Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO IFT–D.004/06

N=1 D=4 SUPERGRAVIDADE NO SUPERESPAÇO

Anderson Cunha Rael

Orientador

Prof. Dr. Nathan Berkovits

Julho de 2006

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a meu pai e minha mãe pelo apoio durante todas as etapas de minha vida, e também meus irmaõs: Fábio, Robson e Elaine.

Ao professor Nathan Berkovits pela orientação.

Aos meus tios João e Zilda, e os primos Isabel e Guilherme, com quem sempre pude contar durante esses 2 anos de mestrado.

Aos amigos de Brasília, especialmente Nanderson, Luciano, Pedro, Nelson, João Henrique, Luana, Vivi e ao professor da UnB Paulo Caldas.

A Clóvis, Bonin, Leandro, Geová, Mafra, Douglas, Oscar, Gabi e aos demais amigos do IFT.

À FAPESP pelo suporte financeiro.

So long, and thanks for all the fish.

Douglas Adams

Resumo

Nessa dissertação, estudamos a formulação em superespaço para a Supergravidade com N=1 em 4 dimensões. O capítulo 2 faz um revisão sobre supersimetria global. No capítulo 3, estudamos as propriedades geometricas do superespaço e os campos componentes da supergravidade são definidos como valores de algumas quantidades geometricas. No capítulo 4, construimos uma lagrangeana em termos de supercampos para a supergravidade.

Palavras Chaves: Supergravidade; Supersimetria.

Áreas do conhecimento: Supersimetria; Teoria de campos.

Abstract

In this dissertation, we study the superspace formulation of N=1 Supergravity in 4 dimensions. Chapter 2 reviews global supersymmetry. In chapter 3, we study the geometrical properties of superspace and the component fields for supergravity are defined as values of some geometrical quantities. In chapter 4, we build a superfield lagrangian for supergravity.

Sumário

1 Introdução **1**

2 Supersimetria global **3**
2.1 A transformação supersimétrica 3
2.2 O Superespaço 4
2.2.1 Derivadas Supersimétricas 5
2.2.2 Integração de Berezin 6
2.2.3 Supercampos Quirais 7
2.3 Ações no Superespaço 9
2.3.1 Supercampos Vetoriais 10

3 Supersimetria Local **14**
3.1 Formas diferenciais no superespaço 15
3.2 A Derivada Covariante 17
3.3 Vielbein 19
3.3.1 Torção 20
3.3.2 Curvatura 22
3.4 Indentidades de Bianchi 23
3.4.1 Vínculos para Supergravidade 24
3.4.2 Componentes irredutivéis das Identidades de Bianchi . 25
3.4.3 Soluções das Identidades de Bianchi 27
3.4.4 Relações de (anti)comutação entre as derivadas covariantes 38
3.5 Multipleto da Supergravidade 38
3.5.1 Transformações de Supergauge 38
3.5.2 As componentes de ordem mais baixa 39
3.5.3 As transformações de supergravidade 46
3.5.4 A transformação do multipleto de supergravidade . . . 48

4 Lagrangianas para supergravidade **50**
4.1 Supercampos Quirais no espaços curvos 50
4.2 Supercampos Vetoriais no superespaço curvo 51
4.3 A lei de transformação para o supercampo quiral 53
4.4 A densidade quiral 55
4.5 Ações para supergravidade 59

5 Conclusões **62**

A Apêndice **63**

1 Introdução

A Supersimetria tornou-se nos últimos anos uma ferramenta fundamental para o desenvolvimento da física além do Modelo Padrão. A Supersimetria é a extensão das simetrias do espaço-tempo por geradores fermiônicos, e de maneira natural unifica Bósons e Férmions. De fato, a Supersimetria é a única extensão consistente das simetrias de Poincaré.

Logo após a descoberta da supersimetria no início da década de 70, foram formuladas versões supersimétricas para as teorias existentes, e esses sistemas supersimétricos apresentavam menos divergências quânticas. Ainda na década de 70, formulou-se a supergravidade, que como o próprio nome sugere é uma teoria supersimétrica da gravitação. Assim a supergravidade inclui e extende a Relatividade Geral, de forma a ser uma ferramenta interessante para o estudo de interações gravitacionais a altas energias. De fato, o nome supergravidade se aplica para qualquer uma das várias teorias supersimétricas que incluem a gravidade nos seus setores bosônicos. Esta pode ser formulada em diversos números de dimensões e números de supersimetrias.

A supersimetria pode ser formulada como uma simetria global ou local. A Supergravidade é uma teoria que possui supersimetria local.

No início, a supergravidade atraiu interesse devido ao cancelamento de divergências que apareciam na gravitação pura pela inclusão da parte supersimétrica. Entretanto atualmente o principal interesse vem da relação de supergravidade com teoria de supercordas.

Outra motivação para o estudo de supergravidade está na quebra de supersimetria, isto é, a supersimetria não é observada na natureza, então se essa simetria existir ela deve estar quebrada. Pelo teorema de Goldstone, a quebra espontânea de uma simetria global gera particulas sem massa. No caso da supersimetria global seria gerado o Goldstino (Fermion de Goldstone), uma particula não observada. Para quebrar a supersimetria sem o Goldstino não massivo é necessario a supersimetria local (mecanismo de Super-Higgs).

Essa dissertação irá expor a formulação de supergravidade com supersimetria não extendida em 4 dimensões no Superespaço [1] e [2]. Usando-se a geometria diferencial do superespaço os multipletos podem ser encontrados e os mesmos campos componetes que seriam obtidos pela formulação no espaço-tempo da supergravidade podem ser obtidos a partir de supercampos que possuem um significado geométrico.

No segundo capítulo é feita uma revisão de supersimetria global, que não pretende ser uma introdução completa a supersimetria, mas vai expor os elementos que serão generalizados nos capítulos seguintes. Desta forma o capítulo 2 não trata de alguns temas importantes como teorias não abelianas.

No terceiro capítulo são apresentados os elementos geométricos do supe-

respaço: Vielbein, Conexão, Torção e Curvatura. Identidades covariantes, chamadas Identidades de Bianchi, são formuladas em termos da torção e curvatura. A partir de vínculos escolhidos para a torção, as identidades de Bianchi são resolvidas em detalhes. No capítulo 3 também é identificado o multipleto de supergravidade e sua transformação.

Por fim no quarto capítulo mostra-se como constuir ações no superespaço curvo. É construida uma ação para supergravidade no superespaço e a sua versão em componentes é deduzida.

2 Supersimetria global

2.1 A transformação supersimétrica

Uma teoria tem determinada simetria se a ação que a descreve é invariante pela tranformação associada a essa simetria. Então considere a ação de Dirac para um espinor de Weyl de massa M :

$$S_f = -i \int d^4x \left[\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{n\dot{\alpha}\alpha} \partial_n \psi_\alpha - \frac{iM}{2} (\psi^\alpha \psi_\alpha + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}) \right] \tag{1}$$

As notações e convenções utilizadas na expresão acima e no restante do texto constam no Apêndice A.

Para a qual temos a seguinte equação de movimento :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{n\dot{\alpha}\alpha} \partial_n \psi_\alpha &= iM \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \\ \sigma^n{}_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_n \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} &= iM \psi_\alpha \end{aligned} \tag{2}$$

Considere também a ação para um campo escalar complexo :

$$S_b = -\int d^4x [\partial_m \phi \partial^m \bar{\phi} + M^2 \phi \bar{\phi}] \tag{3}$$

e as suas equações de movimento :

$$\Box \phi = M^2 \phi, \quad \Box \bar{\phi} = M^2 \bar{\phi} \tag{4}$$

A ação $S = S_f + S_b$ será invariante sob a seguinte tranformação :

$$\begin{aligned} \delta_Q \phi &= \sqrt{2} \xi^\alpha \psi_\alpha \\ \delta_Q \bar{\phi} &= \sqrt{2} \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \\ \delta_Q \psi_\alpha &= i\sqrt{2} \sigma^m{}_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \partial_m \phi - \sqrt{2} M \bar{\phi} \xi_\alpha \\ \delta_Q \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} &= i\sqrt{2} \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta} \xi_\beta \partial_m \bar{\phi} - \sqrt{2} M \phi \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{aligned} \tag{5}$$

A tranformação acima é uma tranformação de supersimetria que leva campos bosônicos em fermiônicos por meio de parâmetros fermiônicos (ξ e $\bar{\xi}$) que são independentes de x. Nos capítulos seguintes será explorado o caso

em que o parâmetro depende das coordenadas do espaço-tempo, o que dará origem a Supergravidade.

Supersimetria é uma simetria entre bósons e férmions, então uma teoria supersimétrica deve possuir o mesmo número de graus de liberdade bosônicos e fermiônicos. Do exemplo acima, verifica-se que a parte fermiônica tem 4 graus de liberdade totais enquanto a parte bosônica tem 2 graus de liberdade totais, entretanto note que devido as equações de movimento ambos têm 2 graus físicos. Com o objetivo de tornar iguais os graus de liberdade totais e posteriormente construir uma teoria com supersimetria manifesta deve-se inserir dois campos escalares bosônicos : F e $\bar{F}$. Esses campos são campos auxiliares que podem ser usados para se reescrever a ação convenientemente, eles podem ser escritos algebricamente em termos dos outros campos.

Considere agora a seguinte ação escrita com os campos F e $\bar{F}$:

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \Big[-\partial_m\phi\partial^m\bar{\phi} - i\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\sigma^{n\dot{\alpha}\beta}\partial_n\psi_\beta + F\bar{F} \\ &\quad + M\left(\phi F + \bar{\phi}\bar{F} - \frac{1}{2}\psi^\alpha\psi_\alpha - \frac{1}{2}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\right)\Big] \end{aligned} \tag{6}$$

Com as equações de movimento:

$$\Box\phi = -M\bar{F}, \quad \Box\bar{\phi} = -MF, \quad \bar{F} = -M\phi, \quad F = -M\bar{\phi} \tag{7}$$

Naturalmente, as equações de movimento para ψ e $\bar{\psi}$ serão as mesmas de (2). Se substituirmos as equações acima para F em (6), a ação inicial será recuperada.

As seguintes transformações deixam (6) invariante:

$$\begin{aligned} \delta_Q\phi &= \sqrt{2}\xi^\alpha\psi_\alpha, \quad \delta_Q\bar{\phi} = \sqrt{2}\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \\ \delta_Q\psi_\alpha &= i\sqrt{2}\sigma^m{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\partial_m\phi + \sqrt{2}\xi^\alpha F, \\ \delta_Q\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} &= i\sqrt{2}\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha}\xi_\alpha\partial_m\bar{\phi} + \sqrt{2}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\bar{F} \\ \delta_Q F &= i\sqrt{2}\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha}\partial_m\psi_\alpha, \quad \delta_Q\bar{F} = i\sqrt{2}\xi^\alpha\bar{\sigma}^m_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{aligned} \tag{8}$$

2.2 O Superespaço

Na secção anterior construiu-se um modelo supersimétrico, entretanto seria interessante que a teoria tivesse Supersimetria manifesta, isto é, que a

invariância por Supersimetria fosse verificável de forma trivial a partir da Lagrangeana. O formalismo de Supercampos permite que isso seja realizado.

Por analogia, considere a invariância relativistica. Em geral, não esperar-se que uma teoria formulada no espaço euclidiano tridimensional seja invariante por tranformações de Lorentz. Para obter uma teoria que seja manifestamente invariante por Lorentz deve-se introduzir o tempo como coordenada adicional, formando o espaço de Minkowski. De forma análoga, não é possivel criar ações manifestamente supersimétricas no espaço de Minkowski. Assim deve-se extender o espaço de Minkowski para formar o Superespaço. O Superespaço é parametrizado pelas 4 coordenadas espaço-temporais de Minkowski (x^m), além de 4 variáveis de Grassman, que quando formuladas em termos de espinores de Weyl são : θ^α e $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$, onde $\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2$.

Os campos parametrizados pelas coordenadas do superespaços são chamados Supercampos, e estes podem ser expandidos em série nas variáveis θ e $\bar{\theta}$. Pelo fato de uma variável grassmaniana ao quadrado ser zero, a expansão é finita e exata. Considere o supercampo $G(x, \theta, \bar{\theta})$:

$$\begin{aligned} G(x,\theta,\bar{\theta}) = f(x) \quad &+ \quad \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\xi}(x) + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}n(x) + \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) \\ &+ \quad \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \quad \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\psi(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d(x) \end{aligned} \tag{9}$$

2.2.1 Derivadas Supersimétricas

Para a construção de ações usando-se supercampos é necessário definir derivação e integração em relação as variávies fermiônicas θ e $\bar{\theta}$. Considere inicialmente as derivadas usuais em relação a θ e $\bar{\theta}$:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}, \\ \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}, \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}}, \end{aligned} \tag{10}$$

É importante notar que as derivadas com índice em cima se relacionam com as com índice em baixo da seguinte forma :

$$\epsilon^{\beta\alpha}\partial_\alpha = -\partial^\beta, \quad \partial_\beta = -\epsilon_{\beta\alpha}\partial^\alpha \tag{11}$$

Entretanto deve-se construir derivadas que sejam covariantes pela tranformação de supersimetria (que será expressa pela fórmula (24)), de forma

que expressões manifestamente supersimétricas possam ser construidas. Essas derivadas são conhecidas como Derivadas SupersiméTricas, dadas por :

$$
\begin{aligned}
D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^m{}_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x^m} \\
\bar D_{\dot\alpha} &= -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} - i\theta^\alpha\sigma^m{}_{\alpha\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x^m}
\end{aligned} \tag{12}
$$

As relações de anticomutação dessas derivadas são dada por:

$$
\begin{aligned}
\{D_\alpha, \bar D_{\dot\alpha}\} &= -2i\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m \\
\{D_\alpha, D_\beta\} &= \{\bar D_{\dot\alpha}, \bar D_{\dot\beta}\} = 0
\end{aligned} \tag{13}
$$

Na secção 2.2.3 será justificada a forma dessas derivadas.

2.2.2 Integração de Berezin

Com o objetivo de escrever ações em Superespaço define-se a integração sob números de Grassmann, conhecida como intergração de Berezin. Considere, o caso mais simples, a integral da função h de apenas uma variável fermiônica κ :

$$
\int h(\kappa)d\kappa = \int d\kappa(A + B\kappa) \tag{14}
$$

A integral de Berezin será definida como um funcional que associa a cada $f(\kappa)$ um número comutante (c-number). É interessante a invariância de translação da integral, pois deseja-se uma definição análoga a $\int_{-\infty}^{+\infty} dx$, que possui essa invariância.

$$
\begin{aligned}
\kappa &\rightarrow \kappa + \eta \\
\int d\kappa(A + B\kappa) &= \int d\kappa((A + B\eta) + B\kappa)
\end{aligned} \tag{15}
$$

Por esse deslocamento o termo independente de κ se altera, enquanto o outro permanece o mesmo. Por isso o resultado da integral deve depender apenas de B. A única função linear que possui essa propriedade é uma constante vezes B, por convenção essa constante é 1. Assim :

$$
\int d\kappa(A + B\kappa) = B \tag{16}
$$

O resultado da integração de $h(\kappa)$ é o mesmo que seria obtido pela derivação. Portanto a integração de Berezin é equivalente a diferenciação. Na secção sobre ações no superespaço será apresentada a generalização para a integração com várias variáveis fermiônicas.

2.2.3 Supercampos Quirais

Como visto na expansão em coordenadas de $G(x, \theta, \bar{\theta})$, um supercampo contém vários campos componentes que são apenas funções de x. Para a descrição de certas teorias deve-se impor vínculos a G de modo que o número de campos componentes seja reduzido. Define-se Supercampo Quiral (ou Supercampo Escalar) como o supercampo que obedece ao seguinte vínculo:

$$\bar{D}\Phi = 0 \tag{17}$$

É conveniente definir uma nova variável $y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}$, pois

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}(x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}) = 0 \quad e \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta = 0 \tag{18}$$

Portanto qualquer supercampo, que seja função apenas de y e θ será um supercampo Quiral. Quando se escreve as Derivadas SupersiméTricas em termos de $(y, \theta, \bar{\theta})$ fica claro que o supercampo Quiral em geral é $\Phi(y, \theta)$:

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + 2i\sigma^m{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^m} \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \end{aligned} \tag{19}$$

Assim em termos de campos componentes temos:

$$\Phi = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \tag{20}$$

Ou em termo de $(x, \theta, \bar{\theta})$:

$$\begin{aligned} \Phi(x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}, \theta) &= \phi(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m\phi(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box\phi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) \\ &\quad -\frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_m\psi(x)\sigma^m\bar{\theta} + \theta\theta F(x) \end{aligned} \tag{21}$$

O campo Anti-Quiral é aquele que satisfaz o vínculo $D_\alpha \bar{\Phi} = 0$. Seguindo o que está feito acima, o supercampo anti-quiral será função apenas de $\bar{y}$ e $\bar{\theta}$. Assim :

$$\bar{\Phi} = \bar{\phi}(\bar{y}) + \sqrt{2}\bar{\psi}\bar{y} + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{F}(\bar{y}) \tag{22}$$

Em termos de $(x, \theta, \bar{\theta})$:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(x^m - i\theta\sigma^m\bar{\theta}, \theta) &= \bar{\phi}(x) - i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m\bar{\phi}(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box\bar{\phi}(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(x) \\ &+ \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\psi}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{F}(x) \end{aligned} \tag{23}$$

Agora é possível fazer a identificação entre o que foi mostrado na secção 2.1 com o formalismo de supercampos. As transformações dos campos dadas em (8) podem ser reproduzidas por :

$$\begin{aligned} \delta_Q\Phi(y, \theta) &= (\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})\Phi(y, \theta) \\ \delta_Q\bar{\Phi}(\bar{y}, \bar{\theta}) &= (\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})\bar{\Phi}(\bar{y}, \bar{\theta}) \end{aligned} \tag{24}$$

Onde os operadores diferenciais Q, $\bar{Q}$ são dados por :

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma^m{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^m} \\ \bar{Q}^{\dot{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} - i\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha}\theta_\alpha\frac{\partial}{\partial x^m} \end{aligned} \tag{25}$$

Ou em termos de y, θ, $\bar{\theta}$:

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + 2i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\frac{\partial}{\partial y^m} \end{aligned} \tag{26}$$

Como enunciado anteriormente, as derivadas supersimétricas, definidas em (12), têm por finalidade possibilitar a criação de expressões manifestamente supersimétricas. Isso é possível porque essas derivadas comutam com a transformação de supersimetria mostrada na expresão acima, isto é : $[\delta_Q, D_\alpha] = [\delta_Q, \bar{D}^{\dot{\alpha}}] = 0$. Assim a derivada supersimétrica preserva a supersimetria.

2.3 Ações no Superespaço

Como visto das transformações dos componentes de $\Phi(y,\theta)$ em (8) o campo F, que é o campo de ordem mais alta, tranforma por supersimetria como uma derivada total. Quando integrado em $\int d^4x$ a variação por supersimetria desse campo é um termo de superfície, então F é um candidato natural para a construção de uma ação manifestamente supersimétrica. Por isso define-se a integral quiral:

$$\int d^2\theta g(y,\theta) = \int d^2\theta \Big(\quad A(y) + \theta B(y) + \theta\theta F(y) \Big) \equiv F(x) \tag{27}$$

Seguindo o mesmo raciocínio será definido integrações no superespaço que se mostrarão utéis para a construção de ações :

$$\int d^2\bar{\theta}\bar{g}(\bar{y},\bar{\theta}) = \int d^2\bar{\theta}\Big(\bar{A}(y) + \bar{\theta}\bar{B}(\bar{y}) + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{F}(\bar{y})\Big) \equiv \bar{F}(x) \tag{28}$$

$$\int d^4\theta G(x,\theta,\bar{\theta}) = \int d^4\theta (A(x) + \theta B(x) + \cdots + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} D(x)) \equiv D(x) \tag{29}$$

Ou em termos de derivadas:

$$\begin{aligned}
\int d^4\theta F &= \frac{1}{16}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^{\dot{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial\theta_{\dot{\alpha}}}F\right)|_{\theta=\bar{\theta}=0} \\
\int d^2\theta f &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}f\right)|_{\theta=\bar{\theta}=0} \\
\int d^2\bar{\theta}\bar{f} &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\bar{f}\right)|_{\theta=\bar{\theta}=0}
\end{aligned} \tag{30}$$

A análise dimensional será o guia para a construção de ações no superespaço. A variável x (e também a variável y) tem dimensão de massa -1 e pela expressão de $\Phi(y)$ em (20) podemos determinar a dimensão de θ. $\phi(y)$ é um campo escalar de dimensão 1 e $\psi(y)$ é um espinor de dimensão $\frac{3}{2}$, então a dimensão de θ é $-\frac{1}{2}$, pois a dimensão de $\phi(y)$ é igual a dimensão de $\theta\psi(y)$. $\bar{\theta}$ tem dimensão $-\frac{1}{2}$, por outro lado $\int d^4\theta$ atua como derivada e assim tem dimensão $+2$, da mesma forma $\int d^2\theta$ e $\int d^2\bar{\theta}$ têm dimensão $+1$. Naturalmente Φ e $\bar{\Phi}$ têm dimensão $+1$.

A partir de $\int d^4\theta$ e dos campos Φ e $\bar{\Phi}$ pode-se contruir um único termo que é quadrático e não possui nenhum parâmetro dimensional:

$$S_{cin} = \int d^4x d^4\theta \quad \Phi\bar{\Phi} \tag{31}$$

Quando expressa em termos de campos componentes, a ação acima é dada por :

$$\int d^4x(-\partial_m\phi\partial^m\bar{\phi} - i\psi\sigma^m\partial_m\bar{\psi} + F\bar{F}) \tag{32}$$

Que reproduz a parte sem massa de (6).

Com $\int d^2\theta$ é possível criar termos de massa e interações :

$$\int d^2\theta\left(\lambda\Phi + \frac{M}{2}\Phi^2 + \frac{g}{3}\Phi^3\right) \tag{33}$$

Onde λ tem dimensão 2, m dimensão 1 e g é adimensional. Pela condição de renormalizabilidade não deve haver potências maiores de Φ.

Utilizando-se $\int d^2\bar{\theta}$ obtém-se a expresão conjugada à mostrada acima.

Usando-se esses elementos pode-se contruir a ação renormalizavél mais geral utilizando-se supercampos escalares :

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x\Bigg[\int d^4\theta\Phi\bar{\Phi} + \int d^2\theta\left(\lambda\Phi + \frac{M}{2}\Phi^2 + \frac{g}{3}\Phi^3\right) \\ &+ \int d^2\bar{\theta}\left(\bar{\lambda}\bar{\Phi} + \frac{\bar{M}}{2}\bar{\Phi}^2 + \frac{\bar{g}}{3}\bar{\Phi}^3\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{34}$$

2.3.1 Supercampos Vetoriais

Define-se Supercampo Vetorial aquele que satisfaz a condição :

$$V(x,\theta,\bar{\theta}) = \bar{V}(x,\theta,\bar{\theta}) \tag{35}$$

O supercampo vetorial é um supercampo real. Como qualquer supercampo pode ser expandiado em potências de θ e $\bar{\theta}$:

$$\begin{aligned} V(x,\theta,\bar{\theta}) &= C(x) + \theta\chi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta M(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{M}(x) \\ &- \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) \end{aligned} \tag{36}$$

Pela condição de realidade $C(x)$, $v_m(x)$ e $D(x)$ são reais.

Agora, considere o supercampo real $\Phi + \bar{\Phi}$ em termos de x:

$$\begin{aligned} \Phi + \bar{\Phi} &= \phi + \bar{\phi} + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi} + \theta\theta F(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{F}(x) \\ &+ i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m(\phi(x) - \bar{\phi}(x)) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^m\partial_m\psi(x) \\ &+ \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\psi}(x) - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box(\phi(x) + \bar{\phi}(x)) \end{aligned} \tag{37}$$

Observe que o coeficiente do termo $\theta\sigma^m\bar{\theta}$ é uma derivada : $i\partial_m(\phi(x) - \bar{\phi}(x))$. É conveniente escolher uma forma especial de $V(x,\theta,\bar{\theta})$ de modo que certas componentes de V sejam invariantes pela tranformação de gauge supersimétrica que será definida a seguir. Para isso :

$$\begin{aligned} \lambda(x) &\rightarrow \lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\chi(x) \\ D(x) &\rightarrow D(x) + \frac{1}{4}\Box C(x) \end{aligned} \tag{38}$$

A generalização supersimétrica da transformação de gauge é definida :

$$V \rightarrow V + \Phi + \bar{\Phi} \tag{39}$$

Sob essa tranformação :

$$\begin{aligned} C &\rightarrow C + A + \bar{A} \\ \chi &\rightarrow \chi - i\sqrt{2}\psi \\ M &\rightarrow M + F \\ v_m &\rightarrow v_m - i\partial_m(\phi - \bar{\phi}) \\ \lambda &\rightarrow \lambda \\ D &\rightarrow D \end{aligned} \tag{40}$$

A escolha (38) foi feita de forma que os componentes λ e D ficassem invariantes pela transformação de gauge. Escolhendo o gauge adequado, isto é, um determinado supercampo Φ, é possível colocar as componetes C, ξ, M iguais à zero. Esse gauge é conhecido como gauge de Wess Zumino (gauge WZ). Note que no gauge de WZ ainda há uma liberdade na escolha de v_m, que é a tranformação usual de gauge. No gauge de WZ a expressão para V e suas potências torna-se:

$$\begin{aligned} V &= -\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) \\ V^2 &= -\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}v_m v^m \\ V^3 &= 0 \end{aligned} \tag{41}$$

No gauge de WZ, o Supercampo $V(x,\theta,\bar{\theta})$ tem 8 graus de liberdade no total. O campo vetorial real $v_m(x)$ tem 3 graus bosônicos (pois esse campo ainda possui a liberdade de gauge usual), o campo espinorial complexo $\lambda(x)$ tem 4 graus fermiônicos e o campo escalar real $D(x)$ tem 1 grau bosônico.

