

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

1º TEN BRUNO DE PINHO SILVEIRA

**IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA
PARA APLICAÇÃO EM VEÍCULOS AÉREOS NÃO-TRIPULADOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Roberto Ades, Dr. PUC-Rio

Co-orientador: Paulo César Pellanda, Dr. ENSAE

Rio de Janeiro
2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

c2006

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
Praça General Tibúrcio, 80-Praia Vermelha
Rio de Janeiro-RJ CEP 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmar ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do(s) autor(es) e do(s) orientador(es).

621.317 Silveira, Bruno de Pinho

S587 Identificação de Sistemas no Domínio da Freqüência para Aplicação em Veículos Aéreos Não-Tripulados/ Bruno de Pinho Silveira. - Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2006.
149p.: il, graf., tab.

Dissertação: (mestrado) - Instituto Militar de Engenharia-
Rio de Janeiro, 2006.

1. Sistemas de controle. 2. Identificação de sistemas.
I. Identificação de Sistemas no Domínio da Freqüência para Aplicação em Veículos Aéreos Não-Tripulados. II. Instituto Militar de Engenharia

CDD 621.317

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

1º TEN BRUNO DE PINHO SILVEIRA

**IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA
PARA APLICAÇÃO EM VEÍCULOS AÉREOS NÃO-TRIPULADOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Roberto Ades, Dr. PUC-Rio

Co-orientador: Prof. Paulo César Pellanda, Dr. ENSAE

Aprovada em 13 de dezembro de 2006 pela seguinte Banca Examinadora:

Prof. Roberto Ades, Dr. PUC-Rio do IME - Presidente

Prof. Paulo César Pellanda, Dr. ENSAE do IME

Prof. Nelson Martins, Ph.D. do CEPEL

Prof. Marco Antonio Grivet Mattoso Maia, Ph.D. da PUC-Rio

Rio de Janeiro
2006

A minha amada, querida e eterna esposa, Luciana, companheira de todas as horas e momentos, que sempre me apóia e incentiva.

A minha grande fonte de inspiração, Ana Beatriz, por quem busco superar todos os momentos difíceis e viver intensamente cada dia.

A meus pais, Marina e Orley, e minhas irmãs, Fernanda e Alexandra.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida.

Às duas mulheres mais importantes da minha vida: minha esposa Luciana e minha filha Ana Beatriz. Vocês contribuíram diretamente para o desenvolvimento e para a conclusão deste trabalho... Compreendendo minha ausência em muitas ocasiões, trocando momentos de diversão pelo apoio incondicional e me interrompendo, quando notavam a necessidade, nunca deixando que me esquecesse daquilo que um homem tem de mais importante na vida: a família. Muito obrigado.

A meus pais, Marina e Orley, por nunca terem medido esforços para que pudesse ter a melhor educação possível. Graças a vocês, realizei sonhos, cumpri objetivos e buscarei sempre difundir os ensinamentos e princípios que me deram. Obrigado por tudo.

Às minhas queridas irmãs, Fernanda e Alexandra, sempre ao meu lado, nos momentos difíceis, das quais as virtudes tomei como fonte de inspiração.

Aos professores orientadores e amigos, Roberto Ades e Paulo César Pellanda, pela orientação precisa, paciência com minhas muitas dúvidas e pelas aulas ministradas com segurança. Saibam que são fonte de inspiração profissional para qualquer engenheiro que busque o constante aperfeiçoamento.

Aos professores Nelson Martins, Geraldo Magela Pinheiro Gomes, José Vicente Medlig e Antonio Eduardo Carrilho da Cunha, pelas boas idéias que contribuíram bastante para o bom resultado final.

Aos colegas de turma, Diego Chaves Savelli, Wander Ferreira Martins e Adriano Barros, pelo ambiente descontraído das aulas e união nos momentos de trabalhos em grupo. Boa sorte a todos.

Enfim, a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a conclusão deste trabalho.

