

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

FORMULAÇÃO h-ADAPTATIVA DO  
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO  
PARA ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL  
COM ÊNFASE NA PROPAGAÇÃO DA FRATURA

Oscar Bayardo Ramos Lovón

*Tese apresentada à Escola de Engenharia  
de São Carlos, da Universidade de São  
Paulo, como parte dos requisitos para  
a obtenção do título de Doutor em  
Engenharia de estruturas.*

Orientador: Prof. Tit Wilson Sergio Venturini

São Carlos

2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento  
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

R175F Ramos Lovón, Oscar Bayardo  
Formulação h-adaptativa do método dos elementos de  
contorno para elasticidade bidimensional com ênfase na  
propagação da fratura / Oscar Bayardo Ramos Lovón. -- São  
Carlos, 2006.

Tese (Doutorado) -- Escola de Engenharia de São  
Carlos-Universidade de São Paulo, 2006.

Área: Engenharia de Estruturas.

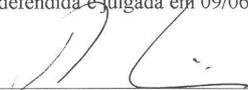
Orientador: Prof. Tit. Wilson Sergio Venturini.

1. Métodos dos elementos de contorno. 2. Processos  
adaptativos. 3. Estimador de erro. 4. h-Adaptabilidade.  
5. Mecânica da fratura linear. I. Título.

**FOLHA DE JULGAMENTO**

Candidato: Bacharel **OSCAR BAYARDO RAMOS LOVON**

Tese defendida e julgada em 09/06/2006 perante a Comissão Julgadora:

  
Prof. Titular **WILSON SERGIO VENTURINI (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) Aprovado

  
Prof. Titular **SERGIO PERSIVAL BARONCINI PROENÇA**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) APROVADO

  
Prof. Associado **JOÃO BATISTA DE PAIVA**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) Aprovado

  
Prof. Dr. **PAULO SOLLERO**  
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP) APROVADO

  
Prof. Dr. **HENRIQUE LINDENBERG NETO**  
(Escola Politécnica/EP) aprovado

  
Prof. Associado **MARCIO ANTONIO RAMALHO**  
Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)

  
Profª. Titular **MARIA DO CARMO CALLJURI**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação



À minha mãe Alejandrina,  
aos meus irmãos,  
dedico este trabalho.



## Agradecimentos

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pela concessão de apoio financeiro a esta pesquisa.

Ao Prof. Wilson Sergio Venturini pela orientação, dedicação e permanente apoio neste trabalho.

A todos os professores do SET e em especial aos professores, Humberto Breves Coda, Sergio Proença, que contribuíram na minha formação acadêmica.

Aos funcionários do SET, Rosi, Toninho, Nadir, Eli, Sylvia, pela disponibilidade e atenção sempre constantes.

A todos os amigos que mantive neste período, em especial a Josafa, Giuliano, André, W. W. W., Oscar Garcia, Botta, Luciano, Valério, Daniel, Sergio, Paccola, Leandro, Edson.

Ao Jonas pela grande amizade.

Ao amigo Wilson Wesley Wutzow pela valiosa ajuda na elaboração do programa e pelas idéias discutidas neste trabalho.

Aos meus amigos da UFSCAR, Luis, Zé Paulo, Marquinhos, Nivalda, Alessandro, Cesar Rogério, João Sampaio, Elsa por estarem sempre dispostos a me ajudar no que fosse necessário.

À minha mãe Alejandrina, vovó Cesarea e a Estelita (em memória) por tudo o amor que me deram.

Aos meus irmãos que amo muito Evelyn, Elizabeth, Rafael, Wilber e Roberto e meus sobrinhos queridos Fabio, Cristian, Alejandra e Carla.

À Tina pelo carinho e o grande incentivo demonstrado principalmente nos momentos difíceis.

À Gisele e Elaine pela amizade.

À Ana Paula pela revisão do texto e pelo carinho, amor, respeito e incentivo presente em todos os momentos.

## RESUMO

RAMOS LOVÓN, O. B. (2006). *Formulação h-adaptativa do método dos elementos de contorno para elasticidade bidimensional com ênfase na propagação da fratura*. Tese (Doutorado)- Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos 2006.

Neste trabalho desenvolveu-se uma formulação adaptativa do método de elementos de contorno (MEC) para a análise de problemas de fratura elástica linear. Foi utilizado o método da colocação para a formulação das equações integrais de deslocamento e de tensão. Para a discretização das equações integrais foram utilizados elementos lineares que possibilitaram a obtenção das expressões exatas das integrais (integração analítica) sobre elementos de contorno e fratura. Para a montagem do sistema de equações algébricas foram utilizadas apenas equações de deslocamento, apenas equações de forças de superfície, ou as duas escritas para nós opostos da fratura levando, portanto ao método dos elementos de contorno dual usualmente empregado na análise de fratura. Para o processo de crescimento da trinca foi desenvolvido um procedimento especial objetivando a correta determinação da direção de crescimento da trinca. Os fatores de intensidade de tensão são calculados por meio da conhecida técnica de correlação de deslocamentos a qual relaciona os deslocamentos atuantes nas faces da fissura. Após a determinação dos fatores de intensidade de tensão é utilizada a teoria da máxima tensão circunferencial para a determinação do ângulo de propagação. O modelo adaptativo empregado é do tipo h onde apenas a sub-divisão dos elementos é feita com base em erros estimados. O erro a ser considerado foi estimado a partir de normas onde se consideraram: a variação aproximada dos deslocamentos, a variação das forças de superfície e a variação da energia de deformação do sistema, calculada com a sua integração sobre o contorno. São apresentados exemplos numéricos para demonstrar a eficiência dos procedimentos propostos.

Palavras-chave: Métodos dos elementos de contorno. Processos adaptativos. Estimador de erro. h-Adaptabilidade. Mecânica da fratura linear.

## ABSTRACT

RAMOS LOVÓN, O. B. (2006). *h-Adaptive formulation of the boundary element method for elastic bidimensional with emphasis in the propagation of the fracture*. Thesis (Doctoral)- Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos 2006.

In this work, an adaptative formulation of the boundary element method is developed to analyze linear elastic fracture problems. The collocation point method was used to formulate the integral equations for the displacements and stresses (or tractions). To discretize the integral equations, linear elements were used to obtain the exact expressions of the integrals over boundary elements and fracture. To construct the linear system of equations were used only displacement equations, traction equations or both of them written for opposite nodes of the fracture, leading to the dual boundary element formulation usually employed in the fracture analyses. For the process of growth of the crack a special procedure was developed aiming at the correct determination of the direction of growth of the crack. The stress intensity factors, to calculate the crack growth angle, are calculated through of correlation displacements technique which relates displacement in crack boundaries. The employed adaptative model is the h-type where only the sub-division of the elements is done based on error estimate. The error estimates considered in this work are based on the following norms: displacement, traction and strain energy variations, this last considered from the integration over the boundary. Numerical examples are presented to demonstrate the efficiency of the proposed procedures.

Keywords: Boundary elements method. Adaptative mesh refinement. Error estimation. h-Adaptability. Linear fracture mechanics.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivos e considerações iniciais . . . . .	1
1.2	Revisão Bibliográfica . . . . .	4
1.2.1	Tipos de estimativa de erro . . . . .	4
1.3	Organização da tese . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Problema Elástico. Representação Integral</b>	<b>11</b>
2.1	Problema Elástico . . . . .	12
2.1.1	Equações Básicas de Elasticidade linear . . . . .	13
2.2	Formulação Integral para o Problema Elástico . . . . .	15
2.2.1	Solução Fundamental . . . . .	17
2.3	Equação Somigliana . . . . .	21
2.3.1	Pontos Internos . . . . .	21
2.3.2	Pontos no Contorno . . . . .	24
2.4	Calculo da Tensão Interna . . . . .	31
2.5	Equação Força de Superfície . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Método dos Elementos de Contorno</b>	<b>38</b>
3.1	Discretização da Equação Somigliana . . . . .	39
3.2	Solução Analítica das Integrais para a equação de Deslocamento . . . . .	42
3.2.1	Singular-Ponto fonte no elemento . . . . .	42
3.2.2	Não Singular-Ponto fonte fora do elemento . . . . .	44
3.3	Sistema de Equações para a Equação de Força de Superfície . . . . .	47

3.4	Solução Analítica das Integrais para a Equação de Forças de Superfície	51
3.5	Sistema de Equações Algébricas para Fratura Elástica Linear . . . . .	54
3.5.1	Método Função de Grenn . . . . .	55
3.5.2	Método de Descontinuidade de Deslocamento . . . . .	55
3.5.3	Método de Sub-Região . . . . .	56
3.5.4	Método dos Elementos de Contorno Dual . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Mecânica da Fratura Elástica Linear</b>	<b>57</b>
4.1	Mecânica da Fratura . . . . .	57
4.1.1	Propagação da trinca baseado no critério Energético de Griffith	58
4.1.2	Propagação da trinca baseado na aproximação por Campo de Tensões . . . . .	59
4.1.3	Cálculo do fator de intensidade de tensão . . . . .	64
4.1.4	Ângulo de Propagação da Trinca . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Formulação Proposta para Análise de Erro no MEC</b>	<b>71</b>
5.1	Técnicas de Refinamento Adaptativo . . . . .	71
5.1.1	Indicador de erro . . . . .	73
5.1.2	Estimador de erro . . . . .	76
5.1.3	Estratégia Adaptativa . . . . .	76
5.2	Proposta para um Indicador de Erro . . . . .	80
5.3	Cálculo do Estimador de Erro . . . . .	82
5.4	Processo Adaptativo . . . . .	86
5.5	Convergência no Método dos Elementos de Contorno . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Exemplos Numéricos</b>	<b>89</b>
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>111</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>113</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Objetivos e considerações iniciais

O objetivo deste trabalho é o estudo da formulação h-adaptativa em elementos de contorno, tomando-se em consideração a propagação da fratura elástica linear. Define-se, para o contorno, um *estimador de erro* (medida de erro), que permite decidir até quando o refinamento da malha é necessário, e um *indicador de erro*, que mostre onde o refino é melhor.

Para o modelo da fratura, será usado o método dual para elementos de contorno. Considera-se como referências os trabalhos de Latif [38], Portela [55], [56]. As equações integrais de contorno de deslocamento e de força de superfície constituem as equações duais para o método dual dos elementos de contorno. O método dual supera a dificuldade de modelar a fratura quando dois pontos fontes coincidentes caem no mesmo caminho de integração. Neste caso, são aplicadas as equações de deslocamento para pontos fontes sobre uma das superfícies da trinca e as equações de força de superfície são aplicadas na outra superfície da trinca.

Neste trabalho, considera-se também o processo de propagação da trinca, baseado na aproximação por campo de tensões. Os fatores de intensidade de tensão foram calculados por duas técnicas: a de correlação de deslocamentos e a proposta por Maciel [43]. O tamanho do elemento de propagação da trinca foi calculado

usando um critério de comparação da seguinte maneira: é calculado o ângulo de propagação para o comprimento inicial do elemento e um outro ângulo de propagação para a metade do mesmo comprimento inicial do elemento, posteriormente é comparado os dois ângulos de propagação (norma da diferença entre eles). Se a diferença for menor que uma dada tolerância, então o tamanho a ser propagado é o original, caso contrário, considera-se como elemento inicial a metade do tamanho inicial, e se repete o processo.

Foi também utilizada a técnica de regularização por mínimos quadrados, que consiste em reduzir o número de equações do problema, geradas a mais do que o número de incógnitas, minimizando o erro da resposta.

Atualmente, o método dos elementos de contorno é uma técnica numérica consagrada para a análise de vários problemas no campo da engenharia. Entretanto, no uso de técnicas numéricas para o estudo de fenômenos físicos, é necessário o acompanhamento de modelos que possam garantir, de alguma forma, que a solução obtida apresente uma aproximação aceitável do fenômeno estudado. A simples obtenção de uma solução não tem significado de grande valor, sendo necessário conhecer o quanto próxima da solução exata está a solução numérica.

Nos problemas lineares, a partir de considerações específicas, as demonstrações de existência e unicidade de solução, via método dos elementos de contorno, já é comprovada, podendo-se demonstrar que no limite obtém-se a solução exata da equação integral.

Dentro dos métodos numéricos para análise de problemas de engenharia, tais como a mecânica das estruturas, temos o método das diferenças finitas, o método dos elementos finitos e o método dos elementos de contorno. No caso da mecânica dos sólidos, apenas os dois últimos métodos têm sido mais freqüentemente utilizados, assim como suas variações.

O método dos elementos finitos é o método numérico mais utilizado, devido principalmente à sua robustez, simplicidade de sua formulação e pelo fato de gerar uma matriz de rigidez em banda que, aliada a técnicas especiais de resolução destas matrizes, reduz muito o tempo de processamento, em especial nas estruturas mais

complexas. Por ser um método de domínio, isto é, as equações de equilíbrio e compatibilidade de deslocamentos devem ser escritas para todos os pontos da estrutura. Possuem certa desvantagem para análise de casos de sólidos considerados infinitos, pois o sólido deve ser discretizado em inúmeros elementos, sendo que o que interessa nessa análise é o resultado em apenas algumas regiões. Outra desvantagem do método diz respeito às regiões de concentração de tensão, pois os deslocamentos e forças são aproximados nos nós e quando esses valores tendem ao infinito o método perde a precisão.

O método dos elementos de contorno é um método de fronteira, isto é, as incógnitas do problema, ou seja, deslocamentos e forças de superfície, estão no contorno, sendo em número menor. A formulação consiste em equações integrais fundamentais, de deslocamentos e forças de superfície. Essas equações possuem integrais apenas de contorno, o qual é discretizado em elementos, definindo-se nós onde os valores são aproximados por funções de interpolação. Agrupando-se todas as equações dos nós externos e impondo-se as condições de vinculação na estrutura, tem-se um vetor incógnito de contorno em termos de deslocamentos e de forças. Nos pontos internos, os valores não fazem parte das incógnitas do problema e podem ser obtidos de maneira exata, utilizando-se apenas os valores do contorno já obtidos.

O método tem como vantagem a diminuição de incógnitas do problema, principalmente no caso de domínios infinitos, pois se pode tanto discretizar parte do contorno do sólido quanto obter respostas apenas dos pontos desejados. Uma outra vantagem do método diz respeito às regiões de concentração de tensão onde ele se mostra com resultados bastante coerentes, principalmente onde a variação dos resultados é muito brusca em uma pequena extensão. Como desvantagem, o método apresenta matriz de rigidez cheia, o que ocasiona certa demora na análise. Também possui problemas de singularidade nas integrais, que faz com que seja necessária a utilização de técnicas especiais de integração.

Dentro desse contexto, pretende-se obter recomendações que possam ser utilizadas nos sistemas baseados em elementos de contorno para que possam ser utilizados com confiabilidade, portanto atribuindo-lhe precisão e robustez.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

Estimadores de erro podem ser divididos em dois grupos básicos: estimador de erro a priori e estimador de erro a posteriori. O primeiro estima o erro antes que a solução numérica esteja disponível, enquanto o segundo estima o erro uma vez que a solução numérica esteja disponível.

Estimadores de erro a posteriori podem se dividir em dois grupos principais, o primeiro grupo usa a função residual da equação integral de contorno, enquanto o segundo grupo estima o erro comparando a solução inicial do método do elemento de contorno com a solução de uma malha refinada ou uma malha com função de interpolação alta. Neste trabalho o estimador a ser utilizado é do tipo a posteriori.

Apresenta-se neste sub-item alguns dos principais trabalhos científicos que constam na literatura técnica relacionados aos diferentes métodos de cálculo de erro. Optou-se por organizar as referências por tema, visando facilitar a leitura.

### 1.2.1 Tipos de estimativa de erro

A estimativa de erro é a parte mais importante do processo adaptativo e podem ser considerados os seguintes tipos:

- Residual
- Erro de interpolação
- Erro da equação integral de contorno
- Sensitividade nodal
- Diferença da solução

No que segue, serão comentadas e apresentadas as principais referências de cada um dos tipos de estimativa de erro.

## Residual

O resíduo resulta da substituição de valores aproximados, que são obtidos numericamente, na equação diferencial do problema. Sabe-se que o resíduo não representa um indicador razoável para o cálculo de erro de certos sistemas de equações diferenciais. Diferentes métodos em engenharia tentaram reduzir esses erros. Esta redução consistia em levar o erro a zero em certos pontos ou regiões. Esta técnica pode ser interpretada como uma distribuição desses erros. O método consiste em forçar a integral do resíduo ponderado a ser zero. Na literatura são conhecidos como métodos dos resíduos ponderados, variando de acordo com a função que está sendo usada. Os métodos mais usados são: Galerkin, Colocação e Subdomínio de Colocação

Em Babuška e Rheinbolt [5], [6], [7], o problema de definição de estimativas a posteriori do erro, do ponto de vista estritamente matemático, foi pela primeira vez considerado, utilizando elementos lineares e um refinamento do tipo  $h$ . Segundo os autores, uma função de resíduo, obtida a partir da substituição da solução na equação diferencial governante, permite calcular certas grandezas localizadas  $\eta_i$ , que por sua vez permitem definir limites superiores e inferiores do erro como:

$$K_1\eta \leq \|E\| \leq K_2\eta \quad (1.1)$$

sendo  $K_1$  e  $K_2$  constantes independentes da malha e da solução, e:

$$\eta^2 = \sum \eta_i^k \quad (1.2)$$

onde  $\eta_i^k$  é o indicador de erro correspondente ao grau de liberdade associado à ordem  $k$  na direção  $i$ .

Oliveira [48] mostrou que o erro de interpolação numa formulação indireta do método dos elementos de contorno, utilizando uma fronteira auxiliar, é da ordem de  $e^{-N}$ , sendo  $N$  o número de elementos em que esta foi dividida.

Wendland [77] demonstrou a convergência assintótica da solução por uma formulação direta, seja utilizando o método de Galerkin ou o método de Colocação.

Baseando-se neste trabalho, tem-se o desenvolvimento do indicador de erro tipo residual encontrado em Yu [80] e Wendland e Yu [78].

A partir do trabalho de Wendland, é possível demonstrar que, para o método de Galerkin, o erro é limitado pelo resíduo  $\mathcal{R}$ , como:

$$c_1\|\mathcal{R}\| \leq \|E\| \leq c_2\|\mathcal{R}\| \quad (1.3)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes independentes do erro  $E$ , e  $\|\cdot\|$  denota a norma dependente do subespaço das soluções aproximadas.

É importante enfatizar que o tipo residual é teoricamente correto para o método de Galerkin no MEC, mas infelizmente uma demonstração formal não está disponível para o método de colocação no MEC. Uma das razões é a dificuldade de provar a relação (1.3). Para o método de colocação esta relação só está confirmada para exemplos numéricos. Maiores informações podem ser encontradas em Goldberg [20], [11].

Rank [60] foi um dos primeiros pesquisadores a obter bons resultados usando o resíduo como indicador de erro. Apresentou uma estimativa de erro para a versão  $h$  de um processo adaptativo de refinamento de malha.

Alarcon et al. [2] discutiram a possibilidade de aplicação de uma formulação hierárquica a uma discretização por elementos de fronteira, com maior incidência na versão tipo  $p$ .

Rencis e Mullen [62] e [63] apresentaram um programa adaptativo h-hierárquico, para a solução de problemas de potencial e de elasticidade, através de funções de forma constantes.

Para problemas de potencial, existem muitos autores que desenvolveram indicadores de erro, baseado no resíduo, para o método de colocação no MEC, entre eles Liapis [41] e Parreira e Dong [50]. Para problemas elásticos este tipo de indicador de erro foi usado por Crook e Smith [14].

### **Erro de interpolação**

Nesse caso, a solução exata é prognosticada calculando a solução numérica usando funções de interpolação de uma ordem maior que a solução numérica inicial. Logo, a diferença entre a solução numérica inicial e a prognosticada é tomada como o erro.

Embora o método não tenha uma boa exatidão computacional na solução prognosticada, ele é amplamente utilizado tanto em elementos finitos como em elementos de contorno, por ser seu algoritmo simples e seu custo computacional barato.

Estimativas de interpolação de erro foram apresentados por Rencis et al. [58]. Amplas referências podem ser encontradas em Kita [36].

### **Erro da equação integral de contorno**

Neste método, estabelece-se uma relação entre o erro da solução e o resíduo, a partir da equação integral de contorno.

O erro é a diferença entre as soluções aproximada e exata. Logo, a equação integral dos deslocamentos pode ser escrita em função dos erros assim definidos. Essa equação integral é definida como resíduo.

Maiores referências podem ser encontradas em Kita [37],[36]

### **Sensitividade nodal**

Guiggiani [23] foi um dos primeiros pesquisadores a utilizar as características matemáticas intrínsecas do MEC para formular novos indicadores de erro. Ele observou que soluções numéricas obtidas pelo MEC são sensíveis à seleção de pontos de colocação sobre o contorno. Mais precisamente, conjuntos diferentes de pontos de colocação, para a mesma malha, produz soluções numéricas diferentes, exceto se as funções de interpolação forem capazes de reproduzir a solução exata sobre todo o contorno. Esta observação foi a base para a formulação de um novo indicador de erro. Ele sugere usar como indicador de erro a diferença entre duas soluções obtidas para dois conjuntos diferentes de pontos de colocação.

Desta maneira, é razoável esperar que, se a solução numérica está longe da

solução exata, a diferença entre duas soluções numéricas, obtidas para diferentes conjuntos de pontos de colocação para uma mesma malha, será bastante grande. Da mesma forma, se a solução numérica está próxima da solução exata, a diferença entre duas soluções numéricas, obtidas para diferentes pontos de colocação para uma mesma malha, será pequena. Guiggiani e Lombardi [24] estenderam esta idéia, usando funções de interpolação hierárquicas. É também definido o erro da solução como a variação da solução com respeito à variação da posição nodal.

Guiggiani [22] acrescenta neste artigo que o erro da solução, isto é, a diferença entre as soluções da primeira e da segunda análise, é estimado considerando a derivada da solução com respeito ao movimento na direção tangencial dos pontos de colocação no contorno. Só os pontos de colocação são perturbados e a discretização permanece inalterada. Neste artigo é mostrado também que a sensibilidade de aproximar soluções no MEC, com respeito à posição dos pontos de colocação, estão relacionados ao resíduo das equações integrais hipersingulares.

Paulino [51] et al. propõem o uso de sensibilidade nodal, como indicador e estimador de erro. Sensibilidade nodal é definido como a taxa do deslocamento, ou da tensão, ou da força de superfície, com respeito à posição nodal. Neste esquema, a variação da solução é estimada por diferenciação direta da equação integral de contorno na direção tangencial. Este esquema apresenta certas dificuldades, posto que a equação integral original apresenta singularidade devido à solução fundamental. Logo, com respeito à sensibilidade nodal, a equação tem hipersingularidade. Portanto, técnicas especiais serão necessárias para calculá-las.

### Diferença da solução

Alguns pesquisadores definiram o erro da solução como a diferença entre duas soluções, uma solução obtida a partir da solução original e outra por diferentes tipos de análise.

Mullen e Rencis no artigo [45] propõem que depois da primeira análise para uma malha com  $N$  elementos iguais, a segunda análise seja feita para uma malha refinada com  $2N$  elementos iguais. A solução da segunda análise é de esperar que

seja melhor e o erro da solução é definido como a diferença entre ambas soluções.

Yuuki et al. [81], [82] propõem que na primeira análise, chamada de método singular direto, os pontos fontes estejam sobre o contorno. E na segunda análise, chamada de método regular direto, os pontos fontes estejam fora do contorno. O erro é estimado pela diferença de ambas soluções. Maiores referências podem ser encontradas em Kita [36].

Zienkiewicz [85] analisa a importância, na estimativa de erro a-posteriori, de relacionar o resíduo das soluções aproximadas com o erro destas soluções, para elementos finitos.

Zhiye Zhao [86] apresenta um estimador de erro nodal a posteriori, onde os erros nodais da variável de deslocamento e força são estimados através da diferença de duas soluções, uma solução obtida a partir da solução inicial no método dos elementos de contorno e a outra solução da interpolação da solução original. A interpolação pode ser obtida reduzindo o tamanho do elemento ou aumentando a ordem da função de interpolação. Neste artigo o estudo se focaliza num refinamento h-adaptativo.

### 1.3 Organização da tese

No segundo capítulo apresentam-se as condições básicas da Teoria da Elasticidade Linear. Com base nas relações de equilíbrio obtêm-se as equações diferenciais governativas escritas em função dos deslocamentos, a equação de Navier. Introduzindo as condições de fronteira, formula-se o problema de equilíbrio da teoria da Elasticidade Linear. Seguidamente obtêm-se a equação integral governativa, a Somigliana, escrita unicamente em função dos campos de fronteira e de domínio. Analisa-se também a forma particular que a equação integral Somigliana apresenta para pontos de fronteira e como é que esta pode ser usada para obter o sistema de equações lineares resolutivo, seja através do Método de Colocação, o qual é usado neste trabalho, ou do Método de Galerkin. Finalmente são mostradas, as equações integrais para tensão (pontos internos) e para força de superfície.

No terceiro capítulo desenvolve-se a solução numérica, restrita ao caso bidimensional, das equações integrais apresentadas no capítulo 2. Na discretização das equações integrais foram utilizados elementos lineares que possibilitaram a obtenção das expressões exatas das integrais. Finalmente na montagem do sistema de equações algébricas foram utilizadas apenas equações de deslocamento, apenas equações de forças de superfície, ou as duas escritas para nós opostas da fratura.

No quarto capítulo são apresentados os conceitos básicos da mecânica da fratura elástica linear em duas dimensões. São também mostrados dois dos diferentes métodos de extração dos fatores de intensidade de tensão; o método de Correlação de Deslocamentos e a Integral-J. No cálculo dos ângulos de propagação foi usado o critério da máxima tensão principal.

