



**Universidade Federal de Alagoas**

**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Aproximações de Funções Preservando  
Formas Simpléticas**

**Thiago Fontes Santos**

Rio São Francisco



# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

---

---

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

APROXIMAÇÕES DE FUNÇÕES PRESERVANDO

FORMAS SIMPLÉTICAS

THIAGO FONTES SANTOS

Orientador:

PROF. DR. KRERLEY OLIVEIRA

Apoio Financeiro:

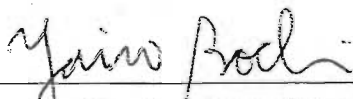
CENTRO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR - CAPES

MACEIÓ - DEZEMBRO DE 2006

APROXIMAÇÕES DE FUNÇÕES PRESERVANDO  
FORMAS SIMPLÉTICAS

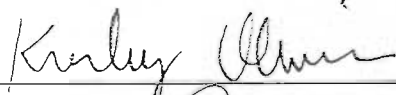
Dissertação de Mestrado na área de  
concentração de Sistemas Dinâmicos  
submetida em 21 de dezembro de 2006 à  
Banca Examinadora, designada pelo  
Colegiado do Programa de Mestrado em  
Matemática da Universidade Federal de  
Alagoas, como parte dos requisitos  
necessários à obtenção do grau de mestre  
em Matemática.

Banca Examinadora:




---

PROF. DR. JAIRO DA SILVA BOCHI



---

PROF. DR. KRERLEY IRRACIEL MARTINS OLIVEIRA (ORIENTADOR)



---

PROF. DR. LEONARDO MAGALHÃES MACARINI

*Aos meus avós paternos Maria dos Prazeres Santos e Luiz Antônio dos Santos(In memorian), minha Irmã Shirleny Fontes Santos e minha futura esposa Mônica Teles Santos.*



# Agradecimentos

Inicialmente agradeço a Deus por ter me proporcionado mais esta realização, dando-me coragem necessária para enfrentar as ocasiões difíceis e a minha família pelo apoio e o incentivo durante todo esse período que estive distante.

Ao professor Krerley Oliveira pela amizade, orientação, paciência e benevolência durante todo o mestrado.

Aos professores Manuel Bernardino, Natanael , Paulo Rabelo de Souza que muito contribuíram no início da minha formação acadêmica. Agradeço aos professores do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas (UFAL) e em especial Adan Corcho, Ediel Azevedo, Fernando Echaiz e Marcos Petrúcio pelas contribuições acadêmicas e a amizade.

Agradeço a amizade de José Anderson, André Vinicius, Naldisson, Almir Rogerio, José Arnaldo, Clarissa Codá, Davy Souza, Márcio Henrique, Claudemir Silvino, Fábio Bóia, Daniel Nicolau, André Pizzaia e companheirismo Maria de Andrade, Julio Cesar. Enfim, a todos amigos e colegas que compartilharam minha história acadêmica, meus sinceros agradecimentos.

Ao Prof. Dr. Jairo Bochi e Prof. Dr. Leonardo Macarini pelo estudo atencioso desta dissertação.

Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro.

A minha amável noiva, Mônica Teles, motivadora deste e de futuros trabalhos.

## Resumo

Mostraremos que é possível aproximar um difeomorfismo simplético com derivada contínua por um difeomorfismo simplético, infinitamente diferenciáveis, sobre uma variedade simplética compacta. Além disso, provamos o Teorema de Darboux e Moser.

Palavras-chave: Difeomorfismo Simplético; Preservar Volume.



# Introdução

As funções como  $\text{sen}(x)$ ,  $e^x$ ,  $\log(x)$  se encaixam numa classe de funções chamada de *analíticas*, ou seja, em torno de cada ponto do seu domínio existe um desenvolvimento, o qual representa a função dada como soma de uma série de potências:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Deste modo, escrevendo  $f_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$ , vemos que cada  $f_n$  é um polinômio e  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  para todo  $x$  no intervalo de convergência da série. Pode-se mostrar ainda que em cada intervalo compacto de convergência, tem-se  $f_n \rightarrow f$  uniformemente.

Um resultado que generaliza o que vimos acima foi feito por K. Weierstrass em 1885. Conforme Weierstrass, qualquer função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é limite uniforme de uma seqüência de polinômios no seu intervalo de definição  $[a, b]$ . Portanto, dada  $f$  contínua em  $[a, b]$  e  $\varepsilon > 0$ , existe um polinômio  $p$  tal que  $\|f(x) - p(x)\| < \varepsilon$  para todo  $x \in [a, b]$ . Observe que estamos aproximando  $f$  por funções infinitamente diferenciáveis pois polinômios são funções de classe  $C^\infty$ . Para a prova do resultado de Weierstrass recomendamos [6].

Num contexto mais geral, podemos nos perguntar se dada uma função contínua  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U$  aberto, ela pode ser aproximada por funções classe  $C^\infty$ . Isto é possível, vejamos um exemplo de como fazer isso. Defina  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  por

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

onde  $C$  é escolhida de forma que  $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$ . Agora, para cada  $\varepsilon > 0$ , seja

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Não é difícil verificar que as funções  $\eta_\varepsilon$  são de classe  $C^\infty$  e satisfazem

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon dx = 1, \text{ supp.} \eta_\varepsilon \subset B(0; \varepsilon).$$

Defina  $f^\varepsilon(x) := \int_U \eta_\varepsilon(x-y)f(y)dy$ . Por uma mudança de variável, podemos escrever  $f^\varepsilon(x) = \int_{B(0; \varepsilon)} \eta_\varepsilon(y)f(x-y)dy$ . Por razões que mais adiante ficaram claras,  $f^\varepsilon$  é de classe  $C^\infty$  e  $f^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow \infty} f$  uniformemente nas partes compactas de  $U$ .

Neste trabalho, estamos interessados em aproximar funções preservando volume, o qual no método descrito acima nem sempre conseguimos. Resolveremos este problema sob a luz da Geometria Simplética.

Chamaremos de *variedades simplética* o par  $(M, \sigma)$  onde  $M$  é uma superfície suave e  $\sigma$  uma 2-forma fechada e não-degenerada. Um difeomorfismo  $\phi : (M_1, \sigma_1) \rightarrow (M_2, \sigma_2)$  entre variedades simpléticas é dito *simplético* se  $\phi^* \sigma_2 = \sigma_1$ .

Por exemplo, dado  $(p, q) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^{2n}$  podemos considerar a 2-forma

$$w_0(p, q) = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

Com esta forma,  $(\mathbb{R}^{2n}, w_0)$  é uma variedade simplética.

Apesar de ser um exemplo muito simples, é o que sempre ocorre, em coordenadas locais, numa variedade simplética qualquer. Este é um resultado clássico da geometria simplética provado por Darboux. Daremos uma prova deste fato seguindo as idéias de [12].

Um motivo básico para escolhermos a geometria simplética para tentarmos solucionar o problema de aproximar funções preservando volume é o fato de que difeomorfismos simpléticos preservam volumes simpléticos e desta maneira basta que suavizemos estes difeomorfismos. Mais precisamente, se  $\phi : (M_1, \sigma_1) \rightarrow (M_2, \sigma_2)$  é um difeomorfismo entre variedades simpléticas tal que  $\phi^* \sigma_2 = \sigma_1$  então  $(\sigma_1)^n$  e  $(\sigma_2)^n$  são formas de volume sobre  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente, e

$$\int_A (\sigma_1)^n = \int_{\phi(A)} (\sigma_2)^n,$$

para todo boreliano  $A \subset M_1$ .

Este trabalho está organizado como segue. No Capítulo 1 apresentaremos os conceitos básicos sobre formas alternadas e diferenciais bem como a fórmula “mágica” de Cartan que relaciona a derivada de Lie com a diferencial exterior e o produto interior. A seguir definimos as topologias  $C^k$  na qual duas funções de classe  $C^k$  estarão próximas se além de estarem próximas quando avaliamos num ponto suas derivadas também estão próximas até a ordem  $k$ .

O Capítulo 2 começa com algumas noções sobre a Cohomologia de DE RHAM. A seguir, calculamos os grupos de DE RHAM de alguns casos particulares. Usaremos esta teoria grandemente no próximo capítulo.

No Capítulo 3 aduzimos os conceitos mais importantes deste trabalho, a saber, os de Topologia Simplética. Dentre os tópicos ali abordados, destacamos o Teorema de Darboux e o Teorema de Moser. Outra seção de relevante presença é a de “Funções Geradoras”, as quais servem de base para chegarmos ao nosso objetivo final.

Por fim, o Capítulo 4 traz métodos de aproximações de funções. Dentre eles, veremos como podemos aproximar funções preservando o volume simplético.

Maceió, 21 dezembro 2006.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>13</b>
1.1	Formas Alternadas . . . . .	13
1.1.1	Definições e exemplos . . . . .	13
1.1.2	Produto Exterior . . . . .	20
1.2	Formas Diferenciais . . . . .	21
1.2.1	Pull-Back de uma forma . . . . .	23
1.2.2	Diferencial Exterior . . . . .	27
1.2.3	Produto Interior . . . . .	30
1.2.4	Derivada de Lie de formas . . . . .	31
1.3	Partição da unidade . . . . .	35
1.4	Integração de formas . . . . .	37
1.5	Topologias $C^k$ . . . . .	40
<b>2</b>	<b>Cohomologia de DE RHAM</b>	<b>43</b>
2.1	Definição . . . . .	43
2.2	Invariância homotópica . . . . .	46
2.3	Alguns exemplos . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Topologia Simplética</b>	<b>57</b>
3.1	Álgebra linear simplética . . . . .	57
3.2	Variedades simpléticas . . . . .	60
3.2.1	Teorema de Darboux . . . . .	62
3.2.2	Teorema de Moser . . . . .	67

3.2.3	Algumas obstruções . . . . .	68
3.2.4	Funções geradoras . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Aproximações de funções</b>	<b>79</b>
4.1	Suavização padrão . . . . .	79
4.2	Suavização Simplética . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Aproximações <math>C^1</math> e outros resultados</b>	<b>89</b>
5.1	Aproximações $C^{1,\alpha}$ . . . . .	89
5.2	Fluxos $C^1$ . . . . .	90
5.3	Aproximações em Regiões com Bordo . . . . .	91
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>93</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>95</b>

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Formas Alternadas

#### 1.1.1 Definições e exemplos

Consideraremos uma base num espaço vetorial  $E$  como uma família linearmente independente máxima  $(e_i)_{i \in I}$ , de elementos de  $E$ , com índices num conjunto  $I$ . Uma lista com índices no conjunto  $I = 1, 2, \dots, r$  é chamada uma  $r$ -lista.

Dados espaços vetoriais  $E, F$ , uma aplicação  $\varphi : \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{r\text{-vezes}} \rightarrow F$ , diz-se  $r$ -linear quando seus valores  $\varphi(v_1, \dots, v_r)$  dependem linearmente de cada uma das variáveis  $v_1, \dots, v_r \in E$ , ou seja,

$$\begin{aligned}\varphi(v_1, v_2, \dots, v_i + w_i, \dots, v_r) &= \varphi(v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_r) + \varphi(v_1, v_2, \dots, w_i, \dots, v_r) \\ \varphi(v_1, v_2, \dots, \lambda v_i, \dots, v_r) &= \lambda \varphi(v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_r),\end{aligned}$$

quaisquer que sejam  $v_1, v_2, \dots, v_r \in E$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

As operações usuais de soma de aplicações e produto de uma aplicação por uma escalar fazem do conjunto das aplicações  $r$ -lineares  $\varphi : E \times E \times \dots \times E \rightarrow F$  um espaço vetorial, que denotaremos por  $L_r(E; F)$ .

Diremos que uma aplicação  $\varphi \in L_r(E; F)$  é *alternada* se  $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_r) = 0$  sempre que a seqüência  $(v_1, v_2, \dots, v_r)$  possuir repetições, ou seja, se existirem  $i \neq j$  com  $v_i = v_j$ , e diremos que é *anti-simétrica* se

$$\varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_r) = -\varphi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_r) \quad (1.1)$$

para quaisquer  $v_1, \dots, v_r \in E$ .

A proposição seguinte dá um critério simples para as aplicações  $r$ -lineares serem alternadas.

**Proposição 1.1.1.** *Seja  $\varphi \in L_r(E; F)$ . Então  $\varphi$  é alternada se, e somente se, for anti-simétrica.*

*Demonstração.* Dados  $v_1, v_2, \dots, v_r \in E$ , consideremos  $\bar{\varphi}(v_i, v_j) = \varphi(v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_r)$ .

Como  $\varphi$  é alternada então

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\varphi}(v_i + v_j, v_i + v_j) \\ &= \bar{\varphi}(v_i, v_i) + \bar{\varphi}(v_i, v_j) + \bar{\varphi}(v_j, v_i) + \bar{\varphi}(v_j, v_j) \\ &= \bar{\varphi}(v_i, v_j) + \bar{\varphi}(v_j, v_i), \end{aligned}$$

Portanto  $\bar{\varphi}(v_i, v_j) = -\bar{\varphi}(v_j, v_i)$ , ou seja,  $\varphi$  é anti-simétrica.

Reciprocamente, usando a notação anterior, se  $\varphi$  é anti-simétrica então  $\bar{\varphi}(v, v) = -\bar{\varphi}(v, v)$ . Segue daí que  $\bar{\varphi}(v, v) = 0$ , logo  $\varphi$  é alternada.  $\square$

Vamos denotar por  $\mathcal{A}_r(E; F)$  o conjunto das aplicações  $r$ -lineares alternadas de  $E$  em  $F$ . Claro que  $\mathcal{A}_r(E; F)$  é subespaço de  $L_r(E; F)$ . A partir de agora, as aplicações  $r$ -lineares alternadas  $\varphi : E \times E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R}$  serão chamadas de formas  $r$ -lineares alternadas ou simplesmente  $r$ -formas e indicaremos por  $\mathcal{A}_r(E; \mathbb{R}) = \mathcal{A}_r(E)$ . Os elementos de  $\mathcal{A}_r(E)$  são também chamados formas de grau  $r$ . Convencionaremos que  $\mathcal{A}_r(E) = \{0\}$  para  $r < 0$  e  $\mathcal{A}_0(E) = \mathbb{R}$ , ou seja, as formas de grau zero são os escalares. De acordo com a nossa notação  $\mathcal{A}_1(E) = E^* = \text{dual de } E$ .

**Proposição 1.1.2.** *Seja  $\varphi : E \times E \times \dots \times E \rightarrow F$  uma aplicação  $r$ -linear alternada. Se  $v_1, \dots, v_r \in E$  são linearmente dependentes então  $\varphi(v_1, \dots, v_r) = 0$ . Em particular, se  $r > \dim E$  então  $\mathcal{A}_r(E) = \{0\}$ .*

*Demonstração.* Como  $v_1, \dots, v_r$  são linearmente dependentes, um desses vetores é combinação

linear dos demais. Digamos que  $v_1 = \sum_{i=2}^r \alpha_i \cdot v_i$ . Então

$$\varphi(v_1, v_2, \dots, v_r) = \sum_{i=2}^r \alpha_i \cdot \varphi(v_i, v_2, \dots, v_r) = 0.$$

Se  $r > \dim E$  então quaisquer  $r$  vetores  $E$  são linearmente dependentes. Segue que  $\mathcal{A}_r(E) = \{0\}$ .  $\square$

Vejamos alguns exemplos dessas  $r$ -formas:



**Exemplo 1.1.1.** O determinante de uma matriz  $m \times m$  poderá ser considerado como uma  $m$ -forma alternada  $\det \in \mathcal{A}_m(\mathbb{R}^m)$  se, para  $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^m$  pusermos  $\det(v_1, v_2, \dots, v_m) =$  determinante da matriz  $m \times m$  cujas colunas são os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_m$ .

**Exemplo 1.1.2.** Dados  $r$ -funcionais lineares  $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r$  de  $E^*$ , obtemos a forma linear alternada  $\bar{f}_1 \wedge \dots \wedge \bar{f}_r : E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R}$  chamada de *produto exterior* desses funcionais, definida por  $\bar{f}_1 \wedge \dots \wedge \bar{f}_r(v_1, \dots, v_r) = \det(\bar{f}_i(v_j))$  com  $i, j = 1, \dots, r$ . A multilinearidade desta forma segue da linearidade de cada funcional  $\bar{f}_j$  e das propriedades de determinante.

**Exemplo 1.1.3.** Considere  $\Lambda : E^* \times \dots \times E^* \rightarrow \mathcal{A}_r(E)$  a aplicação definida por

$$\Lambda(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r) = \bar{f}_1 \wedge \dots \wedge \bar{f}_r.$$

Como o determinante uma matriz é uma  $r$ -linear alternada nos seus vetores-coluna, temos que  $\Lambda$  é uma aplicação  $r$ -linear alternada de  $E^*$  em  $\mathcal{A}_r(E)$ . Algumas vezes escreveremos, para  $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ ,

$$\bar{f}_I = \bar{f}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{f}_{i_r}. \quad (1.2)$$

**Lema 1.1.1.** *Sejam  $\varphi, \psi : E \times \dots \times E \rightarrow F$  aplicações  $r$ -lineares e  $G$  um conjunto de geradores de  $E$ . Se  $\varphi(v_1, \dots, v_r) = \psi(v_1, \dots, v_r)$  qualquer que seja a  $r$ -lista  $(v_1, \dots, v_r)$  de elementos de  $G$ , então  $\varphi = \psi$ .*

*Demonstração.* Provaremos usando indução sobre  $r$ . Se  $r = 1$ , dado  $x \in E$  podemos escrevê-lo como  $x = \sum_{j=1}^m a_j v_j$ . Daí,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{j=1}^m a_j \varphi(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^m a_j \psi(v_j) \\ &= \psi\left(\sum_{j=1}^m a_j(v_j)\right) \\ &= \psi(x). \end{aligned}$$

Suponha que a afirmação valha para  $r - 1$ . Para cada  $v \in G$ , definamos as aplicações  $r - 1$  lineares  $\varphi_v, \psi_v$  por

$$\begin{aligned} \varphi_v(x_1, \dots, x_{r-1}) &= \varphi(x_1, \dots, x_{r-1}, v) \\ \psi_v(x_1, \dots, x_{r-1}) &= \psi(x_1, \dots, x_{r-1}, v) \end{aligned}$$

Por hipótese de indução,  $\varphi_v = \psi_v$  para qualquer  $(r-1)$ -lista de elementos de  $G$ , ou seja,  $\varphi(x_1, \dots, x_{r-1}, v) = \psi(x_1, \dots, x_{r-1}, v)$  quaisquer que sejam  $x_1, \dots, x_{r-1} \in E$  e  $v \in G$ . Como  $G$  é um conjunto de geradores de  $E$ , dado  $x_r \in E$  temos que

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_{r-1}, x_r) &= \varphi(x_1, \dots, x_{r-1}, \sum_{i=1}^m a_i v_i) \\ &= \sum_{i=1}^m a_i \varphi(x_1, \dots, x_{r-1}, v_i) \\ &= \sum_{i=1}^m a_i \psi(x_1, \dots, x_{r-1}, v_i) \\ &= \psi(x_1, \dots, x_r). \end{aligned}$$

□

**Lema 1.1.2.** *Sejam  $\varphi, \psi : E \times \dots \times E \rightarrow F$  aplicações  $r$ -lineares alternadas e  $\{e_1, \dots, e_m\}$  uma base de  $E$ . Se  $\varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) = \psi(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$  para toda seqüência crescente  $i_1 < \dots < i_r$  de  $r$  inteiros contidos em  $\{1, \dots, m\}$  então  $\varphi = \psi$ .*

*Demonstração.* Seja  $(j_1, \dots, j_r)$  uma  $r$ -lista de inteiros contidos em  $\{1, \dots, m\}$ . Se houver repetição de elementos nessa lista, então  $\varphi(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = \psi(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = 0$  pois as aplicações são alternadas. Suponha que os elementos dessa  $r$ -lista sejam todos distintos. Daí, por meio de sucessivas transposições (trocas de posições entre 2 elementos apenas), podemos pôr os números  $(j_1, \dots, j_r)$  na ordem crescente ( $i_1 < \dots < i_r$ ). Se são necessárias  $k$  transposições, temos que  $\varphi(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = (-1)^k \varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) = (-1)^k \psi(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) = \psi(e_{j_1}, \dots, e_{j_r})$ . Assim, pelo lema anterior,  $\varphi = \psi$ . □

Agora, procuraremos explicitar uma base para  $\mathcal{A}_r(E)$  a partir de uma base de  $E$ . Para tanto, considere  $\{e_1, \dots, e_m\} \subset E$  base dual de  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\} \subset E^*$ . Dados  $I = \{i_1 < \dots < i_r\}$  e  $J = \{j_1 < \dots < j_r\}$  contidos em  $\{1, \dots, m\}$ , afirmamos que

$$\bar{e}_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = \begin{cases} 0, & \text{se } I \neq J \\ 1, & \text{se } I = J. \end{cases}$$

De fato, se  $I \neq J$  então existe  $i_k \in I - J$  tal que  $\bar{e}_{i_k}(e_j) = 0$  para todo  $j \in J$ . Segue que  $\bar{e}_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = 0$  pois teremos um determinante de uma matriz cuja  $k$ -ésima linha é nula. Se, no entanto,  $I = J$ , então  $\bar{e}_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = \det(\text{Id}) = 1$  onde  $\text{Id}$  é a matriz identidade  $r \times r$ . No

caso geral, sejam  $v_1, \dots, v_r \in E$ , com  $v_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i$  para  $j = 1, \dots, r$ . Para cada  $i \in I$ , temos que  $\bar{e}_i(v_j) = a_{ij}$ . Então

$$\begin{aligned} \bar{e}_I(v_1, \dots, v_r) &= \det(e_{i_k}(v_j)) \\ &= \det(a_{i_k j}) \\ &= \det(a_I), \end{aligned}$$

onde  $a_I$  denota a matriz  $r \times r$  obtida da matriz  $(a_{ij})$  escolhendo-se as  $r$ -linhas cujos índices pertencem ao conjunto  $I$ .

**Teorema 1.1.1.** *Seja  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$  uma base de  $E^*$ . As  $r$ -formas  $\bar{e}_I = \bar{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{i_r}$ , onde  $I = \{i_1, \dots, i_r\}$  percorre os subconjuntos de  $\{1, \dots, m\}$  com  $r$  elementos, constituem uma base de  $\mathcal{A}_r(E)$ . Em particular,  $\dim \mathcal{A}_r(E) = \binom{m}{r}$ .*

*Demonstração.* Dado  $w \in \mathcal{A}_r(E)$ , seja  $\alpha_I = w(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$  para cada  $I = \{i_1 < \dots < i_r\}$ . A  $r$ -forma  $\varphi = \sum_I \alpha_I \bar{e}_I$  é tal que para toda lista  $J = \{j_1 < \dots < j_r\}$  de inteiros contidos em  $\{1, \dots, m\}$  temos que

$$\begin{aligned} \varphi(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) &= \sum_I \alpha_I \bar{e}_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) \\ &= \alpha_J \\ &= w(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}). \end{aligned}$$

Logo, a partir do Lema 1.1.2,  $\varphi = w$ , ou seja,  $w = \sum_I \alpha_I \bar{e}_I$ . Isto mostra que as  $r$ -formas  $\bar{e}_I$  geram  $\mathcal{A}_r(E)$ . Notemos que estas  $r$ -formas são linearmente independente pois se tivermos uma combinação  $\sum_I \alpha_I \bar{e}_I = 0$  tiramos, para toda lista  $J = \{j_1 < \dots < j_r\}$ ,  $0 = \varphi(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = \alpha_J$ .  $\square$

Dados  $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r$  funcionais de  $E^*$ , vamos dar uma expressão para  $\bar{f}_1 \wedge \dots \wedge \bar{f}_r$  em termos da base formada pelas  $r$ -formas  $\bar{e}_I$  como no teorema anterior. Podemos exprimir este funcionais em termos da base  $(\bar{e}_j)$  como

$$f_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} \bar{e}_j. \quad (1.3)$$

Pelo que vimos no Teorema 1.1.1, existe uma expressão única  $\bar{f}_1 \wedge \dots \wedge \bar{f}_r = \sum_J \alpha_J \bar{e}_J$ , com  $\alpha_J = \bar{f}_1 \wedge \dots \wedge \bar{f}_r(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = \det(\bar{f}_i(e_{j_k}))$  para todo  $J = \{j_1 < \dots < j_r\} \subset \{1, \dots, m\}$ . Daí,

$\alpha_J = \det(a_J)$ . Assim  $\bar{f}_1 \wedge \dots \wedge \bar{f}_r = \sum_J \det(a_J) \bar{e}_J$  a soma estendendo-se a todos os subconjuntos  $J \subset \{1, \dots, m\}$  com  $r$  elementos. Em particular, quando  $r = m$  temos, simplesmente, que  $\bar{f}_1 \wedge \dots \wedge \bar{f}_m = \det(a) \cdot \bar{e}_1 \wedge \dots \wedge \bar{e}_m$ , onde  $a = (a_{ij})$  é a matriz de passagem de  $\{\bar{e}_1 \wedge \dots \wedge \bar{e}_m\}$  para  $\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m\}$ .

Vejam como mudam as coordenadas de uma forma  $w \in \mathcal{A}_r(E)$  quando fazemos uma mudança de base em  $E$ .

Sejam  $\{e_1, \dots, e_m\}$  e  $\{f_1, \dots, f_m\}$  base de  $E$  com  $e_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i$ , ( $j = 1, \dots, m$ ). Suas bases duais,  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$  e  $\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m\}$ , cumprem as relações  $\bar{f}_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} \bar{e}_j$ , ( $i = 1, \dots, m$ ). Dados conjuntos  $I, J$  com  $r$  elementos, indicamos com  $a_{IJ}$  a sub-matriz  $r \times r$  da matriz  $a = (a_{ij})$  com  $i \in I$  e  $j \in J$ . Pelo que vimos,  $\bar{f}_I = \sum_J \det(a_{IJ}) \bar{e}_J$ . Agora, se uma forma  $w \in \mathcal{A}_r(E)$  admite as expressões  $w = \sum_J \alpha_J \bar{e}_J = \sum_I \beta_I \bar{f}_I$  relativamente as bases  $(\bar{e}_J)$  e  $(\bar{f}_J)$  temos que

$$\begin{aligned} w &= \sum_J \alpha_J \bar{e}_J \\ &= \sum_I \beta_I \sum_J \det(a_{IJ}) \bar{e}_J \\ &= \sum_J \left[ \sum_I \beta_I \det(a_{IJ}) \right] \bar{e}_J \end{aligned}$$

Segue que  $\alpha_J = \sum_I \beta_I \det(a_{IJ})$ .

