



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil

**ANÁLISE NÃO-LINEAR FÍSICA DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO  
UTILIZANDO O ELEMENTO FINITO PRISMÁTICO REGULAR  
LINEAR ASSOCIADO AO DE BARRA**

**ALIENE FABIANA FAGLIONI**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil - Área de Concentração: Estruturas.

ORIENTADOR: Prof. Dr. ROGÉRIO DE OLIVEIRA RODRIGUES

Ilha Solteira - SP  
Agosto de 2006.

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação/Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP-Ilha Solteira

F155a Faglioni, Aliene Fabiana. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2006  
Análise não-linear física de vigas de concreto armado utilizando o elemento finito prismático regular linear associado ao de barra / Aliene Fabiana Faglioni. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2006  
122 p. : il. (algumas color.)  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento : Estruturas, 2006  
Orientador: Rogério de Oliveira Rodrigues  
Bibliografia: p. 116-122  
1. Análise numérica. 2. Método dos elementos finitos. 3. Concreto armado. 4. Materiais Deformações. 5. Mecânica dos sólidos.



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

### **CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

**TÍTULO:** Análise não-linear física de vigas de concreto armado utilizando o elemento finito prismático regular linear associado ao de barra

**AUTORA:** ALIENE FABIANA FAGLIONI

**ORIENTADOR:** Prof. Dr. ROGÉRIO DE OLIVEIRA RODRIGUES

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE em ENGENHARIA CIVIL pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. ROGÉRIO DE OLIVEIRA RODRIGUES

Departamento de Engenharia Civil / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. RENATO BERTOLINO JUNIOR

Departamento de Engenharia Civil / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. JORGE MUNAIAR NETO

Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos - EESC/USP - São Carlos/SP

Data da realização: 24 de agosto de 2006.

---

Presidente da Comissão Examinadora  
Prof. Dr. ROGÉRIO DE OLIVEIRA RODRIGUES

Dedico este trabalho à memória de meu pai Osney,  
à minha irmã Aline e, em especial,  
à minha mãe Olésia, por todo o apoio e incentivo.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof. Dr. Rogério de Oliveira Rodrigues, pela orientação e ensinamentos recebidos.

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia Civil da FEIS/UNESP.

Aos amigos que fiz durante o período de mestrado, pelo convívio e incentivo.

Aos meus amigos de Maringá, que me apoiaram desde o início até o fim do trabalho.

Aos amigos, professores e funcionários da Universidade Estadual de Maringá - UEM, que contribuíram para minha formação profissional e pessoal.

À minha família, principalmente minha mãe e irmã, pelo apoio e incentivo dados e pela confiança que depositaram em mim.

E acima de tudo, a Deus.

## RESUMO

FAGLIONI, A. F. **Análise não-linear física de vigas de concreto armado utilizando o elemento finito prismático regular linear associado ao de barra.** 122 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.

Este trabalho tem como objetivo principal a análise estática linear e não-linear física do comportamento de vigas de concreto armado, por meio do Método dos Elementos Finitos, utilizando o elemento finito prismático regular linear com oito nós para simular o concreto e o elemento finito de barra com dois nós para simular o aço.

Na dedução das matrizes de rigidez do elemento finito prismático regular linear e do elemento de barra utiliza-se a formulação com coordenadas homogêneas, cujas funções aproximadoras contêm oito e dois monômios, respectivamente, extraídos do polinômio algébrico cúbico completo em  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Para a consideração não-linearidade física do concreto utiliza-se o critério de Mohr-Coulomb, permitindo representar a diminuição da rigidez em função da ruptura do material. Em relação à não-linearidade do aço é empregado o modelo elastoplástico com endurecimento linear.

Para finalizar, apresentam-se exemplos que, comparados com resultados numéricos e experimentais de outros pesquisadores, comprovam a validade do modelo adotado neste trabalho.

**Palavras-chave:** Concreto armado; Comportamento não-linear físico; Método dos Elementos Finitos.

## **ABSTRACT**

FAGLIONI, A. F. **Physical non-linear analysis of reinforced concrete beams using the linear regular prismatic finite element associated with the frame element.** 122 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.

The main objective of this work is the linear and physical non-linear static analysis of behaviour of reinforced concrete beams, by means of the Finite Element Method, using the linear regular prismatic finite element with eight nodes to simulate the concrete and the frame finite element with two nodes to simulate the steel.

The formulation employing homogeneous coordinates, using approximating functions containing eight and two terms starting from the complete cubic algebraic polynomial in Cartesian coordinates  $x$ ,  $y$  and  $z$ , is used to obtain the stiffness matrices for the linear regular prismatic finite element and for the frame element, respectively. The Mohr-Coulomb criterion is used to take into account the physical non-linearity of concrete, permitting to represent the decrease of stiffness in function of the material rupture. Towards the steel physical non-linear behaviour is taken the elastic-linear work hardening model.

Finally, examples are presented that, compared with theoretical and experimental results of other researchers, prove the validity of the model adopted in this work.

**Keywords:** Reinforced concrete; Physical non-linear behaviour; Finite Element Method.



## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 2.1 - Sistema estrutural arbitrário.....                                                                                                 | 21 |
| Figura 2.2 - Tensões em um ponto.....                                                                                                           | 23 |
| Figura 2.3 - Estado de tensões no ponto P.....                                                                                                  | 24 |
| Figura 2.4 - Tensões em um plano genérico e estado de tensões<br>.....                                                                          | 26 |
| Figura 2.5 - Espaço de Haigh-Westergaard.....                                                                                                   | 30 |
| Figura 2.6 - Elipsóide de Lamé.....                                                                                                             | 31 |
| Figura 2.7 - Planos Octaédricos.....                                                                                                            | 32 |
| Figura 2.8 - Geometria do versor $\mathbf{n}$ .....                                                                                             | 32 |
| Figura 2.9 - Decomposição vetorial.....                                                                                                         | 33 |
| Figura 2.10 - Definição do plano $\pi$ .....                                                                                                    | 38 |
| Figura 2.11 - Definição do plano desviador.....                                                                                                 | 39 |
| Figura 2.12 - Referencial no plano desviador.....                                                                                               | 40 |
| Figura 2.13 - Definição do versor $\mathbf{e}_1'$ .....                                                                                         | 40 |
| Figura 2.14 - Definição do ângulo de similaridade.....                                                                                          | 42 |
| Figura 3.1 - Elemento finito de barra simples com dois nós..                                                                                    | 60 |
| Figura 3.2 - Elemento finito prismático regular linear com<br>oito nós.....                                                                     | 64 |
| Figura 4.1 - Diagrama tensão x deformação de aços tratados a<br>quente.....                                                                     | 78 |
| Figura 4.2 - Diagrama tensão x deformação de aços tratados a<br>frio.....                                                                       | 79 |
| Figura 4.3 - Modelo elastoplástico com endurecimento linear.                                                                                    | 80 |
| Figura 4.4 - Comportamento tensão x deformação típico do<br>concreto.....                                                                       | 82 |
| Figura 4.5 - Curva típica tensão x deformação axial e tensão x<br>deformação volumétrica do concreto para ensaio de compressão<br>uniaxial..... | 83 |
| Figura 4.6 - Critério de Mohr-Coulomb.....                                                                                                      | 85 |
| Figura 4.7 - Representação geométrica da superfície de ruptura<br>do critério de Mohr-Coulomb no espaço das tensões principais                  | 86 |

|                                                                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 4.8 - Definição da superfície de ruptura no plano desviador.....                                              | 87  |
| Figura 5.1 - Fluxograma do esquema geral de cálculo.....                                                             | 90  |
| Figura 6.1 - Viga engastada composta por um elemento sólido e submetida a um esforço axial de 20 kN.....             | 95  |
| Figura 6.2 - Resultado dos deslocamentos dos nós 1 e 2.....                                                          | 96  |
| Figura 6.3 - Gráfico força x deslocamento do nó 1.....                                                               | 96  |
| Figura 6.4 - Viga engastada composta por um elemento sólido e submetida à força perpendicular ao seu eixo.....       | 98  |
| Figura 6.5 - Resultado dos deslocamentos nodais 1 e 2.....                                                           | 98  |
| Figura 6.6 - Viga engastada composta por dois elementos sólidos e submetida à força perpendicular ao seu eixo.....   | 100 |
| Figura 6.7 - Resultado dos deslocamentos nodais 9 e 12.....                                                          | 100 |
| Figura 6.8 - Deslocamentos x números de elementos.....                                                               | 101 |
| Figura 6.9 - Viga engastada composta por quatro elementos sólidos e submetida à força perpendicular ao seu eixo..... | 102 |
| Figura 6.10 - Esquema da viga biapoiada utilizada no exemplo                                                         | 104 |
| Figura 6.11 - Seção transversal da viga: disposição da armadura principal.....                                       | 104 |
| Figura 6.12 - Viga biapoiada discretizada em 288 elementos finitos prismáticos regulares lineares.....               | 105 |
| Figura 6.13 - Gráfico força x deslocamento do nó central da viga.....                                                | 107 |
| Figura 6.14 - Gráfico força x deslocamento do nó central obtido por Rodrigues (1997).....                            | 107 |
| Figura 6.15 - Viga biapoiada discretizada em 1152 elementos finitos prismáticos regulares lineares.....              | 108 |
| Figura 6.16 - Gráfico força x deslocamento do nó central da viga.....                                                | 110 |
| Figura 6.17 - Resultados dos deslocamentos dos nós 781 a 785 para força aplicada de 39 kN.....                       | 111 |

## LISTA DE TABELAS

|                                                                                                                                                |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabela 6.1 - Deslocamentos x números de elementos.....                                                                                         | 101 |
| Tabela 6.2 - Deslocamentos x números de elementos para<br>discretização bidimensional.....                                                     | 103 |
| Tabela 6.3 - Força x deslocamento para o nó central da viga<br>(Discretização com 288 elementos prismáticos e 48 elementos de<br>barra) .....  | 106 |
| Tabela 6.4 - Força x deslocamento para o nó central da viga<br>(Discretização com 1152 elementos prismáticos e 72 elementos<br>de barra) ..... | 109 |

## SUMÁRIO

|                                                                       |           |
|-----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO</b>                                        | <b>13</b> |
| 1.1 – Tema e motivação                                                | 13        |
| 1.2 – Estado da arte                                                  | 15        |
| 1.3 – Objetivos                                                       | 18        |
| 1.4 – Apresentação                                                    | 18        |
| <br>                                                                  |           |
| <b>CAPÍTULO 2 – CONCEITOS DA MECÂNICA DOS SÓLIDOS DEFORMÁVEIS</b>     | <b>20</b> |
| 2.1 – Forças atuantes em um sistema estrutural devido ao meio externo | 20        |
| 2.1.1 – Forças volumétricas                                           | 21        |
| 2.1.2 – Forças superficiais                                           | 22        |
| 2.1.3 – Forças concentradas                                           | 22        |
| 2.2 – Tensor das tensões                                              | 23        |
| 2.2.1 – Tensões segundo uma direção qualquer                          | 26        |
| 2.2.2 – Tensões principais                                            | 27        |
| 2.2.3 – Elipsóide de Lamé                                             | 30        |
| 2.2.4 – Tensões octaédricas                                           | 31        |
| 2.2.5 – Tensor desviador                                              | 35        |
| 2.2.6 – Plano desviador                                               | 37        |
| 2.2.7 – Referencial no plano desviador                                | 39        |
| 2.3 – Tensor das deformações                                          | 43        |
| 2.4 – Relações cinemáticas                                            | 44        |
| 2.5 – Equações de equilíbrio de um sólido                             | 44        |
| 2.6 – Relações constitutivas                                          | 45        |
| 2.7 – Condições de contorno                                           | 46        |
| <br>                                                                  |           |
| <b>CAPÍTULO 3 – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS</b>                      | <b>47</b> |
| 3.1 – Formulação variacional                                          | 48        |
| 3.1.1 – Princípio da Energia Potencial Estacionária                   | 50        |

|                                                                      |            |
|----------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.2 - Formulação do Método dos Elementos Finitos.....                | 51         |
| 3.2.1 - Vetor das forças nodais equivalentes .....                   | 55         |
| 3.2.1.1 - Forças distribuídas no volume do elemento .....            | 55         |
| 3.2.1.2 - Forças distribuídas na superfície do elemento .            | 56         |
| 3.2.1.3 - Forças concentradas em qualquer ponto do elemento<br>..... | 57         |
| 3.2.2 - Matriz de rigidez do elemento .....                          | 58         |
| 3.3 - Elemento finito de barra.....                                  | 59         |
| 3.3.1 - Matriz de rigidez .....                                      | 61         |
| 3.3.2 - Matriz de rotação .....                                      | 62         |
| 3.4 - Elemento finito prismático regular linear.....                 | 64         |
| 3.4.1 - Matriz de rigidez .....                                      | 69         |
| <b>CAPÍTULO 4 - MODELOS FÍSICOS NÃO-LINEARES.....</b>                | <b>76</b>  |
| 4.1 - Aço estrutural.....                                            | 77         |
| 4.1.1 - Comportamento uniaxial .....                                 | 77         |
| 4.1.2 - Modelo elastoplástico com endurecimento linear ....          | 80         |
| 4.2 - Concreto.....                                                  | 81         |
| 4.2.1 - Comportamento não-linear .....                               | 81         |
| 4.2.2 - Critério de ruptura de Mohr-Coulomb .....                    | 84         |
| <b>CAPÍTULO 5 - ASPECTOS COMPUTACIONAIS.....</b>                     | <b>89</b>  |
| 5.1 - Esquema geral de cálculo.....                                  | 89         |
| 5.2 - Descrição das sub-rotinas.....                                 | 91         |
| <b>CAPÍTULO 6 - ANÁLISE NUMÉRICA.....</b>                            | <b>94</b>  |
| 6.1 - Exemplo 1.....                                                 | 94         |
| 6.1.1 - Primeiro caso .....                                          | 94         |
| 6.1.2 - Segundo caso .....                                           | 97         |
| 6.1.2.1 - Discretização ao longo da direção x .....                  | 99         |
| 6.1.2.2 - Discretização ao longo das direções x e z ....             | 102        |
| 6.2 - Exemplo 2.....                                                 | 103        |
| <b>CAPÍTULO 7 - CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>                        | <b>112</b> |
| 7.1 - Conclusões.....                                                | 112        |

|                                         |            |
|-----------------------------------------|------------|
| 7.2 - Propostas de desenvolvimento..... | 114        |
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>  | <b>116</b> |
| <b>BIBLIOGRAFIA CONSULTADA.....</b>     | <b>118</b> |

## **CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO**

### **1.1 – Tema e motivação**

A análise estrutural estática tem como principal objetivo a determinação da distribuição e da magnitude das tensões e dos deslocamentos que se manifestam em qualquer sistema estrutural, quando o mesmo é submetido a um carregamento arbitrário, cuja intensidade, direção e sentido não variem com o tempo. O campo de tensões calculado deve representar um sistema de forças internas e externas em equilíbrio e, simultaneamente, os deslocamentos devem ser contínuos, garantindo a condição de compatibilidade da estrutura.

De acordo com o comportamento da estrutura adotado, a análise estrutural pode ser linear ou não-linear. A análise linear é proveniente da manutenção da geometria inicial como referência de equilíbrio (linearidade geométrica) e da manutenção das propriedades físicas específicas do material (linearidade física). Já a análise não-linear é proveniente da alteração da geometria ou das propriedades físicas do material estrutural.

A maior dificuldade encontrada na análise estrutural, uma vez que os sistemas estruturais são, geralmente, admitidos como meios contínuos, está no fato de que as equações consistentes de equilíbrio que governam esses sistemas são equações diferenciais parciais e devem satisfazer as condições de contorno dos mesmos. Cabe ressaltar que os sistemas estruturais contínuos possuem um número infinito de graus de

liberdade, em função dessa continuidade, fato esse que dificulta a resolução do problema (RODRIGUES, 1997).

Para contornar tal problemática, concomitantemente com o surgimento do computador, foram desenvolvidos métodos numéricos, capazes de obter soluções aproximadas para problemas complexos de Engenharia, por meio da utilização de sistemas discretos que contêm um número finito de graus de liberdade. Dentre esses métodos está o Método dos Elementos Finitos (MEF), descrito na década de cinquenta pelos trabalhos de Argyris e Kelsey, publicados em 1954, e de Turner *et al.*, publicado em 1956, que permite a modelação matemática de fenômenos envolvidos na análise estrutural.

O Método dos Elementos Finitos transforma um sistema estrutural contínuo em um sistema estrutural discreto, por meio da divisão do modelo geométrico dos elementos estruturais em pequenas regiões chamadas de elementos finitos, sendo essas interconectadas entre si para formar o conjunto estrutural.

Para problemas estáticos, esse procedimento de discretização resulta um sistema de equações algébricas que pode ser facilmente resolvido com a ajuda de técnicas computacionais adequadas. Com a obtenção desse sistema de equações resolve-se o problema citado, uma vez que tal sistema facilita a imposição das condições de contorno da estrutura. Por outro lado, a solução obtida passa a ser aproximada e para se obter uma resposta satisfatória, usualmente, deve-se escolher o tipo adequado de elemento finito, a quantidade e a disposição geométrica do mesmo.

Com a disseminação da informática ocorrida no final da década de oitenta e com o aumento vertiginoso da capacidade de armazenamento, gerenciamento e processamento de dados trazido pelos computadores de pequeno porte, o MEF passou a ser aceito como uma das mais poderosas técnicas para a análise de estruturas, seja essa análise linear ou não-linear.



Dentro desse contexto, o presente trabalho tem como tema principal a análise não-linear física de vigas de concreto armado, utilizando o elemento finito prismático regular linear com oito nós, simulando o concreto, associado ao de barra com dois nós, simulando o aço. Para essa análise será utilizada a teoria de tensões de problemas unidimensionais e tridimensionais, em conjunto com a teoria da plasticidade para a consideração da não-linearidade física do concreto e do aço.

Como produto final do trabalho foi desenvolvido um conjunto de sub-rotinas, em linguagem VBASIC, contemplando a análise linear e não-linear física de vigas de concreto armado. Essas sub-rotinas, juntamente com outras já desenvolvidas em pesquisas anteriores, fazem parte do programa institucional **FEISdec** - *Finite Element for Idealization of Structures: development and execution by computer*, utilizado como plataforma de pesquisa para aplicação de resultados científicos advindos de trabalhos de Iniciação Científica e do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da FEIS / UNESP.

## 1.2 - Estado da arte

Desde o surgimento do concreto armado, na segunda metade do século passado, tem-se utilizado o modelo elástico-linear para a representação do comportamento dos materiais nos procedimentos de análise estrutural, devido à relativa simplicidade em sua formulação e, conseqüentemente, em seu equacionamento, quando comparado a modelos de cálculo mais refinados, como é o caso da análise estrutural considerando-se a não-linearidade dos materiais.

A consideração do comportamento não-linear dos materiais conduz a problemas matemáticos mais complexos, com soluções praticamente inviáveis sem o auxílio de computadores com boa capacidade de processamento.

Com o crescente aperfeiçoamento dos equipamentos de informática nos últimos anos, houve uma grande evolução nos processos de cálculo, buscando-se sempre representações mais realistas para o comportamento das estruturas e, sobretudo, a evolução de um modelo razoavelmente limitado, como o elástico-linear, para outros com maior capacidade de representação.

Vários pesquisadores têm trabalhado com o objetivo de obter e aprimorar modelos que tratam da não-linearidade física dos materiais. Apesar dos avanços no estudo do comportamento não-linear físico serem pouco empregados no meio técnico, em virtude da complexidade da sua fundamentação teórica e da necessidade de uso de recursos computacionais em suas aplicações, os códigos normativos, atualmente, buscam tratar, mesmo que de forma simplificada, os aspectos da não-linearidade (VASCONCELOS, 2005).

O primeiro trabalho sobre análise não-linear, utilizando o MEF, foi publicado por Turner et al (1960). Nos trabalhos de Ngo e Scordelis (1967) e Nilson (1968) foi utilizado o MEF em estruturas de concreto armado. A partir dessa época intensificou-se o uso de análises não-lineares aplicadas a esse material. Em Zienkiewicz (1969) foram feitas várias generalizações das relações constitutivas, aplicando o MEF a problemas elastoplásticos.

Dentre os pesquisadores que conduziram o trabalho para o campo das relações constitutivas do concreto, podem-se destacar as pesquisas de Chen e Chen (1975) e Bazant e Bhat (1976).

Em Owen e Hinton (1980) foram desenvolvidos modelos constitutivos com aplicação computacional baseados no MEF para análise de estruturas de concreto armado. Dentre os modelos abordados, podem ser citados os critérios de Tresca e Von-Mises para o aço e os de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager para o concreto.

Em Proença (1988) foram estudados os principais modelos matemáticos normalmente representativos do concreto armado para compreensão do comportamento global não-linear de estruturas.

Em Côrrea (1991) foi desenvolvido um sistema computacional para análise de pavimentos de edifício considerando lajes e vigas integradas ao mesmo modelo, sendo utilizado o critério de Von Mises para a consideração da não-linearidade física do concreto.

Em Carvalho (1994) foi feita a análise não-linear de pavimentos de edifícios de concreto por meio da analogia de grelha, empregando relações momento-curvatura baseadas nas expressões de inércia de Branson e nos preceitos do Manual do *Comité Euro-Internacional du Béton* (CEB) e do CEB90, sendo consideradas a fissuração e a fluência do concreto.

Em Rodrigues (1997) foram utilizados, para a análise dinâmica de treliças de aço considerando a não-linearidade física, modelos elastoplásticos para carregamentos cíclicos. Para a introdução da não-linearidade física na análise de estruturas aperticadas de concreto armado sujeitas a ações dinâmicas, foram utilizados modelos físicos não-lineares propostos pelo CEB e pelo *American Concrete Institute* (ACI).

Em Buchaim (2001) foi estudada a influência da não-linearidade física na rigidez à flexão de estruturas planas de concreto armado, especificamente vigas contínuas, pórticos e lajes armadas em uma só direção. Neste trabalho procurou-se esclarecer problemas relacionados com a deformabilidade e a resistência das peças, considerando a fissuração e plastificação dos materiais.

Com a intenção de dar continuidade à linha de pesquisa já descrita, este trabalho aborda a não-linearidade física de vigas de concreto armado, adotando, devido a sua simplicidade, o critério de Mohr-Coulomb para o concreto, e o modelo elastoplástico com endurecimento linear para o aço.

### 1.3 - Objetivos

Este trabalho tem por objetivos principais:

- apresentar o desenvolvimento matemático das matrizes de rigidez do elemento finito prismático regular linear com oito nós e do elemento de barra com dois nós, efetuando o acoplamento dos mesmos na análise estrutural de vigas de concreto armado;
- desenvolver e incorporar modelos físicos não-lineares para o concreto e aço, visando à análise do comportamento de vigas de concreto armado submetidas a carregamentos estáticos;
- elaborar uma série de sub-rotinas em linguagem VBASIC, contemplando a análise linear e não-linear física do problema proposto;
- quantificar a distribuição das tensões internas nos sentidos longitudinal e transversal ao eixo de vigas de concreto armado, por meio da discretização tridimensional do elemento estrutural, para possibilitar a implementação do modelo não-linear físico do concreto.

### 1.4 - Apresentação

Neste primeiro capítulo procura-se apresentar uma visão geral de todo o trabalho, descrevendo-se, para tanto, tema e motivação, estado da arte, objetivos do trabalho e, finalizando, uma descrição sucinta dos capítulos subseqüentes.

No capítulo 2 apresentam-se alguns conceitos da Mecânica dos Sólidos Deformáveis necessários para o desenvolvimento

matemático do Método dos Elementos Finitos e também dos modelos físicos não-lineares para o concreto e o aço.

No capítulo 3 apresenta-se a formulação do Método dos Elementos Finitos, com a adoção do princípio da energia potencial estacionária para a consideração do equilíbrio do sistema estrutural, e também o desenvolvimento matemático das matrizes de rigidez do elemento finito prismático regular linear com oito nós e do elemento de barra com dois nós.

No capítulo 4 descrevem-se os comportamentos não-lineares do aço e do concreto, por meio da relação tensão x deformação de cada material, e ainda são desenvolvidos o modelo elastoplástico com endurecimento linear e o critério de ruptura de Mohr-Coulomb, representando a não-linearidade física do aço e do concreto, respectivamente.

No capítulo 5 são apresentados os aspectos computacionais relativos ao programa computacional utilizado, ou seja, esquema geral de cálculo e descrição das sub-rotinas.

Já no capítulo 6 são apresentados exemplos relativos à análise estática linear e não-linear física de vigas de concreto armado.

Por fim, no capítulo 7, são apresentadas as conclusões do trabalho e algumas propostas para desenvolvimento em trabalhos futuros.

## **CAPÍTULO 2 – CONCEITOS DA MECÂNICA DOS SÓLIDOS DEFORMÁVEIS**

A Mecânica dos Sólidos Deformáveis, seja em regime elástico ou regime plástico, tem por finalidade a determinação dos campos de tensões, deformações e deslocamentos no interior de um sólido genérico, sujeito a uma solicitação qualquer. Para tanto, utiliza os conceitos básicos de tensões e deformações específicas, complementados pelas equações cinemáticas e de equilíbrio, em conjunto com as relações constitutivas dos materiais.

A idéia fundamental da Mecânica dos Sólidos Deformáveis foi concebida por Cauchy, em 1822, ao admitir que a tensão atuante sobre um plano, que secciona um corpo sólido em duas partes, seja a resultante das forças de todas as moléculas situadas no plano, na mesma direção, dividida pela área desse plano (SÁNCHEZ FILHO, 2000).

### **2.1 – Forças atuantes em um sistema estrutural devido ao meio externo**

Dado um sistema estrutural arbitrário, conforme ilustra a figura 2.1, pode-se isolar um cubo infinitesimal com volume  $dV_e$  de qualquer parte do sistema, com a finalidade de se analisar as solicitações atuantes no mesmo.

