

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE FÍSICA
MESTRADO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

SOLUÇÕES EXATAS DA COSMOLOGIA DE BRANS-DICKE COM
TERMO COSMOLÓGICO VARIÁVEL

Agostinho Ernani Montenegro Junior

Orientador: Saulo Carneiro

2005

0

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

ÍNDICE

I. Introdução.....	2
II. As equações de Einstein do campo gravitacional.....	4
III. O modelo cosmológico isotrópico de Friedmann.....	7
IV. Sumário da teoria de Brans-Dicke	13
V. Soluções com termo cosmológico variável	16
A. 1º Ansatz.....	16
B. 2º Ansatz.....	18
1. O caso $\dot{q} = 0$	19
2. O caso $\dot{q} \neq 0$	22
VI. Conclusão.....	32
Bibliografia.....	34
Apêndice: gráficos.....	36

Resumo

Nesta dissertação, estudamos um conjunto completo de soluções cosmológicas da teoria de Brans-Dicke, nas quais tanto a densidade de energia do vácuo quanto a constante gravitacional caem linearmente com o parâmetro de Hubble. Uma classe particular de soluções apresenta uma razão constante entre as densidades de energia do vácuo e da matéria, jogando luz, portanto, sobre o assim chamado problema da coincidência cósmica. Fixando, com base nos limites observacionais para a idade do universo, o único parâmetro livre de tais soluções, obtemos uma densidade de energia da matéria em acordo com as observações. Uma segunda classe de soluções, interessante do ponto de vista teórico, apresenta parâmetro de Brans-Dicke e termo cosmológico negativos, além de singularidades futuras de tipo *big-rip*. Destas últimas soluções, duas não são aceitáveis do ponto de vista observacional, por apresentarem fator de desaceleração sempre negativo ou sempre positivo, respectivamente. A terceira delas leva, para tempos longos, a uma densidade relativa de matéria constante, o que também constitui uma possível solução para o problema da coincidência cósmica.

Abstract

We investigate cosmological solutions of Brans-Dicke theory with both the vacuum energy density and the gravitational constant decaying linearly with the Hubble parameter. A particular class of them, with constant deceleration factor, sheds light on the cosmological constant problems, leading to a presently small vacuum term, and to a constant ratio between the vacuum and matter energy densities. By fixing the only free parameter of these solutions, we obtain cosmological parameters in accordance with observations of the relative matter density and the universe age. In addition, we have three other solutions, with Brans-Dicke parameter $\omega = -1$ and negative cosmological term, two of them with a future singularity of the big-rip type. Although interesting from the theoretical point of view, two of them are not in agreement with the observed universe. The third one leads, in the limit of large times, to a constant relative matter density, being also a possible solution to the cosmic coincidence problem.

I. INTRODUÇÃO

Observações recentes sugerem que a densidade de energia total no universo é maior que a densidade de matéria (bariônica + escura), sendo a razão entre esta e a densidade crítica da ordem de $\Omega_m = 0,3$. Além disso, medidas da anisotropia da radiação cósmica de fundo indicam que nosso universo é espacialmente plano [1], o que sugere a existência de outra forma de energia desconhecida, usualmente chamada de energia escura.

Por outro lado, a relação luminosidade-desvio para o vermelho observada em supernovas tipo Ia sugere que, na presente fase, o parâmetro de desaceleração do universo, q , é negativo, e portanto o universo sofre atualmente uma expansão acelerada [2, 3].

Vários modelos têm sido propostos na busca de soluções compatíveis com estes dados observacionais. Para essa energia desconhecida existem alguns candidatos, como a constante cosmológica, a chamada quintessência, ou ainda o gás de Chaplygin generalizado. Destes, o mais simples e antigo é a constante cosmológica, também associada com a densidade de energia do vácuo.

Podemos contextualizar o estudo da energia escura em diferentes teorias de gravitação, entre elas a teoria geral da relatividade [4, 5], onde são usadas as equações de campo de Einstein, e na qual a constante gravitacional de Newton, G , é uma constante universal; e a teoria de Brans-Dicke [5, 6], uma teoria escalar-tensorial onde a constante gravitacional torna-se uma função do espaço e do tempo, e onde um novo parâmetro, ω , é introduzido. Mais recentemente, renovou-se o interesse por este tipo de teoria, dada sua associação com teorias de super-cordas, teorias de dimensões extras e modelos cosmológicos inflacionários ou com expansão acelerada [7–9].

Na teoria de Brans-Dicke, a relatividade geral é restabelecida no limite $\omega \rightarrow +\infty$. Observações astronômicas no sistema solar impõem um limite inferior para ω bastante alto. Entretanto, tal resultado corresponde ao limite de campo fraco, e se aplica na hipótese mais simples de uma teoria com ω constante. Em alguns modelos cosmológicos com ω variável, existe um mecanismo atrativo que leva $\omega \rightarrow +\infty$ em tempos longos. Assim, é possível que a relatividade geral não seja adequada para descrever o universo em tempos precoces, ou ainda que requeira correções no limite cosmológico.

Nesta dissertação consideramos a teoria original de Brans-Dicke, com parâmetro ω constante, e associamos à energia escura a equação de estado do vácuo. Investigamos modelos em

que a energia do vácuo decai com a expansão do universo, hipótese que tem sido considerada como uma possível solução para o problema da constante cosmológica, o qual refere-se à questão de por quê o valor observado presentemente para Λ é cerca de 120 ordens de grandeza menor do que o previsto pelas teorias quânticas de campo [10].

A dissertação se organiza da seguinte forma. No próximo capítulo revemos um dos possíveis caminhos de raciocínio que nos levam às equações de Einstein, as equações fundamentais da teoria da Relatividade Geral. O objetivo é tão somente preparar o terreno para uma breve revisão, no capítulo IV, das equações de Brans-Dicke, no contexto das quais encontraremos nossas soluções. Neste sentido, não faremos uma discussão prévia dos fundamentos geométricos dessas teorias, remetendo o leitor à literatura especializada [4, 5].

No capítulo III revemos os modelos de Friedmann, ou seja, a construção de uma métrica espacialmente homogênea e isotrópica e a obtenção das equações de campo correspondentes, no contexto da Relatividade Geral, em presença de um termo cosmológico constante (a constante cosmológica). No capítulo V obteremos então nossas soluções para a métrica de Friedmann espacialmente plana, no contexto da teoria de Brans-Dicke, desta vez com termo cosmológico variável. Alguns gráficos ilustrativos dessas soluções poderão ser encontrados no Apêndice, logo após o capítulo de conclusões. Por fim, listamos um extrato da literatura recente sobre o tema, o qual, reconhecemos, está longe de ser exaustivo.

Designaremos os índices 4-dimensionais do espaço-tempo, que tomam os valores (0,1,2,3), com letras gregas, e os índices do espaço tridimensional, que tomam os valores (1,2,3), com letras latinas. Usaremos o sistema natural de unidades, com $c = 1$, e a assinatura do tensor métrico será $(+, -, -, -)$.

II. AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN DO CAMPO GRAVITACIONAL

Como dito na Introdução, não faremos uma revisão dos fundamentos geométricos da teoria geral da relatividade. Entretanto, para facilitar a compreensão do leitor, antes de começarmos a deduzir as equações do campo gravitacional, explanaremos alguns conceitos básicos.

Na teoria geral da relatividade, o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é definido através da equação

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

onde ds é o elemento de intervalo do espaço-tempo curvo.

A fim de construirmos equações físicas que em um referencial arbitrário tenham a mesma forma que em um referencial galileano, temos que substituir a operação de derivada pela de derivada covariante, a qual para um 4-vetor é definida por

$$C_{\mu;\nu} = \frac{\partial C_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha C_\alpha,$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ é o símbolo de Christoffel. Pode-se mostrar que a relação entre $g_{\mu\nu}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ é dada por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \Gamma_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right).$$

Para definirmos as equações do campo gravitacional, precisamos construir também um tensor que, além do tensor métrico e suas primeiras derivadas, inclua também suas segundas derivadas. Dessa forma, podemos obter o tensor

$$R^\lambda{}_{\mu\nu\beta} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\beta}^\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda.$$

Este tensor é chamado tensor de curvatura, e pode-se mostrar que ele é o único tensor que pode ser construído com o tensor métrico e suas primeiras e segundas derivadas.

Para obter as equações do campo gravitacional devemos lembrar que o mesmo carrega energia e momento, os quais também influenciam na configuração do campo. Portanto, essas equações devem ser equações diferenciais parciais não lineares. Pode-se, assim, desde já, concluir que o princípio de superposição não se aplica a este campo. Entretanto, podemos chegar a essas equações lembrando que em um campo gravitacional forte é sempre possível, em qualquer ponto, definir um sistema de coordenadas localmente inercial, em cuja vizinhança o campo gravitacional é fraco e, portanto, as equações são lineares. Após as

obtermos, fazemos, novamente com base no princípio de equivalência, uma transformação de coordenadas inversa, para chegar às equações de um campo gravitacional qualquer, arbitrariamente forte.

Nesse referencial localmente inercial, como o campo é fraco, podemos usar a lagrangiana da relatividade restrita para obter, no limite não relativístico, $g_{00} = 1 + 2\varphi$ [4], onde φ é o potencial gravitacional determinado pela equação de Poisson $\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho_m$ (G é a constante gravitacional de Newton, e ρ_m é a densidade de matéria). O tensor momento-energia, considerando-se a matéria um fluido perfeito, é dado por

$$T_{\mu\nu}^m = (\rho_m + p_m)u_\mu u_\nu - p_m g_{\mu\nu},$$

onde $u_\mu = \frac{dx_\mu}{ds}$ é a 4-velocidade. Considerando também que a matéria é não relativística, a energia de repouso ρ_m é muito maior que a pressão p_m . Assim, esta equação se torna $T_{\mu\nu}^m = \rho_m u_\mu u_\nu$, e $T_{00}^m \simeq \rho_m$.

Com estas considerações podemos escrever $\nabla^2 g_{00} \simeq 8\pi G T_{00}^m$. Esta equação sugere-nos que as equações do campo devem ter a forma $G_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}^m$, onde $G_{\mu\nu}$ é uma combinação do tensor métrico e suas primeiras e segundas derivadas, e onde k é uma constante de acoplamento. $G_{\mu\nu}$ deve também ser simétrico, e sua derivada covariante $G^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$, pois, devido à conservação da energia-momento, $T^{m\mu}{}_{\nu;\mu} = 0$.