No quinto capítulo é apresentada uma breve revisão da teoria de erro. Seguidamente o erro a ser considerado foi estimado a partir de normas onde se consideraram: a variação aproximada dos deslocamentos, a variação das forças de superfície, e a variação da energia de deformação do sistema calculada com a sua integração sobre o contorno.

## Capítulo 2

# Problema Elástico. Representação Integral

Neste capítulo apresentam-se as condições básicas da Teoria da Elasticidade Linear. Com base nas relações de equilíbrio obtêm-se as equações diferenciais governativas escritas em função dos deslocamentos, a equação de Navier. Introduzindo as condições de fronteira, formula-se o problema de equilíbrio da teoria da Elasticidade Linear.

Posteriormente partindo da simetria dos tensores das deformações e das tensões, obtêm-se a equação integral governativa, a Somigliana, escrita em função dos campos de fronteira e de domínio. Desta maneira o problema foi transformado na exclusiva determinação dos campos de fronteira, a partir dos quais são determinados os campos de domínio.

Analisa-se também a forma particular que a equação integral Somigliana apresenta para pontos de fronteira e como é que esta pode ser usada para obter o sistema de equações lineares resolutivo, seja através do Método de Colocação, o qual é usado neste trabalho, ou do Método de Galerkin .

Finalmente são mostradas, as equações integrais para tensão (pontos internos) e para força de superfície.

No desenvolvimento deste capítulo foram consultados os seguintes trabalhos:

TIMONSHENKO & GOODIER [73], BREBBIA & DOMINGUEZ [9], VILLAÇA & TABORDA [76], PARÍS & CAÑAS [49], Latif Saleh [38], A. Portela [55].

## 2.1 Problema Elástico

Quando um corpo está sujeito a forças externas  $F$  (carregamento), cada ponto do corpo pode sofrer um deslocamento  $u$ , e a sua posição relativa entre eles não é mais a mesma. O corpo com tal propriedade é chamado de corpo deformável, figura (2.1).

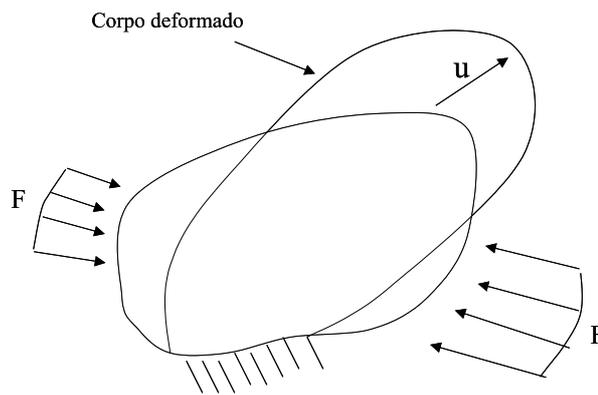


Figura 2.1: Modelo Físico

Se o carregamento for tal que introduza tensões em todos os pontos do corpo inferiores a um certo valor, e após do descarregamento o corpo recupera a forma inicial, então se diz que o material é elástico linear (não linear).

Neste trabalho admita-se além desta hipótese da linearidade física, que os deslocamentos sofridos pelo corpo são muito pequenos quando comparados com a dimensão deste, hipótese dos pequenos deslocamentos, de tal forma que a sua configuração deformada se confunde com a configuração inicial. Esta hipótese implica a hipótese das pequenas deformações, as quais, consideradas conjuntamente, estabelecem a hipótese da linearidade geométrica.

### 2.1.1 Equações Básicas de Elasticidade linear

Apresentamos as condições básicas da Teoria da Elasticidade Linear. Foram consultados os seguintes trabalhos: [73], [9], [76].

Com base na hipótese da linearidade geométrica, definem-se as relações de compatibilidade entre as deformações e os deslocamentos, também são definidas as relações de equilíbrio, entre as tensões e as carga do corpo de um ponto interior, e entre as tensões aplicadas num ponto da fronteira (forças de superfície).

Admitindo a hipótese da linearidade física, relacionam-se tensão e deformação através da Lei de Hook.

Com base nas três relações indicadas obtêm-se as equações diferenciais em função de deslocamentos ou em função da tensão.

#### Condições de Compatibilidade

Considerando a hipótese da linearidade geométrica é definido o tensor das deformações, que relaciona as deformações com os deslocamentos:

$$\varepsilon_{ij}(q) = \frac{1}{2}[u_{i,j}(q) + u_{j,i}(q)] \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

onde  $u_i$  são os deslocamentos ao longo da direção  $i$ ,  $\varepsilon_{ij}$  é o tensor das deformações, e  $q$  um ponto genérico do corpo elástico. Neste trabalho será usada também a notação indicial:  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ .

#### Condições de Equilíbrio

O equilíbrio de forças num ponto genérico  $q$ , é dado pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\sigma_{ij,j}(q) + b_i(q) = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

A componente  $\sigma_{ij}$  do tensor das tensões, representa fisicamente a tensão na faceta

perpendicular à direção  $i$ , segundo a direção  $j$  de um cubo de aresta infinitesimal centrado em  $q$ , e a componente  $b_i$  representa as forças de corpo (por unidade de volume).

Para pontos situados no contorno do corpo, o equilíbrio desses pontos resulta na fórmula de Cauchy:

$$P_i(q) = \sigma_{ij}(q) \cdot n_j(q) \quad (2.3)$$

onde  $P_i$  são as forças de superfície,  $n_j$  é o coseno diretor da normal ao contorno com respeito ao eixo  $x_j$ , e  $q$  é um ponto genérico no contorno.

### Equações Constitutivas

Se o corpo elástico for homogêneo e isotrópico, isto é, possui as mesmas propriedades em todos os seus pontos, e em cada ponto as propriedades são as mesmas em todas as direções, a relação entre tensões e as deformações num ponto  $q$  pode ser obtida através da lei de Hooke:

$$\sigma_{ij}(q) = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(q) + 2G \varepsilon_{ij}(q) \quad (2.4)$$

sendo  $G$  o módulo de elasticidade transversal do material do corpo ou módulo de cisalhamento,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $\delta_{ij}$  é o Delta de Kronecker definido por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.5)$$

para o estado plano de tensão o coeficiente de Poisson  $\bar{\nu}$  é dado por:

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu} \quad (2.6)$$

### A equação de Navier

Para obter um sistema de equações diferenciais escritas unicamente em função dos deslocamentos, substitua-se em primeiro lugar as deformações  $\varepsilon_{ij}$  dadas em (2.1), nas relações (2.4) e posteriormente, se introduz o resultado desta substituição na relação de equilíbrio (2.2). Desta forma, obtêm-se as equações de Navier dadas por:

$$\frac{1}{1-2\nu}u_{j,ji} + u_{i,jj} + \frac{b_i}{G} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.7)$$

onde se é possível aplicar três diferentes tipos de condições de contorno nas equações de Navier:

1. as condições de Fronteira de Dirichlet:

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{onde} \quad \Gamma = \Gamma_u \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.8)$$

2. as condições de Fronteira de Neumann:

$$p_i = \bar{p}_i \quad \text{onde} \quad \Gamma = \Gamma_p \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.9)$$

3. as condições de Fronteira mista:

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em} \quad \Gamma = \Gamma_u \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.10)$$

$$p_i = \bar{p}_i \quad \text{em} \quad \Gamma = \Gamma_p \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.11)$$

onde  $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_p$ .

## 2.2 Formulação Integral para o Problema Elástico

As representações das equações de Navier (2.7), em forma de equações integrais, podem ser obtidas com a utilização das técnicas dos resíduos ponderados ou, como será aplicado neste trabalho, pelo segundo Teorema de Betti.

Três teoremas serão apresentados a seguir, o Teorema do Trabalho Virtual e o primeiro e o segundo Teorema de Betti. Este último, é demonstrado a partir dos dois primeiros teoremas.

O Segundo Teorema de Betti constitui a base para a formulação do Método dos Elementos de Contorno.

Considere-se um corpo elástico de domínio  $\Omega$  e fronteira  $\Gamma$  (figura 2.2).

Dada uma função de deslocamento  $\psi_i$  sobre o domínio  $\Omega$ , tal que satisfaz as mesmas

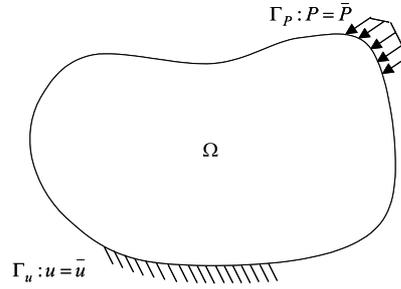


Figura 2.2: Corpo elástico de domínio  $\Omega$  e fronteira  $\Gamma$  ( $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_P$ )

hipóteses para a função  $u_i$ , na equação de Navier (2.7), então  $\psi_i$  deve estar associado a um certo campo de deformações  $\varepsilon_{ij}^\psi$ , logo deve satisfazer:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^\psi &= \frac{1}{2}(\psi_{i,j} + \psi_{j,i}) && \text{em } \Omega \\ \psi_i &= \bar{\psi}_i && \text{em } \Gamma \end{aligned} \quad (2.12)$$

Observe-se que os campos  $\psi_i$  e  $\varepsilon_{ij}^\psi$ , de deslocamento e deformação, respectivamente, estarão associados a certos campos de tensão  $\sigma_{ij}^\psi$ , forças de massa  $b_i^\psi$  e forças de superfície  $P_i^\psi$ .

**Teorema 2.2.1** (*Teorema do Trabalho Virtual*) Dado os campos de tensão  $\sigma_{ij}$ , forças de massa  $b_i$  e forças de superfície  $P_i$ , satisfazendo as equações de equilíbrio (2.2) e (2.3) e os campos de deslocamento  $\psi_i$  e deformação  $\varepsilon_{ij}^\psi$ , satisfazendo a equação (2.12), logo temos que:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^\psi d\Omega = \int_{\Omega} b_i \psi_i d\Omega + \int_{\Gamma} P_i \psi_i d\Gamma \quad (2.13)$$

**Teorema 2.2.2** (*Primeiro Teorema de Betti*) O trabalho de  $\sigma_{ij}$  (sistema atual), sobre  $\varepsilon_{ij}^\psi$  (sistema auxiliar) é igual ao trabalho de  $\sigma_{ij}^\psi$  (sistema auxiliar), sobre  $\varepsilon_{ij}$  (sistema atual). Assumindo que  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  e  $\sigma_{ij}^\psi$ ,  $\varepsilon_{ij}^\psi$  satisfazem as equações constitutivas.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^\psi d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^\psi \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (2.14)$$

**Teorema 2.2.3** (*Segundo Teorema de Betti*) O trabalho de força de massa  $b_i$  e força de superfície  $P_i$  (sistema atual), sobre o deslocamento  $\psi_i$  (sistema auxiliar), é igual ao trabalho de força de massa  $b_i^\psi$  e força de superfície  $P_i^\psi$  (sistema auxiliar), sobre o deslocamento do sistema atual  $u_i$ .

$$\int_{\Omega} b_i \psi_i d\Omega + \int_{\Gamma} P_i \psi_i d\Gamma = \int_{\Omega} b_i^\psi u_i d\Omega + \int_{\Gamma} P_i^\psi u_i d\Gamma \quad (2.15)$$

*Demonstração:* É demonstrado usando os teoremas (2.2.1) e (2.2.2), ver [49].

### 2.2.1 Solução Fundamental

A solução da equação de Navier (2.7), em que  $\Omega^*$  é considerado como um campo elástico homogêneo, isótropo e infinito, é devida a Kelvin [42].

Escolha-se uma função auxiliar  $\psi_i$ , como o deslocamento correspondente no ponto  $q$ , num domínio infinito, devido a uma carga unitária aplicada no ponto  $s$ . A distância entre os pontos  $s$  e  $q$  denotamos por  $r$ , figura (2.3).

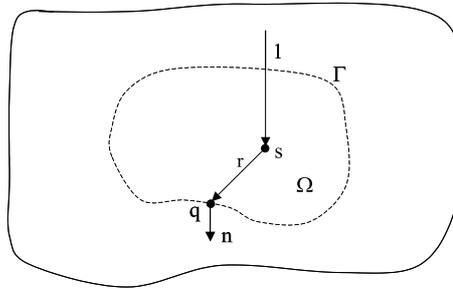


Figura 2.3: Carga unitária em um domínio infinito

Assim, a carga  $b_i^\psi$  a ser escolhida, corresponde a forças unitárias aplicadas num ponto  $s$ , segundo cada uma das direções ortogonais  $e_i$  dos eixos do sistema ortogonal cartesiano considerado, ou seja:

$$b_i^\psi(q) = \delta(s, q)e_i \quad (2.16)$$

onde:

$i$  = direção da carga;

$e_i$  = vetor unitário;

$\delta(s, q)$  = função Delta de Dirac;

a função Delta de Dirac é definida como:

$$\begin{cases} \delta(s, q) = 0 & \text{se } s \neq q \\ \delta(s, q) = \infty & \text{se } s = q \\ \int_{\Omega} f(s)\delta(s, q)d\Omega(q) = f(s) \end{cases} \quad (2.17)$$

substituindo a equação (2.16) na equação de Navier (2.7), temos que:

$$\psi_{i,jj}(s, q) + \frac{1}{1-2\nu}\psi_{j,ji}(s, q) + \frac{1}{G}\delta(s, q)e_i = 0 \quad (2.18)$$

Para simplificar a equação (2.18), Galerkin introduz três funções apresentadas mais tarde por Papkovich como componentes de um vetor, que é usualmente conhecido na literatura como vetor Galerkin. Denotaremos neste trabalho o vetor Galerkin como  $G_i$ .

O vetor  $G_i$  é escolhido de tal forma que  $\psi_i$  é definido como:

$$\psi_i = G_{i,kk} - \frac{1}{2(1-\nu)}G_{k,ik} \quad (2.19)$$

substituindo a equação (2.19) na equação (2.18) temos:

$$G_{i,kkj} - \frac{1}{2(1-\nu)}G_{k,ikj} + \frac{1}{1-2\nu}(G_{j,kkij} - \frac{1}{2(1-\nu)}G_{k,jkij}) = -\frac{1}{G}\delta e_i \quad (2.20)$$

tomando em consideração a continuidade do vetor Galerkin, temos que:

$$G_{k,ikjj} = G_{k,jjki}$$

$$G_{j,kkij} = G_{k,jjki}$$

$$G_{k,jkij} = G_{k,jjki}$$

logo a equação (2.20) escreve-se como:

$$\left[ \frac{1}{1-2\nu} \left[ 1 - \frac{1}{2(1-\nu)} \right] - \frac{1}{2(1-\nu)} \right] G_{k,jjki} + G_{i,kkjj} = -\frac{1}{G} \delta e_i \quad (2.21)$$

então:

$$G_{i,kkjj} = -\frac{1}{G} \delta e_i \quad (2.22)$$

assim a equação (2.22) pode ser escrita na forma:

$$\nabla^2(\nabla^2 G_i) = -\frac{1}{G} \delta e_i \quad (2.23)$$

chamando de:

$$F_i = \nabla^2 G_i \quad (2.24)$$

a equação (2.23) pode-se escrever como:

$$\nabla^2 F_i = -\frac{1}{G} \delta e_i \quad (2.25)$$

a solução fundamental para a equação de potencial (2.25) é conhecida, ver [9], [49], cuja solução no espaço 3D é dada por:

$$F_i = \frac{1}{4\pi r G} e_i \quad (2.26)$$

e no caso 2D:

$$F_i = \frac{1}{2\pi G} \ln\left(\frac{1}{r}\right) e_i \quad (2.27)$$

substituindo a equação (2.26) ou (2.27) na equação (2.24) e resolvendo temos para o caso 3D :

$$G_i = \frac{1}{8\pi G} r e_i \quad (2.28)$$

e no caso 2D:

$$G_i = \frac{1}{8\pi G} r^2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) e_i \quad (2.29)$$

derivando as duas soluções e substituindo em (2.19) temos para o sistema 3D:

$$\psi_i = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} \left[ (3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] e_j \quad (2.30)$$

e no sistema 2D:

$$\psi_i = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ -(3-4\nu) \ln r \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] e_j \quad (2.31)$$

Usando a equação do tensor das deformações (2.12), e a lei de Hooke (2.4) para  $\psi_i$ , é conhecido o tensor  $\sigma_{ij}^\psi$ . Como:

$$P_i^\psi = \sigma_{ij}^\psi n_j \quad (2.32)$$

logo temos para o sistema 3D:

$$P_i^\psi = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i} r_{,j}] + (1-2\nu)(n_j r_{,i} - n_i r_{,j}) \right] e_j \quad (2.33)$$

e no sistema 2D:

$$P_i^\psi = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j}] - (1-2\nu)(n_j r_{,i} - n_i r_{,j}) \right] e_j \quad (2.34)$$

As soluções fundamentais (2.30), (2.31), (2.33), e (2.34) podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}\psi_i &= u_{ij}^*(s, q)e_j \\ P_i^\psi &= P_{ij}^*(s, q)e_j\end{aligned}\quad (2.35)$$

para deslocamento, no sistema 3D e 2D respectivamente:

$$u_{ij}^*(s, q) = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} \left[ (3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \right] \quad (2.36)$$

$$u_{ij}^*(s, q) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ -(3-4\nu)\ln r \delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \right] \quad (2.37)$$

para força, no sistema 3D e 2D respectivamente:

$$P_{ij}^*(s, q) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}] + (1-2\nu)(n_j r_{,i} - n_i r_{,j}) \right] \quad (2.38)$$

$$P_{ij}^*(s, q) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] - (1-2\nu)(n_j r_{,i} - n_i r_{,j}) \right] \quad (2.39)$$

## 2.3 Equação Somigliana

### 2.3.1 Pontos Internos

Considere-se o corpo elástico homogêneo e isótropo  $\Omega$ , limitado pelo seu contorno  $\Gamma$ , contendo o ponto fonte  $s$  numa vizinhança de domínio  $\Omega_\epsilon$  e contorno  $\Gamma_\epsilon$ , tal como mostra a figura (2.4):

Nas condições do segundo teorema de Betti (2.2.3) temos que:

$$\int_{\Omega} b_i \psi_i d\Omega + \int_{\Gamma} P_i \psi_i d\Gamma = \int_{\Omega} b_i^\psi u_i d\Omega + \int_{\Gamma} P_i^\psi u_i d\Gamma \quad (2.40)$$

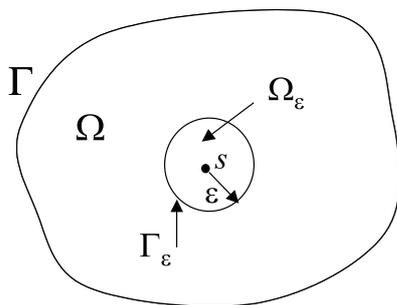


Figura 2.4: Ponto interno

$$\int_{\Omega} b_i \psi_i d\Omega - \int_{\Omega} b_i^{\psi} u_i d\Omega = \int_{\Gamma} P_i^{\psi} u_i d\Gamma - \int_{\Gamma} P_i \psi_i d\Gamma \quad (2.41)$$

Considerando os novos domínios de integração,  $(\Omega - \Omega_{\epsilon})$  e  $(\Gamma + \Gamma_{\epsilon})$ , temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Omega - \Omega_{\epsilon}} b_i u_{ij}^* e_j d\Omega - \int_{\Omega - \Omega_{\epsilon}} \delta(s, q) e_i u_i d\Omega \right] = & \quad (2.42) \\ & \int_{\Gamma} P_{ij}^* e_j u_i d\Gamma + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\epsilon}} P_{ij}^* e_j u_i d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} u_{ij}^* e_j P_i d\Gamma - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\epsilon}} u_{ij}^* e_j P_i d\Gamma \end{aligned}$$

pode-se negligenciar o vetor  $e_j$ , da equação (2.42), para a facilidade no manuseio das equações.

No cálculo das integrais da equação (2.42) temos:

1. A primeira integral do lado esquerdo é uma integral imprópria, logo existe.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - \Omega_{\epsilon}} b_i u_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} b_i u_{ij}^* d\Omega$$

2. A segunda integral do lado esquerdo, pela propriedade (2.17) temos:

$$\int_{\Omega - \Omega_{\epsilon}} \delta(s, q) u_i d\Omega = 0$$

3. A segunda integral do lado direito fica como:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} P_{ij}^*(s, q) u_i(q) d\Gamma(q) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} P_{ij}^*(s, q) [u_i(q) - u_i(s)] d\Gamma(q) \\ &+ u_i(s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} P_{ij}^*(s, q) d\Gamma(q) \end{aligned} \quad (2.43)$$

- A primeira integral do lado direito é zero já que  $u_i$  obedece as condições de continuidade de Hölder.
- Analisamos a segunda integral do lado direito:

De acordo com a figura (2.5):  $r = \epsilon$ ;  $r_{,i} = -n_i$ ;  $d\Gamma = \epsilon d\theta$ ;  $n_1 = -\cos\theta$ ;

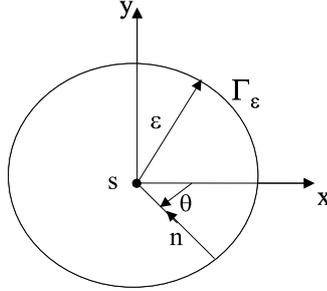


Figura 2.5: Contorno suave

$n_2 = \sin\theta$ ;  $\frac{\partial r}{\partial n} = -1$ ;  $n_j r_{,i} - n_i r_{,j} = 0$ . Logo a equação (2.39) escreve-se como:

$$P_{ij}^*(s, q) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} (1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j} \right]$$

Caso  $i = 1, j = 1$

$$\int_{\Gamma_\epsilon} P_{11}^* d\Gamma = - \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi(1-\nu)\epsilon} (-1) \left[ (1-2\nu) + 2r_{,1} r_{,1} \right] \epsilon d\theta = 1$$

Caso  $i = 2, j = 2$

$$\int_{\Gamma_\epsilon} P_{22}^* d\Gamma = - \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi(1-\nu)\epsilon} (-1) \left[ (1-2\nu) + 2r_{,2} r_{,2} \right] \epsilon d\theta = 1$$

Caso  $i = 1, j = 2$

$$\int_{\Gamma_\epsilon} P_{12}^* d\Gamma = 0$$

logo:

$$\int_{\Gamma_\epsilon} P_{ij}^* d\Gamma = \delta_{ij}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} P_{ij}^*(s, q) u_i(q) d\Gamma(q) = u_j(s)$$

4. A quarta integral do lado direito, tem integrandos limitados, logo:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} P_i \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ -(3-4\nu) \ln r \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] d\Gamma = \quad (2.44)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} C_1 \ln(\epsilon) \epsilon \int_0^{2\pi} P_i d\theta + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C_2 \epsilon \int_0^{2\pi} P_i n_i n_j d\theta = 0$$

Pelos itens (1), (2), (3), e (4) a equação (2.42) escreve-se como:

$$\int_{\Omega} b_i(q) u_{ij}^*(s, q) d\Omega = \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, q) u_i(q) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, q) P_i(q) d\Gamma + u_j(s) \quad (2.45)$$

$$u_j(s) = - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, q) u_i(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, q) P_i(q) d\Gamma + \int_{\Omega} b_i(q) u_{ij}^*(s, q) d\Omega \quad (2.46)$$

a identidade Somigliana para pontos internos é dada como:

$$u_i(s) = - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, q) P_j(q) d\Gamma + \int_{\Omega} b_j(q) u_{ij}^*(s, q) d\Omega \quad (2.47)$$

### 2.3.2 Pontos no Contorno

Considere-se o corpo elástico, com as propriedades da sub-seção anterior. Dado o ponto fonte  $s$  no contorno numa vizinhança de domínio  $\Omega_\epsilon$  e contorno  $\bar{\Gamma}_\epsilon$ , tal como mostra a figura (2.6).

