UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PÓS – GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

UMA GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE H. HOPF E AS INEQUAÇÕES DE CAUCHY – RIEMANN

INÊS SILVA DE OLIVEIRA

MANAUS
2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - UFAM
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE
PÓS – GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

INÊS SILVA DE OLIVEIRA

UMA GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE H. HOPF E AS INEQUAÇÕES DE CAUCHY – RIEMANN

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**, área de Concentração em **Geometria Diferencial**.

Orientador: Profº Dr. Renato de Azevedo Tribuzy.

MANAUS

2006

Aos meus pais, Antônia (*in memorian*) e Altemir, que sempre me apoiaram e me deram forças para alcançar meus objetivos.

Resumo

UMA GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE H. HOPF E AS INEQUAÇÕES DE CAUCHY – RIEMANN

Orientador: Dr. Renato de Azevedo Tribuzy

Programa de Pós – Graduação em Matemática

Em 1951, H. Hopf publicou um teorema sobre superfícies de curvatura média constante, concluindo que "Se M é uma superfície compacta de gênero zero (homeomorfo a uma esfera) imersa em IR^3 com curvatura média constante H, então M é isométrica à esfera". Foi mostrado por Chern em 1955 que o resultado de Hopf ainda é válido com uma hipótese mais fraca sobre H. O objetivo deste trabalho é dar uma prova clara e detalhada do resultado de Chern enunciado a seguir:

Teorema: Seja M uma superfície de gênero zero, P um espaço 3 - dimensional de curvatura constante c, e seja f:M→P uma imersão isométrica tal que $|dH| \leq \gamma(H^2 - K + c)^{\frac{1}{2}}$, *onde K é a curvatura Gaussiana da imersão e* γ *é uma função real contínua, então M é isométrica à uma esfera e f é totalmente umbílica.*

Palavra chave: Imersão isométrica, esfera, imersão totalmente umbílica.

Abstract

A GENERALIZATION OF H. HOPF THEOREM AND THE CAUCHY – RIEMANN INEQUALITY

In 1951, H. Hopf published a theorem on surfaces of constant mean curvature, concluding that “A genus zero compact surface *M* immersed in $\mathbb{R}^3$ with constant mean curvature H is isometric to the standard sphere. Chern showed in 1955 that Hopf’s result is true with a more weak hypothesis on H. The goal of this work is to present a detailed proof Chern´s result statement to follow:

Theorem. *Let M be a genus zero surface, P a 3-space of constant curvature c, and f:M→P an isometric immersion such that* $|dH| \leq \gamma(H^2 - K + c)^{\frac{1}{2}}$, *where K is the Gaussian curvature of the immersion and* γ *is a continuous real function. Then M is isometric to a round sphere and f is totally umbilic.*

Key word: Isometric immersions, sphere, totally umbilic immersions

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos a todos que de alguma forma contribuíram para o êxito deste trabalho. E em especial:

À Deus, pelo dom da vida.

Aos meus pais que com simplicidade e carinho sempre procuraram me mostrar o caminho a seguir, ensinando-me a importância da educação na vida de um ser humano.

À minha irmã Itelvina, que soube entender minhas dificuldades e ausências.

Ao meu noivo Igor, pelo amor e cumplicidade.

Ao Orientador, Professor Dr. Renato de Azevedo Tribuzy, pelo incentivo e confiança que depositou em mim.

Aos professores da Pós – Graduação em Matemática da UFAM, pelo valioso conhecimento que me forneceram.

Aos amigos, pelo prazer de suas amizades, conversas e trocas de conhecimentos.

À FAPEAM, pela bolsa concedida durante os anos de curso.

Sumário

Introdução

Em 1951, H. Hopf [9] fez um estudo de superfícies compactas, com curvatura média constante, concluindo que " Se uma superfície compacta de gênero zero (homeomorfo a uma esfera) M está imersa em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante H, então M é isométrica a uma esfera redonda". Hopf deu duas provas para este resultado (Ver [9] para detalhes). As provas dependem do fato que qualquer superfície pode ser dada em parâmetros isotérmicos (u, v), isto é, $ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$, onde λ é uma função positiva em M, tal que M pode ser vista como uma superfície de Riemann com parâmetro local $z = u + iv$.

A idéia da primeira prova foi construir uma certa forma holomorfa Ψ na superfície que está globalmente definida em que seus zeros são precisamente os pontos umbílicos. Como M é homeomorfa à esfera $\Psi \equiv 0$ e todos os pontos de M são umbílicos, e portanto M é isométrica à esfera.

Hopf deu outra prova mais interessante. Observou que a equação quadrática Im $(\Psi dz^2) = 0$ determinava dois campos de direções (as direções principais). Como Ψ é holomorfa, se z_0 é um zero de Ψ, ou $\Psi \equiv 0$ em uma vizinhança V de z_0 ou z_0 é isolado e tem índice negativo. Portanto se Ψ não é identicamente nula a característica de Euler teria que ser negativa, o que é uma contradição, já que o gênero de M é zero. Assim $\Psi \equiv 0$ em M.

Durante vários anos os matemáticos se dedicaram à prova da conjectura de que a esfera é a única superfície compacta com curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$, quando em 1986 H.Went [13] deu um contra - exemplo mostrando a existência de um toro imerso em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante.

No artigo de Hopf de 1951 também é mostrado que o teorema vale para superfícies especiais de Weingarten desde que elas sejam analíticas.

A restrição de que as superfícies especiais de Weingarten sejam analíticas para a validade do teorema de Hopf foi retirada por Hartman e Wintner [8] em 1954.

O objetivo deste trabalho é dar uma prova detalhada do resultado de Chern enunciado a seguir:

Teorema: *Seja M uma superfície de gênero zero e P um espaço 3 - dimensional de curvatura constante c, e seja f: M →P uma imersão isométrica tal que* $|dH| \leq \gamma\,(H^2 - K + c)^{\frac{1}{2}}$ *, onde K é a curvatura Gaussiana da imersão e* γ é uma função real contínua, *então M é isométrica à esfera e f é totalmente umbílica.*

Existem generalizações deste resultado, por exemplo:

Eschenburg e Tribuzy [7] em 1991, consideraram γ como uma função L^p, $2 < p \leq \infty$.

Em 2001, Abresch e Rosenberg [1] consideraram uma superfície M imersa em $M^2(c) \times \mathbb{R}$, onde $M^2(c)$ é uma variedade Riemanniana de dimensão 2, completa, simplesmente conexa, com curvatura constante c e introduziu em M a forma quadrática $Q\,(X,Y) = 2H\alpha\,(X,Y) - c\,\langle \xi X, \xi Y\rangle$ onde α é a segunda forma fundamental, X e Y são vetores tangentes a M e $\xi : M^2(c) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a projeção natural em $\mathbb{R}$, i.e., $\xi\,(p,t) = t$, $p \in M^2(c)$, $t \in \mathbb{R}$. Eles mostraram que $Q^{(2,0)}((2,0)-$componente de Q) é holomorfa $\Leftrightarrow$ H é constante, e se M é uma superfície compacta de gênero zero, então M é uma superfície invariante por rotações mergulhada em $M^2(c) \times \mathbb{R}$.

Recentemente, Hilário Alencar, Manfredo do Carmo e Renato Tribuzy [2], provaram o seguinte resultado:

" Seja M uma superfície compacta de gênero zero imersa em $M^2(c) \times \mathbb{R}$. Assuma que $|dH| \leq g\,\left|Q^{(2,0)}\right|$, onde $|dH|$ é a norma da diferencial da curvatura média H de M, e g é uma função real não - negativa, contínua, então Q é identicamente nula, e M é uma superfície invariante por rotações mergulhada em $M^2(c) \times \mathbb{R}$".

O trabalho está organizado da seguinte forma:

No primeiro capítulo fixamos a notação, apresentamos algumas definições e fatos elementares da Geometria Diferencial.

No segundo capítulo apresentamos o Teorema de Stokes.

No terceiro capítulo mostramos resultados importantes de Análise Complexa.

No quarto capítulo as definições de imersões isométricas e imersões totalmente umbílicas.

No quinto capítulo é demonstrado o teorema principal, objeto de estudo deste trabalho.

No sexto capítulo é apresentada uma generalização do teorema principal, considerando agora P como um espaço 3-dimensional de curvatura constante c.

Capítulo 1

Teoria local das superfícies

1.1 Superfícies Regulares

Intuitivamente, entendemos por superfície regular qualquer conjunto de pontos de $\mathbb{R}^3$ obtido pela "colagem" de gráficos de funções diferenciáveis de duas variáveis de tal modo que a figura resultante não apresente pontas, arestas ou auto-interseção e de modo que tenha sentido falar em plano tangente nos pontos dessa figura. Aqui, e em todo o texto, o termo diferenciável será usado para denotar aplicações de classe C^∞.

1.1.1 Definição e exemplos

Definição 1.1 *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $X : U \to V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que*

i) X é diferenciável;

ii) X é um homeomorfismo;

iii) Para todo $q \in U$, a diferencial $d_{X_q} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetiva.(Condição de regularidade).

A aplicação X é dita uma parametrização (ou sistema de coordenadas) em uma vizinhança de p $\in$ S.

Mostrar que um subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ é uma superfície regular consiste em exibir uma família de parametrizações X_p:$U_p \rightarrow V_p \cap S$ que cubram S. Uma tal família é denominada um atlas para a superfície. Usualmente denotaremos uma parametrização pelo par (U_p, X_p) ou simplesmente (U, X).

Usando coordendas (u, v) de $\mathbb{R}^2$ e (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, uma parametrização é dada por:

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \ \in U \subset \mathbb{R}^2.$$

Para $q = (u_0, v_0) \in U$ o vetor (1,0) é o vetor tangente à curva $u \rightarrow (u, v_0)$, cuja imagem por X é a curva em S

$$u \mapsto X(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)).$$

Esta curva em S é denominada *curva coordenada* $v = v_0$ e tem por vetor tangente o vetor $\mathrm{X}_u = (x_u, y_u, z_u)$, onde as derivadas são calculadas em (u_0, v_0). Assim,

$$dX_q(1, 0) = X_u = (x_u, y_u, z_u).$$

Analogamente, usando a curva coordenada $\mathrm{u} = \mathrm{u}_0$, obtemos

$$dX_q(0, 1) = X_v = (x_v, y_v, z_v).$$

e concluímos que a matriz, em relação às bases canônicas, da transformação linear $d_{X_q} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada pela *matriz jacobiana*

$$JX(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

A condição *iii)* da Definição 1.1 é equivalente ao fato de que os vetores X_u e X_v são linearmente independentes, e assim, $dX_q(\mathbb{R}^2)$ é um subespaço vetorial de dimensão dois de $\mathbb{R}^3$ gerado por X_u e X_v. Portanto um dos *menores de ordem dois* da matriz jacobiana, isto é, um dos determinantes jacobianos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \tag{1.2}$$

é diferente de zero em q.

Observação 1.1 *Sendo X um homeomorfismo temos que qualquer ponto de S possui uma vizinhança aberta (em S) homeomorfa a um disco $D \subseteq \mathbb{R}^2$, e essa vizinhança pode ser tomada tão pequena quanto se queira.*

Exemplo 1.1 Qualquer plano Π em $\mathbb{R}^3$ gerado por dois vetores linearmente independentes w_1, w_2, é uma superfície regular. De fato, Π admite uma descrição da forma $X(u,v) = p_0 + uw_1 + vw_2$, onde $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, e $p_0 \in \Pi$ é um ponto fixo. As condições *i)* e *iii)* da Definição 1.1.1 são de verificação trivial, e *ii)* resulta do fato de que a solução das equações $X(u,v) = p$, para $p = (a,b,c) \in \Pi$, é uma função de 1^o grau em a, b, c, logo, contínua. Assim, Π possui um atlas formado por uma só parametrização.

Exemplo 1.2 Se f: $U \to \mathbb{R}$ for uma função diferenciável definida num aberto U de $\mathbb{R}^2$, seu gráfico $G(f) = \{(u,v,f(u,v)) : (u,v) \in U\} \subseteq \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular que admite um atlas formado pela parametrização global $X(u,v) = (u,v,f(u,v)), (u,v) \in U$. De fato, a condição *i)* é claramente satisfeita. Também é de fácil verificação que $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$, condição *iii)*. Finalmente, todo ponto (x,y,z) do gráfico é imagem sob X de um único ponto $(x,y) \in U$. Assim, X é injetora e como X^{-1} é a restrição da projeção (contínua) de $\mathbb{R}^3$ no plano xy ao gráfico de f, X^{-1}é contínua. Em particular, um hemisfério aberto da esfera $S^2 = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 = 1\}$, é uma superfície regular.

Proposição 1.1 *Qualquer ponto p de uma superfície regular S possui em S uma vizinhança W de uma das três seguintes formas:*

$$\begin{aligned} W &= \{(x, y, h(x, y)) : (x, y) \in U\} \\ W &= \{(x, h(x, z), z)) : (x, z) \in U\} \\ W &= \{(h(y, z), y, z))) : (y, z) \in U\}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

onde U é um aberto de $\mathbb{R}^2$ *e h é uma função diferenciável.*

Demonstração. Seja (U, X) uma parametrização na vizinhança de p. Um dos três determinantes jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \ \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \text{ ou } \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)},$$

é não-nulo quando calculado em X^{-1}(p) . Podemos supor, sem perda de generalidade, que seja o primeiro. O teorema da aplicação inversa (Ver [10] , para detalhes) garante então que existe uma vizinhança aberta D $\subseteq$ U de X^{-1}(p) restrita à qual $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ é um difeomorfismo sobre a imagem . Ora, $W = X(D)$ é a vizinhança procurada, pois $R = f(D)$ é um aberto de $\mathbb{R}^2$, $h(x, y) = z \circ f^{-1}(x, y)$ é diferenciável, e $W = X \circ f^{-1}(R) = \{(x, y, h(x, y)) : (x, y) \in R\}$. ■

Definição 1.2 Um ponto p $\in$ V diz-se ponto regular para a função diferenciável

$f : V \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se o gradiente

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \tag{1.4}$$

calculado em p, for um vetor não-nulo; e $a \in f(V)$ é um valor regular de f se $f^{-1}(\{a\})$ contiver só pontos regulares.

Proposição 1.2 *Se a for um valor regular de* $f : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$*, então* $f^{-1}(\{a)\}$ *é uma superfície regular.*

Demonstração. $\nabla f \neq 0$, logo renomeando os eixos, se necessário, podemos supor que $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$. Nesta situação definamos a aplicação$F(x, y, z) = (x, y, g(x, y, z))$.Como det $JF(p) = \frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$,F é inversível numa vizinhanca de p:existem assim abertos U, W $\subseteq \mathbb{R}^3$ tais que $p \in U \subseteq V$, e F envia U difeomoricamente em W. Notemos agora que a inversa $G : W \to U$ de $\mathrm{F}_{|U}$ tem a forma $G(x, y, z) = (x, y, g(x, y, z))$ e que, para (x, y, z) $\in$ U, as seguintes igualdades são equivalentes:

$$
\begin{aligned}
f(x, y, z) &= a, \\
F(x, y, z) &= (x, y, a), \\
(x, y, z) &= G(x, y, a), \\
z &= g(x, y, a).
\end{aligned}
$$

A equivalência entre a primeira e a última destas igualdades mostra que $U \cap f^{-1}(\{a\})$ é o gráfico da função diferenciável $h(x, y) = g(x, y, a)$, cujo domínio é o aberto $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, a) \in W\}$ e conclui a prova de que $\mathrm{f}^{-1}(\{a\})$ é uma superfície. ■

Proposição 1.3 *Seja $p \in S$ um ponto de uma superfície regular S e tome uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ com $p \in X(U) \subset S$ e tal que as condições i) e iii) da Definição 1.1.1 se verifiquem. Assuma que X seja injetora. Então X^{-1} é contínua.*

Observação 1.2 Se a curva regular $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u)), u \in$ I, é um homeomorfismo sobre sua imagem e $f(u) > 0$ para todo $u \in$ I, a rotação de α em torno do eixo z fornece uma superfície S, chamada superfície de rotação (em torno do eixo z).

