UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Variedades Quase Einstein

por

Fabiana Chagas

Dissertação de Mestrado em Matemática
Goiânia - Goiás
2007

Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Coordenação de Pós-Graduação em Matemática

Variedades Quase Einstein

por

Fabiana Chagas

Área de Concentração : **Geometria Diferencial.**
Orientador: **Prof. Dr. Romildo da Silva Pina**

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Conselho Diretor do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Goiânia - Goiás
2007

Dedico,

ao meu **PAI**, este homem maravilhoso, que sempre apoiou tanto os meus sonhos e fez o impossível para que se tornassem reais.

Agradecimentos

Meus eternos agradecimentos à todos aqueles que sempre me deram tanto apoio, que estiveram presentes nos momentos mais importantes de minha vida. Gostaria de agradecer em especial:

- A Deus, por ter me concedido força e sabedoria para seguir meu caminho;
- Ao meu tão amado esposo, por ter compreendido as horas de ausência e me apoiar sempre, com tanto amor e carinho;
- Ao meu pai e minha mãe por terem acreditado tanto em mim e por tornarem tudo o que desejei algo tão especial para eles;
- A toda minha família, pelo carinho e estímulo;
- Ao professor Romildo, que é muito mais que um professor, é uma pessoa amiga e carinhosa, que nunca poupou esforços para tornar minha jornada mais suave;
- Aos professores do Instituto de Matemática e Estatística da UFG, pela dedicação em atender, mesmo os que não são seus alunos;
- Aos amigos do curso de Matemática, braço firme nas horas de sufoco;
- A PRPPG pelo apoio financeiro, sem o qual não teria possibilidade de me dedicar somente aos estudos;
- Enfim, à todos que torceram por mim e que se alegraram com mais esta conquista.

Sumário

Resumo

Em nosso trabalho, apresentamos algumas propriedades básicas das variedades quase Einstein, expressamos a sua curvatura escalar e relacionamos algumas variedades com as variedades quase Einstein.

Provamos também que uma variedade quase Einstein conformemente flat, pode ser expressa como um produto torcido por uma variedade de Einstein.

Finalmente, provamos que uma variedade quase Einstein simplesmente conexa, conformemente flat, pode ser imersa isometricamente no espaço euclidiano como uma hipersuperfície e que uma hipersuperfície conformemente flat de um espaço euclidiano é uma variedade quase Einstein.

Abstract

In our assingment, we show some basics properties almost quasi Einstein manifolds. We express your scalar curvature and we link this manifolds with others manifolds studied with much time.

We prove too that a almost quasi Einstein manifold conformally flat, can be express as warped product by Einstein maniflod.

Finally, we prove that a quasi Einstein manifold simply connected, conformally flat can be isometrically immersed in a Euclidean space as an hipersurface and that an hipersurface conformally flat in the Euclidean space is quase Einstein maniflod.

Introdução

A definição que adotamos de variedades quase Einstein, foi introduzida em 2000 por M. C. Chaki e R. K. Maity (ver[4]), com o propósito de através destas variedades facilitar o estudo das variedades de Einstein. Esta definição é a seguinte:

Seja $(M^n, g)(n \geq 3)$ uma variedade Riemanniana não flat. (M^n, g) é dita *quase Einstein* se o tensor de Ricci satisfaz a seguinte igualdade:

$$Ric(X, Y) = ag(X, Y) + bA(X)A(Y)$$

onde X, Y são campos vetoriais em M, a e b são funções escalares com $b \neq 0$ e A é uma 1-forma não nula tal que $A(X) = g(X, U)$, U é um campo unitário fixo.

Esta definição motivou muitos pesquisadores, entre eles G. C. Ghosh e U. C. de Kalyani autores do artigo [9] no qual nos inspiramos para realizar este trabalho. Nosso principal objeto de estudo é encontrar relações, entre variedades quase Einstein e outros tipos de variedades, que possam levar à exemplos explícitos, não só de variedades quase Einstein mas também destas variedades relacionadas. U. C. de Kalyani and G. C. Ghosh mostraram em [10], que uma variedade de curvatura quase constante é uma variedade quase Einstein e em [9], que uma variedade quase Einstein conformemente flat é uma variedade de curvatura quase constante. Mostraram também, nestes mesmos artigos, que uma hipersuperfície conformemente flat de um espaço euclidiano é uma variedade quase Einstein e que uma variedade quase Einstein sob certas condições pode ser imersa isometricamente no espaço euclidiano, como uma hipersuperfície.

No capítulo 1, apresentamos alguns tópicos importantes de geometria Riemanniana, que podem ser encontrados em [1], [2], [11], [13], e [16], que foram fundamentais para a compreensão do que é feito neste trabalho.

No capítulo 2, apresentamos algumas propriedades básicas de uma variedade quase Einstein.

No capítulo 3, mostramos que uma variedade de curvatura quase constante é quase Einstein. Mostramos também que uma variedade quase Einstein conformemente flat é uma variedade de curvatura quase constante e que pode ser expressa como produto torcido por uma variedade de Einstein.

No capítulo 4, mostramos sob certas condições que uma variedade quase Einstein pode ser imersa isometricamente no espaço euclidiano como uma hipersuperfície .

Apresentamos um teorema sobre imersões de variedades Riemannianas em um espaço euclidiano, que pode ser visto como uma extensão do teorema fundamental das superfícies para geometria Riemanniana. Baseado neste teorema e em [6], mostramos que uma variedade quase Einstein simplesmente conexa, conformemente flat, com escalares associados a e b, tal que a é constante e $a(n-2)-b>0$, pode ser imersa isometricamente no espaço euclidiano como uma hipersuperfície.

Capítulo 1

Preliminares

Apresentamos neste capítulo algumas definições e propriedades básicas de Geometria Riemanniana, que utilizaremos sem maiores detalhes no decorrer do nosso trabalho. As demonstrações e explicações mais precisas podem ser encontradas em [1], [2], [7], [11], [13] e [16].

1.1 Variedades Riemannianas

Para esta seção, já estamos considerando o conceito de variedade diferenciável.

Definição 1.1. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle , \rangle_p$ no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $x(x_1, x_2, ..., x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, ..., 1, ..., 0)$, então $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_{ij}(x_1, ..., x_n)$ é uma função diferenciável em U*

As funções $g_{ij} = g_{ji}$ são chamadas *expressões da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$.* Uma variedade diferenciável com uma métrica Riemanniana chama-se variedade Riemanniana.

Considere $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores em M e $\mathfrak{D}(M)$ o conjunto das funções diferenciáveis em M.

Proposição 1.2. *Sejam X e Y campos diferenciais de vetores em uma variável diferenciável M. Então existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in \mathfrak{D}(M)$, $Zf = (XY - YX)f$. Este campo é chamado de colchete $[X, Y]$.*

De agora em diante adotaremos $g(X,Y) = \langle X, Y \rangle$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.3. *Duas métricas $\langle , \rangle$ e $\langle\langle , \rangle\rangle$ em uma variedade diferenciável M são conformes, se existe uma função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$, positiva tal que $\forall p \in M$ e todos $u, v \in T_pM$ tem-se*

$$\langle u, v \rangle_p = f(p) \langle\langle u, v \rangle\rangle_p.$$

Definição 1.4. *Uma métrica g é dita conformemente flat se é conforme à uma métrica eucli- diana.*

1.2 Conexões Afim e Riemanniana

Denotamos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathfrak{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M.

Definição 1.5. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:
i)$\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + G \nabla_Y Z$,
ii)$\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
iii)$\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f) Y$,
onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}$ *e* $f, g \in \mathfrak{D}$.

Seja (M, g) uma variedade riemanniana, $\varphi \in \mathfrak{D}(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos as seguintes definições:

Definição 1.6. *O Gradiente de φ como um campo vetorial é dado por:*

$$\langle grad\varphi(p), v\rangle = d\varphi_p(v),\ \forall p \in M \ e \ \forall v \in T_pM.$$

Definição 1.7. *A Hessiana de φ é dada por*

$$Hess_g\varphi(X, Y) = \langle Y, \nabla_X grad\varphi\rangle,\ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Definição 1.8. *O Divergente de X em $p \in M$ é dado por*

$$divX(p) = \text{traço da aplicação linear } \{Y(p) \mapsto \nabla_Y X(p)\},\ \forall p \in M.$$

Definição 1.9. *O Laplaciano de φ é*

$$\triangle_g\varphi = div(grad\varphi).$$

Definição 1.10. *O Curl de $V \in \mathfrak{X}(M)$ é dado por*

$$(curlV)(X, Y) = \langle\nabla_X V, Y\rangle - \langle\nabla_Y V, X\rangle.$$

Proposição 1.11. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominado derivada covariante de V ao longo de c, tal que:*
a)$\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$,
b)$\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$,
onde W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I.
c)Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$,
então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}}Y$.

Escolhendo um sistema de coordenadas $(x_1, ..., x_n)$ em torno de p e escrevendo

$$X = \sum_i x_i X_i, \ Y = \sum_j y_j Y_j,$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, temos

$$\nabla_X Y = \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} x_i X_i(y_i) X_j.$$

Se fizermos $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, concluímos que Γ_{ij}^k são funções diferenciáveis e que

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k,$$

o que mostra que $\nabla_X Y(p)$ depende de $x_i(p), y_k(p)$ e das derivadas $X(y_k)(p)$ de y_k segundo X.

Definição 1.12. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial ao longo de uma curva $c : I \to M$ é dito paralelo se $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.*

As funções Γ_{ij}^k definidas em U são os coeficientes da conexão ∇ em U ou os *símbolos de Christoffel* da conexão. Os símbolos de Christoffel são dados por

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}. \tag{1.1}$$

Esta é a expressão clássica dos símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em termos da métrica.

Definição 1.13. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle$. A conexão é dita compatível com a métrica $\langle , \rangle$, quando para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de c, tivermos $\langle P, P' \rangle = cte$.*

Proposição 1.14. *Seja M uma variedade Rriemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se, somente se, para todo par V e W de campos de vetores ao longo de uma curva diferenciável $c : I \to M$ tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, t \in I. \tag{1.2}$$

Corolário 1.15. *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, somente se,*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle,\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.3}$$

Definição 1.16. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.4}$$

Em um sistema de coordenadas (U, x), se ∇ é simétrica, temos para todo $i, j = 1, ..., n$,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0,\ X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.5}$$

Sendo assim $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, o que justifica o nome *simétrica*.

Teorema 1.17. (Levi-Civita).*Dada uma variedade Riemanniana (M, g) existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

a) ∇ é simétrica.

b)∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Esta conexão é chamada de *conexão de Levi-Civita ou conexão Riemanniana.*

1.3 Curvaturas

Definição 1.18. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana (M, g) é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Proposição 1.19. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana satisfaz:*
a)R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$.
b)Para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é linear.

A partir de agora denotaremos $\langle R(X,Y)Z, T\rangle$ por $R(X,Y,Z,T)$.

Em um sistema de coordenadas (U, x) em torno de $p \in M$, sendo $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, temos

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R^l_{ijk} X_l.$$

R^l_{ijk} são os coeficientes do operador curvatura R em (U, x) e em termos dos símbolos de Christoffel, são dados por

$$R^l_{ijk} = \sum_s \Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{js} - \sum_s \Gamma^s_{jk}\Gamma^l_{is} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^l_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^l_{jk}.$$

Proposição 1.20. *Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM e sejam $\{x, y\}$ uma base de σ. Então*

$$K(x,y) = \frac{(x,y,x,y)}{|x \wedge y|^2} \tag{1.6}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

$K(x, y) = K(\sigma)$ é chamada de curvatura seccional de σ em p.

Seja $x = z_n$ um vetor unitário em T_pM; tomemos uma base ortonormal $\{z_1, z_2, ..., z_{n-1}\}$ do hiperplano de T_pM ortogonal a x e consideremos as seguintes médias:

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1}\sum_i \langle R(x, z_i)x, z_i\rangle, \ i = 1, 2, ..., n-1$$

e

$$K(p) = \frac{1}{n}\sum_j Ric_p(z_j) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{ij}\langle R(z_i, z_j)z_i, z_j\rangle, \ j = 1, ...n.$$

As expressões acima são combinações importantes da curvatura seccional , não dependem da base escolhida e são chamadas de *curvatura de Ricci* na direção x e *curvatura escalar*, respectivamente.

1.4 Tensores em Variedades Riemannianas

Definição 1.21. *Um tensor de ordem r em uma variedade Riemanniana (M, g) é uma aplicação multilinear*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times ... \times \mathfrak{X}(M)}_{r fatores} \to \mathfrak{D}(M).$$

Exemplo 1.22. *O tensor curvatura $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{D}(M)$ dado por*

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W\rangle, \ \ X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$$

é um tensor de ordem 4 e o tensor métrico $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{D}(M)$ dado por

$$g(X, Y) = \langle X, Y\rangle, \ \ X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

é um tensor de ordem 2.

Definição 1.23. *O tensor de Ricci, $Ric(X, Y)_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, é um tensor de ordem 2 bilinear, simétrico dado por:*

$$Ric(x, y)_p = \textit{traço da aplicação}\{z \mapsto R(x, z)y\}.$$

Definição 1.24. *O Tensor de Weyl é um tensor de ordm 4, dado por*

$$\begin{aligned} W(X, Y, Z, T) &= R(X, Y, Z, T) - \frac{1}{n-2}[Ric(X, Z)\langle Y, T\rangle \\ &+ Ric(Y, T)\langle X, Z\rangle - Ric(X, T)\langle Y, Z\rangle - Ric(Y, Z)\langle X, T\rangle] \\ &+ \frac{r}{(n-1)(n-2)}[\langle X, Z\rangle\langle Y, T\rangle - \langle X, T\rangle\langle Y, Z\rangle], \end{aligned}$$

onde r é a curvatura escalar.