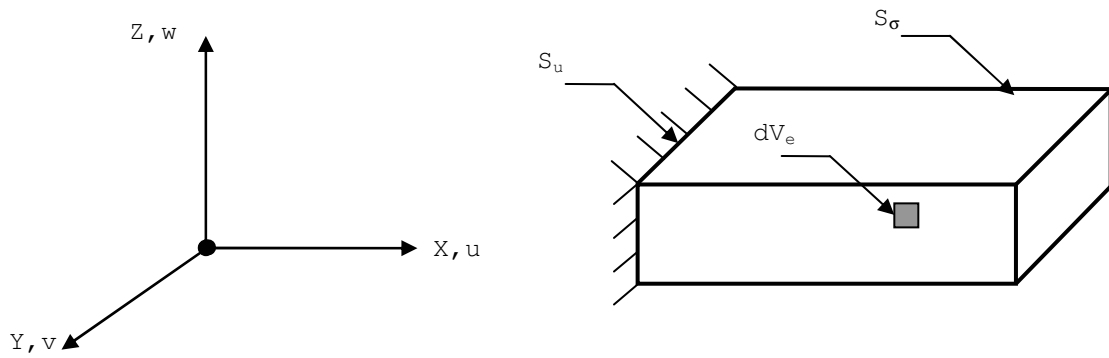


Figura 2.1 - Sistema estrutural arbitrário

O sistema estrutural está referido a um sistema tri-ortogonal de eixos globais  $(x, y, z)$ , sendo  $u, v$  e  $w$  as componentes de um deslocamento qualquer nas direções  $x, y$  e  $z$ , respectivamente. Na forma matricial, o deslocamento fica definido pela equação (2.1),

$$\underline{u}^T = \{u \quad v \quad w\} \quad (2.1)$$

sendo que tais componentes de deslocamento são funções dependentes do sistema de coordenadas e expressas por  $u = u(x, y, z)$ ,  $v = v(x, y, z)$  e  $w = w(x, y, z)$ .

O volume total do sistema estrutural é definido pela letra  $V$  e o volume de cada elemento é definido por  $V_e$ . Já a superfície do sistema é definida pela letra  $S$ , sendo essa subdividida em:

- superfície na qual os deslocamentos são conhecidos  $S_u$ ;
- superfície na qual as forças atuantes são conhecidos  $S_\sigma$ .

### 2.1.1 - Forças volumétricas

As forças volumétricas são aplicadas em todos os pontos do material e têm dimensão de força por unidade de volume. Em

geral são provenientes do campo gravitacional, mas também podem ser provocados por campos magnéticos, elétricos, etc. Logo, sobre cada elemento diferencial de volume  $dV_e$  atuam as componentes das forças volumétricas que, organizadas na forma matricial, resultam na equação (2.2).

$$\underline{p}_{V_e}^T = \{V_x \quad V_y \quad V_z\} \quad (2.2)$$

### 2.1.2 - Forças superficiais

As forças superficiais são aplicadas de forma distribuída nas superfícies externas dos elementos e têm dimensão de força por unidade de área. Podem ser provenientes da ação do vento, de sobrecarga, etc. Portanto, sobre cada elemento diferencial com área externa  $dS_u$  atuam as componentes das forças superficiais que, organizadas na forma matricial, resultam na equação (2.3).

$$\underline{p}_{S_e}^T = \{S_x \quad S_y \quad S_z\} \quad (2.3)$$

### 2.1.3 - Forças concentradas

As forças concentradas são, geralmente, aplicadas nos nós dos elementos e têm dimensão de força e de força vezes unidade métrica, visto que os momentos são incluídos nesta categoria. Esses podem ser provenientes das reações das vigas ou pilares, forças pontuais, etc. Assim, sobre cada nó de um elemento atuam as componentes das forças concentradas que, organizadas na forma matricial, resultam na equação (2.4).

$$\underline{p}_C^T = \{C_x \quad C_y \quad C_z\} \quad (2.4)$$



## 2.2 - Tensor das tensões

O vetor de tensão  $\overset{n}{\mathbf{T}}$  em um ponto  $P$  qualquer, interno em um corpo sólido em equilíbrio estático, pode ser decomposto em dois outros vetores: uma tensão normal  $\sigma$ , que tem a mesma direção do vetor unitário  $\mathbf{n}$ , perpendicular a um plano de corte imaginário passando pelo ponto, e outra tensão tangencial  $\tau$ , que possui a mesma direção do vetor unitário  $\mathbf{n}^s$ , paralelo a esse mesmo plano, conforme mostra a figura 2.2.

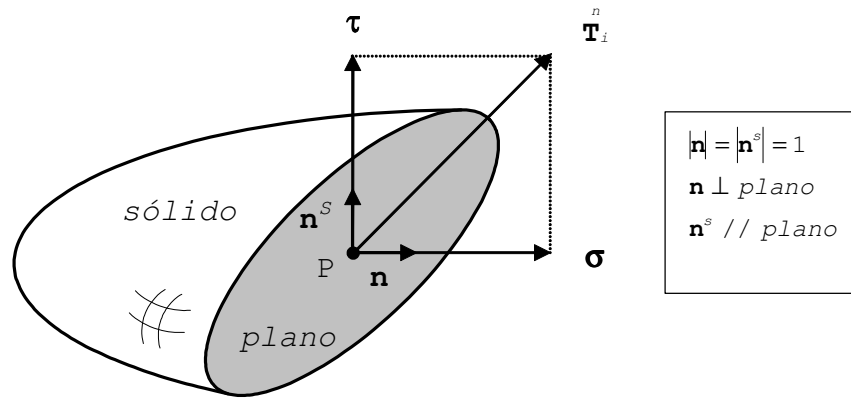


Figura 2.2 - Tensões em um ponto

Pelo cálculo vetorial, o módulo do vetor de tensão  $\overset{n}{\mathbf{T}}$  é dado pela equação (2.5).

$$\left(\overset{n}{T}\right)^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (2.5)$$

As componentes de  $\overset{n}{\mathbf{T}}$ , segundo um determinado sistema de eixos coordenados, são dadas, em notação indicial, pela expressão (2.6):

$$\overset{n}{T}_i = \sigma n_i + \tau n_i^s \quad (2.6)$$

em que  $n_i$  e  $n_i^s$  são os co-senos diretores, respectivamente, das tensões  $\sigma$  e  $\tau$  com os eixos coordenados.

Adotando o sistema de eixos cartesianos, com vetores unitários  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$  perpendiculares entre si, e representando o ponto  $P$  por um cubo imaginário, as tensões atuantes em cada face desse cubo podem ser decompostas conforme ilustra a figura 2.3.

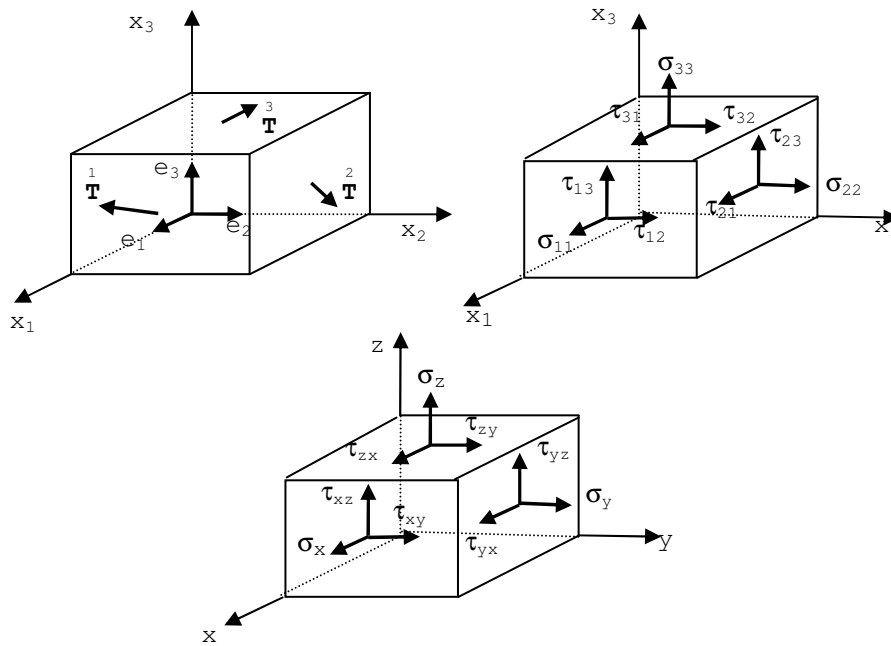


Figura 2.3 - Estado de tensões no ponto  $P$

De acordo com a figura 2.3, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3 = \sigma_x\mathbf{e}_1 + \tau_{xy}\mathbf{e}_2 + \tau_{xz}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{T}_2 &= \sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3 = \tau_{yx}\mathbf{e}_1 + \sigma_y\mathbf{e}_2 + \tau_{yz}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{T}_3 &= \sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3 = \tau_{zx}\mathbf{e}_1 + \tau_{zy}\mathbf{e}_2 + \sigma_z\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2.9)$$

ou ainda, em notação indicial, conforme segue.

$$\mathbf{T}^i = \sigma_{ij} \mathbf{e}_j \quad (2.10)$$

Dessa forma, o estado de tensões no ponto  $P$  fica definido por:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

sendo que  $\sigma_{ij}$  é o tensor cartesiano de tensões, com nove componentes, sendo três tensões normais e seis tensões tangenciais.

Na notação técnica usual, o tensor de tensões se expressa de acordo com a equação (2.12).

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Pelo teorema de Cauchy, facilmente pode-se demonstrar que esse tensor é simétrico, ou seja,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , sendo, portanto, o estado de tensões em um ponto definido por seis elementos, dados pelas três tensões normais e pelas três tangenciais.

Devido a sua simetria, muitas vezes o tensor de tensões também é representado por um vetor coluna, conforme a equação (2.13).

$$\tilde{\sigma}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}\} \quad (2.13)$$

### 2.2.1 - Tensões segundo uma direção qualquer

Ao se efetuar um corte imaginário qualquer no cubo mostrado pela figura 2.3, define-se um plano ABC, no qual as tensões atuantes  $\sigma$  e  $\tau$  podem ser relacionadas com as tensões atuantes em cada face do cubo, conforme ilustra a figura 2.4.

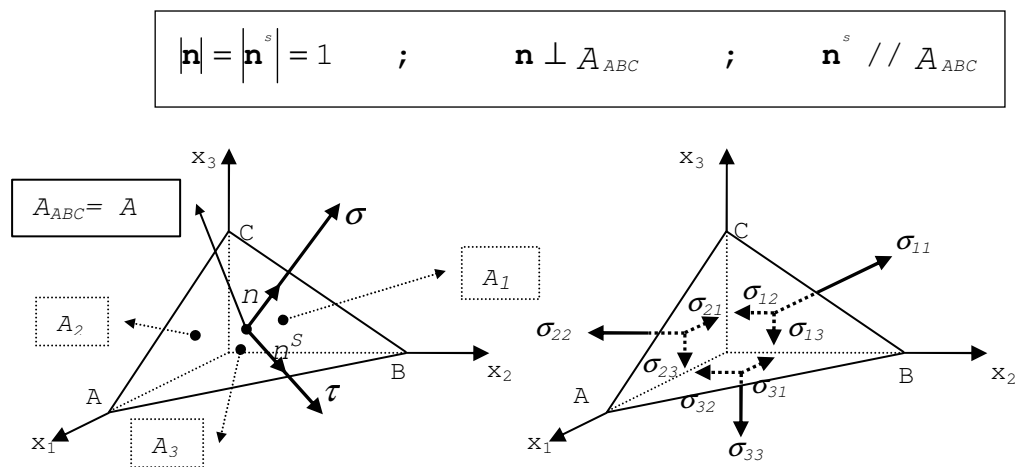


Figura 2.4 - Tensões em um plano genérico e estado de tensões

As áreas perpendiculares a cada um dos eixos coordenados são determinadas, de acordo com a figura 2.4, pelas equações (2.14),

$$A_1 = A n_1 \quad ; \quad A_2 = A n_2 \quad ; \quad A_3 = A n_3 \quad (2.14)$$

sendo, conforme definido anteriormente,  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$  os co-senos diretores da tensão  $\sigma$  com os eixos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , respectivamente.

Efetuando-se o somatório das forças atuantes no ponto  $P$ , nas direções dos eixos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , e igualando-se tal valor a zero, uma vez que o ponto é interno ao corpo sólido em equilíbrio estático, obtém-se:

$$\begin{aligned}\sigma n_1 A + \tau n_1^s - \sigma_{11} n_1 A - \sigma_{21} n_2 A - \sigma_{31} n_3 A &= 0 \\ \sigma n_2 A + \tau n_2^s - \sigma_{12} n_1 A - \sigma_{22} n_2 A - \sigma_{32} n_3 A &= 0 \\ \sigma n_3 A + \tau n_3^s - \sigma_{13} n_1 A - \sigma_{23} n_2 A - \sigma_{33} n_3 A &= 0\end{aligned}\tag{2.15}$$

ou, em notação indicial, com  $i, j = 1, 2, 3$ ,

$$A(\sigma n_i + \tau n_i^s) - A(\sigma_{ji} n_j) = 0\tag{2.16}$$

Como a área  $A$  é diferente de zero e como  $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$ , obtém-se a relação dada pela equação (2.17).

$$\sigma n_i + \tau n_i^s = \sigma_{ij} n_j\tag{2.17}$$

Assim, substituindo-se a equação (2.6) na equação (2.17), chega-se à relação entre as tensões atuantes segundo uma direção qualquer e as tensões atuantes em cada face do cubo, dada, em notação indicial, pela equação (2.18).

$$T_i^n = \sigma_{ij} n_j\tag{2.18}$$

### 2.2.2 - Tensões principais

As direções nas quais as tensões normais atingem seus valores extremos e as tensões tangenciais são nulas, são conhecidas como direções principais. Para uma direção principal, a equação (2.17) pode ser reescrita na forma da equação (2.19),

$$\sigma n_i = \sigma_{ij} n_j\tag{2.19}$$

na qual  $\sigma$ , o módulo do vetor de tensão  $\mathbf{T}^n$ , é chamado de valor da tensão principal.

Com o auxílio da equação (2.20),

$$n_i = \delta_{ij} n_j \quad (2.20)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker definido pela relação (2.21),

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (2.21)$$

obtem-se um sistema de três equações lineares e homogêneas, que possui como incógnitas os três co-senos diretores das direções principais e valor  $\sigma$  da tensão principal, dado, em notação indicial, pela equação (2.22).

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma) n_j = 0 \quad (2.22)$$

Para que esse sistema possua soluções reais, diferentes da solução trivial  $n_j = 0$ , deve-se cumprir a condição dada pela equação (2.23),

$$|\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma| = 0 \quad (2.23)$$

ou seja,

$$\begin{vmatrix} (\sigma_{11} - \sigma) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22} - \sigma) & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & (\sigma_{33} - \sigma) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.24)$$

cujo desenvolvimento resulta em uma equação polinomial cúbica em  $\sigma$ ,

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (2.25)$$

em que  $I_1, I_2$  e  $I_3$  são os invariantes básicos do tensor das tensões, chamados de invariante linear, quadrático e cúbico, e definidos pelas equações (2.26), (2.27) e (2.28), respectivamente.

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (2.26)$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 \quad (2.27)$$

$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 \quad (2.28)$$

As três raízes da equação (2.25),  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$ , são denominadas tensões principais. Em termos dessas tensões os três invariantes são dados pelas equações (2.29), (2.30) e (2.31).

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (2.29)$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 \quad (2.30)$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (2.31)$$

Associada com cada tensão principal  $\sigma_k$  há uma direção principal, definida pelos co-senos diretores  $n_j^{(k)}$ , com  $k = 1, 2, 3$ , obtidos resolvendo-se o sistema de equações lineares dado pela equação (2.32), satisfazendo ainda a condição imposta pela equação (2.33).

$$(\sigma_{ij} - \sigma_k \delta_{ij}) n_j^{(k)} = 0 \quad (2.32)$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (2.33)$$

### 2.2.3 - Elipsóide de Lamé

Em um espaço cujos eixos coordenados são os eixos representativos das tensões principais  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$ , conhecido como espaço de Haigh-Westergaard, como mostrado na figura 2.5, a equação (2.18) pode ser reescrita como:

$$T_i^n = \sigma_{i1}n_1 + \sigma_{i2}n_2 + \sigma_{i3}n_3 \quad (2.34)$$

e como  $\sigma_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ , obtêm-se as relações dadas pelas equações (2.35).

$$\begin{aligned} T_1^n &= \sigma_1 n_1 \\ T_2^n &= \sigma_2 n_2 \\ T_3^n &= \sigma_3 n_3 \end{aligned} \quad (2.35)$$

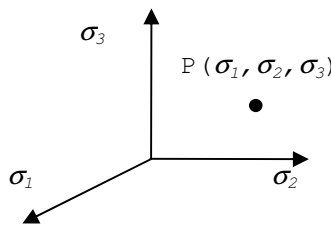


Figura 2.5 - Espaço de Haigh-Westergaard

Substituindo-se essas relações na equação (2.33), chega-se à equação (2.36) que define a forma de um elipsóide, conhecido como elipsóide de Lamé, conforme ilustra a figura 2.6.

$$\left( \frac{T_1^n}{\sigma_1} \right) + \left( \frac{T_2^n}{\sigma_2} \right) + \left( \frac{T_3^n}{\sigma_3} \right) = 1 \quad (2.36)$$



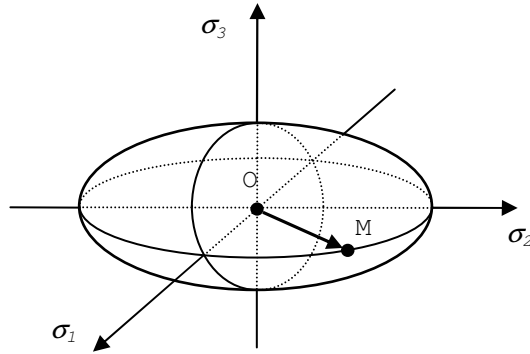


Figura 2.6 - Elipsóide de Lamé

O raio vetor do elipsóide é definido por  $\mathbf{OM} = \mathbf{\overset{n}{T}}$ , cujo módulo é dado pela equação (2.37), definindo as tensões atuantes em uma direção qualquer.

$$\left(\overset{n}{T}\right)^2 = \left(\overset{n}{T_1}\right)^2 + \left(\overset{n}{T_2}\right)^2 + \left(\overset{n}{T_3}\right)^2 = (\sigma_1 n_1)^2 + (\sigma_2 n_2)^2 + (\sigma_3 n_3)^2 \quad (2.37)$$

#### 2.2.4 - Tensões octaédricas

Considerando-se o espaço de Haigh-Westergaard, existem oito planos, denominados planos octaédricos, que possuem igual inclinação em relação às direções principais de tensões, conforme mostrado pela figura 2.7.

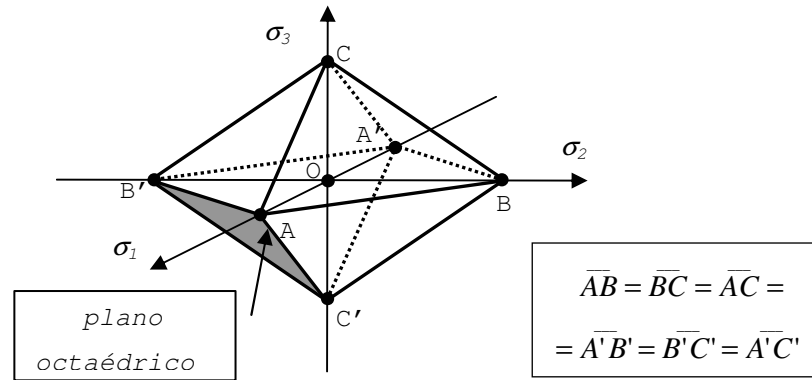


Figura 2.7 - Planos Octaédricos

Os co-senos diretores  $n_i$  do versor  $\mathbf{n}$  perpendicular a um plano octaédrico, com relação aos eixos  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$ , são definidos pela equação (2.38), a partir da relação (2.33) e tomando-se  $n_1 = n_2 = n_3 = n_i$ , já que o plano possui a mesma inclinação em relação a esses eixos, conforme ilustra a figura 2.8.

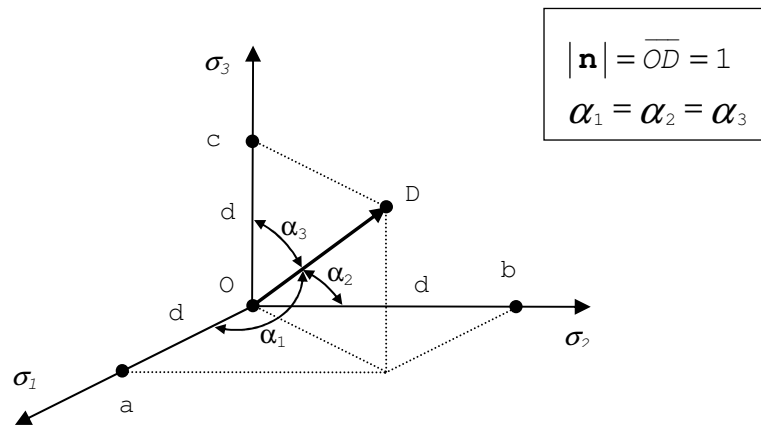


Figura 2.8 - Geometria do versor  $\mathbf{n}$

$$n_i = \cos \alpha_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2.38)$$

Em cada plano octaédrico atua um vetor de tensor  $\overset{n}{\mathbf{T}}_{\text{oct}}$ , cujas componentes vetoriais são denominadas tensões

octaédricas, e são dadas por uma tensão normal octaédrica  $\sigma_{\text{oct}}$  e por uma tensão tangencial octaédrica  $\tau_{\text{oct}}$ . Essas tensões são obtidas ao desenvolver-se a equação de Cauchy, que é estabelecida partindo-se da decomposição vetorial mostrada pela figura 2.9.

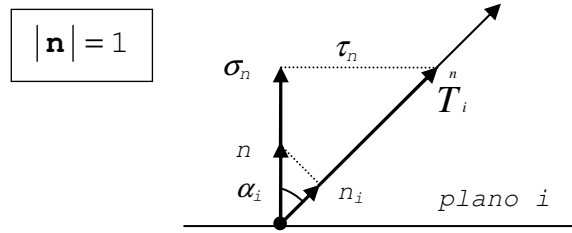


Figura 2.9 - Decomposição vetorial

Da figura 2.9 obtém-se:

$$\cos \alpha_i = \frac{n_i}{n} = \frac{\sigma}{T_i} \quad (2.39)$$

mas como  $n$  é um versor, da equação anterior tem-se:

$$\sigma_n = T_i n_i \quad (2.40)$$

e com o auxílio da equação (2.18), chega-se à equação de Cauchy dada por (2.41).

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_j n_i \quad (2.41)$$

Expandindo-se a equação anterior, em termos de tensões principais, sendo, portanto,  $\sigma_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ , encontra-se:

$$\sigma_n = \sigma_1(n_1)^2 + \sigma_2(n_2)^2 + \sigma_3(n_3)^2 \quad (2.42)$$

e sabendo que se tratando de planos octaédricos, os co-senos diretores  $n_i$  obedecem à relação (2.38), obtém-se a equação que define a tensão normal octaédrica dada por (2.43).

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (2.43)$$

A equação (2.43) mostra que a tensão normal octaédrica é uma tensão normal média, chamada de tensão hidrostática, sendo constante para as oito faces do octaedro, formado pelos oito planos octaédricos. Portanto, para materiais homogêneos e isotrópicos, a tensão normal octaédrica modifica o volume do sólido sem alterar sua forma.

A tensão tangencial octaédrica pode ser obtida a partir da equação fundamental (2.5), que reescrita adequadamente apresenta a seguinte forma:

$$(\tau_{oct})^2 = \left(T_{oct}^n\right)^2 - (\sigma_{oct})^2 \quad (2.44)$$

sendo  $\left(T_{oct}^n\right)^2$  dado pela equação (2.37),  $\sigma_{oct}$  dada por (2.43) e utilizando a relação (2.38), encontra-se a equação que define a tensão tangencial octaédrica, dada por (2.45) ou, desenvolvendo-se esta, por (2.46).

$$(\tau_{oct})^2 = \frac{1}{3}[(\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2 + (\sigma_3)^2] - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (2.45)$$

$$(\tau_{oct})^2 = \frac{1}{9}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (2.46)$$

Assim como a tensão normal octaédrica, a tangencial é constante para as oito faces do octaedro, sendo que, para materiais homogêneos e isotrópicos, a tensão tangencial octaédrica provoca modificação da forma do sólido sem alterar-lhe o volume.

### 2.2.5 - Tensor desviador

Muitas vezes é útil decompor o tensor de tensões  $\sigma_{ij}$  em duas componentes, sendo uma parcela dada pelo tensor hidrostático  $h_{ij}$ , também chamado de tensor esférico, e outra dada pelo tensor desviador  $s_{ij}$ , estabelecendo, então, a relação dada pela equação (2.47).

$$\sigma_{ij} = h_{ij} + s_{ij} \quad (2.47)$$

O tensor hidrostático é definido por:

$$h_{ij} = p\delta_{ij} \quad (2.48)$$

em que  $p$  corresponde a uma tensão normal média definida pela equação (2.43), ou no caso de um estado qualquer de tensões, definida pela equação (2.49).

$$p = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3} I_1 \quad (2.49)$$

Das equações (2.47) e (2.48) obtém-se a equação (2.50) que define o tensor desviador, que representa um estado de cisalhamento puro.