1.1.2 Funções diferenciáveis em superfícies, plano tangente

A condição de regularidade *iii)* da definição de superfície garante que para todo ponto $p \in$ S o conjunto de vetores tangentes às curvas parametrizadas de S, pasando por p, $\{\alpha'(0) \mid \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ é C^∞ e $\alpha(0) = p\}$ constitui um plano de $\mathbb{R}^3$, e vale o seguinte:

Proposição 1.4 *Seja* $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ *uma parametrização de uma superfície regular* S *e tome* $q \in U$*. O subespaço vetorial de dimensão 2,* $dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$*, "coincide" com o conjunto de vetores tangentes a* S *em* $X(q)$*.*

Definição 1.3 *Pela proposição 1.4, o plano* $p + dX_q(\mathbb{R}^2)$ *que passa por* $p = X(q)$ *não depende da parametrização* X *e será chamado de plano tangente a* S *em* p*. Identificaremos* $dX_q(\mathbb{R}^2)$ *e* $p + dX_q(\mathbb{R}^2)$ *e os denotaremos por* T_pS*. A escolha da parametrização* X *determina uma base* $\{X_u, X_v\}$ *de* T_pS*, chamada base associada a parametrização* X*.*

Podemos pensar agora em fazer Cálculo Diferencial em superfícies, isto é, dizer o que são funções diferenciáveis neste contexto. As derivadas dessas funções têm como domínio, não a superfície, mas seu espaço tangente.

Definição 1.4 Sejam S_1 e S_2 duas superfícies. Uma aplicação $f : \mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}_2$ diz-se $diferenciável$ se sua expressão em cordenadas locais for diferenciável, iste é, se para cada p $\in \mathrm{S}_1$, existirem parametrizações (U, X) de S_1 e (V, Y) de S_2 nas vizinhanças de p e $f(p)$, respectivamente, tais que $Y^{-1} \circ f \ \circ X$ seja diferenciável. Analogamente,uma função f :$\mathrm{S}_1 \to \mathbb{R}$ diz-se $diferenciável$ se cada ponto de S_1 tiver uma vizinhança parametrizada (U, X) tal que $f \circ X$ seja diferenciável. Um $difeomorfismo$ entre superfícies é uma bijeção diferenciável $f : \mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}_2$ cuja inversa é também diferenciável.

Proposição 1.5 *Seja* p *um ponto de uma superfície regular S, e tome* $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$, $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \to S$ *duas parametrizações de* S *tais que* $p \in X(U) \cap Y(V) = W$*. Então a mudança de coordenadas* $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \to X^{-1}(W)$ *é um difeomorfismo no sentido usual, isto é,* h *é diferenciável e tem inversa diferenciável.*

Segue da Proposição 1.5 que a noção de diferenciabilidade não depende da parametrização e, portanto, está bem definida.

Seja $f : \mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}_2$ uma aplicação diferenciável em p $\in \mathrm{S}_1$. A derivada de f em p é a aplicação $df_p : T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$ definida do seguinte modo: se $w = \alpha'(0) \in T_pS_1$, então $df_p(w) = (f \circ \alpha)'(0)$.É claro que o mesmo vetor representa a velocidade em p de muitas curvas diferentes,mas veremos que df_p está bem definida.

Tomemos coordenadas locais $X(u,v)$ e $Y(\varsigma,\eta)$ em p e $f(p)$, respectivamente, e ponhamos $\widetilde{f} = Y^{-1} \circ f \circ X$, com essa notação temos o seguinte resultado:

Proposição 1.6 *A diferencial $df_{p:}T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$ é a aplicação linear cuja matriz relativa às bases $\{X_u,\ X_v\}$ de T_PS_1 e $\{Y_\zeta, Y\eta\}$ de $T_{f(p)}S_2$ é a jacobiana de $\widetilde{f}$ em $X^{-1}(p)$. Consequentemente, $df_p(w)$ não depende da curva α.*

Demonstração. Escrevendo $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, a curva $\beta = f \circ \alpha$ é dada por $\beta(t) = Y(\zeta(t), \eta(t))$, onde $(\zeta(t), \eta(t)) = \widetilde{f}$ (u(t),v(t)). Derivando a última igualdade, obtemos

$$\begin{pmatrix} \zeta'(0) \\ \eta'(0) \end{pmatrix} = J\ \widetilde{f}_{(u(0),v(0))} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} = J\ \widetilde{f}_{X^{-1}(p)} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}$$

A igualdade $\mathrm{df}_p(\alpha'(0)) = \beta'(0)$ que define df_p, pode ser reescrita na forma $\mathrm{df}_p(u'(0))\mathrm{X}_u$ + $\mathrm{v}'(0)\mathrm{X}_v = \zeta'(0)\mathrm{Y}_\zeta + \eta'(0)\mathrm{Y}_\eta$. Das igualdades acima resulta que $df_p\left(\alpha'(0)\right)$ está bem definida, não depende de α mas apenas de $\alpha'(0)$, e que, além disso, df_p é linear e tem matriz J $\widetilde{f}_{X^{-1}(p)}$ relativa às bases referidas. ■

1.1.3 Comprimentos, ângulos e áreas: a primeira forma fundamental

Qualquer superfície regular $\mathrm{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ herda do espaço ambiente uma noção de grandeza que permite medir a área de regiões e o comprimento de curvas em S. Essa noção é proveniente da forma quadrática $\mathrm{I}_p : \mathrm{T}_p\mathrm{S} \to \mathbb{R}_+$ definida por

$$I_p(w) =< w, w >_p, |w| \geq 0, \tag{1.5}$$

onde $< \cdot, \cdot >_p$ é a restrição a $\mathrm{T}_p\mathrm{S}$ do produto interno usual em $\mathbb{R}^3$.

Definição 1.5 A forma quadrática I_p em T_pS definida pela equação (1.5) é chamada a primeira forma quadrática (ou primeira forma fundamental) de $\mathrm{S} \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in \mathrm{S}$.

Se X(u,v) for uma parametrização de S e $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva diferenciável, temos

$$\begin{aligned} I_{\alpha(t)}(\alpha^{'}(t)) &= < u^{'}(t)X_u + v^{'}(t)X_v, u^{'}(t)X_u + v^{'}(t)X_v >_{\alpha(t)} \\ &= Eu^{'}(t)^2 + 2Fu^{'}(t)v^{'}(t) + Gv^{'}(t)^2 \end{aligned} \tag{1.6}$$

onde E, F, G são chamados de coeficientes da primeira forma fundamental definidos por

$$\begin{aligned} E &= < X_u, X_u >_p \\ F &= < X_u, X_v >_p \\ G &= < X_v, X_v >_p \end{aligned} \tag{1.7}$$

Observe que numa vizinhança de $X^{-1}(p)$ as funções E(u, v), F(u, v), G(u, v) são diferenciáveis.

Dada uma curva regular $\alpha : I \to S$ e dado [t_0, t] $\subseteq$ I, então o *comprimento de arco* de α de t_0 até t é dado pelo limite superior dos comprimentos das linhas poligonais inscritas à curva entre $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t)$, e é igual a

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\alpha^{'}(t)\right| dt.$$

Assim, da igualdade (1.6) concluímos que o comprimento de $\alpha(t)$, t $\in$ [a, b], é dado por

$$l(\alpha) = \int_a^b \sqrt{Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2} dt. \tag{1.8}$$

Por causa dessa igualdade é comum referir-se à métrica de uma superfície pelo *elemento comprimento de arco ds* de S, e escrever

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \tag{1.9}$$

Observe que se temos $v = aX_u + bX_v$ e $w = cX_u + dX_v$, o produto interno de v e w é dado por

$$< v, w > \quad = \frac{1}{2}[I_p(v+w) - I_p(v) - I_p(w)] = acE + (ad+bc)F + bdG \tag{1.10}$$

O ângulo θ entre duas curvas parametrizadas regulares $\alpha: I \rightarrow S, \beta: I \rightarrow S$ que se intersectam em $\mathrm{t} = \mathrm{t}_0$ é dado por

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| \, |\beta'(t_0)|}. \tag{1.11}$$

Em particular, o ângulo φ das curvas coordenadas de uma parametrização $X(u,v)$ é

$$\cos\varphi = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{|X_u| \, |X_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}; \tag{1.12}$$

decorre daí que as *curvas coordenadas de uma parametrização são ortogonais* se e semente se $\mathrm{F}(u,v) = 0$, para todo (u,v). Uma tal parametrização é chamada uma *parametrização ortogonal.*

Outro problema métrico que aparece é com relação ao cálculo de áreas de "pedaços" da superfície.

Definição 1.6 Um domínio (regular) de S é um conjunto aberto e conexo de S tal que sua fronteira seja a imagem de um círculo por um homeomorfismo diferenciável cuja diferencial é não-nula, exceto num número finito de pontos. Uma região de S é a união de um domínio com sua fronteira. Uma região de $\mathrm{S} \subset \mathbb{R}^3$ é limitada se ela está contida em alguma bola de $\mathbb{R}^3$.

Podemos considerar regiões limitadas R que estão contidas em uma vizinhança coordenada $X(U)$ de uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathrm{S}$. Em outras palavras, R é a imagem por X de uma região limitada $\mathrm{Q} \subset \mathrm{U}$.

A função $|\ \mathrm{X}_u \ \mathrm{x}\ \mathrm{X}_v|$, definida em U, mede a área do paralelogramo gerado pelos vetores X_u e X_v. E, além disso, a integral $\int_Q |\mathrm{X}_u \ \mathrm{x}\ \mathrm{X}_v| dudv$ não depende da parametrização

X.

De fato, seja $\overline{X} : \overline{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma outra parametrização com R $\subset \overline{X}(\overline{U})$ e $\overline{Q} = \overline{X}^{-1}(R)$. Seja $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})}$ o jacobiano da mudança de parâmetros $h = X^{-1} \circ \overline{X}$.Então

$$\begin{aligned} \int\int_{\overline{Q}} |X_{\overline{u}} \text{ x } X_{\overline{v}}| d\overline{u}d\overline{v} &= \int\int_{\overline{Q}} |X_u \text{ x } X_v| \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})} \right| d\overline{u}d\overline{v} \\ &= \int\int_{Q} |X_u \text{ x } X_v| dudv. \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre do teorema de variáveis em integrais múltiplas (Ver [10]).

Definição 1.7 Seja $R \subseteq S$ uma região limitada de uma superfície regular contida em uma vizinhança coordenada da parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. O número positivo

$$\int_Q |X_u \text{ x } X_v| dudv = A(R), Q = X^{-1}(R),$$

é chamado de área de R.

Existem justificativas geométricas para a definição acima, mas não trataremos disso aqui.

Observe que $|\mathrm{X}_u \text{ x } \mathrm{X}_v|^2 + <\mathrm{X}_u, \mathrm{X}_v> = |\mathrm{X}_u|^2 . |\mathrm{X}_v|^2$, assim usando os coeficientes da primeira forma (1.7) temos que a área de uma região $R \subseteq S$ contida num só sistema de coordenadas (U, X) é dada pela integral

$$\int\int_{X^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} dudv. \tag{1.13}$$

Se R não estiver contida numa só vizinhança parametrizada, podemos escrevê-la como a união disjunta, finita ou enumerável, de regiões R_λ cujas áreas podemos calcular, e somar os resultados.

As expressões (1.8), (1.11) e (1.13) mostram que os conceitos de comprimento de curvas, ângulos entre curvas e áreas de superfícies só dependem do conhecimento da primeira forma quadrática e não fazem referência ao espaço ambiente.

1.2 Aplicação de Gauss

Trataremos agora da geometria extrínseca da superfície, definindo quantidades (curvaturas) que traduzem o modo como a superfície está mergulhada no espaço ambiente. O principal alvo deste estudo é o campo de vetores normais à superfície; assim, trabalharemos só com superfícies orientáveis.

1.2.1 Orientabilidade

Intuitivamente, uma superfície é orientável quando nela for possível diferenciar o lado de cima do de baixo, de modo que o observador lá colocado possa distinguir esquerda de direita. Esta abordagem funciona quando o observador é tridimensional e tem uma idéia da situação da superfície no espaço ambiente, mas isto se torna um pouco delicado quando tratamos de seres bidimensionais, cujo universo é a superfície.

Dados dois vetores linearmente independentes v e w em $\mathbb{R}^3$, o terno (v, w, N), onde $N = \frac{v \text{ x } w}{|v \text{ x } w|}$, forma uma base positivamente orientada de $\mathbb{R}^3$, isto é, a matriz cujas colunas são (na mesma ordem) esses vetores tem determinante positivo. O vetor N é um vetor unitário ortogonal ao plano Π gerado por v e w, induzindo em Π uma orientação do seguinte modo: uma base (v, w) de Π diz-se positivamente orientada se o terno (v_1, w_1, N) for uma base positivamente orientada de $\mathbb{R}^3$. Assim, Π tem exatamente duas orientações, induzidas por N e por seu simétrico -N.

Definição 1.8 *Dizemos que uma superfície S é orientável se for possível escolher, para cada $p \in S$, uma orientação em T_pS que varie continuamente em p, mais precisamente, se existir uma aplicação contínua de S na esfera unitária S^2, N: $S \to S^2$ tal que, para cada p, $N(p)$ seja ortogonal a T_pS. A um tal campo de vetores normais N chamamos uma orientação de S.*

Definição 1.9 *Chamamos de aplicação de Gauss de uma superfície orientável S a orientação $N : S \to S^2$ cuja representação local é:*

$$N(u,v) = \frac{X_u(u,v) \text{ x } X_v(u,v)}{|X_u(u,v) \text{ x } X_v(u,v)|}, \tag{1.14}$$

(X é uma parametrização de S).

Fazendo uma identificação de $T_{N(p)}S^2$ com T_pS, observe que N é uma aplicação diferenciável e sua derivada $dN_p : T_pS \to T_pS$ é uma aplicação linear auto-adjunta.

De fato, derivando a igualdade $N(u,v) = N \circ X(u,v)$ temos

$$N_u = dN_{X(u,v)}(X_u), \quad N_v = dN_{X(u,v)}(X_v).$$

Como N é um vetor ortogonal a X_u e X_v temos $<X_u, N) = 0 = <X_v, N>$ e derivando estas igualdades com relação a v e u respectivamente, obtemos

$$< X_{uv}, N > + < X_u, N_v >= 0, \; < X_{vu}, N > + < X_v, N_u >= 0,$$

e daí, subtraindo membro a membro e usando que $X_{uv} = X_{vu}$, obtemos

$$< X_u, N_v >=< X_v, N_u > .$$

Ou seja, $< X_u, dN_{X(u,v)}(X_v) >=< X_v, dN_{X(u,v)}(X_u) >$; e usando a linearidade resulta que para quaisquer vetores $w_1, w_2 \in T_{X(u,v)}S$,

$$< w_1, dN_{X(u,v)}(w_2) >=< dN_{X(u,v)}(w_1), w_2 >,$$

o que mostra que dN_p é uma aplicação linear auto-adjunta de T_pS, em relação ao produto interno $<\cdot\ ,\ \cdot>_p$ em T$_p$S. Assim, podemos asssociar a dN_p a forma quadrática, $v \mapsto - < dN_p(v), v >, v \in T_pS$.

1.2.2 Aplicação de Gauss em coordenadas locais

Definição 1.10 A forma quadrática II_p definida em $\mathrm{T}_p\mathrm{S}$ por

$$II_p(v) = - < dN_p(v), v > \tag{1.15}$$

é chamada segunda forma fundamental de S em p.