Com o objetivo de se construir objetos invariantes pela transformação de gauge generalizada, considere o supercampo espinorial W_α :

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V, \quad \bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}DD\bar{D}_{\dot{\alpha}}V \tag{42}$$

Lembrado que $D_\beta D^\alpha D_\alpha = \bar{D}_{\dot{\beta}}\bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}^{\dot{\alpha}} = 0$ é fácil ver que W_α é quiral e $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ é anti-quiral. A invariância de gauge pode ser verificada usando-se a relação de anti-comutação das derivadas supersimétricas:

$$W_\alpha \to -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha(V + \Phi + \bar{\Phi}) = W_\alpha - \frac{1}{4}\bar{D}\{\bar{D}, D_\alpha\}\Phi = W_\alpha \tag{43}$$

W_α é um supercampo quiral então as variáveis y e θ são as mais adequadas para descreve-lo. Expressando V em termos de y e $\bar{y}$ temos:

$$\begin{aligned} V &= -\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(y) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(y) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(y) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(D(y) - i\partial_m v^m(y)) \\ &= -\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(\bar{y}) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(\bar{y}) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(\bar{y}) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(D(\bar{y}) + i\partial_m v^m(\bar{y})) \end{aligned} \tag{44}$$

Assim temos :

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -i\lambda_\alpha(y) + D(y)\theta_\alpha - \frac{i}{2}(\sigma^m\sigma^n\theta)_\alpha(\partial_m v_n(y) - \partial_n v_m(y)) \\ &+ \theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\partial_m\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(y) \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} \bar{W}_{\dot{\alpha}} &= -i\lambda_{\dot{\alpha}}(\bar{y}) + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}D(\bar{y}) + \frac{i}{2}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}(\bar{\sigma}\sigma\theta)^{\dot{\gamma}}(\partial_m v_n(\bar{y}) - \partial_n v_m(\bar{y})) \\ &- \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\sigma}^{m\dot{\beta}\alpha}\partial_m\lambda_\alpha(\bar{y}) \end{aligned} \tag{46}$$

Pode ser visto diretamente das expressões acima que W_α e $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ são invariantes de gauge, pois todos os seus campos são invariantes de gauge : D, λ e $(\partial_m v_n - \partial_n v_m)$.

Partindo dos supercampos W e $\bar{W}$ a ação sem parâmetros dimensionais que pode ser naturalmente contruida é :

$$\frac{1}{4}\int d^4x \left(d^2\theta W^\alpha W_\alpha + d^2\bar{\theta}\bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}\right) \tag{47}$$

Em termos de campos componetes:

$$\int d^4x \left(\frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{4}v^{mn}v_{mn} - i\lambda\sigma^m\partial_m\bar{\lambda} \right) \tag{48}$$

onde $v^{mn} = \partial^m v^n - \partial^n v^m$.

Então usando-se o supercampo vetorial foi possível construir um generalização supersimétrica para a lagrangeana de Maxwell, essa teoria é conhecida como SuperMaxell.

Para finalizar esse capítulo escrevemos as transformações de supersimetria em função das coordenadas do superespaço:

$$\begin{aligned} x^m &\rightarrow x^m - i(\theta\sigma^m\bar{\xi} - \xi\sigma^m\bar{\theta}) \\ \theta^\mu &\rightarrow \theta^\mu - \xi^\mu \\ \bar{\theta}_{\dot{\mu}} &\rightarrow \bar{\theta}_{\dot{\mu}} - \bar{\xi}_{\dot{\mu}} \end{aligned} \tag{49}$$

3 Supersimetria Local

No capítulo anterior foi analisado o caso da transformação supersimétrica global, isto é, o parâmetro da transformação supersimétrica é independente das coordenadas do espaço-tempo. Neste capítulo será considerado o caso em que o parâmetro pode depender das coordenadas. No decorrer desse e do próximo capítulo apresentar-se-á a teoria de Supergravidade.

A Supergravidade pode ser formulada tanto no Superespaço quanto no espaço-tempo usual.

A Supergravidade formulada no espaço-tempo foi inicialmente desenvolvida por [3] e [4]. A supergravidade surge a partir da imposição da invariância da teoria por supersimetria local. Para manter uma lagrangeana invariante por uma generalização local de uma simetria global é necessário introduzir um campo, conhecido como campo de gauge, de forma que a parte adicional surgida é cancelada. No caso em questão o campo de gauge deve ter um índice espinorial e outro vetorial sendo da forma ${\psi_m}^\alpha$, isto pode ser visto da transformação do campo de gauge $\delta(\text{campo de gauge}) = \partial_m(\text{parâmetro}) + ...$, como para a supersimetria o parâmetro é ξ^α, então o campo de gauge deve ter estrutura de índices dada acima. Esse campo de gauge será o gravitino, cujo parceiro supersimétrico é o graviton. Existem diversos trabalhos de revisão sob o tema (por exemplo, [5]), entretanto essa dissertação não tratará da formulação da supergravidade a partir de campos componentes, mas desenvolverá a formulação da supergravidade no Superespaço e posteriormente chegará no campos componentes, impondo vínculos e fixando liberdades de gauge.

Uma das vantagem da formulação da supergravidade no superespaço, cujos artigos pioneiros foram [6] e [7], é que essa abordagem é mais eficiente para a construção de Lagrangeanas que são menores do que aquelas com campos camponentes.

Como visto no capítulo anterior um elemento geral do superespaço é dado pelas coordenadas x, θ e $\bar{\theta}$. Assim um elemento arbitrário do Superespaço é denotado por $z^M \sim (x^m, \theta^\mu, \bar{\theta}_{\dot{\mu}})$z. O índice maiusculo M servirá para denotar tanto o índice vetorial m, quanto os espinoriais μ e $\dot{\mu}$.

As transformações das coordenadas por supersimetria é dada em (49), sua generalização para supersimetria local no espaço-tempo é obtida fazendo o parâmetro ξ depender de x:

$$\begin{aligned} x^m &\rightarrow x^m - i(\theta\sigma^m\bar{\xi}(x) - \xi(x)\sigma^m\bar{\theta}) \\ \theta^\mu &\rightarrow \theta^\mu - \xi^\mu(x) \\ \bar{\theta}_{\dot{\mu}} &\rightarrow \bar{\theta}_{\dot{\mu}} - \bar{\xi}_{\dot{\mu}}(x) \end{aligned} \tag{50}$$

3.1 Formas diferenciais no superespaço

Durante essa secção se desenvolverá o formalismo de formas diferenciais em Superespaço, que é covariante por uma transformação geral de coordenadas. É esperado que o leitor já esteja familiarizado com as formas diferenciais usuais, veja por exemplo [8].

De acordo com a sua paridade Grassmaniana, os elementos do superespaço podem comutar ou anticomutar, de acordo com a seguinte regra:

$$z^N z^M = (-)^{nm} z^M z^N \tag{51}$$

Onde n é uma função de N que tem valor 0 para um índice vetorial e 1 para um índice espinorial e m é uma função de M com as mesmas propriedades. Assim, dois objetos com índices espinoriais anticomutam e um objeto com índice vetorial comuta com outro de índice espinorial ou vetorial.

Uma 0-forma é definida como uma função do Superespaço $P(z)$. A definição de uma 1-Forma é :

$$dz^M W_M = dx^m W_m + d\theta^\mu W_\mu + d\bar{\theta}^{\dot{\mu}} \bar{W}_{\dot{\mu}}(z) \tag{52}$$

Onde $dz^M \sim (dx^m, d\theta^\mu, d\bar{\theta}_{\dot{\mu}})$ é um diferencial do Superespaço.

Para a construção de outras superformas diferencias define-se o produto exterior:

$$dz^M \wedge dz^N = -(-)^{nm} dz^N \wedge dz^M \tag{53}$$

Uma p-forma é dada por :

$$\Omega = dz^{M_1} \wedge \cdots \wedge dz^{M_p} W_{M_p \cdots M_1} \tag{54}$$

Note que a função coeficiente $W_{M_p \cdots M_1}$ pode possuir índices tanto vetoriais, quanto espinoriais. Quando a função coeficiente tiver um número par de índices espinoriais ela será bosônica, e quando tiver um número ímpar será fermiônica.

Repare que a p-forma, por convenção, é definida de maneira que haja sempre um par de índices iguais entre aqueles que estão sendo somados. O simbolo $\wedge$ será omitido no restante desse trabalho.

O produto exterior de formas é associativo, linear e a relação de comutação para a p-forma Σ e a q-forma Ω é:

$$\Sigma\Omega = (-)^{pq} \Omega\Sigma \tag{55}$$

Define-se a derivada exterior d como o mapeamento da p-forma:

$$\Omega = dz^{M_1} \cdots dz^{M_p} W_{M_p \cdots M_1}(z) \tag{56}$$

na (p+1)-forma :

$$d\Omega = dz^{M_1} \cdots dz^{M_p} dz^N \partial_N W_{M_p \cdots M_1}(z) \tag{57}$$

Considerando a p-forma Ω (56) e a q-forma Σ dada por:

$$\Sigma = dz^{N_1} \cdots dz^{N_q} V_{N_q \cdots N_1}(z) \tag{58}$$

Temos:

$$\begin{aligned} d(\Omega\Sigma) &= d(dz^{M_1} \cdots dz^{M_p} W_{M_p \cdots M_1} dz^{N_1} \cdots dz^{N_q} V_{N_q \cdots N_1}) \\ &= d(dz^{M_1} \cdots dz^{M_p} dz^{N_1} \cdots dz^{N_q} V_{N_q \cdots N_1} W_{M_p \cdots M_1}) \\ &= dz^{M_1} \cdots dz^{M_p} dz^{N_1} \cdots dz^{N_q} [dz^L (\partial_L V_{N_q \cdots N_1}) W_{M_p \cdots M_1} + \\ &\quad V_{N_q \cdots N_1} dz^L \partial_L W_{M_p \cdots M_1}] \\ &= dz^{M_1} \cdots dz^{M_p} W_{M_p \cdots M_1} dz^{N_1} \cdots dz^{N_q} dz^L \partial_L V_{N_q \cdots N_1} + \\ &\quad (-)^q dz^{M_1} \cdots dz^{M_p} dz^L (\partial_L W_{M_p \cdots M_1}) dz^{N_1} \cdots dz^{N_q} V_{N_q \cdots N_1} \end{aligned} \tag{59}$$

Portanto

$$d(\Omega\Sigma) = \Omega d\Sigma + (-)^q d\Omega\Sigma \tag{60}$$

Tomando-se a derivada exterior de (57) encontra-se outra propriedade interessante:

$$\begin{aligned} d(d\Omega) &= dz^{M_1} \cdots dz^{M_p} \underbrace{dz^N dz^{N'}}_{-(-)^{nn'} dz^{N'} dz^N} \underbrace{\partial_{N'} \partial_N}_{(-)^{nn'} \partial_N \partial_{N'}} W_{M_p \cdots M_1} \\ &= -d(d\Omega) \end{aligned} \tag{61}$$

Logo

$$dd = 0 \tag{62}$$

3.2 A Derivada Covariante

Teorias de Gauge são covariantes por algum grupo de estrutura local, no caso de teorias de gravidade esse grupo é o grupo de Lorentz. Formas diferenciais geram uma representação desse grupo, considere a transformação da forma Ω:

$$\Omega^A \rightarrow \Omega^B \Lambda_B{}^A(z) \tag{63}$$

Onde $\Lambda_B{}^A(z)$ denota a tranformação do grupo de estrutura. Infinitesimalmente :

$$\delta\Omega^A = \Omega^B X_B{}^A(z) \tag{64}$$

Em (63), Ω transforma linearmante sob o grupo de estrutura ($\Omega \rightarrow \Omega\Lambda$), a derivada exterior de uma forma não se transforma dessa maneira:

$$d(\Omega') = d(\Omega\Lambda) = \Omega d\Lambda + d\Omega\Lambda \tag{65}$$

Devido ao termo extra ($\Omega d\Lambda$) da equação acima deve-se criar uma generalização da derivada exterior d, conhecida como Derivada Covariante $\mathcal{D}$, de tal forma que :

$$\mathcal{D}\Omega' = \mathcal{D}(\Omega\Lambda) = (\mathcal{D}\Omega)\Lambda \tag{66}$$

A forma de $\mathcal{D}$ deve ser a derivada usual somada com um termo com a conexão ϕ. A conexão é uma 1-forma que toma valores na Álgebra de Lie do grupo de estrutura. Portanto:

$$\mathcal{D}\Omega = d\Omega + \Omega\phi \tag{67}$$

O lado esquerdo de (66):

$$\mathcal{D}\Omega' = d\Omega' + \Omega'\phi' = \Omega d\Lambda + d\Omega\Lambda + \Omega\Lambda\phi' \tag{68}$$

O lado direito:

$$(\mathcal{D}\Omega)\Lambda = d\Omega\Lambda + \Omega\phi\Lambda \tag{69}$$

Portanto

$$\Omega\Lambda\phi' = \Omega\phi\lambda - \Omega d\Lambda \tag{70}$$

Logo, a imposição da covariancia de $\mathcal{D}\Omega$ implica uma lei de tranformação para a conexão ϕ:

$$\phi \to \phi' = \Lambda^{-1}\phi\Lambda - \Lambda^{-1}d\Lambda \tag{71}$$

Para continuar o estudo das propriedades geometricas do superespaço deve-se especificar o grupo de estrutura, isto é, o grupo do espaço tangente.

O grupo do espaço tangente escolhido é tal que :

$$\begin{aligned}
X_{AB} &= -(-)^{ab}X_{BA} \\
X_a{}^{\beta} &= X_a{}^{\dot\beta} = X_\alpha{}^{\dot\beta} = 0 \\
X_a{}^{b} &= L_a{}^{b}(z) \\
X_{\alpha\beta} &= L_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\sigma^{ab})_{\alpha\beta}L_{ab} \\
X_{\dot\alpha\dot\beta} &= L_{\dot\alpha\dot\beta} = -\frac{1}{2}(\bar\sigma^{ab})_{\dot\alpha\dot\beta}L_{ab}
\end{aligned} \tag{72}$$

Onde L_{ab} são as transformações infinitesimais do grupo de Lorentz, assim o grupo de estrutura consiste das tranformações de Lorentz dependetes de x, θ e $\bar\theta$. Os geradores do grupo podem ser decompostos em três componentes irredutiveis : $L_b{}^a$, $L_\beta{}^\alpha$ e $L_\beta{}^\alpha$.

Os índices de cima e de baixo do espaço tangente serão relacionados pelas matrizes $\epsilon_{\alpha\beta}$, $\epsilon^{\alpha\beta}$, $\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}$ e $\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}$ no caso de índice espinoriais e pela métrica de Minkowski no caso de índices vetoriais.

Utilizando (72) e as formulas do apêndice A será verificada a seguinte relação entre os geradores do grupo de estrutura:

$$\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^{a}\sigma_{\beta\dot\beta}{}^{b}L_{ab} = -2\epsilon_{\alpha\beta}L_{\dot\alpha\dot\beta} + 2\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}L_{\alpha\beta} \tag{73}$$

Multiplicando a expressão acima por $\bar\sigma^{c\dot\beta\beta}\bar\sigma^{d\dot\alpha\alpha}$ o lado direito se torna:

$$\bar\sigma^{c\dot\beta\beta}\bar\sigma^{d\dot\alpha\alpha}\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^{a}\sigma_{\beta\dot\beta}{}^{b}L_{ab} = (-2\eta^{ad})(-2\eta^{bc})L_{ab} = 4L^{dc} \tag{74}$$

E o lado esquerdo:

$$
\begin{aligned}
& \bar{\sigma}^{c\dot{\beta}\beta}\bar{\sigma}^{d\dot{\alpha}\alpha}(-2\epsilon_{\alpha\beta}L_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + 2\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}L_{\alpha\beta}) \\
= \; & \bar{\sigma}^{c\dot{\beta}\beta}\bar{\sigma}^{d\dot{\alpha}\alpha}(\epsilon_{\alpha\beta}(\bar{\sigma}^{ab})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}L_{ab} - \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\sigma^{ab})_{\alpha\beta}L_{ab})
\end{aligned} \tag{75}
$$

Devido a anti-simetria de L_{ab}:

$$
\sigma^{ab}L_{ab} = \frac{1}{4}(\sigma^a\bar{\sigma}^b - \sigma^b\bar{\sigma}^a)L_{ab} = \frac{1}{2}\sigma^a\bar{\sigma}^b L_{ab} \tag{76}
$$

E analogamente para $\bar{\sigma}^{ab}$.
Então (75) torna-se:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\bar{\sigma}^{a\dot{\gamma}\gamma}\sigma_{\gamma\dot{\beta}}{}^{b}\bar{\sigma}^{c\dot{\beta}\beta}\bar{\sigma}^{d\dot{\alpha}\alpha} - \frac{1}{2}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon_{\beta\gamma}\bar{\sigma}^{c\dot{\beta}\beta}\bar{\sigma}^{d\dot{\alpha}\alpha}\sigma_{\alpha\dot{\gamma}}{}^{a}\bar{\sigma}^{b\dot{\gamma}\gamma}L_{ab} \\
= \; & \frac{1}{2}L_{ab}(\sigma_{\gamma\dot{\beta}}{}^{b}\bar{\sigma}^{c\dot{\beta}\beta}\sigma_{\beta\dot{\gamma}}{}^{d}\bar{\sigma}^{a\dot{\gamma}\gamma} + \underbrace{\sigma_{\gamma\dot{\alpha}}{}^{c}\bar{\sigma}^{d\dot{\alpha}\alpha}}_{-2\eta^{cd}\delta_{\gamma}{}^{\alpha} - \sigma_{\gamma\dot{\alpha}}{}^{d}\bar{\sigma}^{c\dot{\alpha}\alpha}}\sigma_{\alpha\dot{\gamma}}{}^{a}\bar{\sigma}^{b\dot{\gamma}\gamma})
\end{aligned} \tag{77}
$$

Substituindo a relação do apendice A (364):

$$
L_{ab}(\eta^{bd}\sigma^c - \eta^{cd}\sigma^b - \eta^{bc}\sigma^d)_{\gamma\dot{\gamma}}\bar{\sigma}^{a\dot{\gamma}\gamma} = -2L^{cd} + 2L^{dc} \tag{78}
$$

Portanto (73) está verificada.

3.3 Vielbein

No restante dessa dissertação será adotada a convenção a seguir: os índice representados por letras do ínicio do alfabeto são índices de Lorentz (índices tangente), que transformam-se pelo grupo de estrutura. Enquanto os índices do meio do alfabeto são índices de Einstein (índices de mundo), relacionados com a transformação geral de coordenadas. O índice de Lorentz A relaciona-se com o índice de Einstein M por meio do campo de Vielbein $E_M{}^A$e seu inverso:

$$
\begin{aligned}
V_M &= E_M{}^A V_A \\
V_A &= E_A{}^M V_M
\end{aligned} \tag{79}
$$

As formas diferenciais mostradas até então foram escritas usando-se o diferencial do superespaço dz^M como base, entretanto usando-se $E_M{}^A$ forma-se base uma que frequentemente é mais adequada, chamada de Vielbein:

$$E^A = dz^M E_M{}^A \tag{80}$$

O Vielbein é definido de tal forma que :

$$dz^M \frac{\partial}{\partial z^M} = E^A \mathcal{D}_A = dz^M E_M{}^A E_A{}^N \frac{\partial}{\partial z^N} \tag{81}$$

Naturalmente,

$$\begin{aligned} E_M{}^C E_C{}^N &= \delta_M{}^N \\ E_A{}^M E_M{}^B &= \delta_A{}^B \end{aligned} \tag{82}$$

e

$$\mathcal{D}_A = E_A{}^N \frac{\partial}{\partial z^N} \tag{83}$$

A derivada covariante se reduzirá à derivada Supersimétrica no caso plano. Pela comparação de (12) e (83), os valores do Vielbein são nesse caso:

$$\begin{aligned} E_a{}^m &= \delta_a{}^m, \quad E_\alpha{}^\mu = \delta_\alpha{}^\mu, \quad E^{\dot\alpha}{}_{\dot\mu} = \delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\mu} \\ E_\alpha{}^m &= i\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m \bar\theta^{\dot\alpha}, \quad E^{\dot\alpha m} = i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot\beta}{}^m \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta} \end{aligned} \tag{84}$$

E o seu inverso:

$$\begin{aligned} E_m{}^a &= \delta_m{}^a, \quad E_\mu{}^\alpha = \delta_\mu{}^\alpha, \quad E^{\dot\mu}{}_{\dot\alpha} = \delta^{\dot\mu}{}_{\dot\alpha} \\ E_\mu{}^a &= -i\sigma_{\mu\dot\mu}{}^a \bar\theta^{\dot\mu}, \quad E^{\dot\mu a} = -i\theta^\nu \sigma_{\nu\dot\nu}{}^a \epsilon^{\dot\nu\dot\mu} \end{aligned} \tag{85}$$

Os demais elementos são nulos.

Nas duas secções seguintes estudaremos alguns objetos básicos utilizados para a descrição da Supergravidade no Superespaço.