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \quad (2.50)$$

Desse modo, para um estado de tensões qualquer, os tensores hidrostático e desviador podem ser definidos, em notação matricial, pelas equações (2.51) e (2.52), respectivamente.

$$h_{ij} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sigma_{11} - p) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22} - p) & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & (\sigma_{33} - p) \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

De forma análoga à realizada para obter as tensões principais, no item (2.2.2), pode-se obter as tensões desviadoras principais, por meio da condição de diagonalização do tensor  $s_{ij}$ , dada pela seguinte equação:

$$|s_{ij} - s\delta_{ij}| = 0 \quad (2.53)$$

ou seja,

$$\begin{vmatrix} (s_{11} - s) & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & (s_{22} - s) & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & (s_{33} - s) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.54)$$

cujo desenvolvimento resultará em uma equação cúbica característica dada pela equação (2.55).

$$s^3 - J_1 s^2 - J_2 s - J_3 = 0 \quad (2.55)$$

Resolvendo-se a equação anterior obtêm-se três raízes chamadas de tensões desviadoras principais  $s_1, s_2$  e  $s_3$ , sendo

$J_1, J_2$  e  $J_3$  os invariantes do tensor desviador, definidos por (2.56), (2.57) e (2.58), respectivamente.

$$J_1 = s_{ii} = s_{11} + s_{22} + s_{33} = s_1 + s_2 + s_3 = 0 \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} J_2 &= -s_{11}s_{22} - s_{22}s_{33} - s_{11}s_{33} + s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2 \\ &= \frac{1}{3} (I_1^2 - 3I_2) \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} J_3 &= s_{11}s_{22}s_{33} + 2s_{13}s_{23}s_{31} - s_{11}s_{23}^2 - s_{22}s_{31}^2 - s_{33}s_{12}^2 = s_1s_2s_3 \\ &= \frac{1}{27} (2I_1^3 - 9I_1I_2 + 27I_3) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Em termos dos invariantes do tensor das tensões principais e do tensor desviador, a tensão normal octaédrica e a tensão tangencial octaédrica, de acordo com as equações (2.29) e (2.57), podem ser redefinidas pelas equações (2.59) e (2.60), respectivamente.

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} I_1 \quad (2.59)$$

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2} \quad (2.60)$$

### 2.2.6 - Plano desviador

No espaço de Haigh-Westergaard, pode-se definir um plano que representa um estado de cisalhamento puro, denominado plano  $\pi$ . Esse plano possui vetor normal unitário coincidente com a direção do eixo hidrostático dado por  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ,

conforme ilustra a figura 2.10, sendo, portanto, os co-senos diretores desse vetor dados pela equação (2.38).

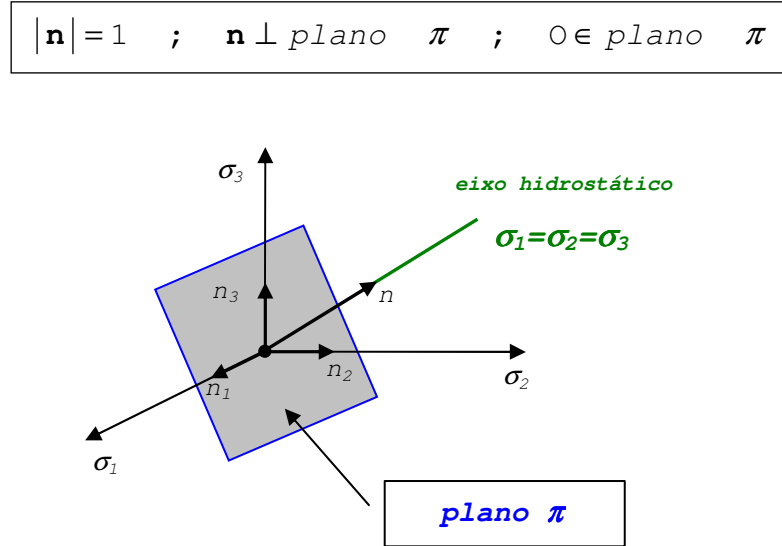


Figura 2.10 - Definição do plano  $\pi$

Dessa forma, pode-se definir o vetor hidrostático **ON** com coordenadas  $(p, p, p)$ , sendo o seu módulo dado pela equação (2.61).

$$|\mathbf{ON}| = \xi |\mathbf{n}| = \xi = \sqrt{p^2 + p^2 + p^2} = p\sqrt{3} = \sigma_{oct}\sqrt{3} \quad (2.61)$$

Um vetor **OP**, representando um estado de tensão qualquer, conforme ilustra a figura 2.11, pode ser decomposto em duas componentes, a saber: um vetor hidrostático **ON**, definido anteriormente, e outro vetor desviador **NP**, que é perpendicular ao eixo hidrostático. O plano que contém o vetor **NP**, paralelo ao plano  $\pi$ , é denominado plano desviador.



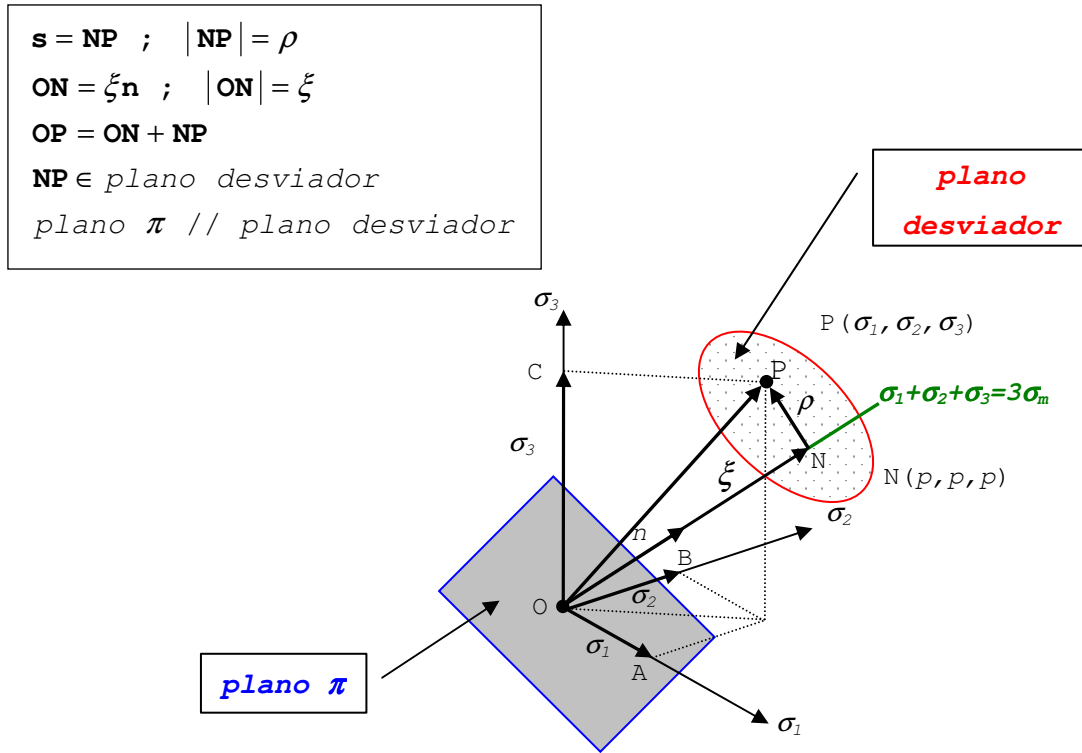


Figura 2.11 - Definição do plano desviador

Assim sendo, o vetor desviador **NP** terá coordenadas  $(\sigma_1 - \sigma_m, \sigma_2 - \sigma_m, \sigma_3 - \sigma_m)$  e seu módulo é dado pela equação (2.62).

$$|\mathbf{NP}| = |\mathbf{s}| = \rho = \sqrt{2J_2} = \tau_{oct} \sqrt{3} \quad (2.62)$$

### 2.2.7 - Referencial no plano desviador

O plano desviador definido no item anterior é utilizado para descrever as leis de plastificação, por meio de modelos de ruptura validados por experimentação. Para uma melhor descrição desses modelos, se pode projetar os eixos coordenados do referencial de Haigh-Westergaard sobre o plano

desviador, definindo-se um novo referencial  $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$ , contido nesse plano, como ilustra a figura 2.12.

$$\begin{aligned} \mathbf{NP}_1 &= NP \cdot \mathbf{e}'_1 \\ |\mathbf{NP}_1| &= \rho \cdot \cos \theta \\ \sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3 &\in \text{plano desviador} \end{aligned}$$

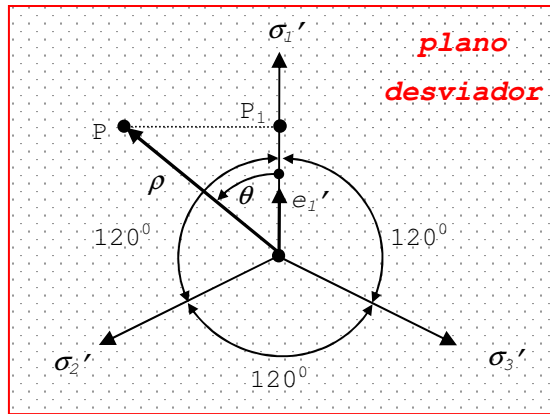


Figura 2.12 - Referencial no plano desviador

Definindo-se  $\mathbf{e}'_1$  como sendo o versor do eixo  $N\sigma'_1$ , conforme mostrado na figura 2.13, as suas componentes em relação ao sistema  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  são dadas pela equação (2.63).

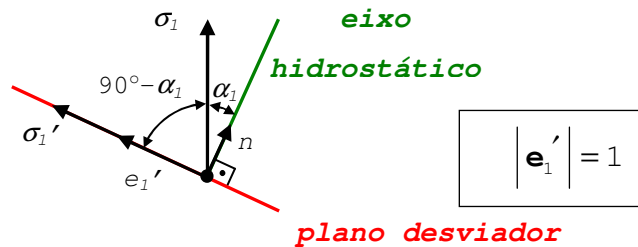


Figura 2.13 - Definição do versor  $\mathbf{e}'_1$

$$\mathbf{e}'_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \right) (2, -1, -1) (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \right) (2, -1, -1) \quad (2.63)$$

A projeção do vetor desviador sobre o eixo  $\sigma_1'$ , de acordo com a figura 2.12, pode ser obtida como segue:

$$|\mathbf{NP}_1| = (s_1, s_2, s_3) \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \right) (2, -1, -1)^T = \rho \cos \theta \quad (2.64)$$

ou seja,

$$\frac{2s_1}{\sqrt{6}} - \frac{s_2}{\sqrt{6}} - \frac{s_3}{\sqrt{6}} = \rho \cos \theta \quad (2.65)$$

e com o auxílio das equações (2.56) e (2.62) é possível obter-se o valor de  $\theta$  por meio da equação (2.66).

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{s_1}{\sqrt{J_2}} \quad (2.66)$$

Partindo-se da seguinte relação trigonométrica:

$$\cos 3\theta = 4 (\cos \theta)^3 - 3 \cos \theta \quad (2.67)$$

e de acordo com as equações (2.57) e (2.58), a equação (2.66) pode ser reescrita como segue:

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \quad (2.68)$$

em que  $\cos 3\theta$  é um invariante simétrico do plano desviador, com  $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$  conforme ilustra a figura 2.14.

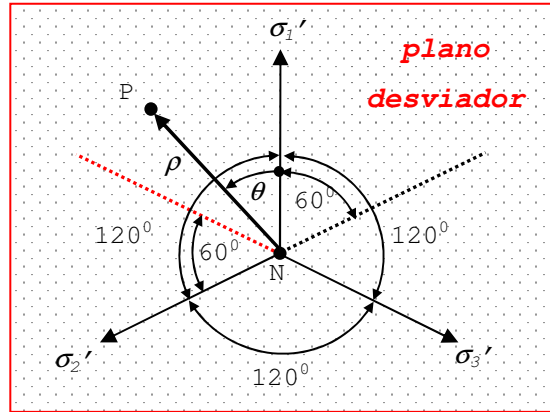


Figura 2.14 - Definição do ângulo de similaridade

Com base na equação (2.68) se podem definir os meridianos de tração, de cisalhamento puro e de compressão, correspondentes aos ensaios específicos de tração simples, de cisalhamento puro e compressão simples, respectivamente. Dessa forma, o meridiano de tração fica definido por  $\theta = 0^\circ$ , com  $\cos 3\theta = +1$ , o meridiano de cisalhamento puro fica definido por  $\theta = 30^\circ$ , com  $\cos 3\theta = 0$  e o meridiano de compressão fica definido por  $\theta = 60^\circ$ , com  $\cos 3\theta = -1$ .

Retomando-se a equação (2.66) e considerando-se os ângulos mostrados pela figura 2.14, as tensões principais  $s_1, s_2$  e  $s_3$  podem ser definidas pelas equações (2.69), (2.70) e (2.71), respectivamente.

$$s_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{J_2} \cos \theta \quad (2.69)$$

$$s_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{J_2} \cos (\theta - 120^\circ) \quad (2.70)$$

$$s_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{J_2} \cos (\theta + 120^\circ) \quad (2.71)$$

Particularizando a equação (2.47) em relação às tensões principais, obtém-se:

$$\sigma_i = p + s_i \quad (2.72)$$

e utilizando-se as equações (2.49), (2.69), (2.70) e (2.71), as tensões principais ficam definidas em função apenas dos invariantes  $(I_1, J_2, \theta)$ , como mostra a relação matricial dada por (2.73).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{I_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{J_2} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \cos (\theta - 120^\circ) \\ \cos (\theta + 120^\circ) \end{Bmatrix} \quad (2.73)$$

### 2.3 - Tensor das deformações

No estudo dos sólidos deformáveis, a variação de comprimento que ocorre em uma fibra qualquer é chamada de deformação linear específica, e é representada pelo símbolo  $\epsilon$ . Já a variação dos ângulos retos iniciais entre as linhas imaginárias do sólido é chamada de deformação tangencial ou cisalhante, e é representada por  $\gamma$ . Desse modo, as componentes do tensor das deformações podem ser explicitadas como segue:

$$\underline{\epsilon}^T = \left\{ \epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \right\} \quad (2.74)$$

sendo que os índices  $x$ ,  $y$ , e  $z$  das deformações lineares específicas representam que a variação está ocorrendo na direção respectiva dos eixos cartesianos, e os índices  $xy$ ,  $xz$ , e  $yz$  das deformações tangenciais representam as variações dos ângulos nos planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$ , respectivamente.

## 2.4 - Relações cinemáticas

As deformações de um sólido elástico são relacionadas com os deslocamentos  $u, v$  e  $w$ , definidos no item 2.1, por meio de relações diferenciais. No caso em que se presume que há restrições suficientes para impedir o deslocamento do sólido como corpo rígido, de tal forma que nenhum deslocamento das suas partículas seja possível sem que o sólido sofra uma deformação, essas relações cinemáticas entre deformações e deslocamentos, quando somente pequenas deformações são consideradas, podem ser expressas pelas equações (2.75) a (2.80).

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.75)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.76)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.77)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.78)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.79)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.80)$$

## 2.5 - Equações de equilíbrio de um sólido

Considerando-se um pequeno bloco retangular de arestas conhecidas, submetido às tensões normais e tangenciais, e admitindo-se uma variação de tensões ao longo do material, pode-se efetuar o somatório das forças nas três direções,

impondo-se que as dimensões das arestas tendam a zero, resultando as equações de equilíbrio como segue:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + V_x = 0 \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + V_y = 0 \quad (2.82)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + V_z = 0 \quad (2.83)$$

sendo  $V_x, V_y$  e  $V_z$  componentes das forças volumétricas, definidas no item 2.1.1, nas direções  $x, y$  e  $z$ , respectivamente.

## 2.6 - Relações constitutivas

As equações que interligam as tensões e deformações, denominadas relações constitutivas, são formuladas com base na observação do comportamento e experimentação dos materiais submetidos às ações externas. Admitindo-se que o material tenha comportamento elástico linear, as relações constitutivas são dadas pela Lei de Hooke generalizada:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \quad (2.84)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] \quad (2.85)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \quad (2.86)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy} \quad (2.87)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xz} \quad (2.88)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{yz} \quad (2.89)$$

em que  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal do material e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

## 2.7 - Condições de contorno

Existem dois tipos de condições de contorno em problemas de análise estrutural. A primeira condição de contorno do sistema estrutural é dada em função da vinculação do sólido com o meio externo, sendo, portanto, conhecidos os valores dos deslocamentos na superfície " $S_u$ ", como segue.

$$u = \bar{u}(x, y, z) \quad (2.90)$$

$$v = \bar{v}(x, y, z) \quad (2.91)$$

$$w = \bar{w}(x, y, z) \quad (2.92)$$

A segunda condição de contorno é dada em função do carregamento externo aplicado, uma vez que na superfície " $S_\sigma$ " os valores das forças atuantes são conhecidos.



### **CAPÍTULO 3 – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Quando aplicado a problemas de análise estrutural, o conceito básico do Método dos Elementos Finitos (MEF) é tal que um contínuo (o sistema estrutural) pode ser modelado analiticamente pela sua subdivisão em pequenas regiões (os elementos finitos).

Esses elementos são interconectados entre si e com o meio externo por meio de pontos nodais situados em seu contorno. Os deslocamentos desses pontos nodais são os parâmetros básicos desconhecidos do problema.

Para definir o estado de deslocamento de cada elemento deve-se escolher um conjunto de funções relacionadas com os deslocamentos nodais do elemento. Essas funções são chamadas de funções de forma do elemento.

A partir dessas funções de forma pode-se, então, definir o estado de deformação do elemento, que, juntamente com as deformações iniciais e com as propriedades constitutivas do material, definirão o estado de tensão em todo o elemento e também no seu contorno.

Por ser um método de discretização, a solução obtida é aproximada e para se obter uma resposta satisfatória, usualmente, deve-se escolher o tipo adequado de elemento finito, a quantidade e a disposição geométrica do mesmo.

A definição do tipo apropriado de elemento finito é dada em função do sistema estrutural que se deseja analisar. Para isso, os elementos finitos são classificados em: elementos lineares, elementos laminares e elementos sólidos.

Os elementos lineares, também conhecidos como elementos de barras, são elementos em que uma dimensão é muito maior do que as outras duas. Estes são subdivididos em elementos de pórticos planos e espaciais, de treliças planas e espaciais, de vigas e de grelhas.

Já os elementos laminares são elementos em que uma dimensão é muito menor do que as outras duas e são subdivididos em elementos de placa, de chapa e de casca.

Os elementos sólidos são elementos em que as três dimensões têm a mesma ordem de grandeza e permitem obter uma distribuição qualquer de tensões na estrutura.

Para a formulação do MEF é necessária, primeiramente, a formulação da equação de equilíbrio do sistema estrutural. Para tanto, pode-se utilizar o Princípio da Energia Potencial Estacionária.

### 3.1 - Formulação variacional

Um sistema estrutural é dito ser conservativo quando o trabalho das forças internas e das forças externas independe do caminho percorrido pela estrutura, quando da passagem de sua configuração de equilíbrio inicial para outra qualquer.

Para sistemas estruturais conservativos, em que a sua configuração final satisfaça a compatibilidade interna e as condições essenciais de contorno do sistema, a energia potencial total  $\Pi_p$  pode ser expressa como:

$$\Pi_p = U + \Omega \quad (3.1)$$

em que  $U$  é a energia de deformação, também chamada de energia potencial interna, e  $\Omega$  a energia potencial das forças externas atuantes.

Para um sistema estrutural que foi discretizado em um número finito de elementos, a energia potencial total do sistema é a soma da energia potencial de cada elemento, ou seja:

$$\Pi_p = \sum_{e=1}^{n_e} \Pi_{pe} \quad (3.2)$$

sendo  $n_e$  o número de elementos finitos que compõe o sistema estrutural.

A energia potencial de cada elemento  $\Pi_{pe}$  é dada por:

$$\Pi_{pe} = U_e + \Omega_e \quad (3.3)$$

onde  $U_e$  é a energia de deformação acumulada pelo elemento e  $\Omega_e$  é a energia potencial das forças externas na configuração deformada do elemento.

Admitindo-se que o carregamento do sistema seja aplicado nos nós estruturais, a energia potencial das forças externas de cada elemento é dada por:

$$\Omega_e = -\underline{f}_E^T \underline{q} \quad (3.4)$$

em que  $\underline{f}_E$  é o vetor das forças nodais equivalentes do elemento e  $\underline{q}$  é o vetor das componentes dos deslocamentos genéricos para cada nó do elemento.

A energia de deformação de cada elemento é definida por:

$$U_e = \int_{V_e} \mu_0 \, dV_e \quad (3.5)$$

sendo  $\mu_0$  a energia de deformação específica dada pela equação (3.6) e na forma matricial pela equação (3.7).

$$\mu_0 = \frac{1}{2} \{ \varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{xz} \tau_{xz} + \gamma_{yz} \tau_{yz} \} \quad (3.6)$$

$$\tilde{\mu}_0 = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^T \tilde{\sigma} \quad (3.7)$$

### 3.1.1 - Princípio da Energia Potencial Estacionária

Para o equilíbrio de um sistema estrutural, a função da energia potencial total  $\Pi_p$  deve ser estacionária, ou seja, a sua variação deve ser zero, como mostra a equação (3.8).

$$\delta \Pi_p = 0 \quad (3.8)$$

Em termos de funções ordinárias, existe uma condição em que a derivada de uma função em relação a uma variável independente é nula e a função em si tem um máximo, um mínimo ou um valor constante. Se a condição de estacionaridade fornece um valor mínimo, então, de acordo com o Teorema de Lagrange, o estado de equilíbrio é estável.

Aplicando-se tal conceito para o funcional de cada elemento e admitindo-se que a energia de deformação seja obtida em termos de deslocamentos nodais com o auxílio de funções interpoladoras conhecidas, então o funcional  $\Pi_{pe}$  passa a ser uma função, tendo como variáveis independentes os deslocamentos  $\underline{d}$  e a sua variação torna-se igual ao seu diferencial, ou seja,  $\delta \Pi_{pe} = d \Pi_{pe}$ . Desse modo, como o funcional está escrito em função das variáveis independentes tem-se:

$$\delta \Pi_{pe} = \frac{\partial \Pi_{pe}}{\partial d_1} \delta d_1 + \frac{\partial \Pi_{pe}}{\partial d_2} \delta d_2 + \dots + \frac{\partial \Pi_{pe}}{\partial d_n} \delta d_n \quad (3.9)$$

mas como  $\delta d_1 = dd_1; \delta d_2 = dd_2; \dots; \delta d_n = dd_n$  e  $\delta \Pi_{pe} = d\Pi_{pe}$ , obtém-se a relação dada pela equação (3.10).

$$d\Pi_{pe} = \frac{\partial \Pi_{pe}}{\partial d_1} dd_1 + \frac{\partial \Pi_{pe}}{\partial d_2} dd_2 + \dots + \frac{\partial \Pi_{pe}}{\partial d_n} dd_n \quad (3.10)$$

Como os deslocamentos são simultaneamente não nulos, pode-se aplicar o Princípio da Energia Potencial Estacionária, resultando na equação (3.11).

$$\frac{\partial \Pi_{pe}}{\partial d_j} = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.11)$$

### 3.2 - Formulação do Método dos Elementos Finitos

O primeiro passo na aplicação do MEF é dividir a estrutura em um número adequado de elementos em função da precisão dos mesmos. Os deslocamentos dos pontos nodais dos elementos são, então, generalizados em função das coordenadas da estrutura. Desse modo, os deslocamentos  $\tilde{u}$  do elemento finito podem ser expressos em função dos deslocamentos nodais  $\tilde{d}$ , por meio da utilização de funções de forma apropriadas. Essa relação é definida pela equação (3.12),

$$\tilde{u} = \tilde{\phi} \tilde{d} \quad (3.12)$$

em que  $\tilde{\phi}$  é a matriz que contém as funções de forma e relaciona os deslocamentos que ocorrem ao longo do eixo longitudinal com os deslocamentos nodais do elemento.

A energia de deformação de um elemento, de acordo com a definição da energia de deformação específica dada pela equação (3.7), pode ser escrita como mostra a equação (3.13).

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} dV_e \quad (3.13)$$

As relações constitutivas, dadas pelas equações (2.84) a (2.89), podem ser organizadas na forma matricial, sendo então, definidas por:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.14)$$

em que  $\tilde{\mathbf{E}}$  é a matriz que contém os coeficientes elásticos do material estrutural, representada pela equação (3.15).

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Reorganizando as equações (3.4), (3.13) e (3.14) na equação (3.3), a energia de deformação total do elemento pode ser reescrita de acordo com a equação (3.16).

$$\Pi_{pe} = \frac{1}{2} \int_{V_e} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} dV_e - \tilde{\mathbf{f}}_E^T \tilde{\mathbf{d}} \quad (3.16)$$

As relações diferenciais entre deformações e deslocamentos, dadas pelas equações (2.62) a (2.67), organizadas na forma matricial, ficam definidas pela equação (3.17),

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\mathbf{L}} \tilde{\mathbf{u}} \quad (3.17)$$

na qual a matriz  $\underline{L}$  contém os operadores de derivação, dada pela equação (3.18).

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Substituindo a equação (3.12) na equação (3.17), obtém-se:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L} \underline{\phi} \underline{d} \quad (3.19)$$

ou

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{d} \quad (3.20)$$

em que

$$\underline{B} = \underline{L} \underline{\phi} \quad (3.21).$$

Substituindo agora a equação (3.20) na equação (3.16), e sabendo que  $\underline{\varepsilon}^T = \underline{d}^T \underline{B}^T$ , obtém-se:

$$\Pi_{pe} = \frac{1}{2} \int_{V_e} (\underline{d}^T \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} \underline{d}) dV_e - \underline{f}_E^T \underline{d} \quad (3.22)$$

ou, simplesmente,

$$\Pi_{pe} = U_e(\underline{d}) - \underline{f}_E \underline{d} \quad (3.23).$$

Aplicando-se, finalmente a equação (3.11) na equação (3.23), encontra-se:

$$\frac{\partial U_e(\underline{d})}{\partial d_j} - \underline{f}_E = 0 \quad (3.24).$$

Cada uma das expressões do tipo (3.24) fornecerá uma equação algébrica, que organizada na forma matricial resultará:

$$\underline{k}_s \underline{d} = \underline{f}_E \quad (3.25)$$

em que  $\underline{k}_s$  é a matriz de rigidez secante do elemento.

Para todo o sistema estrutural, a partir das contribuições de todos os elementos, pode-se utilizar o processo de expansão e acumulação, encontrando-se o sistema de equações fornecido pela relação (3.26).

$$\underline{K}_s \underline{D} = \underline{F}_E \quad (3.26)$$

Com a obtenção dos deslocamentos nodais do sistema estrutural, as funções deslocamento ficam determinadas, podendo-se então calcular o valor da deformação do elemento utilizando-se a equação (3.20) ou (3.21) e, com isso, calcula-se o valor da tensão do elemento, utilizando-se a equação (3.14), finalizando o processo de cálculo.