Agora, note que para todo  $r \geq 1$ , uma transformação linear  $A : E \rightarrow F$  determina uma nova transformação linear  $A^* : \mathcal{A}_r(F) \rightarrow \mathcal{A}_r(E)$ , a qual chamaremos de *transposta*, definida por

$$(A^* \cdot w)(v_1, \dots, v_r) = w(A \cdot v_1, \dots, A \cdot v_r) \quad (1.4)$$

para quaisquer  $w \in \mathcal{A}_r(F)$  e  $v_1, \dots, v_r \in E$ .

**Observação 1.1.1.** Considere  $\dim(E) = \dim(F) = m$ . Se  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\} \subset E^*$  e  $\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m\} \subset F^*$  são bases então

$$A^*(\bar{f}_1 \wedge \dots \wedge \bar{f}_m) = \det(a) \bar{e}_1 \wedge \dots \wedge \bar{e}_m, \quad (1.5)$$

onde  $a = (a_{ij})$  representa a matriz de passagem das bases duais às bases  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$  e  $\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m\}$ .

De fato, sejam  $\{e_1, \dots, e_m\} \subset E$  e  $\{f_1, \dots, f_m\} \subset F$  bases, duais respectivamente das bases  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\} \subset E^*$  e  $\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m\} \subset F^*$ . Seja  $a = (a_{ij})$  a matriz em relação a essas bases, ou seja,

$A \cdot e_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i$  para  $j = 1, \dots, m$ . Pelo Teorema 1.1.1,  $\dim \mathcal{A}_m(E) = 1$  e  $\{\bar{e}_1 \wedge \dots \wedge \bar{e}_m\}$  é uma base para esse espaço. Daí,

$$A^*(\bar{f}_1 \wedge \dots \wedge \bar{f}_m) = \lambda \bar{e}_1 \wedge \dots \wedge \bar{e}_m,$$

onde

$$\begin{aligned} \lambda &= (A^*(\bar{f}_1 \wedge \dots \wedge \bar{f}_m))(e_1, \dots, e_m) \\ &= (\bar{f}_1 \wedge \dots \wedge \bar{f}_m)(A \cdot e_1, \dots, A \cdot e_m) \\ &= \det(\bar{f}_i(A \cdot e_j)) \\ &= \det(a). \end{aligned}$$

**Exemplo 1.1.4.** *A forma elemento de volume.* Seja  $E$  um espaço vetorial de dimensão  $m$ , orientado e munido de um produto interno. Tomemos uma base ortonormal positiva  $\{e_1, \dots, e_m\}$  em  $E$ . Dada a seqüência de vetores  $v_1, \dots, v_m \in E$ , escrevamos

$$v_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i,$$

para cada  $j = 1, \dots, m$ . Considere  $a = (a_{ij})_{m \times m}$  a matriz assim obtida. Defina a *forma elemento de volume*  $w$  por

$$w(v_1, \dots, v_m) = \det(a). \quad (1.6)$$

Evidentemente  $w \in \mathcal{A}_m(E)$ . Resta mostrar que  $w$  não depende da escolha da base. Para isso, defina a matriz

$$g = (\langle v_i, v_j \rangle)_{m \times m}$$

na qual o elemento situado na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna é o produto  $\langle v_i, v_j \rangle$ . Note que

$$\begin{aligned} \langle v_i, v_j \rangle &= \left\langle \sum_k a_{ki} e_k, \sum_s a_{sj} e_s \right\rangle \\ &= \sum_k a_{ki} a_{kj}. \end{aligned}$$

Daí, obtemos que  $g = a^T a$ . Isto implica que  $\det(g) = (\det(a))^2$ . Portanto

$$w(v_1, \dots, v_m) = \pm \sqrt{\det(g)}, \quad (1.7)$$

onde o sinal depende da orientação tomada.

### 1.1.2 Produto Exterior

No exemplo 1.1.2 vimos o produto de funcionais em  $E^*$ , a qual chamamos de produto exterior de funcionais. Agora, vamos definir o que seja o produto exterior de uma  $k$ -forma por uma  $r$ -forma.

Uma  $r$ -forma exterior em  $E$  é a aplicação  $w$  que associa para cada  $p \in E$  um elemento  $w(p) \in \mathcal{A}_r(E)$ . Pelo teorema 1.1.1, podemos escrever  $w(p) = \sum_I a_I(p)\bar{e}_I$ ,  $I = (i_1 < \dots < i_r) \subset \{1, \dots, m\}$ . Agora, vamos definir algumas operações das  $r$ -formas em  $E$ . Primeiro, se  $w_1$  e  $w_2$  são duas  $r$ -formas, podemos definir a *soma* como  $w_1 + w_2 = \sum_I (a_I + b_I)\bar{e}_I$ . Se  $w_1$  é uma  $r$ -forma e  $w_2$  uma  $s$ -forma é possível definir uma operação, chamada produto exterior  $w_1 \wedge w_2$  obtendo uma  $r + s$ -forma da seguinte maneira: dados

$$w_1 = \sum_I a_I e_I$$

e

$$w_2 = \sum_J b_J e_J$$

defina

$$w_1 \wedge w_2 = \sum_{I,J} a_I b_J e_I \wedge e_J$$

As operações com o produto exterior gozam de certas propriedades. Veremos algumas delas a seguir.

**Proposição 1.1.3.** *Seja  $w_1$  uma  $r$ -forma,  $w_2$  uma  $s$ -forma e  $w_3$  uma  $k$ -forma. Então:*

$$a) (w_1 \wedge w_2) \wedge w_3 = w_1 \wedge (w_2 \wedge w_3),$$

$$b) (w_1 \wedge w_2) = (-1)^{rs} w_2 \wedge w_1,$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 1.1.1, escrevamos

$$w_1 = \sum_I a_I \bar{e}_I, \quad I = (i_1 < \dots < i_r)$$

$$w_2 = \sum_J b_J \bar{e}_J, \quad J = (j_1 < \dots < j_s)$$

$$w_3 = \sum_L c_L \bar{e}_L, \quad L = (l_1 < \dots < l_k).$$

a) Segue diretamente da definição.

b) Notemos que

$$\begin{aligned} w_1 \wedge w_2 &= \sum_{I,J} a_I b_J \bar{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{i_r} \wedge \bar{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{j_s} \\ &= \sum_{I,J} (-1) a_I b_J \bar{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{i_{r-1}} \wedge \bar{e}_{j_1} \wedge \bar{e}_{i_r} \wedge \bar{e}_{j_2} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{j_s} \\ &= \sum_{I,J} (-1)^k a_I b_J \bar{e}_{j_1} \wedge \bar{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{i_{r-1}} \wedge \bar{e}_{i_r} \wedge \bar{e}_{j_2} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{j_s}. \end{aligned}$$

Desde que  $J$  tem  $s$  elementos, nós obtemos, repetindo o argumento para cada  $\bar{e}_{j_q}, j_q \in J$ ,

$$\begin{aligned} w_1 \wedge w_2 &= \sum_{I,J} (-1)^{ks} a_I b_J \bar{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{j_s} \wedge \bar{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{i_r} \\ &= (-1)^{ks} w_2 \wedge w_1. \end{aligned}$$

□

Dada uma forma  $w$ , usaremos a notação abreviada  $w^n := \underbrace{w \wedge \dots \wedge w}_{n\text{-vezes}}$ .

**Observação 1.1.2.** Apesar de que  $\bar{e}_i \wedge \bar{e}_i = 0$  não é verdade que para qualquer forma  $w$  tem -se  $w \wedge w = 0$ . Por exemplo se  $w = a_1 \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2 + a_2 \bar{e}_3 \wedge \bar{e}_4$ , temos  $w \wedge w = a_1 a_2 \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2 \wedge \bar{e}_3 \wedge \bar{e}_4$ .

## 1.2 Formas Diferenciais

De agora em diante,  $M$  representará uma superfície  $m$ -dimensional contida no  $\mathbb{R}^n$ , de classe  $\mathcal{C}^p$ ,  $p \geq 1$ ,  $\mathfrak{X}(M)$  o conjunto dos campos de vetores definidos em  $M$  e por  $T_x M$  o espaço vetorial tangente a  $M$  no ponto  $x \in M$ . Diremos que uma superfície é orientável se existir um atlas<sup>1</sup>  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  tal que para todo  $\alpha, \beta$  com  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$

$$\det(d(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})) > 0. \quad (1.8)$$

Esse atlas nós chamaremos de *orientação* e as cartas neste atlas nós chamaremos de *cartas positivas*.

Mais adiante, usando técnicas de partição da unidade, mostraremos que uma condição necessária e suficiente para que superfície  $n$ -dimensional  $M$  seja orientável é que exista uma forma de volume em  $M$ .

<sup>1</sup>Uma atlas numa superfície  $M$  é uma coleção de cartas tais que seus domínios cobrem  $M$ .

Uma *forma diferencial* de grau  $r$  numa superfície  $M$  é uma aplicação

$$w : x \in M \mapsto w(x) \in \mathcal{A}_r(T_x M)$$

que associa a cada ponto  $x \in M$  uma forma  $r$ -linear alternada  $w(x)$  no espaço vetorial tangente  $T_x M$ .

### Representação por meio de parametrizações

Seja  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  uma parametrização de um aberto  $U \subset M$ . Para cada  $x = \varphi(u) \in U$  temos uma base

$$\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_m}(u) \right\} \subset T_x M. \quad (1.9)$$

Denotaremos por  $\{du_1, \dots, du_m\} \subset (T_x M)^*$  a base dual de (1.9). Pelo Teorema 1.1.1, para cada  $x = \varphi(u) \in U$ , as  $r$ -formas  $du_I = du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_r}$ , com  $I = \{i_1 < \dots < i_r\}$  constituem uma base de  $\mathcal{A}_r(T_x M)$ . Assim dada uma forma diferencial  $w$ , de grau  $r$  em  $M$ , podemos escrever, para cada  $x = \varphi(u) \in U$ :

$$w(x) = w(\varphi(u)) = \sum_I a_I(u) du_I \quad (1.10)$$

Daí, a forma  $w$  define, para cada parametrização  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  em  $M$ , as funções  $a_I : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ . Convém mostrar que esta representação não depende da parametrização. De fato, seja  $\psi : V_0 \rightarrow V$  outra parametrização em  $M$ , com  $U \cap V \neq \emptyset$ . Para todo  $x = \varphi(u) = \psi(v) \in U \cap V$  temos as bases

$$\left\{ \frac{\partial \psi}{\partial v_1}(v), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial v_m}(v) \right\} \subset T_x M.$$

e

$$\{dv_1, \dots, dv_m\} \subset (T_x M)^*$$

que se relacionam com as base determinadas por  $\varphi$  do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial v_i}{\partial u_j} \frac{\partial \psi}{\partial v_i} \\ dv_i &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial v_i}{\partial u_j} du_j \end{aligned}$$



Pelo que já vimos na seção anterior, se  $x = \varphi(u) = \psi(v) \in U \cap V$  e  $w(x) = \sum_J a_J(u) du_J = \sum_I b_I(u) dv_I$  então

$$a_J(u) = \sum_I \det \left( \frac{\partial v_I}{\partial u_J} \right) b_I(v), \quad (1.11)$$

onde  $\left( \frac{\partial v_I}{\partial u_J} \right)$  é a matriz  $r \times r$  formada pelos elementos  $\frac{\partial v_i}{\partial u_j}$  tais que  $i \in I$  e  $j \in J$ . Portanto fica estabelecido a não dependência da parametrização.

Diremos que uma  $r$ -forma diferencial  $w$  sobre  $M$  é de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k < p$ , quando  $M$  pode ser coberta por imagens  $U$  de parametrizações  $\varphi : U_0 \rightarrow U$ , de classe  $\mathcal{C}^k$ , relativamente às quais se tem  $w = \sum_I a_I du_I$  as funções  $a_I$  sendo todas de classe  $\mathcal{C}^k$ . Salvo menção ao contrário, as formas tratadas neste trabalho serão de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Definição 1.2.1.** *Uma forma de volume em uma superfície  $n$ -dimensional  $M$  é uma forma diferencial  $w$  de grau  $n$  sobre  $M$  tal que  $w(m) \neq 0, \forall m \in M$ .*

Usaremos a notação  $\Omega^r(M)$  para designar o conjunto das  $r$ -formas sobre  $M$ . Observe que, pela Proposição 1.1.2, se  $r > \dim M$  então  $\Omega^r(M) = \{0\}$ .

### 1.2.1 Pull-Back de uma forma

Sejam  $M$  e  $N$  superfícies e  $F : M \rightarrow N$  uma aplicação de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 1$ . Dada uma forma  $w$ , de grau  $r$  sobre  $N$ , definiremos o pull-back de  $w$  pela função  $F$  e escreveremos  $F^*w$  pondo para cada  $x \in M$  e cada  $r$ -lista de vetores  $w_1, \dots, w_r \in T_x M$ ,

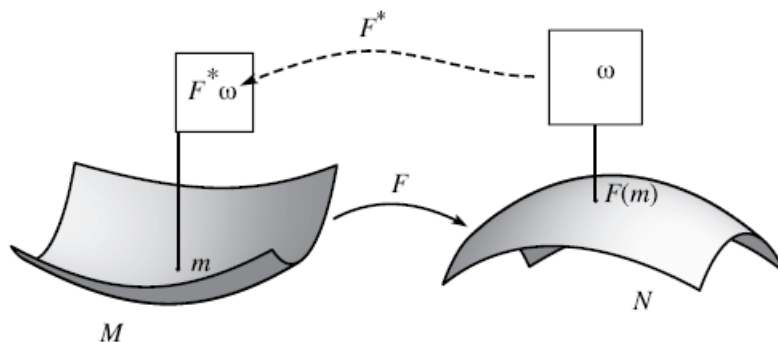
$$[(F^*w)(x)](w_1, \dots, w_r) = w(F(x))(F'(x).w_1, \dots, F'(x).w_r) \quad (1.12)$$

Em particular, se  $w$  é uma 0-forma, ou seja,  $w = g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação diferenciável então

$$(F^*g)(x) = (g \circ F)(x)$$

De acordo com a definição dada em (1.12), temos que

$$(F^*w)(x) = [F'(x)]^* \cdot w(F(x)). \quad (1.13)$$

Pull-back de  $w$  pela função  $F$ .

**Observação 1.2.1.** Se  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação diferenciável e  $w = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$  então, pela observação (1.1.1),

$$F^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)(x) = \det(F'(x))dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n,$$

onde  $y_1, \dots, y_n$  são as funções coordenadas de  $F$ .

**Proposição 1.2.1.** Sejam  $M_1, M_2, M_3$  superfícies,  $f : M_1 \rightarrow M_2$  e  $g : M_2 \rightarrow M_3$  aplicações diferenciáveis. Então:

- a)  $f^*(cw + \bar{w}) = cf^*(w) + f^*(\bar{w}), \forall c \in \mathbb{R}, \forall w, \bar{w} \in \Omega^r(M_2);$
- b)  $(g \circ f)^*(w) = f^*(g^*(w)), \forall w \in \Omega^r(M_3);$
- c)  $f^*(w \wedge \bar{w}) = f^*(w) \wedge f^*(\bar{w}), \forall w \in \Omega^r(M_2).$

*Demonstração.*

- a) Dado  $c \in \mathbb{R}, p \in M_1$  e  $v_1, \dots, v_r \in T_p M_1$ , temos que,

$$\begin{aligned} f^*(cw + \bar{w})(p)(v_1, \dots, v_r) &= (cw + \bar{w})(f(p)).(f'(p).v_1, \dots, f'(p).v_r) \\ &= cw(f(p)).(f'(p).v_1, \dots, f'(p).v_r) + \\ &\quad \bar{w}(f(p)).(f'(p).v_1, \dots, f'(p).v_r) \\ &= (cf^*(w)(p) + f^*(\bar{w})(p))(v_1, \dots, v_r). \end{aligned}$$

Logo,  $f^*(cw + \bar{w}) = f^*(cw) + f^*(\bar{w})$ .

b) Dados arbitrariamente  $x \in M_1$ , uma  $r$ -forma  $w \in M_3$  e  $v_1, \dots, v_r \in T_x M_1$ , temos que

$$((g \circ f)^* w)(x)(v_1, \dots, v_r) = w(g(f(x))).((g \circ f)'(x).v_1, \dots, (g \circ f)'(x).v_r)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (f^*(g^*(w)))(x)(v_1, \dots, v_r) &= (g^*(w))(f(x))(f'(x).v_1, \dots, f'(x).v_r) \\ &= w(g(f(x))).((g \circ f)'(x).v_1, \dots, (g \circ f)'(x).v_r) \end{aligned}$$

Logo  $(g \circ f)^*(w) = f^*(g^*(w))$ .

c) Inicialmente, seja  $f_1, \dots, f_r$  1-formas de  $M_2$ . Omitindo o ponto  $x$  e denotando por  $df$  a derivada de  $f$  neste ponto, nós obtemos

$$\begin{aligned} f^*(f_1 \wedge \dots \wedge f_r)(v_1, \dots, v_r) &= (f_1 \wedge \dots \wedge f_r)(df.v_1, \dots, df.v_r) \\ &= \det(f_i(df.v_j)) \\ &= \det(f^*(f_i(v_j))) \\ &= (f^*(f_1) \wedge \dots \wedge f^*(f_r))(v_1, \dots, v_r). \end{aligned}$$

Agora, sejam  $(x_1, \dots, x_r)$  coordenadas para  $M_1$  e  $(y_1, \dots, y_r)$  coordenadas para  $M_2$  onde  $y_i = f_i(x_1, \dots, x_r)$  sendo  $f_i$  as funções coordenadas de  $f : M_1 \rightarrow M_2$ . Sejam  $w = \sum_I a_I dy_I, \bar{w} = \sum_J b_J dy_J$  duas  $k$ -formas em  $M_2$ . Então,

$$f^* w = \sum_I f^*(a_I) f^* dy_{i_1} \wedge \dots \wedge f^* dy_{i_k}$$

e

$$f^* \bar{w} = \sum_J f^*(b_J) f^* dy_{j_1} \wedge \dots \wedge f^* dy_{j_k}.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} f^*(w \wedge \bar{w}) &= f^*\left(\sum_{I,J} a_I b_J dy_I \wedge dy_J\right) \\ &= \sum_{I,J} (a_I \circ f)(b_J \circ f) f^*(dy_I \wedge dy_J) \\ &= \sum_{I,J} (a_I \circ f)(b_J \circ f) f^* dy_I \wedge f^* dy_J \\ &= \sum_{I,J} (a_I \circ f) f^*(dy_I) \wedge \sum_J (b_J \circ f) f^*(dy_J) \\ &= f^*(w) \wedge f^*(\bar{w}) \end{aligned}$$

□

**Exemplo 1.2.1.** *Forma elemento de ângulo.* Considere a 1-forma  $\alpha$  sobre  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  dada por

$$\alpha(x, y) = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}. \quad (1.14)$$

Claro que  $\alpha(x, y) \cdot v = \frac{-y \cdot v_1 + x \cdot v_2}{x^2 + y^2}$ , para todo vetor  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ . Seja  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  uma aplicação diferenciável definida por

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t).$$

Usando a definição (1.12), obtemos que,

$$\begin{aligned} [(\varphi^* \alpha)(t)](q) &= \alpha(\varphi(t))(\varphi'(t) \cdot q) \\ &= (-\sin t)(-q \sin t) + (\cos t)(q \cos t) \\ &= q \end{aligned}$$

ou seja,  $\varphi^* \alpha = dq$ .

**Exemplo 1.2.2.** *Forma induzida por uma aplicação.* Seja  $w \in \Omega^r(M)$  e  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  uma parametrização de  $M$ . Em cada ponto  $x = \varphi(u) \in U$ , os vetores  $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_m}(u)$  constituem uma base do espaço vetorial tangente  $T_x M$ , cuja dual é  $\{du_1, \dots, du_m\} \subset (T_x M)^*$ . Escrevendo  $du_I = du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_r}$ , com  $I = \{i_1 < \dots < i_r\}$ , temos  $w(x) = \sum_I a_I(u) du_I$ . Denote por  $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$ , onde  $\{dx_1, \dots, dx_m\}$  é a base canônica de  $(\mathbb{R}^m)^*$ , dual de  $\{e_1, \dots, e_m\} \subset \mathbb{R}^m$ . Sabemos que  $\varphi'(u) \cdot e_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u)$ . Segue que

$$\begin{aligned} (\varphi^* du_i)(e_j) &= du_i(\varphi'(u) \cdot e_j) \\ &= du_i \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}(u) \right) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}. \end{aligned}$$

Assim  $\varphi^* du_i = dx_i$ . Além disso, se  $I = \{i_1, \dots, i_r\}$

$$[\varphi^* w(u)](e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}) = w(x) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u_{i_1}}(u), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_{i_r}}(u) \right) = a_I(u).$$

Logo,  $\varphi^* w = \sum_I a_I dx_I$ .

### 1.2.2 Diferencial Exterior

O propósito desta seção é estender a diferencial de funções para uma aplicação

$$d : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$$

para qualquer  $r \geq 0$ .

Iniciaremos com formas em abertos de  $\mathbb{R}^n$ . Para o que segue, as formas consideradas são pelo menos de classe  $C^1$ .

Dado  $w \in \Omega^r(U)$ , usaremos a representação em termos de parametrização na qual podemos escrever

$$w = \sum_I a_I dx_I.$$

Definiremos a *diferencial exterior* de uma forma  $w$  por

$$\begin{aligned} dw &= \sum_I da_I \wedge dx_I \\ &= \sum_{j,I} \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I. \end{aligned}$$

**Observação 1.2.2.** *A diferencial exterior de funções (0-formas) coincide com a definição usual de diferencial no  $\mathbb{R}^m$ .* De fato, se  $w$  é uma 0-forma, ou seja,  $w = a : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  então  $dw = da = \sum_j \frac{\partial a}{\partial x_j} dx_j$ .

Agora veremos algumas propriedades deste operador que serão importantes ao longo deste trabalho.

**Proposição 1.2.2.** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $V \subset \mathbb{R}^n$  abertos,  $w, \bar{w}$  formas diferenciais de classe  $C^1$  definidas em  $V$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^2$  tal que  $f(U) \subset V$ . Então:*

1.  $d(w + \bar{w}) = dw + d\bar{w}$ ;
2. Se  $w \in C^2$  então  $d(dw) = 0$ ;
3.  $d(w \wedge \bar{w}) = dw \wedge \bar{w} + (-1)^{gr w} (w \wedge d\bar{w})$ ;
4.  $d(f^*w) = f^*(dw)$ .

*Demonstração.* 1. Basta observar que se  $w = \sum_I a_I dx_I$  e  $\bar{w} = \sum_J b_J dx_J$  então

$$\begin{aligned} dw + d\bar{w} &= \sum_{j,I} \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I + \sum_{j,L} \frac{\partial a_L}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_L \\ &= \sum_{j,I,L} dx_j \left( \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_I + \frac{\partial b_L}{\partial x_j} dx_L \right) \\ &= d(w + \bar{w}). \end{aligned}$$

2. Seja  $w = \sum_I a_I dx_I$  então  $dw = \sum_{j,I} \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I$ . Daí,

$$\begin{aligned} ddw &= \sum_{k,j,I} \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge (dx_j \wedge dx_I) \\ &= \sum_I \left[ \sum_{k,j} \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge dx_j \right] \wedge dx_I \\ &= \sum_I \left[ \sum_{k < j} \left( \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_j \partial x_k} \right) dx_k \wedge dx_j \right] \wedge dx_I \\ &= 0, \end{aligned}$$

pelo teorema de Schwarz.

3. Sejam  $w = \sum_I a_I dx_I$  e  $\bar{w} = \sum_J b_J dx_J$ . Então,

$$\begin{aligned} d(w \wedge \bar{w}) &= \sum_{r,I,J} \frac{\partial(a_I b_J)}{\partial x_r} dx_r \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{r,I,J} b_J \frac{\partial a_I}{\partial x_r} dx_r \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &\quad + \sum_{r,I,J} a_I \frac{\partial b_J}{\partial x_r} dx_r \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{r,I} \left( \frac{\partial a_I}{\partial x_r} dx_r \wedge dx_I \right) \wedge \sum_J b_J dx_J \\ &\quad + (-1)^{gr w} \left( \sum_I a_I dx_I \right) \wedge \left( \sum_{r,J} \left( \frac{\partial b_J}{\partial x_r} dx_r \wedge dx_J \right) \right) \\ &= dw \wedge \bar{w} + (-1)^{gr w} w \wedge d\bar{w} \end{aligned}$$

4. Se  $w$  é uma 0-forma então, pela regra da cadeia, em todo ponto  $x \in U$  tem-se

$$dg(f(x)).f'(x) = d(g \circ f)(x).$$

Daí, para todo  $v \in \mathbb{R}^m$  temos  $f^*(dg)(x).v = dg(f(x)).f'(x).v$ . Logo  $f^*(dg) = d(g \circ f) = d(f^*g)$ . Agora, considere  $w = \sum_I a_I dx_I$  uma  $r$ -forma,  $r \geq 1$ . Segue que  $f^*w = \sum_I (f^*a_I)(f^*dx_{i_1} \wedge \dots \wedge f^*dx_{i_r}) = \sum_I (f^*a_I) (d(x_{i_1} \circ f) \wedge \dots \wedge d(x_{i_r} \circ f))$ . Portanto,

$$\begin{aligned} d(f^*w) &= \sum_{j,I} \frac{\partial(f^*a_I)}{\partial x_j} dx_j \wedge (d(x_{i_1} \circ f) \wedge \dots \wedge d(x_{i_r} \circ f)) \\ &= \sum_I (f^*(da_I) \wedge (d(x_{i_1} \circ f) \wedge \dots \wedge d(x_{i_r} \circ f))) \\ &= f^*(dw). \end{aligned}$$

□

A seguir, definiremos a diferencial exterior de uma forma em  $M$ . Seja  $w \in \Omega^r(M)$ , classe  $\mathcal{C}^1$ . Para toda parametrização  $\varphi : U_0 \rightarrow U \subset M$ , existe uma única forma  $d_\varphi w$ , de grau  $r + 1$  em  $U$ , tal que  $\varphi^*(d_\varphi w) = d(\varphi^*w)$ . Isto se deve ao fato de que o pull-back  $w \mapsto \varphi^*w$  é uma bijeção das formas em  $U$  sobre as formas em  $U_0$ . Se  $w|_U = \sum_I a_I(u) du_I$  então, pelo exemplo 1.2.2,  $\varphi^*w = \sum_I a_I(u) dx_I$  donde  $d(\varphi^*w) = \sum_I da_I \wedge dx_I$ . Logo, a igualdade  $\varphi^*(d_\varphi w) = d(\varphi^*w)$  significa que  $d_\varphi w = \sum_I da_I \wedge du_I$ .

