

APARECIDO VILELA JUNIOR

**PLANEJAMENTO E PROGRAMAÇÃO DA PRODUÇÃO
NUMA FUNDIÇÃO AUTOMATIZADA DE GRANDE PORTE
UTILIZANDO UMA HEURÍSTICA LAGRANGIANA**

MARINGÁ

2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

APARECIDO VILELA JUNIOR

**PLANEJAMENTO E PROGRAMAÇÃO DA PRODUÇÃO
NUMA FUNDIÇÃO AUTOMATIZADA DE GRANDE PORTE
UTILIZANDO UMA HEURÍSTICA LAGRANGIANA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo

Co-orientador: Prof. Dr. Ademir Aparecido Constantino

MARINGÁ

2007

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

V699p Vilela Junior, Aparecido
Planejamento e programação da produção numa fundição automatizada de grande porte utilizando uma heurística Lagrangiana / Aparecido Vilela Junior. -- Maringá : UEM, 2007.
88 f. : il. color., figs., tabs.
Orientador : Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo.
Dissertação (mestrado) - Departamento de Informática - Universidade Estadual de Maringá, 2007.
1. Dimensionamento de lotes. 2. Heurística lagrangiana. 3. Programação da produção. 4. Fundições.

CDD 21.ed. 005.1

APARECIDO VILELA JUNIOR

**PLANEJAMENTO E PROGRAMAÇÃO DA PRODUÇÃO
NUMA FUNDIÇÃO AUTOMATIZADA DE GRANDE PORTE
UTILIZANDO UMA HEURÍSTICA LAGRANGIANA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciência da Computação.

Aprovado em 08/02/2007.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo
Universidade Estadual Paulista – DCCE/UNESP

Prof. Dr. Ademir Aparecido Constantino
Universidade Estadual de Maringá – DIN/UEM

Profa. Dra. Márcia Marcondes Altimari Samed
Universidade Estadual de Maringá – DIN/UEM

Prof. Dr. Ricardo Silveira Sousa
Universidade Candido Mendes – ICM/UCAM

DEDICATÓRIA

A Deus, que me concedeu a graça de avançar em mais um desafio.
A meus pais Aparecido e Clarinda, meus heróis, meus exemplos;
meu orgulho é poder chamá-los de pai e mãe.
A minha esposa Célia, meus filhos Vitória e Vinícius, razões da
minha vida; quando abraço-os, não sei onde eu termino e onde eles
começam.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Orientador Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo, pela dedicação, pela doação de seus conhecimentos e dias de descanso, pelo empenho em me fazer entender as modelagens matemáticas, e pela paciência nos seus ensinamentos.

Ao meu Co-Orientador Prof. Dr. Ademir Aparecido Constantino, por todo o apoio dispendido.

Aos meus irmãos Kelli e Reginaldo pela força, vibração e união que se reforçam a cada nova conquista que conseguimos; ao João, irmão que ganhei e que me trouxe de presente Matheus, obrigado pela ajuda.

A tia Presilina, minha eterna professora, suas aulas foram o início de toda essa caminhada.

A meu irmão de fé, Magu, por toda ajuda oferecida, pelos ensinamentos de vida e espiritualidade, e principalmente, por acreditar em mim.

Aos meus amigos da Unopar, em especial ao Cláudio, Arase, Trevisan, Paulinho, Dirceu, Tânia, Luciane, Claudete, Menegazzi, e Joemir, que tanto me incentivaram, mostrando que não há problema sem resolução quando vocês estão do lado.

Aos meus velhos amigos, Ailton, Everaldo, Marcelo e Todão, pelo apoio, orações, pensamentos positivos, e as longas conversas, sempre recheada de sonhos.

Aos diretores da Inditec, Edgar e Gisleile, por todo o apoio, possibilitando me ausentar do trabalho, para concluir os estudos; e aos meus companheiros Carlos, Alírio, Kleber e Mônica, por amenizarem o meu dia-a-dia com o humor sempre presente nas nossas conversas.

A Coordenação e ao Colegiado do Mestrado por todo apoio.

A Inês, secretária do Mestrado, um anjo da guarda, tendo sempre um sorriso, uma palavra para nos acalmar.

A todos meus amigos do Mestrado, em especial ao Edílson, por toda ajuda dispendida nas noites de estudo.

Seja qual for o seu problema, fale com Deus, ele vai ajudar você [...] É ELE o autor da fé, do princípio ao fim, de todos seus tormentos. [...] E ainda se vier, noites traiçoeiras, se a cruz pesada for... Cristo estará contigo, o mundo pode até fazer você chorar, mas Deus ti quer sorrindo (Noites Traiçoeiras).

RESUMO

Neste trabalho apresentamos um problema de planejamento e programação da produção numa fundição automatizada de grande porte. Este problema consiste em programar simultaneamente os fornos e as linhas de moldagem, ou seja, devem-se determinar as quantidades adequadas das ligas e peças produzidas pelos fornos e pelas linhas de moldagem em cada período do planejamento, respeitando-se as capacidades e atendendo a demanda com o mínimo de atraso. Um modelo matemático já foi proposto em Araujo e Arenales (2004) o qual foi resolvido com um pacote de otimização inteira utilizando uma técnica de horizonte rolante. No presente trabalho foi desenvolvido uma Heurística Lagrangiana para a resolução do problema. Resultados computacionais são apresentados comparando a Heurística Lagrangiana, o método desenvolvido em Araujo e Arenales (2004), a solução obtida na prática, e a solução da nova versão do pacote.

Palavras-chave: Dimensionamento de Lotes, Heurística Lagrangiana, Programação da Produção, Fundições.

ABSTRACT

In this work we present the production planning and programming problem that arises in a large automated foundry. This problem consists in to program simultaneously the furnaces and the molding lines, i. e., it must to determine the right quantity of alloys and items to be produced by the furnaces and molding lines in each planning period, satisfying the capacities and attending the demand with minimum backorders. A mathematical model was proposed in Araujo and Arenales (2004) which was solved by an integer optimization package in a rolling horizon basis. In this work we developed a lagrangean heuristic to solve the problem in order of to eliminate the necessity of the package. Computational results are presented comparing the lagrangean heuristic, the method developed by Araujo and Arenales (2004), the practical solution and the solution of the package new version.

Keywords: Lot Sizing, Lagrangean Heuristic, Production Programming, Foundries.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Carteira de pedidos real da fundição	52
Tabela 2	Custo de Produção	72
Tabela 3	Tempo disponível nas 3 máquinas de moldagem a cada dia.....	73
Tabela 4	Número de preparações da produção.....	74
Tabela 5	Comparação dos Custos de Produção.....	74
Tabela 6	Quantidade de Estoque em Unidades	74
Tabela 7	Peso do Estoque em Kilos	74
Tabela 8	Quantidade de Atraso em Unidades	74
Tabela 9	Peso do Atraso em Kilos	74
Tabela 10	Quantidade Produzida em Unidades	74
Tabela 11	Peso Produzido em Kilogramas.....	75
Tabela 12	Utilização das máquinas	75
Tabela 13	Porcentagem de utilização das linhas (com preparações): Máquina 1	76
Tabela 14	Porcentagem de utilização das linhas (com preparações): Máquina 2	76
Tabela 15	Porcentagem de utilização das linhas (com preparações): Máquina 3	76

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Exemplo gráfico de um problema com quatro períodos.....	33
Figura 2	Conjunto de Fornos e máquinas de moldagem.....	47
Figura 3	Conjunto de 10 peças (árvore).....	48
Figura 4	Forno da fundição.....	49
Figura 5	Linhas de moldagem.....	50

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	13
Introdução.....	13
CAPÍTULO 2 - Revisão Bibliográfica	16
2.1 O Problema de Dimensionamento de Lotes Monoestágio	17
2.1.1 Problema Monoestágio com Um Único Item.....	17
2.1.2 Problema Monoestágio um Único Item com Restrição de Capacidade	19
2.1.3 Problema Monoestágio com múltiplos itens com Restrição de Capacidade	20
2.1.4 Problema Monoestágio com Múltiplos Itens com Restrição de Capacidade em Máquinas Paralelas	24
2.2 O Problema de Dimensionamento de Lotes Multiestágios	27
2.2.1 Problema Multiestágio com Múltiplos Itens e com Restrição de Capacidade	27
2.3 O Problema de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes	28
2.3.1 Problema de Dimensionamento de Lotes e Programação da Produção Generalizado (General Lot Sizing and Scheduling Problem – GLSP).....	31
2.4 Revisão de métodos de Resolução.....	33
2.4.1 O método ótimo de Wagner e Whitin.....	34
2.4.2 Heurísticas Lagrangianas.....	37
CAPÍTULO 3 - Planejamento e Programação da Produção numa Fundação Automatizada de Grande Porte utilizando Relaxação Lagrangiana	46
3.1 Introdução.....	46
3.2 Definição do Problema	48
3.3 Modelagem Matemática	54
3.4. Método da Solução	59
3.5. Obtenção do Limitante Inferior	64
3.6 Heurística de Factibilização (Baseada em Toledo e Armentano (2005)).....	66
3.6.1 Passo Regressivo	66
3.6.2 Passo Progressivo	67
3.7 Melhoria da Heurística	68
3.7.1 Melhoria Regressiva.....	69
3.7.2 Melhoria Progressiva.....	70
3.8 Factibilização dos Fornos	71
CAPÍTULO 4 - Resultados Computacionais.....	72
CAPÍTULO 5 - Conclusões e Pesquisas Futuras	78
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	80
APÊNDICE	86
Relaxação Lagrangiana.....	86
Método do Subgradiente.....	88

CAPÍTULO 1

Introdução

Com o Brasil sendo o sétimo produtor de fundidos no mundo, (R. Modern Casting, ed. dez/2005), e com os percentuais crescendo anualmente, devido em grande parte às condições naturais extremamente favoráveis do país, que possui todas as matérias-primas além de tecnologia de ponta e mão de obra qualificada, atualmente, as fundições estão presentes em todas as regiões do país produzindo desde peças simples de uso doméstico, até as mais sofisticadas, como autopeças de veículos e peças e/ou partes de máquinas e equipamentos de uso industrial. Segundo o relatório da Associação Brasileira de Fundição (ABIFA) em agosto de 2006 o setor produziu uma média diária de 11.987 toneladas, exportou 64.856 toneladas, gerando cerca de 57.753 empregos diretos, com o incremento de produção em torno de 5,9% em relação ao ano de 2005.

Segundo Campos e Davies (1978), devido a ausência de estudos científicos a respeito da solidificação dos metais havia um preconceito generalizado na década de 70 pelas indústrias sobre a qualidade metalúrgica inferior dos produtos conformados por solidificação (fundição e lingotamento) em relação à dos produtos conformados por deformação mecânica (laminação, extrusão e forjamento). No entanto, nas últimas décadas a tecnologia nessa área se desenvolveu muito com a criação de novas técnicas de moldagem e fusão e, ainda, com o desenvolvimento de novos materiais e ligas especiais com propriedades características.

A grande maioria da produção brasileira de fundidos é fabricada por fundições cativas, que são departamentos de grandes empresas (por exemplo, algumas montadoras de automóveis) cuja produção é destinada, basicamente, para consumo próprio. Essas fundições cativas estão orientadas para a produção em série, automatizada e fabricam grandes quantidades de cada item. Este trabalho enfoca problemas de planejamento e programação da

produção, numa fundição cativa do interior do estado de São Paulo.

Mesmo nessas fundições cativas, é possível perceber a deficiência na utilização de métodos científicos para auxiliar na programação da produção, ou seja, dar subsídios para o setor de gerenciamento da produção dentro de uma empresa que é responsável pela transformação de matérias-primas em produtos acabados. Este setor denomina-se planejamento e controle da produção (PCP) e coordena todas as atividades, desde a aquisição das matérias primas até a entrega dos produtos.

A estrutura hierárquica de um sistema PCP pode ser dividida em três níveis de planejamento distintos: estratégico, tático e operacional (Anthony, 1965).

- a) Estratégico: definem-se as metas globais da empresa e as políticas adequadas para atingi-las, determina objetivos em longo prazo.
- b) Tático: responsável pela utilização eficiente dos recursos disponíveis, cumprindo os objetivos do estratégico. Decisões de médio prazo.
- c) Operacional: Está relacionado ao dia-a-dia da produção, ou seja, decisões de curto prazo.

Este trabalho enfoca problemas de dimensionamento de lotes envolvendo problemas de tomada de decisão relacionados com o planejamento tático-operacional, especificamente voltado para o setor de fundições. O planejamento da produção nestes níveis consiste no processo de determinar o quanto e quando produzir e/ou comprar num horizonte de planejamento finito. Também determina os níveis de estoque e os recursos necessários (Thomas e McClain, 1993).

O problema de dimensionamento de lotes consiste em planejar a quantidade de itens a ser produzida em várias (ou única) máquinas, em cada período ao longo de um horizonte de tempo finito, de modo a atender certa demanda, podendo estar sujeito a algumas restrições, como por exemplo, restrições de limitação de capacidade, tendo como objetivo otimizar uma função, que pode ser, minimizar custos.

O problema de dimensionamento de lotes pode ter um único estágio ou múltiplos estágios de planejamento. Um sistema tem um único estágio quando os itens a serem produzidos são independentes, isto é, um item não depende do outro para ser produzido. Nos sistemas com múltiplos estágios um item final possui itens componentes, cuja produção ou compra também pode ser planejada.

Em Araujo e Arenales (2004) foi proposto um modelo inicial para o problema de dimensionamento de lote numa fundição de grande porte. Este modelo foi resolvido com um pacote de programação inteira. No presente trabalho foi implementado um método computacional para o modelo matemático desenvolvido em Araujo e Arenales (2004), buscando diminuir custos e a resolução de problemas de coordenação. Os resultados computacionais do método proposto foram comparados com aqueles obtidos pelo pacote e com os obtidos na prática pela indústria.

O trabalho está dividido da seguinte forma:

No Capítulo 2 tem-se uma revisão bibliográfica dos problemas de dimensionamento de lote e a descrição de alguns métodos de solução; o método de Wagner e Whitin (1958), a Heurística Lagrangiana de Trigeiro *et al.* (1989) e a Heurística Lagrangiana de Toledo e Armentano (2005). Tais métodos serviram de base para o desenvolvimento descrito no Capítulo 3, onde trataremos do Planejamento e Programação da Produção numa Fundição Automatizada de Grande Porte e apresentamos um modelo matemático, bem como um método de solução. No Capítulo 4, serão expostos os resultados computacionais obtidos com o método de solução e, finalmente, no Capítulo 5 apresentamos as conclusões e sugestões para pesquisas futuras.

CAPÍTULO 2

Revisão Bibliográfica

Os primeiros estudos de problemas de dimensionamento de lotes ocorreram com o *Economic Order Quantity* (EOQ) em 1913 (Harris, 1990), que consiste num modelo sem restrição de capacidade e com um único item. A demanda é estacionária, ou seja, ocorre continuamente com uma razão constante. Os períodos de tempo são contínuos e o horizonte de planejamento é infinito. É possível resolver este problema otimamente por uma expressão analítica.

Posteriormente, surgiram modelos que tentavam se ajustar cada vez mais à realidade. Em 1950 surgiu o *Economic Lot Scheduling Problem* (ELSP) que considera restrições de capacidade e vários itens. A demanda também é estacionária e os períodos de tempo são contínuos com um horizonte de planejamento infinito. Resolver o ELSP otimamente consiste num problema da classe NP-difícil.

O próximo avanço se deu no sentido de considerar a demanda dinâmica. Surge então o modelo de Wagner e Whitin (1958) que tem como características diferenciais o fato de se tratar de um modelo que assume um horizonte de planejamento finito dividido em vários períodos discretos, sendo que a demanda é dada a cada período e pode variar, ou seja, tem-se uma demanda dinâmica. Wagner e Whitin (1958) propõem um método para resolver este problema otimamente em tempo polinomial. Evans (1985a) propõe um algoritmo com a mesma complexidade do algoritmo de Wagner e Whitin (1958), porém, testes computacionais mostraram que o algoritmo de Evans (1985b) é muito eficiente. Em trabalhos mais recentes, Federgruen e Tzur (1991), Wagelmans *et al.* (1992) e Aggarwal e Park (1993) apresentam novos algoritmos de menor complexidade para resolver este problema. Uma revisão

bibliográfica recente deste problema pode ser encontrada em Brahim *et al.* (2006).

O passo seguinte nas pesquisas, e que até hoje predomina na maioria dos estudos de problemas de dimensionamento de lotes, consiste, em linhas gerais, de modelos que consideram demanda dinâmica e restrições de capacidade simultaneamente. Tais modelos serão tratados com mais detalhes nas seções seguintes, onde são apresentadas uma breve revisão dos modelos e metodologias para problemas de dimensionamento de lotes encontrados na literatura.

De acordo com Bahl *et al.* (1987) os problemas de dimensionamento de lotes podem ser divididos em dois grupos básicos: modelos monoestágio, em que a produção de um item não depende da produção de outros itens e modelos multiestágios, onde se tem uma produção dependente, ou seja, para se produzir um item é necessário que se tenha produzido outros itens (componentes) que serão utilizados na produção deste último.

Revisões bibliográficas de problemas de dimensionamento de lotes são encontradas em Billington *et al.* (1983), Bahl *et al.* (1987), Maes e Van Wassenhove (1988), Goyal e Gunasekaran (1990), Kuik *et al.* (1994), Karimi *et al.* (2003).

Na revisão bibliográfica feita por Karimi *et al.* (2003) é feita uma classificação do problema, de forma mais detalhada que em Bahl *et al.* (1987), considerando diversas características, tais como: tipo de horizonte de planejamento, número de estágios, número de itens, restrição de capacidade, deterioração dos itens, tipo de demanda, estrutura do tempo e custo de preparação e permissão de atraso no atendimento a demanda.

2.1 O Problema de Dimensionamento de Lotes Monoestágio

2.1.1 Problema Monoestágio com Um Único Item

O problema de dimensionamento de lotes monoestágio com um único item consiste na determinação da produção dos lotes de apenas um item para vários períodos de

tempo, de modo a minimizar as somas dos custos de preparação, produção e estoque sobre um horizonte de planejamento. Deve-se também atender uma demanda preestabelecida e, pode-se considerar a formulação com ou sem restrição de capacidade.

Considere os seguintes dados:

C_t Custo unitário de produção no período t .

S_t Custo de preparação para a produção no período t .

H_t Custo unitário de estocagem no período t .

d_t Demanda do período t .

M Número grande.

As variáveis de decisão são:

X_t Unidades produzidas no período t .

I_t Unidades estocadas no período t .

Y_t Variável binária, indicando a produção ou não no período t .

Índice:

$t = 1, \dots, T$ Períodos de tempo.

Formulação do Problema:

$$\min \sum_{t=1}^T (H_t I_t + C_t X_t + S_t Y_t) \quad (1)$$

Sujeito a:

$$I_{t-1} + X_t - I_t = d_t \quad t = 1, \dots, T \quad (2)$$

$$X_t - M Y_t \leq 0 \quad t = 1, \dots, T \quad (3)$$

$$Y_t = 1 \text{ ou } 0 \quad t = 1, \dots, T \quad (4)$$

$$X_t \text{ e } I_t \geq 0 \quad I_0 = 0 \text{ e } I_T = 0 \quad t = 1, \dots, T \quad (5)$$

A Modelagem Matemática acima pode ser explicada por:

- (1) A função objetivo que minimiza a soma dos custos de produção, estoque e preparação.
- (2) Restrições de balanceamento de estoque, ou seja, a quantidade produzida num período mais a quantidade disponível em estoque no início, menos o que sobrar em estoque no fim do período deve ser igual a demanda do período.
- (3) e (4) Restrições que asseguram que existe produção num período somente se as máquinas estiverem preparadas neste período.
- (5) Restrições de não negatividade. O estoque inicial e final é nulo.