### 3.2.1 - Vetor das forças nodais equivalentes

#### 3.2.1.1 - Forças distribuídas no volume do elemento

Para forças volumétricas, como descritas no item 2.1.1, a energia potencial pode ser obtida por meio da integração do produto entre o deslocamento e a respectiva força atuante distribuída pelo volume, conforme mostra a equação (3.27).

$$\Omega_e = -\int_{V_e} \tilde{u}^T \tilde{p}_{V_e} dV_e \quad (3.27)$$

Analogamente ao tratamento dado aos deslocamentos, as funções do carregamento atuante no elemento finito podem ser escritas em função dos valores dos carregamentos nodais, por meio de funções de forma apropriadas, como mostra a equação (3.28).

$$\tilde{p}_{V_e} = \phi_p \tilde{p}_{V_e}^n \quad (3.28)$$

Assim, substituindo as equações (3.12) e (3.28) na equação (3.27) obtém-se a equação (3.29).

$$\Omega_e = -\int_{V_e} \tilde{d}^T \phi_p^T \phi_p \tilde{p}_{V_e}^n dV_e \quad (3.29)$$

Como os deslocamentos e o carregamento são agora parâmetros nodais independentes, a equação anterior pode ser reescrita como:

$$\Omega_e = -\tilde{d}^T \int_{V_e} \phi_p^T \phi_p dV_e \tilde{p}_{V_e}^n \quad (3.30)$$

ou, simplesmente,

$$\Omega_e = -\tilde{q}^T \tilde{f}_E \quad (3.31)$$

em que

$$\tilde{f}_E = \int_{V_e} \tilde{\phi}^T \tilde{\phi}_p dV_e \tilde{p}_{V_e}^n \quad (3.32)$$

é o vetor das forças nodais equivalentes do elemento para forças volumétricas.

### 3.2.1.2 - Forças distribuídas na superfície do elemento

Para forças superficiais, como descritas no item 2.1.2, a energia potencial pode ser obtida por meio da integração do produto entre o deslocamento e a respectiva força atuante distribuída pela superfície, conforme indica a equação (3.33).

$$\Omega_e = -\int_{S_e} \tilde{u}^T \tilde{p}_{S_e} dS_e \quad (3.33)$$

Escrevendo as funções do carregamento atuante no elemento finito em função dos valores dos carregamentos nodais, por meio de funções de forma apropriadas, obtém-se a equação (3.34).

$$\tilde{p}_{S_e} = \tilde{\phi}_p \tilde{p}_{S_e}^n \quad (3.34)$$

Substituindo as equações (3.12) e (3.34) na equação (3.33) e sendo os deslocamentos e o carregamento parâmetros nodais independentes, obtém-se:

$$\Omega_e = -\tilde{q}^T \int_{S_e} \tilde{\phi}^T \tilde{\phi}_p dS_e \tilde{p}_{S_e}^n \quad (3.35)$$

ou, simplesmente,

$$\Omega_e = -\tilde{d}^T \tilde{f}_E \quad (3.36)$$

em que

$$\tilde{f}_E = \int_{S_e} \tilde{\phi}^T \tilde{\phi}_p dS_e \tilde{p}_{S_e}^n \quad (3.37)$$

é o vetor das forças nodais equivalentes do elemento para forças superficiais.

### 3.2.1.3 - Forças concentradas em qualquer ponto do elemento

Para forças concentradas, como descritas no item 2.1.3, a energia potencial pode ser obtida por meio do produto entre o deslocamento e a respectiva força concentrada atuante, conforme mostra a equação (3.38).

$$\Omega_e = -\tilde{u}^T \tilde{p}_c \quad (3.38)$$

Substituindo a equação (3.12) na equação (3.38) obtém-se:

$$\Omega_e = -\tilde{d}^T \tilde{\phi}^T \tilde{p}_c \quad (3.39)$$

ou, simplesmente,

$$\Omega_e = -\tilde{d}^T \tilde{f}_E \quad (3.40)$$

em que

$$\underline{f}_E = \underline{\phi}^T \underline{p}_c \quad (3.41)$$

é o vetor das forças nodais equivalentes do elemento para forças concentrados.

### 3.2.2 - Matriz de rigidez do elemento

A matriz de rigidez de um elemento finito pode ser obtida trabalhando-se algebricamente a equação (3.22). Sabendo que a integral no volume do elemento não depende dos deslocamentos nodais, esses passam a ser parâmetros independentes, podendo ser retirados da integral contida em (3.22), resultando a equação (3.41).

$$\Pi_{pe} = \frac{1}{2} \underline{d}^T \int_{V_e} (\underline{B}^T \underline{E} \underline{B}) dV_e \underline{d} - \underline{f}_E^T \underline{d} \quad (3.41)$$

Na forma genérica, a equação anterior torna-se:

$$\Pi_{pe} = \frac{1}{2} \underline{d}^T \underline{k}_s \underline{d} - \underline{f}_E^T \underline{d} \quad (3.42)$$

em que  $\underline{k}_s$  é a matriz de rigidez secante do elemento, e é dada pela equação (3.43).

$$\underline{k}_s = \int_{V_e} (\underline{B}^T \underline{E} \underline{B}) dV_e \quad (3.43)$$

Aplicando o Princípio da Energia Potencial Estacionária na equação (3.42), tem-se:

$$\delta \Pi_{pe} = \frac{1}{2} \delta \underline{d}^T \underline{k}_s \underline{d} + \frac{1}{2} \underline{d}^T \underline{k}_s \delta \underline{d} - \delta \underline{d}^T \underline{f}_E = 0 \quad (3.44)$$

sendo que,

$$\delta \underline{\underline{d}}^T \underline{\underline{k}}_s \underline{\underline{d}} = \underline{\underline{d}}^T \underline{\underline{k}}_s \delta \underline{\underline{d}} \quad (3.45)$$

obtém-se a equação (3.46).

$$\delta \underline{\underline{d}}^T (\underline{\underline{k}}_s \underline{\underline{d}} - \underline{\underline{f}}_E) = 0 \quad (3.46)$$

Como a variação dos deslocamentos é não-nula, encontra-se que:

$$\underline{\underline{k}}_s \underline{\underline{d}} - \underline{\underline{f}}_E = 0 \quad (3.47)$$

sendo a matriz de rigidez  $\underline{\underline{k}}_s$ , de cada elemento, obtida facilmente utilizando a equação (3.43).

Para toda a estrutura, via processo de expansão e acumulação, obtém-se a matriz de rigidez global e o vetor global de forças nodais equivalentes, respeitando-se a correspondência entre cada termo matricial com o respectivo deslocamento nodal global, respectivamente pelas equações (3.48) e (3.49).

$$\underline{\underline{K}}_s = \sum_{e=1}^{n_e} \underline{\underline{k}}_s^e \quad (3.48)$$

$$\underline{\underline{F}}_E = \sum_{e=1}^{n_e} \underline{\underline{f}}_E^e \quad (3.49)$$

### 3.3 - Elemento finito de barra

Para simular o aço, considerando uma análise unidimensional, foi adotado o elemento finito de barra simples com dois nós, de comprimento  $L$ , mostrado na figura 3.1, cuja função aproximadora contém apenas dois monômios.

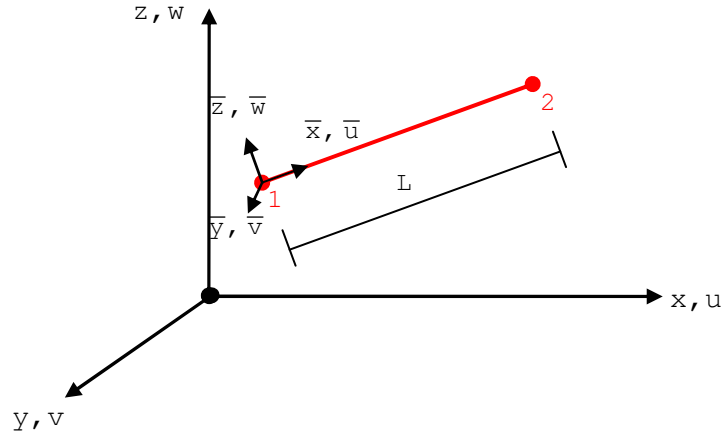


Figura 3.1 - Elemento finito de barra simples com dois nós

Considerando-se um sistema de coordenadas locais  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  com origem na extremidade esquerda do elemento, os deslocamentos  $\bar{v}$  e  $\bar{w}$  são nulos, ou seja, o elemento possui apenas um grau de liberdade na direção do seu eixo (direção  $\bar{x}$ ). Sendo assim a função interpoladora dos deslocamentos axiais  $\bar{u}$  que ocorrem ao longo da direção  $\bar{x}$ , se admitida uma variação linear, é dada pela equação (3.51).

$$\bar{u}(\bar{x}) = \alpha_0 + \alpha_1 \bar{x} \quad (3.51)$$

Substituindo-se os valores das coordenadas nodais na função interpoladora, conforme o esquema mostrado na figura (3.1), obtêm-se as condições de contorno do problema, conforme mostra a equação (3.52).

$$\begin{cases} \text{p/ } \bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{u}(\bar{x}) = \bar{u}_1 \\ \text{p/ } \bar{x} = L \Rightarrow \bar{u}(\bar{x}) = \bar{u}_2 \end{cases} \quad (3.52)$$

Impondo-se essas condições na equação (3.51), chega-se a:

$$\bar{u}(\bar{x}) = \bar{u}_1 \left(1 - \frac{\bar{x}}{L}\right) + \bar{u}_2 \frac{\bar{x}}{L} \quad (3.53)$$

ou, na forma matricial, considerando também os deslocamentos  $\bar{v}$  e  $\bar{w}$  dos dois nós,

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\bar{x}}{L} & 0 & 0 & \frac{\bar{x}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{w}_2 \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{\phi} \underset{\sim}{d} \quad (3.54)$$

sendo  $\underset{\sim}{\phi}$  a matriz das funções de forma do elemento finito de barra.

### 3.3.1 - Matriz de rigidez

Na dedução da matriz de rigidez do elemento finito de barra simples com eixo orientado segundo o eixo local  $\bar{x}$ , as seguintes simplificações podem ser admitidas:

- a)  $\sigma_{\bar{y}} \cong 0; \sigma_{\bar{z}} \cong 0; \tau_{\bar{x}\bar{z}} \cong 0; \tau_{\bar{y}\bar{z}} \cong 0$ , pois suas magnitudes são desprezíveis quando comparadas com a magnitude de  $\sigma_{\bar{x}}$ ;
- b)  $\gamma_{\bar{x}\bar{y}} = 0$ , pois vale a Lei de Navier, em que a seção transversal plana permanece plana após sua deformação.

Com essas simplificações, a relação dada pela equação (3.14) reduz-se a:

$$\sigma_{\bar{x}} = E \epsilon_{\bar{x}} \quad (3.55)$$

e assim, para o elemento de barra simples com dois nós, a matriz de rigidez que é calculada por meio da equação (3.43), pode ser simplificada, conforme mostrado a seguir:

$$\underline{k}_s = EA \int_0^L (\underline{B}^T \underline{B}) d\bar{x} \quad (3.56)$$

na qual  $A$  é a área da seção transversal da barra.

Da definição dada pela equação (3.21) e sendo a matriz  $\phi$  do elemento finito de barra simples dada pela equação (3.54), obtém-se a equação (3.57), que define a matriz  $\underline{B}$ , para esse elemento.

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Dessa forma, substituindo-se a equação (3.57) na equação (3.56) e fazendo-se os cálculos necessários, obtém-se a matriz de rigidez do elemento finito de barra simples com dois nós dada pela equação (3.58).

$$\underline{k}_s = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

### 3.3.2 - Matriz de rotação

Antes de se aplicar o processo de expansão e acumulação em cada matriz de rigidez do elemento para a obtenção da matriz



de rigidez de toda a barra, é necessário rotacionar as matrizes elementais, em função da posição original do elemento na estrutura, por meio da utilização da seguinte equação:

$$\underline{k}_s^* = \underline{r}^T \underline{k}_s \underline{r} \quad (3.59)$$

em que  $\underline{r}$  é a matriz que contém os co-senos diretores de cada elemento.

Para treliças espaciais, tal matriz é dada por:

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{C_x C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & -\frac{C_y C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & C_z \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{C_x C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & -\frac{C_y C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

onde  $C_x$ ,  $C_y$  e  $C_z$  são os co-senos diretores de cada elemento entre os eixos locais  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  e  $\bar{z}$  e os eixos globais  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

Para elementos direcionados segundo o eixo global  $y$ , sendo então,  $C_x = C_z = 0$ , a matriz de rotação é expressa por:

$$\tilde{r} = \begin{bmatrix} 0 & C_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

### 3.4 - Elemento finito prismático regular linear

Para simular o concreto, considerando a viga como elemento sólido, foi adotado, devido a sua simplicidade, o elemento finito prismático regular linear com oito nós, de lados  $2a$ ,  $2b$  e  $2c$ , conforme mostrado na figura 3.2. Cada nó desse elemento possui três graus de liberdade, ou seja, deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

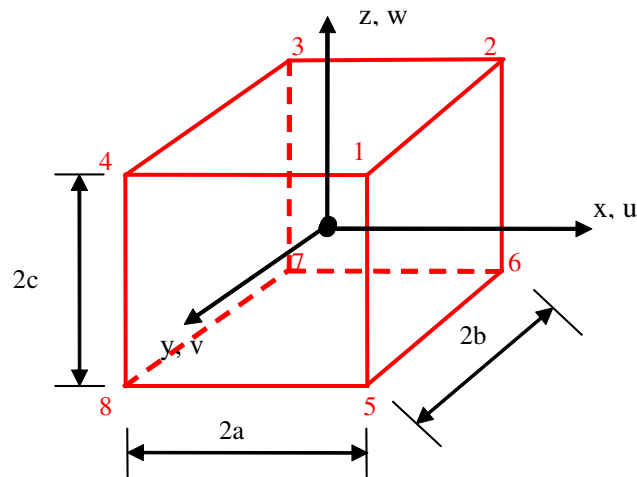


Figura 3.2 - Elemento finito prismático regular linear com oito nós

As funções aproximadoras desse elemento contêm oito monômios extraídos do polinômio algébrico cúbico completo em  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Nesse caso, para garantir a continuidade com os deslocamentos dos elementos adjacentes, a função deslocamento deve variar linearmente ao longo dos lados (ZIENKIEWICZ e

CHEUNG, 1967). Sendo assim, para um sistema de coordenadas adimensionais com origem no centróide do elemento, ou seja:

$$\xi = \frac{x}{a} ; \quad \eta = \frac{y}{b} \quad e \quad \zeta = \frac{z}{c} \quad (3.62)$$

as funções interpoladoras para os deslocamentos  $u, v$  e  $w$ , são dadas pelas equações (3.63), (3.64) e (3.65), respectivamente.

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta + \alpha_4 \xi \eta + \alpha_5 \xi \zeta + \alpha_6 \eta \zeta + \alpha_7 \xi \eta \zeta \quad (3.63)$$

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \beta_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta + \beta_4 \xi \eta + \beta_5 \xi \zeta + \beta_6 \eta \zeta + \beta_7 \xi \eta \zeta \quad (3.64)$$

$$w(\xi, \eta, \zeta) = \gamma_0 + \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta + \gamma_4 \xi \eta + \gamma_5 \xi \zeta + \gamma_6 \eta \zeta + \gamma_7 \xi \eta \zeta \quad (3.65)$$

Na forma matricial, essas equações são dadas por:

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{\varphi} \underset{\sim}{\alpha} \quad (3.66)$$

em que

$$\underset{\sim}{u}^T = \{u \quad v \quad w\};$$

$$\underset{\sim}{\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \zeta & \xi\eta & \xi\zeta & \eta\zeta & \xi\eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \zeta & \xi\eta & \xi\zeta & \eta\zeta & \xi\eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \zeta & \xi\eta & \xi\zeta & \eta\zeta & \xi\eta\zeta \end{bmatrix};$$

$$\underset{\sim}{\alpha}^T = \{\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4 \quad \beta_5 \quad \beta_6 \quad \beta_7 \quad \gamma_0 \quad \gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \quad \gamma_4 \quad \gamma_5 \quad \gamma_6 \quad \gamma_7\}.$$

Substituindo-se os valores das coordenadas nodais na matriz  $\underset{\sim}{\varphi}$ , conforme o esquema mostrado na figura 3.2, tem-se:

$$- \text{Nó } 1 \left( \xi = \frac{x}{a} = \frac{a}{a} = 1; \quad \eta = \frac{y}{b} = \frac{b}{b} = 1; \quad \zeta = \frac{z}{c} = \frac{c}{c} = 1 \right):$$



$$\underset{\sim}{\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando-se conjuntamente os oito nós do elemento, obtém-se:

$$\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{\alpha} \quad (3.67)$$

em que:

$$\underset{\sim}{d}^T = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ u_3 \ v_3 \ w_3 \ u_4 \ v_4 \ w_4 \ u_5 \ v_5 \ w_6 \ u_7 \ v_7 \ w_7 \ u_8 \ v_8 \ w_8\};$$

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Da equação (3.67), obtém-se a matriz  $\underset{\sim}{\alpha}$ , em função da matriz dos deslocamentos  $\underset{\sim}{d}$ , como mostra a equação (3.68):

$$\underline{\alpha} = \underline{\tilde{A}}^{-1} \underline{\tilde{d}} \quad (3.68)$$

com  $\underline{\tilde{A}}^{-1}$  dada pela equação (3.69).

$$\underline{\tilde{A}}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Substituindo a equação (3.68) na (3.66), e comparando com a equação (3.12), obtém-se que a matriz das funções de forma  $\underline{\phi}$ , para o elemento finito prismático regular linear com oito nós, é dada pela equação (3.70).

$$\underline{\phi} = \underline{\varphi} \underline{\tilde{A}}^{-1} \quad (3.70)$$

Explicitamente, a matriz  $\underline{\phi}$  é dada pela equação a seguir:

$$\underset{\sim}{\phi} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 & 0 & N_7 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 & 0 & N_7 & 0 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 & 0 & N_7 & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

com

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 + \xi + \eta + \zeta + \xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta + \xi\eta\zeta = (1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) ; \\ N_2 &= 1 + \xi - \eta + \zeta - \xi\eta + \xi\zeta - \eta\zeta - \xi\eta\zeta = (1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) ; \\ N_3 &= 1 - \xi - \eta + \zeta + \xi\eta - \xi\zeta - \eta\zeta + \xi\eta\zeta = (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) ; \\ N_4 &= 1 - \xi + \eta + \zeta - \xi\eta - \xi\zeta + \eta\zeta - \xi\eta\zeta = (1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) ; \\ N_5 &= 1 + \xi + \eta - \zeta + \xi\eta - \xi\zeta - \eta\zeta - \xi\eta\zeta = (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) ; \\ N_6 &= 1 + \xi - \eta - \zeta - \xi\eta - \xi\zeta + \eta\zeta + \xi\eta\zeta = (1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) ; \\ N_7 &= 1 - \xi - \eta - \zeta + \xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta - \xi\eta\zeta = (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) ; \\ N_8 &= 1 - \xi + \eta - \zeta - \xi\eta + \xi\zeta - \eta\zeta + \xi\eta\zeta = (1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) . \end{aligned}$$

### 3.4.1 - Matriz de rigidez

Conforme visto no item 3.2.2, a matriz de rigidez de um elemento finito qualquer pode ser deduzida por meio da equação (3.43). Para o elemento finito prismático regular linear, em termos das coordenadas adimensionais dadas pela equação (3.62), pode-se reescrever a equação (3.43) como segue.

$$\underline{k}_s = abc \left[ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\underline{B}^T \underline{E} \underline{B}) d\xi d\eta d\zeta \right] \quad (3.72)$$

Da definição dada pela equação (3.21) e sendo a matriz  $\underset{\sim}{\phi}$  do elemento finito prismático regular linear dada pela equação (3.71), obtém-se a equação (3.73), que define a matriz  $\underline{B}$ , para esse elemento:

$$B = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_7}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_7}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_7}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_7}{\partial y} \frac{\partial N_7}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_4}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \frac{\partial N_5}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} \frac{\partial N_6}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} \frac{\partial N_7}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_7}{\partial x} \frac{\partial N_8}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial z} \frac{\partial N_5}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial z} \frac{\partial N_6}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_7}{\partial z} \frac{\partial N_7}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial z} \frac{\partial N_8}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

em que

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} &= \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{(1 + \eta)(1 + \zeta)}{a}; \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} &= \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{(1 + \xi)(1 + \zeta)}{b}; \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} &= \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{c}; \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} &= \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{(1 - \eta)(1 + \zeta)}{a}; \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} &= \frac{\partial N_2}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{(1 + \xi)(1 + \zeta)}{b}; \\ \frac{\partial N_2}{\partial z} &= \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{(1 + \xi)(1 - \eta)}{c}; \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} &= \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{(1 - \eta)(1 + \zeta)}{a}; \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} &= \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{(1 - \xi)(1 + \zeta)}{b}; \\ \frac{\partial N_3}{\partial z} &= \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{(1 - \xi)(1 - \eta)}{c}; \\ \frac{\partial N_4}{\partial x} &= \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{(1 + \eta)(1 + \zeta)}{a}; \\ \frac{\partial N_4}{\partial y} &= \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{(1 - \xi)(1 + \zeta)}{b}; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_4}{\partial z} &= \frac{\partial N_4}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{(1 - \xi)(1 + \eta)}{c}; \\
 \frac{\partial N_5}{\partial x} &= \frac{\partial N_5}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{(1 + \eta)(1 - \zeta)}{a}; \\
 \frac{\partial N_5}{\partial y} &= \frac{\partial N_5}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{(1 + \xi)(1 - \zeta)}{b}; \\
 \frac{\partial N_5}{\partial z} &= \frac{\partial N_5}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{c}; \\
 \frac{\partial N_6}{\partial x} &= \frac{\partial N_6}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{(1 - \eta)(1 - \zeta)}{a}; \\
 \frac{\partial N_6}{\partial y} &= \frac{\partial N_6}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{(1 + \xi)(1 - \zeta)}{b}; \\
 \frac{\partial N_6}{\partial z} &= \frac{\partial N_6}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{(1 + \xi)(1 - \eta)}{c}; \\
 \frac{\partial N_7}{\partial x} &= \frac{\partial N_7}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{(1 - \eta)(1 - \zeta)}{a}; \\
 \frac{\partial N_7}{\partial y} &= \frac{\partial N_7}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{(1 - \xi)(1 - \zeta)}{b}; \\
 \frac{\partial N_7}{\partial z} &= \frac{\partial N_7}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{(1 - \xi)(1 - \eta)}{c}; \\
 \frac{\partial N_8}{\partial x} &= \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{(1 + \eta)(1 - \zeta)}{a}; \\
 \frac{\partial N_8}{\partial y} &= \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{(1 - \xi)(1 - \zeta)}{b}; \\
 \frac{\partial N_8}{\partial z} &= \frac{\partial N_8}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{(1 - \xi)(1 + \eta)}{c}.
 \end{aligned}$$

Sendo a matriz  $\underline{E}$  definida pela equação (3.15) e com a matriz  $\underline{B}$  dada pela equação (3.73), pode-se, por meio da equação (3.72), obter a matriz de rigidez do elemento finito prismático regular linear, que é mostrada pela equação (3.74).