"À medida que o conhecimento aumenta, o espanto se aprofunda."

CHARLES MORGAN

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	10
LISTA DE TABELAS	12
LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS	14
1 INTRODUÇÃO	20
1.1 Motivação	20
1.2 Posicionamento, Objetivos e Contribuições do Trabalho	22
1.3 Revisão Bibliográfica	24
1.4 Organização da Dissertação	25
2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS E NOTAÇÃO EMPREGADA	28
2.1 Formulação do Problema	28
2.2 Estruturas de Expansão Geradoras das Funções de Transferência Estimadas ..	30
2.2.1 Base de Laguerre e Conjunto de Laguerre Estendido	31
2.2.2 Conjunto Gerador Otimizado	33
2.3 Imposição de Pólos	34
2.4 Redução de Ordem de Modelos	35
2.4.1 Truncamento Balanceado	36
2.4.2 Truncamento Modal por IDMNI	38
2.5 Procedimento para Melhoria do Condicionamento Numérico de um Sistema de Equações Lineares	40
3 METODOLOGIA DE IDENTIFICAÇÃO N2CACGO	42
3.1 Considerações Iniciais	42
3.2 Equacionamento do Problema	45
3.3 Implementação Computacional	48
3.4 Aplicações	51
3.4.1 Exemplo Acadêmico I	52
3.4.2 Exemplo Acadêmico II	54
3.4.3 Sistema com Atraso	55
3.4.4 Levitador Magnético	58
3.4.5 Sistema Elétrico de Potência Interligado Brasileiro (SIB)	60

4	EXTENSÃO DA METODOLOGIA N2CACGO PARA SISTEMAS MIMO	74
4.1	Considerações Iniciais	75
4.2	Equacionamento do Problema	76
4.3	Implementação Computacional	80
4.4	Aplicações	83
4.4.1	Turbo Gerador	83
4.4.2	Míssil Ar-Ar	86
4.4.3	Aeronave de Combate	88
5	REALIZAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS PARA A MFT IDENTIFICADA	91
5.1	Realização de Gilbert	93
5.1.1	Decomposição das Matrizes de Resíduos	94
5.2	Realização Quase-Mínima	95
5.2.1	Redução de Ordem	95
5.2.2	Forma Bloco-Diagonal Real	95
5.3	Aplicações	97
5.3.1	Turbo gerador	97
5.3.2	Aeronave de Combate	101
6	VEÍCULOS AÉREOS NÃO-TRIPULADOS (VANT)	104
6.1	Fases de Operação de um VANT	105
6.1.1	Especificações	105
6.1.2	Projeto	106
6.1.3	Simulações	109
6.1.4	Desenvolvimento	110
6.1.5	Ensaio de Voo	110
6.2	Teoria Básica de Voo do Helicóptero	110
6.3	Modelagem da Dinâmica do Helicóptero	112
7	CONCLUSÕES E SUGESTÕES	119
7.1	Conclusões	119
7.2	Sugestões	120
8	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	123

9	APÊNDICES	129
9.1	APÊNDICE 1: Lemas e Teoremas	130
9.2	APÊNDICE 2: Modelos Monovariáveis Estimados	133
9.3	APÊNDICE 3: Modelos Multivariáveis Estimados	139
9.4	APÊNDICE 4: Pólos dominantes do SEP Interligado Brasileiro.....	143
9.5	APÊNDICE 5: Modelo linearizado do turbo-gerador	144
9.6	APÊNDICE 6: Modelos não-linear e linearizado do míssil.....	145
9.7	APÊNDICE 7: Modelo linearizado da Aeronave de Combate	147