Muitas vezes o campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ é identificado com o tensor $\mathcal{X} : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{D}(M)$ dado por $\mathcal{X}(Y) = \langle X, Y\rangle, \ \forall \ Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.25. *Seja T um tensor de ordem r. A diferencial covariante ∇T de T é um tensor de ordem $(r+1)$ dado por*

$$\nabla T(Y_1, ..., Y_r, Z) = Z(T(Y_1, ..., Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, ..., Y_r) - ... - T(Y_1, ...\nabla_Z Y_r). \tag{1.7}$$

Para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$, a derivada covariante $\nabla_Z T$ de T em relação a Z é um tensor de ordem r dado por

$$\nabla_Z T(Y_1, ..., Y_r) = \nabla T(Y_1, ..., Y_r, Z). \tag{1.8}$$

Considerando A e B tensores de ordem 2, vamos definir uma operação $A \bullet B$ por:

$$(A \bullet B)(X,Y,Z,T) = A(X,Z)B(Y,T) + A(Y,T)B(X,Z) - A(X,T)B(Y,Z) - A(Y,Z)B(X,T).$$

Sendo assim vamos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1.26. *O operador curvatura R de uma variedade Riemanniana pode ser escrito como $R = U + Z + W$ com*

$$U = \frac{r}{n(n-1)} R_1, \tag{1.9}$$

onde r é a curvatura escalar e R_1 é o tensor curvatura da esfera,

$$Z = \frac{1}{n-2}\left(Ric - \frac{r}{n} g\right) \bullet g \tag{1.10}$$

e W é o tensor de Weyl.

1.5 Imersões Isométricas em Variedades Riemannianas

Sejam (M^n, g) e $(\overline{M}^{n+k}, \overline{g})$ variedades Riemannianas e considere a aplicação $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$. Dizemos que f é uma imersão se f é diferenciável e $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M$. Se $\overline{M}$ tem uma métrica Riemanniana , f induz uma métrica Riemanniana em M por $\langle u, v \rangle_p = \langle df(u), df(v) \rangle_{f(p)}$, $u, v \in T_pM$. A métrica de M é chamada a métrica induzida por f, e f é uma *imersão isométrica*.

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+m=k}$ uma imersão. Identificaremos U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_pM$, $q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. A conexão Riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M e $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são extensões locais em $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T.$$

Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ são extensões de X e Y em $\overline{M}$, respectivamente,

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em $\overline{M}$ normal a M, que não depende das extensões $\overline{X}$ e $\overline{Y}$.

Proposição 1.27. *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, a aplicação $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)^{\perp}$ dada por*

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear simétrica.

Indicando por $\mathfrak{X}^{\perp}$ o espaço dos campos diferenciáveis de vetores normais à M, a aplicação B pode ser considerada como um tensor $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^{\perp}(M) \to \mathfrak{D}(M)$ definido por

$$B(X,Y,N) = \langle B(X,Y), N\rangle.$$

A aplicação B é chamada de *tensor segunda forma fundamental*.

Vamos definir como *segunda forma fundamental* a aplicação linear auto adjunta $S : \mathfrak{X}^{\perp}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, associada à B ou seja,

$$\langle S_N X, Y\rangle = \langle B(X,Y), N\rangle.$$

Temos, a partir de alguns cálculos, que

$$S_N X = -(\overline{\nabla}_X N)^T$$

A conexão normal $\nabla^{\perp}$ da imersão , é dada por

$$\nabla^{\perp}_{X}N = (\overline{\nabla}_{X}N)^{N}.$$

Definimos a curvatura de E relativa à $\nabla^{\perp}$, que é chamada de *curvatura normal* $R^{\perp}$ da imersão por

$$R^{\perp}(X,Y)N = \nabla^{\perp}_{X}\nabla^{\perp}_{Y}N - \nabla^{\perp}_{Y}\nabla^{\perp}_{X}N - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}N \tag{1.11}$$

Assim a geometria da imersão se decompõe em duas geometrias: a geometria do fibrado tangente e a geometria do fibrado normal. Estas geometrias se relacionam com a segunda forma fundamental da imersão por meio de expressões que generalizam as clássicas equações de Gauss e Codazzi das superfícies da seguinte forma:

Proposição 1.28. *Sejam* $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $\eta, \zeta \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$, *temos*

a) Equação de Gauss

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z, T\rangle = \langle R(X,Y)Z, T\rangle - \langle B(Y,T), B(X,Z)\rangle + \langle B(X,T), B(Y,Z)\rangle.$$

b) Equação de Ricci

$$\langle \overline{R}(X,Y)\eta, \zeta\rangle - \langle R^{\perp}(X,Y)\eta, \zeta\rangle = \langle [S_{\eta}, S_{\zeta}]X, Y\rangle,$$

onde $[S_{\eta}, S_{\zeta}]$ *indica o operador* $S_{\eta} \circ S_{\zeta} - S_{\zeta} \circ S_{\eta}$.

Corolário 1.29. *Sejam* $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $\eta, \zeta \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$,*temos*

$$\overline{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - S_{B(X,Z)}Y + S_{B(X,Z)}Y \tag{1.12}$$

e

$$\overline{R}(X,Y)\eta, = R^{\perp}(X,Y)\eta, -B(S_{\eta}X,Y), +B(S_{\eta}Y,X). \tag{1.13}$$

Teorema 1.30. (Equação de Codazzi) *A seguinte equação se verifica*

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z, N\rangle = (\overline{\nabla}_{Y}B)(X,Z,N) - (\overline{\nabla}_{X}B)(Y,Z,N).$$

Corolário 1.31. *Sejam* $X, T, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $N \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$*, então temos que*

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z, N\rangle = \langle \nabla_Y S_N X, Z\rangle - \langle \nabla_X S_N Y, Z\rangle + \langle S_N([X,Y]), Z\rangle - \langle S_{\nabla^{\perp}_Y N} X, Z\rangle + \langle S_{\nabla^{\perp}_X N} Y, Z\rangle.$$

Se (M^n, g) é uma hipersuperfície do espaço euclidiano temos, pelas equações de Gauss, Ricci e Codazzi-Mainard que

$$R(X,Y)Z = S_{B(X,Z)}Y - S_{B(Y,Z)}X, \tag{1.14}$$

$$R^{\perp}(X,Y)\eta = B(S_\eta Y, X) - B(S_\eta X, Y), \tag{1.15}$$

$$\nabla_X S_N Y - \nabla_Y S_N X - S_N([X,Y]) = S_{\nabla^{\perp}_Y N} X - S_{\nabla^{\perp}_X N} Y. \tag{1.16}$$

1.6 Formas Diferenciais e Variedades Integrais

Nesta seção, vamos apresentar algumas definições e propriedades de formas diferenciáveis e va-riedades integrais. Maiores detalhes podem ser encontrados em [1] e [16].

Seja $p \in \mathbb{R}^n$, o espaço tangente de $\mathbb{R}^n$ em p será dentado por $\mathbb{R}^n_p$ e seu espaço dual por $(\mathbb{R}^n_p)^*$.

Uma base para $(\mathbb{R}^n_p)^*$ é $(dx_i)_p$ onde $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a projeção na i-ésima coordenada.

Definição 1.32. *Um campo de formas lineares em* $\mathbb{R}^n$ *é uma aplicação* φ *que a cada* $p \in \mathbb{R}^n$ *associa* $\varphi(p) \in (\mathbb{R}^n_p)^*$*,* φ *pode ser escrita na forma*

$$\varphi = \sum_i a_i dx_i,$$

onde $i = 1, ..., n$ *e* a_i *são funções definidas em* $\mathbb{R}^n$ *e tomando valores em* $\mathbb{R}$*.*

Seja $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)$ o espaço das aplicações $\varphi : \underbrace{\mathbb{R}^n_p \times ... \times \mathbb{R}^n_p}_{k-vezes} \to \mathbb{R}$ k-lineares, que com as operações usuais é um espaço vetorial.

Se φ_1 e φ_2 são formas lineares(ou 1-formas) podemos obter um elemento $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ de $\Lambda^2(\mathbb{R}^n_p)$ definindo

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2(v_1, v_2) = det(\varphi_i(v_j)).$$

Sejam $\varphi_1, ..., \varphi_k$ formas lineares, podemos obter um elemento $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_k$ de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)$ definindo

$$(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_k)(v_1, ..., v_k) = det(\varphi_i(v_j)).$$

Proposição 1.33. *O conjunto* $\{(dx_{i_1}, ..., dx_{i_k})_p\}$, $i_i < i_2 < ... < i_k$, *onde* $i_j \in \{1, 2, ..., n\}$, *forma uma base para* $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)$.

Definição 1.34. *Uma k-forma exterior em* $\mathbb{R}^n$ $(k \geq 1)$ *é uma aplicação* w *que a cada* $p \in \mathbb{R}^n$ *associa* $w(p) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)$, *pela proposição* (1.33), w *pode ser escrito na forma*

$$w(p) = \sum_{i_1 < ... < i_k} a_{i_1 ... i_k}(p)(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})_p,$$

onde $a_{i_1 ... i_k}(p)$ *são aplicações de* $\mathbb{R}^n$ *em* $\mathbb{R}$. *Se as funções* $a_{i_1 ... i_k}(p)$ *forem diferenciáveis,* w *é dita k-forma diferenciável.*

Definição 1.35. *Sejam* $w = \sum_I a_I dx_I$, $I = (i_1, ..., i_k)$, $\varphi = \sum_J b_J dx_J$, $J = (j_1, ..., j_k)$. *Definimos* $w \wedge \varphi$ *por:*

$$w \wedge \varphi = \sum_{I,J} a_I b_J dx_I dx_J.$$

Proposição 1.36. *Se* w *é uma k-forma,* φ *é uma s-forma e* θ *é uma r-forma, tem-se:*

a)$(w \wedge \varphi) \wedge \theta = w \wedge (\varphi \wedge \theta)$;

b) $w \wedge \varphi = (-1)^{ks} \varphi \wedge w$;

c)$w \wedge (\varphi + \theta) = w \wedge \varphi + w \wedge \theta$, *quando* $r = s$.

Definição 1.37. *Se* $w = \sum_I a_I dx_I$ *é uma k-forma, definimos a diferencial exterior de* w *como sendo a* $(k+1)$*-forma*

$$dw = \sum_I da_I \wedge dx_I.$$

Proposição 1.38. *Para formas diferenciais, temos que valem as seguintes igualdades:*

a)$d(w_1 + w_2) = dw_1 + dw_2$, *onde* w_1 *e* w_2 *são k-formas;*

b)$d(w_1 \wedge w_2) = dw_1 \wedge dw_2 + (-1)^k w_1 \wedge dw_2$, *onde* w_1 *é uma k-forma e* w_2 *é uma s-forma;*

c) $d(dw) = d^2 w = 0$.

Vamos estender a definição de k-formas em $\mathbb{R}^n$ para variedades.

Definição 1.39. *Uma k-forma w em uma variedade M é a escolha, para cada $p \in M$, de um elemento $w(p)$ dos espaços das formas k-lineares e alternadas $\Lambda^k(T_pM)^*$, do espaço tangente T_pM, de modo que a expressão w_α de w em qualquer parametrização seja diferenciável.*

Com efeito, dada uma tal escolha, teremos para qualquer parametrização $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$, uma k-forma diferenciável w_α em $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ e definida por

$$w_\alpha(v_1, ..., v_k) = w(df_\alpha(v_1), ..., df_\alpha(v_k)),$$

onde $v_1, ..., v_k \in \mathbb{R}^n_q$, $q \in U_\alpha$.

Proposição 1.40. *Se w é uma 1-forma diferenciável em uma variedade diferenciável M e X, Y são campos vetoriais diferenciáveis em M, então*

$$dw(X, Y) = Xw(Y) - Yw(X) - w[X, Y].$$

Esta é uma proposição muito importante pois relaciona diferencial de 1-formas em M com colchete de campos vetoriais em M.

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n, uma *distribuição r-dimensional* sobre M(ou sistema diferencial r-dimensional) ($r \leq n$), é uma aplicação D_r que associa a cada ponto $p \in M$ um subespaço π_p, de dimensão r, do espaço tangente a M em p.

Uma distribuição D_r é dita regular se, para cada $p \in M$ existe uma vizinhança coordenada V e r campos vetoriais diferenciáveis $Y_1, ..., Y_r$, definidos em V, tais que , para todo ponto $q \in V$ os vetores $(Y_1)_q, ..., (Y_r)_q$ formam uma base para π_q.

Dada uma distribuição D_r regular em uma variedade M , a subvariedade N de M diz-se uma variedade integral de dimensão s ($s \leq r$), se:
a) dim N = s;
b) Para todo ponto $a \in N$, $T_a(N)$ é um subespaço de π_a.

Uma distribuição D_r é dita completamente integrável se em cada ponto $p \in M$ passa uma variedade integral de dimensão r.

Diz-se que um campo vetorial X pertence a uma distribuição D_r se para todo $p \in M$, $X(p) \in \pi_p$.

Definição 1.41. *A distribuição é dita involutiva se $X, Y \in D_r$, então $[X, Y] \in D_r$.*

Proposição 1.42. *Uma distribuição é involutiva se, somente se, é completamente integrável.*

Um *n-plano fibrado* (ver [16], pg. 71) é uma quintúpla

$$\xi = (E, \pi, B, \oplus, \odot),$$

onde

(1) E e B são espaços (o espaço total e o espaço base de ξ, respectivamente);

(2) $\pi : E \to B$ é uma aplicação contínua sobrejetiva em B;

(3) $\oplus$ e $\odot$ são aplicações

$$\oplus : \bigcup_{p \in B} \pi^{-1}(p) \times \pi^{-1}(p) \to E, \ \odot : \mathbb{R} \times E \to E,$$

com $\oplus(\pi^{-1}(p) \times \pi^{-1}(p)) \subset \pi^{-1}(p)$ e $\odot(\mathbb{R} \times E) \subset \pi^{-1}(p)$, que constrói cada fibra $\pi^{-1}(p)$ em um espaço de vetores n-dimensionais sobre $\mathbb{R}$, tal que a seguinte condição trivialmente local é satisfeita:

Para cada $p \in B$, existe uma vizinhança U de p e um homeomorfismo $t : \pi^{-1}(p) \to U \times \mathbb{R}^n$ que é um isomorfismo de espaço de vetores para cada $\pi^{-1}(q)$ sobre $q \times \mathbb{R}^n$, para todo $q \in U$.

Por simplicidade de notação denotaremos o n-plano fibrado apenas por E.

Capítulo 2

Variedades Quase Einstein

Existem duas definições, não equivalentes de variedade quase Einstein. A definição que utilizaremos é a mais recente, mas apesar disto já se tem resultados muito importantes à respeito destas variedades. Esta definição está ligada com a definição de variedades de curvatura quase constante definida por Chen e Yano em [5].

