Kelly Alves Marães

Imersões de Superfícies de Curvatura Média Constante em Variedades de Curvatura Constante

Manaus - AM

Julho / 2005

Kelly Alves Marães

Imersões de Superfícies de Curvatura Média Constante em Variedades de Curvatura Constante

Dissertação apresentada à Coordenação do Mestrado em Matemática da Universidade Federal do Amazonas para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Renato de Azevedo Tribuzy

Mestrado em Matemática
Departamento de Matemática
Instituto de Ciências Exatas
Universidade Federal do Amazonas

Manaus - AM

Julho / 2005

Ao que era, que é
e que há de vir.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos:

– ao Senhor Jesus, porque dele e por Ele e para Ele são todas as coisas, glória, pois, a Ele eternamente;

– à minha mãe, por sempre apoiar-me em todos estes anos de estudos;

– aos amigos Nadime, Andréia, Ponciano e Alexandra, por toda e qualquer tipo de ajuda na elaboração destre trabalho;

– ao coordenador do curso e orientador doutor Renato Tribuzy pela oportunidade de realizar este trabalho.

Pode alguém ensinar conhecimento a Deus,
visto que Ele julga até os excelsos?
Jó 21:22

Resumo

Seja M^2 uma superfície completa de curvatura média constante H e curvatura Gaussiana K que não muda de sinal imersa em uma variedade Riemaniana de curvatura constante $M^4(c)$. Provamos que M^2 é mínima, ou uma esfera de raio $(|H|^2 + c)^{-1/2}$ ou um produto de círculos $S^1(r) \times S^1(\rho), 0 < r < \infty, 0 < \rho < \infty$.

Se a curvatura média é nula a conclusão é imediata por definição de superfície mínima. Considerando H não nula, verificamos dois casos: no primeiro, em que $K \leq 0$, concluimos que M^2 é um produto de círculos $S^1(r) \times S^1(\rho)$; no segundo, quando $K \geq 0$, M^2 pode ser compacta ou parabólica. Supondo M^2 compacta concluímos que é uma esfera; supondo M^2 parabólica concluímos que é produto de círculos.

Abstract

Let $M^2 \hookrightarrow \overline{M}^4(c)$ be an immersion of a complete surface with constant mean curvatura H end Gauss curvature K that not change of sign M^2 in a Riemannian manifold $\overline{M}^4(c)$ of constant curvature. We showed that M^2 is minimal surface, or sphere of radius $(|H|^2 + c)^{-1/2}$ or a product of circles $S^1(r) \times S^1(\rho), 0 < r < \infty, 0 < \rho < \infty$.

If mean curvature vanished, M^2 is a minimal surface by definition. If mean curvature not vanished, we verified two cases: in first case, $K \leq 0$, then M^2 is the product $S^1(r) \times S^1(\rho)$; otherwise, this is, $K \geq 0$ we have M^2 compact or parabolic. If M^2 is compact we did conclude M^2 is a sphere; If M^2 is parabolic then M^2 is a product of circles.

Sumário

1 *Introdução*

Uma superfície imersa em um espaço Euclidiano tri-dimensional $\mathbb{R}^3$ tem curvatura média constante se o comprimento do vetor curvatura média H é constante. Uma imersão isométrica arbitrária $M^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+k}$ de variedades Riemannianas tem curvatura média constante se H é paralelo no fibrado normal da imersão. Esta condição é mais forte do que o fato de $|H|$ ser constante. Neste trabalho sobre imersões de superfícies em variedades de curvatura constante, são generalizados alguns fatos e teoremas conhecidos sobre superfícies de curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$.

Mostramos inicialmente algumas definições e resultados concernentes à geometria Riemanniana encontrados nos capítulos 2 e 3. No capítulo 2 tratamos de conceitos elementares como variedades Riemannianas, conexões Riemannianas, variedades completas, algumas noções de variáveis complexas, recobrimento universal entre outros. No capítulo 3 introduzimos a definição de imersão isométrica, mostramos resultados concernentes à segunda forma fundamental, dentre os quais destacamos as equações de Gauss e Codazzi (proposição 3.6), e mencionamos algumas observações a respeito da curvatura média.

Os capítulos 4 e 5 tratam do nosso objeto principal de estudo neste trabalho, as superfícies de curvatura média constante. Para uma superfície de curvatura média constante dada em coordenadas conformes, associa-se uma função analítica φ construida a partir da segunda forma fundamental na direção da curvatura média (Lema 4.1). Isto foi feito primeiro para superfícies em $\mathbb{R}^3$ por Heinz Hopf [9]. Sobre certas condições adicionais, o mesmo procede para outras direções normais. Estas funções são usadas para provar o Teorema 4.4: As únicas superfícies de gênero 0 em $\mathbb{R}^4$ são as esferas S^2.

O Teorema 4.8 dá uma caracterização de imersões de curvatura média constante que tem curvatura Gaussiana constante; elas são pedaços de esferas S^2 ou produtos de círculos $S^1(r) \times S^1(\rho)$, com $0 < r \leq \infty$, $0 < \rho < \infty$.

O teorema principal deste trabalho foi enunciado no artigo de D. Hoffman [7], e classifica superfícies completas de curvatura média constante em $\mathbb{R}^4$ e S^4. Tal teorema é uma generalização do Teorema de Klotz e Osserman para superfícies completas de curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$.

2 Preliminares

VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS E ESPAÇO TANGENTE

Definição 2.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas* $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ *de abertos* U_α *de* $\mathbb{R}^n$ *em M tais que:*
(i) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$ *;*
(ii) Para todo par (α, β) *com* $x_\alpha(U_\alpha) \bigcap x_\beta(U_\beta) = W \neq \phi$ *, os conjuntos* $x_\alpha^{-1}(W)$ *e* $x_\beta^{-1}(W)$ *são abertos e as aplicações* $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta^{-1}$ *e* $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha^{-1}$ *são diferenciáveis;*
(iii) A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ *é máxima em relação às condições (i) e (ii).*

O par (U_α, x_α) (ou a aplicação x_α)com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma parametrização (ou sistema de coordenadas) de M em p; $x_\alpha(U_\alpha)$ é chamada vizinhança coordenada em p. Uma família $\{(x_\alpha, U_\alpha)\}$, satisfazendo (i) e (ii) é chamada uma estrutura diferenciável em M.

Uma variedade diferenciável M de dimensão 2 é chamada superfície.

Uma estrutura diferenciável em um conjunto M induz naturalmente uma topologia em M. Basta definir que $A \subset M$ é um aberto de M se $x_\alpha^{-1}(A \bigcap x_\alpha(U_\alpha))$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ para todo α. Observe que para todo β,

$$x_\beta^{-1}\left[\left(\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha)\right)\bigcap x_\beta(U_\beta)\right] = x_\beta^{-1}(x_\beta(U_\beta)) = U_\beta$$

é aberto de $\mathbb{R}^n$ e portanto $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$ é aberto. Além disso, é fácil ver que o vazio, a união de abertos e a intersecção de abertos também são abertos. Observe também que tal topologia foi definida de maneira que os conjuntos $x_\alpha(U_\alpha)$ são abertos e as aplicações x_α são contínuas.

Um exemplo trivial de variedade diferenciável é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ com a estrutura diferenciável dada pela identidade.

A partir de agora M^n denota uma variedade diferenciável, onde o índice superior n indica a dimensão de M.

Definição 2.2. *Sejam M^n e $\overline{M}^m$ variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M^n \to \overline{M}^m$ é diferenciável em $p \in M^n$ se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \to \overline{M}^m$ de $\varphi(p)$ existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n$ de p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação $y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $x^{-1}(p)$. φ é diferenciável em um aberto de M se é diferenciável em todos os pontos deste aberto. Se, além disso, φ é bijetiva e sua inversa φ^{-1} é diferenciável então φ diz-se um difeomorfismo.*

Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M^n$ é chamada curva diferenciácel em M. Suponha $\alpha(0) = p \in M^n$, e seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções diferenciáveis de M em p. O *vetor tangente* à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0}, f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M^n$ com $\alpha'(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes será indicado por T_pM^n.

Definição 2.3. *Sejam M^n e $\overline{M}^m$ variedades diferenciáveis e seja uma $\varphi : M^n \to \overline{M}^m$ aplicação diferenciável. Para cada $p \in M^n$ e cada $v \in T_pM^n$ escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M^n$ com $\alpha'(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_pM^n \to T_{\varphi(p)}\overline{M}^m$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é chamada diferencial de φ em p.*

Tal aplicação não depende da escolha de α e portanto está bem definida. De fato, tomando parametrizações $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n$, em p, e $y : V \subset \mathbb{R}^m \to \overline{M}^m$, em $\varphi(p)$, e exprimindo φ nestas parametrizações, é possível escrever

$$(y^{-1} \circ \varphi \circ x)(q) = (y_1(x_1, ..., x_n), ..., y_m(x_1, ..., x_n)),\ q = (x_1, ..., x_n) \in V.$$

Por outro lada exprimindo α na parametrização x tem-se

$$(x^{-1} \circ \alpha)(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)).$$

Portanto,

$$(y^{-1}\circ\beta)(q) = (y_1(x_1(t),...,x_n(t)),...,y_m(x_1(t),...,x_n(t))).$$

Decorre daí que a expressão de $\beta'(0)$ na base $\left\{\left(\dfrac{\partial}{\partial y_i}\right)\right\}$ de $T_{\varphi(p)}\overline{M}^m$, associada à parametrização y, é dada por

$$\beta'(0) = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_1}{\partial x_i}x_i'(0),...,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_m}{\partial x_i}x_i'(0)\right)$$

o que mostra que $\beta'(0)$ não depende da escolha de α.

Além disso é possível escrever tal expressão como

$$\beta'(0) = d\varphi_p(v) = \left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right][x_j'(0)],$$

$i = 1,...,m;\ j = 1,...,n$, onde $\left[\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\right]$ indica uma matriz $m\times n$ e $[x_j'(0)]$ indica uma matriz $n\times 1$, o que mostra que $d\varphi_p$ é uma aplicação linear de T_pM^n em $T_{\varphi(p)}\overline{M}^m$.

IMERSÃO E ORIENTAÇÃO

Definição 2.4. *Sejam M^n e $\overline{M}^m$ variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M^n \to \overline{M}^m$ é uma imersão se $d\varphi_p : T_pM^n \to T_{\varphi(p)}\overline{M}^m$ é injetiva para todo $p \in M^n$.*

Observe que se $\varphi : M^n \to \overline{M}^m$ é uma imersão então $m \geq n$ e a diferença $k = m - n$ é chamada codimensão da imersão.

Definição 2.5. *Seja M uma variedade diferenciável. M diz-se oientável se admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ tal que para todo par α,β com $x_\alpha(U_\alpha)\bigcap x_\beta(U_\beta) = W \neq \phi$, a diferencail da mudança de coordenadas $x_\beta\circ x_\alpha^{-1}$ tem determinante positivo. Caso contrário M diz-se não-orientável.*

Se M é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo a condição da definição acima é chamada uma orientação de M e M é dita orientada.

FIBRADO TANGENTE

Seja M^n uma variedade diferenciável e seja $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$. Munindo o conjunto TM de uma estrutura diferenciável (de dimensão $2n$), TM será chamado *fibrado tangente* de M.

Com efeito, seja $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ a estrutura máxima de M. Indique por $(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha)$ as coordenadas de U_α e por $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, ..., \dfrac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right\}$ as bases associadas nos espaços tangentes de $x_\alpha(U_\alpha)$. Para cada α, defina $y_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to TM$ por

$$y_\alpha(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha, u_1, ..., u_n) = \left(x_\alpha(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right),\ (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Geometricamente, isto significa tomar como coordenadas de um ponto $(p, v) \in TM$ as coordenadas $x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha$ de p junto com as coordenadas de v na base $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, ..., \dfrac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right\}$.

Como $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$ e $(dx_\alpha)_q(\mathbb{R}^n) = T_{x_\alpha(q)}M$, $q \in U_\alpha$, tem-se

$$\bigcup_\alpha y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) = TM,$$

o que verifica a condição (i) da definição 2.1. Considere agora

$$(p, v) \in y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \bigcap y_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n).$$

Então

$$(p, v) = (x_\alpha(q_\alpha), dx_\alpha(v_\alpha)) = (x_\beta(q_\beta), dx_\beta(v_\beta)),$$

onde $q_\alpha \in U_\alpha$, $q_\beta \in U_\beta$, $v_\alpha, v_\beta \in \mathbb{R}^n$. Portanto,

$$y_\beta^{-1} \circ y_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) = y_\beta^{-1}(x_\alpha(q_\alpha), dx_\alpha(v_\alpha)) = ((x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(q_\alpha), d(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(v_\alpha)).$$

Como $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ é diferenciável, $d(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)$ também o é. Decorre daí que $y_\beta^{-1} \circ y_\alpha$ é diferenciável, o que verifica a condição (ii) da definição 2.1, o que mostra que TM é uma estrutura diferenciável.