3.3.1 Torção

A 2-forma chamada torção T^A é definida como a derivada covariante do Vielbein:

$$T^A = \mathcal{D}E^A = dE^A + E^B \phi_B{}^A \tag{86}$$

A torção pode ser escrita como uma expansão em termos do Vielbein E ou dos diferenciais dz :

$$T^A = \frac{1}{2} dz^M dz^N T_{NM}{}^A = \frac{1}{2} E^C E^B T_{BC}{}^A \tag{87}$$

Usando (80):

$$\begin{aligned} dz^M dz^N T_{NM}{}^A &= dz^M E_M{}^C dz^N E_N{}^B T_{BC}{}^A \\ &= (-)^{b(m+c)} dz^M dz^N E_N{}^B E_M{}^C T_{BC}{}^A \end{aligned} \tag{88}$$

Assim

$$T_{NM}{}^A = (-)^{b(m+c)} E_N{}^B E_M{}^C T_{BC}{}^A \tag{89}$$

Ou

$$T_{BC}{}^A = (-)^{b(m+c)} E_C{}^M E_B{}^N T_{NM}{}^A \tag{90}$$

Explicitamente a forma da torção é dada por :

$$\frac{1}{2} dz^M dz^N T_{NM}{}^A = dz^M dz^N \partial_N E_M{}^A + dz^M E_M{}^B dz^N \phi_{NB}{}^A \tag{91}$$

Deve-se somar sobre todas as permutações possíveis para encontrar a função coeficiente.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & dz^N dz^M \left(\frac{1}{2} T_{NM}{}^A - \partial_N E_M{}^A + (-)^{n(m+b)} E_M{}^B \phi_{NB}{}^A \right) \\ + \quad & dz^M dz^N \left(\frac{1}{2} T_{MN}{}^A - \partial_M E_N{}^A + (-)^{m(n+b)} E_N{}^B \phi_{MB}{}^A \right) = 0 \end{aligned} \tag{92}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & dz^M dz^N \left[\frac{1}{2} T_{NM}{}^A - \partial_N E_M{}^A - (-)^{n(m+b)} E_M{}^B \phi_{NB}{}^A \right. \\ - \quad & \left. (-)^{nm} \left(\frac{1}{2} T_{MN}{}^A - \partial_M E_N{}^A - (-)^{m(n+b)} E_M{}^B \phi_{NB}{}^A \right) \right] = 0 \end{aligned} \tag{93}$$

Logo:

$$
\begin{aligned}
T_{NM}{}^{A} &= \partial_N E_M{}^A - (-)^{nm}\partial_M E_N{}^A + (-)^{n(b+m)} E_M{}^B \phi_{NB}{}^A \\
&- (-)^{mb} E_N{}^B \phi_{MB}{}^A
\end{aligned} \tag{94}
$$

Considerando a fórmula (94) acima e a do Vielbein, mostrado em (84), que é valida para o espaço plano onde $\phi = 0$, pode-se encontrar que a torção tem componentes não nulas :

$$
\begin{aligned}
T_{BC}{}^{A} &= (-)^{b(m+c)} E_C{}^M E_B{}^N (\partial_N E_M{}^C - (-)^{mn}\partial_N E_M{}^A) \\
\Rightarrow \epsilon^{\dot\beta\dot\gamma} T_{\alpha\dot\gamma}{}^{c} &= E^{\dot\beta}{}_{\dot\nu} E_\alpha{}^\mu (\partial_\mu E^{\dot\nu c} + \partial^{\dot\nu} E_\mu{}^c)
\end{aligned} \tag{95}
$$

Portanto temos as seguintes componentes para a torção no superespaço plano:

$$
T_{\alpha\dot\beta}{}^{c} = T_{\dot\beta\alpha}{}^{c} = 2i\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^{c} \tag{96}
$$

3.3.2 Curvatura

A derivada covariante da conexão é chamada Curvatura R:

$$
R = d\phi + \phi\phi \tag{97}
$$

Tanto a conexão quanto a curvatura pertencem álgebra do grupo do espaço tangente e portanto sofrem as mesmas restrições de $L_A{}^B$. Para a conexão:

$$
\begin{aligned}
\phi &= dz^M \phi_M = E^A \phi_A \\
\phi_M &= \phi_{MA}{}^B \\
\phi_{MAB} &= -(-)^{ab}\phi_{MAB}
\end{aligned} \tag{98}
$$

E para a curvatura:

$$
\begin{aligned}
R_{NMAB} &= -(-)^{ab} R_{NMBA} \\
R_{NMa\beta} &= R_{NMa\dot\beta} = R_{NM\alpha\dot\beta} = 0
\end{aligned} \tag{99}
$$

$$
\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^{a}\sigma_{\beta\dot\beta}{}^{b} R_{NMab} = -2\epsilon_{\alpha\beta} R_{NM\dot\alpha\dot\beta} + 2\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} R_{NM\alpha\beta} \tag{100}
$$

E por ser uma 2-forma a curvatura :

$$R_{NMA}{}^{B} = -(-)^{nm} R_{MNA}{}^{B} \tag{101}$$

Para encontrar a forma explicita da função coeficiente da curvatura realiza-se o mesmo procedimento usado para obter (94) :

$$\frac{1}{2} dz^M dz^N R_{NMA}{}^{B} = dz^M dz^N \partial_N \phi_{MA}{}^{B} + dz^M \phi_{MA}{}^{C} dz^N \phi_{NC}{}^{B} \tag{102}$$

temos

$$\begin{aligned} R_{NMA}{}^{B} &= \partial_N \phi_{MA}{}^{B} - (-)^{nm} \partial_M \phi_{NA}{}^{B} + (-)^{n(m+a+c)} \phi_{MA}{}^{C} \phi_{NC}{}^{B} \\ &- (-)^{m(a+c)} \phi_{NA}{}^{C} \phi_{MC}{}^{B} \end{aligned} \tag{103}$$

3.4 Indentidades de Bianchi

A torção e a Curvatura foram definidas como as derivadas covariantes do Vielbein e da Conexão, respectivamente. Devido a $dd = 0$, derivadas de ordem mais alta levam à identidades que relacionam as quantidades já conhecidas, essas identidades são chamadas Identidades de Bianchi. As identidades de Bianchi de primeiro tipo são obtidas da derivada covariante, considere a derivada covariante de um tensor F:

$$\begin{aligned} d\mathcal{D}F &= Fd\phi - dF\phi = F(R - \phi\phi) - (\mathcal{D}F - F\phi)\phi \\ &= FR - \mathcal{D}F\phi \\ &\Rightarrow \mathcal{D}\mathcal{D}F = FR \end{aligned} \tag{104}$$

Se F estiver representando o vielbein:

$$\mathcal{D}T^{A} = E^{B} R_{B}{}^{A} \tag{105}$$

Em termos da torção na base do Vielbein:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}T^{A} &= \frac{1}{2} \mathcal{D}(E^{B} E^{C} T_{CB}{}^{A}) \\ &= \frac{1}{2} E^{B} E^{C} \mathcal{D} T_{CB}{}^{A} + \frac{1}{2} E^{B} T^{C} T_{CB}{}^{A} - \frac{1}{2} T^{B} E^{C} T_{CB} \\ &\Rightarrow E^{B} E^{C} E^{D} (\mathcal{D}_D T_{CB}{}^{A} - R_{DCB}{}^{A} + T_{DC}{}^{F} T_{FB}{}^{A}) = 0 \end{aligned} \tag{106}$$

As identidades de Bianchi de segundo tipo são obtidas da derivada exterior da curvatura

$$\begin{aligned} dR &= \phi d\phi - d\phi\phi = \phi R - R\phi \\ &\Rightarrow \mathcal{D}R = 0 \end{aligned} \tag{107}$$

Da expressão acima,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(E^A E^B R_{BAC}{}^D) &= \frac{1}{2}E^A E^B \mathcal{D}R_{BAC}{}^D - \frac{1}{2}T^A E^B R_{BAC}{}^D + \frac{1}{2}E^A T^B R_{BAC}{}^D \\ &\Rightarrow E^C E^D E^E(\mathcal{D}_E R_{DCA}{}^B + T_{ED}{}^F T_{FCA}{}^B) = 0 \end{aligned} \tag{108}$$

3.4.1 Vínculos para Supergravidade

O formalismo desenvolvido nas secções anteriores é bastante geral, pois $\phi_{MA}{}^B$ e $E_M{}^A$ são campos arbitrários a princípio. Para a descrição da supergravidade deve-se encontrar vínculos adequados que reduzam o número de campos componentes.

Na Relatividade Geral temos uma situação análoga, pois a gravidade é formulada em termos do vielbein e da conexão e na Relatividade Geral é escolhida a condição de torção nula. Para manter a analogia o vínculo natural a ser imposto seria :

$$T_{NM}{}^A = 0 \tag{109}$$

O problema desse vínculo é que ele exclui o espaço plano supersimétrico com solução da teoria, como expresso por (96).

Não há uma maneira geral para se encontrar os vínculos adequados, as diversas possibilidades devem ser analisadas, como proposto por [9] os vínculos para a torção são dados por:

$$\begin{aligned} T_{\underline{\alpha\beta}}{}^{\underline{\gamma}} &= T_{\underline{\alpha\beta}}{}^c = T_{\underline{\alpha}b}{}^c = T_{a\underline{\beta}}{}^c = T_{ab}{}^c = 0 \\ T_{\alpha\dot{\beta}}{}^c &= T_{\dot{\beta}\alpha}{}^c = 2i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^c, \end{aligned} \tag{110}$$

Onde os índices sublinhados indicam tanto índices com ponto como sem ponto. Dessa forma as únicas compenentes da torção que podem ser não nulas são $T_{\alpha\dot{\beta}}{}^c = T_{\dot{\beta}\alpha}{}^c = 2i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^c$, $T_{\underline{\alpha}b}{}^{\underline{\gamma}}$, $T_{a\underline{\beta}}{}^{\underline{\gamma}}$ e $T_{ab}{}^{\underline{\gamma}}$.

A seguir será mostrado que a identidade de Bianchi (106) admite uma solução sujeita aos vinculos (110). Essa solução dependerá de 3 supercampos R , $G_{\alpha\dot{\beta}}$ e $W_{\alpha\beta\gamma}$, como será visto a seguir.

3.4.2 Componentes irredutivéis das Identidades de Bianchi

Para encontrar a solução de (106), esta deve ser decomposta em equações irredutivéis pelo grupo local de Lorentz, isto é, para cada índice representado por uma letra latina maiúscula (por exemplo: A) deve-se substituir pela letra latina minúscula correspondente e as letras gregas com e sem ponto (por exemplo: a, α, $\dot{\alpha}$).

O número de componentes irredutiveis de (106) é obtido levando-se em conta que existem 3 índices maiúsculos (B, C e D) na base de vielbein e cada um pode ser de 3 tipos (b, β, $\dot{\beta}$, ...), assim o número de permutações que dará origem a equações diferentes é $\frac{5!}{3!2!} = 10$, como o índice A também pode ser de 3 tipos teremos a princípio 30 equações diferentes. Entretranto várias dessas equações são nulas ou se relacionam por conjugação complexa.

Para se encontrar as equações é necessario substituir e verificar quais delas resultam em expressões não triviais. O procedimento é análogo ao que foi feito para encontra (94), será feito a seguir alguns exemplos para ilustrar o método e depois todas as indentidades serão listadas.

Para facilitar a notação será definido:

$$\Delta_{DCBA} = \mathcal{D}_D T_{CBA} - R_{DCBA} + T_{DC}{}^F T_{FBA} \tag{111}$$

A expressão (106) pode ser reescrita:

$$\begin{aligned} E^B E^C E^D \Delta_{DCBA} \quad &+ \quad E^C E^D E^B \Delta_{BDCA} + E^D E^B E^C \Delta_{CBDA} \\ +E^B E^D E^C \Delta_{CDBA} \quad &+ \quad E^C E^B E^D \Delta_{DBCA} + E^D E^C E^B \Delta_{BCDA} = 0 \end{aligned} \tag{112}$$

Rearanjando a base de Vielbein:

$$\begin{aligned} \Delta_{DCBA} \quad &+ \quad (-)^{b(c+d)} \Delta_{BDCA} + (-)^{d(b+c)} \Delta_{CBDA} \\ -(-)^{cd} \Delta_{CDBA} \quad &- \quad (-)^{bc} \Delta_{DBCA} - (-)^{b(d+c)} (-)^{dc} \Delta_{BCDA} = 0 \end{aligned} \tag{113}$$

A partir de (111) e (113) podemos substituir para encontrar as expresões irredutivéis. Para $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$ e $D = \delta$, após considerar os vínculos os únicos termos que sobram são os que envolvem a curvatura R, que possui a simetria dada em (101), então:

$$R_{\delta\gamma\beta\alpha} + R_{\beta\delta\gamma\alpha} + R_{\gamma\beta\delta\alpha} = 0 \tag{114}$$

Considere agora o caso em que $A = \alpha$, $B = b$, $C = \dot{\gamma}$ e $D = d$:

$$\Delta_{d\dot{\gamma}b\alpha} + \Delta_{bd\dot{\gamma}\alpha} + \Delta_{\dot{\gamma}bd\alpha} - \Delta_{\dot{\gamma}db\alpha} - \Delta_{db\dot{\gamma}\alpha} - \Delta_{b\dot{\gamma}d\alpha} = 0 \tag{115}$$

Substituindo (111) e considerando os vínculos, as propriedades de R e o fato de que T é uma 2-forma:

$$\mathcal{D}_d T_{\dot{\gamma}b\alpha} + \mathcal{D}_b T_{d\dot{\gamma}\alpha} + \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\gamma}} T_{bd\alpha} + T_{d\dot{\gamma}}{}^{\underline{\phi}} T_{\underline{\phi}b\alpha} + T_{\dot{\gamma}b}{}^{\underline{\phi}} T_{\underline{\phi}d\alpha} = 0 \tag{116}$$

Na expressão acima os índices sublinhados indicam a soma sob os índices com ponto e sem ponto. Da mesma forma fazendo as substituições corretas obtém-se as 13 componentes não nulas:

$$R_{\beta\delta\gamma\alpha} + R_{\delta\gamma\beta\alpha} + R_{\gamma\beta\delta\alpha} = 0 \tag{117}$$

$$R_{\delta\dot{\gamma}\beta\alpha} + R_{\dot{\gamma}\beta\delta\alpha} = -2i\sigma_{\delta\dot{\gamma}}{}^{f} T_{\beta f\alpha} - 2i\sigma_{\beta\dot{\gamma}}{}^{f} T_{\delta f\alpha} \tag{118}$$

$$R_{\beta\delta\dot{\gamma}\dot{\alpha}} = -2i\sigma_{\delta\dot{\gamma}}{}^{f} T_{\beta f\dot{\alpha}} - 2i\sigma_{\beta\dot{\gamma}}{}^{f} T_{\delta f\dot{\alpha}} \tag{119}$$

$$R_{\delta b\gamma\alpha} + R_{\gamma b\delta\alpha} = -\mathcal{D}_\gamma T_{\delta b\alpha} - \mathcal{D}_\delta T_{\gamma b\alpha} \tag{120}$$

$$R_{b\delta\dot{\gamma}\dot{\alpha}} = \mathcal{D}_\delta T_{\dot{\gamma}b\dot{\alpha}} + \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\gamma}} T_{\delta b\dot{\alpha}} + 2i\sigma_{\delta\dot{\gamma}}{}^{f} T_{fb\dot{\alpha}} \tag{121}$$

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\gamma}} T_{\dot{\delta}b\alpha} + \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\delta}} T_{\dot{\gamma}b\alpha} = 0 \tag{122}$$

$$R_{\dot{\beta}\dot{\delta}ca} = -2i\sigma_{a\phi\dot{\delta}} T_{\dot{\beta}c}{}^{\phi} - 2i\sigma_{a\phi\dot{\beta}} T_{\dot{\delta}c}{}^{\phi} \tag{123}$$

$$R_{\beta\dot{\delta}ca} = -2i\sigma_{a\phi\dot{\delta}} T_{\beta c}{}^{\phi} + 2i\sigma_{a\beta\dot{\phi}} T_{\dot{\delta}c}{}^{\dot{\phi}} \tag{124}$$

$$R_{bd\dot{\gamma}\dot{\alpha}} = \mathcal{D}_b T_{d\dot{\gamma}\dot{\alpha}} + \mathcal{D}_d T_{\dot{\gamma}b\dot{\alpha}} + \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\gamma}} T_{bd\dot{\alpha}} + T_{d\dot{\gamma}}{}^{\underline{\phi}} T_{\underline{\phi}b\dot{\alpha}} + T_{\dot{\gamma}b}{}^{\underline{\phi}} T_{\underline{\phi}d\dot{\alpha}} \tag{125}$$

$$\mathcal{D}_b T_{d\dot{\gamma}\alpha} + \mathcal{D}_d T_{\dot{\gamma}b\alpha} + \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\gamma}} T_{bd\alpha} + T_{d\dot{\gamma}}{}^{\underline{\phi}} T_{\underline{\phi}b\alpha} + T_{\dot{\gamma}b}{}^{\underline{\phi}} T_{\underline{\phi}d\alpha} = 0 \tag{126}$$

$$R_{\beta dca} + R_{c\beta da} + 2i\sigma_{a\beta\dot{\phi}} T_{dc}{}^{\dot{\phi}} = 0 \tag{127}$$

$$\mathcal{D}_b T_{dc\alpha} + \mathcal{D}_d T_{cb\alpha} + \mathcal{D}_c T_{bd\alpha} + T_{bd}{}^{\underline{\phi}} T_{\underline{\phi}c\alpha} + T_{dc}{}^{\underline{\phi}} T_{\underline{\phi}b\alpha} + T_{cb}{}^{\underline{\phi}} T_{\underline{\phi}d\alpha} = 0 \tag{128}$$

$$R_{bdca} + R_{dcba} + R_{cbda} = 0 \tag{129}$$

3.4.3 Soluções das Identidades de Bianchi

Nessa secção as identidades de Bianchi (eqs. de (117) a (129)) são resolvidas, para a referência original consulte [10].

Como já demonstrado as Identidades de Bianchi são satisfeitas identicamente. Pode-se retirar informações interessantes quando se considera os vínculos, primeiramente estes devem ser consistentes com as identidades. Além disso, a resolução das identidades sujeitas a esses vínculos permite saber os componentes nulos e não nulos da torção e curvatura e expressa-los em termos de um conjuto pequeno de supercampos, como será mostrado: R, $G_{\alpha\dot{\alpha}}$, $W_{\alpha\beta\gamma}$.

A conversão de índices vetoriais em espinoriais é obtida utilizando-se as matrizes σ, de forma que :

$$\begin{aligned} R_{\dot{\beta},\dot{\delta},\gamma\dot{\gamma},\alpha\dot{\alpha}} &= \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}{}^{c}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{a}R_{\dot{\beta}\dot{\delta}ca} \\ T_{\dot{\delta},\gamma\dot{\gamma},\phi} &= \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}{}^{c}T_{\dot{\delta}c\phi} \end{aligned} \tag{130}$$

Onde a "," é colocada, quando houver necessidade, para indicar quais índices eram vetoriais.

Identidade (123) Há 13 equações a serem resolvidas, dessas 7 são mais simples pois não possuem derivadas e são lineares. Comecemos convertendo (123) para notação espinorial, para isso multiplica-se (123) por $\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}{}^{c}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{a}$:

$$R_{\dot{\beta},\dot{\delta},\gamma\dot{\gamma},\alpha\dot{\alpha}} = -2i[(\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{a}\sigma_{a\phi\dot{\delta}})T_{\dot{\beta},\gamma\dot{\gamma},}{}^{\phi} + (\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{a}\sigma_{a\phi\dot{\beta}})T_{\dot{\delta},\gamma\dot{\gamma},}{}^{\phi}] \tag{131}$$

Substituindo (356) e (100) na expressão acima temos:

$$\begin{aligned} - \quad & 2\epsilon_{\gamma\alpha}R_{\dot{\beta}\dot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\alpha}} + 2\epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}R_{\dot{\beta}\dot{\delta}\gamma\alpha} = -2i[\epsilon_{\phi\beta}\epsilon_{\dot{\delta}\dot{\phi}}(-2\delta_{\alpha}{}^{\beta}\delta^{\dot{\phi}}{}_{\dot{\alpha}})T_{\dot{\beta},\gamma\dot{\gamma},}{}^{\phi} \\ + \quad & \epsilon_{\phi\beta}\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\phi}}(-2\delta_{\alpha}{}^{\beta}\delta^{\dot{\phi}}{}_{\dot{\alpha}})T_{\dot{\delta},\gamma\dot{\gamma},}{}^{\phi}] \end{aligned} \tag{132}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}R_{\dot{\beta}\dot{\delta}\gamma\alpha} - \epsilon_{\gamma\alpha}R_{\dot{\beta}\dot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\alpha}} = 2i(\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}T_{\dot{\delta},\gamma\dot{\gamma},\alpha} + \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\delta}}T_{\dot{\beta},\gamma\dot{\gamma},\alpha}) \tag{133}$$

O tensor $T_{\dot{\delta},\gamma\dot{\gamma},\alpha}$ pode ser expresso em termos de tensores com propriedades de simetria bem definidas por permutação de índices. Assim esse tensor pode ser escrito como a soma de uma parte simetrica e uma anti-simetrica em $\dot{\delta}\dot{\gamma}$ e cada uma dessas partes pode ser decomposta em uma simetrica e outra anti-simetrica nos índices $\gamma\alpha$:

$$T_{\dot{\delta},\gamma\dot{\gamma},\alpha} = \epsilon_{\dot{\delta}\dot{\gamma}}\epsilon_{\gamma\alpha}T + \epsilon_{\dot{\delta}\dot{\gamma}}T_{(\gamma\alpha)} + \epsilon_{\gamma\alpha}T_{(\dot{\delta}\dot{\gamma})} + T_{(\gamma\alpha)(\dot{\delta}\dot{\gamma})} \tag{134}$$

Pode-se projetar a parte anti-simetrica de (133) em $\alpha\gamma$ e $\dot{\alpha}\dot{\gamma}$ multiplicando-a por $\epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}$:

$$\begin{aligned} 0 &= 2i\underbrace{\epsilon^{\gamma\alpha}\epsilon_{\gamma\alpha}}_{-2}\underbrace{\epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}}_{\delta^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\beta}}}\epsilon_{\dot{\delta}\dot{\gamma}}T + 2i\underbrace{\epsilon^{\gamma\alpha}\epsilon_{\gamma\alpha}}_{-2}\underbrace{\epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}}_{\delta^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\beta}}}T_{(\dot{\delta}\dot{\beta})} \\ &+ 2i\underbrace{\epsilon^{\gamma\alpha}\epsilon_{\gamma\alpha}}_{-2}\underbrace{\epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\delta}}}_{\delta^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\delta}}}\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}}T + 2i\underbrace{\epsilon^{\gamma\alpha}\epsilon_{\gamma\alpha}}_{-2}\underbrace{\epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\delta}}}_{\delta^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\delta}}}T_{(\dot{\gamma}\dot{\beta})} \end{aligned} \tag{135}$$

Daí,

$$T_{(\dot{\beta}\dot{\delta})} = 0 \tag{136}$$

A componente de (133) simetrica em $\gamma\alpha$:

$$\epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}R_{\dot{\beta}\dot{\delta}\gamma\alpha} = 2i(\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon_{\dot{\delta}\dot{\gamma}} + \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\delta}}\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}})T_{(\gamma\alpha)} + 2i(\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}T_{(\gamma\alpha)(\dot{\delta}\dot{\gamma})} + \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\delta}}T_{(\gamma\alpha)(\dot{\beta}\dot{\gamma})}) \tag{137}$$

Multiplicando por $\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$:

$$R_{\dot{\gamma}\dot{\delta}\gamma\alpha} = 6i\epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\delta}}T_{(\gamma\alpha)} - 6iT_{(\gamma,\alpha)(\dot{\delta},\dot{\gamma})} \tag{138}$$

Separando a equação acima na parte simetrica e anti-simetrica em $\dot{\gamma}\dot{\delta}$ obtém-se:

$$T_{(\gamma\alpha)} = 0, \quad R_{\dot{\gamma}\dot{\delta}\gamma\alpha} = -6iT_{(\gamma,\alpha)(\dot{\gamma},\dot{\delta})} \tag{139}$$

Multiplicando (137) por $\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}$:

$$\begin{aligned} 2R_{\dot{\beta}\dot{\delta}\gamma\alpha} &= 2i(\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\delta}} + \epsilon_{\dot{\delta}\dot{\beta}})T_{(\gamma\alpha)} - 2i(T_{(\gamma,\alpha)(\dot{\delta},\dot{\beta})} + T_{(\gamma,\alpha)(\dot{\beta},\dot{\delta})}) \\ \Rightarrow R_{\dot{\beta}\dot{\delta}\gamma\alpha} &= -2iT_{(\gamma,\alpha)(\dot{\beta},\dot{\delta})} \end{aligned} \tag{140}$$

Substituindo (140) em (139) conclui-se que:

$$\begin{aligned} T_{(\gamma,\alpha)(\dot{\beta},\dot{\delta})} &= 0, \\ R_{\dot{\beta}\dot{\delta}\gamma\alpha} &= R_{\beta\delta\dot{\gamma}\dot{\alpha}} = 0 \end{aligned} \tag{141}$$

Resta analisar a parte totalmente anti-simetrica de $T_{\dot{\delta},\gamma\dot{\gamma},\alpha}$. Por convenção define-se o T que aparece um (134) como $T = -2iR$. Subtituindo em (133) obtém-se:

$$T_{\dot{\delta},\gamma\dot{\gamma},\alpha} = -2i\epsilon_{\dot{\delta}\dot{\gamma}}\epsilon_{\gamma\alpha}R \tag{142}$$

E em (133):

$$R_{\dot\beta\dot\delta\dot\gamma\dot\alpha} = 4(\epsilon_{\dot\beta\dot\alpha}\epsilon_{\dot\delta\dot\gamma} + \epsilon_{\dot\delta\dot\alpha}\epsilon_{\dot\beta\dot\gamma})R \tag{143}$$

Substituindo (143) em (100) e considerando (141):

$$R_{\dot\beta,\dot\delta,\gamma\dot\gamma,\alpha\dot\alpha} = -8\epsilon_{\gamma\alpha}(\epsilon_{\dot\beta\dot\alpha}\epsilon_{\dot\delta\dot\gamma} + \epsilon_{\dot\delta\dot\alpha}\epsilon_{\dot\beta\dot\gamma})R \tag{144}$$

Pode-se também encontrar outras componentes da torção e da curvatura por conjugação.

Para a torção sabemos que $T_\delta = (T^{\dot\delta})^\dagger$, que pode ser escrita em termos de componetes:

$$\begin{aligned} T^{\dot\delta} &= \cdots + E^m E^\alpha T_{\alpha m}{}^{\dot\delta} + \cdots \\ T_\delta &= \cdots + E^m E_{\dot\alpha} T^{\dot\alpha}{}_{m\delta} + \cdots \end{aligned} \tag{145}$$

A conjugação hermitiana de $T^{\dot\delta}$ é dada por:

$$(T^{\dot\delta})^\dagger = \cdots + (T_{\alpha m}{}^{\dot\delta})^\dagger (E^\alpha)^\dagger (E^m)^\dagger + \cdots = \cdots + (T_{\alpha m}{}^{\dot\delta})^\dagger E_{\dot\alpha} E^m + \cdots \tag{146}$$

Isso implica:

$$T^{\dot\alpha}{}_{m\delta} = -(T_{\alpha m}{}^{\dot\delta})^\dagger \tag{147}$$

Logo substituindo (142)

$$\begin{aligned} \bar\sigma_m{}^{\beta\dot\beta}\epsilon^{\dot\delta\dot\epsilon}T_{\alpha,\beta\dot\beta,\dot\epsilon} &= -(\bar\sigma_m{}^{\beta\dot\beta}\epsilon^{\dot\alpha\dot\epsilon}T_{\dot\epsilon,\beta\dot\beta,\delta})^\dagger \\ &= 2i\bar\sigma_m{}^{\epsilon\dot\delta}\epsilon_{\alpha\epsilon}R^\dagger \end{aligned} \tag{148}$$

Então, multiplicando por $\epsilon_{\dot\gamma\dot\delta}$:

$$T_{\delta,\gamma\dot\gamma,\dot\alpha} = -2i\epsilon_{\delta\gamma}\epsilon_{\dot\gamma\dot\alpha}R^\dagger \tag{149}$$

E para a curvatura:

$$R_{\beta\delta\gamma\alpha} = 4(\epsilon_{\beta\alpha}\epsilon_{\delta\gamma} + \epsilon_{\delta\alpha}\epsilon_{\beta\gamma})R^\dagger \tag{150}$$

A identidade (123) foi resolvida e encontrou-se que com um único supercampo R pode-se expressar $R_{\dot\beta\dot\delta ca}$ e $T_{\dot\delta c\phi}$.