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG.2.1	Algoritmo para escalonamento de linhas e colunas da matriz de coeficientes de um SEL.	41
FIG.3.1	Fluxograma da metodologia de identificação proposta (SISO).	44
FIG.3.2	Diagramas de resposta em frequência dos modelos obtidos e do sistema (Exemplo 3.4.1): (a) $G_e^1(s)$, (b) $G_e^2(s)$, (c) $G_e^3(s)$ e (d) $G_e^4(s)$	53
FIG.3.3	Diagramas de resposta em frequência dos modelos obtidos e do sistema (Exemplo 3.4.2): (a) $G_e^6(s)$ e (b) $G_e^8(s)$	55
FIG.3.4	Exemplo de um sistema com retardo: (a) Sistema de controle de nível, (b) Diagrama em blocos do sistema.	56
FIG.3.5	Diagramas de resposta em frequência dos modelos obtidos e do sistema (Exemplo 3.4.3): (a) $G_e^2(s)$, (b) $G_e^4(s)$, (c) $G_e^8(s)$ e (d) $G_e^9(s)$	58
FIG.3.6	Levitador magnético (Laboratório de Controle, IME)	59
FIG.3.7	Diagramas de resposta em frequência dos modelos obtidos e do sistema (Exemplo 3.4.4): (a) $G_e^4(s)$, (b) $G_e^6(s)$, (c) $G_e^7(s)$ e (d) $G_e^9(s)$	60
FIG.3.8	Diagrama em blocos do procedimento adotado no Exemplo 3.4.5.	62
FIG.3.9	Espectro de pólos (.) e pólos dominantes (x) do SIB.	63
FIG.3.10	Fluxograma da metodologia proposta para redução de ordem de modelos de grande porte (Exemplo 3.4.5).	64
FIG.3.11	Diagramas de resposta em frequência dos modelos obtidos pelo Método 1 e do sistema (Exemplo 3.4.5): (a) $G_R^6(s)$, (b) $G_R^8(s)$, (c) $G_R^{10}(s)$ e (d) $G_R^{12}(s)$	70
FIG.3.12	Diagramas de resposta em frequência dos modelos obtidos pelo Método 2 com ajuste completo dos zeros e do sistema (Exemplo 3.4.5): (a) $G_{MC}^2(s)$, (b) $G_{MC}^4(s)$, (c) $G_{MC}^6(s)$ e (d) $G_{MC}^8(s)$	71
FIG.3.13	Diagramas de resposta em frequência dos modelos obtidos pelo Método 2 com ajuste parcial dos zeros e do sistema (Exemplo 3.4.5): (a) $G_{MP}^2(s)$, (b) $G_{MP}^4(s)$, (c) $G_{MP}^6(s)$ e (d) $G_{MP}^8(s)$	72
FIG.3.14	Diagramas de resposta em frequência dos modelos que apresentaram os menores custos pelo Método 1 ($G_{R,r}^{15}(s)$), pelo Método 2 ($G_{MC}^{10}(s)$) e do modelo completo ($G(s)$) (Exemplo 3.4.5).	73

FIG.4.1	Fluxograma da metodologia de identificação proposta (MIMO).	77
FIG.4.2	Diagramas de resposta em frequência dos modelos obtidos ($G_e^5(s)$ e $G_e^6(s)$) e do sistema ($G(s)$) com escala em dB, nos seguintes canais (Exemplo 4.4.1): (a) 1:1, (b) 1:2, (c) 2:1, (d) 2:2	84
FIG.4.3	Diagramas de resposta em frequência dos modelos obtidos ($G_e^5(s)$ e $G_e^6(s)$) e do sistema ($G(s)$) com escala linear, nos seguintes canais (Exemplo 4.4.1): (a) 1:1, (b) 1:2, (c) 2:1, (d) 2:2	85
FIG.4.4	Variáveis de estado e entrada do míssil utilizado.	86
FIG.4.5	Diagramas de resposta em frequência dos modelos obtidos ($G_e^2(s)$ e $G_e^3(s)$) e do sistema ($G(s)$) nos seguintes canais (Exemplo 4.4.2): (a) 1:1, (b) 2:1	87
FIG.4.6	Variáveis envolvidas no Exemplo 4.4.3: (a) Variáveis de estado da dinâmica vertical. (b) Comandos de entrada (<i>elevon</i> e <i>canard</i>).	88
FIG.4.7	Diagramas de resposta em frequência dos modelos obtidos ($G_e^4(s)$ e $G_e^5(s)$) e do sistema ($G(s)$) (Exemplo 4.4.3): (a) Canal 1:1, (b) Canal 1:2, (c) Canal 2:1, (d) Canal 2:2	90
FIG.5.1	Fluxograma da metodologia proposta para a realização da MFT identificada.	98
FIG.6.1	Concepção de um VANT: fases de operação.	106
FIG.6.2	Diagrama em blocos da aviônica de um projeto de VANT.	109
FIG.6.3	Vôo pairado	112
FIG.6.4	Vôo vertical	112
FIG.6.5	Vôo em cruzeiro	112
FIG.6.6	Eixos e grandezas envolvidas na modelagem convencional da dinâmica do helicóptero.	113
FIG.6.7	Diagrama em blocos da dinâmica aumentada do helicóptero: aeronave, barra estabilizadora e sistema de amortecimento de guinada.	115

