

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
ESCOLA DE ECONOMIA DE SÃO PAULO

GUSTAVO DA SILVA JESUS

**MERCADO BRASILEIRO: APLICAÇÃO DE ANÁLISE DE COMPONENTES
PRINCIPAIS NO CÁLCULO DE VAR PARA CARTEIRAS DE RENDA-FIXA**

SÃO PAULO
2005

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

GUSTAVO DA SILVA JESUS

**MERCADO BRASILEIRO: APLICAÇÃO DE ANÁLISE DE COMPONENTES
PRINCIPAIS NO CÁLCULO DE VAR PARA CARTEIRAS DE RENDA-FIXA**

Dissertação apresentada à Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getulio Vargas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Economia e Finanças.

Campo de conhecimento:
Finanças aplicadas a Risco

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Matone

SÃO PAULO
2005

Jesus, Gustavo da Silva.

Mercado Brasileiro: Aplicação de Análise de Componentes Principais no cálculo de VAR para carteiras de Renda-Fixa / Gustavo da Silva Jesus. - 2005.

69 f.

Orientador: Ricardo Matone.

Dissertação (MPFE) - Escola de Economia de São Paulo.

1. Administração de risco. 2. Juros. 3. Análise de componentes principais. 4. Ativos financeiros de renda fixa. I. Matone, Ricardo. II. Dissertação (MPFE) - Escola de Economias de São Paulo. III. Título.

CDU 336.781

GUSTAVO DA SILVA JESUS

**MERCADO BRASILEIRO: APLICAÇÃO DE ANÁLISE DE COMPONENTES
PRINCIPAIS NO CÁLCULO DE VAR PARA CARTEIRAS DE RENDA-FIXA**

Dissertação apresentada à Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getulio Vargas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Economia e Finanças.

Campo de conhecimento:
Finanças aplicadas a Risco

Data de aprovação:

___/___/___

Banca Examinadora

Prof. Dr. Ricardo Matone (Orientador)
FGV – EESP

Prof. Dr. Amaury Jr.
FGV – EESP

Prof. Dr. Franklin Gonçalves

Para Muriel e o recém-chegado Gabriel

Resumo

A abordagem do *Value at Risk* (VAR) neste trabalho será feita a partir da análise da curva de juros por componentes principais (*Principal Component Analysis* – PCA). Com essa técnica, os movimentos da curva de juros são decompostos em um pequeno número de fatores básicos independentes um do outro. Entre eles, um fator de deslocamento (*shift*), que faz com que as taxas da curva se movam na mesma direção, todas para cima ou para baixo; de inclinação (*twist*) que rotaciona a curva fazendo com que as taxas curtas se movam em uma direção e as longas em outra; e finalmente movimento de torção, que afeta vencimentos curtos e longos no mesmo sentido e vencimentos intermediários em sentido oposto. A combinação destes fatores produz cenários hipotéticos de curva de juros que podem ser utilizados para estimar lucros e perdas de portfólios. A maior perda entre os cenários gerados é uma maneira intuitiva e rápida de estimar o VAR. Este, tende a ser, conforme verificaremos, uma estimativa conservadora do respectivo percentual de perda utilizado. Existem artigos sobre aplicações de PCA para a curva de juros brasileira, mas desconhecemos algum que utilize PCA para construção de cenários e cálculo de VAR, como é feito no presente trabalho. Nesse trabalho, verificaremos que a primeira componente principal produz na curva um movimento de inclinação conjugado com uma ligeira inclinação, ao contrário dos resultados obtidos em curvas de juros de outros países, que apresentam deslocamentos praticamente paralelos.

Abstract

The Value at Risk (VAR) approach in this work is performed based on the analysis of the yield curve using Principal Component Analysis (PCA). With this methodology, the movements of the yield curve can be decomposed in a small number of underlying factors: a “Shift” factor that causes rates to rise or fall, a “Twist” factor that allows the curve to steepen or flatten, and a third factor that changes the convexity of the yield curve. The movements are not correlated to the others. Combining these factors produces specific yield curve scenarios useful for estimating the market risk of rate-sensitive instruments. The worst (greatest) loss can be considered an intuitive and quick estimate of VAR, according to the desired confidence level. This work will show that the first factor in the Brazilian curve is not a pure parallel shift. Differently from what happens in studies of other countries, the first factor also twists the curve.

SUMÁRIO

Capítulo 1 - Introdução.....	9
1.1 – Introdução	9
1.2 Revisão Bibliográfica.....	13
1.3 Descrição do Trabalho	16
Capítulo 2 - Embasamento Teórico.....	17
2.1- PCA (Principal Component Analysis).....	17
2.3 Var com PCA para Juros.....	28
Capítulo 3 – Motivação: evolução do mercado de juros no Brasil.....	30
3.1 Introdução	30
3.2 Construção da Curva de Reais no Brasil.....	34
Capítulo 4 – Estudo de Casos	39
4.1 Introdução	39
4.2 – Analogia com Regressão Linear.....	43
4.3 Utilizando dois componentes para construir cenários	45
4.4 Utilizando 4 componentes para construir cenários	50
4.5 Características dos Componentes Principais	51
4.6 Comparação com dados históricos	53
Capítulo 5 – VAR tradicional e VAR com PCA	57
Capítulo 6 – Portfolios Contendo Opções	60
Capítulo 7 – Conclusões.....	62
Referências	64

Capítulo 1 - Introdução

1.1 – Introdução

Com a disseminação de produtos financeiros cada vez mais complexos, maior volatilidade dos mercados globais e o crescente uso de derivativos como forma de alavancagem, torna-se cada vez mais necessária a utilização de ferramentas eficazes e práticas para mensuração de risco. Essas ferramentas servem para que os participantes do mercado tenham parâmetros para saber o quanto podem alocar em determinada operação financeira, e para as câmaras de ativos e demais entidades reguladoras garantirem a saúde do sistema financeiro, sem que alguma perda gere um risco sistêmico. Serve também para que os administradores, executivos, auditoria e acionistas saibam quanto determinada empresa está sujeita a perder em um cenário adverso.

A evolução do gerenciamento de risco tornou-se possível graças à inovação tecnológica, originada de avanços em duas frentes: equipamentos físicos e teoria financeira. De um lado, o surgimento de canais de comunicação mais baratos e a melhora do poder de processamento dos computadores resultaram em inovações, como a possibilidade de operar globalmente 24 horas por dia, ou de gerenciar risco em tempo real (*on-line*). Por outro lado, avanços na teoria moderna de finanças permitiram às instituições criar, precificar, e controlar os riscos de novos instrumentos financeiros. Dentre os riscos inerentes às atividades financeiras, existe o risco de mercado, que é oriundo de movimentos nos níveis ou nas volatilidades dos preços de ativos financeiros. Para mensurar esse risco utiliza-se frequentemente a metodologia do (Value at Risk) VAR.

O VAR é a maior (ou pior) perda esperada dentro de determinado período de tempo e intervalo de confiança. O VAR descreve o percentil da distribuição de retornos projetada sobre um horizonte estipulado. Se c for o nível de confiança selecionado, o VAR corresponderá ao $(1-c)$ percentil da distribuição. Por exemplo, com nível de confiança de 95%, se o VAR de um dia for de R\$1 milhão, a probabilidade de se perder mais que R\$1 milhão em um único dia é de 5%.

A maneira mais geral de se calcular o VAR é a partir de sua definição. Para fazê-lo, considere-se valor inicial da carteira W_0 e R sua taxa de retorno. O valor da carteira no final

do horizonte considerado é $W = W_0(I+R)$. Define-se o menor valor da carteira, para determinado nível de confiança c , como $W^* = W_0(I+R^*)$. O VAR absoluto da carteira é dado por:

$$VAR = W_0 - W^* = -W_0R^*$$

Dada a distribuição de probabilidade do valor futuro da carteira, $f(w)$, a determinado nível de confiança c , deseja-se descobrir a pior realização possível, W^* , tal que a probabilidade de se exceder esse valor seja c :

$$c = \int_{W^*}^{\infty} f(w)dw$$

Como, na prática, não se conhece a função f , costuma-se adotar uma das duas metodologias a seguir: (1) Utiliza-se a distribuição de frequências passada dos retornos de determinada carteira, e toma-se o valor em que o nível de perda só é superado em uma fração correspondente a $(1-c)$ dos casos, (conhecido como VAR não paramétrico); ou (2) supõe-se que tal distribuição pertença a algum modelo conhecido, como, por exemplo, a distribuição normal. Quando este for o caso, o cálculo torna-se muito mais simples, pois o valor do VAR pode ser derivado diretamente do desvio-padrão da carteira, utilizando-se um fator multiplicativo que depende no nível de confiança. Essa abordagem é denominada *paramétrica*, pois envolve a estimação de parâmetros como o desvio-padrão, e não simplesmente a leitura de um quantil da distribuição empírica.

No caso específico de posições de renda-fixa, os montantes, os vencimentos e a qualidade de crédito do emitente (prêmio de risco) descrevem a distribuição dos fluxos de caixa ao longo do tempo. Isso gera uma diversidade de fatores de risco que varia de vencimentos *overnight* a vencimentos mais longos para riscos de crédito, todos com alguma correlação entre si. Na prática, tem-se de restringir o número de fatores de risco a um conjunto pequeno. Atualmente, a análise de VAR mais tradicional é a metodologia “*Riskmetrics*”, que envolve o mapeamento dos fluxos de caixa de todos os ativos de renda fixa de uma determinada carteira nos vértices de vencimentos e o conto das volatilidades e correlações entre esses pontos.

Esse procedimento demanda uma grande quantidade de cálculos e uma grande capacidade computacional. Primeiramente pela determinação de qual o conjunto de vértices melhor

representa a carteira. Segundo, porque para títulos que vencem entre dois vértices, é preciso utilizar um método de interpolação para se decompor estas posições nos vértices escolhidos. Terceiro, porque é necessário se calcular o efeito de todas as covariâncias entre os ativos. Há ainda a dificuldade proveniente do alongamento recente das curvas de juros em todos os países, em particular no Brasil, onde há dois anos negociavam-se, com liquidez, vencimentos de no máximo 3 anos, e passou-se a negociar títulos de até 10 anos. Com isso, um modelo confiável de VAR para uma carteira diversificada de renda fixa precisa considerar um número cada vez maior de vértices, demandando uma capacidade computacional cada vez mais elevada.

Além disso, a metodologia tradicional é sujeita a hipóteses restritivas com relação à volatilidade, onde se empregam métodos GARCH para estimar volatilidade. Portanto, não é um método prático nem adequado para as necessidades atuais do mercado, que demanda cálculos ágeis e facilidade de se verificar impacto de incremento nas posições existentes.

Esse trabalho mostrará como projetar cenários e calcular VAR para posições sensíveis a taxas de juros baseado na técnica de análise de componentes principais da curva de juros. O VAR estimado é obtido pela pior perda dos cenários traçados.

O cenário mais comum utilizado para verificar risco de curva de juros consiste em movimentos paralelos de um dado número de pontos-base para todos os vencimentos. Contudo, há uma tendência de alongamento de prazo por parte dos participantes do mercado, e cada vez mais são tomados riscos ao longo da curva de juros que não necessariamente tem o mesmo sentido. Ou seja, uma posição de *Modified Duration* total nula, mas que esteja ativa em taxas pré-fixadas em um ponto curto da curva e passiva em um ponto mais longo não tem o risco de deslocamento paralelo, mas pode apresentar perdas em diversos outros cenários. Por isso, são necessários cenários adicionais como a curva inclinando em um sentido ou em outro (*steepening* ou *flattening*), e outros que podem ser mais relevantes de acordo com a posição. No entanto, esses cenários não podem ser traçados sem levar em conta a probabilidade de cada um ocorrer. Para isso, é necessário um tratamento matemático mais rigoroso, com fundamentos teóricos sólidos.

A análise da curva baseada em fatores executa essa função. O método descreve os movimentos da curva de juros como uma estimativa de vários fatores adjacentes.

Cenários baseados em PCA apresentam várias vantagens se comparado com outras estratégias alternativas de cálculo de VAR (FRYE, 1996 e 1997):

- Primeiro, eles incluem opções na sua análise sem modificações. Em contraste, opções podem provocar resultados enganosos em cálculos de VAR que linearizam o lucro como função de variáveis de mercado;
- Segundo, o método de cenários produz estimativas de risco rápidas, diferente de métodos que exigem simulações extensivas;
- Terceiro, o método fornece um resumo de natureza qualitativa dos riscos de curva a que o portfolio está sujeito. É intuitivo dizer que um portfolio está sujeito aos riscos de deslocamento e inclinação da curva.
- Quarto, o método identifica se uma operação adicional aumenta ou diminui o risco, o que pode ser utilizado para se fazer o *hedge*.
- Finalmente, o método permite a agregação de riscos entre portfolios mantidos em diferentes sistemas de computador. A resposta a um dado cenário de um portfolio combinado é simplesmente a soma das respostas dos portfolios individuais.

1.2 Revisão Bibliográfica

O primeiro trabalho sobre Análise de Componentes Principais (PCA) aplicado à curva de juros é o artigo de Litterman e Scheinkman (1991). Nesse trabalho, de maneira explanatória, os autores identificam 3 componentes capazes de explicar algo em torno de 98% da variabilidade das taxas implícitas a papéis de várias maturidades no mercado americano. A importância da decomposição obtida é sua interpretabilidade. Com efeito, Litterman e Scheinkman identificam as 3 componentes obtidas como sendo responsáveis, respectivamente, e em ordem de importância, por movimentos de nível, de inclinação e de curvatura da curva de juros.

Como subproduto os autores fornecem estratégias de imunização de carteiras contra riscos referentes a movimentos associados a cada uma das componentes identificadas. Em particular, com base em dados reais, mostra-se a ineficácia da estratégia de *duration hedge* isoladamente.

Em outro artigo, os mesmos autores, juntamente com Knez (1994), interpretam o excesso de retorno da curva de juros (as taxas de determinados prazos menos a taxa livre de risco) como a composição de elementos sistemáticos e idiossincráticos (não-sistemáticos). Segundo eles, ao identificar quais são os fatores comuns que caracterizam o retorno no mercado de juros, podem-se desenvolver modelos baseados em variáveis de estado observáveis. Então, eles utilizam dois modelos para explicar o excesso de retorno de instrumentos de renda-fixa públicos e privados (*T-Bills*, *Commercial Paper*, *Certificates of Deposit* e *Eurodollar Certificates of Deposit*). Um modelo tem três componentes principais e outro, quatro. É feita a decomposição da variância, explicada não apenas por instrumento, mas também por prazo de vencimento. A interpretação dos dois primeiros componentes segue sendo a mesma dos outros trabalhos: deslocamento e inclinação. O terceiro é chamado de fator *Treasury* por representar movimentos na curva caracterizados por títulos privados se separando uniformemente do mercado de *Treasury*. Esse fator representa, portanto, o risco de crédito. Para detalhar melhor este risco, é utilizado um quarto fator, para distinguir movimentos relativos entre a curva de *commercial paper* e outros instrumentos privados. Como estes fatores não são observáveis, os autores utilizam proxies através de portfólios simulados.

Os artigos de Jon Frye (1996 e 1997) sobre PCA formam a base deste trabalho. Neles, o autor utiliza a técnica de PCA para construir cenários na curva de juros, e a partir destes, medir

risco de portfólios pelo cálculo do VAR. No fim, são feitas comparações com o VAR tradicional e conclui-se que o método de cenários é computacionalmente muito mais simples e rápido, além de apresentar resultados equivalentes (frequentemente um pouco mais conservadores) para medir o risco de portfólios de renda-fixa. Os passos seguidos no trabalho de Jon Frye foram aplicados, no presente trabalho, ao mercado de taxas de juros em Reais.

Sawant (2001) segue a mesma linha do Artigo de Jon Frye (1996 e 1997), ou seja, o foco é a aplicação da metodologia de PCA para cálculo do VAR de posições de ativos de renda fixa, que no caso são títulos do governo da Índia. Ele faz uma análise comparativa, citando, primeiramente, as dificuldades do cálculo tradicional, por ser trabalhoso mapear os vencimentos, tratar suas volatilidades e correlações, e pelas hipóteses restritivas que têm de ser tomadas. Entre elas, por exemplo, a estimativa de volatilidade pelo método de Garch (1,1) e a particular dificuldade de se aplicar esses métodos em um mercado em desenvolvimento como é o caso indiano. A diferença em relação a outros trabalhos foi fazer uma alteração para tornar o primeiro componente principal, que é aproximadamente um movimento paralelo, em um movimento estritamente paralelo. O procedimento proposto, portanto, consiste em inicialmente escolher o primeiro fator como a média das mudanças na taxa de juros ao longo da curva para cada intervalo de tempo dos dados. Então, os autores tomam os desvios das mudanças das taxas para cada vencimento em relação à média e constroem uma nova série de dados. Os primeiros dois Componentes Principais da série residual são o segundo e o terceiro fatores. A desvantagem desse método é que resulta em alguma correlação entre os três fatores, removendo uma importante vantagem da PCA, ou seja, a ortogonalidade dos fatores. Sem isso, o trabalho computacional fica muito mais complexo.

Rebonato (1998) fez uma abordagem detalhada do método, com toda a dedução matemática, inclusive com uma metodologia baseada no uso de somatórios, ao contrário do presente trabalho, que utiliza basicamente cálculos matriciais. Nesse trabalho, o autor aplica a técnica para a curva de juros do Reino Unido entre 1989 e 1992, chegando a resultados muito semelhantes aos obtidos no mercado americano, apesar de utilizar como base as taxas de juros a termo, ao contrário dos outros trabalhos que utilizam taxas de juros à vista. Além disso, ele se aprofunda mais na discussão sobre os efeitos de se utilizar um número menor de fatores para explicar as variações da curva. Para isso, ele faz uma analogia entre os Componentes Principais com séries de Fourier, sendo os autovetores representados por senóides com frequências crescentes. Fazendo um modelo analítico de correlação entre as taxas a termo -

exponencial decrescente - ao invés de se utilizar dados estocásticos, é possível se observar o quanto se perde na aproximação por um pequeno número de fatores. Nesse caso, se conhece *a priori* qual o formato da matriz de correlação: exponencial decrescente. Percebe-se que a utilização de poucos fatores faz com que a curva de correlações tenha um formato senoidal (em linha com a analogia com séries de Fourier), que tende a ser mais côncavo quanto menor o número de fatores.

Garbade (1996) faz uma análise da aplicação de PCA à curva de *Treasuries* americanas, e novamente chega a resultados muito parecidos com os outros trabalhos analisados: os três primeiros componentes principais tendo interpretação de deslocamento paralelo, inclinação e curvatura, e com os três primeiros fatores explicando a maior parte da variância total (99%). Uma abordagem interessante feita por ele foi aproximar cada um dos componentes por funções quadráticas. Tal aproximação pode ser feita com menos de um ponto-base de diferença, com a vantagem de se poder interpretar os movimentos da curva como: (i) todas as taxas se movendo na mesma direção, (ii) as taxas se movem na proporção do tempo remanescente para o vencimento, (iii) as taxas mudando proporcionalmente ao quadrado do tempo até o vencimento.

Existem trabalhos sobre aplicações de PCA para a curva de juros brasileira, mas desconhecemos algum que utilize PCA para construção de cenários e cálculo de VAR, como é o caso desse trabalho.