Dada uma parametrização $X(u,v)$ a expressão de $II_{X(u,v)}$, relativa à base $\{X_u, X_v\}$ de $T_{X(u,v)}S$, é dada por

$$\begin{aligned}
II_{X(u,v)}(\alpha'(t)) &= - < dN_p(\alpha'(t)), \alpha'(t)) > \\
&= - < u'(t)N_u + v'(t)N_v, u'(t)X_u + v'(t)X_v >_{\alpha(t)} \\
&= eu'(t)^2 + 2fu'(t)v'(t) + gv'(t)^2,
\end{aligned}$$

onde as funções e, f, $g : U \to \mathbb{R}$, denominadas *os coeficientes da segunda forma fundamental nas coordenadas (u, v)*, são dados por:

$$e = < X_u, -dN_{X(u,v)}(X_u) >=< X_u, -N_u >=< X_{uu}, N >,$$

$$\begin{aligned}
f &= < X_u, -dN_{X(u,v)}(X_v) >=< X_v, -dN_{X(u,v)}(X_u) > \\
&= < X_u, -N_v >=< X_v, -N_u >=< X_{\mathrm{uv}}, N >,
\end{aligned} \tag{1.16}$$

$$g = < X_v, -dN_{X(u,v)}(X_v) >=< X_v, -N_v >=< X_{vv}, N > .$$

Seja α uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em S com $\alpha(0)$ =p $\in$ S, k a curvatura da curva α em p, e $cos\theta =< n, N >$, onde n é o vetor normal a α e N o vetor normal a S em p. O número

$$k_n = k\ cos\theta = II_p(\alpha^{'}(0)) \tag{1.17}$$

é chamado curvatura normal de $\alpha \subset$ S em p.

Proposição 1.7 *Todas as curvas em S que têm em $p \in S$ o mesmo vetor tangente, têm nesse ponto as mesmas curvaturas normais. Além disso, se $k_1(p)$ e $k_2(p)$ ($k_1(p) \leq k_2(p)$) são, respectivamente, os valores máximo e mínimo da segunda forma fundamental $II_p(v)$ quando v percore o círculo unitário de TpS (valores extremais da curvatura normal em p), então existem dois vetores, $e_1, e_2 \in T_pS$, ortonormais, e tais que $-dN_p(e_1) = k_1e_1$ e $-dN_p(e_2) = k_2e_2$.*

Demonstração: Pode ser encontrada em [4].

Definição 1.11 Os autovalores $k_1(p) \leq k_2(p)$ da aplicação linear auto-adjunta $-dN_p$ são chamados curvaturas principais de S no ponto p e as duas direções ortogonais associadas, e_1, $e_2 \in T_p$S, são chamadas direções principais em p.

Definição 1.12 Se uma curva regular e conexa C em S é tal que para todo p $\in$ C a reta tangente a C é uma direção principal em p, então dizemos que C é uma linha de curvatura de S.

Proposição 1.8 *(Olinde Rodrigues) Uma condição necessária e suficiente para que uma curva conexa e regular C em S seja uma linha de curvatura de S é que*

$$N\prime(t) = \lambda(t)\ \alpha\prime(t),$$

para qualquer parametrização $\alpha(t)$ de C, onde $N(t) = N \circ \alpha(t)$ e $\lambda(t)$ é uma função diferenciável de t. Nesse caso, - $\lambda(t)$ é a curvatura (principal) segundo $\alpha\prime\ (t)$.

Demonstração. Basta observar que se $\alpha\prime\ (t)$ está contido em uma direção principal, então $\alpha\prime\ (t)$ é um auto-vetor de dN e

$$dN\,(\alpha\prime(t)) = N\prime(t) = \lambda(t)\ \alpha\prime(t)$$

A recíproca é imediata. ■

Definição 1.13 A curvatura gaussiana de uma superfície S em p é definida por $K(p) = k_1(p)k_2(p)$ e a curvatura média de S em p é $H(p) = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p))$; de modo equivalente K(p) e H(p) são iguais respectivamente, ao determinante e ao semitraço da aplicação linear - dN_p.

Definição 1.14 De acordo com o valor destas curvaturas, um ponto $p \in S$ diz-se:

i) elíptico, se $K(p) > 0$;

ii) hiperbólico, se $K(p) <0$;

iii) parabólico, se $K(p) =0$ e $H(p) \neq 0$;

iv) planar, se $K(p) = 0 = H(p)$;

v) umbílico, se $k_1(p) = k_2(p) \Leftrightarrow H(p)^2$- $K(p) = 0$.

Mostraremos agora o fato interessante de que as únicas superfícies constituídas inteiramente de pontos umbílicos são essencialmente esferas e planos.

Proposição 1.9 . *Se todos os pontos de uma superfície conexa de $\mathbb{R}^3$ são umbílicos, então S está contida em um plano ou em uma esfera.*

Demonstração. Seja $p \in S$ e seja $X(u, v)$ uma parametrização de S em p tal que a vizinhança coordenada V é conexa.Como cada $q \in V$ é um ponto umbílico temos, para qualquer vetor $w = a_1X_u + a_2X_v$ em T_qS,

$$dN(w) = \lambda(q)w,$$

onde $\lambda = \lambda(q)$ é uma função diferenciável real em V.

Mostraremos primeiro que $\lambda(q)$ é constante em V. Para isso, escrevemos a equação acima como

$$N_ua_1 + N_va_2 = \lambda(X_ua_1 + X_va_2);$$

logo, como w é arbitrário,

$$\begin{aligned} N_u &= \lambda X_u, \\ N_v &= \lambda X_v, \end{aligned}$$

Derivando a primeira equação em relação a v e a segunda em relação a u, e subtraindo os resultados, obtemos

$$\lambda_u X_v - \lambda_v X_u = 0.$$

Visto que X_u e X_v são linearmente independentes, concluímos que

$$\lambda_u = \lambda_u = 0,$$

para todo q $\in$ V. Como V é conexo, λ é constante em V, como havíamos afirmado.

Se $\lambda \equiv 0$, $N_u = N_v = 0$ e portanto $N = N_0 =$ constante em V. Assim,

$$< X(u,v), N_0 >_u = < X(u,v), N_0 >_v = 0;$$

logo,

$$< X(u,v), N_0 >= const.,$$

e todos os pontos *X(u,v)* de V pertencem a um plano.

Se $\lambda \neq 0$, então o ponto $X(u,v)$ - $\frac{1}{\lambda}N(u,v) = Y(u,v)$ é fixo, pois

$$\left(X(u,v) - \frac{1}{\lambda}N(u,v) \right)_u = \left(X(u,v) - \frac{1}{\lambda}N(u,v) \right)_v = 0;$$

Como

$$|X(u,v) - Y(u,v)| = \frac{1}{|\lambda|},$$

todos os pontos de V estão contidos em uma esfera centrada em Y com raio $\frac{1}{|\lambda|}$.

Isto demonstra a proposição localmente, isto é, para uma vizinhança de um ponto p $\in$

S. Para completar a prova, observamos que, como S é conexa, dado qualquer outro ponto r $\in$ S, existe uma curva contínua $\alpha : [0,1] \to$ S com $\alpha(0) = p, \alpha(1) = r$. Para cada ponto $\alpha(t) \in$ S desta curva existe uma vizinhança V_t em S contida ou em uma esfera ou em um plano, e tal que $\alpha^{-1}(V_t)$ é um intervalo aberto de [0,1]. A união $\cup\alpha^{-1}(V_t)$, t $\in [0,1]$ cobre [0,1] e, como [0,1] é um intervalo fechado, é coberto por um número finito de elementos da família $\{\alpha^{-1}(V_t)\}$. Portanto, $\alpha([0,1])$ é coberto por um número finito de vizinhanças V_t.

Se os pontos de uma destas vizinhanças coordenadas estão em um plano, todas as outras estarão também no mesmo plano. Como r é arbitrário, todos os pontos de S pertencem a este plano.

Se os pontos de uma destas vizinhanças coordenadas estão em uma esfera, o mesmo argumento mostra que todos os pontos de S pertencem à esfera, e isso completa a demonstração. ■

Vamos agora determinar a matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ de $\mathrm{dN}_{X(u,v)}$ relativa à base $\{\mathrm{X}_u, \mathrm{X}_v\}$. Temos:

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}X_u + a_{21}X_v, \\ N_v &= a_{12}X_u + a_{22}X_v, \end{aligned}$$

fazendo o produto interno de cada igualdade com X_u e X_v, usando os coeficientes das primeira e segunda formas fundamentais (ver as equações 1.7 e 1.16) segue que

$$-e =< N_u, X_u >= a_{11}E + a_{21}F,$$

$$-f =< N_u, X_v >= a_{11}F + a_{21}G,$$

$$-f =< N_v, X_u >= a_{12}E + a_{22}F,$$

$$-g = < N_v, X_v > = a_{12}E + a_{22}G.$$

Matricialmente, temos

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

isto é,

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2} \tag{1.18 a}$$

$$a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \tag{1.18 b}$$

$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \tag{1.18 c}$$

$$a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \tag{1.18 d}$$

Das igualdades (1.18a - 1.18d) segue que as expressões para as curvaturas gaussiana e média são, respectivamente:

$$K(p) = \frac{eg \text{ - } f^2}{EG - F^2} \tag{1.19}$$

$$H(p) = \frac{1}{2}\left[\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}\right] \tag{1.20}$$

Definição 1.15 Sejam $\alpha(u) = (x(u), y(u), z(u)), u \in$ I,uma curva regular plana, onde α é um homeomorfismo sobre sua imagem e r uma reta que não intersecta α e contida no plano que contém α. O conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^3$ obtido pela rotação do traço de α em torno de r é uma superfície chamada de superfície de rotação. A reta r é chamada de eixo de rotação e a curva plana de geratriz.

Definição 1.16 Uma curva regular conexa C em uma vizinhança coordenada de X é uma linha de curvatura se e somente se para uma parametrização qualquer $\alpha\,(t)$=$X(u(t),v(t))$,t $\in$ I, de C temos $dN\,(\alpha\prime(t)) = \lambda(t)\ \alpha\prime(t)$.

Segue que as funções $u\prime(t), v\prime(t)$ satisfazem o sistema de equações

$$\begin{aligned} \frac{fF-eG}{EG-F^2}u\text{'}+\frac{gF-fG}{EG-F^2}v\text{'} &= \lambda u\text{'}, \\ \frac{eF-fE}{EG-F^2}u\text{'}+\frac{fF-gE}{EG-F^2}v\text{'} &= \lambda v\text{'}. \end{aligned}$$

Eliminando λ, no sistema acima, obtemos a equação diferencial das linhas de curvatura,

$$(fE-eF)\,(u\text{'})^2+(gE-eG)\,u\text{'}v\text{'}+(gF-fG)\,(v\text{'})^2=0, \tag{1.21}$$

que pode ser escrita, de maneira mais simétrica, como

$$\begin{vmatrix} (v\text{'})^2 & u\text{'}v\text{'} & (u\text{'})^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0. \tag{1.22}$$

Utilizando o fato das direções principais serem ortogonais, decorre facilmente de (1.22) que uma condição necessária e suficiente para que as curvas coordenadas de uma parametrização sejam linhas de curvatura é que F = f = 0.

1.3 O teorema de Gauss e as equações de compatibilidade

Denotaremos por S, como de costume, uma superfície regular orientável e orientada. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ uma parametrização na orientação de S. É possível associar a cada ponto de $X(U)$ um triedro natural dado pelos vetores X_u, X_v e N.

Expressando as derivadas dos vetores X_u, X_v e N na base $\{X_u, X_v, N\}$,obtemos

$$\begin{aligned}
X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N, \\
X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N, \\
X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + \overline{L}_2 N, \\
X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N, \\
N_u &= a_{11} X_u + a_{21} X_v, \\
N_v &= a_{12} X_u + a_{22} X_v,
\end{aligned} \tag{1.23}$$

onde os $a_{ij}, i, j = 1, 2$ foram obtidos na seção 1.2 e os outros coeficientes devem ser determinados. Os coeficientes Γ_{ij}^k, $i, j, k = 1, 2$ são chamados *símbolos de Christoffel* de S na parametrização X. Como $X_{uv} = X_{vu}$, concluímos que $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$, e $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$; isto é, os símbolos de Christoffel são simétricos em relação aos índices inferiores.

Tomando o produto interno das primeiras quatro relações em (1.23) com N, obtemos imediatamente $L_1 = e$, $L_2 = \overline{L}_2 = f$ e $L_3 = g$, onde e, f, g são os coeficientes da segunda forma fundamental de S.

Para determinar os símbolos de Christoffel, tomamos o produto interno das primeiras quatro relações com X_u e X_v, e obtemos o sistema

$$\begin{gathered}
\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_u, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v, \end{cases} \\
\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_u, \end{cases} \\
\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle X_{vv}, X_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_v, \end{cases}
\end{gathered} \tag{1.24}$$

Observe que as equações acima foram agrupadas em três pares de equações e que para cada par o determinante do sistema é EG - $F^2 \neq 0$. Assim, é possível resolver o sistema acima e calcular os *símbolos de Christoffel* em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental, E, F, G, e de suas derivadas.

Resolvendo os sistemas acima obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v + FE_u}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

As expressões das derivadas de X_u, X_v e N na base $\{X_u, X_v, N\}$ dependem apenas do conhecimento dos coeficientes das primeira e segunda formas fundamentais de S. Uma maneira de obter relações entre estes coeficientes é considerar as expressões

$$\begin{aligned}
(X_{\text{uu}})_v - (X_{uv})_u &= 0, \\
(X_{vv})_u - (X_{vu})_v &= 0, \\
N_{uv} - N_{vu} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Introduzindo os valores de (1.23), podemos escrever as relações acima na forma

$$\begin{aligned}
A_1 X_u + B_1 X_v + C_1 N &= 0, \\
A_2 X_u + B_2 X_v + C_2 N &= 0, \\
A_3 X_u + B_3 X_v + C_3 N &= 0,
\end{aligned} \tag{1.27}$$

onde A_i,B_i, C_i, $i = 1, 2, 3$ são funções de E, F, G, e, f, g e de suas derivadas. Como os vetores X_u, X_v , N são linearmente independentes, (1.27) implica que existem 9 relações:

$$A_i = 0, \qquad B_i = 0, \qquad C_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3$$

Como exemplo, determinaremos as relações $A_1 = 0, B_1 = 0$ e $C_1 = 0$. Utilizando os valores de (1.23), a primeira das relações (1.26) pode ser escrita

$$\begin{aligned} & \Gamma^1_{11} X_{uv} + \Gamma^2_{11} X_{vv} + eN_v + (\Gamma^1_{11})_v X_u + (\Gamma^2_{11})_v X_v + e_v N \\ = \; & \Gamma^1_{12} X_{\mathrm{uu}} + \Gamma^2_{12} X_{vu} + fN_u + (\Gamma^1_{12})_u X_u + (\Gamma^2_{12})_u X_v + f_u N. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Utilizando (1.23) novamente e igualando os coeficientes de X_v obtemos

$$\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} + ea_{22} + \left(\Gamma^2_{11}\right)_v = \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} + fa_{21} + (\Gamma^2_{12})_u.$$

Introduzindo os valores de a_{ij} já calculados (conferir seção 1.3) segue que

$$\begin{aligned} & \left(\Gamma^2_{12}\right)_u - \left(\Gamma^2_{11}\right)_v + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} \\ = \; & -E\frac{eg - f^2}{EF - F^2} \\ = \; & -EK. \end{aligned} \tag{1.29}$$

A equação acima prova o seguinte teorema, devido a K. F. Gauss:

Teorema 1.1 Egregium (Gauss) . *A curvatura Gaussiana K de uma superfície é invariante por isometrias locais.*

Tendo em vista futuras aplicações geométricas voltamos aos nossos cálculos. Igualando os coeficientes de X_u em (1.28) , vemos que a relação $A_1 = 0$ pode ser escrita na forma

$$\left(\Gamma_{12}^{1}\right)_{u}-\left(\Gamma_{11}^{1}\right)_{v}+\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{1}-\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}=FK. \tag{1.30}$$

Igualando também na equação (1.28) os coeficientes de N, obtemos $C_1 = 0$ na forma

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^{1} + f\left(\Gamma_{12}^{2} - \Gamma_{11}^{1}\right) - g\Gamma_{11}^{2}. \tag{1.31}$$

Observe que a relação (1.30) é (quando$F \neq 0$) meramente uma outra forma da fórmula de Gauss (1.29).