O tensor de curvatura $R^\lambda{}_{\mu\beta\nu}$ é uma combinação das primeiras e segundas derivadas do tensor métrico. Portanto, vamos fazer

$$R_{\mu\nu} + C g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}^m, \quad (1)$$

onde $R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$ é o tensor de Ricci, $R = R^\mu{}_\mu$ é o escalar de curvatura, e C e Λ são constantes. Calculando a derivada covariante de ambos os lados desta equação, obtemos

$$R^\mu{}_{\nu;\mu} + C \delta_\nu^\mu R_{,\mu} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} + C\right) R_{,\nu} = 0,$$

onde, devido à arbitrariedade de R , concluímos que $C = -\frac{1}{2}$. Assim, a equação (1) se torna

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}^m. \quad (2)$$

Tomando o traço da equação (2), obtemos $R = -k T^m - 4\Lambda$, e temos então

$$R_{\mu\nu} = k \left(T_{\mu\nu}^m - \frac{g_{\mu\nu} T^m}{2} \right) - \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (3)$$

Considerando, como exposto acima, que $\rho_m \gg p_m$ ($T^m \simeq T^{m0}$), obtemos

$$R^0_0 = k \left(T^{m0}_0 - \frac{\delta_0^0 T^{m0}_0}{2} \right) - \Lambda \delta_0^0 = \frac{k T^{m0}_0}{2} - \Lambda = \frac{k \rho_m}{2} - \Lambda. \quad (4)$$

A partir das definições do tensor de curvatura e do tensor de Ricci dadas anteriormente, podemos obter

$$R_{00} = \partial_\beta \Gamma_{00}^\beta - \partial_0 \Gamma_{0\beta}^\beta + \Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - \Gamma_{0\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^\beta.$$

Sabendo que, para um campo fraco, podemos desprezar os termos de segunda ordem, e considerando também que para um campo estático todas as derivadas temporais se anulam, temos $R_{00} = \partial_i \Gamma_{00}^i$. Como $R_{00} = g_{00} R^0_0$ e $g_{00} \simeq 1$, temos $R_{00} \simeq R^0_0$. Portanto, a equação (4) se torna

$$\partial_i \Gamma_{00}^i = \frac{k \rho_m}{2} - \Lambda. \quad (5)$$

Mas, como

$$\Gamma_{i,00} = \frac{1}{2} (\partial_0 g_{i0} + \partial_0 g_{i0} - \partial_i g_{00}) = -\frac{1}{2} \partial_i g_{00},$$

então

$$\partial_i \Gamma_{00}^i = \partial^i \Gamma_{i,00} = -\frac{1}{2} \partial^i \partial_i g_{00}.$$

Lembrando que, para campos fracos, $g_{00} = 1 + 2\varphi$ e $\partial^i \partial_i \varphi = -\nabla^2 \varphi$, a equação (5) torna-se

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = \frac{k \rho_m(\vec{r})}{2} - \Lambda. \quad (6)$$

Esta equação, no limite newtoniano, deve se reduzir à equação de Poisson e, portanto, neste limite $\Lambda = 0$ ou é tão pequena que pode ser desprezada. Assim, a equação (6) se torna $\nabla^2 \varphi = \frac{k \rho_m}{2}$, cuja solução é

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{k}{8\pi} \int \frac{\rho_m(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

Se considerarmos que a fonte é pontual e está na origem, temos

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{k}{8\pi} \int \frac{M \delta(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = -\frac{kM}{8\pi r}.$$

Comparando esta equação com o potencial newtoniano $\varphi = -\frac{GM}{r}$, concluímos que $k = 8\pi G$, e a equação (2) se torna, finalmente,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}^m. \quad (7)$$

Estas são as equações do campo gravitacional de Einstein, onde Λ é a constante cosmológica.

III. O MODELO COSMOLÓGICO ISOTRÓPICO DE FRIEDMANN

No estudo do universo em larga escala é possível desprezar as heterogeneidades locais, devidas à acumulação de matéria nas galáxias. Consideramos o universo com a mesma densidade de matéria em todas as regiões do espaço. Também consideramos que não há nenhuma direção privilegiada, ou seja, que o universo é isotrópico em larga escala. A matéria, portanto, não tem, em média, uma direção privilegiada de velocidade. Ao exposto acima chamamos princípio cosmológico, que em resumo refere-se à homogeneidade e isotropia do universo em larga escala. Por este princípio, em todos os instantes de tempo a métrica espacial é a mesma em todos os pontos.

Para construirmos uma métrica isotrópica partimos da analogia geométrica do espaço isotrópico tri-dimensional com a hipersuperfície de uma esfera contida em um espaço 4-dimensional, pois, como sabemos, sobre esta hipersuperfície não há nenhuma direção privilegiada, e a curvatura é a mesma em todos os pontos. O espaço correspondente a esta hipersuperfície é o espaço tri-dimensional com curvatura positiva.

A equação desta hipersuperfície de raio a é

$$x^2 + y^2 + z^2 + x_4^2 = a^2, \quad (8)$$

e o quadrado do elemento de comprimento é dado por

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dx_4^2. \quad (9)$$

Usando-se a equação (8), pode-se eliminar dx_4 na equação (9), obtendo-se

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{(xdx + ydy + zdz)^2}{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}. \quad (10)$$

Se introduzirmos as coordenadas esféricas r , θ e φ , a equação (10) se torna

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (11)$$

onde a é interpretado como um fator de escala e é função somente de t .

No caso do espaço com curvatura negativa, o elemento de comprimento pode ser formalmente obtido da equação (11) substituindo a por ia . Assim, obtemos

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{a^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (12)$$

Vemos assim que as equações (11) e (12) podem ser resumidas em uma só, fazendo-se

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - k\frac{r^2}{a^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (13)$$

onde $k = +1$, se a curvatura do espaço for positiva; $k = -1$, se a mesma for negativa; e $k = 0$, se o espaço for plano, caso em que a equação (13) se reduz à métrica euclidiana

$$dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (14)$$

No caso do espaço com curvatura positiva, também chamado fechado, é possível, para efeito de simplificação, fazer uma transformação de coordenadas, substituindo a coordenada r pelo ângulo χ , através da relação $r = a \sin \chi$, com χ variando de 0 a π . Desta forma, a equação (13) se torna

$$dl^2 = a^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \quad (15)$$

onde a distância a partir da origem das coordenadas é $a\chi$. O volume do espaço tri-dimensional nestas coordenadas é $\int_0^\pi 4\pi a^2 \sin^2\chi(ad\chi) = 2\pi^2 a^3$. Portanto, o espaço tri-dimensional com curvatura positiva é finito, embora ilimitado.

Da mesma forma, no caso do espaço com curvatura negativa, também chamado aberto, faz-se uma transformação de coordenadas $r = a \sinh \chi$, com χ variando de 0 a $+\infty$. Desta forma, a equação (13) se torna

$$dl^2 = a^2[d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \quad (16)$$

e o volume do espaço tri-dimensional é $\int_0^\chi 4\pi a^2 \sinh^2\chi'(ad\chi')$, sendo, portanto, infinito, quando $\chi \rightarrow +\infty$.

No caso do espaço plano, a transformação de coordenadas é simplesmente $r = a\chi$, com χ variando de 0 a $+\infty$. A equação (13) fica então

$$dl^2 = a^2[d\chi^2 + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \quad (17)$$

e o volume do espaço tri-dimensional é $\int_0^\chi 4\pi a^2 \chi'^2(ad\chi')$, sendo também infinito, quando $\chi \rightarrow +\infty$.

As equações (15)-(17) podem ser resumidas na forma

$$dl^2 = a^2[d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \quad (18)$$

onde $f(\chi)$ é igual a $\sin \chi$, $\sinh \chi$ ou χ , conforme o universo seja fechado, aberto ou plano, respectivamente. Ou seja,

$$f(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & (k = 1) \\ \sinh \chi & (k = -1) \\ \chi & (k = 0). \end{cases}$$

Neste modelo isotrópico, o referencial mais conveniente é um sistema de observadores co-móveis, ou seja, que em cada ponto do espaço se movem juntamente com a matéria. A velocidade da matéria neste referencial é nula em todo o espaço, não se estabelecendo, portanto, nenhuma direção privilegiada. Neste referencial, g_{00} não pode depender das coordenadas espaciais, pois, do contrário, a marcação do tempo próprio seria diferente em diferentes pontos do espaço. Pode-se, portanto, através de uma definição adequada da coordenada temporal, escolher $g_{00} = 1$, de maneira que a métrica do espaço-tempo se torna

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 [d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (19)$$

Assim, a variável t é o tempo próprio sincrônico em qualquer ponto do espaço. É conveniente também introduzir o chamado tempo conforme η , através da relação $cdt = ad\eta$. Assim, a equação (19) se torna

$$ds^2 = a^2 [d\eta^2 - d\chi^2 - f^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (20)$$

Para efeito de comparação com as soluções que serão obtidas nesta dissertação, baseadas nas equações de Brans-Dicke, calculemos a solução das equações de Friedmann para o modelo Λ CDM (cold dark matter), com “constante” cosmológica Λ constante.

A equação (20) é chamada métrica de Robertson-Walker. Dela vemos que $g_{00} = a^2$, $g_{11} = -a^2$, $g_{22} = -a^2 f^2(\chi)$, $g_{33} = -a^2 f^2(\chi) \sin^2 \theta$ e $g_{ij} = 0$ (se $i \neq j$). Com isto pode-se obter

$$R^0_0 = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad (21)$$

$$R^1_1 = R^2_2 = R^3_3 = -\frac{2k}{a^2} - \frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (22)$$

$$R = -\frac{6k}{a^2} - \frac{6\ddot{a}}{a} - \frac{6\dot{a}^2}{a^2}, \quad (23)$$

$R^0_i = R^i_0 = 0$ e $R^i_j = 0$ (se $i \neq j$), onde o ponto significa derivada em relação a t .

Usaremos o referencial co-móvel, conforme mencionado acima, no qual temos

$$u^0 = 1,$$

$$u^i = 0. \quad (24)$$

Consideraremos também que o universo está preenchido com um fluido perfeito, e portanto o tensor momento-energia da matéria é dado por

$$T_{\mu\nu}^m = (\rho_m + p_m)u_\mu u_\nu - p_m g_{\mu\nu}. \quad (25)$$

Usando (21), (23), (24) e (25) nas equações de campo obtemos

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G \rho_m}{3}. \quad (26)$$

Por outro lado, usando (22), (23), (24) e (25) nas mesmas equações obtemos

$$-\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} - \frac{2\ddot{a}}{a} + \Lambda = 8\pi G p_m. \quad (27)$$

As equações (26) e (27) podem ser reescritas, respectivamente, na forma

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \left(\rho_m + \frac{\Lambda}{8\pi G} \right), \quad (28)$$

$$-\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} - \frac{2\ddot{a}}{a} = 8\pi G \left(p_m - \frac{\Lambda}{8\pi G} \right), \quad (29)$$

onde na equação (28) o termo $\frac{\Lambda}{8\pi G}$ pode ser interpretado fisicamente como a densidade de energia escura ou densidade de energia do vácuo, $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$. Da mesma forma, na equação (29), o termo $-\frac{\Lambda}{8\pi G}$ pode ser interpretado como a pressão associada à energia escura ou ao vácuo, $p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$. Como Λ é constante, vê-se que tanto ρ_Λ como p_Λ são constantes durante a evolução do universo.

Podemos reescrever as equações (28) e (29) como

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G \rho}{3}, \quad (30)$$

$$-\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} - \frac{2\ddot{a}}{a} = 8\pi G p, \quad (31)$$

onde ρ e p são, respectivamente, a densidade de energia total e pressão total (matéria + vácuo).

Derivando a equação (30) com respeito a t , isolando \ddot{a} , comparando-o com \ddot{a} da equação (31) e usando novamente a equação (30), obtemos

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (32)$$

Esta é a equação da continuidade ou equação de conservação associada ao tensor momento-energia total, a qual pode ser obtida também diretamente de $T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$. À equação (30), por outro lado, chamamos usualmente equação de Friedmann.

Essas duas equações contêm três funções a determinar: ρ , p e a . Portanto, com ajuda da equação de estado da matéria, podemos encontrar suas soluções. Como estamos interessados aqui em soluções para tempos recentes e para um universo espacialmente plano, vamos fazer $k = 0$ e $p_m = 0$. Assim, as equações (30) e (32) se tornam, respectivamente,

$$\rho = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (33)$$

$$\dot{\rho}_m + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_m = 0, \quad (34)$$

onde $H = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble.

Integrando a equação (34), obtemos

$$\rho_m = Aa^{-3}, \quad (35)$$

onde A é uma constante de integração. Levando as equações (33) e (35) em (34), temos

$$\dot{a}^2 = \frac{4\pi GA}{(1+q)a}, \quad (36)$$

onde

$$q \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}$$

é o chamado parâmetro de desaceleração.