Dentre os trabalhos brasileiros, Silveira e Bessada (2003) fazem a aplicação de PCA à curva de juros local. Nesse artigo, os autores modelam as variações diárias da curva de juros pelo método de PCA e concluem que, devido à presença de forte inércia na evolução da curva, fica comprometida a hipótese de independência das observações, que é fundamental para desenvolvimentos estatísticos formais. Para se esquivar desse problema, eles avaliam duas alternativas: a primeira é a de "*curvas de diferenças*", onde os dados analisados são as variações diárias das taxas de juros de determinado número de vencimentos; a segunda é a "*curva de spreads*" que considera a mesma metodologia das curvas de diferenças, mas as taxas analisadas são as diferenças das observadas na curva de juros e a taxa *overnight* daquele dia (o CDI), conforme sugerido por Litterman e Scheinkman (1991). A conclusão dos autores é que, para a curva brasileira, a melhor escolha é a "*curva de diferenças*" (ou seja, sem subtrair-se o CDI), pois o resultado aparentemente não apresentou o problema de inércia

observado no outro método. Essa foi a metodologia utilizada no presente trabalho.

Ainda na mercado brasileiro, o estudo de Carollo (n.d.) efetuou os cálculos de PCA para a curva local e forneceu dados importantes para comparação de resultados obtidos nesse trabalho com relação à magnitude dos componentes principais e de suas volatilidades. É importante observar que nesse caso, assim como o trabalho de Silveira e Bessada (2003) descrito acima, a primeira componente principal gera um deslocamento de nível em que as curvas mais longas se movem mais que as mais curtas. Este resultado é confirmado pelo presente estudo, conforme veremos posteriormente.

1.3 Descrição do Trabalho

No próximo capítulo, descreveremos o método de componentes principais e também a base matemática que o sustenta. Nessa sessão são explicadas as principais características dos componentes principais (ortogonalidade, mínimos quadrados dos erros, manutenção da variância original, etc.) e seu embasamento teórico. Também são descritas as vantagens de se utilizar essa metodologia para a curva de juros, e em particular, para o cálculo do VAR.

No capítulo 3, é feita uma descrição do mercado de juros no Brasil, da construção da curva em reais e dos principais fatores que afetam os setores da curva. No quarto capítulo são feitas as análises empíricas. Primeiro descreve-se o método, depois se mostra por que é válida a analogia entre PCA e regressão linear. Depois, a partir dos componentes principais são construídos cenários para cálculo de VAR, com os dois e os 4 primeiros componentes. Posteriormente são analisadas as características desses componentes obtidos e percebe-se grande semelhança com os dados locais obtidos por outros autores e também com mercados desenvolvidos. Então, é feito o *back testing* com os dados históricos e analisadas as principais fontes das diferenças entre os cenários calculados e os quantis observados na base histórica.

No capítulo 5 é feita uma comparação do VAR tradicional e do obtido pela análise de componentes principais aplicados a 1000 portfolios gerados aleatoriamente. No capítulo 6 é feita uma ressalva sobre aplicação da técnica descrita em portfolios com opções, onde há a predominância de posições compradas em opções, e pode haver perdas significantes em pontos não previstos pelos cenários. Finalmente, no capítulo 7, conclui-se que a técnica é bastante eficiente para o mercado local e as particularidades com relação a outros mercados.

Capítulo 2 - Embasamento Teórico

2.1- PCA (Principal Component Analysis)

A motivação do método a ser descrito a seguir é entender como as taxas de diferentes prazos da curva de juros flutua com o tempo. Essa questão é o centro do mercado de títulos de renda fixa, e sua importância pode ser apreciada considerando-se brevemente como os participantes do mercado descrevem as mudanças nas taxas de juros.

Muitos analistas entendem que é muito simplista caracterizar o mercado de títulos pré-fixados como uma entidade única, com as taxas de todos os vencimentos movendo paralelamente. Examinando-se, por exemplo, a **Figura 1**, percebemos a dificuldade de se caracterizar as mudanças na curva de juros brasileira simplesmente por “as taxas subiram de Set/04 a Set/05”.

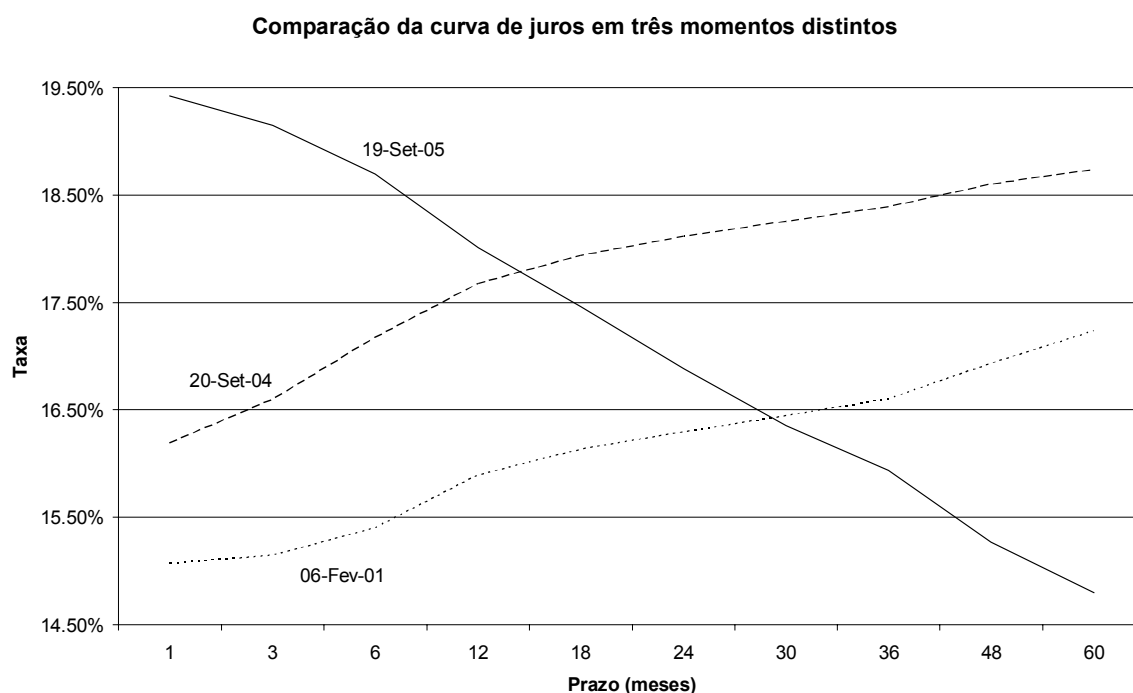


Figura 1: Curva de juros em Reais mostra grande movimento de flattening, em que as taxas de juros longas diminuem ao passo em que as mais curtas aumentam. Fonte: JP Morgan

Quando as circunstâncias exigem mais precisão para caracterizar o mercado de juros do que simplesmente analisá-lo como uma entidade única, os analistas algumas vezes escolhem tratar de “setores” individuais da curva, como parte curta, intermediária ou longa da curva. Por exemplo, pode-se dizer que de Fev/01 a Set/04 as taxas curtas aumentaram cerca de 100

pontos base ao passo que a parte intermediária e longa aumentaram cerca de 150 pontos base. Uma maneira alternativa de analisar a curva é através de mudanças de nível e inclinação. Através desta, diríamos que a curva, de Set/04 para Set/05 teve um movimento dramático de *flattening*. Não é imediato se constatar se o movimento de deslocamento foi positivo ou negativo (observando-se os números, nota-se que as taxas tiveram um pequeno deslocamento para baixo na média).

O problema de se caracterizar as mudanças nas taxas de juros pode ser resolvido ao se analisar mudanças nos instrumentos de renda-fixa sem pagamentos intermediários de juros (*zero-coupon*) em diferentes vencimentos. A Tabela 1, abaixo, mostra o desvio padrão e a correlação das variações diárias das taxas de juros entre Fev/01 e Set/05.

	1M	3M	6M	1Y	1.5Y	2Y	2.5Y	3Y	4Y	5Y
1M	1.000	0.891	0.766	0.624	0.569	0.531	0.504	0.484	0.453	0.438
3M	0.891	1.000	0.936	0.808	0.746	0.705	0.675	0.650	0.610	0.590
6M	0.766	0.936	1.000	0.931	0.876	0.837	0.805	0.779	0.733	0.708
1Y	0.624	0.808	0.931	1.000	0.978	0.949	0.919	0.896	0.850	0.820
1.5Y	0.569	0.746	0.876	0.978	1.000	0.988	0.966	0.944	0.902	0.872
2Y	0.531	0.705	0.837	0.949	0.988	1.000	0.990	0.974	0.936	0.909
2.5Y	0.504	0.675	0.805	0.919	0.966	0.990	1.000	0.992	0.961	0.935
3Y	0.484	0.650	0.779	0.896	0.944	0.974	0.992	1.000	0.984	0.962
4Y	0.453	0.610	0.733	0.850	0.902	0.936	0.961	0.984	1.000	0.989
5Y	0.438	0.590	0.708	0.820	0.872	0.909	0.935	0.962	0.989	1.000
Desvio Padrão	0.29%	0.35%	0.39%	0.43%	0.48%	0.50%	0.53%	0.55%	0.59%	0.62%

Tabela 1: Matriz de correlações e desvio padrão das variações diárias da curva de juros de Fev/01 a Set/05

Vale a pena destacar dois aspectos revelados pela tabela 1: Primeiro, as variações das taxas de juros de vencimentos diferentes são imperfeitamente correlacionadas. Segundo, as correlações são maiores para vencimentos mais próximos. Por exemplo, a correlação entre a taxa de 1 ano e a de 1.5 anos (0.978) é muito maior que a correlação entre as taxas entre 1 ano e 4 anos (0.85). Geralmente, quanto maior a distância entre os vencimentos, menor a correlação entre eles, como na tabela acima. Esse resultado é bastante razoável e intuitivo.

As correlações da tabela acima são relativamente grandes e sugerem que títulos de vencimentos diferentes estão sujeitos a influências semelhantes. Isto é, as correlações são geralmente grandes, mas imperfeitas. Em mercados mais maduros, como no dos EUA, percebe-se valores muito maiores. Por exemplo, Garbade (1996), fez um estudo semelhante

ente taxas de 1 ano a 30 anos e todas as correlações são superiores a 0.9. Essa diferença do mercado local é uma das razões para uma importante diferença na primeira componente principal da curva brasileira quando comparada com a americana, conforme será discutido posteriormente nesse trabalho.

A Análise de Componentes Principais é uma técnica indicada especialmente para casos como o da curva de juros, em que a matriz de dados é grande e seus componentes são altamente correlacionados.

Fatorando a curva em Componentes Independentes

Sendo C a matriz de covariância de n variáveis aleatórias (t_1, t_2, \dots, t_n) conforme abaixo:

$$C = \begin{bmatrix} Var(t_1) & Cov(t_1, t_2) & \cdots & Cov(t_1, t_n) \\ Cov(t_1, t_2) & Var(t_2) & \cdots & Cov(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Cov(t_1, t_n) & Cov(t_2, t_n) & \cdots & Var(t_n) \end{bmatrix}$$

Onde $Var(x)$ é a Variância de x e $Cov(x,y)$ é a Covariância entre x e y .

Utilizando-se uma outra notação:

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

Para se fazer um modelo estatístico da curva de juros, considerar as taxas de prazos distintos como variáveis independentes não é razoável. Se quiséssemos utilizar um Modelo Estatístico Linear de Regressão, seria necessário que a matriz de covariância fosse escalar, ou seja, múltipla da matriz identidade, com todas as correlações e covariâncias iguais a zero.

Há duas propriedades estatísticas interessantes que ocorrem quando a matriz de covariância é escalar:

- a) cada erro, considerado de maneira isolada, possui uma distribuição idêntica à dos demais, com média zero e variância σ^2 ;
- b) os erros não são correlacionados (a covariância entre dois erros distintos é zero), o que, supondo uma distribuição normal multivariada, equivale a dizer que são estatisticamente diferentes.

Se a primeira condição não se verificar, dizemos que a equação a ser estimada, considerada em conjunto com os dados disponíveis, sofre do problema de heterocedasticidade. Se a segunda condição não for válida, dizemos que o modelo apresenta autocorrelação. Na prática, determinar se um modelo apresenta ou não um desses problemas (ou ambos) não é tarefa simples. Geralmente, utilizam-se estatísticas definidas para certos testes de hipótese a fim de chegar a uma conclusão. O mais comum deles foi desenvolvido pelos estatísticos J. Durbin e G. S. Watson e visa verificar se os erros possuem autocorrelação de primeira ordem.

Formalmente, podemos representar a ocorrência de um desses problemas por meio de uma hipótese para a distribuição conjunta dos erros:

$$\varepsilon \sim (0, \psi)$$

O termo acima pode ser lido como “o vetor de variáveis aleatórias ε possui distribuição conjunta de probabilidade com vetor-média 0 e matriz de covariância ψ ”.

A matriz ψ é simétrica e positivamente definida – ou seja, para qualquer vetor $x \neq 0$, temos que $x' \psi x > 0$. Onde x' é o vetor transposto de x .

Uma situação caracterizada pela presença de heterocedasticidade pode ser representada por essa hipótese geral. Neste caso, a matriz ψ corresponderia a:

$$\psi = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Ou seja, a variância dos erros não é constante.

No caso de presença de autocorrelação em um modelo, a matriz ψ será simétrica ($\psi' = \psi$), positivamente definida e deve ter elementos fora da diagonal diferentes de zero. Isso porque os elementos da matriz ψ que não estão em sua diagonal principal correspondem às covariâncias entre os vetores, ou seja, a covariância entre os vetores de erro de cada variável. Se esses elementos forem não-nulos, caracteriza-se a situação de autocorrelação.

Em ambas as situações, a estratégia utilizada para estimar o modelo é transformar ψ em matriz identidade (I). No caso em questão, como a tabela 1 sugere, temos o problema de autocorrelação. Na autocorrelação, a transformação resulta de uma matriz ortogonal.

Matriz ortogonal é aquela matriz quadrada (número de linhas igual ao número de colunas) cujas colunas são vetores ortonormais. Ou seja, sendo $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ as colunas dessa matriz:

$$v_i'v_j = \begin{cases} 0, & \text{quando } i \neq j \quad (\text{ortogonalidade}) \\ 1, & \text{quando } i = j \quad (\text{normalização}) \end{cases}$$

Sendo i e j , qualquer natural entre 0 e n .

Portanto, se Q é uma matriz ortogonal, temos $Q'Q = I$, ou seja, a transposta é a inversa na multiplicação pela esquerda. Como a inversa de uma matriz é única, temos que $Q' = Q^{-1}$, onde Q^{-1} é a matriz inversa de Q . Consequentemente, $QQ' = I$.

O objetivo desse procedimento é fazer com que os erros derivados da transformação tenham matriz de covariância I . O estimador obtido com esse método é denominado Estimador *Generalizado* de Mínimos Quadrados.

No caso da curva de juros, queremos aplicar uma transformação linear nas variáveis originais, de maneira a derivar o estimador generalizado a partir de uma série histórica com autocorrelação. Nosso objetivo básico é identificar uma matriz que realize a transformação de ψ (ver acima) em I e, posteriormente aplicar essa transformação à equação de juros e obter uma variável estocástica sem autocorrelação.

Dado que a matriz ψ é simétrica, como já foi dito, existe uma propriedade para autovalores e

autovetores¹ que nos garante que podemos encontrar uma matriz S ortogonal que a diagonaliza, isto é:

$$S' \psi S = A$$

A prova da propriedade acima está no Anexo II

A matriz A é diagonal (apenas os elementos da diagonal principal são diferentes de zero) e contém os autovalores de ψ ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$)

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Essa transformação torna a matriz de covariância em uma matriz diagonal, resolvendo o problema da autocorrelação. Entretanto ainda existe a heterocedasticidade, ou seja, a matriz de covariância da variável transformada seria $\sigma_n^2 I$ e não I , como se deseja. Para se chegar nesse objetivo, define-se uma outra matriz diagonal, definida por $A^{-1/2}$, com cada elemento na diagonal igual ao inverso da raiz quadrada do autovalor correspondente, ou seja:

$$A^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Para essa matriz, temos:

$$A^{-1/2} A A^{-1/2} = I$$

Fazendo a substituição, temos:

¹ Para definição de autovetores e autovalores ver Anexo I

$$A^{-1/2} S' \psi S A^{-1/2} = A^{-1/2} A A^{-1/2} = I$$

Definindo $P = A^{-1/2} S'$, a transformação acima pode ser representada por:

$$P \psi P' = I$$

Nesse passo, foi utilizada a propriedade das matrizes transpostas, na qual $(AB)' = B'A'$, e que a transposta de uma matriz diagonal, como $A^{-1/2}$ é a própria matriz.

Cumpramos ressaltar que a matriz P não é ortogonal, pois suas colunas não são normalizadas (cada coluna de S foi multiplicada por um escalar para obter a linha correspondente de P). Portanto, como P não é ortogonal, P' não é a inversa de P . Na realidade, essa inversa é dada por:

$$P^{-1} = (A^{-1/2} S')^{-1} = S A^{1/2}$$

Lembrando que $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Podemos ainda obter uma expressão para ψ , isto é:

$$\psi = P^{-1} (P')^{-1} = (P'P)^{-1} \Rightarrow P'P = \psi^{-1}$$

Finalmente, usamos a matriz P para transformar o modelo com autocorrelação. Para isso, pré-multiplicamos a equação genérica de um determinado modelo de regressão linear com autocorrelação $y = \beta x + \varepsilon$ por P :

$$Py = P\beta x + P\varepsilon$$

A distribuição de probabilidade do vetor de erros nesse modelo transformado, $\varepsilon^* = P\varepsilon$, possui vetor-média e matriz de variâncias dados por:

$$E(\varepsilon^*) = E(P\varepsilon) = PE(\varepsilon) = 0$$

$$E(\varepsilon^* \varepsilon^{*'}) = E(P\varepsilon \varepsilon' P') = PE(\varepsilon \varepsilon') P' = P \psi P' = I$$

Ou seja, pela definição de uma matriz P adequada, transformamos um modelo cujos erros têm

matriz de covariância ψ (onde ψ é uma matriz não-diagonal) em um modelo cujos erros possuem esperança matemática constante, igual a I e covariância zero entre eles, ou seja:

$$E(\varepsilon_i^*) = (\varepsilon_j^*) = 1; \quad E(\varepsilon_i^* \varepsilon_j^*) = 0; \quad i \neq j$$

No específico do nosso problema, ΔR é o vetor coluna n -dimensional das mudanças diárias nas taxas de juros de n título pré-fixados. Por hipótese, ΔR tem um valor esperado igual a zero e matriz de covariância ψ . Portanto, o termo β descrito a cima é zero.

Seguindo a mesma metodologia, calcula-se a matriz de covariância de ΔR , ψ , sua matriz de autovetores, S , (que são ortogonais por ψ ser simétrica) e a matriz diagonal com seus autovalores, A . Então, a matriz P será como definida acima e ao multiplicá-la por ΔR teremos:

$$P.\Delta R = A^{-1/2}.S'.\Delta R = P.\varepsilon = e$$

Sendo S e A , respectivamente, as matrizes de autovetores e autovalores de ψ .

