Andréia Pinto de Oliveira

Hipersuperfícies localmente convexas em espaços de curvatura negativa

Manaus - AM

Setembro / 2006

Andréia Pinto de Oliveira

Hipersuperfícies localmente convexas em espaços de curvatura negativa

Dissertação apresentada à Coordenação do Mestrado em Matemática da Universidade Federal do Amazonas para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Ivan de Azevedo Tribuzzy

MESTRADO EM MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

Manaus - AM

Setembro / 2006

A Deus
pelo tempo roubado dele.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos:

– as colegas Nadime Mustafa e Kelly Marães, por não me deixarem desistir;

– a Alexandra Salerno e J.B. Ponciano, pelas longas horas de estudo;

– ao professor doutor Ivan Tribuzy, por sua atenção e dedicação em todos os momentos;

– ao meu esposo, Alciélio, pelas muitas horas em que suportou a minha ausência em favor deste trabalho;

– finalmente, mas com muito carinho, à Deus, que tornou tudo isso possível, a minha eterna gratidão.

"O Senhor é meu Pastor,
nada me faltará"
Salmo 23:1

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é mostrar sobre quais condições é possível mergulhar uma variedade Riemanniana compacta, conexa e orientável $\mathbb{M}$, em uma variedade de Hadamard N, de tal forma que ela seja o bordo de um corpo convexo.

Este resultado possui importantes generalizações no caso em que as variedades são o espaço euclidiano R^n, o espaço hiperbólico H^n e a esfera S^n. Mostraremos que tal resultado é sempre válido se N for uma variedade de Hadamard, ou seja, variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e de curvatura seccional não positiva.

Abstract

The main object this wore is to show above wich is possible imbled a compact, connected, orientable riemannian manifold $\mathbb{M}$ in a Hadamard's manifold N, as the boundary of a convex body.

This result has important generalizations to the euclidian space R^n, the hiperbolic space H^n end the sphere S^n. We shall the such result is valid to a Hadamard's manifold, is that, complete simply connected riemannian manifold of sectional non-positive curvature.

Sumário

1 Introdução

Um importante teorema, devido a Hadamard, afirma que se a segunda forma fundamental de uma hipersuperfície compacta, imersa, $\mathbb{M}$, do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, for definida positiva, então $\mathbb{M}$ é mergulhada como a fronteira de um corpo convexo.

Este resultado permite importantes generalizações, nos casos em que as hipersuperfícies são H^n, S^n e $\mathbb{R}^n$, que tem curvatura seccionais constantes. Porém, para hipersuperfícies com curvatura variável, este resultado não permite generalizações.

Neste trabalho, nosso principal objetivo é mostrar que o teorema de Hadamard é válido para qualquer variedade riemanniana completa, simplesmente conexa e de curvatura seccional não positiva. Ou seja, nestas condições, podemos mergulhar $\mathbb{M}$ como a fronteira de um corpo convexo.

Em todo este trabalho, N é uma variedade de Hadamard, ou seja, variedade riemanniana, completa, simplesmente conexa e de curvatura seccional não positiva.

O trabalho foi dividido em quatro partes. Na primeira parte nos reportamos as definições e resultados preliminares da geometria diferencial, que nos darão base para desenvolvermos os demais capítulos. Na segunda parte, ressaltamos o teorema de Rauch e algumas de suas extenções que utilizaremos com frequência neste trabalho. Em linhas gerais, o teorema de Rauch afirma, intuitivamente, que se as curvaturas aumentam, os comprimentos diminuem.

Em seguida, enunciamos e demonstramos os teoremas de Hopf e Rinow e de Hadamard. No teorema de Hopf e Rinow temos uma importante propriedade das variedades completas, que é o fato de que dados dois pontos desta variedade, existe uma geodésica minimizante ligando estes dois pontos. Além disso, temos outros fatos importantes, como por exemplo, que uma variedade compacta é completa e que uma subvariedade fechada de uma variedade completa é uma variedade completa. Como aplicação do teorema de Hopf e Rinow, demonstramos o teorema de Hadamard que afirma ser homeomorfa a R^n uma variedade completa, de dimensão n, simplesmente conexa e cuja curvatura seccional satisfaz $K \leq 0$. Este é um exemplo de propriedades locais e globais, onde condições locais ($K \leq 0$) junto com restrições globais (completa e simplesmente conexa) implicam em uma forte restrição global (ser homeomorfa ao R^n).

Finalmente, no ultímo capítulo, enunciamos e demonstramos os resultados príncipais deste trabalho, que em linhas gerais nos dizem sobre que condições podemos mergulhar uma variedade compacta, conexa e orientável, $\mathbb{M}$, em uma variedade de Hadamard, N, de tal forma que $\mathbb{M}$ seja o bordo de um corpo convexo.

2 Generalidades

Definição 2.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto* $\mathbb{M}$ *e uma família de aplicações biunívocas* $X_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{M}$ *de abertos* U_α *de* $\mathbb{R}^n$ *em* $\mathbb{M}$ *tais que:*
a) $\bigcup_\alpha X_\alpha(U_\alpha) = \mathbb{M}$
b) $\forall$ *par* α, β, *com* $X_\alpha(U_\alpha) \bigcap X_\beta(U_\beta) = W \neq \phi$, *os conjuntos* $X_\alpha^{-1}(W)$ *e* $X_\beta^{-1}(W)$ *são abertos em* $\mathbb{R}^n$ *e as aplicações* $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$ *são diferenciáveis*
c) A família $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}$ *é máxima relativamente às condições a) e b), ou seja, qualquer outra família esta contida nesta.*

O par (U_α, X_α) com $p \in X_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma parametrização de $\mathbb{M}$ em p. Uma família $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}$ satisfazendo a) e b) é chamada uma estrutura diferenciável em $\mathbb{M}$.

Definição 2.2. *Seja* $\mathbb{M}$ *uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável* $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{M}^n$ *é chamada curva diferenciácel em* $\mathbb{M}$. *Suponha* $\alpha(0) = p \in \mathbb{M}^n$ *, e seja* $\mathcal{D}$ *o conjunto das funções diferenciáveis de* $\mathbb{M}$ *em* p. *O vetor tangente à curva* α *em* $t = 0$ *é a função* $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0}, f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{M}^n$ *com* $\alpha'(0) = p$. *O conjunto dos vetores tangentes será indicado por* $T_p\mathbb{M}^n$.

Seja $\mathbb{M}^n$ uma variedade diferenciável e seja $T\mathbb{M} = \{(p, v); p \in \mathbb{M}, v \in T_p\mathbb{M}\}$. Vamos mostrar que $T\mathbb{M}$ é uma variedade diferenciável.

Seja $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ a estrutura máxima de $\mathbb{M}$. Indique por $(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha)$ as coordenadas de U_α e por $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right\}$ as bases associadas nos espaços tangentes de $x_\alpha(U_\alpha)$. Para cada α, defina $y_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to T\mathbb{M}$ por

$$y_\alpha(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha, u_1, ..., u_n) = \left(x_\alpha(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha), \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right),\ (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Geometricamente, isto significa tomar como coordenadas de um ponto $(p, v) \in T\mathbb{M}$ as coordenadas $x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha$ de p junto com as coordenadas de v na base $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right\}$.

Como $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = \mathbb{M}$ e $(dx_\alpha)_q(\mathbb{R}^n) = T_{x_\alpha(q)}\mathbb{M}$, $q \in U_\alpha$, tem-se

$$\bigcup_\alpha y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) = T\mathbb{M},$$

o que verifica a condição (i) da definição de variedade diferenciável. Considere agora

$$(p, v) \in y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \bigcap y_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n).$$

Então

$$(p, v) = (x_\alpha(q_\alpha), dx_\alpha(v_\alpha)) = (x_\beta(q_\beta), dx_\beta(v_\beta)),$$

onde $q_\alpha \in U_\alpha$, $q_\beta \in U_\beta$, $v_\alpha, v_\beta \in \mathbb{R}^n$. Portanto,

$$y_\beta^{-1} \circ y_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) = y_\beta^{-1}(x_\alpha(q_\alpha), dx_\alpha(v_\alpha)) = ((x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(q_\alpha), d(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(v_\alpha)).$$

Como $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ é diferenciável, $d(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)$ também o é. Decorre daí que $y_\beta^{-1} \circ y_\alpha$ é diferenciável, o que verifica a condição (ii) da definição de variedade diferenciável o que mostra que $T\mathbb{M}$ é uma estrutura diferenciável.

Definição 2.3. *O conjunto $T\mathbb{M}$ definido acima é chamado fibrado tangente de $\mathbb{M}$.*

Definição 2.4. *Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade $\mathbb{M}$ é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in \mathbb{M}$ um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente $T_p\mathbb{M}$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido:*

Se $X : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{M}$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $X(x_1, x_2, ..., x_n) = q$ pertence a $X(U)$ e $\frac{\delta}{\delta x_i}(q) = d_{x_q}(0, ..., 1, ...0)$, então $< \frac{\delta}{\delta x_i(q)}, \frac{\delta}{\delta x_j(q)} >_q = g_{ij}(x_1, ..., x_n)$ é uma função diferenciável em U.

Uma variedade diferenciável com uma métrica Riemanniana chama-se uma Variedade Riemanniana.