O problema Monoestágio com um único item sem restrição de capacidade pode ser resolvido otimamente através do algoritmo de programação dinâmica desenvolvido por Wagner e Whitin (1958). Cabe salientar aqui que, apesar de sua simplicidade, este problema é de grande importância, pois muitos problemas complexos podem ser relaxados tendo como resultado vários problemas mais simples, iguais a este.

Neste e nos outros modelos a seguir pode-se considerar atrasos, definido pela variável I_t^- que consiste nas unidades atrasadas no período t . Desta forma a Equação (2) é substituída por $I_{t-1}^+ - I_{t-1}^- + X_t - I_t^+ + I_t^- = d_t$, onde I_t^+ é igual a variável I_t no modelo (1)-(5).

2.1.2 Problema Monoestágio um Único Item com Restrição de Capacidade

O problema Monoestágio para um item com restrição de capacidade, pode ser formulado da mesma maneira que o problema (1)-(5), acrescido no modelo às restrições de capacidade (8), que levam em consideração o tempo despendido para a produção e para a preparação de máquina.

Considere os seguintes dados adicionais:

Cap_t Limite de capacidade (em unidades de tempo) no período t .

b_t Tempo necessário para produção no período t .

f_t Tempo de preparação da máquina no período t .

Formulação do Problema:

$$\min \sum_{t=1}^T H_t I_t + \sum_{t=1}^T C_t X_t + \sum_{t=1}^T S_t Y_t \quad (6)$$

Sujeito a:

$$I_{t-1} + X_t - I_t = d_t \quad t = 1, \dots, T \quad (7)$$

$$b_t X_t + f_t Y_t \leq Cap_t \quad t = 1, \dots, T \quad (8)$$

$$X_t - M Y_t \leq 0 \quad t = 1, \dots, T \quad (9)$$

$$Y_t = 1 \text{ ou } 0 \quad t = 1, \dots, T \quad (10)$$

$$X_t \text{ e } I_t \geq 0 \quad t = 1, \dots, T \quad (11)$$

2.1.3 Problema Monoestágio com múltiplos itens com Restrição de Capacidade

No modelo apresentado a seguir (Trigeiro *et al.* 1989), a demanda é conhecida sobre os períodos do horizonte de planejamento, a capacidade disponível é limitada e são considerados tempo e custo de preparação de máquina. O objetivo do modelo é determinar um plano de produção que minimize os custos, sujeito a um conjunto de restrições que inclui o atendimento de uma demanda preestabelecida.

Os seguintes dados são utilizados no problema:

C_{it} Custo unitário de produção do item i no período t .

S_{it} Custo de preparação da máquina para a produção do item i no período t .

H_{it} Custo unitário de estocagem do item i no período t .

- b_i Tempo necessário para produzir uma unidade do item i .
- f_i Tempo de preparação da máquina para a produção do item i .
- Cap_t Limite de capacidade (em unidades de tempo) no período t .
- d_{it} Demanda do item i no período t .
- M Número grande.

As variáveis de decisão são:

- X_{it} Unidades do item i produzidas no período t .
- I_{it} Unidades do item i estocadas no período t .
- Y_{it} Variável binária, indicando a produção ou não do item i no período t .

Índices:

- $t = 1, \dots, T$ Períodos de tempo.
- $i = 1, \dots, N$ Itens.

Formulação do Problema:

$$\min \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N H_{it} I_{it} + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N C_{it} X_{it} + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N S_{it} Y_{it} \quad (12)$$

Sujeito a:

$$I_{it-1} + X_{it} - I_{it} = d_{it} \quad i=1, \dots, N \quad t=1, \dots, T \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^N b_i X_{it} + \sum_{i=1}^N f_i Y_{it} \leq Cap_t \quad i=1, \dots, N \quad t=1, \dots, T \quad (14)$$

$$X_{it} - M Y_{it} \leq 0 \quad i=1, \dots, N \quad t=1, \dots, T \quad (15)$$

$$Y_{it} = 1 \text{ ou } 0 \quad i=1, \dots, N \quad t=1, \dots, T \quad (16)$$

$$X_{it} \text{ e } I_{it} \geq 0 \quad i=1, \dots, N \quad t=1, \dots, T \quad (17)$$

A Formulação (12)-(17) é semelhante à formulação (6)-(11). Entretanto são considerados vários itens, por isso, têm-se dois índices, i e t .

Quando custos de preparação são considerados e os recursos de produção são limitados, Florian *et al.* (1980) mostram que encontrar a solução ótima para o problema com um único item, sem tempo de preparação é um problema NP-difícil. Bitran e Yanasse (1982) mostram que vários casos de problemas com um único item podem ser resolvidos otimamente em tempo polinomial, tornando-se NP-difícil quando um segundo item é introduzido. Portanto, o problema monoestágio com vários itens, ou mesmo multiestágio também é NP-difícil. Quando se considera tempo de preparação, o problema de decisão relativo a encontrar uma solução factível é NP-Completo (Maes, *et al.* 1991).

A consideração ou não de tempos de preparação na modelagem do problema tem gerado algumas controvérsias. Alguns autores sugerem que os tempos de preparação já estão incluídos implicitamente nos custos de preparação (Maes, *et al.* 1991), não sendo necessário incorporá-los ao modelo. Outros autores, afirmam que a substituição dos tempos de preparação por seus custos pode levar a uma representação falsa do consumo de recursos (Billington, *et al.* (1983) e Kuik *et al.* (1994)). Billington *et al.* (1994) destaca que o tempo de preparação pode ser ignorado em algumas indústrias de processo, mas em vários sistemas com restrição de capacidade, um dos fatores mais críticos do problema de dimensionamento de lotes é o tempo de preparação e não seu custo. Trigeiro *et al.* (1989) fazem um exemplo mostrando que certos problemas não devem ser formulados sem a inclusão de tempos de preparação.

Quando não existem restrições sobre as capacidades, o problema monoestágio com vários itens passa a ser decomposto em itens, ou seja, pode ser decomposto em subproblemas, um para cada item a ser produzido. Assim, é possível resolver cada um destes subproblemas por algum algoritmo de programação dinâmica. Por exemplo, o algoritmo

ótimo desenvolvido por Wagner e Whitin (1958). Como veremos adiante, esta decomposição não pode ser feita de forma simples no problema multiestágio.

Existem na literatura métodos ótimos e heurísticos para resolver o problema monoestágio, sendo que, a maioria desses trabalhos não considera tempo de preparação. Dentre os trabalhos onde se desenvolveram métodos ótimos sem considerar tempo de preparação estão: Barany *et al.* (1984), Evans (1985), Eppen e Martin (1987) e Hindi (1995). Existem vários trabalhos onde se desenvolveram procedimentos heurísticos para resolver o problema monoestágio sem tempo de preparação: Cattrysse *et al.* (1990), Singh e Rajamani (1991) e Kirca e Kökten (1994). Vale observar que, devido à complexidade do problema, os procedimentos ótimos resolvem apenas problemas pequenos, enquanto os procedimentos heurísticos fornecem soluções para problemas de maior porte.

Por aumentar bastante a complexidade do problema, a quantidade de trabalhos que consideram tempo de preparação é bem menor, principalmente, em se tratando do desenvolvimento de métodos ótimos. Diaby *et al.* (1992a) desenvolvem um método Branch-and-Bound. Souza e Armentano (1994) resolvem o problema com limitação nas variáveis de produção utilizando o algoritmo ótimo de Van Roy (1983). Armentano *et al.* (1999) representam o problema como uma rede generalizada e utilizam um algoritmo Branch-and-Bound. Recentemente Belvaux e Wolsey (2000), Belvaux e Wolsey (2001) e Wosley (2002) desenvolveram um pacote (baseado no método Branch-and-Cut) para modelagem e resolução otimamente de problemas de dimensionamento de lotes.

Dentre as várias heurísticas que consideram tempo de preparação não nulo destacam-se: Trigeiro *et al.* (1989) que desenvolvem um método heurístico que consiste em relaxar as restrições de capacidade aplicando a técnica de relaxação Lagrangiana. Em seguida, se a solução for inactível, um método de factibilização é aplicado, o qual transfere produção entre períodos na tentativa de factibilizar a solução (heurística Lagrangiana) e, finalmente, os

multiplicadores duais são atualizados utilizando o método do subgradiente (conforme apêndice), (Held *et al.*, 1974 e Camerini *et al.*, 1975). Lozano *et al.* (1991) propõe um algoritmo similar ao de Trigeiro *et al.* (1989). Araujo e Arenales (2000) fizeram uma modificação no método desenvolvido por Trigeiro *et al.* (1989) e obtiveram uma melhoria nos resultados computacionais. Diaby *et al.* (1992b) também utilizam relaxação Lagrangiana em conjunto com uma reformulação do problema como um problema de transporte.

2.1.4 Problema Monoestágio com Múltiplos Itens com Restrição de Capacidade em Máquinas Paralelas

O Problema Monoestágio com múltiplos itens com restrição de capacidade em máquinas paralelas, consiste em determinar quanto produzir de cada item para satisfazer a demanda em cada um dos períodos de planejamento finito. Cada item pode ser produzido em qualquer máquina, acarretando um tempo de preparação que é gasto antes de começar a produção.

O seguinte modelo foi proposto em Toledo e Armentano (2005).

Os seguintes dados são utilizados no problema:

S_{ijt}	Custo de preparação do item i na máquina j no período t .
C_{ijt}	Custo unitário de produção do item i na máquina j no período t
H_{it}	Custo unitário de estoque do item i no período t
d_{it}	Demanda do item i no período t ,
f_{ij}	Tempo de preparação da máquina j para produzir o item i .
b_{ij}	Tempo necessário para produzir uma unidade do item i na máquina j .
M	Número grande.
Cap_t	Limite de capacidade (em unidades de tempo) no período t .

As variáveis de decisão são:

X_{ijt} Quantidade do item i produzida na máquina j no período t (variável)

I_{it} Estoque do item i no fim do período t (variável)

Y_{ijt} Variável binária que assume o valor 1 se o item i é produzido na

máquina j no período t , e 0 caso contrário (variável).

Índices:

$t = 1, \dots, T$ Períodos de tempo.

$i = 1, \dots, N$ Itens.

$j = 1, \dots, M$ Máquinas.

Formulação do Problema:

$$\min \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (C_{ijt} X_{ijt} + S_{ijt} Y_{ijt}) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N H_{it} I_{it} \quad (18)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^M X_{ijt} + I_{i,t-1} - I_{it} = d_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^N (b_{ij} X_{ijt} + f_{ij} Y_{ijt}) < Cap_{jt} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (20)$$

$$b_{ij} X_{ijt} \leq M Y_{ijt} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (21)$$

$$I_{i0} = 0 \quad t = 1, \dots, T \quad (22)$$

$$X_{ijt} \text{ e } I_{it} \geq 0, Y_{ijt} = 1 \text{ ou } 0 \quad (23)$$

A formulação (18)-(23) é semelhante à formulação (12)-(17). Entretanto são consideradas várias máquinas.

Na formulação anterior o valor de M poderia ser substituído pelo valor mínimo

entre: a capacidade menos o tempo de preparação e a somatória do tempo unitário de produção vezes a demanda de todos os períodos restantes, ou seja, para o modelo (18)-(23) M poderia ser substituído por $\theta_{ijt} = \min \left\{ C_{ij} - f_{ij}, \sum_{k=t}^T b_{ij} d_{ik} \right\}$, observe que este já é um limite superior suficiente para a variável X_{ijt} . O mesmo raciocínio vale para as formulações anteriores.

Há uma escassez de trabalhos que consideram o ambiente de produção com máquinas paralelas.

Em Carreno (1990) é proposta uma heurística considerando os tempos de preparação, onde o problema abordado não permite a produção de um item em mais de uma máquina; a produção de cada item começa quando seu nível de estoque chega a zero; a demanda é contínua e o horizonte de planejamento infinito.

Sabbag (1995) propôs uma heurística para resolver o problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas não idênticas considerando o tempo de preparação de máquina; partindo-se de uma solução inicial inactível e buscando a factibilidade através da transferência de quantidades de produção entre os períodos e entre as máquinas, aplicando um passo de melhoria objetivando uma solução de melhor custo.

Toledo e Armentano (2005) propõe uma heurística baseada na relaxação lagrangiana das restrições de capacidade e de otimização do subgradiente. A partir de uma solução inactível, obtida pela minimização do problema lagrangiano são feitos deslocamentos entre períodos e máquinas na tentativa de encontrar uma solução factível, tendo como idéia principal distribuir o excesso de capacidade entre os períodos e/ou máquinas. Na última fase, que é a fase de melhoria da solução, parte-se de uma solução factível e procura-se por soluções factíveis com um custo mais baixo.

2.2 O Problema de Dimensionamento de Lotes Multiestágios

No Problema de Dimensionamento de Lotes Multiestágios os itens a serem produzidos são dependentes, isto é, a produção de determinado item depende da produção de outro item, que é chamado item componente.

Devido o modelo tratado neste trabalho ser monoestágio, o modelo multiestágio será tratado de forma resumida.

2.2.1 Problema Multiestágio com Múltiplos Itens e com Restrição de Capacidade

Os seguintes dados são utilizados no problema:

- C_{it} Custo unitário de produção do item i no período t .
- S_{it} Custo de preparação para a produção do item i no período t .
- H_{it} Custo unitário de estocagem do item i no período t .
- b_i Tempo necessário para produzir uma unidade do item i .
- f_i Tempo de preparação para a produção do item i .
- Cap_t Limite de capacidade (em unidades de tempo) no período t .
- d_{it} Demanda do item i no período t .
- M Número grande.

Dados adicionais:

- r_{ij} Unidades do item i necessárias para compor uma (1) unidade do item j .
- $Suc(i)$ Conjunto dos itens sucessores imediatos do item i ;

As variáveis de decisão são:

- X_{it} Unidades do item i produzidas no período t .

I_{it} Unidades do item i estocadas no período t .

Y_{it} Variável binária, indicando a produção ou não do item i no período t .

Índices:

$t = 1, \dots, T$ Períodos de tempo.

$i = 1, \dots, N$ Itens.

Formulação do Problema:

$$\min \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N H_{it} I_{it} + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N C_{it} X_{it} + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N S_{it} Y_{it} \quad (24)$$

Sujeito a:

$$I_{i,t-1} + X_{it} - I_{it} = d_{it} + \sum_{j \in \text{Suc}(i)} r_{ij} X_{jt} \quad i=1, \dots, N \quad t=1, \dots, T \quad (25)$$

$$\sum_{i=1}^N b_i X_{it} + \sum_{i=1}^N f_i Y_{it} \leq \text{Cap}_t \quad i=1, \dots, N \quad t=1, \dots, T \quad (26)$$

$$X_{it} - M Y_{it} \leq 0 \quad i=1, \dots, N \quad t=1, \dots, T \quad (27)$$

$$Y_{it} = 1 \text{ ou } 0 \quad i=1, \dots, N \quad t=1, \dots, T \quad (28)$$

$$X_{it} \text{ e } I_{it} \geq 0 \quad i=1, \dots, N \quad t=1, \dots, T \quad (29)$$

A diferença básica entre esta formulação e as demais, está na restrição (25), em que tem a restrição de balanceamento de estoque, que faz com que a produção e o estoque de um item sejam suficientes para suprir a demanda independente, mais, eventualmente, uma quantidade para compor o lote dos itens sucessores.

2.3 O Problema de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes

O problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes determina um plano de produção que atenda as demandas dos itens e em qual seqüência os lotes devem ser

produzidos. Uma abordagem usual das pesquisas, e que geralmente acontece na prática, no tratamento do problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes consiste na determinação do tamanho dos lotes e, a seguir, na resolução do problema de sequenciamento em cada período separadamente.

Entretanto, segundo Drexel e Kimms (1997), em se tratando de planejamento a nível operacional os dois problemas estão interligados e devem ser tratados de forma integrada.

Atualmente existem vários estudos onde se tenta modelar de forma integrada os dois problemas. Será feita adiante uma breve revisão bibliográfica destes estudos finalizando com a apresentação de um modelo que generaliza todos os outros. Uma revisão completa foi feita por Drexel e Kimms (1997).

Um dos primeiros modelos apresentados consiste no Problema de Dimensionamento de Lotes e Programação da Produção Discreta (*Discrete Lot Sizing and Scheduling Problem* – DLSP). Como já foi observado, as decisões de sequenciamento já estão embutidas neste modelo, sendo que, são considerados micro-períodos (horas, por exemplo) e não mais macro-períodos (semanas, por exemplo) como nos modelos de dimensionamento de lotes. Outra característica particular deste modelo consiste no fato de que somente um item pode ser produzido por período (*Small Bucket Problem*) e, o item produzido utiliza toda a capacidade do período (produção “tudo ou nada”).

O DLSP consiste num problema de complexidade NP-difícil, sendo que uma solução factível pode ser encontrada em tempo polinomial. Entretanto, se for considerado tempo de preparação ou máquinas paralelas, o problema de encontrar uma solução factível passa a ser NP-completo. Estudos com respeito à complexidade do DLSP podem ser encontrados em Salomon *et al.* (1991).

Atualmente existem muitas pesquisas em torno do DLSP. Dentre elas tem-se van

Hoesel e Kolen (1994), Fleischmann (1994), Salomon (1997), Brüggerman e Jahnke (2000) e Jans e Degraeve (2004).

Uma das principais limitações do modelo DLSP consiste no fato de que, uma vez que houve preparação de máquina para a produção de determinado item, deve-se utilizar toda a capacidade do período, ou seja, produção “tudo ou nada”.

Algumas variações do DLSP foram propostas, uma delas é o Problema de Dimensionamento de Lotes e Programação da Produção Contínua (*Continuous Setup Lot Sizing Problem – CSLP*).

O modelo CSLP é bastante parecido com o DLSP. Entretanto, permite que não seja utilizada toda a capacidade do período. Com isso, pode-se iniciar um novo lote sem custo de preparação adicional. Apesar desta vantagem, a quantidade de pesquisas relativas ao CSLP é bem menor quando comparado ao DLSP. Dentre as pesquisas existentes têm-se Karmarkar e Schrage (1985) e Karmarkar *et al.* (1987).

Uma outra extensão do DLSP consiste no Problema de Dimensionamento de Lotes e Programação da Produção Contínua Compartilhada (*Proportional Lot Sizing and Scheduling Problem – PLSP*).

Nos modelos DLSP e CSLP apenas um item pode ser produzido por período. No entanto, no modelo PLSP é possível produzir no máximo dois itens num período. Em Drexl e Haase (1995) é introduzido o modelo PLSP a partir das características principais do DLSP e do CSLP. Um método de solução é apresentado. Posteriormente, Drexl e Haase (1996) apresentam um algoritmo guloso baseado no mesmo método utilizado por Drexl e Haase (1995).

Na Seção 2.2 deste trabalho foram citadas várias pesquisas em modelos multiestágios, entretanto, nenhuma delas considera o modelo conjugado de dimensionamento e sequenciamento de lotes. Atualmente, vários trabalhos têm sido direcionados a modelos que

consideram o problema conjugado num ambiente multiestágio, entre eles, tem-se Dauzère-Pérès e Lasserre (1994), Kimms e Drexl (1998b), Kimms (1996), Kimms e Drexl (1998a), Kimms (1999) e Kimms (1997b).