Multiplicando ambos os lados da equação (31) por a^2/\dot{a}^2 obtemos, para $k = 0$,

$$H = \left(\frac{\Lambda}{1-2q} \right)^{1/2}, \quad (37)$$

ou ainda

$$\dot{a}^2 = \frac{\Lambda a^2}{1-2q}. \quad (38)$$

Comparando as equações (36) e (38) obtemos

$$a = \left(\frac{4\pi GA}{\Lambda} \right)^{1/3} \left(\frac{1-2q}{1+q} \right)^{1/3}. \quad (39)$$

Se supusermos que $\Lambda > 0$, da equação (39) vemos que o domínio de q é $(-1, 1/2]$, com a variando de 0, quando $q = 1/2$, até $+\infty$, quando q tende assintoticamente para -1 .

A densidade relativa de matéria, Ω_m , definida em relação à densidade crítica $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$, é dada por $\Omega_m = \rho_m/\rho_c = 1 - \Lambda/3H^2$. Substituindo (37) nesta equação, obtemos

$$\Omega_m = \frac{2}{3}(1 + q). \quad (40)$$

Derivando a equação (38) com respeito a t e multiplicando a equação resultante por a/\dot{a}^3 , obtém-se, após o uso de (37), a equação diferencial

$$-(1 + q)(1 - 2q)^{1/2}\Lambda^{1/2} = \dot{q},$$

cuja solução é

$$t = \frac{2 \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1-2q}{3}}}{\sqrt{3\Lambda}}, \quad (41)$$

onde a constante de integração foi tomada igual a zero para que a singularidade ocorra em $t = 0$. Aqui t varia de 0, quando $q = 1/2$, até $+\infty$, quando q tende assintoticamente a -1 .

Multiplicando a equação (37) pela (41) obtemos o parâmetro de idade do universo,

$$Ht = \frac{2 \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1-2q}{3}}}{\sqrt{3(1-2q)}}, \quad (42)$$

onde Ht varia de aproximadamente $2/3$, quando $q = 1/2$, até $+\infty$, quando q tende assintoticamente para -1 . Para $-0,7 < q < -0,4$, correspondente ao intervalo $0,2 < \Omega_m < 0,4$, previsto pelas observações, temos aproximadamente $1,1 > Ht > 0,9$.

Outras soluções possíveis no contexto da Relatividade Geral, não discutidas aqui, são aquelas com Λ variável. Esta possibilidade tem sido bastante explorada na literatura (ver, por exemplo, [11–14]). Como discutido na Introdução, o objetivo de se usar ansatz com Λ variável é tentar resolver o problema da constante cosmológica. O decaimento do vácuo nesses modelos é concomitante com a criação de matéria, pois o tensor momento-energia total é conservado. Em alguns desses modelos, o parâmetro de desaceleração e a densidade relativa de matéria variam, da mesma forma que no modelo Λ CDM estudado acima, e, como neste último, seus valores atuais estão de acordo com as observações. (Vale lembrar que no modelo de Einstein-de Sitter ($\Lambda = 0$), estes valores são constantes ($q = 1/2$ e $\Omega_m = 1$)). Os valores obtidos para o parâmetro de idade também são aproximadamente os mesmos que os obtidos acima para o modelo Λ CDM, os quais estão também de acordo com os limites observados, $0,8 < Ht < 1,3$, o que corresponde, aproximadamente, a $11,2 \text{ Gano} < t < 18,2 \text{ Gano}$. (No modelo de Einstein-de Sitter, por outro lado, obtem-se $Ht = 2/3$, portanto em desacordo com a observação).

IV. SUMÁRIO DA TEORIA DE BRANS-DICKE

O ponto de partida da teoria de Brans-Dicke é o princípio de Mach, o qual afirma que a inércia de um corpo material é devida à interação entre este e a distribuição de matéria do universo, e não uma característica intrínseca do corpo, como na mecânica de Newton. Uma maneira de definirmos a massa inercial de um corpo é identificá-la com sua massa gravitacional, possibilidade esta que constitui uma manifestação do princípio de equivalência. Por outro lado, a massa gravitacional pode ser definida através da aceleração gravitacional por ela gerada, ou seja, através da grandeza GM/r^2 , medida em um ponto qualquer do espaço.

Vemos assim que a definição de massa inercial, de sua grandeza e unidade, é equivalente à definição da grandeza e unidade da constante gravitacional G . Se, segundo Mach, a massa inercial de um corpo depende da distribuição de matéria no universo, com a variação desta última variará também a primeira, ou, o que é equivalente, variará a constante gravitacional. Na teoria de Brans-Dicke, esta última está relacionada com o valor médio de um campo escalar ϕ , que por sua vez depende da distribuição de matéria no universo.

Com as quantidades G , \hbar , c e H , onde H é o parâmetro de Hubble medido presentemente, é possível construir uma quantidade com dimensão de massa, da mesma ordem de grandeza da massa do pion: $\left(\frac{\hbar^2 H}{Gc}\right)^{1/3} \simeq m_\pi$. Dirac sugeriu que esta relação, embora inexplicável, não é uma coincidência, e deve permanecer válida para qualquer valor de H , ou seja, ao longo da evolução do universo (a consideraremos válida ao menos durante a evolução recente). Para isso, é necessário que ao menos uma das constantes G , \hbar , c ou m_π varie com o tempo. Tendo em vista não alterar os bem estabelecidos modelos microscópicos da matéria, Dirac propôs, então, que $G \propto H$. Esta relação será por nós usada mais adiante.

A teoria de Brans-Dicke começa estabelecendo a equação de campo $\square^2 \phi = 4\pi \lambda T^\mu{}_\mu$ para o campo escalar ϕ , onde $\square^2 \phi = \phi_{;\mu}{}^\mu$ é o D'Alambertiano de ϕ , λ é uma constante de acoplamento, e $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia da matéria (em nosso caso, matéria + vácuo). Podemos fazer uma estimativa do valor médio de ϕ supondo que o universo é uma esfera contendo um fluido cósmico com densidade $\rho \sim 10^{-29} g/cm^3$ e raio $R \sim 10^{28} cm$, encontrando $\langle \phi \rangle \sim 10^{28} \lambda g/cm$. Associando esta grandeza com $\frac{1}{G} = 1,35 \times 10^{28} g/cm$, vemos que λ é uma constante adimensional da ordem da unidade.

Estas considerações levaram Brans e Dicke a substituir, nas equações de Einstein, G por

$\frac{1}{\phi}$, e a incluir nas mesmas um tensor momento-energia $T_{\mu\nu}^\phi$ para o campo escalar ϕ . Assim, as equações do campo gravitacional se tornam

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi}{\phi}(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^\phi), \quad (43)$$

onde ϕ , em escala cosmológica, só depende do tempo.

Multiplicando esta equação por ϕ e tomando a derivada covariante, obtemos

$$(R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R)\phi_{,\mu} = 8\pi T^{\phi\mu}{}_{\nu;\mu}, \quad (44)$$

pois, pela identidade de Bianchi, a derivada covariante do lado esquerdo de (43) é zero, e postulamos a conservação independente do momento-energia da matéria, ou seja, $T^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$, necessária à não violação do princípio de equivalência.

Da equação (44) podemos obter $T^{\phi\mu}{}_\nu$, fazendo inicialmente

$$T^{\phi\mu}{}_\nu = A(\phi)\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + B(\phi)\delta^\mu_\nu\phi_{,\rho}\phi_{,\rho} + C(\phi)\phi_{,\mu;\nu} + \delta^\mu_\nu D(\phi)\Gamma^2\phi. \quad (45)$$

Tomando o traço de (43), obtemos

$$R = -\frac{8\pi}{\phi} \left[\frac{\Gamma^2\phi}{4\pi\lambda} + (A(\phi) + 4B(\phi))\phi_{,\mu}\phi_{,\mu} + (C(\phi) + 4D(\phi))\Gamma^2\phi \right].$$

Substituindo este valor de R e usando (45) em (44), podemos obter as expressões para $A(\phi)$, $B(\phi)$, $C(\phi)$ e $D(\phi)$. Então, a equação (43) pode ser escrita na forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi}{\phi}T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\rho}\phi_{,\rho} \right) + \frac{1}{\phi}(\phi_{,\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\Gamma^2\phi), \quad (46)$$

onde

$$\omega = \frac{1}{\lambda} - \frac{3}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3 + 2\omega}.$$

Sendo λ uma constante positiva, temos $\omega > -\frac{3}{2}$. Com este valor de λ , a equação de campo para ϕ pode ser reescrita como

$$\Gamma^2\phi = \frac{8\pi}{3 + 2\omega}T^\mu{}_\mu. \quad (47)$$

A equação (46) pode também ser escrita como

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} \left[T_{\mu\nu} - \left(\frac{1 + \omega}{3 + 2\omega} \right) g_{\mu\nu}T^\lambda{}_\lambda \right] + \frac{\omega}{\phi^2}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + \frac{1}{\phi}\phi_{,\mu;\nu}. \quad (48)$$

Na aplicação da teoria de Brans-Dicke à cosmologia, consideramos o universo homogêneo e isotrópico, e portanto usamos a métrica de Robertson-Walker,

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - d\chi^2 - f^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)].$$

Com esta métrica podemos obter

$$\Gamma_{00}^0 = \dot{a}, \quad (49)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = -\frac{\dot{a}}{a^2}g_{ij}, \quad (50)$$

$$R^0_0 = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad (51)$$

$$R^1_1 = R^2_2 = R^3_3 = -\frac{2k}{a^2} - \frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (52)$$

$R^0_i = R^i_0 = 0$ e $R^i_j = 0$ (se $i \neq j$).

Consideramos também, como nos modelos de Friedmann, que o universo é preenchido com um fluido perfeito, portanto

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (53)$$

e tomamos um sistema de observadores co-móveis, ou seja,

$$\begin{aligned} u^0 &= 1, \\ u^i &= 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Usando (49), (51), (53) e (54) em (48), obtemos

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi}{\phi} \left[\frac{(2+\omega)\rho + 3(1+\omega)p}{3+2\omega} \right] - \omega \frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} - \frac{\ddot{\phi}}{\phi}. \quad (55)$$

Usando ainda (50), (52), (53) e (54) em (48), temos

$$-\frac{2k}{a^2} - \frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi}{\phi} \left[\frac{(1+\omega)\rho - \omega p}{3+2\omega} \right] + \frac{\dot{\phi}\dot{a}}{\phi a}. \quad (56)$$

E substituindo (49), (50), (53) e (54) em (47), obtemos

$$\frac{d(\dot{\phi}a^3)}{dt} = \frac{8\pi}{3+2\omega}(\rho - 3p)a^3. \quad (57)$$

Isolando $\frac{\ddot{a}}{a}$ na equação (56), $\frac{\ddot{\phi}}{\phi}$ na equação (57) e substituindo em (55), obtemos, depois de algumas simplificações,

$$\frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi\rho}{3\phi} - \frac{\dot{\phi}\dot{a}}{\phi a} + \frac{\omega\dot{\phi}^2}{6\phi^2}. \quad (58)$$

Como já dito, a lei de conservação para a matéria, $T^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$, deve continuar válida, pois do contrário, o princípio de equivalência não seria satisfeito. Portanto,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (59)$$

As equações (57), (58) e (59) são as equações fundamentais da cosmologia de Brans-Dicke, as quais iremos usar nesta dissertação.

V. SOLUÇÕES COM TERMO COSMOLÓGICO VARIÁVEL

Nosso objetivo nesta dissertação é encontrar soluções da teoria de Brans-Dicke que satisfaçam a uma particular lei de variação para G . Como citado anteriormente, vamos usar a relação de Eddington-Dirac, $G \approx \frac{H}{m_\pi^3}$, onde m_π é a massa do pion. Tomaremos, então, $G = \frac{H}{8\pi\lambda}$, onde λ é da ordem de grandeza de m_π^3 [15–17]. Além disso, como é usual, vamos relacionar o campo escalar de Brans-Dicke com a “constante” gravitacional através de $\phi = G_0/G$, onde G_0 é uma constante positiva da ordem da unidade.