Antes de definirmos uma variedade simplesmente conexa, precisamos da seguinte definição:

Definição 2.5. *Sejam $B \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha_0 : [0,l] \to B$ e $\alpha_1 : [0,l] \to B$ dois arcos de B, ligando os pontos $p = \alpha_0(0) = \alpha_1(0)$ e $q = \alpha_0(l) = \alpha_1(l)$. Diz-se que α_0 e α_1 são homotópicos se existir uma aplicaçao contínua $H : [0,l] \times [0,1] \to B$ tal que:*

1) $H(s,0) = \alpha_0(s), H(s,1) = \alpha_1(s), s \in [0,l]$

2) $H(t,0) = p$ e $H(l,t) = q$, $t \in [0,1]$

H é então uma homotopia entre α_0 e α_1

Nessas condições, diz-se que um conjunto conexo por arcos $B \subset \mathbb{R}^3$ é simplesmente conexo se todo arco de B, $\alpha : [0,l] \to B$, fechado (isto é, $\alpha(0) = \alpha(l) = p$) é homotópico ao arco constante $\alpha : [0,l] \to B$ dado por $\alpha(s) = \alpha(0) = p$, $s \in [0,l]$.

Intuitivamente, um conjunto conexo por por arcos B é simplesmente conexo se toda curva contínua fechada em B, pode ser deformada contínuamente em um ponto.

Definição 2.6. *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável $\mathbb{M}$ é uma correspondencia que a cada ponto $p \in \mathbb{M}$ associa um vetor $X(p) \in T_p\mathbb{M}$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de $\mathbb{M}$ no fibrado tangente $T\mathbb{M}$. O campo é diferenciável se a aplicação $X : \mathbb{M} \to T\mathbb{M}$ é diferenciável.*

O conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ uma variedade diferenciável $\mathbb{M}$ será indicado por $X(\mathbb{M})$.

Consideremos a aplicação $\nabla : X(\mathbb{M}) \times X(\mathbb{M}) \to X(\mathbb{M})$ com as seguintes propriedades:

1) $\nabla_{(fX+gY)}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

2) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

3) $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y$, com $X, Y, Z \in X(\mathbb{M})$ e $f, g \in A(\mathbb{M})$ com $A(\mathbb{M})$ anel das funções reais definidas em $\mathbb{M}$.

Definição 2.7. *A aplicação ∇ acima é chamada Conexão Afim na variedade diferenciável $\mathbb{M}$.*

Proposição 2.8. *Sejam $\mathbb{M}$ uma variedade diferenciável com uma conexão ∇ e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}$ uma curva. Então é possível associar de forma única um campo vetorial X a outro campo vetorial $\frac{D_X}{dt}$ ao longo de γ, de modo que:*

1) $\frac{D}{dt}(X + Y) = \frac{D_X}{dt} + \frac{D_Y}{dt}$

2) $\frac{D}{dt}(fX) = \frac{df}{dt}X + f\frac{D_X}{dt}$

3) Se $Z \in X(\mathbb{M})$ é tal que $X(t) = Z(\gamma(t))$, então $\frac{D_X}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} Z$ com $X, Y \in X(\mathbb{M})$ e f é uma função diferenciável em I.

$\frac{D_X}{dt}$ é chamada derivada covariante de X ao longo da curva γ relativamente a conexão ∇

Definição 2.9. *Seja $\mathbb{M}$ uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial ao longo de uma curva $c : I \rightarrow \mathbb{M}$ é chamado campo paralelo quando $\frac{D_V}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.*

Definição 2.10. *Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}$ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt} = 0$, para todo $t_0 \in I$*

Notemos que o campo $\frac{d\gamma}{dt}$ é paralelo ao longo de γ.

Definição 2.11. *Um segmento de geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{M}$ é chamado minimizante se $l(\gamma) \leq l(c)$, onde l indica o comprimento de uma curva e c é qualquer curva diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$*

Definição 2.12. *Diremos que ∇ é compatível com a métrica se para toda curva γ e todo par de vetores paralelos X, Y ao longo de γ, tivermos $< X, Y >=$ constante.*

Proposição 2.13. *Seja $\mathbb{M}$ uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em $\mathbb{M}$ é compatível com a métrica $\langle\ ,\ \rangle$ se e somente se, para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferencial $c : I \rightarrow \mathbb{M}$, tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I. \tag{2.1}$$

Corolário 2.14. *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana $\mathbb{M}$ é compatível com a métrica se e só se*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad X, Y, Z \in X(\mathbb{M}).$$

A proposição e o corolário acima bem como suas respectivas demonstrações podem ser encontradas em [5], pags. 53 e 54.

Definição 2.15. *Uma conexão* ∇ *é chamada simétrica quando* $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$*, para todo* $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$*, onde a aplicação* $[\ ,\ ] : \mathcal{X}(\mathbb{M}) \times \mathcal{X}(\mathbb{M}) \longrightarrow \mathcal{X}(\mathbb{M})$ *dada por* $[X, Y] = XY - YX$ *é chamada o colchete de Lie.*

Em um sistema de coordenadas (U, x), o fato de ser ∇ simétrica implica que para todo $i, j = 1, ..., n$,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Observe que a expressão acima é equivalente ao fato de que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Teorema 2.16. *(Levi-Civita) Seja* $\mathbb{M}$ *uma variedade Riemanniana, existe uma única conexão afim* ∇ *em* $\mathbb{M}$ *que é simétrica e compatível com a métrica.*

Demonstração: Suponha inicialmente a existência de uma tal ∇ .Então

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \tag{2.2}$$

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle, \tag{2.3}$$

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle. \tag{2.4}$$

Somando (2.2) e (2.3) e subtraindo (2.4), tem-se, usando a simetria de ∇, que

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle$$

Portanto

$$\begin{aligned} \langle Z, \nabla_Y X\rangle \quad = \quad & \frac{1}{2}[X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ & - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle] \end{aligned} \tag{2.5}$$

A expressão acima mostra que ∇ está univocamente determinada pela métrica $\langle\ ,\ \rangle$. Portanto, caso ela exista, ela será única.

Para mostrar a existência, defina ∇ por (2.5). É fácil verificar que ∇ está bem definida e que satisfaz às propriedades desejadas.■

A conexão dada pelo teorema acima é chamada conexão *Riemanniana* ou de *Levi-Civita*.

Definição 2.17. *Uma variedade Riemanniana $\mathbb{M}$ é (geodesicamente) completa se $\forall\ p \in \mathbb{M}$, a aplicação exponencial exp_p está definida $\forall\ v\ \in T_p\mathbb{M}$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

Definição 2.18. *Sejam $\mathbb{M}$ e $\overline{\mathbb{M}}$ variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : \mathbb{M} \to \overline{\mathbb{M}}$ é chamado uma isometria se:*

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v), \rangle_{f(p)}$$

para todo $p \in \mathbb{M}$ e $u, v \in T_p\mathbb{M}$.

Definição 2.19. *Seja $\mathbb{M}$ uma variedade Riemanniana e a aplicação $R(X, Y) : X(\mathbb{M}) \times X(\mathbb{M}) \to X(\mathbb{M})$ dada por $R(X, Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,y]}Z$, $Z \in X(\mathbb{M})$ é chamada curvatura Riemanniana de $\mathbb{M}$.*

R indicará a curvatura de $\mathbb{M}$.

Proposição 2.20. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana $\mathbb{M}$, satisfaz:*

$$\begin{aligned}
i\ )&\ \ R(f\,X + g\,Y, Z) = f\,R(X, Z) + g\,R(Y, Z)\\
ii\ )&\ \ R(X, f\,Y + g\,Z) = f\,R(X, Y) + g\,R(X, Z)\\
iii\ )&\ \ R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W\\
iv\ )&\ \ R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0\\
v\ )&\ \ \langle R(X, Y)Z, W\rangle = -\langle R(Y, X)Z, W\rangle\\
vi\ )&\ \ \langle R(X, Y)Z, W\rangle = -\langle R(Y, X)W, Z\rangle\\
vii\ )&\ \ \langle R(X, Y)Z, W\rangle = -\langle R(Z, W)X, Y\rangle
\end{aligned}$$

Definição 2.21. *Seja σ um plano bidimensional do espaço tangente $T_p\mathbb{M}$, e seja $\{x, y\}$ uma base de σ. A expressão*

$$K_p(x, y) = K_p(\sigma) = \frac{\langle R(x, y)x, y\rangle}{||x \times y||^2}$$

é chamada de curvatura seccional de σ em p, onde $||x \times y|| = ||x||^2||y||^2 - \langle x, y\rangle$.