Vamos verificar que se  $\psi : V_0 \rightarrow V$  é outra parametrização então  $d_\psi w = d_\varphi w$  em  $U \cap V$ . Com efeito, temos que  $\varphi = \psi \circ \xi : \varphi^{-1}(U \cap V) \rightarrow U \cap V$ , onde  $\xi$  é o difeomorfismo de mudança de parâmetro. Logo  $\varphi^* = \xi^* \circ \psi^*$ . Daí, em  $U \cap V$ :

$$\begin{aligned} \varphi^*(d_\psi w) &= \xi^*\psi^*(d_\psi w) \\ &= \xi^*d(\psi^*w) \\ &= d(\xi^*\psi^*w) \\ &= d(\varphi^*w) \\ &= \varphi^*(d_\varphi w). \end{aligned}$$

Portanto  $d_\psi w = d_\varphi w$  em  $U \cap V$ .

Definimos a *diferencial exterior*  $dw$  da forma  $w \in \Omega^r(M)$  como a forma de grau  $r + 1$  em  $M$  cujo valor em cada ponto  $x \in M$  é dado por  $(dw)(x) = (d_\varphi w)(x)$ , onde  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  é qualquer parametrização em  $M$  tal que  $x \in U$ .

Por fim, diremos que uma  $r$ -forma, de classe  $C^1$ ,  $w$  é **fechada** se  $dw = 0$ . Diremos que  $w$  é **exata** quando existe uma forma  $\alpha$  de grau  $r - 1$  e classe  $C^2$  tal que  $d\alpha = w$ . Em virtude da proposição acima, toda forma exata é fechada.

### 1.2.3 Produto Interior

Dado  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , considere a aplicação  $\iota_X : \Omega^{r+1}(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ , definida por

$$[(\iota_X w)(x)](v_1, \dots, v_r) := w(x)(X(x), v_1, \dots, v_r). \quad (1.15)$$

Quando  $w \in \Omega^0(M)$  nós colocaremos  $\iota_X w = 0$ . Esta aplicação é chamada de *produto interior*, ou *contração*, da forma  $w$  pelo campo  $X$ .

**Proposição 1.2.3.** *Se  $w_1 \in \Omega^r(M)$ ,  $w_2 \in \Omega^l(M)$  e  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  então*

$$\iota_Y(w_1 \wedge w_2) = (\iota_Y w_1) \wedge w_2 + (-1)^r w_1 \wedge (\iota_Y w_2). \quad (1.16)$$

*Demonstração.* Dado  $x \in M$ , considere  $\{e_1(x), \dots, e_m(x)\}$  uma base de  $T_x M$  e  $\{e^1(x), \dots, e^m(x)\} \subset (T_x M)^*$  o dual dessa base. Pelo Teorema 1.1.1 é suficiente provarmos para  $w_1 = e^1 \wedge \dots \wedge e^r$  e  $w_2 = e^{r+1} \wedge \dots \wedge e^{r+s}$ ,  $r + s \leq m$ . Observe que, para todo  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,

$$\iota_Y(e^1 \wedge \dots \wedge e^r) = \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \iota_Y(e^j) e^1 \wedge \dots \wedge \widehat{e^j} \wedge \dots \wedge e^r,$$

onde  $\widehat{e^j}$  significa que omitimos o termo  $e^j$ . De fato, para todo  $v_1, \dots, v_{r-1} \in T_x M$ ,

$$\begin{aligned} \iota_Y(e^1 \wedge \dots \wedge e^r)(v_1, \dots, v_{r-1}) &= \det \begin{pmatrix} e^1(Y) & e^1(v_1) & \dots & e^1(v_{r-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^r(Y) & e^r(v_1) & \dots & e^r(v_{r-1}) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} e^j(Y) (e^1 \wedge \dots \wedge \widehat{e^j} \wedge \dots \wedge e^r)(v_1, \dots, v_{r-1}) \\ &= \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \iota_Y(e^j) (e^1 \wedge \dots \wedge \widehat{e^j} \wedge \dots \wedge e^r)(v_1, \dots, v_{r-1}). \end{aligned}$$



Usando este fato obtemos que,

$$\begin{aligned}
\iota_Y(w_1 \wedge w_2) &= \sum_{j=1}^{r+s} (-1)^{j-1} \iota_Y(e^j)(e^1 \wedge \dots \wedge \widehat{e^j} \wedge \dots \wedge e^{r+s}) \\
&= \sum_{l=r+1}^{r+s} (-1)^{l-1} \iota_Y(e^l)(e^1 \wedge \dots \wedge e^r \wedge \dots \wedge \widehat{e^l} \wedge \dots \wedge e^{r+s}) \\
&\quad + \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \iota_Y(e^j)(e^1 \wedge \dots \wedge \widehat{e^j} \wedge \dots \wedge e^r \wedge \dots \wedge e^{r+s}) \\
&= (-1)^r \sum_{l=1}^s (-1)^{l-1} \iota_Y(e^l)(e^1 \wedge \dots \wedge e^r \wedge \dots \wedge \widehat{e^{l+r}} \wedge \dots \wedge e^{r+s}) \\
&\quad + \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} \iota_Y(e^j)(e^1 \wedge \dots \wedge \widehat{e^j} \wedge \dots \wedge e^r \wedge \dots \wedge e^{r+s}) \\
&= (-1)^r w_1 \wedge \iota_Y w_2 + \iota_Y w_1 \wedge w_2
\end{aligned}$$

□

#### 1.2.4 Derivada de Lie de formas

Antes de prosseguir, precisamos de algumas definições. Um *fluxo* numa superfície  $M$  é uma aplicação  $\Phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  tal que para todo  $p \in M$  e  $s, t \in \mathbb{R}$ ,

1.  $\Phi(0, p) = p$ ;
2.  $\Phi(t, \Phi(s, p)) = \Phi(t + s, p)$ .

Um *fluxo local* é uma aplicação  $\Phi: A \rightarrow M$ , onde  $A$  é um aberto com  $A \supset \{0\} \times M$ , que satisfaz as duas propriedades de fluxo no domínio de definição. Algumas vezes escreveremos  $\Phi_t(\cdot)$  ou  $\Phi^t(\cdot)$  para representar o fluxo  $\Phi(t, \cdot)$ . Um fluxo  $\varphi_t$  está associado ao campo  $X$  se

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t) = X \circ \varphi_t.$$

Uma definição dinâmica da derivada de Lie é dada a seguir. Seja  $X$  um campo de vetores, de classe  $\mathcal{C}^1$ , em  $M$  e  $w \in \Omega^r(M)$ . A *derivada de Lie* da forma  $w$  com respeito ao campo  $X$ , e escreveremos  $\mathcal{L}_X$ , é uma  $r$ -forma dada por

$$\mathcal{L}_X(w) := \left. \frac{d}{dt}(\varphi_t^* w) \right|_{t=0} \quad (1.17)$$

onde  $\varphi_t$  é o fluxo local de  $X$ .

**Exemplo 1.2.3.** Se  $w$  é uma 0-forma, ou seja,  $w : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , então, por (1.13),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(w) &= \left. \frac{d}{dt}(\varphi_t^* w) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt}(w \circ \varphi_t) \right|_{t=0} \\ &= dw(X) \\ &= \iota_X dw. \end{aligned}$$

Existe uma fórmula explícita para o cálculo da derivada de Lie de formas, conhecida como *Fórmula de Cartan*. Antes de nós enunciarmos e provarmos esta fórmula, precisamos estabelecer um par de lemas.

**Lema 1.2.1.** *Para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  temos que*

$$\mathcal{L}_X(w_1 \wedge w_2) = (\mathcal{L}_X w_1) \wedge w_2 + w_1 \wedge (\mathcal{L}_X w_2), \quad (1.18)$$

para quaisquer que sejam  $w_1 \in \Omega^r(M)$  e  $w_2 \in \Omega^s(M)$ .

*Demonstração.* Sejam  $w_1 \in \Omega^r(M)$  e  $w_2 \in \Omega^s(M)$ . Considere  $\varphi_t$  o fluxo local de  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Segue do item (c) da Proposição (1.2.1) que

$$\varphi_t^*(w_1 \wedge w_2) = \varphi_t^*(w_1) \wedge \varphi_t^*(w_2). \quad (1.19)$$

Desde que o produto exterior é bilinear, podemos diferenciar a igualdade acima que obtendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(w_1 \wedge w_2) &= \left. \frac{d}{dt} \varphi_t^*(w_1 \wedge w_2) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} (\varphi_t^*(w_1) \wedge \varphi_t^*(w_2)) \right|_{t=0} \\ &= \left( \left. \frac{d}{dt} \varphi_t^*(w_1) \right|_{t=0} \right) \wedge \varphi_0^*(w_2) + \varphi_0^*(w_1) \wedge \left( \left. \frac{d}{dt} \varphi_t^*(w_2) \right|_{t=0} \right) \\ &= (\mathcal{L}_X w_1) \wedge w_2 + w_1 \wedge (\mathcal{L}_X w_2), \end{aligned}$$

onde usamos que  $\varphi_0^* = id$ , já que  $\varphi_0(x) = x \forall x \in M$ . □

**Lema 1.2.2.** *Para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $w \in \Omega^r(M)$  temos que*

$$d\mathcal{L}_X w = \mathcal{L}_X dw. \quad (1.20)$$

*Demonstração.* A partir da definição de derivada de Lie de formas e das propriedades de pull-back, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(dw) &= \left. \frac{d}{dt} (\varphi_t^*(dw)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} (d(\varphi_t^* w)) \right|_{t=0} \\ &= d \left( \left. \frac{d}{dt} (\varphi_t^* w) \right|_{t=0} \right) \\ &= d\mathcal{L}_X w.\end{aligned}$$

□

**Teorema 1.2.1** (Fórmula de Cartan). *Seja  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $w \in \Omega^r(M)$ . Então*

$$\mathcal{L}_X(w) = d(\iota_X w) + \iota_X(dw). \quad (1.21)$$

*Demonstração.* Faremos a prova usando indução sobre o grau da forma  $w$  sobre  $M$ . Seja  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Para 0-formas isso foi feito no Exemplo (1.2.3). Admita que (1.21) seja verdadeira para formas de grau  $r$ . Note que uma  $(r+1)$ -forma pode ser escrita como

$$\sum_i df_i \wedge w_i,$$

onde  $w_i$  é uma  $r$ -forma e  $f_i$  é uma aplicação diferenciável (0-forma), numa vizinhança de  $m \in M$ . Pelo Lema (1.2.1) temos que

$$\mathcal{L}_X(df \wedge w) = (\mathcal{L}_X df) \wedge w + df \wedge (\mathcal{L}_X w)$$

Por outro lado, juntando a hipótese de indução, a Proposição (1.2.3) e as propriedades de produto exterior de formas, obtemos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}\iota_X d(df \wedge w) + d\iota_X(df \wedge w) &= -\iota_X(df \wedge dw) + d((\iota_X df) \wedge w - df \wedge (\iota_X w)) \\ &= -\iota_X df \wedge dw + df \wedge \iota_X dw + d(\iota_X df) \wedge w + \iota_X df \wedge dw \\ &\quad + df \wedge d\iota_X w \\ &= df \wedge \mathcal{L}_X w + d\mathcal{L}_X f \wedge w.\end{aligned}$$

Usando o Lema (1.2.2), segue-se o resultado. □

A derivada de Lie pode ser usada na descrição da variação de formas diferenciais, como veremos no resultado seguinte.

**Teorema 1.2.2** (Teorema da Derivada de Lie). *Seja  $\varphi_t : M \rightarrow M$  o fluxo associado ao campo  $X$ . Então*

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^* w) = \varphi_t^*(\mathcal{L}_X w), \quad (1.22)$$

para toda  $w \in \Omega^r(M)$ .

*Demonstração.* Faremos a prova usando indução sobre o grau da forma  $w$  sobre  $M$ . Se  $w$  é uma 0-forma em  $M$  então,  $\forall m \in M$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_t^*(\mathcal{L}_X w)(m) &= (\mathcal{L}_X w)(\varphi_t(m)) \\ &= \left( \frac{d}{dt}(\varphi_t^* w)|_{t=0} \right)(\varphi_t(m)) \\ &= \left( \frac{d}{dt}(w \circ \varphi_t)|_{t=0} \right)(\varphi_t(m)) \\ &= \frac{dw}{dt}(\varphi_t(m)) X(\varphi_t(m)) \\ &= \frac{d}{dt}(w \circ \varphi_t)(m) \\ &= \frac{d}{dt}(\varphi_t^* w)(m). \end{aligned}$$

Suponha que (1.22) seja verdadeira para formas de grau  $r$  em  $M$ . Assim como fizemos anteriormente, escrevemos uma  $(r+1)$ -forma como

$$\sum_i df_i \wedge w_i,$$

onde  $w_i$  é uma  $r$ -forma e  $f_i$  é uma aplicação diferenciável (0-forma), numa vizinhança de  $m \in M$ .

Usando o item (c) da Proposição 1.2.1 temos que

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^*(df \wedge w)) = \frac{d}{dt}(\varphi_t^* df \wedge \varphi_t^* w).$$

Por outro lado, juntando a bilinearidade do produto exterior, hipótese de indução e as propriedades de pull-back teremos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi_t^* df \wedge \varphi_t^* w) &= d\left(\frac{d}{dt}\varphi_t^* f\right) \wedge \varphi_t^* w + \varphi_t^* df \wedge \varphi_t^* \mathcal{L}_X w \\ &= d(\varphi_t^* \mathcal{L}_X f) \wedge \varphi_t^* w + \varphi_t^* df \wedge \varphi_t^* \mathcal{L}_X w \\ &= \varphi_t^* d(\mathcal{L}_X f) \wedge \varphi_t^* w + \varphi_t^*(df \wedge \mathcal{L}_X w) \\ &= \varphi_t^*(d\mathcal{L}_X f \wedge w + df \wedge \mathcal{L}_X w) \\ &= \varphi_t^* \mathcal{L}_X(df \wedge w) \end{aligned}$$

Isto finaliza a prova.  $\square$

**Observação 1.2.3.** Usando a mesma notação do Teorema 1.2.2, a equação (1.22) pode ser generalizada para tratar, ainda, a variação de formas diferenciais tempo-dependentes  $w_t$ :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\varphi_t^* w_t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{t+h}^* w_{t+h} - \varphi_t^* w_t}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \varphi_h^* \frac{(\varphi_t^* w_{t+h} - \varphi_t^* w_t)}{h} + \frac{\varphi_{t+h}^* w_t - \varphi_t^* w_t}{h} \right) \\
&= \frac{d}{dy}(\varphi_t^* w_y) \Big|_{y=t} + \frac{d}{dx}(\varphi_x^* w_t) \Big|_{x=t} \\
&= \varphi_t^* \left( \frac{dw_y}{dy} \Big|_{y=t} + \varphi_t^*(\mathcal{L}_X w_t) \right) \\
&= \varphi_t^* \left( \frac{dw_t}{dt} + \mathcal{L}_X w_t \right)
\end{aligned}$$

**Corolário 1.2.1.** Se  $\varphi_t$  é o fluxo local associado a  $X$  então, para toda forma  $w$ ,

$$\mathcal{L}_X w = 0 \Leftrightarrow \varphi_t^* w = w, \quad (1.23)$$

$\forall t$  onde  $\varphi_t$  está definido.

*Demonstração.* Pelo Teorema 1.2.1, temos que  $\frac{d}{dt} \varphi_t^* w = \varphi_t^* 0 = 0$ . Logo  $\varphi_t^* w = c \forall t$ . Desde que  $c = \varphi_0^* w = w$ , tem-se  $\varphi_t^* w = w$ .

Reciprocamente, se  $\varphi_t^* w = w$  para todo  $t$ , então  $\frac{d}{dt} \varphi_t^*(w) = 0, \forall t$ . Em particular,  $\mathcal{L}_X w = \frac{d}{dt}(\varphi_t^*(w))|_{t=0} = 0$ .  $\square$

### 1.3 Partição da unidade

Seja  $f$  uma aplicação definida em  $M$ . O suporte de  $f$  é o conjunto  $\overline{\{m \in M : f(m) \neq 0\}}$ . Denotaremos este conjunto por  $\text{supp. } f$ . Dizemos que  $f$  tem suporte compacto se  $\text{supp. } f$  é compacto em  $M$ .

Uma coleção de subconjuntos  $\{C_\lambda\}$  de  $M$  é dita *localmente finita* se para cada  $m \in M$  existe uma vizinhança  $U$  de  $m$  em  $M$  tal que  $U \cap C_\lambda = \emptyset$  exceto para uma quantidade finita de índices  $\lambda$ .

**Definição 1.3.1.** Seja  $M$  uma superfície de classe  $C^k$ . Uma partição da unidade de classe  $C^k$  em  $M$  é uma família de funções  $\xi = (\xi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  de classe  $C^k$  em  $M$  tais que:

1. Para quaisquer  $\lambda \in \Lambda$  e  $x \in M$ , tem-se  $\xi_\lambda(x) \geq 0$ ;
2. A família  $C = (\text{supp.}\xi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  é localmente finita;
3. Para todo  $x \in M$ ,  $\sum_{\lambda \in \Lambda} \xi_\lambda(x) = 1$ .

Dizemos que a partição da unidade  $\sum_{\alpha \in \Lambda} \xi_\alpha = 1$  está *subordinada* à cobertura  $C = (C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda'}$  da superfície  $M$  quando para cada  $\alpha \in \Lambda$  existe algum  $\lambda \in \Lambda'$  tal que  $\text{supp } \xi_\alpha \subset C_\lambda$ . Dizemos que a partição da unidade  $\sum_{\alpha \in \Lambda} \xi_\alpha = 1$  está *estritamente subordinada* à cobertura  $C = (C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  quando tem índices no mesmo conjunto que as funções  $\xi_\alpha$  e, além disso,  $\text{supp } \xi_\alpha \subset C_\alpha$  para todo  $\alpha \in \Lambda$ .

**Teorema 1.3.1.** *Seja  $M$  uma superfície de classe  $C^k$ . Para toda cobertura aberta  $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  de  $M$  existe uma partição da unidade  $\sum_{\lambda \in \Lambda} \xi_\lambda = 1$  de classe  $C^k$ , estritamente subordinada à cobertura  $\mathcal{C}$ .*

*Demonstração.* Ver [10]. □

Com esta ferramenta podemos provar o próximo resultado.

**Proposição 1.3.1** (Critério de orientabilidade). *Uma superfície  $n$ -dimensional  $M$  é orientável se, e somente se, existir uma forma de volume em  $M$ .*

*Demonstração.* Seja  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  uma orientação para  $M$  e  $\{p_\alpha\}$  uma partição da unidade subordinada a  $U_\alpha$ . Assuma que todos os  $U_\alpha$  são conexos. Defina

$$w = \sum_{\alpha} p_\alpha \cdot (\phi_\alpha^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n))$$

Basta mostrar que  $w_x \neq 0$  para todo  $x \in M$ . Fixe  $x \in M$ . Então  $p_\alpha(x) \neq 0$  para uma quantidade finita de índices  $\alpha$ , digamos  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ . Daí, juntando a condição de orientabilidade e a observação 1.2.1,

$$\begin{aligned} (\phi_{\alpha_1}^{-1})^* w &= \sum_{i=1}^k (\phi_{\alpha_i}^{-1})^* (p_{\alpha_i} \cdot (\phi_{\alpha_i}^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n))) \\ &= \sum_{i=1}^k (p_{\alpha_i} \circ \phi_{\alpha_i}^{-1}) [(\phi_{\alpha_i} \circ \phi_{\alpha_i}^{-1})^* dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n] \\ &= \sum_{i=1}^k (p_{\alpha_i} \circ \phi_{\alpha_i}^{-1}) [\det d(\phi_{\alpha_i} \circ \phi_{\alpha_i}^{-1})] dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Logo  $w_x \neq 0 \forall x \in M$ .

Reciprocamente, seja  $w$  uma forma de volume em  $M$ . Vamos produzir uma orientação  $\{V_\beta, \varphi_\beta\}$  para  $M$  do seguinte modo: Considere  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  uma atlas para  $M$ . Podemos assumir que todos  $U_\alpha$  são conexos. Então  $(\phi_\alpha^{-1})^*w = f_\alpha(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ , para alguma  $f_\alpha$ . Desde que  $w$  é não-nula então  $f_\alpha \neq 0$  e como  $U_\alpha$  é conexo,  $f_\alpha(x) > 0 \forall x \in U_\alpha$  ou  $f_\alpha(x) < 0 \forall x \in U_\alpha$ . Se  $f_\alpha(x) > 0$  defina  $V_\alpha = U_\alpha$  e  $\varphi_\alpha = \phi_\alpha$ . Caso contrário, defina  $V_\alpha = U_\alpha$  e  $\varphi_\alpha = T \circ \phi_\alpha$  onde  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dada por  $T(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Vamos verificar que isto define uma orientação em  $M$ . Para tanto, sejam  $\alpha, \beta$  tais que  $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ . Como  $(\phi_\alpha^{-1})^*w = f_\alpha(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  então  $(\phi_\alpha^*)(\phi_\alpha^{-1})^*w = f_\alpha \circ \phi_\alpha(x)\phi_\alpha^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$ , ou seja,

$$\phi_\alpha^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \frac{w}{f_\alpha \circ \phi_\alpha(x)},$$

para todo  $\alpha$ . Daí,

$$(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \frac{f_\alpha}{f_\beta \circ \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Por outro lado, pela observação 1.2.1,

$$(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \det(d(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Logo

$$\det(d(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})) = \frac{f_\alpha}{f_\beta \circ \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}} > 0$$

como queríamos demonstrar. □

## 1.4 Integração de formas

Nesta seção nós definiremos a “*integração*” de uma  $n$ -forma numa superfície  $n$ -dimensional. Primeiro consideraremos o caso de um subconjunto aberto conexo  $U \subset \mathbb{R}^n$  com coordenadas  $x_1, \dots, x_n$ .

Para uma forma  $w$  defina o suporte de  $w$ ,  $\text{supp. } w$ , pelo conjuntos  $\overline{\{x : w(x) \neq 0\}}$ .

Seja  $w$  uma  $n$ -forma em  $U \subset \mathbb{R}^n$  com suporte compacto. Note então que  $w$  estende-se para todo  $\mathbb{R}^n$  por 0 com suporte em algum cubo. Sabemos que  $w$  pode ser escrita como

$$w = f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

para alguma função  $f$ . Portanto nós podemos definir

$$\int_U w = \int_{\mathbb{R}^n} w = \int \int \dots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (1.24)$$

onde a integral do lado direito é a integral de Riemann usual. Para esta definição fazer sentido necessitamos que  $f$  seja Riemann-integrável com suporte compacto.

Agora, suponha que  $W \in \mathbb{R}^n$  é outro conjunto aberto e  $h : W \rightarrow U$  seja um difeomorfismo. Já vimos na seção 1.2.1 que

$$h^*w = (f \circ h) \det(h') dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Conseqüentemente, pelo Teorema de mudança de variável,

$$\begin{aligned} \int h^*w &= \int \int \dots \int_{\mathbb{R}^n} f(h(x_1, \dots, x_n)) \det(h'(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \dots dx_n \\ &= \pm \int \int \dots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ &= \pm \int w, \end{aligned}$$

onde o sinal é o sinal de  $\det(h')$ .

Assuma que  $M$  seja uma superfície  $n$ -dimensional orientada, com a orientação positiva. Usaremos somente cartas nesta orientação. Seja  $w$  uma  $n$ -forma na qual seu suporte está contido num conjunto aberto  $U$  domínio de uma carta  $\phi : U \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ . Sabemos que  $(\phi^{-1})^*w$  é uma  $n$ -forma em  $W \subset \mathbb{R}^n$ . Assim nós definiremos

$$\int_M w = \int_{\mathbb{R}^n} (\phi^{-1})^*w. \quad (1.25)$$

Para mostrar que esta definição independe da escolha da carta, seja  $\psi$  outra carta e denote  $h := \psi \circ \phi^{-1}$ . Então  $\psi^{-1} \circ h = \phi^{-1}$  e pelo que vimos anteriormente

$$\begin{aligned} \int (\phi^{-1})^*w &= \int (\psi^{-1} \circ h)^*w \\ &= \int (\psi^{-1})^*w \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Agora seja  $w$  uma  $n$ -forma arbitrária em  $M$  com suporte compacto  $K$ . Seja  $\{U_i\}$  uma cobertura localmente finita de  $M$  e  $\{f_i\}$  uma partição da unidade subordinada a esta cobertura. Note que o conjunto  $K$  intersecta somente uma quantidade finita dos  $U_i$ . Nós definimos

$$\int w = \sum_i \int f_i \cdot w. \quad (1.26)$$



Vamos mostrar que isto está bem definido. Considere  $\{g_j\}$  uma outra tal partição. Então  $1 = \sum_{i,j} f_i g_j$ . Segue que  $f_i = f_i \sum_j g_j = \sum_j f_i g_j$ . Daí,

$$\int f_i w = \sum_j \int f_i g_j w.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int w &= \sum_i \int f_i w \\ &= \sum_i \sum_j \int f_i g_j w \\ &= \sum_j \int g_j w \end{aligned}$$

como queríamos.

Agora, consideremos  $M$  e  $N$  duas superfícies  $n$ -dimensionais conexas e orientáveis e  $\varphi : M \rightarrow N$  um difeomorfismo que preserva a orientação<sup>2</sup>. Se  $w \in \Omega^n(N)$  tem suporte compacto então

$$\int_M \varphi^* w = \int_N w$$

De fato, seja  $\{U_i\}$  uma cobertura localmente finita de  $M$  com cada  $U_i$  domínio de uma carta, que denotaremos por  $\psi_i$ , e  $\{f_i\}$  uma partição da unidade subordinada a esta cobertura. Automaticamente,  $\{\varphi(U_i)\}$  é uma cobertura localmente finita de  $N$  com cada  $\varphi(U_i)$  domínio da carta  $\psi_i \circ \varphi^{-1}$  e  $\{f_i \circ \varphi^{-1}\}$  é uma partição da unidade subordinada à cobertura  $\{\varphi(U_i)\}$ . De acordo com a definição de integração que vimos aqui, temos que

$$\begin{aligned} \int_N w &= \sum_i \int_N f_i \circ \varphi^{-1} \cdot w \\ &= \sum_i \int_{\varphi(U_i)} f_i \circ \varphi^{-1} \cdot w \\ &= \sum_i \int_{\psi_i(U_i)} (f_i \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi_i^{-1}) \cdot (\varphi \circ \psi_i^{-1})^* w \\ &= \sum_i \int_{\psi_i(U_i)} (f_i \circ \psi_i^{-1}) \cdot (\psi_i^{-1})^* \circ \varphi^* w \\ &= \sum_i \int_M f_i \cdot \varphi^* w \\ &= \int_M \varphi^* w. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Preservar orientação significa que para toda carta positiva  $\psi$  em  $M$ ,  $\psi \circ \varphi^{-1}$  é uma carta positiva em  $N$ .