Neste capítulo apresentamos as definições de variedade quase Einstein e a expressão da curvatura escalar .

Apresentamos também algumas propriedades obtidas quando consideramos algumas hipóteses adicionais.

2.1 Variedade Quase Einstein e Curvatura Escalar

As definições existentes de variedades quase Einstein são pertubações da definição de variedade de Einstein.

Definição 2.1. *Uma variedade Riemanniana é dita de Einstein se para todo* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, *tem-se*

$$Ric(X, Y) = \lambda g(X, Y),$$

onde λ *é uma função escalar.*

Definição 2.2. *Sejam* (M, g) *uma variedade Riemanniana,* $X \in \mathfrak{X}(M)$*,* $p \in M$*,* $U \subset M$ *uma vizinhança de* p *e* $\varphi : (-\varepsilon\varepsilon) \times U \to M$ *uma aplicação diferenciável, tais que para todo* $q \in U$ *a curva* $t \mapsto \varphi(t, q)$ *é a trajetória de*X *passando por* q *em* $t = 0$*.* X *é dito campo de Killing se, para todo* $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$*, a aplicação* $\varphi(t_0, .) : U \subset M \to M$ *é uma isometria.*

Temos a seguir uma importante proposição, demonstrada por O'Neil B. em [13], sobre campo de Killing.

Proposição 2.3. *Seja*$X \in \mathfrak{X}(M)$*. Então* X *é campo de Killing se, somente se,*

$$g(\bigtriangledown_Y X, Z) + g(\bigtriangledown_Z X, Y) \tag{2.1}$$

para $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$*.*

Existem duas definições de variedades Quase Einstein:

Definição 2.4. *Uma variedade Riemanniana* $(M^n, g)(n \geq 3)$ *é dita Quase Einstein se o tensor de Ricci satisfaz a seguinte igualdade*

$$Ric(X, Y) = \lambda g(X, Y) + g(\bigtriangledown_X V, Y) + g(\bigtriangledown_Y V, X), \tag{2.2}$$

onde λ *é constante e* $V \in \mathfrak{X}(M)$ *é um campo de vetores (não - killing) fixo.*

A exigência de ser um campo não killing é para que a variedade não seja de Einstein, pois pela proposição 2.3, se V for killing, temos que $g(\bigtriangledown_X V, Y) + g(\bigtriangledown_Y V, X) = 0$, neste caso a variedade seria Einstein.

Esta definição foi introduzida por Friedan em 1985, tendo motivações físicas, principalmente em teoria da relatividade.

Definição 2.5. *Uma variedade Riemanniana não flat* $(M^n, g)(n \geq 3)$ *é dita Quase Einstein se o tensor de Ricci é não nulo e satisfaz a seguinte igualdade*

$$Ric(X, Y) = ag(X, Y) + bA(X)A(Y), \tag{2.3}$$

onde $b \neq 0$, U é um vetor unitário fixo, a e b são escalares e A é a 1-forma associada ao campo de vetores U, ou seja, $A(X)=g(U,X)$. Neste caso a e b são ditos escalares associados e U o gerador da variedade que denotaremos por $(QE)_n$.

Exige-se que $b \neq 0$ para que a variedade não se reduza à uma variedade de Einstein.

Esta definição foi introduzida por M. C. Chaky e R. K. Maity recentemente, com o objetivo de enfraquecer as hipóteses sobre variedades de Einstein e assim tentar obter mais propriedades e exemplos e estendê-los às estas variedades.

Por [4], estas definições não são equivalentes, sendo que a motivação da definição (2.4) foi física, enquanto a definição (2.5) é geométrica, pois está ligada com o conceito de variedades de curvatura quase constante. Utilizaremos a definição de M. C. Chaky e R. K. Maity.

Proposição 2.6. *A curvatura escalar de uma variedade Quase Eistein $(QE)_n$ é dada por*

$$r = an + b. \tag{2.4}$$

Demonstração: Para cada $p \in (QE)_n$ seja $\{e_i\}$ uma base do espaço tangente em p, $T_p(QE)_n$, a curvatura escalar em p é

$$r(p) = \sum_{i=1}^{n} Ric(e_i, e_i). \tag{2.5}$$

Substituindo (2.5) em (2.3), temos

$$r(p) = \sum_{i=1}^{n} [g(e_i, e_i) + bg(e_i, U)g(e_i, U)]. \tag{2.6}$$

Como U é um vetor unitário $\sum_{i=1}^{n} g(e_i, U)g(e_i, U) = 1$, temos que

$$r(p) = an + b. \tag{2.7}$$

Como queríamos demonstrar. □

Esta expressão da curvatura escalar de uma variedade Quase Einstein facilita bastante os cálculos envolvendo estas variedades.

2.2 Algumas Propriedades de Variedades Quase Einstein

Apresentamos algumas propriedades importantes de variedades quase Einstein e seu tensor de Ricci.

Proposição 2.7. *O tensor de Ricci de uma variedade quase Einstein $(QE)_n$ satisfaz as seguintes relações:*

$$Ric(X,X) \geq (a+b)(A(X))^2, \ a > 0 \tag{2.8}$$

e

$$Ric(X,X) \leq (a+b)|X|^2, \ b > 0. \tag{2.9}$$

Demonstração: Pela definição (2.5), temos que

$$\begin{aligned} Ric(X,X) &= ag(X,X) + bA(X)A(X) \\ &= a|X|^2 + b(A(X))^2. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Considerando θ o ângulo entre U e X, temos que:

$$\begin{aligned} cos\theta &= \frac{g(U,X)}{\sqrt{g(U,U)}\sqrt{g(X,X)}} \\ &= \frac{g(U,X)}{\sqrt{g(X,X)}}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Daí

$$(g(U,X))^2 \leq g(X,X) = |X|^2. \tag{2.12}$$

Se $a > 0$, $a(g(U,X))^2 \leq a|X|^2$ ou $a(A(X))^2 \leq a|X|^2$, adicionando $b(A(X))^2$ dos dois lados da desigualdade, temos que:

$$(a+b)(A(X))^2 \leq a|X|^2 + b(A(X))^2 = Ric(X,X). \tag{2.13}$$

Se $b > 0$, $b(A(X))^2 \leq b|X|^2$, somando $a|X|^2$ em ambos os lados temos:

$$Rc(X,X) = a|X|^2 + b(A(X))^2 \leq (a+b)|X|^2. \tag{2.14}$$

Sendo assim temos as seguintes relações:

$$Ric(X,X) \geq (a+b)(A(X))^2, \; a > 0 \tag{2.15}$$

e

$$Ric(X,X) \leq (a+b)|X|^2, \; b > 0. \tag{2.16}$$

Como queríamos mostrar.

$\square$

O seguinte teorema traz uma igualdade importante e foi demonstrado por Y. Watanabe em [18].

Teorema 2.8. *Se em uma variedade Riemanniana n-dimensional M, compacta, orientável e sem fronteira, existe um campo de vetores não paralelo X tal que*

$$\int_M Ric(X,X)dv = \frac{1}{2}\int_M |dX|^2 dv + \frac{n-1}{n}\int_M (\partial X)^2 dv. \tag{2.17}$$

Então M é conforme à uma esfera imersa no espaço euclideano E^{n+1}, onde dv é o elemento volume de M, dX é o curl de X e ∂X é o divergente de X.

Teorema 2.9. *Seja uma variedade quase Einstein $(QE)_n$ compacta, orientável e sem fronteira, tal que o gerador U é o gradiente de uma função e a seguinte condição*

$$\int_M (a+b)dv = \frac{n-1}{n}\int_M (\partial U)^2 dv$$

é satisfeita. Então $(QE)_n$ é conforme à uma esfera imersa em E^{n+1}.

Demonstração: Como U é o gradiente de uma função, $U = gradf$, U não pode ser paralelo, pois se $\nabla U = 0$ temos $\nabla gradf = 0$ ou $\Delta f = 0$, onde Δ denota o laplaciano de f. Pelo lema de Bochner, f é constante, logo $U = 0$, o que é absurdo pois U é unitário por definição. Temos também que $dU = 0$, de fato

$$\begin{aligned} dU(X,Y) &= g(\nabla_X U, Y) - g(\nabla_Y U, X) \\ &= g(\nabla_X gradf, Y) - g(\nabla_Y gradf, X) \\ &= Xg(gradf, Y) - g(gradf, \nabla_X Y) - Yg(gradf, X) + g(gradf, \nabla_Y X) \\ &= X(Yf) - Y(Xf) + (\nabla_Y X)f - (\nabla_X Y)f \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $\int_M (a+b)dv = \frac{n-1}{n}\int_M (\partial U)^2 dv$ por hipótese, temos que

$$\int_M Ric(U,U)dv = \frac{1}{2}\int_M |dU|^2 dv + \frac{n-1}{n}\int_M (\partial U)^2 dv.$$

Temos em $(QE)_n$ um campo de vetores não paralelo que satisfaz (2.17), logo pelo Teorema (2.8), $(QE)_n$ é conforme à uma esfera imersa em E_{n+1}.

$\square$

Teorema 2.10. *Se em variedade compacta orientável $(QE)_n$ $(n \geq 3)$ sem fronteira, os escalares associados são tais que $b > 0$ e $a + b < 0$, então não existe campo de vetores de Killing não nulo nesta variedade.*

Demonstração: Por [19] (p.43) sabemos que em uma variedade compacta orientável e sem fronteira vale a seguinte relação:

$$\int_M (Ric(X,X) - |\nabla X|^2 - (\partial X)^2)dv = 0, \tag{2.18}$$

onde ∇ é a derivada covariante com relação à métrica de $(QE)_n$, ∂X é o divergente de X e dv é o elemento volume de $(QE)_n$. Se X é um campo de vetores de Killing, então $\partial X = 0$ (ver [19] p. 43). Então (2.18) se reduz à:

$$\int_M (Ric(X,X) - |\nabla X|^2)dv = 0. \tag{2.19}$$

Vamos considerar $b > 0$, então por (2.16), $Ric(X,X) \leq (a+b)|X|^2$. Portanto $Ric(X,X) - |\nabla X|^2 \leq (a+b)|X|^2 - |\nabla X|^2$. Logo,

$$\int_M (Ric(X,X) - |\nabla X|^2)dv \leq \int_M ((a+b)|X|^2 - |\nabla X|^2)dv \tag{2.20}$$

e por (2.19)

$$\int_M ((a+b)|X|^2 - |\nabla X|^2)dv \geq 0. \tag{2.21}$$

Se $a+b<0$, temos:

$$\int_M ((a+b)|X|^2 - |\nabla X|^2)dv = 0. \tag{2.22}$$

Como M é compacta, da equação anterior, temos que $X=0$. Portanto não existe campo de vetores de Killing não nulo nesta variedade.

$\square$

Corolário 2.11. *Se em variedade compacta orientável $(QE)_n$ $(n \geq 3)$, sem fronteira, os escalares associados são tais que $b>0$ e $a+b<0$, então o gerador U não é um campo vetorial de Killing .*

Demonstração: Vamos supor, por contradição, que o gerador U seja campo vetorial de Killing. Pelo teorema anterior U é nulo, contradição pois pela definição de $(QE)_n$, U é um campo de vetores unitário.

$\square$

Assim, nas condições deste corolário vemos que gerador desta variedade não é Killing, assim como o gerador da definição (2.4).

Em casos gerais, não encontramos nada que se refere ao fato do gerador da variedade $(QE)_n$ ser um campo vetorial não Killing.

Capítulo 3

Variedades Quase Einstein Conformemente Flat

3.1 Variedades Quase Einstein Relacionadas com Variedades de Einstein

As variedades quase Einstein conformemente flat podem ser relacionadas com outras variedades estudadas há mais tempo que possuem propriedades muito importantes. Estas relações auxiliam na busca por exemplos e propriedades das variedades Quase Einstein.

Certas variedades admitem um tipo de campo de vetores, chamado de campo concircular, que lhes determina várias propriedades importantes. Este campo é definido por:

Definição 3.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $\{X_i\}$ uma base espaço para o tangente em cada ponto de M. Um campo de vetores X é dito concircular, se valem as seguintes igualdades:*

$$g(\nabla_{X_i}X, X_j) + g(\nabla_{X_j}X, X_i) = 2\psi g(X_i, X_j), \tag{3.1}$$

e

$$\nabla^2\psi = \frac{\Delta\psi}{n}g. \tag{3.2}$$

Se ψ não é constante, o campo é dito concircular próprio.

Definição 3.2. *Sejam $(QE)_n$ $(n \geq 3)$ uma variedade quase Einstein e a e b, seus escalares associados. Dizemos que $(QE)_n$ é quase Einstein especial e denotamos por $S(QE)_n$, se a for constante.*

O seguinte teorema mostra uma importante propriedade de variedades quase Einstein conformemente flat $S(QE)_n$ $(n > 3)$, que as relacionam com variedades de Einstein.

Teorema 3.3. *Em uma variedade conformemente flat $S(QE)_n$ $(n > 3)$, o campo de vetores U definido por $g(U, X) = A(X)$ é um campo concircular próprio.*

Demonstração: Como a variedade é conformemente flat o tensor de Weyl, W é nulo. Logo $divW = 0$, então por [7], vale

$$(\nabla_X Ric)(Y, Z) - (\nabla_Z Ric)(Y, X) = \frac{1}{2(n-1)}\left[g(Y, Z)X(r) - g(X, Y)Z(r)\right], \tag{3.3}$$

onde $r = an + b$ é a curvatura escalar de $S(QE)_n$.