Definição 2.22. *Uma aplicação diferenciável $\varphi : \mathbb{M}^m \to N^n$ é uma imersão se $d\varphi_p : T_p\mathbb{M} \to T_{\varphi(p)}N$ é injetiva $\forall p \in \mathbb{M}$.Se além disso, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(\mathbb{M}) \subset N$, onde $\varphi(\mathbb{M})$ tem a topologia induzida de N, diz-se que φ é um mergulho.*

Definição 2.23. *Seja $f : \mathbb{M} \to \overline{\mathbb{M}}$ uma imersão de uma variedade diferenciável $\mathbb{M}$ de dimensão n em uma variedade riemanniana $\overline{\mathbb{M}}$ de dimensão iqual a $k = m + n$. A métrica riemanniana de $\overline{\mathbb{M}}$ induz de maneira natural uma métrica riemanniana em $\mathbb{M}$: se $v_1, v_2 \in T_p\mathbb{M}$, define-se $\langle v_1, v_2\rangle = \langle df_p(v_1), df_p(v_2)\rangle$. Nesta situação, f passa a ser uma imersão isométrica de $\mathbb{M}$ em $\overline{\mathbb{M}}$.*

Definição 2.24. *Seja $p \in \mathbb{M}$ e $\eta \in (T_pN)^{\perp}$. A aplicação $\alpha_\eta : T_pN \times T_pN \to \mathbb{R}$ dada por $\alpha_\eta(X, Y) = \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y\rangle$, $X, Y \in T_pN$, é chamada 2ª forma fundamental da imersão f segundo o vetor normal η.*

Note que $(T_pN)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pN em $T_p\mathbb{M}$ e que $\overline{\nabla}$ será a notação que usaremos para a conexão Riemanniana de $\mathbb{M}$. Também definiremos $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\,\overline{Y})^{\perp}$ e se tomarmos $X, Y \in X(\mathbb{M})$, então $\overline{X}, \overline{Y}$ serão as extensões locais em $\mathbb{M}$.

Para cada $p \in \mathbb{M}^n$, a métrica em $T_p\overline{\mathbb{M}}^{n+k}$ o decompõe na soma direta

$$T_p\overline{\mathbb{M}} = T_p\mathbb{M} \oplus N_p\mathbb{M},$$

onde $N_p\mathbb{M}$ é o complemento ortogonal de $T_p\mathbb{M}$ em $T_p\overline{\mathbb{M}}$. Assim, se $v \in T_p\mathbb{M}$ pode-se escrever

$$v = [v]^T + [v]^N,\ [v]^T \in T_p\mathbb{M},\ [v]^N \in N_p\mathbb{M}.$$

Tal decomposição é diferenciável no sentido de que as aplicações de $T\overline{\mathbb{M}}$ em $T\overline{\mathbb{M}}$ dadas por

$$(p, v) \to (p, [v]^T) \ e\ (p, v) \to (p, [v]^N)$$

são diferenciáveis. Isto significa que, localmente, a parte do fibrado tangente $T\overline{\mathbb{M}}$ que se projeta sobre $\mathbb{M}^n$ se decompõe em um fibrado tangente $T\mathbb{M}$ e um fibrado normal $N\mathbb{M}$.

Denote por $[\ \ ]^T$ a projeção em $T\overline{M}$ sobre $T\mathbb{M}$ e por $[\ \ ]^N$ a projeção sobre $N\mathbb{M}$.

A conexão de $\overline{\mathbb{M}}$ será denotada por $\overline{\nabla}$ e está relacionada a conexão ∇ de $\mathbb{M}$ da seguinte maneira

$$[\nabla_X Y]^T = \nabla_X Y$$

onde $X, Y \in \Gamma(T\mathbb{M})$.

Definição 2.25. *Sejam $X, Y \in \Gamma(T\mathbb{M})$. A aplicação $B : \Gamma(T\mathbb{M}) \times \Gamma(T\mathbb{M}) \to \Gamma(N\mathbb{M})$, onde*

$\Gamma(N\mathbb{M})$ *é conjunto dos campos diferenciáveis normais a* $\mathbb{M}$*, dada por*

$$B(X,Y) = [\nabla_X Y]^N$$

é chamada a segunda forma fundamental da imersão.

Agora, vamos associar a 2ª forma fundamental a uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_pN \to T_pN$ dada por $\langle S_\eta(X), Y\rangle = \alpha_\eta(X,Y)$.

A próxima proposição fornece uma forma de obtermos a aplicação linear associada a segunda forma quadrática.

Proposição 2.26. *Sejam* $p \in \mathbb{M}$*,* $x \in T_p\mathbb{M}$ *e* $\eta \in (T_p\mathbb{M})^\perp$*. Seja* N *uma extensão local de* η *a* $\mathbb{M}$*. Então* $S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)$*.*

Considerando o caso particular em que a codimensão da imersão é 1*, isto é,* $f : \mathbb{M}^n \to \overline{\mathbb{M}}^{\,n+1}$*;* $f(\mathbb{M}) = \overline{\mathbb{M}}$ *é então denominada uma Hipersuperfície.*

Agora, definiremos alguns conjuntos que utilizaremos com frequência neste trabalho:

Definição 2.27. *Seja* $\mathbb{M}$ *uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa de dimensão* $m+1, (m \geq 2)$*. Um subconjunto* K *de* $\mathbb{M}$ *é fortemente convexo se dados* p *e* q *de* K *existe uma única geodésica minimizante de* $\mathbb{M}$ *ligando* p *a* q*, e esta geodésica esta contida em* K*.*

Definição 2.28. *Um subconjunto conexo* K *de* $\mathbb{M}$ *é convexo se para todo ponto* p *do fecho* $\overline{K}$ *de* K *existe um número* $\epsilon = \epsilon(p) > 0$ *tal que* $K \cap B_\epsilon(p)$ *é fortemente convexo, onde* $B_\epsilon(p)$ *é a bola aberta de centro em* p *e raio* ϵ*.*

Definição 2.29. *Se o interior* $intK$ *de* K *é não vazio, dizemos que* K *é um corpo convexo de* $\mathbb{M}$*.*

3 Extensões do Teorema de Rauch

Definição 3.1. *Dada uma geodésica $\gamma : [0, a] \to \mathbb{M}$, um campo de vetores J ao longo de γ é um campo de Jacobi se satisfaz a equação:*
$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0$$

Proposição 3.2. *Seja J um campo de Jacobi ao longo da geodésica $\gamma : [0, a] \to \mathbb{M}$. Então*

$$\langle J(t), \gamma'(t)\rangle = \langle J'(0), \gamma'(0)\rangle t + \langle J(0), \gamma'(0)\rangle, t \in [0, a].$$

Demonstração. Omitindo o t por conveniência nesta demonstração e utilizando a equação de Jacobi, temos

$$\langle J', \gamma'\rangle' = \langle J'', \gamma'\rangle = -\langle R(\gamma', J)\gamma', \gamma'\rangle = 0.$$

Portanto,

$$\langle J', \gamma'\rangle = \langle J'(0), \gamma'(0)\rangle.$$

Além disso,

$$\langle J, \gamma'\rangle' = \langle J', \gamma'\rangle = \langle J'(0), \gamma'(0)\rangle.$$

Integrando está última equação em t, obtemos finalmente

$$\langle J, \gamma'\rangle = \langle J'(0), \gamma'(0)\rangle t + \langle J(0), \gamma'(0)\rangle.$$

□

Corolário 3.3. *Se $J(0) = 0$, então*

$$\langle J(t), \gamma'(t)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle J'(0), \gamma'(0)\rangle = 0.$$

Em particular, o espaço dos campos de Jacobi J com $J(0) = 0$ e $\langle J, \gamma'\rangle = 0$ tem dimensão $n-1$.

Definição 3.4. *Chamaremos de Campos de N-Jacobi, os campos de Jacobi que satisfizerem as propriedades:*

i) J é perpendicular a γ

ii) $J(0) \in T_{\gamma(0)}(N)$

iii) $S_{\gamma'(0)}J(0) + J'(0)$ é perpendicular a $T_{\gamma(0)}(N)$

Um ponto focal em γ é um ponto $\gamma(t)$, $t \neq 0$, no qual um campo de N-Jacobi ao longo de γ se anula, isto é, $J(\gamma(t)) = 0$.

No caso de $N = p$ e $p \in \mathbb{M}$, o conjunto dos campos de N-Jacobi são chamados de campos de Jacobi dentro de $L(\gamma, a, 0)$ e os pontos focais são também chamados de pontos conjugados.

Proposição 3.5. *Um ponto $q \in \mathbb{M}$ é um ponto focal de N se e somente se, é um valor crítico da $exp^{\perp}$.*

Agora, enunciaremos o Teorema de Rauch, que em linhas gerais afirma que se as curvaturas aumentam, os comprimentos diminuem.

Teorema 3.6. *(Rauch). Sejam $\gamma : [0, a] \to \mathbb{M}^n$ e $\tilde{\gamma} : [0, a] \to \tilde{\mathbb{M}}^{n+k}$, $k \geq 0$, geodésicas com a mesma velocidade (isto é, $|\gamma'(t)| = |\tilde{\gamma}'(t)|$), e sejam J e $\tilde{J}$ campos de Jacobi ao longo de γ e $\tilde{\gamma}$, respectivamente, tais que*

$$J(0) = \tilde{J}(0) = 0, \langle J'(0), \gamma'(0)\rangle = \langle \tilde{J}'(0), \tilde{\gamma}'(0)\rangle,$$

$$|J'(0)| = |\tilde{J}'(0)|.$$

Admita que $\tilde{\gamma}$ não possui pontos conjugados em $(0, a]$ e que, para todo t e todo $x \in T_{\gamma(t)}(\mathbb{M})$, $\tilde{x} \in T_{\tilde{\gamma}(t)}(\mathbb{M})$, tem-se

$$\tilde{K}(\tilde{x}, \tilde{\gamma}'(t)) \geq K(x, \gamma'(t)),$$

onde $K(x, y)$ indica a curvatura seccional segundo o plano gerado por x, y. Então

$$|\tilde{J}| \leq |J|.$$

Além disso, se para algum $t_0 \in (0, a]$, *tem-se* $|\tilde{J}(t_0)| = |J(t_0)|$, *então*

$$\tilde{K}(\tilde{J}(t), \tilde{\gamma}'(t)) = K(J(t), \gamma'(t)), paratodot \in [0, t_0].$$

Teorema 3.7. *Extensão do Teorema da Comparação de Rauch: Consideremos* $H = (V, R_t, N, S)$ *e* $\overline{H} = (\overline{V}, \overline{R_t}, \overline{N}, \overline{S})$. *Suponhamos que sejam válidas:*

(I)

i) $r = dimN = 0$ *e* $\overline{r} = dim\overline{N} = 0$.

ii) O máximo autovalor de R_t *é menor ou igual ao mínimo autovalor de* $\overline{R}_t$.

iii) $J \in L(V, a, 0)$ *e* $\overline{J} \in L(\overline{V}, a, 0)$ *campos de Jacobi com* $||\nabla J(0)|| = ||\nabla \overline{J}(0)|| \neq 0$

iv) Não há pontos conjugados de $\overline{H}$ *em* $(0, a]$.