Como vimos, e tem média zero e matriz de covariância dada por:

$$E(e.e') = E(A^{-1/2}.S'.\Delta R.\Delta R'.S.A^{-1/2}) = E(A^{-1/2}.S'.\psi.S.A^{-1/2}) = E(A^{-1/2}.A.A^{-1/2}) = I$$

Portanto, e é um vetor de variáveis aleatórias linearmente independentes, cada uma com média zero e variância unitária. Como $\Delta R = S.A^{1/2}.e$, temos que o vetor ΔR pode ser escrito como uma combinação linear de variáveis aleatórias estatisticamente independentes, com média zero e variância igual a 1:

$$\Delta R \text{ pode ser escrito como } \Delta R = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + \dots ; e$$

$$\sigma^2(\Delta R) = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 + \dots$$

Onde $\sigma^2(\Delta R)$ é a variância de ΔR .

Ou seja, para um determinado título, $(a_j)^2$ representa a contribuição funcional do j -ésimo fator

à volatilidade total na taxa do título. Nos termos da demonstração acima, $[S.A^{1/2}]_{ij}$ é o j-ésimo componente do i-ésimo título.

Na literatura sobre aplicação de componentes principais, cada autovetor S_i , ou seja, cada coluna de S , é um componente principal e seus elementos são chamados de *loadings* e os autovalores da matriz A são a **variância** dos componentes principais. No caso da curva de juros, cada vetor de *loadings* é uma componente principal, e como veremos adiante, representa os movimentos básicos da curva de juros associado aos desvios padrões que serão utilizados para a obtenção de cenários. Toma-se, por exemplo, $e = 2.33$ para se obter uma variação de um determinado *loading* igual a 2.33 desvios padrões, que em uma parametrização por curva normal, representa uma probabilidade acumulada de 99%.

Sem prejuízo nenhum para as passagens acima, pode-se ordenar os autovalores (variâncias) por magnitude, do maior para o menor, o que simplesmente corresponde a permutar as colunas de A e de S , de maneira que a variância total, $\sigma^2(\Delta R)$, fica preservada. Então, pode-se dizer que o primeiro componente principal contribui para a maior fração da variância total, o segundo componente explica a maior parte da diferença residual, e assim por diante até os n componentes explicarem totalmente a variância total.

Em geral, quanto maior a correlação entre as variáveis originais, maior será a contribuição do primeiro componente principal para explicar a variância total.

A Figura 2 abaixo mostra o grau de correlação entre a taxa de 1 mês e as taxas subsequentes, de acordo com os dados da Tabela 1:

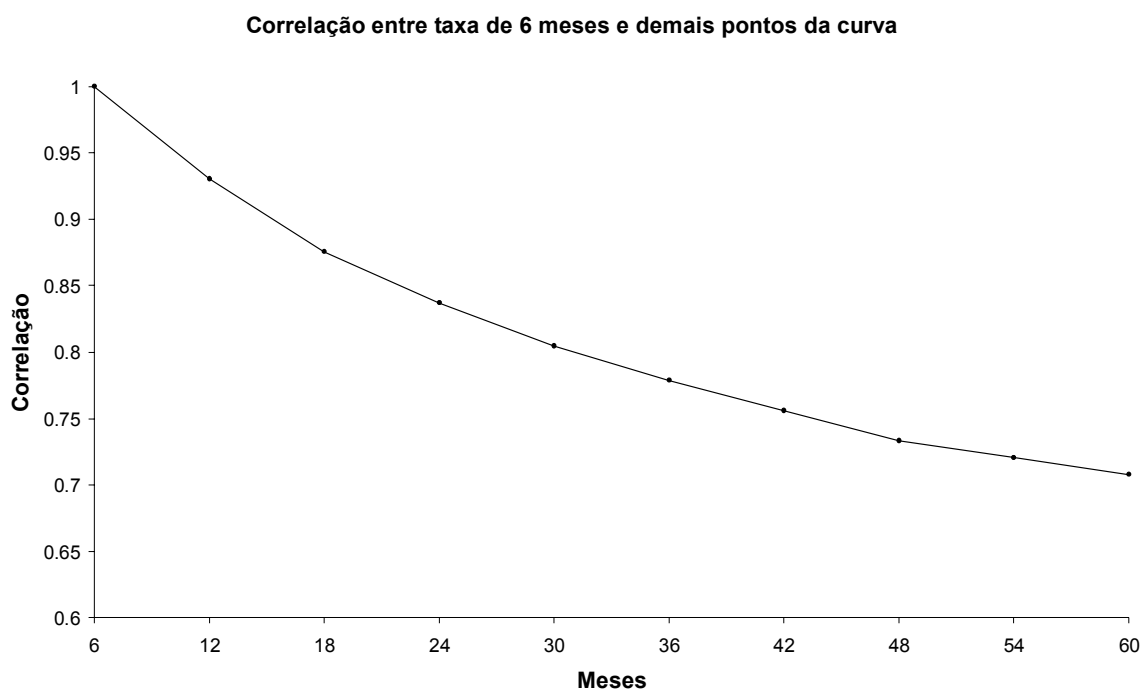


Figura 2: Cada ponto representa a correlação entre taxa do mês correspondente e a taxa de 6 meses.

Como fica aparente, além do fato das correlações serem decrescentes, como já foi comentado, a velocidade em que a correlação cai não é constante, sendo que a maior taxa de queda se verifica entre os dois primeiros pontos do gráfico (correlação saindo de 1 para 0.93). Isso se verifica para todos outros prazos e não apenas para as taxas de 6 meses. Portanto, a maior queda proporcional entre as correlações, ocorre entre taxas adjacentes.

Para o cálculo de VAR, basta tomar a pior perda do portfolio frente a diferentes tipos de cenários, que por sua vez, dependem do nível de confiança e dos movimentos relativos dos componentes principais. Por exemplo, com um nível de confiança de 99%, utilizaremos, 2.33 desvios padrões, multiplicados por cada *loading*. Isso porque, como já foi mencionado, em uma curva normal, a função de probabilidade acumulada é de 99% para 2.33 desvios padrões. Então é necessário fazer a combinação de vários sentidos de movimento diferentes para traçar os cenários (primeira componente principal para cima, segunda para baixo, etc.), conforme veremos a seguir.

2.2 PCA para Juros

Diversas técnicas de cálculo de risco dependem da utilização de cenários, utilizando-se a diferença entre o valor do portfolio nas condições atuais de mercado contra seu valor ante cenários hipotéticos. Os tipos de cenários incluem dados históricos recentes, mudanças arbitrárias do nível das taxas de juros (como por exemplo, todas as taxas subindo um determinado montante) e simulações de Monte Carlo.

Simulações de Monte Carlo usam um conjunto de números aleatórios e uma matriz de correlação para derivar cenários para as taxas de juros, preços de mercado e volatilidades que afetam o portfolio. O cálculo dos resultados do portfolio sob esses cenários gera uma distribuição de lucros e perdas. Um percentil alto da distribuição de perdas serve para cálculo do risco do portfolio.

Esse método é atraente em princípio, mas tem algumas desvantagens na prática. Primeiro, quanto maior o percentil a ser estimado, maior será o número de simulações de Monte Carlo que devem ser rodadas para se ter confiança no resultado. Isso é especialmente problemático se o portfolio contém um grande número de transações ou contém transações que demandam grande tempo computacional. Segundo, a resposta final é um número aleatório que depende de números aleatórios que regem a simulação. Essa ambiguidade pode ser um problema para *traders* e gerentes. Terceiro, resultados por Monte Carlo podem ser difíceis de interpretar em situações em que diferentes cenários aleatórios geram resultados de perdas próximos.

No caso da curva de juros, o alto grau de correlação entre as variáveis originais, conforme pode ser verificado na Figura 2 acima, indica que a transformação de variáveis em termos de componentes principais é bem eficiente em explicar os co-movimentos de diferentes partes da curva de juros. Isso porque esta técnica tende a encontrar uma base cujos eixos sejam os que melhor expliquem os movimentos comuns da curva, por buscar o mínimo dos quadrados dos erros. Além disso, percebe-se que a descrição da dinâmica da curva de juros com base na “força-bruta”, ou seja, analisando-se todas as variáveis e suas correlações, pode ser não apenas muito trabalhosa, como um desperdício, se considerarmos seus resultados. Isso tem motivado muitos pesquisadores a aplicar a análise de componentes principais descrita acima para modelar a dinâmica da curva de juros em diversas moedas.

2.3 Var com PCA para Juros

Dentro deste quadro, a utilização de cenários para controle de risco nos parece bastante interessante. Através dela, especifica-se um número limitado de cenários não-aleatórios, cada um envolvendo mudanças consideráveis em uma ou mais variáveis de mercado. Ao invés de produzir uma distribuição completa de ganhos e perdas, cada um dos resultados de perdas serve de candidato ao valor do risco. A maior perda do conjunto de cenários estima (de forma conservadora) o risco do portfólio.

Os cenários mais comuns consistem em um deslocamento paralelo em todos os vencimentos da curva de juros. Algumas áreas do mercado financeiro utilizam apenas esse cenário para controlar o risco. No entanto, um portfólio geralmente depende da inclinação da curva, bem como de seu nível. Isso pode levar a um conjunto maior de cenários como, por exemplo, “curva se deslocando para cima e inclinando no sentido horário (*flattening*)”. Posições mais complexas podem demandar outros tipos de cenários. É fundamental, no entanto, que cada um desses cenários esteja associado a uma probabilidade proveniente do histórico da curva de juros.

Este trabalho propõe um método mais rigoroso para derivar os cenários de taxa de juros para avaliar os riscos. O método envolve a visualização dos movimentos da curva de juros como sendo a composição de diversos fatores básicos. Por construção, os fatores têm zero correlação um com o outro de maneira que suas combinações gerem cenários realísticos e equiprováveis.

Os fatores surgem do uso da técnica de estatística multivariada “*Principal Component Analysis (PCA)*”. Essa técnica resulta, explicitamente, nos fatores e nas variâncias associadas a eles, que medem a importância relativa de cada um para descrever os dados. Em ordem, o primeiro componente principal tem o maior poder explicativo, seguido pelos outros.

Os primeiros componentes representam os movimentos mais básicos da curva. O primeiro é semelhante a um nível de deslocamento para cima ou para baixo. Ele corresponde à intuição de que o principal evento que afeta a curva de juros em determinado dia é se as taxas da curva subiram ou desceram. O segundo, é um fator que determina se a curva inclina-se em um sentido ou outro, ou seja, se o primeiro refere-se a um movimento quase paralelo para cima ou

para baixo, o segundo fator faz com que a curva rotacione no sentido horário ou anti-horário (movimentos conhecidos, respectivamente, como de “*flattening*” ou “*steepening*”). O terceiro componente principal faz com que taxas de prazos intermediários subam enquanto tanto as taxas curtas como as longas caiam. Ou vice-versa. Esse movimento aumenta ou diminui a concavidade da curva.

Como veremos posteriormente, a base dos componentes principais é ortogonal, portanto as covariâncias entre eles são nulas. Assim, a soma das variâncias de todos os componentes principais para determinado vencimento da curva é à variância desse ponto. É possível, portanto, determinar-se a contribuição de cada fator à variância total.

Na literatura internacional e em artigos sobre a curva local, verifica-se que os três primeiros fatores explicam mais de 85% do movimento observado na curva de juros. Fazendo uma analogia com uma regressão simples, o primeiro fator é o que melhor explica as mudanças da curva de juros de um dia por outro. Ou seja, se fôssemos fazer uma regressão, ele seria a variável que minimiza os quadrados dos erros. Fazendo uma segunda regressão, encontraríamos o segundo fator e assim por diante. Portanto, a contribuição marginal de cada fator adicional é decrescente e isso deve ser levado em conta para dimensionar o número de fatores a ser utilizado balanceando o custo-benefício de simplicidade contra poder de explicação do modelo.

Capítulo 3 – Motivação: evolução do mercado de juros no Brasil

3.1 Introdução

O mercado de Renda Fixa no Brasil pode ser dividido em dois momentos distintos.

O primeiro, antes do Plano Real (Julho de 1994), tinha duas características principais. A primeira, era o altíssimo nível das taxas nominais de juros, que se faziam necessárias para compensar a hiperinflação que afetou o país de 1980 a 1995, quando a taxa mensal de inflação média foi de 16%. Nessa época, o governo tinha uma função essencialmente fiscal, e tinha como uma das únicas preocupações a rolagem de dívida interna e financiar o déficit público. Nesse ambiente, a única forma de aplicação aceita pelos detentores de dívida era investimentos de prazo de 1 dia, ou *overnight*. Na época, esse era o único instrumento aceitável pelos investidores para manter seus recursos no país.

O segundo momento, de maior interesse para o propósito desse estudo, começou após a estabilidade econômica que veio com o plano real, que introduziu o sistema de metas de inflação e, posteriormente, em 1999, o sistema de câmbio flutuante. O Plano Real trouxe a inflação para níveis bem menores (um dígito ao ano) e, como consequência, houve a redução das taxas de juros nominais e o alongamento dos prazos tanto da dívida pública (pré e pós-fixada) como de outros ativos, como derivativos (DI's, *swaps*), CDB's, CDI's, etc.

Atualmente, esse processo ainda em está andamento, visto que os prazos negociados aqui ainda são curtos comparados com países desenvolvidos. Enquanto no Brasil, o prazo mais longo dos ativos pré-fixados negociados com alguma liquidez é inferior a 5 anos (DI Jan10), nos EUA e Japão, por exemplo, é comum a negociação de títulos de 30 anos. Mas o avanço que se verificou no Brasil foi significativo e tudo indica que esse processo continuará, pois estamos avançando cada vez mais em direção a vencimentos mais longos para pré-fixados.

As LTN's estão entre os principais títulos da dívida brasileira. Por ter um valor futuro fixo, estes títulos contribuem para o melhor perfil da dívida pública, permitindo previsibilidade das obrigações do Tesouro e tornam a política monetária mais eficiente, pois a riqueza dos detentores desses títulos passa a ser diretamente impactada pela curva de juros vigente. Então,

se a expectativa do mercado é que o Banco Central precisa subir juros, as taxas da curva pré-fixada irão subir, o que fará com que os preços dos ativos pré-fixados caiam e a riqueza de seus detentores diminua, o que reduz a demanda agregada e diminui as pressões inflacionárias. É por isso que o Tesouro Nacional dá grande preferência a esses títulos na rolagem de sua dívida, com o objetivo de aumentar sua participação e tentando, sempre que possível, alongar seus prazos. Os gráficos a seguir mostram, respectivamente, o risco em mão do mercado de títulos pré-fixados e a participação desses títulos na composição da dívida pública:

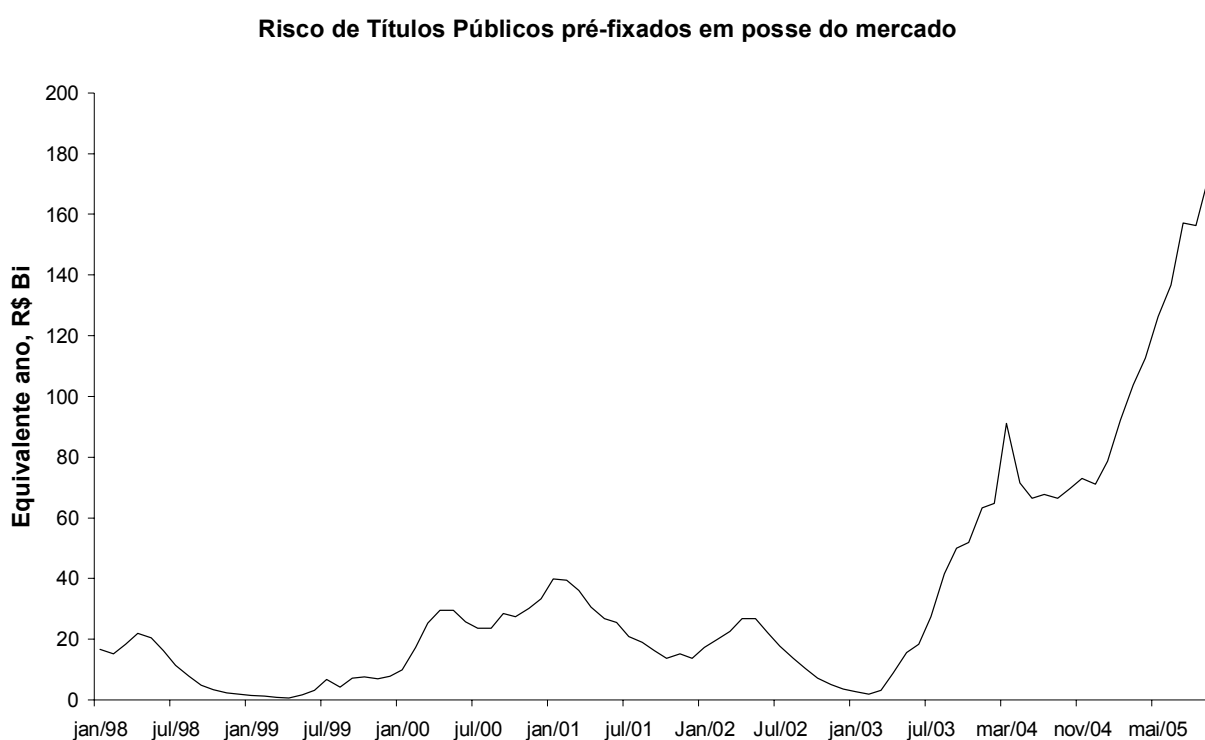


Figura 3: Evolução das LTN's emitidas em equivalente ano. A medida "Equivalente ano" representa, para uma determinada posição pré-fixada, o valor de um ativo de prazo de um ano que tenha risco equivalente. Fonte: JP Morgan

Evolução da Composição da Dívida Pública no Brasil

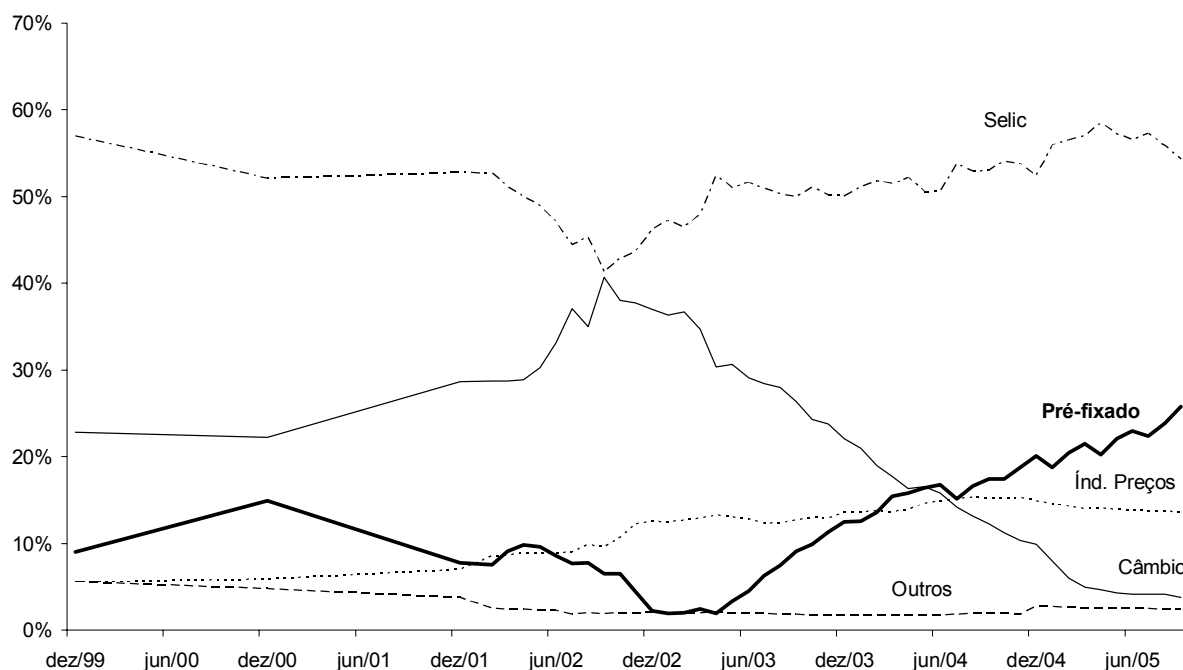


Figura 4: Participação de títulos pré-fixados na Dívida Pública Interna. Fonte: Tesouro Nacional

Pode-se observar que em períodos de crise esse volume cai. Isso ocorre principalmente porque o Tesouro Nacional não consegue emitir novos títulos, pois o mercado prefere ficar em posições de vencimentos curtos com menor risco.