LISTA DE TABELAS

TAB.3.1	Coeficientes de $G(s)$ para o Exemplo 3.4.1.	52
TAB.3.2	Custos de ajuste dos modelos estimados $G_e^n(s)$ pela Metodologia N2CACGO (J_1) e por ADES & VALLE (2005) (J_2) para o Exemplo 3.4.1.	52
TAB.3.3	Custos de ajuste dos modelos estimados $G_e^n(s)$ pela Metodologia N2CACGO (J) para o Exemplo 3.4.2.	54
TAB.3.4	Custos dos modelos estimados $G_e^n(s)$ pela Metodologia N2CACGO (J) para o Exemplo 3.4.3.	57
TAB.3.5	Custos de ajuste dos modelos estimados $G_e^n(s)$ pela Metodologia N2CACGO (J_1) e por WULHYNEK (2002) (J_2) para o Exemplo 3.4.4.	59
TAB.3.6	Custos das soluções obtidas pelo Método 1 para o Exemplo 3.4.5.	67
TAB.3.7	Custos das soluções obtidas pelo Método 2 para o Exemplo 3.4.5.	68
TAB.3.8	Custos das soluções obtidas por truncamento modal (IDMNI) e BALMR para o Exemplo 3.4.5.	68
TAB.3.9	Pólos e zeros do modelo $G_{R,r}^{15}(s)$ obtido pelo Método 1 para o Exemplo 3.4.5.	68
TAB.3.10	Pólos e zeros dos modelos $G_{MC}^{10}(s)$ e $G_{MP}^{10}(s)$ obtidos pelo Método 2 para o Exemplo 3.4.5.	69
TAB.4.1	Custos obtidos (por canal e total) para o Exemplo 4.4.1.	83
TAB.4.2	Identificação da ressonância para o Exemplo 4.4.1.	86
TAB.4.3	Custos obtidos (por canal e total) para o Exemplo 4.4.2.	87
TAB.4.4	Custos obtidos por canal e total para o Exemplo 4.4.3.	89
TAB.5.1	Valores singulares de Hankel (σ_i) calculados para a realização complexa de Gilbert do Exemplo 5.3.1.	98
TAB.5.2	Custos das soluções obtidas para o Exemplo 5.3.1.	100
TAB.5.3	Valores singulares de Hankel (σ_i) calculados para a realização complexa de Gilbert do Exemplo 5.3.2.	101
TAB.5.4	Custos das soluções obtidas para o Exemplo 5.3.2.	103
TAB.6.1	Características físicas do Nova Cuatro (IME), Yamaha R-50 (CMU) e X-Cell .60 (MIT)	113