(II)

i) $r > 0$ *e* $\overline{r} = \overline{n} - 1$

ii) O máximo autovalor de R_t *é menor ou igual ao mínimo autovalor de* $\overline{R}_t$.

iii) O mínimo autovalor de S é maior ou igual ao máximo de $\overline{S}$

iv) $J \in L(V, a, N)$ *e* $\overline{J} \in L(\overline{V}, a, \overline{N})$ *campos de N-Jacobi nesta ordem tais que* $||J(0)|| = ||\overline{J}(0)|| \neq 0$

v) Não há pontos focais de $\overline{H}$ *em* $(0, a]$

Nas condições do item (I) ou nas condições do item (II), valem:

a) $||J(t)|| \geq ||\overline{J}(t)||, \forall t \in [0, a]$

b) Se $||J(t)|| = ||\overline{J}(t)||$ *para algum* $x \in (0, a]$, *então* $||J(t)|| = ||\overline{J}(t)||$, $\forall t \in [0, a]$.

Faremos apartir de agora, Aplicaões do Teorema de Rauch à Subvariedades. Vamos inicialmente estabelecer algumas notações:

1) $\mathbb{M}$ denotará uma variedade diferenciável de dimensão $m \geq 2$.

2) N denotará uma subvariedade de $\mathbb{M}$ de dimensão r, com $0 \leq r \leq m - 1$.

3) $T_p\mathbb{M}$ denotará o espaço tangente de $\mathbb{M}$ no ponto $p \in \mathbb{M}$.

4) $\gamma(t)$ denotará uma geodésica em $\mathbb{M}$ parametrizada pelo comprimento de arco com domínio no intervalo $(0, a]$ e com ponto inicial em p e derivada inicial $\gamma'(t) \in (T_pN)^{\perp}$.

5) S denotará a transformação linear associada a segunda forma fundamental.

6) K denotará a curvatura seccional do plano bidimensional $\sigma \subset T_{\gamma(t)}\mathbb{M}$ que contém $\gamma'(t)$.

7) O autovalor mínimo de S é menor ou igual ao autovalor máximo de $\overline{S}$.

8) Para cada $t \in (0, a]$ e para todo plano bidimensional $\sigma \subset \mathbb{M}_{\gamma(t)}$ contendo $\gamma'(t)$ e para todo plano bidimensional $\overline{\sigma} \subset \overline{\mathbb{M}}_{\overline{\gamma}(t)}$ contendo $\gamma'(t)$ as curvaturas seccionais $K(\sigma)$ e $\overline{K}(\overline{\sigma})$ satisfazendo $K(\sigma) \leq \overline{K}(\overline{\sigma})$

Lema 3.8. *O máximo autovalor de $\alpha(t)$ de $R(t)$ é menor ou igual ao mínimo autovalor de $\overline{\alpha}(t)$ de $\overline{R}(t)$ se e somente se ocorrer (8).*

Demonstração:

Seja $v \in T_{\gamma(t)}\mathbb{M}$ tal que v e γ' formam uma base ortonormal de σ.

Temos que, $\alpha(t) = sup\{\langle R_t v, v\rangle\}$

$= sup\{K(v(t), \gamma'(t))\}$

$\leq \{\overline{K}(\overline{v}(t), \overline{v}'(t))\}$

$= sup\{\langle \overline{R}_t \overline{v}(t), \overline{\gamma}'(t)\rangle\} = \overline{\alpha}(t).$

Reciprocamente

$sup\{K(v(t), \gamma'(t))\} = sup\{K_t v, v\rangle\}$

$\leq \{sup\{K(v(t), \gamma'(t))\}$

$= \alpha(t)$

$\leq \overline{\alpha}(t)$

$\leq inf\{\langle \overline{K}(\overline{v}(t), \overline{v}\,'(t))\rangle\}$

$\leq \langle \overline{R}_t v(t), \overline{\gamma}\,'(t)\rangle = \overline{R}(\overline{v}(t), \overline{\gamma}\,'(t))$

Proposição 3.9. *Suponhamos validos (7) e (8) e que se $r > 0$, então $\overline{r} > 0$.*

Nestas condições, se não há pontos focais em $\overline{\gamma}$, então não há pontos focais em γ.

Este resultado decorre diretamente da proposição:

Proposição 3.10. *Tomemos $H = (V, R_t, N, S)$ de dimensão $n - 1$ e $\overline{H} = (\overline{V}, \overline{R}_t, \overline{N}, \overline{S})$ de dimensão $(\overline{n} - 1)$. Suponhamos que sejam válidas as hipóteses dos ítens I e II.*

(I)

i) Se $r = dimN = 0$ então $\overline{r} = dim\overline{N} \geq 0$.

ii) O máximo autovalor de R_t é menor ou igual ao mínimo autovalor de $\overline{R}_t$.

(II)

i) Se $r > 0$, então $\overline{r} > 0$.

ii) O máximo autovalor de R_t é menor ou igual ao mínimo autovalor de $\overline{R}_t$.

iii) O mínimo autovalor de S é menor ou igual ao máximo autovalor de $\overline{S}$.

Nas condições do item (I) e do item (II), se não há pontos focais de $\overline{H}$ em $(0, a]$, então não há pontos focais de H em $(0, a]$.

Nesta proposição, R_t será a transformação linear simétrica dada em termos do tensor curvatura $R_t J(t) = R(J(t), \gamma'(t))\, \gamma(t)$.

V denotará um espaço real de vetores de dimensão $n-1$ com produto interno e N é um subespaço de V.

Os espaços de curvatura constante são ambientes propícios para fazermos comparações. Para isto é necessário abtermos informações sobre o primeiro ponto focal de subvariedades contidas nestes espaços. Para isto, consideraremos:

i) c e δ números reais

ii) $\mathbb{M}(c)$ uma variedade completa de dimensão $m \geq 2$ com curvatura constante c.

iii) v um vetor unitário em $T_p\mathbb{M}(c)$

iv) H é uma hipersuperfície em $\mathbb{M}(c)$ passando por $p \in \mathbb{M}(c)$ de modo que $v \in T_pH$ e com todos os autovalores da aplicação associada a segunda forma fundamental S_v iguais a δ

v) $\gamma \in \mathbb{M}(c)$ uma geodésica com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$

vi) J é um campo de H-Jacobi ao longo de γ

Tomemos agora $\{e_1, e_2, ..., e_{n-1}, \gamma\}$ um referencial ortonormal e paralelo ao longo de γ. Vamos escrever:

$J(t) = \sum_{i=1}^{n-1} J_i(t) e_i(t)$

disto teremos:

$$\begin{cases} \dfrac{D^2 J(t)}{dt^2} + cJ(t) = 0 \\ \\ \dfrac{DJ}{dt}(t) + \delta J(t) = 0 \end{cases}$$

com $\dfrac{D^2J(t)}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} J''(t)e_i(t)$

Para cada $i = 1, ..., n-1$, o sistema toma a forma:

$$\begin{cases} \dfrac{D^2J_i(t)}{dt^2} + cJ_i(t) = 0 \\ \\ \dfrac{DJ_i}{dt}(t) + \delta J_i(t) = 0 \end{cases}$$

É claro que existe algum i_k para o qual $J_{ik}(0) \neq 0$. Do contrário $J_i(0) = 0$ para todo i, isto nos daria $J = 0$.

Tomemos x o primeiro ponto focal de H.