Identidades (117) e (119) As identidades (117) e (119) são satisfeitas automaticamente a partir dos resultados encontrados, para (123). No caso de (117):

$$\begin{aligned} 4(\epsilon_{\beta\alpha}\epsilon_{\delta\gamma} &+ \epsilon_{\delta\alpha}\epsilon_{\beta\gamma})R^\dagger + 4(\epsilon_{\delta\alpha}\epsilon_{\gamma\beta} + \epsilon_{\gamma\alpha}\epsilon_{\delta\beta})R^\dagger \\ &+ 4(\epsilon_{\gamma\alpha}\epsilon_{\beta\delta} + \epsilon_{\beta\alpha}\epsilon_{\gamma\delta})R^\dagger = 0 \end{aligned} \tag{151}$$

Para (119):

$$0 = -2i[-2i(\epsilon_{\beta\delta}\epsilon_{\dot\gamma\dot\alpha} + \epsilon_{\delta\beta}\epsilon_{\dot\gamma\dot\alpha})R^\dagger] \tag{152}$$

Identidades (118) e (124) Convertendo (118) e (124) para notação espinorial obtém-se repectivamente:

$$R_{\delta\dot\gamma\beta\alpha} + R_{\beta\dot\gamma\delta\alpha} = -2iT_{\beta,\delta\dot\gamma,\alpha} - 2iT_{\delta,\beta\dot\gamma,\alpha} \tag{153}$$

$$\epsilon_{\gamma\alpha}R_{\beta\dot\delta\dot\gamma\dot\alpha} - \epsilon_{\dot\gamma\dot\alpha}R_{\beta\dot\delta\gamma\alpha} = 2i(\epsilon_{\dot\delta\dot\alpha}T_{\beta,\gamma\dot\gamma,\alpha} - \epsilon_{\beta\alpha}T_{\dot\delta,\gamma\dot\gamma,\dot\alpha}) \tag{154}$$

A curvatura e a torção podem ser decompostas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} R_{\delta\dot\gamma\beta\alpha} &= \epsilon_{\beta\delta}A_{\alpha\dot\gamma} + \epsilon_{\alpha\delta}B_{\beta\dot\gamma} + C_{(\alpha\beta\delta)\dot\gamma} \\ R_{\beta\dot\delta\dot\gamma\dot\alpha} &= \epsilon_{\dot\gamma\dot\delta}A^\dagger_{\gamma\dot\alpha} + \epsilon_{\dot\alpha\dot\delta}B^\dagger_{\beta\dot\gamma} + C^\dagger_{(\dot\delta\dot\gamma\dot\alpha)\beta} \end{aligned} \tag{155}$$

$$\begin{aligned} T_{\beta,\delta\dot\gamma,\alpha} &= \epsilon_{\beta\delta}D_{\alpha\dot\gamma} + \epsilon_{\alpha\beta}E_{\delta\dot\gamma} + \epsilon_{\delta\alpha}F_{\beta\dot\gamma} + H_{(\alpha\beta\delta)\dot\gamma} \\ T_{\dot\delta,\gamma\dot\gamma,\dot\alpha} &= -(\epsilon_{\dot\delta\dot\gamma}D^\dagger_{\gamma\dot\alpha} + \epsilon_{\dot\alpha\dot\delta}E^\dagger_{\gamma\dot\gamma} + \epsilon_{\dot\gamma\dot\alpha}F^\dagger_{\gamma\dot\delta} + H^\dagger_{(\dot\alpha\dot\delta\dot\gamma)\gamma}) \end{aligned} \tag{156}$$

Onde o sinal de "$-$" da expressão acima tem a mesma origem do sinal negativo em (147).

Pode-se encontrar relações entre os termos de simetria definida da torção e Curvatura substituindo-se (155) e (156) em (153):

$$\begin{aligned} &\epsilon_{\alpha\delta}B_{\beta\dot\gamma} + \epsilon_{\alpha\beta}B_{\delta\dot\gamma} + 2C_{(\alpha\beta\delta)\dot\gamma} = \\ - \;& 2i[\epsilon_{\alpha\beta}(E_{\delta\dot\gamma} - F_{\delta\dot\gamma}) + \epsilon_{\alpha\delta}(E_{\beta\dot\gamma} - F_{\beta\dot\gamma}) + 2H_{(\alpha\beta\delta)\dot\gamma}] \end{aligned} \tag{157}$$

Contraindo a expressão acima com $\epsilon^{\delta\alpha}$:

$$B_{\beta\dot\gamma} = -2i(E_{\beta\dot\gamma} - F_{\beta\dot\gamma}) \tag{158}$$

Da mesma forma as expressões, substituindo (155), (156) e (158) em (154):

$$\begin{aligned}
& \epsilon_{\dot\gamma\dot\alpha}(\epsilon_{\gamma\beta}A_{\alpha\dot\delta} - 2i\epsilon_{\alpha\beta}(E_{\gamma\dot\delta} - F_{\gamma\dot\delta}) + C_{(\alpha\beta\gamma)\dot\delta}) \\
- \; & \epsilon_{\gamma\alpha}(\epsilon_{\dot\gamma\dot\delta}A^\dagger_{\beta\dot\alpha} + 2i\epsilon_{\dot\alpha\dot\delta}(E^\dagger_{\beta\dot\gamma} - F^\dagger_{\beta\dot\gamma}) + C^\dagger_{(\dot\delta\dot\gamma\dot\alpha)\beta}) \\
= \; & -2i[\epsilon_{\beta\alpha}(\epsilon_{\dot\delta\dot\gamma}D^\dagger_{\gamma\dot\alpha} + \epsilon_{\dot\alpha\dot\delta}E^\dagger_{\gamma\dot\gamma} + \epsilon_{\dot\gamma\dot\alpha}F^\dagger_{\gamma\dot\delta} + H^\dagger_{(\dot\alpha\dot\delta\dot\gamma)\gamma}) \\
+ \; & \epsilon_{\dot\delta\dot\alpha}(\epsilon_{\beta\gamma}D_{\alpha\dot\gamma} + \epsilon_{\alpha\beta}E_{\gamma\dot\gamma} + \epsilon_{\gamma\alpha}F_{\beta\dot\gamma} + H_{(\alpha\beta\gamma)\dot\gamma})] \qquad (159)
\end{aligned}$$

Contraindo-se a expressão acima com tensores-ϵ de diversos índices encontrar-se várias equações que relacionam os termos da torção e curvatura.

Contraindo com $\epsilon^{\dot\alpha\dot\gamma}\,\epsilon^{\beta\gamma}$:

$$\begin{aligned}
& 4A_{\alpha\dot\delta} - 4i(E_{\alpha\dot\delta} - F_{\alpha\dot\delta}) + 2i(E^\dagger_{\alpha\dot\delta} - F^\dagger_{\alpha\dot\delta}) \\
= \; & -2i(D^\dagger_{\alpha\dot\delta} + E^\dagger_{\alpha\dot\delta} - 2F^\dagger_{\alpha\dot\delta} - 2D_{\alpha\dot\delta} + E_{\alpha\dot\delta} + F_{\alpha\dot\delta}) \qquad (160)
\end{aligned}$$

Contraindo com $\epsilon^{\dot\alpha\dot\gamma}\epsilon^{\beta\alpha}$:

$$\begin{aligned}
& 2A_{\gamma\dot\delta} - 8i(E_{\gamma\dot\delta} - F_{\gamma\dot\delta}) + A^\dagger_{\gamma\dot\delta} - 2i(E^\dagger_{\gamma\dot\delta} - F^\dagger_{\gamma\dot\delta}) \\
= \; & -2i(2D^\dagger_{\gamma\dot\delta} + 2E^\dagger_{\gamma\dot\delta} - 4F^\dagger_{\gamma\dot\delta} - D_{\gamma\dot\delta} + 2E_{\gamma\dot\delta} - F_{\gamma\dot\delta}) \qquad (161)
\end{aligned}$$

Contraindo com $\epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon^{\dot\delta\dot\gamma}$

$$\begin{aligned}
& A_{\beta\dot\alpha} + 2i(E_{\beta\dot\alpha} - F_{\beta\dot\alpha}) - 4A^\dagger_{\beta\dot\alpha} - 4i(E^\dagger_{\beta\dot\alpha} - F^\dagger_{\beta\dot\alpha}) \\
= \; & -2i(-2D^\dagger_{\beta\dot\alpha} + E^\dagger_{\beta\dot\alpha} + F^\dagger_{\beta\dot\alpha} + D_{\beta\dot\alpha} + E_{\beta\dot\alpha} - 2F_{\beta\dot\alpha}) \qquad (162)
\end{aligned}$$

Contraindo com $\epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon^{\dot\delta\dot\alpha}$:

$$\begin{aligned}
& -A_{\beta\dot\gamma} - 2i(E_{\beta\dot\gamma} - F_{\beta\dot\gamma}) - 2A^\dagger_{\beta\dot\gamma} - 8i(E^\dagger_{\beta\dot\gamma} - F^\dagger_{\beta\dot\gamma}) \\
= \; & -2i(-D^\dagger_{\beta\dot\gamma} + 2E^\dagger_{\beta\dot\gamma} - F^\dagger_{\beta\dot\gamma} + 2D_{\beta\dot\gamma} + 2E_{\beta\dot\gamma} - 4F_{\beta\dot\gamma}) \qquad (163)
\end{aligned}$$

Contraindo com $\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot\gamma\dot\delta}$:

$$\begin{aligned}
& A_{\gamma\dot\alpha} - 2i(E_{\gamma\dot\alpha} - F_{\gamma\dot\alpha}) + 2A^\dagger_{\gamma\dot\alpha} + 2i(E^\dagger_{\gamma\dot\alpha} - F^\dagger_{\gamma\dot\alpha}) \\
= \; & -2i(4D^\dagger_{\gamma\dot\alpha} - 2E^\dagger_{\gamma\dot\alpha} - 2F^\dagger_{\gamma\dot\alpha} + D_{\gamma\dot\alpha} - 2E_{\gamma\dot\alpha} + F_{\gamma\dot\alpha}) \qquad (164)
\end{aligned}$$

Contraindo com $\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot\delta\dot\alpha}$:

$$\begin{aligned}
& A_{\gamma\dot\gamma} - 4i(E_{\gamma\dot\gamma} - F_{\gamma\dot\gamma}) - A^\dagger_{\gamma\dot\gamma} - 4i(E^\dagger_{\gamma\dot\gamma} - F^\dagger_{\gamma\dot\gamma}) \\
= \; & -2i(-2D^\dagger_{\gamma\dot\gamma} + 4E^\dagger_{\gamma\dot\gamma} - 2F^\dagger_{\gamma\dot\gamma} - 2D_{\gamma\dot\gamma} + 4E_{\gamma\dot\gamma} - 2F_{\gamma\dot\gamma}) \qquad (165)
\end{aligned}$$

Contraindo com $\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\delta}}\epsilon^{\gamma\beta}$:

$$\begin{aligned} & -2A_{\alpha\dot{\gamma}} + 2i(E_{\alpha\dot{\gamma}} - F_{\alpha\dot{\gamma}}) - A^{\dagger}_{\alpha\dot{\gamma}} - 4i(E^{\dagger}_{\alpha\dot{\gamma}} - F^{\dagger}_{\alpha\dot{\gamma}}) \\ = \; & -2i(D^{\dagger}_{\alpha\dot{\gamma}} - 2E^{\dagger}_{\alpha\dot{\gamma}} + F^{\dagger}_{\alpha\dot{\gamma}} + 4D_{\alpha\dot{\gamma}} - 2E_{\alpha\dot{\gamma}} - 2F_{\alpha\dot{\gamma}}) \end{aligned} \tag{166}$$

As equações de (160) a (166) formam um sistema de 7 equações lineares com 8 incógnitas, assim cada incógnita pode ser escrita em função de uma única variável que será chamada $G_{\alpha\dot{\gamma}}$. Assim :

$$\begin{aligned} A_{\alpha\gamma} &= A^{\dagger}_{\alpha\gamma} = G_{\alpha\gamma}, \quad B_{\alpha\gamma} = B^{\dagger}_{\alpha\gamma} = G_{\alpha\gamma} \\ D_{\alpha\gamma} &= -D^{\dagger}_{\alpha\gamma} = -\frac{3}{4}iG_{\alpha\gamma}, \quad E_{\alpha\gamma} = -E^{\dagger}_{\alpha\gamma} = \frac{3}{4}iG_{\alpha\gamma} \\ F_{\alpha\gamma} &= -F^{\dagger}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{4}iG_{\alpha\gamma} \end{aligned} \tag{167}$$

Assim as componentes anti-simetricas de $R_{\delta\dot{\gamma}\beta\alpha}$, $R_{\beta\dot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\alpha}}$, $T_{\beta,\delta\dot{\gamma},\alpha}$ e $T_{\dot{\delta},\gamma\dot{\gamma},\dot{\alpha}}$ foram determinadas.

Para encontrar a parte simetrica substitui-se (155) e (156) em (153) e simetiza-se em $\alpha\beta\delta$ a expressão resultante fornece:

$$C_{(\alpha\beta\delta)\dot{\gamma}} = -2iH_{(\alpha\beta\delta)\dot{\gamma}} \tag{168}$$

Agora substituindo-se (155) e (156) em (154) e simetrizando em $\alpha\beta\gamma$:

$$\epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}C_{(\beta\gamma\alpha)\dot{\delta}} = -2i\epsilon_{\dot{\delta}\dot{\alpha}}H_{(\alpha\beta\gamma)\dot{\gamma}} \Rightarrow C_{(\beta\gamma\alpha)\dot{\delta}} = -4iH_{(\alpha\beta\gamma)\dot{\gamma}} \tag{169}$$

Então,

$$C_{(\beta\gamma\alpha)\dot{\delta}} = H_{(\alpha\beta\gamma)\dot{\delta}} = 0 \tag{170}$$

Portanto $R_{\beta\dot{\delta}\gamma\alpha}$ e $T_{\beta\gamma\dot{\gamma}\phi}$ pode ser escritos em função de apenas um supercampo real $G_{\alpha\dot{\alpha}}$:

$$\begin{aligned} R_{\beta\dot{\delta}\gamma\alpha} &= \epsilon_{\gamma\beta}G_{\alpha\dot{\delta}} + \epsilon_{\alpha\beta}G_{\gamma\dot{\delta}} \\ R_{\dot{\beta}\delta\dot{\gamma}\dot{\alpha}} &= \epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\beta}}G_{\delta\dot{\alpha}} + \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}G_{\delta\dot{\gamma}} \\ T_{\beta,\gamma\dot{\gamma},\phi} &= \frac{i}{4}(\epsilon_{\gamma\phi}G_{\beta\dot{\gamma}} - 3\epsilon_{\beta\gamma}G_{\phi\dot{\gamma}} - 3\epsilon_{\beta\phi}G_{\gamma\dot{\gamma}}) \\ T_{\dot{\beta},\gamma\dot{\gamma},\dot{\phi}} &= \frac{i}{4}(\epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\phi}}G_{\gamma\dot{\beta}} - 3\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}}G_{\gamma\dot{\phi}} - 3\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\phi}}G_{\gamma\dot{\gamma}}) \\ G^{\dagger}_{\alpha\dot{\gamma}} &= G_{\alpha\dot{\gamma}} \end{aligned} \tag{171}$$

Identidade (127) A partir de (127), pode-se escrever $R_{\beta dca}$ em função da torção. Para isso realiza-se a permutação dos índices bosônicos de (127):

$$R_{\beta dca} + R_{c\beta da} + 2i\sigma_{a\beta\dot{\phi}} T_{dc}{}^{\dot{\phi}} = 0 \tag{172}$$

$$R_{\beta cad} + \underbrace{R_{a\beta cd}}_{R_{\beta adc}} + 2i\sigma_{d\beta\dot{\phi}} T_{ca}{}^{\dot{\phi}} = 0 \tag{173}$$

$$\underbrace{R_{\beta adc}}_{R_{a\beta cd}} + \underbrace{R_{d\beta ac}}_{R_{\beta dca}} + 2i\sigma_{c\beta\dot{\phi}} T_{ad}{}^{\dot{\phi}} = 0 \tag{174}$$

Fazendo [(172) - (173) - (174)] :

$$R_{\beta acd} = i(\sigma_{a\beta\dot{\phi}} T_{cd}{}^{\dot{\phi}} - \sigma_{c\beta\dot{\phi}} T_{da}{}^{\dot{\phi}} - \sigma_{d\beta\dot{\phi}} T_{ac}{}^{\dot{\phi}}) \tag{175}$$

Identidede (129) Podemos converter todos os índices vetoriais de R_{cdba} para índices espinoriais:

$$R_{\gamma\dot{\gamma},\delta\dot{\delta},\beta\dot{\beta},\alpha\dot{\alpha}} = \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}{}^{c} \sigma_{\delta\dot{\delta}}{}^{d} \sigma_{\beta\dot{\beta}}{}^{b} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{a} R_{cdba} \tag{176}$$

Obviamente, pode-se decompor $R_{\gamma\dot{\gamma},\delta\dot{\delta},\beta\dot{\beta},\alpha\dot{\alpha}}$ de acordo com as simetrias de seus índices. Entretanto não existem termos com certas simetrias, por exemplo, não deve existir um mesmo termo que seja simetrico em $\gamma\delta$ e $\dot{\gamma}\dot{\delta}$ pois um termo com essas caracteristicas teria simetria entre c e d, isto é:

$$R_{\gamma\dot{\gamma},\delta\dot{\delta},\beta\dot{\beta},\alpha\dot{\alpha}} = R_{\delta\dot{\delta},\gamma\dot{\gamma},\beta\dot{\beta},\alpha\dot{\alpha}} \Rightarrow R_{cdba} = R_{dcba} \tag{177}$$

mas sabemos que

$$R_{cdba} = -R_{dcba} \tag{178}$$

Então um termo com essas caracteristicas seria nulo.

Considerando as restrições como as explicadas acima a forma mais geral de $R_{\gamma\dot{\gamma},\delta\dot{\delta},\beta\dot{\beta},\alpha\dot{\alpha}}$ é:

$$\begin{aligned} R_{\gamma\dot{\gamma},\delta\dot{\delta},\beta\dot{\beta},\alpha\dot{\alpha}} &= 4\epsilon_{\gamma\delta}\epsilon_{\beta\alpha}\bar{X}_{(\dot{\gamma}\dot{\delta})(\dot{\beta}\dot{\alpha})} - 4\epsilon_{\gamma\delta}\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\bar{\Psi}_{(\dot{\gamma}\dot{\delta})(\beta\alpha)} \\ &- 4\epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\delta}}\epsilon_{\beta\alpha}\Psi_{(\gamma\delta)(\dot{\beta}\dot{\alpha})} + 4\epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\delta}}\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}X_{(\gamma\delta)(\beta\alpha)} \end{aligned} \tag{179}$$

Colocando a fórmula acima na identidade (129):

$$\begin{aligned}
& \epsilon_{\beta\delta}\epsilon_{\gamma\alpha}\bar{X}_{(\dot\beta\dot\delta)(\dot\gamma\dot\alpha)} + \epsilon_{\delta\gamma}\epsilon_{\beta\alpha}\bar{X}_{(\dot\delta\dot\gamma)(\dot\beta\dot\alpha)} + \epsilon_{\gamma\beta}\epsilon_{\delta\alpha}\bar{X}_{(\dot\gamma\dot\beta)(\dot\delta\dot\alpha)} \\
- \quad & \epsilon_{\beta\delta}\epsilon_{\dot\gamma\dot\alpha}\bar{\Psi}_{(\dot\beta\dot\delta)(\gamma\alpha)} - \epsilon_{\delta\gamma}\epsilon_{\dot\beta\dot\alpha}\bar{\Psi}_{(\dot\delta\dot\gamma)(\beta\alpha)} - \epsilon_{\gamma\beta}\epsilon_{\dot\delta\dot\alpha}\bar{\Psi}_{(\dot\gamma\dot\beta)(\delta\alpha)} \\
- \quad & \epsilon_{\dot\beta\dot\delta}\epsilon_{\gamma\alpha}\Psi_{(\beta\gamma)(\dot\gamma\dot\alpha)} - \epsilon_{\dot\delta\dot\gamma}\epsilon_{\beta\alpha}\Psi_{(\delta\gamma)(\dot\beta\dot\alpha)} - \epsilon_{\dot\gamma\dot\beta}\epsilon_{\delta\alpha}\Psi_{(\gamma\beta)(\dot\delta\dot\alpha)} \\
+ \quad & \epsilon_{\dot\beta\dot\delta}\epsilon_{\dot\gamma\dot\alpha}X_{(\beta\delta)(\gamma\alpha)} + \epsilon_{\dot\delta\dot\gamma}\epsilon_{\dot\beta\dot\alpha}X_{(\delta\gamma)(\beta\alpha)} + \epsilon_{\dot\gamma\dot\beta}\epsilon_{\dot\delta\dot\alpha}X_{(\gamma\beta)(\delta\alpha)} = 0
\end{aligned} \tag{180}$$

Multiplicando por $\epsilon^{\dot\beta\dot\delta}\epsilon^{\gamma\alpha}$:

$$+2\bar{\Psi}_{(\dot\alpha\dot\gamma)(\beta\delta)} - 2\Psi_{(\beta\delta)(\dot\alpha\dot\gamma)} - \epsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}(X^{\alpha}{}_{\delta\alpha\beta} - X^{\alpha}{}_{\beta\alpha\delta}) = 0 \tag{181}$$

Separando a parte simetrica e anti-simetrica em $\delta\beta$:

$$\bar{\Psi}_{(\dot\alpha\dot\gamma)(\beta\delta)} = \Psi_{(\beta\delta)(\dot\alpha\dot\gamma)}, \quad X^{\alpha}{}_{\delta\alpha\beta} = \epsilon_{\delta\beta}\Lambda \tag{182}$$

Identidade (122) Substituindo (143) na identidade (122) :

$$\epsilon_{\dot\delta\dot\beta}\epsilon_{\beta\alpha}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\gamma}R + \epsilon_{\dot\gamma\dot\beta}\epsilon_{\beta\alpha}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\delta}R = 0 \tag{183}$$

Contraindo a expressão acima com $\epsilon^{\dot\delta\dot\beta}$, descobre-se que R é um campo quiral e $R^\dagger$ anti-quiral:

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot\gamma}R = 0, \quad \mathcal{D}_\gamma R^\dagger = 0 \tag{184}$$

Identidade (120) A identidade (120) é:

$$R_{\delta,\beta\dot\beta,\gamma,\alpha} + R_{\gamma,\beta\dot\beta,\delta,\alpha} = -\mathcal{D}_\gamma T_{\delta,\beta\dot\beta,\alpha} - \mathcal{D}_\delta T_{\gamma,\beta\dot\beta,\alpha} \tag{185}$$

Essa identidade relaciona tensores do tipo $T_{\alpha,\beta\dot\beta,\gamma}$ com tensores como $R_{\alpha,\beta\dot\beta,\gamma,\delta}$. Esses últimos também aparecem na decomposição do tensor $R_{\alpha,b,c,d}$, assim utilizando-se (175):

$$\begin{aligned}
- \quad & 2\epsilon_{\gamma\alpha}R_{\beta,\delta\dot\delta,\dot\gamma,\dot\alpha} + 2\epsilon_{\dot\gamma\dot\alpha}R_{\beta,\delta\dot\delta,\gamma,\alpha} \\
= \quad & i(\sigma_{\delta\dot\delta}{}^{d}\sigma_{\beta\dot\phi d}T_{\gamma\dot\gamma,\alpha\dot\alpha,}{}^{\dot\phi} - \sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^{a}\sigma_{\beta\dot\phi a}T_{\delta\dot\delta,\gamma\dot\gamma,}{}^{\dot\phi} - \sigma_{\gamma\dot\gamma}{}^{c}\sigma_{\beta\dot\phi c}T_{\alpha\dot\alpha,\delta\dot\delta,}{}^{\dot\phi}) \\
= \quad & -2i(\epsilon_{\delta\beta}T_{\gamma\dot\gamma,\alpha\dot\alpha,\dot\delta} - \epsilon_{\alpha\beta}T_{\delta\dot\delta,\gamma\dot\gamma,\dot\alpha} - \epsilon_{\gamma\beta}T_{\alpha\dot\alpha,\delta\dot\delta,\dot\gamma})
\end{aligned} \tag{186}$$

O tensor $T_{\alpha\dot\alpha,\beta\dot\beta,\dot\gamma}$, de (186) pode ser decomposto como:

$$T_{\delta\dot\delta,\gamma\dot\gamma,\dot\alpha} = -2\epsilon_{\delta\gamma}(\bar{W}_{(\dot\delta\dot\gamma\dot\alpha)} + \epsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\bar{W}_{\dot\delta} + \epsilon_{\dot\alpha\dot\delta}\bar{W}_{\dot\gamma}) + 2\epsilon_{\dot\delta\dot\gamma}W_{(\delta\gamma)\dot\alpha} \tag{187}$$

Seguido-se um procedimento similar ao usado para a resolução das identidades anteriores, a decomposição (187) deve ser colocada em (186) e as componentes de determinada simetria devem ser isoladas e expressas em termos de quantidades conhecidas.