Aplicando o mesmo processo à segunda expressão de (1.26), obtemos que ambas as equações $A_2 = 0$ e $B_2 = 0$ nos dão novamente a fórmula de Gauss (1.29) . Além disto, $C_2 = 0$ é dada por

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^{1} + f\left(\Gamma_{22}^{2} - \Gamma_{12}^{1}\right) - g\Gamma_{12}^{2}. \tag{1.32}$$

Finalmente, o mesmo processo pode ser aplicado à última expressão de (1.26), resultando que $C_3 = 0$ é uma identidade e que $A_3 = 0$ e $B_3 = 0$ são novamente as equações (1.31) e (1.32). As equações (1.31) e (1.32) são chamadas *equações de Mainardi - Codazzi.*

A fórmula de Gauss e as equações de Mainardi - Codazzi são conhecidas como as *equações de compatibilidade* da teoria das superfícies.

Definição 1.17 O gênero de uma superfície orientável é o número de alças que esta contém.

Teorema 1.2 (Poincaré) Se F é um campo de direções tangentes em M com no máximo um número finito de singularidades, então $\sum I = 2 - 2g$, onde g é o gênero de M.

1.4 Aplicações conformes

Definição 1.18 *Um difeomorfismo* $\varphi : S \to \overline{S}$ *é chamado uma aplicação conforme se para todo* $p \in S$ *e quaisquer* $v_1, v_2 \in T_pS$ *temos*

$$\left\langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2)\right\rangle_{\varphi(p)} = \lambda^2(p)\left\langle v_1, v_2\right\rangle_p \tag{1.33}$$

onde λ^2 *é uma função diferenciável em* S *que nunca se anula; as superfícies* S *e* $\overline{S}$ *são então chamadas conformes. Uma aplicação* $\varphi : V \to \overline{S}$ *de uma vizinhança* V *de* $p \in S$ *em* $\overline{S}$ *é uma aplicação conforme local em* p *se existe uma vizinhança* $\overline{V}$ *de* φ_p *tal que* $\varphi : V \to \overline{V}$ *é uma aplicação conforme. Se para cada* $p \in S$*, exite uma aplicação conforme local em* p*, a superfície* S *é localmente conforme a* $\overline{S}$*.*

O significado geométrico da definição acima é que ângulos (mas não necessariamente comprimentos) são preservados por aplicações conformes.

Considerando M uma superfície e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset M$ uma parametrização de M em torno de p $\in M$, dada por $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Se

$$|X_u| = |X_v| \quad \text{e} < X_u(u,v), X_v(u,v) >= 0,$$

dizemos que X é uma parametrização isotérmica e que (u,v) são parâmetros isotérmicos para a superfície M. O teorema a seguir garante localmente a existência de parâmetros isotérmicos.

Teorema 1.3 *Seja* U *um conjunto aberto e simplesmente conexo e seja* X*:* $U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ *uma parametrização da superfície* M*. Então, existe um difeomorfismo local* $\phi : \widetilde{U} \to U$ *de classe* C^∞ *tal que* $\widetilde{X} = X \circ \phi$ *é uma parametrização isotérmica.*

Demonstração: A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [12],pág. 333 - 334.

Em termos de parâmetros isotérmicos u, v temos

$$ds^2 = E(du^2 + dv^2). \tag{1.34}$$

As identidades básicas vistas anteriormente , mas agora em tal sistema, são como segue:

$$\begin{aligned} K &= k_1 k_2 = \frac{eg - f^2}{E^2} \\ H &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{e + g}{2E} \end{aligned} \tag{1.35}$$

As linhas de curvaturas são dadas por

$$-f du^2 + (e - g) du dv + f dv^2 = 0. \tag{1.36}$$

As equações de Codazzi podem ser escritas como

$$e_v - f_u = \frac{E_v}{2E}(e + g) = E_v H, \tag{1.37}$$

$$f_v - g_u = -\frac{E_u}{2E}(e + g) = -E_u H, \tag{1.38}$$

Mas como $EH = \dfrac{e + g}{2}$,derivando esta igualdade com relação a v,

$$\begin{aligned} E_v H + E H_v &= \frac{e_v + g_v}{2}, \\ E_v H &= -E H_v + \frac{e_v}{2} + \frac{g_v}{2}. \end{aligned} \tag{1.39}$$

e depois com relação a u,temos

$$
\begin{aligned}
E_uH + EH_u &= \frac{e_u \ + \ g_u}{2}, \\
E_uH &= -EH_u + \frac{e_u}{2} + \frac{g_u}{2}.
\end{aligned} \tag{1.40}
$$

Desta forma as equações de Codazzi são escritas como

$$
\begin{aligned}
e_v - f_u &= E_vH \\
e_v - f_u &= -EH_v + \frac{e_v}{2} + \frac{g_v}{2} \\
e_v - \frac{e_v}{2} - \frac{g_v}{2} - f_u &= -EH_v \\
\left(\frac{e_v - g_v}{2}\right) - f_u &= -EH_v \\
\left(\frac{e - g}{2}\right)_v - f_u &= -EH_v.
\end{aligned} \tag{1.41}
$$

e

$$
\begin{aligned}
f_v - g_u &= -E_uH \\
f_v - g_u &= -\left(-EH_u + \frac{e_u}{2} + \frac{g_u}{2}\right) \\
f_v + \frac{e_u}{2} + \frac{g_u}{2} - g_u &= EH_u \\
\left(\frac{e_u - g_u}{2}\right) + f_v &= EH_u \\
\left(\frac{e - g}{2}\right)_u + f_v &= EH_u.
\end{aligned} \tag{1.42}
$$

Capítulo 2

Teorema de Stokes

Antes de apresentar o teorema de Stokes, vejamos algumas definições e resultados importantes de Formas Diferenciais.

2.1 Formas Diferenciais

Definição 2.1 Seja p um ponto de $\mathbb{R}^n$. O conjunto de vetores aplicados em p, chamado espaço tangente de $\mathbb{R}^n$ em p, será denotado por $\mathbb{R}^n_p$.

Denotaremos por $\left(\mathbb{R}^n_p\right)^*$ o espaço dual de $\mathbb{R}^n_p$. Uma base para $\left(\mathbb{R}^n_p\right)^*$ é obtida tomando $(dx_i)_p$, i=1, ... , n , onde $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a projeção na i -ésima coordenada, $\{(dx_i)_p\}$ é a base dual de $\left\{(e_i)_p\right\}$.

Definição 2.2 Um campo de formas lineares ou forma exterior de grau 1 em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação w que a cada p $\in \mathbb{R}^n$ associa $w(p)$; w pode ser escrito na forma

$$w(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i$$

onde a_i são funções definidas em $\mathbb{R}^n$ e tomando valores em $\mathbb{R}$; w chama-se uma forma exterior contínua quando as funções a_i são contínuas. Se as funções a_i forem diferenciáveis

w chama-se forma diferencial de grau 1.

Seja $\Lambda^k\left(\mathbb{R}_p^n\right)^*$ o conjunto das funções k - lineares alternadas.

Se $\varphi_1, ..., \varphi_k$ são formas lineares, podemos obter um elemento $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_k$ de $\Lambda^k\left(\mathbb{R}_p^n\right)^*$ definido por

$$(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_k)(v_1 \wedge ... \wedge v_k) = \det(\varphi_i(v_j)).$$

Decorre das propriedades de determinantes que $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_k$ é de fato k - linear e alternada. Em particular,$(dx_{i_1})_p \wedge \ ... \wedge (dx_{i_k})_p \in \Lambda^k\left(\mathbb{R}_p^n\right)^*$; indicaremos este elemento por $(dx_{i_1} \wedge \ ... \ dx_{i_k})_p$.

Proposição 2.1 O conjunto $\left\{(dx_{i_1} \wedge \ ... \wedge \ dx_{i_k})_p\right\}$, $i_1 < ... < i_k$, onde $i_j \in \{1, 2, ..., n\}$ forma uma base para $\Lambda^k\left(\mathbb{R}_p^n\right)^*$.

Definição 2.3 Uma k-forma exterior em $\mathbb{R}^n$ $(k \geq 1)$ é uma aplicação w que a cada p $\in \mathbb{R}^n$ associa $w(p) \in \Lambda^k\left(\mathbb{R}_p^n\right)^*$, w pode ser escrito na forma

$$w = \sum_{i_1 < ... < i_k} a_{i_1 \cdots i_k}(p)(dx_{i_1} \wedge \ ... \wedge \ dx_{i_k})_p, i_j \in \{1, 2, ..., n\}$$

onde $a_{i_1 \cdots i_k}$ são aplicações de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$. Se as funções $a_{i_1 \cdots i_k}$ forem diferenciáveis, w é chamada uma k - forma diferenciável.

Indicaremos por I a k - upla (i$_1$, ... , i$_k$), $i_1 < ... < i_k$, $i_j \in \{1, 2, ..., n\}$ e usaremos a seguinte notação para w: $w = \sum_I a_I dx_I$.

Definição 2.4 Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável. A aplicação linear $\mathrm{df}_p : \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}_{f(p)}^m$ induz uma transformação linear

$$f_p^* : \Lambda^k\left(\mathbb{R}_{f(p)}^m\right)^* \rightarrow \Lambda^k\left(\mathbb{R}_p^n\right)^*$$

que para cada $\phi \in \left(\mathbb{R}_{f(p)}^m\right)^*$ associa $f_p^*(\phi)$, definida da seguinte maneira:

$$\left(f_p^*(\phi)\right)(v_1, ..., v_k) = \Phi\left(df_p(v_1), ..., df_p(v_k)\right), v_1, ..., v_k \in \mathbb{R}_p^n.$$

Fazendo o ponto variar em $\mathbb{R}^n$, obteremos uma aplicação f^* que leva k - formas de $\mathbb{R}^n$ em k - formas de $\mathbb{R}^m$. Convenciona-se que

$$f^*(g) = g \circ f, \text{se g é uma 0 - forma.}$$

Definição 2.5 Se $w = \sum_I a_I dx_I$ é uma k - forma, definimos a diferencial exterior de w como sendo a $(k+1)$ $-$forma $dw = \sum_I da_I \wedge dx_I$.

Definição 2.6 Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $X_\alpha : U_\alpha \to M$ de abertos $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ em M tais que

i) $\cup_\alpha X_\alpha (U_\alpha) = M$;

ii) Para todo par α, β com $X_\alpha (U_\alpha) \cap X_\beta (U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $X_\alpha^{-1} (W)$ e $X_\beta^{-1} (W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$, $X_\alpha^{-1} \circ X_\beta$ são diferenciáveis.

Definição 2.7 Seja M uma variedade de dimensão n. Uma k - forma diferncial w em M é a escolha, para cada sistema de coordenadas $f_i : U_i \to M$, de uma k- forma w_{U_i} em $U_i \subset \mathbb{R}^n$ de tal forma que se w_{U_1} e w_{U_2} são duas tais escolhas e $f_1(U_1) \cap f_2(U_2) \neq \varnothing$, então,

$$w_{U_1} = \left(f_2^{-1} \circ f_1\right)^* w_{U_2}$$

Cada w_{U_i}, é dita uma representação local de w.

Definição 2.8 Chamaremos de suporte **K** de uma forma diferencial w, definida em um aberto U de $\mathbb{R}^n$ (ou de uma variedade diferenciável) à união do conjunto

$$A = \{p \in U; w(p) \neq 0\}$$

com os pontos de acumulação de A. O suporte **K** de w é assim um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$ (ou da variedade). Seja w uma n - forma diferencial em um aberto U de $\mathbb{R}^n$,

$$w = a (x_1, ..., x_n) \, dx_1 \wedge ... \wedge dx_n.$$

Suponhamos que o suporte **K** de w é compacto e está contido em U. Então definimos,

$$\int_U w = \int_{\mathbf{K}} a dx_1 \wedge ... \wedge dx_n,$$

onde o segundo membro é uma integral múltipla usual.

Definição 2.9 Suponhamos que M seja compacta, orientável e que uma orientação foi fixada, i.e., M está coberta por uma família $\{V_\alpha\}$ de vizinhanças coordenadas de tal modo, que a mudança de coordenadas tem sempre jacobiano positivo. Se o suporte **K** de w está contido em alguma vizinhança coordenada $V_\alpha = f_\alpha(U_\alpha)$. Neste caso, se a representação local de w for

$$w_\alpha = a_\alpha (u_1, ..., u_n) du_1 \wedge ...du_n$$

definiremos

$$\int_M w = \int_{V_\alpha} w_\alpha = \int_{U_\alpha} a_\alpha(u_1, ...u_n) du_1...du_n,$$

onde o último membro é uma integral múltipla usual.

É possível mostrar ainda que se **K** está contido em outra vizinhança coordenada $V_\beta = f_\beta(U_\beta)$ da mesma família que cobre M, a definição anterior independe da escolha da vizinhança coordenada. Para detalhes ver [2].

Proposição 2.2 *Dada uma cobertura $\{V_\alpha\}$de uma variedade compacta M por vizinhanças coordenadas, existem funções diferenciáveis $\phi_1, ..., \phi_n$ tais que:*

a) $\sum_{i=1}^{m} \phi_i = 1,$

b) $0 \leq \phi_i \leq 1$,*e o suporte de ϕ_i está contido em algum V_{α_i} da cobertura $\{V_\alpha\}$.*

Definição 2.10 Seja M uma variedade compacta e orientada, $\phi_i w$ uma forma cujo suporte está contido em V_i, definimos a integral de uma n - forma w em M da seguinte maneira:

$$\int_M w = \sum_{i=1}^{m} \int_M \phi_i w.$$

Afirmamos que a integral acima é independente das escolhas feitas. Para detalhes ver [3].

Definição 2.11 Chamaremos de semi-espaço H^n ao conjunto dado por

$$H^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \leq 0\}.$$

Um aberto de H^n é a interseção de um aberto U de $\mathbb{R}^n$ com H^n.

Definição 2.12 Diremos que uma função $f : V \to \mathbb{R}$, definida em um aberto V de H^n é *diferenciável* se existir uma função diferenciável $\overline{f} : U \to \mathbb{R}$ de um aberto $U \supset V$ de $\mathbb{R}^n$, tal que a restrição de $\overline{f}$ a V seja igual a f. Se f é diferenciável em V a diferencial df_p é definida por $df_p = d\overline{f}_p$.

Definição 2.13 Uma Variedade Diferenciável (de dimensão n) *com bordo* regular é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $f_\alpha : U_\alpha \subset H^n \to M$ de abertos U_α de H^n em M tais que

i) $\cup_\alpha f_\alpha (U_\alpha) = M$;

ii) Para todo par α, β com $f_\alpha (U_\alpha) \cap f_\beta (U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $f_\alpha^{-1} (W)$ e $f_\beta^{-1} (W)$ são abertos em H^n e as aplicações $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$, $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$ são diferenciáveis.

Definição 2.14 Um ponto $p \in M$ é chamado *um ponto de bordo de M* se para um sistema de coordenadas $f : U \to M$ em torno de p se tem $f(0, x_2, ...x_n) = p$.

O conjunto de pontos de bordo de M, é chamado *o bordo de M* e indicado por ∂M.

Proposição 2.3 *A definição de ponto de bordo independe do sistema de coordenadas.*

Proposição 2.4 *O bordo ∂M de uma variedade diferenciável de dimensão n com bordo é uma variedade diferenciável de dimensão n - 1.*

Demonstraremos agora o Teorema de Stokes.