A solução do sistema é:

(I) Se $c > 0$, $J_i(t) = J_i(0)[cos(\sqrt{c}t) - \dfrac{\delta}{\sqrt{c}} sen(\sqrt{c}t)]$

Como $J_i(x) = 0$ e $J_{ik}(0) \neq 0$ temos:

$0 = cos(\sqrt{c}t) - \frac{\delta}{\sqrt{c}} sen(\sqrt{c}t)$

$\dfrac{\delta}{\sqrt{c}} sen(\sqrt{c}t) = cos(\sqrt{c}t)$

$\dfrac{\delta}{\sqrt{c}} = \dfrac{cos(\sqrt{c}t)}{sen(\sqrt{c}t)} = cotg(\sqrt{c}t)$

(II) Se $c = 0$, $J_i(t) = J_i(0)(\delta t + 1)$

Como $J_i(x) = 0$ e $J_{ik}(0) \neq 0$, teremos:

$\delta x + 1 = 0 \ \Rightarrow x = \frac{-1}{\delta}$

(III) Se $c < 0$, $J_i(t) = \dfrac{J_i(0)}{2}(1 - \dfrac{\delta}{\sqrt{-c}})\, e^{\sqrt{-c}\ t} + \dfrac{J_i(0)}{2}(1 + \dfrac{\delta}{\sqrt{-c}})\, e^{-\sqrt{-c}\ t}$

No ponto x temos:

$0 = (1 - \frac{\delta}{\sqrt{-c}})\, e^{\sqrt{c}\, x} + (1 + \frac{\delta}{\sqrt{-c}})\, e^{-\sqrt{c}\, x}$

$e^{\sqrt{c}\, x} + e^{-\sqrt{c}\, x} = \dfrac{\delta}{\sqrt{-c}}\, [e^{\sqrt{c}\, x} - e^{-\sqrt{c}\, x}]$

Logo $cotgh(\sqrt{-c}\, x) = \dfrac{\delta}{\sqrt{-c}}$

Disto concluímos que x é o primeiro ponto focal de H se, e somente se, é a menor solução do sistema:

$$\begin{cases} cotg(\sqrt{c}\, t) = -\delta \sqrt{c}\, t, & \text{se } c > 0; \\ t = -\delta, & \text{se } c = 0; \\ cotgh(\sqrt{c}\, t) = -\delta \sqrt{c}\, t, & \text{se } c < 0. \end{cases}$$

Corolário 3.11. *Sejam $\mathbb{M}(c)$, H e γ como definimos acima. Sejam c, δ e x também como definimos anteriormente. Tomemos $\mathbb{M}$ uma variedade Riemanniana e N uma subvariedade de $\mathbb{M}$.*

a) Suponhamos que todos os autovalores de $S_{\gamma'(0)}$ são maiores ou iguais a δ e as curvaturas seccionais dos planos bidimensionais ao longo de γ passando por $\gamma'(0)$ são todas menores ou iguais a c. Então não existem pontos focais de H em $\gamma\mid_{[0,x]}$.

b) Se todos os autovalores de $S_{\gamma'(0)}$ são menores ou iguais a δ e as curvaturas seccionais dos planos bidimensionais ao longo de γ passando por $\gamma'(0)$ são todas maiores oi iguais a c, então existe um ponto focal de N em $\gamma\mid_{[0,x]}$.

Demonstração. a) Segue da proposição 2.8 e das considerações feitas acima sobre as variedades de curvatura constante.
b) Suponhamos que não há pontos focais de N em $[0, x]$, pela proposição 2.8, existe um ponto focal de H em $[0, x]$, que é um absurdo posto que x é o primeiro ponto focal de H. □

4 Variedades de Hadamard

Neste capítulo demonstraremos alguns resultados importantes das variedades de Hadamard que serão utilizados com frequência neste trabalho.

Uma variedade Riemanniana, simplesmente conexa de curvatura seccional $K \leq 0$ é chamada um Variedade de Hadamard.

Exemplo: O espaço hiperbólico $\mathbf{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n | x_n > 0\}$ com a métrica $g_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$, possui curvatura seccional constante igual a -1. $\mathbf{H}^n$ é simplesmente conexo, pois é homeomorfo a $\mathbf{R}^n$. Todas as geodésicas de $\mathbf{H}^n$ são as retas perpendiculares ao hiperplano $x_n = 0$ e os círculos de $\mathbf{H}^n$, cujos planos são perpendiculares ao hiperplano $x_n = 0$ e cujos centros estão neste hiperplano. Como estes planos são isométricos ao plano hiperbólico, que é completo, temos $\mathbf{H}^n$ completo. Logo, $\mathbf{H}^n$ é uma variedade de Hadamard.

PONTOS CONJUGADOS E CURVATURA SECCIONAL

Definição 4.1. *Seja $\gamma : [0, a] \to \mathbb{M}$ uma geodésica. O ponto $\gamma(t_0)$ é conjugado ao longo de γ, $t_0 \in (0, a]$ se existe um campo de Jacobi J ao longo de γ , não identicamente nulo, com $J(0) = 0 = J(t_0)$.*

Se Y é um campo de vetores na geodésica γ não colinear com $\gamma'(t)$ em nenhum ponto, então

$$\langle R(t)Y(t), Y(t)\rangle = K(t)|Y(t) \wedge \gamma'(t)|^2$$

onde $K(t)$ denota a curvatura seccional de um 2-plano $\pi(t) = \{Y(t), \gamma'(t)\}$.

Pela equação de Jacobi

$$\gamma''(t) + R(t)Y(t) = 0 \tag{4.1}$$

para algum $t \in \mathbb{R}$ vamos obter

$$\langle Y''(t), Y(t)\rangle + K(t)|Y(t) \wedge \gamma'(t)|^2 = 0 \tag{4.2}$$

Seja $Y(t)$ um campo de vetores de Jacobi na geodésica γ em uma variedade riemanniana $\mathbb{M}$ tal que $Y(0) = 0$. Se $f(t) = \langle Y(t), Y(t)\rangle$ então

$$f(0) = f'(0) = 0$$

e

$$f''(t) = |Y'(t)|^2 - K(t)|Y(t) \wedge \gamma'(t)|^2$$

pela equação (4.2) para algum $t \in \mathbb{R}$.

Em particular, se $\mathbb{M}$ tem curvatura seccional $K \leq 0$ para algum 2-plano π tangente a $\mathbb{M}$, então $f''(t) \geq 0$ para algum t e segue-se que $f(t)$ nunca se anula para $t \neq 0$. Provamos, assim, a seguinte proposição:

Proposição 4.2. *Seja $\mathbb{M}$ uma variedade riemanniana completa com curva tura seccional $K \leq 0$, e seja $\gamma(t)$ uma geodésica em $\mathbb{M}$. Então não temos pontos conjugados em γ.*

Proposição 4.3. *Seja $\gamma : [0, a] \to \mathbb{M}$ uma geodésica e seja J um campo de Jacobi ao longo de γ com $J(0) = 0$. Faça $\frac{D_V}{dt}(0) = w$ e $\gamma'(0) = v$. Considere w como um elemento de $T_{av}(T_{\gamma(0)}\mathbb{M})$ e construa uma curva $v(s)$ em $T_{\gamma(0)}\mathbb{M}$ com $v(0) = av$, $v'(0) = w$. Faça $f(t, s) = exp_p tv(s)$, $p = \gamma(0)$ e defina um campo de Jacobi $\bar{J}$ por $\bar{J}(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$. Então $\bar{J} = J$ em $[0, a]$*

Demonstração. Para $s = 0$, teremos

$$\frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{D}{\partial t}((dexp_p)_{tv}(tw)) = \frac{D}{\partial t}(t(dexp_p)_{tv}(w))$$

$$\frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial s} = (dexp_p)_{tv}(w) + t\frac{D}{\partial t}((dexp_p)_{tv}(w))$$

Portanto, para $t = 0$,

$$\frac{D\bar{J}}{dt}(0) = \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}(0,0) = (dexp_p)_0(w) = w$$

Como $J(0) = \bar{J}(0) = 0$ e

$$\frac{DJ}{dt}(0) = \frac{D\bar{J}}{dt}(0) = w$$

concluimos, pelo teorema de unicidade, que $J = \bar{J}$ □

Corolário 4.4. *Seja $\gamma : [0,a] \to \mathbb{M}$ uma geodésica. Então um campo de jacobi J ao longo de γ com $J(0) = 0$ é dado por*

$$J(t) = (dexp_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)), t \in [0,a]$$

Proposição 4.5. *Seja $\gamma : [0,a] \to \mathbb{M}$ uma geodésica e faça $\gamma(0) = p$. O ponto $q = \gamma(t_0)$, $t_0 \in (0,a]$, é conjugado ao longo de γ se e somente se $v_0 = t_0\gamma'(0)$ é um ponto crítico de exp_p.*

Demonstração. O ponto $q = \gamma(t_0)$ é ponto conjugado de p ao longo de γ se e somente se existe um campo de Jacobi não nulo J ao longo de γ com $J(0) = J(t_0) = 0$.
Sejam $v = \gamma'(0)$ e $w = J'(0)$. Pelo corolário 4.4, $J(t) = (dexp_p)_{tv}(tv), t \in [0,a]$.
Observe que J é não nulo se e só se se $w \neq 0$. Protanto $q = \gamma(t_0)$ é conjugado de p se e só se $0 = J(t_0) = (dexp_p)_{t_0 v}(t_0 w), w \neq 0$ isto é,se e somente se $t_0 v$ é um ponto crítico de exp_p. □

Agora, necessitamos de um importante resultado sobre as variedades completas, que é o fato de que dados dois pontos quaisquer de uma variedade, existe uma geodésica minimizante ligando estes dois pontos. Demonstraremos este resultado no próximo teorema, junto com outros fatos que implicam, por exemplo, que uma variedade compacta é completa e que uma subvariedade fechada de uma variedade completa é uma variedade completa.

Teorema 4.6. *(Hopf e Rinow) Seja $\mathbb{M}$ uma variedade Riemanniana e seja $p \in \mathbb{M}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) exp_p está definida em todo o $T_p\mathbb{M}$.

b) Os limitados e fechados de $\mathbb{M}$ são compactos.

c) $\mathbb{M}$ é completa como espaço métrico.

d) $\mathbb{M}$ é geodesicamante completa.

e) Existe uma sucessão de compactos $K_n \subset \mathbb{M}$, $K_n \subset K_{n+1}$ e $\bigcup_n K_n = \mathbb{M}$, tais que, se q_n não pertence a K_n então $d(p, q_n) \to \infty$.