Mas,

$$\begin{aligned}
\nabla_X Ric(Y, Z) &= \nabla_X[ag(Y, Z) + bA(Y)A(Z)] \\
&= X[ag(Y, Z) + bA(Y)A(Z)] - [ag(\nabla_X Y, Z) + bA(\nabla_X Y)A(Z)] \\
&- [ag(Y, \nabla_X Z) + bA(Y)A(\nabla_X Z)] \\
&= X(a)g(Y, Z) + ag(\nabla_X Y, Z) + ag(Y, \nabla_X Z) + X(b)A(Y)A(Z) \\
&+ b[(A(\nabla_X Y) + (\nabla_X A)(Y)]A(Z) + [A(\nabla_X Z) \\
&+ (\nabla_X A)(Z)]A(Y) - [ag(\nabla_X Y, Z) + bA(\nabla_X Y)A(Z)] \\
&- [ag(Y, \nabla_X Z) + bA(Y)A(\nabla_X Z)] \\
&= X(a)g(Y, Z) + X(b)A(Y)A(Z) \\
&+ b[(\nabla_X A)(Y)A(Z) + (\nabla_X A)(Z)A(Y)].
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\nabla_X Ric(Y,Z) - \nabla_Z Ric(Y,X) &= X(a)g(Y,Z) + X(b)A(Y)A(Z) + b[(\nabla_X A)(Y)A(Z)\\ &+ (\nabla_X A)(Z)A(Y)] - Z(a)g(Y,X) - Z(b)A(Y)A(X)\\ &- b[(\nabla_Z A)(Y)A(X) + (\nabla_Z A)(X)A(Y)]. \qquad (3.5)\end{aligned}$$

Como a é constante e $r = an + b$, temos que $X(a) = 0$ e $X(r) = X(b)$. Substituindo na igualdade acima, temos

$$\begin{aligned}\nabla_X Ric(Y,Z) - \nabla_Z Ric(Y,X) &= X(r)A(Y)A(Z) + b[(\nabla_X A)(Y)A(Z)\\ &+ (\nabla_X A)(Z)A(Y)] - Z(r)A(Y)A(X)\\ &- b[(\nabla_Z A)(Y)A(X) + (\nabla_Z A)(X)A(Y)]. \qquad (3.6)\end{aligned}$$

Substituindo (3.3) em (3.6) temos

$$\begin{aligned}&X(r)A(Y)A(Z) + b[(\nabla_X A)(Z)A(Y) + (\nabla_X A)(Y)A(Z)]\\ &-Z(r)A(Y)A(X) - b[(\nabla_Z A)(Y)A(X) + (\nabla_Z A)(X)A(Y)]\\ &= \frac{1}{2(n-1)}[g(Y,Z)X(r) - g(X,Y)Z(r)]. \qquad (3.7)\end{aligned}$$

Fazendo $Y = Z = e_i$, onde $\{e_i\}$ é uma base ortonormal do espaço tangente em cada ponto da variedade e aplicando o somatório em $i, 1 \leq i \leq n$ na equação (3.7) e $U = \sum_j u_j e_j$, $\sum_j u_j^2 = 1$, temos

$$\begin{aligned}&\sum_i (X(r)A(e_i)^2 + b[(\nabla_X A)(e_i)A(e_i)\\ &+(\nabla_X A)(e_i)A(e_i)] - e_i(r)A(e_i)A(X)\\ &-b[(\nabla_{e_i} A)(e_i)A(X) + (\nabla_{e_i} A)(X)A(Y)]\\ &= \frac{1}{2(n-1)}\sum_i [g(e_i,e_i)X(r) - g(X,e_i)e_i(r)]. \qquad (3.8)\end{aligned}$$

Como $\sum_i e_i(r) = (\sum_i u_i e_i)(r) = U(r)$, $\sum_i g(X,e_i)e_i(r) = \sum_i x_i e_i(r) = X(r)$ e $\sum_i e_i = \sum_i u_i e_i$, obtemos

$$\frac{1}{2}X(r) = U(r)A(X) + b(\nabla_U A)(X) + b\sum_i [(\nabla_{e_i} A)(e_i)A(X)]. \qquad (3.9)$$

Agora fazendo $Y = Z = U$ na equação (3.7) e como $\nabla_X A(U) = \frac{1}{2} X A(U) = 0$ e $\nabla_U A(U) = \frac{1}{2} U A(U) = 0$, temos

$$\begin{aligned} X(r) - U(r)A(X) \quad &- \quad b[(\nabla_U A)(U)A(X) + (\nabla_U A)(X)] \\ &= \quad \frac{1}{2(n-1)}(X(r) - A(X)U(r)) \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$b(\nabla_U A)(X) = \frac{2n-3}{2(n-1)}[X(r) - A(X)U(r)]. \tag{3.11}$$

Substituindo (3.11) em (3.9), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}X(r) \quad &= \quad U(r)A(X) + b\sum_i (\nabla e_i A)(e_i)A(X) \\ &+ \quad \frac{2n-3}{2(n-1)}(X(r) - A(X)U(r)) \end{aligned} \tag{3.12}$$

ou

$$\frac{n-2}{2(n-1)}X(r) + \frac{1}{2(n-1)}A(X)U(r) + b\sum_i (\nabla e_i A)(e_i)A(X) = 0. \tag{3.13}$$

Fazendo $X = U$ em (3.9)

$$\sum_i b(\nabla e_i A)(e_i) = -\frac{1}{2}U(r). \tag{3.14}$$

Sendo assim

$$X(r) = U(r)A(X). \tag{3.15}$$

Fazendo $Y = U$ em (3.7) e usando (3.15), obtemos

$$\begin{aligned} &U(r)A(X)A(Z) + b((\nabla_X A)(Z) + A(Z)(\nabla_X A)(U) - Z(r)A(X) \\ &-b[(\nabla_X A)(U)A(X) + (\nabla_Z A)(X)] \\ &= \frac{1}{2(n-1)}[A(Z)A(X) - A(X)Z(r)] \end{aligned} \tag{3.16}$$

ou

$$\begin{aligned} b((\nabla_X A)(Z) - (\nabla_Z A(X))) \quad &= \quad \frac{3-2n}{2(n-1)}(U(r)A(X)A(Z) - Z(r)A(X)) \\ &= \quad \frac{3-2n}{2(n-1)}(U(r)A(X)A(Z) - U(r)A(Z)A(X)) \\ &= \quad 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Daí, temos que

$$(\nabla_Z A)(X) - (\nabla_X A)(Z) = 0. \tag{3.18}$$

Portanto a 1-forma A é fechada.

Por (3.11) e (3.15), temos

$$(\nabla_U A)(X) = 0. \tag{3.19}$$

Consideremos agora a função escalar

$$f = \frac{1}{2(n-1)} \frac{U(r)}{b}. \tag{3.20}$$

Derivando covariantemente em relação à X

$$\nabla_X f = -\frac{1}{2(n-1)} \frac{U(r)}{b^2} X(r) + \frac{1}{2(n-1)b} X(U(r)). \tag{3.21}$$

Por (3.15), temos

$$X(U(r))A(Y) = X(U(r))A(X) + U(r)(\nabla_X A)(Y). \tag{3.22}$$

Já que $(\nabla_Z A)(X) = (\nabla_X A)(Z)$, obtemos

$$Y(U(r))A(X) = X(U(r))A(Y). \tag{3.23}$$

Fazendo $X = U$ na equação acima, temos

$$Y(U(r)) = U(U(r))A(Y) = hA(Y), \tag{3.24}$$

onde h é uma função escalar.

Daí

$$\nabla_X f = \mu A(X), \tag{3.25}$$

onde $\mu = \frac{1}{2(n-1)b}(h + \frac{U(r)}{b} U(r))$, usando (3.15).

Usando (3.25), é fácil mostrar que

$$\omega(X) = \frac{1}{2(n-1)} \frac{U(r)}{b} A(X) = fA(X) \tag{3.26}$$

é fechada. De fato,

$$\begin{aligned}\nabla_Y(\omega(X) &- \nabla_X(\omega(Y) = \nabla_Y f A(X)\\ &+ f\nabla_Y A(X) - (\nabla_X f)A(Y) - f\nabla_X A(Y)\\ &= \mu(A(Y)A(X) - A(X)A(Y)) + f[(\nabla_Y A)(X) - (\nabla_X A)(Y)]\\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Usando (3.15) e (3.18) em (3.7) temos

$$b(A(Z)(\nabla_X A)(Y) - A(X)(\nabla_Z A)(Y) = \frac{U(r)}{2(n-1)}[g(Y,Z)A(X) - g(X,Y)A(Z)]. \tag{3.28}$$

Fazendo $Z = U$ na equação acima, temos

$$(\nabla_X A)(Y) = \frac{1}{2(n-1)}\frac{U(r)}{b}(A(X)A(Y) - g(X,Y)) \tag{3.29}$$

ou

$$(\nabla_X A)(Y) = -fg(X,Y) + \omega(X)A(Y) \tag{3.30}$$

onde ω é fechada. Com isto temos de acordo com [15], que o campo de vetores U associado à 1-forma A é um campo de vetores concircular próprio.

□

Com base em [12] demonstraremos o seguinte teorema.

Teorema 3.4. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana. Se existe solução não constante ψ de $\nabla^2\psi = \frac{\Delta\psi}{n}g$, em uma vizinhança de $p \in M$ com $\nabla\psi|_p \neq 0$, então existem um sistema de coordenadas locais $(u, u_1, ..., u_{n-1})$ em uma vizinhança de p, uma função $\psi = \psi(u)$ com $\psi'|_p \neq 0$ e uma métrica Riemanniana $(n-1)$-dimensional $g_* = g_*(u_1, ..., u_{n-1})$, tal que:*

$$\begin{aligned} g(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}) &= 1,\\ g(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u_i}) &= 0, \quad para \quad i = 1, ..., n-1,\\ g(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}) &= 0, \quad para \quad i, j = 1, ..., n-1. \end{aligned}$$

Assim a métrica g pode ser escrita como $ds^2 = du^2 + (\psi'(u))^2 ds_*^2$.

Para demonstrar este teorema necessitamos do seguinte lema:

Lema 3.5. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana que admite localmente uma função $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $\nabla^2\psi = \frac{\Delta\psi}{n}g$. Seja U um aberto de M sem pontos críticos de ψ, ou seja $\nabla\psi|_p \neq 0$ para todo $p \in U$. Então valem as seguintes igualdades:*
i) As trajetórias de $\nabla\psi$ são geodésicas;
ii) $\| \nabla\psi \|$ é constante ao longo dos níveis de ψ.

.

Demonstração: O vetor normal unitário de uma hipersuperfície de nível $\{x \in M|\psi(x) = c\}$ de ψ é $N = \frac{\nabla\psi}{\|\nabla\psi\|}$. Então da equação diferencial $\nabla^2\psi = \lambda.g$, onde $\lambda = \frac{\Delta\psi}{n}$, temos que

$$\begin{aligned} \nabla_X N &= \nabla_X \frac{\nabla\psi}{\| \nabla\psi \|} \\ &= \frac{\lambda.X}{\| \nabla\psi \|} - \frac{\langle X, \nabla\psi\rangle}{\langle\nabla\psi, \nabla\psi\rangle}.\frac{\lambda.X.\nabla\psi}{\| \nabla\psi \|}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Para qualquer vetor X, tangente a M.

Se fizermos $X = N$ em (3.31), obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_N N &= \frac{\lambda.N}{\| \nabla\psi \|} - \frac{\langle N, \nabla\psi\rangle}{\langle\nabla\psi, \nabla\psi\rangle}.\frac{\lambda.N.\nabla\psi}{\| \nabla\psi \|} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sendo assim, as trajetórias de $\nabla\psi$ são geodésicas.

Seja X tangente à uma hipersuperfície de ψ, temos que

$$\nabla_X \| \nabla\psi \|^2 = 2g(\nabla_X\nabla\psi, \nabla\psi) = 2\frac{\Delta\psi}{n}g(X, \nabla\psi) = 0$$

pois X e N são ortogonais. Portanto $\| \nabla\psi \|$ é constante ao longo dos níveis de ψ.

□

Demonstração:(**do Teorema 3.4**) Seja $c := \psi(p)$ e $M_c = \{q|\psi(q) = c\}$. M_c é uma hipersuperfície de nível regular de ψ. Escolha um sistema de coordenadas qualquer $u_1, ..., u_{n-1}$ sobre M_c. Como as trajetórias de $\nabla\psi$ são geodésicas, vamos extender este sistema de coordenadas em coordenadas geodésicas paralelas $(u, u_1, ..., u_{n-1})$ em uma vizinhança de p. Este tem as seguintes propriedades:

- as u-linhas são geodésicas com u como comprimento de arco
- $\frac{\partial}{\partial u}$ é ortogonal a todo conjunto $\{(u, u_1, ..., u_{n-1}) | u = cte\}$, expressando o fato que os diferentes u-níveis são paralelos uns aos outros e a distância entre eles é justamente os u-valores.

Temos que o u-nível contendo p coincide por construção com o ψ-nível M_c. Como $\parallel \nabla\psi \parallel$ é constante ao longo dos ψ-níveis, estes são paralelos uns aos outros. O u-nível contendo p coincide com M_c e os u-níveis são paralelos uns aos outros, temos que os u-níveis coincidem com os ψ-níveis, daí

$$\psi = \psi(u) \ e \ \nabla\psi = \psi' \frac{\partial}{\partial u}.$$

Falta mostrar que

$$(\psi'(u))^{-2} g_{ij}(u, u_1, ..., u_{n-1}) = g_{*ij}(u_1, ..., u_{n-1}).$$

Isto segue de:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} g_{ij} &= g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}} \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u_j}) + g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_j}} \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u_i}) \\
&= g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}} \frac{\nabla\psi}{\psi'}, \frac{\partial}{\partial u_j}) + g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_j}} \frac{\nabla\psi}{\psi'}, \frac{\partial}{\partial u_i}) \\
&= \frac{2\Delta\psi}{n\psi'} g_{ij} \\
&= 2\frac{\psi''}{\psi'} g_{ij}.
\end{aligned}$$

Esta última igualdade segue de $\nabla^2\psi = \frac{\Delta\psi}{n} g$. Portanto para $u_1, ..., u_{n-1}$ fixos, $g_{ij} = g_{ij}(u)$ satisfaz a equação:

$$(\frac{g_{ij}}{\psi'^2})' = \frac{g'_{ij}}{\psi'^2} - 2\frac{\psi''}{\psi'^3} g_{ij} = 0.$$

Portanto $(\psi'(u))^{-2} g_{ij}(u, u_1, ..., u_{n-1})$ não depende de u, logo

$$(\psi'(u))^{-2} g_{ij}(u, u_1, ..., u_{n-1}) = g_{*ij}(u_1, ..., u_{n-1}),$$

como queríamos mostrar.