CAMPO DE VETORES

Um *campo de vetores* X em uma variedade Diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetror $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM. O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \to TM$ é diferenciável.

Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i : U \subset \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ é a base associada a x, $i = 1, ..., n$. Neste caso X é diferenciável se, e somente se, as funções a_i são diferenciáveis para alguma parametrização.

Utilizando a idéia acima é possível pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X : \mathcal{D} \to \mathcal{F}$ onde $\mathcal{F}$ é o conjunto das funções em M definida do seguinte modo:

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

onde f indica a expressão de f na parametrização x. Em verdade esta idéia de vetor como derivada direcional foi precisamente a maneira como foi definida a noção de vetor tangente. É imediato verificar que a função Xf não depende da escolha da parametrização x. Neste contexto, é imediato verificar que X é diferenciável se e só se $X : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, isto é, $Xf \in \mathcal{D}$ para todo $f \in \mathcal{D}$.

MÉTRICAS RIEMANNIANAS

Definição 2.6. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle \ , \ \rangle_p$ (ou seja, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $x(x_1, ..., x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, ..., 1, ..., 0)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_p = g_{ij}(x_1, ..., x_n)$ é uma função diferenciável em U.*

É comum deixar cair o índice p em $\langle\ ,\ \rangle_p$ sempre que não houver possibilidade de confusão. As funções g_{ij} são chamadas expressão da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$. Uma variedade diferenciável com uma métrica Riemanniana é chamada *variedade Riemanniana*. Uma variedade Riemanniana de dimensão 2 é chamada *superfície Riemanniana*.

Definição 2.7. *Sejam M e $\overline{M}$ variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \to \overline{M}$ é chamado uma isometria se:*

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v), \rangle_{f(p)}$$

para todo $p \in M$ e $u, v \in T_pM$.

Se existe uma isometria entre M e $\overline{M}$ diz-se que tais variedades são isométricas.

Seja $U \subset M$ aberto. Um difeomorfismo $f : U \to f(U) \subset \overline{M}$ satisfazendo a condição da definição acima, diz-se uma isometria local. Neste caso, M é localmente isométrica a $\overline{M}$.

Definição 2.8. *Uma métrica Riemanniana sobre M é dita plana se nesta métrica M é localmente isométrica ao plano.*

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão. Se $\overline{M}^{n+k}$ tem uma estrutura Riemanniana, f induz uma estrutura Riemanniana em M por

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v), \rangle_{f(p)}, u, v \in T_pM.$$

Como df_p é injetiva, $N(df_p) = \{0\}$, logo

$$\begin{aligned}
\langle u, u\rangle_p &= \langle df_p(u), df_p(u), \rangle_{f(p)} \geq 0, u \in T_pM \\
\langle u, u\rangle_p &= \langle df_p(u), df_p(u), \rangle_{f(p)} = 0 \Leftrightarrow df_p(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0
\end{aligned}$$

o que mostra que $\langle\ ,\ \rangle_p$ é positivo definido. A métrica de M é chamada métrica induzida por f, e f é uma imersão isométrica.

Definição 2.9. *Um difeomorfismo $\varphi : M \to N$ diz-se uma aplicação conforme se $\forall p \in M$ e*

$\forall u, v \in T_pM$ tem-se

$$\left\langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v)\right\rangle = \lambda^2(p)\,\langle u, v\rangle_p$$

onde λ^2 é uma função diferenciável não nula sobre M.

O significado geométrico de uma aplicação conforme é que ela preserva os ângulos formado por duas curvas que se interceptam.

Definição 2.10. *Duas métricas $\langle\ ,\ \rangle$ e $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ em uma variedade Riemaniana M são conformes se existe uma função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$, positiva, tal que*

$$\langle u, v\rangle_p = f(p)\,\langle\langle u, v\rangle\rangle_p$$

$\forall p \in M$ e $\forall u, v \in T_pM$.

Um fato importante no estudo das superfícies é que é possível obter em uma vizinhança de cada ponto uma parametrização conforme, ou seja, um sistema de coordenadas locais no qual

$$E = G > 0 \ \ e \ \ F = 0$$

onde E, F *e* G são coeficientes da primeira forma fundamental. A existência de um tal sistema é garantida pelo teorema enunciado abaixo, o qual pode ser encontrado em Spivak [14].

Teorema 2.11. *Sejam U um aberto simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2$ e $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ uma imersão de classe C^k, $1 \leq k \leq \infty$. Então existe um difeomorfismo $\phi : U \to U$ de classe C^k tal que $\widetilde{\varphi} = \varphi \circ \phi$ é conforme.*

CONEXÕES RIEMANNIANAS

Seja $\Gamma(TM)$ o conjunto das secções suaves de TM, ou seja, dos campos de vetores de classe C^∞ em M e $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções de classe C^∞ definidas em M. Chamamos de *conexão afim* ∇ em uma variedade Riemanniana à aplicação

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:
(i)$\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_X Z$

(ii)$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
(iii)$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$
onde $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Proposição 2.12. *Sejam $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ e $p \in M$.*
(1) Existe uma vizinhança aberta V_p de p de modo que $Y|_{V_p} = Z|_{V_p}$, então $(\nabla_X Y)_p = (\nabla_X Z)_p$.
(2) Se $X_p = Y_p$, então $(\nabla_X Y)_p = (\nabla_X Z)_p$.

Demonstração:

(1) Toda variedade diferenciável de dimensão n (Hausdorff e com base enumerável) pode ser imersa em R^{2n} e mergulhada em R^{2n+1}.

Assim, pode-se dizer que $p \in R^n$ e obter $B_r(p) \subset R^n$, $B_r(p)$ é uma bola aberta em p e de raio r. Existe uma vizinhança U de p com $\overline{U} \subset B_r(p) = V_p$ e uma função f diferenciável de classe C_∞ tal que

$$f(q) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad q \in \overline{U} \\ 0, & \text{se} \quad q \in M - V_p \end{cases}$$

Isto fornece $fY = fZ$, daí obte-se $\nabla_X fY = \nabla_X fZ$.

Pela propriedade (3) de conexão afim, em p tem-se $f(p)(\nabla_X Y)_p + X(f(p))Y(p) = f(p)(\nabla_X Z)_p + X(f(p))Z(p)$.

Pela definição da f, tem-se $f(p) = 1$ e $Y_p = Z_p$, daí obtem-se,

$$(\nabla_X Y)_p = (\nabla_X Z)_p.$$

(2) Antes de mostrarmos (2), notemos que existe uma vizinhança V_p tal que $X|_{V_p} = Y|V_p$, então $(\nabla_X Z)_p = (\nabla_Y Z)_p$.

De fato, tomemos a aplicação f como na demonstração de (1). Assim,

$$f|_{\overline{U}_p} = 1 \text{ e } f|_{M-V_p} = 0$$

como $fX = fY$ e $f(p) = 1$, segue

$$\begin{aligned}(\nabla_X Z)_p &= f(p)(\nabla_X Z)_p = (f\nabla_X Z)_p \\ &= (\nabla_{fX} Z)_p = (\nabla_{fY} Z)_p \\ &= (f\nabla_Y Z)_p = f(p)(\nabla_Y Z)_p = (\nabla_Y Z)_p.\end{aligned}$$

Isto conclui a afirmação feita acima.■

Seja $(x_1, ..., x_n)$ um sistema de coordenadas ao redor do ponto p, então

$$X = \sum_{i=1} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$
$$Y = \sum_{j=1} Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Pela propriedade (i) de conexão e pela afirmação acima pode-se escrever

$$\begin{aligned}(\nabla_X Z)_p &= \left(\sum_{i=1} X_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Z\right)_p = \sum_{i=1} X_i(p)(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Z)_p \\ &= \sum_{i=1} Y_i(p)(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Z)_p = \left(\sum_{i=1} Y_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Z\right)_p = (\nabla_Y Z)_p.\end{aligned}$$

A proposição 2.12 mostra que $\nabla_X Y(p)$ depende apenas de X_p e de Y definido numa vizinhança de p.

A proposição seguinte caracteriza a conexão afim como uma maneira de derivar vetores ao longo de curvas e ao mesmo tempo deixa mais claro o que é uma conexão afim.

Proposição 2.13. *Sejam M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e $\gamma : I \longrightarrow M$ uma curva. Então é possível associar de forma única um campo vetorial X a outro campo vetorial $\frac{DX}{dt}$ ao longo de γ, de modo que:*

(1) $\frac{D}{dt}(X + Y) = \frac{DX}{dt} + \frac{DY}{dt}$

(2) $\frac{D}{dt}(fX) = \frac{df}{dt}X + f\frac{DX}{dt}$

(3) Se $Z \in \Gamma(TM)$ é tal que $X(t) = Z(\gamma(t))$, então $\frac{DX}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} Z$

$X, Y \in \Gamma(TM)$ e f é uma função diferenciável em I.

Note que (3) faz sentido devido a proposião 2.12.

$\dfrac{DX}{dt}$ é chamada derivada covariante de X ao longo da curva γ, relativamente a conexão ∇.

Será usado $\nabla_{X_i} X_j = \sum_{i=1} \Gamma_{ij}^k X_k$, onde $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, para indicar os símbolos de Christoffel de ∇.

Escolhendo uma parametrização $(x_1, ..., x_n)$ ao redor do ponto p, e escrevendo

$$X = \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$
$$Y = \sum y_i \frac{\partial}{\partial x_j}$$

obtem-se,

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \sum_i x_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\sum_j y_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_{i,j} x_i y_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{ij} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}(y_j) \frac{\partial}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

Como,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

então

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k \right) + X(y_k) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

A expressão acima é a representação local de $\nabla_X Y$ na parametrização $(x_1, ..., x_n)$.

Definição 2.14. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim. Um campo de vetores V ao longo de uma curva $c : I \to M$ é dito* paralelo *quando $\dfrac{DV}{dt} = 0$ para todo $t \in I$.*

Definição 2.15. *Uma conexão ∇ é compatível com a métrica se para toda curva c e todo par de vetores paralelos X, Y ao longo de c, tivermos, $\langle X, Y\rangle =$ constante.*

Proposição 2.16. *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica $\langle\ ,\ \rangle$ se e somente se, para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferencial $c : I \to M$, tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W\right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt}\right\rangle, \quad t \in I.$$

Corolário 2.17. *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se e só se*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

A proposição e o corolário acima bem como suas respectivas demonstrações podem ser encontradas em [3], pags. 53 e 54.

Definição 2.18. *Uma conexão ∇ é chamada simétrica quando $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$, onde a aplicação $[\ ,\ ] : \Gamma(TM)\times\Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$ dada por $[X, Y] = XY - YX$ é chamada o colchete de Lie.*

Em um sistema de coordenadas (U, x), o fato de ser ∇ simétrica implica que para todo $i, j = 1, ..., n$,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Observe que a expressão acima é equivalente ao fato de que $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Teorema 2.19. *(Levi-Civita) Seja M uma variedade Riemanniana, existe uma única conexão afim ∇ em M que é simétrica e compatível com a métrica.*

Demonstração: Suponha inicialmente a existência de uma tal ∇ .Então

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \tag{2.1}$$

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle, \tag{2.2}$$

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle. \tag{2.3}$$

Somando (2.1) e (2.2) e subtraindo (2.3), tem-se, usando a simetria de ∇, que

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle$$

Portanto

$$\langle Z, \nabla_Y X\rangle = \frac{1}{2}[X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle] \tag{2.4}$$

A expressão acima mostra que ∇ está univocamente determinada pela métrica $\langle\ ,\ \rangle$. Portanto, caso ela exista, ela será única.

Para mostrar a existência, defina ∇ por (2.4). É fácil verificar que ∇ está bem definida e que satisfaz às propriedades desejadas.■

A conexão dada pelo teorema acima é chamada conexão *Riemanniana* ou de *Levi-Civita*.

CURVATURAS

Definição 2.20. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspodência que associa a cada par $X, Y \in \Gamma(TM)$ uma aplicação $R(X, Y) : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z,\ Z \in \Gamma(TM)$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Definição 2.21. *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$, chamamos de curvatura seccional de σ em p ao número real $K(x, y) = K(\sigma)$ dado por*

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y\rangle}{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}$$

onde $\{x,y\}$ é uma base qualquer de σ.

De fato esta definição não depende da escolha da base. Basta observar que podemos passar da base $\{x, y\}$ para qualquer outra base $\{x', y'\}$ por iterações das seguintes transformaões elementares:

(a)$\{x, y\} \to \{y, x\}$

(b)$\{x, y\} \to \{\lambda x, y\}$

(c)$\{x, y\} \to \{x + \lambda y, y\}$

É fácil ver que $K(x,y)$ é invariante por tais transformações.

O próximo resultado relacionado a curvatura seccional constante será apenas enunciado, todavia, sua demonstração poderá ser encontrada em [3], pag. 96.

Lema 2.22. *Sejam M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M. Defina uma aplicação trilinear $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ por*

$$\langle R'(X,Y,W),Z\rangle = \langle X,W\rangle \langle Y,Z\rangle - \langle Y,W\rangle \langle X,Z\rangle ,$$

para todo $X,Y,W,Z \in T_pM$. Então M tem curvatura seccional constante igual a K_0 se, e somente se, $R = K_0R'$, onde R é a curvatura de M.

