, RGS, novembro de 1984.
- [2] Campos, N.B.F – **Contribuição ao Estudo de Pilares em Concreto Armado com Seção Qualquer Submetidos à Flexão Composta Oblíqua** – Dissertação de Mestrado, EESC/USP, SC, dezembro de 1994.
- [3] Júnior I.W.C. – **Dimensionamento de Pilares Esbeltos de Concreto Armado com Seção Qualquer Solicitados por Flexão Composta Oblíqua** – Dissertação de Mestrado, EESC/USP, SC, junho de 1997.
- [4] Pereira, S.S.R. – **SAPBS: Um Sistema para Análise Estrutural, em Serviço, de Pontes Protendidas em Balanços Sucessivos** – Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, RJ, março de 1999.
- [5] NBR 6118 – **Norma Brasileira para Projeto de Estrutura de Concreto – Procedimento** – Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2003.
- [6] PAULA, J. A. – **Algoritmos para o Estudo de Pilares Esbeltos em Concreto Armado Sujeitos a Solicitação Normais**. São Carlos – Escola de Engenharia de São Carlos – USP. Dissertação de Mestrado em Engenharia.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)