Nos gráficos acima se percebe claramente o efeito das crises recentes no Brasil: as crises asiáticas (tigres asiáticos e Rússia) entre 97 e 99 que culminou com a desvalorização do Real em Janeiro de 1999. Percebe-se também uma queda considerável em 2002. Isso ocorreu por três motivos: no início de 2002, o mercado quis aumentar seu nível de liquidez, deixando um maior volume do patrimônio em caixa, para se adaptar ao novo Sistema de Pagamentos Brasileiro, que foi implementado em Abril de 2002. Posteriormente, no mesmo ano, o Banco Central passou a exigir dos fundos de investimento que fizessem a marcação a mercado dos títulos que tinham em carteira, o que provocou uma venda generalizada desses títulos pelo medo da volatilidade que essa medida traria a suas carteiras. Com isso, os preços dos títulos caíram de uma forma geral, o que provocou uma onda de resgates nos fundos de investimento, que os obrigou a vender mais títulos, fechando o ciclo vicioso. E no final de 2002, houve a crise eleitoral brasileira, onde as incertezas quanto à condução da política econômica pelo novo governo fez com que os investidores reduzissem suas posições de risco e resultou em um grande êxodo de recursos do país. A postura ortodoxa do governo Lula com relação à

economia permitiu que os níveis de risco caíssem de maneira acentuada no início de 2003.

No cenário externo, a situação também era muito favorável. O mercado financeiro experimentou, nessa época, um grande aumento na liquidez global, causada pelo excesso de poupança mundial. As taxas de juros nos países desenvolvidos estavam em níveis muito baixos (EUA, Europa e Japão), e o dólar se desvalorizava, pela preocupação do mercado com relação aos déficits fiscal e de conta-corrente americanos. Somando-se o fato de que havia a tendência da globalização trouxe uma integração cada vez maior dos mercados financeiros mundiais, houve nesse período uma busca intensa por taxas mais favoráveis, que beneficiou países emergentes e títulos pré-fixados mais longos.

No campo nacional, as condições macroeconômicas do Brasil melhoraram consideravelmente, com a aprovação de reformas estruturais importantes (como a da previdência), o país teve no governo Lula uma equipe econômica ortodoxa e respeitada pelo mercado, que deu continuidade à política econômica bem sucedida do governo anterior (Fernando Henrique Cardoso) e saiu de uma situação de déficit de conta-corrente que perdurava por décadas para superávit, causado em grande medida por superávits substanciais na balança comercial. Até outubro de 2005, por exemplo, o superávit em conta-corrente acumulado no ano era de USD 11.9 bilhão e o saldo na balança comercial, no mesmo período, era positivo em USD 36.4 bilhões. Esse quadro macro-econômico benigno, somado às altas taxas de juros internas, promoveu uma entrada muito grande de capitais externos para aplicação em renda fixa nacional. Parte desses recursos foi direcionada para aplicações de mais longo prazo. Como resultado, os DI's de vencimento mais longo passaram a ter mais liquidez e o Tesouro alongou a emissão de títulos pré-fixados, com o lançamento das NTN-F's 2010 e 2012. No início de 2005. Estes são títulos semelhantes às LTN's, com a diferença que pagam juros semestrais, além do pagamento final feito no vencimento.

Com a grande demanda de investidores estrangeiros por títulos pré-fixados em reais, o tesouro fez em setembro de 2005 a primeira emissão externa em reais. Foi o equivalente em Reais a US\$ 1.5 bilhão em títulos pré-fixados vencendo em 5/Jan/06.

Neste cenário de aumento nos prazos de títulos pré-fixados e de maior exposição a posições mais complexas distribuídas ao longo da curva, passaram a ser necessários instrumentos mais sofisticados de medição de risco e de análise de cenários, que considerem os diferentes

movimentos possíveis na curva de juros além do trivial movimento paralelo de alta ou baixa.

3.2 Construção da Curva de Reais no Brasil

A Curva de juros em Reais no Brasil começa com a taxa básica de um dia, que é a taxa CDI. Essa taxa nada mais é do que a média das taxas em que as entidades financeiras transacionam um produto em que investem seus caixas por um dia, chamado CDI, ou Certificado de Depósitos Interbancários. Essas operações são depositadas na CETIP (Câmara de Custódia e Liquidação), que é uma entidade privada sem fins lucrativos que atua como câmara de custódia e de liquidação financeira. A outra taxa básica do mercado brasileiro é a taxa Selic. Ela também é obtida pela média de operações de caixa, porém, diferentemente do que ocorre no CDI, essas operações são lastreadas em títulos públicos, são registradas no Selic (sistema especial de liquidação e custódia), que é um Sistema do Banco Central (BC), e têm como participantes, além das entidades financeiras, o próprio BC. Quando atua, o BC doa ou toma recursos por um dia em uma taxa próxima à definida pelo Comitê de Política Monetária (Copom), que é composto pelo Presidente do BC e seus diretores.

Ou seja, o Copom se reúne regularmente e define a taxa de juros básica da economia. Então, todos os bancos negociam seus caixas por um dia em uma taxa próxima da meta definida, pois sempre que o mercado começa a negociar em taxas maiores (menores) que a meta, o BC atua doando (tomando) recursos do mercado. A taxa CDI é próxima à taxa Selic por uma simples questão de arbitragem, embora não seja perfeita porque os mercados CDI e Selic não são totalmente equivalentes com relação aos riscos.

Um dos produtos derivativos que são utilizados para se negociar as taxas pré-fixadas é o “*Swap*”, sendo o mais comum o “Pré x CDI”. Pode ser registrado na CETIP ou na BM&F. Nesse instrumento, acorda-se valor nominal, taxa pré-fixada e vencimento. No vencimento liquida-se o financeiramente o valor de mercado do *Swap* naquele dia. Ou seja, nessa data calculam-se dois valores futuros: um correspondendo ao valor nominal mais os juros da taxa pré-fixada e o outro sendo o valor nominal corrigido pelo CDI. A diferença entre eles é o valor do *Swap*, e o sinal dessa diferença define qual dos participantes será o credor e qual o devedor. A liquidação financeira desse valor é feita no dia do vencimento. Por ter essas características, o participante credor corre o risco de crédito da contraparte até o dia do vencimento. Para mitigar esse problema, na BM&F existe a opção de se registrar o *Swap* com

garantia, ou seja, o participante faz um depósito inicial que cresce à medida que o valor desse swap fica mais negativo para ele de acordo com o valor de mercado e também com cenários de stress da BM&F.

No Brasil, o instrumento de renda-fixa mais negociado é o DI Futuro da BM&F - negociação diária média de R\$ 100 bi em nov/05 (fonte: BM&F). Este é um derivativo análogo a um contrato de “Swap Pré x CDI” com a principal diferença que todos os dias é feito o chamado “ajuste diário” que é a liquidação financeira (pagamento ou recebimento) feita por cada participante do mercado do valor correspondente à diferença entre o valor de mercado das posições de um dia para outro. Isso é feito para que a marcação a mercado seja efetivamente liquidada financeiramente todos os dias, o que diminui drasticamente o risco sistêmico se compararmos com o Swap. No caso do Swap a liquidação financeira é feita apenas no dia do vencimento. Portanto, após se fechar uma operação envolvendo esses ativos, o resultado total, de lucro ou prejuízo, será definido pela diferença entre a taxa pré-fixada acordada e a taxa CDI acumulada no período, desde o início até o vencimento.

O segundo instrumento mais negociado são as LTN’s, com cerca de R\$ 3.4 bi negociados por dia (fonte: Banco Central). São títulos pré-fixados emitidos pelo Tesouro Nacional e com alta liquidez no mercado secundário, cujos vencimentos coincidem com os DI’s, permitindo que alguns participantes façam o *hedge* com o DI futuro de maneira a obter um rendimento indexado à variação diária do CDI.

A convenção utilizada no Brasil para taxa de juros é a exponencial 252. Para exemplificar esta metodologia, vamos calcular quanto rende uma aplicação pré-fixada à taxa de 19.50% (que era a meta Selic em Set/05) em um mês com 22 dias úteis:

$$Ret = (1 + 19.50\%)^{(22/252)} - 1 = 1.57\%$$

A parte inicial da curva - seus vencimentos mais curtos - representa apenas a trajetória esperada da taxa CDI. Por exemplo, vamos calcular qual seria a taxa justa do DI Nov05, no dia 19/Set/05. Considerando-se que a taxa CDI nesta data era de 19.50%, e que a expectativa de mercado para a próxima reunião do COPOM², que se realizaria na data de 19/Out/05, era

² Assumindo que não haveria nenhuma reunião extraordinária do COPOM para alterar a taxa de juros

de um corte de 50 pontos básicos. Então, o mercado presume que a taxa de juros ficaria em 19.50%, até a próxima reunião do COPOM, ou seja, por 22 dias úteis. O número de dias úteis até o vencimento do DI Nov05 era 30, e tínhamos então, até o vencimento, 22 dias úteis com o CDI de 19.50% e 8 dias com o CDI de 19.00%:

$$DI_Nov05 = \left[(1 + 19.50\%)^{\frac{22}{252}} * (1 + 19\%)^{\frac{8}{252}} \right]^{\frac{252}{30}} - 1 = 19.37\%$$

Apenas como curiosidade, nesse dia o DI Nov fechou à taxa de 19.38%. Isso porque havia duas forças opostas atuando sobre esse vencimento: uma para cima, pois parte do mercado acreditava em um corte de apenas 25 pontos-base na próxima reunião do COPOM, e uma para baixo, pois a taxa CDI estava girando em torno de 19.45%, ou uns 5 pontos-base abaixo da meta Selic (19.50%), e no exemplo em questão consideramos o CDI como sendo igual à taxa Selic.

Para vencimentos mais longos, as taxas são mais altas, pois existe um componente de prêmio de risco, que é tanto maior quanto mais longo for o vencimento. O detalhamento desse prêmio não está no escopo desse trabalho, mas é intuitivo que quanto mais longo o prazo, maior a incerteza sobre o que pode acontecer com o mercado, principalmente em se tratando de um país emergente como é o caso do Brasil, e maior será a taxa requerida pelos participantes para fazer uma aplicação pré-fixada.

Os contratos de DI futuro são negociados na BM&F e os vencimentos são padronizados: os primeiros 4 vencimentos correspondem aos próximos 4 meses após a data presente e, daí em diante, os DI's de cabeça de trimestre, ou seja, vencendo no primeiro dia útil dos meses de Janeiro, Abril, Julho e Outubro.

Embora a liquidez fique concentrada em alguns vértices mais curtos, todos os dias, ao final do horário de negociação, a BM&F promove o "call", onde todos os participantes de mercado negociam, um por um, todos os DI's da curva, dando assim uma boa referência de como é a curva de mercado para aquele dia.

Por exemplo, no dia 19/Set/05, a curva de juros tomada pelos preços do DI era a seguinte:

Curva de Juros em 19/Set/05

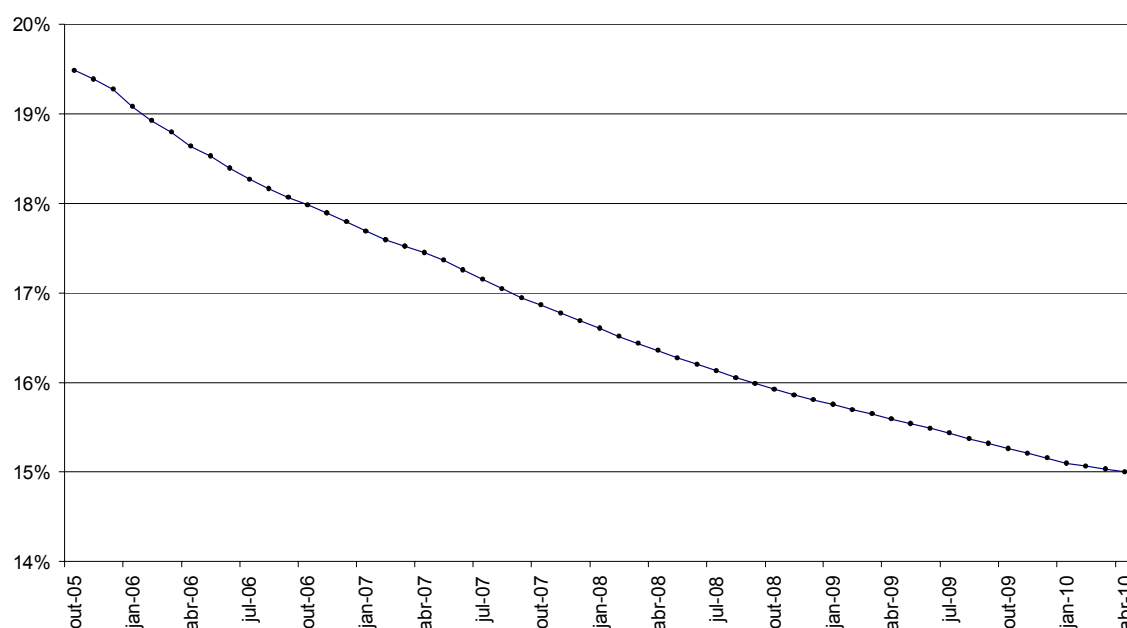


Figura 5: Curva das taxas de juros extraídas do mercado de DI futuro

Como há apenas contratos de DI futuro para um determinado número de meses (como foi dito, 3 em 3 meses após o quarto vencimento), é feita a interpolação entre os contratos adjacentes disponíveis para obter a taxa de um período intermediário qualquer. Cada participante utiliza uma metodologia para obter a taxa de juros para períodos intermediários. Entre as mais utilizadas, estão o método “*spline*”, que em termos bem gerais, consiste em se definir um polinômio entre os pontos conhecidos da curva e impor algumas condições de contorno para se encontrar os coeficientes. Dentre essas condições, as mais importantes são: o nível do primeiro e do último ponto, e a derivada nesses pontos, de maneira a não ter descontinuidades nem “*bicos*”.

Outra maneira bastante difundida de se fazer a interpolação, a qual foi utilizada para tratar os dados deste trabalho, é através do cálculo por “*flat forwards*”, ou, taxas a termo fixas. Esse método assume que, entre dois períodos em que a taxa de juros é conhecida, a taxa a termo é constante, e todos os vencimentos são calculados a partir da interpolação dessa taxa.

Para exemplificar, considerando que no dia 19/Set/05 o DI Nov/05, que venceria em 1/Nov/05, ou seja, em 30 dias úteis, valia 19,38% e o DI Dez05, vencendo em 1/Dez/05, em 50 dias úteis, valia 19,27%. Para calcular a taxa de juros para o dia 16/Nov/05, que tem uma

distância para 19/Set/05 de 39 dias úteis, precisamos primeiro calcular a taxa a termo do mês de Novembro:

$$\text{Termo} = [(1+19.27\%)^{(50/252)} / (1+19.38\%)^{(30/252)}]^{(252/(50-30))} - 1 = 19.105\%$$

$$\text{Termo} = \left[\frac{(1+19.27\%)^{\frac{50}{252}}}{(1+19.38\%)^{\frac{30}{252}}} \right]^{\frac{252}{(50-30)}} - 1 = 19.105\%$$

$$\text{Taxa}_{16/11/05} = \left[(1+19.38\%)^{\frac{30}{252}} * (1 + \text{termo})^{\frac{(39-30)}{252}} \right]^{\frac{252}{39}} - 1 = 19.32\%$$

Capítulo 4 – Estudo de Casos

4.1 Introdução

Foram utilizados dados da base do Banco JP Morgan referentes à curva de juros brasileira. Estes dados referem-se à curva de fechamento diária de vários prazos fixos, e são obtidos a partir da curva dos DI's futuros. Como estes produtos têm datas de vencimento fixas, para calcular taxas de juros de "períodos fixos" (3m, 1 ano, etc.) foi feita a interpolação por “*flat forward*”, conforme descrito na sessão anterior.

Os prazos considerados foram: 1, 3 e 6 meses, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 4 e 5 anos. Os dados considerados vão do dia 6/Fev/01 a 19/Set/05. O período em questão inicia cerca de dois anos após a implantação do plano Real. Portanto, incorpora as modificações econômicas causadas pela implantação do câmbio flutuante e, ao mesmo tempo, desconsidera a baixa liquidez e a volatilidade excessiva existentes no início do plano Real.

Então, calculamos a variação da curva de juros de um dia para o outro, conforme mencionado no capítulo 2, e somamos uma constante a cada uma das séries de maneira a tornar a sua média igual a zero, de acordo com as hipóteses do capítulo 2. A tabela abaixo mostra os 10 primeiros dados de variações de taxas com médias ajustadas:

Data	1M	3M	6M	1Y	1.5Y	2Y	2.5Y	3Y	4Y	5Y
7/fev/01	0.04%	0.05%	0.04%	0.06%	0.06%	0.06%	0.06%	0.06%	0.07%	0.06%
8/fev/01	-0.04%	-0.11%	-0.15%	-0.18%	-0.18%	-0.18%	-0.17%	-0.18%	-0.20%	-0.21%
9/fev/01	-0.02%	-0.04%	-0.06%	-0.11%	-0.11%	-0.10%	-0.10%	-0.10%	-0.09%	-0.09%
12/fev/01	0.03%	0.03%	0.02%	0.05%	0.07%	0.08%	0.08%	0.09%	0.11%	0.11%
13/fev/01	-0.04%	-0.01%	0.01%	0.03%	0.04%	0.05%	0.05%	0.05%	0.06%	0.06%
14/fev/01	-0.03%	-0.05%	-0.04%	-0.02%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%
15/fev/01	0.12%	0.15%	0.16%	0.13%	0.13%	0.14%	0.15%	0.15%	0.12%	0.12%
16/fev/01	0.09%	0.09%	0.11%	0.13%	0.13%	0.14%	0.14%	0.15%	0.15%	0.16%
19/fev/01	0.05%	0.11%	0.17%	0.20%	0.21%	0.21%	0.21%	0.21%	0.24%	0.23%
20/fev/01	0.03%	0.04%	0.02%	0.05%	0.06%	0.06%	0.05%	0.05%	0.06%	0.05%

Tabela 2: variações da curva de juros com média ajustada para os 10 primeiros dias

Conforme discutido no capítulo 1, o trabalho de Silveira e Bessada (2003) indicam que a utilização de diferenças de juros é a metodologia mais apropriada para a curva brasileira.