Consequentemente, como todo aberto  $A \subset M$  pode ser considerado uma superfície  $n$ -dimensional conexa e  $\varphi : A \rightarrow \varphi(A)$  um difeomorfismo, segue que

$$\int_A \varphi^* w = \int_{\varphi(A)} w. \quad (1.27)$$

Chamaremos  $\mathbb{R}_j^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_j \geq 0\}$  de  $j$ -ésimo *semi-espaço* de  $\mathbb{R}^n$ . Um conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  chama-se *superfície com bordo* (de dimensão  $m$  e classe  $\mathcal{C}^k$ ) quando cada ponto  $x \in M$  pertence a um aberto  $U \subset M$  que é imagem de uma parametrização  $\varphi : U_0 \rightarrow U$ , de classe  $\mathcal{C}^k$ , numa aberto  $U_0$  de algum semi-espaço de  $\mathbb{R}^m$ .

O bordo (ou fronteira) de  $M$  é o conjunto  $\partial M$  formados pelos pontos  $x \in M$  tais que, para toda parametrização  $\varphi : U_0 \rightarrow U$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , de um aberto  $U \subset M$ , com  $x = \varphi(u)$ , tem-se necessariamente  $u \in \partial U_0$ .

**Observação 1.4.1.** *Sempre que dissermos simplesmente “superfície”, sem qualificações, estaremos nos referindo a uma superfície sem bordo, de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .*

Finalizaremos esta seção enunciando o Teorema de Stokes cuja prova pode ser encontrada em [3].

**Teorema 1.4.1** (Stokes). *Seja  $M$  uma superfície  $n$ -dimensional orientável com bordo e  $w$  uma  $(n-1)$ -forma em  $M$  com suporte compacto. Então*

$$\int_M dw = \int_{\partial M} w. \quad (1.28)$$

## 1.5 Topologias $\mathcal{C}^k$

Considere  $\mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^s)$  o espaço das aplicações contínuas de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $0 \leq k < \infty$ , definidas em uma superfície compacta  $M$ . As operações usuais de soma e produto de funções tornam  $\mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^s)$  um espaço vetorial. Seja  $V_1, \dots, V_n$  uma cobertura de  $M$  tal que cada  $V_i$  esteja contida no domínio de uma carta local  $\{x_i, U_i\}$  com  $x_i(U_i) = B(2)$  e  $x_i(V_i) = B(1)$ . Estas escolhas são sempre possíveis, ver [10]. Para  $f \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^s)$  denote por  $f^i := f \circ x_i^{-1} : B(2) \rightarrow \mathbb{R}^s$ . Definiremos

$$\|f\|_{\mathcal{C}^k} = \max_i \sup_{u \in B(1)} \{\|f^i(u)\|, \|Df^i(u)\|, \dots, \|D^k f^i(u)\|\}.$$

Na definição acima, considere  $\|D^k f^i(u)\| = \sup\{\|D^k f^i(u)(v_1, \dots, v_k)\|; \|v_i\| = 1, 1 \leq i \leq k\}$ ,  $k \geq 1$ .

**Proposição 1.5.1.**  $\| \cdot \|_{C^k}$  é uma norma.

*Demonstração.* Como estamos tomando o supremo de elementos não-negativos, temos que  $\|f\|_{C^k} \geq 0$ . Além disso, se  $\|f\|_{C^k} = 0$  então  $\|f^i\|_{C^k} \leq \|f\|_{C^k} = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Daí,  $0 = f \circ x_i^{-1}(B(1)) = f(V_i)$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Logo  $f \equiv 0$ . É claro que  $\|\alpha f\|_{C^k} = |\alpha| \|f\|_{C^k}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ . Agora, dados  $f, g \in C^k(M, \mathbb{R}^s)$  temos que

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{C^k} &= \max_i \sup_{u \in B(1)} \{ \|f^i + g^i(u)\|, \|Df^i(u) + Dg^i(u)\|, \dots, \|D^k f^i(u) + D^k g^i(u)\| \} \\ &\leq \max_i [ \sup_{u \in B(1)} \{ \|f^i(u)\|, \|Df^i(u)\|, \dots, \|D^k f^i(u)\| \} \\ &\quad + \sup_{u \in B(1)} \{ \|g^i(u)\|, \|Dg^i(u)\|, \dots, \|D^k g^i(u)\| \} ] \\ &= \|f\|_{C^k} + \|g\|_{C^k}. \end{aligned}$$

Logo  $\| \cdot \|_{C^k}$  é de fato uma norma. □

Veremos na proposição abaixo que com esta norma o espaço das aplicações de classe  $C^k$  definidas numa superfície compacta  $M$  é completo.

**Proposição 1.5.2.**  $C^k(M, \mathbb{R}^s)$  com a norma  $\| \cdot \|_{C^k}$  é um espaço vetorial completo.

*Demonstração.* Devemos mostrar que, nesta norma, toda seqüência de Cauchy em  $C^k(M, \mathbb{R}^s)$  converge para algum elemento desse espaço. Seja  $f_\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}^s$  uma seqüência de Cauchy na norma  $\| \cdot \|_{C^k}$ . Dado  $p \in M$ , existe  $l \in 1, \dots, n$  tal que  $p \in V_l$  e para algum  $u \in B(1)$  temos que

$$f_\lambda(p) = f \circ x_l^{-1}(u).$$

Daí,

$$\|f_\lambda(p) - f_{\tilde{\lambda}}(p)\| \leq \|f_\lambda - f_{\tilde{\lambda}}\|_{C^k} < \varepsilon,$$

Esta desigualdade diz que  $f_\lambda(p)$  é uma seqüência de Cauchy em  $\mathbb{R}^s$  e portanto converge. Denote  $f(p) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_\lambda(p)$ . Em particular,  $f_\lambda^i(u) \rightarrow f^i(u)$  para todo  $u \in B(1)$  e  $i = 1, \dots, n$ . Por outro lado, para cada  $u \in B(1)$ ,  $Df_\lambda^i(u)$  é uma seqüência de Cauchy em  $L(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^s)$  e, por conseguinte, converge para uma transformação linear  $T^i(u)$ . Vamos mostrar que tal convergência é uniforme. Com efeito, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{Z}$  tal que se  $\lambda_1, \lambda_2 > n_0$  então

$$\|Df_{\lambda_1}^i(u) - Df_{\lambda_2}^i(u)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall u \in B(1).$$

Como, para cada  $u \in B(1)$ ,  $Df_\lambda^i(u) \rightarrow T^i(u)$  então existe  $n_1 \in \mathbb{Z}$  que depende de  $u$  tal que se  $m \geq n_1$  então

$$\|Df_m^i(u) - T^i(u)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, para  $\lambda > \max\{n_0, n_1\}$ ,

$$\begin{aligned} \|Df_\lambda^i(u) - T^i(u)\| &\leq \|Df_\lambda^i(u) - Df_m^i(u)\| + \|Df_m^i(u) - T^i(u)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Pelo Teorema de derivação termo a termo, ver [10], temos que  $f^i$  é  $\mathcal{C}^1$  e  $Df^i = T^i$ . Segue que  $f_n \rightarrow f$  na norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}$ . Com a mesma argumentação, mostramos, por indução, que  $f \in \mathcal{C}^k$  e  $f_n \rightarrow f$  na norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^k}$ .  $\square$

## Capítulo 2

# Cohomologia de DE RHAM

Neste capítulo, salvo menção ao contrário,  $M, N$  e  $P$  denotarão superfícies contidas no  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.1 Definição

Dizemos que duas formas fechadas  $w_1, w_2 \in \Omega^r(M)$  são *cohomólogas*, e escrevemos  $w_1 \sim w_2$ , se existir alguma forma  $\lambda \in \Omega^{r-1}(M)$  tal que  $w_1 - w_2 = d\lambda$ . Vamos verificar que tal relação é de equivalência. Sejam  $w_1, w_2, w_3 \in \Omega^r(M)$  formas fechadas então:

- $w_1 \sim w_1$  pois se  $\lambda$  é uma  $(r-1)$ -forma fechada então  $w_1 - w_1 = 0 = d\lambda$ ;
- Se  $w_1 \sim w_2$  e  $w_2 \sim w_3$  então  $w_1 \sim w_3$  pois existem  $\lambda, \tilde{\lambda} \in \Omega^{r-1}(M)$  tais que  $w_1 - w_2 = d\lambda$  e  $w_2 - w_3 = d\tilde{\lambda}$  implicando que  $w_1 - w_3 = d(\lambda + \tilde{\lambda})$ ;
- Se  $w_1 \sim w_2$  então  $w_2 \sim w_1$  pois como existe  $\lambda \in \Omega^{r-1}(M)$  tal que  $w_1 - w_2 = d\lambda$ , basta tomar  $\lambda' = -\lambda$  para obter  $w_2 - w_1 = d\lambda'$ .

Deste modo, se  $w \in \Omega^r(M)$  é forma fechada, denotaremos por

$$[w] = \{w + d\lambda; \lambda \in \Omega^{r-1}(M)\}$$

a sua classe de cohomologia. Repare que a classe  $[0]$  é a coleção das  $r$ -formas exatas sobre  $M$ .

**Proposição 2.1.1.** *O conjunto  $H_{dR}^r(M) = \{[w] : w \in \Omega^r(M) \text{ com } dw = 0\}$  forma um grupo aditivo, para todo  $r > 0$ .*

*Demonstração.* Sabemos que se  $w_1, w_2$  são formas fechadas em  $M$  então  $w_1 + w_2$  é forma fechada pois  $d(w_1 + w_2) = dw_1 + dw_2 = 0$ . Assim, definiremos a operação de adição da maneira natural, ou seja, dadas  $w_1, w_2$  são formas fechadas em  $M$  então  $[w_1] + [w_2] = [w_1 + w_2]$ . Logo, as seguintes propriedades são facilmente verificadas:

- i)  $([w_1] + [w_2]) + [w_3] = [w_1] + ([w_2] + [w_3]), \forall w_1, w_2, w_3 \in \Omega^r(M)$  formas fechadas;
- ii)  $[w] + [0] = [0] + [w] = [w], \forall w \in \Omega^r(M)$  forma fechada;
- iii) Para toda  $w \in \Omega^r(M)$  forma fechada,  $[-w]$  é o seu inverso.

Portanto,  $H_{dR}^r(M)$  é, de fato, um grupo. □

O grupo  $H_{dR}^r(M)$  é chamado de  $r$ -ésimo grupo de cohomologia de DE RHAM de  $M$ . Algumas vezes escrevermos simplesmente grupos de DE RHAM.

Por convenção e pela Proposição 1.1.2 temos que  $H_{dR}^r(M)$  é o grupo nulo<sup>1</sup> se  $r < 0$  ou  $r > \dim M$ . Como não existe forma de grau  $-1$ , temos que  $H_{dR}^0(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ diferenciáveis}; df = 0\}$ . Notemos que se  $df = 0$  então  $f$  é localmente constante. Se  $M$  for conexa então  $f$  é constante e portanto  $H_{dR}^0(M) \cong \mathbb{R}$ . Mas adiante calcularemos  $H_{dR}^0(M)$  quando  $M$  não for conexa. Decorre da definição que se  $H_{dR}^r(M) = 0$  então toda  $r$ -forma fechada é exata, para  $0 < r \leq \dim M$ .

Note que existe um produto  $H_{dR}^p(M) \times H_{dR}^q(M) \rightarrow H_{dR}^{p+q}(M)$  dado por  $[w] \times [\eta] \mapsto [w \wedge \eta]$ . Vamos verificar que este produto está bem definido. Ora, se  $w$  e  $\eta$  são formas fechadas, de graus  $p$  e  $q$ , respectivamente, então, pela Proposição 1.2.2,

$$\begin{aligned} (w + d\lambda_1) \wedge (\eta + d\lambda_2) &= w \wedge \eta + w \wedge d\lambda_2 + d\lambda_1 \wedge \eta + d\lambda_1 \wedge d\lambda_2 \\ &= w \wedge \eta + d\theta \end{aligned}$$

onde  $\theta = (-1)^{-gr} w \wedge \lambda_2 + \lambda_1 \wedge \eta + \lambda_1 \wedge d\lambda_2$ . Deste modo,  $[w + d\lambda_1] \times [\eta + d\lambda_2] = [w] \times [\eta]$ , ficando provado que a aplicação acima está bem definida. Assim, dada uma classe  $[w]$ , denotaremos  $[w]^n := [w] \times \cdots \times [w]$ .

Na seção 1.2.1, vimos que uma aplicação diferenciável  $G : M \rightarrow N$  induz uma aplicação  $G^* : \Omega^r(N) \rightarrow \Omega^r(M)$ , que a chamamos de pull-back. Além disso, pela Proposição 1.2.2, segue que

- Se  $w \in \Omega^r(N)$  é fechada então  $G^*w$  é forma fechada pois  $d(G^*w) = G^*(dw) = 0$ ;

<sup>1</sup> Algumas vezes usaremos "0" para denotar este grupo.

- Se  $w = d\lambda$  é exata então  $(G^*w) = G^*(d\lambda) = d(G^*\lambda)$ .

Existe ainda uma outra aplicação induzida de  $H_{dR}^r(N)$  em  $H_{dR}^r(M)$ , que continuaremos a denotar por  $G^*$ , em que se  $w \in \Omega^r(N)$  é forma fechada então

$$G^*[w] = [G^*w].$$

Chamaremos esta aplicação de *aplicação cohomóloga induzida*. Perceba que se  $w' = w + d\lambda$  então  $[G^*w'] = [G^*w + d(G^*\lambda)] = [G^*w]$ . Assim esta aplicação está bem definida. A partir do que já sabemos de pull-back, segue as seguintes propriedades:

P1. Se  $F : N \rightarrow P$  é outra aplicação diferenciável então

$$(F \circ G)^* = G^* \circ F^* : H_{dR}^r(P) \rightarrow H_{dR}^r(M).$$

P2. Se  $Id_M$  denota a aplicação identidade de  $M$  então  $(Id_M)^*$  é a aplicação identidade de  $H_{dR}^r(M)$ .

**Observação 2.1.1.** *Superfícies difeomorfas têm grupos de cohomologia de DE RHAM isomorfos.*

Com efeito, se  $F : M \rightarrow N$  é difeomorfismo então  $F^* : \Omega^r(N) \rightarrow \Omega^r(M)$  é um isomorfismo. Assim, a aplicação cohomóloga induzida  $F^* : H_{dR}^r(N) \rightarrow H_{dR}^r(M)$  também é isomorfismo.

**Exemplo 2.1.1.** *Os grupos de DE RHAM do círculo  $\mathbb{S}^1$  são*

$$H_{dR}^r(\mathbb{S}^1) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } r = 0, 1. \\ 0, & \text{se } r > 1. \end{cases}$$

Sendo  $\mathbb{S}^1$  é conexo então  $H_{dR}^0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$ . Ademais,  $H_{dR}^r(\mathbb{S}^1) = 0$  para  $r > 1$ . Falta apenas  $H_{dR}^1(\mathbb{S}^1)$ .

Seja  $\alpha$  a 1-forma elemento de ângulo<sup>2</sup> sobre  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Considerando a aplicação inclusão  $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow U$ , temos que  $i^*\alpha$  é uma 1-forma em  $\mathbb{S}^1$ . Segue que

$$\int_{\mathbb{S}^1} i^*\alpha = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \quad (2.1)$$

Deste modo,  $i^*\alpha$  não pode ser uma forma exata pois se existisse uma 0-forma  $\lambda$  tal que  $i^*\alpha = d\lambda$  então pelo Teorema de Stokes

$$\int_{\mathbb{S}^1} i^*\alpha = \int_{\mathbb{S}^1} d\lambda = 0$$

---

<sup>2</sup>Vimos a definição dessa forma no exemplo 1.2.1.

e isto contraria (2.1). Mais ainda, toda 1-forma  $w$  sobre  $\mathbb{S}^1$  é fechada pois  $dw$  é uma 2-forma em  $\mathbb{S}^1$  e pela Proposição 1.1.2 tem-se  $dw = 0$ .

Assuma, por um momento, que se  $\lambda$  é uma 1-forma então  $\lambda - kd\theta$  é exata para algum  $k \in \mathbb{R}$ . Deste modo, toda 1-forma sobre  $\mathbb{S}^1$  difere de um múltiplo real de  $d\theta$  por uma forma exata. Conseqüentemente,  $H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}$ .

Vamos provar o que assumimos anteriormente. Escreva  $\lambda = f(\theta)d\theta$  e seja  $k = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} \lambda$ . Considere a seguinte função

$$g(\theta) = \int_0^\theta (f(\theta) - k)d\theta.$$

Note que  $g(0) = g(2\pi)$ . Ademais,  $dg = (f(\theta) - k)d\theta = \lambda - kd\theta$ .

## 2.2 Invariância homotópica

Nesta seção faremos uma generalização da observação 2.1.1, na qual mostraremos que os grupos de DE RHAM são topologicamente invariantes. Na verdade eles são algo mais, são *homotopicamente invariantes*.

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Diremos que duas aplicações contínuas  $f, g : X \rightarrow Y$  são *homotópicas*, e escreveremos  $f \simeq g$ , se existir uma aplicação contínua  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tal que  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$  para todo  $x \in X$ .

Uma aplicação contínua  $F : X \rightarrow Y$  é dita ser uma *equivalência homotópica* se existir uma aplicação contínua  $G : Y \rightarrow X$  tal que  $F \circ G \simeq Id_Y$  e  $G \circ F \simeq Id_X$ . Tal aplicação  $G$  é chamada *homotopia inversa* de  $F$ . Quando existir uma equivalência homotópica entre  $X$  e  $Y$  diremos que eles são homotopicamente equivalentes e escreveremos  $X \simeq Y$ .

**Exemplo 2.2.1.**  $\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $n \geq 1$ .

De fato, a aplicação inclusão  $i : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  é uma equivalência homotópica com homotopia inversa  $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$  pois  $r \circ i = Id_{\mathbb{S}^{n-1}}$  e a aplicação identidade de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  é homotópica a  $i \circ r$  via a homotopia  $H(x, t) = tx + (1-t)\frac{x}{\|x\|}$ .

**Teorema 2.2.1** (Invariância homotópica dos grupos de DE RHAM). *Se  $M$  e  $N$  são superfícies homotopicamente equivalente então  $H_{dR}^r(M)$  é isomorfo a  $H_{dR}^r(N)$  para cada  $r$ .*

*Demonstração.* Ver [8]. □



Em particular, os grupos de DE RHAM de duas superfícies homeomorfas são também isomorfos pois todo homeomorfismo é uma equivalência homotópica.

## 2.3 Alguns exemplos

O cálculo direto dos grupos de DE RHAM não é nada fácil em geral. Dedicaremos esta seção em calcular alguns casos particulares, tais como  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{S}^n$ .

Começemos com uniões disjuntas.

**Proposição 2.3.1** (Cohomologia de uniões disjuntas). *Seja  $M_j$  uma coleção enumerável de superfícies disjuntas e  $M = \bigcup_j M_j$ . Para cada  $r$ , a aplicação inclusão  $i_j : M_j \hookrightarrow M$  induz um isomorfismo de  $H_{dR}^r(M)$  para  $\prod_j H_{dR}^r(M_j)$ .*

*Demonstração.* Os pull-backs  $i_j^* : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(M_j)$  induzem uma aplicação entre  $\Omega^r(M)$  e  $\prod_j \Omega^r(M_j)$ , a saber:

$$\begin{aligned} i^* : \Omega^r(M) &\rightarrow \prod_j \Omega^r(M_j) \\ w &\mapsto (i_1^* w, i_2^* w, \dots) = (w|_{M_1}, w|_{M_2}, \dots). \end{aligned}$$

Vamos verificar que esta aplicação é, de fato, um isomorfismo. Note que para qualquer  $r$ -forma  $w$  tal que  $w|_{M_j} = 0$  para cada  $j$  então  $w \equiv 0$ . Isso prova a injetividade. Agora, seja  $(w_1, w_2, \dots)$  um elemento de  $\prod_j \Omega^r(M_j)$ , com  $w_j \in \Omega^r(M_j)$ . Defina  $w \in \Omega^r(M)$  por  $w(x) = w_j(x)$  se  $x \in M_j$ . Assim,  $i^* w = (w|_{M_1}, w|_{M_2}, \dots) = (w_1, w_2, \dots)$  provando a sobrejetividade.

Por fim, notemos que a aplicação  $i$  sugere o isomorfismo  $\hat{i} : H_{dR}^r(M) \rightarrow \prod_j H_{dR}^r(M_j)$  dado por

$$\hat{i}[w] = [i^* w].$$

□

Em particular, os grupos de DE RHAM de uma superfície desconexa é o produto dos grupos correspondentes nas suas componentes conexas.

**Corolário 2.3.1.** *Se  $M$  é uma superfície desconexa então  $H_{dR}^0(M) \cong \mathbb{R}^c$ , onde  $c$  é a quantidade de componentes conexas de  $M$ .*

*Demonstração.* De fato, como  $M = \bigcup_{j=1}^c M_j$ , onde cada  $M_j$  é uma componente conexa de  $M$ , segue da Proposição 2.3.1 que  $H_{dR}^0(M) \cong \prod_{j=1}^c H_{dR}^0(M_j) \cong \prod_{j=1}^c \mathbb{R}^j = \mathbb{R}^c$ .  $\square$

Examinaremos a cohomologia do espaço Euclidiano.

Um subconjunto  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  é dito *estrelado* com respeito ao ponto  $q \in V$  se para todo  $x \in V$ , o segmento de reta de  $q$  a  $x$  está inteiramente contido em  $V$ . Os subconjuntos convexos e as bolas (abertas ou fechadas) de  $\mathbb{R}^n$  são exemplos deste tipo de conjunto.

**Teorema 2.3.1** (Poincaré). *Se  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto do tipo estrela então  $H_{dR}^r(U) = 0$ , para  $r \geq 1$ .*

*Demonstração.* Suponha  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  do tipo estrela com respeito a  $q$ . Note que existe uma homotopia  $H$  entre a aplicação identidade de  $U$  e a aplicação constante  $\tau$  que envia  $U$  em  $\{q\}$  dada por:

$$H(x, t) = q + t(x - q).$$

Daí, a aplicação inclusão  $i : \{q\} \hookrightarrow U$  é uma equivalência homotópica pois  $i \circ \tau = \tau \simeq Id_U$  e  $\tau \circ i = Id_{\{q\}}$ . Segue do Teorema 2.2.1 que  $H_{dR}^r(U) = H_{dR}^r(\{q\}) = 0$  para  $r \geq 1$ .  $\square$

**Exemplo 2.3.1.** *Grupos de DE RHAM de  $\mathbb{R}^n$ .*

Como  $\mathbb{R}^n$  é do tipo estrela,  $H_{dR}^r(\mathbb{R}^n) = 0$  para  $r \geq 1$ .

**Corolário 2.3.2.** *Seja  $M$  uma superfície e  $w$  uma  $r$ -forma fechada em  $M$ ,  $r \geq 1$ . Para qualquer  $q \in M$  existe uma vizinhança  $U$  de  $q$  na qual  $w|_U$  é exata.*

*Demonstração.* Todo  $q \in M$  tem uma vizinhança  $U$  difeomorfa a uma bola aberta em  $\mathbb{R}^n$ , a qual é um conjunto do tipo estrela. Logo, juntando o Teorema 2.2.1 e a Proposição 2.3.1,  $H_{dR}^r(U) = 0$ .  $\square$

Dois caminhos fechados  $\mu_1, \mu_2 : [a, b] \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$  são *livremente homotópicos* se existir uma aplicação contínua  $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $H(s, 0) = \mu_1(s)$ ,  $H(s, 1) = \mu_2(s)$  e  $H(a, t) = H(b, t)$  para quaisquer  $s \in [a, b]$  e  $t \in [0, 1]$ .

Um subconjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  é *simplesmente conexo* se é conexo por caminhos e, além disso, todo caminho fechado em  $U$  é livremente homotópico a um caminho constante.

**Teorema 2.3.2.** *Se  $M$  é uma superfície simplesmente conexa então  $H_{dR}^1(M) = 0$ .*

*Demonstração.* Ver [8]. □

Passemos ao cálculo do  $n$ -ésimo grupo de DE RHAM de uma superfície  $M$   $n$ -dimensional, compacta e orientável.

Não é difícil verificar que a aplicação  $I : \Omega^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $I(w) = \int_M w$  é linear. Além do mais, pelo Teorema de Stokes, a integral de qualquer forma exata é zero. Assim, esta aplicação nos sugere uma outra aplicação linear, que denotaremos pelo mesmo símbolo, de  $H_{dR}^n(M)$  para  $\mathbb{R}$  dada por:

$$\begin{aligned} I : H_{dR}^n(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ [w] &\mapsto \int_M w \end{aligned} \quad (2.2)$$

Note que tal aplicação está bem definida pois se  $\hat{w} = w + d\lambda$  (outro representante para a classe  $[w]$ ) então

$$\begin{aligned} I([\hat{w}]) &= \int_M \hat{w} \\ &= \int_M (w + d\lambda) \\ &= \int_M w \\ &= I([w]). \end{aligned}$$

**Teorema 2.3.3** (De Rham). *Para qualquer superfície compacta, conexa, orientável e  $n$ -dimensional  $M$ , a aplicação  $I : H_{dR}^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$  é um isomorfismo.*

*Demonstração.* Assumiremos que  $n \geq 1$  pois o caso 0-dimensional decorre da nossa definição. Pela Proposição 1.3.1 existe uma forma de volume em  $M$  e a denotaremos por  $\Omega$ . Seja  $c = \int_M \Omega$ . Note que podemos assumir que  $c > 0$  pois podemos reescrever, localmente, a forma  $\Omega$  como  $f(x)dx_1 \dots dx_n$  com  $f(x) \neq 0$  para todo  $x \in M$ . Assim, tomamos a orientação de modo que  $f$  seja sempre positiva.

Provaremos, primeiro, a sobrejetividade. Dado qualquer  $a \in \mathbb{R}$ , tome  $w = \frac{a}{c}\Omega$ . Assim,  $I([w]) = \int_M \frac{a}{c}\Omega = \frac{a}{c} \int_M \Omega = a$ .

Para provar a injetividade, mostraremos que  $\ker I = \{[0]\}$ . Em outras palavras, nós temos que mostrar que se  $w \in \Omega^n(M)$  satisfaz  $\int_M w = 0$  então  $w$  é exata.

Seja  $\{U_1, \dots, U_m\}$  uma cobertura finita de  $M$  por abertos que são difeomorfos ao  $\mathbb{R}^n$  e considere  $M_k = U_1 \cup \dots \cup U_k$  para  $k = 1, \dots, m$ . Como  $M$  é conexa, reordenando os conjuntos se necessário,

podemos assumir que  $M_k \cap U_{k+1} \neq \emptyset$  para cada  $k$ .

**Afirmção:** Se  $w$  é uma  $n$ -forma com suporte compacto contido em  $M_k$  e satisfaz  $\int_{M_k} w = 0$  então existe uma  $(n-1)$ -forma  $\eta$  com suporte compacto contido em  $M_k$  tal que  $d\eta = w$ .