$$\tilde{k}_s = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & \tilde{k}_{12} & \tilde{k}_{13} & \tilde{k}_{14} \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} & \tilde{k}_{23} & \tilde{k}_{24} \\ \tilde{k}_{31} & \tilde{k}_{32} & \tilde{k}_{33} & \tilde{k}_{34} \\ \tilde{k}_{41} & \tilde{k}_{42} & \tilde{k}_{43} & \tilde{k}_{44} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Os coeficientes  $\tilde{k}_{ij}$  da matriz (3.74) são definidos pelas equações a seguir:

$$\tilde{k}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9}(\psi + \omega + \theta) & \frac{1}{12}c & \frac{1}{12}b & \frac{1}{9}(\psi - 2\omega + \theta) & \frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{24}b \\ \frac{1}{12}c & \frac{2}{9}(\lambda + \vartheta + \theta) & \frac{1}{12}a & -\frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{9}(-2\lambda + \vartheta + \theta) & -\frac{1}{6}a\chi \\ \frac{1}{12}b & \frac{1}{12}a & \frac{2}{9}(\rho + \vartheta + \omega) & \frac{1}{24}b & \frac{1}{6}a\chi & \frac{1}{9}(\rho + \vartheta - 2\omega) \\ \frac{1}{9}(\psi - 2\omega + \theta) & -\frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{24}b & \frac{2}{9}(\psi + \omega + \theta) & -\frac{1}{12}c & \frac{1}{12}b \\ \frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{9}(-2\lambda + \vartheta + \theta) & \frac{1}{6}a\chi & -\frac{1}{12}c & \frac{2}{9}(\lambda + \vartheta + \theta) & -\frac{1}{12}a \\ \frac{1}{24}b & -\frac{1}{6}a\chi & \frac{1}{9}(\rho + \vartheta - 2\omega) & \frac{1}{12}b & -\frac{1}{12}a & \frac{2}{9}(\rho + \vartheta + \omega) \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

$$\tilde{k}_{21} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18}(-2\psi - 2\omega + \theta) & -\frac{1}{12}c & \frac{1}{12}b\chi & \frac{1}{9}(-2\psi + \omega + \theta) & -\frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{6}b\chi \\ -\frac{1}{12}c & \frac{1}{18}(-2\lambda - 2\vartheta + \theta) & \frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{9}(\lambda - 2\vartheta + \theta) & -\frac{1}{24}a \\ -\frac{1}{12}b\chi & -\frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{18}(\rho - 2\vartheta - 2\omega) & -\frac{1}{6}b\chi & -\frac{1}{24}a & \frac{1}{9}(\rho - 2\vartheta + \omega) \\ \frac{1}{9}(-2\psi + \omega + \theta) & \frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{6}b\chi & \frac{1}{18}(-2\psi - 2\omega + \theta) & \frac{1}{12}c & \frac{1}{12}b\chi \\ -\frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{9}(\lambda - 2\vartheta + \theta) & \frac{1}{24}a & \frac{1}{12}c & \frac{1}{18}(-2\lambda - 2\vartheta + \theta) & -\frac{1}{12}a\chi \\ -\frac{1}{6}b\chi & \frac{1}{24}a & \frac{1}{9}(\rho - 2\vartheta + \omega) & -\frac{1}{12}b\chi & \frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{18}(\rho - 2\vartheta - 2\omega) \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

$$k_{31} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9}(\psi + \omega - 2\theta) & \frac{1}{24}c & -\frac{1}{6}b\chi & \frac{1}{18}(\psi - 2\omega - 2\theta) & \frac{1}{12}c\chi & -\frac{1}{12}b\chi \\ \frac{1}{24}c & \frac{1}{9}(\lambda + \vartheta - 2\theta) & -\frac{1}{6}a\chi & -\frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{18}(-2\lambda + \vartheta - 2\theta) & \frac{1}{12}a \\ \frac{1}{6}b\chi & \frac{1}{6}a\chi & \frac{1}{9}(-2\rho + \vartheta + \omega) & \frac{1}{12}b\chi & \frac{1}{12}a & \frac{1}{18}(-2\rho + \vartheta - 2\omega) \\ \frac{1}{18}(\psi - 2\omega - 2\theta) & -\frac{1}{12}c\chi & -\frac{1}{12}b\chi & \frac{1}{9}(\psi + \omega - 2\theta) & -\frac{1}{24}c & -\frac{1}{6}b\chi \\ \frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{18}(-2\lambda + \vartheta - 2\theta) & -\frac{1}{12}a & -\frac{1}{24}c & \frac{1}{9}(\lambda + \vartheta - 2\theta) & \frac{1}{6}a\chi \\ \frac{1}{12}b\chi & -\frac{1}{12}a & \frac{1}{18}(-2\rho + \vartheta - 2\omega) & \frac{1}{6}b\chi & -\frac{1}{6}a\chi & \frac{1}{9}(-2\rho + \vartheta + \omega) \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

$$k_{41} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{18}(\psi + \omega + \theta) & -\frac{1}{24}c & -\frac{1}{24}b & \frac{1}{18}(-2\psi + \omega - 2\theta) & -\frac{1}{12}c\chi & -\frac{1}{12}b \\ -\frac{1}{24}c & -\frac{1}{18}(\lambda + \vartheta + \theta) & -\frac{1}{24}a & \frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{18}(\lambda - 2\vartheta - 2\theta) & \frac{1}{12}a\chi \\ -\frac{1}{24}b & -\frac{1}{24}a & -\frac{1}{18}(\rho + \vartheta + \omega) & -\frac{1}{12}b & -\frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{18}(-2\rho - 2\vartheta + \omega) \\ \frac{1}{18}(-2\psi + \omega - 2\theta) & \frac{1}{12}c\chi & -\frac{1}{12}b & -\frac{1}{18}(\psi + \omega + \theta) & \frac{1}{24}c & -\frac{1}{24}b \\ -\frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{18}(\lambda - 2\vartheta - 2\theta) & -\frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{24}c & -\frac{1}{18}(\lambda + \vartheta + \theta) & \frac{1}{24}a \\ -\frac{1}{12}b & \frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{18}(-2\rho - 2\vartheta + \omega) & -\frac{1}{24}b & \frac{1}{24}a & -\frac{1}{18}(\rho + \vartheta + \omega) \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

$$k_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18}(-2\psi - 2\omega + \theta) & -\frac{1}{12}c & -\frac{1}{12}b\chi & \frac{1}{9}(-2\psi + \omega + \theta) & -\frac{1}{6}c\chi & -\frac{1}{6}b\chi \\ -\frac{1}{12}c & \frac{1}{18}(-2\lambda - 2\vartheta + \theta) & -\frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{9}(\lambda - 2\vartheta + \theta) & \frac{1}{24}a \\ \frac{1}{12}b\chi & \frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{18}(\rho - 2\vartheta - 2\omega) & \frac{1}{6}b\chi & \frac{1}{24}a & \frac{1}{9}(\rho - 2\vartheta + \omega) \\ \frac{1}{9}(-2\psi + \omega + \theta) & \frac{1}{6}c\chi & -\frac{1}{6}b\chi & \frac{1}{18}(-2\psi - 2\omega + \theta) & \frac{1}{12}c & -\frac{1}{12}b\chi \\ -\frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{9}(\lambda - 2\vartheta + \theta) & -\frac{1}{24}a & \frac{1}{12}c & \frac{1}{18}(-2\lambda - 2\vartheta + \theta) & \frac{1}{12}a\chi \\ \frac{1}{6}b\chi & -\frac{1}{24}a & \frac{1}{9}(\rho - 2\vartheta + \omega) & \frac{1}{12}b\chi & -\frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{18}(\rho - 2\vartheta - 2\omega) \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

$$k_{22} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9}(\psi + \omega + \theta) & \frac{1}{12}c & -\frac{1}{12}b & \frac{1}{9}(\psi - 2\omega + \theta) & \frac{1}{6}c\chi & -\frac{1}{24}b \\ \frac{1}{12}c & \frac{2}{9}(\lambda + \vartheta + \theta) & -\frac{1}{12}a & -\frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{9}(-2\lambda + \vartheta + \theta) & \frac{1}{6}a\chi \\ -\frac{1}{12}b & -\frac{1}{12}a & \frac{2}{9}(\rho + \vartheta + \omega) & -\frac{1}{24}b & -\frac{1}{6}a\chi & \frac{1}{9}(\rho + \vartheta - 2\omega) \\ \frac{1}{9}(\psi - 2\omega + \theta) & -\frac{1}{6}c\chi & -\frac{1}{24}b & \frac{2}{9}(\psi + \omega + \theta) & -\frac{1}{12}c & -\frac{1}{12}b \\ \frac{1}{6}c\chi & \frac{1}{9}(-2\lambda + \vartheta + \theta) & -\frac{1}{6}a\chi & -\frac{1}{12}c & \frac{2}{9}(\lambda + \vartheta + \theta) & \frac{1}{12}a \\ -\frac{1}{24}b & \frac{1}{6}a\chi & \frac{1}{9}(\rho + \vartheta - 2\omega) & -\frac{1}{12}b & \frac{1}{12}a & \frac{2}{9}(\rho + \vartheta + \omega) \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

$$k_{32} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{18}(\psi + \omega + \theta) & -\frac{1}{24}c & \frac{1}{24}b & \frac{1}{18}(-2\psi + \omega - 2\theta) & -\frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{12}b \\ -\frac{1}{24}c & -\frac{1}{18}(\lambda + \vartheta + \theta) & \frac{1}{24}a & \frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{18}(\lambda - 2\vartheta - 2\theta) & -\frac{1}{12}a\chi \\ \frac{1}{24}b & \frac{1}{24}a & -\frac{1}{18}(\rho + \vartheta + \omega) & \frac{1}{12}b & \frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{18}(-2\rho - 2\vartheta + \omega) \\ \frac{1}{18}(-2\psi + \omega - 2\theta) & \frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{12}b & -\frac{1}{18}(\psi + \omega + \theta) & \frac{1}{24}c & \frac{1}{24}b \\ -\frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{18}(\lambda - 2\vartheta - 2\theta) & \frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{24}c & -\frac{1}{18}(\lambda + \vartheta + \theta) & -\frac{1}{24}a \\ \frac{1}{12}b & -\frac{1}{12}a\chi & \frac{1}{18}(-2\rho - 2\vartheta + \omega) & \frac{1}{24}b & -\frac{1}{24}a & -\frac{1}{18}(\rho + \vartheta + \omega) \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

$$k_{42} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9}(\psi + \omega - 2\theta) & \frac{1}{24}c & \frac{1}{6}b\chi & \frac{1}{18}(\psi - 2\omega - 2\theta) & \frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{12}b\chi \\ \frac{1}{24}c & \frac{1}{9}(\lambda + \vartheta - 2\theta) & \frac{1}{6}a\chi & -\frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{18}(-2\lambda + \vartheta - 2\theta) & -\frac{1}{12}a \\ -\frac{1}{6}b\chi & -\frac{1}{6}a\chi & \frac{1}{9}(-2\rho + \vartheta + \omega) & -\frac{1}{12}b\chi & -\frac{1}{12}a & \frac{1}{18}(-2\rho + \vartheta - 2\omega) \\ \frac{1}{18}(\psi - 2\omega - 2\theta) & -\frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{12}b\chi & \frac{1}{9}(\psi + \omega - 2\theta) & -\frac{1}{24}c & \frac{1}{6}b\chi \\ \frac{1}{12}c\chi & \frac{1}{18}(-2\lambda + \vartheta - 2\theta) & \frac{1}{12}a & -\frac{1}{24}c & \frac{1}{9}(\lambda + \vartheta - 2\theta) & -\frac{1}{6}a\chi \\ -\frac{1}{12}b\chi & \frac{1}{12}a & \frac{1}{18}(-2\rho + \vartheta - 2\omega) & -\frac{1}{6}b\chi & \frac{1}{6}a\chi & \frac{1}{9}(-2\rho + \vartheta + \omega) \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

$$k_{13} = k_{42} \quad (3.83)$$

$$k_{23} = k_{32} \quad (3.84)$$

$$k_{33} = k_{22} \quad (3.85)$$

$$k_{43} = k_{12} \quad (3.86)$$

$$k_{14} = k_{41} \quad (3.87)$$

$$k_{24} = k_{31} \quad (3.88)$$

$$k_{34} = k_{21} \quad (3.89)$$

$$k_{44} = k_{11} \quad (3.90)$$

sendo:

$$\psi = \frac{bc}{a} (1 - v) ;$$

$$\lambda = \frac{ac}{b} (1 - v) ;$$

$$\rho = \frac{ab}{c} (1 - v) ;$$

$$\vartheta = \frac{bc}{a} \left( \frac{1}{2} - v \right) ;$$

$$\omega = \frac{ac}{b} \left( \frac{1}{2} - v \right) ;$$

$$\theta = \frac{ab}{c} \left( \frac{1}{2} - v \right) ;$$

$$\chi = \frac{1}{2} - 2v .$$

## **CAPÍTULO 4 – MODELOS FÍSICOS NÃO-LINEARES**

As relações constitutivas apresentadas no Capítulo 2 pelas equações (2.84) a (2.89) são válidas apenas quando considerado que os materiais estruturais apresentam um comportamento elástico linear.

Contudo, tanto o concreto quanto o aço apresentam, para determinados níveis de solicitação, um comportamento não-linear, caracterizado pela relação não-linear entre tensão e deformação. Esse tipo de comportamento é manifestado por meio da capacidade de acomodar grandes deformações em relação ao acréscimo de uma pequena parcela de carregamento, e também do surgimento de deformações irreversíveis ou plásticas.

Dessa forma para a análise da deformação e da ruptura do concreto armado é conveniente a utilização de modelos que permitam representar a diminuição da rigidez, bem como a consideração de deformações irreversíveis.

Para introduzir a não-linearidade física do aço, deve-se idealizar o comportamento do aço por meio da utilização de modelos matemáticos que permitam a simulação da relação tensão x deformação real. Entre os vários modelos disponíveis para esse tipo de análise, destaca-se o modelo elastoplástico com endurecimento linear.

O comportamento do concreto, por sua vez, pode ser modelado por meio da simulação matemática das relações entre tensão e deformação a partir de uma série de experimentos simples, em que se procura definir a forma da superfície de ruptura do concreto, desconsiderando-se os mecanismos microscópicos intrínsecos do material. Muitos modelos ou

critérios de ruptura podem ser encontrados na literatura, onde comumente os mesmos são definidos no espaço das tensões pelo número de constantes mecânicas do material. Neste trabalho, será adotado o critério de Mohr-Coulomb, que tem sido muito utilizado para modelar o comportamento do concreto submetido a um estado qualquer de tensões.

## **4.1 - Aço estrutural**

### **4.1.1 - Comportamento uniaxial**

O aço utilizado em estruturas de concreto armado, no seu processo de obtenção, pode passar por dois tipos de tratamentos diferentes: tratamento a quente, que consiste na laminação, forjamento ou estiramento do aço, realizado em temperaturas acima de 720°C; e tratamento a frio, realizado abaixo da zona de temperatura crítica.

Nos aços tratados a quente, antigamente classificados como aços classe A, devido às altas temperaturas em que são obtidos, há uma modificação da estrutura interna do aço, ocorrendo homogeneização e recristalização com redução do tamanho dos grãos, melhorando as características mecânicas do material.

Dessa forma, aços desse tipo apresentam melhor trabalhabilidade, aceitam solda comum e resistem a incêndios moderados, perdendo resistência apenas com temperaturas acima de 1150 °C. Estão incluídos nesse grupo os aços CA-25 e CA-50 (barras).

O diagrama tensão x deformação desse tipo de aço apresenta patamar de escoamento, sendo mostrado na figura 4.1.

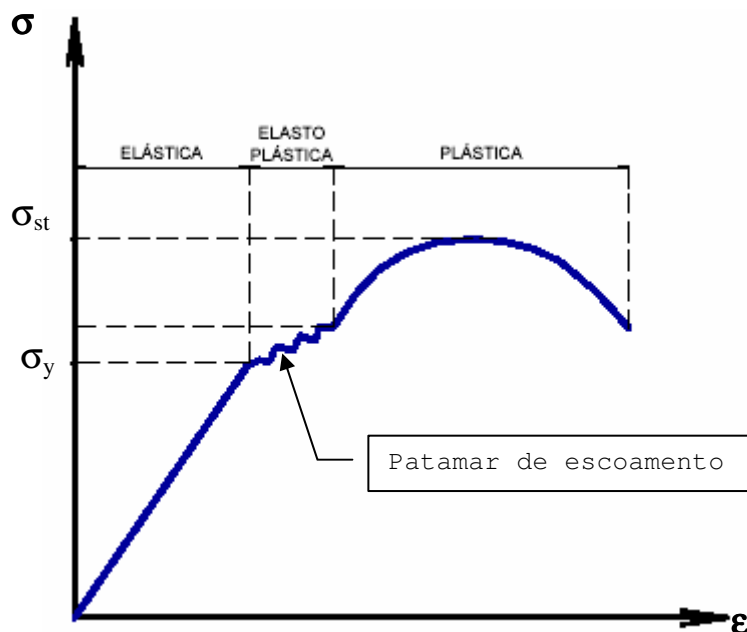


Figura 4.1 - Diagrama tensão x deformação de aços tratados a quente

Este diagrama pode ser obtido submetendo-se uma barra de aço de comprimento  $L$  e seção transversal  $A$  a um esforço de tração crescente.

Conforme se pode observar pelo diagrama mostrado na figura 4.1, até o nível da tensão de escoamento  $\sigma_y$ , a relação tensão x deformação é linear, valendo, portanto, a Lei de Hooke ( $\sigma = E\varepsilon$ ). Além disso, para tensões aplicadas até o valor de  $\sigma_y$ , se retirado o carregamento, a barra voltará a possuir o comprimento inicial  $L$ , não apresentando deformações permanentes. Esse trecho, portanto, caracteriza o regime elástico-linear do material.

Quando a tensão de escoamento é ultrapassada, o módulo de deformação longitudinal do aço começa a modificar-se e com isso a inclinação da curva tensão x deformação começa a diminuir progressivamente, até ser atingida a tensão limite de resistência  $\sigma_{st}$ . Além dessa modificação no módulo de deformação, para valores de tensão superiores a  $\sigma_y$ , se houver o descarregamento da barra, a barra não mais terá o



comprimento inicial  $L$ , apresentando, dessa forma, deformações residuais.

Os aços tratados a frio, classificados antigamente como aços classe B, são obtidos a partir da deformação dos grãos por meio de tração, compressão ou torção. Por serem obtidos abaixo da zona de temperatura crítica, os grãos permanecem deformados e diz-se que o aço está encruado.

Devido ao seu processo de obtenção, os aços encruados apresentam como características um aumento da resistência mecânica e da dureza, e uma diminuição da resistência à corrosão e da ductilidade, ou seja, decréscimo do alongamento e da estrição. Estão incluídos nesse grupo os aços CA-60 (fios).

O diagrama tensão x deformação desse tipo de aço, não apresenta escoamento bem definido, sendo mostrado na figura 4.2.

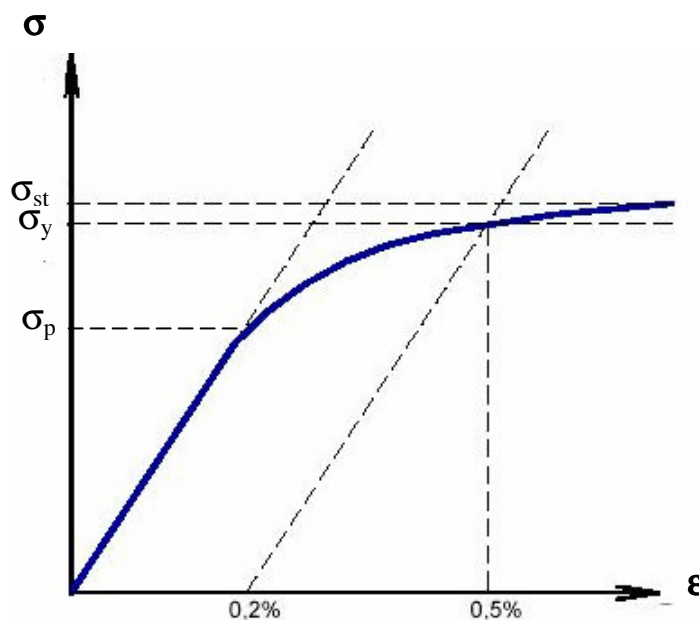


Figura 4.2 - Diagrama tensão x deformação de aços tratados a frio

Nesse caso, conforme se pode observar pela figura 4.2, o aço apresenta um comportamento elástico-linear até ser atingida a tensão de proporcionalidade  $\sigma_p$ . Ultrapassada essa

tensão, o aço já começa a apresentar um comportamento não-linear, caracterizado pelo surgimento de deformações permanentes, e pela relação não-linear entre tensão e deformação.

Da mesma forma que ocorre com os aços tratados a quente, no comportamento plástico do material há uma modificação no valor do módulo de elasticidade longitudinal e uma redução progressiva na inclinação da curva tensão x deformação.

Para esse tipo de aço, a tensão de escoamento  $\sigma_y$  não é bem definida, como nos aços tratados a quente. Dessa forma, admite-se que o escoamento ocorra com tensão que provoca uma deformação residual de 0,2%.

Pela figura 4.2, pode-se observar o caminho de descarregamento da barra, quando atingida a tensão admitida como de escoamento  $\sigma_y$ . Se houver o descarregamento completo, a barra apresentará uma deformação permanente de 0,2%, recuperando a deformação elástica, no caso mostrado, de 0,3%.

#### 4.1.2 - Modelo elastoplástico com endurecimento linear

Um dos modelos que pode ser utilizado para caracterizar o comportamento não-linear do aço é o modelo elastoplástico com endurecimento linear. A figura 4.3 ilustra a relação tensão x deformação do aço idealizada por esse modelo.

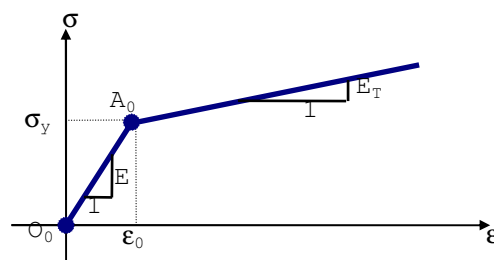


Figura 4.3 - Modelo elastoplástico com endurecimento linear

Nesse modelo, uma vez ultrapassada a tensão de escoamento  $\sigma_y$ , o módulo de deformação longitudinal  $E$  é substituído pelo módulo tangente  $E_T$ , de forma que o elemento estrutural passe a ter maiores deformações para um mesmo acréscimo de tensão. Uma vez que a inclinação da curva tensão x deformação diminui depois de atingida a tensão de escoamento, conforme visto no item 4.1.1, o módulo tangente  $E_T$  é menor que o módulo longitudinal  $E$ .

O modelo elastoplástico com endurecimento linear pode ser resumido pelas equações (4.1) e (4.2).

$$p/ \sigma < \sigma_y \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (4.1)$$

$$p/ \sigma \geq \sigma_y \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma - \sigma_y}{E_T} \quad (4.2)$$

Esse modelo é perfeitamente compatível com a relação tensão x deformação dos aços tratados a quente. Para aços tratados a frio, no entanto, é necessário fazer um ajuste no valor do módulo tangente.

## 4.2 - Concreto

### 4.2.1 - Comportamento não-linear

A principal causa do surgimento de deformações irreversíveis no concreto é o processo de microfissuração interna do material. Tal processo ocorre principalmente na zona de transição - região definida entre a pasta de cimento e o agregado graúdo, e é responsável pela diminuição da rigidez estrutural, conforme ilustrado na figura 4.4.

Segundo MacGregor (1997) apud Buchaim (2001) as microfissuras têm abertura inferior a  $10\mu\text{m}$  e comprimento entre 3 e 13 mm, antes mesmo da aplicação do carregamento. Após a aplicação do carregamento, a microfissuração acontece gradativamente no interior do concreto como resultado da alteração da distribuição de tensões entre a pasta de cimento e o agregado graúdo, e se dá pela ausência ou perda progressiva da aderência na zona de transição.

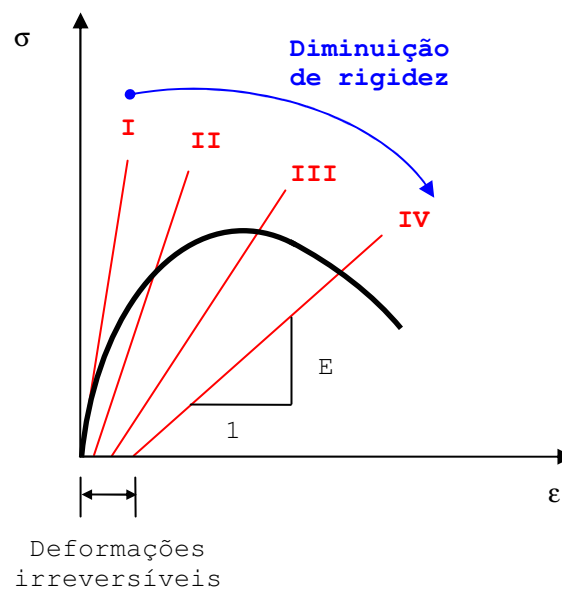


Figura 4.4 - Comportamento tensão x deformação típico do concreto

Na compressão uniaxial do concreto até a ruptura, a microfissuração transforma-se em macrofissuração (fissuras visíveis). Nesse processo distinguem-se quatro fases, que estão representadas na figura 4.4, mostrando a diminuição de rigidez de cada etapa (redução do módulo de elasticidade) e o aparecimento de deformações irreversíveis, e na figura 4.5, que ilustra quais são as faixas de valores de tensão correspondentes a cada etapa, em função da resistência a compressão do concreto.

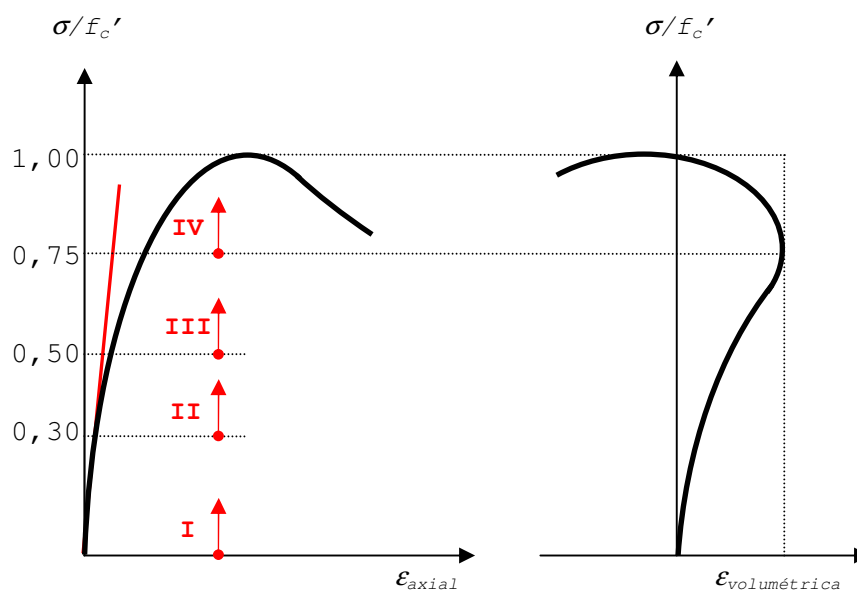


Figura 4.5 - Curva típica tensão x deformação axial e tensão x deformação volumétrica do concreto para ensaio de compressão uniaxial

Na primeira fase, correspondente a tensões até cerca de 30% da sua resistência à compressão, o concreto apresenta comportamento elástico, sem apresentar deformações permanentes, conforme mostrado na figura 4.4, e linear, sendo que as fissuras instaladas no elemento antes do carregamento mantêm-se praticamente inalteradas após o início do mesmo.

Na segunda fase, para tensões aplicadas maiores que  $0,3f_c$ , o concreto começa a apresentar comportamento não-linear, já apresentando deformações permanentes. Nessa fase, devido à concentração de tensão nas fissuras já existentes, ocorre, o aparecimento de fissuras na interface agregado-pasta de cimento, chamadas fissuras de aderência. Essas fissuras são estáveis e só se propagam se houver aumento de força.

Na terceira fase, para tensões aplicadas acima de  $0,5f_c$ , ocorre o início da fissuração na pasta de cimento, com união das fissuras na zona de transição (fissuras de aderência). A propagação das fissuras ainda é estável, não aumentando para valores de força constantes. "A fissuração dá-se paralelamente à carga, e este estágio é chamado *limite de descontinuidade*" (BUCHAIM, 2001).