Aplicando o segundo teorema de Betti (2.2.3), na ausência de forças de massa temos:

$$\int_{\Gamma} P_{ij}^* u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* P_i d\Gamma \quad (2.48)$$

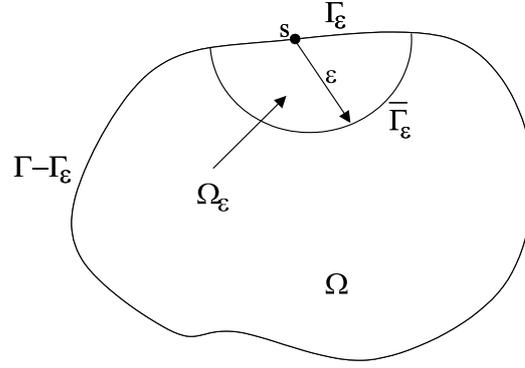


Figura 2.6: Ponto no Contorno

logo para o domínio  $\Omega - \Omega_\epsilon$  de contorno  $\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon$ :

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} P_{ij}^* u_i d\Gamma - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} u_{ij}^* P_i d\Gamma \\ & + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} P_{ij}^* u_i d\Gamma - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} u_{ij}^* P_i d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

No cálculo das integrais da equação (2.49) temos:

1. A terceira integral fica como:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} P_{ij}^*(s, q) u_i(q) d\Gamma(q) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} P_{ij}^*(s, q) [u_i(q) - u_i(s)] d\Gamma(q) \\ &+ u_i(s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} P_{ij}^*(s, q) d\Gamma(q) \end{aligned} \quad (2.50)$$

- A primeira integral do lado direito é zero já que  $u_i$  obedece as condições de continuidade de Hölder.
- Analisando a segunda integral do lado direito temos:

de acordo com a figura (2.7):  $r_i = -n_i$ ;  $\frac{\partial r}{\partial n} = -1$ ;  $r = \epsilon$ ;  $d\Gamma = \epsilon d\theta$ ;  $r_{,1} = \cos \theta$ ;  $r_{,2} = -\sin \theta$ ;  $n_j r_{,i} - n_i r_{,j} = 0$ . Logo a equação (2.39) escreve-

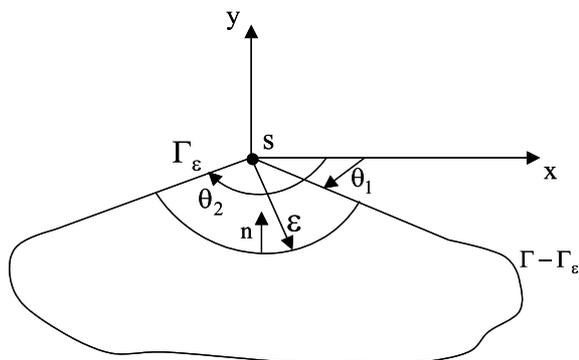


Figura 2.7: Contorno não suave

se como:

$$P_{ij}^*(s, q) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} (1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j} \right]$$

por conseguinte:

$$u_i(s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} P_{ij}^*(s, q) d\Gamma(q) = \quad (2.51)$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{4\pi(1-\nu)\epsilon} \left[ (1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j} \right] \epsilon d\theta$$

Caso  $i = 1, j = 1$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) + 2r_{,1}r_{,1} \right] d\theta = \quad (2.52)$$

$$\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ 2(1-\nu)(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2}(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \right] =$$

$$\frac{1}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{8\pi(1-\nu)}(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\alpha + \frac{\sin \alpha \cos 2\gamma}{4\pi(1-\nu)}$$

onde  $\alpha = \theta_2 - \theta_1$  e  $\gamma = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ . Similarmente podemos calcular para as

outras combinações de  $i, j$ . A equação (2.51) escreve-se como:

$$u_i(s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} P_{ij}^*(s, q) d\Gamma(q) = C_{ij} u_i(s) \quad (2.53)$$

concluimos que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} P_{ij}^*(s, q) u_i(q) d\Gamma(q) = C_{ij} u_i(s)$$

onde  $C_{ij}$  é chamada, a matriz de coeficientes do termo livre :

$$C_{11} = \frac{1}{2\pi} \alpha + \frac{\sin \alpha \cos 2\gamma}{4\pi(1-\nu)} \quad (2.54)$$

$$C_{12} = C_{21} = \frac{\sin \alpha \cos 2\gamma}{4\pi(1-\nu)}$$

$$C_{22} = \frac{1}{2\pi} \alpha - \frac{\sin \alpha \cos 2\gamma}{4\pi(1-\nu)}$$

sendo  $\alpha = \theta_2 - \theta_1$  e  $\gamma = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ .

Para contornos suaves  $\alpha = \pi$ , logo:

$$C_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij}$$

2. A quarta integral é dada por:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} u_{ij}^* P_i d\Gamma &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} P_i \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ -(3-4\nu) \ln r \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] d\Gamma \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} P_i [C_1 \ln \epsilon + C_2 n_i n_j] d\Gamma \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} C_1 \ln \epsilon P_i d\Gamma + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} C_2 n_i n_j P_i d\Gamma \end{aligned} \quad (2.55)$$

- Analisando a primeira integral da ultima igualdade em (2.55):

assumimos que  $|P_i(q)| \leq \frac{C}{r^\lambda}$  para  $0 \leq \lambda < 1$  logo:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\overline{\Gamma_\epsilon}} C_1 \ln \epsilon P_i d\Gamma &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C_1 \ln \epsilon \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{C}{\epsilon^\lambda} \epsilon d\theta & (2.56) \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C_1 \ln \epsilon C (\epsilon^{1-\lambda}) (\theta_2 - \theta_1) \\
&= A \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [(\ln \epsilon) (\epsilon^{1-\lambda})] \\
&= A \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^{1-\lambda}}{1-\lambda} \\
&= 0
\end{aligned}$$

- A segunda integral da ultima igualdade em (2.55) fica como.

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\overline{\Gamma_\epsilon}} C_2 n_i n_j P_i d\Gamma &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C_2 \int_{\overline{\Gamma_\epsilon}} |P_i| |n_i| |n_j| d\Gamma & (2.57) \\
&\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C_2 \int_{\overline{\Gamma_\epsilon}} |P_i| d\Gamma \\
&\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{C}{\epsilon^\lambda} \epsilon d\theta \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} C \epsilon^{1-\lambda} d\theta \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C_2 C \epsilon^{1-\lambda} \alpha \\
&= C_2 C \alpha \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon^{1-\lambda}) = 0
\end{aligned}$$

concluimos que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\overline{\Gamma_\epsilon}} u_{ij}^* P_i d\Gamma = 0$$

Pelos itens (1) e (2) a equação (2.49) escreve-se como:

$$C_{ij}(s)u_i(s) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} P_{ij}^*(s, q)u_i(q)d\Gamma(q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} u_{ij}^*(s, q)P_i(q)d\Gamma(q) \quad (2.58)$$

### Condições para existência do Valor Principal de Cauchy

Dada a função  $u(x)$  satisfazendo a continuidade de Hölder, isto é:

$$\text{existe constantes } A > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad \text{tal que} \quad |u(t) - u(x)| \leq A|t - x|^\alpha$$

e uma função  $f(x)$  que não apresente singularidade. A integral definida no intervalo  $[-a, b]$

$$\int_{-a}^b \frac{f(x)}{r} u(x) dx$$

existe no sentido valor Principal de Cauchy, se:

$$|f(\epsilon) + f(-\epsilon)| \leq A\epsilon^\alpha \quad A > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad \epsilon > 0. \quad (2.59)$$

Na equação (2.58), a função  $u(x)$ , na integral do segundo termo do lado esquerdo, obedece a continuidade de Hölder, e o integrando  $P_{ij}^*$  podemos escrever como  $\frac{f(x)}{r}$ , onde:

$$f = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] - (1-2\nu)(n_j r_{,i} - n_i r_{,j}) \right] \quad (2.60)$$

Para provar que a integral existe, no sentido valor Principal de Cauchy, só restaria verificar (2.59).

Como os vetores  $r$  e  $n$  são mutuamente perpendiculares, figura 2.8, só restaria calcular o valor de  $f$  em:

$$n_j r_{,i} - n_i r_{,j} \quad (2.61)$$

Para  $\epsilon$  : de acordo com a figura (2.8)

$$\begin{aligned} n_1^+ &= \cos \theta^+ & n_2^+ &= \sin \theta^+ \\ r_{,1}^+ &= -\sin \theta^+ & r_{,2}^+ &= \cos \theta^+ \end{aligned}$$

em  $j = 1$  e  $i = 2$

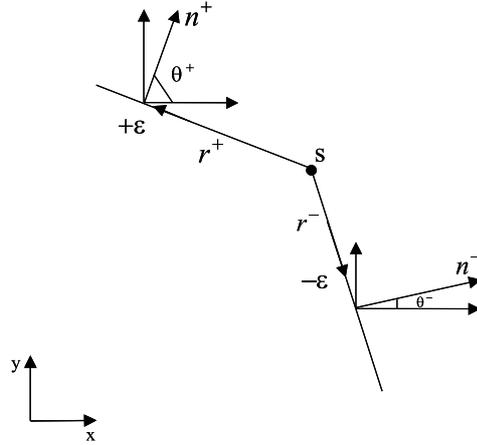


Figura 2.8:

$$n_1^+ r_{,2}^+ - n_2^+ r_{,1}^+ = \cos \theta^+ (\cos \theta^+) - \sin \theta^+ (-\sin \theta^+) = 1$$

Para  $-\epsilon$

$$n_1^- = \cos \theta^- \quad n_2^- = \sin \theta^-$$

$$r_{,1}^- = \sin \theta^- \quad r_{,2}^- = -\cos \theta^-$$

em  $j=1$  e  $i=2$

$$n_1^- r_{,2}^- - n_2^- r_{,1}^- = \cos \theta^- (-\cos \theta^-) - \sin \theta^- (-\sin \theta^-) = -1$$

Os valores achados para a função  $f$  em  $\epsilon$  e  $-\epsilon$  implicam que a equação 2.59 é satisfeita. Uma conclusão similar pode ser obtida para  $j = 2$  e  $i = 1$ , também para  $i = j$ . O que prova que a integral do primeiro membro da equação (2.58) admite valor Principal de Cauchy, e pode ser escrita na forma:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} P_{ij}^*(s, q) u_i(q) d\Gamma(q) = \oint_{\Gamma} P_{ij}^*(s, q) u_i(q) d\Gamma(q) \quad (2.62)$$

A integral do lado direito da equação (2.58), tem singularidade fraca do tipo  $\ln r$ , logo a integral existe como integral imprópria.

Logo a equação (2.58) escreve-se como:

$$c_{ij}(s)u_i(s) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, q)u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, q)P_j d\Gamma \quad (2.63)$$

que é a equação Somigliana para pontos da Fronteira.

Nesta seção tomou-se como referências: [49], [9], [56].

## 2.4 Calculo da Tensão Interna

A identidade Somigliana (2.47), para o ponto interno  $s$ , é derivável, e escreve-se como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i(s)}{\partial x_j(s)} &= \frac{\partial}{\partial x_j(s)} \left[ - \int_{\Gamma} P_{ik}^*(s, q)u_k(q)d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ik}^*(s, q)P_k(q)d\Gamma \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} b_k(q)u_{ik}^*(s, q)d\Omega \right] \end{aligned} \quad (2.64)$$

logo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i(s)}{\partial x_j(s)} &= - \int_{\Gamma} \frac{\partial P_{ik}^*(s, q)}{\partial x_j(s)} u_k(q)d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{ik}^*(s, q)}{\partial x_j(s)} P_k(q)d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{\partial u_{ik}^*(s, q)}{\partial x_j(s)} b_k(q)d\Omega \end{aligned} \quad (2.65)$$

Derivando as soluções fundamentais para deslocamento (2.37), e força (2.39), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{ik}^*(s, q)}{\partial x_j(s)} &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)Gr} \left[ 4(1-\nu)r_{,j}\delta_{ik} - (r_{,j}\delta_{ik} + r_{,i}\delta_{kj} + r_{,k}\delta_{ij}) \right. \\ &\quad \left. + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_{ik}^*(s, q)}{\partial x_j(s)} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left[ 2(1-2\nu)\delta_{ik}r_{,j} + 8r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right. \\
&\quad - 2(\delta_{ij}r_{,k} + \delta_{jk}r_{,i}) \frac{\partial r}{\partial n} \\
&\quad + (1-2\nu)(2n_{i,r}r_{,k}r_{,j} - 2n_{k,r}r_{,j}r_{,i}) \\
&\quad \left. - \delta_{ik}n_j + \delta_{ij}n_k - \delta_{jk}n_i - 2r_{,i}r_{,k}n_j \right] \quad (2.67)
\end{aligned}$$

Com as equações (2.66) e (2.67) é conhecida a equação (2.65).

Substituindo a equação (2.65) em (2.1), o tensor das deformações escreve-se como:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij} &= - \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial P_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial P_{jk}^*}{\partial x_i} \right) u_k d\Gamma \quad (2.68) \\
&\quad + \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_i} \right) P_k d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_i} \right) b_k d\Gamma
\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo a equação (2.68) na lei de Hooke (2.4), temos a tensão para o ponto fonte  $s$ :

$$\sigma_{ij}(s) = - \int_{\Gamma} S_{ijk}(s, q) u_k d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ijk}(s, q) P_k d\Gamma + \int_{\Omega} D_{ijk}(s, q) b_k d\Omega \quad (2.69)$$

as soluções fundamentais  $D_{ijk}$  e  $S_{ijk}$  são dados por Cruse [16] como:

$$D_{ijk} = \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} ((1-2\nu)(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}) + \beta r_{,i}r_{,j}r_{,k}) \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned}
S_{ijk} = \frac{2G}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\beta} \left[ \beta \frac{\partial r}{\partial n} \left( (1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - \gamma r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right) \right. \\
\left. + \beta\nu(n_i r_{,j} + n_j r_{,i})r_{,k} (1-2\nu)(\beta n_k r_{,i} r_j + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) \right. \\
\left. - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right] \quad (2.71)
\end{aligned}$$

Para o sistema 2D:

$$\alpha = 1; \beta = 2; \gamma = 4.$$

e no sistema 3D:

$$\alpha = 2; \beta = 3; \gamma = 5 \quad .$$

## 2.5 Equação Força de Superfície

O campo de tensões, na ausência de forças de massa, para o ponto fonte interno  $s'$ , foi dada em (2.69) como:

$$\sigma_{ij}(s') + \int_{\Gamma} S_{ijk}(s', q) u_k(q) d\Gamma(q) = \int_{\Gamma} D_{ijk}(s', q) P_k(q) d\Gamma(q) \quad (2.72)$$

no sistema bidimensional as equações (2.70) e (2.71) escrevem-se como:

$$D_{ijk}(s', q) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ (1-2\nu)(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned}
S_{ijk}(s', q) = & \frac{E}{4\pi(1-\nu^2)r^2} \left[ 2 \frac{\partial r}{\partial n} [ (1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) \right. \\
& - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k} ] + 2\nu(n_i r_{,j} + n_j r_{,i})r_{,k} \\
& + (1-2\nu)(2n_k r_{,i} r_j + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) \\
& \left. - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right] \quad (2.74)
\end{aligned}$$

Como a distância entre o ponto fonte e o ponto campo é  $r$ , então temos que para qualquer ponto fonte interno a distância  $r \neq 0$ , logo as integrais em (2.72) contem somente integrandos regulares.

Agora considere o caso limite, em que o ponto fonte interno é levado para o contorno, tal como ilustra a figura (2.9), isto é, no processo limite  $r \rightarrow 0$  quando  $s' \rightarrow s$ .

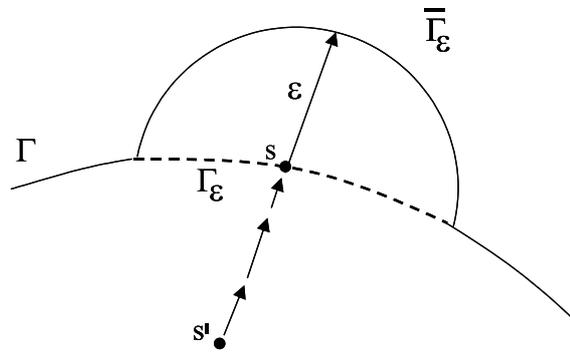


Figura 2.9: Ponto fonte no contorno

Neste caso a equação de tensão (2.72) toma uma forma particular. Para a sua determinação considere-se o ponto  $s$  como o limite de um ponto interior envolvido por parte de uma superfície esférica de raio  $\epsilon$ , conforme ilustra a figura (2.9). Temos o contorno dividido em duas partes  $\Gamma = (\Gamma - \Gamma_\epsilon) + \bar{\Gamma}_\epsilon$ . Logo a equação de tensão (2.72), transforma-se em:

$$\sigma_{ij}(s) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} S_{ijk}(s, q) u_k(q) d\Gamma(q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} D_{ijk}(s, q) P_k(q) d\Gamma(q) \quad (2.75)$$

A integral do lado direito da equação (2.75), contem uma singularidade forte no seu integrando de ordem  $O(\frac{1}{r})$  e pode ser regularizada da mesma maneira como foi feito na equação deslocamento. Logo temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} D_{ijk}(s, q) P_k(q) d\Gamma(q) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} D_{ijk}(s, q) [P_k(q) - P_k(s)] d\Gamma(q) \\
&+ P_k(s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} D_{ijk}(s, q) d\Gamma(q) \\
&+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} D_{ijk}(s, q) P_k(q) d\Gamma(q) \quad (2.76)
\end{aligned}$$

Analisando a primeira integral do lado direito da equação (2.76) temos:

assumindo que o campo de forças de superfície satisfaz a condição de continuidade de Hölder,  $P_k(q) \in C^{0,\alpha}$ , o primeiro termo da integral é integrável e se anula no processo de limite.

Analisando a segunda integral do lado direito da equação (2.76) temos:

é uma integral singular forte de ordem  $O(\frac{1}{r})$  e da o termo livre  $A_{ijk}(s)P_k(s)$ , onde  $A_{ijk}(s)$  é uma constante que depende das constantes elásticas e da transformação de coordenadas.

$$P_k(s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} D_{ijk}(s, q) d\Gamma(q) = A_{ijk}(s) P_k(s) \quad (2.77)$$

A terceira integral do lado direito da equação (2.76), é uma integral imprópria e pode ser tratada no sentido de Valor Principal de Cauchy:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} D_{ijk}(s, q) P_k(q) d\Gamma(q) = \oint_{\Gamma} D_{ijk}(s, q) P_k(q) d\Gamma(q) \quad (2.78)$$

A integral do lado esquerdo da equação (2.75), tem uma hipersingularidade de ordem  $O(\frac{1}{r^2})$  no seu integrando. A regularização pode ser feita com os dois primeiros termos da série de Taylor para o deslocamento ao redor do ponto fonte. Logo a integral é dada como:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} S_{ijk}(s, q) u_k(q) d\Gamma(q) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} S_{ijk}(s, q) [u_k(q) - u_k(s) - u_{k,l}(s)(q_l - s_l)] d\Gamma(q) \\
&+ u_k(s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} S_{ijk}(s, q) d\Gamma(q) \\
&+ u_{k,l}(s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} S_{ijk}(s, q) [q_l - s_l] d\Gamma(q) \\
&+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} S_{ijk}(s, q) u_k(q) d\Gamma(q) \tag{2.79}
\end{aligned}$$

Analisando a primeira integral do lado direito da equação (2.79) temos:

assumindo que a derivada do deslocamento obedece as condições de continuidade de Hölder,  $u_k(q) \in C^{1,\alpha}$ , logo existem constantes  $|C| < \alpha$  e  $0 < \alpha < 1$  tal que:

$$|u_k(q) - u_k(s) - u_{k,l}(s)(q_l - s_l)| \leq C|q_l - s_l|^{\alpha+1} \tag{2.80}$$

com estas hipóteses temos que a primeira integral é integrável e se anula no processo do limite.

Na segunda integral do lado direito da equação (2.79) temos:

$$u_k(s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} S_{ijk}(s, q) d\Gamma(q) = u_k(s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{B_{ijk}(s)}{\epsilon} \tag{2.81}$$

onde  $B_{ijk}(s)$  é uma constante que depende das constantes elásticas e da transformação de coordenadas.

A terceira integral do lado direito da equação (2.79) fica como:

$$u_{k,l}(s) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} S_{ijk}(s, q) [q_l - s_l] d\Gamma(q) = C_{ijkl}(s) u_{k,l}(s) \tag{2.82}$$

onde  $C_{ijkl}(s)$  é uma constante que depende das constantes elásticas e da transformação de coordenadas.

A quarta integral do lado direito da equação (2.79), é uma integral imprópria, que

tomada junto com a integral (2.81) é tratada no sentido de valor principal de Hadamard.

$$\oint_{\Gamma} S_{ijk}(s, q)u_k(q)d\Gamma(q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_{\epsilon}} S_{ijk}(s, q)u_k(q)d\Gamma(q) + u_k(s) \frac{B_{ijk}(s)}{\epsilon} \right\} \quad (2.83)$$

Substituindo as equações (2.77), (2.78), (2.81), (2.82), (2.83) na equação (2.79) temos:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(s) + \oint_{\Gamma} S_{ijk}(s, q)u_k(q)d\Gamma(q) &= \oint_{\Gamma} D_{ijk}(s, q)P_k(q)d\Gamma(q) \\ &+ A_{ijk}(x)P_k(s) - C_{ijkl}u_{k,l}(s) \end{aligned} \quad (2.84)$$

Foi mostrado por Cruse, em [16], que os dois últimos termos da equação (2.84) são iguais a tensão no contorno e para contorno suave temos que:

$$A_{ijk}(x)P_k(s) - C_{ijkl}u_{k,l}(s) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}(s) \quad (2.85)$$

Por tanto podemos escrever a equação de tensão (2.84) como:

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}(s) + \oint_{\Gamma} S_{ijk}(s, q)u_k(q)d\Gamma(q) = \oint_{\Gamma} D_{ijk}(s, q)P_k(q)d\Gamma(q) \quad (2.86)$$

Substituindo a equação (2.86) na relação (2.3), a equação integral de força de superfície para contorno suave é dada como:

$$\frac{1}{2}P_i(s) = -n_j(s) \oint_{\Gamma} S_{ijk}(s, q)u_k(q)d\Gamma(q) + n_j(s) \oint_{\Gamma} D_{ijk}(s, q)P_k(q)d\Gamma(q) \quad (2.87)$$

onde  $n_j$  denota a  $j$ -ésima componente do vetor normal ao contorno no ponto fonte  $s$ . Para um contorno não suave a equação integral não pode-se ser definida já que não existe um único vetor normal.

# Capítulo 3

## Método dos Elementos de Contorno

Neste capítulo desenvolve-se a solução numérica, restrita ao caso bidimensional, das equações integrais apresentadas no capítulo 2. Para obter uma solução recorre-se a uma técnica numérica para estabelecer um modelo discreto que aproxime os campos contínuos a determinar. No método dos Elementos de Contorno, esta solução é obtida através de um processo de discretização da equação integral governativa, que neste caso é escrita unicamente em função dos campos de fronteira, diminuindo uma unidade à dimensão do problema em análise. Este processo de discretização conduz a um sistema linear de equações algébricas, cuja solução permite calcular, posteriormente, os campos de domínio.

Neste trabalho, na discretização das equações integrais, foram utilizados elementos lineares que possibilitaram a obtenção das expressões exatas das integrais.

Finalmente na montagem do sistema de equações algébricas foram utilizadas apenas equações de deslocamento, apenas equações de forças de superfície, ou as duas escritas para nós opostas da fratura levando, portanto ao método dos elementos de contorno dual usualmente empregado na análise de fratura.

No desenvolvimento deste capítulo foram consultadas os seguintes trabalhos: BREBBIA & DOMINGUEZ [9], PARÍS & CAÑAS [49].

### 3.1 Discretização da Equação Somigliana

Para obter uma solução aproximada dos campos de fronteira desconhecidos, equação (2.63), divide-se o contorno  $\Gamma$  em  $NE$  elementos. O domínio  $\Omega$  pode ser dividido em células, caso seja considerado as forças de massa ,entretanto neste trabalho não serão consideradas, figura (3.1).

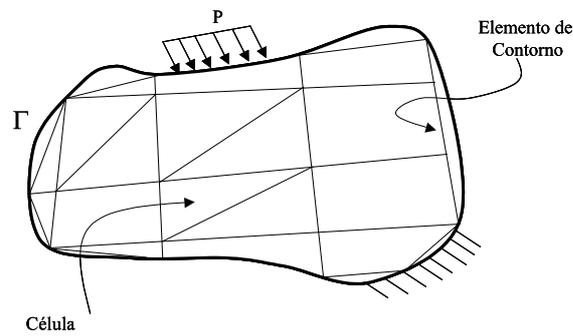


Figura 3.1: Problema elástico discretizado em elementos de contorno e células de domínio

Logo o contorno  $\Gamma$  se escreve como:

$$\Gamma = \sum_{m=1}^{NE} \Gamma_m \quad (3.1)$$

e os deslocamentos e as forças, no elemento genérico  $\Gamma_n$ , serão aproximadas por:

$$u_k(q) = \phi_l(q)u_k^l \quad (3.2)$$

$$P_k(q) = \phi_l(q)P_k^l \quad (3.3)$$

onde  $q \in \Gamma_n$ ,  $\phi_l$  são as funções de interpolação para  $l = 1, 2$ .

As funções de interpolação, a ser consideradas neste trabalho, são de ordem linear, e dados por:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad \phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (3.4)$$

que são as fórmulas de Lagrange de grau 1.

Substituindo as equações (3.2) e (3.3), na equação Somigliana (2.63), temos:

$$\begin{aligned} c_{ik}(s)u_k(s) &= - \sum_{m=1}^{NE} \int_{\Gamma_m} P_{ik}^*(s, q) \phi_l(q) d\Gamma(q) u_k^l(q) \\ &+ \sum_{m=1}^{NE} \int_{\Gamma_m} u_{ik}^*(s, q) \phi_l(q) d\Gamma(q) P_k^l(q) \end{aligned} \quad (3.5)$$

ou:

$$c_{ik}(s)u_k(s) = - \sum_{m=1}^{NE} h_{ik}^{lm} u_k^l + \sum_{m=1}^{NE} g_{ik}^{lm} P_k^l \quad (3.6)$$

sendo:

$$h_{ik}^{lm} = \int_{\Gamma_m} P_{ik}^*(s, q) \phi_l(q) d\Gamma(q) \quad (3.7)$$

$$g_{ik}^{lm} = \int_{\Gamma_m} u_{ik}^*(s, q) \phi_l(q) d\Gamma(q) \quad (3.8)$$

em que:

$m$ : denota o  $m$ -ésimo elemento

$k$ : influência na direção do eixo

$l$ : nó

$i$ : direção da carga unitária

A convergência dos somatórios em (3.6) será visto no capítulo 5.

Agrupando os termos em comum, a equação (3.6) escreve-se como

$$\sum_{m=1}^{NE} H(s, m) U^m = \sum_{m=1}^{NE} G(s, m) P^m \quad (3.9)$$

onde

$$H(s, m) = \begin{cases} \hat{H}(s, m) & \text{se } s \notin \Gamma_m \\ \frac{1}{2} + \hat{H}(s, m) & \text{se } s \in \Gamma_m \end{cases} \quad (3.10)$$

Aplicando a equação (3.9), a todos os nós do contorno, obtêm-se um sistema linear de equações, que em forma matricial pode-se escrever como:

$$HU = GP \quad (3.11)$$

sendo as matrizes  $H$  e  $G$  da ordem  $2N \times 2N$  ( $N$  é o número de nós do contorno).