Consideraremos, junto com a lei de variação para G dada acima, dois diferentes ansatz. O primeiro é dado por $\rho = \frac{3\alpha H^2}{8\pi G}$, onde $\rho = \rho_m + \rho_\Lambda$ é a densidade total e α é uma constante adimensional da ordem da unidade. Este ansatz é justificado pelas observações, as quais indicam que $\rho_m \approx \frac{\rho_c}{3}$, onde $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$ é a densidade crítica. Por outro lado, sabemos que ρ_Λ tem, quando muito, a mesma ordem de grandeza que ρ_m , caso contrário sua presença seria mais evidente.

O segundo ansatz será dado por $\Lambda = \beta H^2$, onde β é uma constante da ordem da unidade. Estamos, assim, inferindo uma lei de variação para o termo cosmológico, a qual tem sido bastante considerada na literatura, com base em diferentes argumentos teóricos [12, 16, 18–20]. Mostraremos que este segundo ansatz leva a um conjunto de soluções mais amplo que o primeiro, contendo as soluções daquele como caso particular.

Vamos procurar soluções para tempos recentes, ou seja, com $p_m = 0$, e para um universo espacialmente plano. Tomaremos, para o termo cosmológico, a equação de estado do vácuo, $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$.

A. 1º ANSATZ

Fazendo $p_m = 0$, $k = 0$ e usando a equação de estado do vácuo, $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$, as equações de Brans-Dicke podem ser escritas como

$$\frac{d(\dot{\phi}a^3)}{dt} = \frac{8\pi}{3+2\omega} (\rho + 3\rho_\Lambda) a^3, \quad (60)$$

$$\dot{\rho} = -3H\rho_m, \quad (61)$$

$$H^2 = \frac{8\pi\rho}{3\phi} - \frac{\dot{\phi}}{\phi}H + \frac{\omega}{6} \frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2}. \quad (62)$$

Usando nosso ansatz $\rho = \frac{3\alpha H^2}{8\pi G}$ e $G = \frac{H}{8\pi\lambda}$, obtemos

$$\rho = 3\alpha\lambda H, \quad (63)$$

$$\phi = \frac{8\pi\lambda G_0}{H}, \quad (64)$$

e

$$\dot{\phi} = 8\pi\lambda G_0(1+q). \quad (65)$$

Com ajuda das equações (63)-(65), podemos reescrever (60)-(62) na forma

$$(3+2\omega)\lambda G_0[\dot{q} + (1+q)3H] = 3\alpha\lambda H + 3\rho_\Lambda, \quad (66)$$

$$\rho_m = \alpha\lambda H(1+q), \quad (67)$$

$$\frac{\alpha}{G_0} = 2+q - \frac{\omega}{6}(1+q)^2. \quad (68)$$

A equação (68) nos diz que q é constante, pois α , G_0 e ω o são. Assim, $\dot{q} = 0$, e a equação (66) se reduz a

$$(3+2\omega)\lambda G_0(1+q)H = \alpha\lambda H + \rho_\Lambda. \quad (69)$$

Podemos também verificar, com ajuda de (67), que $\rho_m \propto H$.

Usando as equações (63) e (67), podemos obter a densidade do vácuo,

$$\rho_\Lambda = \alpha\lambda H(2-q). \quad (70)$$

Substituindo $\lambda = \frac{H}{8\pi G}$, obtemos $\rho_\Lambda = \frac{\alpha(2-q)H^2}{8\pi G}$. Como $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$, concluímos que $\Lambda = \alpha(2-q)H^2$, o que nos sugere nosso 2º ansatz, com $\beta = \alpha(2-q)$, a ser usado mais adiante. Esta relação tem sido considerada, em diferentes contextos teóricos, na literatura recente [16, 20, 21].

Levando (63) e (67) em (61), obtemos

$$\frac{1}{H} = (1+q)t + C,$$

onde C é uma constante de integração. Faremos $C = 0$, de forma que $H \rightarrow \infty$ para $t \rightarrow 0$.

Temos então

$$H = \frac{1}{1+q} \frac{1}{t}. \quad (71)$$

Substituindo H por \dot{a}/a em (71), temos ainda

$$a = At^{\frac{1}{1+q}}, \quad (72)$$

onde A é outra constante de integração.

A densidade relativa de matéria, definida em relação à densidade crítica, pode ser obtida usando-se $G = \frac{H}{8\pi\lambda}$. Assim, $\rho_c = 3\lambda H$, e, usando (67), obtemos

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} = \frac{\alpha(1+q)}{3}. \quad (73)$$

Substituindo ρ_Λ da equação (70) na equação (69), temos ainda

$$\frac{\alpha}{G_0} = \frac{(3+2\omega)(1+q)}{3-q}. \quad (74)$$

Comparando os valores de $\frac{\alpha}{G_0}$ dados pelas equações (68) e (74), podemos obter uma relação entre ω e q , dada por

$$(3+2\omega)(1+q) = \left[2+q - \frac{\omega}{6}(1+q)^2\right](3-q). \quad (75)$$

Podemos também, eliminando ω das equações (68) e (74), obter $\frac{\alpha}{G_0}$ em função somente de q ,

$$\frac{\alpha}{G_0} = \frac{12(2+q) + 3(1+q)^2}{(1+q)(3-q) + 12}. \quad (76)$$

Com essas relações em mãos, podemos obter resultados passíveis de comparação com observações correntes [22]. Se, por exemplo, $q = 0$, das equações (75) e (76) obtemos $\omega = 6/5$ e $\alpha/G_0 = 9/5$. De (71) obtemos $Ht = 1$. Da equação (72) temos $a = At$. E de (73), $\Omega_m/\alpha = 1/3$. Como $\alpha \approx 1$, podemos ver que $\Omega_m \approx 1/3$, em acordo com estimativas astronômicas [23]. O parâmetro de idade Ht está também em muito bom acordo com observações de aglomerados globulares [24].

Se, por outro lado, fizéssemos $q = -1$, ao invés da equação (71) obteríamos $H =$ constante, ou seja, o universo de de Sitter, com $\rho_m = 0$ e ρ_Λ constante. Vale notar, porém, que $q = -1$ não satisfaz a equação (75), ou seja, o universo de de Sitter não satisfaz as equações de Brans-Dicke para este ansatz.

B. 2º ANSATZ

Da mesma forma que no primeiro ansatz, vamos partir das equações de Brans-Dicke com $p_m = 0$ e $k = 0$. Usando a equação de estado do vácuo, $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$, temos

$$\frac{d(\dot{\phi}a^3)}{dt} = \frac{8\pi}{3+2\omega}(\rho + 3\rho_\Lambda)a^3, \quad (77)$$

$$\dot{\rho} = -3H\rho_m, \quad (78)$$

$$H^2 = \frac{8\pi\rho}{3\phi} - \frac{\dot{\phi}}{\phi}H + \frac{\omega}{6}\frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2}. \quad (79)$$

Tomando nosso ansatz $\Lambda = \beta H^2$ e $G = \frac{H}{8\pi\lambda}$, e lembrando que $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$, obtemos

$$\rho_\Lambda = \beta\lambda H. \quad (80)$$

Além disso, da mesma forma que no primeiro ansatz, temos também

$$\phi = \frac{8\pi\lambda G_0}{H} \quad (81)$$

e

$$\dot{\phi} = 8\pi\lambda G_0(1+q). \quad (82)$$

Usando as equações (80)-(82), podemos reescrever (77)-(79) na forma

$$(3+2\omega)\lambda G_0[\dot{q} + 3H(1+q)] = \rho + 3\beta\lambda H, \quad (83)$$

$$\dot{\rho} + 3H\rho - 3\beta\lambda H^2 = 0, \quad (84)$$

$$\rho = 3\lambda G_0 H \left[2 + q - \frac{\omega}{6}(1+q)^2 \right]. \quad (85)$$

Temos aqui um sistema solúvel, de três equações com três funções a determinar, H , ρ e q .

Substituindo ρ dada por (85) na equação (83), obtemos

$$\frac{\beta}{G_0} = \frac{(3+2\omega)[\dot{q} + 3H(1+q)] - 3H[2 + q - \frac{\omega}{6}(1+q)^2]}{3H}. \quad (86)$$

Desta forma, sabendo-se que $\frac{\beta}{G_0}$ é constante, ficamos diante de duas possibilidades: ou $\dot{q} = 0$, caso em que temos uma simples relação entre q e $\frac{\beta}{G_0}$; ou (86) é uma equação de evolução, com $\dot{q} \neq 0$.

1. O caso $\dot{q} = 0$

Neste caso, a equação (86) se torna

$$\frac{\beta}{G_0} = (3+2\omega)(1+q) - \left[2 + q - \frac{\omega}{6}(1+q)^2 \right]. \quad (87)$$

Usando (85) em (84), obtemos, por integração,

$$\frac{1}{H} = \frac{3G_0[2 + q - \frac{\omega}{6}(1+q)^2] - \beta}{G_0[2 + q - \frac{\omega}{6}(1+q)^2]}t + C.$$

Podemos fazer $C = 0$, de forma que $H \rightarrow \infty$ para $t \rightarrow 0$. Logo,

$$H = \frac{n}{t}, \quad (88)$$

onde

$$n = \frac{G_0[2 + q - \frac{\omega}{6}(1 + q)^2]}{3G_0[2 + q - \frac{\omega}{6}(1 + q)^2] - \beta}. \quad (89)$$

Da equação (88), substituindo H por $\frac{\dot{a}}{a}$, obtemos

$$a = At^n, \quad (90)$$

onde A é uma constante de integração.

Por outro lado, de (90) podemos obter $q = \frac{1-n}{n}$. Portanto,

$$n = \frac{1}{1+q}. \quad (91)$$

Podemos assim escrever as equações (88) e (90) como

$$H = \frac{1}{1+q} \frac{1}{t}, \quad (92)$$

$$a = At^{\frac{1}{1+q}}. \quad (93)$$

Substituindo n da equação (89) em (91), obtemos

$$\frac{\beta}{G_0} = \left[2 + q - \frac{\omega}{6}(1 + q)^2 \right] (2 - q). \quad (94)$$

Com a equação (94) podemos obter

$$\rho_\Lambda = \beta\lambda H = \lambda G_0 H \left[2 + q - \frac{\omega}{6}(1 + q)^2 \right] (2 - q). \quad (95)$$

Usando as equações (85) e (95), temos ainda

$$\rho_m = \rho - \rho_\Lambda = \lambda G_0 H \left[2 + q - \frac{\omega}{6}(1 + q)^2 \right] (1 + q). \quad (96)$$

Para obtermos a densidade relativa de matéria, definida em relação à densidade crítica, precisamos calcular antes esta última. Usando nosso ansatz $G = \frac{H}{8\pi\lambda}$, temos

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} = 3\lambda H. \quad (97)$$

Logo, das equações (94), (96) e (97), obtemos

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} = \frac{\beta}{3} \left(\frac{1+q}{2-q} \right). \quad (98)$$

Comparando $\frac{\beta}{G_0}$ dado por (87) - obtido usando-se as equações (83) e (85) - com aquele dado por (94) - obtido com base nas equações (84) e (85) -, podemos obter uma relação entre ω e q ,

$$(3 + 2\omega)(1 + q) = \left[2 + q - \frac{\omega}{6}(1 + q)^2\right](3 - q). \quad (99)$$

Podemos também, eliminando ω das equações (87) e (94), obter $\frac{\beta}{G_0}$ em função somente de q ,

$$\frac{\beta}{G_0} = \frac{12(2 + q) + 3(1 + q)^2}{(1 + q)(3 - q) + 12}(2 - q). \quad (100)$$

Vamos agora comparar os resultados deste ansatz ($\Lambda = \beta H^2$) com os do primeiro ($\rho = \frac{3\alpha H^2}{8\pi G}$). Se compararmos o valor de ρ dado por (85) com o valor obtido da equação (63) do primeiro ansatz, obtemos

$$\alpha = G_0 \left[2 + q - \frac{\omega}{6}(1 + q)^2\right], \quad (101)$$

que é igual à equação (68) do primeiro ansatz. Então, a equação (95) pode ser escrita como

$$\rho_\Lambda = \alpha \lambda H(2 - q), \quad (102)$$

que é idêntica à equação (70) do primeiro ansatz. A equação (96), por sua vez, pode ser reescrita como

$$\rho_m = \alpha \lambda H(1 + q), \quad (103)$$

que equivale à equação (67) do primeiro ansatz.