Na quarta fase, para tensões aplicadas na faixa de  $(0,75 \text{ a } 0,8) f_c$ , as fissuras aumentam até o limite crítico, podendo conduzir o elemento até a ruptura. Nesta fase, o concreto apresenta fraturas dependentes do tempo, dando início ao processo reverso da deformação volumétrica, que passa da contração a expansão.

#### 4.2.2 - Critério de ruptura de Mohr-Coulomb

O critério de Mohr-Coulomb é uma generalização da equação de ruptura de Coulomb definida por:

$$\tau = c - \sigma \tan \phi \quad (4.3)$$

em que  $\tau$  é a tensão de cisalhamento,  $\sigma$  é a tensão normal,  $c$  é a coesão e  $\phi$  ângulo de atrito interno do material. Essa equação indica que há ruptura do material, quando a tensão de cisalhamento num determinado plano vence a resistência a deslizamento originada de duas parcelas: uma proveniente da referida coesão do material, outra vinda de uma fração da tensão normal atuante nesse mesmo plano.

Graficamente, a equação (4.3) representa uma reta tangente ao maior círculo de tensões principais, como mostrado na figura 4.6. Quando o par de tensões  $(-\sigma, |\tau|)$  atuantes em um ponto qualquer do material situarem-se sobre tal reta ocorrerá a ruptura do material.

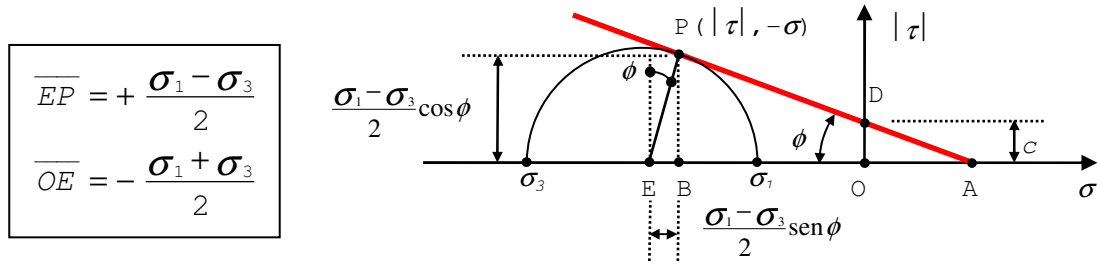


Figura 4.6 - Critério de Mohr-Coulomb

Por meio da figura 4.6 e para  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , a equação (4.3) pode ser reescrita em função das tensões principais. Sendo a distância entre os pontos O e B dados por:

$$\overline{OB} = \overline{OE} - \overline{EB} = -\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi \quad (4.4)$$

substituindo-se na equação (4.3) resulta:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \phi = c - \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi \right) \tan \phi \quad (4.5)$$

e após algumas simplificações obtém-se a equação (4.6).

$$\frac{\sigma_1 (1 + \sin \phi)}{2c \cos \phi} - \frac{\sigma_3 (1 - \sin \phi)}{2c \cos \phi} = 1 \quad (4.6)$$

O critério ainda pode ser escrito em função dos invariantes  $(I_1, J_2, \theta)$  ou  $(\xi, \rho, \theta)$  definidos no Capítulo 2. Sendo assim, utilizando as relações de  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  contidas na equação (2.73) e substituindo-se na equação (4.6) obtém-se o critério em função de  $(I_1, J_2, \theta)$ , como mostra a equação (4.7).

$$\frac{I_1}{3} \sin \phi + \sqrt{J_2} \sin (\theta + 60^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{J_2} \sin \phi \cos (\theta + 60^\circ) - c \cos \phi = 0 \quad (4.7)$$

$$f(I_1, J_2, \theta) = 0$$

Com o auxílio das equações (2.59), (2.61) e (2.62), a equação anterior pode ser reescrita em função de  $(\xi, \rho, \theta)$ , conforme a equação (4.8).

$$\sqrt{2}\xi \sin \phi + \sqrt{3}\rho \sin (\theta + 60^\circ) + \rho \sin \phi \cos (\theta + 60^\circ) - \sqrt{6}c \cos \phi = 0$$

$$f(\xi, \rho, \theta) = 0 \quad (4.8)$$

No espaço das tensões principais, o critério de Mohr-Coulomb é representado por uma pirâmide hexagonal irregular, conforme ilustra a figura 4.7, cujo contorno define a superfície de ruptura do material.

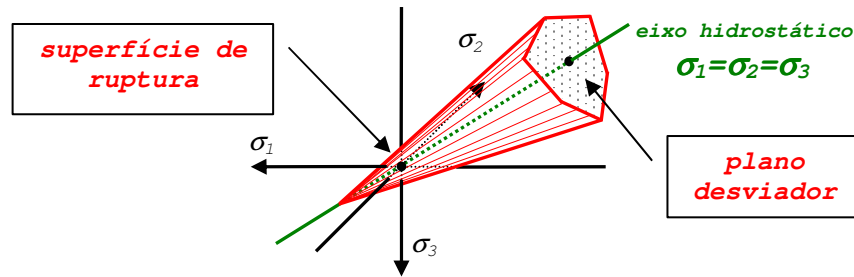


Figura 4.7 - Representação geométrica da superfície de ruptura do critério de Mohr-Coulomb no espaço das tensões principais

Por meio da equação (4.8) podem-se obter os comprimentos característicos da superfície de ruptura, relativos ao meridiano de tração e de compressão. Logo, atribuindo-se os valores  $(\theta = 0^\circ, \xi = 0, \rho = \rho_{T0})$  e  $(\theta = 60^\circ, \xi = 0, \rho = \rho_{C0})$ , obtêm-se, respectivamente, as equações (4.9) e (4.10), definindo esses comprimentos.

$$\rho_{T0} = \frac{2\sqrt{6}c \cos \phi}{3 + \sin \phi} \quad (4.9)$$

$$\rho_{C0} = \frac{2\sqrt{6}c \cos \phi}{3 - \sin \phi} \quad (4.10)$$



O módulo do vetor hidrostático  $\xi$  também pode ser obtido por meio da equação (4.8), considerando-se nulo o módulo do vetor desviador ( $\rho=0$ ), o que resulta na equação (4.11).

$$\xi = \sqrt{3}c \cot \phi \quad (4.11)$$

Dessa forma, em relação ao plano desviador, a superfície de ruptura fica definida por um hexágono irregular, conforme ilustrado pela figura 4.8.

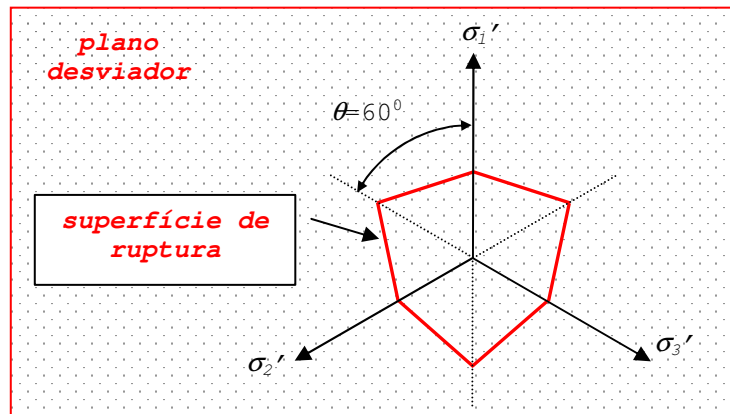


Figura 4.8 - Definição da superfície de ruptura no plano desviador

Na aplicação do critério de Mohr-Coulomb para o concreto, os parâmetros  $c$  e  $\phi$  podem ser definidos em função da resistência à tração  $f_t$  e da resistência à compressão  $f_c$  do material, obtidas por meio de um ensaio de tração simples e de compressão simples, respectivamente.

Dessa forma, para ensaio de compressão simples os valores das tensões principais são dados por  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  e  $\sigma_3 = f_c$  e para ensaio de tração simples por  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  e  $\sigma_1 = f_t$ . Substituindo-se tais valores na equação (4.6), obtêm-se as equações (4.12) e (4.13).

$$f_c = - \frac{2c \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad (4.12)$$

$$f_t = + \frac{2c \cos \phi}{1 + \sin \phi} \quad (4.13)$$

Resolvendo-se esse sistema de equações chega-se às equações (4.14) e (4.15) que definem, respectivamente, o ângulo de atrito interno e a coesão em função das resistências  $f_t$  e  $f_c$ .

$$\phi = \sin^{-1} \left( \frac{f_c + f_t}{f_c - f_t} \right) \quad (4.14)$$

$$c = - \frac{f_c (1 - \sin \phi)}{2 \cos \phi} = + \frac{f_t (1 + \sin \phi)}{2 \cos \phi} \quad (4.15)$$

Assim, com os valores da resistência à tração e à compressão e das tensões atuantes no elemento estrutural de concreto, pode-se verificar se a equação (4.7), ou também a equação (4.8), é satisfeita, sendo que, nesse caso, ocorrerá a ruptura do material.

## **CAPÍTULO 5 – ASPECTOS COMPUTACIONAIS**

Para implementação do critério de ruptura de Mohr-Coulomb para o concreto, abordado neste trabalho, apresenta-se, na seqüência, a documentação básica relativa ao código computacional para análise estática linear e não-linear física de vigas de concreto armado. Merece destaque o código relativo ao cálculo propriamente dito, visto que os códigos relativos à leitura e saída de dados, sub-rotinas auxiliares e gerenciador principal, que fazem parte do programa computacional *FEISdec*, não têm papel relevante no contexto deste trabalho.

### **5.1 – Esquema geral de cálculo**

O fluxograma referente ao esquema geral de cálculo é ilustrado na figura 5.1, sendo que cada bloco contém o nome de uma sub-rotina específica, cuja função é descrita no item 5.2 deste trabalho.

O procedimento principal consiste na subdivisão do carregamento em um número conhecido de incrementos, sendo que à medida que a força vai sendo incrementada, efetua-se o cálculo dos deslocamentos, com conseqüente cálculo das deformações e das tensões em cada elemento, para posterior aplicação do critério. Caso seja verificada a ruptura do elemento é feita uma mudança do módulo de elasticidade de forma individual para posterior armazenamento dos deslocamentos nodais.

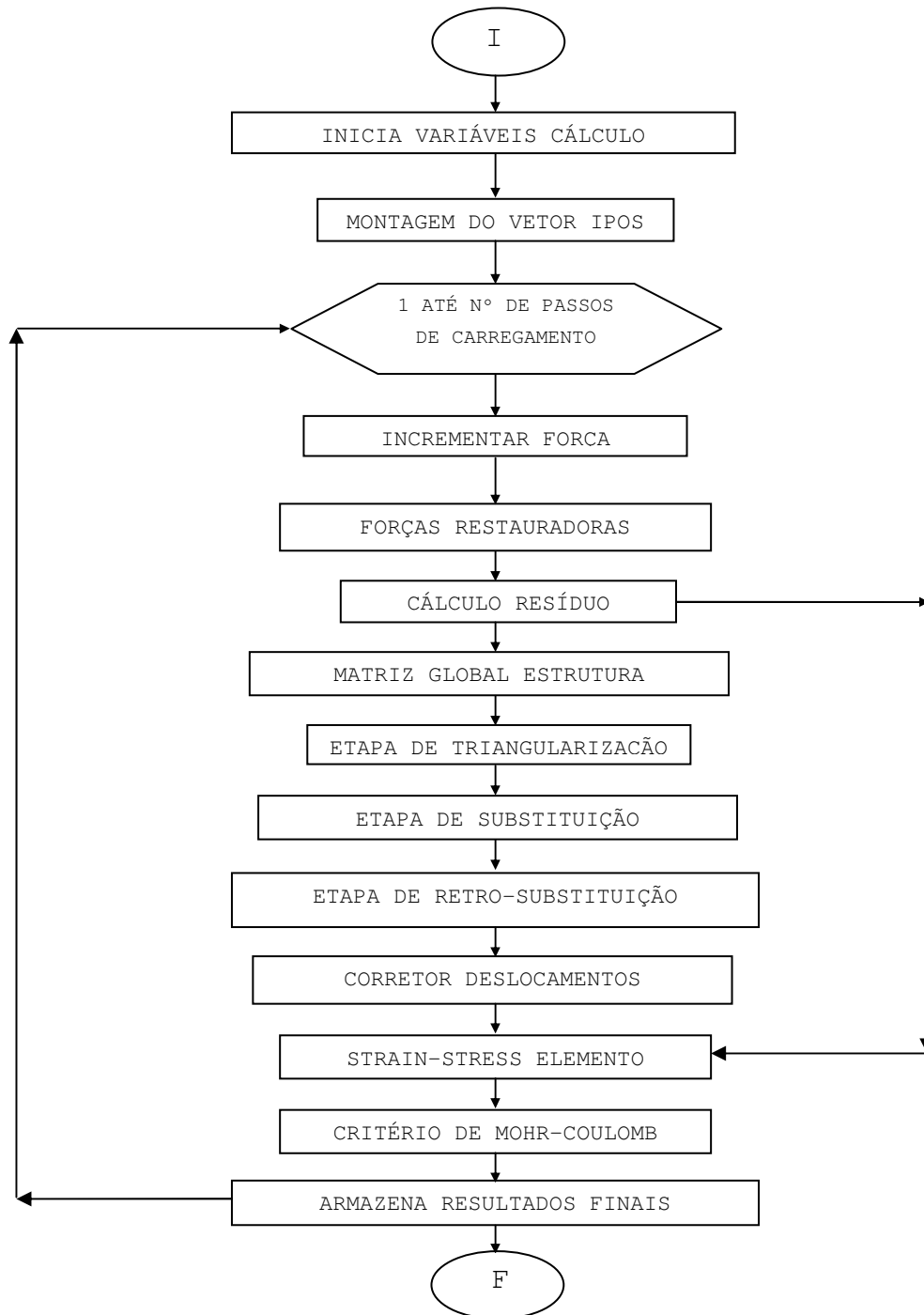


Figura 5.1 - Fluxograma do esquema geral de cálculo

## 5.2 - Descrição das sub-rotinas

As descrições das sub-rotinas referentes ao fluxograma da figura 5.1 são apresentadas a seguir.

### ➤ Sub-rotina INICIA VARIÁVEIS CÁLCULO

Essa sub-rotina tem a função de atribuir valores iniciais às variáveis utilizadas no cálculo.

### ➤ Sub-rotina MONTAGEM DO VETOR IPOS

A técnica de armazenamento da matriz de rigidez utilizada no programa *FEISdec* é denominada de altura efetiva de coluna ou *skyline*. Essa técnica corresponde a armazenar dentro de um vetor de trabalho principal as colunas da parte triangular superior da matriz e os elementos da diagonal principal, a partir do primeiro elemento não nulo de cada coluna. Esse armazenamento é feito em forma seqüencial por coluna, de cima para baixo.

Para esse tipo de armazenamento é necessária ainda a construção de um vetor auxiliar que indique, dentro do vetor de trabalho principal, as posições dos elementos da diagonal principal da matriz de rigidez, sendo tal vetor auxiliar denominado de vetor "IPOS".

### ➤ Sub-rotina INCREMENTAR FORÇA

Essa sub-rotina tem a função de atualizar o valor das forças externas  $F_E$  para cada incremento de carregamento.

### ➤ Sub-rotina FORÇAS RESTAURADORAS

Calcula o valor das forças restauradoras por meio do produto matricial  $\tilde{K} \tilde{D}_k$ , após montagem da matriz de rigidez secante da estrutura. Cabe ressaltar que por se tratar de análise linear geométrica, a matriz secante é igual à matriz de rigidez tangente.

### ➤ Sub-rotina CÁLCULO RESÍDUO

Calcula o valor do resíduo das forças estáticas não equilibradas. Caso o resíduo seja maior que a tolerância imposta pelo usuário dá-se continuidade ao processo de cálculo, caso contrário incrementa-se novamente a força aplicada.

### ➤ Sub-rotina MATRIZ GLOBAL ESTRUTURA

Monta a matriz global da estrutura a partir da matriz tangente de cada elemento, conforme visto no capítulo 3, utilizando-se a técnica de expansão e acumulação.

### ➤ RESOLUÇÃO SISTEMA

A resolução do sistema é feita utilizando-se o método de Cholesky, que decompõe o sistema em duas matrizes triangulares, uma superior e outra inferior, possibilitando a substituição e retro-substituição do sistema para obtenção dos acréscimos dos deslocamentos requeridos para cada incremento de carregamento.

➤ **Sub-rotina CORRETOR DESLOCAMENTOS**

Realiza a correção dos deslocamentos  $\tilde{D}_k$  por meio da soma acumulativa de todos os deslocamentos obtidos para cada incremento de carregamento.

➤ **Sub-rotina STRAIN-STRESS ELEMENTO**

Calcula os valores das deformações e das tensões de cada elemento.

➤ **Sub-rotina CRITÉRIO DE MOHR-COULOMB**

Depois de calculadas as tensões de cada elemento de concreto, são calculadas as tensões principais, para aplicação do critério de ruptura de Mohr-Coulomb, como descrito no item 4.2.2 deste trabalho. Caso seja verificada a ruptura do elemento é feita uma mudança do módulo de elasticidade de forma individual para posterior armazenamento dos deslocamentos nodais.

➤ **Sub-rotina ARMAZENA RESULTADOS FINAIS**

Essa sub-rotina tem a função de armazenar os resultados obtidos ao final da aplicação de cada incremento de carregamento.

## **CAPÍTULO 6 - ANÁLISE NUMÉRICA**

Neste capítulo são elaborados exemplos contemplando o estudo do comportamento estático linear e não-linear de vigas de concreto armado, utilizando o elemento finito prismático regular linear. No primeiro exemplo é testada a eficiência do elemento, submetendo uma estrutura a dois tipos diferentes de carregamentos, efetuando o refinamento da malha quando necessário. No segundo exemplo é considerada a não-linearidade física do concreto, utilizando o critério de ruptura de Mohr-Coulomb, sendo que para o aço é admitida uma relação constitutiva elástica linear. Os resultados obtidos por meio desse exemplo são comparados com os resultados numéricos e experimentais obtidos por outros pesquisadores.

Para a resolução dos exemplos foi utilizado o programa computacional *FEISdec*.

### **6.1 - Exemplo 1**

#### **6.1.1 - Primeiro caso**

Para testar a eficácia do elemento finito prismático regular linear, quando submetido a esforço normal, foi feita a simulação de uma viga engastada em uma das extremidades com forças aplicadas em cada um dos nós da extremidade livre. Para tanto, considerou-se inicialmente a viga composta por apenas um elemento, com um esforço normal total aplicado de 20,0 kN, ou seja, 5 kN por nó, conforme mostrado na figura 6.1.



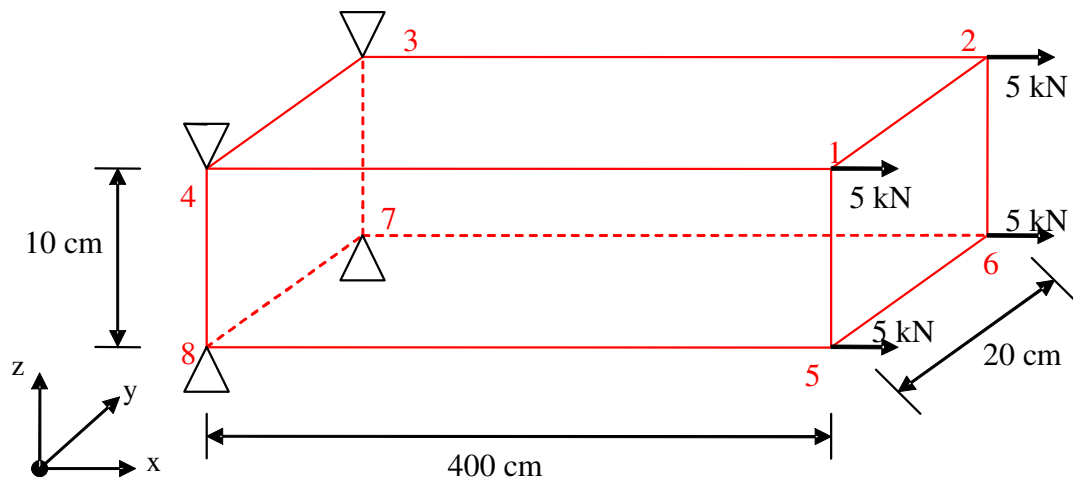


Figura 6.1 - Viga engastada composta por um elemento sólido e submetida a um esforço axial de 20 kN

Neste caso, para as características físicas do material do elemento, ou seja, módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ ) e coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), foram adotados os seguintes valores:

$$E = 20000,0 \text{ kN/cm}^2 \quad \text{e} \quad \nu = 0,00$$

A figura 6.2 mostra o resultado final dos deslocamentos, na direção  $x$ , dos nós 1 e 2 obtido pelo programa após a execução do exemplo. Já a figura 6.3 ilustra o desenvolvimento dos deslocamentos do nó 1 durante o processo de aplicação incremental do carregamento.

| Nó | DESX      | DESY      | DESZ      | ROT_X     | ROT_Y     | ROT_Z     |
|----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1  | 0.0020000 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000 |
| 2  | 0.0020000 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000 |
| 3  | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000 | 0.0000000 |

Figura 6.2 - Resultado dos deslocamentos dos nós 1 e 2

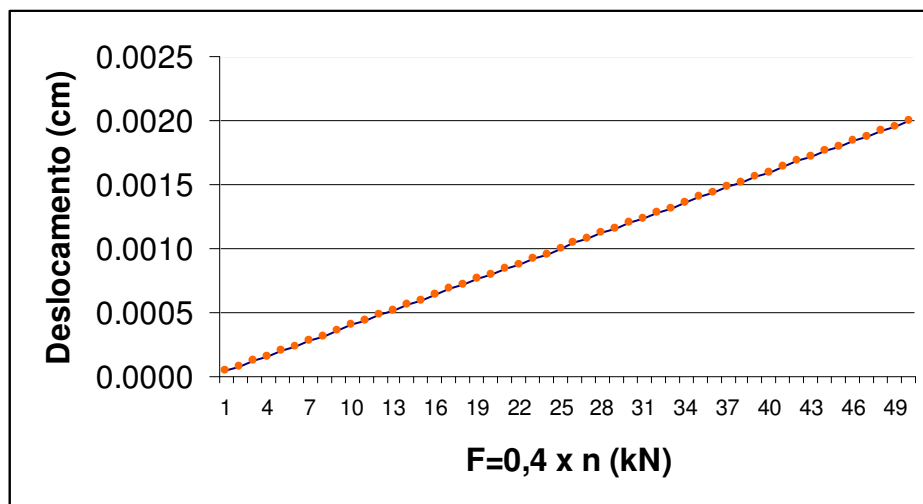


Figura 6.3 - Gráfico força x deslocamento do nó 1

Por meio da figura 6.2 pode-se observar que o deslocamento total do nó 1, na direção x, após a aplicação de todo o carregamento, é igual a 0,002 cm. Utilizando-se a teoria da Resistência dos Materiais, o deslocamento da extremidade livre de uma barra engastada, submetida a um esforço normal é calculado conforme a equação 6.1:

$$\Delta L = \frac{NL}{EA} \quad (6.1)$$

onde  $N$  é o esforço normal atuante na barra,  $L$  o comprimento da barra,  $E$  o módulo de elasticidade do material e  $A$  a área da seção transversal da barra. Substituindo-se os valores referentes ao exemplo, obtém-se:

$$\Delta L = \frac{20.400}{20000.200} = 0,002 \text{ cm} \quad (6.2)$$

que corresponde ao deslocamento obtido pelo programa para os nós da extremidade livre.

Analisando-se o gráfico da figura 6.3, verifica-se que a variação do deslocamento para incrementos de força foi linear, como era de se esperar. Sendo assim, conclui-se que, para esse tipo de esforço, a discretização utilizada com apenas um elemento mostrou-se suficiente para a obtenção do resultado exato.

### 6.1.2 – Segundo caso

Neste segundo caso foi testada a precisão do elemento quando submetido a esforços de flexão. Para tanto, foi utilizada uma viga semelhante à do primeiro caso, porém com comprimentos diferentes e submetida a um carregamento total, perpendicular ao eixo do elemento, equivalente a 40,0 kN. Inicialmente, considerou-se novamente a viga composta por apenas um elemento, com forças de 10,0 kN aplicadas em cada um dos nós da extremidade livre, como mostrado na figura 6.4, sendo utilizados os mesmos valores para o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do primeiro caso.

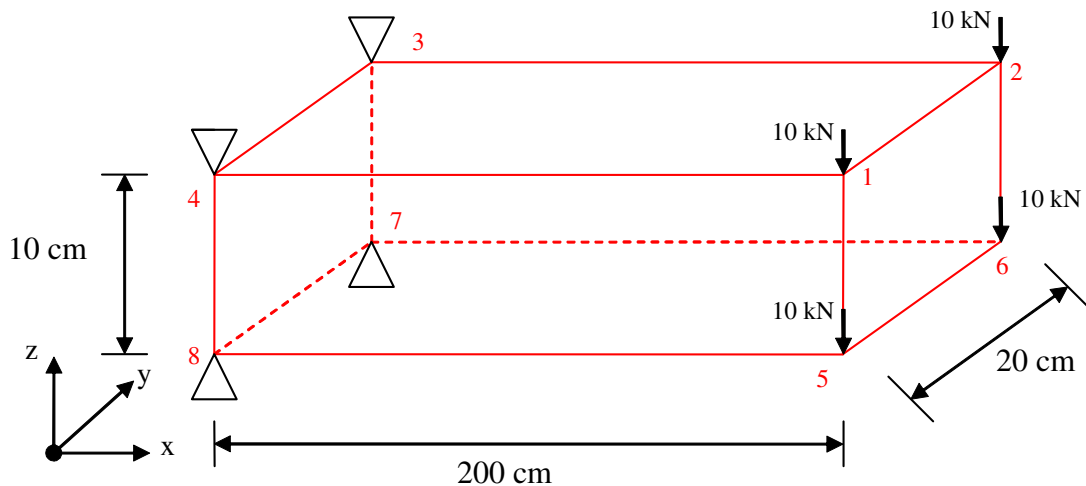


Figura 6.4 - Viga engastada composta por um elemento sólido e submetida à força perpendicular ao seu eixo

A figura 6.5 mostra o resultado final dos deslocamentos nodais obtido após a execução do exemplo.