Observe que quando  $k = m$ , a afirmação acima resolve o problema da injetividade que queremos, pois toda forma sobre uma superfície compacta tem suporte compacto.

*Prova da afirmação.* Faremos a prova por indução sobre  $k$ . Para  $k = 1$ , como  $M_1 = U_1$  é difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ , a afirmação se reduz às formas com suporte compacto em  $\mathbb{R}^n$ . Por ser a prova disto um tanto trabalhosa, deixaremos para mais adiante (Lema 2.3.1). Assumindo isto a partir de agora, continuaremos com a indução.

Suponha que a afirmação é verdadeira para  $k \geq 1$  e que a  $n$ -forma  $w$  tenha suporte compacto contido em  $M_{k+1} = M_k \cup U_{k+1}$  satisfazendo  $\int_{M_{k+1}} w = 0$ . Escolha uma  $n$ -forma auxiliar  $\alpha \in \Omega^n(M_{k+1})$  com suporte compacto em  $M_k \cap U_{k+1}$  e que satisfaz  $\int_{M_{k+1}} \alpha = 1$ .

Seja  $\{\varphi, \psi\}$  uma partição da unidade para  $M_{k+1}$  estritamente subordinada a cobertura  $\{M_k, U_{k+1}\}$ .

Seja  $r = \int_{M_k} \varphi w$ . Note que a  $n$ -forma  $(\varphi w - r\alpha)$  tem suporte compacto contido em  $M_k$  e

$$\int_{M_k} (\varphi w - r\alpha) = \int_{M_k} \varphi w - r \int_{M_k} \alpha = 0.$$

Portanto, por hipótese de indução, existe uma  $(n-1)$ -forma  $\lambda$  com suporte compacto contido em  $M_k$  tal que  $d\lambda = \varphi w - r\alpha$ . Analogamente,  $(\psi w + r\alpha)$  é uma  $n$ -forma com suporte compacto em  $U_{k+1}$  e

$$\begin{aligned} \int_{U_{k+1}} (\psi w + r\alpha) &= \int_{M_{k+1}} (1 - \varphi)w + r \int_{M_{k+1}} \alpha \\ &= \int_{M_{k+1}} w - \int_{M_{k+1}} \varphi w + r \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 2.3.1, existe outra  $(n-1)$ -forma  $\beta$  com suporte compacto em  $U_{k+1}$ , tal que  $d\beta = \psi w + r\alpha$ . Ambas  $\lambda$  e  $\beta$  podem ser estendidas para zero de forma suave com suporte compacto em  $M_{k+1}$ . Assim,

$$d(\lambda + \beta) = (\varphi w - r\alpha) + (\psi w + r\alpha) = (\varphi + \psi)w = w \quad (2.3)$$

o que completa o passo indutivo.  $\square$

**Lema 2.3.1.** *Seja  $n \geq 1$  e  $w \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$  com suporte compacto tal que  $\int_{\mathbb{R}^n} w = 0$ . Então existe uma  $(n-1)$ -forma  $\eta$  com suporte compacto em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $d\eta = w$ .*

*Demonstração.* Faremos a prova por indução por  $n$ . Para  $n = 1$ , podemos escrever  $w = f dx$  para alguma função  $f$  suave com suporte compacto. Escolha  $R > 0$  tal que  $\text{supp}.f \subseteq [-R, R]$ , e defina  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$F(x) = \int_{-R}^x f(t) dt.$$

Segue que  $dF = F'(x) dx = f dx$ . Quando  $x < -R$ ,  $F(x) = 0$  pela escolha do  $R$ . Se  $x > R$  então, pelo fato de  $\int_{\mathbb{R}^n} w = 0$ , temos que

$$F(x) = \int_{-R}^x f(t) dt = \int_{-R}^R f(t) dt + \int_R^x f(t) dt = 0.$$

Diante disso,  $\text{supp}.f \subseteq [-R, R]$ . Isto completa a prova para o caso  $n = 1$ .

Agora, seja  $n \geq 1$  e suponha que este Lema é verdadeiro para  $\mathbb{R}^n$ . Vamos considerar  $\mathbb{R}^{n+1}$  como espaço produto  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , com coordenadas  $(y, x) = (y, x_1, \dots, x_n)$ . Seja  $\Omega(y, x) = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  uma  $n$ -forma sobre  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .

Suponha que  $w$  é qualquer  $(n+1)$ -forma com suporte compacto em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  tal que

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} w = 0.$$

Então podemos escrever  $w$  como

$$w = f dy \wedge \Omega$$

para alguma função suave  $f$  com suporte compacto. Escolha  $R > 0$  tal que  $\text{supp}.f \subseteq \{(y, x); |y| \leq R \text{ e } |x| \leq R\}$ .

Seja  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função bump com suporte em  $[-R, R]$  e satisfaz  $\int_{\mathbb{R}} \varphi(y) dy = 1$ . Defina funções suaves  $e, E, F, \tilde{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  como segue:

$$\begin{aligned} e(y, x) &= \varphi(y); \\ E(y, x) &= \int_{-R}^y \varphi(t) dt; \\ F(y, x) &= \int_{-R}^y f(t, x) dt; \\ \tilde{F}(y, x) &= \int_{-R}^R f(t, x) dt. \end{aligned}$$

Estas funções têm as seguintes propriedades:

$$\text{P1. } \frac{\partial e}{\partial x_j} = \frac{\partial E}{\partial x_j} = 0;$$

$$\text{P2. } \frac{\partial E}{\partial y} = e;$$

$$\text{P3. } \frac{\partial F}{\partial y} = f;$$

$$\text{P4. } \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} = 0.$$

Denote por  $\Sigma = i^*(\tilde{F}\Omega)$ , onde  $i : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  é o mergulho  $i(x) = (0, x)$ . Note que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Sigma &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{F}(0, x) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} f(y, x) dy dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} w \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, pela hipótese de indução, existe uma  $(n-1)$ -forma  $\sigma$  com suporte compacto em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $d\sigma = \Sigma$ .

Definamos uma  $n$ -forma  $\eta$  em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  por

$$\eta = (F - \tilde{F}E)\Omega - e dy \wedge \pi^*\sigma,$$

onde  $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a projeção canônica. Quando  $y < -R$ , nós temos  $F = E = e = 0$  então  $\eta \equiv 0$ . Se  $y > R$  então  $e = 0$ ,  $E \equiv 1$  e  $F = \tilde{F}$ , assim  $\eta \equiv 0$  também. Logo  $\eta$  tem suporte compacto em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .

Para mostrar que  $d\eta = w$ , comecemos calculando

$$d\eta = dF \wedge \Omega - \tilde{F} dE \wedge \Omega - E d\tilde{F} \wedge \Omega - de \wedge dy \wedge \pi^*\sigma + e dy \wedge d(\pi^*\sigma).$$

Analisaremos cada um destes termos separadamente. Como  $dx_j \wedge \Omega = 0$ , o 1º termo fica

$$\begin{aligned} dF \wedge \Omega &= \left( \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge \Omega \\ &= f dy \wedge \Omega \\ &= w. \end{aligned}$$

Para o 2º termo nós temos que

$$-\tilde{F} dE \wedge \Omega = -\tilde{F} \frac{\partial E}{\partial y} dy \wedge \Omega = -\tilde{F} e dy \wedge \Omega.$$

Desde que  $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} = 0$ , o 3º termo reduz para

$$-E d\tilde{F} \wedge \Omega = -E \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_j} dx_j \wedge \Omega = 0.$$

O 4º termo também é igual a zero pois  $de \wedge dy = \varphi'(y)dy \wedge dy = 0$ . Por fim, para o 5º termo, nós observamos que  $\pi^*i^*\tilde{F} = \tilde{F}$  pois  $\tilde{F}$  é independente de  $y$  e  $\pi^*i^*\Omega = \Omega$  por um calculo direto e portanto  $\pi^*\Sigma = \tilde{F}\Omega$ . Deste modo

$$\begin{aligned} e dy \wedge d(\pi^*\sigma) &= e dy \wedge \pi^*d\sigma \\ &= e dy \wedge \pi^*\Sigma \\ &= \tilde{F}e dy \wedge \Omega, \end{aligned}$$

que cancela com o 2º termo. Logo  $d\eta = w$ . □

Finalizando esta seção, enunciaremos um teorema (Mayer-Vietoris) que pode ser usado para calcular os grupos de DE RHAM de diversos espaços, expressando como uniões de subconjuntos abertos com cohomologia simples.

Dados  $i : A \rightarrow B$  e  $j : B \rightarrow C$  homomorfismo de grupos, diremos que uma seqüência  $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$  é *exata* se  $\text{Im}(i) = \ker(j)$ .

Considere  $M$  uma superfície e  $U, V$  subconjuntos abertos de  $M$  tal que  $U \cup V = M$ . Temos o seguinte diagrama de inclusões:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{k} & M \\ i \uparrow & & \uparrow l \\ U \cap V & \xrightarrow{j} & V \end{array} \quad (2.4)$$

o qual as aplicações pull-back induzem o seguinte diagrama sobre as formas diferenciais:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^p(U) & \xrightarrow{i^*} & \Omega^p(U \cap V) \\ k^* \uparrow & & \uparrow j^* \\ \Omega^p(M) & \xrightarrow{l^*} & \Omega^p(V) \end{array} \quad (2.5)$$

Claro que também existe um diagrama análogo a (2.5) para os grupos de cohomologia de DE RHAM.

Defina as aplicações  $(k^* \times l^*) : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(U) \times \Omega^p(V)$  e  $(i^* - j^*) : \Omega^p(U) \times \Omega^p(V) \rightarrow \Omega^p(U \cap V)$  por

$$\begin{aligned} (k^* \times l^*)(\omega) &= (k^*\omega, l^*\omega), \\ (i^* - j^*)(\omega, \eta) &= i^*\omega - j^*\eta. \end{aligned}$$

**Teorema 2.3.4** (Mayer-Vietoris). *Seja  $M$  uma superfície e  $U, V$  subconjuntos abertos de  $M$  tais que  $U \cup V = M$ . Para cada  $p$ , existe um operador linear  $\delta : H_{dR}^p(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^{p+1}(M)$  tal que a seguinte seqüência é exata:*

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H_{dR}^p(M) \xrightarrow{k^* \times l^*} H_{dR}^p(U) \times H_{dR}^p(V) \xrightarrow{i^* - j^*} H_{dR}^p(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H_{dR}^{p+1}(M) \xrightarrow{k^* \times l^*} \cdots \quad (2.6)$$

Uma prova para este teorema pode ser encontrada em [8]. A seqüência (2.6) é chamada seqüência *Mayer-Vietoris* para a cobertura aberta  $\{U, V\}$ .

Usaremos este fato para calcular os grupos de cohomologia de DE RHAM da esfera.

**Exemplo 2.3.2.** *Grupos de DE RHAM de  $S^n$ ,  $n \geq 1$ .*

Vamos verificar que para  $n \geq 1$ ,

$$H_{dR}^p(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } p = 0 \text{ ou } p = n \\ 0, & \text{se } 0 < p < n. \end{cases} \quad (2.7)$$

Seja  $N$  e  $S$  o pólo norte e o pólo sul de  $S^n$ , respectivamente, e considere  $U = S^n \setminus \{S\}$  e  $V = S^n \setminus \{N\}$ . Pela projeção estereográfica, sabemos que  $U$  e  $V$  são difeomorfos ao  $\mathbb{R}^n$ , e portanto  $U \cap V$  é difeomorfo a  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Parte da seqüência de Mayer-Vietoris para  $\{U, V\}$  é

$$H_{dR}^{p-1}(U) \times H_{dR}^{p-1}(V) \longrightarrow H_{dR}^{p-1}(U \cap V) \longrightarrow H_{dR}^p(S^n) \longrightarrow H_{dR}^p(U) \times H_{dR}^p(V).$$

Desde que  $U$  e  $V$  são difeomorfos a  $\mathbb{R}^n$  então, pelo exemplo 2.3.1,  $H_{dR}^p(U) = H_{dR}^p(V) = 0$  para  $p > 1$ . Daí,  $H_{dR}^p(S^n) \cong H_{dR}^{p-1}(U \cap V)$ . Visto que  $U \cap V$  é difeomorfo a  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e, pelo exemplo 2.2.1,  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$  então, para  $p > 1$ ,

$$H_{dR}^p(S^n) \cong H_{dR}^{p-1}(S^{n-1}). \quad (2.8)$$

Seguiremos agora por indução sobre  $n$ . O caso  $n = 1$  já foi feito no exemplo 2.1.1, assim suponha que  $n \geq 2$  e que (2.7) é verdadeira para  $S^{n-1}$ . Sabemos que  $H_{dR}^0(S^n) \cong \mathbb{R}$  e pelo Teorema



2.3.2 temos que  $H_{dR}^1(\mathbb{S}^n) = 0$ . Para  $p > 1$ , juntamos a hipótese de indução e (2.8) e obtemos que

$$H_{dR}^p(\mathbb{S}^n) \cong H_{dR}^{p-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } p = n \\ 0, & \text{se } p < n. \end{cases}$$

Isto completa nossa verificação.



## Capítulo 3

# Topologia Simplética

### 3.1 Álgebra linear simplética

**Definição 3.1.1.** *Um espaço vetorial simplético é um par  $(V, w)$  onde  $V$  é um espaço vetorial real de dimensão finita e  $w$  é uma 2-forma que satisfaz a seguinte propriedade:*

1. *(não degenerescência) A aplicação  $F : V \rightarrow V^*$  dada por  $F(v) = w(v, \cdot)$  é isomorfismo linear de  $V$  sobre o seu dual  $V^*$ . Isto é equivalente a dizer que se  $w(v, u) = 0$  para todo  $u \in V$  então  $v = 0$ .*

**Exemplo 3.1.1.** Considere em  $\mathbb{R}^{2n}$  a aplicação  $w_0$  definida por

$$w_0(u, v) = \langle \mathbb{J} \cdot u, v \rangle, \forall u, v \in \mathbb{R}^{2n}$$

onde

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}_{2n \times 2n},$$

com  $0_n$  e  $I_n$  representando a matriz nula e a matriz identidade de  $\mathbb{R}^n$ , respectivamente. Observe que  $\mathbb{J}^T = -\mathbb{J}$  e  $\det \mathbb{J} \neq 0$ . Como  $\langle \mathbb{J}u, v \rangle = \langle u, \mathbb{J}^T v \rangle = -\langle u, \mathbb{J}v \rangle$  então  $w_0$  é anti-simétrica. Agora, fixando  $u \in \mathbb{R}^{2n}$ , note que se  $w_0(u, v) = 0$  para todo  $v \in \mathbb{R}^{2n}$  então, por propriedade de produto interno, temos que  $u = 0$ . Isto diz que  $w_0$  é não degenerada. Logo  $\mathbb{R}^{2n}$  com a forma  $w_0$  é um espaço simplético. Observe que se denotarmos por  $z = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$  então

$$w_0 = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i.$$

De fato, dados  $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$  temos que

$$\begin{aligned} w_0(u, v) &= \langle \mathbb{J} \cdot u, v \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n (v_i u_{i+n} - u_i v_{i+n}) \\ &= \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i(u, v). \end{aligned}$$

Este espaço é também chamado “*espaço simplético padrão*”.

Um conceito fundamental em espaços simpléticos é o de ortogonalidade, o qual é dado a seguir. Seja  $(V, w)$  um espaço simplético. Dados  $u, v \in V$  dizemos que  $u$  é ortogonal a  $v$  (no sentido simplético), e escreveremos  $u \perp v$ , se  $w(u, v) = 0$ . Se  $E$  é subespaço vetorial de  $V$ , definamos o complemento ortogonal simplético por

$$E^w = \{u \in V; w(u, v) = 0, \forall v \in E\}$$

Não é difícil verificar que  $E^w$  é um subespaço vetorial de  $V$ .

**Observação 3.1.1.** *Se  $E \subset V$  então  $\dim E^w + \dim E = \dim V$ .*

De fato, escolhendo uma base  $e_1, \dots, e_d$  em  $E$ , o subespaço  $E^w$  é o núcleo dos funcionais linearmente independentes  $w(e_j, \cdot)$  em  $V$  de modo que  $\dim E^w = \dim V - \dim E$ .

**Observação 3.1.2.**  *$E$  e  $E^w$  não são necessariamente subespaços complementares.*

Com efeito, observe que todo  $v \in V$  é ortogonal a si mesmo pois  $w(v, v) = -w(v, v)$ , ou seja,  $w(v, v) = 0$ . Logo se  $\dim E = 1$  então  $E \subseteq E^w$ .

Isso nos motiva a seguinte a próxima definição.

**Definição 3.1.2.** *Seja  $(V, w)$  um espaço vetorial simplético. Um subespaço  $E \subseteq V$  é dito*

- *simplético* se  $E \cap E^w = \{0\}$ ;
- *isotrópico* se  $E \subseteq E^w$ ;
- *coisotrópico* se  $E^w \subseteq E$ ;
- *lagrangiano* se  $E = E^w$ .

**Observação 3.1.3.** *Um subespaço  $E \subseteq V$  é simplético se, e somente se,  $w$  restrita ao subespaço  $E$  é, ainda, não degenerada. Com efeito,  $w|_E$  é não degenerada  $\Leftrightarrow$  quando  $w(v, u) = 0$  para todo  $u \in E$  então  $v = 0 \Leftrightarrow E \cap E^w = \{0\}$ .*

O próximo resultado é o análogo simplético do fato de que todo espaço vetorial com produto interno admite uma base ortonormal.

**Proposição 3.1.1.** *A dimensão de todo espaço simplético  $(V, w)$  é par. Se  $\dim V = 2n$  existe uma base  $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$  de  $V$  tal que para  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,*

$$\begin{cases} w(e_i, e_j) = 0 \\ w(f_i, f_j) = 0 \\ w(f_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \end{cases} \quad (3.1)$$

*Demonstração.* Comece escolhendo algum vetor  $e_1 \neq 0$  em  $V$ . Como  $w$  é não degenerada, podemos encontrar um vetor  $u \in V$  tal que  $w(u, e_1) \neq 0$ . Defina

$$f_1 = \frac{u}{w(u, e_1)}$$

Conseqüentemente,  $f_1, e_1$  são linearmente independentes. Considere  $E = \text{span}\{e_1, f_1\}$ <sup>1</sup>. Afirmando que  $E \cap E^w = \{0\}$ . Para verificar este fato, tome  $v \in E \cap E^w$ . Como  $v \in E$  então existem constantes  $\alpha, \beta$  tais que  $v = \alpha e_1 + \beta f_1$ . Desde que  $v \in E^w$ , temos que  $0 = w(v, f_1) = \alpha$  e  $0 = w(v, e_1) = \beta$ . Portanto  $v = 0$ , como queríamos. Logo,  $E$  é subespaço vetorial simplético de dimensão 2. Se  $\dim V = 2$  então a proposição está provada. Se  $\dim V > 2$ , repita a argumentação acima para o complementar do subespaço simplético  $E^w$  de  $V$  e numa quantidade finita de passos encontraremos a base desejada.  $\square$

**Definição 3.1.3.** *Sejam  $(V_1, w_1)$  e  $(V_2, w_2)$  espaços vetoriais simpléticos. Uma aplicação linear  $T : V_1 \rightarrow V_2$  é dita simplética se*

$$T^*w_2 = w_1 \quad (3.2)$$

**Exemplo 3.1.2.** No caso  $(V_1, w_1) = (V_2, w_2) = (\mathbb{R}^{2n}, w_0)$ , uma matriz  $A$  é simplética  $\Leftrightarrow \langle JAu, Av \rangle = \langle Ju, v \rangle$  para todo  $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$ . Equivalentemente,

$$A^T J A = J. \quad (3.3)$$

<sup>1</sup> $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$  representa o espaço gerado pelos vetores  $v_1, \dots, v_n$ .

A partir de (3.3) obtemos que  $|\det A| = 1$ . Em particular, matrizes simpléticas em  $(\mathbb{R}^{2n}, w_0)$  preservam volume.

**Observação 3.1.4.** *Aplicações lineares simpléticas são sempre injetivas.*

De fato, seja  $T : (V_1, w_1) \rightarrow (V_2, w_2)$  uma aplicação linear simplética. Vamos verificar que  $\ker T = \{0\}$ . Se  $v \in \ker T$  então  $T \cdot v = 0$ . Como  $T$  é simplética então

$$0 = w_2(T \cdot v, T \cdot u) = w_1(v, u), \forall u \in V_1.$$

Desde que  $w_1$  é não degenerada obtemos que  $v = 0$ . Portanto  $\ker T = \{0\}$ .

**Proposição 3.1.2.** *Todo espaço simplético é simplectomorfo a  $(\mathbb{R}^{2n}, w_0)$ .*

*Demonstração.* Seja  $(V, w)$  um espaço simplético. Seja  $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\} \subset V$  a base dada pela Proposição 3.1.1. Dados  $u, v \in V$ , podemos reescrevê-los nesta base como segue

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^n x_i e_i + x_{n+i} f_i \\ v &= \sum_{i=1}^n y_i e_i + y_{n+i} f_i \end{aligned}$$

com  $x = (x_1, \dots, x_{2n}), y = (y_1, \dots, y_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ . Daí, usando as propriedades da nossa base e a multi-linearidade da forma  $w$ , obtemos que

$$\begin{aligned} w(u, v) &= \sum_{j=1}^n x_j w(e_j, \sum_i y_i e_i + y_{n+i} f_i) + \sum_{j=1}^n x_{n+j} w(f_j, \sum_i y_i e_i + y_{n+i} f_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (-x_i y_{n+i} + x_{n+i} y_i) \\ &= w_0(x, y). \end{aligned}$$

Agora, seja  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n\} \subset \mathbb{R}^{2n}$  a base dada pela Proposição 3.1.1. Considere a aplicação linear  $T : V \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  em que  $T(\bar{e}_i) = e_i$  e  $T(\bar{f}_i) = f_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Pelo que vimos acima,  $T^*w_0 = w$ .  $\square$

## 3.2 Variedades simpléticas

Nesta seção veremos o conceito de variedade simplética. Claro que nem toda superfície ( $m$ -dimensional) admite uma estrutura simplética pois a existência de um tal estrutura impõe sobre uma superfície

$M$  certas condições. Por exemplo, uma superfície com uma tal estrutura deve ter dimensão par e ser orientável.

**Definição 3.2.1.** *Uma estrutura simplética em uma superfície  $M$  é uma 2-forma  $w$  em  $M$  satisfazendo:*

- i)  $dw = 0$ , ou seja, é fechada;
- ii) Para cada  $x \in M$ ,  $w(x)$  é não degenerada no espaço vetorial tangente  $T_x M$ .

**Definição 3.2.2.** *O par  $(M, w)$  é chamado variedade simplética.*

**Exemplo 3.2.1.** Considere  $M = \mathbb{R}^{2n}$  com a forma  $w_0$ , definida no exemplo 3.1.1. Já sabemos que  $w_0$  é não degenerada e como  $w_0$  é constante, temos que  $dw_0 = 0$ . Logo  $(\mathbb{R}^{2n}, w_0)$  é uma variedade simplética.

Decorre da definição acima que se  $(M, w)$  é uma variedade simplética então, para cada  $x \in M$ ,  $(T_x M, w(x))$  é um espaço vetorial simplético. Em particular,  $M$  tem dimensão par.

Uma importante generalização do exemplo 3.2.1 são os fibrados cotangentes, como veremos no próximo exemplo.

**Exemplo 3.2.2** (Fibrados Cotangentes). Seja  $Q$  uma superfície  $n$ -dimensional orientável arbitrária. Para cada  $q \in Q$ , denotaremos por  $T_q^* Q := (T_q Q)^*$  o espaço dos funcionais do espaço tangente  $T_q Q$  de  $Q$  no ponto  $q$ . Chamaremos de *fibrado cotangente* o conjunto  $T^* Q = \{(q, \xi) : q \in Q, \xi \in T_q^* Q\}$ . Vamos verificar que este conjunto é, na verdade, um superfície de dimensão  $2n$ . Como  $Q$  é uma superfície, para cada  $q \in Q$ , existe uma parametrização  $\phi : U_0 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U \subset Q$  com  $q = \phi(x) \in U$ , para algum  $x \in U_0$ . Sabemos que  $\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial q_1}(x), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial q_n}(x) \right\}$  constituem uma base do espaço vetorial tangente  $T_q Q$ . Denotaremos por  $\{dq_1, \dots, dq_n\} \subset T_q^* Q$  o dual desta base. Assim, dado  $\xi \in T_q^* Q$  existem  $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$  tais que  $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i dq_i$ . Isto nos induz outra parametrização  $\psi : U_0 \times \mathbb{R}^n \rightarrow T^* Q$  dada por  $\psi(x, \xi_1, \dots, \xi_n) = (\phi(x), \sum_{i=1}^n \xi_i dq_i)$ . Algumas vezes chamaremos estas cartas de coordenadas cotangentes. Isso mostra que  $T^* Q$  é, de fato, uma superfície  $2n$ -dimensional. Agora, veremos que todo fibrado cotangente possui uma estrutura simplética canônica. Seja  $(q_1, \dots, q_n) \in U \subset Q$  coordenadas locais para  $Q$  e  $(q_1, \dots, q_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \in T^* U$ . Defina a 2-forma  $w$  em  $T^* U$  por

$$w(q, \xi) = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge d\xi_i. \quad (3.4)$$

Para verificar que esta definição não depende das coordenadas, considere a 1-forma em  $T^*U$

$$\alpha(q, \xi) = \sum_{i=1}^n \xi_i dq_i. \quad (3.5)$$

Evidentemente,  $w = -d\alpha$ . Bem, basta mostrarmos que  $\alpha$  não depende das coordenadas. Sejam  $(U, q_1, \dots, q_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$  e  $(U', q'_1, \dots, q'_n, \xi'_1, \dots, \xi'_n)$  duas coordenadas cotangentes com  $U \cap U' \neq \emptyset$ . Note que se  $q \in U \cap U'$  e  $\xi \in T_q^*Q$  então

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i dq_i = \sum_{i,j} \xi_i \left( \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} \right) dq'_j = \sum_{j=1}^n \xi'_j dq'_j$$

onde  $\xi'_j = \sum_{i=1}^n \xi_i \left( \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} \right)$ . Pelo que vimos acima,  $\alpha = \sum_{i=1}^n \xi_i dq_i = \sum_{j=1}^n \xi'_j dq'_j = \alpha'$ , o que mostra que  $\alpha$  não depende das coordenadas.  $\square$

**Definição 3.2.3.** *Sejam  $(M_1, \tau_1)$  e  $(M_2, \tau_2)$  variedades simpléticas. Uma aplicação diferenciável  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  é dita simplética se*

$$\varphi^* \tau_2 = \tau_1 \quad (3.6)$$

**Observação 3.2.1.** *Aplicações simpléticas são automaticamente imersões.* Basta notar que, para todo  $x \in M_1$ ,  $\varphi'(x) : T_x M_1 \rightarrow T_{\varphi(x)} M_2$  é uma aplicação linear entre espaços vetoriais simpléticos. Daí, pela Observação 3.1.4,  $\varphi'(x)$  é injetiva.