O próximo passo é fazermos a análise de componentes principais. Nosso modelo parte da

hipótese de que a curva de juros é um conjunto de variáveis estocásticas imperfeitamente correlacionadas, com um grau de correlação diminuindo à medida que aumenta a distância em seus prazos de vencimento (ver tabela 1). Essa técnica tem três efeitos: ela ortogonaliza os componentes dos vetores de entrada, de maneira que eles fiquem sem correlação um com o outro; ela ordena os componentes ortogonais resultantes de maneira que aqueles com maior variância vêm primeiro; e elimina aqueles componentes que agregam pouco à variância do conjunto de dados.

Com o auxílio do Matlab, utilizamos a análise de componentes principais para gerar (1) os *loadings* dos componentes principais, que são os autovetores da matriz de covariância da matriz de variações, (2) as variâncias de cada componente, que são os autovalores associados aos *loadings*, e (3) os *factor scores*, conforme tabelas 3, 4 e 5 respectivamente:

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7	PC8	PC9	PC10
1M	-0.11	0.46	-0.46	0.57	-0.39	0.22	-0.20	0.00	0.00	0.01
3M	-0.18	0.52	-0.29	-0.09	0.36	-0.44	0.52	-0.10	0.02	0.01
6M	-0.23	0.44	0.01	-0.48	0.29	0.25	-0.54	0.27	-0.03	-0.06
1Y	-0.28	0.25	0.33	-0.31	-0.41	0.32	0.25	-0.50	0.15	0.22
1.5Y	-0.32	0.12	0.39	0.05	-0.36	-0.24	0.14	0.37	-0.52	-0.34
2Y	-0.34	0.01	0.32	0.25	-0.02	-0.35	-0.16	0.23	0.71	0.09
2.5Y	-0.36	-0.09	0.19	0.34	0.36	-0.05	-0.20	-0.25	-0.43	0.53
3Y	-0.38	-0.17	0.02	0.22	0.34	0.32	0.07	-0.30	0.09	-0.67
4Y	-0.40	-0.29	-0.28	-0.08	0.02	0.39	0.41	0.52	0.05	0.29
5Y	-0.41	-0.35	-0.47	-0.32	-0.29	-0.39	-0.29	-0.25	-0.04	-0.06

Tabela 3: "Loadings" dos Componentes Principais (autovetores)

	Variância	Desvio Padrão
PC1	0.0209%	1.45%
PC2	0.0018%	0.42%
PC3	0.0005%	0.23%
PC4	0.0002%	0.13%
PC5	0.0001%	0.09%
PC6	0.0000%	0.06%
PC7	0.0000%	0.05%
PC8	0.0000%	0.04%
PC9	0.0000%	0.03%
PC10	0.0000%	0.02%

Tabela 4: Variância (autovalores) e desvio padrão dos componentes principais

A análise dos dados da Tabela 3 mostra coerência com os dados da literatura internacional. A primeira componente principal produz um deslocamento ("shift") da curva, no mesmo sentido para todos os vencimentos. A segunda coluna gera um movimento na curva de inclinação, onde vencimentos mais de até 2 anos movem-se em uma direção e os mais longos em outra. O

terceiro fator muda a concavidade da curva. Vencimentos de até três meses ou posteriores a 4 anos movem-se em direção oposta à dos vencimentos intermediários. Esses primeiros poucos movimentos correspondem à intuição de participantes do mercado sobre como a curva de juros muda diariamente.

É importante notar que, conforme esperado pela teoria descrita no item 2.1, a Tabela 3 mostra os autovetores da matriz de covariância das variações diárias da curva. Por ser esta uma matriz simétrica, era de se esperar que os autovetores sejam ortonormais, o que de fato ocorre, ou seja, a norma de cada vetor é unitária e o produto interno entre dois vetores quaisquer é zero. Por exemplo, para PC1 e PC2:

$$\begin{aligned} (-0.11)^2 + (-0.18)^2 + \dots + (-0.41)^2 &= 1 && \text{(Norma de PC1)} \\ (-0.11)(0.46) + (-0.18)(52) + \dots + (-0.41)(-0.35) &= 0 && \text{(PC1.PC2')} \end{aligned}$$

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7	PC8	PC9	PC10
7/fev/01	-0.17%	0.03%	-0.01%	0.01%	-0.01%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%
8/fev/01	0.52%	-0.03%	-0.02%	0.04%	0.00%	0.00%	-0.01%	0.00%	0.00%	-0.01%
9/fev/01	0.27%	-0.01%	-0.05%	0.00%	0.01%	-0.01%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%
12/fev/01	-0.23%	-0.04%	-0.02%	0.02%	-0.01%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%
13/fev/01	-0.12%	-0.06%	0.03%	-0.02%	0.01%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%
14/fev/01	0.04%	-0.06%	0.01%	0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
15/fev/01	-0.41%	0.14%	-0.02%	0.02%	0.02%	0.00%	0.00%	-0.01%	0.00%	-0.01%
16/fev/01	-0.41%	0.05%	-0.01%	0.01%	-0.02%	0.00%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%
19/fev/01	-0.61%	0.03%	0.03%	-0.03%	-0.01%	0.01%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%
20/fev/01	-0.15%	0.01%	0.01%	0.01%	-0.01%	-0.01%	0.02%	0.00%	0.00%	0.00%
21/fev/01	-0.64%	0.11%	0.05%	-0.10%	0.05%	0.02%	-0.03%	0.02%	0.00%	0.00%

Tabela 5: "Factor Scores"

Os "factor scores" representam o quanto a curva de juros muda dia a dia no sistema de coordenadas definido pelos componentes principais. Por exemplo, no dia 13-Fev, como se pode perceber na **Tabela 2**, as taxas dos vencimentos mais curtos caíram e dos vencimentos mais longos subiram, ou seja, foi um movimento de "steepening". Como vemos na **Tabela 5**, esse movimento corresponde ao fator -0.12% aplicado ao PC1 e -0.06% aplicado ao PC2. O primeiro faz com que a curva toda suba e o segundo, por ser negativo, que a curva tenha um movimento de "steepening". Esses dois juntamente com o terceiro explicam quase todo o movimento, por exemplo, do vértice de 1.5 anos:

$$-0.12\% * (-0.32) - 0.06\% * 0.12 + 0.03\% * 0.39 = 0.04\% \text{ (pode ser verificado na Tabela 2).}$$

É equivalente a se descrever o movimento da curva do dia 13-Fev como -0.0012 "unidades"

de PC1, -0.006 unidades do PC2 e assim por diante, com a vantagem de se poder descrever o movimento da curva toda com bastante precisão utilizando-se apenas 3 variáveis: os scores de PC1, PC2 e PC3.

A variância de cada componente principal é igual à variância de seus "factor scores". A Tabela 5 parece bem coerente com a Tabela 4, pois aparentemente, a volatilidade dos "factor scores" do PC1 é maior do que a dos outros fatores e assim sucessivamente. Na Tabela 5, a magnitude dos fatores cai das colunas da esquerda para a direita. Como a correlação entre os componentes principais é zero, pode-se dizer que a variância total dos dados originais é:

$$0.0209\% + 0.0018\% + \dots = 0.0236\%$$

É interessante notar que, se calcularmos a variância total dos dados originais, ou seja, da matriz de diferenças da curva de juros, chegamos ao mesmo valor. 0.0236%. Isso porque, a análise de componentes principais é em essência uma operação de mudança de base, uma transformação linear que não altera a variância total dos dados.

A tabela a seguir mostra a proporção da variância total explicada por cada componente principal:

	% Variância Total	% Acumulado
<u>PC1</u>	88.9%	88.9%
<u>PC2</u>	7.5%	96.3%
<u>PC3</u>	2.2%	98.6%
<u>PC4</u>	0.7%	99.3%
<u>PC5</u>	0.3%	99.6%
<u>PC6</u>	0.2%	99.8%
<u>PC7</u>	0.1%	99.9%
<u>PC8</u>	0.1%	99.9%
<u>PC9</u>	0.0%	100.0%
<u>PC10</u>	0.0%	100.0%

Tabela 6: Percentual da variância de cada fator sobre variância total

As primeiras três componentes principais juntas explicam quase 99% da variação original dos dados. É por isso que os "factor scores" apresentam uma descrição mais simples das variações diárias da curva de juros. A maior parte da variância original concentra-se nos primeiros componentes principais. Um determinado fator aplicado ao primeiro componente principal explica movimentos em todos os pontos da curva e ele é tal que explica o máximo possível do

movimento deste dia dispondo de apenas uma variável.

4.2 – Analogia com Regressão Linear

A comparação com regressão linear vai elucidar a última afirmativa. Na regressão, há uma variável dependente (lado esquerdo) que se deseja explicar com uma variável independente (lado direito). O foco do interesse nesses casos é o coeficiente da regressão, que diz o quanto que a variável independente afeta a dependente; e o R^2 , que diz a proporção da variância explicada. O procedimento de mínimos quadrados maximiza R^2 fazendo a minimização da soma dos quadrados dos erros produzidos pela equação de regressão.

Intuitivamente, o PCA “disfarça” os dados do lado direito da regressão. Ao invés de começar com dados conhecidos, PCA encontra os dados do lado direito de maneira que expliquem melhor o lado esquerdo. Se tivéssemos apenas um dia de variação na curva de juros para explicar, a melhor explicação seria os próprios dados. O desafio estatístico que a PCA resolve é encontrar a melhor variável explicativa para todos os dias do período amostral.

É interessante pensar em como PCA encontra a melhor variável explicativa por iteração. A iteração começa com uma tentativa, por exemplo, um vetor de deslocamento paralelo: $[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]$. Essa variável é utilizada no lado direito de cada uma das $N=1157$ equações de regressão. Cada regressão separadamente estima seu coeficiente que minimiza a soma dos quadrados dos erros dentro da regressão. O total das N somas dos quadrados dos erros dessas regressões mede o poder de explicação total da variável do lado direito. Uma boa variável explicativa produz uma menor soma total que uma variável mais pobre. Pode-se imaginar um procedimento iterativo melhorando esse deslocamento uniforme até que nenhuma melhora adicional seja possível. *A soma acumulada dos quadrados dos erros atinge seu mínimo quando a variável explicativa é igual ao primeiro componente principal.* (A demonstração está no Anexo III). Nenhuma outra variável explica os dados tão bem quanto a primeira componente principal. Começando com nada, PCA encontra a variável do lado direito ótima, dado um fator multiplicativo. Se colocarmos a restrição de que a soma dos quadrados dos *loadings* deve ser igual a 1.0 resulta unicamente na primeira componente principal.

Continuando com a analogia com a regressão, os coeficientes que surgem das N regressões do

primeiro componente principal são iguais aos “factor scores” gerados pela PCA. Por exemplo, fazendo a regressão dos dados de 8/Fev/01 (ver Tabela 2) tendo como variável explicativa os *loadings* da primeira componente principal, o vetor coluna PC1 (ver Tabela 3), resulta em um coeficiente de regressão igual a 0.52%, que é exatamente o “factor score” que aparece na Tabela 5 para 8/Fev/01. Pode-se dizer, portanto, que o mercado no dia 8/Fev/01 movimentou-se 0.0052 “unidades” de PC1. A redefinição dos movimentos de mercado fornecido pelos “factor scores” tem características de uma regressão, onde os componentes principais fazem o papel de variáveis explicativas e os “factor scores” o papel de coeficientes de regressão.

Finalmente, o desvio padrão do conjunto de coeficientes que surge das N regressões é igual ao desvio padrão da primeira componente principal. O coeficiente de um determinado dia mostra o quanto a primeira componente afetou o movimento da taxa naquele dia. O desvio padrão dos 1157 coeficientes diz a volatilidade do componente revelada pelos dados. No caso de PC1 o desvio padrão é igual a 1.45% (Tabela 4), portanto, pode-se dizer que o movimento de PC1 nesse dia foi o equivalente a $0.52\%/1.45\% = 0.4$ desvios padrão.

Essa analogia com a regressão linear gera uma intuição sobre PCA. Se for pedido para participantes do mercado descrever a variável explicativa que melhor explica as variações diárias da curva de juros, muitos escolheriam uma mudança de nível na qual todas as taxas sobem ou caem o mesmo valor. O primeiro componente principal da curva de juros melhora a idéia intuitiva de movimento perfeitamente paralelo, para promover um deslocamento calibrado e não uniforme das taxas. No caso brasileiro, percebe-se que o movimento de PC1 corresponde a um deslocamento paralelo tomado a um de inclinação, conforme discutido posteriormente.

Apesar de o primeiro componente principal fornecer a melhor explicação isolada de movimentos diários, ele deixa alguma variação sem explicação. A variação remanescente serve como base de dados para o segundo conjunto de N regressões. A melhor variável explicativa para esses dados é a segunda componente principal. A segunda componente principal da curva de juros melhora a idéia intuitiva de que “a curva tende a ter um movimento de *steepening* ou de *flattening*” para fornecer uma quantificação precisa das mudanças ao longo da curva enquanto sua inclinação muda.

Os primeiros dois componentes, tomados juntos, explicam mais de 96% da variação dos

dados originais. Combinações deles fornecem uma boa impressão da natureza dos movimentos da curva de juros. Como esses dois fatores fornecem uma descrição aproximada dos dados históricos, é natural usá-los para desenvolver uma idéia dos tipos de movimentos na curva de juros que podem surgir no futuro. Combinações dos componentes principais produzem cenários futuros de curva de juros que podem revelar o risco de taxa de juros dos portfólios.

4.3 Utilizando dois componentes para construir cenários

Nessa seção vamos mostrar como derivar cenários a partir dos resultados da PCA. Na **Tabela 7** abaixo temos os fatores de “*shift*” e “*twist*”, que são os mais básicos e importantes para os cenários. Fatores são o produto do desvio padrão de determinado componente principal pelos loadings desse mesmo componente. Ou seja, calcularemos o produto do desvio padrão de cada componente principal (PC1 e PC2) pelos seus respectivos “*loadings*”.

	1M	3M	6M	1Y	1.5Y	2Y	2.5Y	3Y	4Y	5Y
<i>Shift</i>	-0.16%	-0.26%	-0.33%	-0.41%	-0.46%	-0.50%	-0.53%	-0.55%	-0.58%	-0.59%
<i>Twist</i>	0.19%	0.22%	0.19%	0.10%	0.05%	0.00%	-0.04%	-0.07%	-0.12%	-0.15%

Tabela 7: Fatores de variação da curva

Esses fatores nada mais são que o produto $\Delta R = S \cdot A^{1/2} \cdot e$ descrito no capítulo 2 para $e = 1$. O próximo passo considerar $e = 2.33$ para termos cenários com índice de confiança de 99% de acordo com a parametrização por curva normal.

Para isso vamos fazer as combinações das linhas de “*Shift*” e “*Twist*” para compor cenários. Por exemplo, no cenário UpUp aplicam-se -2.33 desvios padrões ao fator Shift (para deslocar para cima) e -2.33 para que ela tenha um movimento de “*steepening*”. Se esse cálculo for feito para todos os vencimentos, veremos que a curva irá subir de nível e terá a inclinação aumentada. Neste caso, ambos os movimentos colaboram para elevar o nível da curva de 5 anos. Então, o vencimento de 5 anos subirá $(-2.33 * (-0.59\%) - 2.33 * (-0.15\%)) = 1.73\%$, valor maior que qualquer outro da curva hipotética resultante desse cenário. Repetindo-se os cálculos para os outros vencimentos da curva, percebemos que a combinação dos movimentos gera variações negativas no vértice de 1 mês e positivas para os restantes. Calculando os outros cenários, através das quatro combinações possíveis, com movimentos com soma e subtração para cada um dos dois fatores multiplicados por 2.33, chegamos à seguinte tabela:

	1M	3M	6M	1Y	1.5Y	2Y	2.5Y	3Y	4Y	5Y
UpUp	-0.07%	0.09%	0.34%	0.71%	0.97%	1.15%	1.31%	1.44%	1.63%	1.73%
UpDn	0.83%	1.11%	1.21%	1.19%	1.20%	1.16%	1.14%	1.11%	1.06%	1.04%
DnUp	-0.83%	-1.11%	-1.21%	-1.19%	-1.20%	-1.16%	-1.14%	-1.11%	-1.06%	-1.04%
DnDn	0.07%	-0.09%	-0.34%	-0.71%	-0.97%	-1.15%	-1.31%	-1.44%	-1.63%	-1.73%

Tabela 8: Cenários de curva baseados em (+/- 2.33 Desvios padrões)

É interessante notar que a primeira componente principal da curva de juros brasileira no período estudado nesse trabalho, ao contrário do que se observa na literatura internacional, os *loadings* da primeira componente principal apresentam valores crescentes em módulo, embora a taxa de crescimento seja decrescente ao longo do tempo. Observa-se em trabalhos no exterior que os *loadings* para essa componente são aproximadamente constantes, variando pouco em torno de um valor médio. Como consequência, nesses casos, ao aplicar-se a primeira componente principal para constituir os cenários têm-se um movimento apenas de deslocamento, enquanto no nosso caso, obtém-se um deslocamento e também uma inclinação. Por isso, o movimento UpDn, que deveria fornecer um deslocamento para cima e um “*flattening*”, gera um movimento quase paralelo, pois a componente de *twist* anula parcialmente a tendência existente na componente de *shift*.

As curvas da **Figura 6** mostram os cenários acima e também o 1º e o 99º percentil do histórico de cada um dos prazos tomados independentemente. A utilização de percentis para cálculo de perdas é o conceito principal do VAR não-paramétrico.