□

Corolário 3.6. *Uma variedade $S(QE)_n$ conformemente flat é o produto torcido $I \times_{\psi(u)} M^*$, onde I é um intervalo de $\mathbb{R}$ e (M^*, g^*) é uma variedade Riemanniana $(n-1)$ - dimensional.*

Demonstração: Vimos que em uma variedade $S(QE)_n$ conformemente flat o gerador U é um campo concircular próprio, logo pela definição (3.1), existe uma solução não constante ψ de $\nabla^2\psi = \frac{\Delta\psi}{n} g$. Pelo Teorema (3.4) a métrica de $S(QE)_n$ pode ser escrita como

$$ds^2 = du^2 + (\psi'(u))^2 ds_*^2.$$

Pela definição de produto torcido, $S(QE)_n$ é o produto torcido $\mathrm{I} \times_{\psi(u)} M^*$.

□

A. Gebarowski mostrou em [8], que um produto torcido do tipo $M = I \times_{\psi(u)} M^*$ é conformemente flat se, somente se, M^* é uma variedade de Einstein. Isto é o que diz o seguinte teorema:

Teorema 3.7. *Seja (M^n, g), $(n > 3)$ uma variedade Riemanniana conformemente flat. Se $M = I \times_{\psi(u)} M^*$, então (M^*, g^*) é Eintein.*

Corolário 3.8. *Uma variedade $S(QE)_n$ conformemente flat $(n > 3)$ pode ser expressa como o produto torcido $M = I \times_{\psi(u)} M^*$, onde M^* é uma variedade de Einstein.*

Com o corolário acima, vemos que é possível relacionar uma variedade quase Einstein com uma variedade de Einstein, bastando apenas considerar algumas hipóteses adicionais.

3.2 Variedades Quase Einstein Relacionadas Com Variedades de Curvatura Quase Constante

Veremos nesta seção que a definição que adotamos de variedade quase Einstein está relacionada com a definição de variedade de curvatura quase constante.

Uma variedade conformemente flat é dita de curvatura *quase-constante* se o tensor curvatura satisfaz

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) &= p(g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)) \\ &+ q(g(X,W)T(Y)T(Z) - g(X,Z)T(Y)T(W) \\ &+ g(Y,Z)T(X)T(W) - g(Y,W)T(X)T(Z)), \end{aligned} \tag{3.32}$$

onde p e q são funções diferenciáveis, T é uma 1-forma dada por $T(X) = g(X,U)$, para um vetor unitário fixo U.

Temos uma importante relação entre variedades quase Einstein e variedades de curvatura quase constante.

Proposição 3.9. *Uma variedade (M^n, g) de curvatura quase constante é uma variedade quase Einstein.*

Demonstração: Por definição,se $\{e_i\}$ é uma base do espaço tangente em cada ponto de M,

$$Ric(Y,Z) = \sum_i R(Y,e_i,Z,e_i).$$

Como M é de curvatura quase constante, temos

$$\begin{aligned} R(Y,e_i,Z,e_i) &= a(g(Y,Z)g(e_i,e_i) - g(e_i,Z)g(Y,e_i)) \\ &+ b(g(e_i,e_i)A(Y)A(Z) - g(e_i,Z)A(Y)A(e_i) + g(Y,Z)A(e_i)A(e_i) \\ &- g(Y,e_i)A(e_)A(Z). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Substituindo na definição, temos

$$\begin{aligned} Ric(Y,Z) &= \sum_i R(Y,e_i,Z,e_i) \\ &= \sum_i (ag(Y,Z)g(e_i,e_i) - ag(e_i,Z)g(Y,e_i) + bg(e_i,e_i)A(Y)A(Z) \\ &- bg(e_i,Z)A(Y)A(e_i) + bg(Y,Z)A(e_i)A(e_i) - bg(Y,e_i)A(e_i)A(Z)) \\ &= [a(n-1)+b]g(Y,Z) + b(n-2)A(Y)A(Z), \end{aligned} \tag{3.34}$$

onde a e b são escalares e A é uma 1-forma com vetor associado unitário. Logo, M é uma variedade quase Einstein.

Temos por outro lado, que se uma variedade quase Einstein for conformemente flat, então ela é de curvatura quase constante, o que está provado à seguir.

Teorema 3.10. *Uma variedade quase Einstein conformemente flat é uma variedade de curvatura quase constante.*

Demonstração: Como a variedade é conformemente flat, o tensor de Weyl,é nulo, logo, o tensor curvatura da variedade é dado por

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) &= \frac{1}{(n-2)}(Ric(X,Z)g(Y,W)+Ric(Y,W)g(X,Z) \\ &- Ric(Y,Z)g(X,W)-Ric(X,W)g(Y,Z)) \\ &- \frac{r}{(n-1)(n-2)}(g(X,Z)g(Y,W)-g(Y,Z)g(X,W)). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Substituindo a definição (2.5) na equação acima temos

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) &= \frac{1}{(n-2)}\{(ag(X,Z)+bA(X)A(Z))g(Y,W) \\ &+ [ag(Y,W)+bA(Y)A(W)]g(X,Z)-[ag(Y,Z) \\ &+ bA(Y)A(Z)]g(X,W)-[ag(X,W)+bA(X)A(W)]g(Y,Z)\} \\ &- \frac{r}{(n-1)(n-2)}[g(Y,Z)g(X,W)-g(X,Z)g(Y,W)] \\ &= \frac{2a}{n-2}g(Y,W)g(X,Z)-\frac{r}{(n-1)(n-2)}g(Y,W)g(X,Z) \\ &- \frac{2a}{n-2}g(Y,Z)g(X,W)+\frac{r}{(n-1)(n-2)}g(Y,Z)g(X,W) \\ &+ \frac{b}{n-2}[g(Y,W)A(X)A(Z)-g(X,W)A(Y)A(Z) \\ &+ g(X,Z)A(Y)A(W)-g(Y,Z)A(X)A(W)] \\ &= \left(\frac{2a}{n-2}-\frac{r}{(n-1)(n-2)}\right)[g(X,Z)g(Y,W) \\ &- g(Y,Z)g(X,W)] \\ &+ \frac{b}{n-2}[g(Y,W)A(X)A(Z)-g(X,W)A(Y)A(Z) \\ &+ g(X,Z)A(Y)A(W)-g(Y,Z)A(X)A(W)] \\ &= p[g(X,Z)g(Y,W)-g(Y,Z)g(X,W)]+q[g(Y,W)A(X)A(Z) \\ &- g(X,W)A(Y)A(Z)+g(X,Z)A(Y)A(W)-g(Y,Z)A(X)A(W)]. \end{aligned}$$

Considerando $p = \frac{2a}{n-2} - \frac{r}{(n-1)(n-2)}$ e $q = \frac{b}{n-2}$, vemos que o operador curvatura satisfaz as condições da definição de curvatura quase constante.

$\square$

Vimos que uma variedade de curvatura quase constante é uma variedade quase Einstein, assim podemos relacionar estas variedades com variedades quase Einstein conformemente flat, como também são relacionadas variedades de Einstein com variedades de curvatura constante.

Capítulo 4

Variedades Quase Einstein Imersas Isometricamente no Espaço Eucli-diano

Na seção 1, apresentaremos algumas definições e um teorema sobre imersões isométricas no espaço euclidiano, que é sem dúvida um teorema muito importante para geometria.

Com estas noções vamos relacionar variedades quase Einstein com hipersuperfícies do espaço euclidiano. Esta é uma relação importante, visto que estudar as hipersuperfícies conformemente flat, que são imersas isometricamente no espaço euclidiano é tópico de pesquisa nos dias atuais.

4.1 Imersões de Variedades Riemannianas no Espaço Euclidiano

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana, $\mathfrak{X}(M)$ o fibrado tangente de M e E um k-plano fibrado sobre M equipado com a métrica do fibrado e uma conexão compatível D. Vamos definir o tensor segunda forma em E como um homomorfismo bilinear simétrico

$B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to E$ e a segunda forma fundamental S como o homomorfismo $S : \mathfrak{X}(M) \times E \to \mathfrak{X}(M)$, auto-adjunto associado à B.

Vamos enunciar agora um dos principais resultados desta seção.

Teorema 4.1. *Seja*(M^n, g) *uma variedade Riemanniana e E um k-plano fibrado sobre M equipado com a métrica do fibrado e uma conexão compatível D. Seja $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to E$ o tensor segunda forma fundamental em E e $S : \mathfrak{X}(M) \times E \to \mathfrak{X}(M)$ a segunda forma. Se as equações de Gauss* (1.14)*, Ricci* (1.15) *e Codazzi-Mainard* (1.16) *são satisfeitas, existe uma imersão isométrica local $f : V \subset M \to \mathbb{R}^{n+k}$, na qual identificamos o fibrado normal da imersão com E. Então a métrica induzida sobre o fibrado normal de f coincide com a métrica dada sobre E, a segunda forma fundamental e a conexão da imersão coincide com S e D, respectivamente. Além disso, a imersão é única.*

Para demonstrar este teorema necessitaremos dos seguintes lemas:

Lema 4.2. *Seja*(M^n, g) *uma variedade Riemanniana e E um k-plano fibrado sobre M equipado com a métrica e a conexão compatível D. Seja $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to E$ o tensor segunda forma em E e $S : \mathfrak{X}(M) \times E \to \mathfrak{X}(M)$ a segunda forma . Assuma que as equações de Gauss, Ricci e Codazzi-Mainard são satisfeitas. Então, existem 1-formas diferenciáveis ω_i e ω_b^a, $i = 1, ...n + k$. definidas localmente em M e satisfazendo as seguintes condições*

$$\omega_b^a = -\omega_a^b, \tag{4.1}$$

$$d\omega_i = \sum_j \omega_j \wedge \omega_i^j,\ \ j = 1, ..., n, \tag{4.2}$$

$$d\omega_b^a = \sum_c \omega_c^a \wedge \omega_b^c,\ \ c = 1, ..., n + k. \tag{4.3}$$

Demonstração: Vamos usar as seguintes convenções sobre os índices

$$1 \leq a, b, c, d \leq n + k,$$

$$1 \leq i, j, l, s, t \leq n,$$

$$n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \leq n+k,$$

Seja U uma vizinhança coordenada em M e $\{X_i\}$ uma base ortonormal do espaço tangente em cada ponto de U. Considere $\{\omega_i\}$ a base dual de X_i, ou seja, $\omega_j(X_i) = \delta_{ij}$ e defina $\omega_\alpha(X_i) = 0$. Considere $\{Y_\alpha\}$ uma base ortonormal em $U \times \mathbb{R}^k \subset E$ e defina

$$\omega_j^i(X_l) = g(\nabla_{X_l} X_i, X_j), \tag{4.4}$$

$$\omega_\alpha^i(X_j) = g(S_{Y^\alpha} X_i, X_j), \tag{4.5}$$

$$\omega_\beta^\alpha(X_i) = g(D_{X_i} Y_\alpha, Y_\beta), \tag{4.6}$$

$$\omega_i^\alpha = -\omega_\alpha^i, \tag{4.7}$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Como D é compatível com a métrica do fibrado, temos que

$$g(D_{X_i} Y_\alpha, Y_\beta) + g(D_{X_i} Y_\beta, Y_\alpha) = X_i g(Y_\alpha, Y_\beta) = 0.$$

Dai,

$$g(D_{X_i} Y_\alpha, Y_\beta) = -g(D_{X_i} Y_\beta, Y_\alpha)$$

ou

$$\omega_\beta^\alpha(X_i) = -\omega_\alpha^\beta(X_i).$$

Da mesma forma, como ∇ é compatível com a métrica, temos

$$\omega_i^j = -\omega_j^i$$

e por definição

$$\omega_i^\alpha = -\omega_\alpha^i.$$

Então $\omega_b^a = -\omega_a^b$ e $\omega_a^a = 0$, portanto (4.1) está satisfeita.

De (4.4), temos

$$\omega_j^i(X_l) = g(\nabla_{X_l} X_i, X_j) \tag{4.8}$$

e

$$\nabla_{X_l} X_i = \sum_j \omega_j^i(X_l) X_j. \tag{4.9}$$

Como $\omega_j(X_i) = \delta_{ij}$

$$X_i = \sum_j \omega_j(X_i) X_j. \tag{4.10}$$

Como ∇ é simétrica, obtemos de (4.10) que

$$\nabla_{X_i} \omega_l(X_j) X_l - \nabla_{X_j} \omega_l(X_i) X_l = \omega_l[X_i, X_j] X_l. \tag{4.11}$$

Usando o fato que a conexão é uma derivação e (4.9), temos derivando (4.11)

$$\sum_l ((X_i(\omega_l(X_j)) - X_j(\omega_l(X_i) - \omega_l[X_i, X_j]) X_l + \omega_l(X_j) \nabla_{X_i} X_l - \omega_l(X_i) \nabla_{X_j} X_l) = 0 \tag{4.12}$$

ou

$$\sum_l (X_i \omega_l(X_j) - X_j \omega_l(X_i) - \omega_l[X_i, X_j]) X_l + \sum_l \sum_s (\omega_l(X_j) \omega_s^l(X_i) - \omega_l(X_i) \omega_s^l(X_j)) X_s = 0. \tag{4.13}$$

Que é equivalente à, trocando s por l

$$\sum_l d\omega_l(X_i, X_j) X_l = \sum_l \sum_s \omega_s(X_i) \omega_l^s(X_j)) X_l - \omega_s(X_j) \omega_l^s(X_i), \tag{4.14}$$

ou

$$d\omega_l = \sum_s \omega_s \wedge \omega_l^s. \tag{4.15}$$

Portanto, (4.2) vale.