Com as condições de contorno, o sistema linear de equações (3.11) escreve-se como:

$$AX = B \quad (3.12)$$

onde  $X$  é o vetor de incógnitas, formado por forças de superfície ou deslocamentos.

Note-se que a matriz  $H$  em (3.10), aplicada em todos os nós do contorno é:

$$H = \begin{pmatrix} \hat{H}(s_1, 1) & \hat{H}(s_1, 2) & \dots & \hat{H}(s_1, NE) \\ \hat{H}(s_2, 1) & \hat{H}(s_2, 2) & \dots & \hat{H}(s_2, NE) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{H}(s_n, 1) & \hat{H}(s_n, 2) & \dots & \hat{H}(s_n, NE) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

onde  $\hat{H}(s_i, m)$  denota a matriz de integração do ponto fonte  $s_i$  ao elemento  $m$ . Ela é uma matriz  $2 \times 4$  cujos elementos são as funções integráveis  $h_{ij}^{lm}$ , dadas em (3.7).

Em forma explícita:

$$\hat{H}(s_i, m) = \begin{pmatrix} h_{11}^{1m} & h_{12}^{1m} & h_{11}^{2m} & h_{12}^{2m} \\ h_{21}^{1m} & h_{22}^{1m} & h_{21}^{2m} & h_{22}^{2m} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

No caso da matriz  $G$  na equação (3.11), ela é calculada de modo similar que a  $H$ , onde as submatrizes em  $G$  são:

$$\hat{G}(s_i, m) = \begin{pmatrix} g_{11}^{1m} & g_{12}^{1m} & g_{11}^{2m} & g_{12}^{2m} \\ g_{21}^{1m} & g_{22}^{1m} & g_{21}^{2m} & g_{22}^{2m} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

cujos elementos são as funções integráveis  $g_{ij}^{lm}$ , dadas em (3.8).

## 3.2 Solução Analítica das Integrais para a equação de Deslocamento

Neste trabalho as integrais das submatrizes (3.14) e (3.15), são calculadas analiticamente. Temos dois casos, as integrais são singulares e não singulares.

### 3.2.1 Singular-Ponto fonte no elemento

- a) Ponto fonte coincide com o ponto inicial do elemento;
- b) Ponto fonte coincide com o ponto final do elemento;
- c) Ponto fonte é nó duplo;

Resolvemos as integrais sem mudança de coordenadas. Como exemplo, mostramos parte(a).

Calculamos um dos elementos da submatriz (3.14), para o ponto fonte  $s$ , elemento 1, figura 3.2. Seja o elemento a calcular  $h_{12}^{21}$ :

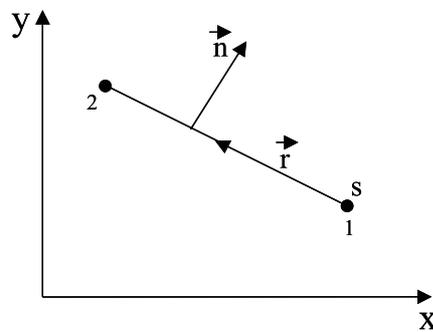


Figura 3.2: Ponto fonte coincide com o nó do elemento

Por ortogonalidade temos que

$$\frac{\partial r}{\partial n} = 0$$

os cosenos diretores são dados por

$$\eta_1 = \cos(\bar{n}, X) \quad \eta_2 = \cos(\bar{n}, Y) \quad (3.16)$$

logo

$$\eta_1 = \cos \theta \quad \eta_2 = \sin \theta \quad (3.17)$$

$$r_{,1} = -\sin \theta \quad r_{,2} = -\cos \theta \quad (3.18)$$

as funções de forma são dadas por:

$$\phi_1 = 1 - \frac{r}{l} \quad \phi_2 = \frac{r}{l} \quad (3.19)$$

onde  $l$  é o tamanho do elemento.

Substituindo os valores na solução fundamental (2.39), temos:

$$P_{12}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ (2r_{,1} r_{,2}) \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,1} \eta_2 - r_{,2} \eta_1) \right] \quad (3.20)$$

$$P_{12}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ -(1-2\nu)(-\sin \theta \sin \theta - \cos \theta \cos \theta) \right] \quad (3.21)$$

$$P_{12}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} (1-2\nu) \quad (3.22)$$

Calculamos a integral

$$h_{12}^{21} = \int_{\Gamma} P_{12}^* \phi_2 d\Gamma \quad (3.23)$$

o caminho de integração  $\Gamma$  é a trajetória do  $r$ , que varia do nó inicial 1 até o nó final

2. Substituindo as equações (3.22) e (3.19) em (3.23) temos:

$$h_{12}^{21} = \int_0^l -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} (1-2\nu) \frac{r}{l} dr \quad (3.24)$$

$$h_{12}^{21} = -\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \quad (3.25)$$

No caso da submatriz (3.15), para o ponto fonte  $s$ , elemento 1, figura 3.2. Seja o elemento a calcular  $g_{11}^{11}$ :

$$g_{11}^{11} = \int u_{11}^* \phi_1 d\Gamma \quad (3.26)$$

Substituindo os valores na solução fundamental (2.37), temos:

$$u_{11}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ -(3-4\nu) \ln r + r_{,1} r_{,1} \right] \quad (3.27)$$

logo

$$g_{11}^{11} = \int_0^l \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ -(3-4\nu) \ln r + r_{,1} r_{,1} \right] \left(1 - \frac{r}{l}\right) dr \quad (3.28)$$

$$g_{11}^{11} = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ -(3-4\nu)(l \ln l - l) + (3-4\nu) \left( \frac{l}{2} \ln l - \frac{l}{4} \right) + r_{,1}^2 l - \frac{r_{,1}^2 l}{2} \right] \quad (3.29)$$

$$g_{11}^1 = \frac{l}{16\pi G(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \left( \frac{3}{2} - \ln l \right) + r_1^2 \right] \quad (3.30)$$

### 3.2.2 Não Singular-Ponto fonte fora do elemento

a) Ponto fonte não alinhado com o elemento: usamos mudança de eixos na geometria

b) Ponto fonte alinhado e atrás do elemento

c) Ponto fonte alinhado e na frente do elemento

Mostramos como exemplo parte (a). Calculamos a integral  $h_{11}^{11}$ :

$$h_{11}^1 = \int_{\Gamma} P_{11}^* \phi_1 d\Gamma \quad (3.31)$$

As funções de interpolação são dadas por:

$$\phi_1 = 1 - \frac{\Gamma}{l} \quad \phi_2 = \frac{\Gamma}{l} \quad (3.32)$$

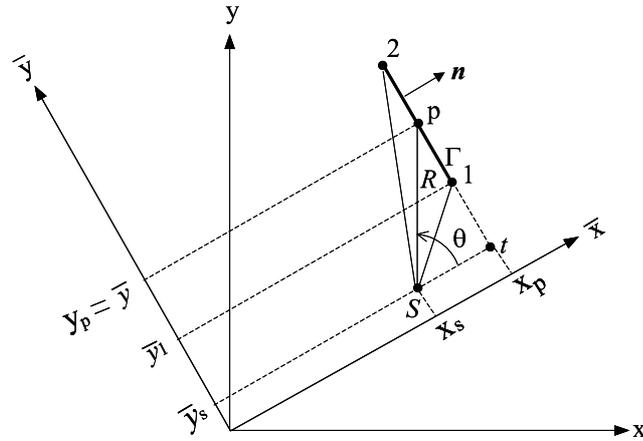


Figura 3.3: Ponto fonte fora do elemento

sendo  $\Gamma$  o caminho de integração,  $l$  é o tamanho do elemento a ser integrado. De acordo com figura (3.3), temos:

$$\sin \theta = \frac{\bar{y} - \bar{y}_s}{R} \quad (3.33)$$

$$\bar{y} - \bar{y}_1 - \bar{y}_s = R \sin \theta - \bar{y}_1 \quad (3.34)$$

como o caminho de integração é  $\Gamma = \bar{y} - \bar{y}_1$ , logo temos que:

$$\Gamma = R \sin \theta - \bar{y}_1 + \bar{y}_s \quad (3.35)$$

seja  $h$  a distância do ponto fonte  $s$  ao elemento. Então podemos escrever:

$$\Gamma = h \tan \theta + \bar{y}_s - \bar{y}_1 \quad (3.36)$$

e

$$d\Gamma = \frac{h}{\cos^2 \theta} d\theta \quad (3.37)$$

logo as funções de interpolação podem ser escritas como:

$$\phi_1 = 1 - \frac{h \tan \theta + \bar{y}_s - \bar{y}_1}{l} \quad (3.38)$$

$$\phi_2 = \frac{h \tan \theta + \bar{y}_s - \bar{y}_1}{l}$$

Na figura (3.3),  $r = R$ , que é a distância entre o ponto fonte  $s$  e o ponto  $P$ , do elemento a ser integrado, logo:

$$r = \sqrt{(\bar{x}_p - \bar{x}_s)^2 + (\bar{y}_p - \bar{y}_s)^2} \quad (3.39)$$

também temos:

$$r_{,1} = \frac{\partial r}{\partial x} \quad r_{,2} = \frac{\partial r}{\partial y} \quad (3.40)$$

$$r_{,1} = \cos \theta \quad r_{,2} = \sin \theta \quad (3.41)$$

Os cosenos diretores são definidos como:

$$\eta_1 = \cos(\bar{n}, \bar{x}) \quad \eta_2 = \cos(\bar{n}, \bar{y}) \quad (3.42)$$

logo

$$\eta_1 = 1 \quad \eta_2 = 0 \quad (3.43)$$

e

$$r_{,n} = \frac{\partial r}{\partial n} \quad (3.44)$$

logo

$$r_{,n} = \cos \theta \quad (3.45)$$

Substituindo os valores na solução fundamental (2.39), temos:

$$P_{11}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ [(1-2\nu) + 2r_{,1} r_{,1}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,1} n_1 - r_{,1} n_1) \right] \quad (3.46)$$

$$P_{11}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ [(1-2\nu) + 2 \cos^2 \theta] \cos \theta - (1-2\nu)(\cos \theta - \cos \theta) \right] \quad (3.47)$$

$$P_{11}^* = -\frac{\cos \theta}{4\pi(1-\nu)h} \left[ (1-2\nu) + 2 \cos^2 \theta \right] \cos \theta \quad (3.48)$$

Substituindo os valores respectivos em  $h_{11}^{11}$ , temos:

$$h_{11}^{11} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} -\frac{\cos^2 \theta}{4\pi(1-\nu)h} \left[ (1-2\nu) + 2 \cos^2 \theta \right] \left[ 1 - \frac{h \tan \theta + \bar{y}_s - \bar{y}_1}{l} \right] \frac{h}{\cos^2 \theta} d\theta \quad (3.49)$$

seja

$$K = 4\pi(1-\nu) \quad Q = 1-2\nu$$

resolvendo a integral

$$\begin{aligned} h_{11}^{11} = & -\frac{1}{K} \left[ \left( \left( 1 - \frac{y_s - y_1}{l} \right) \theta + \frac{h}{l} \ln(\cos \theta) \right) Q \right. \\ & \left. + (\theta + \sin \theta \cos \theta) \left( 1 - \frac{y_s - y_1}{l} \right) + \frac{h}{l} \cos^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (3.50)$$

### 3.3 Sistema de Equações para a Equação de Força de Superfície

Para obter uma solução aproximada de (2.87), dos campos de fronteira desconhecidos, divide-se o contorno  $\Gamma$  em  $NE$  elementos como em (3.1) e aproxima-se os campos de deslocamento e força de superfície como em (3.2) e (3.3)

respectivamente. Por simplicidade, no manuseio das integrais, escreveremos a equação (2.87) da seguinte maneira:

$$\frac{1}{2}P_i = -n_j \cdot \int_{\Gamma} S_{ijk}u_k d\Gamma + n_j \cdot \int_{\Gamma} D_{ijk}P_k d\Gamma \quad (3.51)$$

desenvolvendo em  $j$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}P_i = & -\left(n_1 \int_{\Gamma} S_{i1k}u_k d\Gamma + n_2 \int_{\Gamma} S_{i2k}u_k d\Gamma\right) \\ & + \left(n_1 \int_{\Gamma} D_{i1k}P_k d\Gamma + n_2 \int_{\Gamma} D_{i2k}P_k d\Gamma\right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

discretizando:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}P_i = & -\left(n_1 \sum_{m=1}^{NE} \int_{\Gamma_m} S_{i1k}\phi_l d\Gamma u_k^l + n_2 \sum_{m=1}^{NE} \int_{\Gamma_m} S_{i2k}\phi_l d\Gamma u_k^l\right) \\ & + \left(n_1 \sum_{m=1}^{NE} \int_{\Gamma_m} D_{i1k}\phi_l d\Gamma P_k^l + n_2 \sum_{m=1}^{NE} \int_{\Gamma_m} D_{i2k}\phi_l d\Gamma P_k^l\right) \end{aligned} \quad (3.53)$$

por simplicidade nas equações, desenvolvemos somente o primeiro grupo da equação (3.53), para o segundo grupo fica parecido:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}P_i = & -\left[n_1 \left(\sum_{m=1}^{NE} \int_{\Gamma_m} S_{i1k}\phi_1 d\Gamma u_k^1 + \sum_{m=1}^{NE} \int_{\Gamma_m} S_{i1k}\phi_2 d\Gamma u_k^2\right)\right. \\ & \left.+ n_2 \left(\sum_{m=1}^{NE} \int_{\Gamma_m} S_{i2k}\phi_1 d\Gamma u_k^1 + \sum_{m=1}^{NE} \int_{\Gamma_m} S_{i2k}\phi_2 d\Gamma u_k^2\right)\right] + \dots \end{aligned} \quad (3.54)$$

Seja:

$$S_{ijk}^{lm} = \int_{\Gamma_m} S_{ijk}\phi_l d\Gamma \quad (3.55)$$

substituindo a equação (3.55) em (3.54):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}P_i = & - \left[ n_1 \left( \sum_{m=1}^{NE} S_{i1k}^{1m} u_k^1 + \sum_{m=1}^{NE} S_{i1k}^{2m} u_k^2 \right) \right. \\ & \left. + n_2 \left( \sum_{m=1}^{NE} S_{i2k}^{1m} u_k^1 + \sum_{m=1}^{NE} S_{i2k}^{2m} u_k^2 \right) \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.56)$$

desenvolvendo em  $k$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}P_i = & - \left[ n_1 \left( \sum_{m=1}^{NE} S_{i11}^{1m} u_1^1 + \sum_{m=1}^{NE} S_{i12}^{1m} u_2^1 \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{m=1}^{NE} S_{i11}^{2m} u_1^2 + \sum_{m=1}^{NE} S_{i12}^{2m} u_2^2 \right) \right. \\ & \left. + n_2 \left( \sum_{m=1}^{NE} S_{i21}^{1m} u_1^1 + \sum_{m=1}^{NE} S_{i22}^{1m} u_2^1 \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{m=1}^{NE} S_{i21}^{2m} u_1^2 + \sum_{m=1}^{NE} S_{i22}^{2m} u_2^2 \right) \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.57)$$

agrupando e pondo em evidência o deslocamento:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}P_i = & - \left[ \left( n_1 \sum_{m=1}^{NE} S_{i11}^{1m} + n_2 \sum_{m=1}^{NE} S_{i21}^{1m} \right) u_1^1 \right. \\ & \left. + \left( n_1 \sum_{m=1}^{NE} S_{i12}^{1m} + n_2 \sum_{m=1}^{NE} S_{i22}^{1m} \right) u_2^1 \right. \\ & \left. + \left( n_1 \sum_{m=1}^{NE} S_{i11}^{2m} + n_2 \sum_{m=1}^{NE} S_{i21}^{2m} \right) u_1^2 \right. \\ & \left. + \left( n_1 \sum_{m=1}^{NE} S_{i12}^{2m} + n_2 \sum_{m=1}^{NE} S_{i22}^{2m} \right) u_2^2 \right] \end{aligned} \quad (3.58)$$

desenvolvemos para  $NE = 1$ , o resto fica análogo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}P_1 = & - \left( (n_1 S_{111}^{11} + n_2 S_{121}^{11})u_1^1 + (n_1 S_{112}^{11} + n_2 S_{122}^{11})u_2^1 \right. \\ & \left. + (n_1 S_{111}^{21} + n_2 S_{121}^{21})u_1^2 + (n_1 S_{112}^{21} + n_2 S_{122}^{21})u_2^2 \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}P_2 = & - \left( (n_1 S_{211}^{11} + n_2 S_{221}^{11})u_1^1 + (n_1 S_{212}^{11} + n_2 S_{222}^{11})u_2^1 \right. \\ & \left. + (n_1 S_{211}^{21} + n_2 S_{221}^{21})u_1^2 + (n_1 S_{212}^{21} + n_2 S_{222}^{21})u_2^2 \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.60)$$

agrupando em forma matricial:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}P_1 \\ \frac{1}{2}P_2 \end{pmatrix} = & - \begin{pmatrix} n_1 S_{111}^{11} + n_2 S_{121}^{11} & n_1 S_{112}^{11} + n_2 S_{122}^{11} & n_1 S_{111}^{21} + n_2 S_{121}^{21} & n_1 S_{112}^{21} + n_2 S_{122}^{21} \\ n_1 S_{211}^{11} + n_2 S_{221}^{11} & n_1 S_{212}^{11} + n_2 S_{222}^{11} & n_1 S_{211}^{21} + n_2 S_{221}^{21} & n_1 S_{212}^{21} + n_2 S_{222}^{21} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} + \dots \end{aligned} \quad (3.61)$$

escrevendo em forma simplificada:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}P_1 \\ \frac{1}{2}P_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} s_{11}^1 & s_{12}^1 & s_{11}^2 & s_{12}^2 \\ s_{21}^1 & s_{22}^1 & s_{21}^2 & s_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} + \dots \quad (3.62)$$

A matriz de integração  $2 \times 4$ , do ponto fonte  $s$  ao elemento 1, na equação (3.62) denotamos por:

$$\tilde{H}(s, 1) = \begin{pmatrix} s_{11}^1 & s_{12}^1 & s_{11}^2 & s_{12}^2 \\ s_{21}^1 & s_{22}^1 & s_{21}^2 & s_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

Identicamente a matriz de integração  $2 \times 4$ , do ponto fonte  $s$  ao elemento 1, do segundo grupo da equação (3.53) vamos denotar como:

$$\tilde{G}(s, 1) = \begin{pmatrix} d_{11}^1 & d_{12}^1 & d_{11}^2 & d_{12}^2 \\ d_{21}^1 & d_{22}^1 & d_{21}^2 & d_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

em geral para todos os elementos:

$$\frac{1}{2}P_i = - \sum_{m=1}^{NE} \tilde{H}(s, m)U^m + \sum_{m=1}^{NE} \tilde{G}(s, m)P^m \quad (3.65)$$

agrupando

$$\sum_{m=1}^{NE} \tilde{H}(s, m)U^m = \sum_{m=1}^{NE} G(s, m)P^m \quad (3.66)$$

temos o sistema de equações

$$\tilde{H}U = GP \quad (3.67)$$

aplicando as condições de contorno:

$$AX = B \quad (3.68)$$

onde o vetor  $X$  é formado por forças de superfície e deslocamentos.

### 3.4 Solução Analítica das Integrais para a Equação de Forças de Superfície

As integrais nas matrizes  $\tilde{H}$  e  $\tilde{G}$ , dada pelas equações (3.63) e (3.64) respectivamente, foram calculadas, neste trabalho, analiticamente. Os dois tipos de integrais que aparecem na matriz  $\tilde{H}$  e  $\tilde{G}$  são:

$$S_{ijk}^{lm} = \int_{\Gamma_m} S_{ijk} \phi_l d\Gamma \quad \text{e} \quad D_{ijk}^{lm} = \int_{\Gamma_m} D_{ijk} \phi_l d\Gamma \quad (3.69)$$

onde  $l$  é igual a 1 ou 2 para denotar a função de forma a ser usada. Os valores que precisamos para montar a matriz  $\tilde{G}$ , podem ser resumidas na seguinte matriz:

$$D = \begin{pmatrix} D_{111}^{1m} & D_{112}^{1m} & D_{111}^{2m} & D_{112}^{2m} \\ D_{121}^{1m} & D_{122}^{1m} & D_{121}^{2m} & D_{122}^{2m} \\ D_{221}^{1m} & D_{222}^{1m} & D_{221}^{2m} & D_{222}^{2m} \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

Identicamente para  $\tilde{H}$ . Como ilustração calculamos a integral para  $D_{111}^{11}$  :

$$D_{111}^{11} = \int_{\Gamma_1} D_{111}(s, q) \phi_1 d\Gamma(q) \quad (3.71)$$

Substituindo os valores em (2.73) temos que:

$$D_{111} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ (1-2\nu)(r_{,1} + r_{,1} - r_{,1}) + 2r_{,1} r_{,1} r_{,1} \right] \quad (3.72)$$

seja:

$$M = [(1-2\nu)(r_{,1} + r_{,1} - r_{,1}) + 2r_{,1} r_{,1} r_{,1}] \quad (3.73)$$

então temos que:

$$D_{111}^{11} = \int_{\Gamma_1} \frac{M}{4\pi(1-\nu)r} \phi_1 d\Gamma \quad (3.74)$$

para o elemento  $\Gamma_1$ , suponhamos que tenha tamanho  $l$ , de nós 1 e 2 e ponto fonte  $s$  tal como mostra a figura (3.4):

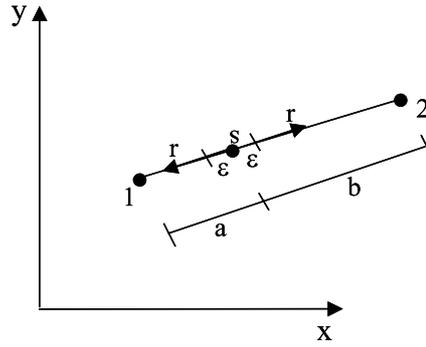


Figura 3.4: Ponto fonte no contorno

Dividimos o elemento  $\Gamma_1$  em dois segmentos. A distância de  $s$  ao nó 1 é  $a$ , e a distância de  $s$  ao nó 2 é  $b$ . A função de aproximação  $\phi_1$  para o lado esquerdo e direito respectivamente são dados por:

$$\phi_{1E} = \frac{b+r}{l} \quad \text{e} \quad \phi_{1D} = \frac{b-r}{l} \quad (3.75)$$

logo:

$$D_{111}^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^a D_{111} \phi_{1E} dr + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^b D_{111} \phi_{1D} (-dr) \quad (3.76)$$

$$D_{111}^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^a \frac{M}{4\pi(1-\nu)r} \left(\frac{b+r}{l}\right) dr + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^b \frac{M}{4\pi(1-\nu)r} \left(\frac{b-r}{l}\right) (-dr) \quad (3.77)$$

$$D_{111}^1 = \left(\frac{M}{4\pi(1-\nu)l}\right) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\epsilon}^a \left(\frac{b+r}{r}\right) dr - \int_{\epsilon}^b \left(\frac{b-r}{r}\right) dr \right) \quad (3.78)$$

$$D_{111}^1 = \left(\frac{M}{4\pi(1-\nu)l}\right) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( b \ln a + a - b \ln \epsilon - \epsilon - b \ln b + b + b \ln \epsilon - \epsilon \right) \quad (3.79)$$

$$D_{111}^1 = \frac{1}{4\pi(1-\nu)l} \left[ (1-2\nu)r_{,1} + 2r_{,1}r_{,1}r_{,1} \right] \left[ b(\ln a - \ln b + 1) + a \right] \quad (3.80)$$

### 3.5 Sistema de Equações Algébricas para Fratura Elástica Linear

Para modelagem da fratura elástica linear pode-se usar apenas o sistema linear de equações de deslocamento (3.6) ou apenas as equações de força de superfície (3.56), para  $\delta \neq 0$  (suficientemente pequeno), para evitar a singularidade. Ver figura (3.6).

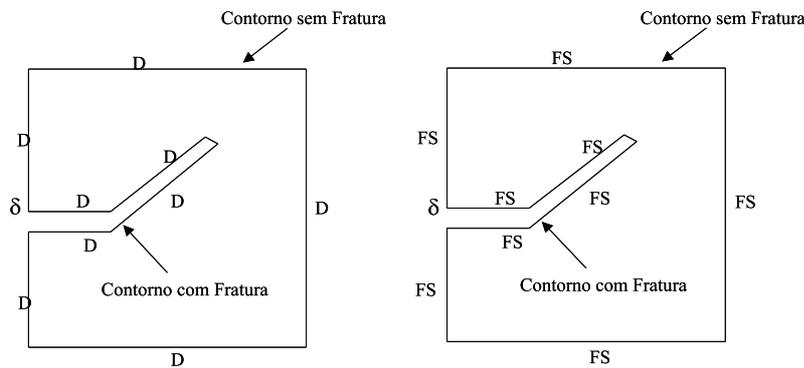


Figura 3.5: Chapa com Trinca

No caso de  $\delta = 0$ , pode-se usar as duas equações (3.11) e (3.67) para nós opostos da fratura levando, portanto ao método dos elementos de contorno dual usualmente empregado na análise da fratura, ver figura (3.6).