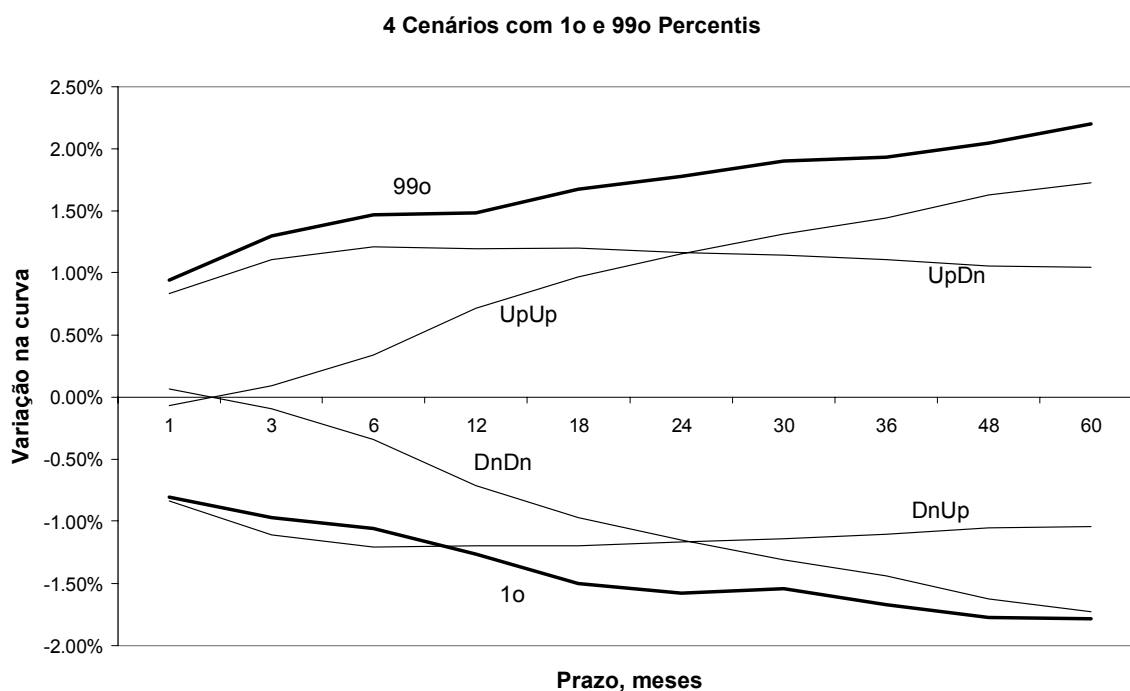


Figura 6: Comparação das variações da curva obtida pelos 4 cenários com o 1º e o 99º percentis

Por exemplo, em apenas 1 dia a cada 100 a taxa de um mês cai mais que 0.81%, contra um cenário de perda, obtido pelo método acima, de -0.83%, conforme o cenário DnUp. Em outros prazos, as variações obtidas pelos percentis são bem maiores que as obtidas pelos cenários, principalmente na linha em negrito superior, que representa o 99º percentil. Na literatura internacional (FRYE, 1996 e 1997) a diferença entre as curvas – observada e dos cenários – é relativamente bem menor. O principal motivo é que o Brasil, no período em questão, esteve exposto a algumas crises, como por exemplo, a crise eleitoral do final de 2002 e a crise de Maio/04, causada localmente pelo escândalo Waldomiro Diniz e externamente pela abertura de taxa das T-Bills americanas por causa do início do ciclo de *tightening* promovido pelo FED. Uma evidência de que essa é a explicação correta é que a discrepância é maior na parte superior da curva, que representa cenários de abertura nas taxas de juros, movimento característico de situações de crise. Portanto, conclui-se que a aproximação das variações diárias das taxas de juros por curvas normais não é boa o suficiente em situações de crise, onde historicamente houve rupturas de cenário que levaram a variações muito maiores que o padrão histórico poderia suportar. Essa situação é conhecida como uma distribuição com “*fat tails*”, ou seja, maior densidade de probabilidade nas caudas que uma distribuição normal. Essa constatação, somada ao fato de ser muito curto o histórico disponível dos ativos brasileiros, produz uma dificuldade para se analisá-los estatisticamente. Feita essa ressalva,

concluimos que o uso de cenários representa bem o 1º e 99º percentis. Ainda mais se considerarmos que cada ponto das curvas em negrito acima foi construído tomando-se os percentis de cada ponto da curva independentemente, ou seja, pegando-se para cada vencimento o pior caso, independente do dia em que ocorreu. Ou seja, as curvas em negrito são compostas por movimentos que ocorreram em dias distintos.

Uma outra constatação que podemos fazer a partir da Figura 6 é que tanto o 1º quanto o 99º percentil apresentam o comportamento de deslocamento somado ao de inclinação, que é totalmente coerente com o resultado que foi obtido pela primeira componente principal. Ou seja, de fato a curva local tende a se movimentar dessa maneira, quando a curva se desloca para cima, ela se inclina no sentido anti-horário e vice-versa.

Se tivermos um portfolio constituído de passivos pré-fixados concentrados em um vencimento, quatro cenários baseados em dois fatores fornecem uma boa estimativa do 1º percentil de perda (ou com o 99º, dependendo da posição). Por outro lado, se um portfolio consiste de várias posições pré-fixadas, com vários vencimentos, os cenários baseados em fatores são superiores a simplesmente deslocar cada ponto da curva por seu 1º percentil. Isso porque, por exemplo, quando uma taxa de três meses tem um aumento significativo, isso pode ocorrer em situações onde a curva simultaneamente se desloca para cima e tem um movimento de “*flattening*” – em termos de PCA, movimento positivo de “*shift*” e negativo de “*twist*”. O UpDn captura este efeito. Como os cenários utilizados refletem combinações realísticas de *shift* e *twist*, eles refletem mais fielmente movimentos da curva.

Um portfolio mais interessante conta posições ativas e passivas ao longo da curva e são muito comuns nos portfolios dos participantes do mercado. Os resultados, nesse caso, são determinados pelas diferenças entre os as taxas de pontos diferentes da curva, conhecidos como *spreads*. O fato de os dois primeiros fatores explicarem 96% da variação das taxas de juros não significa que eles explicam 96% da variação de qualquer *spread* de taxas de juros.

Para se investigar a adequação de dois fatores para explicar os “*spreads*” ao longo da curva, a **Figura 7** abaixo compara as mudanças diárias nas taxas de 2 anos e 3 anos com os 4 pontos correspondentes aos cenários construídos. Por exemplo, no cenário DnUp a taxa de 2 anos cai 1.16 pontos percentuais enquanto a de 3 anos cai 1.11 pp. Este ponto aparece como o mais baixo do quadrilátero da figura. Desenhamos um quadrilátero unindo os pontos extremos

determinados pelos cenários.

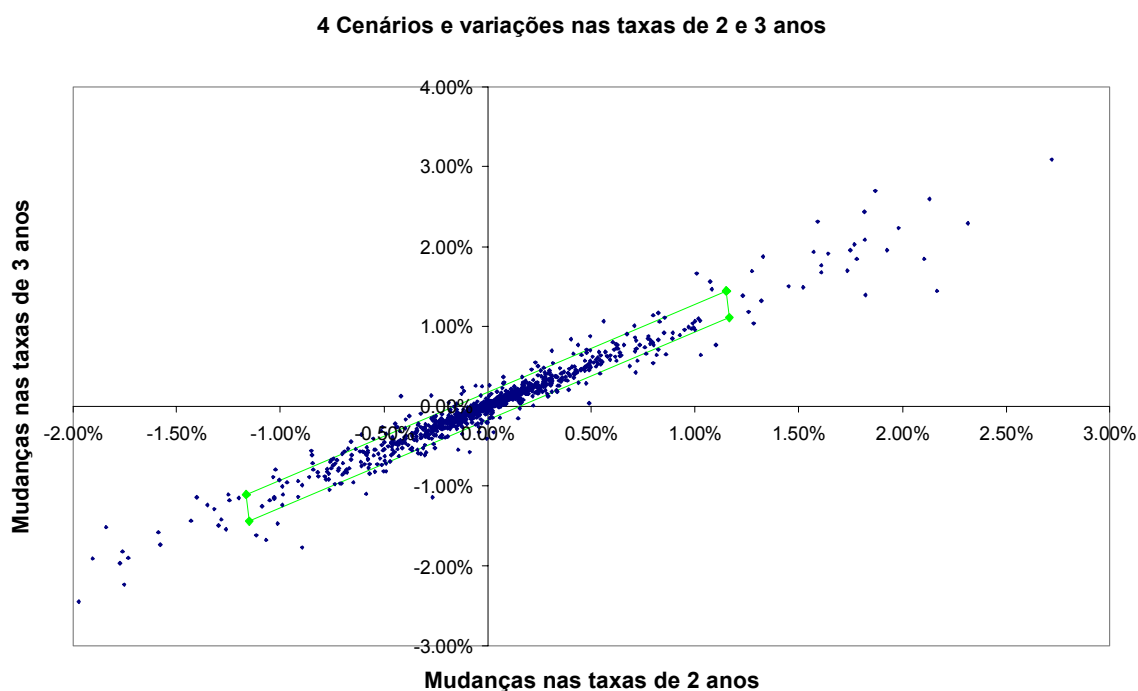


Figura 7: Dispersão das variações do spread de 2 anos contra 3 anos

Na figura acima percebemos que muitos dados ficam do lado de fora do polígono, mostrando que uma posição sensível a esse spread pode frequentemente perder mais que o pior caso dos 4 cenários. Pode-se perceber que os cenários estão especialmente falhos para os casos em que as taxas se movem na mesma direção (1^o e 3^o quadrante), e ainda, dentre os pontos que estão fora do polígono, os do primeiro quadrante são os que se encontram mais distantes do polígono. Isso ocorre pelo mesmo motivo da discrepância da Figura 6, conforme discutido acima. No primeiro quadrante estão justamente os pontos mencionados, que ocorrem em situações de crise, onde a curva de juros é deslocada para cima com intensidade maior do que o movimento histórico pode prever. Além disso, podemos perceber que vários pontos caem fora do polígono também ao longo dos lados maiores do polígono. Nesses casos não se trata de situações de *stress*, pois estes pontos estão em regiões de deslocamento pequeno da curva. Posições de *spread*, ou seja, ativa em uma dessas taxas e passiva na outra, são as mais sensíveis a esses pontos, onde os movimentos relativos das taxas são maiores. No exemplo, uma posição sensível ao *spread* de 2 e 3 anos pode frequentemente perder mais que o estimado pelos 4 cenários gerados pelas duas primeiras componentes principais.

4.4 Utilizando 4 componentes para construir cenários

Adicionando o terceiro fator – PC3 multiplicado pelo seu desvio padrão, resulta em oito cenários, resultados das combinações dos três fatores, cada um sendo considerado com o sinal positivo e com o negativo. Adicionando-se o quarto componente principal, resultam 16 cenários. A **Figura 8** os mostra, comparados com os mesmos dados da **Figura 7**. Oito cenários estão na periferia e representam as situações de maior *stress* enquanto oito ficam dentro da área. O polígono resultante parece que adequadamente contem a grande maioria das taxas de 2 e 3 anos, e a mesma conclusão pode ser feita para os outros 44 spreads que são construídos a partir das combinações dos 10 vencimentos combinados dois a dois.

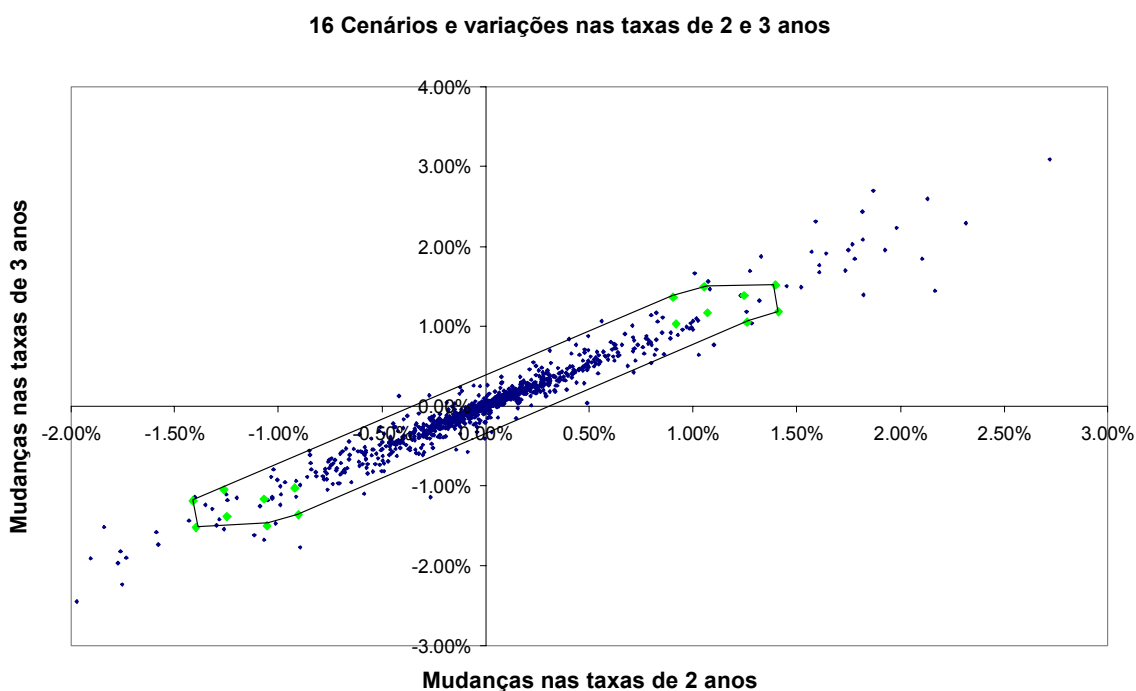


Figura 8: dispersão utilizando-se 16 cenários

Na figura acima, conforme previsto, com a montagem de 16 cenários, mais pontos ficaram incluídos dentro do novo polígono. Percebe-se que os *outliers*, desconsiderando-se os discutidos acima, encontram-se dispersos de maneira relativamente uniforme ao redor do polígono.

A Tabela 8 abaixo mostra os 16 cenários da **Figura 8**:

Cenários/Meses	1	3	6	12	18	24	30	36	48	60
c1	-0.01%	-0.28%	-0.48%	-0.63%	-0.75%	-0.90%	-1.11%	-1.36%	-1.80%	-2.08%
c2	-0.35%	-0.22%	-0.19%	-0.44%	-0.78%	-1.05%	-1.31%	-1.50%	-1.75%	-1.88%
c3	0.48%	0.04%	-0.49%	-0.98%	-1.16%	-1.25%	-1.31%	-1.38%	-1.50%	-1.57%
c4	0.14%	0.09%	-0.20%	-0.80%	-1.19%	-1.40%	-1.52%	-1.52%	-1.45%	-1.38%
c5	-0.91%	-1.29%	-1.34%	-1.11%	-0.97%	-0.92%	-0.93%	-1.03%	-1.23%	-1.39%
c6	-1.25%	-1.24%	-1.06%	-0.92%	-1.00%	-1.07%	-1.14%	-1.16%	-1.18%	-1.20%
c7	-0.42%	-0.98%	-1.36%	-1.46%	-1.39%	-1.26%	-1.14%	-1.05%	-0.93%	-0.89%
c8	-0.76%	-0.93%	-1.07%	-1.28%	-1.42%	-1.41%	-1.35%	-1.18%	-0.88%	-0.69%
c9	0.76%	0.93%	1.07%	1.28%	1.42%	1.41%	1.35%	1.18%	0.88%	0.69%
c10	0.42%	0.98%	1.36%	1.46%	1.39%	1.26%	1.14%	1.05%	0.93%	0.89%
c11	1.25%	1.24%	1.06%	0.92%	1.00%	1.07%	1.14%	1.16%	1.18%	1.20%
c12	0.91%	1.29%	1.34%	1.11%	0.97%	0.92%	0.93%	1.03%	1.23%	1.39%
c13	-0.14%	-0.09%	0.20%	0.80%	1.19%	1.40%	1.52%	1.52%	1.45%	1.38%
c14	-0.48%	-0.04%	0.49%	0.98%	1.16%	1.25%	1.31%	1.38%	1.50%	1.57%
c15	0.35%	0.22%	0.19%	0.44%	0.78%	1.05%	1.31%	1.50%	1.75%	1.88%
c16	0.01%	0.28%	0.48%	0.63%	0.75%	0.90%	1.11%	1.36%	1.80%	2.08%

Tabela 8: 16 cenários construídos a partir dos 4 primeiros Componentes Principais.

4.5 Características dos Componentes Principais

A **Figura 9** mostra as quatro primeiras componentes principais. Conforme esperado, PC1 representa fundamentalmente uma mudança de nível, com uma pequena inclinação, conforme comentado anteriormente, e PC2 é praticamente linear e continuamente decrescente. PC3 faz com que a curva tenha um *steepening* nos primeiros 18 meses e um *flattening* no intervalo de 18 a 60 meses. PC4 produz movimentação relativa entre 1 e 6 meses, entre 6 e 30 meses, e entre 30 e 60 meses. Como visto nas figuras anteriores, estes contrastes geram uma melhora na explicação de alguns *spreads* e podem ter significância para certos portfólios.

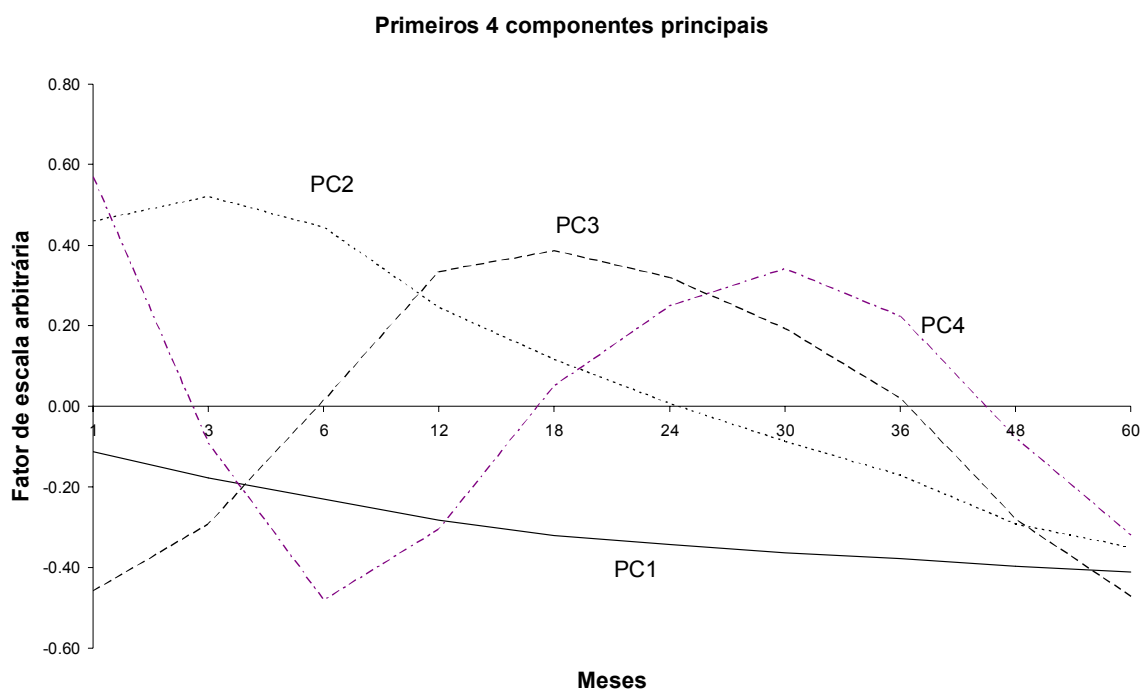


Figura 9: Componentes principais. A escala de cada componente é tal que a soma dos quadrados de seus loadings é unitária, portanto, não tem interpretação direta.

A Figura 10 abaixo mostra 8 dos 16 cenários construídos a partir dos 4 primeiros componentes principais. Foram considerados apenas os cenários que têm contribuição de PC1 positiva, ou seja, deslocamento para cima da curva. Os outros 8 cenários são simétricos a esses para baixo. Pode-se concluir que os cenários resultantes produzem uma ampla gama de movimentos de curva. Mesmo se um portfólio contém posições ativas e passivas e depende de *spreads* e sutis correlações na curva de juros, os riscos devem ser mostrados por algum desses cenários.