De (4.5) e (4.6) temos

$$S_{Y_\alpha} X_i = \sum_j \omega_\alpha^i(X_j) X_j \tag{4.16}$$

e

$$D_{X_i} Y_\alpha = \sum_\beta \omega_\beta^\alpha(X_i) Y_\beta. \tag{4.17}$$

Como S é auto - adjunta $g(S_{Y_\alpha} X_i, X_j) = g(S_{Y_\alpha} X_j, X_i)$ e $g(B(X,Y),N) = g(S_N X, Y)$, temos

$$\omega_\alpha^i(X_j) = \omega_\alpha^j(X_i) \tag{4.18}$$

e

$$B(X_i, X_j) = \sum_\alpha \omega_\alpha^j(X_i) Y_\alpha. \tag{4.19}$$

Pela equação de Gauss vale $R(X_i, X_j)X_l = S_{B(X_j,X_l)}X_i - S_{B(X_i,X_l)}X_j$, daí substituindo 4.19 temos

$$R(X_i, X_j)X_l = \sum_\alpha S_{X_i}(\omega^l_\alpha(X_j)Y_\alpha) - S_{X_j}(\omega^l_\alpha(X_i)Y_\alpha). \quad (4.20)$$

Por (4.16)

$$R(X_i, X_j)X_l = \sum_s(\sum_\alpha(\omega^l_\alpha(X_j)\omega^i_\alpha(X_s) - \omega^l_\alpha(X_i)\omega^j_\alpha(X_s)))X_s. \quad (4.21)$$

Que por (4.18) é equivalente à

$$R(X_i, X_j)X_l = \sum_s(\sum_\alpha(\omega^l_\alpha(X_j)\omega^s_\alpha(X_i) - \omega^l_\alpha(X_i)\omega^s_\alpha(X_j)))X_s. \quad (4.22)$$

ou,

$$R(X_i, X_j)X_l = -\sum_s(\sum_\alpha \omega^l_\alpha \wedge \omega^s_\alpha(X_i, X_j))X_s. \quad (4.23)$$

Então,

$$R(X_i, X_j)X_l = \sum_s(\omega^l_\alpha \wedge \omega^\alpha_s(X_i, X_j))X_s. \quad (4.24)$$

Como por definição $R(X_i, X_j)X_l = \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_l - \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_l - \nabla_{[X_i,X_j]}X_l$, usando o fato que a conexão é uma derivação e (4.9), temos

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j)X_l &= \sum_s[(X_i(\omega^l_s(X_j)) - X_j(\omega^l_s(X_i)) - \omega^l_s([X_i, X_j]))X_s \\ &+ \sum_t(\omega^s_t(X_i)\omega^l_s(X_j) - \omega^s_t(X_j)\omega^l_s(X_i))X_t] \\ &= \sum_s[d\omega^l_s(X_i, X_j)X_s + \sum_t(\omega^s_t \wedge \omega^l_s(X_i, X_j))X_t] \\ &= \sum_s(d\omega^l_s(X_i, X_j) + \sum_t(\omega^t_s \wedge \omega^l_t(X_i, X_j)))X_s. \quad (4.25) \end{aligned}$$

Logo

$$R(X_i, X_j)X_l = \sum_s((d\omega^l_s(X_i, X_j)) - \sum_t((\omega^l_t \wedge \omega^t_s(X_i, X_j))X_s. \quad (4.26)$$

Comparando (4.24) e (4.25), obtemos

$$\omega^l_\alpha \wedge \omega^\alpha_s = d\omega^l_s - \omega^l_t \wedge \omega^t_s \quad (4.27)$$

ou,

$$d\omega^l_s = \omega^l_a \wedge \omega^a_s. \quad (4.28)$$

Pela Equação de Ricci, temos

$$\overline{R}(X_i, X_j)Y_\alpha = B(X_i, S_{Y_\alpha}X_j) - B(S_{Y_\alpha}X_i, X_j) \tag{4.29}$$

$$= \sum_\beta (\omega^i_\beta(S_{X_j}Y_\alpha)Y_\beta - \omega^j_\beta(S_{X_i}Y_\alpha)Y_\beta). \tag{4.30}$$

Substituindo (4.16), obtemos

$$\overline{R}(X_i, X_j)Y_\alpha = \sum_\beta (\omega^i_\beta(\sum_t \omega^j_\alpha(X_t)X_t) - \omega^j_\beta(\sum_t \omega^i_\alpha(X_t)X_t))Y_\beta \tag{4.31}$$

$$= \sum_t (\omega^i_\beta(X_t)\omega^j_\alpha(X_t) - \omega^j_\beta(X_t)\omega^i_\alpha(X_t))Y_\beta. \tag{4.32}$$

Por (4.18)

$$\overline{R}(X_i, X_j)Y_\alpha = \sum_\beta \sum_t (\omega^t_\beta(X_i)\omega^t_\alpha(X_j) - \omega^t_\beta(X_t)\omega^t_\alpha(X_i))Y_\beta. \tag{4.33}$$

Substituindo (4.1) temos

$$\overline{R}(X_i, X_j)Y_\alpha = \sum \beta \sum_t (\omega^t_\beta(X_j)\omega^\alpha_t(X_i) - \omega^t_\beta(X_i)\omega^\alpha_t(X_j))Y_\beta \tag{4.34}$$

$$= -\sum_\beta \sum_s \omega^s_\beta \wedge \omega^\alpha_s(X_i, X_j)Y_\beta \tag{4.35}$$

$$= \sum_\beta \sum_s \omega^\alpha_s \wedge \omega^s_\beta(X_i, X_j)Y_\beta. \tag{4.36}$$

Temos que,

$$\overline{R}(X_i, X_j)Y_\alpha = \nabla^\perp_{X_i}\nabla^\perp_{X_j}Y_\alpha - \nabla^\perp_{X_J}\nabla^\perp_{X_i}Y_\alpha - \nabla^\perp_{[X_i,X_j]}Y_\alpha. \tag{4.37}$$

Substituindo (4.17)

$$\overline{R}(X_i, X_j)Y_\alpha = \sum_\beta (\nabla^\perp_{X_i}(\omega^\alpha_\beta(X_j)Y_\beta) - \nabla^\perp_{X_j}(\omega^\alpha_\beta(X_i)Y_\beta - \omega^\alpha_\beta([X_i, X_j])Y_\beta). \tag{4.38}$$

Como a conexão é uma derivação

$$\overline{R}(X_i, X_j)Y_\alpha = \sum_\beta ((X_i\omega^\alpha_\beta(X_j) - X_j\omega^\alpha_\beta(X_i) - \omega^\alpha_\beta([X_i, X_j]))Y_\beta$$

$$+ \omega^\alpha_\beta(X_j)\nabla^\perp_{X_i}Y_\beta - \omega^\alpha_\beta(X_i)\nabla^\perp_{X_j}Y_\beta) \tag{4.39}$$

$$= \sum_\beta (d\omega^\alpha_\beta(X_i, X_j)Y_\beta + \sum_\gamma (\omega^\alpha_\gamma(X_j)\omega^\beta_\gamma(X_i) - \omega^\alpha_\beta(X_i)\omega^\beta_\gamma(X_j))Y_\gamma \tag{4.40}$$

$$= \sum_\beta (d\omega^\alpha_\beta(X_i, X_j)Y_\beta + \sum_\gamma (\omega^\alpha_\beta(X_j)\omega^\gamma_\beta(X_i) - \omega^\alpha_\gamma(X_i)\omega^\gamma_\beta(X_j))Y_\beta) \tag{4.41}$$

$$= \sum_\beta (d\omega^\alpha_\beta(X_i, X_j)Y_\beta - \sum_\gamma \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta(X_i, X_j)Y_\beta). \tag{4.42}$$

Comparando (4.1) e (4.42)

$$\sum_\beta (d\omega_\beta^\alpha(X_i,X_j)Y_\beta - \sum_\gamma \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma(X_i,X_j)Y_\beta) = \sum \beta \sum_s \omega_s^\alpha \wedge \omega_\beta^s(X_i,X_j)Y_\beta, \quad (4.43)$$

$$d\omega_\beta^\alpha = \sum_s \omega_s^\alpha \wedge \omega_\beta^s + \sum_\gamma \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma, \quad (4.44)$$

ou

$$d\omega_\beta^\alpha = \sum_a \omega_a^\alpha \wedge \omega_\beta^a. \quad (4.45)$$

Como S satisfaz a equação de Codazzi-Mainard temos

$$\nabla_{X_i} S_{Y_\alpha} X_j - \nabla_{X_j} S_{Y_\alpha} X_i - S_{[X_i,X_j]} Y_\alpha = S_{\nabla^\perp_{X_i} Y_\alpha} X_j - S_{\nabla^\perp_{X_j} Y_\alpha} X_i.$$

De (4.16) e do fato que $S_{Y_\alpha}[X_i,X_j] = \sum_l \omega_\alpha^l([X_i,X_j])X_l$, temos

$$\begin{aligned}\sum_l (\nabla_{X_i} \omega_\alpha^j(X_l)X_l - \nabla_{X_j} \omega_\alpha^i(X_l)X_l - \sum_l \omega_\alpha^l([X_i,X_j])X_l) &= \sum_\beta (S_{X_i}(\omega_\beta^\alpha(X_j)Y_\beta) \\ &- S_{X_j}(\omega_\beta^\alpha(X_i)Y_\beta)).\end{aligned}$$

Por ∇ ser uma derivação, por (4.16) e por (4.17)

$$\begin{aligned}&\sum_l ((X_i\omega_\alpha^j(X_l) - X_j\omega_\alpha^i(X_l) - \omega_\alpha^l([X_i,X_j]))X_l + \omega_\alpha^j(X_l)\nabla_{X_i}X_l - \omega_\alpha^i(X_l)\nabla_{X_j}X_l) \\ &\qquad = \sum_\beta \sum_l (\omega_\beta^\alpha(X_j)\omega_\beta^i(X_l)X_l - \omega_\beta^\alpha(X_i)\omega_\beta^j(X_l)X_l).\end{aligned}$$

Usando (4.18)

$$\begin{aligned}&\sum_l ((X_i\omega_\alpha^l(X_j) - X_j\omega_\alpha^l(X_i) - \omega_\alpha^l([X_i,X_j]))X_l + \omega_\alpha^l(X_j)\nabla_{X_i}X_l - \omega_\alpha^l(X_i)\nabla_{X_j}X_l) \\ &\qquad = \sum_\beta \sum_l (\omega_\beta^\alpha(X_j)\omega_\beta^l(X_i)X_l - \omega_\beta^\alpha(X_i)\omega_\beta^l(X_j)X_l).\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\sum_l (d\omega_\alpha^l(X_i,X_j) &+ \sum_s (\omega_\alpha^j(X_l)\omega_s^l(X_i) - \omega_\alpha^i(X_l)\omega_s^l(X_j))X_s) && (4.46)\\ &= \sum_\beta \sum_l (\omega_\beta^\alpha(X_j)\omega_l^\beta(X_i) - \omega_\beta^\alpha(X_i)\omega_l^\beta(X_j)) && (4.47)\\ &= -\sum_\beta \sum_l \omega_\beta^\alpha \wedge \omega_l^\beta(X_i,X_j)X_l. && (4.48)\end{aligned}$$

Logo,

$$d\omega_\alpha^l = \sum_a \omega_a^l \wedge \omega_\alpha^a. \tag{4.49}$$

Então, as seguintes equações são válidas

$$d\omega_s^l = \sum_a \omega_a^l \wedge \omega_s^a, \tag{4.50}$$

$$d\omega_\alpha^\beta = \sum_a \omega_a^\beta \wedge \omega_\beta^a, \tag{4.51}$$

$$d\omega_\alpha^l = \sum_a \omega_a^l \wedge \omega_\alpha^a. \tag{4.52}$$

Portanto,

$$d\omega_a^b = \sum_c \omega_c^a \wedge \omega_b^c. \tag{4.53}$$

Como queríamos mostrar.

□

Lema 4.3. *Sejam ω_i e ω_b^a 1-formas diferenciaveis sobre M, satisfazendo* (4.1), (4.2) *e* (4.3). *Então, para cada $q_0 \in M$, existe uma matriz ortogonal $A = (A_b^a)$ de funções definidas sobre uma vizinhança V de q_0 e uma aplicação $f : V \to \mathbb{R}^{n+k}$ tais que*

$$W = dA.^tA \tag{4.54}$$

e

$$df = \omega.A, \tag{4.55}$$

onde W representa a matriz (w_b^a), $w = (w_1, ..., w_n, 0, ..., 0)$ e ^tA é a transposta de A.

Demonstração: Seja U uma vizinhança coordenada em M, tal que $q_0 \in U$ e $y_1, ..., y_n$ coordenadas locais em U com $q_0 = (0, ..., 0)$. Seja z_b^a um sistema de coordenadas usual sobre $\mathbb{R}^{(n+k)^2}$. Vamos identificar o conjunto de matrizes reais $n+k$ por $n+k$ com $\mathbb{R}^{(n+k)^2}$, daí o conjunto das matrizes ortogonais $O(\mathbb{R}^{n+k})$ como um subconjunto de $\mathbb{R}^{(n+k)^2}$. Seja Z a matriz de funções $Z = (z_b^a)$ definida sobre este subconjunto. Considere a matriz de 1-formas em $U \times O(\mathbb{R}^{n+k})$

$$\Lambda = dZ - W.Z. \tag{4.56}$$

Para cada $(q, Z) \in U \times O(\mathbb{R}^{n+k})$ temos

$$\Lambda_{(q,Z)} : T_qU \times T_ZO(\mathbb{R}^{n+k}) \to T_ZO(\mathbb{R}^{n+k}).$$

De fato, se $(v, X) \in T_qU \times T_ZO(\mathbb{R}^{n+k})$, então

$$\begin{aligned} \Lambda_{(q,Z)}(v, X).^tZ + Z.^t\Lambda_{(q,Z)} &= (dZ(X) - W(v).Z)^tZ + Z(d^tZ(X) -^t Z^tW(v)) \\ &= dZ(X)^tZ + Zd^tZ(X) - W(v) -^t W(v) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esta última igualdade segue de (4.1) e do fato que $Z \in O(\mathbb{R}^{n+k})$. A aplicação linear $\Lambda_{(q,Z)}$ é sobrejetiva,pois para cada $X = X^a_b \frac{\partial}{\partial z^a_b} \in T_ZO(\mathbb{R}^{n+k})$, $\Lambda_{(q,Z)}(0, X) = dZ(X) = X$. Então $dim\ ker\Lambda_{(q,Z)} = n$.