Teorema 2.1 (Teorema de Stokes) *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n, compacta, orientada e com bordo ∂M munido da orientação induzida. Seja w uma (n - 1) - forma diferenciável em M e dw a sua diferencial.*

Indicaremos por i^*w a restrição de w a ∂M ,onde i:$\partial M \rightarrow M$ é a aplicação de inclusão. Nestas condições

$$\int_{\partial M} i^* w = \int_M dw.$$

Demonstração: Seja **K** o suporte de w. Consideremos os seguintes casos:

a) **K** está contido em uma vizinhança coordenada $V = f(U)$ de um sistema de coordenadas $f : U \rightarrow M, U \subset H^n$. Em $f(U)$, w é da forma

$$w = \sum_{j=1}^{n} a_j \; du_1 \wedge du_2 \wedge ... \wedge du_{j-1} \wedge du_{j+1} \wedge ... \wedge du_n,$$

onde $a_j(u_1, u_2, ..., u_n)$ sãofunções diferenciáveis em U e portanto

$$dw = \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial u_j} \right) du_1 \wedge du_2 \wedge ... \wedge du_n.$$

a$_1$) Suponhamos que $f(U) \cap \partial M =\emptyset$. Então w é nula nos pontos de ∂M e $i^*w = 0$, donde

$$\int_{\partial M} i^* w = 0.$$

Vamos mostrar que

$$\int_M dw = \int_U \left(\sum (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial u_j} \right) du_1 du_2 ... du_n = 0$$

Para isso, vamos estender as funções a_j a H^n definindo

$$a_j(u_1,u_2,...,u_n)=\begin{cases} a_j(u_1,u_2,...,u_n) \quad se \quad (u_1,u_2,...,u_n)\in U \\ \quad 0 \qquad se \quad (u_1,u_2,...,u_n)\in H^n-U \end{cases}$$

Como $f^{-1}(K)$ está contido em U, as funções a_j assim definidas são diferenciáveis em H^n. Consideremos agora o paralelepípedo Q $\subset H^n$, dado por $u_j^1\leq u_j\leq u_j^0$, $j=1,...,n$, e contendo U no seu interior. Então

$$\begin{aligned}\int_U\left(\sum(-1)^{j-1}\frac{\partial a_j}{\partial u_j}\right)du_1du_2...du_n &= \sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}\int_Q\frac{\partial a_j}{\partial u_j}du_1du_2...du_n\\ &= \sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}\int[a_j\left(u_1,...,u_{j-1},u_j^0,u_{j+1},...,u_n\right)\\ &\quad -a_j(u_1,...,u_{j-1},u_j^1,u_{j+1},...,u_n)]du_1...du_{j-1}du_{j+1}...du_n\\ &=0,\end{aligned}$$

pois $a_j\left(u_1,...,u_j^0,...,u_n\right)=a_j\left(u_1,...,u_j^1,...,u_n\right)=0$, para todo $j=1,...,n$.

a$_2$) Suponhamos agora que $f(U)\cap\partial M\neq\emptyset$. Então a aplicação de inclusão i se escreve

$$i\begin{cases} u_1=0 \\ u_j=u_j,\ \ j=2,...,n \end{cases}$$

e portanto, usando a orientação induzida no bordo,

$$i^*w=a_1\left(0,u_2,...,u_n\right)du_2\wedge...\wedge du_n.$$

Como em a$_1$), vamos estender as funções a_j por

$$a_j(u_1,u_2,...,u_n)=\begin{cases} a_j(u_1,u_2,...,u_n)\ se\ (u_1,u_2,...,u_n)\in U; \\ 0 \qquad se(u_1,u_2,...,u_n)\in H^n-U; \end{cases}$$

As funções a_j assim definidas em H^n são diferenciáveis. Consideremos agora o paralelepípedo Q dado por

$$\begin{aligned} u_1^1 &\leq u_1\leq 0\\ u_j^1 &\leq u_j\leq u_j^0, j=2,...,n\end{aligned}$$

e tal que a união do interior de Q com o hiperplano $u_1=0$ contenha $f^{-1}(\mathbf{K})$. Então

$\int_M dw = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \int_Q \frac{\partial a_j}{\partial u_j} du_1...du_n = \int [a_1 (0, u_2, ..., u_n) - a_1 (u_1^1, u_2, ..., u_n)] du_2...du_n$
$+ \sum\limits_{j=2}^{n} (-1)^{j-1} \int [a_j \left(u_1, ..., u_j^0, ..., u_n\right) - a_j \left(u_1, ..., u_j^1, ..., u_n\right)] du_1...du_{j-1} du_{j+1}...du_n.$

Como $a_j(u_1, ..., u_j^0, ..., u_n) = a_j \left(u_1, ..., u_j^1, ..., u_n\right) = 0$ para $j = 2, ..., n$ e

$$a_1 \left(u_1^1, u_2, ..., u_n\right) = 0,$$

teremos

$$\int_M dw = \int a_1 (0, u_2, ..., u_n) \, du_2...du_n = \int_{\partial M} i^* w.$$

b) Consideremos agora o caso geral. Seja $\{V_\alpha\}$ uma cobertura de M por vizinhanças coordenadas, e $\varphi_1 ... \varphi_m$ uma partição diferenciável da unidade subordinada a $\{V_\alpha\}$. As formas diferenciais $w_j = \varphi_j w$, $j = 1, ..., m$, satisfazem as condições do caso a). Além disso, como $\sum d\varphi_j = 0$, teremos $\sum w_j = w$ e $\sum dw_j = dw$.

Portanto

$$\begin{aligned} \int_M dw &= \sum_{j=1}^{m} \int_M dw_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial M} i^* w_j \\ &= \int_{\partial M} \sum_{j=1}^{m} i^* w_j \\ &= \int_{\partial M} i^* \sum_{j=1}^{m} w_j \\ &= \int_{\partial M} i^* w. \end{aligned}$$

Observação 2.1 O Teorema de Stokes acima demonstrado não inclue o caso em que o bordo da variedade não seja regular.

Capítulo 3

Funções Holomorfas

Vamos apresentar agora definições e resultados relacionados com a teoria das funções de uma variável complexa.

3.1 Derivada complexa, funções holomorfas

Definição 3.1 Uma função complexa $f : U \to \mathbb{C}$, definida num aberto $U \subset \mathbb{C}$, diz-se derivável no ponto $z = x + iy \in U$ quando existe o limite $\lim\limits_{H\to 0} \frac{f(z+H)-f(z)}{H} = A$, o quociente sendo tomado no sentido dos números complexos. O número complexo A $=f'(z)$ chama-se a derivada da função complexa f no ponto z.

A derivabilidade de f no ponto $z = x + iy$ equivale a dizer que $f(z + H) = f(z) + AH + r(H)$, onde $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(H)}{|H|} = 0$.

Sejam $A = a + ib$, $H = h + ik$ e $r = r_1 + ir_2$. Então f é derivável no ponto $z = x + iy$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} f(z+H) &= f(z) + (a+ib)(h+ik) + r_1(H) + ir_2(H) \qquad (3.1) \\ &= f(z) + (ah - bk) + i(bh + ak) + r_1(H) + ir_2(H) \end{aligned}$$

onde $\lim_{H\to 0}\frac{r_1(H)}{|H|} = \lim_{H\to 0}\frac{r_2(H)}{|H|} = 0$.

Sejam $u, v : U \to \mathbb{R}$ as partes real e imaginária de f, ou seja, $f(z) = u(z) + iv(z)$. Separando a parte real e a parte imaginária na igualdade (3.1) acima, obtemos

$$\begin{aligned} u(x+h, y+k) &= u(x,y) + ah - bk + r_1(h,k), onde \lim_{h,k\to 0}\frac{r_1(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0; \\ v(x+h, y+k) &= v(x,y) + bh + ak + r_2(h,k), onde \lim_{h,k\to 0}\frac{r_2(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0. \end{aligned}$$

Assim, se a função complexa $f = u + iv$ é derivável no ponto $z = x + iy$ então sua parte real u e sua parte imaginária v são deferenciáveis no ponto (x , y) e, além disso, cumprem as condições $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}(= a)$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}(= -b)$ nesse ponto. Estas são as chamadas *equações de Cauchy - Riemann.*

Reciprocamente, se $u, v : U \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis no ponto $z = (x, y)$ e satisfazem nesse ponto às equações de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ então podemos reverter cadapasso do argumento anterior e concluir que a função complexa $f = u + iv$ possui, no ponto $z = x + iy$, uma derivada complexa $f'(z)$, com $f'(z)$ $= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

Definição 3.2 A função complexa $f : U \to \mathbb{C}$, diz-se holomorfa quando possui derivada $f'(z)$ em todos os pontos do aberto U.

Definição 3.3 *Uma forma diferencial complexa de grau 1 ou 1 - forma diferencial é uma aplicação w definida num aberto $U \subset \mathbb{C}$, que a cada ponto $z \in U$ associa uma função $\mathbb{R}$-linear w(z):$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$. O contra-domínio de w é portanto o conjunto de todas as aplicações $\mathbb{R}$ -lineares de $\mathbb{R}^2$* em $\mathbb{C}$, *o qual denotaremos por £($\mathbb{R}^2, \mathbb{C}$).*

O conjunto £($\mathbb{R}^2, \mathbb{C}$) tem uma estrutura natural de espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, com as operações de soma de aplicações lineares e produto de uma aplicação linear por um escalar.

Soma - Dados T_1, $T_2 \in$ £($\mathbb{R}^2, \mathbb{C}$), a sua soma $T_1 + T_2$ é definida por

$$(T_1 + T_2)(p) = T_1(p) + T_2(p), p \in \mathbb{R}^2$$

Produto por escalar - Dados $\lambda \in \mathbb{C}$ e T $\in \pounds(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, o produto λT é definido por

$$(\lambda T)(p) = \lambda T(p), p \in \mathbb{R}^2$$

Tendo-se em vista esta estrutura de espaço vetorial, podemos obter uma base de $\pounds(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, da seguinte forma: sejam $dx : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ as aplicações $\mathbb{R}$- lineares definidas por $dx(u,v) = u$ e $dy(u,v) = v, (u,v) \in \mathbb{R}^2$. Se T$\in \pounds(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, vemos que

$$\begin{aligned} T(u,v) &= T(u,0) + T(0,v) = uT(1,0) + vT(0,1) \\ &= T(1,0)dx(u,v) + T(0,1)dy(u,v) \\ &= (T(1,0)dx + T(0,1)dy)(u,v) \end{aligned}$$

Logo $T = T(1,0)dx + T(0,1)dy$, ou seja, o conjunto $\{dx, dy\}$ gera $\pounds(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$. por outro lado, dx e dy são linearmente independentes, já que se $Adx + Bdy = 0$, onde A e $B \in \mathbb{C}$, então

$$A = (Adx + Bdy)(1,0) = 0 \quad \text{e} \quad B = (Adx + Bdy)(0,1) = 0.$$

Portanto $\{dx, dy\}$ é uma base de $\pounds(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$. Decorre daí que uma 1-forma diferencial w, definida em $U \subset \mathbb{C}$, pode ser escrita como $w = A(z)dx + B(z)dy$, onde A e $B : U \to \mathbb{C}$ são funções. Diremos que w é de classe C^r se as funções A e B são de classe C^r.

Podemos também escrever uma 1 - forma diferencial em termos da base $\{dz, d\overline{z}\}$ de $\pounds(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, onde $dz = dx + idy$ e $d\overline{z} = dx - idy$. Com efeito, se $w = A(z)dx + B(z)dy$, onde $A, B : U \mapsto \mathbb{C}$, vemos que

$$\begin{aligned} Adx + Bdy &= \frac{1}{2}A(dz + d\overline{z}) + \frac{1}{2i}B(dz - d\overline{z}) \\ &= \frac{1}{2}(A - iB)dz + \frac{1}{2}(A + iB)d\overline{z} \\ &= Cdz + Dd\overline{z}. \end{aligned}$$

3.1.1 Diferencial de uma função

Seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função de classe C^r , $r \geq 1$, onde $U \subset \mathbb{C}$ é um aberto. A diferencial de f é por definição a 1 - forma df em U que associa a cada ponto $p \in U$ a derivada de f em p, que é uma aplicação $\mathbb{R}$-linear de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$. Assim, $df(p).(h + ik) = \frac{\partial f}{\partial x}(p).h + \frac{\partial f}{\partial y}(p).k$, logo $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$. Em termos da base $\{dz, d\overline{z}\}$ de $\pounds(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ e das notações introduzidas anteriormente, podemos também escrever

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}. \tag{3.2}$$

No plano complexo $\mathbb{C}$, consideremos a variável $z = u + iv$ e os operadores diferenciais

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right) \tag{3.3}$$

A definição desses operadores é tal que, se $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma aplicação diferenciável, num aberto U então, através da identificação usual de $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{C}$, tem-se

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z} \tag{3.4}$$

onde $dz = du + idv$ e $d\overline{z} = du - idv$.

A função diferenciável $f = f_1 + if_2$ é holomorfa se, e somente se, $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}+i\frac{\partial}{\partial v}\right)f=0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}+i\frac{\partial}{\partial v}\right)f_1+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}+i\frac{\partial}{\partial v}\right)f_2=0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}-i\frac{\partial}{\partial v}f_2\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial v}+i\frac{\partial f_2}{\partial u}\right)=0
\end{aligned}$$

Definição 3.4 Um ponto singular de uma função complexa f(ou singularidade de f) é um ponto z_0 tal que existe um disco $D(z_0, r)$ no qual f é holomorfa exceto no ponto z_0.

Capítulo 4

Imersões Isométricas

Definição 4.1 Uma superfície abstrata (variedade diferenciável de dimensão 2) é um conjunto S munido de uma família de aplicações injetivas $X_\alpha : U_\alpha \to S$ de abertos $U_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ em S tais que

i) $\cup_\alpha X_\alpha (U_\alpha) = S$;

ii) Para todo par α, β com $X_\alpha (U_\alpha) \cap X_\beta (U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $X_\alpha^{-1} (W)$ e $X_\beta^{-1} (W)$ são abertos em $\mathbb{R}^2$ e as aplicações $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$, $X_\alpha^{-1} \circ X_\beta$ são diferenciáveis.

Definição 4.2 Uma aplicação diferenciável $f : S \to \mathbb{R}^3$ de uma superfície abstrata S em $\mathbb{R}^3$ é uma imersão se a diferencial $df_p : T_pS \to T_p\mathbb{R}^3$ é injetiva. Se, além disto, S tiver uma métrica $\langle \ , \ \rangle$ e

$$\langle df_p (v) , df_p (w) \rangle_{f(p)} = \langle v, w \rangle_p , \qquad v, w \in T_pS$$

dizemos que f é uma imersão isométrica.

4.1 Imersões totalmente umbílicas

Definição 4.3 Uma imersão isométrica $f : S \to \widetilde{S}^{n+q}$ é dita umbílica em $p \in S$ quando $A_\xi = \lambda_\xi I$ para todo $\xi \in T_pS$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e I é a aplicação identidade em T_pS . Uma imersão é totalmente umbílica se é umbílica em todos os pontos de S.

Capítulo 5

Teorema Principal

Neste capítulo será demonstrado o teorema principal, objeto de estudo deste trabalho. Para isso precisaremos do seguinte lema:

Lema Principal Seja $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função complexa definida em um conjunto aberto do plano complexo que contém a origem $z = 0$. Assuma que $\left|\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right| \leq h(z)\,|f(z)|$, onde h é uma função real, contínua, não - negativa. Assuma além disso que $z = z_0$ é um zero de f. Então ou $f \equiv 0$ em uma vizinhança V $\subset$ U de z_0, ou $f(z) = (z - z_0)^k f_k(z)$, $z \in$ V, k $\geq$1, onde $f_k(z)$ é uma função contínua com $f_k(z_0) \neq 0$.

Observação 5.1 A inequação $\left|\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right| \leq h(z)\,|f(z)|$ é conhecida como inequação de Cauchy - Riemann.

Vamos assumir que o zero de f é a origem 0 e que U é o disco D de raio R e centro 0. Para demonstrar o Lema Principal precisaremos de alguns lemas auxiliares.

Lema i) Assuma a hipótese do lema principal e o fato que $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{f(z)}{z^{k-1}} = 0$, k $\geq$ 1. Então o $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{f(z)}{z^k}$ existe.

Demonstração: De agora em diante, denotaremos por $D_c(\xi)$ um disco no plano $\mathbb{C}$ com centro ξ e raio c. Seja $w \in D_R(0)$, com $w \neq 0$ e em $W = D_R(0) - \{D_a(0) \cup D_a(w)\}$ defina uma forma diferenciável $\varphi = \dfrac{f(z)}{z^r(z-w)}dz$.