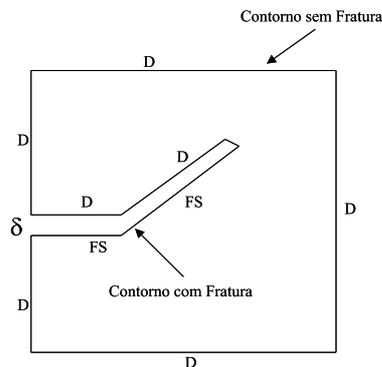


Figura 3.6: Chapa com Trinca-Método Dual

O sistema de equações para modelagem de fratura elástica linear para os dois

casos:  $\delta \neq 0$  e  $\delta = 0$ , pode-se representar da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} [H]_{CC} & [H]_{CF} \\ [H]_{FC} & [H]_{FF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{U\}_F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_{CC} & [G]_{CF} \\ [G]_{FC} & [G]_{FF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\} \\ \{P\}_F \end{Bmatrix} \quad (3.81)$$

os sub-índices das sub-matrizes em (3.81) denotam:

$F$ : trinca

$CC$ : integração do contorno no contorno;

$CF$ : integração do contorno na trinca;

$FC$ : integração da trinca no contorno;

$FF$ : integração da trinca na trinca;

$\{P\}_F = 0$

A seguir apresentam-se algumas técnicas que constam na literatura para modelagem de fratura elástica linear.

### 3.5.1 Método Função de Grenn

Uma forma especial da solução fundamental, baseado nas funções de Green para problemas de fratura, é usado por Snyder e Cruse [67]. Modelar fratura não é mais necessário, já que a solução fundamental tem a forma exata para fratura. A desvantagem é que a exatidão deste método está limitado só para o caso bidimensional.

### 3.5.2 Método de Descontinuidade de Deslocamento

Neste método o par de pontos que coincidem sobre a superfície da trinca é substituído por um único ponto fonte. Embora seja relativamente melhor, novas variáveis são introduzidas sobre as integrais de contorno. Ver os trabalhos de Crouch [15].

### 3.5.3 Método de Sub-Região

Este método é implementado introduzindo um contorno artificial no domínio, de tal maneira que permita conectar a trinca e o contorno. O novo domínio ficara dividido em sub-regiões sem trinca. Ver os trabalhos de Blandford et al. [8]. Este método envolve uma formulação por multi-regiões, a qual pode ser desenvolvida desde o método dos elementos de contorno. Para que o problema fique completamente determinado é necessário que se aplique as condições de equilíbrio de forças e compatibilidade de deslocamentos na interface. A principal desvantagem está na implementação para um procedimento automático, posto que o contorno artificial precisa ser introduzido repetidamente a cada incremento da extensão da trinca.

### 3.5.4 Método dos Elementos de Contorno Dual

As equações integrais de contorno, de deslocamento e forças de superfície, constituem as equações duais para o método dual dos elementos de contorno. Ver os trabalhos de Portela, Aliabadi e Rooke [55]. Este método supera a dificuldade de modelar a fratura quando dois pontos fontes coincidem no mesmo caminho de integração, neste caso, são aplicadas as equações de deslocamento (2.63), para pontos fontes sobre uma das superfícies da trinca, e a equação de forças de superfície (2.87) é aplicada na outra superfície da trinca.

Nos exemplos apresentados neste trabalho, para a modelagem da fratura elástica linear, o método Dual dos Elementos de Contorno é o adotado. Na descontinuidade usa-se nó duplo.

## Capítulo 4

# Mecânica da Fratura Elástica Linear

Primeiramente neste capítulo são apresentados os conceitos básicos da mecânica da fratura elástica linear em duas dimensões.

Posteriormente são mostrados dois dos diferentes métodos de extração dos fatores de intensidade de tensão, o método de Correlação de Deslocamentos e a Integral-J. Um terceiro método, proposto por Maciel [43], é apresentado no final do capítulo.

Neste trabalho optou-se pela técnica de Correlação de Deslocamentos para a extração dos fatores de intensidade de tensão. Um segundo método, proposto por Maciel, é implementado para efeito de comparação. No cálculo dos ângulos de propagação foi usado o critério da máxima tensão principal. O tamanho do elemento é efetuado por meio de um procedimento que minimiza o erro

No desenvolvimento deste capítulo foram consultados os seguintes trabalhos: N. Salgado [65], D. Broek [10], A. Portela [56].

### 4.1 Mecânica da Fratura

Entende-se por fratura a superfície resultante da propagação instável de uma trinca. Este processo de propagação denomina-se fraturamento.

À formação da trinca é o resultado do processo evolutivo de micro-fissuração que é chamada de danificação. Essencialmente, a Mecânica da Fratura ignora a

danificação prévia à formação da trinca e estuda as condições sob as quais a trinca pode tornar-se instável e conduzir à ruptura.

### 4.1.1 Propagação da trinca baseado no critério Energético de Griffith

O balanço de energia serve de base na formulação de um critério para a propagação de trinca. Segundo Griffith, a condição necessária para a propagação da trinca é que o sistema possa disponibilizar a quantidade de energia a ser despendida para o aumento de sua superfície atual, Broek [10]. Num processo puramente mecânico, em um determinado instante e a temperatura constante, as formas de energia que intervêm no fenômeno são:

- Energia potencial das cargas externas:  $W(t)$ ;
- Energia cinética:  $K(t)$ ;
- Energia de deformação elástica do sólido:  $U(t)$ ;
- Energia requerida para formar uma superfície  $S$  de fratura  $\Gamma(t)$ ;

Supondo que num certo instante prevaleça uma condição de propagação da trinca, entre as taxas das formas de energia envolvidas deve valer a seguinte relação:

$$\dot{W} = \dot{U} + \dot{K} + \dot{\Gamma} \quad (4.1)$$

Como a taxa de cada parcela de energia, durante a propagação, é decorrente da variação da superfície da trinca temos:

$$\dot{W} = \frac{dW}{dS} \frac{dS}{dt}$$

logo a relação (4.1) pode-se escrever como:

$$\frac{dW}{dS} = \frac{dU}{dS} + \frac{dK}{dS} + \frac{d\Gamma}{dS} \quad (4.2)$$

Para o caso plano em que a trinca inicialmente tem comprimento  $2a$  e espessura  $b = cte.$ , temos que:  $dS = 2bda$ . Logo (4.2) pode-se escrever como:

$$\frac{dW}{da} = \frac{dU}{da} + \frac{dK}{da} + \frac{d\Gamma}{da} \quad (4.3)$$

Ocorrendo a propagação da trinca, a variação da energia cinética é positiva, logo temos:

$$\frac{dW}{da} - \frac{dU}{da} - \frac{d\Gamma}{da} \geq 0 \quad (4.4)$$

ou

$$\frac{d(W - U)}{da} \geq \frac{d\Gamma}{da} \quad (4.5)$$

Assim um critério para caracterizar a propagação da trinca estabelece que quando o primeiro membro de (4.5) (energia de deformação dissipada no volume do corpo) é igual ao segundo (energia superficial criada para formar duas novas faces da fratura) não existe propagação; caso seja maior ocorre propagação.

A variação de energia globalmente disponibilizada pelo sistema para promover um crescimento unitário da trinca é definido por:

$$G = \frac{d(W - U)}{da} \quad (4.6)$$

Por outro lado, a variação de energia que a trinca exige para apresentar um crescimento unitário é definido por:

$$R = \frac{d\Gamma}{da} \quad (4.7)$$

### 4.1.2 Propagação da trinca baseado na aproximação por Campo de Tensões

Considere-se uma chapa num meio infinito de comportamento elástico, contendo uma trinca com ponta aguda, nas proximidades da qual pretende-se determinar as distribuições de deslocamentos, tensões e deformações para uma determinada sollicitação.

Irwin [31] em 1957 estudou o problema de campo de tensões ao redor de uma ponta da trinca, usando a teoria da elasticidade linear, e obteve soluções para as distribuições de tensões na ponta da trinca. Primeiramente considere-se uma chapa arbitrária, com carregamento arbitrário, contendo uma trinca de tamanho arbitrário tal como mostra a figura (4.1):

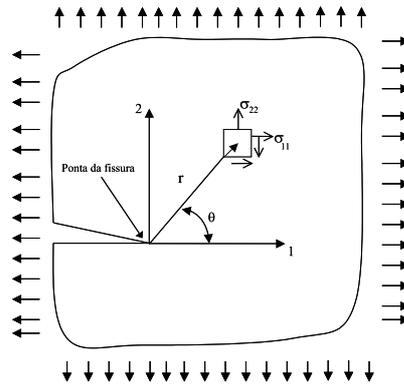


Figura 4.1: Campo de Tensão perto da Ponta da Trinca

As soluções para as distribuições de tensões na ponta da trinca, são dadas como uma expansão em series na forma:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(r, \theta) + \text{outros termos} \quad i, j = 1, 2 \quad (4.8)$$

Em (4.8),  $\sigma_{ij}$  são as tensões a uma distância  $r$  da ponta da trinca a um ângulo  $\theta$  com relação ao eixo 1 (figura 4.1), e  $f_{ij}$  são funções trigonométricas conhecidas.

Como a distância  $r$  se aproxima de zero, o segundo termo da equação (4.8) (lado direito) não influencia, podendo ser negligenciada. A constante  $K$  é conhecida como Fator de Intensidade de Tensão.

Em essência o fator de intensidade de tensão é usado em mecânica da fratura para quantificar a magnitude da tensão ao redor da ponta da trinca, dependendo do tamanho da trinca, tipo de carregamento, geometria da estrutura, etc.

Em mecânica da Fratura Elástica Linear, o comportamento da trinca é determinado unicamente pelo fator de intensidade de tensão. Portanto é mais comum

usar os valores críticos  $K$  (equação 4.8), ao invés de  $G$  (equação 4.6), para caracterizar a resistência do material à fratura. Logo um critério de fraturamento, baseado no fator de intensidade de tensão, pode ser dado como:

$$K \geq K_C \quad (4.9)$$

onde  $K_C$  é um valor crítico, o qual depende do material, carregamento, geometria, etc. Em resumo dizemos que a fratura ocorrerá, quando o fator de intensidade de tensão  $K$ , alcança o valor crítico  $K_C$ .

### Modos de deformação

Para caracterizar os critérios para propagação da trinca, definem-se por conveniência, três modos cinematicamente independentes de movimento da superfície do defeito. A figura (4.2) apresenta os três modos básicos de deformação:

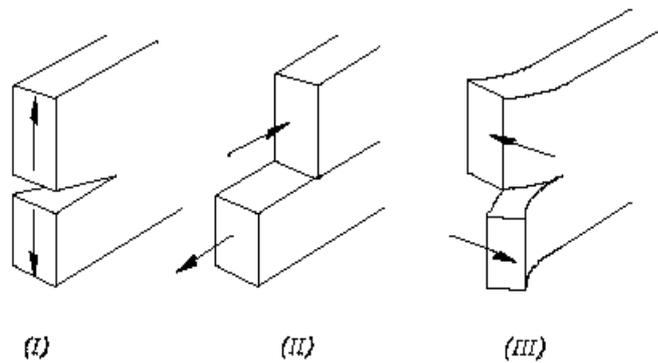


Figura 4.2: Modos de Fratura

- O modo I ou de abertura, corresponde ao movimento de abertura da trinca em direção perpendicular ao seu plano, por efeito de tensões de tração nessa direção;

- O modo II ou de escorregamento, corresponde ao escorregamento relativo entre as faces da trinca por efeito de cisalhamento na direção paralela à do defeito;
- O modo III ou de rasgamento, corresponde ao rasgamento relativo entre as faces da trinca por efeito de cisalhamento na direção transversal à do defeito.

O fator de intensidade de tensão pode ser decomposto sobre componentes que estão relacionadas aos três modos básicos de deformação. A notação para o fator de intensidade de tensão geralmente inclui um sub-índice, que denota o modo de deformação ao qual esta associado. Por exemplo,  $K_I$  é o fator de intensidade de tensão associado com o modo de deformação I.

Um estado de deformação que apresente mais de um modo de deformação é chamada de modo misturado.

Com a determinação dos valores  $K$  referentes a cada modo de deformação,  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ , figura (4.2), em um material elástico linear, definem-se os campos que regem o comportamento das tensões e deslocamentos na região próxima à ponta da trinca. Os valores  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ , também são utilizados na determinação da direção e velocidade com que a trinca se propaga.

### Campos de Tensão

Na teoria da fratura elástica linear o comportamento da trinca é determinado unicamente pelo fator de intensidade de tensão.

Consideraremos só o primeiro termo da expansão da serie (4.8), já que o primeiro termo da equação (4.8) domina quando  $r$  se aproxima de zero, portanto os outros termos podem ser negligenciados. Segundo Irwin [30], as tensões na ponta da trinca podem ser dadas por:

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) \quad (4.10)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \quad (4.11)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) \quad (4.12)$$

e as componentes do campo de deslocamentos associados são dados por:

$$u = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{1}{2} [\kappa - 1] + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (4.13)$$

$$+ \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{1}{2} [\kappa + 1] + \cos^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

$$v = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{1}{2} [\kappa - 1] - \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (4.14)$$

$$+ \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{1}{2} [1 - \kappa] - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

onde  $G$  é o módulo de cisalhamento ou módulo de elasticidade transversal, definido por:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.15)$$

sendo  $\nu$  o coeficiente de Poisson,  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young.

Para o estado plano de deformação temos que:

$$\kappa = 3 - 4\nu \quad (4.16)$$

e no estado plano de tensão:

$$\kappa = \frac{3 - 4\nu}{1 + \nu} \quad (4.17)$$

### 4.1.3 Cálculo do fator de intensidade de tensão

Existem vários procedimentos que foram desenvolvidos para obter os fatores de intensidade de tensão. Encontram-se, particularmente, muitos dos diferentes métodos em [53] e [54]. No presente trabalho é implementada a técnica de Correlação de Deslocamentos, que veremos a seguir na seguinte sub-sessão.

#### Técnica de Correlação de Deslocamentos

Considere-se uma chapa tracionada contendo uma pequena trinca e dois pontos  $a$  e  $b$  localizados a uma mesma distância da ponta da trinca, mas em superfícies opostas tal como mostra a figura (4.3).

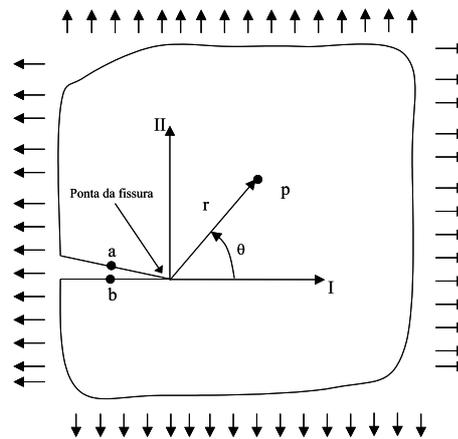


Figura 4.3: Campo de deslocamento ao redor da ponta da trinca

A posição de qualquer ponto no sistema de coordenadas  $(x, y)$ , em particular dos pontos  $a$  e  $b$ , pode ser calculada no sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$ .

Vamos denotar o deslocamento no ponto  $a$ , como  $(u_1, v_1)$  e o deslocamento no ponto  $b$  como  $(u_2, v_2)$ .

Para achar os fatores de intensidade de tensão  $K_I$  e  $K_{II}$ , pela técnica de correlação de deslocamentos, calculamos a diferença dos deslocamentos entre os pontos  $a$  e  $b$ , usando as equações (4.13) e (4.14) para  $\theta = \pi$ , figura (4.4)

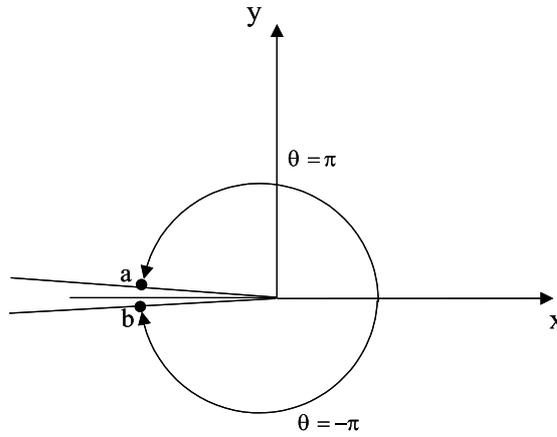


Figura 4.4:

$$\Delta u = u_1(r, \pi) - u_2(r, -\pi) \quad (4.18)$$

$$\Delta v = v_1(r, \pi) - v_2(r, -\pi) \quad (4.19)$$

No eixo  $x$  temos as seguintes componentes:

$$u_1(r, \pi) = \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [\kappa + 1]$$

$$u_2(r, -\pi) = -\frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [\kappa + 1]$$

substituindo as componentes  $u_1$  e  $u_2$  na equação (4.18) temos:

$$\Delta u = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [\kappa + 1]$$

Dessa forma:

$$K_{II} = \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \frac{G}{(\kappa + 1)} \Delta u \quad (4.20)$$

No eixo  $y$  temos as seguintes componentes:

$$v_1(r, \pi) = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [\kappa + 1]$$

$$v_2(r, -\pi) = -\frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [\kappa + 1]$$

substituindo as componentes  $v_1$  e  $v_2$  na equação (4.19) temos:

$$\Delta v = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [\kappa + 1]$$

Dessa forma:

$$K_I = \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \frac{G}{(\kappa + 1)} \Delta v \quad (4.21)$$

### Integral-J

Uma outra técnica, para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão, é a Integral-J.

Dada uma chapa em estado de equilíbrio, sujeita a ação de forças de superfície  $t_j$ , e de deslocamento  $u_j$ , como ilustra a figura (4.5).

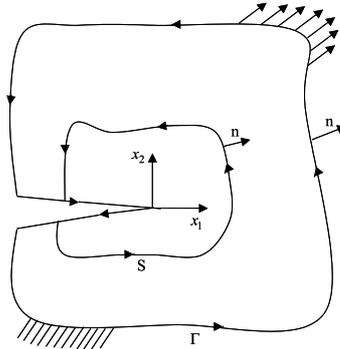


Figura 4.5:

A integral-J desenvolvida por Rice [59] para o problema plano elástico foi definida como:

$$J = \int_S (W n_1 - t_j u_{j,1}) dS \quad (4.22)$$

sendo:

- $W$ : Energia de deformação.
- $u_j$ : deslocamento no contorno.

- $t_j$ : forças de superfície.
- $\Gamma$ : contorno.
- $S$ : contorno perto da trinca, orientada em sentido antihorario.

Foi provado que a Integral-J possui o mesmo valor para todos os caminhos que envolvem a região próxima à ponta da trinca e fornece o valor da taxa de energia disponibilizada para a propagação da trinca.

Mostrou-se que, para materiais elásticos lineares, a taxa de energia  $G$ , o fator de intensidade  $K$  e a Integral-J, estão relacionados da seguinte maneira:

$$G = J = \frac{K^2}{E} \quad (4.23)$$

Para problemas de modos mistos é necessário desacoplar  $K$  sobre suas componentes

$$K^2 = K_I^2 + K_{II}^2 \quad (4.24)$$

Ishikawa et al. [32] desacoplaram a Integral-J como:

$$J^m = \int_S (W^m n_1 - t_j^m u_{j,1}^m) dS \quad m = I, II \quad (4.25)$$

Uma vez desacoplada a Integral-J, os fatores de intensidade de tensão podem ser obtidos da seguinte maneira:

$$J^I = \frac{K_I^2}{E}, \quad J^{II} = \frac{K_{II}^2}{E}. \quad (4.26)$$

#### 4.1.4 Ângulo de Propagação da Trinca

Existem vários critérios para estabelecer a direção de propagação da trinca. Dentro deles temos o critério da Máxima Tensão Circunferencial, desenvolvido por Erdogan e Sih [18] e o critério da taxa de Liberação de Energia, desenvolvido por Hussain et al. [28]. Foi demonstrado por Nuismer [47] que os dois critérios são equivalentes.

O critério da Máxima Tensão Circunferencial proposto por [18], define que a trinca irá crescer perpendicularmente a direção de atuação da máxima tensão circunferencial presente na extremidade da trinca.

Para a determinação da formulação para o cálculo do ângulo de propagação é necessária, inicialmente, a obtenção das relações que exprimem o estado de tensão na região próxima a extremidade da trinca. Considere o campo de tensões perto da ponta da trinca, em condições tal como mostra a figura (4.1). As equações do campo de tensões, perto da ponta da trinca, (4.10), (4.11), (4.12), podem ser rotacionadas e expressas no sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$  como:

Tensão circunferencial

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[ K_I \cos \frac{\theta}{2} - 3K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \right] \quad (4.27)$$

Tensão cisalhante

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \sin \theta + K_{II}(3 \cos \theta - 1) \right] \quad (4.28)$$

Sendo a direção principal, a direção na qual as tensões cisalhantes são nulas, temos que:

$$\sigma_{r\theta} = 0 \quad (4.29)$$

Por meio dessa condição e da equação (4.28) tem-se que:

$$K_I \sin \theta + K_{II}(3 \cos \theta - 1) = 0 \quad (4.30)$$

finalmente pela equação (4.30) o ângulo de propagação é dado como:

$$\theta_t = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right] \quad (4.31)$$

sendo

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_t \leq \frac{\pi}{2} . \quad (4.32)$$

Neste trabalho para o cálculo do fator de intensidade de tensão foram usadas duas técnicas: o método de correlação de deslocamento, e o método de Maciel [43]. Os dois métodos foram usados como uma maneira de comparar os valores calculados por ambos.

No método de [43] as tensões são calculadas em três pontos internos distantes da extremidade da trinca a  $1/8$ ,  $1/7$ ,  $1/6$  de  $a$ , denominados *pontos de extração*, tal como ilustra a figura (4.6).

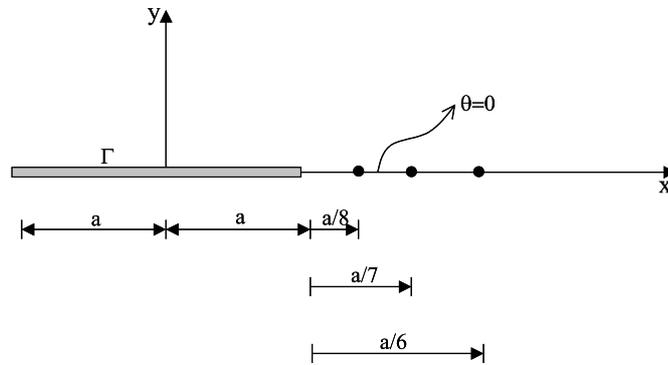


Figura 4.6: Posição dos pontos internos em relação a trinca

Sendo  $\theta = 0$ , as equações dos campos de tensão (4.10), (4.11), (4.12) ficam como:

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (4.33)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (4.34)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (4.35)$$

portanto podemos concluir que:

$$K_I = \sigma_{11}\sqrt{2\pi r} \quad (4.36)$$

$$K_{II} = -\sigma_{12}\sqrt{2\pi r} \quad (4.37)$$

Uma vez calculado o campo de tensões, são determinados os fatores de intensidade de tensão para os três pontos a  $1/8$ ,  $1/7$ ,  $1/6$  de  $a$ , pela seguinte media aritmética, usando as equações (4.36) e (4.37):

$$(K_I)_{final} = \frac{(K_I)_{\frac{1}{8}a} + (K_I)_{\frac{1}{7}a} + (K_I)_{\frac{1}{6}a}}{3} \quad (4.38)$$

$$(K_{II})_{final} = \frac{(K_{II})_{\frac{1}{8}a} + (K_{II})_{\frac{1}{7}a} + (K_{II})_{\frac{1}{6}a}}{3} \quad (4.39)$$

Para o cálculo dos ângulos de propagação foi adotado o critério da máxima tensão principal, usando as equações (4.31) e (4.32).

### Metodologia para crescimento das trincas

Para o tamanho do elemento de propagação da trinca, foi proposto um critério de comparação, que pode-se explicar da seguinte maneira: uma vez calculado o ângulo de propagação  $\theta_{i+1}$  para o elemento inicial  $L_{i+1}$ , e o ângulo de propagação  $\theta_i$  para a metade do elemento inicial, isto é,  $L_i = \frac{L_{i+1}}{2}$ , são comparados os ângulos de propagação  $|\theta_{i+1} - \theta_i|$ , se a diferença fosse menor que uma tolerância, então o tamanho a ser propagado é  $L_{i+1}$ , caso contrario, considera-se como elemento inicial o tamanho  $L_i$ , e se repete o processo.

## Capítulo 5

# Formulação Proposta para Análise de Erro no MEC

Neste capítulo primeiramente se faz uma breve revisão da teoria do erro, mostrando-se algumas das técnicas de refinamento adaptativo. Posteriormente o erro a ser considerado foi estimado a partir de normas onde se consideraram: a variação aproximada dos deslocamentos, a variação das forças de superfície e a variação da energia de deformação do sistema, calculada com a sua integração sobre o contorno.

No desenvolvimento deste capítulo foram consultados os seguintes trabalhos: J. C. Miranda-Valenzuela e Muci-Küchler [44], P. G. Sampaio Viola Parreira [66], R. B. Willmersdorf [74].

### 5.1 Técnicas de Refinamento Adaptativo

A aplicação de uma discretização na equação Somigliana (2.63), conduz a um sistema linear de equações algébricas, cuja solução é a solução aproximada do problema. Um dos problemas fundamentais do Método dos Elementos de Contorno, como qualquer técnica numérica, é de assegurar que a solução aproximada convirja para a solução exata.

A solução aproximada apresenta diferentes tipos de erro e podem-se dividir em:

- Erros de aproximação da fronteira
- Erros Numéricos
- Erros de Interpolação

Os erros de aproximação da fronteira acontecem sempre que esta apresenta uma geometria irregular. Este tipo de erro pode ser minorado fazendo uma discretização mais refinada onde a geometria é irregular, utilizando um processo de interpolação da própria geometria.

Definindo-se uma aproximação para a geometria da nova fronteira, a solução pode ser sempre analisada em relação ao novo problema, definido sobre esta nova geometria.

Os erros numéricos são devido aos erros de truncamento e de arredondamento, que ocorrem nas diferentes operações aritméticas de precisão finita em computador, como no cálculo numérico das integrais, necessários para formar os sistemas de equações. Este tipo de erro pode ser minorado utilizando variáveis de dupla precisão e recorrendo a processos de integração mais sofisticados.