**Exemplo 3.2.3.** Seja  $\varphi : (\mathbb{R}^{2n}, w_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, w_0)$  um difeomorfismo simplético. A partir da definição,

$$\langle \mathbb{J} \varphi'(x) a, \varphi'(x) b \rangle = \langle \mathbb{J} a, b \rangle \iff \varphi'(x)^T \mathbb{J} \varphi'(x) = \mathbb{J}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{2n}$$

Daí,  $|\det \varphi'(x)| = 1$ . Portanto, pelo Teorema de mudança de variável, difeomorfismos simpléticos em  $(\mathbb{R}^{2n}, w_0)$  preservam volume.

### 3.2.1 Teorema de Darboux

Este teorema foi provado pela 1ª vez em 1882 pelo próprio Darboux. A prova que daremos aqui será seguindo a idéia de J. Moser [12], o qual descobriu uma prova mais elegante para este resultado.

Convém observar que se  $M$  é uma superfície  $n$ -dimensional e  $\Lambda \in \Omega^2(M)$ ,  $r \leq n$ , é uma forma não-degenerada em  $M$  então a aplicação

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \Omega^1(M) \\ X &\mapsto \iota_X \Lambda \end{aligned} \quad (3.7)$$



é um isomorfismo. De fato, dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $c \in \mathbb{R}$  vemos que, usando a linearidade da forma  $\Lambda$ ,

$$\begin{aligned} [\iota_{X+cY}\Lambda(x)](\cdot) &= \Lambda(x)(X + cY, \cdot) \\ &= \Lambda(x)(X, \cdot) + c\Lambda(x)(Y, \cdot) \\ &= \iota_X\Lambda(x)(\cdot) + c\iota_Y\Lambda(x)(\cdot), \forall x \in M \end{aligned}$$

O que prova a linearidade desta aplicação. Para mostrar que é isomorfismo, verificaremos que o seu núcleo contém apenas o campo nulo. Ora, se  $X \in \mathfrak{X}(M)$  é tal que  $\iota_X\Lambda(x) = 0$ ,  $\forall x \in M$ , então  $\Lambda(x)(X, \cdot) = 0$ . Como  $\Lambda$  é não-degenerada temos que  $X = 0$ . No caso em que  $\Lambda$  é forma de volume em  $M$  obtemos um isomorfismo entre  $\mathfrak{X}(M)$  e  $\Omega^{r-1}(M)$ .

**Teorema 3.2.1** (Darboux). *Suponha que  $w$  é uma 2-forma não degenerada em uma superfície  $M$  de dimensão  $2n$ . Se  $dw = 0$  então para cada  $p \in M$  existem coordenadas  $(U, \varphi)$  onde  $\varphi : (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} \rightarrow q \in U \subset M$  satisfaz  $\varphi(0) = p$  e*

$$\varphi^*w = w_0 = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i.$$

*Demonstração.* Inicialmente, como  $w$  é uma aplicação bilinear não-degenerada e anti-simétrica, podemos escolher alguma coordenada local tal que  $w$  é uma 2-forma em  $\mathbb{R}^{2n}$  dependente em  $z \in \mathbb{R}^{2n}$  e que  $p$  corresponde a  $z = 0$ . Pela Observação 3.1.2 temos que

$$w(0) = w_0 = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i$$

em  $z = 0$ . Agora, nosso objetivo é encontrar um difeomorfismo  $\varphi$  numa vizinhança de 0 deixando a origem fixa e que satisfaz

$$\varphi^*w = w_0.$$

Resolveremos esta equação por argumentação de deformação. Vamos interpolar  $w$  e  $w_0$  por uma família  $w_t$  de formas definidas por

$$w_t = w_0 + t(w - w_0), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

tal que  $w_t = w_0$  para  $t = 0$  e  $w_1 = w$ , e olhemos para a família  $\varphi^t$  de difeomorfismos satisfazendo  $\varphi^0 = id$  e

$$(\varphi^t)^*w_t = w_0, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (3.8)$$

Observe que a equação (3.8) para  $t = 1$  é a solução do nosso problema. Para encontrar  $\varphi^t$  nós construiremos um campo de vetores  $t$ -dependentes  $X_t$  gerando  $\varphi^t$  como seu fluxo. Diferenciando (3.8) e usando a Observação (1.2.3), obtemos que tal campo de vetores  $X_t$  terá que satisfazer a identidade:

$$0 = \frac{d}{dt}(\varphi^t)^*w_t = (\varphi^t)^* \left( \mathcal{L}_{X_t}w_t + \frac{d}{dt}w_t \right) \quad (3.9)$$

Note que  $dw_t = d(w_0 + t(w - w_0)) = 0$ , isto é,  $dw_t$  são formas fechadas. Usando a formula de Cartan em (3.9) encontramos

$$0 = (\varphi^t)^*(d(\iota_{X_t}w_t) + w - w_0).$$

Como  $w - w_0$  é uma 2-forma fechada, pelo Lema 2.3.1, existe uma 1-forma  $\lambda$  que localmente satisfaz

$$w - w_0 = d\lambda \text{ e } \lambda(0) = 0.$$

Portanto, basta que o campo  $X_t$  satisfaça a seguinte equação:

$$\iota_{X_t}w_t + \lambda = 0. \quad (3.10)$$

Já que  $w_t(0) = w_0$  então as 2-formas  $w_t$  são não-degeneradas, para cada  $t \in [0, 1]$ , numa vizinhança de 0. Isto implica que a aplicação, para cada  $t \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \Omega^1(M) \\ X &\mapsto \iota_X w_t \end{aligned}$$

é isomorfismo, e portanto existe um único campo de vetores  $X_t$  tal que

$$\iota_{X_t}w_t = -\lambda \quad (3.11)$$

o qual é solução de (3.10). Como nós normalizamos  $\lambda(0) = 0$  e pelo fato de  $w_t$  ser não-degenerada, temos que  $X_t(0) = 0$ . Então há uma vizinhança de 0 na qual o fluxo  $\varphi^t$  de  $X_t$  existe para todo  $0 \leq t \leq 1$  e ainda satisfaz  $\varphi^0(0) = id$  e  $\varphi^t(0) = 0$ . Por construção, estes difeomorfismos satisfazem a equação

$$\frac{d}{dt}((\varphi^t)^*)w_t = 0, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Portanto  $(\varphi^t)^*w_t = (\varphi^0)^*w_0 = w_0$  para todo  $0 \leq t \leq 1$ , como nós queríamos provar.  $\square$

**Observação 3.2.2.** As coordenadas locais  $(U, \varphi)$  dadas pelo teorema anterior são chamadas “*coordenadas simpléticas*”.

**Corolário 3.2.1.** *Toda variedade simplética é orientável.*

*Demonstração.* Seja  $(M, \Omega)$  uma variedade simplética. Pelo Teorema 3.2.1, temos que existem coordenadas locais  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$

$$\Omega = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i$$

Defina a  $2n$ -forma

$$\Lambda = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} \underbrace{\Omega \wedge \dots \wedge \Omega}_{n\text{-vezes}} \quad (3.12)$$

Pela expressão de  $\Omega$  em coordenadas, afirmamos que, em coordenadas locais,

$$\Lambda = dy_1 \wedge \dots \wedge y_n \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \quad (3.13)$$

Verificaremos isso por indução sobre  $n$ . Para  $n = 1$  temos diretamente que  $\Lambda = dy_1 \wedge dx_1$ . Assume que (3.13) seja válida para  $n$ . Denote por  $w_0 = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i$ . Então, para  $n + 1$ ,  $\Omega = w_0 + dy_{n+1} \wedge dx_{n+1}$ . Note que

$$\begin{aligned} \Omega \wedge \Omega &= (w_0 + dy_{n+1} \wedge dx_{n+1}) \wedge (w_0 + dy_{n+1} \wedge dx_{n+1}) \\ &= w_0 \wedge w_0 + 2 \cdot w_0 \wedge dy_{n+1} \wedge dx_{n+1}. \end{aligned}$$

Repetindo este processo, obteremos

$$\underbrace{\Omega \wedge \dots \wedge \Omega}_{n+1\text{-vezes}} = \underbrace{w_0 \wedge \dots \wedge w_0}_{n+1\text{-vezes}} + (n+1) \cdot \underbrace{w_0 \wedge \dots \wedge w_0}_{n\text{-vezes}} \wedge dy_{n+1} \wedge dx_{n+1}. \quad (3.14)$$

Assim, juntando (3.12) e (3.14) com a hipótese de indução, vemos que

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(n+1)!} \left( \underbrace{w_0 \wedge \dots \wedge w_0}_{n+1\text{-vezes}} + (n+1) \cdot \underbrace{w_0 \wedge \dots \wedge w_0}_{n\text{-vezes}} \wedge dy_{n+1} \wedge dx_{n+1} \right) \\
&= \frac{(-1)^n}{n+1} \left[ \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n)!} \underbrace{w_0 \wedge \dots \wedge w_0}_{n\text{-vezes}} \right] \wedge w_0 \\
&+ \frac{(-1)^n}{n+1} \left[ \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n)!} (n+1) \underbrace{w_0 \wedge \dots \wedge w_0}_{n\text{-vezes}} \right] \wedge dy_{n+1} \wedge dx_{n+1} \\
&= \frac{(-1)^n}{n+1} dy_1 \wedge \dots \wedge y_n \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge w_0 \\
&+ (-1)^n dy_1 \wedge \dots \wedge y_n \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_{n+1} \wedge dx_{n+1} \\
&= dy_1 \wedge \dots \wedge y_n \wedge dy_{n+1} \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dx_{n+1}.
\end{aligned}$$

Logo, definimos uma forma de volume sobre  $M$ . Portanto, pela Proposição 1.3.1,  $M$  é orientável.  $\square$

**Corolário 3.2.2.** *A mudança de coordenadas numa variedade simplética preserva a forma.*

*Demonstração.* De fato, considere  $(U_1, \varphi_1)$  e  $(U_2, \varphi_2)$  cartas coordenadas numa variedade simplética  $(M, w)$ , com  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , tal que o Teorema de Darboux é válido, ou seja,

$$\varphi_j^* w = w_0, \quad j = 1, 2.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)^* w_0 &= (\varphi_1^*) \circ (\varphi_2^{-1})^* w_0 \\
&= (\varphi_1^*) w \\
&= w_0.
\end{aligned}$$

$\square$

**Definição 3.2.4.** *Seja  $(M, w)$  uma variedade simplética de dimensão  $2n$ . Chamaremos de forma de volume simplético a forma de volume  $w^n$ . Definiremos o volume simplético como o volume dado pela forma de volume simplético, ou seja, para todo  $A \subset M$  aberto,*

$$vol_w(A) := \int_A w^n. \quad (3.15)$$

Devemos pontuar que difeomorfismos simpléticos preservam o volume simplético. De fato, sejam  $(M_1, w_1)$  e  $(M_2, w_2)$  variedades simpléticas e  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  difeomorfismo simplético. Pelas propriedades de pull-back, segue que

$$\begin{aligned}\varphi^*(w_2)^n &= \varphi^*(w_2 \wedge \dots \wedge w_2) \\ &= \varphi^*(w_2) \wedge \dots \wedge \varphi^*(w_2) \\ &= w_1 \wedge \dots \wedge w_1 \\ &= (w_1)^n.\end{aligned}$$

Portanto, por (1.27),  $\text{vol}_{w_1}(A) = \text{vol}_{w_2}(\varphi(A))$  para todo  $A \subset M$  aberto.

### 3.2.2 Teorema de Moser

Já vimos na seção 1.4 que se  $M$  é uma superfície orientável e  $\varphi : M \rightarrow M$  um difeomorfismo que preserva a orientação e  $\varphi^*w_2 = w_1$ , onde  $w_1$  e  $w_2$  são formas de volume em  $M$ , então  $\int_M w_1 = \int_M w_2$ .

O nosso propósito é prover, com mais alguma hipótese, a recíproca deste fato.

**Teorema 3.2.2** (Moser). *Seja  $M$  uma superfície  $m$ -dimensional, compacta, conexa, orientável. Se  $\Lambda_0$  e  $\Lambda_1$  são duas formas de volume tais que*

$$\int_M \Lambda_0 = \int_M \Lambda_1 \tag{3.16}$$

*então existe um difeomorfismo  $\varphi$  de  $M$  satisfazendo*

$$\varphi^* \Lambda_1 = \Lambda_0.$$

*Demonstração.* Considere a família  $\Lambda_t$  de formas definidas por

$$\Lambda_t = t\Lambda_0 + (1-t)\Lambda_1. \tag{3.17}$$

Para construir o difeomorfismo  $\varphi$ , definiremos uma família  $\varphi^t$  de difeomorfismos de  $M$  de modo que  $\varphi^0 = id$  e

$$(\varphi^t)^* \Lambda_t = \Lambda_0. \tag{3.18}$$

Como  $\Lambda_0 \neq 0$  e  $\Lambda_1 \neq 0$  então, para cada  $t$ ,  $\Lambda_t \neq 0$ . Visto que  $\Lambda_0$  e  $\Lambda_1$  têm a mesma integral sobre  $M$  então, pelo Teorema 2.3.3, existe  $(m-1)$ -forma  $\lambda$  em  $M$  tal que

$$\Lambda_1 = \Lambda_0 + d\lambda.$$

Conseqüentemente,

$$\Lambda_t = \Lambda_1 + t d\lambda. \quad (3.19)$$

Por esta expressão, vemos que  $d\Lambda_t = 0$ . Como  $M$  é compacta, podemos definir  $\varphi^t$  através do campo de vetores  $X_t$  que o gera, ou seja,

$$\frac{d}{dt}\varphi^t = X_t \circ \varphi^t.$$

Uma condição necessária e suficiente para que estes difeomorfismos satisfaçam (3.18) é que cumpram a igualdade

$$0 = \frac{d}{dt} \left( (\varphi^t)^* \Lambda_t \right) = (\varphi^t)^* \left( \frac{d}{dt} \Lambda_t + \mathcal{L}_{X_t} \Lambda_t \right). \quad (3.20)$$

Daí, podemos usar a formula de Cartan para obter que  $\frac{d}{dt} \Lambda_t + d\iota_{X_t} \Lambda_t = d(\iota_{X_t} \Lambda_t + \lambda)$ . Assim, a expressão em (3.20) se torna

$$0 = (\varphi^t)^* (d(\iota_{X_t} \Lambda_t + \lambda)). \quad (3.21)$$

Portanto, basta que os campos  $X_t$  satisfaçam

$$\iota_{X_t} \Lambda_t + \lambda = 0. \quad (3.22)$$

Desde que  $\Lambda_t$  é forma de volume, para cada  $t$ , a aplicação

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \Omega^{m-1}(M) \\ X &\mapsto \iota_X \Lambda_t \end{aligned}$$

é isomorfismo. Então, para cada  $t$ , (3.22) tem solução única. Por construção,  $(\varphi^t)^* \Lambda_t = \Lambda_0$  e  $\varphi = \varphi^1$  é o difeomorfismo desejado.  $\square$

### 3.2.3 Algumas obstruções

Já vimos que a existência de uma estrutura simplética numa superfície torna obrigatório que tal superfície seja orientável e tenha dimensão par. É natural perguntarmos se uma superfície  $M$  satisfazendo tais condições sempre admite alguma estrutura simplética. A resposta em geral é não. Descreveremos nessa seção uma simples obstrução na cohomologia (de DE RHAM) de  $M$ .

**Proposição 3.2.1.** *Seja  $M$  uma superfície compacta de dimensão  $2n$ . Se  $M$  admite alguma estrutura simplética, então existe um elemento  $a \in H_{dR}^2(M)$  tal que  $a^n \neq 0$ .*

*Demonstração.* Se  $w \in \Omega^2(M)$  é estrutura simplética, seja  $a = [w] \in H_{dR}^2(M)$ . Vimos no Corolário 3.2.1 que  $w^n \in \Omega^{2n}(M)$  é uma forma de volume, e portanto

$$\int_M w^n \neq 0.$$

Por outro lado, se  $a^n = 0$  então  $w^n$  é exata, ou seja, existe uma 1-forma  $\theta$  tal que  $w^n = d\theta$ . Pelo Teorema de Stokes, temos

$$\int_M w^n = \int_M d\theta = \int_{\partial M} \theta = 0,$$

o que não é possível. Portanto  $a^n \neq 0$ .  $\square$

É imediato desta proposição que  $\mathbb{S}^{2n}$ ,  $n > 1$ , não possui estrutura simplética pois como vimos no exemplo 2.3.2,  $H_{dR}^2(S^{2n}) = 0$  para  $n > 1$ .

### 3.2.4 Funções geradoras

Nesta seção, veremos que toda aplicação simplética pode ser localmente representada em termos de uma função escalar, também chamada de *função geradora*.

Começemos com aplicações definidas em  $(\mathbb{R}^{2n}, w_0)$  pois pelo Teorema de Darboux toda variedade simplética, localmente, pode ser vista assim.

Consideremos uma aplicação simplética  $\varphi : (\eta, \xi) \mapsto (x, y)$  em  $(\mathbb{R}^{2n}, w_0)$  representada por

$$\begin{cases} x &= a(\eta, \xi) \\ y &= b(\eta, \xi) \end{cases} \quad (3.23)$$

em que  $a, b$  são funções suaves em  $\mathbb{R}^{2n}$ . Vamos assumir que

$$\det(a_\xi) \neq 0. \quad (3.24)$$

Então, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma função  $\alpha$  tal que, localmente,

$$\xi = \alpha(\eta, x)$$

Inserindo esta solução na 2ª equação de (3.23), nós encontramos a seguinte representação equivalente para a aplicação  $\varphi$ :

$$\begin{cases} \xi &= \alpha(\eta, x) \\ y &= \beta(\eta, x), \end{cases} \quad (3.25)$$

onde  $\beta(\eta, x) = b(\eta, \alpha(\eta, x))$ . Ademais, diferenciando a 1ª igualdade de (3.23) com relação a  $x$ , obteremos que

$$\det(a_\xi) \cdot \det(\alpha_x) = 1. \quad (3.26)$$

A vantagem de arrastarmos as variáveis para esta maneira aparentemente desagradável é que a condição para  $\varphi$  ser simplética é mais fácil expressar em termos de  $\alpha$  e  $\beta$  que em termos de  $a$  e  $b$ .

**Proposição 3.2.2.** *Toda aplicação simplética  $\varphi$  como em (3.23) satisfazendo (3.24) pode ser localmente representada na forma implícita*

$$\begin{cases} \xi = \frac{\partial S}{\partial \eta}(\eta, x) \\ y = \frac{\partial S}{\partial x}(\eta, x), \end{cases} \quad (3.27)$$

para alguma função suave  $S$  com  $\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \eta}\right) \neq 0$ .

*Demonstração.* Começemos por considerar, em  $\mathbb{R}^{4n}$ , a 1-forma

$$\sigma(\eta, \xi, x, y) = \sum_{j=1}^n y_j dx_j + \xi_j d\eta_j.$$

Pelo que vimos acima, (3.24)  $\Rightarrow$  (3.25). Sejam  $f_1, f_2 : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{4n}$  aplicações definidas por

$$\begin{aligned} f_1(\eta, x) &= (\eta, \alpha(\eta, x), x, \beta(\eta, x)) \\ f_2(\eta, \xi) &= (\eta, \xi, a(\eta, \xi), b(\eta, \xi)). \end{aligned}$$

Como a condição (3.24) implica (3.26), podemos definir um difeomorfismo local  $F : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{4n}$  por

$$F(\eta, x) = (\eta, \alpha(\eta, x)).$$

Daí, segue que  $f_1 = f_2 \circ F$ . Não é difícil verificar que  $(f_2^* d\sigma) = \varphi^* w_0 - w_0$ . De fato, considerando  $a = (a_1, \dots, a_n)$  e  $b = (b_1, \dots, b_n)$  temos

$$\begin{aligned} [(f_2^* d\sigma)(\eta, \xi)] \cdot (u, v) &= d\sigma(f_2(\eta, \xi)) \cdot (f_2'(\eta, \xi) \cdot u, f_2'(\eta, \xi) \cdot v) \\ &= \sum_{j=1}^n (db_j \wedge da_j)(a'(\eta, \xi) \cdot u, b'(\eta, \xi) \cdot v) - (dn_j \wedge d\xi_j)(u, v) \\ &= [(\varphi^* w_0 - w_0)(\eta, \xi)] \cdot (u, v) \end{aligned}$$



para todo  $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$  e  $(u, v) \in \mathbb{R}^{4n}$ . Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} d(f_1^* \sigma) &= f_1^*(d\sigma) \\ &= F^*(f_2^* d\sigma) \\ &= F^*(\varphi^* w_0 - w_0). \end{aligned}$$

Deste modo, se  $\varphi$  é simplética então  $f_1^* \sigma$  é fechada. Logo, pelo Lema 2.3.1, existe uma função  $S$  tal que, localmente,

$$\begin{aligned} f_1^* \sigma(\eta, x) &= \sum_{j=1}^n \beta_j(\eta, x) dx_j + \alpha_j(\eta, x) d\eta_j \\ &= dS(\eta, x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_j}(\eta, x) dx_j + \frac{\partial w}{\partial \eta_j}(\eta, x) d\eta_j. \end{aligned}$$

Por construção,  $\det \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \eta}(\eta, x) \right) = \det \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x}(\eta, x) \right) \neq 0$ , como queríamos.  $\square$

**Observação 3.2.3.** *Se  $S$  é uma função suave satisfazendo (3.27) então uma aplicação tal como (3.23) é simplética.*

Com efeito, seja  $S = S(\eta, x)$  qualquer função suave satisfazendo (3.27). Como

$$\begin{aligned} dS(\eta, x) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_j}(\eta, x) dx_j + \frac{\partial w}{\partial \eta_j}(\eta, x) d\eta_j \\ &= \sum_{j=1}^n y_j dx_j + \xi_j d\eta_j \end{aligned}$$

temos que

$$0 = ddS = \sum_{j=1}^n dy_j \wedge dx_j - d\eta_j \wedge d\xi_j.$$

Tomando uma aplicação  $\varphi$  tal como (3.23), teremos conseqüentemente que

$$\begin{aligned} \varphi^* w_0 - w_0 &= \sum_{j=1}^n db_j \wedge da_j - d\eta_j \wedge d\xi_j \\ &= \sum_{j=1}^n dy_j \wedge dx_j - d\eta_j \wedge d\xi_j \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $\varphi$  é simplética.

**Exemplo 3.2.4.** Considere  $\varphi = id_{\mathbb{R}^{2n}}$ , ou seja,  $\varphi(x, y) = (x, y)$  com  $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ . Esta aplicação naturalmente preserva a 2-forma  $w_0$ . Seja  $S : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $S(x, y) = \langle x, y \rangle$ . Calculando suas derivadas parciais temos que  $\frac{\partial}{\partial x} S(x, y) = y$  e  $\frac{\partial}{\partial y} S(x, y) = x$  e  $\det \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}(x, y) \right) = 1$ . Logo  $S$  é uma função geradora de  $\varphi$ .

**Exemplo 3.2.5.** Seja  $S : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $S(\eta, x) = -\frac{\|\eta - x\|^2}{2}$ . Como  $\frac{\partial S}{\partial \eta_i}(\eta, x) = x_i - \eta_i$  e  $\frac{\partial S}{\partial x_i}(\eta, x) = \eta_i - x_i$  segue que  $\det \left( \frac{\partial^2 S}{\partial \eta \partial x}(\eta, x) \right) = 1$ . Pela proposição anterior, podemos construir uma aplicação  $\varphi : (\eta, \xi) \mapsto (x, y)$ , em  $(\mathbb{R}^{2n}, w_0)$ , simplética, bastando que

$$\xi_i = \frac{\partial S}{\partial \eta_i}(\eta, x) = x_i - \eta_i$$

$$y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}(\eta, x) = \eta_i - x_i$$

Explicitamente,  $\varphi(\eta, \xi) = (\eta + \xi, -\xi)$ .

Passemos para a um caso mais geral, ou seja, consideraremos aplicações simpléticas  $f : (M, \sigma) \rightarrow (N, \tau)$  entre variedades simpléticas arbitrárias e procuraremos, localmente, expressar  $f$  em termos de alguma função  $S$ . Antes disso, precisamos de mais um par de definições.

**Definição 3.2.5.** Seja  $(M, w)$  uma variedade simplética e  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Defina o campo de vetores associado a  $\psi$ ,  $X_\psi$ , por

$$w(X_\psi(x), \cdot) = -d\psi(x) \quad \forall x \in M. \quad (3.28)$$

Os campos que satisfazem (3.28) são chamados de *campos Hamiltonianos* e o fluxo associado a este campo é chamado de *fluxo Hamiltoniano*.

Um caso particular, e bem interessante, é quando consideramos na definição acima a variedade simplética  $(\mathbb{R}^{2n}, w_0)$ . Neste caso, a condição (3.28) é equivalente a  $\langle \mathbb{J} X_\psi(x), \cdot \rangle = -\langle \nabla \psi(x), \cdot \rangle$ . Como  $\mathbb{J}^2 = -I_{2n}$ , estes campos ficam explicitamente determinados, a saber:

$$X_\psi(x) = \mathbb{J} \nabla \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (3.29)$$

Uma propriedade interessante dos fluxos Hamiltonianos são que eles preservam as estruturas simpléticas, ou seja, se  $\phi^t$  é um fluxo associado a um campo Hamiltoniano então  $(\phi^t)^* w = w$  para toda estrutura simplética  $w$ .

Para verificar este fato, pelo Corolário 1.2.1, basta mostrarmos que se  $X_\psi$  é um campo Hamiltoniano tendo  $\phi^t$  como seu fluxo então  $\mathcal{L}_{X_\psi} w = 0$ . Ora, usando a fórmula de Cartan vemos que

$$\mathcal{L}_{X_\psi} w = d(\iota_{X_\psi} w) + \iota_{X_\psi}(dw).$$

Como  $dw = 0$  e  $d(\iota_{X_\psi} w) = -d(d\psi) = 0$ , nós obtemos  $\mathcal{L}_{X_\psi} w = 0$ .

**Definição 3.2.6** (Colchete de Poisson). *Seja  $(M, w)$  variedade simplética. O colchete de Poisson de duas funções diferenciáveis  $F, G : M \rightarrow \mathbb{R}$  é a aplicação definida por*

$$\{F, G\} := -w(X_F, X_G), \quad (3.30)$$

onde  $X_F, X_G$  são os campos Hamiltonianos associados a  $F$  e  $G$ , respectivamente.