Sendo assim, para cada $(q, Z) \in U \times O(\mathbb{R}^{n+k})$, vamos definir uma distribuição n-dimensional em $U \times O(\mathbb{R}^{n+k})$ como segue

$$D(q, Z) = \ker\Lambda_{(q,Z)}.$$

Se (v_1, X_1) e $(v_2, X_2) \in D(q, Z)$, então para cada a, b, $\Lambda^a_b(v_1, X_1) = 0 = \Lambda^a_b(v_2, X_2)$. Como Z é uma matriz de 1-formas $d(dZ) = 0$. Daí por (4.20) $(ver[1]\ p.16)$ temos:

$$\begin{aligned} d\Lambda &= d(dZ) - d(W.Z) \\ &= -dW.Z + W \wedge dZ. \end{aligned}$$

Por (4.3) e (4.56) temos

$$\begin{aligned} d\Lambda &= -(W \wedge W).Z + W \wedge (\Lambda + W.z) \\ &= W \wedge \Lambda. \end{aligned}$$

Então para cada a, b

$$\begin{aligned} \Lambda^a_b[(v_1, X_1), (v_2, X_2)] &= (v_1, X_1)\Lambda^a_b(v_2, X_2) - (v_2, X_2)\Lambda^a_b(v_1, X_1) \\ &- d\Lambda^a_b((v_1, X_1), (v_2, X_2)) \\ &= -d\Lambda^a_b((v_1, X_1), (v_2, X_2)) \\ &= -W^a_c \wedge \Lambda^c_b((v_1, X_1), (v_2, X_2)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo $[(v_1, X_1), (v_2, X_2)] \in D(q, Z)$ e assim a distribuição é involutiva, logo é integrável $(ver[1])$. Então a variedade admite, em cada ponto, uma variedade integral de dimensão n. Dado $(0, Z) \in U \times O(\mathbb{R}^{n+k})$, temos que $D(0, Z) \cap (0 \times T_Z O(\mathbb{R}^{n+k})) = \{0\}$. De fato, se $(0, X) \in D(0, Z) \cap (0 \times T_Z O(\mathbb{R}^{n+k})) = \{0\}$, temos

$$0 = \Lambda(0, X) = dZ(X) = X.$$

Pelo Teorema da função implícita, a variedade integral que passa pelo ponto $(0, Z)$ é localmente o gráfico de uma função $q \mapsto A(q) \in O(\mathbb{R}^{n+k})$ com $A(q_0) = A(0) = Z$. Como $Z = A$ ao longo do gráfico e $\Lambda = 0$ sobre o gráfico, pela equação (4.56)

$$dA = W.A.$$

Daí,

$$W = dA.^tA.$$

Sendo assim, temos uma matriz ortogonal definida sobre uma vizinhança $V_1 \subset U$ de q_0.

Seja $y_1, ..., y_n$ coordenadas locais em U, com $q_0 = (0, ..., 0)$. Seja z_a sistema de coordenadas usual em $\mathbb{R}^{n+k}$, Z a matriz (z_a) e considere a matriz de 1-formas em $V_1 \times \mathbb{R}^{n+k}$

$$\Lambda = dZ - \omega.A. \tag{4.57}$$

Para cada $(p, x) \in V_1 \times \mathbb{R}^{n+k}$, temos que $\Lambda_{(p,x)}$ é sobrejetiva em $\mathbb{R}^{n+k}$, pois para cada $X = X_a z_a \in \mathbb{R}^{n+k}$, $\Lambda_{(p,x)}(0, X) = dZ(X) - \omega(0)A = dZ(X) = X$. Logo $\dim \ker\Lambda_{(p,x)} = n$.

Então, para cada $(p, x) \in V_1 \times \mathbb{R}^{n+k}$, definimos uma distribuição n-dimensional como segue:

$$D(p, x) = ker\Lambda_{(p,x)}.$$

Temos que,

$$\begin{aligned} d\Lambda &= -d\omega.A + \omega \wedge dA \\ &= -\omega \wedge WA + \omega \wedge WA = 0. \end{aligned}$$

A partir de (4.15) e (4.54).

Logo, se $X, Y \in D(p, x), [X, Y] \in D(p, x)$. Então a distribuição é involutiva, portanto é integrável .

Dado $(0,x)$, temos que $D(0,x)\cap(0x\mathbb{R}^{n+k})=\{0\}$. Pelo teorema da função implícita, a variedade integral que passa por $(0,x)$ é localmente o gráfico de uma função $p\mapsto f(p)\in\mathbb{R}^{n+k}$ com $f(q_0)=f(0)=Z$. Como $Z=f$ e $D=0$ ao longo do gráfico , por (4.57) temos

$$df=\omega.A.$$

Então, existe uma aplicação $f:V\rightarrow\mathbb{R}^{n+k}$, onde $V\subset V_1\subset U$ tal que $q_0\in V_1$, e uma matriz ortogonal A de funções definidas em V satisfazendo (4.54) e (4.55). Como queríamos demonstrar.

□

Demonstração(**do Teorema 4.1**) Pelo Lema (4.2) obtemos formas diferenciais ω_i e ω_b^a definidas em uma vizinhança coordenada U de M, satisfazendo as equações (4.1), (4.2), (4.3). Pelo Lema (4.3), dado $q_0\in M$, existem uma vizinhança V de q_0, uma aplicação $f:V\rightarrow\mathbb{R}^{n+k}$ e uma matriz ortogonal A definida em V, tal que

$$W=dA.{}^tA$$

e

$$df=\omega.A.$$

Como A é uma matriz ortogonal, logo não singular e, pelo Lema 3.8, ω_i são linearmente independentes, df é injetiva, portanto f é uma imersão. Seja $X_1,...,X_n$ uma base do espaço tangente em cada ponto de U, como no Lema (4.2), por (4.55) temos

$$g(df(X_i),df(X_j))=g(\omega(X_i)A,\omega(X_j)A)=\sum_a A_a^iA_a^j=\delta^{ij}=g(X_i,X_j).$$

Esta última igualdade segue do fato de A ser ortogonal. Daí, temos que f é uma imersão isométrica.

Agora, vamos identificar V com $f(V)$. Considere um sistema ortonormal $\overline{Y}_{n+1},...,\overline{Y}_{n+1}$ definido por

$$\overline{Y}_\alpha=\sum_a A_a^\alpha\frac{\partial}{\partial x_a},$$

onde $x_1,...,x_{n+k}$ são coordenadas usuais em $\mathbb{R}^{n+k}$. Para cada i, $df(X_i)$ é tangente à $f(V)$ e

$$g(\overline{Y}_\alpha,df(X_i))=g(\sum_a A_a^\alpha\frac{\partial}{\partial x_a},\sum_a A_a^i\frac{\partial}{\partial x_a})=\sum_a A_a^\alpha A_a^i=\delta^{\alpha i}=0.$$

Portanto, $\overline{Y}_\alpha$ é normal à $f(V)$ daí $\{\overline{Y}_\alpha\}$ é uma base do fibrado normal de f.

Se $\pi : E \to M$ é a aplicação projeção e $\{Y_\alpha\}$ é uma estrutura de campos em E, como no Lema (4.2), escolhemos coordenadas locais em $\pi^{-1}(U)$ dadas por $(u,v) = (u_1,...,u_n,y_{n+1},...,y_{n+k})$, onde $(u_i,...,u_n)$ são coordenadas locais em U e $y = y_\alpha Y_\alpha$. Seja ψ uma extensão da imersão f definida como segue:

$$\psi : U \times \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$$

$$(u,v) \mapsto \sum_a f^a(u)\frac{\partial}{\partial x_a} + \sum_\alpha \overline{Y}_\alpha(u),$$

isto é,

$$\psi^a(u,y) = f^a(u) + \sum_\alpha A_a^\alpha. \tag{4.58}$$

ψ é um difeomorfismo sobre $\psi(U \times \mathbb{R}^{n+k}$, pois f é um difeomorfismo sobre $f(V)$ e ψ é uma extensão linear de f. Além disso, $d\psi(Y_\alpha) = \overline{Y}_\alpha$.

A aplicação ψ induz sobre $T(V \times \mathbb{R}^{n+k})$ uma métrica que restrita a V coincide com a métrica inicial. Além disso, a métrica induzida sobre o fibrado também coincide com a métrica dada pois $d\psi(Y_\alpha) = \overline{Y}_\alpha$. Portanto identificamos $V \times \mathbb{R}^{n+k}$ com o fibrado normal da imersão e a métrica induzida sobre o fibrado normal coincide com a métrica sobre E.

Vamos escolher uma estrutura $e_1,...,e_{n+k}$ em uma vizinhança de $\mathbb{R}^{n+k}$, que contém $f(V)$, como segue:

$$e_i = df(X_i),\ e_\alpha = \overline{Y}_\alpha = \sum_a A_a^\alpha \frac{\partial}{\partial x_a}.$$

Vamos denotar a base dual associada por $\{\theta_a\}$ e a forma de conexão correspondente por $\{\theta_b^a\}$, definida pela equação $de_a = \sum_b \theta_b^a e_b$. Estas formas restritas à $f(V)$ são tais que $\theta_\alpha = 0$ e como $e_a = \sum_b A_b^a \frac{\partial}{\partial x_a}$, temos que

$$\theta_b^a = g(de_a, e_b) = g(\sum_c dA_c^a \frac{\partial}{\partial x_c}, \sum_c A_c^b \frac{\partial}{\partial x_c} = \sum_c dA_c^a A_c^b). \tag{4.59}$$

Usando f, as formas θ_a e θ_b^a induzem formas $f^*\theta_a$ e $f^*\theta_b^a$ sobre V. Temos

$$f^*\theta_i(X_j) = \theta_i(df(X_j)) = \delta_{ij} = \omega_i(X_j)$$

e

$$f^*\theta_b^a(X_j) = \theta_b^a(df(X_j)) = \theta_b^a(X_j) = \sum_c dA_c^a(e_j)A_c^b = \omega_b^a(X_j),$$

onde usamos 4.23 e identificamos $A(u)$ com $A(f(u))$.

Como as formas induzidas $f^*\theta^i_\alpha$ e $f^*\theta^\alpha_\beta$ coincidem com ω^i_α e ω^α_β, elas definem a mesma conexão D e segunda forma S no fibrado normal da imersão pelas equações (4.16) e (4.17).

Agora falta provar que a imersão é única.

Seja $\overline{f} : V \to \mathbb{R}^{n+k}$ outra imersão satisfazendo as condições do Teorema e $\{\overline{e}_a\}$ a base correspondente. Se $q \in V$, usando um movimento rígido podemos levar $f(q)$ em $\overline{f}(q)$ e e_a sobre $\overline{e}_a$ em $f(q)$. Pela unicidade das soluções das equações (4.18) e (4.19), $\{\overline{e}_a\}$ coincide com $\{e\}_a$ e f coincide com $\overline{f}$ em uma vizinhança de q. Como V é conexa $f = \overline{f}$ em V. Portanto a imersão é única.

□

Corolário 4.4. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana simplesmente conexa e* E, S, D *e* B *como no teorema anterior. Então existe uma imersão isométrica* $f : M \to \mathbb{R}^{n+k}$*, nas condições do Teorema* (4.1)*.*

Demonstração: Dados $q_0, p \in M$, $p \neq q_0$ e $\alpha : [0,1] \to M$ uma curva simples ligando p à q_0. Seja $\{V_i\}_{i=1}^n$ uma coleção de vizinhanças cobrindo $\alpha[0,1]$ tal que, $V_1 = V$. Podemos estender f à $\cup_{i=1}^n V_i$ e então à $f(p)$.

Como M é simplesmente conexa, $f(p)$ não depende da curva escolhida.

□

Assim, se adicionarmos ao Teorema (4.1) a hipótese de que a variedade é simplesmente conexa, temos uma imersão da variedade em $\mathbb{R}^{n+k}$ que não é apenas local, mas de toda a variedade.

4.2 Variedades Quase Einstein e Hipersuperfícies do Espaço Euclidiano

Seja (M^n, g) uma hipersuperfície de um espaço euclidiano E^{n+1}, g é a métrica induzida por E^{n+1}. Assim, a equação de Gauss de (M^n, g) é dada por

$$R(Z,Y,Z,W) = g(B(X,W), B(Y,Z)) - g(B(Y,W), B(X,Z)), \tag{4.60}$$

onde R é o tensor curvatura e B é o tensor da segunda forma fundamental da imersão $f : M \to E^{n+1}$.

Seja S_η a aplicação associada a B, ou seja,

$$g(S_\eta(X), Y) = g(B(X,Y), \eta), \tag{4.61}$$

onde $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Seja H_η o tensor:

$$H_\eta(X,Y) = g(S_\eta(X), Y) = g(B(X,Y), \eta). \tag{4.62}$$

Definição 4.5. *Uma hipersuperfície (M^n, g) de um espaço euclidiano E^{n+1} é dita quase umbílica se o tensor H_η tem a forma*

$$H_\eta(X,Y) = \alpha g(X,Y) + \beta\omega(X)\omega(Y), \tag{4.63}$$

onde ω é uma 1-forma e o seu campo de vetores associado é unitário e α e β são escalares.

Teorema 4.6. *Uma hipersuperfície (M^n, g) quase umbílica de um espaço euclidiano E^{n+1} é quase Einstein.*

Demonstração: Por (4.61),(4.62) e (4.63), temos

$$\begin{aligned} g(B(X,Y),\eta) &= \alpha g(X,Y)g(\eta,\eta) + \beta\omega(X)\omega(Y)g(\eta,\eta) \\ &= g(\alpha g(X,Y)\eta + \beta\omega(X)\omega(Y)\eta, \eta). \end{aligned}$$

Daí, temos

$$B(X,Y) = \alpha g(X,Y)\eta + \beta\omega(X)\omega(Y)\eta. \tag{4.64}$$

Como a hipersuperfície é quase umbílica, por (4.64) e pela equação de Gauss

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) &= \alpha^2[g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)] \\ &+ \alpha\beta[g(X,W)\omega(Y)\omega(Z) + g(Y,Z)\omega(X)\omega(W)] \\ &- g(Y,W)\omega(X)\omega(Z) - g(X,Z)\omega(Y)\omega(W). \end{aligned} \tag{4.65}$$

Seja $\{X_i\}$ uma base do espaço tangente em cada ponto da variedade, temos

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \sum_i R(X,X_i,Y,X_i) \\ &= \sum_i \alpha^2(g(X,X_i)g(Y,X_i) - g(X,X_i)g(Y,X_i)) \\ &+ \alpha\beta[g(X,X_i)\omega(Y)\omega(X_i) + g(Y,X_i)\omega(X)\omega(X_i)] \\ &- g(X_i,X_i)\omega(X)\omega(X_i) - g(X,X_i)\omega(X_i)\omega(X_i) \\ &= ag(X,Y) + b\omega(X)\omega(Y), \end{aligned}$$

onde $a = \alpha^2(n-1) + \alpha\beta)$ e $b = \alpha\beta(n-2)$. Portanto M é quase Einstein.