A seguir apresentamos com mais detalhes o seguinte modelo:

2.3.1 Problema de Dimensionamento de Lotes e Programação da Produção

Generalizado (General Lot Sizing and Scheduling Problem – GLSP)

Uma crítica que se pode fazer aos modelos descritos anteriormente, que consideram que apenas um (ou poucos) item pode ser produzido por período é que, em problemas práticos, o número de períodos pode ser proibitivamente grande. Entretanto, quando se trabalha com heurísticas, pode-se resolver problemas com centenas de períodos num tempo computacional relativamente baixo.

Os modelos citados anteriormente (2.1.1 a 2.1.4) mostram que poucos itens podem ser produzidos em cada período. No entanto, atualmente, algumas pesquisas enfocam modelos dos tipos apresentados nas Seções (2.1.1 a 2.2.1), mas tratam do problema conjugado ao invés de tratar apenas do problema de dimensionamento de lotes. O modelo apresentado a seguir considera os dois problemas integrados.

O modelo considera η_t “posições” dentro de cada período, sendo que em cada posição somente um lote pode ser feito. O usuário define o número máximo de lotes (η_t) por período. A idéia principal do GLSP está no fato de que cada lote está associado unicamente a uma “posição”, e em cada “posição” a demanda é estacionária. A maioria dos dados utilizados neste modelo é semelhante aos dados utilizados anteriormente. Considere os seguintes dados adicionais:

η_t : Número máximo de posições no período t ($t=1, \dots, T$) (se $\eta_t = 1 \ \forall t \Rightarrow$

CSLP).

$F_t = 1 + \sum_{\tau=1}^{t-1} \eta\tau$: Denota a primeira posição do período t .

$L_t = F_t + \eta_t - 1$: Denota a última posição do período t .

Portanto, o total de posições em todos os períodos é $\eta = \sum_{t=1}^T \eta_t$

Considere ainda as seguintes variáveis, as quais são semelhantes às apresentadas anteriormente, entretanto, com uma pequena adaptação a este modelo.

X_{in} Unidades do item i produzidas na posição n .

I_{it} Unidades do item i estocadas no período t .

Z_{in} Variável que indica se foi considerado o custo de preparação para produzir o item i na posição n (o modelo faz com que assuma somente os valores 0 ou 1).

Y_{in} Variável binária que indica se a máquina foi preparada para produzir o item i na posição n ($Y_{in} = 1$) ou não ($Y_{in} = 0$)

Diante disso, o modelo *GLSP* pode ser escrito da seguinte forma:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{\eta} S_i Z_{in} + \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T H_i I_{it} \quad (30)$$

Sujeito a:

$$I_{it} = I_{i(t-1)} + \sum_{n=F_t}^{L_t} X_{in} - d_{it} \quad i=1, \dots, N \quad t=1, \dots, T \quad (31)$$

$$b_i X_{in} \leq Cap_t Y_{in} \quad i=1, \dots, N \quad t=1, \dots, T \quad n=F_t, \dots, L_t \quad (32)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{n=F_t}^{L_t} b_i X_{in} \leq Cap_t \quad t=1, \dots, T \quad (33)$$

$$\sum_{i=1}^N Y_{in} \leq 1 \quad n=1, \dots, \eta \quad (34)$$

$$Z_{in} \geq Y_{in} - Y_{i(n-1)} \quad i=1, \dots, N \quad n=1, \dots, \eta \quad (35)$$

$$Y_{in} = 1 \text{ ou } 0 \quad i=1, \dots, N \quad n=1, \dots, \eta \quad (36)$$

$$I_{it} \geq 0 \quad i=1, \dots, N \quad t=1, \dots, T \quad (37)$$

$$X_{in}, Z_{in} \geq 0 \quad i=1, \dots, N \quad n=1, \dots, \eta \quad (38)$$

Descrição do Modelo Matemático:

(30) A função objetivo consiste em minimizar a soma dos custos de preparação e estocagem.

(31) restrições de balanceamento de estoque. Observe que um item particular pode ser produzido em várias posições dentro de um período.

(32) as restrições garantem que um item está programado para ser produzido numa posição n , a máquina está corretamente preparada.

(33) restrições que incorporam a limitação de capacidade.

(34) restrições que impedem que haja mais de uma preparação numa determinada posição.

(35) restrições que indicam a posição na qual se tem início um novo lote.

Dentre os trabalhos que estudam o modelo GLSP têm-se: Haase (1996), Haase e Kimms (2000), Fleischmann e Meyr (1997), Meyr (2000) e Meyr (2001).

Outros trabalhos que consideram o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes de forma integrada em ambientes *large bucket* (vários itens diferentes podem ser produzidos por período), porém com formulações diferentes do GLSP são: Laguna (1999), Kang *et al.* (1999), Clark e Clark (2000), Clark (2000) e Clark (2003).

2.4 Revisão de métodos de Resolução.

Veremos nesta seção, métodos de solução para alguns dos modelos apresentados no capítulo anterior. Estes métodos são apresentados com detalhes, pois serão utilizados como

base para o método proposto neste trabalho.

2.4.1 O método ótimo de Wagner e Whitin.

Este método resolve de forma ótima o modelo (1)-(5) para tanto, baseia-se na seguinte propriedade de otimalidade para o problema monoestágio, sem restrição de capacidade, com custo de preparação fixo e um único item: $I_{t-1} X_t = 0$ para $t = 1, \dots, T$ (Johnson e Montgomery, 1974). Isto significa que a demanda de um período t deve ser satisfeita completamente com a produção do período t (X_t), ou com o estoque do período $t-1$ (I_{t-1}). Assim, a quantidade produzida num determinado período deve ser exatamente igual a soma de um conjunto de futuras demandas, ou seja:

$$X_1 = d_1 \text{ ou } X_1 = d_1 + d_2 \dots \text{ ou } X_1 = d_1 + d_2 + \dots + d_T$$

$$X_3 = 0 \text{ ou } X_3 = d_3 \text{ ou } X_3 = d_3 + d_4 \dots \text{ ou } X_3 = d_3 + d_4 + \dots + d_T$$

.....

$$X_T = 0 \text{ ou } X_T = d_T$$

A Figura 1 parte da hipótese que temos 4 períodos para produzir um produto.

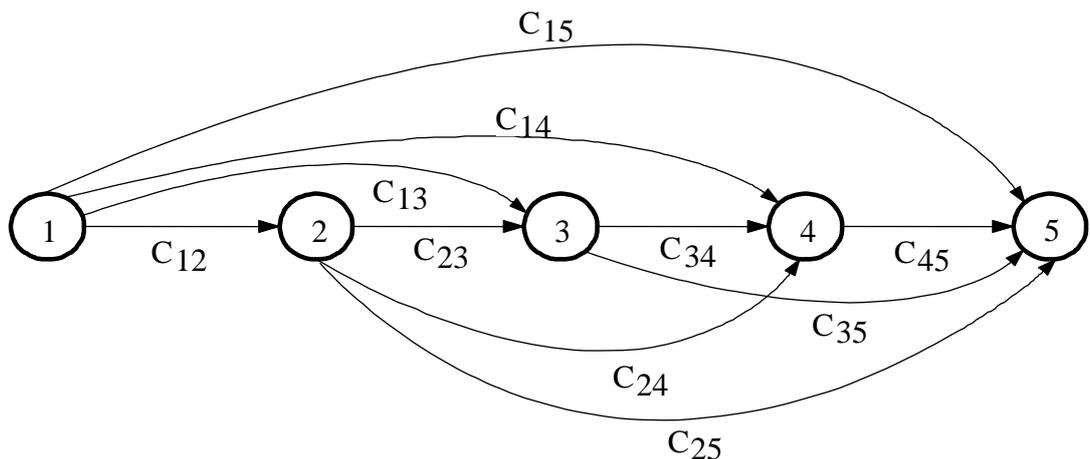


Figura 1: Exemplo gráfico de um problema com quatro períodos.

Associando os quatro períodos a uma rede com cinco nós, o arco $arc(t,j)$ para $t < j$ está associado ao custo total ($C_{t,j}$) para produzir uma quantidade que atenda as demandas do período t até o período $j-1$, ou seja, $C_{1,5}$ = custo total para produzir no período 1 uma

quantidade que satisfaça as demandas da semana 1 até a semana 4.

O método de Wagner e Whitin consiste numa técnica de programação dinâmica, onde a solução ótima é obtida utilizando-se do seguinte sistema de equações:

$$f_t = \min_{j>t} (C_{t,j} + f_j), \text{ para } t = 1, \dots, T$$

$$\text{Condição final: } f_{T+1} = 0$$

Observe que, f_t é o custo mínimo para o período de planejamento t .

Para resolver o exemplo acima através dessa fórmula primeiramente deve-se calcular os custos $C_{t,j}$, os quais serão usados na fórmula. Observe que estes custos são dados por:

$$C_{t,j} = S_t + H_t d_{t+1} + (H_t + H_{t+1}) d_{t+2} + (H_t + H_{t+1} + H_{t+2}) d_{t+3} + \dots + (H_t + H_{t+1} + \dots + H_{j-2}) d_{j-1}$$

para $t = 1, 2, \dots, T$ e $j = t+1, t+2, \dots, (T+1)$.

Para este exemplo tem-se: $t=1, 2, 3, 4$ e $j=2, 3, 4, 5$.

Diante disso, para encontrar uma política de produção ótima basta verificar os cálculos, ou seja, a soma da produção em todos os períodos e encontrar o f_t mínimo obtido pela fórmula.

Vejamos o seguinte exemplo:

Certa firma que fabrica um determinado produto deseja fazer um planejamento da produção para um horizonte de quatro semanas. Sabe-se que a demanda para estas quatro semanas será de 104, 174, 46 e 112 unidades. Suponha que a firma faça no máximo uma preparação de máquina a cada semana e que não haja restrição de capacidade de produção.

Considerando $S_t = \text{R}\$200,00$ ($\forall t$) por preparação e $H_t = \$3,00$ ($\forall t$) por unidade estocada a cada período, tem-se:

$$C_{1,2} = 200$$

$$C_{1,3} = 200 + 3 \times 174 = 722$$

$$C_{1,4} = 200 + 3 \times [174 + (46 \times 2)] = 998$$

$$C_{1,5} = 200 + 3 \times [174 + (46 \times 2) + (112 \times 3)] = 1484$$

$$C_{2,3} = 200$$

$$C_{2,4} = 200 + 3 \times 46 = 338$$

$$C_{2,5} = 200 + 3 \times [46 + (112 \times 2)] = 1010$$

$$C_{3,4} = 200$$

$$C_{3,5} = 200 + 3 \times 112 = 536$$

$$C_{4,5} = 200$$

Determinado os custos, o próximo passo é obter o custo mínimo de planejamento para cada período através da aplicação da fórmula, $f_t = \min_{j>t} (C_{t,j} + f_j)$, obteremos:

$$f_5 = 0$$

$$f_4 = \min_{j>4} (C_{4,j} + f_j) = \min (C_{4,5} + f_5) = 200 \text{ (neste caso só há uma opção)}$$

- o mínimo ocorre em $j = 5$

$$f_3 = \min_{j>3} (C_{3,j} + f_j) = \min \begin{Bmatrix} C_{3,4} + f_4 \\ C_{3,5} + f_5 \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 200 + 200 \\ 536 + 0 \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 400 \\ 536 \end{Bmatrix} = 400$$

- o mínimo ocorre em $j = 4$

$$f_2 = \min_{j>2} (C_{2,j} + f_j) = \min \begin{Bmatrix} C_{2,3} + f_3 \\ C_{2,4} + f_4 \\ C_{2,5} + f_5 \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 200 + 400 \\ 338 + 200 \\ 1010 + 0 \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 600 \\ 538 \\ 1010 \end{Bmatrix} = 538$$

- o mínimo ocorre em $j = 4$

$$f_1 = \min_{j>1} (C_{1,j} + f_j) = \min \begin{Bmatrix} C_{1,2} + f_2 \\ C_{1,3} + f_3 \\ C_{1,4} + f_4 \\ C_{1,5} + f_5 \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 200 + 538 \\ 722 + 400 \\ 998 + 200 \\ 1484 + 0 \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 738 \\ 1122 \\ 1198 \\ 1484 \end{Bmatrix} = 738$$

- o mínimo ocorre em $j = 2$

Diante disso, para encontrar uma política de produção ótima basta verificar os cálculos, ou seja, na semana 1 o valor ótimo de j é $j = 2$, isto significa que a quantidade produzida na semana 1 deve ser igual a demanda da semana 1 ($X_1 = d_1 = 104$). Na semana 2 o valor ótimo de j é $j = 4$, logo a quantidade produzida na semana 2 deve ser igual a demanda da semana 2 mais a demanda de semana 3 ($X_2 = d_2 + d_3 = 174 + 46 = 220$). O próximo período é a semana 4, na qual o valor ótimo de j é $j = 5$ o que implica em $X_4 = d_4 = 112$. Assim, a política ótima para este exemplo pode ser denotada por $X = (104, 220, 0, 112)$.

2.4.2 Heurísticas Lagrangianas

2.4.2.1 Abordagem Heurística para o PDL Monoestágio com Restrição de Capacidade por Trigeiro *et al.* (1989).

Veremos nessa seção um método de solução para o modelo (12)-(17) do capítulo anterior.

O método desenvolvido por Trigeiro *et al.* (1989) é um método heurístico que consiste em relaxar as restrições de capacidade (14) utilizando a técnica de relaxação Lagrangiana, obtendo-se vários subproblemas, um para cada item, sem restrição de capacidade. Estes subproblemas são resolvidos por programação dinâmica utilizando o algoritmo de Wagner e Whitin (1958), descrito na seção anterior. O valor da solução do problema relaxado constitui um limitante inferior para o problema original. Em geral, a solução do problema relaxado é infactível para o problema original, pois viola as restrições de

capacidade. Aplica-se então, uma heurística que transfere a produção entre períodos, na tentativa de obter uma solução factível. Por fim, a atualização dos multiplicadores de Lagrange é feita utilizando-se o método de otimização do subgradiente.

Custos e tempos de preparação são considerados no modelo e, além disso, os custos e a demanda não são constantes no tempo. No entanto, mesmo modelando para custos variáveis, Trigeiro *et al.* (1989) consideraram todos os custos constantes no tempo em suas implementações.

- **Algoritmo Geral**

A seguir, um algoritmo geral é apresentado seguido de alguns comentários e, posteriormente serão discutidos alguns dos passos propostos no algoritmo.

it := 1; (a)

k := 0; (b)

Repita

RL(12); (c)

Se Heurística() = factível (d)

Então Sol_Incumbente := Heurística(); (e)

k := k + 1; (f)

Até it <= 150;

Os passos (a) e (b), fazem a inicialização do índice de repetição e do multiplicador de Lagrange de otimização do subgradiente, respectivamente.

O passo (c) Aplica a Relaxação Lagrangiana às restrições de capacidade (12) obtendo subproblemas independentes por item. Para cada item, é resolvido o subproblema por programação dinâmica (Wagner e Whitin, 1958) e obtido uma solução.

No passo (d) é aplicada a Heurística Lagrangiana, para encontrar uma solução para o problema, se a solução encontrada for infactível, o resultado é descartado.

No passo (e), encontrando uma solução factível, se a solução encontrada for

melhor que a armazenada (sol_incumbente), então a solução factível para o problema é atualizada.

No passo (e), é atualizado os multiplicadores de Lagrange pelo método de otimização do subgradiente. Faça $k \leftarrow k+1$.

Observe que a cada iteração, o passo (c) produz um limitante inferior para o valor ótimo da função objetivo. A utilização do método do subgradiente no passo (f) garante que o algoritmo produzirá, no limite, o melhor (maior) limitante inferior. No entanto, em se tratando de programação inteira, tem-se que o valor do melhor limitante inferior pode ser menor que o valor ótimo da função objetivo do problema original, devido ao chamado “gap de dualidade”, que consiste na diferença entre o valor ótimo da função objetivo do problema dual Lagrangiano (melhor limitante inferior) e o valor ótimo da função objetivo do problema original.

A avaliação da qualidade da solução obtida é feita através do “gap”, ou seja, da diferença entre o valor da função objetivo para melhor solução factível encontrada e o valor do limitante inferior. Quando esta diferença é pequena, pode-se dizer que o valor da função objetivo obtido pela solução factível está próximo do valor ótimo. No entanto, quando o “gap” é alto, não se pode afirmar se o valor obtido pela solução factível está longe do valor ótimo, ou se existe um grande “gap de dualidade”.

- **Obtenção do Limitante Inferior**

Para se obter um limitante inferior para o problema, aplica-se a técnica de Relaxação Lagrangiana descrita no apêndice. Ao aplicar a Relaxação Lagrangiana às restrições de capacidade o modelo passa a ser escrito da seguinte forma:

Problema Lagrangiano:

$$\min \sum_t \sum_i H_{it} I_{it} (c_{it} + \lambda_i^k b_i) X_{it} + \sum_t \sum_i (S_{it} + \lambda_i^k s_i) Y_{it} - \sum_t \lambda_i^k CAP_t \quad (39)$$

Sujeito a:

$$I_{i,t-1} + X_{it} - I_{it} = d_{it} \quad (40)$$

$$X_{it} - MY_{it} \leq 0 \quad (41)$$

$$Y_{it} = \begin{cases} 1, & \text{se } X_{it} > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (42)$$

$$X_{it} \text{ e } I_{it} \geq 0 \quad (43)$$

Observe que as únicas restrições que ligavam os itens eram as restrições de capacidade. Assim, o problema relaxado pode ser decomposto item a item, obtendo-se vários subproblemas, um para cada item, sem restrições de capacidade. Isto torna possível a utilização da técnica de programação dinâmica de Wagner e Whitin (1958), a qual é aplicada em cada um dos subproblemas separadamente. As soluções para estes subproblemas são agrupadas e, em geral, a solução resultante deste agrupamento não é factível para o problema, devido ao fato de não serem consideradas as restrições de capacidade. O valor da função objetivo para a solução do problema relaxado produzirá um limitante inferior para o problema original.

- **Heurística de Factibilização**

Como mencionado anteriormente, em geral, a solução encontrada pelo algoritmo de programação dinâmica é infactível. A ideia da heurística de factibilização é fazer pequenas mudanças na solução obtida pelo passo 1, tentando ajustar os lotes de acordo com a capacidade disponível em cada período, ou seja, a heurística tenta eliminar a violação da restrição de capacidade.

O procedimento tem no máximo quatro passos, descritos a seguir. Se a violação não for eliminada, o procedimento é abandonado, as variáveis duais são atualizadas e, um

novo problema Lagrangiano é resolvido produzindo outra solução.

A seguir descreve-se resumidamente os passos da Heurística de Factibilização, maiores detalhes podem ser encontrados em Trigeiro *et al.* (1989) e Araújo e Arenales (2000).

- **1º Passo Regressivo:**

Este passo é iniciado no fim do horizonte de planejamento e evolui em direção aos períodos anteriores. Se houver violação de capacidade em um período, cada item com produção positiva é avaliado, com o objetivo de verificar qual é o mais adequado para ser transferido. O item mais adequado é aquele que tem o menor custo por unidade de violação eliminada.

Pode ser feito: a) Movendo todo o lote para o período imediatamente anterior; b) Mover todo o lote para outro período anterior; c) Mover somente a quantidade necessária para eliminar a violação; d) Mover todo o lote para o período $t-j$.

O mesmo processo é aplicado ao período anterior ($t-1$) e assim por diante, até o período 2. Observe que, ao final do passo regressivo tem-se uma solução factível, exceto possivelmente para o primeiro período.