TAB.9.1	Coeficientes de $G_e^m(s)$	133
TAB.9.2	Coeficientes de $G_e^m(s)$: Exemplo Acadêmico I.	133
TAB.9.3	Coeficientes de $G_e^m(s)$: Exemplo Acadêmico II.	134
TAB.9.4	Coeficientes de $G_e^m(s)$: Sistema com Atraso.	135
TAB.9.5	Coeficientes de $G_e^m(s)$: Levitador Magnético.	136
TAB.9.6	Coeficientes de $G_{R,r}^n(s)$: SIB - Método 1.	137
TAB.9.7	Coeficientes de $G_{MC}^n(s)$: SIB - Método 2 (Ajuste completo).	137
TAB.9.8	Coeficientes de $G_{MP}^n(s)$: SIB - Método 2 (Ajuste parcial).	138
TAB.9.9	Coeficientes de $G_e^m(s)$ (MFT).	139
TAB.9.10	Coeficientes de $G_e^m(s)$: Turbo Gerador (2 entradas e 2 saídas).	140
TAB.9.11	Coeficientes de $G_e^m(s)$: Míssil (1 entrada e 2 saídas).	141
TAB.9.12	Coeficientes de $G_e^m(s)$: Aeronave de Combate (2 entradas e 2 saídas).	142
TAB.9.13	Dominância dos pólos do SIB segundo SILVA (2005).	143

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

ABREVIATURAS

BALMR	<i>Balanced Model Reduction</i>
Caltech	<i>California Institute of Technology</i>
CGO	Conjunto Gerador Otimizado
CIFER	<i>Comprehensive Identification from Frequency Response</i>
CMU	<i>Carnegie Mellon University</i>
(D)GPS	<i>(Differential) Global Position System</i>
EB	Exército Brasileiro
Embrapa	Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária
ETH Zurich	<i>Eldgenössische Technische Hochschule Zürich</i>
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
FT	Função de Transferência
GMF	Grupo de Mísseis e Foguetes
IDM(NI)	Índice de Dominância Modal (baseado na Norma \mathcal{H}_∞)
IME	Instituto Militar de Engenharia
IMU	<i>Inertial Measurement Unity</i>
ITA	Instituto Tecnológico de Aeronáutica
MD	Ministério da Defesa
MFT	Matriz Função de Transferência
MIMO	<i>Multiple Input Multiple Output</i>
MIT	<i>Massachusetts Institute of Technology</i>
NASA	<i>National Aeronautics and Space Administration</i>
PBCT	Plano Básico de Ciência e Tecnologia
QM	Quase Mínima
SCTEx	Sistema de Ciência e Tecnologia do Exército
SEL	Sistema de Equações Lineares
SEP	Sistema Elétrico de Potência
SIB	Sistema Interligado Brasileiro
SISO	<i>Single Input Single Output</i>
SVD	<i>Singular Value Decomposition</i>

TCSC	<i>Thyristor Controlled Series Compensator</i>
TU Berlin	<i>Technischen Universität Berlin</i>
UnB	Universidade de Brasília
USP	Universidade de São Paulo
VANT	Veículo Aéreo Não-Tripulado

SÍMBOLOS

*	Operador conjugado
\triangleq	Por definição igual a
$\ \cdot\ _2$	Norma dois de números complexos
$\ \cdot\ _\infty$	Norma infinito de números complexos
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto interno entre vetores de números complexos
$\overline{R_n^{j\omega}}$	$= [(R_n^{j\omega})^*]^T$
$S_m^{-j\omega}$	$= (S_m^{j\omega})^*$
X_{ω_i}	$= X(j\omega_i)$
$Re(x)$	Parte real do número complexo x
$Im(x)$	Parte imaginária do número complexo x
$diag(x_1, \dots, x_n)$	Matriz cuja diagonal é formada pelos elementos x_1, \dots, x_n
$\mathcal{G}_S (\mathcal{G}_M)$	Conjunto de dados de resposta em frequência do sistema SISO (MIMO)
$J_S(\underline{\theta}) (J_M(\underline{\theta}))$	Função objetivo SISO (MIMO)
J_{max}	Custo desejado e arbitrado pelo operador
σ_i	Valores singulares de Hankel
λ	Índice que referencia os canais de um sistema MIMO
Λ	Conjunto formado por todas as combinações possíveis entre as entradas e as saídas de um sistema MIMO
$\underline{u}_i(t)$	Vetor de amostras da entrada i do sistema
$\underline{y}_j(t)$	Vetor de amostras da saída j do sistema
$\underline{\omega}$	Vetor de frequências de interesse
m	Número de pontos selecionados na faixa de frequências de interesse
n	Ordem da FT estimada (SISO) ou do denominador comum da MFT estimada (MIMO)