Para encontrar $\bar{W}_{(\beta\gamma)\dot{\delta}}$ a expressão (186) deve ser anti-simetrizada em $\delta\alpha$ e $\dot{\alpha}\dot{\gamma}$ (multiplicando por $\epsilon^{\delta\alpha}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}$) e simetrizada em $\beta\gamma$. Fazendo-se isso e substituindo (187):

$$\begin{aligned}
2 \quad & \epsilon^{\delta\alpha}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}R_{\beta,\delta\dot{\delta},\gamma,\alpha} + (\beta \leftrightarrow \gamma) \\
= \quad & -2i\epsilon^{\delta\alpha}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}[\epsilon_{\delta\beta}(-2\epsilon_{\gamma\alpha}\bar{W}_{\dot{\gamma}} - 2\epsilon_{\gamma\alpha}\epsilon_{\dot{\delta}\dot{\gamma}}\bar{W}_{\dot{\alpha}} + 2\epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}\bar{W}_{(\gamma\alpha)\dot{\delta}}) \\
- \quad & \epsilon_{\alpha\beta}(-2\epsilon_{\delta\gamma}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\bar{W}_{\dot{\delta}} - 2\epsilon_{\delta\gamma}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\delta}}\bar{W}_{\dot{\gamma}} + \epsilon_{\dot{\delta}\dot{\gamma}}\bar{W}_{(\delta\gamma)\dot{\alpha}})] + (\beta \leftrightarrow \gamma) \\
\Rightarrow \quad & 4\epsilon^{\delta\alpha}R_{\beta,\delta\dot{\delta},\gamma,\alpha} + (\beta \leftrightarrow \gamma) = 4i\bar{W}_{(\beta\gamma)\dot{\delta}} + (\beta \leftrightarrow \gamma) \qquad (188)
\end{aligned}$$

Substituindo-se a identidade (185) na expressão acima:

$$\bar{W}_{(\beta\gamma)\dot{\delta}} = \frac{1}{4}(\mathcal{D}_\gamma G_{\beta\dot{\delta}} + \mathcal{D}_\beta G_{\gamma\dot{\delta}}) \qquad (189)$$

Para encontrar $\bar{W}_{\dot{\delta}}$, a expressão (186) deve ser multiplicada por $\epsilon^{\beta\gamma}\epsilon^{\delta\alpha}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}$ de forma que a única componente da torção não nula será múltipla de $\bar{W}_{\dot{\delta}}$. Após contrair os índices e somar todos os termos encontra-se:

$$\bar{W}_{\dot{\delta}} = \frac{1}{18}iR_{\beta,\delta\dot{\delta},\ ,}^{\ \beta\ \delta} \qquad (190)$$

Onde $R_{\beta,\delta\dot{\delta},\ ,}^{\ \beta\ \delta}$ é obtido da contração da identidade (185) com $\epsilon^{\delta\alpha}\epsilon^{\beta\gamma}$:

$$R_{\delta,\beta\dot{\beta},\ ,}^{\ \beta\ \delta} = -\frac{i}{4}18\mathcal{D}^\alpha G_{\alpha\dot{\beta}} \qquad (191)$$

Combinando (190) e (191):

$$\bar{W}_{\dot{\delta}} = \frac{1}{4}\mathcal{D}^\alpha G_{\alpha\dot{\delta}} \qquad (192)$$

O termo de (187) que falta ser analisado é $\bar{W}_{\dot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\alpha}}$, entretanto esse não pode ser determinado , isto é, $\bar{W}_{\dot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\alpha}}$ não pode ser escrito em termos do tensor $G_{\alpha\dot{\beta}}$ a partir da identidade em questão. Portanto

$$\begin{aligned}
T_{\alpha\dot{\alpha},\beta\dot{\beta},\dot{\gamma}} \quad = \quad & -2\epsilon_{\alpha\beta}\bar{W}_{(\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma})} - \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}(\epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\beta}}\mathcal{D}^\delta G_{\delta\dot{\alpha}} + \epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}\mathcal{D}^\delta G_{\delta\dot{\beta}}) \\
+ \quad & \frac{1}{2}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\mathcal{D}_\alpha G_{\beta\dot{\gamma}} + \mathcal{D}_\beta G_{\alpha\dot{\gamma}}) \qquad (193)
\end{aligned}$$

$R_{\alpha,\beta\dot{\beta},\gamma,\delta}$ e $R_{\alpha,\beta\dot{\beta},\dot{\gamma},\dot{\delta}}$ são encontrados contraindo (186) com $\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}$ e $\epsilon^{\alpha\gamma}$, respectivamente:

$$\begin{aligned} R_{\alpha,\beta\dot{\beta},\gamma,\delta} &= \frac{1}{2}i(\epsilon_{\alpha\beta}\mathcal{D}_\gamma + \epsilon_{\alpha\gamma}\mathcal{D}_\beta)G_{\delta\dot{\beta}} \\ &+ \frac{1}{2}i(\epsilon_{\alpha\beta}\mathcal{D}_\delta + \epsilon_{\alpha\delta}\mathcal{D}_\beta)G_{\gamma\dot{\beta}} + i(\epsilon_{\delta\alpha}\epsilon_{\beta\gamma} + \epsilon_{\gamma\alpha}\epsilon_{\beta\delta})\mathcal{D}^\epsilon G_{\epsilon\dot{\beta}} \end{aligned} \tag{194}$$

$$R_{\alpha,\beta\dot{\beta},\dot{\gamma},\dot{\delta}} = 4i\epsilon_{\alpha\beta}\bar{W}_{\dot{\beta}\dot{\gamma}\dot{\delta}} + \frac{1}{2}i(\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\mathcal{D}_\alpha G_{\beta\dot{\delta}} + \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\delta}}\mathcal{D}_\alpha G_{\beta\dot{\gamma}}) \tag{195}$$

Identidade (121) A transformação da identidade (121) para notação espinorial é dada por:

$$-R_{\delta,\beta\dot{\beta},\dot{\gamma},\dot{\alpha}} = \mathcal{D}_\delta T_{\dot{\gamma},\beta\dot{\beta},\dot{\alpha}} + \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\gamma}} T_{\delta,\beta\dot{\beta},\dot{\alpha}} + 2iT_{\delta\dot{\gamma},\beta\dot{\beta},\dot{\alpha}} \tag{196}$$

Substituindo (195), (193), (149) e (171) na expressão acima:

$$\begin{aligned} &\left[4i\epsilon_{\delta\beta}\bar{W}_{\underline{\dot{\beta}\dot{\gamma}\dot{\alpha}}} + \frac{1}{2}i(\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\mathcal{D}_\delta G_{\beta\dot{\alpha}} + \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\mathcal{D}_\delta G_{\beta\dot{\gamma}})\right] \\ + \;& \mathcal{D}_\delta\left[\frac{i}{4}(\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}G_{\beta\dot{\gamma}} - 3\epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}G_{\beta\dot{\beta}} - 3\epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\beta}}G_{\beta\dot{\alpha}})\right] \\ + \;& \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\gamma}}(-2i\epsilon_{\delta\beta}\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}R^\dagger) + 2i\Big[-2\epsilon_{\delta\beta}\bar{W}_{\dot{\gamma}\dot{\beta}\dot{\alpha}} - \frac{1}{2}\epsilon_{\delta\beta}(\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\mathcal{D}^\phi G_{\phi\dot{\gamma}} + \\ & \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\mathcal{D}^\phi G_{\phi\dot{\beta}}) + \frac{1}{2}\epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\beta}}(\mathcal{D}_\delta G_{\beta\dot{\alpha}} + \mathcal{D}_\beta G_{\delta\dot{\alpha}})\Big] = 0 \end{aligned} \tag{197}$$

Multiplicando por $\epsilon^{\delta\beta}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$:

$$\mathcal{D}^\beta G_{\beta\dot{\gamma}} = \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\gamma}} R^\dagger \tag{198}$$

Identidade (125) Por simples comparação entre as fórmulas (179) e (100) encontra-se que:

$$R_{\gamma\dot{\gamma},\delta\dot{\delta},\dot{\beta},\dot{\alpha}} = -2\epsilon_{\gamma\delta}\bar{X}_{\dot{\gamma}\dot{\delta}\dot{\beta}\dot{\alpha}} + 2\epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\delta}}\Psi_{\gamma\delta\dot{\beta}\dot{\alpha}} \tag{199}$$

$$R_{\gamma\dot{\gamma},\delta\dot{\delta},\beta,\alpha} = 2\epsilon_{\dot{\gamma}\dot{\delta}}X_{\gamma\delta\beta\alpha} - 2\epsilon_{\gamma\delta}\bar{\Psi}_{\dot{\gamma}\dot{\delta}\beta\alpha} \tag{200}$$

Utilizando-se (199) na identidade (125) e contraindo-se com $\epsilon^{\gamma\delta}$:

$$\begin{aligned} \bar{X}_{\dot{\beta}\dot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\alpha}} &= \frac{1}{4}\Big[-\mathcal{D}_{\beta\dot{\beta}}T_{\dot{\gamma},\ \ ,\dot{\delta},\dot{\alpha}}^{\ \ \beta} - \mathcal{D}_{\beta\dot{\delta}}T_{\dot{\gamma},\ \ ,\dot{\beta},\dot{\alpha}}^{\ \ \beta} \\ &+ \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\gamma}}T_{\beta\dot{\beta},\ \ \dot{\delta},\dot{\alpha}}^{\ \ \beta} - T_{\dot{\gamma}\ \ \dot{\delta}}^{\ \ \beta\ \ \phi}T_{\underline{\phi}\beta\dot{\beta}\dot{\alpha}} + T_{\dot{\gamma}\beta\dot{\beta}}^{\ \ \ \ \phi}T_{\underline{\phi},\ \ \dot{\delta},\dot{\alpha}}^{\ \ \beta}\Big] \end{aligned} \tag{201}$$

Deve-se expressar os termos com $\mathcal{D}_{\beta\dot{\beta}}$ em função das quantidades já conhecidas. Para isso substitui-se as expressões encontradas anteriormente para a torção em (201) e realiza-se a contração com $\epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}$. O lado esquerdo de (201) é manifestamente nulo. Para o lado direito usando-se a anti-simetria das derivadas covariantes e a fórmula (198) :

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\delta}}\mathcal{D}^{\alpha}G_{\dot{\beta}\alpha} + \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}\mathcal{D}^{\alpha}G_{\dot{\delta}\alpha} = (\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\delta}}\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}} + \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\delta}})R^{\dagger} = 0 \tag{202}$$

Usando-se a relação acima:

$$\bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}}\bar{W}_{(\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\delta})} = -\frac{1}{2}i(\mathcal{D}_{\beta\dot{\beta}}G^{\beta}{}_{\dot{\delta}} + \mathcal{D}_{\beta\dot{\delta}}G^{\beta}{}_{\dot{\beta}}) \tag{203}$$

A expressão para $\Psi_{\gamma\delta\dot{\beta}\dot{\alpha}}$ é obtida contraindo-se com $\epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}$. Substituindo-se as fórmulas já conhecidas das componentes da torção pode-se escrever $X_{\alpha\beta\gamma\delta}$ e $\Psi_{\alpha\beta\dot{\gamma}\dot{\delta}}$, e seus conjugados, em termos de R, $W_{\alpha\beta\gamma}$ e $G_{\alpha\dot{\beta}}$:

$$\begin{aligned} X_{\gamma\delta\beta\alpha} = & -\frac{1}{4}(\mathcal{D}_{\gamma}W_{\delta\beta\alpha} + \mathcal{D}_{\delta}W_{\beta\alpha\gamma} + \mathcal{D}_{\beta}W_{\alpha\gamma\delta} + \mathcal{D}_{\alpha}W_{\gamma\delta\beta}) + (\epsilon_{\gamma\alpha}\epsilon_{\beta\delta} \\ & +\epsilon_{\delta\alpha}\epsilon_{\beta\gamma})\Big[-2RR^{\dagger} + \frac{1}{8}G_{\phi\dot{\phi}}G^{\phi\dot{\phi}} + \frac{1}{16}(\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\phi}}\bar{\mathcal{D}}^{\dot{\phi}}R^{\dagger} + \mathcal{D}^{\phi}\mathcal{D}_{\phi}R)\Big] \end{aligned} \tag{204}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\beta\alpha\dot{\gamma}\dot{\delta}} &= \frac{1}{4}(G_{\beta\dot{\delta}}G_{\alpha\dot{\gamma}} + G_{\alpha\dot{\delta}}G_{\beta\dot{\gamma}}) + \frac{1}{8}i(\mathcal{D}_{\alpha\dot{\gamma}}G_{\beta\dot{\delta}} + \mathcal{D}_{\beta\dot{\gamma}}G_{\alpha\dot{\delta}} \\ &+ \mathcal{D}_{\alpha\dot{\delta}}G_{\beta\dot{\gamma}} + \mathcal{D}_{\beta\dot{\delta}}G_{\alpha\dot{\gamma}}) + \frac{1}{8}(\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\gamma}}\mathcal{D}_{\alpha}G_{\beta\dot{\delta}} + \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\gamma}}\mathcal{D}_{\beta}G_{\alpha\dot{\delta}} \\ &+ \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\delta}}\mathcal{D}_{\alpha}G_{\beta\dot{\gamma}} + \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\delta}}\mathcal{D}_{\beta}G_{\alpha\dot{\gamma}}) \end{aligned} \tag{205}$$

Identidade (126) Convertendo-se (126) para notação espinorial:

$$\mathcal{D}_{\beta\dot{\beta}}T_{\delta\dot{\delta},\dot{\gamma},\alpha} + \mathcal{D}_{\delta\dot{\delta}}T_{\dot{\gamma},\beta\dot{\beta},\alpha} + \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\gamma}}T_{\beta\dot{\beta},\delta\dot{\delta},\alpha} + T_{\delta\dot{\delta},\dot{\gamma}}{}^{\underline{\phi}}T_{\underline{\phi},\beta\dot{\beta},\alpha} + T_{\dot{\gamma},\beta\dot{\beta},}{}^{\underline{\phi}}T_{\underline{\phi},\delta\dot{\delta},\alpha} = 0 \tag{206}$$

Simetrizando a expresão acima em $\alpha\beta\delta$ todos os termos se anulam a exceção de $\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\gamma}}T_{\beta\dot{\beta},\delta\dot{\delta},\alpha}$, que fornece a quiralidade de $W_{\delta\gamma\alpha}$, assim:

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}W_{\beta\gamma\delta} = 0, \quad \mathcal{D}_{\alpha}\bar{W}_{\dot{\beta}\dot{\gamma}\dot{\delta}} = 0 \tag{207}$$

As Identidades de Bianchi para a Supergravidade foram resolvidas usando-se os vínculos (110) e assim foi demonstrado que a torção e a curvatura podem ser escritas em termos de apenas 3 supercampos e seus conjugados : O supercampo quiral R, o supercampo vetorial $G_{\alpha\dot{\beta}}$ e o supercampo quiral e totalmente simetrico $W_{\alpha\beta\gamma}$.

3.4.4 Relações de (anti)comutação entre as derivadas covariantes

Nessa secção será deduzida a relação de comutação entre derivadas covariantes espinoriais e vetoriais e a relação de anti-comutação entre derivadas covariantes espinoriais. Considere um tensor designado por V^A, pela identidade de Bianchi (104) sabemos que:

$$\mathcal{D}\mathcal{D}V^A = V^B R_B{}^A \tag{208}$$

Reescrevendo o lado esquerdo da expressão anterior:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\mathcal{D}V^A &= \mathcal{D}(E^B\mathcal{D}_B V^A) \\ &= E^B\mathcal{D}(\mathcal{D}_B V^A) + (\mathcal{D}E^B)\mathcal{D}_B V^A \\ &= E^B E^C \mathcal{D}_C\mathcal{D}_B V^A + T^B\mathcal{D}_B V^A \end{aligned} \tag{209}$$

Substituindo-se (209) em (208):

$$E^B E^C \mathcal{D}_C\mathcal{D}_B V^A = V^D\ R_D{}^A - T^D\mathcal{D}_D V^A, \tag{210}$$

Em termos das funções coeficientes, encontra-se as relações de (anti) comutação entre as derivadas covariantes.

$$(\mathcal{D}_C\mathcal{D}_B - (-)^{bc}\mathcal{D}_B\mathcal{D}_C)V^A = (-)^{d(c+b)}V^D R_{CBD}{}^A - T_{CB}{}^A\mathcal{D}_D V^A \tag{211}$$

3.5 Multipleto da Supergravidade

3.5.1 Transformações de Supergauge

Como explicado nas secções anteriores, temos dois tipos de transformações a serem consideradas, a transformação geral de coordenadas no superespaço dada por:

$$z'^M = z^M - \xi^M(z), \tag{212}$$

e a transformação pelo grupo de estrutura $L_B{}^A$.

Considere a transformação geral de coordenadas acrescida de uma transformação do grupo de estrutura para V^A, que é dada por:

$$\delta V^A = -\xi^B E_B{}^M \partial_M V^A + V^B L_B{}^A \tag{213}$$

Onde neste caso V^A está designando um tensor qualquer do grupo de estrutura e $L_B{}^A$ é a representação correspondente do grupo de Lorentz.

O parâmetro ξ^B da transformação geral de coodenadas naturalmente depende das coordenadas do superespaço z, mas pode ser escolhido como sendo independente dos campos (vielbein e conexão), nesse caso o parâmetro escrito em termos de índices do espaço-tempo dependerá do Vielbein pela relação $\xi^M = E^M{}_A \xi^A$.

Por outro lado, existe uma transformação particularmente importante que é covariante sob transformações de Lorentz e, como será mostrado, se reduz a tranformações supersimétricas no caso de espaço plano. Trata-se da *Transformação de Supergauge* [11], definida como:

$$\delta_\xi V = -\xi^C \mathcal{D}_C V \tag{214}$$

Essa tranformação pode ser interpretada como a combinação de uma transformação geral de coordenadas e uma transformação local de Lorentz.

Utilizando-se a definição de derivada covarinate:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_M V^A &= \partial_M V^A + (-)^{mb} V^B \phi_{MB}{}^A \\ \mathcal{D}_B V^A &= E_B{}^M \mathcal{D}_M V^A \end{aligned} \tag{215}$$

encontra-se, para (213):

$$\delta V^A = -\xi^B \mathcal{D}_B V^A + V^B \xi^C \phi_{CB}{}^A + V^B L_B{}^A \tag{216}$$

Assim a tranformação de supergauge é um caso particular da transformação acima para o qual a tranformação de Lorentz é dada por:

$$L_A{}^B = -\xi^C \phi_{CB}{}^A \tag{217}$$

Devido a transformação de supergauge ser dada por (213) com uma transformação de Lorentz particular, então (213) pode ser reescrita como a transformação de supergauge mais uma transformação de Lorentz qualquer.

3.5.2 As componentes de ordem mais baixa

Nessa secção será mostrado que os graus de liberdade físicos da supergravidade são algumas das componentes de ordem mais baixa dos supercampos R, $G_{\alpha\dot{\alpha}}$ e do vielbein $E_M{}^A$ e constituem o multipleto da supergravidade. A partir de $R|_{\theta=\bar{\theta}=0}$, $G_{\alpha\dot{\alpha}}|_{\theta=\bar{\theta}=0}$ e $E_M{}^A|_{\theta=\bar{\theta}=0}$ é possível expressar-se as componentes da torção e curvatura.

A transformação (213) é parametrizada por $\xi^A(z)$ e $L_A{}^B(z)$, que podem ser expandidos em θ e $\bar{\theta}$, fornecendo assim vários parâmetros que são função de x. Repare que os componentes de ordem mais baixa, isto é, $\theta = \bar{\theta} = 0$ caracterizam as seguintes transformações:

- $\xi^a(x) \rightarrow$ transformação geral de coordenadas no espaço-tempo.
- $\xi^\alpha(x)$ e $\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}(x) \rightarrow$ transformações supersimétricas locais.
- $L_a{}^b(x) \rightarrow$ transformações de Lorentz locais.

Para expressar a teoria formulada a partir de supercampos em termos de campos componentes será conveniente fixar algumas das invariâncias de (213), mas não todas. Uma teoria de gravidade deve ser invariante pela transformação geral de coordenadas no espaço-tempo e por transformações de Lorentz, e uma teoria de supergravidade também deve ser invariante por supersimetrias locais. Essas transformações estão associadas as componentes mais baixas de (213). Por outro lado os parâmetros de ordem mais alta serão fixados de forma a tornar nulos alguns termos do Vielbein e da Conexão.

O Vielnein

Um maneira conveniente de prosseguir a análise é escolher um gauge tal que para $\theta = \bar{\theta} = 0$ as componentes do vielbein tornem-se :

$$\mathbf{E_M}^{\mathbf{A}}| = \begin{pmatrix} e_m{}^a(x) & \frac{1}{2}\psi_m{}^\alpha(x) & \frac{1}{2}\bar{\psi}_{m\dot{\alpha}}(x) \\ 0 & \delta_\mu{}^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \delta^{\dot{\mu}}{}_\alpha \end{pmatrix} \tag{218}$$

Onde "|" representa "$|_{\theta=\bar{\theta}=0}$".

Não é díficil notar que é possível tranformar um $E_M{}^A|$ arbitrário em (218). Para isso deve-se encontrar como o vielbein se transforma por supergauge. Sabendo-se que essa transformação é a soma de uma transformação por mudança geral de coordernadas e uma tranformação de Lorentz, no caso do vielbein temos:

$$\delta E_M{}^A = -\xi^L \partial_L E_M{}^A - \partial_M \xi^L E_L{}^A + E_M{}^B L_B{}^A \tag{219}$$

Integrando por partes

$$\delta E_M{}^A = -\xi^L(\partial_L E_M{}^A - (-)^{lm}\partial_M E_L{}^A) - \partial_M \xi^A + E_M{}^B L_B{}^A \tag{220}$$

Substituindo-se a forma explicita da torção dada em (94):

$$\delta E_M{}^A = -\partial_M \xi^A - \xi^L(T_{LM}{}^A - \phi_{LM}{}^A + (-)^{ml}\phi_{ML}{}^A) + E_M{}^B L_B{}^A \tag{221}$$

Substituindo-se a tranformação de Lorentz dada em (217) e combinando a conexão com a derivada partial de modo a formar a derivada covariante temos:

$$\delta_\xi E_M{}^A = -\mathcal{D}_M \xi^A - \xi^B T_{BM}{}^A \tag{222}$$

Usando-se as componentes de ordem mais alta de ξ pode-se encontrar o gauge dado por (218), pois essas componentes entram na tranformação de $E_M{}^A|$ por meio de $\mathcal{D}_\mu \xi^A$ e $\bar{\mathcal{D}}^{\dot\mu}\xi^A$. Considere um forma qualquer para $E_M{}^A|$, por exemplo :

$$\mathbf{E_A}^{\mathbf{M}}| = \begin{pmatrix} e_a{}^m(x) & -\frac{1}{2}\psi_a{}^\mu(x) & -\frac{1}{2}\bar{\psi}_{a\dot\mu}(x) \\ X^{(1)}{}_\mu{}^a & X^{(2)}{}_\mu{}^\alpha & X^{(3)}{}_{\mu\dot\alpha} \\ Y^{(1)\dot\mu a} & Y^{(2)\dot\mu\alpha} & Y^{(3)\dot\mu}{}_{\dot\alpha} \end{pmatrix} \tag{223}$$

Lembrando-se que:

$$\begin{aligned} \xi^A &= \xi^{(0,0)A}(x) + \theta^\mu \xi^{(1,0)}{}_\mu{}^A(x) + \bar\theta_{\dot\mu}\bar\xi^{(0,1)\mu A}(x) + \cdots \\ \mathcal{D}_\mu \xi^A &= \frac{\partial}{\partial\theta^\mu}\xi^A + \cdots\,, \quad \bar{\mathcal{D}}^{\dot\mu}\xi^A = \frac{\partial}{\partial\bar\theta_{\dot\mu}}\xi^A + \cdots \end{aligned} \tag{224}$$

Basta escolher valores adequados de ξ^A, no caso:

$$\xi^{(1,0)}{}_\mu{}^a = X^{(1)}{}_\mu{}^a, \quad \xi^{(1,0)}{}_\mu{}^\alpha = X^{(2)}{}_\mu{}^\alpha - \delta_\mu{}^\alpha, \quad \xi^{(1,0)}{}_{\mu\dot\alpha} = X^{(3)}{}_{\mu\dot\alpha} \tag{225}$$

E de forma análoga para $Y^{\dot\mu A}$. Com esses valores para ξ^A um tensor $E_M{}^A(z)|$ qualquer representado por (223) pode ser levado em (218) por meio da tranformação (222).

Repare que os campos $e_m{}^a(x)$, $\psi_m{}^\alpha(x)$ e $\bar\psi_{m\dot\alpha}(x)$ não pode ser anulados pela transformação de gauge pois a liberdade existente para a escolha das componentes mais de ordem mais alta em ξ não pode ser usada para alterar $E_m{}^A(z)|$.