Neste trabalho o cálculo das integrais foi desenvolvido analiticamente, para minorar este tipo de erro, porém não eliminado, seguindo as idéias desenvolvidas por Foltran [19].

Os erros de interpolação são próprios ao processo de discretização utilizado e depende do grau de aproximação dos campos do contorno. No método dos Elementos de Contorno a discretização é dada em elementos (elementos de contorno) e nós. Para minorar o erro, deverão ser utilizados sistemas com maior número de graus de liberdade e o grau de aproximação dos campos deverá ser cada vez maior.

Uma boa resposta na solução do sistema linear de equações, depende da forma como o contorno é discretizado. Portanto o tipo de elementos usado na malha, seu número e sua distribuição são parâmetros muito importantes que vão determinar a qualidade da solução.

Foi observado que melhores resultados são obtidos, quando os elementos de contorno são concentrados em áreas onde a geometria muda rapidamente ou onde

espera-se que a solução mostre fortes variações. Para obter soluções numéricas confiáveis os estudos voltaram-se na direção de achar metodologias capazes de executar esta tarefa automaticamente.

Inicia-se o problema a partir de uma malha grossa e, sistematicamente refina-se a discretização de uma forma iterativa de acordo com algum critério. Essa metodologia é conhecida como técnica de malha adaptativa, que são procedimentos que melhoram iterativamente a malha, de um problema dado, de uma maneira automática, até que a solução para o problema esteja abaixo de um erro prescrito.

A técnica de malha adaptativa pode ser dividida em:

1. Indicador de erro
2. Estimador de erro
3. Estratégia adaptativa

### 5.1.1 Indicador de erro

O indicador de erro é uma medida de erro local, que me diz onde é que o refino da malha é mais eficaz, isto é, os elementos são refinados quando seus erros são altos com respeito a um valor de referência prescrito.

Por exemplo, seja  $\lambda_i$  o erro no elemento  $i$ , o valor de referência  $\bar{\lambda}$  pode ser definido como a média de todos os erros na malha.

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{NE} \lambda_i}{NE}$$

onde  $NE$  é o número de elementos da malha.

Ou também pode-se definir como:

$$\bar{\lambda} = \eta \max\{\lambda_i : 1 \leq i \leq NE\}; \quad 0 < \eta < 1. \quad (5.1)$$

Para simplificar o processo de decisão, pode ser também útil normalizar os valores do indicador de erro da malha:

$$\hat{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\max\{\lambda_i : 1 \leq i \leq NE\}}. \quad (5.2)$$

O indicador de erro apresenta dois principais casos gerais que podem ser considerados. No primeiro caso, o indicador de erro depende de uma quantidade, e no segundo, depende de duas quantidades diferentes.

Enquanto o indicador de erro, formulado exatamente em termos de uma quantidade, pode ser comparado diretamente, indicadores de erro dados em termos de quantidades diferentes não podem. Neste último caso, duas possíveis soluções existem, em uma compara-se o indicador de erro de quantidades diferentes separadamente e na outra unificam-se ambas as classes de indicadores de erro, assim elas podem ser comparadas diretamente. Este método pode ser visto em Kamiya and Kawaguchi [33] [34].

No problema elástico, o indicador de erro pode ser formulado em termos de deslocamento ou de força.

A seguir, damos um critério de seleção para problemas em que o indicador de erro depende de uma quantidade e de duas quantidades diferentes.

### **Indicador de erro calculado em termos de uma quantidade**

Em modelos com múltiplas regiões, um cuidado especial terá que ser tomado nas interfaces, devido a que os valores dos indicadores de erro são diferentes de uma sub-região para outra, já que as propriedades materiais podem ser diferentes.

Quatro casos serão mostrados de forma geral:

1. Um único valor para o indicador de erro é disponível no elemento.
2. O elemento tem dois valores para o indicador de erro um para cada sub-região. O valor maior é tomado para representar o elemento.
3. O valor de referência pode ser relativo. Neste caso o valor do indicador de erro no elemento deve ser normalizado, usando o valor máximo para o indicador de erro na sub-região a qual pertence.
4. O valor de referência é relativo e o elemento está sobre a interface. Neste caso o elemento tem dois valores para o indicador de erro, uma para cada sub-região.

Cada valor do indicador de erro deve ser normalizado usando o valor máximo do indicador de erro correspondente ao elemento na sub-região para o qual o indicador de erro é considerado. O valor normalizado maior é tomado como representante para o elemento.

### **Indicador de erro calculado em termos de duas quantidades**

A modo de ilustração considere-se o problema de condução de calor (temperatura e fluxo), que apresenta algumas dificuldades de como se calcular os indicadores de erro em termo de duas quantidades diferentes, que não podem ser comparadas diretamente. Defina-se como  $\lambda_T$  o indicador de erro baseado em temperatura e  $\lambda_q$  o indicador de erro baseado em fluxo.

Quatro casos serão mostrados de forma geral:

1. Existe um único valor a ser considerado  $\lambda_T$  ou  $\lambda_q$  dependendo das condições de contorno impostas sobre o elemento.
2. Dois valores são disponíveis  $\lambda_T$  e  $\lambda_q$ . Ambos os erros são comparados com seus correspondentes valores de referência. O valor relativo maior será tomado como representante para o elemento.
3. O erro a ser considerado pode ser  $\lambda_T$  ou  $\lambda_q$  dependendo das condições de contorno impostas sobre o elemento. O indicador de erro que foi eleito deverá ser normalizado usando o valor máximo do indicador de erro na sub-região a qual o elemento pertence. Uma vez normalizada ela pode ser usada como representante do elemento.
4. Quatro valores para o indicador de erro estão disponíveis:  $\lambda_{T_1}$ ,  $\lambda_{T_2}$ ,  $\lambda_{q_1}$ ,  $\lambda_{q_2}$  onde os índices indicam que o indicador de erro pertence a diferentes sub-regiões. Embora as condições de equilíbrio e continuidade na interface resultem em  $\lambda_{T_1} = \lambda_{T_2}$ ,  $\lambda_{q_1} = \lambda_{q_2}$ , cada valor precisa ser normalizado independentemente. Pode-se fazer a normalização usando o valor máximo do indicador de erro para a mesma quantidade da região a qual o erro pertence. Uma vez

normalizado, os quatro valores são comparados e o maior valor é tomado como representante para o elemento.

### 5.1.2 Estimador de erro

O estimador de erro fornece através do indicador de erro, uma medida de erro global, definindo até quando o refino da malha é necessário.

### 5.1.3 Estratégia Adaptativa

Na decisão de quais elementos precisa-se melhorar, está baseada o valor do indicador de erro. Ele indica o nível de erro que cada elemento exibe e quando é necessária a melhora (refino) da discretização, isto é, comparando o valor do indicador de erro com um valor de referência.

Pode-se considerar o seguinte esquema para decidir quando refinar os elementos:

1. Melhorar todos os elementos cujo valor para o indicador de erro  $\lambda_i$  é maior que o estimador de erro.
2. Comparar o valor de referência do indicador de erro  $\hat{\lambda}_i$ , com uma constante  $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$  e melhorar todos os elementos cujo valor de  $\hat{\lambda}_i$  é maior que  $\alpha$ .
3. Comparar o valor de  $\lambda_i$  com o valor de referência e melhorar todos os elementos em que o indicador de erro é maior que o valor de referência.

Uma vez que for escolhido o critério de quais elementos precisam ser modificados, conseqüentemente pode-se ver, como esses elementos podem ser modificados para melhorar a malha. Em geral existem três métodos básicos para melhorar a malha:

#### Método do tipo $r$

O método  $r$  ou método de redistribuição consiste em manter ambos, o número total de elementos e a ordem da função de interpolação invariante mas os pontos da malha

são redistribuídos.

Carey e Oden [12] apresentaram uma avaliação global do método  $r$  para elementos finitos. Mais tarde muitas destas idéias foram aplicadas para o MEC. Ingber e Mitra [29] implementaram o método  $r$  no MEC para problemas representados pela equação de Laplace e a equação biarmônica para duas dimensões. Carey e Kenon introduziram o uso da função gradiente no MEC, para determinar a localização ótima dos elementos. Esta aproximação foi aplicada com sucesso para problemas de potencial bidimensional. Eles observaram que a redistribuição dos elementos, melhora a exatidão da solução, mas pode ter efeitos prejudiciais sobre a geometria quando é usado elementos isoparamétricos. A principal desvantagem sobre este método de redistribuição, é que a menos que a malha original tenha um número suficiente de graus de liberdade, a solução melhorada pode ainda ser inaceitável.

### Método do tipo $p$

O método  $p$  ou método de enriquecimento, consiste em aumentar a ordem do polinômio de aproximação nos elementos que precisam ser melhorados, mantendo o número de elementos constante. O aumento da ordem da função de interpolação, pode ser dada usando a função de interpolação padrão ou usando a função de interpolação hierárquica.

O método  $p$  tem sido amplamente usado no método dos elementos finitos (MEF) desde os trabalhos de Peano [52]. No MEC, este método foi primeiramente implementado por Alarcon e Reverter [1] para o problema de potencial bidimensional. Um ano mais tarde, Cerrolaza e Alarcon [13] estenderam este trabalho inicial para o caso tridimensional.

Umetami [75] e Parreira [57] desenvolveram o  $p$ -hierárquico para o método de Galerkin no MEC no caso do problema elástico bidimensional.

Zhan e Yokoyama [83] e [79] implementaram um método  $p$ , no qual duas soluções diferentes são usadas para prever a ordem da aproximação polinomial necessárias em cada elemento para conseguir uma solução consistente. Estes procedimentos podem ser vistos como complementares ao método  $p$  dos trabalhos de Rencis e Mullen

[62], [63].

Embora o método  $p$  ofereça uma maior taxa de convergência que o método  $h$  como é provado por Stephan e Suri [68] para o MEC baseado no Galerkin, ele tem a desvantagem de não ser útil em problemas com altas singularidades, ao menos que seja combinado com outras técnicas

### Método do tipo $h$

No método  $h$  ou método de refinamento, a malha é refinada subdividindo os elementos candidatos a ser melhorados, mantendo constante a ordem do polinômio de aproximação do elemento. Resultando numa malha com uma concentração de pequenos elementos nos trechos com maior erro.

A primeira implementação do método  $h$  no MEC, para o problema de potencial usando o método de Galerkin, aproximando por elementos constantes, foi feita por Rank [60].

Rencis e Mullen [62] [63] implementaram o método  $h$  para o problema elástico e para o problema do potencial, usando um indicador de erro que desse o número de subdivisões necessárias para obter a exatidão esperada.

Rencis e Jong [64] estenderam o conceito de Zienkiewics e Zhu [84] para desenvolver o erro predito para o método de colocação no MEC, para problemas governados pela equação de Laplace.

Crook e Smith [14] estenderam o método  $h$  para problemas elásticos em três dimensões usando elementos contínuos e descontínuos.

Além desses métodos pode se ter às combinações dos métodos  $hp$ ,  $hr$ . Guo e Babuška [25], [25] provaram para o MEF que o método  $hp$  converge exponencialmente mesmo na presença de singularidades na solução exata.

Babuška e Rank [4] implementaram um sistema onde a convergência foi provada. Rank [61] ampliou essas idéias para o método de colocação no MEC e apresentou o método  $hp$  aplicado para o problema de potencial em duas dimensões.

Postell e Stephan implementaram o método  $hp$  para o MEC baseado no Galerkin para problemas do potencial.

O método *hr* foi primeiramente implementado no MEC por Sun e Zamani [69] quem usou a função gradiente conjugado para prever a distribuição dos elementos na malha. Esta mesma aproximação foi ampliada pelo mesmo autor para o problema elástico [70].

Yuuki et al. [81] também implementaram o método *hr* para o problema elástico usando a função de densidade de malha para redistribuir os elementos sobre a malha.

### **Critério de parada**

Em geral uma das seguintes opções pode ser usada:

1. Especificar um valor máximo para o estimador de erro na malha. Se para qualquer malha o estimador de erro é menor que um valor especificado pelo usuário o processo adaptativo é finalizado. Embora este critério seja útil quando o usuário esteja interessado em exatidão global, é necessário levar em conta que pequenos valores do estimador de erro podem ocultar um ou mais elementos com erro grande.
2. Especificar um valor absoluto máximo do indicador de erro para os elementos na malha. Se para qualquer malha, o indicador de erro em cada um dos elementos é menor que um especificado pelo usuário, o processo adaptativo é finalizado.
3. Especificar um valor máximo para a diferença medida em certas variáveis do problema, entre duas análises consecutivas. Se a diferença é menor que um valor especificado pelo usuário o processo é finalizado.
4. Especificar um número limite de iterações. Esta opção poder ser especificada junto com quaisquer dos anteriores processos adaptativos, quando o critério de parada não pode ser cumprido.

## 5.2 Proposta para um Indicador de Erro

O erro a ser considerado foi estimado a partir de normas onde se consideram: a variação aproximada dos deslocamentos, a variação das forças de superfície, e a variação da energia de deformação do sistema, calculada com a sua integração sobre o contorno.

Depois de resolvido o sistema de equações (3.12) define-se o erro em deslocamento como a norma euclidiana da diferença entre duas soluções:

$$\lambda^{(e)} = U_{mBEM}^{(e)} - U_{medio}^{(e)} \quad (5.3)$$

onde  $U_{mBEM}^{(e)}$ ,  $U_{medio}^{(e)}$  representam a solução aproximada e a "exata" do deslocamento no ponto médio do elemento (e) respectivamente, conforme se ilustra na figura (5.1).

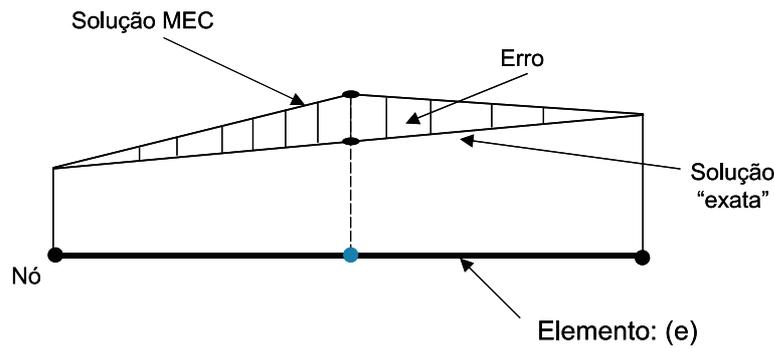


Figura 5.1: Erro em Deslocamento

A solução aproximada do deslocamento é calculada usando a equação do MEC para o ponto médio no elemento (e). O valor do deslocamento no ponto médio para todos os elementos é o vetor  $U_{mBEM}$  que é calculada pela equação Somigliana (2.63), onde  $c_{ij} = \frac{1}{2}$

$$U_{mBEM} = 2(-H_m U + G_m P) \quad (5.4)$$

sendo  $U$ ,  $P$  solução da equação (3.12) para uma malha básica ou da iteração anterior e  $H_m$ ,  $G_m$  são as matrizes cujos elementos são as funções integrais (3.14), para pontos fontes localizados no ponto médio de cada elemento.

A solução "exata" do deslocamento no ponto médio para o elemento ( $e$ ) é calculada pelo elemento linear dado por:

$$U_{medio}^{(e)} = \frac{U_{inicial}^{(e)} + U_{final}^{(e)}}{2} \quad (5.5)$$

sendo  $U_{inicial}^{(e)}$  e  $U_{final}^{(e)}$  solução do sistema (3.12) (ou valores prescritos) para o deslocamento dos nós inicial e final do elemento ( $e$ ) respectivamente.

Similarmente define-se o erro em força como a norma euclidiana da diferença entre duas soluções vezes o tamanho do elemento:

$$\lambda^{(e)} = \left( P_{mBEM}^{(e)} - P_{medio}^{(e)} \right) \cdot L_e \quad (5.6)$$

sendo  $P_{mBEM}$  o vetor força no ponto médio para todos os elementos, calculada pela equação de força de superfície (2.87):

$$P_{mBEM} = 2(-\tilde{H}_m U + \tilde{G}_m P) \quad (5.7)$$

sendo  $U, P$  solução da equação (3.12) para uma malha básica ou da iteração anterior e  $\tilde{H}_m, \tilde{G}_m$  são as matrizes cujos elementos são as funções integrais (3.63). A solução "exata" da força no ponto médio para o elemento ( $e$ ) é calculada pelo elemento linear dado por:

$$P_{medio}^{(e)} = \frac{P_{inicial}^{(e)} + P_{final}^{(e)}}{2} \quad (5.8)$$

sendo  $P_{inicial}^{(e)}, P_{final}^{(e)}$  solução do sistema (3.12) (ou valores prescritos) para força dos nós inicial e final do elemento ( $e$ ) respectivamente. E  $L_e$ , é o tamanho do elemento  $e$ .

Define-se o indicador de erro como:

$$\hat{\lambda} = \eta \max\{|\lambda^i| : 1 \leq i \leq NE\}; \quad 0 < \eta \leq 1. \quad (5.9)$$

sendo:

$$\|\lambda^i\| = \sqrt{(\lambda^i)_x^2 + (\lambda^i)_y^2} \quad (5.10)$$

o erro em deslocamento (5.3) ou em força (5.6) para o elemento  $i$ . Neste trabalho se optou por tomar  $\eta$  igual a 1/2 ou 7/8.

### 5.3 Cálculo do Estimador de Erro

Define-se o estimador de erro como uma medida de erro global. Utilizam-se as seguintes normas, geradas a partir do indicador de erro, para o cálculo do estimador de erro.

#### Norma em Deslocamento

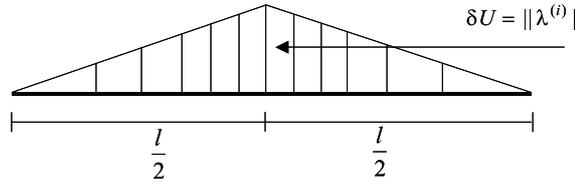


Figura 5.2: Norma em Deslocamento

Aproxima-se o erro para o elemento  $\Gamma$  de tamanho  $l$ , ver figura (5.2), usando as seguintes funções de aproximação:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= 1 - \frac{2\Gamma}{l} \\ \phi_2 &= \frac{2\Gamma}{l}\end{aligned}$$

Logo o erro é dado pela integral

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \delta U d\Gamma &= \int_0^{l/2} 0\phi_1 + \delta U\phi_2 + \int_0^{l/2} \phi_1\delta U + 0\phi_2 \\ &= \int_0^{l/2} \delta U\left(\frac{2y}{l}\right)dy + \int_0^{l/2} \delta U\left(1 - \frac{2y}{l}\right)dy \\ &= \frac{\delta U \cdot l}{2} \\ &= \frac{(U_{mBEM} - U_{medio}) \cdot l}{2}\end{aligned}\tag{5.11}$$

Por tanto, pode-se definir o estimador de erro para deslocamento pela seguinte norma ponderada:

$$\text{Norma}U = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{NE} [(U_{mBEM}^i - U_{medio}^i)_x L_i^2 + (U_{mBEM}^i - U_{medio}^i)_y L_i^2]}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{NE} [(U_{medio}^i)_x L_i^2 + (U_{medio}^i)_y L_i^2]}}\tag{5.12}$$

Sendo:

$NE$ , o número de elementos da malha.

$(U_{mBEM}^i - U_{medio}^i)_j$ , a componente do vetor indicador de erro (5.3), na direção  $j = (1, 2)$ .

$(U_{medio}^i)_j$ , a componente do vetor deslocamento exato (5.5), na direção  $j = (1, 2)$ .

$L_i$ , é o tamanho do elemento  $i = (1, NE)$ .

### Norma em Força de Superfície

Identicamente como para deslocamento, o erro em força para o elemento  $\Gamma$  é dada pela integral:

$$\int_{\Gamma} \delta P d\Gamma = \frac{\delta P \cdot l}{2} \quad (5.13)$$

O estimador de erro para força define-se pela seguinte norma ponderada:

$$NormaP = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{NE} [(P_{mBEM}^i - P_{medio}^i)_x(L_i)]^2 + (P_{mBEM}^i - P_{medio}^i)_y(L_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{NE} [(P_{medio}^i)_x(L_i)]^2 + (P_{medio}^i)_y(L_i)^2}} \quad (5.14)$$

Sendo:

$NE$ , o número de elementos da malha.

$(P_{mBEM}^i - P_{medio}^i)_j$ , a componente do vetor indicador de erro (5.6), na direção  $j = (1, 2)$ .

$(P_{medio}^i)_j$ , a componente do vetor deslocamento exato (5.8), na direção  $j = (1, 2)$ .

$L_i$ , é o tamanho do elemento  $i = (1, NE)$ .

### Norma em Energia

A energia do sistema escreve-se como:

$$E = PU \quad (5.15)$$

portanto a variação da energia é dada por:

$$\delta E = P \cdot \delta U + U \cdot \delta P \quad (5.16)$$

É definido o erro em energia (estimador de erro), como a variação da energia ponderada. Para isto primeiramente aproxima-se a variação da energia para o elemento  $\Gamma$  de tamanho  $l$  (fig.5.3), usando as seguintes funções de aproximação:

$$\phi_1 = 1 - \frac{2\Gamma}{l}$$

$$\phi_2 = \frac{2\Gamma}{l}$$

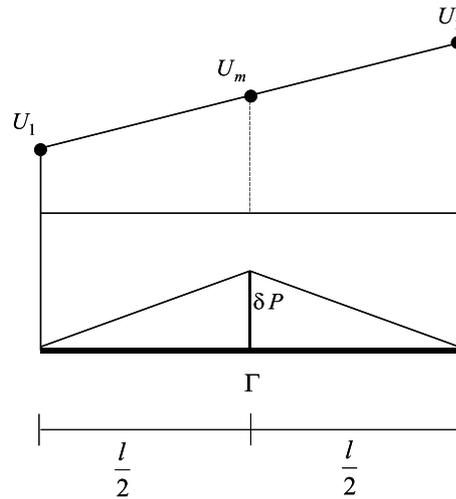


Figura 5.3: Norma em Energia

Logo a variação da energia ,  $U\delta P$  para o elemento  $\Gamma$ , é dada pela seguinte integral:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} U\delta P d\Gamma &= \int_0^{l/2} (\phi_1 U_1 + \phi_2 U_m)(0\phi_1 + \delta P\phi_2) d\Gamma & (5.17) \\ &+ \int_0^{l/2} (\phi_1 U_m + \phi_2 U_2)(\delta P\phi_1 + 0\phi_2) d\Gamma \\ &= U_1 \delta P \frac{l}{12} + U_m \delta P \frac{l}{3} + U_2 \delta P \frac{l}{12} \\ &= U_1 \delta P \frac{l}{4} + U_2 \delta P \frac{l}{4} \end{aligned}$$

Identicamente calcula-se a variação da energia ,  $P\delta U$  para o elemento  $\Gamma$ , como:

$$\int_{\Gamma} P\delta U d\Gamma = P_1\delta U \frac{l}{4} + P_2\delta U \frac{l}{4} \quad (5.18)$$

Para ponderação da energia é calculada a integral de  $PU$ . Dadas as funções de aproximação:

$$\phi_1 = 1 - \frac{\Gamma}{l}$$

$$\phi_2 = \frac{\Gamma}{l}$$

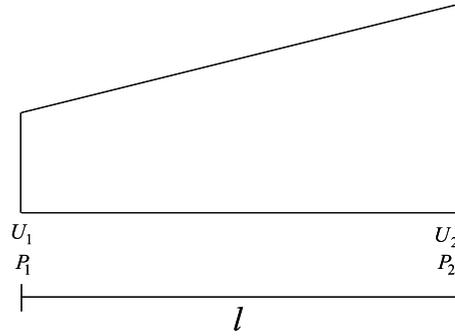


Figura 5.4:

segundo a figura (5.4) temos que:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} PU d\Gamma &= \int_0^l (\phi_1 P_1 + \phi_2 P_2)(\phi_1 U_1 + \phi_2 U_2) d\Gamma \\ &= P_1 U_1 \frac{l}{3} + (P_1 U_2 + P_2 U_1) \frac{l}{6} + U_2 P_2 \frac{l}{3} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Usando as equações (5.17), (5.18), (5.19), é definido o erro em energia como:

$$NormaEnergia = \frac{\sum_{i=1}^{NE} (|\int_{\Gamma} U\delta P d\Gamma| + |\int_{\Gamma} P\delta U d\Gamma|)_i}{\sum_{i=1}^{NE} (|\int_{\Gamma} PU d\Gamma|)_i} \quad (5.20)$$

Define-se o indicador de erro em energia como o máximo valor, percorrido em todos os elementos, da variação da energia para a força.

$$\hat{\lambda}_1 = \max\{\lambda_1^i : 1 \leq i \leq NE\} \quad (5.21)$$

Identicamente pode-se definir o indicador de erro em energia como o máximo valor, percorrido em todos os elementos, da variação da energia para o deslocamento.

$$\hat{\lambda}_2 = \max\{\lambda_2^i : 1 \leq i \leq NE\} \quad (5.22)$$

sendo:

$$\lambda_1^i = \left| \int_{\Gamma} U \delta P d\Gamma \right|_i \quad (5.23)$$

$$\lambda_2^i = \left| \int_{\Gamma} P \delta U d\Gamma \right|_i \quad (5.24)$$

Neste trabalho os indicadores de energia em deslocamento e em força são usados conjuntamente.

## 5.4 Processo Adaptativo

O processo de refinamento da malha pode ser resumido como segue:

1. Entrada de dados: leitura das condições de contorno, definição da malha base.
2. Iteração n:
  - a) Montagem do sistema de equações, resolução do sistema  $HU = GP$  (eq. 3.81), aplicando as condições de contorno.
  - b) Calcula-se o estimador de erro usando uma das seguintes normas: (5.12), (5.14) ou (5.20). Se

$$(Norma)_n < \text{tolerância}$$

PARAR, caso contrário, continuar o processo.