VARIEDADES COMPLETAS

Definição 2.23. *Uma curva $\gamma : I \to M$, onde M é uma variedade Riemanniana munida de sua conexão Riemanniana, é uma geodésica em t_0 se $\dfrac{D}{dt}\left(\dfrac{d\gamma}{dt}\right) = 0$ no ponto t_0; se γ é geodésica em t, para todo $t \in I$, γ diz-se uma geodésica. Se $[a,b] \subset I$ e $\gamma : I \to M$ é uma geodésica, a restrição de γ a $[a,b]$ é chamada geodésica ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.*

Dado $p \in M$, seja $V \subset M$ uma vizinhança de p e $\varepsilon > 0$. Tomando $\mathcal{U} = \{(q,w) \in TM; q \in V, w \in T_qM, |w| < \varepsilon\}$ define-se:

Definição 2.24. *Seja $p \in M$ e $\mathcal{U} \subset M$ um aberto. Então a aplicação $exp : \mathcal{U} \to M$ dada por*

$$exp(q,v) = \gamma(1,q,v) = \gamma(|v|,q,\frac{v}{|v|}), \quad (q,v) \in \mathcal{U}$$

é chamada a aplicação exponencial em $\mathcal{U}$.

Definição 2.25. *Uma variedade Riemanniana M é completa se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial, exp_p, está definida para todo $v \in T_pM$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

APLICAÇÃO DE RECOBRIMENTO

Definição 2.26. *Seja M uma variedade Riemaniana. Diz-se que $\pi : \widetilde{M} \to M$ é uma aplicação de recobrimento se:*
(i) $\widetilde{M}$ é uma variedade riemanniana;

(ii) π é contínua e $\pi(\widetilde{M}) = M$;
(iii) $\forall p \in M$ existe uma vizinhança U tal que $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} V_\alpha$, onde os V_α são abertos dois a dois disjuntos tais que $\pi|_{V_\alpha}$ é um homeomorfismo de V_α sobre U.

O par $(\widetilde{M}, \pi)$ é chamado recobrimento de M. Para cada $p \in M$, $\pi^{-1}(p)$ chama-se fibra sobre p. Sabe-se que se $(\widetilde{M}, \pi)$ é um recobrimento de M e M é conexo, então todas as fibras de $p \in M$ possui o mesmo número cardinal, chamado de número de folhas do recobrimento.

Observe que para uma variedade Riemanniana de dimensão 2, ou seja, uma superfície Riemanniana, podemos tomar π diferenciável.

Definição 2.27. *Um recobrimento $\pi : \widetilde{M} \to M$ com $\widetilde{M}$ simplesmente conexo, chama-se recobrimento universal de M.*

Uma variedade diferenciável M diz-se simplesmente conexa se toda curva fechada de M pode ser continuamente deformada em um ponto.

Se $\pi : \widetilde{M} \to M$ é uma aplicação de recobrimento, ela induz de maneira natural uma métrica em $\widetilde{M}$ dada por

$$\langle \widetilde{u}, \widetilde{v} \rangle_{\widetilde{p}} = \left\langle d\pi_{\widetilde{p}}(\widetilde{u}), d\pi_{\widetilde{p}}(\widetilde{v}) \right\rangle_p ,$$

onde $d\pi_{\widetilde{p}} : T_{\widetilde{p}}\widetilde{M} \to T_pM$ e $\langle \ , \ \rangle_p$ é a métrica em M.

Proposição 2.28. *Sejam M e $\widetilde{M}$ superfícies Riemannianas e $\pi : M \to \widetilde{M}$ a aplicação de recobrimento. Se M é completa então $\widetilde{M}$ é completa.*

Demonstração: Seja $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$ e $\widetilde{X}$ um vetor unitário qualquer em $\widetilde{x}$. Faça $X = \pi(\widetilde{X})$. Como M é cpmpleta, a geodésica $exp\ sX$ é definida $\forall s \in \mathbb{R}$. Então existe uma única curva $\widetilde{x_s}$ definida $\forall s \in \mathbb{R}$ em $\widetilde{M}$ tal que $\widetilde{x_0} = \widetilde{x}$ e $\pi(\widetilde{x_s}) = exp\ sX$, e é claro que $\widetilde{x_s} = exp\ s\widetilde{X}$.■

A curva $\widetilde{x_s}$ da demonstração acima é garantida pela propriedade de levantamento de curvas em espaços de recobrimento: se x_t é uma curva, onde $0 \leq t \leq a$ em M, tomando um ponto $\widetilde{x_0}$ em $\widetilde{M}$ tal que $\pi(\widetilde{x_0}) = x_0$, então existe uma única curva $\widetilde{x_t}$, $0 \leq t \leq a$

em $\widetilde{M}$ tal que $\pi(\widetilde{x_t}) = x_t$, $\forall 0 \leq t \leq a$.

Lema 2.29. *Seja M^2 uma superfície Riemanniana completa com respeito a métrica ds^2. Se existir uma métrica plana $\widetilde{ds^2}$ tal que $ds^2 = \lambda \widetilde{ds^2}$, com $\lambda \geq 1$, então o recobrimento universal da superfície M^2 é conformente equivalente ao plano.*

Demonstração: Seja $\widetilde{M}$ o recobrimento universal de M^2. Como M^2 é completa com respeito à métrica ds^2, pela proposição 2.28 temos que $\widetilde{M}$ é completa com respeito a esta métrica.

Observe que toda sequência de Cauchy com a métrica $\widetilde{ds^2}$ é também uma sequência de Cauchy com a métrica ds^2, pois $\widetilde{ds^2} \geq ds^2$ e como M^2 é completa com respeito à métrica ds^2, e do fato que as topologias determinadas por estas métricas coincidem, tem-se que a sequência de Cauchy converge com relação à métrica $\widetilde{ds^2}$. Logo M^2 é um espaço completo também com relação à métrica $\widetilde{ds^2}$.

Seja $\pi : \widetilde{M} \to M^2$ a aplicação de recobrimento. A aplicação π induz de modo natural a métrica $\widetilde{ds^2}$ sobre $\widetilde{M}$. Sendo M^2 completa com respeito à métrica $\widetilde{ds^2}$, pela proposição 2.28 $\widetilde{M}$ também é completa com respeito à métrica $\widetilde{ds^2}$.

Assim, sendo $\widetilde{M}$ simplesmente conexo e completo com respeito à métrica $\widetilde{ds^2}$ tem-se, pelo teorema de Cartan ([4] pag. 19), que $\widetilde{M}$ pode ser aplicado isométricamente sobre $\mathbb{R}^2$ com respeito à métrica $\widetilde{ds^2}$ e consequentemente esta aplicação é conforme com respeito a ds^2.■

LAPLACIANO E FUNÇÕES HARMÔNICAS

Sejam M uma variedade Riemanniana, $X \in \Gamma(TM)$ e $f \in \mathcal{D}(M)$. Define-se divergência de X como sendo a função $div\ X : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$div\ X(p) = tr\ Y(p)$$

onde Y é uma aplicação linear de T_pM em $\Gamma(TM)$ dada por $Y(p) = \nabla_Y X(p)$.

O campo vetorial em M $grad\ f$ dado por $\langle grad\ f(p), v\rangle = df_p(v)$, $p \in M, v \in T_pM$, denomina-se gradiente de f.

Definição 2.30. *O operador $\Delta : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ dado por $\Delta f = div\ grad\ f$, denomina-se operador Laplaciano.*

Seja $f \in \mathcal{D}(M)$. Se $\Delta f \equiv 0$, f diz-se harmônica. Se $\Delta f \geq 0$, f diz-se subharmônica; se $\Delta f \leq 0$, f diz-se superharmônica.

Uma superfície M é dita parabólica se não existe função subharmônica não constante negativa sobre M. Assim, se M é parabólica, toda função subharmônica limitada superiormente em M, deve ser constante.

Proposição 2.31. *Se o recobrimento universal $\widetilde{M}$ de M^2 é conformente equivalente ao plano, então M^2 é parabólica.*

Dmonstração: Suponha que M^2 não seja parabólica. Então, existe função subharmônica não constante negativa em M^2. A existência desta função implica a existência de uma função subharmônica não constante negativa em $\widetilde{M}$. Logo $\widetilde{M}$ não é parabólica. Isto contraria a hipótese da proposição, pois sendo $\widetilde{M}$ conformente equivalente ao plano $\widetilde{M}$ é parabólica. Portanto M^2 é parabólica.$\blacksquare$

Seja U um aberto simplesmente conexo do $\mathbb{R}^2$ e seja $x : U \to M$ um sistema de coordenadas conformes que existe em uma superfície. Identifique $\mathbb{R}^2$ com o plano complexo $\mathbb{C}$ e faça $z = u^1 + iu^2$, onde $(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$ e $z \in \mathbb{C}$.

Neste sistema de coordenadas utilize os operadores

$$2\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial u^1} - i\frac{\partial}{\partial u^2}$$
$$2\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial u^1} + i\frac{\partial}{\partial u^2}$$

O Teorema Egregium de Gauss permite calcular a curvatura Gaussiana K da superfície M em função de E, F e G e suas derivadas parciais, a saber

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right\}.$$

Em coordenadas conformes verifica-se que a curvatura Gaussiana é dada por

$$K = -\frac{1}{2}E^{-1}\Delta log\, E.$$

3 Imersões Isométricas

Definição 3.1. *Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão. A métrica Riemanniana de $\overline{M}^{n+k}$ induz naturalmente uma métrica em M^n da seguinte maneira:*

$$\text{se } u, v \in T_pM^n, \text{ define-se } \langle u, v\rangle = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle.$$

Então f denomina-se uma imersão isométrica de M^n em $\overline{M}^{n+k}$.

De agora em diante, identifique, localmente, M^n com $f(M^n) \subset \overline{M}^{n+k}$, T_pM^n com $df_p(T_pM^n) \subset T_p\overline{M}^{n+k}$ e denote uma imersaõ de M^n em $\overline{M}^{n+k}$ por $M^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+k}$.

Para cada $p \in M^n$, a métrica em $T_p\overline{M}^{n+k}$ o decompõe na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus N_pM,$$

onde N_pM é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Assim, se $v \in T_pM$ pode-se escrever

$$v = [v]^T + [v]^N, \ [v]^T \in T_pM, \ [v]^N \in N_pM.$$

Tal decomposição é diferenciável no sentido de que as aplicações de $T\overline{M}$ em $T\overline{M}$ dadas por

$$(p, v) \to (p, [v]^T) \text{ e } (p, v) \to (p, [v]^N)$$

são diferenciáveis. Isto significa que, localmente, a parte do fibrado tangente $T\overline{M}$ que se projeta sobre M^n se decompõe em um fibrado tangente TM e um fibrado normal NM.

Denote por $[\ \ ]^T$ a projeção em $T\overline{M}$ sobre TM e por $[\ \ ]^N$ a projeção sobre NM.

A conexão de $\overline{M}$ será denotada por $\overline{\nabla}$ e está relacionada a conexão ∇ de M da seguinte maneira

$$[\overline{\nabla}_X Y]^T = \nabla_X Y$$

onde $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Definição 3.2. *Sejam $X, Y \in \Gamma(TM)$. A aplicação $B : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(NM)$, onde $\Gamma(NM)$ é conjunto dos campos diferenciáveis normais a M, dada por*

$$B(X, Y) = [\overline{\nabla}_X Y]^N$$

é chamada a segunda forma fundamental da imersão.

Observe que

$$\overline{\nabla}_X Y = [\overline{\nabla}_X Y]^T + [\overline{\nabla}_X Y]^N = \nabla_X Y + B(X, Y)$$

logo podemos escrever

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y. \tag{3.1}$$

Proposição 3.3. *A segunda forma fundamental é uma aplicação bilinear e simétrica.*

Demonstração: Usando (3.1) e as propriedades de conexão, tem-se $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ *e* $f \in \mathcal{D}(M)$

$$\begin{aligned} B(fX + Y, Z) &= \overline{\nabla}_{fX+Y} Z - \nabla_{fX+Y} Z \\ &= f\overline{\nabla}_X Z + \overline{\nabla}_Y Z - f\nabla_X Z - \nabla_Y Z \\ &= f\overline{\nabla}_X Z - f\nabla_X Z + \overline{\nabla}_Y Z - \nabla_Y Z \\ &= fB(X, Z) + B(Y, Z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \\ &= [X, Y] + \overline{\nabla}_Y X - [X, Y] - \nabla_Y X \\ &= \overline{\nabla}_Y X - \nabla_Y X \\ &= B(Y, X) \end{aligned}$$

o que demonstra a proposição.■

Associada à segunda forma fundamental, tem-se a aplicação linear auto-adjunta

$A : \Gamma(NM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ definida por

$$\langle A(N,X), Y\rangle = -\langle B(X,Y), N\rangle .$$

A seguinte proposição exprime a aplicação definida acima em termos da derivada covariante.