- **1º Passo Progressivo:**

Este passo é iniciado no começo do horizonte de planejamento e evolui em direção aos períodos posteriores. O período alvo é sempre o imediatamente posterior e a quantidade transferida é o estoque I_{it} . Os itens que podem ser transferidos são: a) os itens que foram agrupados pelo algoritmo de Wagner e Whitin (1958); b) aqueles que foram transferidos pelo primeiro passo regressivo. As transferências terminam quando as violações acumuladas são eliminadas para todos os períodos, ou seja, as necessidades acumuladas até o período t forem menores ou iguais à capacidade acumulada até o mesmo período (para todo t):

$$\sum_{\tau=1}^t \left(\sum_i b_i X_{i\tau} + \sum_i S_i Y_{i\tau} \right) \leq \sum_{\tau=1}^t CAP_{\tau} \quad \text{para todo } t$$

Observe ainda que nenhuma tentativa é feita para evitar violação no período alvo. No entanto, não são permitidos atrasos na produção.

- **2º Passo regressivo:**

Idêntico ao primeiro, exceto pelo seu estado inicial que é determinado pelo resultado dos dois primeiros passos.

- **2º Passo progressivo:**

Mais rigoroso do que o primeiro. Neste segundo passo progressivo continua-se trabalhando no período até que toda a violação seja eliminada, não mais somente a acumulada. Ao final desse passo, não encontrando uma solução factível, retorna uma mensagem de que não pode ser encontrada uma solução factível e o algoritmo continua com a atualização dos multiplicadores de Lagrange.

Quando uma solução factível é encontrada, aplica-se um procedimento de melhoria da solução (arranjo final) com o objetivo de eliminar estoques desnecessários. Trigeiro *et al.* (1989) argumentam que este procedimento é necessário, pois, nenhum cuidado foi tomado para manter a propriedade $I_{i,t-1} X_{it} = 0$ (idéia básica do método de Wagner e Whitin (1958)).

- **Arranjo Final ou Procedimento de Melhoria:**

Iniciando com uma solução factível, os períodos são processados em ordem decrescente. Períodos sem folga de capacidade são ignorados e, em um período t com folga de capacidade, todos os itens que são produzidos são analisados, selecionando aqueles em

que $I_{i,t-1}X_{it} \neq 0$, ou seja, seleciona-se os itens que estejam sendo estocados do período anterior ($t-1$) e, estejam sendo produzidos no período atual (t).

O arranjo final modifica as equações de balanceamento de estoque para o item k .

Em resumo, este arranjo transfere produção do item k , no período $t-j$, para o período t , mantendo a factibilidade da solução.

- **Atualização dos Multiplicadores de Lagrange (Passo 3)**

A atualização dos multiplicadores de Lagrange é feita utilizando o método de otimização do subgradiente.

A direção do subgradiente é dada pela restrição de capacidade e é exponencialmente suavizada (Camerini *et al.*, 1975). Trigeiro *et al.* (1989) fazem apenas alguns comentários com respeito ao método de otimização do subgradiente, de modo que, não descreve exatamente a maneira como este método é utilizado.

2.4.2.2 Abordagem Heurística para o PDL em máquinas paralelas com restrição de capacidade

Veremos nessa seção, de uma maneira resumida, um método de solução para o modelo (18)-(23), do capítulo anterior. Como nosso trabalho foi baseado em Toledo e Armentano (2005), no próximo capítulo, quando descrevemos a heurística utilizada em nosso programa, apresentaremos mais detalhes sobre essa heurística, assim como as implementações realizadas.

O método desenvolvido por Toledo e Armentano (2005), é um método heurístico que consiste em relaxar as restrições de capacidade (20), utilizando a técnica de relaxação lagrangiana e a otimização dos subgradientes para resolver o problema de dimensionamento de lotes com múltiplos itens com restrição de capacidade em máquinas paralelas.

Na heurística utilizada, é realizada a decomposição do modelo original do problema, em n subproblemas um para cada item e para cada subproblema n , cada máquina passou a ser considerada separadamente, gerando assim m problemas mais simples, tornando-o possível agora de ser resolvido, utilizando o algoritmo de Wagner e Within (1958) de programação dinâmica.

O método de Toledo e Armentano (2005) parte geralmente de uma solução infactível (por violar as restrições de capacidade), obtida na resolução do problema relaxado e entra na fase de Factibilização.

Nessa fase são realizados dois tipos de deslocamento: regressivo e progressivo, tendo como alvo as máquinas que estão com suas restrições de capacidades violadas, transferindo a produção para máquinas que estejam produzindo o item analisado, eliminando assim as restrições de capacidade das máquinas.

As transferências são realizadas de uma máquina j , do período t , para outro período tl e outra máquina ml ou para o mesmo período t em outra máquina ml , levando em consideração os custos de tempo para produzir determinado item i na máquina ml , e custo de preparação da máquina ml , para produzir o item i , sem deixar de verificar se as restrições de capacidade e de estoque não estão sendo violadas. Sendo que a máquina ml que obtiver o menor custo, irá produzir o item i analisado. Com as n melhores alternativas (para o subproblema), após aplicar os passos da factibilização têm-se agora uma solução factível.

A terceira e última fase do método, é a fase da melhoria, que parte de uma solução factível encontrada pela heurística de factibilização, e também se utiliza, de dois descolamentos: regressivo e progressivo.

O alvo agora nessa fase, é encontrar as máquinas que já estejam produzindo e que possuam folga na sua capacidade de produção, podendo receber uma quantidade de itens i a serem produzidos, mantendo a solução factível. Antes da transferência verifica-se se essa

movimentação trará uma diminuição nos custos, garantindo assim, que depois de aplicado o método da melhoria, se tenha uma solução melhor do que a encontrada na factibilização.

Esse método é aplicado até que se encontre uma solução ótima, ou que o número de iterações estipuladas seja alcançado, apresentando assim a última melhor solução gerada, ou que a solução seja dada como infactível.

CAPÍTULO 3

Planejamento e Programação da Produção numa Fundição Automatizada de Grande Porte utilizando Relaxação Lagrangiana

3.1 Introdução

A grande maioria da produção brasileira de fundidos é fabricada por fundições cativas, que são departamentos de grandes empresas (por exemplo, algumas montadoras de automóveis) cuja produção é destinada basicamente, para consumo próprio. Essas fundições cativas estão orientadas para a produção em série, automatizada e fabricam grandes quantidades de cada item.

Uma fundição é caracterizada pela transformação, numa primeira etapa, de minérios de ferros em ligas metálicas, que por sua vez, ainda em estado líquido, são despejados dentro de moldes, os quais são normalmente feitos de areia e resina, para a produção de peças fundidas. Assim, dois tipos de equipamentos básicos estão presentes numa fundição: fornos de fusão, para a produção de ligas metálicas e, máquinas de moldagem, para a produção dos moldes.

Atualmente, na fundição estudada, primeiro é feito o dimensionamento de lotes planejando assim os itens a serem feitos pelas máquinas de moldagem e, as decisões de programação dos fornos são tomadas somente num segundo momento, de acordo com o que foi planejado para as máquinas de moldagem. No entanto, de acordo com Drexl e Kimms (1997) “Os problemas de dimensionamento de lotes e programação da produção interagem com outras atividades de uma indústria, por exemplo: planejamento de distribuição, corte e empacotamento e programação de projetos. A coordenação destas tarefas de planejamento é, portanto, muito importante para evitar altos custos transacionais. Contudo, as pesquisas têm

praticamente negligenciado os problemas de coordenação. Como o aproveitamento de oportunidades para diminuir custos é um aspecto vital num ambiente competitivo, a resolução de problemas de coordenação talvez seja a meta mais crucial de trabalhos futuros”.

Este trabalho tem como objetivo contribuir nas pesquisas, com a construção de um modelo matemático e de um método de resolução a partir de deste estudo de caso onde propomos um modelo que trata de forma integrada o problema de dimensionamento de lotes das peças a serem produzidas nas linhas de moldagem e o problema de programação das ligas a serem produzidas nos fornos.

A motivação para o desenvolvimento deste método de resolução para o problema de dimensionamento de lotes está na importância da aplicação na automatização da indústria; na programação simultânea das máquinas de moldagem e dos fornos e na complexidade em confeccionar ferramentas matemático/computacionais para resolver problemas de tomada de decisão relacionados com o planejamento tático-operacional, determinando o quanto produzir e/ou comprar além dos níveis de estoque e recursos necessários tendo como objetivo a redução dos custos.

No trabalho de Araujo *et al.* (2006), após algumas visitas a empresas de diferentes setores industriais, os autores observaram que em vários casos tinha-se uma estrutura similar àquela encontrada em fundições, por exemplo: na indústria de fabricação de derivados de tomates, na indústria de bebidas (Rangel e Ferreira (2003)), dentre outras. Tal estrutura deve aparecer em todas as indústrias que têm o processo produtivo dividido em duas etapas, as quais são dependentes. Na primeira etapa a “matéria-prima” do produto é fabricada, por exemplo, a fabricação da liga pelos fornos em fundições e a fabricação do xarope nos tanques das indústrias de bebidas. Então, na segunda etapa esta “matéria-prima” é usada para fabricar o produto final, por exemplo, a liga despejada dentro dos moldes para fazer os itens finais e o xarope despejado para a fabricação dos diferentes tipos de embalagens de bebidas.

3.2 Definição do Problema

Em Araujo e Arenales (2004), foi feito um estudo numa fundição cativa. A seguir descreve-se o processo produtivo desta Fundição. A Figura 2 mostra um conjunto de nove fornos e três máquinas de moldagem, ilustrando a estrutura da produção.

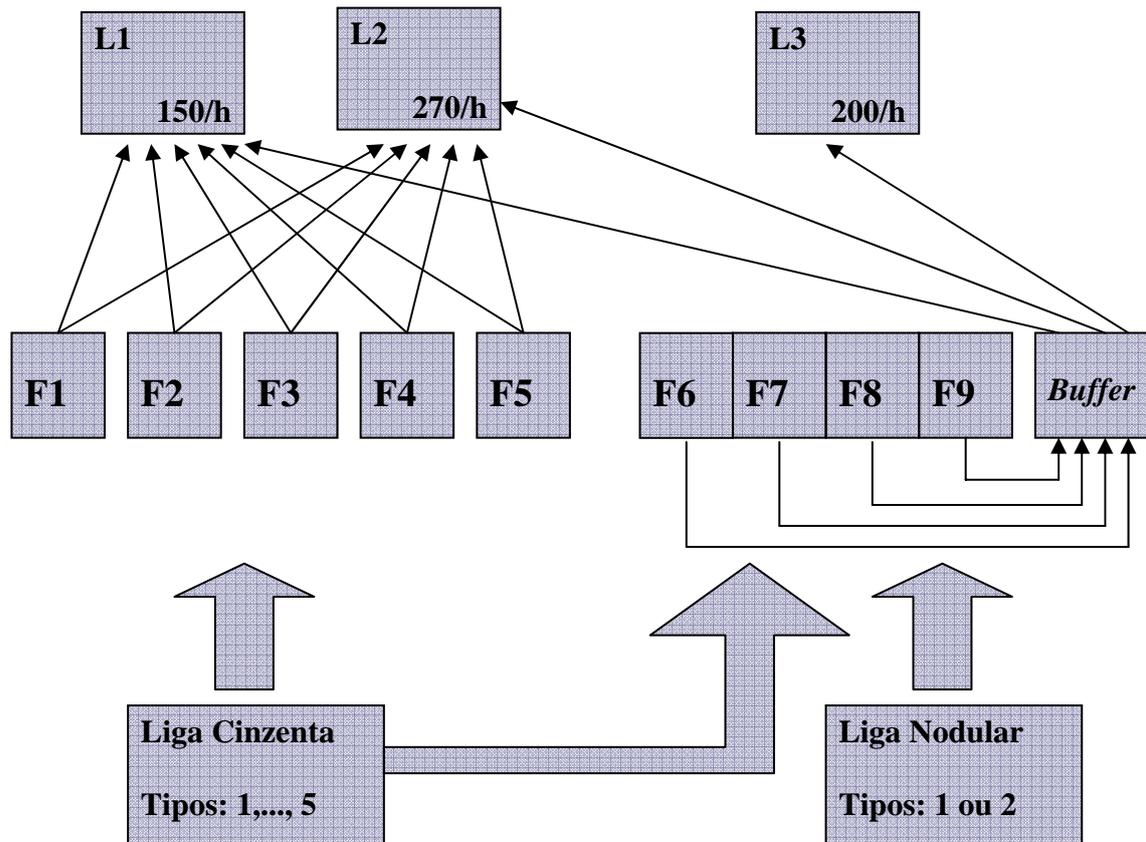


Figura 2: Conjunto de Fornos e máquinas de moldagem

No nosso problema a fundição possui dois setores, conforme a Figura 2, sendo que o primeiro setor possui 5 fornos e duas linhas de moldagens para a produção, restringindo-se os fornos desse setor a somente abastecer as linhas de moldagem desse setor. Dois tipos principais de ligas são produzidos: cinzenta e nodular, sendo que o primeiro setor produz apenas peças referentes à liga cinzenta e o segundo setor pode produzir peças das duas ligas (cinzenta e nodular). Porém, uma vez que uma liga é produzida em um determinado período, os fornos do segundo setor, devem produzir a mesma liga, repassando-a para o

reservatório.

Nas máquinas de moldagem estão integradas algumas das operações, tais como a produção dos moldes, a injeção da liga metálica nos moldes, o resfriamento da liga, a eliminação da areia e finalmente a eliminação de rebarbas, que consistem em resíduos de ligas. Por isso são chamadas linhas de moldagem.

Os moldes são compostos de várias cavidades e, cada uma das cavidades gera uma peça (produto final). O número de cavidades de cada molde varia de 6 a 48. Subtendendo-se que um único molde pode produzir um conjunto de 48 peças e esse conjunto de peças é chamado de “árvore”. A Figura 3 mostra um molde com 10 cavidades (peças) utilizadas pela indústria nas linhas de montagem.

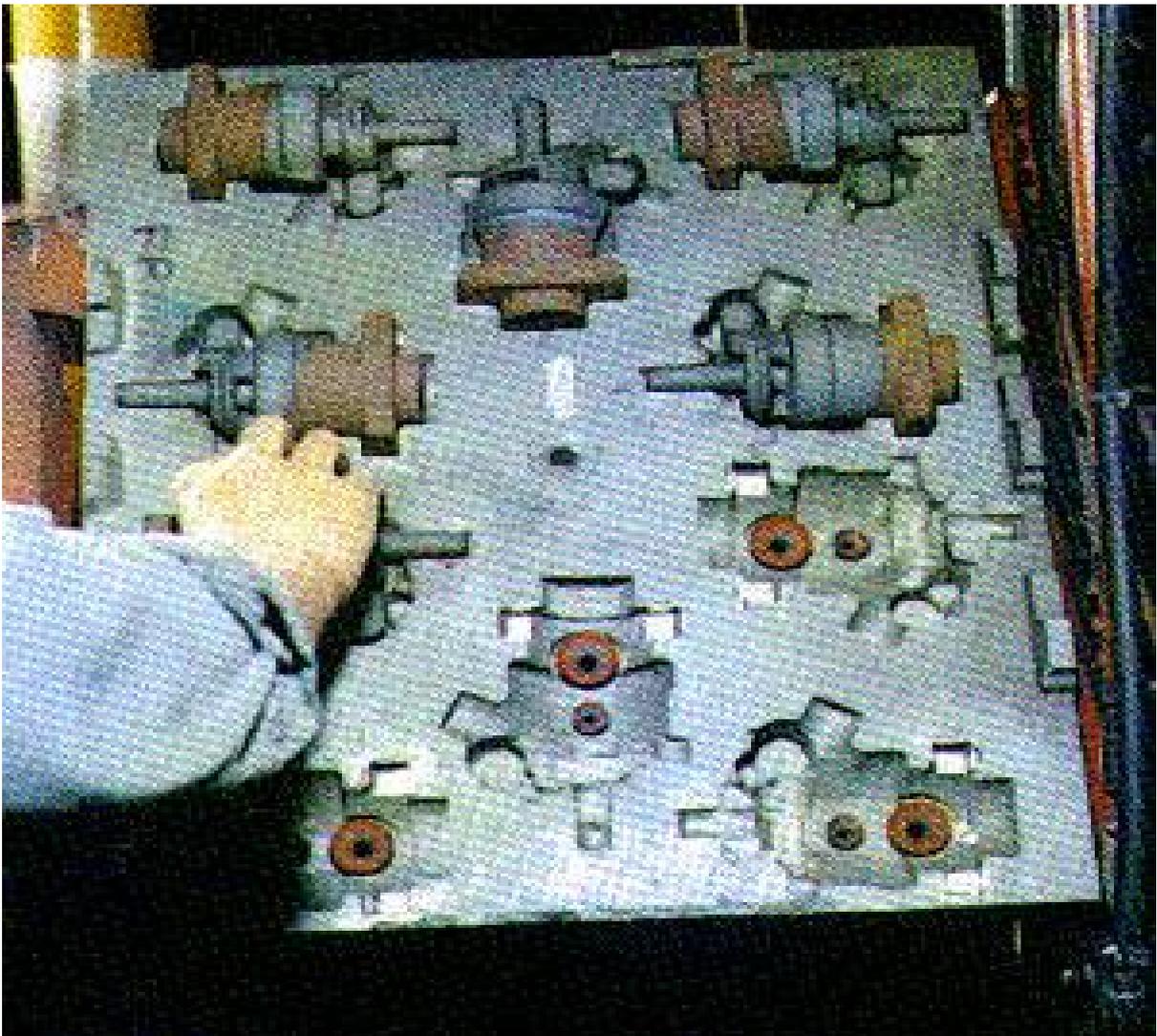


Figura 3: Conjunto de 10 peças (árvore)

Como os equipamentos podem estar organizados em setores, é comum que algumas linhas de moldagem sejam abastecidas por ligas metálicas de fornos pré-determinados. A Figura 4 ilustra um dos nove fornos utilizados na indústria.

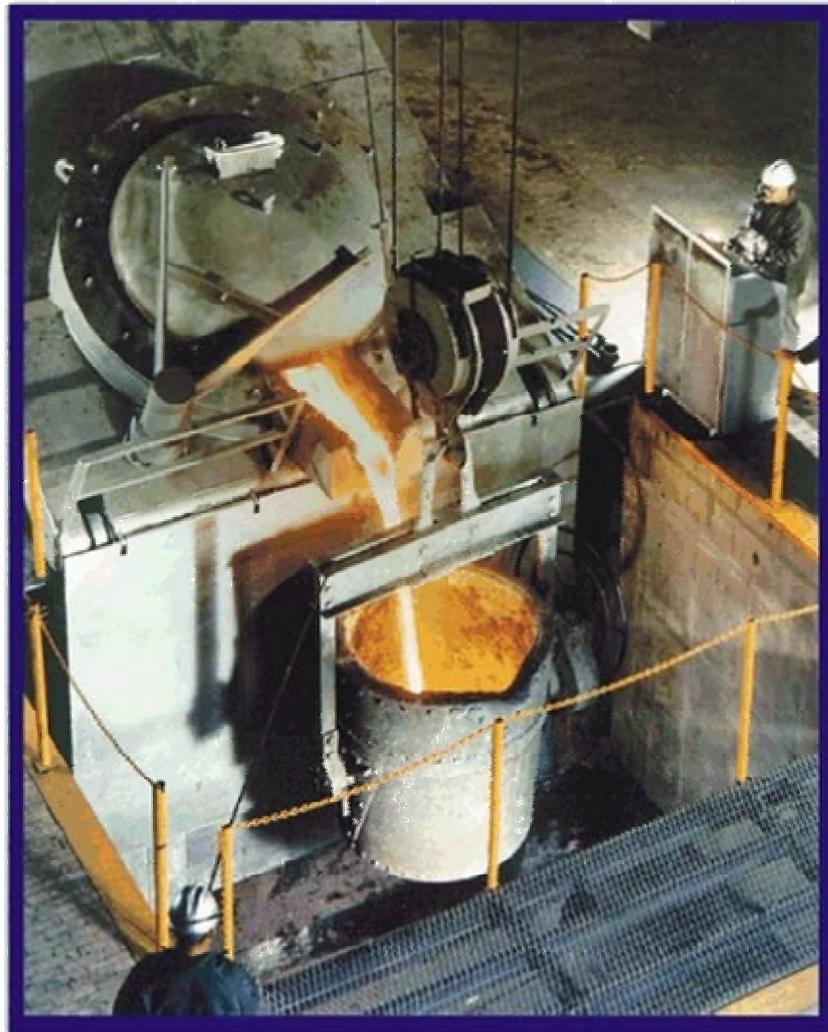


Figura 4: Forno da fundição

Assim como os fornos têm a capacidade limitada para a produção de ligas/hora, as linhas de moldagem possuem uma limitação de produção. Sendo que por questão de qualidade algumas peças não podem ser produzidas por determinadas linhas de moldagem.