- c) Calcula-se o valor do indicador de erro (5.9), usando o erro em deslocamento

(5.3) ou em força (5.6). Logo compare-se o valor do indicador de erro com o erro em norma (5.3 ou 5.6), para o elemento ( $i$ ). Se

$$\widehat{\lambda} < \|\lambda^i\|$$

então divide-se o elemento  $i$ . Fazer este processo para todos os elementos da malha desde  $i = (1, NE)$ .

No caso da energia é comparado

$$\widehat{\lambda}_1 < \lambda_1^i \quad \text{e} \quad \widehat{\lambda}_2 < \lambda_2^i$$

usando as definições (5.21), (5.22). Se satisfizer um ou outro divide-se o elemento  $i$ . A divisão dos elementos é pela metade.

d)  $n = n + 1$  e voltar para (2).

## 5.5 Convergência no Método dos Elementos de Contorno

Para obter uma solução aproximada dos campos de deslocamento e força, dividimos o contorno  $\Gamma$  em  $NE$  elementos de tamanho  $h_n$ .

$$\Gamma = \bigcup_{n=1}^{NE} \Gamma_n \quad (5.25)$$

aproximamos os campos de deslocamento e força no elemento  $n$  ( $\Gamma_n$ ), por:

$$u_i^{approx} = \sum_{k=0}^{N_i^n-1} \phi^k(x) u_i^k ; \quad x \in \Gamma_n \quad (5.26)$$

$$p_i^{approx} = \sum_{k=0}^{N_i^n-1} \phi^k(x) p_i^k ; \quad x \in \Gamma_n \quad (5.27)$$

sendo  $N_i^n$  o número de funções de interpolação usadas para aproximar a componente  $i$  dos campos respectivos. Logo os campos de deslocamento e força ao longo de todo o contorno  $\Gamma$  é:

$$u_i^{approx} = \sum_{k=0}^{N_i} \phi^k(x) u_i^k ; \quad x \in \Gamma \quad (5.28)$$

$$p_i^{approx} = \sum_{k=0}^{N_i} \phi^k(x) p_i^k ; \quad x \in \Gamma \quad (5.29)$$

onde:

$$N_i = \sum_{n=1}^{NE} N_i^n \quad (5.30)$$

é o número de funções de interpolação usadas para aproximar a componente  $i$  dos deslocamentos ou das forças, agora ao longo de todo o contorno  $\Gamma$ . O número total de graus de liberdade é dado por:

$$N = \sum_{i=1}^{N_d} N_i \quad (5.31)$$

onde a dimensão do campo  $N_d$  é igual a 3 ou 2 dependendo de se o campo a analisar é elástico tridimensional ou plana respectivamente.

Sem perda de generalidade, considere que os deslocamentos e forças são constantes ao longo de cada elemento, ou seja, considere que  $N_i^n = 1$ . Aumentando infinitamente o número de graus de liberdade, subdividindo igualmente todos os elementos, o modelo discreto obtido da discretização por elementos de contorno (5.28), (5.29), convergirá para o modelo exato, isto é:

$$u_i^{exato} = \lim_{N \rightarrow \infty} u_i^{approx} \quad (5.32)$$

$$p_i^{exato} = \lim_{N \rightarrow \infty} p_i^{approx} \quad (5.33)$$

$$p_i^{exato} = \lim_{N \rightarrow \infty} p_i^{approx} \quad (5.34)$$

Esta convergência foi formalmente demonstrada por Hsiao e Wendland [27] quando se aplica o Método de Galerkin e posteriormente generalizada por Arnold e Wendland [3] para o método de colocação.

Por tanto as normas (5.12) e (5.14), convergem para a solução exata.

# Capítulo 6

## Exemplos Numéricos

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos que mostram a convergência do erro e a malha gerada por um processo adaptativo.

### Exemplo 1 : Chapa para valores prescritos exatos

No seguinte exemplo mostra-se uma chapa com carregamento prescrito, calculado através de uma solução particular para a equação de Navier.

Uma solução para a equação de Navier (2.7) pode-ser dada pela equação quadrática:

$$\begin{aligned}u_1 &= a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 \\u_2 &= a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2\end{aligned}\tag{6.1}$$

Substituindo as equações (6.1) na equação de Navier (2.7), para constantes em particular, o deslocamento pode-ser escrito como:

$$\begin{aligned}u_1 &= -\left(\frac{A+2}{2A+2}\right)x^2 + xy + y^2 \\u_2 &= x^2 + xy - \left(\frac{A+2}{2A+2}\right)y^2\end{aligned}\tag{6.2}$$

onde

$$A = \frac{1}{1-2\nu}$$

logo o tensor das deformações (2.1) é dado por:

$$\varepsilon_{11} = -2\left(\frac{A+2}{2A+2}\right)x + y \quad ; \quad \varepsilon_{12} = \frac{3}{2}(x+y) \quad (6.3)$$

$$\varepsilon_{22} = x - 2\left(\frac{A+2}{2A+2}\right)y \quad ; \quad \varepsilon_{21} = \frac{3}{2}(x+y)$$

As tensões podem ser calculadas pela equação:

$$\sigma_{ij} = B(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} \quad (6.4)$$

onde

$$B = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \quad ; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

e a equação de força de superfície pode ser calculada por:

$$P_1 = \sigma_{11}\eta_1 + \sigma_{12}\eta_2 \quad (6.5)$$

$$P_2 = \sigma_{21}\eta_1 + \sigma_{22}\eta_2$$

Neste exemplo é prescrito força de superfície, que é dada pela equação (6.5) para a chapa da figura (6.1).



Figura 6.1: Chapa para valores exatos

Na tabela a seguir temos o resultado referente à resposta obtida em deslocamento no nó 5, para o valor exato e para o MEC.

Tabela 6.1: Refino Adaptativo

No. de Elementos	Valor Exato	Valor MEC
4	-95.0	-86.8897
32	-95.0	-94.6959
69	-95.0	-94.9198
265	-95.0	-94.9855

Conforme apresentam os resultados da tabela, pode-se verificar que o modelo adaptativo empregado, para norma em deslocamento, apresenta um erro de 0.02%, considerando a maior discretização empregada e o erro em deslocamento obtido foi de 4.22E-005. Estes resultados podem ser considerados amplamente satisfatórios.

A malha para o problema, usando a norma em deslocamento, segue o seguinte refino:



Figura 6.2: Malha adaptativa para o problema exato

### Exemplo 2 : Viga biapoiada

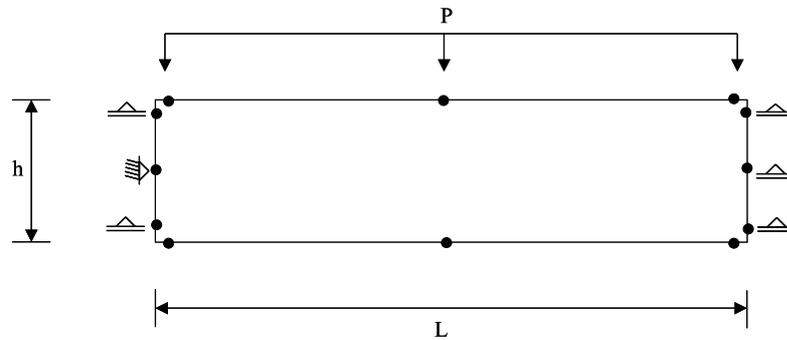


Figura 6.3: Problema de flexão

Dados:

$E = 1$  módulo de elasticidade longitudinal

$\nu = 0$  coeficiente de Poisson

$NE = 8$  número de elementos

$NN = 12$  número de nós

$P = 1$  carregamento

$L = 12$  comprimento da chapa

$h = 1$  largura da chapa

Como uma aproximação à teoria da mecânica dos sólidos, a flecha no meio do vão é igual a:

$$F = \frac{5PL^4}{384EI}$$

sendo  $I$  o momento de inércia da seção transversal. Segundo os dados do problema o valor da flecha é: 3240.

A seguir mostra-se o valor numérico para uma malha regular e uma adaptativa:

Tabela 6.2: Malha Regular

Número de Elementos	Flecha	Norma em Deslocamento
420	3270.049	3.3578E-005

Tabela 6.3: Malha Adaptativa

Número de Elementos	Flecha	Norma em Deslocamento
420	3277.367	2.7364E-005

É observado que na malha adaptativa a convergência é bem melhor.

A malha para o problema da viga, usando a norma em deslocamento, segue o seguinte refino:



Figura 6.4: Malha Adaptativa

É observado que o maior refino é no meio do vão onde os valores das tensões são maiores.

O seguinte gráfico mostra o comportamento da norma em deslocamento para uma malha regular e uma adaptativa.

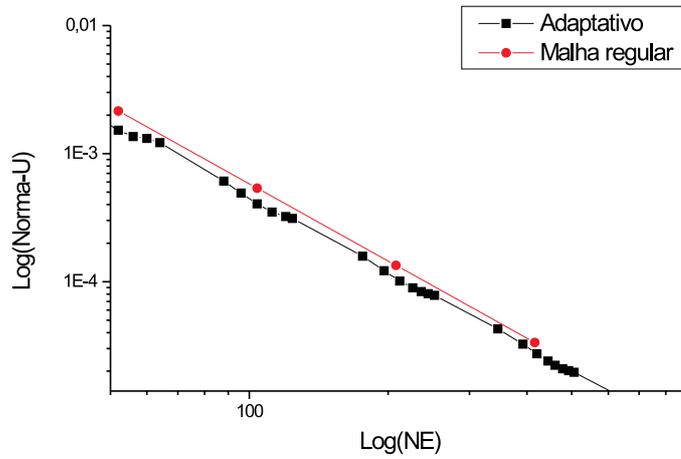


Figura 6.5: Viga biapoiada

O gráfico (6.5) mostra que o método adaptativo interpreta melhor a avaliação de erro e a convergência é garantida.

Usando norma em energia:

Tabela 6.4: Adaptativo em Energia

Número de Elementos	Flecha	Norma Energia
420	3272.031	1.9349E-005

A malha para o problema da viga, usando a norma energia, segue o seguinte refino:



Figura 6.6: Malha Adaptativa

**Exemplo 3: Chapa engastada parcialmente.**

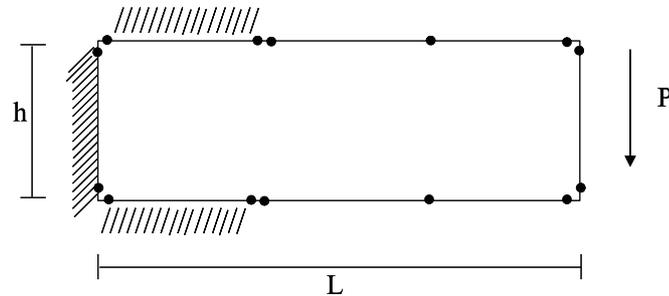


Figura 6.7: Chapa engastada

Dados:

$E = 1$  módulo de elasticidade longitudinal

$\nu = 0$  coeficiente de Poisson

$NE = 8$  número de elementos

$NN = 14$  número de nós

$P = 1$  carregamento

$L = 3$  comprimento da chapa

$h = 1$  largura da chapa

A malha para o problema da chapa engastada parcialmente, usando a norma em deslocamento, segue o seguinte refino:



Figura 6.8: Malha adaptativa

Foram usados 189 elementos e precisou-se de 14 iterações.  
A malha gerada para norma em energia segue o seguinte refino:

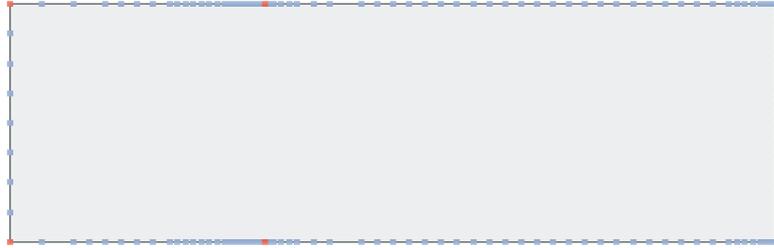


Figura 6.9: Malha adaptativa

Foram usados 189 elementos e precisou-se de 39 iterações.

É de esperar que o refino ocorra próximo à fronteira do engaste. Neste exemplo, onde as forças são descontínuas, foram utilizados nós duplos conforme mostra a figura (6.7).

#### Exemplo 4: Chapa tracionada

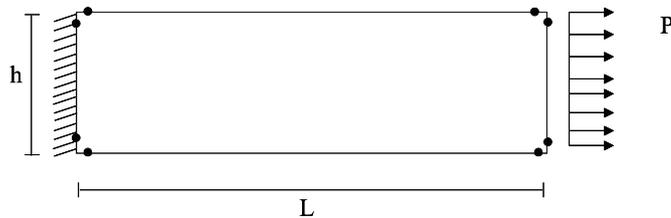


Figura 6.10: Chapa Tracionada

Dados:

$E = 1$  módulo de elasticidade longitudinal

$\nu = 0.5$  coeficiente de Poisson

$NE = 26$  número de elementos

$NN = 30$  número de nós

$P = 1$  carregamento

$L = 6$  comprimento da chapa

$h = 1$  largura da chapa



Figura 6.11: Malha para norma em Deslocamento



Figura 6.12: Malha para norma em Energia

Observe-se que o refino, mostrado nas figuras (6.11) e (6.12), é bem maior próximo ao lado engastado.

A seguir são mostradas duas tabelas nas quais observa-se, para os dois tipos de refino, que a norma em deslocamento é melhor que a energia.

Tabela 6.5: Adaptativo em Deslocamento

Número de Elementos	Número de Iterações	Norma Deslocamento
308	14	1.619546E-005

Tabela 6.6: Adaptativo em Energia

Número de Elementos	Número de Iterações	Norma Energia
308	25	2.31649E-004

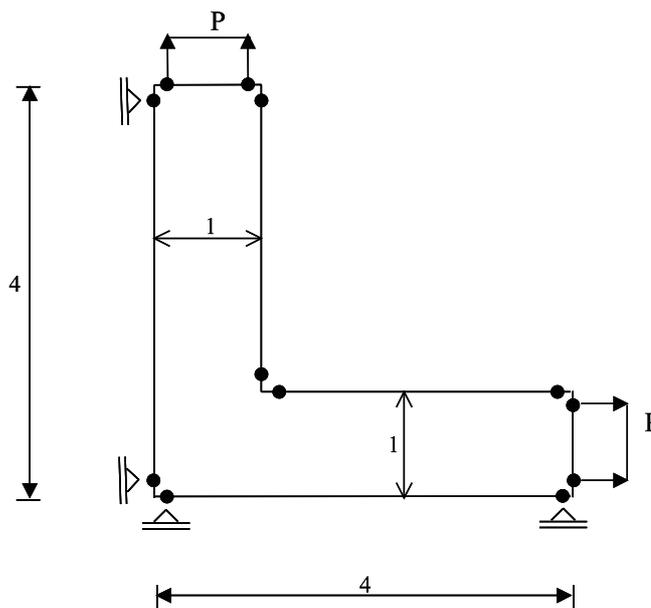
**Exemplo 5: Chapa em L**

Figura 6.13: Chapa em L

Dados:

 $E = 1$  módulo de elasticidade longitudinal $\nu = 0$  coeficiente de Poisson $NE = 6$  número de elementos $NN = 12$  número de nós

---

$P = 1$  carregamento

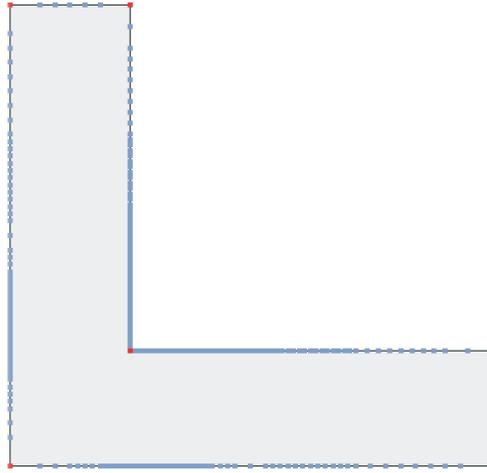


Figura 6.14: Malha para norma em Deslocamento

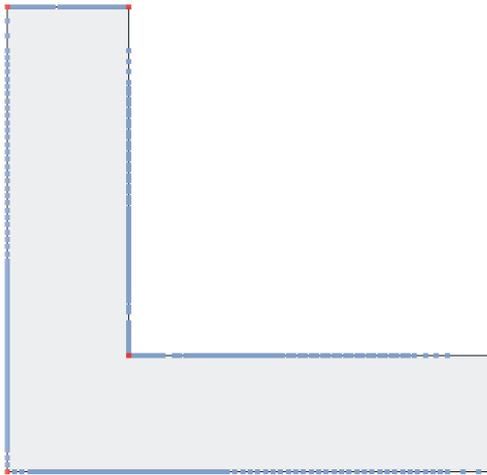


Figura 6.15: Malha para norma em Energia

Observa-se que o refino, mostrado nas figuras (6.14) e (6.15), é maior onde existe uma forte concentração de tensões.

A seguir são mostradas duas tabelas nas quais observa-se que o tipo de refino usando norma em deslocamento é melhor que a energia.

Tabela 6.7: Adaptativo em Deslocamento

Número de Elementos	Número de Iterações	Norma Deslocamento
504	40	1.84125E-005

Tabela 6.8: Adaptativo em Energia

Número de Elementos	Número de Iterações	Norma Deslocamento
502	55	6.87114E-004

### Exemplo 6: Viga em balanço



Figura 6.16: Viga em Balanço

Dados:

$E = 1$  módulo de elasticidade longitudinal

$\nu = 0$  coeficiente de Poisson

$NE = 26$  número de elementos

$NN = 30$  número de nós

$P = 1$  carregamento

$L = 12$  comprimento da chapa

$h = 1$  largura da chapa

a flecha é igual a:

$$F = \frac{PL^3}{3EI}$$

Substituindo os dados do problema o valor da flecha é de 6912.

A malha para o problema da viga em balanço, usando a norma em deslocamento, segue o seguinte refino:



Figura 6.17: Malha Adaptativa

Conforme mostra a tabela (6.9), o problema converge e a flecha apresenta um erro de 1.8%.

Tabela 6.9: Adaptativo em Deslocamento

Número de Elementos	Número de Iterações	Flecha	Norma Deslocamento
632	90	6785.33	8.45429E-005

A malha para norma em força, segue o seguinte refino:



Figura 6.18: Malha Adaptativa

Conforme mostra a tabela (6.10) a flecha apresenta um erro de 0.28%.

Tabela 6.10: Adaptativo em Força

Número de Elementos	Número de Iterações	Flecha	Norma Força
632	130	6892.45	3.64294E-002

Estes resultados podem ser considerados bastante satisfatórios.

A malha para norma em energia, segue o seguinte refino:



Figura 6.19: Malha Adaptativa

Conforme mostra a tabela (6.11) a flecha apresenta um erro de 20.3%, convergência muito alta.

Tabela 6.11: Adaptativo em Energia

Número de Elementos	Número de Iterações	Flecha	Norma Energia
206	28	5506.4	6.871E-004

A seguir o gráfico (6.20) mostra a convergência da flecha para uma malha adaptativa, usando norma em deslocamento, e uma malha regular.

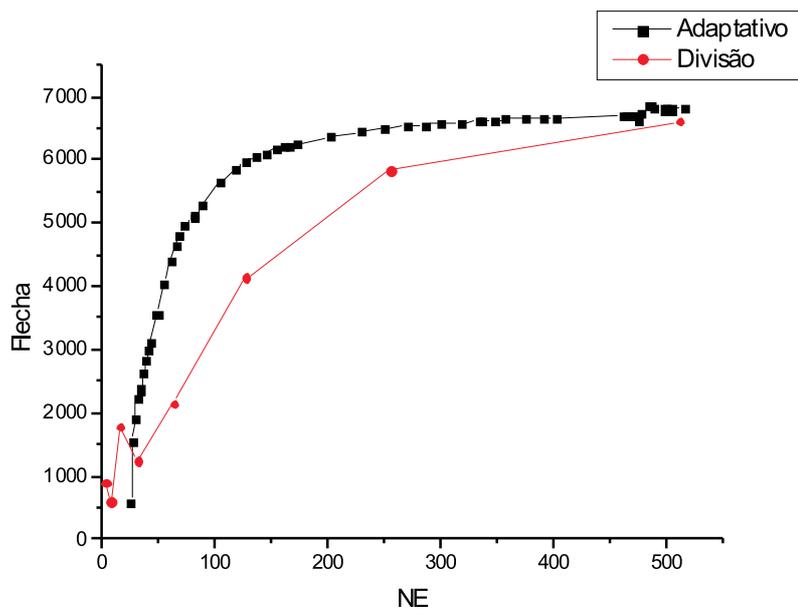


Figura 6.20: Convergência da flecha

Observe-se que a malha adaptativa, para norma em deslocamento, é melhor para uma aproximação suficientemente boa.

### Exemplo 7: Chapa com trinca no dominio

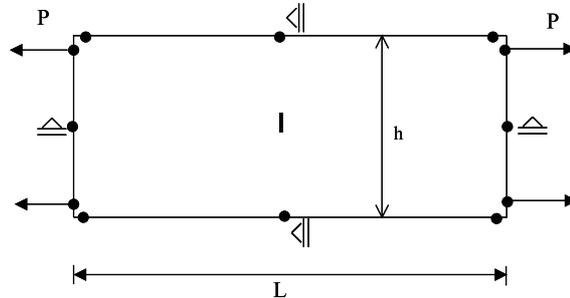


Figura 6.21: Chapa com trinca no dominio

Dados:

$E = 2100000$  módulo de elasticidade longitudinal

$\nu = 0.25$  coeficiente de Poisson

$NE = 60$  número de elementos

$NN = 40$  número de nós

$NNFR = 120$  número de nós na trinca

$P = 100$  carregamento

$L = 40$  comprimento da chapa

$h = 20$  largura da chapa

A malha gerada, usando norma em deslocamento, segue o seguinte refino:

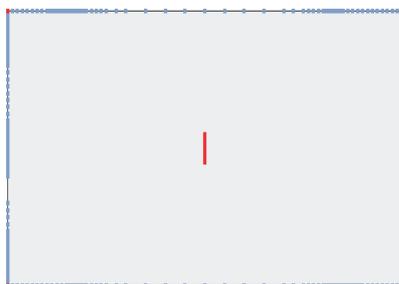


Figura 6.22: Malha com trinca no dominio

Observe-se na figura (6.22), que o refino é maior onde existe maior concentração de tensões. Neste exemplo não é feita a progressão da trinca e é usado o método dual dos elementos de contorno para modelagem da trinca.

### Exemplo 8: Carregamento concentrado no centro do vão

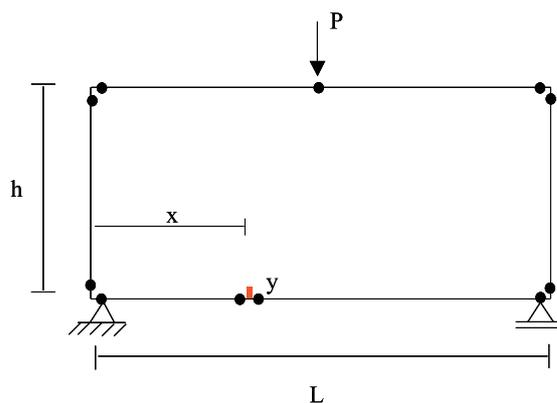


Figura 6.23: Carregamento concentrado com trinca

Dados:

$E = 210 \times 10^6$  coeficiente de elasticidade

$\nu = 0.3$  coeficiente de poisson

$NE = 6$  número de elementos do contorno

$NN = 11$  número de nós do contorno

$NEFR = 8$  número de elementos da trinca

$NNFR = 16$  número de nós da trinca

$L = 4$  comprimento da chapa

$h = 2$  largura da chapa

$P = 1$  carregamento

$(x, y) = (1.75, 0.05)$

Neste exemplo os fatores de intensidade de tensão, para obter o ângulo de propagação da trinca, são calculados usando a técnica de correlação de deslocamentos.

Para modelagem da trinca é usado o método dual para elementos de contorno.

Para o refino adaptativo é usada a norma em deslocamento. A progressão da trinca e malha adaptativa são mostrados na figura (6.24). Observe-se que o refino ocorre onde existe maior concentração de tensões, como esperado.

É também calculada a progressão da trinca, figura (6.25), usando o programa para elementos finitos FRANC-2D, isto é para comprovar a progressão da trinca com o Método Dual dos Elementos de Contorno.

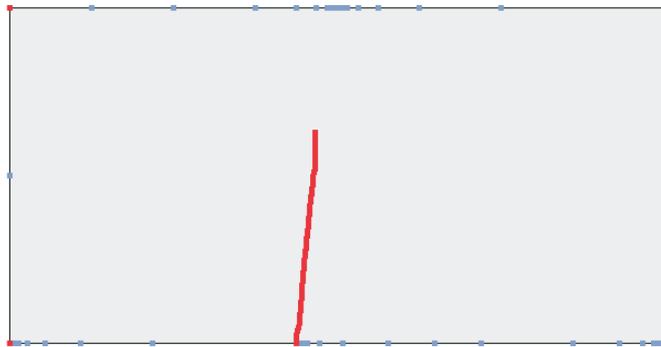


Figura 6.24: Malha adaptativa com trinca

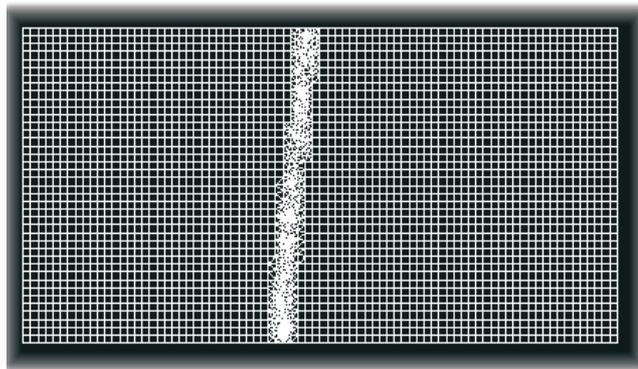


Figura 6.25: FRANC-2D. Elementos finitos

Como uma maneira de testar a técnica de correlação de deslocamentos, compare-se a solução analítica dos fatores de intensidade de tensão, apresentada por Broek [10], com os valores numéricos obtidos para:

$$\nu = 0.2; \quad NE = 100; \quad L = 5; \quad (x, y) = 2.5, 0.275$$

Nas tabelas a seguir encontram-se os resultados referentes as respostas obtidas para a chapa.