Como $\dfrac{1}{z^r(z-w)}$ é holomorfa em W, obtemos:

$$\begin{aligned}
d\varphi &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\right) \wedge dz, \text{onde } \Phi = \frac{f(z)}{z^r(z-w)} \\
&= \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge dz \\
&= \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{f(z)}{z^r(z-w)}\right) d\overline{z} \wedge dz \\
&= \frac{1}{z^r(z-w)}\frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge dz \\
&= -\frac{1}{z^r(z-w)}\frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}} dz \wedge d\overline{z}.
\end{aligned}$$

Agora considere discos $\mathrm{D}_a(0)$ e $\mathrm{D}_a(w)$ em $\mathrm{D}_R(0)$ e aplique o teorema de Stokes:

$$\int\int_W d\varphi = \int_{\partial W} \varphi$$

$$\int\int_W d\varphi + \int_{\partial D_R(0)} \varphi - \int_{\partial D_a(0)} \varphi - \int_{\partial D_a(w)} \varphi = 0 \tag{5.1}$$

Vamos calcular as integrais em (5.1).
Seja $g(z) = \dfrac{f(z)}{z^r}$, $z = w + ae^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $dz = aie^{i\theta}d\theta$. Então

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D_a(w)} \varphi &= \int_{\partial D_a(w} \frac{g(z)}{(z-w)}dz = \int_0^{2\pi} \frac{g(w+ae^{i\theta})}{(w+ae^{i\theta}-w)} aie^{i\theta}d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} g(w+ae^{i\theta}) i d\theta.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0}\int_{\partial D_a(w)}\varphi &= \lim_{a\to 0}\int_0^{2\pi} g(w+ae^{i\theta})id\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \lim_{a\to 0} g(w+ae^{i\theta})id\theta \\
&= \int_0^{2\pi} g(w)id\theta \\
&= g(w)i\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 2\pi i g(w) \\
&= 2\pi i f(w)w^{-r}.
\end{aligned}$$

Considere $z = ae^{i\theta}$ e, como por hipótese, $\lim_{z\to 0}\dfrac{f(z)}{z^{r-1}} = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0}\int_{\partial D_a(0)}\varphi &= \lim_{a\to 0}\int_0^{2\pi} \frac{g(ae^{i\theta})}{(ae^{i\theta}-w)} aie^{i\theta}d\theta \\
&= \lim_{a\to 0}\int_0^{2\pi} \frac{\frac{f(ae^{i\theta})}{(ae^{i\theta})^r}}{ae^{i\theta}-w} aie^{i\theta}d\theta \\
&= \lim_{a\to 0}\int_0^{2\pi} \frac{f(ae^{i\theta})id\theta}{(ae^{i\theta})^{r-1}(ae^{i\theta}-w)} \\
&= \lim_{a\to 0}\int_0^{2\pi} \frac{f(ae^{i\theta})id\theta}{a^{r-1}e^{(r-1)i\theta}(ae^{i\theta}-w)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

A seguir, tomando os limites em (5.1) quando $a \to 0$, temos:

$$\lim_{a\to 0}\int\int_W d\varphi + \lim_{a\to 0}\int_{\partial D_R(0)}\varphi - \lim_{a\to 0}\int_{\partial D_a(0)}\varphi - \lim_{a\to 0}\int_{\partial D_a(w)}\varphi = 0.$$

Mas sabemos que

$\lim\limits_{a\to 0}\int\int_W d\varphi = \int\int_{D_R(0)} -\dfrac{1}{z^r(z\ -\ w)}\dfrac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}}dz\wedge d\overline{z}$ e $\lim\limits_{a\to 0}\int_{\partial D_R(0)}\varphi = \int_{\partial D_R(0)}\dfrac{f(z)dz}{z^r(z\ -\ w)}$.
Assim,

$$-2\pi i f(w)w^{-r} + \int_{\partial D_R(0)} \frac{f(z)dz}{z^r(z\ -\ w)} = \int\int_{D_R(0)} \frac{1}{z^r(z\ -\ w)}\frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}}dz\wedge d\overline{z} \qquad (5.2)$$

onde o limite da integral dupla existe, porque o lado esquerdo está bem definido.

Como a função h na afirmação do lema principal é contínua, existe $A > 0$ tal que $\max\limits_{z\,\in\, D_R(0)} h(z) \leq A$.Então, segue de (5.2),

$$2\pi\left|f(w)w^{-r}\right| \leq \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)|\,|dz|}{|z^r|\,|z\ -\ w|} + \int\int_{D_R(0)} \frac{2A\,|f(z)|}{|z^r|\,|z\ -\ w|}du\wedge dv \qquad (5.3)$$

onde $z = u + iv\ \ e\ \ dz\wedge d\overline{z} = (du + idv)\wedge(du - idv)$

$$= -idu\wedge dv + idv\wedge du$$

$$= -2idu\wedge dv.$$

Agora, tome $z_0 \in D$ com $z_0 \neq 0$, multiplique a inequação acima por $\dfrac{1}{|w\text{ - }z_0|}$ e a integre com relação a $dx\wedge dy$, onde $w = x + iy$. Então, considerando $D_\varepsilon = D_R(0)$ - $D_\varepsilon(z_0)$, temos:

$$\begin{aligned}\int_{D_\varepsilon} \frac{2\pi\,|f(w)w^{-r}|}{|w\text{ - }z_0|}dx\wedge dy \ \ &\leq\ \ \int_{D_\varepsilon}\int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)|\,|dz|}{|z^r|\,|z\ -\ w|\,|w\ -\ z_0|}dx\wedge dy + \\ &+\int_{D_\varepsilon}\int\int_{D_R(0)} \frac{2A\,|f(z)|\,du\wedge dv}{|z^r|\,|z\ -\ w|\,|w\ -\ z_0|}dx\wedge dy \quad (5.4)\end{aligned}$$

Vamos estimar a integral em (5.4). Para isto, observemos primeiramente que

$$\frac{1}{|z\ -\ w|\,|w\ -\ z_0|} = \frac{1}{|z\ -\ z_0|}\left|\frac{1}{(z\ -\ w)} + \frac{1}{(w\ -\ z_0)}\right| \qquad (5.5)$$

e que $\int_{D_R(0)}\dfrac{dx\wedge dy}{|z\ -\ w|} \leq \int_{D_{\partial R}(z)}\dfrac{dx\wedge dy}{|z\ -\ w|} = \int_0^{2R}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\rho}\rho d\theta d\rho = 4\pi R$,onde $0 < \rho < 2$R e $0 < \theta < 2\pi$.

Assim,

$$\int_{D_R(0)} \frac{dx \wedge dy}{|z - w|} \leq 4\pi R \tag{5.6}$$

Segue que, para o primeiro termo do lado direito da inequação (5.4), obtemos:

$$\begin{aligned}
&\int_{D_\varepsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)|\,|dz|}{|z^r|\,|z - w|\,|w - z_0|} dx \wedge dy \\
&= \int_{D_\varepsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)|\,|dz|}{|z^r|} . \frac{1}{|z - z_0|} \left| \frac{1}{(z - w)} + \frac{1}{(w - z_0)} \right| dx \wedge dy \\
&\leq \int_{D_\varepsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)|\,|dz|}{|z^r|} \frac{1}{|z - z_0|} \frac{1}{|z - w|} dx \wedge dy + \\
&\qquad \int_{D_\varepsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)|\,|dz|}{|z^r|\,|z - z_0|\,|w - z_0|} dx \wedge dy \\
&\leq 8\pi R \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)|\,|dz|}{|z^r|\,|z - z_0|} \text{,onde usamos (5.5) e (5.6).}
\end{aligned}$$

Analogamente, para o segundo termo do lado direito de (5.4), obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{D_\varepsilon} \int \int_{D_R(0)} \frac{2A|f(z)|du \ \wedge \ dv}{|z^r|\,|z - w|\,|w - z_0|} dx \wedge dy \\
= \ & 2A \int_{D_\varepsilon} \int \int_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z^r|} \frac{du \ \wedge \ dv}{|z - w|\,|w - z_0|} dx \wedge dy \\
\leq \ & 16A\pi R \int \int_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z^r|\,|z - z_0|} du \wedge dv.
\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever a inequação (5.4) como

$$\begin{aligned}
& 2\pi \int_{D_\varepsilon} \frac{|f(w)||w|^{-r}}{|w - z_0|} dx \wedge dy \\
\leq \ & 8\pi R \int_{\partial D_R(0)} \frac{f(z)|dz|}{|z^r|\,|z - z_0|} + 16A\pi R \int \int_{D_R(0)} \frac{|f(z)|du \ \wedge \ dv}{|z^r|\,|z - z_0|}
\end{aligned}$$

ou

$$\int_{D\varepsilon} \frac{|f(w)||w|^{-r}}{|w\ -\ z_0|} dx \wedge dy$$
$$\leq\ 4R \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z^r|\,|z\ -\ z_0|} + 8AR \int\int_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z^r|\,|z\ -\ z_0|}$$

ou

$$(1 - 8AR) \int\int_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z^r||\ z\ -\ z_0|} du \wedge dv \leq 4R \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z^r|\,|z\ -\ z_0|} \tag{5.7}$$

Como A não muda se R diminuir, podemos escolher R suficientemente pequeno tal que $1 - 8AR > 0$.

Agora, a integral do lado direito de (5.7) é limitada quando $z_0 \to 0$.

Portanto o mesmo acontece com a integral do lado esquerdo. Como o integrando aumenta monotonicamente quando $z_0 \to 0$, temos que

$$\lim_{z_0 \to 0} \int\int_{D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z^r|\,|z\ -\ z_0|} du \wedge dv$$

existe. Segue de (5.3) que $f(w)w^{-r}$ é limitada quando $w \to 0$. Assim, por (5.2) concluímos que $f(w)w^{-r}$ existe, como queríamos.

Lema ii) *De acordo com a hipótese do teorema principal assuma que* $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{f(z)}{z^{k-1}} = 0$, *para todo* $k \geq 1$. *Então* $f \equiv 0$ *em alguma vizinhança de 0.*

Demonstração: Assuma que f não é identicamente nula em uma vizinhança de zero e tome z_0 tal que $f(z_0) \neq 0$, $|z_0| < R$.

Agora, multiplicando a inequação (5.3) por $dx \wedge dy$ e integrando, obtemos

$$\textstyle\int_{D_R(0)} 2\pi\, |f(w)w^{-r}|\, dx \wedge dy \leq \int_{D_R(0)} \int_{\partial D_R(0)} \dfrac{|f(z)||dz|}{|z^r|\,|z\ -\ w|} dx \wedge dy$$
$$+ \textstyle\int_{D_R(0)} \int\int_{D_R(0)} \dfrac{2A|f(z)|du\ \wedge\ dv}{|z^r|\,|z\ -\ w|} dx \wedge dy$$

$$\leq 4\pi R \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z^r|} + 4A\pi R \int_{D_R(0)} |f(z)|\,|z^{-r}|\, dudv$$

Assim, podemos escrever

$$2\pi\,(1-4AR)\int_{D_R(0)} \left|f(w)w^{-r}\right| dx\wedge dy \leq 4\pi R\int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z^r|}. \qquad (5.8)$$

Observe que considerando $D^* = \{z \in D_R(0); |z| \leq |z_0| \text{ e } |f(z)| \geq \dfrac{|f(z_0)|}{2}\}$, obtemos por um lado que

$$(1 - 4AR) \int\int_{D_R(0)} |f(z)|\,|z^{-r}|\, du\wedge dv \geq (1-4AR)\int\int_{D^*} |f(z)|\,|z^{-r}|\, du\wedge dv$$
$$\geq \frac{(1-4AR)}{2}\,|f(z_0)|\,\left|z_0^{-r}\right|\, vol\ D^* = a\left|z_0^{-r}\right|,$$

onde $a = \dfrac{(1-4AR)}{2}\,|f(z_0)|\, vol\ D^*$.

Por outro lado,

$2R\int_{\partial D_R(0)} \dfrac{|f(z)||dz|}{|z^r|} \leq bR^{-r}$, onde $b = 4R \max\limits_{\partial D_R(0)} |f(z)| \int_{\partial D_R(0)} |dz|$.

Segue das estimativas de (5.8) que $a|z_0|^{-r} \leq bR^{-r}$, para todo r, onde a e b não depende de r. Assim, como $|z_0| < R$,

$$0 \leq \lim_{r\to\infty} \frac{a}{b} \leq \lim_{r\to\infty} \left(\frac{|z_0|}{R}\right)^r = 0.$$

Como $a = \dfrac{(1-4AR)}{2}\,|f(z_0)|\, vol\ D^*$, isto implica que $|f(z_0)| = 0$, o que contradiz o fato de $f(z_0)\neq 0$.

Demonstração. (Lema Principal)

A demonstração do Lema Principal segue dos lemas i) e ii). De fato, pelo lema ii) sabemos que se f não é identicamente nula em uma vizinhança de 0, existe um k tal que $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z^{k-1}} = 0$ mas $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z^k}$ não existe ou $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z^k} = c \neq 0$.

O lema i) garante que $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z^k}$ existe. Assim, podemos escrever que

$f(z) = cz^k + R$, $\lim_{z\to 0} \frac{R}{z^k} = 0$ ou $f(z) = z^k f_k\ (z)$, $\mathrm{f}_k(\mathrm{z}) = c + \frac{R}{z^k}$,tal que $f_k(0) = c \neq 0$, e isto prova nossa afirmação. ■

Para cada parametrização isotérmica $\varphi : U \to S$ de um aberto de S, definamos a função $\Phi : U \to \mathbb{C}$ de uma variável complexa dada por

$$\Phi(z, \overline{z}) = \frac{e-g}{2} - if, \tag{5.9}$$

onde e, f e g são os coeficientes da segunda forma fundamental de S.

Observemos ainda que

$$\frac{|\Phi|}{E} = \frac{\sqrt{\frac{(e-g)^2}{4} + f^2}}{E} = \frac{\sqrt{\frac{(e-g)^2+4f^2}{4}}}{E} = \frac{\sqrt{(e-g)^2+4f^2}}{2E},$$

somando e subtraindo 4eg neste radicando temos

$$\begin{aligned} \frac{|\Phi|}{E} &= \frac{1}{2E}\sqrt{(e-g)^2 + 4eg - 4eg + 4f^2} \\ &= \frac{1}{2E}\sqrt{(e+g)^2 - 4(eg - f^2)} \end{aligned} \tag{5.10}$$

e como $e+g=2EH$ e $eg-f^2=KE^2$ temos

$$\begin{aligned}\frac{|\Phi|}{E} &= \frac{1}{2E}\sqrt{(2EH)^2-4(KE^2)} \\ &= \frac{1}{2E}\sqrt{4E^2H^2-4KE^2} \\ &= \frac{1}{2E}\sqrt{4E^2(H^2-K)} \\ &= \sqrt{H^2-K}=\frac{|k_1-k_2|}{2}.\end{aligned} \tag{5.11}$$

Como E $\neq 0$, concluimos que os pontos umbílicos da superfície S são os zeros de Φ.

Um simples cálculo mostra que a equação (1.36) para as linhas de curvatura pode ser escrita como $\mathrm{Im}\{\Phi(dz)^2\}=0$.

Vejamos, considerando $dz=du+idv$, $(dz)^2=du^2+2idudv-dv^2$

$$\begin{aligned}\Phi(dz)^2 &= \left(\frac{e-g}{2}-if\right)\left(du^2+2idudv-dv^2\right) \\ &= \frac{e-g}{2}du^2+(e-g)\,idudv-\left(\frac{e-g}{2}\right)dv^2+ifdu^2+2fdudv-ifdv^2.\end{aligned}$$

Assim, Im $\{\Phi(dz)^2\}=(-fdu^2+(e-g)\,dudv+fdv^2)=0$, pela equação das linhas de curvatura (1.36).

Mas se $Im\{\Phi(dz)^2\}=0$,isto equivale a dizer que $arg\Phi+2\arg dz=m\pi$,onde m é um inteiro ou $\arg dz=\dfrac{m\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\arg\Phi$, onde dz é o elemento tangente da linha de curvatura.

Definindo o índice de um campo de vetores por $j=\dfrac{1}{2\pi}\delta(\arg\ dz)$, onde δ significa a variação de uma volta dada em torno da singularidade p numa pequena curva no sentido positivo, podemos escrever que $j=\dfrac{1}{2\pi}\delta(\dfrac{m\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\arg\Phi)$ e como m permanece inalterado, temos que $j=-\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{2}\delta(\arg\Phi)$.

Se $\Phi(z)=cz^k+...$, onde $k\geq 1$, temos que $\delta(\arg\Phi)=2\pi k$, e desta forma temos que $j=-\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{2}2\pi k=-\dfrac{k}{2}<0$.