A programação da produção é feita por turno de trabalho. A fundição estudada funciona 24 horas por dia, que é dividido em três (3) turnos de trabalho. Os fornos funcionam

ininterruptamente durante os três (3) turnos, porém, uma fração de tempo do terceiro turno é utilizada para a manutenção das linhas. Isto faz com que os fornos estejam com carga máxima no início do primeiro turno do dia seguinte. É também interessante observar que muitas vezes a programação feita pela empresa admite diminuir o tempo de manutenção.

Para efeito de programação da produção, cuja ênfase está nas linhas de moldagem (ilustrada na Figura 5), é suficiente considerar apenas duas ligas, cinzenta e nodular e, portanto, as subdivisões de cada liga não são consideradas. Esta simplificação é perfeitamente aceitável, pois a transformação da liga (cinzenta ou nodular) para uma das subdivisões é feita depois que a base estiver pronta, apenas adicionando-se diferentes elementos.

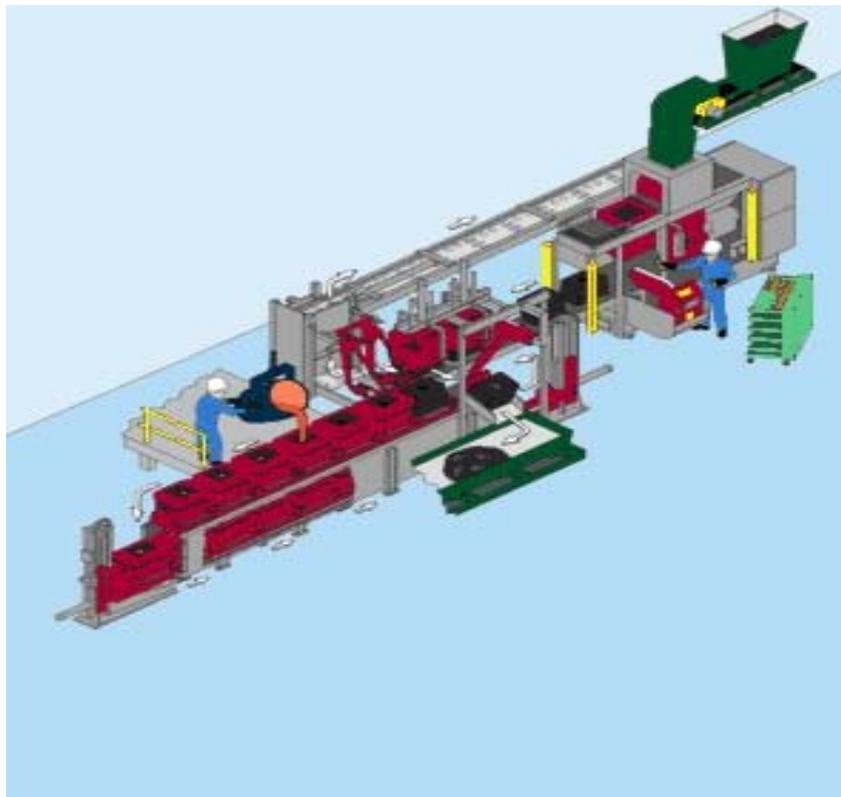


Figura 5: Linhas de moldagem

O setor 1 tem capacidade de armazenamento de 10.000 kg, enquanto o setor 2 tem capacidade para 8.000 kg. A energia contratada para os fornos atualmente é de 6.000

kW/h sendo que são despendidos 750 kW de energia para a fabricação de 1.000 kg/hora de liga, restringindo a fabricação em uma hora, no máximo a 8.000 kg de liga. Sendo que este valor representa a capacidade total de reposição dos fornos por hora. Baseado na informação que a distribuição de energia, por hora, para o setor 1 é de, no máximo 4.000 kW e para o setor 2 é de no máximo, 2.500 kW por hora, temos a produção máxima de 5.330 kg de liga e 3.330 kg de liga por hora respectivamente.

A soma das capacidades máximas de reposição dos setores ultrapassa a capacidade máxima (8.000 kg/hora), indicando que a reposição nos dois setores tem que ser calculada.

Na modelagem matemática existirão variáveis de decisão referentes ao armazenamento das ligas e variáveis de decisão referentes à reposição das ligas. Tais variáveis serão limitadas pelas capacidades de armazenamento e de reposição dos setores.

A demanda interna de cada peça é constante em cada mês, ou seja, durante 1 mês, a cada dia tem-se a mesma quantidade demandada para cada peça. Para se fazer a programação da produção para um dia de trabalho e preciso considerar o estoque inicial de cada dia. No estoque inicial são consideradas as peças que estão prontas na fundição, bem como as peças que estão armazenadas no setor de usinagem.

O problema da programação da produção na fundição estudada consiste em programar simultaneamente os fornos e as linhas de moldagem. Determinando as quantidades adequadas das ligas produzidas pelos fornos em cada período do planejamento, respeitando-se as capacidades dos fornos (seja de reposição como de armazenagem), as quais serão usadas para a fabricação de peças nas máquinas mais adequadas (uma mesma peça pode ser produzida em máquinas diferentes, porém uma máquina pode ser considerada pelo programador como “mais adequada que outra”). Isto deve ser feito de modo a atender a demanda.

A Tabela 1 exibe uma carteira de pedidos da indústria, representadas por unidades ⁽¹⁾ e Kg ⁽²⁾.

Tabela 1: Carteira de pedidos real da fundição.

Peça	Família	Demanda Peça ⁽¹⁾	Cavidades ⁽¹⁾	Demanda Árvore	Peso Peça ⁽²⁾	Peso Árvore ⁽²⁾	Peso Dia ⁽²⁾	Li-ga	Est. Inicial ⁽¹⁾	Peso Est. Ini ⁽²⁾
1	A	2580	6	430	2,73	16,4	7052	C	777	12745,53
2	B	4248	6	708	3,30	19,8	14018,4	C	397	7863,90
3	C	17496	12	1458	1,79	21,48	31317,84	C	1502	32264,75
4	D	11328	6	1888	2,78	16,7	31529,6	C	2706	45190,20
5	E	6576	6	1096	2,62	15,7	17107,2	C	1174	18434,42
6	F	5664	8	708	1,73	13,8	9770,4	C	700	9660,00
7	F	5652	12	471	1,03	12,3	5793,3	C	875	10762,50
8	G	404	4	101	4,13	16,5	1666,5	C	193	3176,25
9	B	4200	35	120	0,31	10,8	1296	C	280	3024,00
10	G	400	8	50	1,29	10,34	517	C	150	1551,00
11	D	11305	35	323	0,42	14,8	4780,4	C	189	2790,86
12	E	6545	35	187	0,35	12,2	2281,4	C	257	3137,14
13	G	408	12	34	0,65	7,8	265,2	C	350	2730,00
14	G	400	20	20	0,52	10,4	208	C	20	208,00
15	G	396	36	11	0,24	8,75	96,25	C	11	96,25
16	A	2600	40	65	0,22	8,9	578,5	C	185	1646,50
17	B	2562	42	61	0,17	7,3	445,3	C	452	3302,38
18	A	2592	48	54	0,14	6,85	369,9	C	125	856,25
19	G	384	24	16	0,30	7,3	116,8	C	171	1247,08
20	A	2583	21	123	0,75	15,85	1949,55	N	310	4905,95
21	B	4245	15	283	0,89	13,37	3783,71	N	360	4813,20
22	F	5655	15	377	0,69	10,3	3883,1	N	673	6935,33
23	C	5817	21	277	0,58	12,1	3351,7	N	732	8859,50
24	H	11616	48	242	0,35	17	4114	N	542	9208,33
25	D	11322	18	629	0,69	12,4	7799,6	N	581	7205,78
26	E	6570	18	365	0,70	12,62	4606,3	N	417	5258,33
27	G	400	10	40	1,23	12,3	492	N	110	1353,00

Podemos observar na Tabela 1, que a indústria possui 27 peças que devem ser programadas para a produção diária. A Tabela 1 exhibe também, a demanda diária para cada peça, cavidades de cada molde, demanda por árvores (calculada dividindo-se a demanda da peça pelo número de cavidades do molde), peso bruto de cada peça (em Kg), peso bruto de cada árvore (em Kg), a liga para confeccionar cada peça (onde, C= Cinzenta, N=Nodular) e o estoque inicial (por número e peso das árvores).

A seguir apresenta-se o modelo Matemático proposto por Araujo e Arenales (2004). A notação utilizada na apresentação do modelo segue a notação de Araújo e Arenales (2004), com alguns ajustes para ser utilizada no presente trabalho.

3.3 Modelagem Matemática

Antes de apresentar a modelagem matemática, faz-se necessário inserir algumas exigências impostas pelo gerente de produção da indústria, que vêm complementar as informações anteriores, na tomada de decisões do planejamento e programação da produção:

- a programação deve ser feita em número de árvores de cada tipo de peça, ou seja, deve-se determinar o número de vezes que o molde (que fabrica determinada peça) será utilizado, em cada linha de moldagem, em cada turno de trabalho.
- os lotes devem ser quebrados em 3, caso a demanda sejam maior que 1000 árvores ou em 2 caso a demanda esteja entre 500 e 1000 árvores. Por outro lado os tamanhos dos lotes não devem ser muito pequenos, pois, existe um custo de preparação das linhas de molde que estava sendo utilizado (o tempo e o custo de preparação são independentes da seqüência). Embora o tempo e custo de preparação sejam pouco relevantes na produção, são considerados no modelo com o propósito de inibir a formação de lotes pequenos. Deste modo, não é importante considerar no modelo matemático o fato da linha de moldagem estar

preparada para a produção de uma peça fabricada no período anterior (em problemas com tempo e custo de preparação alta esta consideração pode ser importante).

- é desejável que se tenha estoque de peças para um dia inteiro de trabalho, prevenindo-se da possibilidade de quebras das máquinas, falta de energia ou qualquer outro fator que interfira na produção das peças.

Os seguintes dados são utilizados no problema:

Cap_k Capacidade total de armazenamento da liga k (é determinada pela capacidade dos fornos que podem armazenar a liga k);

CT Capacidade total de armazenamento de todos os fornos;

$CRep_k$ Capacidade máxima de produção (reposição) da liga k numa hora de trabalho (é determinada pela capacidade de reposição dos fornos que podem produzir a liga k);

$CTrep$ Capacidade total de reposição de todos os fornos numa hora de trabalho (delimitada pela energia contratada);

d_{it} Demanda (em número de árvores) da peça i no período t ;

ρ_i Peso unitário bruto de cada árvore da peça i ;

$S(k)$ Conjunto de peças que utilizam a liga k ;

a_{im} Quantidade de árvores da peça i que a linha m consegue fazer por hora;

h_{mn} Horas disponíveis na linha de moldagem m no sub-período n ;

q_{mn} Horas de paralisações na linha de moldagem m no sub-período n ;

hf_n Horas disponíveis nos fornos no sub-período n ;

H_{it}^+ Custo de estocagem de uma árvore da peça i no período t ;

H_{it}^- Custo pelo atraso na entrega de uma árvore da peça i no período t ;

c_{im} Custo para produzir uma árvore da peça i na linha m ($c_{im} = \infty$ significa que a árvore da peça i não pode ser produzida pela linha m);

$X_{max_{in}}$ Tamanho máximo de um lote da árvore da peça i , para o sub-período n ;

$I_{max_{it}}$ Estoque máximo de árvores da peça i no período t ;

s_m Custo de preparação na linha m

st_m Tempo de preparação na linha m ;

CF_{k0} Quantidade de liga k no início do planejamento (também no início de cada dia).

Observação: As horas disponíveis (h_{mn}) para cada linha poderiam incluir as horas de paralisação (q_{mn}), pois para efeito de programação deve-se considerar: ($h_{mn} - q_{mn}$).

Porém, q_{mn} é um parâmetro aleatório que auxilia o programador em simulações.

As variáveis de decisão do problema são:

X_{imn} Quantidade de árvores da peça i produzida na linha m no sub-período n .

I_{it}^+ Quantidade estocada de árvores da peça i no período t .

I_{it}^- Quantidade em atraso (ou, estoque negativo) de árvores da peça i no período t .

CF_{kn} Quantidade disponível (em kg) de liga k no final do sub-período n ;

CR_{kn} Quantidade de reposição (em kg) da liga k no sub-período n ;

Y_{imn} Variável binária que indica a preparação para produzir a árvore da peça i na linha m no sub-período n .

Índices:

$m=1, \dots, M$ Linhas de moldagem;

- $k=1, \dots, K$ Tipos de ligas;
 $i=1, \dots, N$ Tipos de peças;
 $t=1, \dots, T$ Períodos de tempo.
 η_t Número máximo de sub-períodos no período t ($t=1, \dots, T$).

$$F_t = 1 + \sum_{\tau=1}^{t-1} \eta_\tau \quad \text{Denota o primeiro sub-período do período } t;$$

$$L_t = F_t + \eta_t - 1 \quad \text{Denota o último sub-período do período } t;$$

$$n = F_1, \dots, L_T \quad \text{Sub-períodos.}$$

Formulação do Problema:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (H_{it}^- I_{it}^- + H_{it}^+ I_{it}^+) + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^T \sum_{n=F_t}^{L_t} c_{im} X_{imn} + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^T \sum_{n=F_t}^{L_t} S_m Y_{imn} \quad (44)$$

Sujeito a:

$$I_{i,t-1}^+ - I_{i,t-1}^- + \sum_{n=F(t)}^{L(t)} \sum_{m=1}^M X_{imn} - I_{it}^+ + I_{it}^- = d_{it} \quad i=1, \dots, N \quad t=1, \dots, T \quad (45)$$

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{X_{imn}}{a_{im}} + s t_m Y_{imn} \right) \leq (h_{mn} - q_{mn}) \quad m=1, \dots, M \quad n=F_1, \dots, L_T \quad (46)$$

$$0 \leq X_{imn} \leq X \quad \max_{in} Y_{imn} \quad i=1, \dots, N \quad m=1, \dots, M \quad n=F_1, \dots, L_T \quad (47)$$

$$CF_{kn-1} - \sum_{i \in S(k)} \sum_{m=1}^M \rho_i X_{imn} + CR_{kn} = CF_{kb} \quad k=1, \dots, K \quad n=F_1, \dots, L_T \quad (48)$$

$$0 \leq CF_{kn} \leq Cap_k \quad k=1, \dots, K \quad n=F_1, \dots, L_T \quad (49)$$

$$\sum_{k=1}^K CF_{kn} \leq CT \quad n=F_1, \dots, L_T \quad (50)$$

$$0 \leq CR_{kn} \leq CRep_k(hf_n) \quad k=1, \dots, K \quad n=F_1, \dots, L_T \quad (51)$$

$$\sum_{k=1}^K CR_{kn} \leq CTrep(hfn) \quad n=F_1, \dots, L_T \quad (52)$$

$$I_{it}^- > 0 \quad i=1, \dots, N \quad t=1, \dots, T \quad (53)$$

$$Y_{imn} \in \{0,1\} \quad i=1, \dots, N \quad m=1, \dots, M \quad n=F_1, \dots, L_T \quad (54)$$

A função (44) é composta de três parcelas que objetivam a formação de estoques ou atrasos, a designação das peças para serem fabricadas nas máquinas mais adequadas e evitar a formação de lotes pequenos. Para isto, os coeficientes em (44) devem ser definidos pelo utilizador. Por exemplo, quando há interesse de se manter peças em estoques, de modo que, em caso de quebra de máquina, a demanda possa ser atendida pelo estoque, valores negativos são usados em H_{it}^+ para incentivar que as variáveis I_{it}^+ sejam positivas. A variável I_{it}^- corresponde a atrasos e o gerente de programação pode ajustar H_{it}^- de modo a proibir ou não atrasos de certos itens. Além disso, os estoques negativos fornecem uma ferramenta para a avaliação dos prazos de entrega. Por exemplo, se $d_{i1} = 30$ e uma solução tal que: $I_{i1}^- = 10$, $I_{i2}^- = 5$, $I_{i3}^- = 0$, significa que a demanda para o item i será totalmente atendida com 3 (três) dias de atraso. Desta forma, é possível alertar o cliente e, se necessário, recalibrar os parâmetros relativos a esta peça. A segunda parcela da função objetivo é também usada para levar em conta algumas proibições do processo produtivo, pois algumas peças não podem ser feitas por determinada linha, devido a alguma restrição da linha de moldagem. Assim, um valor alto para c_{im} faz com que o item i não seja produzido na máquina m . Além disso, o segundo termo ainda descreve algumas prioridades em relação a certas peças que, se possível, deveriam ser feitas em linhas específicas, as quais são mais adequadas para produzir tais peças. O terceiro termo em (44) define os custos de preparação.

As restrições (45) são de balanceamento de estoque e consideram tanto estoques positivos, como negativos (atrasos). As restrições (46) são devido à limitação de tempo disponível das linhas de moldagem e (47) indicam que pode haver produção de determinada peça somente se houver preparação para esta peça e, a quantidade total produzida de árvores da peça i na linha m no sub-período n deve ser menor que o tamanho máximo do lote para a

peça i . As restrições (48) são restrições de balanceamento da capacidade dos fornos, levando em consideração a quantidade de liga restante do turno anterior ($CF_{k,n-1}$), a capacidade de reposição de cada liga (CR_{kn}) e a quantidade (em peso) de liga utilizada em cada turno ($\sum_{i \in S(k)} \sum_{m=1}^M \rho_i X_{imn}$). Cabe observar que, os fornos estarão com sua capacidade máxima de armazenamento no primeiro turno de cada período, devido às máquinas de moldagem terem sido paradas para manutenção. Em (49) a quantidade de liga restante num turno (CF_{kn}) é limitada pela capacidade total de armazenamento da liga (Cap_k) e, em (50) a quantidade restante de todas as ligas ($\sum_{k=1}^K CF_{kn}$) é limitada pela capacidade total de armazenamento (CT). Em (51) a capacidade de reposição da liga k num sub-período n (CR_{kn}) é limitada pela capacidade máxima de reposição por hora da liga k , vezes o número de horas do sub-período ($Crep_k * hf_n$) e, em (52) a capacidade de reposição de todas as ligas num sub-período ($\sum_{k=1}^K CR_{kn}$) é limitada pela capacidade total de reposição por hora (restrição devido à energia contratada), vezes a quantidade de horas do sub-período ($CTrep * hf_n$). As restrições (53)-(54) limitam as variáveis de atraso e definem a variável de preparação como binária.