Tabela 6.12: Fatores de intensidade de tensão para o modo I

Número de Elementos	$K_I$	Resultado Analítico
8	7.07218	7.13620
10	7.06684	
12	7.06254	

Tabela 6.13: Fatores de intensidade de tensão para o modo II

Número de Elementos	$K_{II}$	Resultado Analítico
8	0.07547	0.00000
10	0.074348	
12	0.073564	

Conforme apresentam os resultados das tabelas (6.12) e (6.13), pode-se verificar que com o aumento da discretização as respostas numéricas tendem às respostas analíticas, tanto para o modo I como o modo II.

A técnica de correlação de deslocamentos apresentou bons resultados ao modelo analítico, de 1.03% considerando a maior discretização empregada.

### Exemplo 9: Chapa em L com trinca

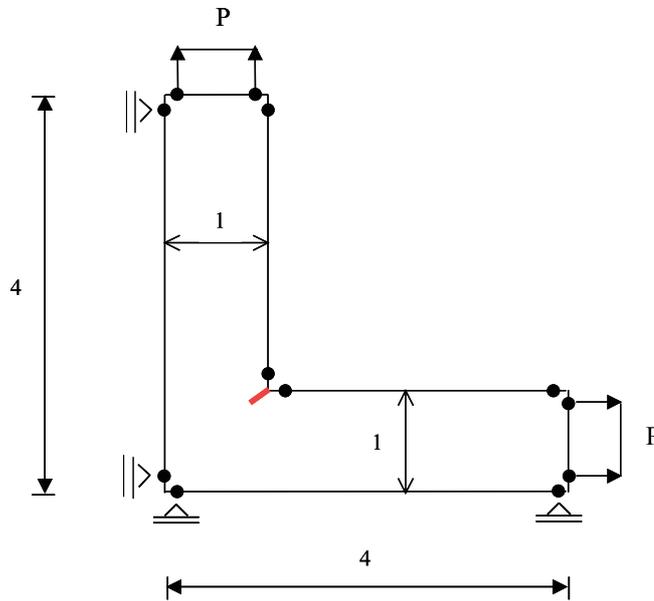


Figura 6.26: Chapa com trinca

Dados:

$E = 1$  coeficiente de elasticidade

$\nu = 0$  coeficiente de poisson

$NE = 6$  número de elementos do contorno

$NN = 12$  número de nós do contorno

$NEFR = 8$  número de elementos da trinca

$NNFR = 16$  número de nós da trinca

$P = 1$  carregamento

$(x, y) = (0.98, 0.98)$  coordenadas da trinca

Para modelagem da trinca é usado o método dual dos elementos de contorno.

A progressão da trinca é feita pela técnica de correlação de deslocamentos.

O refino adaptativo, pela norma de deslocamento, mostra-se na figura (6.27) e da energia na figura (6.28). Observe-se que o maior refino ocorre onde é maior a concentração de tensões.

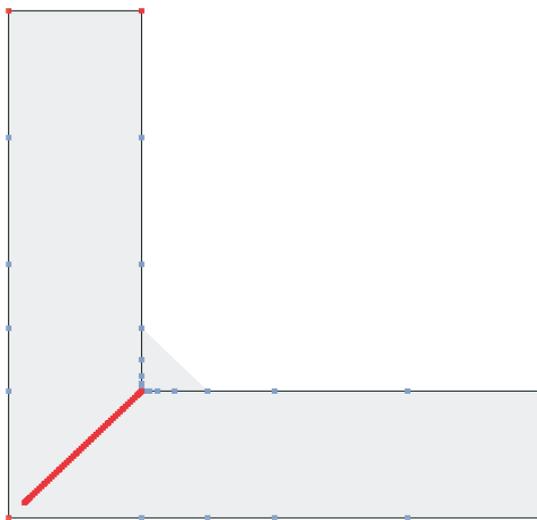


Figura 6.27: Malha Adaptativa-Norma em deslocamento

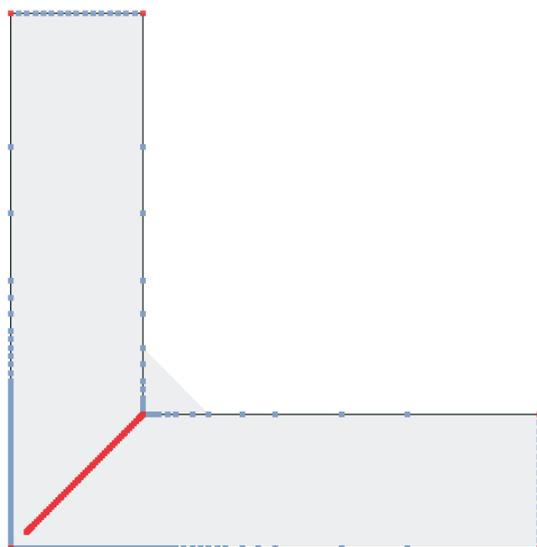


Figura 6.28: Malha Adaptativa-Norma em energia

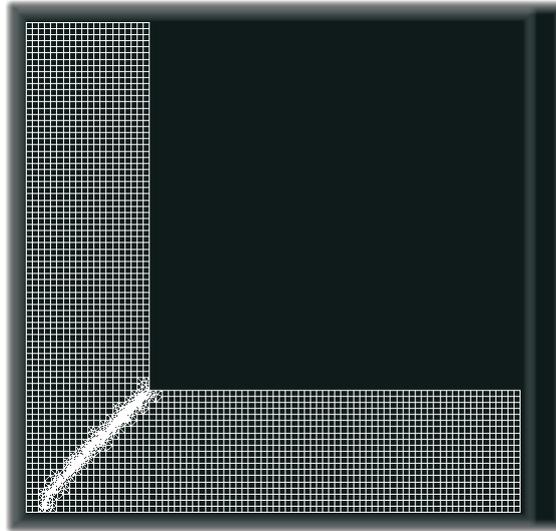


Figura 6.29: FRANC2D-Elementos Finitos

Também é calculada a progressão da trinca, figura (6.29), usando o programa para elementos finitos FRANC-2D, o qual comprova a progressão da trinca com o método dual dos elementos de contorno.

No caso de uma chapa multi-fraturada, o procedimento para a geração da malha é analisado em Leonel E., Lovón, O. B. R., Venturini, W. S. [40]. Neste artigo a norma em deslocamento (5.12), é utilizada para o refino da malha no contorno. Posteriormente esquemas adaptativos são usados para ajustar a direção da trinca e para refinar os elementos perto da ponta da trinca.

# Capítulo 7

## Conclusões

Neste trabalho, foram abordados aspectos teóricos e propostas de formulações numéricas com o método dos elementos de contorno para estudo da h-adaptatividade em regime elástico linear. Nas aplicações, além das situações usuais de chapas bidimensionais, também foi considerado o caso de propagação de fratura em meio elástico linear.

Os problemas onde ocorrem concentrações de tensões são o foco da análise neste trabalho, pois se espera que o refino ocorra com mais intensidade próxima a essas regiões. Nesse caso, o estudo do erro pode ser melhor avaliado. O modelo adaptativo proposto está baseado nas normas das variações dos deslocamentos, das forças de superfície e da energia. Vários critérios baseados na magnitude do erro foram propostos. De acordo com o critério adotado, os elementos de contorno devem ou não ser sub-divididos em novos elementos, caracterizando a h-adaptatividade.

As formulações numéricas analíticas foram implementadas e os exemplos de aplicação mostraram resultados coerentes. Dois resultados importantes foram explicitados nos exemplos: a convergência da norma com o refino e o próprio refino da malha. No caso dos gráficos mostrando a convergência da norma, para efeito de comparação, também se apresentou um esquema de refino adotando-se malhas regulares. Como conclusões gerais, notou-se que a norma em deslocamento é a que melhor interpreta a avaliação do erro e a divisão dos elementos. A norma em força

de superfície foi importante para indicar a divisão dos elementos, para alguns casos e mostrou-se bom na convergência. A norma em energia não é convergente porém mostrou-se importante para indicar a divisão dos elementos. Foi observado também que é recomendável usar as duas normas, juntas, deslocamento e força. Comprova-se também que o refino ocorre em regiões onde a concentração de tensão é maior, como esperado.

O processo de crescimento da trinca neste trabalho foi desenvolvido de forma a minimizar o erro existente da trajetória de crescimento da trinca. Este procedimento apresentou-se muito estável fornecendo resultados confiáveis como os apresentados nos exemplos do capítulo 6.

Entre as possibilidades para desenvolvimentos futuros, aproveitando a estrutura computacional já existente, está a implementação de estratégias  $p$  e  $hp$  adaptativas. Espera-se com isto uma melhora significativa nas taxas de convergência com um número reduzido de graus de liberdade. A utilização de refinamentos  $hp$  adaptativo mostrou ser um dos procedimentos mais eficientes e robustos entre as estratégias de refino da solução numérica, já que apresentam as características de convergência do refino  $h$  adaptativo e taxas de convergência exponencial características do refino  $p$ .

Uma outra vertente para pesquisas futuras está na utilização das recentes técnicas sem malha, como o método  $hp$ -Clouds, por exemplo, implementado juntamente com o procedimento dual do MEC.

As propostas para novas pesquisas envolvendo equações integrais são inúmeras, sendo que as sugestões apresentadas acima indicam uma seqüência natural do trabalho desenvolvido nesta tese.

## Referências Bibliográficas

- [1] Alarcon E., Reverter A., (1986) *p-Adaptative Boundary Elements*. Int. Journal Numeri. Meth. Engng. 23: 801-29.
- [2] Alarcon, E., Avia, L., Reverter, A.,(1984) On the possibility of adaptive boundary elements. Proc. of the Int. Conf. on Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Comp. (ARFEC). Lisboa.
- [3] Arnold E., Wendland W.L. (1983) *On the asymptotic convergence of collocation methods Mathematics of Computation*. (Preprint-Nr 665 April 1982, Department of Mathematics Technische Hochschule Darmstadt).
- [4] Babuška, I. and Rank, E. (1987)*An expert system for the optimal design in the hp-version of the finite element method*. IJNME, 24, 2087-106.
- [5] Babuška, I. e Rheinbolt, W. C., (1978)*Error estimates for adaptive finite element computations*. Siam J. Numer. Anal. 15, No. 4, 736-754.
- [6] Babuška, I. e Rheinbolt, W. C.,(1978)*A-posteriori error estimates for the finite element method*. Int. J. Numer. Meth. Engng., 12, 1597-1615.
- [7] Babuška, I. e Rheinbolt, W. C.,(1979) *Analysis of optimal finite-element meshes in  $R^1$* . Mathematics of Computations, 33, No. 146, 435-463.
- [8] Blandford, G. E., Ingrassia, A. R. and Liggett, J. A. (1981)*Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method*. Int. J. Num. Meth. Engng., 17, 387-404.

- 
- [9] Brebbia, C.A. ; and Dominguez, J. (1992). *Boundary Elements an Introductory Course* 2 ed. Southampton, Computational Mechanics Publications.
- [10] Broek, D. (1982)*Elementary engineering fracture mechanics*. 3rd. ed. Hauge: Martinus Nijhof Publishers.
- [11] Brunner, H. and Yan, N. (1996) *On global superconvergence of iterated collocation solutions to linear second kind volterra integral equations*. J. of Comp. and Appl. Math., 67, 185-89.
- [12] Carey, G. F. and Oden, J. T. (1984) *Finite Elements: Computational Aspects*. Prentice-Hall Inc. and Englewood Cliffs.
- [13] Cerrolaza, M. and Alarcon, E. (1987) *p-Adaptive boundary elements for three-dimensional potencial problems*. Commum. Appl. Num. Meth., 3, 335-344.
- [14] Crook, S. H. and Smith R. N. L. (1991)*Conforming and non-conforming elements in a three-dimensional h-adaptive boundary element method*. In. C. A. Brebbia and G. S. Gipson (eds.), Proc. Boundary Element Methods XIII, Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science, pp. 929-42.
- [15] Crouch, S. L. (1976) *Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method*. Int. J. Num. Meth. Engng., 10, 301-342.
- [16] Cruse, T. A., (1977) *Mathematical Foundations of the Boundary Integral Equation Method in Solid Mechanics*, Report No. AFOSR-TR-77-1002, Pratt and Whitney Aircraft Group.
- [17] Dong YF., Parreira P., (1990) *Quadratic h-hierarchical adaptive boundary elements*. In:Grilli S., Cheng AHD, Brebbia CA, editors. Computational Mechanics Publication. p. 835-50(Proc 5th Int. Conf. on BE Tech, Delaware USA).
- [18] Erdogan F. and Sih G. C., (1963) *On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear*, Trans. ASME, Jounarl of Basic Engineering, Vol. 85, pp, 519-527.

- 
- [19] Foltran, C. E. (1999). *Análise de problemas planos em regime elasto-plástico pelo Método dos Elementos de Contorno*. Campinas. 146p. Dissertação(Mestrado). Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas.
- [20] Goldberg, M. A. and Chen, C. S.(1996)*Discrete projection methods for integral equations*. Computational Mechanics Publications, Southampton, Uk.
- [21] Guiggiani M.,(1998)*Formulation and Numerical treatment of boundary integral equations with hypersingular kernels*. Singular Integrals in B.E. Methods, V. Sladek and J. Sladek, eds.
- [22] Guiggiani M.,(1996)*Sensitivity analysis for boundary element error estimation and mesh refinement*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 39, 2907-2920.
- [23] Guiggiani M.(1990)*Error indicators for adaptive mesh refinement in the boundary element method-A new approach*. IJNME, 29, 1247-69.
- [24] Guiggiani M., Lombardi, F. (1992)*Self adaptive boundary elements with h-hierarchical shape functions*. Adv. Eng. Soft., 15, 269-77.
- [25] Guo, B. and Babuška, I. (1986a) *The h-p version of the finite element method*. Part I: The basic approximation. Comp. Mech., 1, 21-41.
- [26] Guo, B. and Babuška, I. (1986b) *The h-p version of the finite element method*. Part II: General results and applications. Comp. Mech., 1, 203-20.
- [27] Hsiao G. C.; Wendland W. L. (1981) *The Aubin-Nitsche lemma for integral equations*. J. Integral Equations. 3, 299-315.
- [28] Hussain M. A., Pu S. L. and Underwood J., (1974) *Strain energy release rate for a crack under combined mode-I and mode-II loading*, ASTM STP 560, pp. 2-28.

- [29] Ingber, M. S. and Mitra, A. K. (1986) *Grid optimization for the boundary element method*. IJNME, 23, 2121-36.
- [30] Irwin G.R. (1949)*Fracturing of metals*. Proc. ASM Symposium, Chicago, 1947, pp. 147-166, ASM.
- [31] Irwin G.R. (1957)*Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*. Trans. ASME J. Appl. Mech., Vol. 24, pp. 361-364.
- [32] Ishikawa H., Kitagawa H. and Okamura H. (1980) *J-integral of a mixed mode crack and its application*, Proc. 3rd Int. Conf. on Mechanical Behavior of Material, Vol. 3, pp. 447-455, Pergamon, Oxford.
- [33] Kamiya, N. and Kawaguchi, K. (1992a)*An adaptive BEM by sample point error analysis*. Eng. Anal., 9, 225-62.
- [34] Kamiya, N. and Kawaguchi, K. (1992b)*Error analysis and adaptive refinement of boundary element in elastic problems*. Adv. Eng. Software, 15, 223-30.
- [35] Kita E., Higuchi K., Kamiya N., (2000) *Application of r-and hr-adaptative beam to-dimensional elastic problem*. Engng Anal Bound Element; 24(4): 317-24.
- [36] Kita E., Kamiya N. (2001)*Error estimation and adaptive mesh refinement in boundary element method an overview*. Engineering Analysis with Boundary Elements, V. 25, No. 7, 479-495.
- [37] Kita E., Higuchi K., Kamiya N., (1997)*Adaptive mesh refinement of boundary element methods*. In: Brebbia CA, editor. Boundary elements XIX. Southampton: Computational Mechanics Publications. p. 739-48 (Proc. 19th World Conf. on BEM , Rome, Italy.
- [38] Latif Salef Abd. (1997) *Crack Growth in Concrete Using Boundary Elements*. Topics in Engineering, V. 30. Computational Mechanics Publications Southampton UK and Boston USA.

- [39] Leonel E. D. (2006) *Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Análise de Corpos Multi-Fraturados*. São Carlos. Dissertação (Mestrado). Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- [40] Leonel, E. D., Lovón, O. B. R., Venturini, W. S. (2006). *Boundary element formulation applied to multi-fractured bodies*. Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods XXVIII, vol. 42.
- [41] Liapis, S. (1996) *An adaptive boundary element method for the solution of potential flow problems*. Eng. Anal., 18, 29-37.
- [42] Love, A.E.H. (1944). *A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4 ed. New York, Dover.
- [43] Maciel D. N. (2003). *Determinação dos Fatores de Intensidade de Tensão Estáticos e Dinâmicos via MEC com Integração Analítica em Coordenadas Polares*. São Carlos, 122p. Dissertação (Mestrado). Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- [44] Miranda, J. C., Muci Küchler (2002) *Adaptative Meshing with Boundary Elements*. Topics in Engineering, V. 41. Southampton, Boston.
- [45] Mullen R.L., Rencis, J.J.,(1985) *Adaptive mesh refinement techniques for boundary element methods*. In: Pifko TA, Cruse AB, Armen H, editors. Advanced Topics in Boundary Element Analysis, ASME, p. 235-55 (The Winter Annual Meeting of ASME).
- [46] Nicolazzi, L. A. (2000) *Uma nova técnica de aproximação para o método de Galerkin aplicado às equações integrais de contorno*. Florianópolis, 134p. Tese. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina.
- [47] Nuismer R. J., (1975) *An energy release rate criterion for mixed-mode fracture*, Int. J. Fracture, Vol. 11, pp. 245-250.

- 
- [48] Oliveira, E. R. A.,(1982) *On the accuracy of boundary integral methods using an auxiliary boundary* . Proc. Conf. of Finite Element Methods (ICFEM), Xangai.
- [49] París, F.; Cañas, J. (1997). *Boundary Element Method -Fundamentals and applications*. Oxford,Oxford University Press.
- [50] Parreira, P. and Dong, Y. F. (1992)*Adaptive hierarchical boundary elements*. Adv. Eng. Soft., 15, 249-59.
- [51] Paulino G. H., Shi F., Mukherjee S., Ramesh P. (1997) *Nodal sensitivities as error estimates in computational mechanics*. Acta Mec. 121: 191-213.
- [52] Peano, A. G. (1975) *Hierarchies of conforming finite elements*. Ph. D. Thesis, Washington University.
- [53] Pereira J. P., Duarte C. A. Duarte (2005) *Extraction of stress intensity factors from generalized finite element solutions* Engineering Analysis with Boundary Elements Vol. 29 No. 4, pp. 397-413.
- [54] Pereira J. P. (2004) *Extração de fatores de intensidade de tensão utilizando a solução do método dos elementos finitos generalizados*. São Carlos, 160p. Dissertação (Mestrado). Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- [55] Portela, A., Aliabadi, M.H. & Rooke, D.P. (1992) *The dual boundary element method: effective implementation for crack problems*, Int. J. Num. Meth. Engng., 33(6), 1269-1287.
- [56] Portela, A.(1995) *Dual Boundary Element Analysis of Crack Growth*. Computational Mechanics Publications Southampton UK and Boston USA. Topics in Engineering Vol. 14.
- [57] Parreira, P. (1987) *Self-adaptive p-hierarchical boundary elements in elastostatics*. In C. A. Brebbia, W. L. Wendland and G. Kuhn (eds.), Proc. Boundary

- Element Methods IX, Computational Mechanics Publications and Springer-Verlag, pp. 351-73.
- [58] Rencis JJ, Jong KY.(1988) *An accuracy postprocessor for boundary element analysis*. In: Brebbia CA, editor. Boundary elements X, vol. 1 Southampton /Berlin: Computational Mechanics Publications/Springer, p. 187-203 (Proc 10th Int. Conf. on BEM).
- [59] Rice, J. R. (1968). *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks*. Journal of applied mechanics, v.35, p. 379-386.
- [60] Rank, E. (1984) *A posteriori error estimates and adaptive refinement for some boundary integral element methods*. In Babuška, I., Oliveira, E. R. A. and Zienkiewicz, O. C. (eds.), Proc. Int. Conf. Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Elements Computations, Lisbon, Portugal.
- [61] Rank, E. (1989) *Adaptive h, p, hp versions for boundary integral element methods*. IJNME, 28, 1335-49.
- [62] Rencis, J. J. and Mullen, R. L. (1986) *Solution of elasticity problems by a self-adaptive mesh refinement technique for boundary element computation*. IJNME, 23, 1509-27.
- [63] Rencis, J. J. and Mullen, R. L. (1988) *A self adaptive mesh refinement technique*. Comp. Mech., 3, 309-19.
- [64] Rencis, J. J. and Jong, K. Y. (1989) *A self adaptive h-refinement technique for the boundary element method*. Comp. Meth. App. Mech. Eng., 73, 295-316.
- [65] Salgado, N. (1998). *Boundary Elements Method for Damage Tolerance Design of Aircraft Structures*. Computational Mechanics Publications Southampton UK and Boston USA. Topics in Engineering Vol. 33.

- [66] Sampaio Viola Parreira, P.G. (1987). *Análise do Erro no Método dos Elementos de Fronteira em Elasticidade*. Lisboa. 205p. Tese-Departamento de Engenharia Civil, Universidade Técnica de Lisboa.
- [67] Snyder, M. D. and Cruse, T. A. (1975) *Boundary integral equation analysis of cracked anisotropic plates*. Int. J. of Fract., 11, 315-328.
- [68] Stephan, E. P. and Suri, M. (1989) *On the convergence of the p-version of the boundary element Galerkin Method*. Math. Comput., 52, 31-48.
- [69] Sun, W. and Zamani, N. G. (1992a) *An adaptive h-r boundary element algorithm for the Laplace equation*. IJNME, 33, 537-552.
- [70] Sun, W. and Zamani, N. G. (1992b) *Adaptive mesh refinement/redistribution for the equations of linear elasticity: Boundary element formulation*. Comp. Struct., 44, 627-37.
- [71] Szabó, B. A., Babuška, I. (1991) *Finite Element Analysis*. USA: John Wiley & Sons Inc.
- [72] Telles, J. C. F. (1987) *A Self-Adaptive Co-Ordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.24, p. 959-973.
- [73] Timoshenko, S. P.; Goodier, J. N. (1980). *Teoria da Elasticidade*. 3 ed. Rio de Janeiro, Editora Guanabara Dois S.A.
- [74] Willmersdorf R. B. (1988). *Formulação P-Adaptativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicado a Problemas de Potencial*. Rio de Janeiro, 109 p. Dissertação (Mestrado). COOPE-Universidade Federal de Rio de Janeiro.
- [75] Umetami, S. (1986) *Reliability and efficiency of the boundary element method in elastostatics*. Ph.D. Thesis, University of Southampton, UK.
- [76] Villaça, S. F.; Garcia, L. F. T. (1996). *Introdução à Teoria da Elasticidade*. Rio de Janeiro, COPPE.

- 
- [77] Wendland, W. L. (1981) *Asymptotic accuracy and convergence*. Progress in Boundary Element Methods, Chapter 9, Pentech Press.
- [78] Wendland, W. L. and Yu D. (1992) *A posteriori local error estimates of boundary element methods with some pseudo-differential equations on closed curves*. J. Comp. Math., 10, 273-89.
- [79] Yokoyama, M. and Zhan, J. (1997) *A p-Adaptive 3-D BEM for acquiring the desired accuracy*. Adv. Eng. Software, 28, 395-401.
- [80] Yu, D. (1987) *A posteriori error estimates and adaptive approaches for some boundary element methods*. In Brebbia, C. A., Wendland, W. L. and Kuhn, G. (eds.), Proc. Boundary Elements IX Conf., CMP and Springer-Verlag, pp. 241-56.
- [81] Yuuki, R., Cao, G. Q. and Tamaki, M. (1992) *Efficient error estimation and adaptive meshing method for boundary element analysis*. Adv. Eng. Software, 15, 249-87.
- [82] Yuuki R., Cao G-Q, Ueda S. (1989) *Error estimator for boundary element analysis by using direct regular method*. Proc. Jpn. Nat. Symp. BEM, 6:131-6(in Japanese).
- [83] Zhan, J. and Yokoyama, M. (1997) *An adaptive method for the determination of element degree for acquiring the desired accuracy in 2-D BEM*. Adv. Eng. Software, 28, 259-65.
- [84] Zienkiewiecz, O. C. and Zhu, J. Z. (1987) *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis*. IJNME, 24, 337-57.
- [85] Zienkiewiecz, O. C. , Gago, J. P. de S. R., Kelly, D. W., *The hierarchical concept in finite element analysis*. Computers and Structures. vol 16, pp. 53-65 (1983)

- [86] Zhiye Zhao . (1998) *A simple error indicator for adaptive boundary element method*. Computers and Structures, 68: 433-443.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)