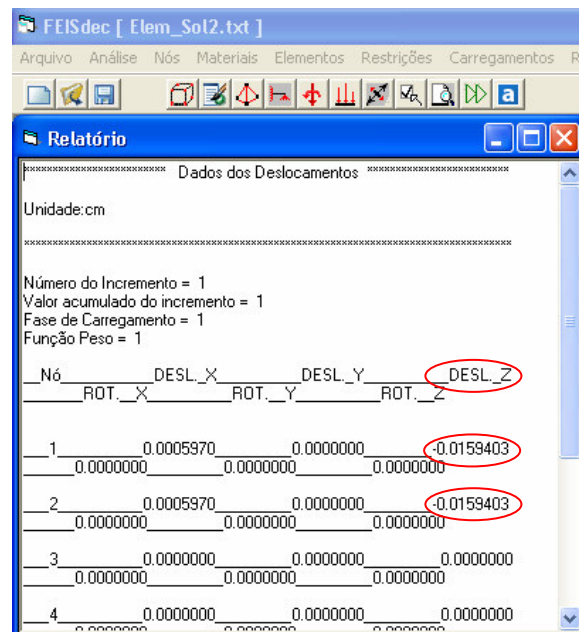


Figura 6.5 - Resultado dos deslocamentos nodais 1 e 2

De acordo com a teoria da Resistência dos Materiais, o deslocamento máximo de uma viga engastada, submetida a carregamento perpendicular ao seu eixo e aplicado na extremidade livre, como é o caso deste exemplo, ocorre nessa extremidade livre e é calculado conforme a equação 6.3:

$$v = \frac{PL^3}{3EI} \quad (6.3)$$

na qual  $P$  é o carregamento aplicado,  $L$  o comprimento da viga,  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal do material e  $I$  o momento de inércia da seção transversal da viga em relação à linha neutra. Substituindo os valores referentes ao exemplo, obtém-se:

$$v = \frac{40.200^3}{3.20000.1666,67} = 3,2 \text{ cm} \quad (6.4)$$

Analisando-se o resultado apresentado na figura 6.5, observa-se que o deslocamento da extremidade livre (nós 1 e 2) obtido pelo programa é igual a 0,0159403 cm, muito inferior ao resultado esperado. Desse modo, percebe-se que a discretização utilizada não é suficiente para esse tipo de esforço.

Sendo assim foram feitas novas discretizações na tentativa de se obter resultados condizentes com a teoria da Resistência dos Materiais. Primeiramente, foram feitas discretizações apenas na direção  $x$  e, depois, para efeito de comparação, na direção  $x$  e  $z$ .

#### **6.1.2.1 - Discretização ao longo da direção $x$**

Como primeira tentativa, dividiu-se a viga em dois elementos, conforme mostra a figura 6.6.

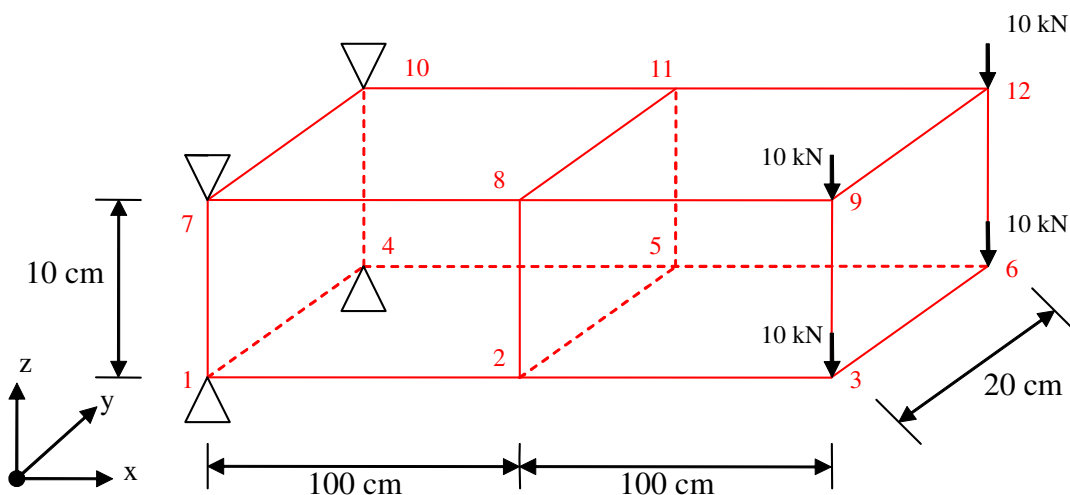


Figura 6.6 – Viga engastada composta por dois elementos sólidos e submetida à força perpendicular ao seu eixo

A figura 6.7 mostra o resultado final obtido após a execução do exemplo com essa discretização.

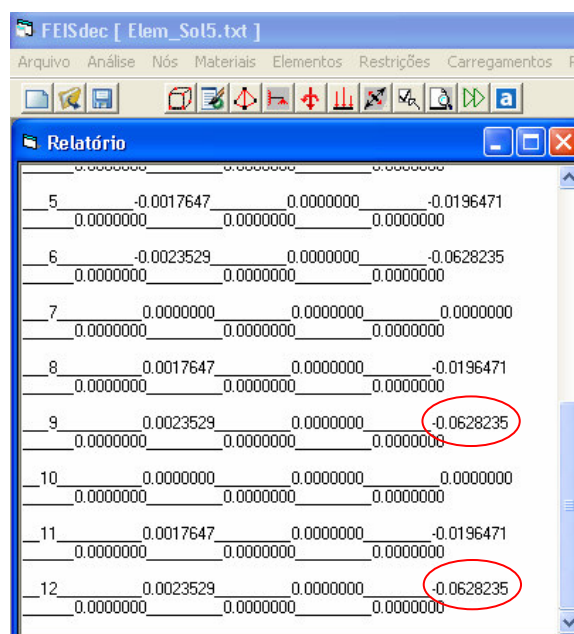


Figura 6.7 – Resultado dos deslocamentos nodais 9 e 12

Com essa discretização ocorreu uma pequena melhora dos resultados, mas não de forma suficientemente satisfatória para que possam ser considerados como aceitáveis. Sendo assim, foi feita uma discretização progressiva na direção do eixo longitudinal da estrutura (eixo x), sendo que os resultados, mostrando a evolução dos deslocamentos nodais da extremidade

versus número de elementos, estão contidos na tabela 6.1 e são mostrados graficamente na figura 6.8.

Tabela 6.1 - Deslocamentos x números de elementos

| Número de elementos | Deslocamentos do nó de extremidade (cm) |
|---------------------|-----------------------------------------|
| 0                   | 0.00000                                 |
| 1                   | -0.01594                                |
| 2                   | -0.06282                                |
| 4                   | -0.23733                                |
| 8                   | -0.77673                                |
| 16                  | -1.79874                                |
| 32                  | -2.68047                                |
| 50                  | -2.96667                                |
| 64                  | -3.05484                                |
| 128                 | -3.16536                                |

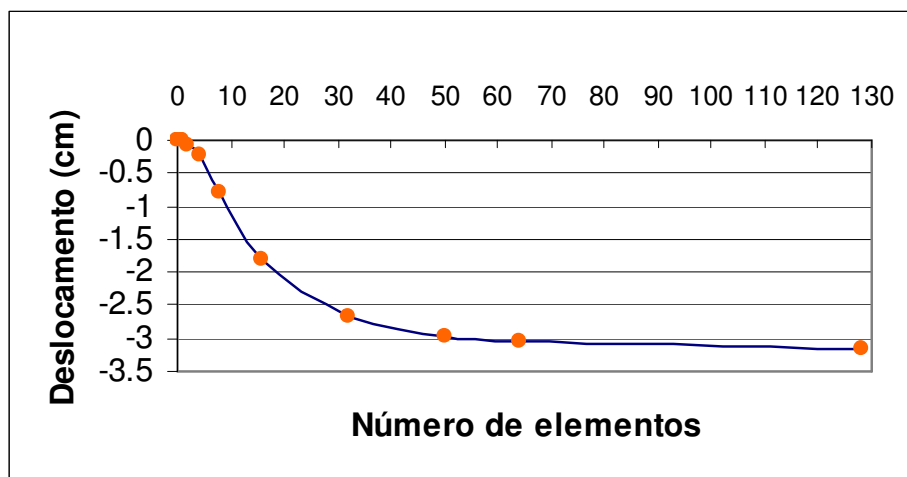


Figura 6.8 - Deslocamentos x números de elementos

Como se pode observar, para uma discretização contendo 128 elementos, o resultado obtido pelo programa para o deslocamento do nó da extremidade livre é igual a 3,16536 cm, aproximando-se muito do resultado apresentado pela teoria da Resistência dos Materiais, sendo essa discretização considerada suficientemente satisfatória.

### 6.1.2.2 - Discretização ao longo das direções x e z

Para se testar a relevância da discretização do elemento finito prismático regular linear nas outras direções, para o tipo de esforço abordado neste caso, dividiu-se a viga em quatro elementos, segundo uma malha 2x1x2, respectivamente nas direções x, y e z, conforme ilustra a figura 6.9.

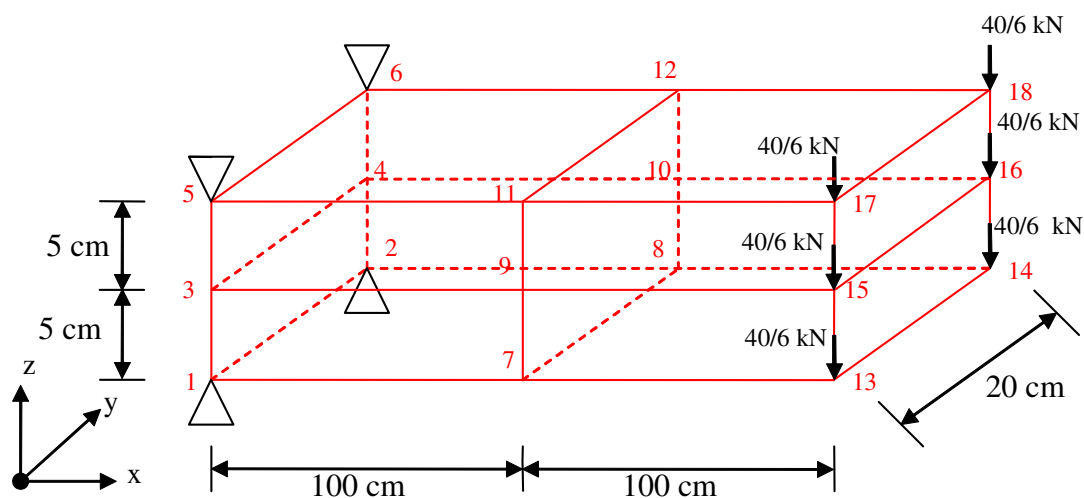


Figura 6.9 - Viga engastada composta por quatro elementos sólidos e submetida à força perpendicular ao seu eixo

Para esta discretização o deslocamento obtido por meio do programa para o nó 17 foi igual a 0,0628242 cm, valor muito inferior ao deslocamento esperado de 3,2 cm, não sendo um resultado aceitável.

Desse modo foi feita uma discretização progressiva nas direções do eixo x e do eixo z, obtendo-se as malhas 4x1x4, 8x1x8 e 16x1x16, com 16, 64 e 256 elementos, respectivamente. Os resultados obtidos, mostrando a evolução dos deslocamentos nodais da extremidade versus número de elementos, considerando a discretização nas direções x e z, estão contidos na tabela 6.2.



Tabela 6.2 - Deslocamentos x números de elementos para discretização bidimensional

| Número de elementos | Malha utilizada | Deslocamentos do nó de extremidade (cm) |
|---------------------|-----------------|-----------------------------------------|
| 4                   | 2x1x2           | -0,0628242                              |
| 16                  | 4x1x4           | -0,2373374                              |
| 64                  | 8x1x8           | -0,7767709                              |
| 256                 | 16x1x16         | -1,7989836                              |

Comparando-se os resultados contidos na tabela 6.2 com os resultados da tabela 6.1, os deslocamentos resultantes da discretização bidimensional observados com 4, 16, 64 e 256 elementos são praticamente os mesmos encontrados para a discretização apenas na direção x com 2, 4, 8 e 16 elementos, respectivamente, sendo que nessa última o número de elementos para a obtenção do mesmo resultado é bem menor, favorecendo o processamento dos dados. Com isso se pode verificar que é a discretização ao longo do eixo da viga que interfere na eficácia do elemento prismático regular linear para o esforço de flexão, e não quando realizada nas outras direções.

## 6.2 - Exemplo 2

Neste segundo exemplo, pretende-se fazer uma avaliação, via análise estática, do desempenho do modelo físico para o concreto armado que foi utilizado neste trabalho. Com relação ao aço foi admitida uma relação constitutiva elástica linear. Os resultados encontrados foram comparados com os resultados experimentais e numéricos obtidos em Carvalho (1994) e em Rodrigues (1997).

A estrutura abordada neste exemplo é composta por uma viga biapoiada, solicitada por duas forças "F", conforme o esquema mostrado pela figura 6.10.

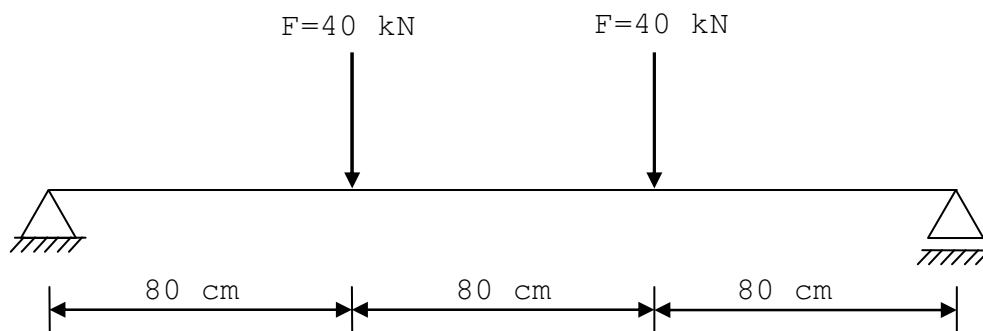


Figura 6.10 - Esquema da viga biapoiada utilizada no exemplo

As características físicas e geométricas da viga utilizada neste exemplo são dadas por:

$$\begin{aligned} b &= 12,0 \text{ cm} ; \quad h = 30,0 \text{ cm} \\ f_{\text{CK}} &= 2,6 \text{ kN/cm}^2 ; \quad f_{\text{CTK}} = 0,268 \text{ kN/cm}^2 \\ E_s &= 19600,0 \text{ kN/cm}^2 ; \quad E_c = 2920,0 \text{ kN/cm}^2 \\ v_c &= 0,2 \end{aligned}$$

A disposição da armadura principal utilizada segue o mesmo arranjo adotado em Carvalho (1994) e Rodrigues (1997), e é mostrada na figura 6.11.

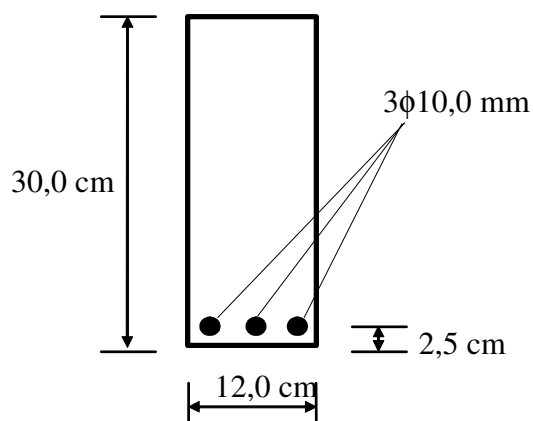


Figura 6.11 - Seção transversal da viga: disposição da armadura principal

Para este exemplo foram feitas duas discretizações diferentes. Na primeira discretização utilizou-se uma malha de

24x1x12, resultando em 288 elementos prismáticos regulares lineares e 48 elementos de barra, conforme ilustra a figura 6.12. Neste caso, como não houve discretização na direção y, a disposição da armadura não seguiu o arranjo mostrado na figura 6.11, sendo colocadas apenas duas barras, mas com área total equivalente a das três barras apresentadas acima.

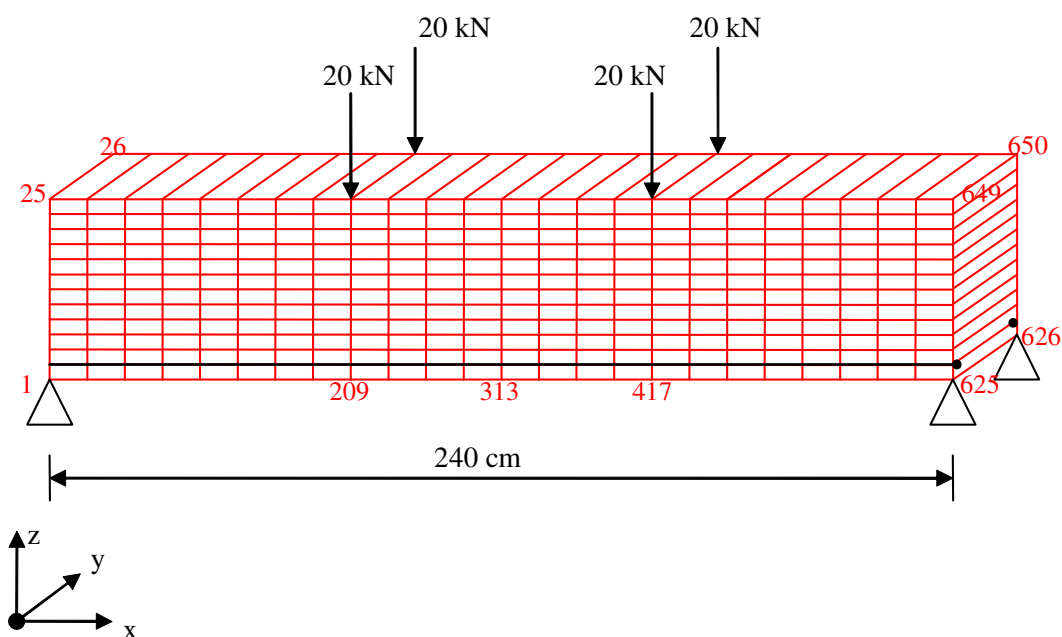


Figura 6.12 - Viga biapoiada discretizada em 288 elementos finitos prismáticos regulares lineares

O exemplo, com essa primeira discretização, foi resolvido aplicando-se as forças em 80 incrementos iguais, obtendo-se, para o deslocamento do nó central da viga (nó 313), os resultados apresentados na tabela 6.3.

Na figura 6.13 esses resultados são apresentados graficamente, sendo possível compará-los com os resultados obtidos em Carvalho (1994), um experimental e dois numéricos (Branson e CEB90), apresentados na figura 6.13, e o resultado numérico obtido em Rodrigues (1997), apresentado na figura 6.14.

Tabela 6.3 - Força x deslocamento para o nó central da viga (Discretização com 288 elementos prismáticos e 48 elementos de barra)

| Passo | Força (kN) | Deslocamento (cm) | Passo | Força (kN) | Deslocamento (cm) |
|-------|------------|-------------------|-------|------------|-------------------|
| 1     | 0,5        | -2,87E-03         | 41    | 20,5       | -0,20474285       |
| 2     | 1          | -5,73E-03         | 42    | 21         | -0,215505018      |
| 3     | 1,5        | -8,60E-03         | 43    | 21,5       | -0,226267187      |
| 4     | 2          | -1,15E-02         | 44    | 22         | -0,237029356      |
| 5     | 2,5        | -1,43E-02         | 45    | 22,5       | -0,247791525      |
| 6     | 3          | -1,72E-02         | 46    | 23         | -0,258599542      |
| 7     | 3,5        | -2,01E-02         | 47    | 23,5       | -0,26940756       |
| 8     | 4          | -2,29E-02         | 48    | 24         | -0,280215577      |
| 9     | 4,5        | -2,58E-02         | 49    | 24,5       | -0,291608698      |
| 10    | 5          | -2,87E-02         | 50    | 25         | -0,303101331      |
| 11    | 5,5        | -3,15E-02         | 51    | 25,5       | -0,314593964      |
| 12    | 6          | -3,44E-02         | 52    | 26         | -0,327540224      |
| 13    | 6,5        | -3,72E-02         | 53    | 26,5       | -0,340486484      |
| 14    | 7          | -4,01E-02         | 54    | 27         | -0,353491039      |
| 15    | 7,5        | -4,30E-02         | 55    | 27,5       | -0,366495595      |
| 16    | 8          | -4,58E-02         | 56    | 28         | -0,37950015       |
| 17    | 8,5        | -4,91E-02         | 57    | 28,5       | -0,392504706      |
| 18    | 9          | -5,25E-02         | 58    | 29         | -0,405509261      |
| 19    | 9,5        | -5,59E-02         | 59    | 29,5       | -0,418513817      |
| 20    | 10         | -5,98E-02         | 60    | 30         | -0,432369811      |
| 21    | 10,5       | -6,38E-02         | 61    | 30,5       | -0,446225806      |
| 22    | 11         | -6,79E-02         | 62    | 31         | -0,460081801      |
| 23    | 11,5       | -7,26E-02         | 63    | 31,5       | -0,473937796      |
| 24    | 12         | -7,74E-02         | 64    | 32         | -0,487793791      |
| 25    | 12,5       | -8,23E-02         | 65    | 32,5       | -0,501649785      |
| 26    | 13         | -8,81E-02         | 66    | 33         | -0,51550578       |
| 27    | 13,5       | -9,39E-02         | 67    | 33,5       | -0,529361775      |
| 28    | 14         | -0,099811412      | 68    | 34         | -0,54324444       |
| 29    | 14,5       | -0,105876425      | 69    | 34,5       | -0,557127104      |
| 30    | 15         | -0,11301908       | 70    | 35         | -0,572499767      |
| 31    | 15,5       | -0,120161734      | 71    | 35,5       | -0,587872429      |
| 32    | 16         | -0,127304388      | 72    | 36         | -0,60427367       |
| 33    | 16,5       | -0,134672121      | 73    | 36,5       | -0,620895023      |
| 34    | 17         | -0,142182491      | 74    | 37         | -0,637605889      |
| 35    | 17,5       | -0,150962366      | 75    | 37,5       | -0,654316756      |
| 36    | 18         | -0,159742241      | 76    | 38         | -2,890645719      |
| 37    | 18,5       | -0,16856423       | 77    | 38,5       | -5,154327911      |
| 38    | 19         | -0,177386219      | 78    | 39         | -7,418010116      |
| 39    | 19,5       | -0,186208209      | 79    | 39,5       | -9,689685731      |
| 40    | 20         | -0,19540596       | 80    | 40         | -11,96136134      |

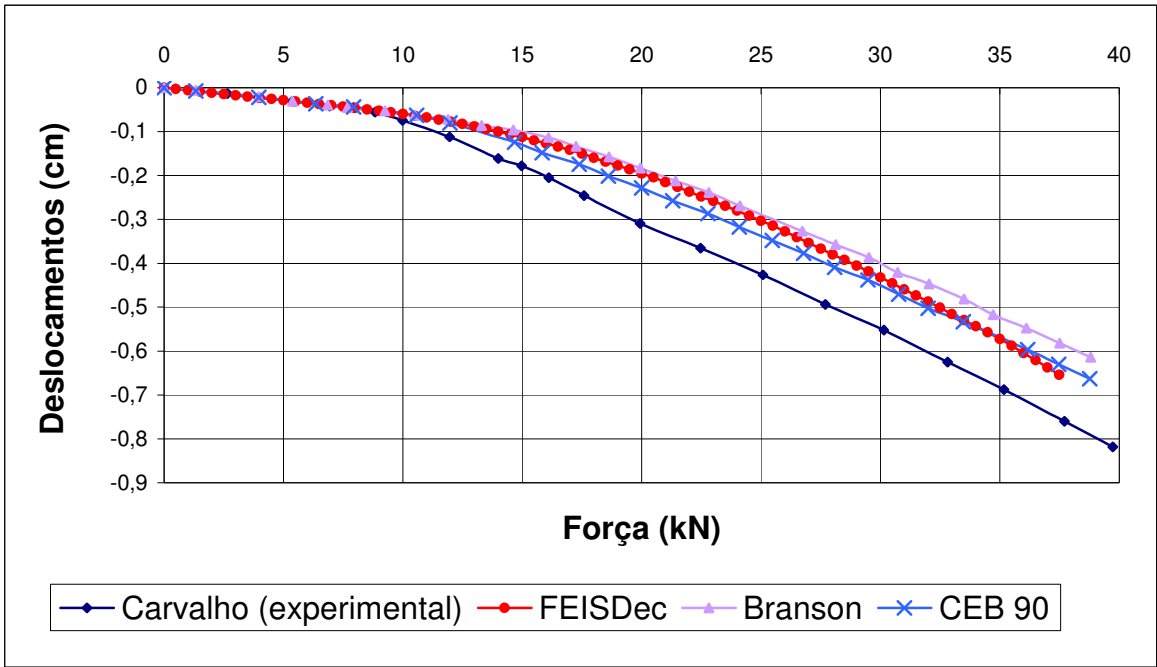


Figura 6.13 - Gráfico força x deslocamento do nó central da viga

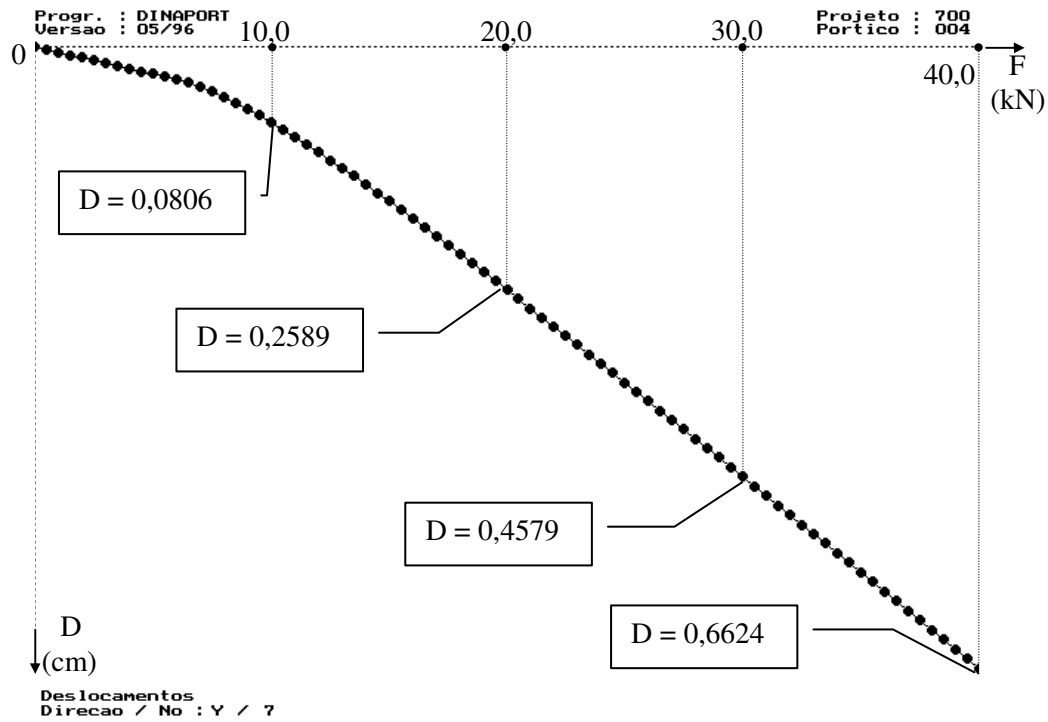


Figura 6.14 - Gráfico força x deslocamento do nó central obtido por Rodrigues (1997)

Como é possível observar pelos valores apresentados na tabela 6.3, para essa discretização, a partir da força de 38 kN, os valores obtidos para o deslocamento sofrem um aumento brusco, caracterizando o colapso da viga, sendo que no gráfico da figura 6.13 foram considerados os deslocamentos apenas até a força de 37,5 kN. A partir desse gráfico é possível observar o comportamento não-linear físico do concreto armado. Ainda é possível perceber que os resultados obtidos com o critério de ruptura de Mohr-Coulomb são praticamente coincidentes com as respostas obtidas em Carvalho (1994) e Rodrigues (1997), mostrando a validade do procedimento numérico empregado neste trabalho.