3.4. Método da Solução

O modelo matemático (44)-(54) foi resolvido em Araujo e Arenales (2004) com um pacote de otimização inteira. Os resultados computacionais foram comparados com aqueles obtidos pela empresa, mostrando expressivos ganhos de produtividade e redução de atrasos na entrega dos pedidos.

A estratégia da solução proposta para o Planejamento e Programação da Produção numa Fundição Automatizada de Grande Porte, é baseada na relaxação Lagrangiana

das restrições do modelo matemático, relacionadas à limitação de tempo disponível nas linhas de moldagem.

O método utilizado no nosso trabalho é baseada no método desenvolvido por Toledo e Armentano (2005), relaxando as restrições de capacidade (46), aplicando a heurística da relaxação Lagrangiana, que contém uma estratégia geral de solução para problemas de programação matemática, permitindo a decomposição destes, em subproblemas mais fáceis (para uma caracterização geral do método da relaxação Lagrangiana, recomenda-se consultar o anexo deste trabalho).

Nosso método, é dividido em 4 fases: Obtenção do Limitante Inferior, Factibilização, Melhoria e Factibilização dos Fornos. Sendo que as três primeiras fases, apresentam suas adaptações em relação a Toledo e Armentano(2005), para poder resolver o problema estudado nesse trabalho. Na primeira fase, tem-se a obtenção de um limitante inferior onde é feita a relaxação da restrição (46), utilizando-se o pacote Ampl/Cplex 10.0.1,

A segunda fase da metodologia compreende em fazer a leitura das variáveis, $H_{it}^+, H_{it}^-, I_{it}^+, I_{it}^-, X_{imn}, Y_{imn}$ que o pacote Amp/Cplex calculou e aplicar a heurística desenvolvida, para factibilizar o problema em relação a restrição relaxada.

Na heurística de factibilização que envolve os passos progressivos e regressivos, o excesso das máquinas é dado por:

$$Excesso(m,n) = \Delta(m,n)^+ = \max \left\{ \left(\sum_{i=1}^N \left(\frac{x_{imn}}{a_{im}} + st_m Y_{imn} \right) - (h_{mn} - q_{mn}) \right), 0 \right\}$$

Para eliminar o Excesso (m,n) (onde m representa uma máquina e n um turno ou subperíodo) podemos considerar a movimentação da quantidade q , de um item i , produzido em (m,n) para $ml \neq m$, sendo ml a máquina para onde está sendo transferida a quantidade, e/ou $nl \neq n$, considerando nl o turno para onde está sendo transferida a produção. A quantidade a ser transferida será encontrada em:

$$q = \min((\text{Excesso}(m,n) * a_{im}), (X_{imn}), (X_{max_{im}}))$$

Onde ,

q = quantidade excedida na máquina m , no sub-período n multiplicado pela quantidade de árvores da peça i que a máquina m consegue fazer por hora, com isso obteremos a quantidade do item i , necessária para eliminar o excesso. Estabelecendo que possa ser somente o excesso que viola as restrições de capacidade, ou a quantidade máxima do item i , produzida na máquina m , que pode ser transferida do turno n (X_{imn}), ou o tamanho máximo de um lote da árvore da peça i no sub-período nl ($X_{max_{iml}}$).

A situação (q, i, m, ml, n, nl) que denota a transferência do item i , da máquina m para a máquina ml e do sub-período n para o sub-período nl , de forma a minimizar essa relação, é verificada em:

$$\text{Razão} = \frac{\text{Custo_Adicional} + \partial \text{Penalidade}}{\text{Redução}}$$

O Custo Adicional, após os ajustes do estoque, é calculado a partir de:

$$\text{Custo_Adicional} = \text{Custo_Estoque} + (\text{Custo_Setup} + \text{Custo_Produção})$$

Onde, diferente de Toledo e Armentano, (2005), no estoque, temos que considerar o atraso, modificando o cálculo para:

$$\text{Custo_Estoque} = (\text{Valor_Fo_Antes}(ii) - \text{Valor_Fo_Depois}(ii)), \quad \text{sendo o}$$

$\text{Valor_Fo_Antes} = \sum_{t=1}^T (H_{it}^- I_{it}^- + H_{it}^+ I_{it}^+)$ para obter o valor anterior a transferência e o

$\text{Valor_Fo_Depois} = \sum_{t=1}^T (H_{it}^- Iaux_{it}^- + H_{it}^+ Iaux_{it}^+)$, com o valor atual da transferência, com as

variáveis $Iaux_{it}^-$, $Iaux_{it}^+$ já atualizadas.

Sendo assim, no custo adicional iremos obter o valor de estocar ou atrasar a produção dos itens, acrescentados de $(1 - Y_{iml}) * s_m + q * (c_{im} - c_{iml})$, ou seja, dos custos de

preparação da máquina ml , mais diferença dos custos de produção.

A Penalidade é obtida através do valor excedido dos itens já transferidos, isto é, a situação atual da máquina m e do turno n que teve os itens transferidos, somando com a diferença entre o excesso já com a nova situação de transferência e a situação que se encontrava antes da transferência, para as máquinas ml e o turno nl , que receberam os itens, como mostra a seguir:

$$Penalidade = \left\{ \frac{Excesso_depois(m,n) + [Excesso_depois(ml,nl) - Excesso_antes(ml,nl)]}{C_n} \right\}$$

Onde o fator ∂ (penalidade) é limitado ao intervalo $[0,1]$, e como podemos considerar estoque e o atraso, temos que fazer uma adaptação em relação à heurística de Toledo e Armentano (2005), passando a considerar a manutenção tanto do estoque quanto do atraso, no cálculo do custo adicional.

A Redução é encontrada através da seguinte função:

$$Redução = \frac{q}{a_{im}}, \text{ sendo que se } X_{imn} - q < 0, \text{ então, } Redução = \frac{q}{a_{im}} + st_m,$$

acrescentando assim o tempo de preparação na linha m que irá produzir o item i .

Outra diferença do método em relação a Toledo e Armentano (2005), é em relação à transferência dos itens, após aplicar o Razão, e encontrar o melhor item a ser transferido, temos que considerar que a transferência do item será realizada entre os sub-períodos, mas, o período tem que ser considerado, pois pode ocorrer transferência para dentro do mesmo período, o que não alteraria o estoque ou atraso, que tem seus custos e quantidade considerada para o período e não para o sub-período, então, se o período a ser transferido é menor que o período onde está a quantidade, deve-se:

Verificar se há atraso ($I_{it}^- > 0$), em caso positivo, fazer a diminuição do atraso:

$$a) I_{it}^- = I_{it}^- - q, \text{ se } (I_{it}^- - q) \geq 0$$

ou

$I_{ii}^- = 0$ e $I_{ii}^+ = -(I_{ii}^- - q)$, se $(I_{ii}^- - q) < 0$, transferindo assim, a diferença para o

estoque positivo.

Ao final do processo de Factibilização deve-se aplicar o método de melhoria, buscando eliminar as folgas de capacidade das máquinas que estão em produção, transferindo para outras máquinas e/ou sub-períodos.

A fase de Factibilização dos Fornos, é realizada pelo pacote Ampl/Cplex 10.0.1, e a solução obtida, sendo factível, é considerada como a melhor, até que outra solução factível melhor surja e/ou uma solução ótima seja encontrada.

Um algoritmo geral será apresentado, seguido de alguns comentários e, posteriormente serão analisados individualmente.

Algoritmo Geral

```

it := 1; (a)
k := 0; (b)
Repita
  f(x) := RL; (c)
  Se Factibiliza_Maquina() = factível (d)
    Então
      Inicio
        Melhoria; (e)
        Se Factibiliza_Fornos() = factível (f)
          Então Sol_Incumbente := Factibiliza_Fornos(); (g)
        Fim;
      k := k + 1; (h)
  Até it <= 500;

```

Os passos (a) e (b) inicializam a variável de iteração e o multiplicador Lagrangiano, respectivamente.

No passo (c), obtemos um valor (f(x)), através da relaxação do problema.

No passo (d), é aplicada a Factibilização das linhas de moldagem. Se a solução encontrada é factível, aplica-se a fase de melhoria (e), e a fase de factibilização dos fornos (f). Se a solução encontrada for factível, atualizar a solução incumbente (g).

No passo (h) é realizada uma iteração do subgradiente.

No método desenvolvido o algoritmo é repetido por um número de iterações determinadas na execução, como *default*, foram utilizadas 500 iterações.

3.5. Obtenção do Limitante Inferior

Para se obter um limitante inferior para o problema, aplica-se a técnica de Relaxação Lagrangiana à restrição (46), o problema resultante (lagrangiano) pode ser visto a partir dessa nova modelagem matemática:

Problema Relaxado Lagrangiano:

$$\min \sum_{n=F_1}^{LT} \sum_{m=1}^M \left[\left(c_{im} + \frac{1}{a_{im}} \cdot \mu_{mn} \right) X_{imn} + (S_m + S_{im} \cdot \mu_{mn}) Y_{imn} \right] + \sum_{t=1}^T (H_{it}^- I_{it}^- + H_{it}^+ I_{it}^+) + \left(- \sum_{n=1}^{L_j} \sum_{m=1}^M \mu_{mn} (h_{mn} - q_{mn}) \right) \quad (55)$$

Sujeito a:

$$I_{i,t-1}^+ - I_{i,t-1}^- + \sum_{n=F(t)}^{L(t)} \sum_{m=1}^M X_{imn} - I_{it}^+ + I_{it}^- = d_{it} \quad i=1, \dots, N \quad t=1, \dots, T \quad (56)$$

$$0 \leq X_{imn} \leq X \quad \max_{in} Y_{imn} \quad i=1, \dots, N \quad m=1, \dots, M \quad n=F_1, \dots, L_T \quad (57)$$

$$CF_{kn-1} - \sum_{i \in S(k)} \sum_{m=1}^M \rho_i X_{imn} + CR_{kn} = CF_{kn} \quad k=1, \dots, K \quad n=F_1, \dots, L_T \quad (58)$$

$$0 \leq CF_{kn} \leq Cap_k \quad k=1, \dots, K \quad n=F_1, \dots, L_T \quad (59)$$

$$\sum_{k=1}^K CF_{kn} \leq CT \quad n=F_1, \dots, L_T \quad (60)$$

$$0 \leq CR_{kn} \leq CRep_k(hf_n) \quad k=1, \dots, K \quad n=F_1, \dots, L_T \quad (61)$$

$$\sum_{k=1}^K CR_{kn} \leq CTrep(hfn) \quad n=F_1, \dots, L_T \quad (62)$$

$$I_{it}^- > 0 \quad i=1, \dots, N \quad t=1, \dots, T \quad (63)$$

$$Y_{imn} \in \{0,1\} \quad i=1, \dots, N \quad m=1, \dots, M \quad n=F_1, \dots, L_T \quad (64)$$

Observe que as únicas restrições que ligavam os itens eram as restrições de capacidade (46). Assim o problema Lagrangiano (55)-(64) pode ser decomposto item a item, obtendo-se vários subproblemas, um para cada item, sem restrições de capacidade. Este modelo é mais fácil e foi resolvido com o pacote de otimização inteira. Entretanto, em trabalhos futuros deve-se desenvolver um método baseado no método de Wagner e Whitin, aplicando a técnica de programação dinâmica, conforme descrito na seção 2.4.1, para este modelo.

O valor da função objetivo do problema Lagrangiano, (55)-(64), para cada $\mu_{mn} \geq 0$, (multiplicadores do subgradiente), produzirá um limitante inferior para o problema original (44)-(54), a cada iteração que a heurística do software desenvolvido faz, sendo que o valor inicial para encontrar o limitante inferior é zero. Nas demais iterações o valor a ser passado de μ_{mn} , é encontrado em:

$$g(\mu_{mn}) = \sum_{n=F(1)}^{L(t)} \sum_{m=1}^M \mu_{mn} \left[\sum_{i=1}^N \left(X_{imn} / a_{im} + St_m Y_{imn} \right) - (h_{mn} - q_{mn}) \right], \text{ sendo que } g(\mu_{mn})$$

representa o método de otimização do subgradiente, e é utilizado para atualizar os multiplicadores de Lagrange, onde $g(\mu_{mn})$, fornece o maior dos limitantes inferiores (Held *et al.* 1974 e Camerini *et al.* 1975).

3.6 Heurística de Factibilização (Baseada em Toledo e Armentano (2005))

Na solução anterior do modelo (44)-(54) as restrições de capacidade dos fornos não foram consideradas, e como mencionado anteriormente, em geral a solução encontrada pelo algoritmo é infactível. Nesta fase, deve-se obter uma solução factível para o modelo, incluindo as restrições de capacidade (46). A idéia da heurística de factibilização é a movimentação de produção da máquina m , para outras máquinas dentro do turno n , ou a movimentação de produção para outros turnos n , na mesma máquina m , ou para outra máquina m , tentando os ajustes de acordo com a capacidade disponível em cada sub-período (turno).

Os passos da heurística são descritos a seguir.

3.6.1 Passo Regressivo

Esse passo é iniciado no último sub-período L_T , e vai percorrendo os sub-períodos anteriores até $F_1 + 1$. Se houver violação de capacidade para a máquina m num sub-período n , a quantidade (q) em excesso, encontrada no conjunto (m, n) , será transferida para um novo conjunto (ml, nl) , que já esteja produzindo ($Y_{imnl} = 1$), sendo que nl será encontrado por $nl = \{n, \max(L_{t=n} - 1, F_1)\}$, considerado na transferência que, se $nl = n$, então $m \neq ml$.

Cada item produzido é analisado buscando assim, qual o melhor item a ser transferido, ou seja, como a função objetivo do problema (44)-(54) é minimizar os custos, o melhor item é aquele que possui o menor custo/unidade de violação eliminada.

Obtendo o melhor razão, teremos o processo de transferência regressiva (*back*), onde é realizada a diminuição dos itens produzidos X_{imn} , sendo que a eliminação de todos os itens acarretará em $Y_{imn} = 0$, ou seja, tira-se a preparação dessa máquina m , no sub-período n , para o item i . Durante a transferência regressiva, surge mais uma alteração do nosso método

em relação a Toledo e Armentano (2005), visto que durante essa transferência o nosso método faz a verificação se existe atraso.

Para que um item i , seja transferido para um sub-período n , se a quantidade não violar a restrição de capacidade, podemos verificar que:

- Todo o item i será movido para o sub-período anterior, sem deixar que a restrição de quantidade máxima a ser produzida do item i , no sub-período seja violada ($Xmax_{int}$);
- Todo o lote será movido para outro sub-período anterior, onde é produzido o item i , para não acrescentar os custos de preparação da máquina.

Mas se a quantidade a ser transferida do item i , viola as restrições de capacidade, deve-se levar em conta:

- A quantidade a ser movida para o sub-período anterior, será a que irá eliminar a violação.
- A quantidade a ser movida para outros sub-períodos, será a que irá eliminar a violação.

O item de menor custo é transferido de acordo com um dos procedimentos descritos acima. Se persistir a violação no sub-período n , um outro item é escolhido e o processo é repetido até que a violação do período seja eliminada. Após o final da movimentação ($F_1 + 1$) podemos considerar que no final do passo regressivo tem-se uma solução factível, com exceção do sub-período F_1 .

3.6.2 Passo Progressivo

Esse passo é iniciado no período F_1 e percorre o horizonte de planejamento em direção ao período $L_T - 1$, verificando se há violação de capacidade, para toda máquina m no sub-período n , representada pelo conjunto (m, n) . A quantidade excedida (q), será transferida

para um novo conjunto (ml, nl) , sendo que nl será encontrado por: $nl = \{n, \min(F_{t=n} + 1, L_T)\}$, para todo item i , que esteja sendo produzido ($Y_{imn} = 1$), considerando que, se $nl = n$, então $m \neq ml$.

Em Toledo e Armentano (2005), a quantidade a ser transferida, não pode ser maior que o estoque do período anterior da transferência, haja vista que o estoque não pode ser negativo. Na heurística utilizada em nosso programa, esta restrição não é tratada, pois o problema trabalha com atraso. As opções que devem ser consideradas na nossa heurística, para transferir um item i de um determinado sub-período n de uma máquina m , para o sub-período nl , e máquina ml são:

- Mover toda a quantidade sem violar ($q + X_{imnl} \leq Xmax_{iml}$).
- Mover somente a quantidade necessária ($Xmax_{iml} - X_{imnl}$), para não violar a restrição acima.

O item de menor custo é transferido de acordo com um dos procedimentos descritos acima. Se persistir a violação no sub-período n , um outro item é escolhido e o processo é repetido até que a violação do período seja eliminada. Após o final da movimentação (L_T), com as restrições de capacidade do sub-período F_1 (não é analisado no passo regressivo), sendo eliminada, teremos um solução factível. Senão o fator de penalidade δ é incrementado, e o passo é re-processado, até o limite do δ , seja alcançado, e o problema é considerado como infactível.

3.7 Melhoria da Heurística

Assim como a factibilização, o método de Toledo e Armentano (2005) é utilizado, para a melhoria, com as modificações necessárias para o nosso programa resolver o problema estudado neste trabalho.

Com uma solução factível sendo encontrada utilizando os dois passos anteriores

(regressivo e progressivo), são realizados mais dois passos: melhoria regressiva e melhoria progressiva. Estes passos baseiam-se principalmente na busca de redução dos custos, incidindo nos estoques, principalmente sobre o atraso, cujo custo é mais elevado (quando comparado com os outros custos), de forma a penalizá-lo fortemente, pois geram uma reação em cadeia no restante da empresa. As transferências são realizadas, mantendo a factibilização.

São considerados na melhoria, somente os sub-períodos que possuam folga de capacidade que é determinada por: $Folga = -Excesso(m, n)$, e partindo de um sub-período com folga de capacidade, todos os itens que são produzidos são verificados, buscando encontrar soluções que tenham um custo menor. Para tal verificação utilizamos:

$$Custo_Estoque = (Valor_Fo_Antes(ii) - Valor_Fo_Depois(ii))$$

$$Custo_Setup = (1 - Y_{imnl}) * Sm_{ml}$$

$$Custo_Produção = (q * (c_{im} - c_{iml}))$$

Com os novos custos de estoque, custos de preparação das máquinas, e custos de produção, utilizamos, que poderia ocorrer com a transferência do item i , para a máquina ml , do sub-período nl encontrado, obtemos o valor total dessa transferência em:

$$Custo_Reduzido = Custo_Estoque - (Custo_Setup + Custo_Produção)$$

Ao encontrar o melhor item a ser transferido, se este apresentar uma redução de custos, são aplicadas as transferências, como na fase de factibilização, realizando as atualizações de estoque, atraso, produção e preparação das máquinas. Ao finalizar a melhoria, utilizando os passos que veremos abaixo, caso tenha havido alguma transferência, podemos considerar que foi obtida uma solução factível melhor.