A equação (94) pode ser posta na forma

$$\beta = \alpha(2 - q), \quad (104)$$

já antecipada no primeiro ansatz. Usando a equação (104), podemos verificar que as equações (98) e (100) são idênticas às equações (73) e (76) do primeiro ansatz. Por fim, podemos verificar que as equações (92), (93) e (99) são iguais às equações (71), (72) e (75), respectivamente, do primeiro ansatz.

Concluimos, assim, que na teoria de Brans-Dicke o ansatz $\Lambda = \beta H^2$, com q constante, é equivalente ao ansatz $\rho = \frac{3\alpha H^2}{8\pi G}$ [25].

2. O caso $\dot{q} \neq 0$

Na equação diferencial (86), substituindo H por $\frac{\dot{a}}{a}$ e separando as variáveis, obtemos

$$\frac{dq}{\frac{\omega}{6} \left[\left(\frac{G_0(6\omega+6)^2 + 6\omega(G_0+\beta)}{G_0\omega^2} \right) - \left(q + \frac{6+7\omega}{\omega} \right)^2 \right]} = \frac{3}{3+2\omega} \frac{da}{a}.$$

Analisaremos inicialmente o caso em que a grandeza $\frac{G_0(6\omega+6)^2 + 6\omega(G_0+\beta)}{G_0\omega^2}$ é positiva. Nas seções 2.3 e 2.4 analisaremos os casos em que a mesma é negativa ou nula, respectivamente.

Se $\frac{G_0(6\omega+6)^2 + 6\omega(G_0+\beta)}{G_0\omega^2} > 0$, podemos integrar esta equação fazendo

$$\kappa^2 = \frac{G_0(6\omega+6)^2 + 6\omega(G_0+\beta)}{G_0\omega^2}$$

e

$$z = q + \frac{6+7\omega}{\omega}.$$

Assim, obtemos

$$\frac{6}{\omega} \int \frac{dz}{\kappa^2 - z^2} = \frac{3}{3+2\omega} \int \frac{da}{a}.$$

Sua solução é dada por

$$a = A \left| \frac{\kappa + q + \frac{6+7\omega}{\omega}}{\kappa - q - \frac{6+7\omega}{\omega}} \right|^{\frac{3+2\omega}{\omega\kappa}},$$

onde A é uma constante de integração.

Fazendo $B = \kappa + \frac{6+7\omega}{\omega}$, $C = \kappa - \frac{6+7\omega}{\omega}$ e $D = \frac{3+2\omega}{\omega\kappa}$, temos

$$a = A \left| \frac{B+q}{C-q} \right|^D. \quad (105)$$

Se

$$\frac{B+q}{C-q} < 0 \Rightarrow a = A \left(\frac{B+q}{q-C} \right)^D. \quad (106)$$

Se

$$\frac{B+q}{C-q} > 0 \Rightarrow a = A \left(\frac{B+q}{C-q} \right)^D. \quad (107)$$

Vamos resolver as equações (106) e (107), de forma a encontrar as funções q , H e ρ .

2.1 - Solução da equação (106)

Fazendo $x = \frac{a}{A}$ e invertendo a equação (106) obtemos

$$q = \frac{B + Cx^{\frac{1}{D}}}{x^{\frac{1}{D}} - 1}. \quad (108)$$

Com a definição de q , a mesma se torna

$$\dot{x}^2(B + Cx^{\frac{1}{D}}) + x\ddot{x}(x^{\frac{1}{D}} - 1) = 0.$$

Fazendo $y = \dot{x}$ e $y' = \frac{dy}{dx}$, temos

$$y(B + Cx^{\frac{1}{D}}) + y'x(x^{\frac{1}{D}} - 1) = 0,$$

cuja solução é

$$y(x) = \frac{C_1 x^B}{(x^{\frac{1}{D}} - 1)^{D(B+C)}},$$

onde C_1 é uma constante de integração.

É fácil ver que $H = \frac{y}{x}$, o que leva a

$$H(x) = \frac{C_1 x^{B-1}}{(x^{\frac{1}{D}} - 1)^{D(B+C)}}. \quad (109)$$

Por outro lado, temos $dt = \frac{dx}{y}$, de forma que

$$t = \int \frac{(x^{\frac{1}{D}} - 1)^{D(B+C)}}{C_1 x^B} dx. \quad (110)$$

As equações (108)-(110) são soluções das equações (83) e (85) de Brans-Dicke. Vamos verificar agora se elas satisfazem a terceira das equações de Brans-Dicke, a equação (84).

Fazendo $\rho' = \frac{d\rho}{dx}$ e usando ρ dada por (85), a equação (84) se torna

$$3\lambda G_0 \left\{ \frac{dH}{dx} \left[2 + q - \frac{\omega}{6}(1+q)^2 \right] + H \frac{dq}{dx} \left[\frac{3 - \omega(1+q)}{3} \right] \right\} + \\ + \frac{3}{x} \left\{ 3\lambda G_0 H \left[2 + q - \frac{\omega}{6}(1+q)^2 \right] - \beta \lambda H \right\} = 0.$$

Usando as equações (108) e (109), obtemos

$$\frac{\beta}{G_0} = - \left\{ \frac{(C+1)x^{\frac{1}{D}} + (B-1)}{x^{\frac{1}{D}} - 1} \left[2 + q - \frac{\omega}{6}(1+q)^2 \right] + \frac{(B+C)x^{\frac{1}{D}}}{D(x^{\frac{1}{D}} - 1)^2} \left[\frac{3 - \omega(1+q)}{3} \right] \right\} + \\ + 3 \left[2 + q - \frac{\omega}{6}(1+q)^2 \right].$$

Substituindo nesta equação o valor de x dado por (106) (após fazer $x = \frac{a}{A}$), obtemos então

$$\frac{\beta}{G_0} = 4 - \frac{\omega}{3} - \frac{BC(\omega - 3)}{3D(B+C)} + \left[\frac{(B-C)(\omega - 3) - BC\omega}{3D(B+C)} - \frac{\omega}{2} \right] q +$$

$$+ \left[\frac{\omega(B-C) + \omega - 3}{3D(B+C)} - 1 \right] q^2 + \left[\frac{\omega}{3D(B+C)} + \frac{\omega}{6} \right] q^3. \quad (111)$$

Nesta equação, ω , $\frac{\beta}{G_0}$, B , C , e D são constantes. Portanto, para q variável, os coeficientes de q , q^2 e q^3 devem ser nulos simultânea e identicamente. Isto ocorre somente para $\omega = -1$ e $\frac{\beta}{G_0} = -3$. Como G_0 é positivo, concluímos que β é negativo, ou seja, que a “constante” cosmológica (e, portanto, a energia do vácuo) tem que ser negativa.

Temos, então, $B = \sqrt{12} + 1$, $C = \sqrt{12} - 1$ e $D = -\frac{1}{\sqrt{12}}$. Assim, as equações (106), (108)-(110) podem ser escritas como

$$x = \left(\frac{\sqrt{12} + 1 + q}{q - \sqrt{12} + 1} \right)^{-\frac{1}{\sqrt{12}}}, \quad (112)$$

$$q = \frac{\sqrt{12} + 1 + (\sqrt{12} - 1)x^{-\sqrt{12}}}{x^{-\sqrt{12}} - 1}, \quad (113)$$

$$H = C_1 x^{\sqrt{12}} (x^{-\sqrt{12}} - 1)^2, \quad (114)$$

$$C_1 t = \frac{1}{\sqrt{12} (x^{-\sqrt{12}} - 1)}. \quad (115)$$

Na última delas, escolhemos convenientemente uma segunda constante de integração, de forma que $a \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$.

As equações (113)-(115) estão representadas nos gráficos 1 e 2 do Apêndice. Observando os gráficos de (113) e (115), verificamos que a equação (106) dá origem a dois universos distintos. Em um deles, temos $a = 0$ em $t = 0$ e, quando $t \rightarrow +\infty$, $\frac{a}{A} \rightarrow 1$ assintoticamente. Ao mesmo tempo, $q = \sqrt{12} - 1$ em $a = 0$, tendendo a $+\infty$ assintoticamente. Sendo q positivo, a expansão é desacelerada, com sua velocidade tendendo a zero quando $\frac{a}{A} \rightarrow 1$.

No segundo caso, temos a origem do tempo em $-\infty$, com a se expandindo desde o valor assintótico $\frac{a}{A} = 1$ até $\frac{a}{A} \rightarrow +\infty$, para $C_1 t \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{12}}$. Por outro lado, q é inicialmente $-\infty$, quando $\frac{a}{A} \rightarrow 1$, e cresce tendendo assintoticamente para $-(\sqrt{12} + 1)$, quando $\frac{a}{A} \rightarrow +\infty$. Sendo q negativo, a expansão é acelerada, ou seja, o fator de escala deste universo tende desenfreiadamente para $+\infty$.

Usando a equação (112), podemos expressar as equações (114) e (115) em função de q :

$$H = \frac{48C_1}{q^2 + 2q - 11} \quad (116)$$

e

$$C_1 t = \frac{q - \sqrt{12} + 1}{24}, \quad (117)$$

onde o domínio de q é $[\sqrt{12} - 1, +\infty)$, em um universo, e $(-\infty, -\sqrt{12} - 1)$, no outro. A equação (116) está representada no gráfico 3 do Apêndice.

O parâmetro de idade pode ser obtido usando as equações (116) e (117), levando a

$$Ht = \frac{2q - 2\sqrt{12} + 2}{q^2 + 2q - 11} \quad (118)$$

(ver gráfico 4).

Usando as equações (80) e (85), obtemos

$$\rho_m = \rho - \rho_\Lambda = 3\lambda G_0 H \left[3 + q + \frac{1}{6}(1 + q)^2 \right].$$

Substituindo nesta a equação (116), temos

$$\rho_m = 24\lambda G_0 C_1 \left(\frac{q^2 + 8q + 19}{q^2 + 2q - 11} \right) \quad (119)$$

(ver gráfico 5).

A densidade relativa de matéria, definida em relação à densidade crítica, pode ser obtida com ajuda das equações (116) e (119), resultando em

$$\frac{\Omega_m}{G_0} = \frac{\rho_m}{3\lambda G_0 H} = -\frac{\rho_m}{\rho_\Lambda} = \frac{1}{6}(q^2 + 8q + 19). \quad (120)$$

As equações (119) e (120) podem ser expressas em função de x , com o uso da equação (113). Assim, temos

$$\frac{\rho_m}{3\lambda G_0 C_1} = (4 - \sqrt{12})x^{\sqrt{12}} + (4 + \sqrt{12})x^{-\sqrt{12}} \quad (121)$$

e

$$\frac{\Omega_m}{G_0} = \frac{(4 + \sqrt{12})x^{-2\sqrt{12}} + 4 - \sqrt{12}}{x^{-2\sqrt{12}} - 2x^{-\sqrt{12}} + 1}, \quad (122)$$

representadas no gráfico 6 do Apêndice.

Substituindo a equação (116) em (80), obtemos ainda

$$\frac{\rho_\Lambda}{3\lambda G_0 C_1} = -\frac{48}{q^2 + 2q - 11} \quad (123)$$

(ver o gráfico 7).