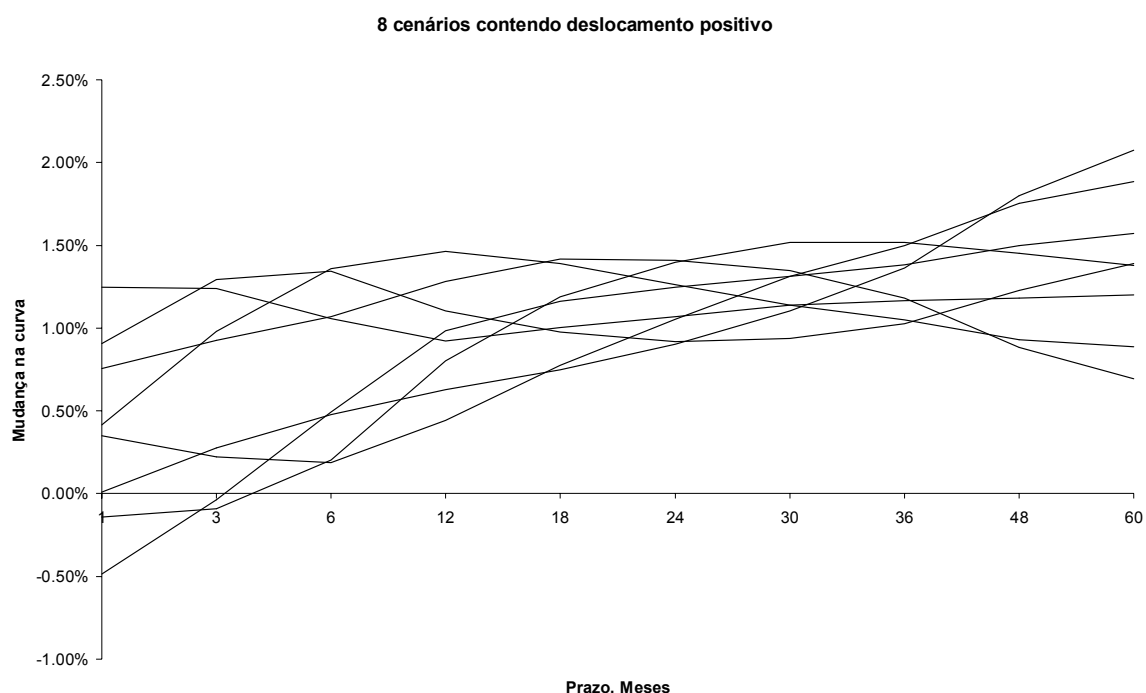


Figura 10: Oito dos 16 cenários feitos a partir dos 4 primeiros componentes principais

4.6 Comparação com dados históricos

Como veremos, o método baseado em fatores aproxima o percentil desejado de perda observado em dados históricos. O erro de aproximação tende a ser o de exagerar um pouco no sentido conservador, na perspectiva dos usuários do controle de risco. Por exemplo, utilizando-se 2.33 desvios padrões para construir cenários, a tendência é obter-se uma estimativa de risco ligeiramente maior que o 99º percentil da distribuição de perdas.

Este conservadorismo é o resultado da interação de três forças distintas sobre a estimativa resultante. As primeiras duas delas levam, isoladamente, a uma sub-estimativa do risco e a terceira a uma sobre-estimativa (conservadorismo):

1) Os fatores podem ter uma distribuição que não seja normal com “*fat tails*”. Se esse for o caso, o 1º percentil e/ou o 99º, podem corresponder a mais que 2.33 desvios padrões usados nos cenários, ou seja, um determinado fator excederia 2.33 desvios padrões em mais de 1% dos casos. Como foi discutido anteriormente, isso realmente ocorre na curva local.

2) O portfólio pode depender criticamente de um fator de maior ordem que aqueles utilizados para construir cenários. Por exemplo, pode-se construir um portfólio de 4 instrumentos que

tem sensibilidade mínima aos 4 primeiros fatores, o que iria subestimar substancialmente o risco do portfólio.

3) O portfólio pode depender de dois ou mais fatores. Essa situação, que ocorre na esmagadora maioria dos casos, requer uma exploração maior. Para permitir a visualização melhor e simplificar a discussão, vamos assumir que os dois primeiros fatores explicam toda a variância dos movimentos da curva e também que ambos têm distribuição normal. A Figura 11 abaixo mostra a dispersão dos “scores” dos fatores PC1 e PC2 (ou seja, qual a contribuição de cada um desses fatores para cada variação da curva do nosso histórico) e também e os quatro pontos dos cenários (+/- 2.33 para cada fator).

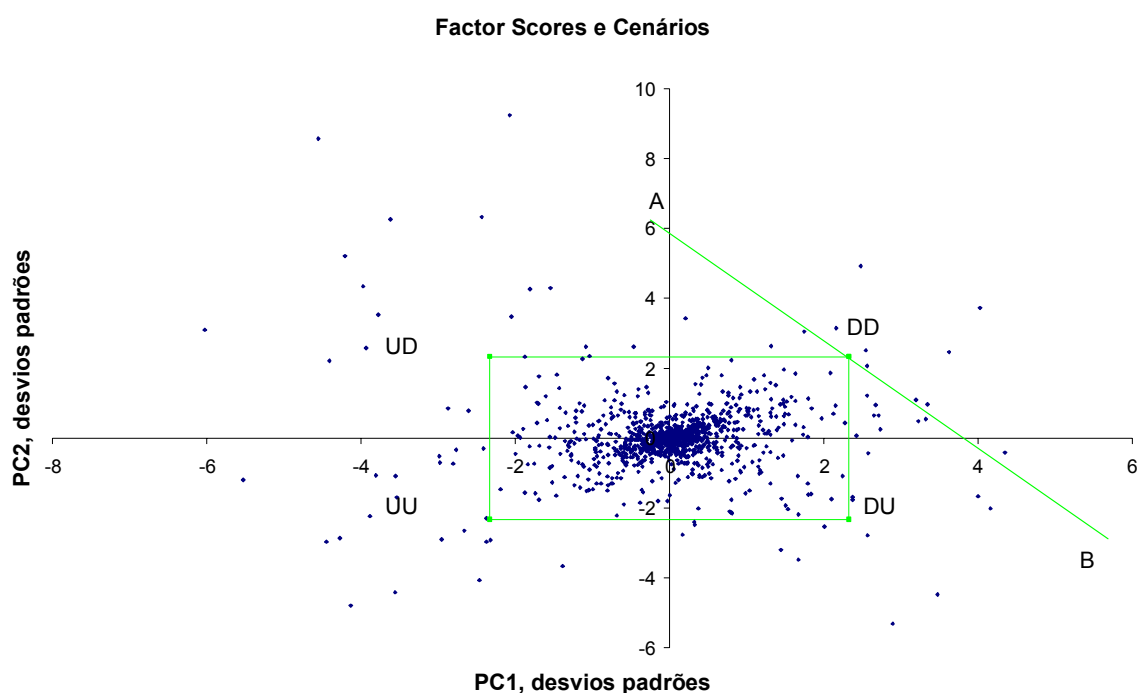


Figura 11: Dispersão com os “scores” das duas primeiras componentes principais e 4 cenários

Como hipóteses, vamos assumir que o portfólio em questão responde linearmente aos dois fatores. Isto implica que o portfólio terá sua perda máxima em um dos vértices do retângulo da Figura 11. Vamos supor que a perda máxima ocorra no ponto DD. Além disto, o conjunto de pontos cujo risco é igual a determinado valor irá aparecer no gráfico como uma linha reta.

Considerando-se três casos:

- O portfólio depende apenas do fator PC1 e não de PC2. Sua perda irá exceder a perda em DD apenas se o fator de PC1 exceder 2.33, isso é, somente se o ponto para aquele

dia ficar à direita da linha vertical que passa por DD. A probabilidade disso ocorrer, de acordo com a hipótese de curva normal, é de 1%. Logo, a perda indicada pelo cenário DD representa exatamente o 99º percentil de perdas.

- Considerando-se agora um portfólio que dependa apenas de PC2. Sua perda excede a do ponto DD apenas se o *score* do PC2 for maior que 2.33, ou seja, quando o ponto aparecer acima da linha horizontal que passa por DD. Novamente, a probabilidade é igual a 1% e o valor do portfólio no ponto DD de novo representará exatamente o 99º percentil de perdas.
- Finalmente, considerando-se um portfólio que depende dos dois primeiros componentes principais, PC1 e PC2, este terá uma perda maior que em DD apenas se a combinação dos dois componentes principais resultar em um ponto localizado acima da linha AB na **Figura 11**. Isso porque, um aumento na participação de PC1 combinado com uma diminuição de PC2 produz a mesma perda. A inclinação da linha é definida pela proporção das sensibilidades do portfólio a PC1 e PC2. A questão agora é: qual a proporção de pontos do espaço amostral que é isolada pela reta AB. Se 1%, então novamente o cenário representa o 99º percentil. A resposta, no entanto, é que o número de pontos acima da reta AB é menor que 1% do total. Isso pode ser demonstrado no **Anexo IV** e está em linha com o que a Figura 11 sugere. Para efeito de comparação, o conjunto de pontos que ficam à esquerda do ponto DD soma 1% do total. O mesmo pode ser dito dos pontos acima de DD. Pode-se perceber que esses conjuntos contêm muito mais elementos que a região acima da reta AB. Esse fato implica que o valor de risco em DD representa um percentil de perda superior ao 99º percentil, ou seja, em mais de 99% dos casos a perda é inferior à que ocorre em DD. Portanto, analisando apenas esse fator isoladamente, temos que o método baseado em fatores superestima o risco no caso de portfólios que dependem de dois ou mais fatores.

O valor de quase todos os portfólios depende de mais de um fator. Por exemplo, um portfólio constituído de apenas um título de 5 anos depende de qualquer fator que afete a taxa de um título longo. A **Figura 9** mostra que os 4 primeiros fatores têm efeito sobre esse título longo. Por exemplo, um portfólio pré-fixado ativo no prazo de dois anos e passivo no de três anos, com risco direcional zero, pode não ter tanta influência dos fatores PC1 e PC4 que praticamente deslocam esses prazos no mesmo montante, mas é fortemente influenciado por PC2 e PC3, conforme pode ser verificado na **Figura 9**. Um

portfolio que responde apenas a um fator é uma anomalia, pois é perfeitamente *hedgado* contra os outros 3 fatores.

Capítulo 5 – VAR tradicional e VAR com PCA

A **Figura 12** examina a importância prática dessas três fontes de erro nas estimativas. Cada ponto na figura representa um portfólio gerado aleatoriamente de instrumentos de renda fixa sensíveis a cada um dos vencimentos que estamos estudando (1M, 3M, 6M, 1 ano, etc.). A quantidade de cada instrumento foi determinada de maneira que a *modified duration* de cada vértice fosse uma variável aleatória com distribuição normal com média zero e desvio padrão \$10.000.000,00. Com isso, uma mudança de 0,01% na curva em determinado vencimento produzirá a mesma distribuição de ganhos e perdas independente do vencimento ser mais curto ou mais longo. Cada portfólio aleatório foi sujeito a dois experimentos. Primeiro, o resultado (*P&L*) foi simulado para cada um dos 1157 dias de dados históricos. O 99º percentil da distribuição dessas perdas estabelece a posição horizontal do ponto. Ou seja, calculou-se para cada um dos 1000 portfólios qual o resultado para cada dia da base histórica e tomou-se a perda correspondente ao 99º percentil. Segundo, o VAR de cada portfólio foi estimado de acordo com o método baseado em fatores. Isto é, calculou-se o *P&L* (resultado) de cada um dos 1000 portfólios sujeitos a cada um dos 16 cenários da Tabela 9 e tomou-se o pior caso (a maior perda). Este valor representa a posição vertical de cada ponto. Quando um ponto se situa na linha de 45 graus, o método baseado em fatores conseguiu estimar o 99º percentil de perda para aquele portfólio.

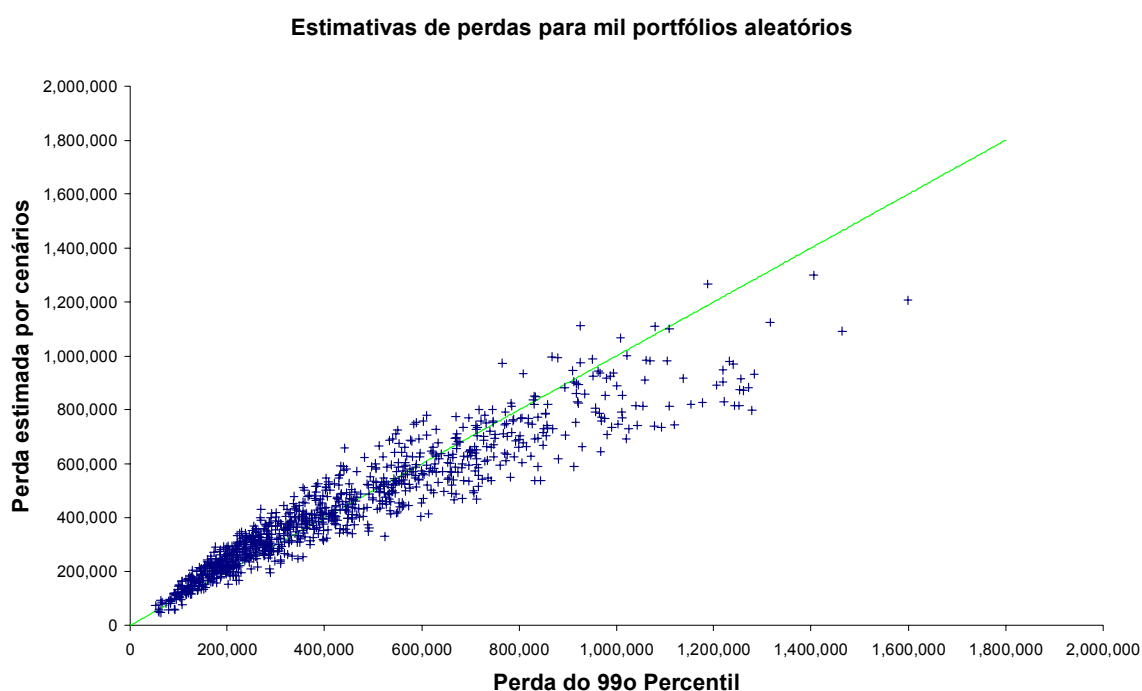
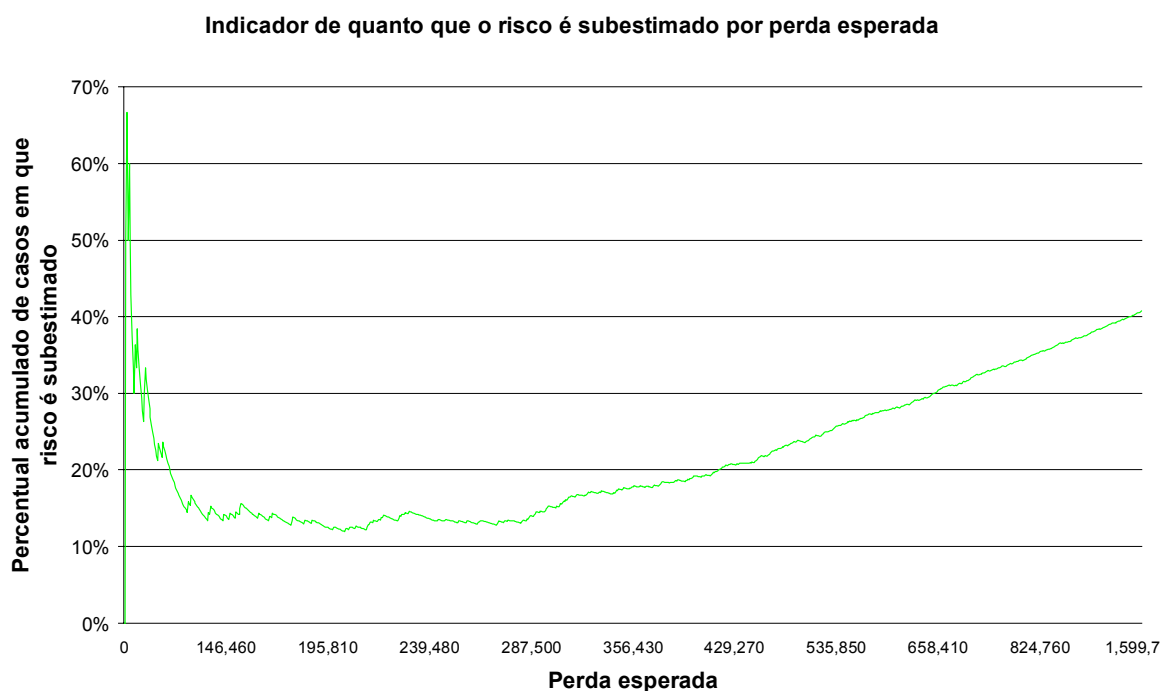


Figura 12: Cada ponto representa um dos mil portfólios gerados aleatoriamente. A linha horizontal é o 99º percentil de sua perda aplicada a dados históricos e a vertical representa a pior perda se aplicados aos 16 cenários feitos através dos fatores.

Na figura acima, se determinado ponto fica acima da reta diagonal, significa que o risco foi sobre-estimado pelos cenários; se fica abaixo, subestimado. Na literatura internacional, (FRYE 1996 e 1997), apenas 9% dos pontos ficaram abaixo da reta diagonal, ou seja, em 91% dos casos os cenários superestimam o risco real. No caso desse estudo, 41% dos pontos ficaram abaixo da linha diagonal. Ou seja, qualitativamente, dentre as influências listadas no início da seção 4.6, a de número (3) domina ligeiramente as influências (1) e (2). Conforme já foi discutido, no caso brasileiro, devido a um histórico com um número grande de crises e situações de stress relativamente ao pequeno número de observações disponíveis, faz com que a distribuição de perdas apresente *fat tails*, conforme influência (1) descrita acima. Uma outra conclusão importante, é que para portfólios com maior risco – ou seja, pontos que estão mais à direita do gráfico – o método baseado em cenários tende a ser menos conservador. A **Figura 13** abaixo deixa isso mais evidente, mostrando o percentual acumulado de casos em que o risco estimado por cenários é superior ao verificado pelo 99º percentil, ou seja, o percentual de casos em que o método de cenários é conservador.



*Figura 13: Percentual acumulado de casos em que os portfólios apresentam perdas menores pelo método de cenários do que o 99º percentil dos dados históricos. Ou seja, o percentual de pontos que estão abaixo da reta de 45 graus na **Figura 12**.*

Percebe-se pela figura acima que para portfólios de menor risco, o método de cenários é mais conservador em mais de 80% dos casos. Porém, esse percentual cai para portfólios mais arriscados.

Considerando-se as diferenças para cada portfólio entre os métodos de cenários e o 99º percentil, temos que a perda estimada é, em média, 6% maior que a verificada pelos dados históricos (mais conservador) com desvio padrão de 20%. Se tomarmos os cem portfólios de maior risco, como a figura acima sugere, essa situação se inverte e essa diferença é em média -16% (subestimação de risco) com um desvio padrão de 13%. Essas variações estão dentro do que gerentes de risco, *senior managers* e *traders* acham aceitável.