3.7.1 Melhoria Regressiva

Partindo de uma solução factível, o movimento dessa melhoria, inicia em L_T percorrendo até F_1 , se em um determinado período for encontrada Folga, então, verificamos a

quantidade (q), a ser transferida para este sub-período, através de:

$$q = \text{Folga} - ((1 - Y_{imn}) * (st_m * a_{im}))$$

Encontrada a quantidade a ser transferida, é realizada uma nova movimentação, para encontrar onde esse item i , está sendo produzido, tendo como horizonte de movimentação: $n \leq nl \leq L_T$, considerando ainda que ($ml \neq m$) ou ($n \neq nl$), onde ml é determina a máquina para onde está sendo feita a transferência e nl o sub-período da transferência. Enquanto em Toledo e Armentano (2005):

- Verifica se a quantidade a ser transferida não excede a quantidade que está sendo produzida;

Na nossa heurística, verifica-se além dessa violação, se:

- A quantidade para onde está sendo não transferido o item i , não viola a restrição do número máximo de itens i produzidos no sub-período nl em $Xmax_{ml}$.

Com as restrições não sendo violadas, aplica-se a função do Custo_Reduzido, e se o resultado encontrado for satisfatório, a transferência é realizada, esses passos são realizados até que a folga encontrada seja zerada. E um novo sub-período é analisado, repetindo o ciclo até o fim do horizonte de movimentação (F_1), passando a melhoria progressiva.

3.7.2 Melhoria Progressiva

Processo similar ao da melhoria regressiva, a melhoria progressiva tem como alvo encontrar as folgas existentes nas máquinas onde há produção. Utilizando o horizonte de movimentação $F_1 + 1$, percorrendo até L_T , ao encontrar $Y_{imn} = 1$, onde ($m \neq ml$) e ($n \neq nl$). Em Toledo e Armentano (2005), nesse passo da melhoria, existe o cuidado de:

- Mover somente a quantidade, sem violar a restrição de estoque $I_{it} \geq 0$ para os períodos anteriores da transferência.

Em relação à heurística utilizada no nosso programa, não há essa restrição, pois o estoque negativo passa a ser considerado atraso. O que é considerado em relação a quantidade a ser transferida é:

- Mover toda a quantidade desde que $(q + X_{imlnl} \leq Xmax_{inl})$ não seja violado.
- Mover somente a quantidade necessária $(Xmax_{inl} - X_{imlnl})$, para não violar a restrição acima.

As transferências são realizadas, até que a folga seja zerada ou que não tenha mais item i sendo produzidos em outros sub-períodos ou outras máquinas.

Ao finalizar o passo da melhoria, quando percorrer todo o horizonte até L_T , é verificado o valor da função objetivo, se o valor for a melhor solução encontrada é realizado a factibilização dos Fornos, caso contrário uma nova iteração é realizada.

3.8 Factibilização dos Fornos

Na heurística de factibilização e das melhorias, utilizada no programa, as restrições dos fornos (43)-(47) foram desconsideradas. O programa depois de realizar as factibilizações e melhorias e encontrar uma solução factível, gera como entrada de dados $I_{it}^+, I_{it}^-, X_{imn}, Y_{imn}$ e faz a execução do pacote Ampl/Cplex 10.0.1, para factibilizar as restrições dos fornos.

O resultado apresentado pelo pacote Ampl/Cplex é lido pelo programa e se a solução encontrada for factível, os dados serão guardados para posteriores comparações, das soluções encontradas. Observe que, a função objetivo do modelo que foi resolvido com a nossa heurística, não possui custos para os fornos.

CAPÍTULO 4

Resultados Computacionais

Neste capítulo, descreveremos os testes computacionais realizados e a análise de seus resultados, os quais foram comparados com os testes realizados em Araujo e Arenales (2004), com os resultados obtidos através do pacote Ampl/Cplex 10.0.1, e também com os resultados coletados a partir da solução obtida na prática pela indústria.

Com o pacote Ampl/Cplex, colocamos o processamento para ser realizado por 10 (dez) horas, a fim de obter uma solução para comparar com os outros resultados obtidos.

Os resultados foram obtidos com a execução do programa numa máquina Pentium 4, 3000 MHz, com 512 MB de memória RAM. Foram realizados vários testes, como aumento da iteração (10, 100, 150, 500,1000) até o aumento de processamento do pacote Ampl/Cplex, para a fase de factibilização dos fornos; com a melhor solução sendo obtida utilizando 500 iterações (com 1000 iterações obtivemos o mesmo resultado), num tempo de

52 minutos, o que nos dá: $\frac{52 * 60}{500} = 6,24 \frac{\text{segundos}}{\text{iterações}}$, em média.

Utilizaram-se como dados de entrada a carteira de pedidos real da empresa, com suas demandas, gerada para toda a semana, com os valores iguais em todos os dias, estoques iniciais, estoques iniciais em atraso, conforme Tabela 1, no capítulo anterior.

Os dados de entrada utilizados para obter os resultados computacionais, no pacote Ampl/Cplex 10.0.1, e no programa desenvolvido, foram os mesmos coletados em Araujo e Arenales (2004). Segue relação dos custos utilizados, que incidem na solução do problema.

Custos

Os custos que incidem no problema, vão determinar os parâmetros para a

obtenção do resultado (função objetivo), a sua manipulação é determinante na tomada de decisão para a heurística.

Os custos para produzir um item i , numa determinada máquina m (c_{im}), foram elaborados de maneira a restringir as máquinas m , para que não produzam o item i . Para tanto foram estabelecidos custos muito altos para os itens não serem produzidos na máquina, a Tabela 2, exemplifica, alguns itens e seus custos de produção em determinadas máquinas:

Tabela 2 – Custo de Produção c_{im}

Máquinas Peças	L1	L2	L3
1	1	10	2
2	1	2	10000
3	2	10	1
4	1	10000	10000
5	10000	10000	1

O outro custo a ser considerado, é o custo de preparação das máquinas (S_m), este custo é utilizado para garantir que os lotes sejam melhores distribuídos, transferindo os itens para as máquinas onde os itens já são produzidos. Foi utilizado o valor único de 0,2 para todas as máquinas a serem preparadas.

O valor negativo do custo de estocagem (H_{it}^+) foi utilizado para poder gerar itens para suprir um dia de trabalho, conforme solicitação da empresa, que deseja ter um estoque para um dia de trabalho. A cada re-processamento diário, são considerados o estoque do dia anterior em H_{i0}^+ , mas o custo para seu cálculo é zero, pois ele já foi calculado no dia anterior. Cabe observar que a demanda diária é de 10.137 árvores de peças e 159.290 kg e o estoque inicial para os dias simulados é 14.239 árvore de peças e 209.226 kg.

O outro custo é referente aos atrasos (H_{it}^-), são custos relativamente altos, pois o

atraso gera um ciclo de problemas na empresa, por isso o cuidado de não deixar acumular o atraso da produção.

Durante a simulação, nos 5 (cinco) dias, a quantidade de paralisações por quebras das linhas foi bastante expressiva (ver Tabela 3), dificultando a programação da produção. Observe que, em geral, apenas 71,90% foi disponível para a produção

Tabela 3: Tempo disponível nas 3 máquinas de moldagem a cada dia.

	1	2	3	4	5	Média
Tempo Total (h)	64,86	64,86	64,86	64,86	64,86	64,86
Tempo de Paralisações (h)	16,68	12,8	25,05	20,34	16,25	18,22
Porcentagem Disponível	74,28	80,27	61,38	68,64	74,95	71,90

Resultados Comparativos

Para cada dia de programação foram utilizados, para a resolução do modelo, 1215 variáveis binárias Y_{imn} , 1215 variáveis lineares X_{imn} , 270 variáveis lineares I_{it}^+ e I_{it}^- .

Partindo dos critérios utilizados em Araujo e Arenales (2004) para comparar as programações realizadas na prática e a programação obtida pela resolução matemática realizada, vamos comparar os resultados acrescentando aos resultados de Araujo e Arenales (2004), a programação realizada pelo pacote Ampl/Cplex 10.0.1 e o nosso programa. Os resultados serão representados entre as Tabelas 4 a 7, onde as colunas apresentam informações para 5 períodos (T), e as médias obtidas para os 5 períodos e, as linhas da tabela determinam: os números de preparações obtidas em cada período, o custo total de produção, a quantidade dada em unidades do total de estoque e o peso em Kg do total estocado, o total atrasado e o peso total do atraso, o peso da produção diária, a porcentagem utilizada das linhas sem e com preparações. Tais critérios de comparação foram estabelecidos com o gerente da indústria.

Tabela 4: Número de preparações da produção:

	1	2	3	4	5	Média
Prática	15	22	15	19	21	18,4
Araujo e Arenales	22	27	24	26	27	25,2
Cplex	21	23	20	20	19	20,60
Vilela e Araujo	21	25	17	21	19	21

Tabela 5 : Custo de Produção:

	1	2	3	4	5	Média
Prática	9129	16677	14094	13332	17583	14163
Araujo e Arenales	13298	14092	10222	11810	12482	12381
Cplex	11139	12068	10351	11981	8244	10756,60
Vilela e Araujo	13179	10524	8263	9387	7212	9713

Tabela 6 : Quantidade de Estoque em Unidades:

	1	2	3	4	5	Média
Prática	12098	10810	8694	7386	7226	9242,8
Araujo e Arenales	13029	12721	9698	8129	7241	10164
Cplex	12889	12408	9526	8141	5772	9747,20
Vilela e Araujo	11942	10434	6675	4079	1154	6856,80

Tabela 7: Peso do Estoque em Kilos:

	1	2	3	4	5	Média
Prática	174971	152104	123140	106907	100650	131554
Araujo e Arenales	204548	201938	154618	128936	117744	161557
Cplex	195004	192471	142336	123361	90640	148762,40
Vilela e Araujo	196316	197686	143178	112980	95856	100866,80

Tabela 8 : Quantidade de Atraso em Unidades:

	1	2	3	4	5	Média
Prática	0	0	247	580	1752	515,8
Araujo e Arenales	0	0	0	0	0	0
Cplex	0	13	0	0	24	7,40
Vilela e Araujo	48	620	231	393	0	258,40

Tabela 9 : Peso do Atraso em Kilos:

	1	2	3	4	5	Média
Prática	0	0	2821	6922	21909	6330
Araujo e Arenales	0	0	0	0	0	0
Cplex	0	164	0	0	209	74,60
Vilela e Araujo	595	8189	2943	5243	0	3394

Tabela 10: Quantidade Produzida em Unidades:

	1	2	3	4	5	Média
Prática	7996	9272	7352	8496	8804	8384
Araujo e Arenales	8935	9829	7113	8568	9249	8738,8
Cplex	8787	9643	7254	8765	7744	8438,60
Vilela e Araujo	7792	8009	6195	7651	7212	7371,8

Tabela 11: Peso Produzido em Kilogramas:

	1	2	3	4	5	Média
Prática	125035	143346	120582	138956	138046	133193
Araujo e Aren	154714	156681	111960	133606	148091	141010
Cplex	145056	156593	109156	140478	126360	135528,60
Vilela e Araujo	128556	131014	94227	121760	114717	118054,80

Tabela 12: Utilização das máquinas :

	1	2	3	4	5	Média
Prática	81,92	88,21	97,14	93,27	92,06	90,20
Araujo e Aren	95,7	95,74	94,56	95,19	95	95,27
Cplex	95,14	94,96	93,91	94,92	74,98	90,65
Vilela e Araujo	93,91	95,93	70,39	78,27	91,49	86,85

O programa em comparação aos outros resultados obtidos, apresentou um número maior de preparações em relação à indústria e ao pacote Ampl/Cplex e menor em relação ao método de Araujo e Arenales (2004). Com isso é possível observar que o método obtém um número de preparação entre as médias dos outros métodos.

Os custos de produção do modelo foi o menor entre todos os métodos. Isso pode ser explicado por dois motivos: pela menor quantidade produzida (veja as linhas relativas à quantidade e peso produzido); por uma melhor associação de peças às linhas de moldagem.

Como todos os demais resultados comparados, o nosso programa também teve seu estoque sendo reduzido diariamente, refletindo num aumento de quebras e paralisações (q_{mm}). Embora o nível de estoque tenha ficado abaixo dos outros métodos, observe que em relação ao atraso o método obteve uma média 53,61% menor que a indústria. Isso mostra claramente que, devido aos custos envolvidos, a heurística dá ênfase maior a redução de atraso do que a manutenção do nível de estoque.

Esse bom desempenho médio em relação ao atraso foi obtido mesmo com o percentual em queda a partir do terceiro dia, refletindo que nos dias primeiros dias, o percentual de utilização foi muito bom, chegando a ser melhor que o pacote Ampl/Cplex e o modelo de Araújo e Arenales (2004).

De fato, o percentual de utilização das máquinas esteve num nível acima da

indústria nos dois primeiros dias, o que não ocorreu em relação aos demais períodos. Obtendo uma média relativamente boa, ficando próximo do valor da indústria.

Foi realizada também uma análise de utilização de cada linha de moldagem, separadamente. Sendo estabelecidas as porcentagens de utilização do tempo disponível. Na média os percentuais obtidos pelo programa foram menores que os outros métodos e igual à prática com exceção da linha L3, onde a indústria desrespeitou o tempo de manutenção e utilizou um tempo maior que o permitido.

Tabela 13: Porcentagem de utilização das linhas (com preparações): Máquina 1.

	1	2	3	4	5	Média
Prática	52,02	63,02	98,98	80,96	96,73	75,91
Araujo e Arenales	97,2	96,74	97,04	96,27	93,96	96,40
Cplex	97,20	94,28	96,16	96,02	0	80,39
Vilela e Araujo	96,41	96,19	24,14	55,46	96,05	75,60

Tabela 14: Porcentagem de utilização das linhas (com preparações): Máquina 2.

	1	2	3	4	5	Média
Prática	93,75	96,92	82,82	88,90	76,27	88,03
Araujo e Arenales	94,05	95,27	92,79	95,21	95,58	94,74
Cplex	91,06	96,04	92,00	95,65	94,58	94,16
Vilela e Araujo	94,74	94,66	75,82	79,97	88,81	87,35

Tabela 15: Porcentagem de utilização das linhas (com preparações): Máquina 3.

	1	2	3	4	5	Média
Prática	96,13	104,71	106,09	104,19	102,67	102,53
Araujo e Arenales	95,79	95,2	93,64	94,62	95,05	94,91
Cplex	96,63	94,48	93,31	93,58	96,16	94,97
Vilela e Araujo	91,34	97,04	77,79	88,11	91,40	89,14

De forma geral a solução obtida pela heurística produz uma quantidade baixa, em relação aos outros 3 métodos, o que implica numa baixa utilização das linhas. Entretanto, mesmo produzindo uma quantidade baixa os atrasos são menores que os obtidos na prática refletindo assim, a ênfase da heurística na redução de atrasos em detrimento à manutenção do nível de estoque. O tempo computacional pode ser considerado razoável, dado que a programação é feita para os 5 dias de forma detalhada (3 turnos por dia). Observa-se também que o tempo computacional permite a utilização prática do método.

CAPÍTULO 5

Conclusões e Pesquisas Futuras

Neste trabalho foi estudado o problema de dimensionamento de lotes para uma fundição de grande porte, envolvendo a produção de múltiplos itens através de moldes que variam de 6 a 48 peças (chamadas de árvores), em múltiplas máquinas, paralelas, com capacidade distintas de máquinas e fornos. A produção dos itens pode ser feita em qualquer máquina, somando-se ao custo de produzir o item, o custo de preparar as máquinas para a sua produção.

O objetivo foi de desenvolver uma heurística, para obter a resolução de forma integrada, para o problema de dimensionamento de lotes das peças a serem produzidas nas linhas de moldagem e o problema de programação das ligas a serem produzidas nos fornos, para máquinas paralelas com múltiplos itens, diminuindo os custos de produção.

De forma diferente de Araújo e Arenales (2004), desenvolvemos um método que considera a programação detalhada para os 5 dias e obtivemos bons resultados, num tempo computacional razoável.

Em relação à prática, o resultado obtido pode ser considerado muito bom, visto que em relação aos atrasos, preparações e com alguns comparações individuais entre os outros tópicos analisados, esteve melhor.

Em relação ao pacote Ampl/Cplex 10.0, utilizando um tempo muito menor a solução encontrada pode ser considerada razoável.

Observe que na aplicação da heurística desenvolvida o pacote Ampl/Cplex é utilizado duas vezes: uma para resolver o problema relaxado e outra para a factibilização dos fornos.

Como pesquisas futuras, deve-se implementar um método de solução para o

modelo relaxado, que pode ser baseado no método de Wagner e Whitin (1958). Além disso, deve-se considerar a factibilização dos fornos durante a fase de transferências, eliminando assim, a necessidade do pacote. Adicionalmente, novos testes devem ser feitos de forma a melhorar o desempenho da heurística e, por fim, uma interface gráfica deve ser desenvolvida.

Desta forma pretende-se ter um método de solução totalmente independente de pacotes, com uma interface gráfica amigável, facilitando assim, a utilização do método pela indústria.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGGARWAL, A., PARK, J. K., 1993. *Improved Algorithms for Economic Lot Size Problems*. Operations Research, v. 41, p. 549-571.
- ANTHONY, R. N., 1965. *Planning and Control Systems: A Framework for Analysis*. Harvard University Press, Cambridge, Mass, *apud* em Hox e Candea.
- ARAUJO, S. A., ARENALES, M. N. 2000. *Problema de Dimensionamento de Lotes Monoestágio com Restrição de Capacidade: Modelagem, Método de Resolução e Resultados Computacionais*. Pesquisa Operacional, vol. 20 nr. 02.
- ARAUJO, S. A., ARENALES, M. N. 2003. *Dimensionamento de Lotes e Programação do Forno numa Fundição de Porte Médio*. Pesquisa Operacional, vol. 23, p.403-420.
- ARAUJO, S. A. 2003. *Modelos e Métodos para o Planejamento da Produção Aplicados no setor de Fundições*. Tese de Doutorado, ICMC-USP/SC.
- ARAUJO, S. A., ARENALES, M. N. 2004. *Planejamento e Programação da Produção numa Fundição Cativa Automatizada de Grande Porte*. Investigações Operacionais 24, 197-210.
- ARAUJO, S. A., ARENALES, M. N., CLARK, A. R. 2006. *Lot-Sizing and Furnace Scheduling in Small Foundries*. Computers & Operations Research.
- ARMENTANO, V. A., TOLEDO, F. M. B., FRANÇA, P. M. 1999. *A Network Flow Model for Capacitated Lot-Sizing Problems*. Omega, v. 27, p. 275-284.
- BAHL, H. C., RITZMAN, L. P., GUPTA, J. N. D. 1987. *Determining Lot Sizes and Resource Requirements : A Review*. Operations Research., v.35, n.3, p. 329-345.
- BARANY, I., Van ROY, T. J., WOLSEY, L. A. 1984. *Strong Formulation for Multi-Item Capacitated Lotsizing*. Management Science, v. 30, p. 1255-1261.
- BELVAUX, G., WOLSEY, L. A. 2000. *BC-PROD: A specialized branch-and-cut system for lot-sizing problems*. Management Science 46, 724–738.
- BELVAUX, G., WOLSEY, L. A. 2001. *Modelling Practical Lot-Sizing Problems as Mixed-Integer Programs*. Management Science 47, 993–1007.
- BILLINGTON, P. J., MCCLAIN, J. O., THOMAS, L. J. 1983. *Mathematical Programming Approaches to Capacity MRP Systems: Review, Formulation and Problem Reduction*. Management Science, v. 29, n. 10, p. 1126-1141.
- BILLINGTON, P. J., BLACKBURN, J. D., MAES, J., MILLEN, R. A., VAN WASSENHOVE, L. 1994. *Multi-Item Lotsizing in Capacitated Multi-stage Serial Systems*. IIE Transactions, v. 26, n. 2, p. 12-18.