$\underline{\alpha}$	Vetor de parâmetros do numerador da FT estimada de um sistema SISO
$\underline{\alpha}^\lambda$	Vetor de parâmetros do numerador da FT estimada do canal λ de um sistema MIMO
$\underline{\alpha}^\Lambda$	Vetor de parâmetros dos numeradores das FT estimadas de todos os canais de um sistema MIMO
$\underline{\beta}$	Vetor de parâmetros do denominador da FT estimada (SISO) ou do denominador comum da MFT estimada (MIMO)
$\underline{\theta}$	Vetor de parâmetros a ser identificado: $[\underline{\alpha}^T \ \underline{\beta}^T]^T$ (SISO) ou $[\underline{\alpha}^{\Lambda T} \ \underline{\beta}^T]^T$ (MIMO)
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{C}	Conjunto dos números complexos
\mathbb{C}_+^0 (\mathbb{C}_-^0)	Conjunto dos números complexos com parte real estritamente positiva (negativa)
\mathbb{N}^*	Conjunto dos números naturais estritamente positivos
\mathcal{L}_2	Espaço das matrizes cujos elementos são funções em s quadraticamente integráveis sobre o eixo imaginário
\mathcal{H}_2^+ (\mathcal{H}_2^-)	Subespaço do \mathcal{L}_2 cujos elementos são funções em s analíticas em \mathbb{C}_+^0 (\mathbb{C}_-^0)
\mathcal{RH}_2^+ (\mathcal{RH}_2^-)	Subespaço do \mathcal{H}_2^+ (\mathcal{H}_2^-) cujos elementos são funções em s racionais estritamente próprias e estáveis (instáveis)
\mathcal{RH}_∞^+	Espaço das matrizes cujos elementos são funções racionais em s próprias, estáveis e limitadas sobre o eixo imaginário
$L_k(s)$	Conjunto de funções de Laguerre
$P_i(s)$	Conjunto de funções pré-definidas para o CGO
$N(\underline{\alpha}, s)$	Polinômio do numerador da FT estimada (SISO)
$N(\underline{\alpha}, j\underline{\omega})$	Resposta em frequência do polinômio do numerador da FT estimada (SISO)
$N(\underline{\alpha}^\lambda, s)$	Polinômio do numerador da FT estimada do canal λ
$N(\underline{\alpha}^\lambda, j\underline{\omega})$	Resposta em frequência do polinômio do numerador da FT estimada do canal λ
$D(\underline{\beta}, s)$	Polinômio do denominador da FT estimada (SISO) ou do denominador comum da MFT estimada (MIMO)

$D(\underline{\beta}, j\underline{\omega})$	Resposta em frequência do polinômio do denominador da FT estimada (SISO) ou do denominador comum da MFT estimada (MIMO)
$G(s)$	FT (SISO) ou MFT (MIMO) do sistema
$G_e^n(\underline{\theta}, s)$	FT estimada de ordem n (SISO) ou MFT estimada com denominador comum de ordem n (MIMO)
$G_e^n(\underline{\theta}, j\underline{\omega})$	Resposta em frequência da FT $G_e^n(\underline{\theta}, s)$ (SISO) nos pontos $s = j\underline{\omega}$
$G_{e,\lambda}^n(\underline{\theta}, j\underline{\omega})$	Resposta em frequência da FT $G_{e,\lambda}^n(\underline{\theta}, s)$ (MIMO) nos pontos $s = j\underline{\omega}$
$G_M(s)$	Modelo de ordem reduzida que contém a dinâmica relevante do sistema
$G_{MC} (G_{MP}(s))$	Modelo de ordem reduzida obtido pelo método de ajuste completo (parcial) dos zeros
$G_R^r(s)$	Modelo reduzido de ordem $r \ll n$