2.2 - Solução da equação (107)

Fazendo as mesmas transformações e seguindo os mesmos passos que foram usados na solução da equação (106), obtemos as seguintes equações:

$$q = \frac{Cx^{\frac{1}{D}} - B}{x^{\frac{1}{D}} + 1}, \quad (124)$$

$$H = \frac{C_1 x^{B-1}}{\left(x^{\frac{1}{D}} + 1\right)^{D(B+C)}}, \quad (125)$$

e

$$t = \int \frac{\left(x^{\frac{1}{D}} + 1\right)^{D(B+C)}}{C_1 x^B} dx, \quad (126)$$

com B , C e D definidos como antes.

As equações (124)-(126) são soluções das equações (83) e (85) de Brans-Dicke. Vamos verificar também se satisfazem à terceira equação de campo, a (84). Novamente, fazendo as mesmas transformações e seguindo os mesmos passos usados na solução da equação (106), chegamos à mesma equação (111) obtida anteriormente. Como já vimos, somente com $\omega = -1$ e $\frac{\beta}{G_0} = -3$ se anulam simultaneamente os coeficientes de q , q^2 e q^3 nessa equação. Logo, da mesma forma que antes, $B = \sqrt{12} + 1$, $C = \sqrt{12} - 1$, e $D = -\frac{1}{\sqrt{12}}$.

Portanto, as equações (107) e (124)-(126) podem ser escritas como

$$x = \left(\frac{\sqrt{12} + 1 + q}{\sqrt{12} - 1 - q} \right)^{-\frac{1}{\sqrt{12}}}, \quad (127)$$

$$q = \frac{(\sqrt{12} - 1)x^{-\sqrt{12}} - \sqrt{12} - 1}{x^{-\sqrt{12}} + 1}, \quad (128)$$

$$H = C_1 x^{\sqrt{12}} \left(x^{-\sqrt{12}} + 1 \right)^2, \quad (129)$$

$$C_1 t = -\frac{1}{\sqrt{12} \left(x^{\sqrt{12}} + 1 \right)} + \frac{1}{\sqrt{12}}. \quad (130)$$

Na última delas, escolhemos a segunda constante de integração de forma que $a \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$.

As equações (128)-(130) estão representadas nos gráficos 8 e 9 do Apêndice. Observando os gráficos de (128) e (130), verificamos que a equação (107) gera apenas um universo. Temos $a = 0$ em $t = 0$, e $a \rightarrow +\infty$ quando $C_1 t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{12}}$. Por outro lado, $q = \sqrt{12} - 1$ em $a = 0$,

diminui à medida em que a cresce, torna-se negativo e, quando $a \rightarrow +\infty$, $q \rightarrow -\sqrt{12} - 1$. O fator de desaceleração é positivo até $\frac{a}{A} \simeq 0,8$, tornando-se negativo a partir de então.

Usando a equação (127), podemos expressar as equações (129) e (130) em função de q :

$$H = -\frac{48C_1}{q^2 + 2q - 11} \quad (131)$$

e

$$C_1 t = -\frac{q - \sqrt{12} + 1}{24}, \quad (132)$$

onde o domínio de q é $(-\sqrt{12} - 1, \sqrt{12} - 1]$ (ver o gráfico 10).

O parâmetro de idade, por sua vez, pode ser obtido usando-se as equações (131) e (132), levando a

$$Ht = \frac{2q - 2\sqrt{12} + 2}{q^2 + 2q - 11} \quad (133)$$

(ver gráfico 11).

Como no caso da solução da equação (106), usando as equações (80), (85) e, posteriormente, a equação (131), obtemos

$$\rho_m = -24\lambda G_0 C_1 \left(\frac{q^2 + 8q + 19}{q^2 + 2q - 11} \right) \quad (134)$$

(ver gráfico 12). A densidade relativa de matéria, definida em relação à densidade crítica, pode então ser obtida com ajuda das equações (131) e (134), sendo dada por

$$\frac{\Omega_m}{G_0} = \frac{\rho_m}{3\lambda G_0 H} = -\frac{\rho_m}{\rho_\Lambda} = \frac{1}{6}(q^2 + 8q + 19). \quad (135)$$

Como podemos observar, as equações (120) e (135) são idênticas.

As equações (134) e (135) podem ser expressas em função de x , com ajuda de (128). Assim, temos

$$\frac{\rho_m}{3\lambda G_0 C_1} = (4 - \sqrt{12})x^{\sqrt{12}} + (4 + \sqrt{12})x^{-\sqrt{12}} \quad (136)$$

e

$$\frac{\Omega_m}{G_0} = \frac{(4 + \sqrt{12})x^{-2\sqrt{12}} + 4 - \sqrt{12}}{x^{-2\sqrt{12}} + 2x^{-\sqrt{12}} + 1}, \quad (137)$$

as quais estão representadas no gráfico 13. Observamos que (121) e (136) são iguais.

Substituindo a equação (131) em (80), obtemos ainda

$$\frac{\rho_\Lambda}{3\lambda G_0 C_1} = \frac{48}{q^2 + 2q - 11} \quad (138)$$

(ver o gráfico 14).

2.3 - O caso $\kappa^2 < 0$

As soluções encontradas nas seções 2.1 e 2.2 originaram-se da equação diferencial (86), supondo-se que $\frac{G_0(6\omega+6)^2+6\omega(G_0+\beta)}{G_0\omega^2} > 0$. Suponhamos agora que esta grandeza é negativa. Podemos resolver a equação (86) fazendo

$$\kappa'^2 = -\frac{G_0(6\omega+6)^2+6\omega(G_0+\beta)}{G_0\omega^2}$$

e

$$z = q + \frac{6+7\omega}{\omega}.$$

Assim, obtemos

$$-\frac{6}{\omega} \frac{dz}{\kappa'^2 + z^2} = \frac{3}{3+2\omega} \frac{da}{a},$$

cujas soluções é

$$a = C_1 \exp\left(-\frac{6+4\omega}{\omega\kappa'} \arctan \frac{q + \frac{6+7\omega}{\omega}}{\kappa'}\right),$$

onde C_1 é uma constante de integração.

Fazendo $D' = \frac{\omega\kappa'}{6+4\omega}$ e $E = \frac{6+7\omega}{\omega}$, ficamos com

$$a = C_1 e^{-\frac{1}{D'} \arctan \frac{q+E}{\kappa'}}. \quad (139)$$

Tomando a função inversa e fazendo $x = \ln \frac{a}{C_1}$, obtemos

$$q = -\kappa' \tan(D'x) - E, \quad (140)$$

ou ainda, com o uso da definição de q ,

$$\ddot{x} + \dot{x}^2 [1 - \kappa' \tan(D'x) - E] = 0.$$

Fazendo $y = \dot{x}$ e $y' = \frac{dy}{dx}$, obtemos

$$y' + y[1 - \kappa' \tan(D'x) - E] = 0,$$

cujas soluções é

$$y(x) = H = C_2 e^{(E-1)x} [\cos(D'x)]^{-\frac{\kappa'}{D'}}, \quad (141)$$

onde C_2 é uma constante de integração.

Como $dt = \frac{dx}{y}$, temos ainda

$$t = \int \frac{[\cos(D'x)]^{\frac{\kappa'}{D'}}}{C_2 e^{(E-1)x}} dx. \quad (142)$$

As equações (140)-(142) são soluções das equações (83) e (85) de Brans-Dicke. Vamos verificar se satisfazem também a equação remanescente (84). Fazendo-se $\rho' = \frac{d\rho}{dx}$ e usando-se o valor de ρ dado por (85), a equação (84) se torna

$$3\lambda G_0 \left\{ \frac{dH}{dx} \left[2 + q - \frac{\omega}{6}(1+q)^2 \right] + H \frac{dq}{dx} \left[\frac{3 - \omega(1+q)}{3} \right] \right\} + 3 \left\{ 3\lambda G_0 H \left[1 + q - \frac{\omega}{6}(1+q)^2 \right] - \beta \lambda H \right\} = 0.$$

Usando a equação (141), obtemos

$$\frac{\beta}{G_0} = [E + 2 + \kappa' \tan(D'x)] \left[2 + q - \frac{\omega}{6}(1+q)^2 \right] + \frac{dq}{dx} \left[\frac{3 - \omega(1+q)}{3} \right].$$

Com ajuda agora de (140), chegamos a

$$\frac{\beta}{G_0} = (2 - q) \left[2 + q - \frac{\omega}{6}(1+q)^2 \right] + \frac{\dot{q}}{3H} [3 - \omega(1+q)], \quad (143)$$

pois $\frac{dq}{dx} = \frac{\dot{q}}{H}$.

Da equação diferencial (86), podemos obter

$$\frac{\dot{q}}{3H} = \frac{2 + q - \frac{\omega}{6}(1+q)^2 - (3 + 2\omega)(1+q) + \frac{\beta}{G_0}}{3 + 2\omega}.$$

Substituindo esta expressão em (143), temos

$$9 + \frac{3\omega}{2} + \frac{3\omega^2}{2} - 3\omega \frac{\beta}{G_0} + \left(-6 - \frac{11\omega}{2} + \frac{7\omega^2}{2} - \omega \frac{\beta}{G_0} \right) q + \left(-3 - \frac{\omega}{2} + \frac{5\omega^2}{2} \right) q^2 + \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\omega^2}{2} \right) q^3 = 0. \quad (144)$$

Pode-se verificar que as equações (111) e (144) são idênticas. Nesta última, ω e $\frac{\beta}{G_0}$ são constantes. Portanto, para q variável, os coeficientes de q , q^2 e q^3 devem ser simultaneamente nulos, o que só é possível se $\omega = -1$ e $\frac{\beta}{G_0} = -3$. Mas a equação (139) é solução da equação diferencial (86) fazendo-se $\kappa'^2 = -\frac{G_0(6\omega+6)^2+6\omega(G_0+\beta)}{G_0\omega^2}$. Para $\omega = -1$ e $\frac{\beta}{G_0} = -3$, temos $\kappa'^2 = -12$, contrariamente à nossa suposição inicial de que $\kappa'^2 > 0$.

Portanto, no caso $\dot{q} \neq 0$, a equação (139) satisfaz as equações (83) e (85) de Brans-Dicke, mas não a equação (84). Esta última só é satisfeita se $\dot{q} = 0$, caso em que a equação (143) se reduz à equação (94), já estudada. Se, por exemplo, $q = 0$, a equação (99) nos fornece $\omega = \frac{6}{5}$, e a equação (144) se torna

$$\frac{\beta}{G_0} = \frac{3}{\omega} + \frac{1}{2} + \frac{\omega}{2} = \frac{18}{5}.$$

Este valor coincide com o obtido no caso $\dot{q} = 0$.

2.4 - O caso $\kappa^2 = 0$

Para esgotar todos os casos (e soluções) possíveis, suponhamos agora que a grandeza $\frac{G_0(6\omega+6)^2+6\omega(G_0+\beta)}{G_0\omega^2}$ é nula. Da equação diferencial (86) obtemos

$$-\frac{6}{\omega} \int \frac{dz}{z^2} = \frac{3}{3+2\omega} \int \frac{da}{a},$$

onde fizemos, como antes,

$$z = q + \frac{6+7\omega}{\omega}.$$

Sua solução é

$$\frac{1}{q + \frac{6+7\omega}{\omega}} = \frac{\omega}{2(3+2\omega)} \ln \frac{a}{C_1},$$

onde C_1 é uma constante de integração.