Proposição 3.4. *Seja $X \in \Gamma(TM)$ e $N \in \Gamma(NM)$. Então*

$$A(N,X) = [\overline{\nabla}_X N]^T.$$

Demonstração: Seja $Y \in \Gamma(TM)$ qualquer. Observe $\langle N, Y\rangle = 0$, logo $\left\langle \overline{\nabla}_X Y, N\right\rangle = -\left\langle Y, \overline{\nabla}_X N\right\rangle$. Então

$$\begin{aligned}
\langle A(N,X), Y\rangle &= -\langle B(X,Y), N\rangle \\
&= -\left\langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N\right\rangle \\
&= -\left\langle \overline{\nabla}_X Y, N\right\rangle \\
&= \left\langle Y, \overline{\nabla}_X N\right\rangle \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_X N, Y\right\rangle \\
&= \left\langle [\overline{\nabla}_X N]^T + [\overline{\nabla}_X N]^N, Y\right\rangle \\
&= \left\langle [\overline{\nabla}_X N]^T, Y\right\rangle
\end{aligned}$$

e portanto

$$A(N,X) = [\overline{\nabla}_X N]^T. \blacksquare$$

A componente normal de $\overline{\nabla}_X N$ será chamada conexão normal D da imersão. Explicitamente

$$[\overline{\nabla}_X N]^N = D_X N,$$

e portanto

$$A(N,X) = \overline{\nabla}_X N - D_X N. \tag{3.2}$$

Usando (3.2) e a proposição 3.4, verifica-se facilmente que D tem as propriedades usuais de conexão Riemanniana.

De maneira análoga ao caso do fibrado tangente, introduz-se a partir de D uma noção de curvatura no fibrado normal que é chamada *curvatura normal* $\widetilde{R}$ da imersão e definida por:

$$\widetilde{R}(X,Y)N = D_X D_Y N - D_Y D_X N - D_{[X,Y]}N.$$

As curvaturas estão relacionadas com a segunda forma fundamental da imersão por meio das expressões que generalizam as clássicas equações de Gauss e Codazzi-Minard da teoria das superfícies. Tais expressões serão estabelecidas a partir de agora.

Definição 3.5. *Sejam $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ e $N \in \Gamma(NM)$. A derivada covariante $\overline{\nabla}_X B$ da segunda forma fundamental é dada por*

$$(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z) = D_X B(Y,Z) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z).$$

Equivalentemente defini-se

$$(\overline{\nabla}_X A)(N,Y) = \nabla_X A(N,Y) - A(D_X N, Y) - A(N, \nabla_X Y).$$

Proposição 3.6. *As seguintes equações se verificam:*

$$\begin{array}{ll}
(a) & [\overline{R}(X,Y)Z]^T = R(X,Y)Z + A(B(Y,Z),X) - A(B(X,Z)Y) \\
(b) & [\overline{R}(X,Y)N]^N = \widetilde{R}(X,Y)N + B(A(N,Y),X) - B(A(N,X)Y) \\
(c) & [\overline{R}(X,Y)Z]^N = (\overline{\nabla}_X B)(Y,Z) - (\overline{\nabla}_Y B)(X,Z) \\
(d) & [\overline{R}(X,Y)N]^T = (\overline{\nabla}_X A)(N,Y) - (\overline{\nabla}_Y A)(N,X)
\end{array}$$

onde $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ e $N \in \Gamma(NM)$.

Demonstrção: Usando a definição de curvatura, da segunda forma fundamental e o fato da conexão ser simétrica, obtém-se

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y)Z &= \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z \\
&= \overline{\nabla}_X [\nabla_Y Z + B(Y,Z)] - \overline{\nabla}_Y [\nabla_X Z + B(X,Z)] - \nabla_{[X,Y]} Z - B([X,Y],Z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y)Z &= \overline{\nabla}_X\nabla_Y Z + \overline{\nabla}_X B(Y,Z) - \overline{\nabla}_Y\nabla_X Z - \overline{\nabla}_Y B(X,Z) - \nabla_{[X,Y]}Z - B([X,Y],Z)\\
&= [\overline{\nabla}_X\nabla_Y Z]^T + [\overline{\nabla}_X\nabla_Y Z]^N + [\overline{\nabla}_X B(Y,Z)]^T + [\overline{\nabla}_X B(Y,Z)]^N - [\overline{\nabla}_Y\nabla_X Z]^T\\
&\quad -[\overline{\nabla}_Y\nabla_X Z]^N - [\overline{\nabla}_Y B(X,Z)]^T - [\overline{\nabla}_Y B(X,Z)]^N - \nabla_{[X,Y]}Z - B(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z)\\
&= \nabla_X\nabla_Y Z + B(X,\nabla_Y Z) + A(B(Y,Z),X) + D_X B(Y,Z) - \nabla_Y\nabla_X Z - B(Y,\nabla_X Z)\\
&\quad -A(B(X,Z),Y) - D_Y B(X,Z) - \nabla_{[X,Y]}Z - B(\nabla_X Y, Z) + B(\nabla_Y X, Z)\\
&= R(X,Y)Z + B(X,\nabla_Y Z) + A(B(Y,Z),X) + D_X B(Y,Z) - B(Y,\nabla_X Z)\\
&\quad -A(B(X,Z),Y) - D_Y B(X,Z) - B(\nabla_X Y, Z) + B(\nabla_Y X, Z).
\end{aligned}$$

Para todo $T \in \Gamma(TM)$ tem-se

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{R}(X,Y)Z, T\right\rangle &= \langle R(X,Y)Z,T\rangle + \langle B(X,\nabla_Y Z),T\rangle + \langle A(B(Y,Z),X),T\rangle + \langle D_X B(Y,Z),T\rangle\\
&\quad - \langle B(Y,\nabla_X Z),T\rangle - \langle A(B(X,Z),Y),T\rangle - \langle D_Y B(X,Z),T\rangle - \langle B(\nabla_X Y,Z),T\rangle\\
&\quad + \langle B(\nabla_Y X,Z),T\rangle\\
&= \langle R(X,Y)Z,T\rangle + \langle A(B(Y,Z),X),T\rangle - \langle A(B(X,Z),Y),T\rangle,
\end{aligned}$$

ou ainda

$$\left\langle [\overline{R}(X,Y)Z]^T, T\right\rangle = \langle R(X,Y)Z + A(B(Y,Z),X) - A(B(X,Z),Y), T\rangle$$

de onde obtém-se a expressão (a).

E para todo $N \in \Gamma(NM)$ tem-se

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{R}(X,Y)Z, N\right\rangle &= \langle B(X,\nabla_Y Z),N\rangle + \langle D_X B(Y,Z),N\rangle - \langle B(Y,\nabla_X Z),N\rangle - \langle D_Y B(X,Z),N\rangle\\
&\quad - \langle B(\nabla_X Y,Z),N\rangle + \langle B(\nabla_Y X,Z),N\rangle\\
&= \langle D_X B(Y,Z) - B(\nabla_X Y,Z) - B(Y,\nabla_X Z),N\rangle\\
&\quad - \langle D_Y B(X,Z) + B(\nabla_Y X,Z) + B(X,\nabla_Y Z),N\rangle
\end{aligned}$$

Usando a definição 3.5, conclui-se que

$$\left\langle [\overline{R}(X,Y)Z]^N, N\right\rangle = \left\langle (\overline{\nabla}_X B)(Y,Z) - (\overline{\nabla}_Y B)(X,Z), N\right\rangle$$

de onde obtém-se a expressão (c).

De maneira análoga, usando a expressão de $\overline{R}(X,Y)N$, obtém-se as expressões (b) e (d).■

Proposição 3.7. *Seja* $M^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+k}$ *uma imersão isométrica. As seguintes afirmações são equivalentes:Para* $X,Y \in \Gamma(TM)$, *fixos*
(a) $\overline{R}(X,Y)$ *deixa* TM *invariante;*
(b) $\forall Z \in \Gamma(TM)$, $(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z) = (\overline{\nabla}_Y B)(X,Z)$;
(c) $\forall N \in \Gamma(NM)$, $(\overline{\nabla}_X A)(N,Y) = (\overline{\nabla}_Y A)(N,X)$;
(d) $\overline{R}(X,Y)$ *deixa* NM *invariante.*

Demonstração:

(a)$\Longrightarrow$ (b)

Se $\overline{R}(X,Y)$ deixa TM invariante, então $\forall Z \in \Gamma(TM)$, tem-se $\overline{R}(X,Y)Z \in TM$. Logo $[\overline{R}(X,Y)Z]^N = 0$ e pela proposição 3.6(c) tem-se $(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z) = (\overline{\nabla}_Y B)(X,Z)$.

(b)$\Longrightarrow$ (c)

Para mostrar essa implicação, observe que

$$\begin{aligned}
\left\langle (\overline{\nabla}_X B)(Y,Z), N \right\rangle &= \langle D_X B(Y,Z), N\rangle - \langle B(\nabla_X Y, Z), N\rangle - \langle B(Y, \nabla_X Z), N\rangle \\
&= -\langle B(Y,Z), D_X N\rangle + \langle A(N, \nabla_X Y), Z\rangle + \langle A(N,Y), \nabla_X Z\rangle \\
&= -\langle A(D_X N, Y), Z\rangle + \langle A(N, \nabla_X Y), Z\rangle + \langle A(N,Y), \nabla_X Z\rangle \\
&= -\left\langle (\overline{\nabla}_X A)(N,Y), Z \right\rangle.
\end{aligned}$$

Logo se $\forall Z \in \Gamma(TM)$, $(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z) = (\overline{\nabla}_Y B)(X,Z)$ tem-se que $\forall N \in \Gamma(NM)$, $\left\langle (\overline{\nabla}_X B)(Y,Z), N \right\rangle = \left\langle (\overline{\nabla}_Y B)(X,Z), N \right\rangle$. Pela observação acima, $\left\langle (\overline{\nabla}_X A)(N,Y), Z \right\rangle = \left\langle (\overline{\nabla}_Y A)(N,X), z \right\rangle$, $\forall Z \in \Gamma(TM)$ e portanto, $\forall N \in \Gamma(NM)$, $(\overline{\nabla}_X A)(N,Y) = (\overline{\nabla}_Y A)(N,X)$.

(c)$\Longrightarrow$ (d)

Sendo $(\overline{\nabla}_X A)(N,Y) = (\overline{\nabla}_Y A)(N,X)$, $\forall N \in \Gamma(NM)$, pela proposição 3.6(d) tem-se $[\overline{R}(X,Y)N]^T = 0$. Isto implica que $\overline{R}(X,Y)N \in NM$, $\forall N \in \Gamma(NM)$ ou seja $\overline{R}(X,Y)$ deixa NM invariante.

(d) $\Longrightarrow$ (a)

Como $\overline{R}(X,Y)$ deixa NM invariante então $[\overline{R}(X,Y)N]^T = 0$, $\forall N \in \Gamma(NM)$. Logo

$\forall Z \in \Gamma(TM)$ tem-se $\left\langle [\overline{R}(X,Y)N]^T, Z \right\rangle = 0$, ou ainda, $\left\langle \overline{R}(X,Y)N, Z \right\rangle = 0$. Sendo $-\overline{R}(X,Y)$ a adjunta de $\overline{R}(X,Y)$, tem-se $\left\langle N, -\overline{R}(X,Y)Z \right\rangle = \left\langle \overline{R}(X,Y)N, Z \right\rangle = 0$, $\forall N \in \Gamma(NM)$ e portanto $[\overline{R}(X,Y)Z]^N = 0$, ou seja, $\overline{R}(X,Y)$ deixa TM invariante.■

Observação 3.8. *Se $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante c, então pelo lema 2.22 tem-se $\overline{R}(X,Y)Z = c[\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y]$, e neste caso a primeira e portanto todas as condições da proposição acima são satisfeitas. Além disso, $\forall N \in \Gamma(NM)$ tem-se $\overline{R}(X,Y)N = 0$.*

Seja $F = \{e_1, ..., e_{n+k}\}$ um referencial ortonormal de $T\overline{M}$ definido em uma vizinhança de $p \in M$. F diz-se adaptado a M se $\{e_1, ..., e_n\}$ é referencial de TM. Dadas as coordenadas $(u^1, ..., u^n)$ sobre M com campos coordenados $U_i = \dfrac{\partial}{\partial u^i}$, considere o referencial coordenado adaptado de $T\overline{M}$ dado por $\{U_1, ..., U_n\} \bigcup \{e_\alpha\}$, $n+1 \leq \alpha \leq n+k$, onde $\{e_\alpha\}$ é um referencial ortonormalde NM.

Definição 3.9. *Para um referencial adaptado de $T\overline{M}$, define-se*

$$\lambda_{ij}^{\alpha} = \langle B(e_i, e_j), e_\alpha \rangle = -\langle A(e_\alpha, e_i), e_j \rangle. \tag{3.3}$$

Simirlamente, para um referencial coordenado adaptado, define-se

$$L_{ij}^{\alpha} = \langle B(U_i, U_j), e_\alpha \rangle = -\langle A(e_\alpha, e_i), e_j \rangle. \tag{3.4}$$

As matrizes (λ_{ij}^{α}) e (L_{ij}^{α}) são a segunda forma fundamental na direção de e_α, para α fixo.

Denote por $(\ )_i$ a derivada com respeito a variavel u^i, ou seja, $(\ )_i = \dfrac{\partial}{\partial u^i}$.

Proposição 3.10. *Seja $M^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+k}(c)$ uma imersão isométrica, onde $\overline{M}^{2+k}(c)$ denota uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante c. Se $\{U_1, ..., U_n\} \bigcup \{e_\alpha\}$ é um referencial coordenado adaptado tal que um dos e_α, por exemplo e_{α_0}, é paralelo então*

$$(L_{ik}^{\alpha_0})_j - (L_{jk}^{\alpha_0})_i = \sum_{r=1}^{n} (\Gamma_{jk}^{r} L_{ri}^{\alpha_0} - \Gamma_{ik}^{r} L_{rj}^{\alpha_0}) \tag{3.5}$$

e

$$\sum_{r,l} g^{rl} (L_{jl}^{\alpha_0} L_{ir}^{\beta} - L_{ir}^{\alpha_0} L_{jl}^{\beta}) = 0 \tag{3.6}$$

para todo $i, j, k = 1, ..., n$, $\beta = n+1, ..., n+k$, onde Γ_{ij}^{k} são os símbolos de Christoffel, e $\nabla_{U_i} U_j = \sum \Gamma_{ij}^{k} U_k$.

Demonstração: Derivando $L^{\alpha_0}_{ik}$ e $L^{\alpha_0}_{jk}$ com respeito a u^j e u^i respectivamente, obtém-se

$$\begin{aligned}
(L^{\alpha_0}_{ik})_j &= \langle \overline{\nabla}_{U_j} B(U_i, U_k), e_{\alpha_0}\rangle + \langle B(U_i, U_k), D_{U_j} e_{\alpha_0}\rangle \\
&= \langle D_{U_j} B(U_i, U_k), e_{\alpha_0}\rangle \\
&= \langle (\overline{\nabla}_{U_j} B)(U_i, U_k) + B(\nabla_{U_j} U_i, U_k) + B(U_i, \nabla_{U_j} U_k), e_{\alpha_0}\rangle \\
&= \langle (\overline{\nabla}_{U_j} B)(U_i, U_k) + \sum \Gamma^r_{ij} B(U_r, U_k) + \sum \Gamma^r_{jk} B(U_i, U_r), e_{\alpha_0}\rangle \\
&= \langle (\overline{\nabla}_{U_j} B)(U_i, U_k), e_{\alpha_0}\rangle + \sum \Gamma^r_{ij} L^{\alpha_0}_{rk} + \sum \Gamma^r_{jk} L^{\alpha_0}_{ir}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(L^{\alpha_0}_{jk})_i &= \langle \overline{\nabla}_{U_i} B(U_j, U_k), e_{\alpha_0}\rangle + \langle B(U_j, U_k), D_{U_i} e_{\alpha_0}\rangle \\
&= \langle D_{U_i} B(U_j, U_k), e_{\alpha_0}\rangle \\
&= \langle (\overline{\nabla}_{U_i} B)(U_j, U_k) + B(\nabla_{U_i} U_j, U_k) + B(U_j, \nabla_{U_i} U_k), e_{\alpha_0}\rangle \\
&= \langle (\overline{\nabla}_{U_i} B)(U_j, U_k) + \sum \Gamma^r_{ij} B(U_r, U_k) + \sum \Gamma^r_{ik} B(U_j, U_r), e_{\alpha_0}\rangle \\
&= \langle (\overline{\nabla}_{U_i} B)(U_j, U_k), e_{\alpha_0}\rangle + \sum \Gamma^r_{ij} L^{\alpha_0}_{rk} + \sum \Gamma^r_{ik} L^{\alpha_0}_{ir}.
\end{aligned}$$

Subtraindo ambas as equações acima e usando a proposição 3.6(c) tem-se

$$(L^{\alpha_0}_{ik})_j - (L^{\alpha_0}_{jk})_j = \sum \Gamma^r_{jk} L^{\alpha_0}_{ir} - \sum \Gamma^r_{ik} L^{\alpha_0}_{ir} = \sum \left(\Gamma^r_{jk} L^{\alpha_0}_{ir} - \Gamma^r_{ik} L^{\alpha_0}_{ir}\right)$$

o que dá a equação (3.5).

Para obter a equação (3.6) observe que, sendo e_{α_0} paralelo conclui-se que $\widetilde{R}(U_i, U_j)e_{\alpha_0} = 0$, e como $\overline{M}$ tem curvatura constante, $\overline{R}(U_i, U_j)e_{\alpha_0} = 0$. Logo, pela proposição (3.6)(b) tem-se

$$\begin{aligned}
B(A(e_{\alpha_0}, U_j), U_i) &= B(A(e_{\alpha_0}, U_i), U_j) \\
B(\sum_r a_{jr} U_r, U_i) &= B(\sum_l a_{il} U_l, U_j) \\
B(-\sum_{r,l} L^{\alpha_0}_{jl} g^{lr} U_r, U_i) &= B(-\sum_{l,r} L^{\alpha_0}_{ir} g^{rl} U_l, U_j) \\
\sum_{r,l} L^{\alpha_0}_{jl} g^{lr} B(U_r, U_i) &= \sum_{l,r} L^{\alpha_0}_{ir} g^{rl} B(U_l, U_j) \\
\sum_{r,l} L^{\alpha_0}_{jl} g^{lr} L^{\beta}_{ri} e_\beta &= \sum_{l,r} L^{\alpha_0}_{ir} g^{rl} L^{\beta}_{lj} e_\beta
\end{aligned}$$

e portanto

$$\sum_{r,l} g^{lr}(L^{\alpha_0}_{jl}L^{\beta}_{ri} - L^{\alpha_0}_{ir}L^{\beta}_{lj}) = 0. \blacksquare$$

Definição 3.11. *Seja $M^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica. A curvatura média da imersão é dada por:*

$$H = \frac{1}{n}TrB.$$

Em termos de referencial coordenado adaptado,

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i,\alpha}\lambda^{\alpha}_{ii}e_{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i,j,\alpha}g^{ij}L^{\alpha}_{ij}e_{\alpha}, \qquad n+1 \leq \alpha \leq n+k.$$

Definição 3.12. *Uma imersão $M^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+k}$ diz-se mínima se a curvatura média é identicamente nula, ou seja, $H \equiv 0$.*

Definição 3.13. *Uma imersão $M^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+k}$ tem curvatura média constante se H é paralelo, ou seja, $D_X H = 0$, para todo $X \in \Gamma(TM)$.*

Visto que D é Riemanniana tem-se $X|H|^2 = 2\langle D_X H, H\rangle$. Esta igualdade prova as seguintes observações:

Observação 3.14. *H é paralelo $\Longrightarrow$ $|H|$ é constante.*

H paralelo $\Rightarrow D_X H = 0 \Rightarrow X|H|^2 = 2\langle D_X H, H\rangle = 0 \Rightarrow |H|$ constante.

Observação 3.15. *$H \neq 0$, H é paralelo $\Longleftrightarrow$ $|H|$ é constante e $H/|H|$ é paralelo.*

H é paralelo $\Leftrightarrow \dfrac{1}{|H|}D_X H = 0 \Leftrightarrow H/|H|$ é paralelo.

Observação 3.16. *Se a codimensão é $k = 1$, H é paralelo $\Longleftrightarrow$ $|H|$ é constante.*

Se $|H|$ é constante $\Rightarrow \langle D_X H, H\rangle = 0 \Rightarrow D_X H = 0$ ou $D_X H$ é normal a H. Como $k = 1$, tem-se $D_X H = 0$.

4 Superfícies com curvatura média constante

Considere uma superfície M^2 isometricamente imersa em $\overline{M}^{2+k}(c)$, uma variedade Riemanniana de dimensão $2+k$ com curvatura seccional constante c. Sem perda de generalidade, assuma que a imersão é dada localmente em coordenadas conformes (u^1, u^2), tal que $ds^2 = E[(du^1)^2 + (du^2)^2]$, ou seja, $\langle U_i, U_j \rangle = E\delta_{ij}$. Seja $z = u^1 + iu^2$. Ao referencial coordenado $\{U_1, U_2\}$ existe um referencial adaptado naturalmente associado $\{e_i = U_i/\sqrt{E}\}$. Para uma secção normal unitária $e_\alpha \in \Gamma(NM)$ defina a função

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{1}{2}\left(L_{11}^\alpha - L_{22}^\alpha\right) - iL_{12}^\alpha \tag{4.1}$$

ou equivalentemente

$$\varphi_\alpha = E\left[\frac{1}{2}\left(\lambda_{11}^\alpha - \lambda_{22}^\alpha\right) - i\lambda_{12}^\alpha\right]$$

pois, $L_{ij}^\alpha = \left\langle B\left(U_i, U_j\right), e_\alpha\right\rangle = \left\langle B\left(e_i\sqrt{E}, e_j\sqrt{E}\right), e_\alpha\right\rangle = E\left\langle B\left(e_i, e_j\right), e_\alpha\right\rangle = E\lambda_{ij}^\alpha$.

Lema 4.1. *Seja $M^2 \hookrightarrow \overline{M}^{2+k}(c)$ uma imersão isométrica dada localmente em coordenadas conformes (u^1, u^2) com parâmetro conforme E. Seja e_α uma secção unitária paralela de NM.*

(a) Se $E^{-1}(L_{11}^\alpha + L_{22}^\alpha) = (\lambda_{11}^\alpha + \lambda_{22}^\alpha)$ é constante, então φ_α é uma função analítica de z. Em particular,

i) se $H \neq 0$ é paralelo e $e_3 = \dfrac{H}{|H|}$, então φ_3 é analítica;

ii) se e_α satisfaz $\langle e_\alpha, H\rangle = 0$, então φ_α é analítica.

(b) Se $e_\beta \in \Gamma(NM)$ é outra secção unitária e $\langle e_\beta, e_\alpha\rangle = 0$, então $\varphi_\alpha \equiv 0$ ou $\varphi_\beta \equiv f\varphi_\alpha$ onde f é uma função diferenciável de z com possíveis pólos isolados.

(c) Se e_α e e_β são secções unitárias de NM ambas paralelas e satisfazendo as hipóteses de (a), então $\varphi_\beta = k_\alpha\varphi_\alpha$, onde k_α é uma constante real.

Demonstração:

(a) Em coordenadas conformes os símbolos de Christoffel são dados por

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}\frac{E_1}{E}$$
$$\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}\frac{E_2}{E}$$

Fazendo $i = k = 1$, $j = 2$ e $i = k = 2$, $j = 1$ na equação (3.5) obtém-se respectivamente

$$\begin{aligned}(L_{11}^\alpha)_2 - (L_{12}^\alpha)_1 &= \sum_{r=1}^{2}(\Gamma_{12}^r L_{r1}^\alpha - \Gamma_{11}^r L_{r2}^\alpha)\\ &= \Gamma_{12}^1 L_{11}^\alpha - \Gamma_{11}^1 L_{12}^\alpha + \Gamma_{12}^2 L_{21}^\alpha - \Gamma_{11}^2 L_{22}^\alpha\\ &= \frac{1}{2}\frac{E_2(L_{11}^\alpha + L_{22}^\alpha)}{E}\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}(L_{22}^\alpha)_1 - (L_{12}^\alpha)_2 &= \sum_{r=1}^{2}(\Gamma_{12}^r L_{r2}^\alpha - \Gamma_{22}^r L_{r1}^\alpha)\\ &= \Gamma_{12}^1 L_{12}^\alpha - \Gamma_{22}^1 L_{11}^\alpha + \Gamma_{12}^2 L_{22}^\alpha - \Gamma_{22}^2 L_{21}^\alpha\\ &= \frac{1}{2}\frac{E_1(L_{11}^\alpha + L_{22}^\alpha)}{E}\end{aligned} \tag{4.3}$$

Como $\dfrac{L_{11}^\alpha + L_{22}^\alpha}{E}$ é constante tem-se

$$0 = \left(\frac{L_{11}^\alpha + L_{22}^\alpha}{E}\right)_1 = \frac{E(L_{11}^\alpha + L_{22}^\alpha)_1 - E_1(L_{11}^\alpha + L_{22}^\alpha)}{E^2}$$
$$(L_{11}^\alpha + L_{22}^\alpha)_1 = \frac{E_1(L_{11}^\alpha + L_{22}^\alpha)}{E} \tag{4.4}$$

$$0 = \left(\frac{L_{11}^\alpha + L_{22}^\alpha}{E}\right)_2 = \frac{E(L_{11}^\alpha + L_{22}^\alpha)_2 - E_2(L_{11}^\alpha + L_{22}^\alpha)}{E^2}$$
$$(L_{11}^\alpha + L_{22}^\alpha)_2 = \frac{E_2(L_{11}^\alpha + L_{22}^\alpha)}{E} \tag{4.5}$$

Substituindo (4.5) em (4.2) e (4.4) em (4.3) tem-se

$$\begin{aligned}(L_{11}^\alpha)_2 - (L_{12}^\alpha)_1 = \frac{1}{2}(L_{11}^\alpha + L_{22}^\alpha)_2 &= \frac{(L_{11}^\alpha)_2}{2} + \frac{(L_{22}^\alpha)_2}{2}\\ \frac{1}{2}(L_{11}^\alpha - L_{22}^\alpha)_2 &= (L_{12}^\alpha)_1\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$
\begin{aligned}
(L_{22}^{\alpha})_1 - (L_{12}^{\alpha})_2 = \frac{1}{2}(L_{11}^{\alpha} + L_{22}^{\alpha})_1 &= \frac{(L_{11}^{\alpha})_2}{1} + \frac{(L_{22}^{\alpha})_2}{1} \\
\frac{1}{2}(L_{11}^{\alpha} - L_{22}^{\alpha})_1 &= -(L_{12}^{\alpha})_2
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

onde as equações (4.6) e (4.7) são as equações de Cauchy-Riemann e portanto φ_α é uma função analítica.

i) Como $H \neq 0$ é paralelo pela observação 3.14 tem-se $|H|$ constante. Além disso

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}E^{-1}(L_{11}^{3} + L_{22}^{3}) &= \frac{1}{2}(\lambda_{11}^{3} + \lambda_{22}^{3}) \\
&= \frac{1}{2}[\langle B(e_1, e_1), e_3\rangle + \langle B(e_2, e_2), e_3\rangle] \\
&= \frac{1}{2}\,\langle B(e_1, e_1) + B(e_2, e_2), e_3\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2}[B(e_1, e_1) + B(e_2, e_2)], e_3 \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2}Tr\;B, H/|H| \right\rangle \\
&= \frac{1}{|H|}\,\langle H, H\rangle \\
&= |H|.
\end{aligned}
$$

Logo $E^{-1}(L_{11}^{3} + L_{22}^{3}) = 2|H|$ é constante e potanto φ_3 é analítica.

ii)Observe que, sendo $H = trB/2$ e $\langle e_\alpha, H\rangle = 0$ tem-se

$$
\lambda_{11}^{\alpha} + \lambda_{22}^{\alpha} = tr(\lambda_{ij}^{\alpha}) = \langle trB, H\rangle = \langle 2H, e_\alpha\rangle = 2\langle H, e_\alpha\rangle = 0
$$

o que mostra que $\lambda_{11}^{\alpha} + \lambda_{22}^{\alpha}$ é constante, portanto por (a) φ_α é analítica.

b) Em coordenadas conformes $g^{ij} = \delta_{ij}/E$ e a eqação (3.6) se escreve

$$
\frac{1}{E}\sum L_{k1}^{\alpha}L_{k2}^{\beta} - L_{k2}^{\alpha}L_{k1}^{\beta} = 0 \tag{4.8}
$$

Se $\varphi_\alpha \neq 0$, então $\varphi_\beta/\varphi_\alpha = \varphi_\beta\overline{\varphi_\alpha}/|\varphi_\alpha|^2$.
Observe que

$$
\begin{aligned}
\varphi_\beta\overline{\varphi_\alpha} &= \left[\frac{1}{2}(L_{11}^{\beta} - L_{22}^{\beta}) - iL_{12}^{\beta}\right]\left[\frac{1}{2}(L_{11}^{\alpha} - L_{22}^{\alpha}) + iL_{12}^{\alpha}\right] \\
&= \left[\frac{1}{4}(L_{11}^{\beta} - L_{22}^{\beta})(L_{11}^{\alpha} - L_{22}^{\alpha}) + L_{12}^{\beta}L_{12}^{\alpha}\right] - i\frac{1}{2}\left[L_{12}^{\beta}(L_{11}^{\alpha} - L_{22}^{\alpha}) - L_{12}^{\alpha}(L_{11}^{\beta} - L_{22}^{\beta})\right]
\end{aligned}
$$

Logo por (4.8)

$$\begin{aligned}
Im(\varphi_\beta\overline{\varphi_\alpha}) &= \frac{1}{2}\left[L^\beta_{12}L^\alpha_{11} - L^\beta_{12}L^\alpha_{22} - L^\alpha_{12}L^\beta_{11} - L^\alpha_{12}L^\beta_{22}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[L^\alpha_{11}L^\beta_{12} - L^\alpha_{12}L^\beta_{11} + L^\alpha_{21}L^\beta_{22} - L^\alpha_{22}L^\beta_{12}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum L^\alpha_{k1}L^\beta_{k2} - L^\alpha_{k2}L^\beta_{k1} = 0
\end{aligned}$$

e portanto $f = \varphi_\beta\overline{\varphi_\alpha}/|\varphi_\alpha|^2$ é uma função real diferenciável.

c)Se $\varphi_\alpha \equiv \varphi_\beta \equiv 0$, não há o que provar. Sem perda de generalidade suponha $\varphi_\alpha \neq 0$. Então, pela demonstração acima, $\dfrac{\varphi_\alpha}{\varphi_\beta}$ é real, com pólos isolados, e meroforma visto que φ_α e φ_β são analíticas. Portanto $\dfrac{\varphi_\alpha}{\varphi_\beta}$ é uma função constante.■

O próximo teorema é uma generalização do teorema de Hopf em superfícies de curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$. Para demonstrar tal resultado usa-se o Lema (4.1). No entanto serão necessárias algumas propriedades sobre as funções φ_α. No que se segue, $H \neq 0$ e $e_{n+1} = H/|H|$.

Definição 4.2. *Uma imersão $M^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+k}$ é pseudo-umbílica em p se $\lambda^{n+1}_{ij} = \lambda\delta_{ij}$ em p. $M^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+k}$ é totalmente umbílica se $M^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+k}$ é pseudo-umbílica e $\lambda^\alpha_{ij} = 0,\ \alpha > n+1$.*

Observação 4.3. *(i) Um ponto onde φ_α é real, é um ponto onde (L^α_{ij}) e (λ^α_{ij}) são diagonalizáveis.*
(ii) Um zero de φ_α é um ponto onde os autovalores são iguais.
(iii) Se $e_3 = H/|H|$, então os zeros de φ_3 são precisamente os pontos pseudo-umbílicos da imersão.
(iv) Do lema acima, a parte (a)(i) implica que uma imersão de curvatura média constante ou é pseudo-umbílica em todos os seus pontos ou tem pontos pseudo-umbílicos isolados. A parte (b) implica que dos pontos não pseudo-umbílicos, um deles pode diagonalizar simultanemente a segunda forma fundamental em todas as direções de um referencial normal $\{e_3, ..., e_{2+k}\}$. A parte (c) diz que, de acordo com a suposição que e_α é paralelo, (λ^α_{ij}) é completamente determinada por (λ^3_{ij}).

Teorema 4.4. *(a)Uma superfície orientada fechada M^2 de gênero 0 imersa em $\overline{M}^{2+k}(c)$, $c \geq 0$, com curvatura média constante não nula é pseudo-umbílica e habita minimalmente em uma hiperesfera de raio $(|H|^2 + c)^{-1/2}$.*
(b)Se $k = 2$, então M^2 é uma pequena esfera S^2 de raio $(|H|^2 + c)^{-1/2}$.

Demonstrção:

(a) Em uma vizinhança de cada ponto $p \in M^2$ considere a imersão dada localmente em coordenadas conformes. Seja $e_3 = \dfrac{H}{|H|}$. Pelo lema 4.1 (a), φ_3 é analítica. Visto que φ_3 é uma transformação quadrática, a diferencial Φ_3, que em coordenadas locais é dada por $\varphi_3 dz^2$, está bem definida. Visto que M^2 é de gênero 0, $\Phi_3 \equiv 0$ (cap. VI de [9]). Portanto em coordenadas locais $\varphi_3 \equiv 0$. Pela observação anterior, a imersão é pseudo-umbílica em cada ponto. Isto mostra simplismente que M^2 se encontra em uma hiperesfera de raio $(|H|^2 + c)^{-1/2}$ e é mínima.

De fato, a imersão $M^2 \hookrightarrow \overline{M}^{n+2}(c)$, $c \geq 0$, com curvatura média constante não nula é pseudo-umbílica se, e somente se, M^n está em alguma hipersfera de $\overline{M}^{n+2}(c)$ e é mínima.

(b)Em uma vizinhança de cada ponto $p \in M^2$, seja e_4 a secção unitária diferenciável de NM^2 tal que $\langle e_3, e_4\rangle = 0$. Visto que $|e_3| = 1$, $D_x e_4 = \omega(X)e_3$ para alguma 1-forma ω, tem-se

$$\begin{aligned} 0 = X\langle e_3, e_4\rangle &= \langle D_X e_3, e_4\rangle + \langle e_3, D_X e_4\rangle \\ &= \langle e_3, D_X e_4\rangle \\ &= \langle e_3, \omega(X)e_3\rangle \\ &= \omega(X)\langle e_3, e_3\rangle \\ &= \omega(X). \end{aligned}$$

Logo $D_X e_4 = 0$, ou seja e_4 é paralelo. Pelo lema 4.1(a), φ_4 é analítica, pois

$$\langle e_4, H\rangle = |H|\langle e_4, H/|H|\rangle = |H|\langle e_4, e_3\rangle = 0.$$

Repetindo o argumento de (a), desta demonstração obtem-se $\varphi_4 = 0$. Visto que $\lambda^4_{11} + \lambda^4_{22} = 0$ (demonstração do lema 4.1(a)(ii)) deve-se ter $\lambda^4_{ij} = 0$, $1 \leq i, j \leq 2$. Portanto a imersão é totalmente umbílica. Sabe-se que variedades totalmente umbílicas são pedaços de esfera. Neste caso, precisa-se apenas obter que pela parte (a) do teorema, M^2 habita em uma esfera S^3 de raio $(|H|^2+c)^{-1/2}$ de tal modo que e_4 é seu normal unitário naquela esfera. Porque $\lambda^4_{ij} = 0$ é totalmente geodésica e deve ser então uma esfera S^2 equatorial desta esfera S^3.■

Serão classificadas, agora, as imersões $M^2 \hookrightarrow \overline{M}^4(c)$, $c \geq 0$, que tenham curvatura média constante H e curvatura Gaussiana constante K. Se $c = 0$, $\overline{M}^4(c) = \mathbb{R}^4$. Para $c > 0$

tem-se como modelo para $\overline{M}^4(c)$ a hipersuperfície

$$S^4(1/\sqrt{c}) = \{X \in \mathbb{R}^5 / |X|^2 = 1/c\} \subset \mathbb{R}^5.$$

Entende-se por um produto de imersões de $S^1(\rho) \times S^1(r)$ em $\mathbb{R}^4$ o produto de dois círculos planos Euclidianos (de raios ρ e r respectivamente). O raio ρ pode ser tomado como sendo ∞, o que inclui os cilindros circulares retos.

Um produto de imersão em $\overline{M}^4(c)$ é uma imersão $M^2 \hookrightarrow \overline{M}^4(c) \simeq S^4(1/\sqrt{c}) \subset \mathbb{R}^5$ que habita em algum 4-plano afim $\Pi \subset \mathbb{R}^5$ e como tal é um produto de imersões no sentido Euclidiano.

Lema 4.5. *Seja $M^2 \hookrightarrow \overline{M}^{2+k}$ uma imersão conforme, com parâmetro conforme E. Seja $K' = K - c$ a curvatura relativa da imersão e $\{e_3, ..., e_{2+k}\}$ um referencial ortonormal de NM^2. Então*

$$E^2(|H|^2 - K') = \sum_{\alpha=3}^{2+k} |\varphi_\alpha|^2 = \eta \tag{4.9}$$

Se $|H|^2 - K' \neq 0$, então

$$K = -\frac{\Delta log\left[\frac{\eta}{|H|^2 - K'}\right]}{4\eta^{\frac{1}{2}}(|H|^2 - K')^{-\frac{1}{2}}} \tag{4.10}$$

Demonstração: Sendo $\varphi_\alpha = \dfrac{1}{2}(L^\alpha_{11} - L^\alpha_{22}) + iL^\alpha_{12}$ tem-se

$$\begin{aligned}
\eta = \sum |\varphi_\alpha|^2 &= \sum \left[\frac{1}{4}\left(L^\alpha_{11} - L^\alpha_{22}\right)^2 + \left(L^\alpha_{12}\right)^2\right] \\
&= \sum \left[\frac{1}{4}\left((L^\alpha_{11})^2 - 2L^\alpha_{11}L^\alpha_{22} + (L^\alpha_{22})^2 + 4L^\alpha_{11}L^\alpha_{22} - 4L^\alpha_{11}L^\alpha_{22}\right) + (L^\alpha_{12})^2\right] \\
&= \sum \left[\frac{1}{4}\left((L^\alpha_{11})^2 + 2L^\alpha_{11}L^\alpha_{22} + (L^\alpha_{22})^2\right) - L^\alpha_{11}L^\alpha_{22} + (L^\alpha_{12})^2\right] \\
&= \sum E^2\left[\left(\frac{L^\alpha_{11} + L^\alpha_{22}}{2E}\right)^2 - \frac{L^\alpha_{11}L^\alpha_{22} - (L^\alpha_{12})^2}{E^2}\right] \\
&= E^2\left[\sum\left(\frac{L^\alpha_{11} + L^\alpha_{22}}{2E}\right)^2 - \sum \frac{L^\alpha_{11}L^\alpha_{22} - (L^\alpha_{12})^2}{E^2}\right].
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
|H|^2 &= \left\langle \frac{1}{2}\sum g^{ij}L_{ij}^{\alpha}e_{\alpha}, \frac{1}{2}\sum g^{ij}L_{ij}^{\alpha}e_{\alpha}\right\rangle \\
&= \left\langle e_3\left(\frac{L_{11}^3+L_{22}^3}{2E}\right)+\ldots+e_{2+k}\left(\frac{L_{11}^{2+k}+L_{22}^{2+k}}{2E}\right), e_3\left(\frac{L_{11}^3+L_{22}^3}{2E}\right)+\ldots+e_{2+k}\left(\frac{L_{11}^{2+k}+L_{22}^{2+k}}{2E}\right)\right\rangle \\
&= \left(\frac{L_{11}^3+L_{22}^3}{2E}\right)^2\langle e_3,e_3\rangle+\ldots+\left(\frac{L_{11}^{2+k}+L_{22}^{2+k}}{2E}\right)^2\langle e_{2+k},e_{2+k}\rangle \\
&= \sum\left(\frac{L_{11}^{\alpha}+L_{22}^{\alpha}}{2E}\right)^2.
\end{aligned}$$

Da definição de curvatura seccional e da proposição 3.6(a), tem-se

$$\begin{aligned}
K' = K - c &= \frac{1}{E^2}(\langle R(U_1,U_2)U_1,U_2\rangle - \langle\overline{R}(U_1,U_2)U_1,U_2\rangle) \\
&= \frac{1}{E^2}\langle R(U_1,U_2)U_1 - [\overline{R}(U_1,U_2)U_1]^T, U_2\rangle \\
&= \frac{1}{E^2}\langle -A(B(U_1,U_1),U_2) + A(B(U_2,U_1),U_1),U_2\rangle \\
&= \frac{1}{E^2}\langle -\overline{\nabla}_{U_2}B(U_1,U_1) + D_{U_2}B(U_1,U_1) + \overline{\nabla}_{U_1}B(U_2,U_1) - D_{U_1}B(U_2,U_1),U_2\rangle \\
&= \frac{1}{E^2}(\langle B(U_1,U_1),\overline{\nabla}_{U_2}U_2\rangle - \langle B(U_2,U_1),\overline{\nabla}_{U_1}U_2\rangle) \\
&= \frac{1}{E^2}(\langle B(U_1,U_1),[\overline{\nabla}_{U_2}U_2]^N\rangle - \langle B(U_2,U_1),[\overline{\nabla}_{U_1}U_2]^N\rangle) \\
&= \frac{1}{E^2}(\langle B(U_1,U_1),B(U_2,U_2)\rangle - \langle B(U_2,U_1),B(U_2,U_1)\rangle).
\end{aligned}$$

Observe que $B(U_i,U_j) = \sum L_{ij}^{\alpha}e_{\alpha}$, então

$$\begin{aligned}
K - c &= \frac{1}{E^2}\left(\left\langle\sum L_{11}^{\alpha}e_{\alpha},\sum L_{22}^{\alpha}e_{\alpha}\right\rangle - \left\langle\sum L_{12}^{\alpha}e_{\alpha},\sum L_{12}^{\alpha}e_{\alpha}\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{E^2}(\langle L_{11}^3e_3+\ldots+L_{11}^{2+k}e_{2+k}, L_{22}^3e_3+\ldots+L_{11}^{2+k}e_{2+k}\rangle \\
&\quad -\langle L_{12}^3e_3+\ldots+L_{12}^{2+k}e_{2+k}, L_{12}^3e_3+\ldots+L_{12}^{2+k}e_{2+k}\rangle) \\
&= \frac{1}{E^2}(L_{11}^3L_{22}^3+\ldots+L_{11}^{2+k}L_{22}^{2+k} - (L_{12}^3)^2+\ldots+(L_{12}^{2+k})^2) \\
&= \sum\frac{L_{11}^{\alpha}L_{22}^{\alpha}-(L_{12}^{\alpha})^2}{E^2}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\eta = \sum |\varphi_\alpha|^2 = E^2(|H|^2 - K^{'}).$$

Lembrando que em coordenadas conformes a curvatura Gaussiana é dada por $K = -\dfrac{1}{2}E^{-1}\Delta log E$ e usando a equação (4.5) tem-se

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\eta}{|H|^2 - K'}\right]^{-\frac{1}{2}} \Delta log \left[\frac{\eta}{|H|^2 - K'}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{4}\eta^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{|H|^2 - K'}\right]^{-\frac{1}{2}} \Delta log \left[\frac{\eta}{|H|^2 - K'}\right] \\ &= -\frac{\Delta log \left[\frac{\eta}{|H|^2 - K'}\right]}{4\eta^{\frac{1}{2}}[|H|^2 - K']^{-\frac{1}{2}}}. \blacksquare \end{aligned}$$

Proposição 4.6. *Seja* $M^2 \hookrightarrow \overline{M}^{2+k}(c)$ *uma imersão conforme com curvatura média constante e curvatura Gaussiana K constante. Suponha que* $\left\{e_3 = \dfrac{H}{|H|}, e_4, ..., e_{2+k}\right\}$ *é um referencial ortonormal de* NM^2 *tal que cada* e_α *é paralelo. Então* $K \equiv |H|^2 + c$ *ou* $K \equiv 0$. *Se* $K \equiv |H|^2 + c$ *e* $c \geq 0$, *então* M^2 *é imersa como um pedaço de esfera* S^2.

Demonstração: Se $K \neq |H|^2 + c$ então $|H|^2 - K' \neq 0$ e por (4.5) tem-se $\eta = \sum |\varphi_\alpha|^2 \neq 0$. Assim sendo, pelo menos um dos φ_α, por exemplo φ_{α_0}, é não nulo. Como e_α e e_{α_0} são secções paralelas e $\langle e_\alpha, H\rangle = 0$ pelo Lema 4.1 (a) e (c) tem-se $\varphi_\alpha = k_\alpha \varphi_{\alpha_0}$, onde k_α é uma constante real e φ_{α_0} é analítica. Logo

$$\eta = \sum |\varphi_\alpha|^2 = \sum |k_\alpha \varphi_{\alpha_0}|^2 = \left(\sum k_\alpha\right)|\varphi_{\alpha_0}|^2$$

Portanto $log\ \eta$ é harmônica visto que φ_{α_0} é analítica e pela equação (4.10) tem-se $K \equiv 0$. Se $K \equiv |H|^2 + c$ então $|H|^2 - (K - c) \equiv 0$ ou seja $|H|^2 - K' \equiv 0$ e por (4.5) $\eta = 0$. Consequentemente cada $\varphi_\alpha \equiv 0$. Então $\varphi_3 \equiv 0$ e a imersão é pseudo-umbílica em todos os seus pontos. Além disso, observe que se $\alpha > 3$, $\varphi_\alpha \equiv 0$ implica

$$\lambda_{11}^\alpha = \lambda_{22}^\alpha, \ \ \lambda_{12}^\alpha = 0, \tag{4.11}$$

e $\lambda_{11}^\alpha + \lambda_{22}^\alpha = \langle trB, e_\alpha\rangle = 2|H|\langle H/|H|, e_\alpha\rangle = 0$ implica

$$\lambda_{11}^\alpha = -\lambda_{22}^\alpha. \tag{4.12}$$

De (4.11) e (4.12) tem-se que $\lambda_{ij}^\alpha = 0, \forall \alpha > 3$, logo a imersão é totalmente umbílica. Usando o teorema da redução da codimensão pode-se fazer $k = 1$ e portanto M^2 é imersa como um pedaço de uma esfera S^2.$\blacksquare$

Proposição 4.7. *Se $M^2 \hookrightarrow \overline{M}^4(c)$, $c \geq 0$, tem curvatura média constante não nula e curvatura Gaussiana $K \equiv 0$,então M^2 é um produto de imersões $S^1(r) \times S^1(\rho)$, onde $|H|^2 = r^{-2} + \rho^{-2}$.*

Demonstração: Visto que $K \equiv 0$, M^2 é localmente isométrica ao plano e é possível escolher um sistema de coordenadas localmente conformes em M^2 com $E = 1$. Seja $\left\{e_3 = \frac{H}{|H|}, e_4\right\}$ um referencial ortonormal de NM^2. Considere os dois casos:

Caso A: $\varphi_3 \equiv 0$.

Neste caso os autovalores são iguais em todos os pontos e a imersão é pseudo-umbílica. Pela demonstração do teorema 4.4 (a), M^2 habita minimalmente em alguma esfera S^3 de raio $\frac{1}{|H|}$, ou seja, $(|H|^2 + c)^{-1/2}$ para $c = 0$. Por um resultado de Lawson [6](teorema 3(f) pag. 351) uma superfície mínima em $S^3(r)$ com $K \equiv 0$ deve ser um pedaço do toro de Clifford $S^1(\sqrt{r}/2) \times S^1(\sqrt{r}/2)$ em $S^3(r)$. Portanto a imersão é um produto de imersões.

Caso B: $\varphi_4 = k\varphi_3$.

Pela equação (4.5)

$$\begin{aligned} E^2(|H|^2 - k') &= |\varphi_3|^2 + |\varphi_4|^2 \\ &= |\varphi_3|^2 + |k\varphi_3|^2 \\ &= (1 + k^2)|\varphi_3|^2 \end{aligned}$$

ou seja, $|H|^2 + c = (1 + k^2)|\varphi_3|^2$ e $|\varphi_3|$ é constante. Logo φ_3 é constante e após uma possível rotação de coordenadas φ_3 pode assumir valor real.

Se $\varphi_3 \equiv \gamma$, então

$$(\lambda^3_{ij}) = (L^3_{ij}) = \begin{pmatrix} |H| + \gamma & 0 \\ 0 & |H| - \gamma \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

onde

$$\gamma^2 = \frac{|H|^2 + c}{1 + k^2},$$

pois,

$$\lambda^3_{11} + \lambda^3_{22} = tr(\lambda^3_{ij}) = \langle trB, e_3 \rangle = \langle 2H, e_3 \rangle = 2|H| \left\langle \frac{H}{|H|}, e_3 \right\rangle = 2|H|.$$

Como

$$\lambda_{11}^4 + \lambda_{22}^4 = tr(\lambda_{ij}^4) = \langle trB, e_4 \rangle = \langle 2H, e_4 \rangle = 2|H| \left\langle \frac{H}{|H|}, e_4 \right\rangle = 0,$$

$$(\lambda_{ij}^4) = \begin{pmatrix} k\gamma & 0 \\ 0 & -k\gamma \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Assuma que $c = 0$ e portanto $M^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$.
i) Se $k = 0$ então $\lambda_{ij}^4 = 0$. Se $X \in \Gamma(TM^2)$ então

$$\overline{\nabla}_X e_4 = D_x e_4 + A(e_4, X) = 0$$

pois e_4 é paralelo visto que $\langle D_X e_4, e_3 \rangle = \langle D_X e_4, e_4 \rangle = 0$ e

$$A(e_4, X) = A(e_4, a_1 e_1 + a_2 e_2) = \sum_{i=1}^{2} a_i A(e_4, e_i) = \sum_{i=1}^{2} a_i \lambda_{ij}^4 e_j = 0$$

Portanto e_4 é um vetor constante em $\mathbb{R}^4$.
Seja $p \in M^2$. Se $\Pi_3 = \{X \in E^4 / \langle x - p, e_4 \rangle = 0, x = X|_{M^2}\}$, então segue-se que M^2 habita em Π_3. Como uma superfície neste espaço Euclidiano tridimensional, seu vetor normal unitário é e_3. Além do mais, sendo $c = 0$ e $K \equiv 0$ tem-se $\gamma = \pm|H|$. Portanto por (4.13)

$$\begin{pmatrix} 2|H| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e como $E \equiv 1$ tem-se a familiar segunda forma fundamental do cilindro circular reto. Pelo teorema de unicidade para hipersuperfícies a imersão deve ser um cilindro circular reto $S^1(1/|H|) \times S^1(\infty)$.

ii) Se $K \neq 0$ observe que

$$\begin{aligned} \gamma^2(1 + k^2)^2 &= |H|^2 \\ |H|^2 - \gamma^2 &= \gamma^2(1 + k^2)^2 \\ (|H| - \gamma)(|H| + \gamma) &= \gamma k \cdot \gamma k, \end{aligned}$$

logo

$$\frac{(|H| + \gamma)}{\gamma k} = \frac{\gamma k}{(|H| - \gamma)} = \frac{b}{a}$$

com $a > 0$ e $a^2 + b^2 = 1$.