Multiplicando a equação (1.41) por i e adicionando-a com a equação (1.42) , obtemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{e-g}{2}\right)_v i+\left(\frac{e-g}{2}\right)_u - f_u i + f_v &= E\left(-iH_v + H_u\right) \qquad (5.12)\\ &\Rightarrow \Phi_{\overline{z}} = EH_z.\end{aligned}$$

5.1 Transformações de parâmetros

Mostraremos agora que a forma $\Phi(dz)^2$ está definida globalmente, o que pode ser observado pela maneira de como ela se expressa em outro sistema de coordenadas, isto é, na interseção de dois sistemas isotérmicos. Veremos que estas duas formas definidas através de tais parâmetros coincidem.

Sejam $z = u + iv$, um sistema de coordenadas isotérmicas, consideremos um outro sistema regular de coordenadas x, y. Então esse novo sistema $w = x + iy$ é isotérmico se, e somente se, w for uma função analítica da variável $z = u + iv$ com derivada não - nula, isto é, $w = w(z)$ e $w'(z) \neq 0$.

Sendo $\varphi(u, v)$ uma parametrização de S, como $\langle \varphi_u, N\rangle = 0$ e $\langle \varphi_v, N\rangle = 0$, onde N é o campo de vetores normais à superfície S, isto implica que $\langle \varphi_u - i\varphi_v, N\rangle = 0$, e portanto por (3.3) temos que $\langle 2\varphi_z, N\rangle = 0$,derivando com relação à z, obtemos

$$\left\langle \frac{\partial(2\varphi_z)}{\partial z}, N\right\rangle + \left\langle 2\varphi_z, \frac{\partial N}{\partial z}\right\rangle = 0,$$

de onde segue

$$
\begin{aligned}
2\langle \varphi_z, N_z\rangle &= -\left\langle \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} - i\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right), N\right\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - i\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} - i\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial u} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}, N\right\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\left\{\left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}, N\right\rangle - 2i\left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}, N\right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}, N\right\rangle\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\left\{\langle \varphi_{\mathrm{uu}}, N\rangle - 2i\langle \varphi_{uv}, N\rangle - \langle \varphi_{vv}, N\rangle\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\{e - 2if - g\} \\
&= -\frac{1}{2}\{e - g - 2if\} \\
&= -\,\Phi.
\end{aligned}
$$

Assim $\Phi = -2\langle \varphi_z, N_z\rangle$.

Similarmente, se $\Psi(w, \overline{w})$ é uma função análoga a função $\Phi(z, \overline{z})$ temos que

$$
\Psi = -2\langle \varphi_w, N_w\rangle .
$$

Mas $w = w(z)$, então $\varphi_z = \varphi_w \dfrac{dw}{dz}$, $N_z = N_w \dfrac{dw}{dz}$.

Logo

$$
\begin{aligned}
\Phi &= -2\langle \varphi_z, N_z\rangle \\
&= -2\left\langle \varphi_w \frac{dw}{dz}, N_w \frac{dw}{dz}\right\rangle \\
&= -2\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 \langle \varphi_w, N_w\rangle \\
&= -2\langle \varphi_w, N_w\rangle \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 \\
&= \Psi\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 .
\end{aligned}
$$

E assim temos $\Phi = \Psi \left(\dfrac{dw}{dz}\right)^2$.Esta fórmula descreve a transformação de Φ.

Observe que se $\overrightarrow{x} = a\dfrac{\partial}{\partial u} + b\dfrac{\partial}{\partial v} \in T_pM$ podemos escrever $II\left(\overrightarrow{x}\right) = a^2e + 2abf + b^2g$.

Considerando $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial u} - i\dfrac{\partial}{\partial v}\right)$ temos

$$\begin{aligned}
\alpha\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right) &= II\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{1}{4}e - \frac{i}{2}f - \frac{1}{4}g \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{e-g}{2} - if\right\} = \frac{1}{2}\Phi.
\end{aligned}$$

Assim a (2,0) componente de α é dada por

$$\alpha^{(2,0)} = \frac{1}{2}\Phi dz^2. \tag{5.13}$$

5.2 Teorema Principal

Teorema 5.1 *Se M é uma superfície de gênero zero e se f: $M \to \mathbb{R}^3$ é uma imersão isométrica tal que $|dH| \leq \gamma\,(H^2 - K)^{\frac{1}{2}}$, onde K é a curvatura Gaussiana da imersão e* γ é uma função real contínua, *então M é isométrica à esfera e f é totalmente umbílica.*

Demonstração.

Observe que

$$\begin{aligned} |dH|^2 &= \frac{\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^2}{\left|\frac{\partial}{\partial u}\right|^2} + \frac{\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)^2}{\left|\frac{\partial}{\partial v}\right|^2} \\ &= \frac{\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^2}{E} + \frac{\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)^2}{E} \\ &= \frac{\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)^2}{E} \\ &= \frac{4\left|\frac{\partial H}{\partial z}\right|^2}{E}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left|\frac{\partial H}{\partial z}\right| = |H_z| = \frac{1}{2}\sqrt{E}\,|dH|\,. \tag{5.14}$$

Pela equação (5.12) sabemos que $\Phi_{\overline{z}} = EH_z$.

Desta forma temos que $|\Phi_{\overline{z}}| = E\,|H_z| = \frac{1}{2}E\sqrt{E}\,|dH|$. Utilizando a hipótese do teorema principal obtemos que $|\Phi_{\overline{z}}| \leq \frac{1}{2}E\sqrt{E}\gamma\,(H^2 - K)^{\frac{1}{2}}$. Além disso sabemos por (5.11) que $(H^2 - K)^{\frac{1}{2}} = \frac{|\Phi|}{E}$.

Assim

$$\begin{aligned}
|\Phi_{\overline{z}}| &= E\,|H_z| \\
&\leq \frac{1}{2}E\sqrt{E}\gamma\left(H^2-K\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}E\sqrt{E}\gamma\frac{|\Phi|}{E} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{E}\gamma\,|\Phi| \\
&= \mu\,|\Phi|\,,\ \text{onde } \mu=\frac{1}{2}\sqrt{E}\gamma.
\end{aligned}$$

Como $|\Phi_{\overline{z}}| \leq \mu\,|\Phi|$,o Lema Principal garante que ou $\Phi\equiv 0$ em uma vizinhança V de z_0 ou $\Phi(z)=(z-z_0)^k f_k(z)$, $z\in V$, $k\geq 1$, onde $f_k(z)$ é uma função contínua com $f_k(z_0)\neq 0$, ou seja, os zeros de Φ são isolados e o índice do campo de direção determinado por $Im\{\Phi dz^2\}=0$ é negativo.

Mas se, para alguma vizinhança V de z_0, $\Phi\equiv 0$, então Φ se anula em todo M, caso contrário, os zeros na fronteira de V contradirão o Lema Principal. De fato, considere V como sendo o conjunto de zeros da função Φ e p $\in V$.

Suponha que exista um ponto q $\notin$ V. Como M é conexa, considere um caminho contínuo $\beta:[0,1]\rightarrow M$ com $\beta(0)=p$ e $\beta(1)=q$.

Além disso, defina

$$A=\{t;\Phi(\beta(s))=0\ \forall\ 0\leq s\leq t\}$$

Como $A\neq\emptyset$ e A é limitado, podemos considerar o sup A.

Analisando o sup A, temos:

Se sup $A=1$, isso significa que $\Phi(q)$=0. Contradição, pois da maneira que construímos, $\Phi(q)\neq 0$.

Se sup $A=t_0<1$, podemos conseguir uma vizinhança W de $\beta(t_0)=z_0$ onde $\Phi(z)=(z-z_0)^k f_k(z)$,onde $k\geq 1$, $f_k(z_0)\neq 0$ ou $\Phi_{|W}\equiv 0$.

Como, para todo t $\in$ [0, 1] com t $<$ t_0 $\Phi(\beta(t))=0$ temos que $\Phi_{|W}\equiv 0$, pois z_0 não é um zero isolado de Φ. Logo t_0 não é o sup A.

Se Φ não é identicamente nula, todos os zeros de são isolados e o índice do campo determinado por $Im\{\Phi dz^2\} = 0$ é -$\frac{k}{2}$. Mas como M tem gênero zero, a soma dos índices das singularidades dos campos de direções é 2, o que é uma contradição.

Portanto $\Phi \equiv 0$ em M e f é totalmente umbílica, já que M é isométrica à esfera, visto que os zeros de Φ são os pontos umbílicos da superfície M e pela **Proposição 1.9** a esfera é a única superfície fechada onde todos os pontos são umbílicos. ■

Capítulo 6

Generalização

Neste capítulo será apresentada a generalização do teorema principal. Além disso disponiblizamos algumas definições e resultados gerais de Variedades Riemannianas cujas demonstrações serão omitidas. Para maiores detalhes destes tópicos recomendamos [5].

6.1 Variedade Diferenciável

Definição 6.1 Uma Variedade Diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $\mathrm{x}_\alpha{:}U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que:

i) $M = \mathrm{U}_\alpha \mathrm{x}_\alpha(U_\alpha)$;

ii) Para todo par α, β com $\mathrm{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathrm{x}_\beta(U_\beta) = \mathrm{W} \neq 0$, os conjuntos $\mathrm{x}_\alpha^{-1}(\mathrm{W})$ e $\mathrm{x}_\beta^{-1}(\mathrm{W})$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $\mathrm{x}_\beta^{-1} \circ x_\alpha \circ\, \mathrm{x}_\beta$ são diferenciáveis.

Definição 6.2 Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1^n \to M_2^m$ é diferenciável em p $\in M_1^n$ se dada uma parametrização y: V $\subset \mathbb{R}^m \to M_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ em p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$. φ é diferenciável num aberto de M_1 se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Definição 6.3 Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é chamada uma curva (diferenciável) em M. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$ e seja **Đ** o conjunto das funções de M diferenciáveis em p. O vetor tangente à curva α em t=0 é a função $\alpha'(0)$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0}, \; f \in \mathbf{Đ}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em t =0 de alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$.

Definição 6.4 O Espaço Tangente a uma variedade M em um ponto p, representado por T_pM é o conjunto de todos os vetores tangentes às curvas suaves pertencentes a M passando por p. Mostra-se que o T_pM é um espaço vetorial de dimensão m que não depende do ponto p.

Definição 6.5 (O Fibrado Tangente). Seja M uma variedade diferenciável e seja

TM =$\{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$. Este espaço munido com a estrutura diferenciável $\{U_\alpha \text{ x } \mathbb{R}^n, \gamma_\alpha\}$ onde $\gamma_\alpha : U_\alpha \text{ x } \mathbb{R}^n \to TM$ definida por:

$$\gamma_\alpha(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha, u_1, ..., u_n) = (x_\alpha(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha), \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}),$$

onde $(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$, é definido como o fibrado tangente de M.

6.2 Campo de vetores

Definiçao 6.6 Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p)$. Em termos de aplicações, X

é uma aplicação de M no fibrado tangente TM. O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \to TM$ é diferenciável.

Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i-1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ é a base associada a x, $i = 1, ..., n$ .X é diferenciável se e só se as funções a_i são diferenciáveis para alguma (e, portanto para qualquer) parametrização.

Às vezes é conveniente utilizar a idéia sugerida acima e pensar em um campo de vetores como uma aplicação X :**Đ**$\to$ **F** , do conjunto **Đ** das funções diferenciáveis em M no conjunto **F** das funções em M, definida por:

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ é a base associada a parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Lema 6.1 Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M. Então existe um único campo vetorial Z, tal que, para todo $f \in$ Đ, $Zf = (XY - YX)f$.

Definição 6.7 O campo vetorial Z dado pelo Lema anterior é chamado colchete $[X, Y] = XY - YX$ de X e Y; Z é evidentemente diferenciável.

Proposição 6.1 *Se X, Y e Z são campos diferenciáveis em M, a, b são números reais e f, g são funções diferenciáveis, então:*

(a) $[X, Y] = -[Y, X]$ (anticomutatividade),

(b)$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (linearidade),

(c) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identidade de Jacob),

(d) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

6.3 Métricas Riemannianas

Definição 6.8 Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$ (isto é uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $x(x_1, ..., x_n) = q \in x(U)$ e $= dx(0, ..., 1, ..., 0)$ então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle = g_{\text{ij}}(x_1, ..., x_n)$ é uma função diferenciável em U. Outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da métrica Riemanniana é dizer que para todo par X e Y de campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança V de M, a função $\langle\ ,\ \rangle$ é diferenciável em V.

Definição 6.9 Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma *Variedade Riemanniana.*

Definição 6.10 Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \to N$ é chamado uma isometria se:

$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}$ para todo $p \in M$, $u, v \in T_pM$.

6.4 Conexão Riemanniana

Indicaremos por $\varkappa(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ definidos em M.

Definição 6.11 Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação $\nabla : \varkappa(M)$ x $\varkappa(M) \to \varkappa(M)$ que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$, que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z.$

ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z.$

iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$ onde $X, Y, Z \in \varkappa(M)$ e $f, g \in \mathbf{Đ}(M)$.

Proposição 6.2 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo de uma curva dierenciável $c : I \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominado derivada covariante de V ao longo de c, tal que:*

a) $\frac{D(V+W)}{dt} = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$

b) $\frac{D(fV)}{dt} = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$*,onde W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I.*

c) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \varkappa(M), i.e., V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}}Y$.

Definição 6.13 Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \to M$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in V$.

Proposição 6.3 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Seja $c : I \to M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, $t_0 \in I$ (i.e. $V_0 \in T_{c(t_0)}M$). Então existe um único campo de vetores paralelos V ao longo de c, tal que $V(t_0) = V_0$, ($V(t)$ é chamado o transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de c).*

Definição 6.14 Seja M uma variedade Riemanniana. Dizemos que uma conexão afim ∇ em M é uma conexão de Levi - Civita (ou Riemanniana) quando satisfaz as condições:

a) ∇ é simétrica, isto é, $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$;

b) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana, ou seja,

$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$, onde $X, Y, Z \in \varkappa(M)$.

6.5 Curvatura

Definição 6.15 A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \varkappa(M)$ uma aplicação

$R(X,Y) : \varkappa(M) \rightarrow \varkappa(M)$, dada por:

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]} Z, Z \in \varkappa(M).$$

Definição 6.16 A curvatura seccional (ou Riemanniana) c(x,y) segundo $\sigma \subset T_pM$ (subespaço bidimensional do espaço tangente T_pM), onde x, y $\in \sigma$ são vetores linearmente independentes, é definida por:

$$c(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2},$$

onde $|x \wedge y|^2 = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}$.

Proposição 6.4 Sejam M uma variedade com curvatura seccional constante e p um ponto de M. defina a aplicação trilinear R' : T_pM x T_pM x T_pM $\rightarrow$ T_pM por $\langle R'(X,Y,Z), T\rangle = \langle X, Z\rangle \langle Y, T\rangle - \langle Y, Z\rangle \langle X, T\rangle$, para todo $X, Y, Z, T \in T_pM$. Então M tem curvatura seccional constante igual a c se, e somente se $R = cR'$, onde R é a curvatura de M.

6.6 Imersões

Definição 6.17 Sejam M^n e $\overline{M}^{n+m=k}$ variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow \overline{M}$ é uma imersão se $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}\overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M$. O número m é chamado codimensão de f. Se, além disso, f é um homeomorfismo sobre $f(M) \subset \overline{M}$, onde $f(M)$ tem a topologia induzida por $\overline{M}$, diz-se que f é um mergulho. Se $M \subset \overline{M}$ e a inclusão $i : M \subset \overline{M}$ é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de $\overline{M}$.

Exemplo 6.1 Seja $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$ uma imersão. Se $\overline{M}$ tem uma estrutura Riemanniana, f induz uma estrutura Riemanniana em M por $\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}$,

$u, v \in T_pM$. A métrica de M é chamada então a métrica induzida por f e f é uma *imersão isométrica*.

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ uma imersão isométrica. Para cada $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ tal que a restrição de f a U é um mergulho sobre $f(U)$. Assim podemos identificar U com sua imagem sobre f. Portanto podemos considerar o espaço tangente de M em p como um subespaço do espaço tangente a $\overline{M}$ em p e escrever

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^{\perp}$$

onde $T_pM^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$.