O Vielbein inverso é dado por:

$$\mathbf{E_A}^{\mathbf{M}}| = \begin{pmatrix} e_a{}^m(x) & -\frac{1}{2}\psi_a{}^\mu(x) & -\frac{1}{2}\bar{\psi}_{\alpha\dot\mu}(x) \\ 0 & \delta_\alpha{}^\mu & 0 \\ 0 & 0 & \delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\mu} \end{pmatrix} \tag{226}$$

Onde $\psi_a{}^\mu(x)$ e $\bar\psi_{\alpha\dot\mu}(x)$ são definidos para que $\mathbf{E_A}^{\mathbf{M}}|$ seja de fato o inverso.

A Conexão

Procedendo da mesma forma para a conexão, cuja a transformação dada pela soma de uma transformação geral de coordenadas e uma tranformação pelo grupo de estrutura é dada por:

$$\begin{aligned}\delta\phi_{MA}{}^{B} &= -\xi^{L}\partial_{L}\phi_{MA}{}^{B} - (\partial_{M}\xi^{L})\phi_{LA}{}^{B} \\ &+ \phi_{MA}{}^{C}L_{C}{}^{B} - (-)^{m(a+c)}L_{A}{}^{C}\phi_{MC}{}^{B} - \partial_{M}L_{A}{}^{B}\end{aligned} \tag{227}$$

Utilizando-se a relação $(\partial_M\xi^L)\phi_{LA}{}^B = \partial_M(\xi^L\phi_{LA}{}^B) - (-)^{ml}\xi^L\partial_M\phi_{LA}{}^B$, substituindo $L_B{}^A = -\xi^C\phi_{CB}{}^A$ e a forma explicita da curvatura dada em (103) temos a seguinte relação para tranformação de supergauge da conexão:

$$\delta_\xi\phi_{MA}{}^{B} = -\xi^{C}R_{CMA}{}^{B} \tag{228}$$

A tranformação da conexão por uma mudança geral de coordenadas mais uma trasformação de Lorentz qualquer pode ser reescrita como uma tranformação de Supergauge mais uma tranformação de Lorentz adicional:

$$\delta\phi_{MA}{}^{B} = -\xi^{C}R_{CMA}{}^{B} + \phi_{MA}{}^{C}L_{C}{}^{B} - (-)^{m(a+c)}L_{A}{}^{C}\phi_{MC}{}^{B} - \partial_{M}L_{A}{}^{B} \tag{229}$$

Com o mesmo procedimento usado com $E_A{}^M$ pode-se usar a tranformação acima para tornar zero algumas componentes de ordem $\theta = \bar{\theta} = 0$ de $\phi_{MA}{}^B$. Com a escolha apropriada das compontes de ordem mais alta de $L_A{}^B$ pode-se encontrar, para $M = \mu$ e $M = \dot{\mu}$:

$$\phi_{\mu A}{}^{B}(z)| = \phi^{\dot{\mu}}{}_{A}{}^{B}(z)| = 0 \tag{230}$$

Entretanto não é possível tornar nula a componente $\phi_{mA}{}^B|$:

$$\phi_{mA}{}^{B}(z)| = \omega_{mA}{}^{B}(x) \tag{231}$$

O Multipleto

Os campos $R|$ e $G_a|$ não podem ser expressos em função de $E_M{}^A|$ e tão pouco podem ser tornados zero

Por isso deve-se introduzir novos campos para as componente mais baixa de R e G_a:

$$R(z)| = -\frac{1}{6}M(x), \quad G_a(z)| = -\frac{1}{3}b_a(x) \tag{232}$$

Agora pode-se construir o multipleto de supergravidade com o seguintes campos:

$e_m{}^a \rightarrow$ graviton de spin 2

$\psi_m{}^\alpha$, $\bar{\psi}_{m\dot{\alpha}} \rightarrow$ gravitino de spin $\frac{3}{2}$

$b_a \rightarrow$ campo auxiliar vetorial real

M $\rightarrow$ campo auxiliar escalar complexo

No próximo capítulo, quando for apresentada a Lagrangeana da supergravidade ficará claro o papel de campos auxiliares desempenhados por b_a e M.

A contagem dos graus de liberdade bosônicos e fermiônicos do multipleto é dada por:

$e_m{}^a$: $(4 \times 4) - \underbrace{6}_{L_a{}^b} - \underbrace{4}_{\xi^m} = 6$ componentes bosônicas reais

$\psi_m{}^\alpha$, $\bar{\psi}_{m\dot{\alpha}}$: $(2 \times (4 \times 2)) - \underbrace{4}_{\xi^\alpha, \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}} = 12$ componetes reais fermiônicas

b_a : 4 componentes reais bosônicas

M : 2 componetes reais bosônicas

Assim o multipleto de supergravidade tem 12 graus bosônicos e 12 graus fermiônicos.

Expressando as quantidade conhecidas em função de $E_A{}^M|$, $R|$ e $G_a|$

Sabendo-se quais são as componentes $\theta = \bar{\theta} = 0$ do vielbein e da conexão pode-se encontrar as compontes correspondentes para a torção a partir de (94). Para $A = a$, $M = m$ e $N = n$:

$$T_{nm}{}^a| = \partial_n e_m{}^a - \partial_m e_n{}^a + \omega_{nm}{}^a - \omega_{mn}{}^a \tag{233}$$

Onde a definição $\omega_{nm}{}^a = e_m{}^b \omega_{nb}{}^a$ foi utilizada.

Para $N = n$, $M = m$ e $a = \alpha$:

$$T_{nm}{}^\alpha| = \frac{1}{2}(\tilde{\mathcal{D}}_n \psi_m{}^\alpha - \tilde{\mathcal{D}}_m \psi_n{}^\alpha) = \frac{1}{2}\psi_{nm}{}^\alpha(x) \tag{234}$$

Onde usou-se $\tilde{\mathcal{D}}_N \psi_m{}^\alpha = \partial_n \psi_m{}^\alpha + \psi_m{}^\alpha \omega_{n\beta}{}^\alpha$, e a última igualdade de (234) é a definição de $\psi_{nm}{}^\alpha(x)$.

De forma análoga:

$$T_{nm\dot{\alpha}}| = \frac{1}{2}\bar{\psi}_{nm\dot{\alpha}}(x) \tag{235}$$

Os vínculo imposto em (110) colocam condições sobre algumas da componentes $T_{CB}{}^A$, naturalmente as condições sobre $T_{NM}{}^A$ são obtidas por meio do vielbein:

$$T_{NM}{}^A = (-)^{n(m+b)} E_M{}^B E_N{}^C T_{CB}{}^A \tag{236}$$

Considerendo-se os vínculos apenas 2 termos de $T_{nm}{}^{a}|$ podem ser não nulos:

$$\begin{aligned} T_{nm}{}^{a}| &= E_{m}{}^{\beta} E_{n\dot{\gamma}} T^{\dot{\gamma}}{}_{\beta}{}^{a}| + E_{m\dot{\beta}} E_{n}{}^{\gamma} T_{\gamma}{}^{\dot{\beta}a}| \\ &= -\frac{1}{2} i(\psi_m \sigma^a \bar{\psi}_n - \psi_n \sigma^a \bar{\psi}_m) \end{aligned} \tag{237}$$

Combinando-se as relações acima pode-se encontrar uma expressão para ω_{nml}. De (233) e (237):

$$\partial_n e_m{}^a - \partial_m e_n{}^a + \omega_{nm}{}^a - \omega_{mn}{}^a = -\frac{1}{2} i(\psi_m \sigma^a \bar{\psi}_n - \psi_n \sigma^a \bar{\psi}_m) \tag{238}$$

Contraindo com e_{la} e sabendo que:

$$\omega_{mnl} = e_{la} e_n{}^b \omega_{mb}{}^a = -\omega_{mln} \tag{239}$$

Encontra-se

$$\omega_{nml} + \omega_{mln} = -i\frac{1}{2} e_{la}(\psi_m \sigma^a \bar{\psi}_n - \psi_n \sigma^a \bar{\psi}_m) - e_{la}\partial_n e_m{}^a + e_{la}\partial_m e_n{}^a \tag{240}$$

mas

$$\begin{aligned} 3!\omega_{[nml]} &= \omega_{mln} + \omega_{lnm} + \omega_{nml} - \omega_{nln} - \omega_{mnl} - \omega_{lmn} \\ &= 2(\omega_{nml} + \omega_{mln} + \omega_{lnm}) \end{aligned} \tag{241}$$

A partir de (240) e (241):

$$\begin{aligned} 3!\omega_{[nml]} &= -i\frac{1}{2} e_{la}(\psi_m \sigma^a \bar{\psi}_n - \psi_n \sigma^a \bar{\psi}_m) - e_{la}\partial_n e_m{}^a + e_{la}\partial_m e_n{}^a \\ &- i\frac{1}{2} e_{ma}(\psi_n \sigma^a \bar{\psi}_l - \psi_l \sigma^a \bar{\psi}_n) - e_{ma}\partial_l e_n{}^a + e_{ma}\partial_n e_l{}^a \\ &- i\frac{1}{2} e_{na}(\psi_l \sigma^a \bar{\psi}_m - \psi_m \sigma^a \bar{\psi}_l) - e_{na}\partial_m e_l{}^a + e_{na}\partial_l e_m{}^a \\ &= 2\Big\{\Big[-i\frac{1}{2} e_{la}(\psi_m \sigma^a \bar{\psi}_n - \psi_n \sigma^a \bar{\psi}_m) - e_{la}\partial_n e_m{}^a + e_{la}\partial_m e_n{}^a \Big] \\ &+ \omega_{lmn} \Big\} \end{aligned} \tag{242}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \omega_{mnl} &= \frac{1}{2}\Big[-\frac{i}{2} e_{la}(\psi_m \sigma^a \bar{\psi}_n - \psi_n \sigma^a \bar{\psi}_m) - \frac{i}{2} e_{ma}(\psi_n \sigma^a \bar{\psi}_l - \psi_l \sigma^a \bar{\psi}_n) \\ &+ \frac{i}{2} e_{na}(\psi_l \sigma^a \bar{\psi}_m - \psi_m \sigma^a \bar{\psi}_l) - e_{la}(\partial_n e_m{}^a - \partial_m e_n{}^a) \\ &- e_{ma}(\partial_l e_n{}^a - \partial_n e_l{}^a) + e_{na}(\partial_m e_l{}^a - \partial_l e_m{}^a) \Big] \end{aligned} \tag{243}$$

Ao contrário de $R(z)$ e $G_a(z)$, o Supercampo $W_{\alpha\beta\gamma}$ pode ser reescrito em termos dos demais supercampos. Para isso as seguintes definições são utéis:

$$\begin{aligned}
\psi_{\delta\dot{\gamma}\gamma} &= \sigma_{\delta\dot{\gamma}}{}^{a} e_a{}^{m} \psi_{m\gamma} \\
\psi_{\delta\dot{\delta}\gamma\dot{\gamma}\alpha} &= \sigma_{\delta\dot{\delta}}{}^{d} \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}{}^{c} e_d{}^{n} e_c{}^{m} \psi_{nm\alpha}
\end{aligned} \tag{244}$$

Escrevendo explicitamente os termos de (236) para $N = n$, $M = m$ e $A = \alpha$:

$$\begin{aligned}
T_{nm}{}^{\alpha}| &= E_m{}^{b} E_n{}^{c} T_{cb}{}^{\alpha}| + E_m{}^{b} E_n{}^{\gamma} T_{\gamma b}{}^{\alpha}| + E_m{}^{\beta} E_n{}^{c} T_{c\beta}{}^{\alpha}| \\
&+ E_m{}^{b} E_{n\dot{\gamma}} T^{\dot{\gamma}}{}_{b}{}^{\alpha}| + E_{m\beta} E_n{}^{c} T_c{}^{\dot{\beta}\alpha}|
\end{aligned} \tag{245}$$

Substituindo $E_M{}^{A}$ e $T_{CB}{}^{A}|$ em (245) e multiplicando por $\sigma_{\delta\dot{\delta}}{}^{d} \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}{}^{c} e_d{}^{n} e_c{}^{m}$:

$$\begin{aligned}
T_{\delta\dot{\delta},\gamma\dot{\gamma},\alpha}| &= \frac{1}{2}\psi_{\delta\dot{\delta},\gamma\dot{\gamma},\alpha} - \frac{1}{2}(\psi_{\delta\dot{\delta}}{}^{\lambda} T_{\lambda,\gamma\dot{\gamma},\alpha}| - \psi_{\gamma\dot{\gamma}}{}^{\lambda} T_{\lambda,\delta\dot{\delta},\alpha}|) \\
&+ \frac{1}{2}(\bar{\psi}_{\delta\dot{\delta}}{}^{\dot{\lambda}} T_{\dot{\lambda},\gamma\dot{\gamma},\alpha}| - \bar{\psi}_{\gamma\dot{\gamma}}{}^{\dot{\lambda}} T_{\dot{\lambda},\delta\dot{\delta}\alpha}|)
\end{aligned} \tag{246}$$

Substituindo-se a expressão já conhecida para $T_{\delta\dot{\delta},\gamma\dot{\gamma},\alpha}$ e contraindo com $\epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\delta}}$:

$$\begin{aligned}
&- 4W_{\delta\gamma\alpha}| - 4(\epsilon_{\delta\alpha}\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\phi}} G_{\gamma}{}^{\dot{\phi}}| + \epsilon_{\gamma\alpha}\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\phi}} G_{\delta}{}^{\dot{\phi}}) + \frac{1}{2}\epsilon_{\delta\gamma}(\bar{\mathcal{D}}^{\dot{\gamma}} G_{\alpha\dot{\gamma}} - \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\gamma}} G_{\alpha\dot{\gamma}}) \\
&= \frac{1}{2}\psi_{\delta}{}^{\gamma}{}_{,\gamma\dot{\gamma},\alpha} - \frac{1}{2}(\psi_{\delta}{}^{\dot{\gamma}\rho} T_{\rho,\gamma\dot{\gamma},\alpha}| - \psi_{\gamma\dot{\gamma}}{}^{\rho} T_{\rho\delta}{}^{\gamma}{}_{\alpha}|) \\
&+ \frac{1}{2}(\bar{\psi}_{\delta}{}^{\dot{\gamma}\dot{\rho}} T_{\dot{\rho},\gamma\dot{\gamma},\alpha}| - \bar{\psi}_{\gamma\dot{\gamma}}{}^{\dot{\rho}} T_{\dot{\rho},\delta}{}^{\dot{\gamma}}{}_{,\alpha})
\end{aligned} \tag{247}$$

Fazendo-se o somatório sobre todas as permutações possíveis de α, δ e γ e substituindo-se (171) e (232) pode-se expressar $W_{\alpha\beta\gamma}$ da seguinte forma:

$$W_{\alpha\beta\gamma}| = \frac{1}{2 \cdot 4!} \sum_{P(\alpha\beta\gamma)} (\psi_{\alpha\dot{\alpha},\beta}{}^{\dot{\alpha}}{}_{\gamma} + i\psi_{\alpha\dot{\alpha},\beta} b_{\gamma}{}^{\dot{\alpha}}) \tag{248}$$

No caso do tensor $R_{nma}{}^{b}|$, a componente de ordem mais baixa é definida como sendo $\mathcal{R}_{nma}{}^{b}$, dada por:

$$\mathcal{R}_{nma}{}^{b} = R_{nma}{}^{b}| = \partial_n \omega_{ma}{}^{b} - \partial_m \omega_{na}{}^{b} + \omega_{ma}{}^{c} \omega_{nc}{}^{b} - \omega_{na}{}^{c} \omega_{mc}{}^{b} \tag{249}$$

Para utilizar as fórmulas já conhecidas pode-se expressar $R_{nma}{}^{b}$ em termos de $R_{CDa}{}^{b}$:

$$\begin{aligned}
R_{nma}{}^{b} &= (-)^{cd} E_n{}^{C} E_m{}^{D} R_{CDa}{}^{b} \\
&= E_n{}^{c} E_m{}^{d} R_{cda}{}^{b} + E_n{}^{\underline{\gamma}} E_m{}^{d} R_{\underline{\gamma}da}{}^{b} \\
&+ E_n{}^{c} E_m{}^{\underline{\delta}} R_{c\underline{\delta}a}{}^{b} - E_n{}^{\underline{\gamma}} E_m{}^{\underline{\delta}} R_{\underline{\gamma}\underline{\delta}a}
\end{aligned} \tag{250}$$

Comparando-se com a solução das identidades de Bianchi vemos que $R_{cda}{}^{b}$ (179) está relacionada com as derivadas segundas de R (204) de G_a (205) e com a derivada primeira de W (204). Por outro lado, $R_{\underline{\gamma}da}{}^{b}$ (194 e 195) e $R_{\underline{\gamma}\underline{\delta}a}{}^{b}$ (144) é escrita em função de R, G_a, $W_{\alpha\beta\gamma}$ e a primeira derivada de G_a. Utilizando-se (249) e (250) é possível escrever a derivada segunda de R de G_a e a derivada primeira de $W_{\alpha\beta\gamma}$ em função do multipleto de supergravidade e da primeira derivada de G_a..

A primeira derivada de G_a pode ser escrita em termos do multipleto combinando (193) e (246) e a derivada primeira de R é relacionada com a primeira derivada de G_a por (198).

A derivada segunda de $W_{\alpha\beta\gamma}$ também pode ser de (108), que implica

$$\begin{aligned} & \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\epsilon}} R_{dc\alpha}{}^{\beta} + \mathcal{D}_d R_{c\dot{\epsilon}\alpha}{}^{\beta} + \mathcal{D}_c R_{\dot{\epsilon}d\alpha}{}^{\beta} \\ + \; & T_{\dot{\epsilon}d}{}^{F} R_{Fc\alpha}{}^{\beta} + T_{dc}{}^{F} R_{Fc\alpha}{}^{\beta} + T_{c\dot{\epsilon}}{}^{F} R_{Fd\alpha}{}^{\beta} = 0 \end{aligned} \tag{251}$$

A relação (200) mostra que $R_{dc\alpha}{}^{\beta}$ é escrito em função da primeira derivada de W, então a relação acima permite que $\mathcal{D}\mathcal{D}W$ seja calculada.

3.5.3 As transformações de supergravidade

Nessa e na próxima secção será apresentada a transformação dos campos que compõe o multipleto da supergravidade, sendo esta contruida de forma a preservar o gauge escolhido na secção anterior.

Inicialmente será definida a tranformação de supergravidade, que inclui a transformação supersimétrica e preserva o gauge (218) e (230). No próximo capítulo será construida uma lagrangeana invariante por essa transformação.

Primeiramente constata-se que a transformação de supersimetria (49) para $\theta = \bar{\theta} = 0$ pode ser reproduzida a partir dos parâmetros:

$$\begin{aligned} \xi^a| = 0, \quad \xi^\alpha| &= \zeta^\alpha(x), \quad \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}| = \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}(x), \\ L_{AB}(z)| &= 0 \end{aligned} \tag{252}$$

Com a diferença que no caso de (252) temos uma transformação supersimétrica local.

Agora, considere a transformação do vielbein escrita como uma transformação de supergauge acrescida de uma transformação de Lorentz:

$$\delta E_M{}^A = -\mathcal{D}_M \xi^A - \xi^B T_{BM}{}^A + E_M{}^B L_B{}^A \tag{253}$$

Uma vez que as componentes de ordem mais baixa são dadas por (252), as demais componentes serão escolhidas para preservar o gauge (218). Para

o vielbein isso significa $\delta E_\mu{}^a| = \delta E^{\dot\mu a}| = 0$, escrevendo explicitamente:

$$\begin{aligned}
\delta E_\mu{}^a| &= \left(-\frac{\partial}{\partial\theta^\mu}\xi^a - \xi^b\phi_{\mu b}{}^a - \bar\xi_{\dot\beta}T^{\dot\beta}{}_\mu{}^a + E_\mu{}^b L_b{}^a\right)| \\
&= -\frac{\partial}{\partial\theta^\mu}\xi^a| + 2i\sigma_{\mu\dot\beta}{}^a\bar\xi^{\dot\beta} = 0 \\
\delta E^{\dot\mu a}| &= -\frac{\partial}{\partial\bar\theta_{\dot\mu}}\xi^a| + 2i\zeta^\beta\sigma_{\beta\dot\gamma}{}^a\epsilon^{\dot\gamma\dot\mu} = 0
\end{aligned} \tag{254}$$

A seguinte expresão é solução do sistema acima:

$$\xi^a = 2i(\theta\sigma^a\bar\zeta - \zeta\sigma^a\bar\theta) \tag{255}$$

As formas de ξ^a, ξ^α e $\bar\xi^{\dot\alpha}$ reproduzem a transformação supersimétrica dada em (50) no caso do espaço plano. Para verificar isso é necessario converter índices de mundo para índices do espaço tangente dados em (252) e (255) usando-se o vilbein para o espaço plano dado em (85):

$$\begin{aligned}
\xi^a &= \xi^m E_m{}^a + \xi^\mu E_\mu{}^a + \xi_{\dot\mu}E^{\dot\mu a} \\
&= i(\theta\sigma^a\bar\xi - \xi\sigma^a\bar\theta) + \xi^\mu(-i\sigma^a{}_{\mu\dot\mu}) + \bar\xi_{\dot\mu}(-i\theta^\rho\sigma^a{}_{\rho\dot\nu}\epsilon^{\dot\nu\dot\mu}) \\
\xi^a &= 2i(\theta\sigma^a\bar\zeta - \zeta\sigma^a\bar\theta)
\end{aligned} \tag{256}$$

Para manter o gauge (230), a tranformação da conexão de ser tal que $\delta\phi_{\mu A}{}^B| = \delta\phi^{\dot\mu}{}_A{}^B| = 0$. A tranformação da conexão já foi explicitada em (229), portanto:

$$\delta\phi_{\mu\alpha}{}^\beta| = \xi^C R_{C\mu\alpha}{}^\beta| - \partial_\mu L_\alpha{}^\beta| \tag{257}$$

Das soluções das identidades de Bianchi (150) e (171):

$$\begin{aligned}
R_{\gamma\mu\alpha\beta}| &= -\frac{2}{3}(\epsilon_{\gamma\alpha}\epsilon_{\mu\beta} + \epsilon_{\mu\alpha}\epsilon_{\gamma\beta})\bar M \\
R_{\dot\gamma\mu\alpha\beta}| &= \frac{1}{3}(\epsilon_{\mu\alpha}b_{\beta\dot\gamma} + \epsilon_{\mu\beta}b_{\alpha\dot\gamma}).
\end{aligned} \tag{258}$$

A partir de (257) e (258):

$$\partial_\mu L_{\alpha\beta}| = -\frac{2}{3}(\zeta_\alpha\epsilon_{\mu\beta} + \zeta_\beta\epsilon_{\mu\alpha})\bar M + \frac{1}{3}(\epsilon_{\mu\alpha}b_{\beta\dot\gamma} + \epsilon_{\mu\beta}b_{\alpha\dot\gamma})\bar\zeta^{\dot\gamma} \tag{259}$$

A equação acima é satisfeita pelas transformações de Lorentz:

$$
\begin{aligned}
L_{\alpha\beta} &= \frac{1}{3}[\theta_\alpha(2\zeta_\beta\bar{M} - b_{\beta\dot{\gamma}}\bar{\zeta}^{\dot{\gamma}}) + \theta_\beta(2\zeta_\alpha\bar{M} - b_{\alpha\dot{\gamma}}\bar{\zeta}^{\dot{\gamma}})] \\
L_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} &= \frac{1}{3}[\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}(2\bar{\zeta}_{\dot{\beta}}M - \zeta^\gamma b_{\gamma\dot{\beta}}) + \bar{\theta}_{\dot{\beta}}(2\bar{\zeta}_{\dot{\alpha}}M - \zeta^\gamma b_{\gamma\dot{\alpha}})].
\end{aligned} \tag{260}
$$

A forma para L_{ab} é obtida de (73):

$$
L_{ab} = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_a\sigma_b\epsilon)^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}L_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} - \frac{1}{2}(\epsilon\sigma_a\bar{\sigma}_b)^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta} \tag{261}
$$

Assim define-se as *transformações de supergravidade* parametrizadas por ζ, que incluem a transformação supersimétrica local e preservam o gauge:

$$
\begin{aligned}
\xi^\alpha(z) &= \zeta^\alpha(x), \quad \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}(z) = \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}(x), \\
\xi^a(z) &= 2i(\theta\sigma^a\bar{\zeta}(x) - \zeta(x)\sigma^a\bar{\theta}) \\
L_{\alpha\beta}(z) &= \frac{1}{3}[\theta_\alpha(2\zeta_\beta(x)\bar{M}(x) - b_{\beta\dot{\gamma}}(x)\bar{\zeta}^{\dot{\gamma}}(x)) \\
&+ \theta_\beta(2\zeta_\alpha(x)\bar{M}(x) - b_{\alpha\dot{\gamma}}(x)\bar{\zeta}^{\dot{\gamma}}(x))] \\
L_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(z) &= \frac{1}{3}[\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}(2\bar{\zeta}_{\dot{\beta}}(x)M(x) - \zeta^\gamma(x)b_{\gamma\dot{\beta}}(x)) \\
&+ \bar{\theta}_{\dot{\beta}}(2\bar{\zeta}_{\dot{\alpha}}(x)M(x) - \zeta^\gamma(x)b_{\gamma\dot{\alpha}}(x))].
\end{aligned} \tag{262}
$$

3.5.4 A transformação do multipleto de supergravidade

Na secção anterior encontrou-se transformações parametrizadas por ζ que agora serão usadas para encontrar as transformações dos campos componentes do multipleto de supergravidade.