Capítulo 6 – Portfolios Contendo Opções

A introdução de opções adiciona dois elementos à análise. Primeiro, os valores das opções dependem de um fator adicional: a volatilidade e as mudanças na volatilidade podem afetar o valor do portfólio tanto quanto mudanças nas taxas de juros. Para o método baseado em fatores, isso adiciona uma ou mais dimensões àquelas já identificadas anteriormente. Os cenários resultantes combinam variações na volatilidade com variações nas taxas.

Segundo, opções de instrumentos de renda-fixa tem uma resposta muito mais não-linear a taxas de juros que *swaps*, títulos, ou futuros. Esta não-linearidade pode fazer com que algumas técnicas levem a estimativas erradas ou a resultados sem sentido. Por exemplo, uma opção "*hedgeada*" pode não ter sensibilidade a pequenas mudanças de preços do ativo objeto e ainda assim ter uma perda considerável em cenários de mercado razoáveis. Métodos que linearizam a resposta do portfólio a variáveis de mercado podem facilmente subestimar o risco em um portfólio dominado por opções.

A resposta não linear de opções também apresenta um desafio – embora muito menos grave – ao método baseado em cenários. Pontos dentro do retângulo, como o da Figura 11, podem produzir uma perda maior que a dos pontos dos vértices. Como a maior parte da densidade de probabilidade se encontra dentro do retângulo, o valor nos vértices pode representar bem menos que o 99º percentil de perdas, portanto o método descrito mostraria nesse caso um risco muito menor que o real. A função de lucros também pode ter um comportamento diferente do que foi discutido até agora: no caso da Figura 11, perdas maiores que em DD podem ocorrer, por exemplo, à esquerda do ponto DD ou abaixo da linha AB. Nesses casos, os cenários traçados a partir do PCA podem subestimar consideravelmente os riscos.

Apesar desse desafio, o método é útil na situação mais relevante para controlar risco para instituições envolvidas em posições especulativas ou de arbitragem: portfólios dominados por posições "*short*" (vendidas) em opções. Para ilustrar isso, vamos comparar um portfólio contendo uma posição *short* em *straddle* com uma consistindo em uma posição *long* (comprada) em *straddle*.

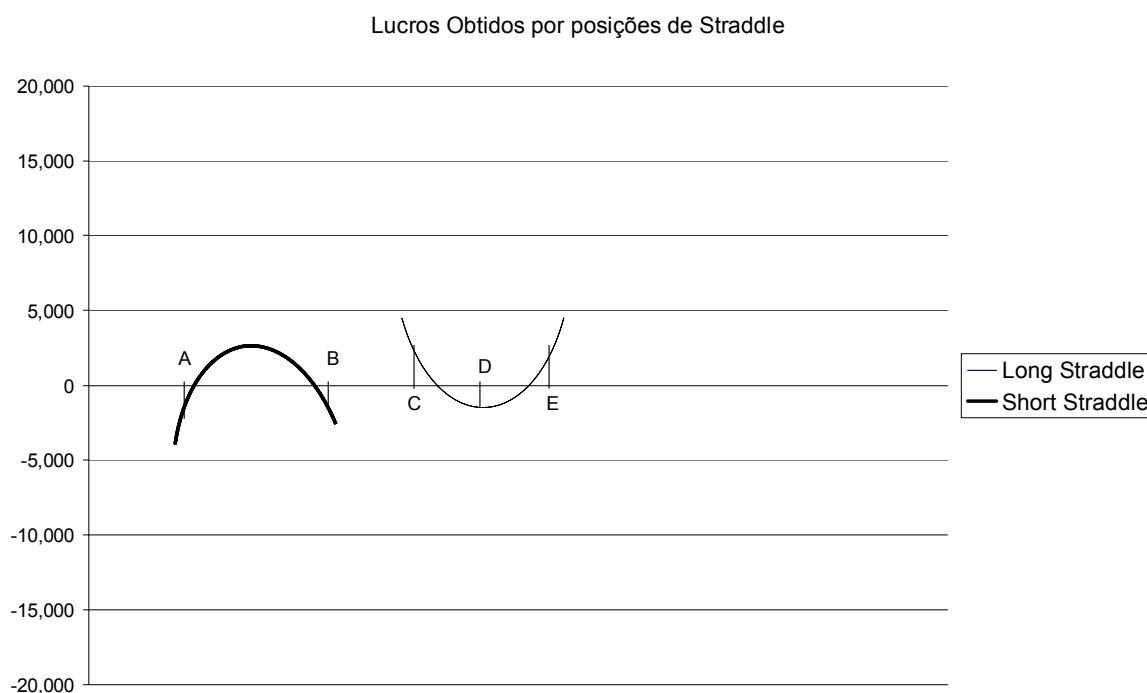


Figura 14: Em uma posição short Straddle, ou outra posição qualquer dominada por venda de opções, a perda em A ou B excede a perda em qualquer ponto intermediário entre A e B. Para posições Long Straddle, a perda máxima ocorre em algum ponto intermediário em relação às extremidades.

A curvatura côncava da posição *short straddle* mostrada na figura 14 tem uma importante implicação: uma vez conhecida a perda em quaisquer dois pontos como A e B, nós temos certeza que nenhuma perda maior ocorre entre esses pontos. Geralmente, o portfólio que é vendido em opções encontrará a maior perda em uma extremidade, não no interior do intervalo ou espaço entre os pontos de cenário. Como a região entre os pontos de cenário contém a maior parte da densidade de probabilidade, a resposta não-linear de posições vendidas em não implicará em uma subestimação considerável do risco.

A situação é a oposta no caso de *long straddles*. O fato de o portfólio produzir um lucro no ponto C e E não diz nada a respeito das perdas nos pontos interiores como, por exemplo, o ponto D. Para calcular o risco de um portfólio dominado por posições compradas em opções, verificar os pontos das extremidades não é suficiente. Isso ocorre em portfólios que são dominados por posições compradas em opções. Métodos que dependem de cenários pré-determinados não são recomendáveis para esse tipo de portfólio, embora a decomposição da curva em cenários ainda seja uma ferramenta muito útil, mesmo para esses casos, para fazer simulações de movimentos possíveis da curva e seus efeitos sobre o portfólio.

Capítulo 7 – Conclusões

Esse trabalho aplica a técnica de PCA para a curva de juros brasileira visando construir cenários e calcular-se o VAR. É interessante notar que a metodologia se mostrou tão eficiente quanto trabalhos de outros autores mencionados na bibliografia. As três primeiras componentes principais explicam mais de 98% da variância total no presente trabalho. A tabela abaixo mostra essa proporção em outros trabalhos analisados:

Autor	País	% Variância
Carollo	Brasil	95.0%
Frye	EUA	95.7%
Garbade	EUA	99.0%
Rebonato	Reino Unido	99.7%
Sawant	Índia	85.0%

Tabela 9: Comparação da proporção da variância total explicada pelas três primeiras componentes principais.

Um fato bem importante foi que se percebeu que as componentes principais têm interpretações semelhantes às encontradas em outros trabalhos, ou seja, a primeira como um deslocamento de nível, a segunda, como mudança na inclinação e a terceira como aumento ou redução da convexidade. No entanto, ao contrário dos trabalhos internacionais, percebe-se que a primeira componente principal não representa um deslocamento essencialmente paralelo. Apesar de manter a característica mais importante, ou seja, deslocar todas as taxas da curva na mesma direção, no mercado local essa componente afeta as taxas mais curtas com menor intensidade que as mais longas. É interessante mencionar que esse resultado é confirmado pelos estudos de Silveira e Bessada (2003) e Carollo (n.d.). Isso ocorre, porque, como foi mencionado, a primeira componente principal nada mais é que o deslocamento que melhor explica o movimento médio da curva, isto é, dentre todos os deslocamentos possíveis, é o que minimiza os quadrados dos erros. Portanto, no caso brasileiro, a melhor explicação para o movimento médio da curva é um deslocamento conjugado com inclinação. Isso faz com que, quando a curva se desloca para cima, ela geralmente o faz inclinando-se no sentido anti-horário. No linguajar do mercado, a curva abre com um *steepening*, ou vice-versa (curva fecha com *flattening*).

Esse resultado parece coerente com o que sempre se observou no mercado brasileiro. Geralmente, as taxas de prazos próximos são bastante correlacionadas, e em dias de piora do mercado, as taxas curtas aumentam, mas as longas aumentam bem mais, e vice-versa. Esse

fato parece estar mudando com um maior número de participantes negociando as curvas longas – principalmente investidores estrangeiros. Essa mudança se verificou de forma mais acentuada no início de 2005, conforme comentado no capítulo 3. Houve, nesse período, dias em que o mercado achava que o COPOM iria tomar uma decisão menos conservadora com relação à taxa de juros. Nesses dias, quando o mercado se decepcionava com as decisões de política monetária, percebia-se que as taxas curtas da curva aumentavam enquanto as longas se mantinham constantes ou diminuía com o fluxo de estrangeiros. Ou seja, movimento de deslocamento para cima com *flattening*, diferente do explicado pela primeira componente principal. No entanto, por ser um fenômeno recente e não ocorrer sempre, ainda não teve uma relevância estatística tão grande a ponto de mudar a inclinação da primeira componente principal.

Finalmente, com base nos capítulos 4 e 5, percebe-se que o modelo de cenários proposto para cálculo de VAR se mostra coerente com o VAR tradicional, sendo que é mais conservador em seus resultados, com a vantagem de que é muito mais eficiente na implementação, na demanda computacional e no conceito. Isto é, dados os componentes principais, fica muito simples e intuitivo para operadores e gerentes de risco entender qual risco correm em determinado portfolio e escolher qual o melhor conjunto de pontos para se fazer sua eventual imunização. Outro ponto é que a técnica possibilita decompor as variações da curva em movimentos diferentes e independentes entre si. Sabe-se, por exemplo, que um portfolio com exposição apenas à segunda componente principal, não será afetado pelos movimentos correspondentes às outras componentes. Portanto, a implementação da técnica de PCA para a curva local é bastante promissora e pouco utilizada pelas instituições financeiras, tendo ainda um grande potencial ainda não explorado.

Referências

Carollo, J. R. (n.d.). *Componentes principais aplicados à yield curve brasileira*. Artigo distribuído por FHS Consultoria e Sistemas – Div. Risk Management, São Paulo.

Fonseca, M. A. R. da (2003) *Álgebra Linear Aplicada a Finanças, Economia e Econometria*. Barueri, SP: Manole

Frye, J. (1996, abril). *Principals of Risk: Creating factor-based scenarios to estimate interest rate risk*. Risk Publications.

Frye, J. (1997, abril). *Principals of Risk: Finding Value-at-Risk through factor-based interest rate scenarios*. Risk Publications.

Garbade, K. D. (1996). *Fixed Income Analytics*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press

Hull, J. C. (2002). *Options, futures and other derivatives* (fifth edition). New Jersey, EUA: Prentice Hall

Knez, P. J., Litterman, R. & Scheinkman, J. (1994, dezembro). Explorations into factors explaining money market returns. *The Journal of Finance*, vol. 49, n^o 5.

Litterman, R. & Scheinkman, J. (1991, junho). Common factors affecting bond returns. *The Journal of Fixed Income*, pp. 54-61

Rebonato, R. (1998). *Interest-rate option models* (Second Edition). EUA: John Wiley & Sons, LTD

Rebonato, R. (1999). *Volatility and correlation in the pricing of equity, FX and interest-rate options*. Chichester, Inglaterra: John Wiley & Sons, LTD

Silveira G. B., & Bessada, O. (2003). Análise de componentes principais de dados funcionais: uma aplicação às estruturas a termo de taxas de juros. *Banco Central do Brasil: Trabalhos para Discussão*, 73

Sawant, S. (2001, julho). Principal component analysis for VAR estimation. *ICICI research centre.org*. <http://www.icicimarkets.com>

Wilmott, P. (1998). *Derivatives*. Chichester, Inglaterra: John Wiley & Sons, LTD

Anexo I - Autovalores e autovetores

Os conceitos de autovalor e autovetor são definidos para matrizes quadradas. Eles estão ligados a outro importante conceito da Álgebra Linear, o de *transformação linear* que, em essência, corresponde a uma interpretação particular da equação $A.x = b$. Dada uma matriz $A_{m \times n}$ e um vetor x de dimensão n , podemos interpretar o produto $A.x$ como uma transformação de um vetor do \mathbb{R}^n em um vetor \mathbb{R}^m . Além disso, essa transformação pode ser aplicada a qualquer elemento do \mathbb{R}^n ; portanto, consideramos que todo espaço n -dimensional fica transformado no espaço m -dimensional pela matriz A .

No caso dos autovalores e autovetores, estamos interessados em transformações lineares, definidas para $x \neq 0$, com duas características especiais:

- o espaço vetorial é transformado nele próprio – ou seja, as matrizes são quadradas;
- os elementos do \mathbb{R}^n são transformados em múltiplos de si mesmos – ou seja, essas transformações podem ser representadas por:
 $C.x = \lambda.x$ (para um determinado escalar λ)

λ é denominado *autovalor* (ou *raiz característica*) de C e x , *autovetor* (ou *vetor característico*) de C .

Uma matriz quadrada apresenta um número finito de autovalores e um conjunto infinito de autovetores.

Sendo A a matriz diagonal constituída pelos autovalores de uma determinada matriz quadrada $C_{n \times n}$, temos que:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

E sendo S a matriz $n \times n$ cujas colunas são os autovetores de C associados respectivamente a $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$, temos que:

$$C.S = S.A \quad \Rightarrow \quad S^{-1}.C.S = A \quad (\text{caso } S \text{ seja não singular, isso é, que possua inversa}).$$

Esta equação acima é o que se chama de método de diagonalização de uma matriz.

Um caso particular da transformação acima ocorre quando a matriz C é simétrica. Nesse caso, conforme discutido na sessão 2.1, seus autovetores são ortonormais. Portanto, a matriz S tem a seguinte propriedade:

$$S' = S^{-1} \quad (\text{a transposta de } S \text{ é igual a sua inversa})$$

Nesse caso, pode-se dizer que:

$$S^{-1}.C.S = A$$

Anexo II: Demonstração de propriedade de autovalores e autovetores:

Tese: Se A é uma matriz simétrica com elementos reais e autovalores distintos, então seus autovalores são reais e seus autovetores são ortogonais (ou podem ser ortogonalizados).

Considerando dois autovalores λ_i e λ_j e os autovetores correspondentes x_i e x_j . Pela definição, temos:

$$Ax_i = \lambda_i x_i; \quad Ax_j = \lambda_j x_j$$

Pré-multiplicando a primeira equação por x_j' e a segunda por x_i' , encontramos:

$$x_j' A x_i = \lambda_i x_j' x_i; \quad x_i' A x_j = \lambda_j x_i' x_j$$

Considerando que a matriz A é simétrica, temos que: $x_j' A x_i = (x_i' A x_j)'$

$$\text{Portanto, } \lambda_i x_j' x_i = (\lambda_j x_i' x_j)'$$

$$(\lambda_i - \lambda_j)(x_j' x_i) = 0$$

Como as raízes λ_i e λ_j são distintas, os vetores são necessariamente ortogonais.

Anexo III – Prova da Dualidade entre PCA e Regressão Linear

Dada uma matriz Y com dimensões $N \times p$, de dados ajustados pela média, ou seja, cujas colunas têm média igual a 0.

Define-se um vetor x arbitrário de dimensões $p \times 1$ que seja normal, isto é, $x'x = I$.

Então, a soma acumulada dos quadrados de N regressões independentes das linhas de Y com relação a x , atingem seu mínimo quando x é igual ao primeiro componente principal dos dados Y .

Prova: Assumindo que Y_i' simboliza a i -ésima linha da matriz Y . A i -ésima regressão leva a forma:

$$Y_i = \hat{a} x + e_i$$

Onde \hat{a} é o coeficiente de regressão e e_i é o vetor $p \times 1$ dos resíduos. Minimizando $e_i'e_i$ sujeito a $x'x = I$ implica que

$$\hat{a} = Y_i'x$$

Um vetor linha de resíduos das regressões é então $Y_i - Y_i'x$. A soma acumulada dos quadrados de todas as regressões é igual a

$$\begin{aligned} ACSSE &= \text{traço} ((Y - Yxx') (Y - Yxx')') \\ &= \text{traço}(YY' - Yxx'Y') \\ &= \text{traço}(YY') - \text{traço}(x'Y'Yx) \\ &= \text{traço}(YY') - Nx'Sx \end{aligned}$$

Onde traço é a operação é a soma dos elementos da diagonal principal de uma matriz quadrada, e $S = Y'Y/N$ é a matriz de covariância de Y . Por definição, entre todos os vetores normais x , a primeira componente principal de Y maximiza $x'Sx$. Logo, $ACSSE$ atinge seu mínimo quando x é escolhido como a primeira componente principal.

Anexo IV – Demonstração de que o espaço amostral acima da reta AB é menor que 1%

Sendo e_1 e e_2 duas distribuições normais com média 0 e variância 1 (normal padrão), como é o caso do fator e (ver capítulo 2), então a variável aleatória $e_t = e_1 + e_2$ tem as seguintes características.

$$E(e_t) = E(e_1 + e_2) = 0$$

$$\sigma^2(e_t) = \sigma^2(e_1 + e_2) = \sigma^2(e_1) + \sigma^2(e_2) + 2 \sigma(e_1)\sigma(e_2) \rho_{1,2}$$

Onde $\rho_{1,2}$ é a correlação entre e_1 e e_2 , que é zero por hipótese. Portanto,

$$\sigma^2(e_t) = 1 + 1 = 2$$

Assumindo agora que e_1 e e_2 são, respectivamente, o número de desvios padrões de PC1 e PC2, tem-se que a reta AB da figura 11, tem como característica $e_1 + e_2 = 2 * 2.33$.

Portanto, a probabilidade de um ponto estar acima da reta AB é:

$$P(e_t > 4.66) = 0.05\%$$

Ou seja, o número de pontos que fica acima da reta AB é cerca de 20 vezes menor que o de pontos à direita de DD , que é de 1%.

Anexo V – Principais Comandos Utilizados no Matlab

‘ --- Cálculo dos componentes principais ---

```
[pcs, newdata, variances, t2] = princomp(curva_dif);
```

‘ pcs: são as componentes principais

‘ newdata: são os *factor scores*, que são os dados originais na nova base

‘ variances: variância de cada componente principal

‘ t2: T^2 de Hotelling

‘ --- Cálculo das perdas com percentis ---

```
transp=curva_dif'
```

```
for j=1:1000
```

```
for i=1:1157
```

```
result(i)=mat(j,:)*transp(:,i);
```

‘ mat é a matriz com os 1000 portfolios simulados

```
end
```

```
perc(j,1)=prctile(result,0.95);
```

```
perc(j,2)=prctile(result,98.95);
```

```
end
```

‘ --- Cálculo das perdas com cenários ---

```
trans_cen=A16cen'
```

‘ A16cen é a matriz com os 16 cenários obtidos a partir

```
for i=1:1000
```

‘ dos 4 primeiros componentes principais

```
for j=1:16
```

```
result(j)=mat(i,:)*trans_cen(:,j);
```

```
end
```

```
resul_cen(i,1)=min(result);
```

```
resul_cen(i,2)=max(result);
```

```
end
```

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)