Fazendo $D'' = \frac{\omega}{2(3+2\omega)}$ e, como antes, $E = \frac{6+7\omega}{\omega}$, ficamos com

$$\frac{1}{q + E} = D'' \ln \frac{a}{C_1}.$$

Introduzindo a variável auxiliar $x = \ln \frac{a}{C_1}$, temos então

$$q = \frac{1}{D''x} - E. \quad (145)$$

Com a definição de q , a mesma se torna

$$\dot{x}^2 + D''(1-E)x\dot{x}^2 + D''x\ddot{x} = 0,$$

ou, fazendo-se $F = D''(1-E)$,

$$\dot{x}^2 + Fx\dot{x}^2 + D''x\ddot{x} = 0.$$

Tomando agora $y = \dot{x}$ e $y' = \frac{dy}{dx}$, obtemos

$$y + Fxy + D''xy' = 0,$$

cuja solução é

$$y(x) = H = C_2 \exp\left(-\frac{Fx + \ln x}{D''}\right), \quad (146)$$

onde C_2 é uma constante de integração.

Da mesma forma que no caso anterior, as equações (145) e (146) são soluções das equações (83) e (85) de Brans-Dicke. Vamos verificar se satisfazem também a equação (84). Fazendo-se $\rho' = \frac{d\rho}{dx}$ e usando-se a expressão de ρ dada por (85), a equação (84), como já vimos no caso anterior, torna-se

$$3\lambda G_0 \left\{ \frac{dH}{dx} \left[2 + q - \frac{\omega}{6}(1+q)^2 \right] + H \frac{dq}{dx} \left[\frac{3 - \omega(1+q)}{3} \right] \right\} + 3 \left\{ 3\lambda G_0 H \left[1 + q - \frac{\omega}{6}(1+q)^2 \right] - \beta\lambda H \right\} = 0.$$

Usando a equação (146) e, em seguida, a (145), chegamos à mesma equação (143) do caso anterior, a qual, como já vimos, nos leva à (144). Portanto, soluções com q variável só são possíveis se $\omega = -1$ e $\frac{\beta}{G_0} = -3$. Para estes valores, entretanto, $\kappa^2 = 12$, contrariamente à suposição inicial de que $\kappa^2 = 0$. Concluimos assim que, também neste caso, a equação (84) não é satisfeita, ou seja, não há solução com q variável.

VI. CONCLUSÃO

Nesta dissertação encontramos algumas soluções exatas da cosmologia de Brans-Dicke, usando dois diferentes ansatz. Mostramos que o primeiro é um caso particular do segundo, quando o parâmetro de desaceleração q é constante.

Como pudemos verificar, no primeiro ansatz a relação entre a densidade de matéria e a densidade de energia do vácuo é constante, caracterizando uma possível solução para o chamado problema da coincidência cósmica, isto é, a aproximada coincidência observada atualmente entre essas duas densidades. Esta possibilidade não é apenas qualitativa, mas passa também por uma análise quantitativa mais cuidadosa, pois uma densidade relativa de matéria ao redor de $1/3$, como indicado pelas observações, leva a um parâmetro de idade $Ht \approx 1$, o que corresponde a uma idade do universo de aproximadamente 14 Gano, também em acordo com os limites observacionais.

No entanto, esse ansatz apresenta suas próprias limitações. A mais séria delas é um parâmetro de desaceleração constante (igual a zero, para $Ht = 1$). Apesar de alguns autores [26, 27] não descartarem a possibilidade de uma expansão uniforme ao longo de toda a evolução do universo, uma fase inicial de expansão desacelerada é normalmente considerada necessária para a formação de grandes estruturas. Por essa razão temos considerado nosso ansatz válido apenas no limite de tempos longos, o que diminui a capacidade preditiva do modelo.

Com o segundo ansatz, além do caso q constante, encontramos três soluções com q variável, nas quais a densidade de energia escura é negativa. Em uma delas o parâmetro de desaceleração é sempre muito positivo. Em outra, é sempre muito negativo. Portanto, estes dois casos são interessantes apenas do ponto de vista teórico, pois não estão de acordo com as observações.

Por fim, encontramos uma solução em que o parâmetro de desaceleração é inicialmente positivo, tornando-se depois negativo, mas sempre finito. Neste caso (como também em um dos casos anteriores) temos um *big-rip* futuro, com o fator de escala, a densidade de matéria e o parâmetro de Hubble divergindo em um tempo finito, mas com a densidade relativa de matéria permanecendo finita. Como se pode ver do gráfico 11 do Apêndice, para valores do parâmetro de idade no intervalo correspondente às observações, $0,8 < Ht < 1,3$, os valores do parâmetro de desaceleração se encontram no intervalo $-2,0 > q > -2,9$. Com

ajuda dos gráficos 8 e 13, pode-se ver também que, para este intervalo de q , os valores da densidade relativa de matéria estão no intervalo $1, 1 > \Omega_m/G_0 > 0, 7$. Como sabemos das observações, $0, 4 > \Omega_m > 0, 2$, e portanto esta solução satisfaz as observações, desde que G_0 esteja aproximadamente no intervalo $0, 3 < G_0 < 0, 4$. Além disso, após esse período, Ω_m/G_0 tende para um valor constante da ordem de $0, 5$, o que também caracteriza uma possível solução para o problema da coincidência cósmica.

Nas três soluções com q variável, é interessante observar que o tempo cosmológico varia linearmente com q , o qual pode, portanto, ser usado para definir a marcação do tempo. É interessante observar também que a densidade de energia total pode ser negativa, pois a densidade de energia escura é negativa. Na última solução, por exemplo, ρ é positiva até $q \simeq -2, 3$, tornando-se negativa a partir de então.

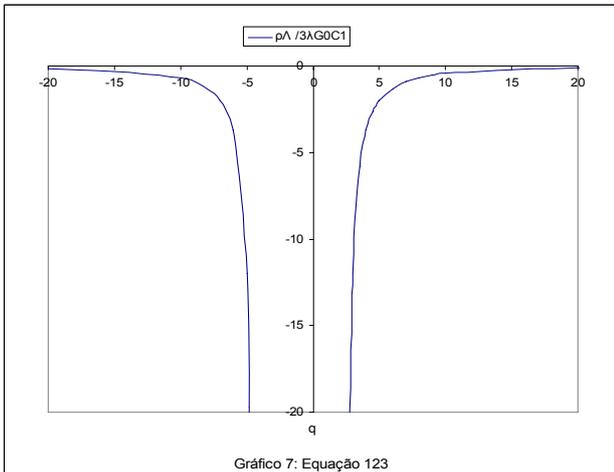
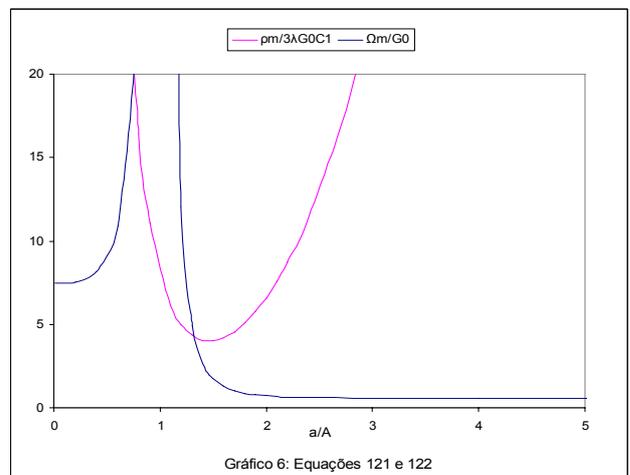
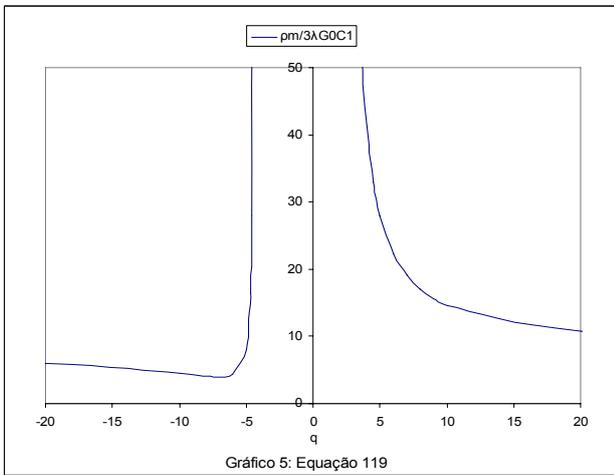
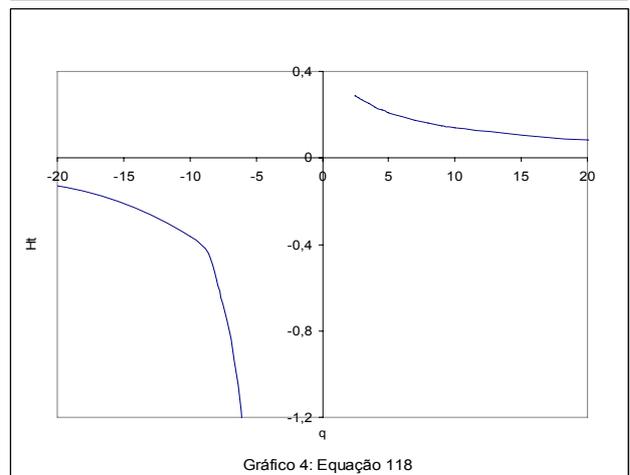
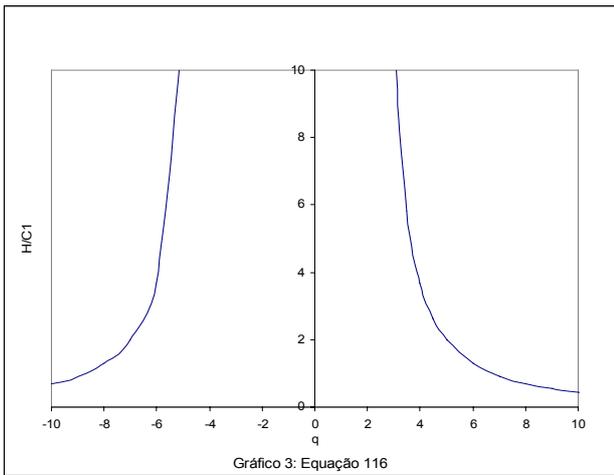
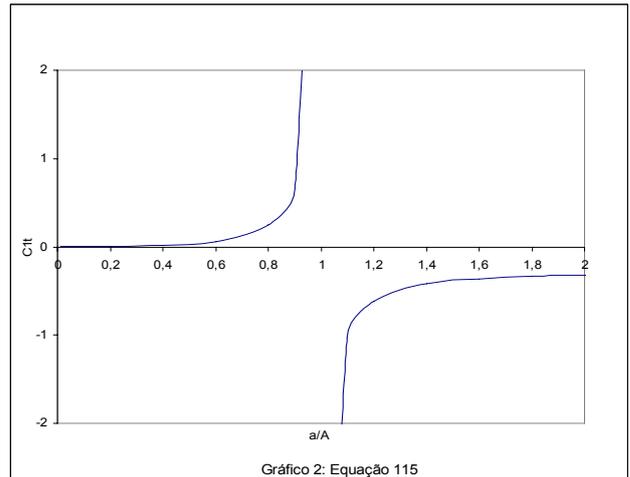
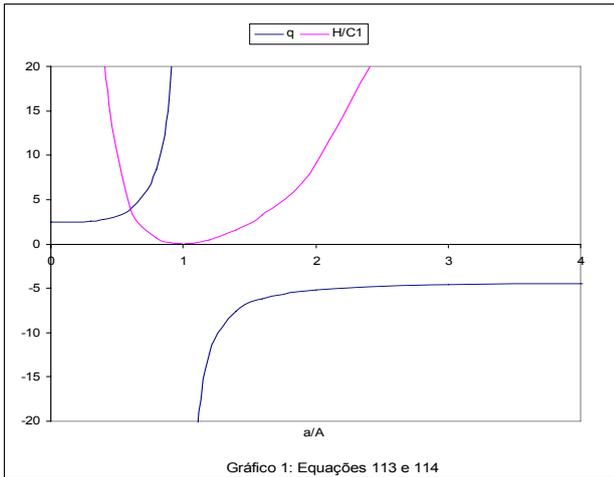
Um resultado que pode parecer limitador são os valores encontrados para o parâmetro ω de Brans-Dicke, dado que observações na escala do sistema solar impõem limites extremamente altos para o mesmo. Lembremos, no entanto, que estamos considerando a versão mais simples das teorias escalar-tensoriais, a qual tem aqui apenas caráter efetivo. Correções à relatividade geral, se existem, podem ser dependentes de escala, de forma que observações no sistema solar não limitam, em princípio, correções em escala cosmológica. Em particular, nenhuma dependência temporal do campo escalar de Brans-Dicke (e, portanto, de G) deve ser esperada no sistema solar, onde a métrica é estacionária, enquanto que nenhuma dependência espacial deve existir em larga escala, por conta do princípio cosmológico.