Definição 6.18 Se X, Y são campos locais em M, $\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$ é um campo local em $\overline{M}$ normal a M.

Proposição 6.5 *Se $X, Y \in \varkappa(U)$, a aplicação α: $\varkappa(U)$ x $\varkappa(U) \to \varkappa(U)^{\perp}$ dada por $\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$ é bilinear e simétrica.*

Definição 6.19 A forma quadrática II_η definida em T_pM por $II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$ é chamada a *segunda forma fundamental de* f em p segundo o vetor normal η.

Às vezes se utiliza também a expressão segunda forma fundamental para designar a aplicação α que em cada $p \in M$ é uma aplicação bilinear, simétrica, tomando valores em $(T_pM)^{\perp}$.

Definição 6.20 A aplicação bilinear H_η está associada a aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_pM \to T_pM$ por

$$\langle S_\eta(x), y\rangle = H_\eta(x, y) = \langle \alpha(x, y), \eta\rangle .$$

Proposição 6.6 *Seja $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. Seja N uma extensão local de η normal a M. Então $S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^{\perp}$.*

Definição 6.21 Seja f: $M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica. A curvatura média da imersão é dada por:

$$H = \frac{1}{n} tr\alpha.$$

Teorema 6.1 (Gauss) *Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de T_pM. Então* $K(x,y) - \overline{K}(x,y) = \langle \alpha(x,x), \alpha(y,y) \rangle - |\alpha(x,y)|^2$.

6.7 As equações fundamentais de uma imersão isométrica

Dada uma imersão isométrica $f : M^n \to \overline{M}^{n+m}$, temos em cada $p \in M$ a decomposição

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

que varia diferenciavelmente com p. Isto significa que, localmente, a parte do fibrado tangente T$\overline{M}$ que se projeta sobre M se decompõe em um fibrado tangente TM e em um fibrado normal $TM^{\perp}$.

Usaremos as letras latinas X, Y, Z, etc., para indicar os campos diferenciáveis de vetores tangentes e as letras gregas ζ, η, ξ,etc., para indicar os campos diferenciáveis de vetores normais.

Definição 6.22 A *conexão normal* $\nabla^{\perp}$ da imersão é dada por

$$\nabla_X^{\perp}\eta = (\overline{\nabla}_X\eta)^N = \overline{\nabla}_X\eta - \left(\overline{\nabla}_X\eta\right)^T = \overline{\nabla}_X\eta + S_\eta(x).$$

Definição 6.23 A *curvatura normal* $R^{\perp}$ da imersão é definida como

$$R^{\perp}(X,Y)\eta = \nabla_Y^{\perp}\nabla_X^{\perp}\eta - \nabla_X^{\perp}\nabla_Y^{\perp}\eta + \nabla_{[X,Y]}^{\perp}\eta.$$

As equações de Gauss e de Ricci são expressões algébricas que relacionam as curvaturas dos fibrados tangente e normal, respectivamente, com a segunda forma fundamental da imersão. Uma relação não-algébrica é dada pela equação de Codazzi, para a qual precisamos "derivar " a segunda forma fundamental considerada como um tensor.

Definição 6.24 Um tensor T de ordem r em uma variedade Riemanniana é uma aplicação multilinear T: $\underbrace{\varkappa(M) \text{ x ... x } \varkappa(M)}_{r\ fatores} \rightarrow \mathbf{Đ}(M)$.

Definição 6.25 Seja T um tensor de ordem r. A *diferencial covariante* ∇T de T é um tensor de ordem (r+1) dado por $\nabla T(Y_1, ..., Y_r, Z) = Z(T(Y_1, ..., Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, ..., Y_r) - ... - T(Y_1, ..., Y_{r-1}, \nabla_Z Y_r)$.

Para cada $Z \in \varkappa(M)$, a *derivada covariante* de $\nabla_Z T$ de T em relação a Z é um tensor de ordem r dado por

$$\nabla_Z T(Y_1, ..., Y_r) = \nabla T(Y_1, ..., Y_r, Z).$$

Proposição 6.7 *As seguintes equações se verificam:*

(a) *Equação de Gauss*

$$\left\langle \overline{R}(X,Y)Z,T \right\rangle = \langle R(X,Y)Z,T\rangle - \langle \alpha(Y,T), \alpha(X,Z)\rangle + \langle \alpha(X,T), \alpha(Y,Z)\rangle .$$

(b) Equação de Codazzi

$$\left\langle \overline{R}(X,Y)Z,\eta \right\rangle = \left(\overline{\nabla}_Y \alpha\right)(X,Z,\eta) - \left(\overline{\nabla}_X \alpha\right)(Y,Z,\eta) .$$

Se o espaço ambiente $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, então a equações acima podem ser escritas como:

(a) Equação de Gauss

$c\left\{\langle X,Z\rangle \langle Y,T\rangle - \langle Y,Z\rangle \langle X,T\rangle\right\} = \langle R(X,Y)Z,T\rangle + \langle \alpha(X,T), \alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,T)\rangle.$

Se considerarmos $X = Z = \dfrac{\frac{\partial}{\partial z}}{\lambda}$ e $Y = T = \dfrac{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}{\lambda}$, onde $\dfrac{\partial}{\partial z}$ e $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ são operadores complexos e $\rho = \left|\dfrac{\partial}{\partial z}\right| = \left|\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\right|$, podemos escrever a *Equação de Gauss* como

$$c\left\{\left\langle \frac{\frac{\partial}{\partial z}}{\rho}, \frac{\frac{\partial}{\partial z}}{\rho}\right\rangle \left\langle \frac{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}{\rho}, \frac{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}{\rho}\right\rangle - \left\langle \frac{\frac{\partial}{\partial z}}{\rho}, \frac{\frac{\partial}{\partial z}}{\rho}\right\rangle \left\langle \frac{\frac{\partial}{\partial z}}{\rho}, \frac{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}{\rho}\right\rangle\right\} = K\sqrt{\left|\frac{\frac{\partial}{\partial z}}{\rho}\right|^2 \left|\frac{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}{\rho}\right|^2 - \left\langle \frac{\frac{\partial}{\partial z}}{\rho}, \frac{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}{\rho}\right\rangle^2}$$
$$+\left\langle \alpha\left(\frac{\frac{\partial}{\partial z}}{\rho}, \frac{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}{\rho}\right), \alpha\left(\frac{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}{\rho}, \frac{\frac{\partial}{\partial z}}{\rho}\right)\right\rangle - \left\langle \alpha\left(\frac{\frac{\partial}{\partial z}}{\rho}, \frac{\frac{\partial}{\partial z}}{\rho}\right), \alpha\left(\frac{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}{\rho}, \frac{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}{\rho}\right)\right\rangle$$

Ou seja,

$$c = K + \left|\alpha^{(2,0)}\right|^2 - H^2$$

Assim

$$\left|\alpha^{(2,0)}\right|^2 = H^2 - K + c \tag{6.1}$$

(b) Equação de Codazzi

$$\left(\overline{\nabla}_X \alpha\right)(Y, Z, \eta) = \left(\overline{\nabla}_Y \alpha\right)(X, Z, \eta). \tag{6.2}$$

Se, além disto, a codimensão da imersão é $1, \nabla^{\perp}_X \eta = 0$,donde,

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X \alpha(Y, Z, \eta) &= -X\left\langle S_\eta(Y), Z\right\rangle + \left\langle S_\eta(\nabla_X Y), Z\right\rangle + \left\langle S_\eta(Y), \nabla_X Z\right\rangle \\ &= -\left\langle \nabla_X(S_\eta(Y)), Z\right\rangle + \left\langle S_\eta(\nabla_X Y), Z\right\rangle.\end{aligned}$$

Portanto, neste caso, a equação de Codazzi se escreve

$$\nabla_X(S_\eta(Y)) - \nabla_Y(S_\eta(X)) = S([X, Y]).$$

A importância das equações de Gauss, Codazzi é que, no caso em que o espaço ambiente tem curvatura seccional constante, elas desempenham um papel análogo aos das equações de compatibilidade na teoria local da superfícies.

Entre as variedades Riemannianas, aquelas de curvatura seccional constante c são as mais simples. Podemos citar como exemplo, o espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ com $c \equiv 0$, a esfera unitária S^n com $c \equiv 1$ e o espaço hiperbólico H^n que tem curvatura seccional $c \equiv -1$.

Pelo teorema de Elie Cartan as variedades citadas acima são as únicas variedades Riemannianas completas, simplesmente conexas, com curvatura seccional constante. Assim o espaço 3-dimensional P de curvatura constante c que aparece no enunciado da generalização do Teorema Principal poderá ser $\mathbb{R}^3$, S^3 ou H^3.

6.8 Generalização do Teorema Principal

Teorema 6.2 *Seja M de gênero zero e P um espaço 3 - dimensional de curvatura constante c, e seja f: $M \to P$ uma imersão isométrica tal que $|dH| \leq \gamma (H^2 - K + c)^{\frac{1}{2}}$, onde K é a curvatura Gaussiana da imersão e γ* é uma função real contínua, *então M é isométrica à esfera e f é totalmente umbílica.*

Demonstração. Considere a segunda forma fundamental $\alpha(X,Y)$ e tome a (2,0) componente de α como definido em (5.13).

Como P tem curvatura seccional constante, por Codazzi, temos que $\left(\nabla^{\perp}_{Z}\alpha\right)(X,Y) = \left(\nabla^{\perp}_{X}\alpha\right)(Z,Y)$.

Considere $Z = \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \partial \overline{z}$ e $X = Y = \dfrac{\partial}{\partial z} = \partial z$, onde ∂z e $\partial \overline{z}$ são os operadores complexos. Assim $\left(\nabla^{\perp}_{\partial \overline{z}}\alpha\right)(\partial z, \partial z) = \left(\nabla^{\perp}_{\partial z}\alpha\right)(\partial \overline{z}, \partial z)$.

Mas $\alpha(\partial z, \partial \overline{z}) = H \langle \partial z, \partial \overline{z} \rangle$. Vamos considerar $(\partial z, \partial \overline{z}) \mapsto \beta\,(\partial z, \partial \overline{z}) = H \langle \partial z, \partial \overline{z} \rangle$.

Desta forma podemos escrever $\alpha(\partial z, \partial \overline{z}) = \beta(\partial z, \partial \overline{z})$.

Assim

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla^{\perp}_{\partial z}\alpha\right)(\partial z, \partial \overline{z}) &= \left(\nabla^{\perp}_{\partial z}\beta\right)(\partial z, \partial \overline{z}) \\
&= \nabla^{\perp}_{\partial z}\beta(\partial z, \partial \overline{z}) - \beta(\nabla_{\partial z}\partial z, \partial \overline{z}) - \beta(\partial z, \nabla_{\partial z}\partial \overline{z}) \\
&= \frac{\partial}{\partial z}(H \langle \partial z, \partial \overline{z} \rangle) - H \langle \nabla_{\partial z}\partial z, \partial \overline{z} \rangle - H \langle \partial z, \nabla_{\partial z}\partial \overline{z} \rangle \\
&= \frac{\partial H}{\partial z} \langle \partial z, \partial \overline{z} \rangle + H[\langle \nabla_{\partial z}\partial z, \partial \overline{z} \rangle + \langle \partial z, \nabla_{\partial z}\partial \overline{z} \rangle] \\
&\quad - H \langle \nabla_{\partial z}\partial z, \partial \overline{z} \rangle - H \langle \partial z, \nabla_{\partial z}\partial \overline{z} \rangle \\
&= \frac{\partial H}{\partial z} \langle \partial z, \partial \overline{z} \rangle \ + H \langle \nabla_{\partial z}\partial z, \partial \overline{z} \rangle \ + H \langle \partial z, \nabla_{\partial z}\partial \overline{z} \rangle \\
&\quad - H \langle \nabla_{\partial z}\partial z, \partial \overline{z} \rangle - H \langle \partial z, \nabla_{\partial z}\partial \overline{z} \rangle \\
&= \frac{\partial H}{\partial z} \langle \partial z, \partial \overline{z} \rangle .
\end{aligned}
$$

Observe que $\langle \partial z, \partial \overline{z} \rangle = \dfrac{1}{2}\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial x}\right\rangle = \dfrac{1}{2}E.$

Logo $\nabla^{\perp}_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\alpha^{(2,0)} = \left(\nabla^{\perp}_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\alpha\right)(\partial z, \partial z) = \left(\nabla^{\perp}_{\frac{\partial}{\partial z}}\alpha\right)(\partial \overline{z}, \partial z) = \dfrac{\partial H}{\partial z}\langle \partial z, \partial \overline{z}\rangle = \dfrac{1}{2}E\dfrac{\partial H}{\partial z}.$

Pela equação (5.14) sabemos que $\left|\dfrac{\partial H}{\partial z}\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{E}\,|dH|\,.$

Utilizando a hipótese do teorema temos que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial H}{\partial z}\right| &= \frac{1}{2}\sqrt{E}\,|dH| \\
&\leq \frac{1}{2}\sqrt{E}\gamma(H^2 - K + c)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Além disso sabemos por (6.1) que $(H^2 - K + c)^{\frac{1}{2}} = \left|\alpha^{(2,0)}\right|.$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\left|\nabla^{\perp}_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\alpha^{(2,0)}\right| &= \left|\frac{1}{2}E\frac{\partial H}{\partial z}\right| \\
&= \frac{1}{2}E\left|\frac{\partial H}{\partial z}\right| \\
&= \frac{1}{2}E\frac{1}{2}\sqrt{E}\,|dH| \\
&= \frac{1}{4}E\sqrt{E}\,|dH| \\
&\leq \frac{1}{4}E\sqrt{E}\gamma(H^2 - K + c)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \mu(H^2 - K + c)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \mu\left|\alpha^{(2,0)}\right|, \text{ onde } \mu = \frac{1}{4}E\sqrt{E}\gamma.
\end{aligned}$$

Mas se $\left|\nabla^{\perp}_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\alpha^{(2,0)}\right| \leq \mu\left|\alpha^{(2,0)}\right|$, podemos utilizar o *Lema Principal* e a demonstração segue como no *Teorema Principal.* ■

Referências Bibliográficas

[1] *ABRESCH, V. and ROSENBERG, R.*, A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $S^2 \times \mathbb{R}$ and $H^2 \times \mathbb{R}$, Acta Math, 193 (2004), Nº 2, 141 – 174.

[2]*ALENCAR, H., CARMO, M.P., TRIBUZY*, R., A theorem of H. Hopf and the Cauchy – Riemann inequality, preprint.

[3]*CARMO, M.P.*, 8º Colóquio brasileiro de matemática, Formas Diferenciais e Aplicações. Poços de Caldas, 5 a 23 de julho 1971.

[4]*CARMO, M.P.,* Geometria diferencial de curvas e superfícies, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

[5]*CARMO, M.P.,* Geometria Riemanniana, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988 – segunda edição. (Projeto Euclides)

[6]*CHERN, S.S.,* Some new characterizations of the Euclidean sphere, Duke Math. J., vol 12 (1945), 279 – 290.

[7]*ESCHENBURG,* J., and TRIBUZY, R., Conformal maps of surfaces and Cauchy – Riemann inequalities, Differential Geometry, edited by B. Lawson and K. Tenenblat, Longman Scientific and Technical, 1991, 149 – 170.

[8]*HARTMAN, P. and WINTNER, A.*, Umbilical points in W-surfaces, American J. Math. 76 (1954), 502 – 508.

[9]*HOPF, H.,* Differential Geometry in the Large, Lectures Notes in Mathematics, Springer – Verlag, v. 1000, 1983.

[10]*LIMA, E.L.*, Curso de Análise Volume II, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Projeto Euclides, 1985.

[11]*NETO, A.L.,* Funções de uma variável complexa, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Projeto Euclides, 1993.

[12]*SPIVAK, M.,* A comprehensive introduction to differential geometry, Publish or Perish, 1979, v. 2.

[13]*WENT, H.,* Counterexample to a conjecture of H. Hopf, Pacific Journal of Math., vol. 121, 1986.