Para ${e_m}^a$:

$$
\begin{aligned}
\delta {e_m}^a &= \delta {E_m}^a| = -\mathcal{D}_m\xi^a| - \xi^B {T_{Bm}}^a| + {E_m}^B {L_B}^a| \\
&= -\xi^\beta {T_{\beta m}}^a| - \bar{\xi}_{\dot{\beta}} {T^{\dot{\beta}}}_m{}^a| \\
&= [-\xi^\beta {E_m}^C {T_{\beta C}}^a(-)^{b(m+c)} - \bar{\xi}_{\dot{\beta}} {E_m}^C {T_{\dot{\beta}C}}^a(-)^{b(m+c)}]|
\end{aligned} \tag{263}
$$

Substituindo os vínculos da torção:

$$
\delta {e_m}^a = i(\psi_m\sigma^a\bar{\zeta} - \zeta\sigma^a\bar{\psi}_m) \tag{264}
$$

Para ${\psi_m}^\alpha$:

$$\delta\psi_m{}^\alpha = 2\delta E_m{}^\alpha| = -2\mathcal{D}_m\xi^\alpha| - 2\xi^\beta T_{\beta m}{}^\alpha| - 2\bar{\xi}_{\dot\beta}T^{\dot\beta}{}_m{}^\alpha| \tag{265}$$

A partir da solução das identidades de Bianchi:

$$\delta\psi_m{}^\alpha = -2\mathcal{D}_m\zeta^\alpha + e_m{}^c\left\{\frac{1}{3}M(\epsilon\sigma_c\bar{\zeta})^\alpha + b_c\zeta^\alpha + \frac{1}{3}b^d(\zeta\sigma_d\bar{\sigma}_c)^\alpha\right\} \tag{266}$$

De modo análogo para $\psi_{m\dot\alpha}$ encontra-se:

$$\bar{\psi}_{m\dot\alpha} = -2\mathcal{D}_m\bar{\zeta}_{\dot\alpha} - ie_m{}^c\left\{\frac{1}{3}\bar{M}(\zeta\sigma_c)_{\dot\alpha} + b_c\bar{\zeta}_{\dot\alpha} - \frac{1}{3}b^d(\bar{\sigma}_c\sigma_d\bar{\zeta})_{\dot\alpha}\right\} \tag{267}$$

O cálculo de δM e δb_a pode ser feito de forma similar. Em particular o resultado de δM será útil no próximo capítulo:

$$\delta M = -\zeta(\sigma^a\bar{\sigma}^b\psi_{ab} + ib^a\psi_a - i\sigma^a\bar{\psi}_a M) \tag{268}$$

4 Lagrangianas para supergravidade

Durante o capítulo anterior apresentou-se as propriedades geométricas do superespaço curvo. Neste capítulo serão apresentados os elementos necessários para a construção de ações no superespaço curvo, e posteriormente será introduzida a ação para a supergravidade e generalizada a ação de supercampos quirais (34) para o espaço curvo .

A ação a ser contruida para a supergravidade deve incorporar na parte dependente do vielbein a ação da gravitação usual *

$$S_G = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x e\mathcal{R}, \tag{269}$$

além de termos para o gravitino e de campos auxiliares.

4.1 Supercampos Quirais no espaços curvos

A definição de supercampo quiral dada em (17) deve ser generalizada, assim a expressão covariante de supercampo quiral é:

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \tag{270}$$

No caso plano, discutido no capítulo 2, o supercampo quiral foi expandido em θ e possuia 3 campos componentes. Na presente situação a expansão em termos dos parâmetros fermiônicos não é convenientes, pois esta não seria independente de coordenadas (θ e $\bar{\theta}$) que possuem índices de mundo.

As componentes do supercampo quiral Φ são definidas a partir do valor para $\theta = \bar{\theta} = 0$ de derivadas covariantes de Φ, assim:

$$\begin{aligned} A &= \Phi|_{\theta=\bar{\theta}=0} \\ \chi_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{D}_\alpha\Phi|_{\theta=\bar{\theta}=0} \\ F &= -\frac{1}{4}\mathcal{D}^\alpha\mathcal{D}_\alpha\Phi|_{\theta=\bar{\theta}=0} \end{aligned} \tag{271}$$

A partir desses componentes o supercampo quiral está totalmente determinado.

*onde $\kappa^2 = 8\pi G$.

4.2 Supercampos Vetoriais no superespaço curvo

Em analogia com o caso de superespaço plano, o supercampo vetorial é definido como um supercampo real:

$$V = \bar{V}, \tag{272}$$

que possui a seguinte tranformação de gauge, no caso abeliano:

$$V \to V + \Phi + \bar{\Phi}. \tag{273}$$

Onde Φ é um supercampo quiral.

No caso plano, definiu-se W_α em (42):

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V \tag{274}$$

e mostrou-se que essa quantidade é invariante de gauge. Neste caso, quando o operador $\bar{D}\bar{D}$ atua em $D_\alpha V$ o resultado é um supercampo quiral.

Uma tentativa de generalização natural seria definir W_α como $-\frac{1}{4}\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}\bar{\mathcal{D}}^{\dot{\beta}}\mathcal{D}_\alpha V$, entretanto essa definição não seria invariante de gauge, como pode ser verificado usando-se (211) e sabendo-se que Φ é quiral:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}\bar{\mathcal{D}}^{\dot{\beta}}\mathcal{D}_\alpha(V+\Phi+\bar{\Phi}) &= \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}\bar{\mathcal{D}}^{\dot{\beta}}\mathcal{D}_\alpha V + \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}} \underbrace{\{\bar{\mathcal{D}}^{\dot{\beta}}, \mathcal{D}_\alpha\}}_{T_\alpha{}^{\dot{\beta}c} = \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} 2i\sigma_{\alpha\dot{\gamma}}{}^c} \mathcal{D}_c\Phi \\
&= \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}\bar{\mathcal{D}}^{\dot{\beta}}\mathcal{D}_\alpha V - 2i\sigma_{\alpha\dot{\gamma}}{}^c \underbrace{\{\mathcal{D}^{\dot{\gamma}}, \mathcal{D}_c\}}_{\epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\delta}}(\frac{1}{2}\bar{\sigma}_c{}^{\dot{\epsilon}\epsilon} T_{\dot{\delta},\epsilon\dot{\epsilon},\gamma})} \mathcal{D}^\gamma\Phi.
\end{aligned} \tag{275}$$

De (142) $T_{\dot{\delta},\epsilon\dot{\epsilon},\gamma} = -2i\epsilon_{\dot{\delta}\dot{\epsilon}}\epsilon_{\epsilon\gamma}R$, logo

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}\bar{\mathcal{D}}^{\dot{\beta}}\mathcal{D}_\alpha\Phi = 8R\mathcal{D}_\alpha V \tag{276}$$

Então a definição correta de W_α para que este seja invariante pela transformação de gauge é:

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}(\mathcal{D}_{\dot{\beta}}\mathcal{D}^{\dot{\beta}} - 8R)\mathcal{D}_\alpha V \tag{277}$$

Para mostrar que W_α generalizado também é quiral deve-se calcular

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}W_\alpha = -\frac{1}{4}(\epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\delta}}\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\gamma}}\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\delta}}\mathcal{D}_\alpha V - 8R\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}\mathcal{D}_\alpha V), \tag{278}$$

inicialmente $\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\gamma}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\delta}\mathcal{D}_\alpha V$ será reescrito, com auxilio da relação $\{\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta},\bar{\mathcal{D}}_{\dot\gamma}\}$ $\mathcal{D}_\alpha V=0$ (obtida das expressões da torção e curvatura e de (211)).

Sabendo-se da relação:

$$\begin{aligned}\sum_{P(\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma)}(-)^p\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\gamma}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\delta}\mathcal{D}_\alpha V &= \bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\{\bar{\mathcal{D}}_{\dot\gamma},\bar{\mathcal{D}}_{\dot\delta}\}\mathcal{D}_\alpha V\\ + \quad \bar{\mathcal{D}}_{\dot\delta}\{\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta},\bar{\mathcal{D}}_{\dot\gamma}\}\mathcal{D}_\alpha V &+ \bar{\mathcal{D}}_{\dot\gamma}\{\bar{\mathcal{D}}_{\dot\delta},\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\}\mathcal{D}_\alpha V=0 \end{aligned}\tag{279}$$

É fácil ver que:

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\gamma}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\delta}\mathcal{D}_\alpha V=-\bar{\mathcal{D}}_{\dot\delta}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\gamma}\mathcal{D}_\alpha V-\bar{\mathcal{D}}_{\dot\gamma}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\delta}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\mathcal{D}_\alpha V\tag{280}$$

Usando-se a expressão acima:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\gamma}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\delta}\mathcal{D}_\alpha V &= \frac{1}{3}(\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\gamma}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\delta}+\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\gamma}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\delta}+\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\gamma}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\delta})\mathcal{D}_\alpha V\\ &= \frac{1}{3}(\{\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta},\bar{\mathcal{D}}_{\dot\gamma}\}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\delta}-\{\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta},\bar{\mathcal{D}}_{\dot\delta}\}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\gamma})\mathcal{D}_\alpha V\end{aligned}\tag{281}$$

Agora basta encontrar os anti-comutadores $\{\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta},\bar{\mathcal{D}}_{\dot\gamma}\}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\delta}\mathcal{D}_\alpha V$. Para isso é conveniente definir:

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot\delta}\mathcal{D}_\alpha V=\sigma_{\alpha\dot\delta}{}^a(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}V)_a\tag{282}$$

De (211)

$$\begin{aligned}&\sigma^a{}_{\alpha\dot\delta}\epsilon^{\dot\gamma\dot\delta}\{\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta},\bar{\mathcal{D}}_{\dot\gamma}\}(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}V)_a=\sigma^a{}_{\alpha\dot\delta}\epsilon^{\dot\gamma\dot\delta}(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}V)^dR_{\dot\beta\dot\gamma da}\\ =\ &\sigma^a{}_{\alpha\dot\delta}\epsilon^{\dot\gamma\dot\delta}(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}V)^d\frac{1}{4}\bar\sigma_d{}^{\dot\delta\delta}\bar\sigma_a{}^{\dot\alpha\phi}(-2\epsilon_{\delta\phi}\underbrace{R_{\dot\beta\dot\gamma\dot\delta\dot\alpha}}_{=4(\epsilon_{\dot\beta\dot\delta}\epsilon_{\dot\gamma\dot\alpha}+\epsilon_{\dot\gamma\dot\delta}\epsilon_{\dot\beta\dot\alpha})R}+2\epsilon_{\dot\delta\dot\alpha}\underbrace{R_{\dot\beta\dot\gamma\delta\phi}}_{=0})\\ =\ &\epsilon^{\dot\gamma\dot\epsilon}(2\epsilon_{\dot\gamma\dot\alpha}R\sigma_{\alpha\dot\epsilon}{}^a\bar\sigma_a{}^{\phi\dot\alpha}(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}V)_{\phi\dot\beta}+2\epsilon_{\dot\beta\dot\alpha}R\sigma_{\alpha\dot\epsilon}{}^a\bar\sigma_a{}^{\phi\dot\alpha}(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}V)_{\phi\dot\gamma})\\ =\ &12R\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\mathcal{D}_\alpha V\end{aligned}\tag{283}$$

Portanto,

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\gamma}\bar{\mathcal{D}}^{\dot\gamma}\mathcal{D}_\alpha V=8R\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\mathcal{D}_\alpha V\Rightarrow\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}W_\alpha=0\tag{284}$$

O operador $(\bar{\mathcal{D}}_{\dot\gamma}\bar{\mathcal{D}}^{\dot\gamma}-8R)$ é a generalização covariante do operador de projeção quiral $\bar{D}_{\dot\gamma}\bar{D}^{\dot\gamma}$, assim:

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}(\bar{\mathcal{D}}_{\dot\gamma}\bar{\mathcal{D}}^{\dot\gamma}-8R)\bar\Phi=0.\tag{285}$$

Isso pode ser provado usando-se uma fórmula análoga a (281) para $\bar\Phi$ e as relações de anticomutação. Da mesma forma:

$$\mathcal{D}_\alpha(\mathcal{D}^\gamma\mathcal{D}_\gamma-8R^\dagger)\Phi=0\tag{286}$$

4.3 A lei de transformação para o supercampo quiral

A transformação de um supercampo quiral é

$$\delta\Phi = -\xi^A \mathcal{D}_A \Phi = -\xi^a \mathcal{D}_a \Phi - \xi^\alpha \mathcal{D}_\alpha \Phi \tag{287}$$

A partir da transformação de Φ pode-se encontrar a lei de transformação dos campos componentes : A, χ e F. Para A, basta selecionar as componentes de ordem mais baixa da expressão acima:

$$\delta A = \delta\Phi| = -\xi^\alpha \mathcal{D}_\alpha \Phi| = -\sqrt{2}\xi^\alpha \chi_\alpha \tag{288}$$

Para χ:

$$\begin{aligned} \delta\chi_\alpha &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\xi^B \mathcal{D}_B \mathcal{D}_\alpha \Phi| \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^\beta \mathcal{D}_\beta - \bar{\xi}^{\dot\beta}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta})\mathcal{D}_\alpha \Phi| \end{aligned} \tag{289}$$

Mas $\mathcal{D}^\gamma \mathcal{D}_\gamma \Phi$ pode ser reescrito como:

$$\mathcal{D}^\gamma \mathcal{D}_\gamma \Phi = \frac{1}{2}\epsilon^{\lambda\rho}(\mathcal{D}_\rho \mathcal{D}_\lambda - \mathcal{D}_\lambda \mathcal{D}_\rho)\Phi, \tag{290}$$

multiplicando-se por $\epsilon_{\beta\alpha}$

$$\epsilon_{\beta\alpha}\mathcal{D}^\gamma \mathcal{D}_\gamma \Phi = \frac{1}{2} \underbrace{\epsilon_{\beta\alpha}\epsilon^{\lambda\rho}}_{\delta_\beta{}^\lambda \delta_\alpha{}^\rho - \delta_\beta{}^\rho \delta_\alpha{}^\lambda} (\mathcal{D}_\rho \mathcal{D}_\lambda - \mathcal{D}_\lambda \mathcal{D}_\rho)\Phi \tag{291}$$

Usando-se $\{\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta\}\Phi = 0$ obtém-se a partir de (291) o primeiro termo de (289):

$$\frac{1}{2}\epsilon_{\beta\alpha}\mathcal{D}^\gamma \mathcal{D}_\gamma \Phi = \mathcal{D}_\beta \mathcal{D}_\alpha \Phi \Rightarrow \mathcal{D}_\beta \mathcal{D}_\alpha \Phi| = -2\epsilon_{\beta\alpha}F \tag{292}$$

O segundo termo de (289) é obtido da relação de anticomutação das derivadas covariantes, dos vínculos para a torção e da quiralidade de Φ:

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\mathcal{D}_\alpha \Phi = \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}, \mathcal{D}_\alpha\}\Phi = -2i\sigma_{\alpha\beta}{}^d \mathcal{D}_d \Phi \tag{293}$$

Onde $\mathcal{D}_d$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_d \Phi &= E_d{}^m \mathcal{D}_m \Phi + E_d{}^\mu \mathcal{D}_\mu \Phi + E_{d\dot\mu}\bar{\mathcal{D}}^{\dot\mu}\Phi \\ &\Rightarrow \mathcal{D}_a \Phi| = e_a{}^m \left(\mathcal{D}_m \Phi - \frac{1}{2}\psi_m{}^\mu \mathcal{D}_\mu \Phi\right)| \\ &= e_a{}^m \left(\partial_m A - \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_m{}^\mu \chi_\mu\right) = \hat{D}_a A \end{aligned} \tag{294}$$

A última igualdade acima é a definição da derivada supercovariante $\hat{D}_a$. Reunindo os resultados de (294) e (292) em (289):

$$\delta\chi_\alpha = -\sqrt{2}\zeta_\alpha F - i\sqrt{2}\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^a\bar{\zeta}^{\dot{\beta}}\hat{D}_a A \tag{295}$$

Para o campo componente F:

$$\delta F = \frac{1}{4}(\xi^\alpha\mathcal{D}_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}})\mathcal{D}^\beta\mathcal{D}_\beta\Phi| \tag{296}$$

O primeiro termo de (296) pode ser obtido de (286):

$$\mathcal{D}_\alpha\mathcal{D}^\beta\mathcal{D}_\beta\Phi| = \mathcal{D}_\alpha(R^\dagger 8\Phi)| = -\frac{4}{3}\sqrt{2}\chi_\alpha\bar{M} \tag{297}$$

O segundo termo de (296) vem de uma relação análoga a (281):

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\mathcal{D}^\beta\mathcal{D}_\beta\Phi = \epsilon^{\alpha\gamma}(\{\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}},\mathcal{D}_\gamma\}\mathcal{D}_\alpha\Phi - \mathcal{D}_\gamma\{\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}},\mathcal{D}_\alpha\}\Phi) \tag{298}$$

Onde,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\gamma\{\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}},\mathcal{D}_\alpha\}\Phi &= \mathcal{D}_\gamma(-T_{\dot{\alpha}\alpha}{}^D\mathcal{D}_D\Phi) = -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^a\mathcal{D}_\gamma\mathcal{D}_a\Phi \\
&= -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^a\mathcal{D}_a\mathcal{D}_\gamma\Phi - 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}[\mathcal{D}_\gamma,\mathcal{D}_a]\Phi \\
&= -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^a\mathcal{D}_a\mathcal{D}_\gamma\Phi - 2iT_{\gamma,\alpha\dot{\alpha},\delta}\mathcal{D}^\delta\Phi \\
&= -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^a\mathcal{D}_a\mathcal{D}_\gamma\Phi \\
&+ \frac{1}{2}(\epsilon_{\alpha\delta}G_{\gamma\dot{\alpha}} - 3\epsilon_{\gamma\delta}G_{\alpha\dot{\alpha}} - 3\epsilon_{\gamma\alpha}G_{\delta\dot{\alpha}})\mathcal{D}^\delta\Phi
\end{aligned} \tag{299}$$

e também,

$$\begin{aligned}
\{\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}},\mathcal{D}_\gamma\}\mathcal{D}_\alpha\Phi &= \epsilon_{\alpha\beta}\{\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}},\mathcal{D}_\gamma\}\mathcal{D}^\beta\Phi \\
&= \epsilon_{\alpha\beta}(-T_{\dot{\alpha}\gamma}{}^D\mathcal{D}_D(\mathcal{D}^\beta\Phi) + (\mathcal{D}^D\Phi)R_{\dot{\alpha}\gamma D}{}^\beta) \\
&= -2i\sigma_{\gamma\dot{\alpha}}{}^a\mathcal{D}_a\mathcal{D}_\alpha\Phi - (\epsilon_{\gamma\delta}G_{\alpha\dot{\alpha}} + \epsilon_{\gamma\alpha}G_{\delta\dot{\alpha}})\mathcal{D}^\delta\Phi
\end{aligned} \tag{300}$$

Substituindo-se (299) e (300) em (298):

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\mathcal{D}^\beta\mathcal{D}_\beta\Phi = 3i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^a\mathcal{D}_a\mathcal{D}^\alpha\Phi + 2G_{\delta\dot{\alpha}}\mathcal{D}^\delta\Phi \tag{301}$$

Então é necessario encontrar uma expressão para de $\mathcal{D}_a\mathcal{D}^\alpha\Phi|$:

$$\mathcal{D}_a\mathcal{D}^\alpha\Phi| = e_a{}^m\left[\mathcal{D}_m(\mathcal{D}^\alpha\Phi)| - \frac{1}{2}\psi_m{}^\mu\mathcal{D}_\mu(\mathcal{D}^\alpha\Phi)| - \frac{1}{2}\bar{\psi}_{a\dot{\mu}}\bar{\mathcal{D}}^{\dot{\mu}}(\mathcal{D}^\alpha\Phi)|\right] \quad (302)$$

Utilizando-se (294) e $\mathcal{D}_\alpha\Phi| = \delta_\alpha{}^\mu\mathcal{D}_\mu\Phi| = \sqrt{2}\chi_\alpha$ em (302)

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_a\mathcal{D}^\alpha\Phi| &= e_a{}^m\Big[\mathcal{D}_m(\sqrt{2}\chi^\alpha) - \psi_m{}^\alpha F \\ &- i\bar{\psi}_m{}^{\dot{\beta}}\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^d e_d{}^n\left(\partial_n A - \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_m{}^\mu\chi_\mu\right)\Big]\end{aligned} \quad (303)$$

Substituindo (303) e (297) em (296):

$$\delta F = -\frac{1}{3}\sqrt{2}\bar{M}\zeta^\alpha\chi_\alpha + \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}\left(\frac{1}{6}\sqrt{2}b_{\alpha\dot{\alpha}}\chi^\alpha - i\sqrt{2}\hat{D}_{\alpha\dot{\alpha}}\chi^\alpha\right) \quad (304)$$

A derivada supercovariante $\hat{D}_a\chi_\alpha$ é definida como:

$$\hat{D}_a\chi_\alpha = e_a{}^m\left(\mathcal{D}_m\chi_\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{m\alpha}F - i\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_m{}^{\dot{\beta}}\hat{D}_{\alpha\dot{\beta}}A\right) \quad (305)$$

4.4 A densidade quiral

A definição das componentes do Supercampo quiral no espaço curvo dado por (270) é escrita de forma covariante, este supercampo pode ser reescrito utilizando-se um nova variável, denotada por Θ^α, que é definida de tal forma que:

$$\Phi = A(x) + \sqrt{2}\Theta^\alpha\chi_\alpha + \Theta^\alpha\Theta_\alpha F(x). \quad (306)$$

A partir da variável Θ deve-se reescrever a transformação do supercampo quiral, encontradas na secção anterior, usando-se um novo parametro η^M de forma que

$$\delta\Phi = -\eta^M(x,\Theta)\partial_M\Phi \quad (307)$$

onde ∂_M representa a derivada com relação a x^m e Θ^α.
O parâmetro η pode ser expandido em Θ

$$\eta^M = \eta^M{}_{(0)}(x) + \Theta^\alpha\eta^M{}_{(1)\alpha}(x) + \Theta^\alpha\Theta_\alpha\eta^M{}_{(2)} \quad (308)$$

Combinando as 3 fórmulas anteriores:

$$\delta A = -\eta^m{}_{(0)}\partial_m A - \sqrt{2}\eta^\alpha{}_{(0)}\chi_\alpha. \tag{309}$$

Comparando com (288) obtém-se

$$\begin{aligned} \eta^m{}_{(0)} &= 0 \\ \eta^\alpha{}_{(0)} &= \zeta^\alpha \end{aligned} \tag{310}$$

Da mesma forma para χ^α:

$$\sqrt{2}\delta\chi_\alpha = -\eta^m{}_{(1)\alpha}\partial_m A - \sqrt{2}\eta^\beta{}_{(1)\alpha}\chi_\beta - \sqrt{2}\eta^m{}_{(0)}\partial_m\xi_\alpha - 2\eta_{(0)\alpha}F \tag{311}$$

Por comparação com (295),

$$\begin{aligned} \eta^m{}_{(1)\alpha} &= 2i\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^a\bar\zeta^{\dot\beta}e_a{}^m \\ \eta^\beta{}_{(1)\alpha} &= -i\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^a\bar\zeta^{\dot\beta}e_a{}^m\psi_m{}^\beta \end{aligned} \tag{312}$$

Fazendo-se o mesmo procedimento para δF

$$\begin{aligned} &\Theta^\alpha\Theta_\alpha\delta F = i\Theta^\beta\sigma^m{}_{\beta\dot\beta}\bar\zeta^{\dot\beta}\psi_m{}^\alpha\partial_\alpha(\Theta^\gamma\Theta_\gamma F) - \Theta\Theta\Big\{\frac{1}{3}\bar M\zeta^\alpha \\ + &\ \frac{1}{6}b_a(\epsilon\sigma^a\bar\zeta)^\alpha - i\omega_m{}^{\alpha\beta}(\sigma^m\bar\zeta)_\beta - \frac{1}{2}\psi_n{}^\alpha(\bar\psi_m\bar\sigma^n\sigma^m\bar\zeta)\Big\}\partial_\alpha(\sqrt{2}\Theta^\beta\chi_\beta) \\ - &\ 2i\Theta^\beta\sigma^m_{\beta\dot\beta}\bar\zeta^{\dot\beta}\partial_m(\sqrt{2}\Theta^\alpha\chi_\alpha) - \Theta\Theta\bar\psi_n\bar\sigma^m\sigma^n\bar\zeta\partial_m A \end{aligned} \tag{313}$$

Aplicando a relação $\Theta^\beta\Theta_\alpha = \frac{1}{2}\delta^\beta{}_\alpha$ na relação acima encontra-se todas as componetes dos novos parâmetros de forma que:

$$\begin{aligned} \eta^m &= 2i\Theta\sigma^m\bar\zeta + \Theta\Theta\bar\psi_n\bar\sigma^m\sigma^n\bar\zeta \\ \eta^\alpha &= \zeta^\alpha - i\Theta\sigma^m\bar\zeta\psi_m{}^\alpha + \Theta\Theta\Big\{\frac{1}{3}\bar M\zeta^\alpha + \frac{1}{6}b_a(\epsilon\sigma^a\bar\zeta)^\alpha \\ &- i\omega_m{}^{\alpha\beta}(\sigma^m\bar\zeta)_\beta - \frac{1}{2}\psi_n{}^\alpha(\bar\psi_m\bar\sigma^n\sigma^m\bar\zeta)\Big\} \end{aligned} \tag{314}$$

A ação a ser construida deve ser invariante pela transformação de supergravidade. Para que isso aconteça será introduzido a densidade quiral, que a permitará a contrução de ações utilizando-se a integração sobre Θ.