□

J. A. Schouten provou em [14] que uma hipersuperfície conformemente flat de um espaço euclidiano, é quase umbílica. Então, usando este resultado e o teorema anterior temos o seguinte resultado:

Corolário 4.7. *Uma hipersuperfície conformemente flat do espaço euclidiano E^n é quase Einstein.*

Definição 4.8. *Uma variedade Riemanniana é dita conformemente flat especial se o tensor H definido por*

$$H(X,Y) = \frac{-1}{n-2}Ric(X,Y) + \frac{r}{2(n-1)(n-2)}g(X,Y) \tag{4.66}$$

pode ser expresso por

$$H(X,Y) = \frac{-\alpha^2}{2}g(X,Y) + \beta X(\alpha)Y(\alpha), \tag{4.67}$$

onde α e β são escalares tais que $\alpha > 0$.

Proposição 4.9. *Uma variedade quase Einstein $S(QE)_n$ conformemente flat, tal que $a(n-2)-b>0$ é uma variedade conformemente flat especial.*

Demonstração: Substituindo a definição (2.5) na definição de H, temos

$$\begin{aligned} H(X,Y) &= \frac{-1}{n-2}(ag(X,Y)+bA(X)A(Y))+\frac{r}{2(n-1)(n-2)}g(X,Y) \\ &= \left(\frac{-a}{n-2}+\frac{r}{2(n-1)(n-2)}\right)g(X,Y)-\frac{b}{n-2}A(X)A(Y). \end{aligned} \tag{4.68}$$

Fazendo

$$\alpha^2=\frac{2a}{n-2}-\frac{r}{(n-1)(n-2)}=\frac{a(n-2)-b}{(n-1)(n-2)}. \tag{4.69}$$

Então aplicando X à ambos os lados obtemos

$$2\alpha(X\alpha)=\frac{-X(r)}{(n-1)(n-2)}=\frac{-U(r)}{(n-1)(n-2)}A(X). \tag{4.70}$$

Daí,

$$A(X)=\frac{-2\alpha}{U(r)}X(\alpha)(n-1)(n-2). \tag{4.71}$$

Substituindo (4.69) e (4.71) em (5.68) temos

$$H(X,Y)=\frac{-\alpha^2}{2}g(X,Y)+\beta X(\alpha)Y(\alpha), \tag{4.72}$$

onde $\beta=\frac{4b(r-2an+2a)(n-1)}{\lambda^2}$. Como $a(n-2)-b>0$, de (4.69) temos que α é não nulo e podemos considerá-lo positivo. Sendo assim o tensor H satisfaz a definição (4.8), concluindo assim a demonstração da proposição.

□

Nosso objetivo agora é relacionar as variedades quase Einstein $S(QE)_n$ com as hipersuperfícies que são imersas isometricamente no espaço euclidiano. Para isso definimos o seguinte tensor na variedade quase Einstein $S(Q)_n$ conformemente flat:

$$h(X,Y)=\frac{\alpha}{2}g(X,Y)-\frac{1}{\alpha}H(X,Y). \tag{4.73}$$

Como $S(QE)_n$ é conformemente flat especial temos que:

$$H(X,Y)=\frac{-\alpha^2}{2}g(X,Y)+\beta[X(\alpha)Y(\alpha)]. \tag{4.74}$$

Daí,

$$h(X,Y) = \frac{\alpha}{2}g(X,Y) + \frac{\alpha}{2}g(X,Y) - \frac{\beta}{\alpha}[X(\alpha)Y(\alpha)] \tag{4.75}$$

$$= \alpha g(X,Y) - \frac{\beta}{\alpha}[X(\alpha)Y(\alpha)]. \tag{4.76}$$

Lema 4.10. *O tensor h é uma forma bilinear simétrica.*

Demonstração: De fato:

$$h(X,Y) = \alpha g(X,Y) - \frac{\beta}{\alpha}X(\alpha)Y(\alpha)$$

$$= \alpha g(Y,X) - \frac{\beta}{\alpha}Y(\alpha)X(\alpha) \tag{4.77}$$

$$= h(Y,X), \tag{4.78}$$

$$h(X+Z,Y) = \alpha g(X+Z,Y) - \frac{\beta}{\alpha}((X+Z)\alpha)(Y\alpha)$$

$$= \alpha g(X,Y) + \alpha g(Z,Y) - \frac{\beta}{\alpha}(X\alpha)(Y\alpha) - \frac{\beta}{\alpha}(Z\alpha)(Y\alpha) \tag{4.79}$$

$$= h(X,Y) + h(Z,Y). \tag{4.80}$$

Da mesma forma $h(X,Y+Z) = h(X,Y) + h(Z,Y)$.

$$h(fX,Y) = \alpha g(fX,Y) - \frac{\beta}{\alpha}(fX(\alpha))Y(\alpha)$$

$$= f\alpha g(X,Y) - \frac{\beta}{\alpha}fX(\alpha)Y(\alpha) \tag{4.81}$$

$$= fh(X,Y). \tag{4.82}$$

Da mesma forma $h(X,fY) = fh(X,Y)$.

Portanto, pelas equações acima, h é bilinear simétrica, como queríamos mostrar.

$\square$

Utilizamos o Teorema (4.1), juntamente com h para demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 4.11. *Toda variedade $S(QE)_n$ conformemente flat, simplesmente conexa ($n > 3$) tal que $a(n-2) - b > 0$, pode ser imersa isometricamente no espaço euclidiano E^{n+1}, como uma hipersuperfície.*

Demonstração: Como $S(QE)_n$ é conformemente flat, por [7], temos:

$$\nabla_Z H(X,Y) - \nabla_X H(Z,Y) = 0. \tag{4.83}$$

Derivando covariantemente (4.74) e (4.73) e aplicando (4.83) temos

$$\nabla_Z h(X,Y) = \frac{1}{2} g(X,Y)Z(\alpha) - \frac{1}{\alpha^2} Z(\alpha)H(X,Y) + \frac{1}{\alpha}(\nabla_Z H)(X,Y).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\nabla_Z h(X,Y) - \nabla_X h(Z,Y) &= \frac{1}{2}[g(X,Y)Z(\alpha) - g(Z,Y)X(\alpha)] \\
&+ \frac{1}{\alpha^2} Z(\alpha)(-\frac{\alpha^2}{2} g(X,Y) + \beta X(\alpha)Y(\alpha)) \\
&- \frac{1}{\alpha^2} X(\alpha) - \frac{\alpha^2}{2}[g(Z,Y) + \beta Z(\alpha)Y(\alpha)] \\
&= \frac{1}{\alpha^2} \beta Z(\alpha)X(\alpha)Y(\alpha) - \frac{1}{\alpha^2} \beta Z(\alpha)X(\alpha)Y(\alpha) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como $S(QE)_n$ é conformemente flat, o tensor de Weyl, W, é nulo. Logo

$$\begin{aligned}
R(X,Y,Z,T) &= \frac{1}{n-2}[Ric(X,Z)g(Y,T) + Ric(Y,T)g(X,T) \\
&- Ric(X,T)g(Y,Z) - Ric(Y,Z)g(X,T)] \\
&- \frac{r}{(n-1)(n-2)}[g(X,Z)g(Y,T) - g(X,T)g(Y,Z)] \\
&= -H(X,Z)g(Y,T) - H(Y,T)g(X,Z) \\
&+ H(X,T)g(Y,Z) + H(Y,Z)g(X,T) \\
&= (\frac{\alpha^2}{2} g(X,Z) - \beta X(\alpha)Z(\alpha))g(Y,T) \\
&+ (\frac{\alpha^2}{2} g(Y,T) - \beta Y(\alpha)T(\alpha))g(X,Z) \\
&+ (-\frac{\alpha^2}{2} g(X,T) + \beta X(\alpha)T(\alpha))g(Y,Z) \\
&+ [-\frac{\alpha^2}{2} g(Y,Z) + \beta(Y\alpha)(Z\alpha)]g(X,T) \\
&= \alpha^2 g(X,Z)g(Y,T) - \alpha^2 g(X,T)g(Y,Z) \\
&- \beta X(\alpha)Z(\alpha)g(Y,T) - \beta Y(\alpha)T(\alpha)g(X,Z) \\
&+ \beta X(\alpha)T(\alpha)g(Y,Z) + \beta Y(\alpha)Z(\alpha)g(X,T).
\end{aligned}$$

Temos que:

$$\begin{aligned} g(h(X,Z),h(Y,T)) &= g(\alpha g(X,Z) \\ &- \frac{\beta}{\alpha}X(\alpha)Z(\alpha), \alpha g(Y,T) - \frac{\beta}{\alpha}Y(\alpha)T(\alpha)) \\ &= \alpha^2 g(X,Z)g(Y,T) - \beta X(\alpha)Z(\alpha)g(Y,T) \\ &- \beta Y(\alpha)T(\alpha)g(X,Z) + \frac{\beta^2}{\alpha^2}X(\alpha)Z(\alpha)Y(\alpha)T(\alpha). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} g(h(X,Z),h(Y,T)) - g(h(X,T),h(Y,Z)) &= \alpha^2 g(X,Z)g(Y,T) - \alpha^2 g(X,T)g(Y,Z) \\ &- \beta(X\alpha)(Z\alpha)g(Y,T) - \beta(Y\alpha)(T\alpha)g(X,Z) \\ &+ \beta(X\alpha)(T\alpha)g(Y,Z) + \beta(Y\alpha)(Z\alpha)g(X,T). \end{aligned}$$

Comparando as equações acima temos que:

$$R(X,Y,Z,T) = g(h(X,Z),h(Y,T)) - g(h(X,T),h(Y,Z)). \tag{4.84}$$

Temos, portanto, que a forma bilinear simétrica h satisfaz as equações de Gauss e Codazzi, para hipersuperfícies do espaço euclidiano, logo satisfaz (1.14) e (1.16). Considerando o 1-plano fibrado associado a h a equação de Ricci (1.15) é trivialmente satisfeita já que o plano fibrado tem codimensão 1 . Então, pelo Teorema (4.1) e pelo Corolário (4.4) temos que $S(QE)_n$, nas condições deste Teorema, pode ser imersa no espaço euclidiano E^{n+1}, como uma hipersuperfície.

□

Obs: No caso do teorema acima h é aplicação bilinear associada ao tensor segunda forma da imersão de $S(QE)_n$ em E^{n+1}, tal que

$$h_\eta(X,Y) = \langle B(X,Y), \eta \rangle.$$

Como $\mathfrak{X}^\perp$ tem dimensão 1, utilizamos h, que é a segunda forma da imersão.

O Teorema (4.11) relaciona as variedades quase Einstein especiais com as hipersuperfícies conformemente flat que são imersas isometricamente no espaço euclidiano. Observamos que o problema de classificar as hipersuperfícies conformemente flat imersas isometricamente no espaço euclidiano é equivalente a classificar as variedades quase Einstein especiais, com algumas hipóteses adicionais.

Conclusão

Relacionamos variedades quase Einstein conformemente flat com variedades de curvatura quase constante e determinamos algumas propriedades especiais.

Determinamos também condições para que uma variedade quase Einstein seja imersa isometricamente no espaço euclidano como hipersuperfície.

Referências Bibliográficas

[1] CARMO M. P., - *Formas Diferenciais e Aplicações*, 8° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, (1983);

[2] CARMO M. P., - *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, (1988);

[3] CHAKI M. C. and GHOSHAL P. K. , - *Some Global Properties of Quasi Einstein Manifolds*, Publ. Math. Debrence (2003), 635-641;

[4] CHAKI M.C. and MAITY R.K. - *On Quasi Einstein Manifolds*, Publ. Math. Debrence (2000), 297-306;

[5] CHEN B.Y. e YANO K., - *Hypersuperfícies of a conformally flat space*, Tensor, N.S.26 (1972), 318-322.

[6] CHEN B.Y. and YANO K., - *Special conformally flat spaces and canal hypersurfaces*, Tohoku Math. J.25(1973), 177-184.

[7] EISENHART P. L. , - *Riemannian Geometry*, Princeton, QUINTA Impressão (1964);

[8] GEBAROWSKI A. , - *Nearly conformally symmetric warped product manifolds*, Bulletin of the Institut of Mathematics Academia Sinica 20:4 (1992), 359-371.

[9] GHOSH G. C. and U. C. DE KALYANI - *On Conformally Flat Special Quasi Einstein Manifolds*, Publ. Math. Debrence (2005), 129-136;

[10] GHOSH G. C. and U. C. DE KALYANI , - *On Quasi Einstein Manifolds*, Periodica Mathematica Hungarica vol.48 (2004), 223-231;

[11] KUHNEL W., - *Differential Geometry*, AMS, vol.16 (2002)

[12] MAX-PLANCK-INSTITUT FUR MATHEMATIK, -*Conformal Geometry*, Aspects of Mathematics, vol.E12;

[13] O'NEILL B., -*Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*, Academic Press, (1983);

[14] SCHOUTEN J.A.,-*Uber die konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Massbestimmung auf eine Mannigfaltigkeiten mit euklidischer Massbestimmung*, Math. Z.11(1921),58-88;

[15] SCHOUTEN J. A., -*Ricci-Calculus*, Springer, Berlim, 1954;

[16] SPIVAK M., - *A Comprehensive Introduction to Differencial Geometry*, vol.1, Publish Or Perish, INC, Texas, (2005);

[17] TENENBLAT K., - *On isometric immersions of riemannian manifolds*, Boletim da Soc. Bras. de Mat., vol. 2 (1971)15-22.

[18] WATANABE Y., - *Integral Inequalities in Compact Orientable Manifolds*, Riemannian or Kahlerian, Kodai Math. Sem. Report 20 (1968), 264-271;

[19] YANO K. , - *Integral formulas in Riemannian Geometry*, Marcel Dekker, New York, 1970.