Claramente,  $\{F, G\} = -\{G, F\}$ . Desde que  $w(X_F, \cdot) = -dF$ , nós temos

$$\{F, G\} = dF(X_G) = -dG(X_F). \quad (3.31)$$

**Lema 3.2.1.** *Seja  $(\mathbb{R}^{2n}, w_0)$  o espaço simplético padrão e  $g_i, 1 \leq i \leq m < n$ ,  $m$  funções definidas numa vizinhança de  $0 \in \mathbb{R}^{2n}$  e satisfazendo as seguintes condições:*

1.  $\{g_i, g_j\}(0) = 0$ , para  $1 \leq i, j \leq m$ ;
2.  $\{dg_1(0), \dots, dg_m(0)\}$  formam um conjunto linearmente independente.

Então existe uma base simplética  $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$  tal que  $dg_j(0) = df_j$  para  $1 \leq j \leq m$ .

*Demonstração.* Considere  $X_{g_i}, 1 \leq i \leq m$ , o campo Hamiltoniano associado a  $g_i$ , ou seja,

$$X_{g_i} = \left( \frac{\partial g_i}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial g_i}{\partial y_n}, -\frac{\partial g_i}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial g_i}{\partial x_n} \right).$$

Como  $\{dg_1(0), \dots, dg_m(0)\}$  é um conjunto linearmente independente então se  $\sum_{i=1}^m \alpha_i dg_i(0) = 0$  temos  $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ . Em outras palavras, denotando

$$z_i = \begin{cases} x_i, & \text{se } 1 \leq i \leq n \\ y_i, & \text{se } n+1 \leq i \leq 2n \end{cases}$$

se  $\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i \frac{\partial g_l}{\partial z_i}(0) = 0$  então cada  $\lambda_i = 0$ . Daí, segue que  $\{X_{g_1}(0), \dots, X_{g_m}(0)\}$  é um conjunto de vetores linearmente independentes. A condição (1) é o mesmo que

$$-w_0(X_{g_i}(0), X_{g_j}(0)) = 0$$

para todo  $1 \leq i, j \leq m$ . Tome  $e_i = X_{g_i}(0)$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Podemos completar  $\{e_1, \dots, e_m\}$  para uma base simplética  $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} dg_j(0) \cdot f_i &= -w_0(X_{g_j}(0), f_i) \\ &= w_0(f_i, X_{g_j}(0)) \\ &= w_0(f_i, e_j) \\ &= \delta_{ij} \\ &= df_j(f_i), \end{aligned}$$

para todo  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ . □

**Observação 3.2.4.** *Se a aplicação  $g : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tem por funções coordenadas  $g_1, \dots, g_n$  como no lema acima, então podemos escolher coordenadas simpléticas tal que  $\det(D_y g(x, y)) \neq 0$  numa vizinhança de  $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ . Em particular,  $D_y g(x, y)$  é um isomorfismo numa vizinhança de  $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ .*

De fato, escolhendo a base simplética  $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$  dada pelo lema acima, temos que  $dg_i(0) = df_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Como

$$dg_i(0) \cdot f_j = \sum_{l=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial y_l}(0) df_l(f_j) = \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(0),$$

segue que  $\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(0) = \delta_{ij}$ . Portanto  $\det(D_y g(0)) \neq 0$ . Por continuidade,  $\det(D_y g(x, y)) \neq 0$  numa vizinhança de  $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ .

**Teorema 3.2.3.** *Sejam  $(M, \sigma)$  e  $(N, \tau)$  variedades simpléticas tais que  $\dim M = \dim N = 2n$ . Se  $f : M \rightarrow N$  é uma aplicação simplética de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , então para todo  $m \in M$  existem cartas simpléticas  $(U, \phi)$  em  $M$  e  $(V, \psi)$  em  $N$  com  $m \in U$ ,  $f(m) \in V$  e  $f(U) \subset V$  tal que para a representação  $F$  de  $f$ ,  $F := \psi \circ f \circ \phi^{-1} \in C^k(\phi(U), \psi(V))$  dada por*

$$F(x, y) = (\xi, \eta) \tag{3.32}$$

nós temos

$$\begin{cases} \xi &= \frac{\partial S}{\partial \eta}(x, \eta) \\ y &= \frac{\partial S}{\partial x}(x, \eta) \end{cases} \tag{3.33}$$

com  $S \in C^{k+1}(W)$ , para algum  $W \subset \mathbb{R}^{2n}$ , satisfazendo  $\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \eta}(x, \eta)\right) \neq 0$  para todo  $(x, \eta) \in W$ .

*Demonstração.* Seja  $f \in C^k(M, N)$ ,  $k \geq 1$ , simplética. Dado  $m \in M$ , pelo teorema de Darboux, podemos escolher cartas simpléticas  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  com  $m \in U$ ,  $f(m) \in V$ ,  $f(U) \subset V$ ,  $\phi(m) = 0$  e  $\psi(f(m)) = 0$ . Defina  $F = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ . Daí  $F(0) = 0$ . Escreveremos  $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (\xi, \eta)$  com  $u = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $v = (v_1, \dots, v_n)$  e  $(x, y) \in \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ . Considere as 1-formas

$$\theta_1(x, y) = \sum_i x_i dy_i,$$

$$\theta_2(\xi, \eta) = \sum_i \xi_i d\eta_i.$$

Desde que  $f$  é simplética e pela escolha das cartas, temos que  $F^*(d\theta_2) = d\theta_1$ . Como

$$F'(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(z) & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(z) & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}(z) & \frac{\partial u_1}{\partial y_1}(z) & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial y_n}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1}(z) & \frac{\partial u_n}{\partial x_2}(z) & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n}(z) & \frac{\partial u_n}{\partial y_1}(z) & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial y_n}(z) \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(z) & \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(z) & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_n}(z) & \frac{\partial v_1}{\partial y_1}(z) & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial y_n}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_1}(z) & \frac{\partial v_n}{\partial x_2}(z) & \cdots & \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(z) & \frac{\partial v_n}{\partial y_1}(z) & \cdots & \frac{\partial v_n}{\partial y_n}(z) \end{pmatrix}$$

temos que

$$\begin{aligned} du_k(F'(z) \cdot X_{v_i}) &= \sum_l \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial y_l} - \frac{\partial u_k}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_l} \right) \\ dv_k(F'(z) \cdot X_{v_i}) &= 0 \end{aligned}$$

para todo  $1 \leq i, k \leq n$ . Isto diz que

$$\det \begin{pmatrix} du_k(F'(z) \cdot X_{v_i}) & du_k(F'(z) \cdot X_{v_j}) \\ dv_k(F'(z) \cdot X_{v_i}) & dv_k(F'(z) \cdot X_{v_j}) \end{pmatrix} = 0$$

para todo  $1 \leq i, j, k \leq n$ . Logo,

$$\begin{aligned} \{v_i, v_j\}(z) &= d\theta_1(z) \cdot (X_{v_i}, X_{v_j}) \\ &= [(F^*d\theta_2)(z)] \cdot (X_{v_i}, X_{v_j}) \\ &= \sum_k \det \begin{pmatrix} du_k(F'(z) \cdot X_{v_i}) & du_k(F'(z) \cdot X_{v_j}) \\ dv_k(F'(z) \cdot X_{v_i}) & dv_k(F'(z) \cdot X_{v_j}) \end{pmatrix} \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo  $1 \leq i, j \leq n$ .

Visto que  $v_1, \dots, v_n$  são linearmente independentes então pela Observação 3.2.4 podemos encontrar uma transformação simplética tal que  $D_y v(x, y)$  é um isomorfismo numa vizinhança de 0. Assim, pelo Teorema da função implícita, existe uma única aplicação  $b \in C^k$ , com  $b(0) = 0$  tal que  $y = b(x, \eta)$  satisfazendo  $\eta = v(x, y)$ . Vamos, agora, definir  $a \in C^k$  por meio de  $\xi = u(x, b(x, \eta)) := a(x, \eta)$ .

Resta definir  $S \in C^{k+1}$  tal que  $a = \frac{\partial S}{\partial \eta}$  e  $b = \frac{\partial S}{\partial x}$ . Para isso, considere as aplicações locais  $\sigma_1 : (x, \eta) \mapsto (x, b(x, \eta))$  e  $\sigma_2 : (x, \eta) \mapsto (a(x, \eta), \eta)$ . Evidentemente que  $\sigma_1(0) = 0$  e  $\sigma_2(0) = 0$ . Para o que segue é necessário mostrar que  $\sigma_1$  é um difeomorfismo local. De fato, como  $v(x, y) = v(x, b(x, \eta)) = \eta$  podemos derivar em relação a  $\eta$  e obter que  $D_y v \circ D_\eta b = I$ . Isto implica que  $\det(D_\eta b) \neq 0$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} \det(\sigma'_1) &= \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ D_x b & D_\eta b \end{pmatrix} \\ &= \det(D_\eta b) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Daí, pelo teorema da aplicação inversa, temos que  $\sigma_1$  é um difeomorfismo local.

Agora, como podemos escrever  $F = \sigma_2 \circ \sigma_1^{-1}$ , no domínio adequado, obtemos que  $\sigma_2$  é um difeomorfismo local. Vamos mostrar que a 1-forma  $\lambda = ad\eta + bdx$  é fechada. Denotando por  $\theta_3(x, y) = \sum_i y_i dx_i$ , podemos escrever  $\lambda = \sigma_2^* \theta_2 + \sigma_1^* \theta_3$ . Segue que  $(\sigma_1^{-1})^* \lambda = F^* \theta_2 + \theta_3$ . Desta maneira  $(\sigma_1^{-1})^* d\lambda = F^* d\theta_2 + d\theta_3 = F^* d\theta_2 - d\theta_1$ . Como  $F$  é simplética temos que  $(\sigma_1^{-1})^* d\lambda = 0$  e portanto  $d\lambda = 0$ .

Como toda forma fechada é localmente exata, existe um aberto  $W$  e uma função  $S \in C^{k+1}(W)$  tal que  $a = \frac{\partial S}{\partial \eta}$  e  $b = \frac{\partial S}{\partial x}$  em  $W$ . Por construção,  $\frac{\partial^2 S}{\partial \eta \partial x}(x, \eta) = \frac{\partial b}{\partial \eta}(x, \eta) \neq 0$  para  $(x, \eta) \in W$ .  $\square$

**Observação 3.2.5.** *A recíproca do Teorema 3.2.3 é válida, ou seja, se  $S$  é uma função satisfazendo (3.33) então a aplicação  $f$  é simplética.*

De fato, seja  $F$  a representação local de  $f$  como (3.32) e  $S$  uma função que satisfaz (3.33). Podemos escrever  $F = \sigma_2 \circ \sigma_1^{-1}$  onde  $\sigma_1(x, \eta) = (x, D_x S(x, \eta))$  e  $\sigma_2(x, \eta) = (D_\eta S(x, \eta), \eta)$  são difeomorfismos locais. Denotando por  $\theta_3 = \sum_k y_k dx_k$ , segue que  $dS = (\sigma_2)^* \theta_2 + (\sigma_1)^* \theta_3$ . Como

$d\theta_3 = -d\theta_1$  então

$$\begin{aligned} F^*(d\theta_2) - d\theta_1 &= (\sigma_1^{-1})^*(d(\sigma_2^*\theta_2 + (\sigma_1)^*d\theta_3)) \\ &= (\sigma_1^{-1})^*ddS = 0. \end{aligned}$$

Em particular,  $f$  é simplética.

**Observação 3.2.6.** *Uma função  $S$  satisfazendo (3.33), com  $\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \eta}\right) \neq 0$ , será chamada “função geradora local” de  $f$  e representaremos isso por  $F := E(S)$ .*





## Capítulo 4

# Aproximações de funções

Finalmente chegamos ao objetivo deste trabalho. Neste capítulo abordaremos dois tipos de aproximações ou suavizações de funções. O primeiro deles, já bem conhecido, é o que chamamos de *suavização padrão*. Infelizmente, neste método não conseguimos garantir que a função aproximada preserva volume. No entanto, nem tudo está perdido. Na seção 4.2 veremos que podemos resolver este problema usando técnicas com funções geradoras.

### 4.1 Suavização padrão

Nesta seção temos por objetivo provar o seguinte resultado:

**Teorema 4.1.1.** *Seja  $M$  uma superfície compacta. O subconjunto  $C^\infty(M, \mathbb{R}^s)$  é denso em  $C^p(M, \mathbb{R}^s)$ ,  $p \geq 1$ .*

Dadas duas funções  $h_1, h_2 : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  integráveis, definiremos a *convolução* de  $h_1$  com  $h_2$  como uma aplicação  $h_1 * h_2 : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$h_1 * h_2(u) = \int_U h_1(v)h_2(u+v)dv. \quad (4.1)$$

Para provar o Teorema 4.1.1, comecemos provando o seguinte lema.

**Lema 4.1.1.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^m$  aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^s$  uma aplicação de classe  $C^p$ ,  $p \geq 1$ . Considere  $K \subset U$  compacto. Dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma aplicação de classe  $C^\infty$   $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$  tal que  $\|f-g\|_{C^p} < \varepsilon$  em  $K$ .*

*Demonstração.* Considere  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$  uma função de classe  $C^\infty$ , com suporte em  $U$ , e que vale 1 em  $K$  e igual a zero fora de uma vizinhança de  $K$  contida em  $U$ . Defina  $h : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$  por  $h = \varphi \cdot f$ . Note que  $h = f$  em  $K$  e  $h = 0$  fora de  $U$ . Como  $K$  é compacto e  $h$  é de classe  $C^p(K)$ , temos que, para todo  $1 \leq j \leq p$ ,  $d^j h : K \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^s)$  é uniformemente contínua, ou seja, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\sup\{\|d^j h(u+v) - d^j h(u)\| : u \in K, |v| < \delta\} < \varepsilon. \quad (4.2)$$

Seja  $\varphi_\delta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$ , tal que  $\varphi_\delta(v) = 0$  se  $|v| \geq \delta$  e  $\int \varphi_\delta dv = 1$ . Tome  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$  dada por  $g := \varphi_\delta * h$ . Note que com uma simples mudança de variável obtemos que  $g(u) = \int \varphi_\delta(z-u)h(z)dz$ . Então, diferenciando em relação a  $u$ ,

$$d^j g(u) = \int \varphi_\delta(v) d^j h(u+v) dv \quad (4.3)$$

$$= (-1)^j \int d^j \varphi_\delta(z-u) h(z) dz. \quad (4.4)$$

Daí, pela igualdade (4.4) temos que  $g$  é  $C^\infty$ . Por outro lado, pela igualdade (4.3),

$$\begin{aligned} \|d^j g(u) - d^j h(u)\| &= \left\| \int [\varphi_\delta(v) d^j h(u+v) - \varphi_\delta(v) d^j h(u)] dv \right\| \\ &= \left\| \int \varphi_\delta(v) [d^j h(u+v) - d^j h(u)] dv \right\| \\ &< \left\| \int \varphi_\delta(v) \varepsilon dv \right\| = \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo  $u \in K$ ,  $\|v\| < \delta$  e  $0 \leq j \leq p$ .

Agora, considere  $\{V_1, \dots, V_n\}$  uma cobertura para  $K$ . Sejam  $\{(U_i, \phi_i)\}$  coordenadas locais tais que cada  $V_i \subset U_i \subset U$  e  $\phi_i(U_i) = B(2)$ ,  $\phi_i(V_i) = B(1)$ . Denote por  $f^i = f \circ \phi_i^{-1}$  e  $g^i = g \circ \phi_i^{-1}$ . Pelo que vimos acima, dado  $\varepsilon > 0$  podemos supor que, em  $K$ ,  $\|d^j f(v) - d^j g(v)\| < \frac{\varepsilon}{\max_i \{\|\phi_i^{-1}\|_{C^p}\}}$  para todo  $0 \leq j \leq p$ .

Deste modo,

$$\begin{aligned} \|d^j f^i(u) - d^j g^i(u)\| &\leq \|d^j f(\phi_i^{-1}(u)) - d^j g(\phi_i^{-1}(u))\| \|d^j \phi_i^{-1}(u)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{\max_i \{\|\phi_i^{-1}\|_{C^p}\}} \|d^j \phi_i^{-1}(u)\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, a função  $g$  satisfaz a condição desejada.  $\square$

### Demonstração do Teorema 4.1.1

Sejam  $\{(U_i, \phi_i)\}, i = 1, \dots, n$  cartas locais com  $\phi_i(U_i) = B(2)$  e  $M \subset \bigcup_i V_i$  onde  $V_i = \phi_i^{-1}(B(1))$ . Tomemos uma partição da unidade  $\{\varphi_i : M \rightarrow \mathbb{R}\}$  de classe  $C^\infty$  estritamente subordinada a cobertura  $\{V_i\}$ . Sejam  $f \in \mathcal{C}^p(M, \mathbb{R}^s)$  e  $\varepsilon > 0$ . Denote por  $f^i = f \circ \phi_i^{-1}$ . Pelo Lema 4.1.1, dado  $\delta > 0$  existe  $\bar{g}^i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s, C^\infty$ , tal que  $\|f^i - \bar{g}^i\|_{\mathcal{C}^p} < \delta$  em  $\overline{B(1)}$ . Diminuindo  $\delta$  de necessário temos que  $\|\varphi_i f - \varphi_i \bar{g}^i \circ \phi_i\|_{\mathcal{C}^p} < \frac{\varepsilon}{n}$ . Logo  $g = \sum_{i=1}^n \varphi_i \bar{g}^i \circ \phi_i$  é  $C^\infty$  em  $M$  e

$$\|f - g\|_{\mathcal{C}^p} = \left\| \sum_{i=1}^n \varphi_i f - \varphi_i \bar{g}^i \circ \phi_i \right\|_{\mathcal{C}^p} \leq \sum_{i=1}^n \|\varphi_i f - \varphi_i \bar{g}^i \circ \phi_i\|_{\mathcal{C}^p} < \varepsilon. \quad \square$$

## 4.2 Suavização Simplética

O alvo do nosso trabalho está no teorema abaixo, cuja prova será dada mais adiante.

**Teorema 4.2.1.** *Seja  $(M, \sigma)$  e  $(N, \tau)$  variedades simpléticas. O conjunto dos difeomorfismos simpléticos de classe  $C^\infty$  de  $M$  em  $N$  é denso no espaço dos difeomorfismos simpléticos de classe  $C^k$  de  $M$  em  $N$ , para  $k \geq 1$ .*

Começemos por mostrar o seguinte:

**Lema 4.2.1.** *Seja  $W \subset \mathbb{R}^{2n}$  aberto. Considere o conjunto  $\mathcal{D}^{k+1}(W) := \{S \in \mathcal{C}^{k+1}(W) : \det \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \eta}(x, \eta) \right) \neq 0, \forall (x, \eta) \in W\}, k \geq 1$ . Se  $S, S_1 \in \mathcal{D}^{k+1}(W)$  e  $\|S - S_1\|_{\mathcal{C}^{k+1}(K_1)}$  então  $\|E(S) - E(S_1)\|_{\mathcal{C}^k(K_2)}$ , onde  $K_1 \subset W$  e  $K_2$  contido no domínio de  $E(S)$  são conjuntos compactos.*

As próximas duas proposições nos ajudaram na prova deste lema.

**Proposição 4.2.1.** *Sejam  $U, V \subset \mathbb{R}^{2n}$  conjuntos abertos e  $K_1 \subset U$  e  $K_2 \subset V$  conjuntos compactos. Denote por  $\text{Dif}^k(U, V)$  o conjunto dos difeomorfismos de classe  $C^k$  de  $U$  em  $V$ . Para  $k \geq 1$ , se  $f, g \in \text{Dif}^k(U, V)$  e  $\|f - g\|_{\mathcal{C}^k(K_1)}$  então  $\|f^{-1} - g^{-1}\|_{\mathcal{C}^k(K_2)}$ .*

*Demonstração.* Faremos a prova por indução sobre  $k$ . Admita que  $f, g : K_1 \rightarrow K_2$  seja ainda difeomorfismo. Começemos com  $k = 1$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , suponha que  $\|f - g\|_{\mathcal{C}^1(K_1)} < \frac{\varepsilon}{2}$ , ou seja,  $|f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$  e  $|Df(x) - Dg(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $x \in K_1$ . Como  $f|_{K_1}$  é uniformemente contínua, dados  $x, y \in K_1$  com  $|x - y| < \frac{\varepsilon}{4}$  pode-se supor que  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Daí, se  $x, y \in K_1$  tal que  $|x - y| < \frac{\varepsilon}{4}$  então

$$|f(x) - g(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Fato análogo com as funções  $Df$  e  $Dg$ . Sendo  $f$  difeomorfismo, dado arbitrariamente  $w \in K_2$  existe  $a_1 \in K_1$  tal que  $f(a_1) = w$ . Pelo que vimos acima,  $f(a_1) \in g(B(a_1; \frac{\varepsilon}{4}) \cap K_1) \subset B(w; \varepsilon)$ . Então, existe  $a_2 \in B(a_1; \frac{\varepsilon}{4}) \cap K_1$  tal que  $g(a_2) = w$ . Segue que

$$|f^{-1}(w) - g^{-1}(w)| = |f^{-1}(f(a_1)) - g^{-1}(g(a_2))| = |a_1 - a_2| < \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

Deste que  $w$  é arbitrário,  $|f^{-1}(w) - g^{-1}(w)| < \varepsilon$  para todo  $w \in K_2$ .

Notemos que como  $f^{-1} \circ f = id$  e  $g^{-1} \circ g = id$  então  $Df^{-1}(f(x)) = [Df(x)]^{-1}$  e  $Dg^{-1}(g(x)) = [Dg(x)]^{-1}$ ,  $\forall x \in K_1$ . Visto que a aplicação inversão de matrizes, com determinante não nulo, é contínua, sendo  $|Df(x) - Dg(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$  podemos supor que  $|[Df(x)]^{-1} - [Dg(y)]^{-1}| < \varepsilon$ ,  $\forall x, y \in K_1$ . Por outro lado, para cada  $w \in K_2$  existem  $a_1, a_2 \in K_1$  tais que  $w = f(a_1) = g(a_2)$  e como  $|Df(a_1) - Dg(a_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$  então  $|Df^{-1}(w) - Dg^{-1}(w)| = |[Df(a_1)]^{-1} - [Dg(a_2)]^{-1}| < \varepsilon$ . Portanto, temos provado que  $\|f^{-1} - g^{-1}\|_{\mathcal{C}^1(K_2)} < \varepsilon$ .

Agora, assuma que a proposição seja verdadeira para  $k > 1$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , suponha que  $\|f - g\|_{\mathcal{C}^{k+1}(K_1)} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Note que, para ponto  $x \in K_1$ ,  $Df(x)$  e  $Dg(x)$  são difeomorfismos de classe  $\mathcal{C}^k$ . Como  $\|Df(x) - Dg(x)\|_{\mathcal{C}^k} < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $\forall x \in K_1$ , por hipótese de indução, podemos supor que  $\|[Df(x)]^{-1} - [Dg(x)]^{-1}\|_{\mathcal{C}^k} < \varepsilon$ . Desde que  $Df^{-1}(f(x)) = [Df(x)]^{-1}$  e  $Dg^{-1}(g(x)) = [Dg(x)]^{-1}$  para todo  $x \in K_1$ , temos que  $\|Df^{-1}(f(x)) - Dg^{-1}(g(x))\|_{\mathcal{C}^k} < \varepsilon$ . Em particular, como  $f$  e  $g$  são difeomorfismos,  $\|Df^{-1}(y) - Dg^{-1}(y)\|_{\mathcal{C}^k} < \varepsilon$ ,  $\forall y \in K_2$ . Pelo que já vimos nos casos anteriores, podemos supor que  $|f^{-1}(y) - g^{-1}(y)| < \varepsilon$  para todo  $y \in K_2$ . Assim,  $\|f^{-1} - g^{-1}\|_{\mathcal{C}^{k+1}(K_2)} < \varepsilon$ .  $\square$

**Proposição 4.2.2.** *Sejam  $U, V, W \subset \mathbb{R}^{2n}$  conjuntos abertos. Então, para  $k \geq 1$ ,*

- Sejam  $\Phi : V \rightarrow W$  é uma função de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $K_1 \subset U$  e  $K_2 \subset V$  conjuntos compactos e  $h_1, h_2 \in \mathcal{C}^k(U, V)$ . Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $\|h_1 - h_2\|_{\mathcal{C}^k(K_1)} < \delta$  então  $\|\Phi \circ h_1 - \Phi \circ h_2\|_{\mathcal{C}^k(K_2)} < \varepsilon$ .*
- Sejam  $\Psi : U \rightarrow V$  é uma função de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $K \subset U$  conjunto compacto e  $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^k(V, W)$ . Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $\|f_1 - f_2\|_{\mathcal{C}^k(\Psi(K))} < \delta$  então  $\|f_1 \circ \Psi - f_2 \circ \Psi\|_{\mathcal{C}^k(K)} < \varepsilon$ .*
- Sejam  $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^k(U, V)$  e  $g_1, g_2 \in \mathcal{C}^k(V, W)$ . Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $\|f_1 - f_2\|_{\mathcal{C}^k(K_1)} < \delta$  e  $\|g_1 - g_2\|_{\mathcal{C}^k(K_2)} < \delta$  então  $\|g_1 \circ f_1 - g_2 \circ f_2\|_{\mathcal{C}^k(K_1)} < \varepsilon$ , onde  $K_1 \subset U$  e  $K_2 \subset V$  são compactos.*

*Demonstração.*

- a. Dado  $\varepsilon > 0$ , suponhamos que  $\|h_1 - h_2\|_{C^k(K_1)} < \frac{\varepsilon}{\|\Phi\|_{C^k(K_2)}}$ , ou seja,  $|h_1(x) - h_2(x)| < \frac{\varepsilon}{\|\Phi\|_{C^k(K_2)}}$  e  $|D^j h_1(x) - D^j h_2(x)| < \frac{\varepsilon}{\|\Phi\|_{C^k(K_2)}}$ , para todo  $x \in K_1$  e  $j = 1, \dots, k$ . Como  $\Phi|_{K_2}$  uniformemente contínua, podemos supor que  $|\Phi \circ h_1(x) - \Phi \circ h_2(x)| < \varepsilon$  para todo  $x \in K_1$ . Além disso, para todo  $x \in K_1$  e  $j = 1, \dots, k$ ,

$$\begin{aligned} |D^j(\Phi \circ (h_1(x) - h_2(x)))| &\leq |D^j \Phi(h_1(x) - h_2(x))| |D^j(h_1(x) - h_2(x))| \\ &\leq \|\Phi\|_{C^k(K_2)} \|h_1 - h_2\|_{C^k(K_1)} < \varepsilon, \end{aligned}$$

Portanto,  $\|\Phi \circ h_1 - \Phi \circ h_2\|_{C^k(K_1)} < \varepsilon$ .