Lembre-se que o análogo ocorre em relatividade geral, quando a densidade $\sqrt{-g}$ é introduzida de modo que o $\sqrt{-g}\ d^4x$ seja um elemento de volume invariante.

A densidade quiral Δ é definida como uma função do superespaço que possua a seguinte lei de transformação:

$$\begin{aligned} \delta\Delta &= \partial_M[\xi^M\Delta(-)^m] \\ &= -\xi^M\partial_M\Delta - (-)^m(\partial_M\xi^M)\Delta. \end{aligned} \tag{315}$$

Essa lei de transformação implica que o produto de uma densidade quiral com um campo quiral é uma densidade quiral:

$$\begin{aligned} \delta\Delta\Phi &= -\partial_M[\xi^M\Delta(-)^m]\Phi - \Delta\xi^M\partial_M\Phi \\ &= -\partial_M[\xi^M\Delta\Phi(-)^m] \end{aligned} \tag{316}$$

Portanto considerando-se uma função qualquer de Φ, chamada $T(\Phi)$ teremos uma ação invariante:

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta\int d^4xd^2\Theta\Delta T(\Phi) \\ &= -\int d^4xd^2\Theta\partial_M[\xi^M\Delta T(\Phi)(-)^m] = 0 \end{aligned} \tag{317}$$

Expandindo em Θ a densidade é dada por:

$$\Delta = a + \Theta\sqrt{2}\rho + \Theta\Theta f \tag{318}$$

A transformação dos campos componentes é dada por:

$$\begin{aligned} \delta a &= -\sqrt{2}\zeta\rho + ia\psi\sigma\bar{\zeta} \\ \delta\rho &= -\sqrt{2}\zeta_\alpha f - i\sqrt{2}\mathcal{D}_m(\sigma^m\bar{\zeta}a)_\alpha + i\psi\sigma\bar{\zeta}\rho_\alpha \\ &+ i(\sigma^m\bar{\zeta})_\alpha\psi_m\rho - \frac{1}{3}\sqrt{2}\zeta_\alpha\bar{M}a \\ &- \frac{1}{6}\sqrt{2}a(\sigma^a\bar{\zeta})_\alpha b_a + \frac{1}{2}\sqrt{2}\psi_{n\alpha}\bar{\psi}_m\bar{\sigma}^n\sigma^m\bar{\zeta}a \\ \delta f &= \partial_m(-a\bar{\psi}_n\bar{\sigma}^m\sigma^n\bar{\zeta} + i\sqrt{2}\rho\sigma^m\bar{\zeta}) \end{aligned} \tag{319}$$

Repare que a variação da componente mais alta de uma densidade quiral, isto é, δf é tal que $\int d^4xf$ é um termo de superfície.

Em particular, define-se uma densidade quiral, representada por $\mathcal{E}$, como aquela que possui o elemento de ordem mais baixa dada por:

$$a = \frac{1}{2}det\ e_m{}^a = \frac{1}{2}e \tag{320}$$

As outras componentes da densidade quiral podem ser encontradas a partir da lei de transformação (315) e de (314). Comparando δa obtido de (309) com δa obtido de (320):

$$\begin{aligned}
\delta a &= \frac{1}{2}\delta e = \frac{1}{2} e e_a{}^m \delta e \\
&= i e e_a{}^m (\psi_m \sigma^a \bar{\zeta} - \zeta \sigma^a \bar{\psi}) \\
&\Rightarrow -i e e_a{}^m \zeta \sigma^a \bar{\psi}_m = -\sqrt{2}\zeta\rho \Rightarrow \rho = i\frac{1}{4}\sqrt{2} e \sigma^m \bar{\psi}_m
\end{aligned} \tag{321}$$

O termo de ordem mais alta, isto é f, é coeficiente de ζ_α em $\delta\rho_\alpha$, portanto basta encontrar os termos proporcionais a ζ_α em (321).

De (267)

$$\begin{aligned}
\delta\rho_\alpha &= i\frac{1}{4}\sqrt{2}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^a e[-i(\zeta\sigma^b\bar{\psi}_n)(e_b{}^n e_a{}^m - e_a{}^n e_b{}^m)\bar{\psi}_m{}^{\dot{\alpha}} \\
&+ i\frac{1}{3}\bar{M}(\zeta\sigma_a\epsilon)^{\dot{\alpha}}] + (termos \quad com \quad \bar{\zeta})
\end{aligned} \tag{322}$$

E de (319)

$$\delta\rho_\alpha = -\sqrt{2}\zeta_\alpha f - \frac{1}{6}\sqrt{2} e \bar{M}\zeta + (termos \quad com \quad \bar{\zeta}) \tag{323}$$

Comparando as duas expressões anteriores:

$$\begin{aligned}
-\zeta_\alpha f &= \frac{1}{6} e \bar{M}\zeta_\alpha + \frac{1}{4} e \Big[\zeta^\beta \bar{\psi}_n{}^{\dot{\beta}} \underbrace{\sigma^a{}_{\alpha\dot{\alpha}} \sigma^b{}_{\beta\dot{\beta}} (e_b{}^n e_a{}^m - e_a{}^n e_b{}^m)}_{\sigma^m{}_{\alpha\dot{\alpha}}\sigma^n{}_{\beta\dot{\beta}} - \sigma^n{}_{\alpha\dot{\alpha}}\sigma^m{}_{\beta\dot{\beta}}} \bar{\psi}_m{}^{\dot{\alpha}} \\
&- \frac{1}{3}\bar{M}\zeta^\beta \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} \bar{\sigma}^{a\dot{\gamma}\gamma} \sigma_{a\beta\dot{\beta}} \Big]
\end{aligned} \tag{324}$$

De (359) e (360):

$$\sigma^m{}_{\alpha\dot{\alpha}}\sigma^n{}_{\beta\dot{\beta}} - \sigma^n{}_{\alpha\dot{\alpha}}\sigma^m{}_{\beta\dot{\beta}} = 2[(\sigma^{nm}\epsilon)_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + (\epsilon\bar{\sigma}^{nm})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon_{\alpha\beta}] \tag{325}$$

portanto,

$$f = -\frac{1}{2} e \bar{M} - \frac{1}{8} e \bar{\psi}_m (\bar{\sigma}^m \sigma^n - \bar{\sigma}^n \sigma^m) \bar{\psi}_n. \tag{326}$$

4.5 Ações para supergravidade

A partir das considerações anteriores pode-se escrever a ação para a supergravidade:

$$\mathcal{L} = -\frac{6}{\kappa^2}\int d^2\Theta\mathcal{E}R + \quad c.h. \tag{327}$$

Por convenção $\kappa = 1$.

Para escrever essa ação em componentes é necessario encontar a expansão de R em Θ. A componte mais baixa é

$$R| = -\frac{1}{6}M \tag{328}$$

A transformação de M (268) implica:

$$\delta R| = \frac{1}{6}\zeta(\sigma^a\sigma^b\psi_{ab} + ib^a\psi_a - i\sigma^a\bar{\psi}_a M) \tag{329}$$

Comparando com δR obtido a partir de (288)

$$\delta R| = -\zeta^\alpha\mathcal{D}_\alpha R|, \tag{330}$$

encontra-se a componente de ordem Θ:

$$\mathcal{D}_\alpha R| = -\frac{1}{6}(\sigma^a\bar{\sigma}^b\psi_{ab} + ib^a\psi_a - i\sigma^a\bar{\psi}_a M)_\alpha \tag{331}$$

Seguindo o mesmo procedimento pode-se encontrar a outra componente de R:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\mathcal{D}R| &= -\frac{1}{3}e_a{}^m e_b{}^n\mathcal{R}_{mn}{}^{ab} + \frac{2}{3}i\bar{\psi}^m\bar{\sigma}^n\psi_{mn} \\ &+ \frac{1}{12}\epsilon^{klmn}[\bar{\psi}_k\bar{\sigma}_l\psi_{mn} + \psi_k\sigma_l\bar{\psi}_{mn}] - \frac{2}{3}ie_a{}^m\mathcal{D}_m b^a + \frac{4}{9}M\bar{M} \\ &+ \frac{2}{9}b^a b_a + \frac{1}{3}\bar{\psi}\bar{\psi}M - \frac{1}{3}\psi_m\sigma^m\bar{\psi}_n b^n\end{aligned} \tag{332}$$

Sabendo-se a decomposição em componentes de R e $\mathcal{E}$, isto é

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}e\{1 + i\Theta\sigma^a\bar{\psi}_a - \Theta\Theta[\bar{M} + \bar{\psi}_a\bar{\sigma}^{ab}\bar{\psi}_b]\} \tag{333}$$

$$
\begin{aligned}
R &= -\frac{1}{6}\Big\{ M + \Theta[\sigma^a\bar{\sigma}^b\psi_{ab} - i\sigma^a\bar{\psi}_a M + i\psi_a b^a] + \Theta\Theta\Big[-\frac{1}{2}\mathcal{R} + i\bar{\psi}^a\bar{\sigma}^b\psi_{ab} \\
&+ \frac{2}{3}M\bar{M} + \frac{1}{3}b^a b_a - ie_a{}^m\mathcal{D}_m b^a + \frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\psi}M - \frac{1}{2}\psi_a\sigma^a\bar{\psi}_c b^c \\
&+ \frac{1}{8}\epsilon^{klmn}[\bar{\psi}_k\bar{\sigma}_l\psi_{mn} + \psi_k\sigma_l\bar{\psi}_{mn}]\Big]\Big\} \qquad (334)
\end{aligned}
$$

basta multiplicar e integrar para encontar a lagrangeana em termos do multipleto da supergravidade a partir de (327).

Pela integração apenas os termos com $\Theta\Theta$ irão contribuir, de forma que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{S.G.} &= e\frac{1}{2}\Big\{ \underbrace{-\frac{1}{2}\mathcal{R}}_{(I)} \underbrace{+\bar{\psi}^a\bar{\sigma}^b\psi_{ab}}_{(II)} \underbrace{+\frac{2}{3}M\bar{M}}_{(III)} \underbrace{+\frac{1}{3}b^a b_a}_{(IV)} \underbrace{-ie_a{}^m\mathcal{D}_m b^a}_{(V)} \\
&\underbrace{\frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\psi}M}_{(VI)} \underbrace{-\frac{1}{2}\psi_a\sigma^a\bar{\psi}_c b^c}_{(VII)} \underbrace{+\frac{1}{8}\epsilon^{klmn}[\bar{\psi}_k\bar{\sigma}_l\psi_{mn} + \psi_k\sigma_l\bar{\psi}_{mn}]}_{(VIII)} \\
&\underbrace{+\frac{1}{2}i\bar{\psi}_c{}^{\dot{\alpha}}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma^c{}_{\alpha\dot{\alpha}}\sigma^a{}_{\beta\dot{\beta}}\bar{\sigma}^{b\dot{\beta}\gamma}\psi_{ab\gamma}}_{(IX)} \underbrace{+\frac{1}{2}\bar{\psi}_c{}^{\dot{\alpha}}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma^c{}_{\alpha\dot{\alpha}}\sigma^a{}_{\beta\dot{\beta}}\bar{\psi}_a{}^{\dot{\beta}}M}_{(X)} \\
&\underbrace{-\frac{1}{2}\bar{\psi}_c{}^{\dot{\alpha}}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma^c{}_{\alpha\dot{\alpha}}\psi_{a\beta}b^a}_{(XI)} \underbrace{-\bar{M}M}_{(XII)} \underbrace{-\bar{\psi}_a\bar{\sigma}^{ab}\bar{\psi}_b M}_{(XIII)}\Big\} + c.h. \qquad (335)
\end{aligned}
$$

Os termos (VI), (X) e (XIII):

$$
\begin{aligned}
(VI) &+ (X) + (XIII) = \frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\psi}M + \frac{1}{2}\bar{\psi}_c{}^{\dot{\alpha}}\underbrace{\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\gamma}}_{-\delta_\gamma{}^\beta}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\bar{\sigma}^{c\dot{\gamma}\gamma}\sigma^a{}_{\beta\dot{\beta}}\bar{\psi}_a{}^{\dot{\beta}}M \\
&- \frac{1}{4}\bar{\psi}_{a\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^{a\dot{\alpha}\alpha}\sigma^b{}_{\alpha\dot{\beta}} - \underbrace{\bar{\sigma}^{b\dot{\alpha}\alpha}\sigma^a{}_{\alpha\dot{\beta}}}_{\bar{\sigma}^{a\dot{\alpha}\alpha}\sigma^b{}_{\alpha\dot{\beta}} + 2\eta^{ab}\delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}})\bar{\psi}_b{}^{\dot{\beta}}M = 0. \qquad (336)
\end{aligned}
$$

Para (VII) e (XI) e seus conjugados:

$$
\begin{aligned}
(VII) &+ (XI) + c.h. = -\frac{1}{2}\psi_a\sigma^a\bar{\psi}_c b^c + \frac{1}{2}\psi_a\sigma^c\bar{\psi}_c b^a - \frac{1}{2}\underbrace{(\psi_a\sigma^a\bar{\psi}_c)^\dagger}_{\psi_{c\alpha}\bar{\sigma}^{\dot{\alpha}\alpha a}\bar{\psi}_{a\dot{\alpha}}} b^c \\
&+ \frac{1}{2}\underbrace{(\psi_a\sigma^c\bar{\psi}_c)^\dagger}_{\psi_{c\alpha}\bar{\sigma}^{c\dot{\alpha}\alpha}\bar{\psi}_{a\dot{\alpha}}} b^a = 0 \qquad (337)
\end{aligned}
$$

Os termos (V) e (VIII) se cancelam com seus conjugados.
E os termos $(II)+(IX)+c.h.$,

$$(II)+(IX)+c.h. = i\bar{\psi}^a\bar{\sigma}^b\psi_{ab} + \frac{1}{2}i\bar{\psi}_c\bar{\sigma}^c\sigma^a\bar{\sigma}^b\psi_{ab} + c.h. \tag{338}$$

De (363) e (364) encontra-se a relação:

$$\bar{\sigma}^c\sigma^a\bar{\sigma}^b = -i\epsilon^{cabd}\bar{\sigma}_d + (\eta^{cd}\bar{\sigma}^a - \eta^{ab}\bar{\sigma}^c - \eta^{ca}\bar{\sigma}^b) \tag{339}$$

Portanto

$$\begin{aligned}(II)+(IX)+c.h. &= \frac{1}{2}\epsilon^{abcd}\bar{\psi}_a\bar{\sigma}_b\psi_{cd} + \frac{1}{2}\epsilon^{abcd}\underbrace{(\bar{\psi}_a\sigma_b\psi_{cd})^\dagger}_{-\psi_a{}^\alpha\sigma_{b\alpha\dot{\alpha}}\bar{\psi}_{cd}{}^{\dot{\alpha}}} \\ &= \epsilon^{abcd}(\bar{\psi}_a\bar{\sigma}_b\tilde{\mathcal{D}}_c\psi_d - \psi_a\sigma_b\tilde{\mathcal{D}}_c\bar{\psi}_d)\end{aligned} \tag{340}$$

A expressão acima e os termos (I), (III), (IV) e (XII) fornecem a seguinte forma para a lagrangeana da supegravidade:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = -\frac{1}{2}e\mathcal{R} - \frac{1}{3}e\bar{M}M + \frac{1}{3}eb^ab_a \\ +\frac{1}{2}e\epsilon^{klmn}(\bar{\psi}_k\bar{\sigma}_l\tilde{\mathcal{D}}_m\psi_n - \psi_k\sigma_l\tilde{\mathcal{D}}_m\bar{\psi}_n)\end{aligned} \tag{341}$$

Por fim vamos encontrar a generalização para espaços curvos da ação no superespaço de supercampos quirais dada por (34). É necessario integrar em $d^2\bar{\theta}$, de modo que (34) torna-se:

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta\Big[-\frac{1}{8}\bar{D}\bar{D}\bar{\Phi}\Phi + a\Phi + \frac{1}{2}m\Phi^2 + \frac{1}{3}\Phi^3\Big] + c.h. \tag{342}$$

A ação para supercampos quirais em espaço curvo é obtida a partir das seguintes substituições:

- $\theta \to \Theta$
- $d^2\theta \to d^2\Theta 2\mathcal{E}$
- $\bar{D}\bar{D} \to (\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{D}} - 8R)$

As idetificações acima fornecem a ação para supercampos quirais em espaços curvos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \int d^2\Theta 2\mathcal{E}[-3R - \frac{1}{8}(\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{D}} - 8R)\bar{\Phi}\Phi - \frac{1}{8}(\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{D}} - 8R)[c\Phi + \bar{c}\bar{\Phi}] \\ &+ d + a\Phi + \frac{1}{2}m\Phi^2 + \frac{1}{3}g\Phi^3] + c.h.\end{aligned} \tag{343}$$

5 Conclusões

Nessa dissertação apresentamos a teoria de supergravidade em 4 dimensões, os cálculos foram mostrados de forma detalhada. Durante o trabalho deu-se ênfase ao estudo das propriedades geométricas do superespaço.

Partiu-se inicialmente das transformações gerais de coordenadas no superespaço e das transformações do grupo de estrutura do espaço tangente e o Vielbein foi definido para relacionar os índices dessas transformações. Definiu-se também a conexão para possibilitar a construção de derivadas covariantes. Essas quantidades levaram aos conceitos de torção e Curvatura do Superespaço, que estão relacionadas por identidades obtidas da geometria do superespaço, chamadas Identidades de Bianchi. A resolução das identidades de Bianchi demandou a imposição de vínculos, o que levou a redução considerável do número de campos componetes.

Usando-se a invariância de gauge pôde-se reduzir ainda mais o número de campos componentes. Definiu-se então a transformação de supergravidade, que no limite adequado se reduz a transformação de supersimetria. Contruiu-se a ação da supergravidade no superespaço e encontrou-se a sua forma no espaço-tempo. É interessante ressaltar que o graviton e o gravitino são representados por componentes de Vielbein do Superespaço.

Os assuntos aqui abordados são um ponto de início para o estudo de temas mais avançados, como quantização de supergravidade e teoria de supercordas.

A Apêndice

Este apêndice contém as convenções, notações e alguns resultados importantes. A notação usada durante a dissertação é a mesma adotada por [1], de uso como na literatura de Supersimetria.

A métrica usada será :

$$\eta_{\mathbf{mn}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{344}$$

Espinores serão denotados por índices gregos e vetores por índices latinos. Trabalharemos com espinores de Weyl (2 componentes) na notação de Van der Waerden. Os índices sem ponto se tranformam pela representação $(\frac{1}{2}, 0)$ do grupo de Lorentz e os com ponto pela representação conjugada $(0, \frac{1}{2})$:

$$(\psi^{\alpha})^{\dagger} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \tag{345}$$

E as matrizes de Pauli:

$$\sigma^{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{346}$$

$$\sigma^{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{347}$$

$$\sigma^{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{348}$$

$$\sigma^{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{349}$$

A sua estrutura de índices é dada por ${\sigma_m}^{\alpha\dot{\alpha}}$

Os espinores com índice em cima se relacionam com os com índices em baixo pela seguinte relação $\psi^{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_{\beta}$ e $\psi_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta}\psi^{\beta}$ onde as matrizes ϵ são dadas por :

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{350}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{351}$$

Dessa forma temos $\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}{}^{\gamma}$.
A matriz $\bar{\sigma}^m$ é dada por:

$$\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma^m{}_{\beta\dot{\beta}} \tag{352}$$

A convenção de soma de índices epinoriais é:

$$\begin{aligned} \psi\chi = \psi^\alpha\chi_\alpha = -\psi_\alpha\chi^\alpha = \chi^\alpha\psi_\alpha = \chi\psi \\ \bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}\bar{\psi} \end{aligned} \tag{353}$$

De forma que

$$(\chi\psi)^\dagger = (\chi^\alpha\psi_\alpha)^\dagger = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}\bar{\psi}. \tag{354}$$

A seguir algumas identidades utéis

$$Tr\sigma^m\bar{\sigma}^n = -2\eta^{nm} \tag{355}$$

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\bar{\sigma}_m{}^{\dot{\beta}\beta} = -2\delta_\alpha{}^\beta\delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \tag{356}$$

$$(\sigma^m\bar{\sigma}^n + \sigma^n\bar{\sigma}^m)_\alpha{}^\beta = -2\eta^{mn}\delta_\alpha{}^\beta \tag{357}$$

$$(\bar{\sigma}^m\sigma^n + \bar{\sigma}^n\sigma^m)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = -2\eta^{mn}\delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \tag{358}$$

$$\sigma^{nm}{}_\alpha{}^\beta = \frac{1}{4}(\sigma^n{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta} - \sigma^m{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{n\dot{\alpha}\beta}) \tag{359}$$

$$\bar{\sigma}^{nm\dot{\alpha}}{}_{\beta} = \frac{1}{4}(\bar{\sigma}^{n\dot{\alpha}\alpha}\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^{m} - \bar{\sigma}^{n\dot{\alpha}\alpha}\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^{n}) \tag{360}$$

$$\begin{aligned}
\theta^{\alpha}\theta^{\beta} &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\theta\theta \\
\theta_{\alpha}\theta_{\beta} &= \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\theta\theta \\
\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} &= \frac{1}{2}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta} \\
\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}} &= -\frac{1}{2}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta}
\end{aligned} \tag{361}$$

$$\theta\sigma^{m}\bar{\theta}\theta\sigma^{n}\bar{\theta} = -\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\eta^{mn} \tag{362}$$

Algumas relações úteis entre as matrizes σ :

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^{a}\sigma^{b}\bar{\sigma}^{c} - \bar{\sigma}^{c}\sigma^{b}\bar{\sigma}^{a} &= -2i\epsilon^{abcd}\bar{\sigma}_{d} \\
\sigma^{a}\bar{\sigma}^{b}\sigma^{c} - \sigma^{c}\bar{\sigma}^{b}\sigma^{a} &= 2i\epsilon^{abcd}\sigma_{d}
\end{aligned} \tag{363}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^{a}\bar{\sigma}^{b}\sigma^{c} + \sigma^{c}\bar{\sigma}^{b}\sigma^{a} &= 2(\eta^{ac}\sigma^{b} - \eta^{bc}\sigma^{a} - \eta^{ab}\sigma^{c}) \\
\bar{\sigma}^{a}\sigma^{b}\bar{\sigma}^{c} + \bar{\sigma}^{c}\sigma^{b}\bar{\sigma}^{a} &= 2(\eta^{ac}\bar{\sigma}^{b} - \eta^{bc}\bar{\sigma}^{a} - \eta^{ab}\bar{\sigma}^{c})
\end{aligned} \tag{364}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{n}\sigma_{\beta\dot{\beta}}{}^{m} - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{m}\sigma_{\beta\dot{\beta}}{}^{n} &= 2[(\sigma^{nm}\epsilon)_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + (\epsilon\bar{\sigma}^{nm})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon_{\alpha\beta}] \\
\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{n}\sigma_{\beta\dot{\beta}}{}^{m} + \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{m}\sigma_{\beta\dot{\beta}}{}^{n} &= -\eta^{nm}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + 4(\sigma^{ln}\epsilon)_{\alpha\beta}(\epsilon\bar{\sigma}^{lm})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}
\end{aligned} \tag{365}$$

Referências

[1] J. Wess e J Bagger. Supersymmetry and Supergravity, Second edition. Princetn Series in Physics.

[2] I. L. Buchbinder e S. M. Kurenko, Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity. Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia.

[3] D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen e S. Ferrara, *Phys. Rev. D* **13** (1976) 3214.

[4] S. Deser e B. Zumino, *Physics Letters B* **62** (1976) 335.

[5] U. Theis, Supergravity for Beginners (Institute for Theorical Physics, Friedrich-Schiller-University Jena, 2005).

[6] R. Arnowitt e P. Nath, *Physics Letters B* **56** (1975) 117.

[7] R. Arnowitt, P. Nath e B. Zumino, *Physics Letters B* **56** (1975) 81.

[8] H. Flanders, Differential Forms with Application to Physical Sciences. Academic Press, 1963.

[9] J. Wess e B. Zumino, *Physics Letters B* **66** (1977) 361.

[10] R. Grimm, J. Wess e B. Zumino, *Nuclear Physics B* **152** (1979) 255.

[11] J. Wess e B Zumino, *Physics letters B* **79** (1978) 394.

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo