

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

*TEOREMA FUNDAMENTAL DAS IMERSÕES
ISOMÉTRICAS*

KELLY KARINA SANTOS

MANAUS

2005

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

KELLY KARINA SANTOS

*TEOREMA FUNDAMENTAL DAS IMERSÕES
ISOMÉTRICAS*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração em Geometria Diferencial.

Orientador: Prof^o. Dr. Renato de Azevedo Tribuzy

MANAUS
2005

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, o grande autor e consumidor da vida, por seu sustento a cada dia.

Ao meu esposo Ulysses pelo amor e cumplicidade.

Agradeço ao meu orientador Renato de Azevedo Tribuzy, por sua disponibilidade sempre que necessária, também por sua paciência e confiança.

Aos professores da Pós-Graduação em Matemática da UFAM, em particular ao professor José Kenedy Martins por ter esclarecido todas as questões necessárias referentes ao ingresso no curso.

Agradeço a todos os meus amigos e finalmente à minha família que, apesar da distância, sempre participou ativamente de cada instante em Manaus.

RESUMO

TEOREMA FUNDAMENTAL DAS IMERSÕES ISOMÉTRICAS

Orientador: Renato de Azevedo Tribuzy
Programa de Pós-Graduação em Matemática

As equações de Gauss, Codazzi e Ricci são satisfeitas para qualquer imersão $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$. O Teorema Fundamental das Imersões isométricas prova a recíproca deste fato quando \overline{M}^{n+k} é uma variedade Riemanniana $(n + k)$ -dimensional simplesmente conexa com curvatura seccional constante c , isto é a esfera Euclidiana \mathbb{S}_c^{n+k} , espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+k} ou o espaço hiperbólico \mathbb{H}_c^{n+k} .

Palavra chave: imersões isométricas, equações de Gauss, Codazzi e Ricci.

ABSTRACT

Fundamental Theorem of Isometric Immersions

The equations of Gauss, Codazzi and Ricci are satisfied for any isometric immersion $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$. The Fundamental Theorem of Isometric Immersions provides a converse to this fact whenever \overline{M}^{n+k} is a simply connected $(n+k)$ -dimensional Riemannian manifold with constant sectional curvature c , ie, the Euclidean Sphere \mathbb{S}_c^{n+k} , Euclidean Space \mathbb{R}^{n+k} or the Hyperbolic Space \mathbb{H}_c^{n+k} .

key word: isometric immersions, equations of Gauss, Codazzi and Ricci.

Sumário

1	Generalidades	1
1.1	Introdução	1
1.2	Variedade Diferenciável	1
1.3	Campo de Vetores	3
1.4	Métricas Riemannianas	4
1.5	Conexão Riemanniana	4
1.6	Curvatura	6
1.7	Formas Diferenciais	6
1.8	Fibrados Vetoriais Riemannianos	9
2	O Lema de Poincaré	13
3	Imersões Isométricas	16
3.1	Imersões	16
4	Teorema Fundamental das Imersões Isométricas	22

INTRODUÇÃO

O resultado principal deste trabalho se inspira na Geometria Diferencial clássica das superfícies no \mathbb{R}^3 onde as equações de Gauss e Mainard-Codazzi desempenham um papel fundamental.

Conforme Teneblat em [13] por volta de 1867 Ossian Bonnet mostrou que dadas 2 formas quadráticas em um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ que satisfazem as equações de Gauss e Codazzi-Mainardi, existe a menos de um movimento rígido, uma única imersão local $f : V \subset U \rightarrow \mathbb{R}^3$ com as formas prescritas como métrica induzida e segunda forma fundamental.

Com o advento da geometria multidimensional, no começo do século tornou-se natural observar que um fato similar acontece para imersões com codimensão arbitrária. Assim, neste trabalho consideramos a seguinte situação: seja $f : M \rightarrow \overline{M}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade Riemanniana \overline{M} de dimensão $n + k$. A métrica Riemanniana de \overline{M} induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M : se v_1 e $v_2 \in T_p M$, define-se $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle$. Nessa situação f passa a ser uma imersão isométrica de M em \overline{M} . Como veremos, as relações entre as métricas riemannianas de M e \overline{M} se exprimem por meio da segunda forma fundamental.

Tudo se passa como se a geometria da imersão se decomposesse em duas geometrias: uma geometria do fibrado tangente e uma do fibrado normal. Estas geometrias se relacionam com a segunda forma fundamental da imersão por meio de expressões que generalizam as clássicas equações de Gauss e Codazzi da teoria das superfícies.

Neste contexto, obteremos as fórmulas de Gauss e Weingarten e baseado nelas encontraremos as equações de Gauss, Codazzi e Ricci (equações fundamentais da imersão). A equação de Gauss exprime a diferença entre as curvaturas de M e \overline{M} por meio de expressões construídas a partir da segunda forma fundamental. Como as curvaturas são definidas intrinsecamente, a equação de Gauss generaliza o Teorema Egregium de Gauss, que por sua vez foi o ponto de partida da Geometria Riemanniana. A equação de Codazzi nos fornece uma espécie de simetria da derivada da segunda forma

fundamental e finalmente a de Ricci relaciona o tensor curvatura normal e a segunda forma fundamental.

A importância das equações de Gauss, Codazzi e Ricci é que no caso em que o espaço ambiente tem curvatura seccional constante, elas desempenham um papel análogo ao das equações de compatibilidade na teoria local das superfícies. Em verdade as equações de compatibilidade da teoria das superfícies são apenas casos particulares das equações de Gauss e Codazzi.

Nosso objetivo é apresentar e demonstrar de forma clara e detalhada o Teorema Fundamental das Imersões Isométricas que dá condições suficientes para que uma variedade simplesmente conexa munida de uma métrica possa ser imersa isometricamente em espaços de curvatura constante.

O Teorema Fundamental das Imersões Isométricas é um resultado clássico que promoveu o surgimento de vários outros resultados na geometria. Um deles foi o Teorema fundamental de J. Nash que mostra que toda variedade riemanniana pode ser isometricamente imersa em algum espaço euclidiano.

No capítulo 1 são apresentadas definições e resultados referentes a variedades diferenciáveis, formas diferenciais e fibrados vetoriais riemannianos. No capítulo 2 mostraremos que em uma variedade contrátil toda 1- forma fechada é exata. No capítulo 3 apresentamos fatos da teoria das subvariedades. Inicialmente obtemos as fórmulas de Gauss e Weingarten e por elas derivamos as equações de Gauss, Codazzi e Ricci (equações fundamentais da imersão) para uma subvariedade de uma variedade riemanniana. Por fim, no capítulo 4 apresentamos o Teorema Fundamental das Imersões Isométricas e sua demonstração. A idéia da demonstração aqui apresentada está em sua essência contida em [3].

Capítulo 1

Generalidades

1.1 Introdução

Neste Capítulo disponibilizamos algumas definições e resultados gerais de Variedades Riemannianas e Formas Diferenciais cujas demonstrações serão omitidas. Para maiores detalhes destes tópicos recomendamos [1] e [2].

1.2 Variedade Diferenciável

Definição 1.2.1. Uma Variedade Diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações injetivas:

$$x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$$

de abertos U_α de \mathbb{R}^n em M tal que

1. $M = \cup_\alpha x_\alpha(U_\alpha)$;
2. Para todo par α, β com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ e $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ são diferenciáveis.

Definição 1.2.2. Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\phi : M_1^n \rightarrow M_2^m$ é diferenciável em $p \in M_1^n$ se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$ em $\phi(p)$ existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$ em p tal que $\phi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação

$$y^{-1} \circ \phi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$. ϕ é diferenciável num aberto de M_1 se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Definição 1.2.3. Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é chamada uma curva (diferenciável) em M . Suponha que $\alpha(0) = p \in M$ e seja \mathcal{D} o conjunto das funções de M diferenciáveis em p . O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$.

Definição 1.2.4. O Espaço Tangente a uma variedade M em um ponto p , representado por T_pM é o conjunto de todos os vetores tangentes às curvas suaves pertencentes a M passando por p . Mostra-se que o T_pM é um espaço vetorial de dimensão m que não depende do ponto p .

Definição 1.2.5. (O Fibrado Tangente). Seja M uma variedade diferenciável e seja $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$. Este espaço munido com a estrutura diferenciável $\{U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \gamma_\alpha\}$ onde $\gamma_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$ definida por:

$$\gamma_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha, u_1, \dots, u_n) = (x_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}),$$

$(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, é definido como o fibrado tangente de M .

Proposição 1.2.1. Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e seja $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_pM_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M_1$ com $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \phi \circ \alpha$. A aplicação $d\phi_p : T_pM_1 \rightarrow T_{\phi(p)}M_2$ dada por $d\phi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α .

Definição 1.2.6. A aplicação linear $d\phi_p$ dada pela proposição anterior é chamada diferencial de ϕ em p .

Definição 1.2.7. Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ é um difeomorfismo se ela é bijetiva, diferenciável e sua inversa ϕ^{-1} é diferenciável. ϕ é um difeomorfismo local em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p e V de $\phi(p)$ tais que $\phi(U) \rightarrow V$ é um difeomorfismo.

Definição 1.2.8. Uma variedade M é chamada simplesmente conexa se M é conexa e se toda aplicação diferenciável $f : S^1 \rightarrow M$ é diferenciavelmente contrátil a um ponto.

1.3 Campo de Vetores

Definição 1.3.1. Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_p M$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM . O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \rightarrow TM$ é diferenciável.

Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ é a base associada a x , $i = 1, \dots, n$. X é diferenciável se e só se as funções a_i são diferenciáveis para alguma (e, portanto, para qualquer) parametrização.

Às vezes é conveniente utilizar a idéia sugerida acima e pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}$, do conjunto \mathcal{D} das funções diferenciáveis em M no conjunto \mathcal{F} das funções em M , definida por:

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

onde cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ é a base associada a parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Lema 1.3.1. Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M . Então existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in \mathcal{D}$, $Zf = (XY - YX)f$.

Definição 1.3.2. O campo vetorial Z dado pelo Lema anterior é chamado colchete $[X, Y] = XY - YX$ de X e Y ; Z é evidentemente diferenciável.

Proposição 1.3.1. Se X, Y e Z são campos diferenciáveis em M , a, b são números reais e f, g são funções diferenciáveis, então:

- (a) $[X, Y] = -[Y, X]$ (anticomutatividade),
- (b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (linearidade)
- (c) $[[X, Y]Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identidade de Jacob),
- (d) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

1.4 Métricas Riemannianas

Definição 1.4.1. Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle \cdot \cdot \rangle_p$ (isto é uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(x_1, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U . Outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da métrica Riemanniana é dizer que para todo par X e Y de campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança V de M , a função $\langle \cdot \cdot \rangle$ é diferenciável em V .

Definição 1.4.2. Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ é chamado uma isometria se:

$$\langle u v \rangle_p = \langle df_p(u) df_p(v) \rangle_{f(p)} \text{ para todo } p \in M, u, v \in T_pM$$

1.5 Conexão Riemanniana

Indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ definidos em M .

Definição 1.5.1. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$, que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$.
- ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$.
- iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$, onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Proposição 1.5.1. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , denominado derivada covariante de V ao longo de c , tal que:

- a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$
- b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I
- c) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, i.e., $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y$.

Definição 1.5.2. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Proposição 1.5.2. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Seja $c : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, $t_0 \in I$ (i.e. $V_0 \in T_{c(t_0)}M$). Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c , tal que $V(t_0) = V_0$, $V(t)$ é chamado o transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de c .

Definição 1.5.3. Seja M uma variedade Riemanniana. Dizemos que uma conexão afim ∇ em M é uma conexão de Levi-Civita (ou Riemanniana) quando satisfaz as condições:

- a) ∇ é simétrica, isto é, $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$;
- b) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana, ou seja

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \text{ onde } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M) \quad (1.1)$$

1.6 Curvatura

Definição 1.6.1. A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, dada por:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad (1.2)$$

$Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.6.2. A curvatura seccional (ou Riemanniana) $K(x, y)$ segundo $\sigma \subset T_p M$ (subespaço bidimensional do espaço tangente $T_p M$), onde $x, y \in \sigma$ são vetores linearmente independentes, é definida por:

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)y, x \rangle}{|x \wedge y|^2}, \quad (1.3)$$

onde $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$.

Se $K(X, Y) > 0$, para cada par X, Y , então M é dita uma variedade Riemanniana de curvatura positiva.

1.7 Formas Diferenciais

Definição 1.7.1. Seja p um ponto de \mathbb{R}^n . O conjunto de vetores aplicados em p , chamado espaço tangente de \mathbb{R}^n em p , será denotado por \mathbb{R}_p^n .

Denotaremos por $(\mathbb{R}_p^n)^*$ o espaço dual de \mathbb{R}_p^n . Uma base para $(\mathbb{R}_p^n)^*$ é obtida tomando $(dx_i)_p$, $i = 1, \dots, n$, onde $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a projeção na i -ésima coordenada, $\{(dx_i)_p\}$ é a base dual de $\{(e_i)_p\}$.

Definição 1.7.2. Um campo de formas lineares ou forma exterior de grau 1 em \mathbb{R}^n é uma aplicação w que a cada $p \in \mathbb{R}^n$ associa $w(p) \in (\mathbb{R}_p^n)^*$; w pode ser escrito na forma

$$w(p) = \sum_{i=1}^n a_i dx_i,$$

onde a_i são funções definidas em \mathbb{R}^n e tomando valores em \mathbb{R} ; w chama-se uma forma exterior contínua quando as funções a_i são contínuas. Se as funções a_i forem diferenciáveis w chama-se forma diferencial de grau 1.

Seja $\wedge^k(\mathbb{R}_p^n)^*$ o conjunto das funções k -lineares alternadas.

Se $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ são formas lineares, podemos obter um elemento $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$ de $\wedge^k(\mathbb{R}_p^n)^*$ definido por

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j)).$$

Decorre das propriedades de determinantes que $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$ é de fato k -linear e alternada. Em particular, $(dx_{i_1})_p \wedge \dots \wedge (dx_{i_k})_p \in \wedge^k(\mathbb{R}_p^n)^*$; indicaremos este elemento por $(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_p$.

Proposição 1.7.1. O conjunto $\{(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_p\}$, $i_1 < \dots < i_k$, onde $i_j \in \{1, 2, \dots, n\}$ forma uma base para $\wedge^k(\mathbb{R}_p^n)^*$.

Definição 1.7.3. Uma k -forma exterior em \mathbb{R}^n ($k \geq 1$) é uma aplicação w que a cada $p \in \mathbb{R}^n$ associa $w(p) \in \wedge^k(\mathbb{R}_p^n)^*$; w pode ser escrito na forma

$$w = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(p) (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_p, \quad i_j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

onde a_{i_1, \dots, i_k} são aplicações de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} . Se as funções a_{i_1, \dots, i_k} forem diferenciáveis, w é chamada uma k -forma diferencial.

Indicaremos por I a k -upla (i_1, \dots, i_k) , $i_1 < \dots < i_k$, $i_j \in \{1, \dots, n\}$, e usaremos a seguinte notação para w : $w = \sum_I a_I dx_I$.

Definição 1.7.4. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável. A aplicação linear $df_p : \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}_{f(p)}^m$ induz uma transformação linear

$$f_p^* : \wedge^k(\mathbb{R}_{f(p)}^m)^* \rightarrow \wedge^k(\mathbb{R}_p^n)^*$$

que para cada $\phi \in (\mathbb{R}_{f(p)}^m)^*$ associa $f_p^*(\phi)$, definida da seguinte maneira:

$$(f_p^*(\phi))(v_1, \dots, v_k) = \Phi(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)), \quad v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}_p^n.$$

Fazendo o ponto variar em \mathbb{R}^n , obteremos uma aplicação f^* que leva k -formas de \mathbb{R}^n em k -formas de \mathbb{R}^m . Convencionamos que

$$f^*(g) = g \circ f, \quad \text{se } g \text{ é uma } 0\text{-forma.}$$

Definição 1.7.5. Se $w = \sum_I a_I dx_I$ é uma k -forma, definimos a diferencial exterior de w como sendo a $(k+1)$ -forma $dw = \sum_I da_I \wedge dx_I$.

Proposição 1.7.2. $d(dw) = d^2w = 0$.

Definição 1.7.6. Seja M uma variedade de dimensão n . Uma k -forma diferencial w em M é a escolha, para cada sistema de coordenadas $f_1 : U_1 \rightarrow M$, de uma k -forma w_{U_1} em $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ de tal forma que se w_{U_1} e w_{U_2} são duas tais escolhas e $f_1(U_1) \cap f_2(U_2) \neq \emptyset$, então,

$$w_{U_1} = (f_2^{-1} \circ f_1)^* w_{U_2}.$$

Cada w_{U_i} é dita uma representação local de w .

Definição 1.7.7. Chamaremos de suporte K de uma forma diferencial w , definida em um aberto U de \mathbb{R}^n (ou de uma variedade diferenciável), à união do conjunto

$$A = \{p \in U; w(p) \neq 0\}$$

com os pontos de acumulação de A . O suporte K de w é assim um subconjunto fechado de \mathbb{R}^n (ou da variedade). Seja w uma n -forma diferencial em um aberto U de \mathbb{R}^n ,

$$w = a(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Suponhamos que o suporte K de w é compacto e está contido em U . Então definimos,

$$\int_U w = \int_K a dx_1 \dots dx_n,$$

onde o segundo membro é uma integral múltipla usual.

Definição 1.7.8. Suponhamos que M seja compacta, orientável e que uma orientação foi fixada, i.e., M está coberta por uma família $\{V_\alpha\}$ de vizinhanças coordenadas de tal modo, que a mudança de coordenadas tem sempre Jacobiano positivo. Se o suporte K de w está contido em alguma vizinhança coordenada $V_\alpha = f_\alpha(U_\alpha)$. Neste caso, se a representação local de w for

$$w_\alpha = a_\alpha(u_1, \dots, u_n) du_1 \wedge \dots \wedge du_n,$$

definiremos

$$\int_M w = \int_{V_\alpha} w_\alpha = \int_{U_\alpha} a_\alpha(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n,$$

onde o último membro é uma integral múltipla usual.

É possível mostrar ainda que se K está contido em outra vizinhança coordenada $V_\beta = f_\beta(U_\beta)$ da mesma família que cobre M , a definição anterior independe da escolha da vizinhança coordenada. Para detalhes ver [2].

Proposição 1.7.3. Dada uma cobertura $\{V_\alpha\}$ de uma variedade compacta M por vizinhanças coordenadas, existem funções diferenciáveis ϕ_1, \dots, ϕ_n tais que:

- a) $\sum_{i=1}^m \phi_i = 1$,
- b) $0 \leq \phi_i \leq 1$, e o suporte de ϕ_i está contido em algum V_{α_i} da cobertura $\{V_\alpha\}$.

Definição 1.7.9. Seja M uma variedade compacta e orientada, $\phi_i w$ uma forma cujo suporte está contido em V_i , definimos a integral de uma n -forma w em M da seguinte maneira:

$$\int_M w = \sum_{i=1}^m \int_M \phi_i w.$$

Afirmamos que a integral acima é independente das escolhas feitas. Para detalhes ver [2].

1.8 Fibrados Vetoriais Riemannianos

Definição 1.8.1. Sejam E e M variedades diferenciáveis e seja $\pi : E \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que $\pi : E \rightarrow M$ é um fibrado vetorial (de dimensão k) quando para cada ponto $q \in M$,

1. $\pi^{-1}(q)$ é um espaço vetorial real de dimensão k .
2. existe uma vizinhança aberta U de q em M e um difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ para cada $y \in U$.

Dado um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ e um conjunto $F \subset E$ tal que a restrição $\pi|_F : F \rightarrow M$ é também um fibrado vetorial, dizemos que F é um subfibrado vetorial de E se a inclusão leva $(\pi|_F)^{-1}(q)$ linearmente sobre $\pi^{-1}(q)$ para todo $q \in M$.

Definição 1.8.2. Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial. Para cada $p \in M$ chamamos o espaço $E_p = \pi^{-1}(p)$ a fibra de π sobre p . Uma seção local sobre um conjunto aberto $U \subset M$ é uma aplicação diferenciável $\varepsilon : U \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \varepsilon = id_U$; se $U = M$ dizemos que $\varepsilon : M \rightarrow E$ é uma seção global ou simplesmente seção de π . É possível mostrar que para todo $e \in E$ existe uma seção ε tal que $\varepsilon(\pi(e)) = e$, em particular isto mostra que o conjunto $\Gamma(\pi)$ das seções de π é não vazio.

Definição 1.8.3. Sejam $\pi_1 : E^1 \rightarrow M$ e $\pi_2 : E^2 \rightarrow M$ fibrados vetoriais. Definimos a projeção $\pi : \mathcal{L}(E^1, E^2) \rightarrow M$ colocando $\pi^{-1}(p) = \mathcal{L}(E_p^1, E_p^2)$, onde o conjunto $\mathcal{L}(E^1, E^2)$ é a união dos espaços das aplicações lineares de E_p^1 sobre $E_p^2, p \in M$. Dotando $\mathcal{L}(E^1, E^2)$ com a estrutura diferenciável natural induzida pela projeção ele torna-se um fibrado vetorial, chamado fibrado das aplicações lineares. A soma $\pi_1 \oplus \pi_2$ dos fibrados vetoriais $\pi_1 : E^1 \rightarrow M$ e $\pi_2 : E^2 \rightarrow M$ é definida como a projeção

$$\pi_1 \oplus \pi_2 : E^1 \oplus E^2 \rightarrow M, \text{ dada por}$$

$$\pi_1 \oplus \pi_2(e_1, e_2) = \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2), \text{ onde}$$

$$E^1 \oplus E^2 = \{(e_1, e_2) \in E^1 \times E^2 : \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)\}$$

Definição 1.8.4. Sejam $\pi_1 : E^1 \times E^2 \rightarrow M$ e $\pi_2 : E^3 \rightarrow M$ fibrados vetoriais. Definimos a projeção $\pi : \mathcal{L}_2(E^1 \times E^2, E^3) \rightarrow M$ colocando $\pi^{-1}(p) = \mathcal{L}_2(E_p^1 \times E_p^2, E_p^3)$, onde o conjunto $\mathcal{L}_2(E^1 \times E^2, E^3)$ é a união dos espaços das aplicações bilineares de $E_p^1 \times E_p^2$ sobre $E_p^3, p \in M$. Dotando $\mathcal{L}_2(E^1 \times E^2, E^3)$ com a estrutura diferenciável natural induzida pela projeção ele torna-se um fibrado vetorial, chamado fibrado das aplicações bilineares. A soma $\pi_1 \oplus \pi_2$ dos fibrados vetoriais $\pi_1 : E^1 \times E^2 \rightarrow M$ e $\pi_2 : E^3 \rightarrow M$ é definida como a projeção

$$\pi_1 \oplus \pi_2 : (E^1 \times E^2) \oplus E^3 \rightarrow M, \text{ dada por}$$

$$\pi_1 \oplus \pi_2(e_1 \times e_2, e_3) = \pi_1(e_1 \times e_2) = \pi_2(e_3), \text{ onde}$$

$$(E^1 \times E^2) \oplus E^3 = \{(e_1 \times e_2, e_3) \in E^1 \times E^2 \times E^3 : \pi_1(e_1 \times e_2) = \pi_2(e_3)\}$$

As somas definidas acima são fibrados vetoriais.

Mais geralmente, podemos transferir para fibrados vetoriais certas operações que são realizadas entre espaços vetoriais.

Definição 1.8.5. Dados dois fibrados vetoriais $\pi_1 : E^1 \rightarrow M_1$ e $\pi_2 : E^2 \rightarrow M_2$ e um difeomorfismo $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$, dizemos que a aplicação diferenciável $\tilde{\Phi} : E^1 \rightarrow E^2$ é um isomorfismo de fibrados vetoriais ao longo de Φ se, para todo $q \in M_2$, temos

- (i) $\pi_2 \circ \tilde{\Phi} = \Phi \circ \pi_1$ e $\tilde{\Phi}(\pi_1^{-1}(p)) = \pi_2^{-1}(\Phi(p))$,
- (ii) a restrição $\tilde{\Phi}_p : \pi_1^{-1}(p) \rightarrow \pi_2^{-1}(\Phi(p))$ de $\tilde{\Phi}$ para a fibra $\pi_1^{-1}(p)$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Segue da definição que $\tilde{\Phi}$ é um difeomorfismo. Além disso, para cada seção ε de π_1 obtemos a seção $\tilde{\Phi}(\varepsilon) = \tilde{\Phi} \circ \varepsilon \circ \Phi^{-1}$.

Definição 1.8.6. Uma métrica Riemanniana $\langle \cdot \cdot \rangle$ sobre um fibrado vetorial $E \rightarrow M$ é uma aplicação

$$\langle \cdot \cdot \rangle : \Gamma(\pi) \times \Gamma(\pi) \rightarrow \mathcal{D},$$

bilinear sobre o anel \mathcal{D} de funções diferenciáveis sobre M , que é simétrica e positiva definida.

Definição 1.8.7. Um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ junto com uma métrica Riemanniana fixa é chamado um fibrado vetorial Riemanniano.

Definição 1.8.8. Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial e seja $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis sobre M . Uma conexão linear é uma aplicação \mathbb{R} -bilinear

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\pi) \rightarrow \Gamma(\pi)$$

$$(X, \varepsilon) \rightarrow \nabla_X \varepsilon$$

satisfazendo, para cada $f \in \mathcal{D}$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\varepsilon \in \Gamma(\pi)$, as propriedades

- i) $\nabla_{fX} \varepsilon = f \nabla_X \varepsilon$.
- ii) $\nabla_X (f\varepsilon) = X(f)\varepsilon + f \nabla_X \varepsilon$.

Definição 1.8.9. Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial com uma conexão linear ∇ . Dizemos que a seção $\varepsilon \in \Gamma(\pi)$ é paralela quando $\nabla_X \varepsilon = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Um subfibrado vetorial F de E é dito paralelo se, para toda seção η de F e todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos que $\nabla_X \eta$ é uma seção paralela de F .

Definição 1.8.10. Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial Riemanniano. Uma conexão linear ∇ é dita compatível com a métrica $\langle \cdot \cdot \rangle$ quando

$$X \langle \varepsilon, \eta \rangle = \langle \nabla_X \varepsilon, \eta \rangle + \langle \varepsilon, \nabla_X \eta \rangle$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\varepsilon, \eta \in \Gamma(\pi)$.

O tensor curvatura de um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ com conexão linear ∇ é a aplicação \mathbb{R} -trilinear

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\pi) \rightarrow \Gamma(\pi) \text{ definida por}$$

$$R(X, Y)\varepsilon = \nabla_X \nabla_Y \varepsilon - \nabla_Y \nabla_X \varepsilon - \nabla_{[X, Y]}\varepsilon.$$

É facilmente visto que R é trilinear sobre \mathcal{D} . Quando o fibrado vetorial é Riemanniano, podemos associar a R outro tensor

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\pi) \times \Gamma(\pi) \rightarrow \mathbb{R}$$

dado por $R(X, Y, \varepsilon, \eta) = \langle R(X, Y)\varepsilon, \eta \rangle$, onde $\langle \cdot \cdot \rangle$ é a métrica sobre E .

Por um abuso de linguagem é comum não nos referirmos à aplicação $\pi : E \rightarrow M$ quando estamos trabalhando com fibrados cuja aplicação é a natural, mas sim às variedades E e M .

Capítulo 2

O Lema de Poincaré

Definição 2.0.11. Seja M uma variedade diferenciável. Uma k -forma diferencial w em M é chamada exata se existe uma $(k - 1)$ -forma f em M tal que $df = w$; w é dita fechada se $dw = 0$. Como $d^2 = 0$, temos que se w é exata então w é fechada.

A recíproca deste fato não é, em geral, verdadeira. No entanto, mostraremos neste capítulo que a condição $dw = 0$ é suficiente para que w seja localmente exata.

Definição 2.0.12. Uma variedade diferenciável M é contrátil (a um ponto $p_0 \in M$) se existir uma aplicação diferenciável $H : M \times [0, 1] \rightarrow M$ $H(p, t) \in M$, $p \in M$, $t \in [0, 1]$, tal que:

$$H(p, 1) = p, \quad H(p, 0) = p_0, \quad \text{para todo } p \in M$$

Para mostrar que \mathbb{R}^n é contrátil (a um ponto arbitrário $p_0 \in \mathbb{R}^n$) basta definir $H : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $H(p, t) = p_0 + (p - p_0)t$. O mesmo argumento mostra que a bola de raio r , $B_r = \{p \in \mathbb{R}^n; |p| < r\}$, de \mathbb{R}^n é contrátil. Decorre daí que toda variedade é localmente contrátil.

Lema 2.0.1. (*Lema de Poincaré*) Seja M uma variedade diferenciável contrátil e w uma k -forma diferencial em M , com $dw = 0$. Então existe uma $(k - 1)$ -forma f em M tal que $df = w$.

Demonstração: 1. Seja $\pi : M \times [0, 1] \rightarrow M$ a projeção $\pi(p, t) = p$ e seja \bar{w} a k -forma em $M \times [0, 1]$ dada por $\bar{w} = H^*w$. Precisaremos do seguinte lema.

Lema 2.0.2. A k -forma \bar{w} se escreve univocamente como

$$\bar{w} = w_1 + dt \wedge \eta, \quad (1)$$

onde w_1 é uma k -forma em $M \times [0, 1]$ com a propriedade que $w_1(v_1, \dots, v_k) = 0$, se algum v_i pertence ao núcleo de $d\pi$, e η é uma $(k-1)$ -forma com uma propriedade análoga.

Demonstração: 2. (do Lema 2.0.2) Seja $p \in M$ e $g : U \rightarrow M$ uma parametrização em torno de p . Então $g(U) \times I$ é uma vizinhança coordenada de $M \times [0, 1]$ de coordenadas, digamos, (x^1, \dots, x^n, t) . Em $g(U) \times I$, \bar{w} se escreve

$$\bar{w} = \sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + dt \wedge \sum b_{j_1 \dots j_{k-1}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k-1}} = w_1 + dt \wedge \eta. \quad (2)$$

É claro que w_1 e η possuem as propriedades requeridas. Além disso, é fácil verificar que $\bar{w} = 0$ se e só se $w_1 = \eta = 0$. Portanto, se a decomposição (1) existe (em toda a variedade), ela é única.

Para demonstrar que (1) existe globalmente, define-se w e η em cada vizinhança coordenada por (2). Por unicidade, as definições coincidem na interseção de duas vizinhanças coordenadas. ■

Seja agora $i_t : M \rightarrow M \times [0, 1]$ a aplicação dada por $i_t(p) = (p, t)$. Definiremos uma operação I que leva k -formas de $M \times [0, 1]$ em $(k-1)$ -formas de M do seguinte modo. Se $p \in M$ e $v_1, \dots, v_k \in T_p M$, então

$$I\bar{w}(p)(v_1, \dots, v_{k-1}) = \int_0^1 \{\eta(p, t)(di_t(v_1), \dots, di_t(v_{k-1}))\},$$

onde η é dado pelo Lema 2.0.2. O ponto crucial da demonstração do teorema está contido no lema seguinte.

Lema 2.0.3. $i_1^* \bar{w} - i_0^* \bar{w} = d(I\bar{w}) + I(d\bar{w})$.

Demonstração: 3. (do lema 2.0.3) Seja $p \in M$. Utilizaremos o sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n, t) introduzido no lema anterior. Observamos primeiro que a operação I é aditiva, isto é, $I(w_1 + w_2) = I(w_1) + I(w_2)$. Como a expressão a demonstrar também é aditiva, basta considerar os casos:
(a) $\bar{w} = g dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$,
(b) $\bar{w} = g dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}$.

Caso (a). Se $\bar{w} = gdx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, então $d\bar{w} = \frac{\partial g}{\partial t} dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} +$ termos sem dt , e portanto

$$\begin{aligned} I(d\bar{w})(p) &= \left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial t} dt\right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= [g(p, 1) - g(p, 0)] dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= i_1^* \bar{w}(p) - i_0^* \bar{w}(p). \end{aligned}$$

como $I\bar{w} = 0$, conclue-se o lema no caso (a).

Caso (b). Se $\bar{w} = gdt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}$, então $i_1^* \bar{w} = i_0^* \bar{w} = 0$. Por outro lado,

$$d\bar{w} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial g}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} (Id\bar{w})(p) &= -\sum_{\alpha} \left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^\alpha} dt\right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}} \\ e d(I\bar{w})(p) &= d\left\{\int_0^1 g dt\right\} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}} \\ &= \left(\sum_{\alpha} \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^\alpha} dt\right) dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}, \end{aligned}$$

o que demonstra o lema. ■

Podemos agora concluir a demonstração do teorema (observa-se que até agora não usamos a condição $dw = 0$.)

Como $H \circ i_1 = \text{identidade}$, $H \circ I_0 = \text{const.} = p_0$ temos que

$$\begin{aligned} w &= (H \circ i_1)^* w = i_1^*(H^* w) = i_1^* \bar{w} \\ 0 &= (H \circ i_0)^* w = i_0^*(H^* w) = i_0^* \bar{w} \end{aligned}$$

e

$$d\bar{w} = H^* dw = 0, \text{ pois } dw = 0.$$

Decorre daí, pelo Lema 2.0.3, que $w = i_1^* \bar{w} = d(I\bar{w}) = df$ onde $f = I\bar{w}$. ■

Capítulo 3

Imersões Isométricas

3.1 Imersões

Definição 3.1.1. Sejam M^n e $\overline{M}^{n+m=k}$ variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow \overline{M}$ é uma imersão se $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}\overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M$. O número m é chamado codimensão de f . Se, além disso, f é um homeomorfismo sobre $f(M) \subset \overline{M}$, onde $f(M)$ tem a topologia induzida por \overline{M} , diz-se que f é um mergulho. Se $M \subset \overline{M}$ e a inclusão $i : M \subset \overline{M}$ é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de \overline{M} .

Exemplo 1. Seja $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$ uma imersão. Se \overline{M} tem uma estrutura Riemanniana, f induz uma estrutura Riemanniana em M por $\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$, $u, v \in T_pM$. A métrica de M é chamada então a métrica *induzida* por f e f é uma *imersão isométrica*.

Seja $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$ uma imersão isométrica. Para cada $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ tal que a restrição de f a U é um mergulho sobre $f(U)$. Assim podemos identificar U com sua imagem sobre f . Portanto podemos considerar o espaço tangente de M em p como um subespaço do espaço tangente a \overline{M} em p e escrever

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^\perp \quad (3.1)$$

onde T_pM^\perp é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Desta decomposição obtemos um fibrado vetorial $TM^\perp = \cup_{p \in M} T_pM^\perp$, chamado o fibrado normal a M .

Deste modo, o fibrado vetorial

$$T\overline{M}|_{f(M)} = \{X \in T\overline{M} : \pi(X) \in f(M), \text{ onde } \pi : T\overline{M} \rightarrow \overline{M} \text{ é a projeção}\}$$

é a soma do fibrado tangente TM com TM^\perp , que é

$$T\overline{M}|_{f(M)} = TM \oplus TM^\perp$$

Com respeito a esta decomposição temos as projeções

$$\begin{aligned} (\cdot)^T &: T\overline{M}|_{f(M)} \rightarrow TM \\ (\cdot)^\perp &: T\overline{M}|_{f(M)} \rightarrow TM^\perp. \end{aligned}$$

que são chamadas tangencial e normal, respectivamente.

Seja \overline{M}^{n+m} uma variedade Riemanniana com conexão Riemanniana $\overline{\nabla}$, e seja $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$ uma imersão isométrica. Dados campos de vetores $X, Y \in TM$, temos que

$$\overline{\nabla}_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T + (\overline{\nabla}_X Y)^\perp.$$

Segue da unicidade da conexão Riemanniana que $(\overline{\nabla}_X Y)^T$ é a conexão Riemanniana de M , que será denotada por ∇ .

Definição 3.1.2. Seja $B : TM \times TM \rightarrow TM^\perp$ definida por

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \quad (\text{Fórmula de Gauss}). \quad (3.2)$$

A aplicação definida acima é chamada a segunda forma fundamental de f .

Das propriedades das conexões Riemannianas $\overline{\nabla}$ e ∇ temos que B é bilinear e simétrica sobre o anel \mathcal{D} de funções diferenciáveis sobre M .

Considere campos de vetores X de TM e η de TM^\perp , denotaremos por $\mathcal{S}_\eta X$ a componente tangencial de $-\overline{\nabla}_X \eta$, isto é

$$\mathcal{S}_\eta X = -(\overline{\nabla}_X \eta)^T.$$

Desde que para todo $Y \in TM$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= X \langle \eta, Y \rangle = \langle \overline{\nabla}_X \eta, Y \rangle + \langle \eta, \overline{\nabla}_X Y \rangle \\ 0 &= \langle -\mathcal{S}_\eta X, Y \rangle + \langle \eta, B(X, Y) + \nabla_X Y \rangle \end{aligned}$$

$$\text{assim } \langle \mathcal{S}_\eta X, Y \rangle = \langle B(X, Y), \eta \rangle \quad (3.3)$$

Em particular, a aplicação $\mathcal{S} : TM \times TM^\perp \rightarrow TM$ dada por $\mathcal{S}(X, \eta) = \mathcal{S}_\eta X$ é bilinear sobre \mathcal{D} e também simétrica, ou seja, $\langle \mathcal{S}_\eta X, Y \rangle = \langle X, \mathcal{S}_\eta Y \rangle$ para todo $X, Y \in TM$. A aplicação \mathcal{S}_η é chamada operador forma ou por um abuso de linguagem, segunda forma fundamental na direção de η .

A componente normal de $\bar{\nabla}_X \eta$, que denotamos por $\nabla_X^\perp \eta$, define uma conexão compatível sobre o fibrado normal TM^\perp . Dizemos que ∇^\perp é a conexão normal de f assim obtemos

$$\bar{\nabla}_X \eta = -\mathcal{S}_\eta X + \nabla_X^\perp \eta \quad \text{Fórmula de Weingarten} \quad (3.4)$$

Usando as fórmulas de Gauss e Weingarten obteremos as equações de Gauss, Codazzi e Ricci.

Sejam $X, Y, Z \in TM$, então

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z &= \bar{\nabla}_X (B(Y, Z) + \nabla_Y Z) \\ &= \bar{\nabla}_X \nabla_Y Z + \bar{\nabla}_X B(Y, Z) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$= \nabla_X \nabla_Y Z + B(X, \nabla_Y Z) - \mathcal{S}_{B(Y, Z)} X + \nabla_X^\perp B(Y, Z) \quad (3.6)$$

onde a primeira igualdade vem da fórmula de Gauss e a segunda das fórmulas de Gauss e Weingarten. Similarmente,

$$\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z = \nabla_Y \nabla_X Z + B(Y, \nabla_X Z) - \mathcal{S}_{B(X, Z)} Y + \nabla_Y^\perp B(X, Z) \quad (3.7)$$

Novamente pela fórmula de Gauss, temos

$$\bar{\nabla}_{[X, Y]} Z = \nabla_{[X, Y]} Z + B([XY], Z) \quad (3.8)$$

Subtraindo 3.7 e 3.8 de 3.6 obtemos

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + B(X, \nabla_Y Z) - B(Y, \nabla_X Z) - B([X, Y], Z) \\ &\quad - \mathcal{S}_{B(Y, Z)} X + \mathcal{S}_{B(X, Z)} Y + \nabla_X^\perp B(Y, Z) - \nabla_Y^\perp B(X, Z) \end{aligned}$$

considerando as componentes tangenciais, obtemos

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle + \\ &\quad - \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle \quad (\text{Equação de Gauss}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde R e \bar{R} são os tensores curvatura de M e \bar{M} , respectivamente.

Em particular, se $K(X, Y) = \langle R(X, Y)Y, X \rangle$ e $\bar{K}(X, Y) = \langle \bar{R}(X, Y)Y, X \rangle$ denotam as curvaturas seccionais em M e \bar{M} do plano gerado pelos vetores ortonormais $X, Y \in T_pM$, a equação de Gauss torna-se

$$\begin{aligned} K(X, Y) &= \langle R(X, Y)Y, X \rangle \\ &= \langle \bar{R}(X, Y)Y, X \rangle + \langle B(X, X), B(Y, Y) \rangle - \langle B(Y, X), B(X, Y) \rangle \\ &= \bar{K}(X, Y) + \langle B(X, X), B(Y, Y) \rangle - \langle B(X, Y), B(X, Y) \rangle \end{aligned}$$

Por outro lado, pegando a componente normal de $\bar{R}(X, Y)Z$, otemos

$$\begin{aligned} (\bar{R}(X, Y)Z)^\perp &= (R(X, Y)Z)^\perp + B(X, \nabla_Y Z) - B(Y, \nabla_X Z) \\ &\quad - B([X, Y], Z) + \nabla_X^\perp B(Y, Z) - \nabla_Y^\perp B(X, Z) \\ &= B(X, \nabla_Y Z) - B(Y, \nabla_X Z) - B(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) \\ &\quad + \nabla_X^\perp B(Y, Z) - \nabla_Y^\perp B(X, Z) \\ &= B(X, \nabla_Y Z) - B(Y, \nabla_X Z) - B(\nabla_X Y, Z) \\ &\quad - B(\nabla_Y X, Z) + \nabla_X^\perp B(Y, Z) - \nabla_Y^\perp B(X, Z) \\ &= \nabla_X^\perp B(Y, Z) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z) \\ &\quad - \nabla_Y^\perp B(X, Z) + B(\nabla_Y X, Z) + B(X, \nabla_Y Z) \end{aligned}$$

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X^\perp B)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp B)(X, Z), \text{ Equação de Codazzi (3.10)}$$

onde por definição

$$(\nabla_X^\perp B)(Y, Z) = \nabla_X^\perp B(Y, Z) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z)$$

Observa-se que $\nabla^\perp B$ é $C^\infty(M)$ multilinear. ∇^\perp pode ser vista como uma conexão no fibrado vetorial $\mathcal{L}_2(TM \times TM, TM^\perp)$.

Denotaremos por R^\perp o tensor curvatura do fibrado normal TM^\perp , que é

$$R^\perp(X, Y)\eta = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \eta - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \eta - \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta$$

para todo $X, Y \in TM$ e $\eta \in TM^\perp$. Segue das fórmulas de Gauss e Weingarten que $\bar{R}(X, Y)\eta$ satisfaz

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)\eta &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \eta - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \eta - \bar{\nabla}_{[X, Y]} \eta \\ &= \bar{\nabla}_X(-\mathcal{S}_\eta Y) + \bar{\nabla}_X \nabla_Y^\perp \eta - \bar{\nabla}_Y(-\mathcal{S}_\eta X) \\ &\quad - \bar{\nabla}_Y \nabla_X^\perp \eta + \mathcal{S}_\eta[X, Y] - \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta \\ &= B(X, -\mathcal{S}_\eta Y) + \nabla_X(-\mathcal{S}_\eta Y) - \mathcal{S}_{\nabla_Y^\perp \eta} X + \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \eta \\ &\quad - B(Y, -\mathcal{S}_\eta X) - \nabla_Y(-\mathcal{S}_\eta X) + \mathcal{S}_{\nabla_X^\perp \eta} Y - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \eta \\ &\quad - \mathcal{S}_\eta[X, Y] - \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned}
(\overline{R}(X, Y)\eta)^\perp &= \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \eta - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \eta - \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta \\
&\quad + B(\mathcal{S}_\eta X, Y) - B(X, \mathcal{S}_\eta Y) \\
(\overline{R}(X, Y)\eta)^\perp &= R^\perp(X, Y)\eta + B(\mathcal{S}_\eta X, Y) - B(X, \mathcal{S}_\eta Y) \\
&\quad \text{(Equação de Ricci)}
\end{aligned}$$

que, por sua vez, pode ser escrita como

$$\langle \overline{R}(X, Y)\eta, \varepsilon \rangle = \langle R^\perp(X, Y)\eta, \varepsilon \rangle - \langle [\mathcal{S}_\eta, \mathcal{S}_\varepsilon]X, Y \rangle,$$

onde $X, Y \in TM$, $\eta, \varepsilon \in TM^\perp$ e $[\mathcal{S}_\eta, \mathcal{S}_\varepsilon] = \mathcal{S}_\eta \mathcal{S}_\varepsilon - \mathcal{S}_\varepsilon \mathcal{S}_\eta$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\langle \overline{R}(X, Y)\eta, \varepsilon \rangle - \langle R^\perp(X, Y)\eta, \varepsilon \rangle &= \langle B(\mathcal{S}_\eta X, Y), \varepsilon \rangle - \langle B(X, \mathcal{S}_\eta Y), \varepsilon \rangle \\
&= \langle \mathcal{S}_\varepsilon \mathcal{S}_\eta X, Y \rangle - \langle \mathcal{S}_\varepsilon X, \mathcal{S}_\eta Y \rangle \\
&= \langle \mathcal{S}_\varepsilon \mathcal{S}_\eta X, Y \rangle - \langle \mathcal{S}_\eta \mathcal{S}_\varepsilon X, Y \rangle \\
&= \langle (\mathcal{S}_\varepsilon \mathcal{S}_\eta - \mathcal{S}_\eta \mathcal{S}_\varepsilon)X, Y \rangle \\
&= -\langle [\mathcal{S}_\eta, \mathcal{S}_\varepsilon]X, Y \rangle
\end{aligned}$$

Similarmente, a equação de Codazzi pode ser escrita como

$$(\overline{R}(X, Y)\eta)^T = (\nabla_Y \mathcal{S})(X, \eta) - (\nabla_X \mathcal{S})(Y, \eta)$$

onde por definição $(\nabla_Y \mathcal{S})(X, \eta) = \nabla_Y \mathcal{S}_\eta X - \mathcal{S}_\eta \nabla_Y X - \mathcal{S}_{\nabla_Y^\perp \eta} X$.

De fato

$$\begin{aligned}
(\overline{R}(X, Y)\eta)^T &= \nabla_X(-\mathcal{S}_\eta Y) - \mathcal{S}_{\nabla_X^\perp \eta} X - \nabla_Y(-\mathcal{S}_\eta X) \\
&\quad + \mathcal{S}_{\nabla_X^\perp \eta} Y + \mathcal{S}_\eta[X, Y] \\
&= \nabla_Y \mathcal{S}_\eta X - \nabla_X \mathcal{S}_\eta Y + \mathcal{S}_{\nabla_X^\perp \eta} Y \\
&\quad - \mathcal{S}_{\nabla_Y^\perp \eta} X + \mathcal{S}_\eta[X, Y] \\
&= \nabla_Y \mathcal{S}_\eta X - \nabla_X \mathcal{S}_\eta Y + \mathcal{S}_{\nabla_X^\perp \eta} Y \\
&\quad - \mathcal{S}_{\nabla_Y^\perp \eta} X - \mathcal{S}_\eta \nabla_Y X + \mathcal{S}_\eta \nabla_X Y \\
&= (\nabla_Y \mathcal{S})(X, \eta) - (\nabla_X \mathcal{S})(Y, \eta)
\end{aligned}$$

A seguir escrevemos as equações de uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$, onde a partir de agora \overline{M}_c denotará uma variedade com curvatura seccional constante c . Neste caso o tensor curvatura \overline{R} de \overline{M} é dado por

$$\overline{R}(X, Y) = c(X \wedge Y)$$

para todo $X, Y \in T\overline{M}$ onde para todo $Z \in T\overline{M}$,

$$(X \wedge Y)Z = \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y$$

Então, para $X, Y, Z, W \in TM$ e $\eta, \varepsilon \in TM^\perp$, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci são respectivamente:

$$i) \quad \langle R(X, Y)Z, W \rangle = c\langle (X \wedge Y)Z, W \rangle + \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle - \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle,$$

$$ii) \quad \begin{aligned} (\nabla_X^\perp B)(Y, Z) &= (\nabla_Y^\perp B)(X, Z), \text{ ou equivalentemente} \\ (\nabla_X \mathcal{S})(Y, \eta) &= (\nabla_Y \mathcal{S})(X, \eta), \end{aligned}$$

desde que $(\overline{R}(X, Y)Z)^\perp = (c(X \wedge Y)Z)^\perp = (c(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y))^\perp = 0$
e $(\overline{R}(X, Y)\eta)^T = (c(\langle Y, \eta \rangle X - \langle X, \eta \rangle Y))^T = 0$

$$iii) \quad \begin{aligned} R^\perp(X, Y)\eta &= B(X, \mathcal{S}_\eta Y) - B(\mathcal{S}_\eta X, Y), \text{ ou equivalentemente} \\ \langle R^\perp(X, Y)\eta, \varepsilon \rangle &= \langle [\mathcal{S}_\eta, \mathcal{S}_\varepsilon]X, Y \rangle \end{aligned}$$

desde que $\overline{R}(X, Y)\eta^\perp = 0$.

Note que segue de (iii) que $R_X^\perp = 0$ se e somente se existe uma base ortogonal para $T_p M$ que diagonaliza simultaneamente todo \mathcal{S}_η , $\eta \in T_p M^\perp$.

A partir daqui, \mathbb{Q}_c^{n+m} denotará uma variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa $(n+m)$ -dimensional com curvatura seccional c , isto é a esfera Euclidiana \mathbb{S}_c^{n+m} , espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+m} ou o espaço hiperbólico \mathbb{H}_c^{n+m} .

Capítulo 4

Teorema Fundamental das Imersões Isométricas

No Capítulo anterior mostramos que as equações de Gauss, Codazzi e Ricci são satisfeitas para qualquer imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$. Neste Capítulo será mostrado uma recíproca deste resultado quando $\overline{M}^{n+m} = \mathbb{Q}_c^{n+m}$.

Teorema 4.0.1. *Teorema Fundamental das Imersões*

1. Sejam M^n uma variedade Riemanniana simplesmente conexa, $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial Riemanniano de posto k com uma conexão compatível ∇' e seja B uma seção simétrica do fibrado $\mathcal{L}_2(TM \times TM, E)$. Defina, para cada seção local ε de E , uma aplicação $\mathcal{S}_\varepsilon : TM \rightarrow TM$ por $\langle \mathcal{S}_\varepsilon X, Y \rangle = \langle B(X, Y), \varepsilon \rangle$ $X, Y \in TM$.

Se B e ∇' satisfazem as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para o caso de curvatura seccional constante c , então existe uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_c^{n+k}$, e um isomorfismo de fibrados vetoriais $\tilde{f} : E \rightarrow TM^\perp$ ao longo de f , tal que para todo $X, Y \in TM$ e toda seção normal ε, η de E

$$\begin{aligned}\langle \tilde{f}(\varepsilon), \tilde{f}(\eta) \rangle &= \langle \varepsilon, \eta \rangle \\ \tilde{f} B(X, Y) &= \tilde{B}(X, Y) \\ \tilde{f} \nabla'_X \varepsilon &= \nabla_X^\perp \tilde{f}(\varepsilon)\end{aligned}$$

onde \tilde{B} e ∇^\perp são a segunda forma fundamental e a conexão normal de f , respectivamente.

2. Suponha que f e g sejam imersões isométricas de uma variedade conexa M^n sobre \mathbb{Q}_c^{n+k} . Sejam TM_f^\perp , B_f e ∇_f^\perp o fibrado normal, a segunda forma fundamental e conexão normal de f , respectivamente e sejam TM_g^\perp , B_g e ∇_g^\perp os correspondentes objetos para g . Se existe um homomorfismo de fibrados $\tilde{\Phi} : TM_f^\perp \rightarrow TM_g^\perp$ tal que, para todo $X, Y \in TM$ e todo $\varepsilon, \eta \in TM_f^\perp$

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\Phi}(\varepsilon), \tilde{\Phi}(\eta) \rangle &= \langle \varepsilon, \eta \rangle \\ \tilde{\Phi}B_f(X, Y) &= B_g(X, Y) \\ \tilde{\Phi}\nabla_{fX}^\perp \varepsilon &= \nabla_{gX}^\perp \tilde{\Phi}(\varepsilon)\end{aligned}$$

então existe uma isometria $\tau : \mathbb{Q}_c^{n+k} \rightarrow \mathbb{Q}_c^{n+k}$ tal que $g = \tau \circ f$ e $d\tau|_{TM_f^\perp} = \tilde{\Phi}$.

Demonstração: 4. Primeiro mostraremos (i). Seja ∇ a conexão Riemanniana de TM . Considere a soma $\tilde{E} = TM \oplus E$ munida com a soma ortogonal das métricas de TM e E . Defina ∇'' por

$$\begin{aligned}\nabla_X'' Y &= \nabla_X Y + B(X, Y) \quad X, Y \in TM \\ \nabla_X'' \xi &= -\mathcal{S}_\xi X + \nabla_X' \xi, \quad X \in TM, \xi \in E.\end{aligned}$$

Mostremos que ∇'' é uma conexão Riemanniana sobre \tilde{E} .

$$\begin{aligned}i) \quad \nabla_{fX+gY}'' Z &= \nabla_{fX+gY} Z + B(fX + gY, Z) \\ &= f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z + fB(X, Z) + gB(Y, Z) \\ &= f(\nabla_X Z + B(X, Z)) + g(\nabla_Y Z + B(Y, Z)) \\ &= f\nabla_X'' Z + g\nabla_Y'' Z.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{fX+gY}'' \xi &= -\mathcal{S}_\xi(fX + gY) + \nabla_{fX+gY}' \xi \\ &= f(-\mathcal{S}_\xi X + \nabla_X' \xi) + g(-\mathcal{S}_\xi Y + \nabla_Y' \xi) \\ &= f\nabla_X'' \xi + g\nabla_Y'' \xi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ii) \quad \nabla_X''(Y + Z) &= \nabla_X(Y + Z) + B(X, Y + Z) \\ &= \nabla_X Y + \nabla_X Z + B(X, Y) + B(X, Z) \\ &= \nabla_X'' Y + \nabla_X'' Z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_X''(\xi + \eta) &= -\mathcal{S}_{\xi+\eta} X + \nabla_X'(\xi + \eta) \\ &= -\mathcal{S}_\xi X - \mathcal{S}_\eta X + \nabla_X' \xi + \nabla_X' \eta \\ &= \nabla_X'' \xi + \nabla_X'' \eta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iii) \quad \nabla_X''(fY) &= \nabla_X fY + B(X, fY) \\
&= f\nabla_X Y + X(f)Y + fB(X, Y) \\
&= f(\nabla_X Y + B(X, Y)) + X(f)Y \\
&= f\nabla_X'' Y + X(f)Y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_X''(f\xi) &= -\mathcal{S}_{f\xi}X + \nabla_X'(f\xi) \\
&= f(-\mathcal{S}_\xi X) + f\nabla_X'\xi + X(f)\xi \\
&= f\nabla_X''\xi + X(f)\xi.
\end{aligned}$$

onde $X, Y, Z \in (TM)$, $\xi, \eta \in E$ e $f, g \in \mathcal{D}(\tilde{E})$.

Ou seja, ∇'' é uma conexão afim.

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
i) \quad \nabla_X'' Y - \nabla_Y'' X &= \nabla_X Y + B(X, Y) - \nabla_Y X - B(Y, X) \\
&= \nabla_X Y - \nabla_Y X \\
&= [X, Y]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ii) \quad \langle \nabla_X'' Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X'' Z \rangle &= \langle \nabla_X Y + B(X, Y), Z \rangle \\
&\quad + \langle Y, \nabla_X Z + B(X, Z) \rangle \\
&= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle + \langle B(X, Y), Z \rangle \\
&\quad + \langle Y, B(X, Z) \rangle \\
&= X\langle Y, Z \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iii) \quad \langle \nabla_X'' \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla_X'' \eta \rangle &= \langle -\mathcal{S}_\xi X + \nabla_X' \xi, \eta \rangle + \langle \xi, -\mathcal{S}_\eta X + \nabla_X' \eta \rangle \\
&= \langle -\mathcal{S}_\xi X, \eta \rangle + \langle \nabla_X' \xi, \eta \rangle \\
&\quad + \langle \xi, -\mathcal{S}_\eta X \rangle + \langle \xi, \nabla_X' \eta \rangle \\
&= \langle \nabla_X' \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla_X' \eta \rangle \\
&= X\langle \eta, \xi \rangle.
\end{aligned}$$

Ou seja, ∇'' é uma conexão Riemanniana sobre \tilde{E} .

Usando que B e ∇' satisfazem as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para o caso de curvatura seccional constante zero, mostraremos que o tensor curvatura de \tilde{E} é identicamente nulo.

$$\begin{aligned}
R''(X, Y)\xi &= \nabla''_X \nabla''_Y \xi - \nabla''_Y \nabla''_X \xi - \nabla''_{[X, Y]}\xi \\
&= \nabla''_X(-\mathcal{S}_\xi Y + \nabla'_Y \xi) - \nabla''_Y(-\mathcal{S}_\xi X + \nabla'_X \xi) \\
&\quad - (-\mathcal{S}_\xi[X, Y] + \nabla'_{[X, Y]}\xi) \\
&= -\nabla_X \mathcal{S}_\xi Y + B(X, -\mathcal{S}_\xi Y) - \mathcal{S}_{\nabla'_Y \xi} X + \nabla'_X \nabla'_Y \xi + \nabla_Y \mathcal{S}_\xi X \\
&\quad - B(Y, -\mathcal{S}_\xi X) + \mathcal{S}_{\nabla'_X \xi} Y - \nabla'_Y \nabla'_X \xi + \mathcal{S}_\xi[X, Y] - \nabla'_{[X, Y]}\xi \\
&= R'(X, Y)\xi + B(X, -\mathcal{S}_\xi Y) - B(Y, -\mathcal{S}_\xi X) - \nabla_X \mathcal{S}_\xi Y \\
&\quad - \mathcal{S}_{\nabla'_Y \xi} X + \nabla_Y \mathcal{S}_\xi X + \mathcal{S}_{\nabla'_X \xi} Y + \mathcal{S}_\xi[X, Y]
\end{aligned}$$

Pela equação de Ricci e de Codazzi temos

$$\begin{aligned}
R''(X, Y)\xi &= B(X, \mathcal{S}_\xi Y) - B(\mathcal{S}_\xi X, Y) + B(X, -\mathcal{S}_\xi Y) - B(Y, -\mathcal{S}_\xi X) \\
&\quad - \nabla_X \mathcal{S}_\xi Y - \mathcal{S}_{\nabla'_Y \xi} X + \nabla_Y \mathcal{S}_\xi X + \mathcal{S}_{\nabla'_X \xi} Y + \mathcal{S}_\xi[X, Y] \\
&= (\nabla_Y \mathcal{S}_\xi X - \mathcal{S}_\xi \nabla_Y X - \mathcal{S}_{\nabla'_Y \xi} X) \\
&\quad - (\nabla_X \mathcal{S}_\xi Y - \mathcal{S}_\xi \nabla_X Y - \mathcal{S}_{\nabla'_X \xi} Y) \\
&= (\nabla_Y \mathcal{S})(X, \xi) - (\nabla_X \mathcal{S})(Y, \xi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Além disso

$$\begin{aligned}
R''(X, Y)Z &= \nabla''_X \nabla''_Y Z - \nabla''_Y \nabla''_X Z - \nabla''_{[X, Y]}Z \\
&= \nabla''_X(\nabla_Y Z + B(Y, Z)) - \nabla''_Y(\nabla_X Z + B(X, Z)) - \nabla_{[X, Y]}Z \\
&\quad - B([X, Y], Z) \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z + B(X, \nabla_Y Z) - \mathcal{S}_{B(Y, Z)} X + \nabla'_X B(Y, Z) \\
&\quad - \nabla_Y \nabla_X Z - B(Y, \nabla_X Z) + \mathcal{S}_{B(X, Z)} Y - \nabla'_Y B(X, Z) \\
&\quad - \nabla_{[X, Y]}Z - B([X, Y], Z)
\end{aligned}$$

Pela equação de Gauss

$$\begin{aligned}
\langle R''(X, Y)Z, W \rangle &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle -\mathcal{S}_{B(Y, Z)} X + \mathcal{S}_{B(X, Z)} Y, W \rangle \\
&= \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle - \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle \\
&\quad + \langle -\mathcal{S}_{B(Y, Z)} X, W \rangle + \langle \mathcal{S}_{B(X, Z)} Y, W \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, pela equação de Codazzi, temos

$$\begin{aligned}
\langle R''(X, Y)Z, \xi \rangle &= \langle \nabla'_X B(Y, Z) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z), \xi \rangle \\
&\quad - \langle \nabla'_Y B(X, Z) - B(\nabla_Y X, Z) - B(X, \nabla_Y Z), \xi \rangle \\
&= \langle 0, \xi \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Escolha um ponto $p \in M$, e vetores ortonormais $\xi_1, \dots, \xi_{n+k} \in \tilde{E}_p = \pi^{-1}(p)$. Desde que M é simplesmente conexa e o tensor curvatura de \tilde{E} é zero, existem únicas extensões globais ξ_1, \dots, ξ_{n+k} paralelas com respeito a ∇'' . Para detalhes veja [8]. Estas seções são ortonormais em cada ponto pois ∇'' é compatível com a métrica, ou seja

$$X\langle \xi, \eta \rangle = \langle \nabla''_X \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla''_X \eta \rangle = 0.$$

Escolha coordenadas locais (x_1, \dots, x_n) em uma vizinhança U de p . Daqui, existem funções $a_{i\nu}$ definidas em U tais que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{\nu=1}^{n+k} a_{i\nu} \xi_\nu, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Assim os coeficientes da métrica de M são dados por

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_{\nu=1}^{n+k} a_{i\nu} a_{j\nu}.$$

Desde que as seções ξ_ν são paralelas, temos

$$\begin{aligned} \nabla''_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} &= \nabla''_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \sum_{\nu=1}^{n+k} a_{j\nu} \xi_\nu \\ &= \sum_{\nu=1}^{n+k} a_{j\nu} \nabla''_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \xi_\nu + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{\nu=1}^{n+k} a_{j\nu} \right) \xi_\nu \\ &= \sum_{\nu=1}^{n+k} \frac{\partial a_{j\nu}}{\partial x_i} \xi_\nu \end{aligned}$$