Além disso, cada uma das afirmações acima emplica que

f) Para todo $q \in \mathbb{M}$ existe uma geodésica γ ligando p a q com $l(\gamma) = d(p, q)$.

Demonstração. a)$\Rightarrow$ b). Sejam $d(p, q) = r$, $B_\delta(p)$ uma bola normal em p, e $S_\delta(p) = S$ a franteira de $B_\delta(p)$. Seja x_0 um ponto onde a função contínua $d(q, x)$, $x \in S$, atinge um mínimo. Então $x_0 = exp_p \delta v$, onde $v \in T_p\mathbb{M}$ e $|v| = 1$. Seja γ uma geodésica dada por $\gamma(s) = exp_p sv$. Vamos mostrar que $\gamma(r) = q$.

Para provar este fato, consideremos a equação

$$d(\gamma(s), q) = r - s \tag{4.3}$$

e seja $A = \{s \in [0, r]; (4.3) vale\}$. $A \neq \emptyset$ pois (4.3) vale para $s = 0$. Além disso, A é fechado em $[0, r]$. Seja $s_0 \in A$. Vamos provar que se $s_0 < r$, então (4.3) vale para $s_0 + \delta'$, onde $\delta' > 0$ é suficientemente pequeno. Isto implica que $supA = r$; como A é fechado, então $r \in A$, o que mostra que $\gamma(r) = q$.

Para provar que (4.3) vale para $s_0 + \delta'$, seja $B_{\delta'}(\gamma(s_0))$ uma bola normal em $\gamma(s_0)$, seja $S' = \partial B_{\delta'}(\gamma(s_0))$ sua fronteira, e seja $x_0' = mind(x, q)$, $x \in S'$.Basta mostrar que $x_0' = \gamma(s_0 + \delta')$. Com efeito, se $x_0' = \gamma(s_0 + \delta')$, como

$$d(\gamma(s_0), q) = \gamma' + mind(x, q) = \delta' + d(x_0', q)$$

e

$$d(\gamma(s_0), q) = r - s_0$$

teremos

$$r - s_0 = \delta' + d(x_0', q) = \delta' + d(\gamma(s_0 + \delta'), q) \tag{4.4}$$

ou seja

$$d(\gamma(s_0+\delta'),q) = r-(s_0+\delta')$$

que é 4.3 para $(s_0+\delta')$.
Para provar finalmente que $\gamma(s_0+\delta') = x'_0$, observe que, pela desigualdade triangular e pela primeira igualdade de (4.4),

$$d(p,x'_0) \geq d(p,q) - d(q,x'_0) = r-(r-s_0-\delta') = s_0+\delta'.$$

Por outro lado, a curva quebrada ligando p a x'_0, que vai de p a $\gamma(s_0)$ pela godésica γ, e de $\gamma(s_0)$ a x'_0 por um raio geodésico, tem comprimento igual a $s_0+\delta'$. Logo, $d(p,x'_0) = s_0+\delta'$, e uma tal curva, é uma geodésica. Em particular, a curva não é quebrada, donde $\gamma(s_0+\delta') = x'_0$. Isto conclui a demonstração de a)$\Rightarrow$ f).

a)$\Rightarrow$ b). Seja $A \subset \mathbb{M}$ limitado e fechado. Como A é limitado, $A \subset B$, onde B é uma bola na métrica d de centro p. Por (f) existe uma bola $B_r(0) \subset T_p\mathbb{M}$, tal que $B \subset exp_p\overline{B_r(0)}$. Como imagem contínua de um compacto, $exp_p\overline{B_r(0)}$ é compacto, Logo, A é um fechado contido em um compacto, donde, compacto.

b)$\Rightarrow$ c). Basta observar que o conjunto p_n formado por uma sequência de Cauchy é limitado, donde tem fecho compacto por (b). Assim p_n contém uma subsequência convergente e, sendo de Cachy, converge.

c)$\Rightarrow$ d). Suponha que $\mathbb{M}$ não é geodesicamente completa. Então, alguma geodésica normalizada γ de $\mathbb{M}$ está definida para $s < s_0$ e não está definida para s_0. Seja s_n uma sequência convergindo para s_0 com $s_n < s_0$. Dado $\epsilon > 0$ existe um índice n_0 tal que se $n,m > n_0$ então $|s_n - s_m| < \epsilon$. Decorre daí que,

$$d(\gamma(s_n),\gamma(s_m)) \leq |s_n - s_m| < \epsilon$$

e assim, a sequência $\gamma(s_n)$ é de Cauchy em $\mathbb{M}$. Como $\mathbb{M}$ é completa na métrica d, $\gamma(s_n) \rightarrow p_0 \in \mathbb{M}$.
Seja (W,δ) uma vizinhança totalmente normal de p_0. Escolha n_1 tal que se $n,m > n_1$, então $s_n - s_m| < \delta$ e $\gamma(s_n)$, $\gamma(s_m)$ pertencem a W. Logo, existe uma única geodésica g decomprimento menor do que δ ligando $\gamma(s_n)$ a $\gamma(s_m)$. È claro que g coincide com γ, onde γ está. Como a $exp_{\gamma(s_n)}$ é um difeomorfismo em $B_\delta(0)$ e $exp_{s_n}(B_\delta(0) \supset W$, g estende γ além de s_0.

d)$\Rightarrow$ a). È imediato.

b)$\Rightarrow$ e). È um resultado de Topologia Geral. $\square$

TEOREMA DE HADAMARD

Para demonstrarmos este teorema, percisaremos de alguns resultados que discorreremos apartir de agora.

Lema 4.7. *Seja* $\mathbb{M}$ *uma variedade Riemanniana completa com* $K(p, \sigma) \leq 0$*, para todo* $p \in \mathbb{M}$ *e todo* $\sigma \subset T_p\mathbb{M}$*. Então, para todo* $p \in \mathbb{M}$*, o lugar dos pontos conjugados* $C(p) = \emptyset$*; em particular, a aplicação exponencial* $exp_p : T_p\mathbb{M} \to \mathbb{M}$ *é um difeomorfismo local.*

Demonstração. Seja J um campo de Jacobi não trivial (isto é, não identicamente nulo) ao longo de uma geodésica $\gamma : [0, \infty] \to \mathbb{M}$, onde $\gamma(0) = p$ e $J(0) = 0$. Então, pela hipótese sobre a curvatura e pela equação de Jacobi

$$\begin{aligned}
\langle J, J \rangle'' &= 2\langle J', J' \rangle + \langle J'', J \rangle \\
&= 2\langle J', J' \rangle - 2\langle R(\gamma', J)\gamma', J \rangle \\
&= 2|J'|^2 - 2K(\gamma', J)|\gamma' \wedge J|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Portanto $\langle J, J \rangle'(t_2) \geq \langle J, J \rangle'(t_1)$ sempre que $t_2 > t_1$. Como $J'(0) \neq 0$ e $\langle J, J \rangle'(0) = 0$ segue-se também que, para $t > 0$ suficientemente pequeno, vale

$$\langle J, J \rangle(t) > \langle J, J \rangle(0)$$

Decorre daí que para todo $t > 0$, $\langle J, J \rangle(t) > 0$, e $\gamma(t)$ não é conjugado de $\gamma(0)$ ao longo de γ $\square$

O lema a seguir é o resultado mais importante na demonstração do teorema de Hadamard:

Lema 4.8. *Seja $\mathbb{M}$ uma variedade Riemanniana completa e seja $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ um difeomorfismo local sobre uma variedade Riemanniana N que possui a seguinte propriedade: para todo $p \in \mathbb{M}$ e todo $v \in T_p\mathbb{M}$, tem-se $|df_p(v)| \geq |v|$. Então f é uma aplicação de recobrimento.*

Demonstração. Por uma propriedade de espaços de recobriemento [4],basta mostrar que f tem a propriedade de levantar arcos de N, isto é, dada uma curva diferenciável $c : [0, 1] \to \mathbb{N}$ e um ponto $q \in \mathbb{M}$ com $f(q) = c(0)$, existe uma curva $\overline{c} : [0, 1] \to \mathbb{M}$ com $\overline{c}(0) = q$ e $f \circ \overline{c} = c$.

Para provar o pedido, observe que, como f é um difeomorfismo local em q, existe $\epsilon > 0$ tal que é possível definir $\overline{c} : [0, \epsilon] \to \mathbb{M}$ com $\overline{c}(0) = q$ e $f \circ \overline{c} = c$, isto é, é possível levantar c em um intervalo pequeno a partir de q. Como f é um difeomorfismo local em todo $\mathbb{M}$, o o conjunto dos valores $A \subset [0, 1]$, tais que c pode ser levantada em A a partir de q é um intervalo aberto à direita, isto é, $A = [0, t_0)$.

Se mostrarmos que $t_0 \in A$, teremos mostrado que A é aberto e fechado em $[0, 1]$,logo $A = [0, 1]$ e c pode ser inteiramente leventada.