Então as equações

$$a(|H| + \gamma) - b\gamma k = 0$$
$$b(|H| - \gamma) - a\gamma k = 0$$

podem ser resolvidas unicamente por a e b.

Seja $\{\widetilde{e_3}, \widetilde{e_4}\}$ um novo referencial ortonormal definido por

$$\widetilde{e_3} = ae_3 - be_4$$
$$\widetilde{e_4} = be_3 + ae_4$$

Ambas as secções $\widetilde{e_3}$ e $\widetilde{e_4}$ são paralelas visto que e_3 e e_4 são ambas paralelas. Além disso

$$\begin{aligned}
\widetilde{\lambda}^3_{ij} &= \left\langle B(U_i, U_j), \widetilde{e_3} \right\rangle \\
&= \left\langle B(U_i, U_j), ae_3 - be_4 \right\rangle \\
&= a \left\langle B(U_i, U_j), e_3 \right\rangle - b \left\langle B(U_i, U_j), e_4 \right\rangle \\
&= a\lambda^3_{ij} - b\lambda^4_{ij} \\
\widetilde{\lambda}^4_{ij} &= \left\langle B(U_i, U_j), \widetilde{e_4} \right\rangle = b\lambda^3_{ij} + a\lambda^4_{ij}
\end{aligned}$$

e portanto a segunda forma fundamental na direção de $\widetilde{e_3}$ e $\widetilde{e_4}$ respectivamente, são dadas por

$$(\widetilde{\lambda}^3_{ij}) = a\begin{pmatrix} a(|H| + \gamma) - bk\gamma & 0 \\ 0 & a(|H| - \gamma) + bk\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a(|H| - \gamma) + bk\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{W}_3 \end{pmatrix}$$

$$(\widetilde{\lambda}^4_{ij}) = a\begin{pmatrix} b(|H| + \gamma) + ak\gamma & 0 \\ 0 & b(|H| - \gamma) - ak\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(|H| + \gamma) + ak\gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{W}_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Agora basta verificar que de fato a imersão é um produto de círculo. Para finalizar a demonstração observe que $U_2 \wedge \widetilde{e_3}$ é um plano constante em $\mathbb{R}^4$ visto que,

$$\frac{\partial}{\partial u^i}(U_2 \wedge \widetilde{e_3}) = \widetilde{W}_3\widetilde{e_3} \wedge \widetilde{e_3} + U_2 \wedge (-\widetilde{W}_3 U_2) = 0.$$

Analogamente $U_1 \wedge \widetilde{e_4}$ é um plano constante. Estes planos são ortogonais. Além disso, fixando u^2, a imersão é um círculo de raio $1/\widetilde{W}_4$ no plano $U_1 \wedge \widetilde{e_4}$ e fixando u^1, um círculo de raio $1/\widetilde{W}_3$ no plano $U_2 \wedge \widetilde{e_3}$. E isto dá a imersão como um produto de círculos.

Para completar a demonstração desta proposição resta apenas estudar (i) e (ii) para o caso $c > 0$. Pelo teorema da redução da codimensão, pode-se obter $M^2 \hookrightarrow S^3 \subset \mathbb{R}^4$ que se reduz ao caso Euclidiano.■

Teorema 4.8. *Seja $M^2 \hookrightarrow \overline{M}^4(c)$ uma imersão isométrica com curvatura média constante e curvatura Gaussiana constante K. Então $K \equiv 0$ ou $K \equiv |H|^2 + c$. Se $c \geq 0$, então M^2 é um produto de círculos se $K \equiv 0$ ou um pedaço de uma esfera S^2 se $K \equiv |H|^2 + c$.*

Demonstração: Seja $\left\{e_3 = \dfrac{H}{|H|}, e_4\right\}$ um referencial ortonormal de NM^2 com e_3 e e_4 paralelos. Pela proposição 4.6 $K \equiv 0$ ou $K \equiv |H|^2 + c$. Se $c \geq 0$, ainda pela proposição 4.6, M^2 é um pedaço de esfera S^2 se $K \equiv |H|^2 + c$ e pela proposição 4.7, um pedaço de produto de cículos se $K \equiv 0$.■

5 Uma Generalização do Teorema de Klotz-Osserman

O teorema apresentado a seguir é uma generalização do teorema de Klotz e Osserman, e que classifica uma imersão com curvatura média constante e curvatura Gaussiana que não muda de sinal.

Teorema 5.1. *Seja M^2 uma superfície completa e $M^2 \hookrightarrow \overline{M}^4(c)$ uma imersão com curvatura média constante H e curvatura Gaussiana K que não muda de sinal. Então M^2 pode ser:*
(i) Mínima, ou
(ii) Uma esfera de raio $(|H|^2 + c)^{-1/2}$ ou
(iii) Um produto de círculos $S^1(r) \times S^1(\rho)$, $0 < r \leq \infty$ e $0 < \rho < \infty$.

Demonstração: Sabe que se H é constante então $D_X H = 0$ e pela observação 3.14 tem-se que $|H|$ é constante. Logo $H \equiv 0$ ou H não tem zeros. Se $H \equiv 0$ então M^2 é mínima. Então suponha $H \neq 0$ e escolha um referencial ortonormal $\left\{ e_3 = \dfrac{H}{|H|}, e_4 \right\}$. Em coordenadas locais conformes $ds^2 = E[(du^1)^2 + (du^2)^2]$ e as funções φ_3 e φ_4, definidas como em (4.1), são funções analíticas de $z = u^1 + iu^2$ de acordo com o lema 4.1.

O Recobrimento de M^2 por parametrizações localmente conformes induzem em M^2 uma estrutura de superfície de Riemann. Analisaremos os casos $K \leq 0$ e $K \geq 0$ separadamente.

Caso 1: $K \leq 0$

Neste caso $K' = K - c \leq 0$. Pela equação (4.5), em cada parametrização tem-se

$$\eta = |\varphi_3|^2 + |\varphi_4|^4 = E^2(|H|^2 - K') > 0 \tag{5.1}$$

Sendo $\langle e_4, D_X e_4\rangle = 0$ e $\langle e_3, D_X e_4\rangle = 0$ tem-se que e_4 é paralelo e além disso $\langle e_4, H\rangle = |H|\,\langle e_4, H/|H|\rangle = 0$, logo pelo lema 4.1 (c), $\varphi_4 = k\varphi_3$, onde k é uma constante real. Portanto $log\ \eta = log\ E^2(|H|^2 - K')$ é harmônica.

Seja $d\tilde{s}^2 = \sqrt{\eta}[(du^1)^2 + (du^2)^2]$ uma outra métrica. A curvatura Gaussiana $\tilde{K}$ nesta nova métrica é dada por

$$\tilde{K} = -\frac{1}{2}\eta^{-1/2}\Delta log\sqrt{\eta} \equiv 0 \tag{5.2}$$

visto que $log\ \eta$ é harmônica. Portanto $d\tilde{s}^2$ é uma métrica plana conformemente equivalente a ds^2, pois,

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 &= \sqrt{\eta}[(du^1)^2 + (du^2)^2] \\ &= \sqrt{E^2(|H|^2 - K')}[(du^1)^2 + (du^2)^2] \\ &= \sqrt{|H|^2 - K'}E^2[(du^1)^2 + (du^2)^2] \\ &= \sqrt{|H|^2 - K'}ds^2 \end{aligned}$$

Pelo lema 2.29, o recobrimento universal de M^2 é conformemente equivalente ao plano. Em M^2 a função $log(\sqrt{\eta}/E)$ é uma função globalmente definida. Além disso, esta função é limitada inferiormente, pois, por (5.1) $\dfrac{\sqrt{\eta}}{E} = \sqrt{(|H|^2 - K')} > 0$ e portanto

$$log\frac{\sqrt{\eta}}{E} = \frac{1}{2}log(|H|^2 - K') > \frac{1}{2}log|H|^2 = log|H|.$$

Por (5.2) e do fato que $K \leq 0$ tem-se

$$\begin{aligned} \Delta log(\sqrt{\eta}/E) &= \Delta log\sqrt{\eta} - \Delta log E \\ &= -\Delta log E \\ &= 2EK \leq 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

de onde conclui-se que é superharmônica. Assim, $log(\sqrt{\eta}/E)$ é uma função superharmônica limitada inferiormente sobre uma superfície que tem ao recobrimento universal conformente equivalente ao plano, ou seja, parabólica. Logo $log(\sqrt{\eta}/E)$ é constante. Isto implica $\Delta log(\sqrt{\eta}/E) \equiv 0$ e por (5.3) tem-se $K \equiv 0$. Pelo teorema 4.7, M^2 deve ser imersa como um produto de círculos $S^1(r) \times S^1(\rho)$. Isto completa a demonstração para $K \leq 0$.

Caso 2:$K \geq 0$

Por um teorema de Huber [10], uma superfície completa com $K \geq 0$ ou é compacta ou é parabólica.

Suponha que M^2 é compacta. Se $K \equiv 0$ então tem-se a proposição 4.7. Caso contrário, M^2 tem gênero 0 pelo teorema de Gauss-Bonnet, e portanto é uma esfera de raio $(|H|^2 - K')^{-1/2}$ pelo teorema 4.4(b).

Suponha M^2 parabólica. Neste caso M^2 deve ser plana, ou seja, $K \equiv 0$. Para ver isto, observe que $\eta = |H|^2 - K'$ não é identicamente nulo; caso contrário $K \equiv |H|^2 + c > 0$, e então pelo teorema 4.8, M^2 seria um pedaço de esfera, impossível visto que M^2 é parabólica. Como no caso 1, $log\eta$ é harmonica, logo

$$\begin{aligned} 0 = \Delta log\, \eta &= 2[\Delta log E + \Delta log(\sqrt{\eta}/E)] \\ &= 2[-2KE + \Delta log(\sqrt{\eta}/E)] \\ &\leq 2[\Delta log(\sqrt{\eta}/E)]. \end{aligned}$$

Assim $log(\sqrt{\eta}/E)$ é subharmônica, e limitada superiormente visto que

$$log(\sqrt{\eta}/E) = log(|H|^2 - K')^{1/2} \leq log(|H|^2 + c)^{1/2}.$$

Portanto $log\sqrt{\eta}/E$ é constante visto que M^2 é parabólica. Pela definição de η, K também é constante. Logo $K \equiv 0$ visto que M^2 é parabólica (tem recobrimento universal conformemente equivalente ao plano). Portanto a proposição 4.7 completa a demonstração.■

Observação 5.2. *Pela proposição 4.7 e pela demonstração do caso 1, no caso onde $\varphi_3 \equiv 0$, M^2 é um produto de círculos com $r = \rho$ (toro mínimo de Clifford em uma hiperesfera), enquanto no caso onde $\varphi_3 \neq 0$, $\varphi_4 \equiv 0$, M^2 é um cilindro circular reto ($r = \infty$). Se nem φ_3 e nem φ_4 são identicamente nulas, M^2 é $S^1(r) \times S^1(\rho)$ com $r \neq \rho$ e $r \neq \infty$.*

Bibliografia

[1] M. P. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice Hall, New Jersey, 1976.

[2] M. P. do Carmo, Formas diferenciais e aplicações, 8º Colóquio brasileiro de matemática, Poços de Caldas, 5 a 23 de julho de 1961.

[3] M. P. do Carmo, Geometria riemanniana, IMPA, projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1988, 2ª edição.

[4] M. P. do Carmo, O método do referencial móvel, IMPA, Escola latino americana de matemática, 1976.

[5] S. C. Chagas, Superfícies completas imersas em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante cuja curvatura Gaussiana não muda de sinal, Dissertação de Mestrado, UFAM, Amazonas, 2000.

[6] Bang-yen Chen, Geometry of Submanifolds, Michigan State University, Marcel Dekker-INC, New York, 1973.

[7] D. Hoffman, Surfaces in constant curvature manifolds whit paralel mean curvature vector field, Bill. Amer. Math. Soc. 78, 1972, 247-250.

[8] D. Hoffman, Surfaces of constant mean curvature in manifolds of constant curvature, J. Diferential Geometry 8, 1973, 161-176.

[9]H. Hopf, Lectures on differencial geometry in the large, Mimeographical notes, Stanford University, 1956.

[10] A. Huber, On subharmonic functions and differential geometry in the large, Com-

ment. Math. Helv. 32, 1957, 13-72.

[11] T. Itoh, Complete surfaces in E^4 with constant meam curvature, K$\bar{o}$dai Math. Sem. Rep. 22, 1970, 150-158.

[12] H. B. Lawson, Jr., Complete minimal surfaces in S^3, Ann. of Math. (2) 92, 1970, 335-375.

[13] D. D. de Lima, Imersões de superfícies com curvatura média paralela em espaços de curvatura constante, Dissertação de Mestrado, UFAM, Amazonas, 2000.

[14] M. Spivak, A comprehensive introduction to differential geometry, Publish or Perish, Inc., Boston, Mass., Vol. I-V, 1970-1975.

[15] K. Yano e M. Kon, Structures on Manifolds, Series in Pure Mathematics-Volume 3.