- b. Notemos que

$$\begin{aligned} |D^j(f_1(\Psi(x)) - f_2(\Psi(x)))| &\leq |D^j f_1(\Psi(x)) - D^j f_2(\Psi(x))| |D^j \Psi(x)| \\ &\leq \|f_1 - f_2\|_{C^k(\Psi(K))} \|\Psi\|_{C^k(K)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

para todo  $x \in K$  e  $j = 1, \dots, k$ . Vamos verificar os dois casos possíveis.

*Caso 1.*  $\|\Psi\|_{C^k(K)} \leq 1$ . Neste caso, suponha que  $\|f_1 - f_2\|_{C^k(\Psi(K))} < \varepsilon$ . Em particular,  $|f_1(\Psi(x)) - f_2(\Psi(x))| < \varepsilon$  para todo  $x \in K$ . Além disso, por (4.5),  $|D^j(f_1(\Psi(x)) - f_2(\Psi(x)))| < \varepsilon$ , para todo  $x \in K$  e  $j = 1, \dots, k$ . Portanto,  $\|f_1 \circ \Psi - f_2 \circ \Psi\|_{C^k(K)} < \varepsilon$ .

*Caso 2.*  $\|\Psi\|_{C^k(K)} > 1$ . Para esse caso, suponha que  $\|f_1 - f_2\|_{C^k(\Psi(K))} < \frac{\varepsilon}{\|\Psi\|_{C^k(K)}}$ . Isto implica que  $|f_1(\Psi(x)) - f_2(\Psi(x))| < \frac{\varepsilon}{\|\Psi\|_{C^k(K)}}$  para todo  $x \in K$ . Por (4.5),  $|D^j(f_1(\Psi(x)) - f_2(\Psi(x)))| < \varepsilon$ , para todo  $x \in K$  e  $j = 1, \dots, k$ . Como  $\frac{\varepsilon}{\|\Psi\|_{C^k(K)}} < \varepsilon$ ,  $|f_1(\Psi(x)) - f_2(\Psi(x))| < \varepsilon$  para todo  $x \in K$ . Portanto  $\|f_1 \circ \Psi - f_2 \circ \Psi\|_{C^k(K)} < \varepsilon$ .

- c. Sejam  $K_1 \subset U$  e  $K_2 \subset V$  compactos e  $\varepsilon > 0$ . Pelo ítem (a), existe  $\delta_1 > 0$ , tal que se  $\|f_1 - f_2\|_{C^k(K_1)} < \delta_1$  então  $\|g_2 \circ f_1 - g_2 \circ f_2\|_{C^k(K_1)} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Pelo ítem (b), existe  $\delta_2 > 0$ , tal que se  $\|g_1 - g_2\|_{C^k(K_2)} < \delta_2$  então  $\|g_1 \circ f_1 - g_2 \circ f_1\|_{C^k(K_1)} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Deste modo, dado  $\varepsilon > 0$ , tome  $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ , e se  $\|f_1 - f_2\|_{C^k(K_1)} < \delta$  e  $\|g_1 - g_2\|_{C^k(K_2)} < \delta$  implica que

$$\begin{aligned} \|g_1 \circ f_1 - g_2 \circ f_2\|_{C^k(K_1)} &\leq \|g_1 \circ f_1 - g_2 \circ f_1\|_{C^k(K_1)} + \|g_2 \circ f_1 - g_2 \circ f_2\|_{C^k(K_1)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

#### DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 4.2.1.

Sejam  $S_1, S_2 \in \mathcal{D}^{k+1}(W)$  e  $K \subset W$  compacto. Dado  $\varepsilon > 0$ , tome  $\delta > 0$  tal que  $\|S_1 - S_2\|_{\mathcal{C}^{k+1}(K)} < \delta$ . Escolha  $U$  como sendo o contra-domínio da aplicação  $\sigma_1 : W \rightarrow U$  dada por

$$\sigma_1(x, \eta) = \left(x, \frac{\partial S_1}{\partial x}(x, \eta)\right).$$

Sabemos que tanto a aplicação  $\sigma_1$  como  $\sigma_2 : W \rightarrow V$  dada por  $\sigma_2(x, \eta) = \left(\frac{\partial S_1}{\partial \eta}(x, \eta), \eta\right)$ , são difeomorfismos (ver Teorema 3.2.3). Analogamente para as aplicações  $\tau_1 : W \rightarrow U$  e  $\tau_2 : W \rightarrow V$  dadas por

$$\begin{aligned}\tau_1(x, \eta) &= \left(x, \frac{\partial S_2}{\partial x}(x, \eta)\right) \\ \tau_2(x, \eta) &= \left(\frac{\partial S_2}{\partial \eta}(x, \eta), \eta\right).\end{aligned}$$

Evidentemente, como  $S_1$  e  $S_2$  estão  $\mathcal{C}^k$ -próximas,  $\|\sigma_1 - \tau_1\|_{\mathcal{C}^k(K)} < \delta$  e  $\|\sigma_2 - \tau_2\|_{\mathcal{C}^k(K)} < \delta$ . Daí, pela Proposição 4.2.1, as funções  $\sigma_1^{-1}$  e  $\tau_1^{-1}$  estão  $\mathcal{C}^k$ -próximas. Denotemos  $F_1 := E(S_1)$  e  $F_2 := E(S_2)$ . Como vimos no Teorema 3.2.3, podemos reescrever estas funções por:

$$\begin{aligned}F_1 &= \sigma_2 \circ \sigma_1^{-1} \\ F_2 &= \tau_2 \circ \tau_1^{-1}.\end{aligned}$$

Portanto, pelo item (c) da Proposição 4.2.2,  $\|F_1 - F_2\|_{\mathcal{C}^k(K_1)} < \varepsilon$ , onde  $K_1 \subset U$  é compacto.  $\square$

**Observação 4.2.1.** *Podemos suavizar um difeomorfismo simplético  $F = E(S)$  através de uma suavização (padrão) na sua função geradora  $S$ .*

De fato, seja  $F = E(S)$  um  $\mathcal{C}^k$ -difeomorfismo simplético,  $k \geq 1$ , de  $U \subset \mathbb{R}^{2n}$  em  $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ ,  $U$  simplesmente conexo e  $\bar{U}$  compacto, o qual é dado pela função geradora  $S \in \mathcal{C}^{k+1}(W)$  como no Teorema 3.2.3. Podemos escrever  $F = \sigma_2 \circ \sigma_1^{-1}$  onde  $\sigma_1 : W \rightarrow U$  e  $\sigma_2 : W \rightarrow V$  são difeomorfismos. Vamos escolher subconjuntos  $W_2, W_3 \subset W$  abertos tais que  $\bar{W}_3, \bar{W}_2$  são compactos e  $\bar{W}_3 \subset W_2$  e  $\bar{W}_2 \subset W$  (abreviaremos isto por  $W_3 \subset\subset W_2 \subset\subset W$ ).

Para aproximar  $S$  em  $W_3$  por uma função  $C^\infty$ , comecemos escolhendo funções  $\zeta \in C_0^\infty(W_2)$  com  $\zeta \equiv 1$  em  $\bar{W}_3$  e  $\gamma \in C_0^\infty(W)$  com  $\gamma \equiv 1$  em  $\bar{W}_2$ .

Pelo Lema 4.1.1, dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma função  $X_\varepsilon \in C_0^\infty(W)$  tal que

$$\|\gamma \cdot [(\zeta \cdot S) - X_\varepsilon * (\zeta \cdot S)]\|_{\mathcal{C}^{k+1}(W)} < \varepsilon.$$

Defina  $S_1 \in \mathcal{C}^{k+1}(W)$  por

$$S_1 = S - \gamma \cdot [(\zeta \cdot S) - X_\varepsilon * (\zeta \cdot S)].$$

Segue que  $\|S - S_1\|_{\mathcal{C}^{k+1}(W)} < \varepsilon$ . Além disso,  $S_1 = S$  em  $W \setminus \overline{W}_2$ , pois  $\zeta \equiv 0$  fora de  $W_2$ , e  $S_1 = X_\varepsilon * S$  em  $W_3$ , pois  $\gamma \equiv \zeta \equiv 1$  em  $W_3$ . Portanto  $S_1|_{W_3} \in \mathcal{C}^\infty$ .

Agora, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno escolhemos  $U_3 \subset\subset U_2 \subset\subset U$  tal que  $U_3 \subset \sigma_1(W_3)$  e  $\sigma_1(W_2) \subset U_2$ . Defina

$$F_1 := E(S_1).$$

Como podemos escrever  $F_1 = \tau_2 \circ \tau_1^{-1}$ , com  $\tau_1(x, \eta) = (x, \frac{\partial S_1}{\partial x}(x, \eta))$  e  $\tau_2(x, \eta) = (\frac{\partial S_1}{\partial \eta}(x, \eta), \eta)$ , se  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno então

(P1)  $F_1|_{U_3} \in \mathcal{C}^\infty(U_3)$ , pois  $\tau_1$  e  $\tau_2$  são  $\mathcal{C}^\infty$  em  $W_3$ .

(P2) Pelo Teorema 3.2.3,  $F_1$  é um difeomorfismo simplético de  $U$  em  $F(U)$ .

(P3)  $F_1 = F$  em  $U \setminus \overline{U}_2$ , pois como  $S = S_1$  em  $W \setminus \overline{W}_2$  então  $\sigma_1 = \tau_1$  e  $\sigma_2 = \tau_2$  em  $W \setminus \overline{W}_2$ .

(P4)  $F_1$  é de classe  $\mathcal{C}^p$ ,  $k \leq p \leq \infty$  nos abertos em que  $F$  é de classe  $\mathcal{C}^p$ , pois nestes abertos a função  $S_1$ , definida acima, será de classe  $\mathcal{C}^{p+1}$  e como  $F_1 = E(S_1)$  então  $F_1$  será de classe  $\mathcal{C}^p$ .

(P5) Pelo Lema 4.2.1,  $\|F_1 - F\|_{\mathcal{C}^k(U)} < \delta(\varepsilon)$  com  $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 4.2.1

Seja  $f \in \mathcal{C}^k(M, N)$  um difeomorfismo simplético de  $M$  em  $N$  e  $W_f$  uma vizinhança aberta, suficientemente pequena de  $f$  na topologia  $\mathcal{C}^k$ . Escolha uma cobertura localmente finita de  $M$ , consistindo de cartas simpléticas  $(U_i, \phi_i)$ ,  $1 \leq i \leq \infty$ , com as seguinte propriedades:

1.  $\overline{U}_i$  é compacto;
2.  $h(U_i) \subset V_i$  para todo  $h \in \mathcal{C}^k(M, N) \cap W_f$ , com  $(V_i, \varphi_i)$ ,  $1 \leq i \leq \infty$  sendo um atlas simplético em  $N$ .

Além disso, tomemos uma cobertura  $(U_i^{(3)})$ ,  $1 \leq i \leq \infty$ , em  $M$ , tal que  $U_i^{(3)} \subset\subset U_i^{(2)} \subset\subset U_i$  e em  $U_i$  todo simplectomorfismo na vizinhança  $W_f$  é dado pela função geradora local de  $f$  como no Teorema 3.2.3, onde a construção local é tomada previamente com respeito a  $\phi_i(U_i^{(3)}) \subset\subset \phi_i(U_i^{(2)}) \subset\subset \phi_i(U_i)$ .

Agora, definiremos uma seqüência de funções  $(f_n)$  tal que  $f_0 = f$  e  $f_n|_{U_1^{(3)} \cup \dots \cup U_n^{(3)}}$  é  $\mathcal{C}^\infty$ .

A partir das propriedades da nossa cobertura, a aplicação local  $F_1 := \varphi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1} \in \mathcal{C}^k(\phi_1(U_1), \varphi_1(V_1))$  é um simplectomorfismo de  $\phi_1(U_1)$  sobre a sua imagem, o qual é dado por  $F_1 := E(S_1)$ , onde  $S_1$  é a função geradora local de  $F_1$ . Pela Observação 4.2.1, existe uma aplicação  $G_1$  tal que

- $G_1 = F_1$ , fora de  $\phi_1(U_1^{(2)})$ ;
- $G_1|_{\phi_1(U_1^{(3)})}$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ;
- $G_1$  é  $\mathcal{C}^p$  nos abertos onde  $F_1$  é  $\mathcal{C}^p$ ;
- $G_1$  é simplectomorfismo;
- Existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $\|G_1 - F_1\|_{\mathcal{C}^k(\phi_1(U_1))} < \delta_1$ .

Denote por  $f_0 = f$ . Defina a função  $f_1$  por

$$f_1(z) = \begin{cases} f_0(z), & z \in M \setminus \overline{U_1^{(2)}} \\ (\varphi_1^{-1} \circ G_1 \circ \phi_1)(z), & z \in U_1 \end{cases}$$

Note que  $f_1|_{U_1^{(3)}}$  é  $\mathcal{C}^\infty$  e é de classe  $\mathcal{C}^p$  nos abertos em que  $f_0$  é  $\mathcal{C}^p$ . Além disso, se  $\delta_1$  é escolhido suficientemente pequeno então  $f_1 \in \mathcal{C}^k(M, N) \cap W_f$  e é um simplectomorfismo.

Assuma que, para  $n \geq 2$ ,  $f_{n-1} \in \mathcal{C}^k(M, N) \cap W_f$  está definido e

1.  $f_{n-1}$  é simplectomorfismo;
2.  $f_{n-1}|_{U_1^{(3)} \cup \dots \cup U_{n-1}^{(3)}}$  é  $\mathcal{C}^\infty$ ;
3.  $f_{n-1}$  é  $\mathcal{C}^p$  nos abertos em que  $f_{n-2}$  é  $\mathcal{C}^p$ .

Deste modo, para o simplectomorfismo  $F_n := \varphi_n \circ f_{n-1} \circ \phi_n^{-1} \in \mathcal{C}^k(\phi_n(U_n), \varphi_n(V_n))$  existe uma função  $G_n$  tal que

- $G_n = F_n$ , fora de  $\phi_n(U_n^{(2)})$ ;
- $G_n|_{\phi_n(U_n^{(3)})}$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ;
- $G_n$  é  $\mathcal{C}^p$  nos abertos onde  $F_n$  é  $\mathcal{C}^p$ ;
- $G_n$  é simplectomorfismo;
- Existe  $\delta_n > 0$  tal que  $\|G_n - F_n\|_{\mathcal{C}^k(\phi_n(U_n))} < \delta_n$ .



Logo, defina

$$f_n(z) = \begin{cases} f_{n-1}(z), & z \in M \setminus \overline{U_n^{(2)}} \\ (\varphi_n^{-1} \circ G_n \circ \phi_n)(z), & z \in U_n \end{cases}$$

Se  $\delta_n$  é escolhido suficientemente pequeno então  $f_n$  é simplectomorfismo de  $M$  sobre  $N$ , o qual pertence a vizinhança  $W_f$  de  $f$ , e  $f_n|_{U_1^{(3)} \cup \dots \cup U_{n-1}^{(3)} \cup U_n^{(3)}}$  é de classe  $C^\infty$ .

Finalmente, defina  $g(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ . Este limite não é difícil de calcular pois a cobertura  $(U_n^{(3)})$  é localmente finita. Com a escolha adequada de  $(\delta_n)$  nós concluímos que  $g \in C^\infty(M, N) \cap W_f$  é um simplectomorfismo de  $M$  sobre  $N$  e satisfaz o desejado.

□



## Capítulo 5

# Aproximações $C^1$ e outros resultados

O problema de aproximar um difeomorfismo (resp. fluxo)  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) preservando volume numa variedade compacta com ou sem bordo por um difeomorfismo (resp. fluxo), tem motivações nos sistemas dinâmicos e foi colocado por Palis e Pugh (ver [22]). Esse problema, apesar de sua aparente simplicidade para os menos familiarizados com o assunto, esconde uma complexidade e dificuldade técnica extremamente apurada.

Até o momento, respostas para esse problema são parciais e a questão principal, quando  $k = 1$ , permanece em aberto. O interesse no estudo dessa questão solidificou-se recentemente com o desenvolvimento de técnicas em sistemas dinâmicos que valem genericamente para difeomorfismos  $C^1$  e com o desenvolvimento de técnicas em teoria ergódica que valem para difeomorfismos  $C^2$ . A resposta positiva para tal pergunta, nos levará a conexões interessantes entre sistemas dinâmicos e teoria ergódica (ver Arbieto-Matheus, [18], para um exemplo de tais conexões).

Assim, apresentaremos neste capítulo alguns resultados parciais envolvendo aproximações de funções que preservam volume. No nosso trabalho apresentamos como Zehnder provou para caso de difeomorfismos simpléticos em superfícies sem bordo. É natural perguntarmos se existem extensões para tais resultados. Vamos a algumas delas:

### 5.1 Aproximações $C^{1,\alpha}$

Denotaremos por  $C^{k,\alpha}$ ,  $k \leq 0$  e  $0 < \alpha < 1$ , o espaço de Hölder usual e se  $f \in C^{k,\alpha}$  definiremos  $\|f\|_\alpha := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$ .

Para difeomorfismos  $C^{1,\alpha}$  que preservam volume temos uma resposta satisfatória feita por Zehnder, a saber,

**Teorema 5.1** (Zehnder, 77). *Seja  $M$  uma variedade compacta, de classe  $C^\infty$ , de dimensão  $d$  com forma de elemento de volume  $\mu$ . Seja  $f \in C^{1,\alpha}(M)$  um difeomorfismo preservando volume,  $0 < \alpha \leq 1$ . Então  $f$  pode ser aproximada por um difeomorfismo, de classe  $C^\infty$ , preservando volume no seguinte sentido. Existe uma seqüência  $(f_n)$  de difeomorfismos, de classe  $C^\infty$ , com  $f_n^*\mu = \mu$ , tal que*

$$\|f_n - f\|_{C^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (5.1)$$

$$\|f_n\|_\alpha \leq k, \quad (5.2)$$

com a constante  $k > 0$  dependendo de  $\|f\|_\alpha$ , mas independente de  $n$ .

Vale frisar que a demonstração do resultado acima utiliza Teoria de Hodge e difere completamente do caso simplético.

## 5.2 Fluxos $C^1$

Seja  $M$  uma superfície  $m$ -dimensional,  $m \geq 2$ , sem fronteira. Dizemos que um campo de vetores  $X$  é conservativo se  $\operatorname{div} X = 0$  e denotamos por  $X \in \mathfrak{X}_m(M)$ . Uma condição equivalente para que uma aplicação  $f$  de classe  $C^1$  preserve o volume é que  $|\det Df| \equiv 1$ . Uma prova desse fato pode ser vista em [19].

Agora, suponha que  $f^t$  seja o fluxo associado ao campo de vetores  $X$ , de classe  $C^1$ . A fórmula de Liouville exprime o jacobiano de  $f^t$  em termos do divergente  $\operatorname{div} X$  do campo de vetores  $X$ :

$$\det Df^t(x) = \exp \left( \int_0^t \operatorname{div} X(f^s(x)) ds \right) \quad (5.3)$$

Vemos facilmente que, por (5.3), se  $X$  é um campo conservativo então o seu fluxo preserva volume.

O resultado abaixo provado por Zuppa, [20], (ver também Arbieto-Matheus, [18]), mostra que fluxos de classe  $C^1$  podem ser aproximados (no sentido da topologia  $C^1$ ) por fluxos de classe  $C^\infty$ .

**Teorema 5.2** (Zuppa, 1979).  *$\mathfrak{X}_m^\infty(M)$  é  $C^1$ -denso em  $\mathfrak{X}_m^1(M)$ .*

### 5.3 Aproximações em Regiões com Bordo

Tratando-se da questão de aproximar difeomorfismos em regiões com bordo do  $\mathbb{R}^n$ , veremos um resultado mais forte do Teorema de Moser feito por Dacorogna e Moser.

Consideremos  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto, conexo e limitado e duas formas de volume  $\tau, \beta$

$$\tau = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \quad \beta = g(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

com  $f, g > 0$ .

Podemos mostrar, sob certas condições de regularidade em  $\Omega, f, g$ , que existe um difeomorfismo  $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$  mantendo a condição de fronteira fixa e tal que

$$\varphi^* \beta = \lambda \tau$$

onde  $\lambda = \int \beta / \int \tau$ .

O resultado acima é equivalente a

**Teorema 5.3** (Dacorogna-Moser, 90). *Seja  $k \geq 0$  inteiro e  $0 < \alpha < 1$ . Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  conjunto aberto, limitado, conexo e com fronteira  $\partial\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^{k+3,\alpha}$ . Seja  $f, g \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $f, g > 0$  em  $\bar{\Omega}$ . Então existe um difeomorfismo  $\varphi$  com  $\varphi, \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^{k+1,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$  satisfazendo*

$$\begin{cases} g(\varphi(x)) \det \nabla \varphi(x) = \lambda f(x), & x \in \Omega \\ \varphi(x) = x, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5.4)$$

onde  $\lambda = \int g / \int f$ .

Para a prova deste teorema, ver [17].

É interessante notar que a solução utiliza a teoria clássica das Equações Diferenciais Parciais Elípticas, sendo a redução do problema a encontrar um campo que satisfaça um problema do tipo

$$\begin{cases} \operatorname{div} Y(x) = h(x), & x \in \Omega \\ Y(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5.5)$$

onde  $h$  é uma função  $\mathcal{C}^\alpha$  convenientemente escolhida.

Uma tentativa natural para solucionar tal problema é tentar achar uma solução do tipo  $\operatorname{div} Y = \nabla u$ , o que transforma a equação (5.5) na equação envolvendo o operador Laplaciano

$$\begin{cases} \Delta u = h(x), & x \in \Omega \\ \nabla u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5.6)$$

Com métodos tradicionais (estimativas de Schauder) prova-se a existência e regularidade das soluções da equação (5.6). Ao tentarmos tratar o caso  $\alpha = 0$  pelos métodos nos deparamos com a equação (5.5) com a função  $h$  somente contínua. Neste caso, nos deparamos com o seguinte resultado negativo devido a McMullen:

**Teorema 5.4** (McMullen, 1998). *Para qualquer  $n > 1$  existe uma função  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  a qual não é o divergente de qualquer campo de vetores Lipschitz.*

Ver demonstração deste teorema em [21]. Com base neste teorema, Bourgain e Brezis em [23] obtiveram uma resultados negativos muito interessantes no estudo da equação 5.5, quando  $h$  é somente uma função contínua.

# Referências Bibliográficas

- [1] Abraham, R., Marsden, J.E. - *Foundations of Mechanics*, Update 1985 Printing, Addison-Wesley Publishing company.
- [2] Arnold, V.I - *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1978.
- [3] Bredon, Glen E. - *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1993.
- [4] Bursztyn, H., Macarini, L. - *Introdução à geometria simplética*, XIV Escola de geometria diferencial, 2006.
- [5] Cannas da Silva, A. - *Lectures on Symplectic Geometry*, Lect. Notes in Math. 1764, Springer-Verlag, 2001.
- [6] Carothers, N.L. - *A Short Course on Approximation Theory*, 1998, Department of Mathematics and Statistics Bowling Green State University.
- [7] Do Carmo, Manfredo - *Differential Forms and Applications*, Universitext, Springer, 1994.
- [8] Lee, J. - *Introduction to smooth manifolds*, University of Washington, Department of Mathematics, 2000.
- [9] Lima, Elon Lages - *Álgebra Exterior 2ª edição*, Projeto Euclides, IMPA, 2005.
- [10] Lima, Elon Lages - *Curso de Análise Volume 2*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2005.
- [11] Marsden, J.E., Ratiu, T., Abraham, R. - *Manifolds, tensor analysis and application*, 3º edition, Springer-Verlag, 2004.

- [12] Moser, J. - *On the volume elements on a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. 120, 286-294. 1965.
- [13] McDuff, D. - *Introduction to Symplectic Topology*, 2<sup>o</sup> edition, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1998.
- [14] Spivak, M. - *O Cálculo em variedades*, Editora Ciência Moderna, 2003.
- [15] Zehnder, E. - *Note on smoothing symplectic and volume preserving diffeomorphisms*, Lect. Notes in Math. 597:828-854, 1977.
- [16] Zehnder, E., Hofer, H. - *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*, Birkhauser Advanced Texts: Basler Lehrbücher, Birkhauser Verlag, Basel, 1994.
- [17] Dacorogna, B., Moser, J. - *On a partial differential equation involving the jacobian determinant*, Ann. Inst. Poincaré, 1990.
- [18] Arbieto, A., Matheus, C. - *A pasting lemma and some applications for conservative systems*, Preprint, IMPA, 2006.
- [19] Oliveira, K., Viana, M. - *Introdução à Teoria Ergódica*.
- [20] Zuppa, C. - *Regularisation  $C^\infty$  des champs vectoriels qui préservent l'élément de volume*, Bol. Soc. Brasileira Matem., 10 (2), 51.56, 1979.
- [21] McMullen, C. - *Lipschitz maps and nets in Euclidean space*, Geometric and Functional Analysis, 304-314, Volume 8, Number 2 1998.
- [22] Palis, J., Pugh, C. - *Fifty problems in dynamical systems*, Springer Lecture notes in Mathematics, Vol. 468, p. 352, 1975.
- [23] Bourgain, J., Brezis, H. - *On the equation  $\operatorname{div} Y = f$  and application to control of phases*, J. Amer. Math. Soc., pp. 393-426, 2002.



# Índice Remissivo

- Aplicação linear simplética, 59
- Campos Hamiltonianos, 72
- Cobertura localmente finita, 35
- Cohomologia de DE RHAM, 44
- Colchete de Poisson, 73
- Complemento Ortogonal Simplético, 58
- Conjunto
  - Estrelado, 48
  - Simplesmente conexo, 48
- Critério de orientabilidade, 36
- Derivada
  - de Lie de formas, 31
- Diferencial Exterior, 27
- Equivalência Homotópica, 46
- Espaço simplético padrão, 57
- Estrutura simplética, 61
- Fórmula de Cartan, 33
- Fibrados cotangentes, 61
- Fluxo numa superfície, 31
- Forma
  - Alternadas, 13
  - Anti-simétrica, 13
  - Diferenciais, 21
- Elemento de ângulo, 26
- Exata, 30
- Fechada, 30
- Volume, 23
  - simplético, 66
- Homotopia
  - inversa, 46
- Partição da Unidade, 35
- Produto
  - Exterior, 20
  - Interior, 30
- Pull-Back de uma forma, 23
- Seqüência Mayer-Vietoris, 54
- Subespaço
  - coisotrópico, 58
  - isotrópico, 58
  - lagrangiano, 58
  - simplético, 58
- Superfície, 21
  - com bordo, 40
  - orientável, 21
- Teorema
  - da Derivada de Lie, 34

- de Darboux, 63
- de Moser, 67
- de Stokes, 40
- de De Rham, 49
- Mayer-Vietoris, 54
- Poincaré, 48
- Transposta, 18
- Volume simplético, 66

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)