Além disso, usando a simetria de B , que ∇ é a conexão Riemanniana de TM e que $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \nabla''_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - B \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \nabla''_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} + B \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n+k} \frac{\partial a_{j\nu}}{\partial x_i} \xi_\nu - \sum_{\nu=1}^{n+k} \frac{\partial a_{i\nu}}{\partial x_j} \xi_\nu \\ &= \sum_{\nu=1}^{n+k} \left(\frac{\partial a_{j\nu}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{i\nu}}{\partial x_j} \right) \xi_\nu. \end{aligned}$$

ou seja

$$\frac{\partial a_{j\nu}}{\partial x_i} = \frac{\partial a_{i\nu}}{\partial x_j}$$

Usando a igualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
d(\sum a_{i\nu} dx_i) &= \sum da_{i\nu} \wedge dx_i \\
&= \sum_{i,j} \frac{\partial a_{i\nu}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i \\
&= \sum_{i,j} \frac{\partial a_{j\nu}}{\partial x_i} dx_j \wedge dx_i \\
&= -\sum_{i,j} \frac{\partial a_{j\nu}}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j \\
&= -\sum_{i,j} \frac{\partial a_{i\nu}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i
\end{aligned}$$

Portanto $\sum \frac{\partial a_{i\nu}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i = 0$ que é $d(\sum a_{i\nu} dx_i) = 0$ e assim a 1-forma $\sum a_{i\nu} dx_i$ é fechada.

Desde que 1-formas fechadas são exatas sobre U , existem funções f_ν satisfazendo $df_\nu = \sum \frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} dx_i = \sum a_{i\nu} dx_i$ e assim $\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} = a_{i\nu}$.

Defina uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ sobre uma vizinhança U de p por $f = (f_1, \dots, f_{n+k})$. Assim

$$df \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = (a_{i1}, \dots, a_{i, n+k}),$$

e para $i, j = 1, \dots, n$, temos

$$\left\langle df \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right), df \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right\rangle = \sum_{\nu=1}^{n+k} a_{i\nu} a_{j\nu} = g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$$

Em outras palavras, f é uma imersão isométrica. Definimos um isomorfismo $\tilde{\Phi}$ entre os fibrados $TU \oplus E$ e $T\mathbb{R}^{n+k}|_{f(U)} = Tf(U) \oplus Tf(U)^\perp$ por $\tilde{\Phi}(\varepsilon_\eta) = e_\nu$, onde e_ν , $\nu = 1, \dots, n+k$, é a restrição do referencial canônico de $T\mathbb{R}^{n+k}$ a $f(U)$. Para os vetores tangentes $\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{\nu=1}^{n+k} a_{i\nu} \varepsilon_\nu$, temos

$$\tilde{\Phi} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{\nu=1}^{n+k} a_{i\nu} \tilde{\Phi}(\varepsilon_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n+k} a_{i\nu} e_\nu = df \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

daqui $\tilde{\Phi}$ manda $TM|_U$ isomorficamente sobre $Tf(U)$. Por ser uma isometria entre fibras, manda E isomorficamente sobre $Tf(U)^\perp$. Além disso, desde que $\tilde{\Phi}$ leva o referencial ortonormal paralelo $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+k}$ sobre o referencial ortonormal paralelo e_1, \dots, e_{n+k} , $\tilde{\Phi}$ satisfaz para todo $X, Y \in TM$ e $\varepsilon \in E$, $\tilde{\Phi}(\nabla_X'' Y) = \tilde{\nabla}_{dfX} \tilde{\Phi}(Y)$ e $\tilde{\Phi}(\nabla_X'' \varepsilon) = \tilde{\nabla}_{dfX} \tilde{\Phi}(\varepsilon)$, onde $\tilde{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de \mathbb{R}^{n+k} .

Considerando as componentes normais e definindo $\tilde{f} = \tilde{\Phi}|_E$, obtemos

$$\tilde{f} B(X, Y) = \tilde{B}(X, Y), \quad \tilde{f} \nabla'_X \varepsilon = \nabla_{dfX}^\perp \tilde{f}(\varepsilon).$$

Se tivéssemos escolhido coordenadas locais diferentes y_1, \dots, y_n ainda encontraríamos as equações $\frac{\partial f_\nu}{\partial y_i} = a_{i\nu}$. Desde que essas equações determinam f sobre uma constante, a imersão é determinada sobre uma translação. Se tivéssemos escolhido um referencial inicial diferente, as isometrias iriam diferir por uma rotação. Então f é determinada a menos de um movimento rígido. Para provar (ii) temos que os fibrados $T(\mathbb{R}^{n+k})|_{f(M)}$ e $T(\mathbb{R}^{n+k})|_{g(M)}$ contêm o fibrado tangente TM , e que existe um isomorfismo de fibrados que preserva métrica e conexão e é a identidade sobre TM . Pensando em f como aquela de (i) vemos que, sobre uma vizinhança, elas somente diferem por um movimento rígido sobre \mathbb{R}^{n+k} .

O fato de M ser simplesmente conexa nos capacita a "colar" todas as isometrias. A idéia da colagem é a seguinte.

Se U_1 é um aberto contrátil onde f está bem definida e U_2 é outro aberto contrátil tal que a interseção é não vazia e conexa então f pode ser estendida univocamente para U_2 .

Assim dados 2 pontos p e q quaisquer de M e uma curva α ligando-os é possível cobrir tal curva por vizinhanças contráteis de maneira que podemos definir f numa vizinhança de q a partir da definição de f em p . Como M é simplesmente conexa tal definição independe da curva. Para mostrar isto, inicialmente observamos que a função f está bem definida para curvas suficientemente próximas de α ligando p a q . Pela mesma razão é possível mostrar que se $\lambda : [0, 1] \rightarrow M$ é uma curva fechada tal que $f(\lambda(0)) = f(\lambda(1))$ o mesmo ocorre para qualquer curva fechada obtida de λ através de deformação.

Suponhamos que β seja uma curva que determina em q um valor para f diferente do valor determinado por α .

A curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ que leva p a q por α e q a p por β (no sentido contrário) é uma curva fechada tal que $f(\gamma(0)) \neq f(\gamma(1))$.

Como M é simplesmente conexa γ pode ser deformada a uma curva contida numa vizinhança contrátil onde f está bem definida, o que é uma contradição.

Mostramos a primeira parte do Teorema fundamental das imersões para o caso de curvatura seccional constante igual a zero. Trataremos agora do caso em que a curvatura seccional é constante positiva.

Suponhamos que B e ∇' satisfazem as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para o caso de curvatura seccional constante c positiva, ou seja

$$\begin{aligned}
 i) \quad \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= c \langle (X \wedge Y)Z, W \rangle \\
 &\quad + \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle - \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle, \\
 ii) \quad (\nabla'_X B)(Y, Z) &= (\nabla'_Y B)(X, Z).
 \end{aligned}$$

$$iii) \quad R'(X, Y)\eta = B(X, \mathcal{S}_\eta Y) - B(\mathcal{S}_\eta X, Y).$$

Construiremos \bar{B} e $\bar{\nabla}$ que satisfaçam as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para o caso de curvatura seccional constante igual a zero.

Seja $\bar{E} = E \oplus \mathbb{R}$ e $\bar{\nabla}$ conexão compatível do fibrado Riemanniano $\pi : \bar{E} \rightarrow M$ de posto $k + 1$ definida do seguinte modo:

$$\bar{\nabla}_X \varepsilon = \nabla'_X \varepsilon \text{ se } \varepsilon \in E$$

$$\bar{\nabla}_X N = 0 \text{ se a componente de } N \text{ em } E \text{ é zero e } |N| = 1.$$

Seja ainda \bar{B} seção simétrica do fibrado $\mathcal{L}_2(TM \times TM, \bar{E})$ definida por $\bar{B}(X, Y) = B(X, Y) + \sqrt{c}\langle X, Y \rangle N$. Defina para cada seção local $\bar{\varepsilon}$ de \bar{E} uma aplicação $\bar{\mathcal{S}}_\varepsilon : TM \rightarrow TM$ por $\langle \bar{\mathcal{S}}_\varepsilon X, Y \rangle = \langle \bar{B}(X, Y), \bar{\varepsilon} \rangle$, $X, Y \in TM$. Claramente temos que se $\bar{\varepsilon} \in E$ então $\bar{\mathcal{S}}_\varepsilon = \mathcal{S}_\varepsilon$.

Inicialmente, mostremos que \bar{B} satisfaz a equação de Gauss .

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= c\langle (X \wedge Y)Z, W \rangle + \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle \\ &\quad - \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle \\ &= c\langle (X \wedge Y)Z, W \rangle \\ &\quad + \langle \bar{B}(X, W) - \sqrt{c}\langle X, W \rangle N, \bar{B}(Y, Z) - \sqrt{c}\langle Y, Z \rangle N \rangle \\ &\quad - \langle \bar{B}(X, Z) - \sqrt{c}\langle X, Z \rangle N, \bar{B}(Y, W) - \sqrt{c}\langle Y, W \rangle N \rangle \\ &= c\langle (X \wedge Y)Z, W \rangle + \langle \bar{B}(X, W), \bar{B}(Y, Z) \rangle \\ &\quad + \langle \bar{B}(X, W), -\sqrt{c}\langle Y, Z \rangle N \rangle + \langle -\sqrt{c}\langle X, W \rangle N, \bar{B}(Y, Z) \rangle \\ &\quad + \langle \sqrt{c}\langle X, W \rangle N, \sqrt{c}\langle Y, Z \rangle N \rangle - \langle \bar{B}(X, Z), \bar{B}(Y, W) \rangle \\ &\quad + \langle \bar{B}(X, Z), \sqrt{c}\langle Y, W \rangle N \rangle + \langle \sqrt{c}\langle X, Z \rangle N, \bar{B}(Y, W) \rangle \\ &\quad - \langle \sqrt{c}\langle X, Z \rangle N, \sqrt{c}\langle Y, W \rangle N \rangle \\ &= \langle \bar{B}(X, W), \bar{B}(Y, Z) \rangle - \langle \bar{B}(X, Z), \tilde{B}(Y, W) \rangle \\ &\quad + c\langle (X \wedge Y)Z, W \rangle + c\langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - c\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle \\ &\quad - \sqrt{c}\langle Y, Z \rangle \langle \bar{B}(X, W), N \rangle - \sqrt{c}\langle X, W \rangle \langle N, \bar{B}(Y, Z) \rangle \\ &\quad + \sqrt{c}\langle Y, W \rangle \langle \bar{B}(X, Z), N \rangle + \sqrt{c}\langle X, Z \rangle \langle N, \bar{B}(Y, W) \rangle \\ &= \langle \bar{B}(X, W), \bar{B}(Y, Z) \rangle - \langle \bar{B}(X, Z), \bar{B}(Y, W) \rangle \\ &\quad + c(\langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle) \\ &\quad + c(\langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle) \\ &\quad - \sqrt{c}\langle Y, Z \rangle \sqrt{c}\langle X, W \rangle - \sqrt{c}\langle X, W \rangle \sqrt{c}\langle Y, Z \rangle \\ &\quad + \sqrt{c}\langle Y, W \rangle \sqrt{c}\langle X, Z \rangle + \sqrt{c}\langle X, Z \rangle \sqrt{c}\langle Y, W \rangle \\ &= \langle \bar{B}(X, W), \bar{B}(Y, Z) \rangle - \langle \bar{B}(X, Z), \bar{B}(Y, W) \rangle \\ &\quad + 2c(\langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle) \\ &\quad - 2c(\langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle) \end{aligned}$$

ou seja $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \bar{B}(X, W), \bar{B}(Y, Z) \rangle - \langle \bar{B}(X, Z), \bar{B}(Y, W) \rangle$ e assim \bar{B} satisfaz a equação de Gauss para $c = 0$.