Para mostrar que $t_0 \in A$, seja $t_n, n = 1, ...,$ uma sequência crescente em A com $lim t_n = t_0$. Então a sequência $\overline{c}(t_n)$ está contida em um compacto $K \subset \mathbb{M}$. Com efeito, se isto não acontecer, como $\mathbb{M}$ é completa, a distãncia de $\overline{c}(t_n)$ e $\overline{c}(0)$ será arbitrariamente grande. Como, por hipótese,

$$\begin{aligned} l_{0,t_n}(c) &= \int_0^{t_n} |\frac{dc}{dt}| dt = \int_0^{t_n} |df_{\overline{c}(t)}(\frac{dc}{dt})| dt \\ &\geq \int_0^{t_n} |\frac{dc}{dt}| dt \geq d(\overline{c}(t_n), \overline{c}(0) \end{aligned}$$

isto implica que o compriemnto de c entre 0 e t_0 é arbitraiamente grande, o que é um absurdo, e prova a afirmação feita.

Como $\bar{c}(t_n) \subset K, n = 1, ...,$ existe um ponto de acumulação $r \in \mathbb{M}$ de $\bar{c}(t_n)$. Seja V uma visinhança de r tal que $f \mid V$ é um difeomorfismo. Então $c(t_0) \in f(V)$ e, por comunidade, existe um intervalo $I \subset [0,1]$, $t_0 \in I$, tal que $c(I) \subset f(V)$. Escolha um índice n tal que $\bar{c}(t_n) \in V$ e considere o levantamento g de c em I passando por r. Os levantamentos g e $\bar{c}$ coincidem em $[0, t_n) \cap I$, pois $f \mid V$ é biunívoca. Portanto, g é uma extensão de $\bar{c}$ em I, donde $\bar{c}$ está definido em t_0 e $t_0 \in A$. □

Teorema 4.9. *(Hadamard) - Seja $\mathbb{M}$ uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa, com curvatura seccional $K(p,\sigma) \leq 0$, para todo $p \in \mathbb{M}$ e todo $\sigma \subset T_p\mathbb{M}$. Então $\mathbb{M}$ é difeomorfa a $\mathbf{R}^n$, n é a dimensão de $\mathbb{M}$ mais precisamente, a $exp_p : T_p\mathbb{M} \to \mathbb{M}$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. Como $\mathbb{M}$ é completa, $exp_p : T_p\mathbb{M} \to \mathbb{M}$ esta bem definida para todo $p \in \mathbb{M}$ e é sobrejetiva. Pelo lema 4.7,exp_p é difeomorfismo local. Isto permite introduzir uma métrica riemanniana em $T_p\mathbb{M}$ de modo que exp_p é uma isometria local. Uma tal métrica é completa, pois as geodésicas de $T_p\mathbb{M}$ passando pela origem são retas, (Cf. teorema de Hopf e Rinow, $a \Rightarrow d$). Pelo lema 4.8,exp_p é uma aplicação de recobrimento. Como $\mathbb{M}$ é simplesmente conexa,exp_p é um difeomorfismo. □

Uma de suas consequências importantes é o seguinte:

Corolário 4.10. *Seja $\mathbb{M}$ uma variedade de Hadamard. Por dois pontos distintos p, q de $\mathbb{M}$, existe uma única geodésica de $\mathbb{M}$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.*

Demonstração. Como $\mathbb{M}$ é uma variedade completa, pelo teorema de Hopf-Rinow, existe, pelo menos, uma geodésica γ entre os pontos p, q. Se v é a velocidade inicial de tal geodésica γ, então $exp_p(v) = q$. Como $exp_p : T_p\mathbb{M} \to \mathbb{M}$ é um difeomorfismo, esta geodésica é única. □

Notação: Se p, q são pontos distintos de $\mathbb{M}$, denotaremos γ_{pq} a única geodésica com velocidade unitária tal que $\gamma_{pq}(0) = p$ e $\gamma_{pq}(c) = q$, onde $c = d(p,q)$.

Uma outra propriedade interessante das variedades riemannianas de curvatura negativa é o fato de que um triângulo geodésico em tal variedade tem a soma de seus ângulos internos sempre menor ou igual a π.

Um triângulo geodésico T em uma variedade reimanniana $\mathbb{M}$ é um conjunto formado por três segmentos de geodésica minimizantes normalizadas (chamadas lados do triângulo)

$$\gamma_1 : [0, l_1] \to \mathbb{M}, \gamma_2 : [0, l_2] \to \mathbb{M}, \gamma_3 : [0, l_3] \to \mathbb{M},$$

de modo que $\gamma_i(l_i) = \gamma_{i+1}(0)$, $i = 1, 2$ e $\gamma_3(l_3) = \gamma_1(0)$. Os pontos terminais dos segmentos de geodésicas são chamados vértices de T. O ângulo

$$\sphericalangle(-)\gamma_i'(l_i), \gamma_{i+1}'(0)), i = 1, 2$$

ou

$$\sphericalangle(-)\gamma_3'(l_3), \gamma_1'(0))$$

é chamado o ângulo (interno) do vértice correspondente.

Teorema 4.11. *Seja $\mathbb{M}$ uma variedade riemanniana completa, simplesmente conexa com curvatura $K \leq 0$. Sejam a, b e c três pontos de $\mathbb{M}$. Tais pontos determinam um único triângulo geodésico T de $\mathbb{M}$ com vértices a, b e c. Sejam α, β e γ os ângulos dos vértices a, b e c, respectivamente, e sejam A, B e C os comprimentos dos lados opostos aos vértices a, b e c, respectivamente. Então*

$$(i) A^2 + B^2 - 2ABcos\gamma \leq C^2 (< C^2, se K < 0)$$
$$(ii) \alpha + \beta + \gamma \leq \pi (< \pi, se K < 0)$$

Demonstração. Sejam $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C$ as geodésicas de comprimento

$$l(\gamma_A) = A, l(\gamma_B) = B, l(\gamma_C) = C$$

que formam os lados de T. Sejam $\tau_A = exp_c^{-1}(\gamma_A), \tau_B = exp_c^{-1}(\gamma_B), \tau_C = exp_c^{-1}(\gamma_C)$ curvas em $T_c(\widetilde{\mathbb{M}})$. Como γ_A e γ_B são geodésicas, radiais de origem c, temos

$$l(\gamma_A) = A = l(\tau_A), l(\gamma_B) = B = l(\tau_B).$$

Além disso, indicando por τ_0 o segmento de reta em $T_c(\widetilde{\mathbb{M}})$ que liga as extremidades de τ_C, temosque $l(\tau_0) \leq l(\tau_C)$ e $l(\tau_0)^2 = A^2 + B^2 - 2ABcos\gamma$.
Como $K \leq 0$ e $T_c(\widetilde{\mathbb{M}})$ tem curvatura nula, podemos aplicar o teorema de Rauch e obter que $l(\tau_C) \leq l(\gamma_C)$ $(<, se K < 0)$.

Conclui-se daí que

$$A^2 + B^2 - 2ABcos\gamma \leq l(\tau_C)^2 \leq l(\gamma_C)^2 = C^2(<, seK < 0),$$

o que demonstra (i).
Para demonstrar (ii), observamos que

$$C = d(a, b), B = d(a, c), A = d(b, c)$$

e, portanto, cada comprimento A, B ou C é marjorado pela soma dos outros dois. Podemos então encontrar no espaço euclidiano $T_c(\widetilde{\mathbb{M}})$ um triângulo cujos lados têm comprimento A, B e C. Indicando os ângulos opostos deste triângulo por α', β' e γ', respectivamente, obtemos de (i),

$$\alpha \leq \alpha', \beta \leq \beta', \gamma \leq \gamma'(<, seK < 0)$$

. Como $\alpha' + \beta' + \gamma' = \pi$, segue-se (ii) □

5 Teorema Principal

Neste capítulo demonstraremos os resultados principais deste trabalho, que nos dizem sobre que condições podemos mergulhar $\mathbb{M}$, variedade riemanniana compacta, conexa e orintável em N, uma variedade de Hadamard, de tal forma que ela seja o bordo de um corpo convexo.

Teorema 5.1. *Seja $i : \mathbb{M}^m \to N^{m+1}$ a imersão de uma variedade orientável $\mathbb{M}$, compacta e conexa, de dimensão $m \geq 2$ em N uma variedade de Hadamard. Seja Z um campo normal unitário em $\mathbb{M}$. Se as curvaturas seccionais de N satisfizerem $K_N \leq -k \leq 0$ (onde k é um valor real positivo) e se pudermos escolher Z de tal forma que os autovalores da 2^a forma $\mathbb{S}_Z$ satisfaçam $\lambda \geq -\sqrt{k}$, então $\mathbb{M}$ é difeomorfa a esfera $\mathbb{S}^m$.*

Demonstração. Inicialmente, considere a segunda forma fundamental de $\mathbb{M}$ dada por $\mathbb{S}_Z(X, Y) = \langle \nabla_X Z, Y \rangle$,onde X e Y são campos vetoriais em $\mathbb{M}$.Como por hipótese $\mathbb{M}$ é compacta e a aplicação i é contínua, então a imagem de $\mathbb{M}$ por i é compacta. Vamos supor que $i(\mathbb{M})$ esteja contido em uma bola métrica que chamaremos $\mathbb{B}$, que também é compacta.

Como N é uma variedade de Hadamard, a exp_p é um difeomorfismo sobre N, para algum $y \in N$. Além disso, para algum $x \in \mathbb{M}$, o raio geodésico $\mathbb{J}_x$ em N com direção inicial $Z(x)$ toca a fronteira $\partial\mathbb{B}$ de $\mathbb{B}$ transversalmente, já que as bolas métricas são convexas.Suponha que $\mathbb{J}_x$ toque a fronteira de $\mathbb{B}$ ponto $p(x)$.