- BITRAN, G. R., YANASSE, H. H. 1982. *Computational Complexity of the Lot Size Problem*. Management Science, v. 28, n. 10, p. 1174-1186.
- BOWERS, M. R., KAPLAN, L.A., HOOKER, T. L. 1995. *A two-phase model for planning the production of aluminum ingot*. European Journal of Operational Research, v. 81, p. 105-114
- BRAHIMI, N., DAUZERE-PERES, S., NAJID, N. M., NORDLI, A. 2006. *Single item lot sizing problems*. European Journal of Operational Research, 168, 1-16.
- BRÜGGEMANN, W., JAHNKE, H. 2000. *The Discrete Lot-Sizing and Scheduling Problem: complexity and modification for batch availability*. European Journal of Operational Research, v. 124, p. 511-528.
- CAMERINI, P. M., FRATTA, L., MAFFIOLI, F. 1975. *On Improving Relaxation Methods by Modified Gradient Techniques*. Mathematical Programming Study, v. 3, p. 26-34.
- CAMPOS FILHO, M. P., DAVIES, G. J. 1978, *Solidificação e Fundição de Metais e suas Ligas*. Livros Técnicos e Científicos Editora S. A.
- CARRENO, J. J. 1990. *Economic lot scheduling for multiple products on parallel identical processors*. Management Science 36, 348–358.
- CATTRYSSE, D., MAES J., VAN WASSENHOVE, L. N. 1990, *Set Partitioning and Column Generation Heuristic for the Capacitated Dynamic Lotsizing*, .European Journal of Operational Research, v. 46, p. 38-47.
- CLARK, A. R. 2000a. *A Local Search Approach to Lot Sequencing and Sizing*. Technical Report CSM-2000-OR-01, Faculty of Computer Studies and Mathematics, University of the West of England.
- CLARK, A. R. 2003. *Optimization Approximations for Capacity Constrained Material Requirements Planning*. International Journal of Production Economics, v. 84, p. 115-131.
- CLARK, A. R., CLARK, S. J. 2000. *Rolling-Horizon Lot-Sizing When Setup Times are Sequence-Dependent*. International Journal of Production Research, v. 38, n. 10, p. 2287-2307.
- DAUZÈRE-PÉRES, S., LASSERRE, J. B. 1994. *Integration of Lotsizing and Scheduling Decisions in a Job-Shop*. European Journal of Operational Research, v. 75, p. 413-426.
- DIABY, M. BAHL, H., KARWAN, M. H., ZIONT, S. 1992a. *Capacitated Lot-Sizing and Scheduling by Lagrangean Relaxation*. European Journal of Operational Research, v. 59, p. 444-458.
- DIABY M., BAHL, H., KARWAN, M. H., ZIONT, S. 1992b. *A Lagrangean Relaxation Approach for Very-Large-Scale Capacitated Lot-Sizing*. Management Science, v. 59, p.1329-1340.

- DREXL, A., HAASE, K. 1995, *Proportional Lotsizing and Scheduling*, International Journal of Production Economics, v. 40, p. 73-87.
- DREXL, A., HAASE, K. 1996, *Sequential-Analysis Based Randomized-Regret-Methods for Lot-Sizing and Scheduling*. Journal of the Operational Research Society, v. 47, p. 251-265.
- DREXL, A., KIMMS, A. 1997. *Lot sizing and scheduling – Survey an extensions*. European Journal of Operational Research, v. 99, p. 221-235.
- ENNS, S. T., LI, Li. 2004. *Optimal lot-sizing with capacity constraints and auto-correlated interval times*. Winter Simulation Conference.
- EPPEN, G. D., MARTIN, R. K. 1987. *Solving Multi-Item Capacitated Lotsizing Problems Using Variable Redefinition*. Operations Research, v. 35, p. 832-848.
- EVANS, J. R. 1985a. *An Efficient Implementation of the Wagner-Whitin Algorithm for Dynamic Lot-Sizing*. Journal of Operational Management, v. 5, n. 2, p. 229-235.
- EVANS, J. R., 1985b. *Network-Based Optimization Algorithms for the Capacitated Multi-Item Lotsizing Problem*. Computers and Industrial Engineering, v. 9, p. 297-305.
- FEDERGRUEN, A., TZUR, M. 1991. *A Simple Forward Algorithm to Solve General Dynamic Lot Sizing Models with n Periods in $O(n \log n)$ or $O(n)$ Time*. Management Science, v.37, p. 909-925.
- FISHER, M. L. 1981. *The Lagrangean Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems*. Management Science, v. 27, n. 1, p. 1-18.
- FLEISCHMANN, B. 1994. *The Discrete Lot-Sizing and Scheduling Problem with Sequence-Dependent Setup Cost*. European Journal of Operational Research, v. 75, p. 395-404.
- FLEISCHMANN, B., MEYR, H. 1997. *The General Lotsizing and Scheduling Problem*. Operational Research Spektrum, v. 19, p. 11-21.
- FLORENTINO, H. O. 1990. *Relaxação Lagrangiana em Programação Inteira*. Tese de Mestrado, Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos (ICMSC-USP).
- FLORIAN M., LENSTRA J. K., RINNOY KAN, A. H. G. 1980. *Deterministic Production Planning Algorithms and Complexity*. Management Science, v. 26, n. 7, p. 669-679.
- GOYAL, S. K. GUNASEKARAN, A. 1990. *Multi-Stage Production-Inventory Systems*. European Journal of Operational Research, v. 46, p. 1-20.
- HAASE, K. 1996. *Capacitated Lot-Sizing with Sequence Dependent Setup Costs*. Operational Research Spektrum, v. 18, p. 51-59.
- HAASE, K., KIMMS, A. 2000. *Lot Sizing and Scheduling with Sequence Dependent*

- Setup Costs and Times and Efficient Rescheduling Opportunities*. International Journal of Production Economics, v. 66, p. 159-169.
- HELD, M., WOLFE, P., CROWEDER, H. 1974. *Validation of Subgradient Optimization*. Mathematical Programming, n.6, p. 62-68.
- HINDI, K. S. 1995. *Computationally Efficient Solution of the Multi-Item, Capacitated Lot-Sizing Problem*. Computers and Industrial Engineering, v. 28, p. 709-719.
- JANS, R., DEGRAEVE, Z. 2004. *Improved lower bounds for the capacitated lot-sizing problem with setup times*. Operations Research Letters 32, 185–195.
- JOHNSON, L. A. MONTGOMERY, D. C. 1974. *Operations Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control*. New York: John Wiley e Sons.
- KANG, S., MALIK, K., THOMAS, L. J. 1999. *Lotsizing and Scheduling on Parallel Machines with Sequence-Dependent Setup Costs*. Management Science, v. 45, n. 2, p. 273-289.
- KARIMI, B., FATEMI G., S. M. T., WILSON, J. M. 2003. *The capacitated lot-sizing problem: A review of models and algorithms*. OMEGA 31, 365–378.
- KARMARKAR, U. S., KEKRE, S., KEKRE, S. 1987. *The Dynamic Lot-Sizing Problem with Startup and Reservation Costs*. Operations Research, v. 35, p. 389-398.
- KARMARKAR, U. S., SCHRAGE, L. 1985. *The Deterministic Dynamic Product Cycling Problem*. Operations Research, v. 33, p. 326-345.
- KIMMS, A., DREXL, A. 1998a. *Proportional Lot Sizing and Scheduling: some extentions*. Networks, v. 32, p. 85-101.
- KIMMS, A., DREXL, A. 1998b. *Some Insights Into Proportional Lot Sizing and Scheduling*. Journal of the Operational Research Society, v. 49, p. 1196-1205.
- KIMMS, A. 1996. *Multi-Level, Single-Machine Lot Sizing and Scheduling (with initial inventory)*. European Journal of Operational Research, v. 89, p. 86-89.
- KIMMS, A. 1997b. *Multi-Level Lot Sizing and Scheduling-Methods for Capacitated, Dynamic and Deterministic Models*. Physical, Heidelberg.
- KIRCA, O., KÖKTEN, M. 1994. *A New Heuristic Approach for the Multi- Item Dynamic Lot Sizing Problem*. European Journal of Operational Research, v. 75, p. 332-341.
- KUIK, R., SALOMON, M., VAN WASSENHOVE, L. N. 1994. *Batching Decisions: Structure and Models*. European Journal of Operational Research, v. 75, p. 243-263.
- LAGUNA, M. 1999. *A Heuristic for Production Scheduling and Inventory Control*

- in the Presence of Sequence-Dependent Setup Times*. IIE Transactions ,v. 31, p. 125-134.
- LOZANO, S., LARRANETA, J., OLIVEIRA, L. 1991. *Primal Dual Approach to the Single Level Capacitated Lot-Sizing Problem*. European Journal of Operational Research, v. 51, p. 354-366.
- MAES, J., VAN WASSENHOVE, L. N. 1988. *Multi-Item Single-Level Capacitated Dynamic Lot-Sizing Heuristics: A General Review*. Journal of Operational Research Society, v. 39, n. 11, p. 991-1004.
- MAES, J., MACCLAIN, J. O., VAN WASSENHOVE, L. N. 1991. *Multilevel Capacitated Lotsizing Complexity and LP Based Heuristic*. European Journal of Operational Research, v. 53, p.131-148.
- MEYR, H. 2000. *Simultaneous Lotsizing and Scheduling by Combining Local Search with Dual Reoptimization*. European Journal of Operational Research, v. 120, p. 311-326.
- MEYR, H., 2001. *Simultaneous Lotsizing and Scheduling on Parallel Machines*. European Journal of Operational Research, v.139, n. 2, p. 277-292.
- MEZA, E. S., SANTOS, M. O., ARENALES, M. N. 2002. *A lot-sizing problem in an automated foundry*. European Journal of Operational Research, v. 139, p. 490-500
- PARKER, R.G., RARDIN, R.L. 1988. *Discrete optimization*. Academic Press, New York.
- RANGEL, S., FERREIRA, D. 2003. *Um modelo de dimensionamento de lotes para uma fábrica de refrigerantes. Tema (Tendências Em Matemática Aplicada e Computacional)*. São José do Rio Preto,SP: v. 4, n. 2, p. 237-246.
- SABBAG, Z. 1995. *Planejamento da produção em máquinas paralelas sob restrições de capacidade*. Master's thesis, FEE UNICAMP.
- SALOMON, M., KROON, L. G., KUIK, L., VAN WASSENHOVE, L. N. 1991. *Some Extensions of the Discrete Lotsizing and Scheduling Problem*. Management Science, v. 37, p. 801-812.
- SINGH, N., RAJAMANI, D. 1991. *An Incremental Cost and Resource Smoothing for the Capacitated Lot-Sizing Problem*. Computers and Industrial Engineering, v. 20, p. 469-474.
- SOUZA, K. X. S., ARMENTANO, V. A. 1994. *Multi-Item Capacitated Lot-Sizing by a Cross Decomposition Based Algorithm*. Annals of Operations Research, v. 50, p. 557-574.
- SRIDHARAN, R. 1995. *The capacitated plant location problem*. European Journal of Operation Research, 87, p. 203-213.
- TANG, L., LIU, J., RONG, A., YANG, Z. 2000. *A mathematical programming*

- model for scheduling steelmaking-continuous casting production.* European Journal of Operational Research, v. 120, p. 423-435.
- TANG, L., LIU, J., RONG, A., YANG, Z. 2001. *A review of planning and scheduling systems and methods for integrated steel production.* European Journal of Operational Research, v. 120, p. 423-435.
- THOMAS, L. J., MCCLAIN, J. O. 1993. *An Overview of Production Planning.* Handbooks in Operational Research and Management Science, ed. Elsevier.
- TOLEDO, F. M. B., 1998. *Dimensionamento de Lotes em Máquinas Paralelas.* Tese de Doutorado / UNICAMP.
- TOLEDO, F. M. B.; ARMENTANO, V. A. 2005. *A Lagrangian-based heuristic for the capacited lot-sizing problem in parallel machines.* European Journal of Operational Research .
- TOSO, E. A.V., MORABITO, R. 2005. *Otimização no dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção: estudo de caso numa fábrica de ração.* Gestão & Produção, vol.12 nr 2. São Carlos.
- TRIGEIRO, W. W. 1989. *Capacited Lot Sizing With Setup Times.* Management Science; Mar 1989;35,3;ABI/INFORM Global.
- TRIGEIRO, W. W., THOMAS, L. J., MCCLAIN, J. O. 1989. *Capacitated Lot Sizing With Setup Times.* Management Science, v. 35, n. 3, p. 353-366.
- VAN HOESEL, S., KOLEN, A. 1994. *A Linear Description of the Discrete Lot-Sizing and Scheduling Problem.* European Journal of Operational Research, 75, p. 342-353.
- VAN ROY, T. J. 1983. *Cross Decomposition for Mixed Integer Programmin.* Mathematical Programming, v. 25, p. 43-63.
- WAGNER, H. M., WHITIN, T. M. 1958. *Dynamic Version of the Economic Lot Size Model.* Management Science. v.5, n. 1, p. 89-96.
- WAGELMANS, A., VAN HOESEL, S., KOLEN, A. 1992. *Economic Lot Sizing: an $O(n \log n)$ Algorithm that Runs in Linear Time in the Wagner-Whitin Case.* Operations Research, v. 40, p. S145-S156.
- WOLSEY, L. A. 2002. *Solving Multi-Item Lot-Sizing Problems with an MIP Solver Using Classification and Reformulation.* Management Science 48, 1587–1602.

APÊNDICE

Relaxação Lagrangiana

A Relaxação Lagrangiana é uma das técnicas mais aplicadas na resolução de programação inteira. O seu sucesso deve-se ao fato de permitir obter, em certas condições, formulações mais fortes ou de fornecer de uma forma muito eficiente limites inferiores de qualidade semelhante aos obtidos com a relaxação linear.

A relaxação lagrangiana é uma técnica usada para resolver problemas de otimização combinatória em que as restrições têm uma estrutura de que se pode tirar partido. Acontece frequentemente que é possível re-arranjar as restrições de um problema em vários conjuntos, de forma a fazer sobressair uma estrutura especial.

Held & Karp (1970), que utilizaram um método Lagrangiano para resolver o problema do caixeiro viajante, foram precursores do uso deste método; Geoffrion (1974) deu ao mesmo o nome de Relaxação Lagrangiana.

A lista de aplicações da relaxação Lagrangiana é muito extensa. Tais aplicações incluem o problema do caixeiro viajante, problemas de localização, o problema de atribuição generalizado, problemas de recobrimento e particionamento de conjuntos e problemas de roteamento entre outros. Algumas aplicações da relaxação Lagrangiana podem ser encontradas, por exemplo, no artigo de Sridharan (1995). Entre as aplicações recentes da relaxação Lagrangiana estão, por exemplo, as de Galvão (2000,2002) e Fumero (2001).

Consideremos então o seguinte problema (P)

$$v(P) = \min[cx]$$

$$(P) \quad \text{sujeito a: } Ax \leq b$$

$$Dx \leq c$$

$$x \in S$$

A idéia é relaxar as restrições complicadas colocando-as na função objetivo como uma “penalização”. Assim, a relaxação Lagrangiana do problema acima, com relação ao conjunto de restrições complicadas é definida associando a este conjunto um vetor $u \geq 0$, denominado de multiplicador de Lagrange ou variáveis duais. O problema Lagrangiano obtido utilizando a técnica de relaxação Lagrangiana para o problema (IP) é dado a seguir:

$$\begin{aligned} & v(P_u) \min \{cx + u(Ax-b)\} \\ (P_u) \quad & \text{sujeito a: } Dx \leq c \\ & x \in S \end{aligned}$$

Observe-se que o problema Lagrangiano é um problema em x , resolvido para um dado vetor fixo u . Neste caso devemos escolher $u \geq 0$ para garantir que $v(P_u)$ seja um limite inferior para (P). Caso as restrições sejam da forma $Ax \geq b$, os multiplicadores devem ser não positivos para garantir que $v(P_u) \leq v(P)$. Finalmente, se $Ax = b$, o sinal de u é irrestrito.

Uma solução ótima para (P) é obtida através da relaxação Lagrangiana quando duas condições são satisfeitas simultaneamente: (i) a solução da relaxação Lagrangiana é viável no problema (P), isto é, $(Ax^* - b) \leq 0$, onde x^* é a solução ótima de (P_u) para $u = u^*$; (ii) são satisfeitas as condições de folgas complementares dadas por $u^* (Ax^* - b) = 0$ (Greenberg & Pierskalla, 1970). Observe-se que o fato de a solução ótima Lagrangiana x^* ser viável para o problema (P) não é suficiente para garantir que tal solução será ótima para (P).

Fisher (1981) e Parker & Rardin (1988) provaram que $v(P_u)$ é uma função linear por partes, contínua e côncava, mas geralmente não diferenciável no ponto ótimo. O fato de uma função ser côncava implica que um ótimo local é um ótimo global. Esta propriedade da relaxação Lagrangiana faz com que ela seja uma proposta atraente como estratégia para obter limites de solução de (P).

Para otimizar o problema lagrangiano podem ser utilizados vários métodos. Além do método do subgradiente, que será aqui apresentado, existe o método de ajuste de

multiplicadores, em que é utilizado apenas um pequeno conjunto de direções para atualização do vetor de multiplicadores.

Método do Subgradiente

O método do subgradiente é uma adaptação do método do gradiente para funções não diferenciáveis em todos os pontos do domínio. O método do subgradiente é um método bem conhecido, usado para otimização de funções diferenciáveis. O método consiste em partir de um valor inicial de

O gradiente de uma função no ponto x é um vetor dado por :

$$\nabla f(x) \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right), \text{ em que } \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \text{ representa a derivada parcial da}$$

função $f(x)$ em ordem a x_i , calculada no ponto x .

Para um dado ponto x e uma direção d , tal que $\nabla f(x) \cdot d > 0$, a otimização pelo método do gradiente, baseia-se na idéia de um pequeno passo de valor k , dado na direção d produz uma solução com maior valor de função objetivo, i.e, para o ponto $y = x + t \cdot d$, temos que $f(y) > f(x)$.

- **Algoritmo do Subgradiente:**

O método consiste em partir de um valor inicial de u (um vetor nulo) e, em cada iteração, atualizar u , na direção de um subgradiente, de acordo com um dado passo.

Um subgradiente válido, na iteração k , é dado por $(Ax^k - b)$. Assim a atualização é feita do seguinte modo: $u^{k+1} = u^k + t^k (Ax^k - b)$, sendo o t^k , o passo definido por um parâmetro (δ , foi utilizado no nosso programa) para ajustar o tamanho do passo à medida que se pretende escolher com maior minúcia os valores de u . O valor inicial deste parâmetro, utilizado no nosso método foi escolhido dentro do seguinte intervalo : $0 < \delta < 1$.

Os passos do algoritmo, são resumidos abaixo:

Passo 1: : Escolha um ponto inicial u^k e faça $k = 1$.

Passo 2: Determine um subgradiente $s(u^k) \in \partial Z_{LR}(u^k)$. Se $s(u^k) = 0$, PARE (u^k é uma solução ótima).

Passo 3: Faça $u^{k+1} = u^k + \theta_k s(u^k)$ para $\theta_k > 0$. Faça $k \leftarrow k + 1$ e volte ao passo 2.

A convergência do método depende essencialmente da escolha do tamanho do passo θ_k

Teoricamente, o algoritmo do subgradiente pode parar quando em alguma iteração k , encontrar $s(\lambda^k) = 0 \in \partial Z_{LR}(\lambda^k)$. Mas esta situação dificilmente acontecerá, por isso adota-se um número máximo de iterações, ou um critério de parada baseado na não melhoria da solução após certo número de iterações.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)