Desta forma, uma generalização das soluções aqui estudadas parece ser necessária, seja no sentido de modificar nossos ansatz no caso de tempos pequenos, seja no de considerar teorias escalar-tensoriais mais gerais, com ω dependente de escala. O estudo aqui realizado, ainda que de escopo mais limitado, mostra a potencialidade e variedade de soluções em tais contextos.

-
- [1] N. A. Bachcall, J. P. Ostriker, S. Perlmutter and P. J. Steinhardt, *Science*, 284, 1481 (1999).
- [2] A. G. Riess et al., *Astron. J.* 116, 1009 (1998).
- [3] S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* 517, 565 (1999).
- [4] L. Landau e E. Lifshitz, *Teoria do Campo* (Editora Mir, Moscou, 1980).
- [5] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972).
- [6] C. H. Brans and R. H. Dicke, *Phys. Rev.* 124, 925 (1961).
- [7] J. C. Fabris, S. V. B. Gonçalves and R. de Sá Ribeiro, astro-ph/0510779.
- [8] J. C. C. Souza and A. Saa, *Braz. J. Phys.* 35, 1041 (2005). Proceedings of the Conference 100 Years of Relativity, São Paulo, August 2005.
- [9] V. B. Bezerra, C. Romero, G. Grebot, M.E.X. Guimarães and L. P. Colatto, *Braz. J. Phys.* 34, 526 (2004).
- [10] V. Sahni and A. Starobinsky, *Int. J. Mod. Phys. D* 9, 373 (2000).
- [11] W. Chen and Y. S. Wu, *Phys. Rev. D* 41, 695 (1990).
- [12] J. C. Carvalho, J. A. S. Lima and I. Waga, *Phys. Rev. D* 46, 2404 (1992).
- [13] S. Carneiro, *Int. J. Mod. Phys. D* 12, 1669 (2003). Honorable Mention in the 2003 Essay Competition of the Gravity Research Foundation.
- [14] H. A. Borges and S. Carneiro, *Gen. Rel. Grav.* 37, 1385 (2005).
- [15] S. Carneiro, gr-qc/0307114, to appear in Proceedings of the Tenth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, edited by M. Novello, S. Perez-Bergliaffa and R. Ruffini (World Scientific, Singapore).
- [16] S. Carneiro and J. A. S. Lima, *Int. J. Mod. Phys. A* 20, 2465 (2005). Proceedings of the Sixth Alexander Friedmann International Seminar on Gravitation and Cosmology, Cargèse, 2004.
- [17] G. A. Mena Marugán and S. Carneiro, *Phys. Rev. D* 65, 087303 (2002).
- [18] J. A. S. Lima and J. C. Carvalho, *Gen. Rel. Grav.* 26, 909 (1994).
- [19] R. G. Vishwakarma, *Class. Quant. Grav.* 19, 4747 (2002).
- [20] I. L. Shapiro and J. Solà, astro-ph/0401015, Proceedings of the International Workshop on Astroparticle and High-Energy Physics, Valencia, Spain, 14-18 Oct 2003.
- [21] R. Aldrovandi, J. P. Beltrán and J. G. Pereira, gr-qc/0312017, to appear in *Gravitation & Cosmology*.

- [22] S. Carneiro, gr-qc/0505121, to appear in Int. J. Mod. Phys. D. Honorable Mention in the 2005 Essay Competition of the Gravity Research Foundation.
- [23] M. Tegmark et al., Phys. Rev. D 69, 103501 (2004).
- [24] B. M. S. Hansen et al., Astrophys. J. 574, L155 (2002).
- [25] S. Carneiro and A. E. Montenegro Jr, Braz. J. Phys. 35, 1052 (2005). Proceedings of the Conference 100 Years of Relativity, São Paulo, August 2005.
- [26] D. Jain, A. Dev. and J. S. Alcaniz, Class. Quant. Grav. 20, 4485 (2003).
- [27] G. Sethi, A. Dev. and D. Jain, Phys. Lett. B 624, 135 (2005).

Gráficos da seção 2.1



Gráficos da seção 2.2

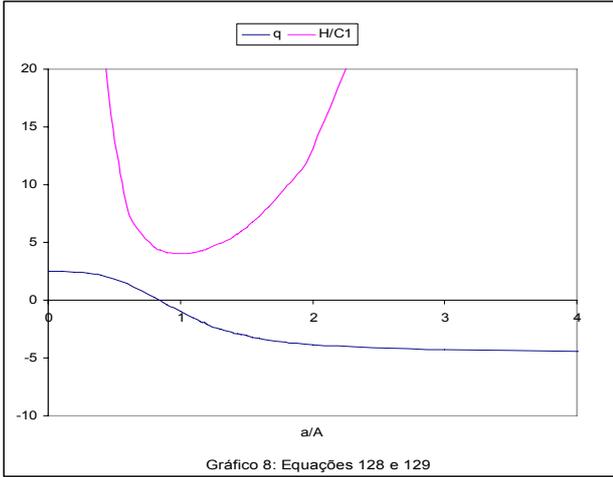


Gráfico 8: Equações 128 e 129

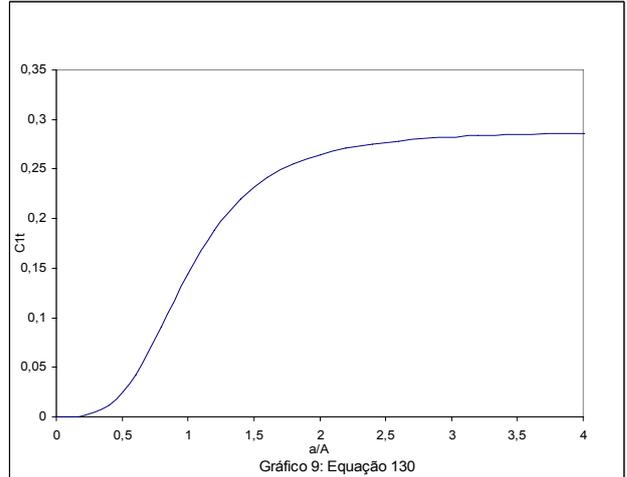


Gráfico 9: Equação 130

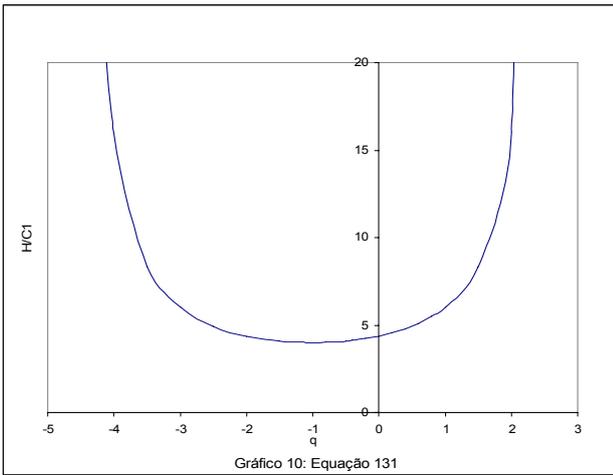


Gráfico 10: Equação 131

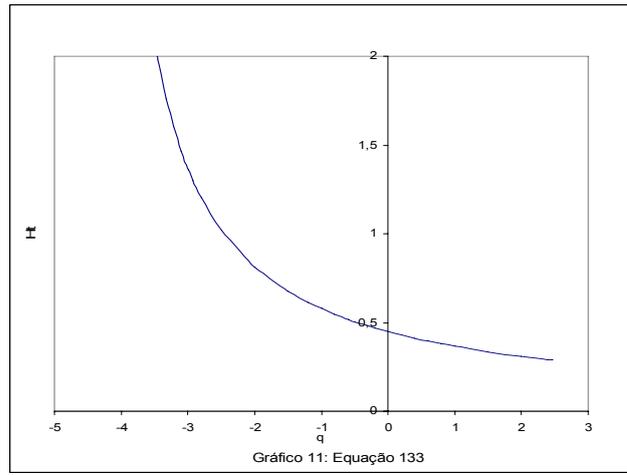


Gráfico 11: Equação 133

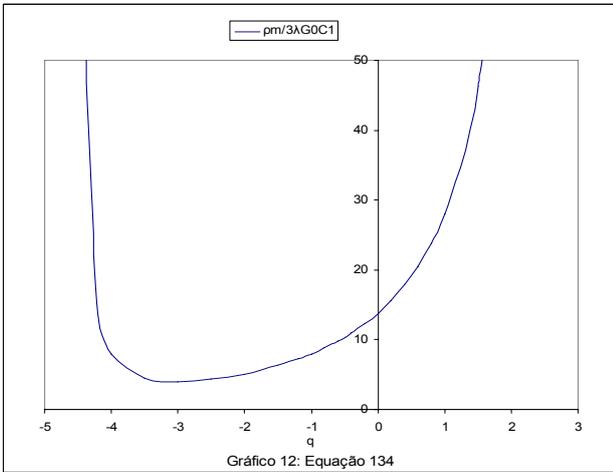


Gráfico 12: Equação 134

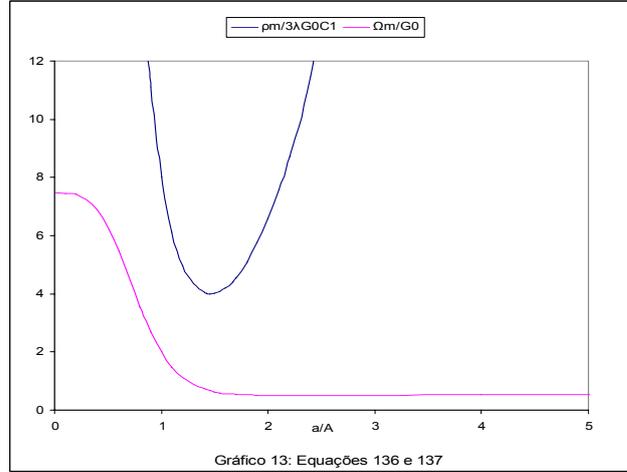


Gráfico 13: Equações 136 e 137

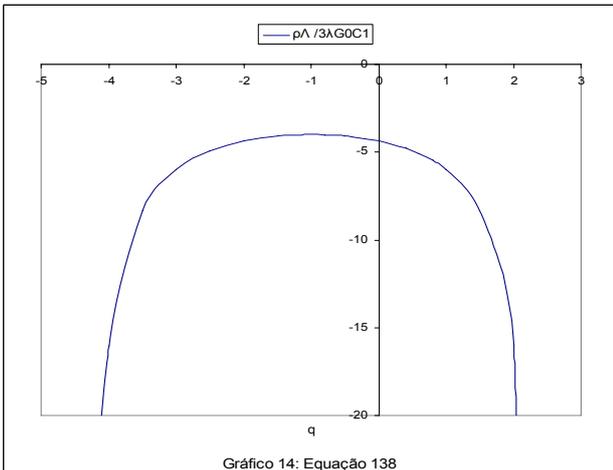


Gráfico 14: Equação 138

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)