Além disso, mostremos que \bar{B} e $\bar{\nabla}$ satisfaz a equação de Codazzi.

Seja $\beta(X, Y) = \sqrt{c}\langle X, Y \rangle N$.

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_X \bar{B})(Y, Z) &= (\bar{\nabla}_X B)(Y, Z) + (\bar{\nabla}_X \beta)(Y, Z) \\
&= (\nabla'_X B)(Y, Z) + \bar{\nabla}_X \beta(Y, Z) \\
&\quad - \beta(\nabla_X Y, Z) - \beta(Y, \nabla_X Z) \\
&= (\nabla'_Y B)(X, Z) + \bar{\nabla}_X(\sqrt{c}\langle Y, Z \rangle N) \\
&\quad - \beta(\nabla_X Y, Z) - \beta(Y, \nabla_X Z) \\
&= (\bar{\nabla}_Y B)(X, Z) + \sqrt{c}\langle Y, Z \rangle \bar{\nabla}_X N + \sqrt{c}X(\langle Y, Z \rangle)N \\
&\quad - \sqrt{c}\langle \nabla_X Y, Z \rangle N - \sqrt{c}\langle Y, \nabla_X Z \rangle N \\
&= (\bar{\nabla}_Y B)(X, Z) + \sqrt{c}X(\langle Y, Z \rangle)N - \sqrt{c}X(\langle Y, Z \rangle)N \\
&= (\bar{\nabla}_Y B)(X, Z) \\
&= (\bar{\nabla}_Y B)(X, Z) + (\bar{\nabla}_Y \beta)(X, Z) \\
&= (\bar{\nabla}_Y \bar{B})(X, Z)
\end{aligned}$$

Finalmente, mostremos que \bar{B} e \bar{R} satisfazem a equação de Ricci, ou seja mostremos que:

$$\begin{aligned}
i) \bar{R}(X, Y)\eta &= \bar{B}(X, \mathcal{S}_\eta Y) - \bar{B}(\mathcal{S}_\eta X, Y) \\
ii) \bar{R}(X, Y)N &= \bar{B}(X, \mathcal{S}_N Y) - \bar{B}(\mathcal{S}_N X, Y)
\end{aligned}$$

onde $\eta \in E$, $N \notin E$, $|N| = 1$, $\bar{R}(X, Y)\eta = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \eta - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \eta - \bar{\nabla}_{[X, Y]}\eta$
e $\bar{R}(X, Y)N = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y N - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X N - \bar{\nabla}_{[X, Y]}N$. Como

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)\eta &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \eta - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \eta - \bar{\nabla}_{[X, Y]}\eta \\
&= \bar{\nabla}_X \nabla'_Y \eta - \bar{\nabla}_Y \nabla'_X \eta - \nabla'_{[X, Y]}\eta \\
&= \nabla'_X \nabla'_Y \eta - \nabla'_Y \nabla'_X \eta - \nabla'_{[X, Y]}\eta \\
&= R'(X, Y)\eta
\end{aligned}$$

Basta mostrar que $\bar{B}(X, \mathcal{S}_\eta Y) - \bar{B}(\mathcal{S}_\eta X, Y) = B(X, \mathcal{S}_\eta Y) - B(\mathcal{S}_\eta X, Y)$.

De fato, desde que \mathcal{S}_η é simétrica temos

$$\begin{aligned}
\bar{B}(X, \mathcal{S}_\eta Y) - \bar{B}(\mathcal{S}_\eta X, Y) &= B(X, \mathcal{S}_\eta Y) - \sqrt{c}\langle X, \mathcal{S}_\eta Y \rangle \\
&\quad - B(\mathcal{S}_\eta X, Y) - \sqrt{c}\langle \mathcal{S}_\eta X, Y \rangle \\
&= B(X, \mathcal{S}_\eta Y) - B(\mathcal{S}_\eta X, Y)
\end{aligned}$$

Para mostrar (ii) inicialmente observemos que

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\mathcal{S}}_N X, Y \rangle &= \langle \bar{B}(X, Y), N \rangle \\
&= \langle B(X, Y) + \sqrt{c}\langle X, Y \rangle N, N \rangle \\
&= \sqrt{c}\langle X, Y \rangle \text{ para todo } X, Y \in TM.
\end{aligned}$$

Assim, $\bar{\mathcal{S}}_N X = \sqrt{c}X$.

Além disso, $\bar{R}(X, Y)N = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y N - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X N - \bar{\nabla}_{[X, Y]}N = 0$.

Por outro lado $\bar{B}(X, \bar{\mathcal{S}}_N Y) - \bar{B}(\bar{\mathcal{S}}_N X, Y) = \sqrt{c}\bar{B}(X, Y) - \sqrt{c}\bar{B}(X, Y) = 0$.

Assim, $\bar{R}(X, Y)N = \bar{B}(X, \bar{\mathcal{S}}_N Y) - \bar{B}(\bar{\mathcal{S}}_N X, Y)$.

Portanto, estando nas condições da primeira parte da demonstração (curvatura seccional nula) temos que existe uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+(k+1)}$. Para concluir esta parte precisamos do seguinte lema.

Lema 4.0.1. Sejam $f : M \rightarrow \mathbb{R}^r$ uma imersão, onde M é uma variedade Riemanniana conexa de dimensão n imersa em \mathbb{R}^r e v um campo de vetores normal unitário paralelo com relação à conexão normal, tal que v é uma direção umbílica, ou seja $\overline{\mathcal{S}}_v X = \alpha X$ então $f(M)$ está contido numa esfera de raio $\frac{1}{|\alpha|}$.

Demonstração: 5. Como v é paralelo na conexão normal temos que $\overline{\nabla} v = 0$ e como v é uma direção umbílica, temos que $\overline{\mathcal{S}}_v X = \alpha X$, para todo $X \in TM$. Definindo $g : M \rightarrow \mathbb{R}^r$, por $g(p) = X(p) + \frac{v(p)}{\alpha}$ onde $x(p)$ é o vetor posição, mostraremos que g é constante. De fato, seja $X \in TM$. Como $D_X v = -\overline{\mathcal{S}}_v X + \overline{\nabla}_X v$ e $\nabla'_X v = 0$, calculando a derivada de g na direção do campo X temos

$$D_X g = X - \frac{1}{\alpha} \overline{\mathcal{S}}_v X = X - X = 0,$$

portanto concluímos que $D_X g = 0$ e como M é uma subvariedade conexa, temos que g é constante, ou seja, $g(M)$ reduz-se a um ponto p_0 . Então temos que $x(p) - p_0 = \frac{-v(p)}{\alpha}$ então obtemos que $|x(p) - p_0| = \frac{1}{|\alpha|}$, o que mostra que $f(M)$ está contida em uma esfera de centro p_0 e raio $\frac{1}{|\alpha|}$. ■

Basta observar portanto que N satisfaz as condições do lema acima para $\alpha = \sqrt{c}$ e portanto $f(M)$ está contida numa esfera de raio $\frac{1}{\sqrt{c}}$, ou seja numa esfera de curvatura c .

Para o caso $c < 0$ o argumento é análogo, pois é possível mergulhar o espaço hiperbólico \mathbb{H}_n em \mathbb{R}^{n+1} , não com a métrica usual do \mathbb{R}^{n+1} mas com a métrica de Lorentz [8]. Isto conclui a demonstração. ■

Referências Bibliográficas

- [1] CARMO, M.P., Geometria Riemanniana, *Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada*, 1988 - segunda edição. (Projeto Euclides)
- [2] CARMO, M.P. 8º COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, Formas Diferenciais e Aplicações. *Poços de Caldas*, 5 a 23 de 1971.
- [3] CARMO, M.P., O Método do Referencial Móvel, *Rio de Janeiro: Escola Latino Americana de Matemática*, 1976.
- [4] DAJCZER, M., Submanifolds and isometric immersion, *Houston, Publish or Perish*, 1990.
- [5] KOBAYASHI, S. and NOMIZU, K., Foundations of Differential Geometry. *Wiley Classics Library Edition Published*, 1996, v.1.
- [6] KOBAYASHI, S. and NOMIZU, K., Foundations of Differential Geometry. *Wiley Classics Library Edition Published*, 1996, v.2.
- [7] LIMA, E.L., Grupo fundamental e espaços de recobrimento, *Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq*, 1993.
- [8] LIMA, E.L., Variedades Diferenciáveis, *Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada*, 1973.
- [9] MILNOR, J.W. and STASHEFF, J.D., Characteristic Classes, *Princeton University Press*, 1974.
- [10] O'NEILL Barrett, Elementary Differential Geometry, *Academic Press*, 1966.
- [11] SPIVAK Michael, A comprehensive Introduction to Differential Geometry, *Publish or Perish*, 1970, v.1.
- [12] SPIVAK Michael, A comprehensive Introduction to Differential Geometry, *Publish or Perish*, 1979, v.4.

[13] *TENENBLAT, K.*, On isometric immersions of Riemannian manifolds, *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*, Rio de Janeiro, 1971,23-36.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)