Considere, então, a aplicação $p : \mathbb{M} \to \partial\mathbb{B}$.Se mostrarmos que p é um difeomorfismo teremos mostrado que $\mathbb{M}$ é difeomorfa a esfera $\mathbb{S}^m$,já que o bordo $\partial\mathbb{B}$ é difeomorfo a esfera.

De fato,por hipótese, temos que se $K_N \leq -k \leq 0$ e $\lambda \geq -\sqrt{k}$, pelo corolário (3)e pelo fato de que $\mathbb{M}$ não tem pontos focais sobre $\mathbb{J}_x$,visto que $i(\mathbb{M})$ esta contido em N que é uma variedade de Hadamard, p é realmente um difeomorfismo e $\mathbb{M}$ é difeomorfa a esfera S^m. □

Antes de passarmos para o próximo resultado, faremos algumas considerações sobre o fato de que convexidade infinitesimal implica convexidade local.

Teorema de Bishop: Suponha que $\mathbb{M}$ é uma variedade Riemanniana e que L é uma hipersuperfície, imersão isométrica, fechada e orientada. Então L é infinitesimalmente convexa se a sua segunda forma fundamental for semidefinida positiva em todo ponto.

Além disso, L é localmente convexa se para todo ponto $p \in L$ existir uma vizinhança U de $0 \in L_p$, onde L_p é o espaço tangente em p, tal que a $expU$ não intercepta L.

Este é um resultado local, então podemos considerar que $\mathbb{M}$ é geodesicamente convexa na vizinhança de p e que a aplicação exponencial do fibrado normal de L é um difeomorfismo em alguma vizinhança de $\mathbb{M}$.

Para maiores detalhes, ver [2].

Passaremos agora ao próximo resultado:

Teorema 5.2. *Seja $i : \mathbb{M}^m \rightarrow N^{m+1}$ a imersão de uma variedade orientável $\mathbb{M}$, compacta e conexa, de dimensão $m \geq 2$ e seja Z um campo contínuo, normal e unitário em $\mathbb{M}$. Se Z puder ser escolhido de tal forma que $\mathbb{S}_Z$ é semidefinida positiva, então a aplicação i é um mergulho $i(\mathbb{M})$ é o bordo de um corpo convexo.*

Demonstração. Inicialmente, vamos considerar o difeomorfismo $p : \mathbb{M} \rightarrow \partial\mathbb{B}$ que definimos no resultado anterior. Defina, agora, $J : \mathbb{M} \times (-\epsilon, \infty) \rightarrow N$ por $J(x, c) = exp_x\, cZ(x)$. Seja $J_x : (-\epsilon, \infty) \rightarrow N$ o raio geodésico obtido fixando-se x e $J_c : \mathbb{M} \rightarrow N$ a aplicação de $\mathbb{M}$ em N obtida fixando-se c.

Assim definidas, J é uma imersão se ϵ é suficientemente pequeno, e J_c tem segunda forma fundamental semidefinida positiva se $c \geq 0$.

De fato, se Z é um campo de vetores ao longo de J dado por $Z(x, c) = J'_x(c)$, então algum campo X ao longo de $\mathbb{M}$ determina um campo X ao longo de J ortogonal a Z, dado por $X(x, c) = J_c * X(x)$. Ao longo de J_x, X é um campo de Jacobi, pois é formado por geodésicas e além disso $\langle X, X\rangle$ é convexo já que X satisfaz a equação de Jacobi dada por $X'' + R(J'_x, X)J'_x = 0$ e como N é uma variedade de Hadamard $R(J'_x, X) \leq 0$, o que nos diz que $X'' \geq 0$ e portanto $\langle X, X\rangle$ é uma função convexa.
Assim,

$$\begin{aligned} Z\langle X, X\rangle &= \langle \nabla_Z X, X\rangle + \langle X, \nabla_Z X\rangle \\ &= 2\langle \nabla_Z X, X\rangle = 2\langle \nabla_X Z, X\rangle \\ &= 2\langle (\nabla_Z X)^\top + (\nabla_Z X)^\perp, X\rangle \\ &= 2\langle (\nabla_Z X)^\top, X\rangle \\ &= 2\langle S_Z X, X\rangle \end{aligned}$$

é não decrescente e isto nos mostra que J_c tem segunda forma fundamental semidefinida positiva.

Então, como J_c tem segunda forma fundamental semidefinida positiva, pelo Teorema de Bishop, para cada $x \in \mathbb{M}$, J_c é localmente convexo fora de $Z(x, c)$. Isto é, existem $\delta > 0$ e vizinhanças U de x em $\mathbb{M}$ e V de 0 em $i * \mathbb{T}_x\mathbb{M}$ tal que a $expV$ não intercepta $J(U \times (c - \delta, c))$.

Vamos mostrar que i é um mergulho. Para isto, suponha que i não é um mergulho.

Então, existem distintos $x, y \in \mathbb{M}$ tal que $J_0(x) = i(x) = i(y)$.
Seja $c \geq 0$ dado por $c = max\{d : J_d(x) = i(y)\}$, para todo $x, y \in \mathbb{M}$. Vamos escolher pontos x, y satisfazendo:

(i) $J_c(x) = i(y)$ e

(ii)x, y não tem vizinhanças conexas U, V, respectivamente, tal que $J_c(U)$ e $i(V)$ são topologicamente a mesma hipersuperfície.

De fato, se x e y são pontos distintos satisfazendo (i) mas com vizinhanças U e V, então pela injetividade de p, $J_c(V) = i(U)$. Assim, i é totalmente geodésica em U e V.

Portanto, se $\alpha : [0, a] \to \mathbb{M}$ é uma curva a partir de $x = \alpha(b)$ a um ponto em que i não é totalmente geodésica, então existe uma curva $\beta : [0, b] \to \mathbb{M}$ de $y = \beta(b)$ tal que $J_c \circ \alpha(t) = i \circ \beta(t)$, $0 \leq t \leq b \leq a$ e (i) e (ii) são satisfeitas escolhendo $x = \alpha(b)$ e $y = \beta(b)$, pois

$$J_c(x) = J_c(\alpha(b)) = (J_c \circ \alpha)(b) = (i \circ \beta)(b) = i(\beta(b)) = i(y)$$

Pela maximalidade de c, $J(\mathbb{M} \times (c, \infty))$ não intercepta $i(\mathbb{M})$. Consequentemente, por (i) as imersões J_c e i são tangentes em x e y respectivamente e $Z(x, c) = \pm Z(y, o)$.

Além disso, por (ii) e pela convexidade local, $Z(x, c) \neq -Z(y, 0)$. Mas, então $p(x) = p(y)$, uma contradição, pois p é injetiva. Concluimos, então que i é um mergulho.

Vamos mostrar agora que $i(\mathbb{M})$ é bordo de um corpo convexo.

Note que $N - i(\mathbb{M})$ é formado por duas componentes com bordo $i(\mathbb{M})$, uma limitada e a outra ilimitada.
Vamos chamar de A a componente limitada.Então $N - i(\mathbb{M}) = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$, com A e B abertos.
Suponha que A não é convexo. Então dados $p, q \in A$ não temos uma geodésica γ ligando p a q contida em A.
Como A é aberto limitado, seja a sequência de pontos $p_0 = p$,p_1,...,p_{n-1} e $p_n = q$ em A

tal que conseguimos ligar p_0 à p_1, p_1 à p_2,...,p_{n-1} à $p_n = q$ com segmentos de geodésicas contidos em A, porém não conseguimos ligar p a q com um segmento contido em A. Seja então o conjunto $L = \alpha_i(t); \alpha_i$ é uma geodésica ligando p_0 a p_i contida em A. Assim definido, L possui um supremo, isto é, $supL = \alpha_{n-1}(t)$. A geodésica que liga p_0 à p_{n-1} tangencia o bordo do conjunto A por dentro do conjunto, e pela convexidade local, podemos conseguir uma vizinhança desse ponto onde A deixaria de ser localmente convexo.
Logo, A é convexo e $i(\mathbb{M})$ é bordo de um conjunto convexo.

□

Bibliografia

[1] Alexander,S. Locally convex hypersurfaces of negatively curved spaces,Amer. Math. Soc.64 (1977),321-325.

[2] Bishop,R.L. Infinitesimal convexity implies local convexity, Indiana Math.J.24 (1974),169-172.

[3] Cabral,V.M. Extensão do Teorema de Rauch para Subvariedades, Dissertação de Mestrado, UFAM, Amazonas, (2002).

[4] Carmo,M.P.do Geometria riemanniana, IMPA, projeto Euclides, Rio de Janeiro (1988) 2ª edição.

[5] Carmo,M.P.do Differentiable Curvas and surfaces, Prentice-Hall,New Jersey, 1976

[6] Ferus,D. On isometric immersions between hyperbolic spaces, Math.Ann.205 (1973),5-12.

[7] H. Hopf, Lectures on differencial geometry in the large, Mimeographical notes, Stanford University, 1956.

[8] Lima,E.L. Curso de Análise, vol.2. Rio de Janeiro, IMPA, CNPq,(1981)4ª edição

[9] Pinheiro,A.S. Círculos métricos e bissetores,Dissertação de Mestrado, UFAM, Amazonas,(2004).

[10] Sacksteder,R. On hypersurfaces with no negative curvatures,Amer.J.Math.82 (1960),609-630.