Como segunda discretização, foi adotada uma malha de  $24 \times 4 \times 12$ , resultando em 1152 elementos prismáticos regulares lineares e 72 elementos de barra, como ilustra a figura 6.15, de tal forma que a disposição da armadura seguiu o mesmo arranjo utilizado em Carvalho (1994) e Rodrigues (1997) mostrado na figura 6.11.

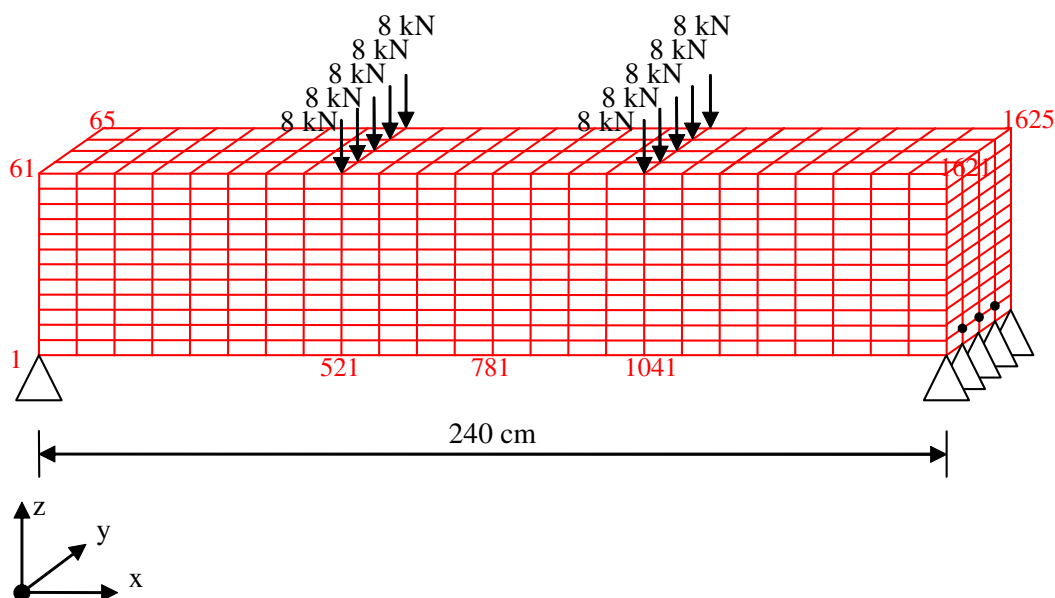


Figura 6.15 - Viga biapoiada discretizada em 1152 elementos finitos prismáticos regulares lineares

O exemplo, com essa segunda discretização, foi resolvido aplicando as forças em 40 incrementos iguais, obtendo-se os resultados apresentados na tabela 6.4 relativos ao deslocamento do nó central da viga (nó 783).

*Tabela 6.4 - Força x deslocamento para o nó central da viga (Discretização com 1152 elementos prismáticos e 72 elementos de barra)*

| <b>Passo</b> | <b>Força (kN)</b> | <b>Deslocamento (cm)</b> | <b>Passo</b> | <b>Força (kN)</b> | <b>Deslocamento (cm)</b> |
|--------------|-------------------|--------------------------|--------------|-------------------|--------------------------|
| <b>1</b>     | 1                 | -0,0057404               | <b>21</b>    | 21                | -0,2081992               |
| <b>2</b>     | 2                 | -0,0114807               | <b>22</b>    | 22                | -0,2298114               |
| <b>3</b>     | 3                 | -0,0172211               | <b>23</b>    | 23                | -0,2514316               |
| <b>4</b>     | 4                 | -0,0229614               | <b>24</b>    | 24                | -0,2731018               |
| <b>5</b>     | 5                 | -0,0287018               | <b>25</b>    | 25                | -0,2952664               |
| <b>6</b>     | 6                 | -0,0344422               | <b>26</b>    | 26                | -0,3183462               |
| <b>7</b>     | 7                 | -0,0401825               | <b>27</b>    | 27                | -0,341426                |
| <b>8</b>     | 8                 | -0,0459229               | <b>28</b>    | 28                | -0,3674852               |
| <b>9</b>     | 9                 | -0,0525388               | <b>29</b>    | 29                | -0,3936195               |
| <b>10</b>    | 10                | -0,0592947               | <b>30</b>    | 30                | -0,4197538               |
| <b>11</b>    | 11                | -0,0673964               | <b>31</b>    | 31                | -0,4464976               |
| <b>12</b>    | 12                | -0,0768498               | <b>32</b>    | 32                | -0,4732413               |
| <b>13</b>    | 13                | -0,0867553               | <b>33</b>    | 33                | -0,5010635               |
| <b>14</b>    | 14                | -0,0983565               | <b>34</b>    | 34                | -0,5289019               |
| <b>15</b>    | 15                | -0,1105268               | <b>35</b>    | 35                | -0,5576594               |
| <b>16</b>    | 16                | -0,1248701               | <b>36</b>    | 36                | -0,5864168               |
| <b>17</b>    | 17                | -0,1394033               | <b>37</b>    | 37                | -0,6172673               |
| <b>18</b>    | 18                | -0,154528                | <b>38</b>    | 38                | -0,6487368               |
| <b>19</b>    | 19                | -0,1722036               | <b>39</b>    | 39                | -0,6942827               |
| <b>20</b>    | 20                | -0,1899281               | <b>40</b>    | 40                | -3,3025961               |

Na figura 6.16 esses resultados são apresentados, graficamente, com os resultados obtidos por Carvalho (1994).

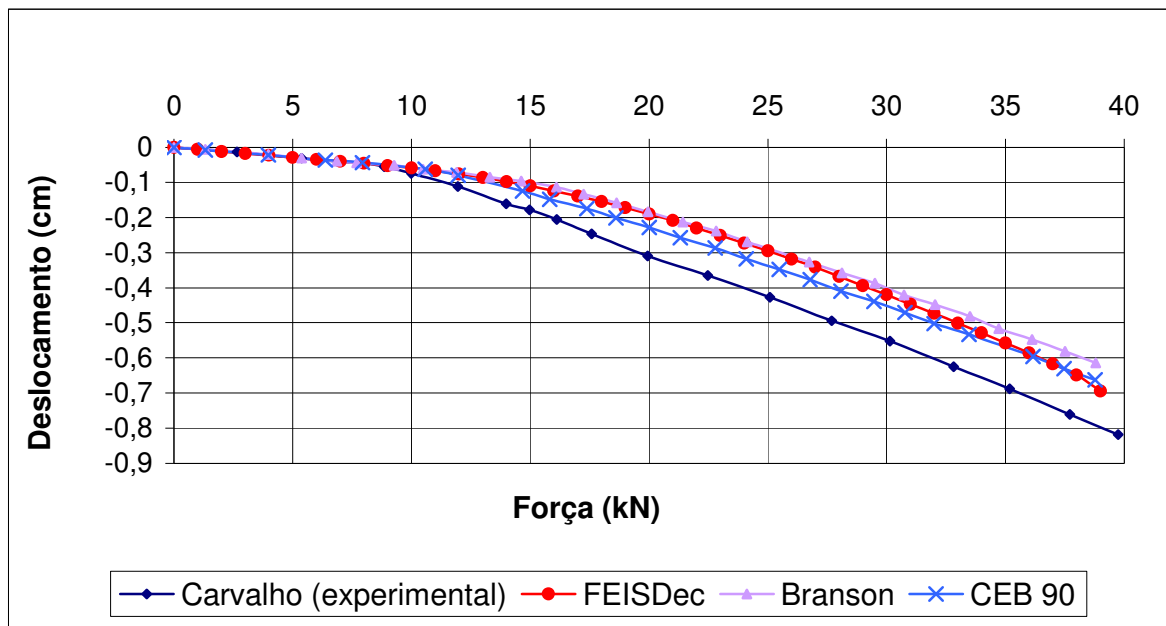


Figura 6.16 - Gráfico força x deslocamento do nó central da viga

Já a figura 6.17 mostra o resultado final dos deslocamentos nodais obtido pelo programa após a execução do exemplo com a força de 39 kN.

Para essa discretização, os resultados obtidos com o critério de ruptura de Mohr-Coulomb foram também praticamente coincidentes com as respostas numéricas obtidas em Carvalho (1994) e Rodrigues (1997), conforme se pode analisar pelos gráficos contidos nas figuras 6.16 e 6.14. Além disso, por meio da tabela 6.4, pode-se observar que com a força de 40 kN o valor obtido para o deslocamento sofreu um aumento brusco, caracterizando o colapso da viga. Esse resultado coincide com o resultado experimental obtido em Carvalho (1994), em que houve a ruptura da viga com esse mesmo valor de carregamento.



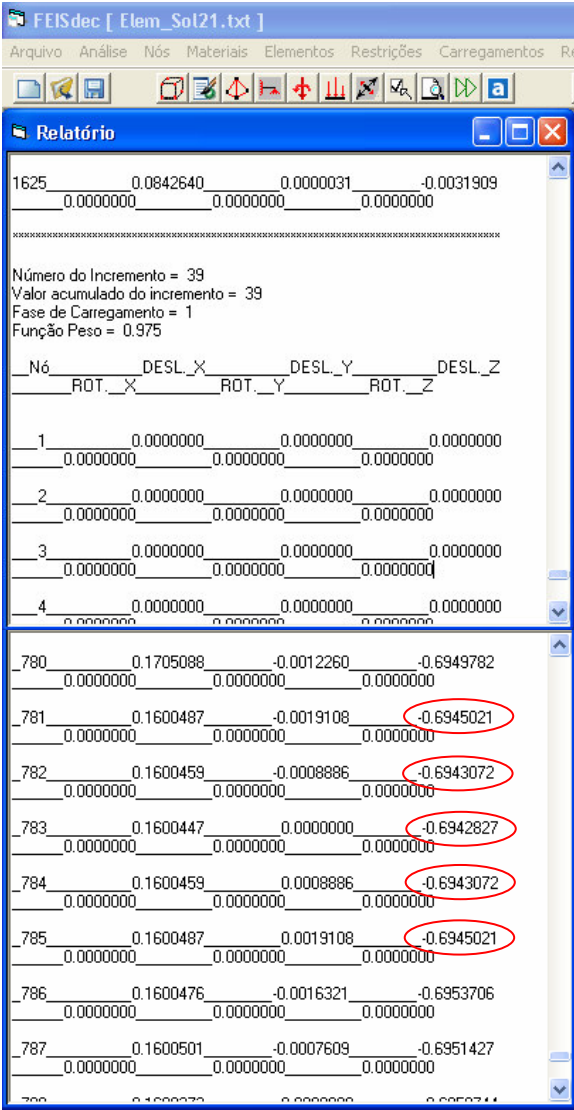


Figura 6.17 - Resultados dos deslocamentos dos nós 781 a 785 para força aplicada de 39 kN

## **CAPÍTULO 7 – CONSIDERAÇÕES FINAIS**

### **7.1 – Conclusões**

O presente trabalho teve como objetivo principal analisar o comportamento estático linear e não-linear físico de vigas de concreto armado sob a óptica do Método dos Elementos Finitos, utilizando o elemento finito prismático regular linear para simular o concreto e o elemento finito de barra para simular o aço. Para a consideração da não-linearidade física do concreto foi utilizado o critério de ruptura de Mohr-Coulomb.

Em uma primeira etapa procurou-se estabelecer toda a teoria referente ao assunto em questão. Foram apresentados os conceitos da mecânica dos sólidos deformáveis necessários para o desenvolvimento dos modelos não-lineares do concreto e do aço e foi feita uma breve descrição do método dos elementos finitos, para então serem elaboradas as matrizes de rigidez do elemento finito de barra e do elemento finito prismático regular linear, utilizando-se a formulação com coordenadas homogêneas.

Uma vez estabelecida toda a teoria, foram implementadas no programa *FEISdec*, a matriz de rigidez do elemento finito prismático regular linear e a sub-rotina para aplicação do critério de Mohr-Coulomb.

Tal implementação permitiu o desenvolvimento dos exemplos contidos no capítulo 6, procurando-se, primeiramente, testar a eficácia do elemento finito prismático regular linear, estando a estrutura submetida a esforços normais e de flexão, e também

verificar a validade do modelo não-linear físico adotado para o concreto neste trabalho, por meio de comparação com os resultados obtidos por outros pesquisadores.

Com relação à eficácia do elemento finito prismático regular linear foi possível observar que, para esforços normais, a discretização da estrutura em apenas um elemento foi suficiente. No entanto, para esforços de flexão ficou claro que, para a obtenção de resultados mais precisos, existe a necessidade de uma maior discretização na direção do eixo da viga, não havendo influência da discretização nas outras direções.

Essa questão da eficiência do elemento utilizado deve-se ao fato de que, na dedução da sua matriz de rigidez, as funções interpoladoras utilizadas para os deslocamentos variam linearmente ao longo dos lados do elemento.

Com isso para esforços normais, que provocam deslocamentos lineares ao longo do eixo da estrutura, a discretização com apenas um elemento já é suficiente para garantir a precisão do resultado.

No entanto, em se tratando de esforços de flexão, os deslocamentos são descritos pela equação da linha elástica, que depende do tipo de carregamento aplicado. Para forças concentradas, como foi o caso do exemplo deste trabalho, o deslocamento é dado por uma equação cúbica. Desse modo, para a obtenção de resultados mais precisos, é necessária uma discretização em quantidade suficiente, de tal forma que os deslocamentos lineares, fornecidos pelo elemento finito prismático, possam ser aproximados aos da curva descrita pela linha elástica da estrutura.

Já com relação à validade do modelo não-linear físico adotado para o concreto, os gráficos força x deslocamento obtidos no segundo exemplo retrataram de forma adequada o comportamento não-linear físico do concreto armado. Tal comportamento foi obtido aplicando-se o critério de Mohr-

Coulomb para os elementos mais solicitados e que atingiram a ruptura, com a modificação do módulo de elasticidade feita de forma individual. Associando-se a modificação do módulo com o procedimento incremental de carregamento adotado, pôde-se observar conseqüente aumento dos deslocamentos nodais da estrutura em função da ruptura progressiva dos elementos. Tais resultados são praticamente coincidentes com as respostas numéricas obtidas em Carvalho (1994), que utilizou as relações momento-curvatura baseadas nas expressões de inércia de Branson e do CEB90, e também com as respostas obtidas em Rodrigues (1997), que utilizou os modelos físicos não-lineares propostos pelo CEB e pelo ACI, mostrando a validade do procedimento numérico empregado neste trabalho.

Cabe ressaltar que o grande diferencial do modelo físico implementado neste trabalho, em relação aos modelos utilizados em Carvalho (1994) e Rodrigues (1997), é a possibilidade de se prever o instante de ruptura da viga, sendo que no exemplo abordado, o resultado numérico obtido pelo modelo praticamente coincidiu com o resultado experimental obtido em Carvalho (1994).

## **7.2 - Propostas de desenvolvimento**

A utilização do elemento finito regular linear possibilita a quantificação e visualização da distribuição das tensões internas no sentido longitudinal e transversal de vigas, por meio da discretização tridimensional da estrutura. Devido a isso, sugere-se, como trabalho futuro, a análise dessa distribuição de tensões de forma que possibilite o estudo da quantificação das armaduras longitudinais e também transversais (estribos).

Ainda no contexto da discretização tridimensional de estruturas, pode-se sugerir o estudo de outros elementos

finitos sólidos, como o elemento finito prismático retangular com vinte nós, para possibilitar a obtenção de resultados satisfatórios com uma menor discretização.

Com relação ao modelo físico, para análise mais profunda do comportamento de vigas de concreto armado, propõe-se utilizar o modelo elastoplástico com endurecimento linear para simular o escoamento do aço juntamente com o critério de ruptura de Mohr-Coulomb para o concreto utilizado neste trabalho.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAZANT, Z.P.; BHAT,P. (1976). Endochronic theory of inelasticity and failure of concrete. Journal of Engineering Mechanics Division, New York, v.102, n.4, p.701-722, Aug.
- BUCHAIM, R. (2001). **A influência da não-linearidade física do concreto armado na rigidez à flexão e na capacidade de rotação plástica.** São Paulo. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- CARVALHO, R.C. (1994). **Análise não-linear de pavimentos de edifícios de concreto através da analogia de grelhas.** São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CHEN, A.C.T.; CHEN, W.F. (1975). Constitutive equations and puch-indentation of concrete. Journal of Engineering Mechanics Division, New York, v.101, n.6, p.889-906, Dec.
- CÔRREA, M.R.S. (1991). **Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios.** São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- NGO, D.; SCORDELIS, A.C. (1967). Finite element analysis of reinforced concrete beams. ACI Structural Journal, Detroit, v.64, n.3, p.152-163, Mar.

NILSON, A.H. (1968). Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method. ACI Structural Journal, Detroit, v.65, n.9, p.757-766, Sept.

OWEN, D.R.J.; HINTON, E. (1980). **Finite elements in plasticity: theory and practice**. Swansea, Pineridge Press. 594p.

PROENÇA, S.P.B. (1988). **Sobre modelos matemáticos do comportamento não linear do concreto: análise crítica e contribuições**. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

RODRIGUES, R.O. (1997). **Análise dinâmica bidimensional não-linear física e geométrica de treliças de aço e pórticos de concreto armado**. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

SÁNCHEZ FILHO, E. **Elementos de mecânica dos sólidos**. Rio de Janeiro: Interciência, 2000. 258p.

VASCONCELOS, G.M.A. (2005). **Verificação simultânea dos estados limites últimos e de serviço em análises não-lineares de peças de concreto armado submetidas à flexão pura**. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CHEUNG, Y. K. **The finite element method in structural and continuum mechanics**. New York: McGraw-Hill, 1967. 274p.

## BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (1996). **ACI 318M/83 - Building code requirements for reinforced concrete**. Detroit.

BATHE, K.J. (1996). **Finite element procedures**. New Jersey, Prentice-Hall. 1037p.

BAZANT, Z.P. **Mathematical modeling of creep and shrinkage of concrete**. New York: J. Wiley & Sons, 1988. 459p.

CARNAHAN, B.; LUTHER, H.A.; WILKES, J.O. (1969). **Applied numerical methods**. New York, John Wiley & Sons. 604p.

CASTRO, L.M.; RODRIGUES, R.O. (1998). Processador gráfico para análise de tensões de chapas utilizando-se os elementos finitos "CST" e "CSQ". In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNESP, 10, Rio Claro, 1998. **Anais**. Rio Claro, Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". p. 108.

CHEN, W. F.; SALEEB, A. F. **Constitutive equations for engineering material**. New York: Elsevier, 1994. 2v.

CHEN, W.F.; HAN, D.J. (1988). **Plasticity for structural engineers**. New York, Springer-Verlag. 606p.

CHEN, W.F.; ZHANG, H. (1991). **Structural plasticity: theory, problems, and CAE software**. New York, Springer-Verlag. 250p.



COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON (1978). Model code for concrete structures. **Bulletin D' Information**, Lausanne. N.124/125.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON (1985). Manual on cracking and deformations. **Bulletin D' Information**, Lausanne. N.158-E.

COOK, R.D.; MALKUS, D.S.; PLESHA, M.E. (1989). **Concepts and applications of finite element analysis**. New York, John Wiley & Sons. 630p.

FLORENTINO, E.S. (2001). **Modelo cinemático aproximado para análise dinâmica não-linear física de chapas de aço**. Ilha Solteira. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista.

GHASSEMIEH, M.; KUKRETI, A.R. (1990). An algorithm for the analysis of problems with combined material and geometric nonlinearities. **Computers & Structures**, v.35, n.5, p.579-591.

GUEDES, Q. M. **Modelo unificado da viscoelasticidade linear com envelhecimento do concreto**. In: MODELOS VISCOELÁSTICOS COM ENVELHECIMENTO PARA O BETÃO EM MASSA DE BARRAGENS, 1990, Lisboa. Lisboa: Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1990. 7p. (INCB 5).

LIMA, J.P.D.; RODRIGUES, R.O. (1998). Interface gráfica para geração dos dados de treliças espaciais objetivando a análise estrutural dinâmica. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNESP, 10, Rio Claro, 1998. **Anais**. Rio Claro, Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". p. 108.

- MACGREGOR, J.G. **Reinforced concrete: mechanics e design**. 3.ed. New Jersey, Prentice Hall, 1997
- MACHADO, C.P. (1989). **Tensões, deformações e deslocamentos em estruturas de concreto armado e protendido**. São Paulo. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- MATTHIES, H.; STRANG, G. (1979). The solution of nonlinear finite element equations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.14, p.1613-1626.
- MAZZILLI, C.E.N. (1986). Comportamento não-linear de pórticos planos em regime elástico linear. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA , 7, São Carlos, 1986. **Anais**. São Carlos, EESC-USP. p.381-395.
- MAZZILLI, C.E.N.; BRASIL, R.M.L.R.F. (1992). **ANDROS: a finite element program for nonlinear dynamics**. São Paulo, EPUSP. (Boletim Técnico BT/PEF/9213).
- MENDELSON, A. **Plasticity: theory and application**. New York: McMillan Company, 1968. 353p.
- NEAL, B.G. (1970). **The plastic methods of structural analysis**. 2.ed. London, Chapman & Hall. 358p.
- OWEN, D.R.J.; GOMES, C.M.B. (1984). **Some recent developments in solution techniques for nonlinear finite element problems**. s.l., s.ed. p.137-153.
- PANDIT, G.S.; GUPTA, S.P. (1981). **Structural analysis: a matrix approach**. New Delhi, Tata McGraw-Hill. 602p.

- RODRIGUES, R.O. (1992). **Automatização do projeto estrutural de pilares de concreto armado**. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- RODRIGUES, R.O. (1998). **Sobre o comportamento dinâmico das treliças espaciais considerando-se dupla não-linearidade**. Ilha Solteira, FEIS, 1998. 61 p. (Relatório Técnico FEIS - UNESP, N<sup>o</sup> Processo FEIS : 673/89-CISA)
- RODRIGUES, R.O. (2001). **Análise estática não-linear geométrica de pórticos espaciais**. Ilha Solteira. Tese (Livre-Docência) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".
- SAVASSI, W. (1996). **Introdução ao método dos elementos finitos: em análise linear de estruturas**. São Carlos, EESC-USP. 260p.
- SKRZYPEK, J. J.; HETNARSKI, R. B. **Plasticity and creep: theory, examples, and problems**. Florida: CRC Press, 1993. 542p.
- SOBOTKA, Z. **Rheology of materials and engineering structures**. New York: Elsevier, 1984. 548p.
- VIEIRA, W.L.B.; RODRIGUES, R.O. (1998). Interface gráfica para visualização dos resultados da análise estrutural dinâmica de treliças espaciais. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNESP, 10, Rio Claro, 1998. **Anais**. Rio Claro, Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". p. 109.

- WAIDEMAM, L. (2004). Análise dinâmica de placas delgadas utilizando elementos finitos triangulares e retangulares. Ilha Solteira. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista.
- WAIDEMAM, L.; RODRIGUES, R.O. (2001). Análise dinâmica de chapas utilizando os elementos finitos CST e CSQ. In: REUNIÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA FEIS/UNESP, 9, Ilha Solteira, 2001. **Anais**. Ilha Solteira, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". p. 23.
- WEN, R.K.; ASCE, M.; RAHIMZADEH, J. (1983). Non-linear elastic frame analysis by finite element. **Journal of Structural Engineering**, v.109, n.8, p.1952-1971, Aug.
- WONG, M.B.; TIN-LOI, F. (1990a). Analysis of frames involving geometrical and material nonlinearities. **Computers & Structures**, v.34, n.4, p.641-646.
- YAGAWA, G.; HIRAYAMA, H. (1984). A finite element method for contact problems related to fracture mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.20, p.2175-2195.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. The finite element method. 5.ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. 3v.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)