RESUMO

A síntese de uma lei de controle para um sistema requer, previamente, a obtenção de um modelo matemático que descreva adequadamente o comportamento dinâmico da planta. Em geral, o modelo de um sistema pode ser obtido de duas maneiras distintas. A primeira consiste em utilizar as leis das ciências, como as Leis de Kirchhoff, Leis da Aerodinâmica, etc, que regem a sua dinâmica. Entretanto, se o sistema a ser modelado for complexo, essa abordagem pode não ser eficiente. As técnicas de identificação surgem como uma alternativa à modelagem convencional. Basicamente, consistem em estimar modelos a partir de um conjunto de dados de entrada/saída medidos do sistema.

Neste contexto e motivada pelo Plano Básico de Ciência e Tecnologia do Exército (PBCT/EB), esta dissertação tem por objetivo desenvolver um método de identificação para aplicação em Veículos Aéreos Não-Tripulados (VANT).

O objetivo do método de identificação proposto é minimizar o erro de ajuste entre as respostas em frequência do modelo identificado e a do sistema sob análise. A função objetivo é baseada em norma quadrática. O problema de otimização formulado é convexo e sua solução global é obtida analiticamente para os sistemas monovariáveis e multivariáveis lineares e invariantes no tempo, usando conjuntos geradores.

Para mostrar a eficiência do método proposto são apresentadas cinco aplicações de sistemas monovariáveis: dois exemplos acadêmicos; um modelo de um sistema com atraso temporal, com a metodologia gerando aproximações racionais próprias; o Levitador Magnético do Instituto Militar de Engenharia; e, por fim, uma aplicação onde o método de identificação é usado de maneira combinada com uma técnica de truncamento modal para a obtenção de modelos de ordem reduzida de sistemas elétricos de potência de grande porte. Neste último caso, foi utilizado o Sistema Elétrico de Potência Interligado Brasileiro, que tem mais de 1.600 estados.

O método é também testado em três exemplos de sistemas multivariáveis: um turbogerador, um míssil ar-ar e uma aeronave de combate. Os elementos das matrizes funções de transferência estimadas têm denominador comum, isto é, as funções de transferência dos canais compartilham o mesmo conjunto de pólos.

Um método para determinar as realizações em espaço de estados para as matrizes funções de transferência identificadas também é proposto. A Realização Quase-Mínima obtida é bloco-diagonal real e baseada na realização diagonal de Gilbert.

Por fim, são apresentadas, resumidamente, a eletrônica embarcada e as fases de operação de um VANT. A complexidade envolvida na modelagem convencional de um helicóptero em escala reduzida é apresentada, com ênfase especial no papel do método de identificação.

ABSTRACT

The synthesis of a control system law requires a previous obtention of a mathematical model that adequately describes the system dynamical behavior. In general, a system model can be obtained in two distinct ways. The first one consists in using science laws, such as Kirchhoff's Laws, Aerodynamics' Laws, etc., to describe the system dynamics. However, if the system to be modeled has some degree of complexity, this approach may no longer be cost-effective. Identification techniques appear as an alternative to this conventional modeling. Basically, they consist in estimating models from a set of measured input/output system data.

In this context and motivated by the Basic Plan of Science and Technology of the Brazilian Army (PBCT/EB), this dissertation aims to develop an identification method that is suitable to be applied to Unmanned Aerial Vehicles (UAV).

The goal of the proposed identification method is to minimize the error between the frequency response of the identified model and the actual system. The objective function is based on a quadratic norm. The formulated optimization problem is convex and its global solution is analytically obtained for monovariate and multivariate linear time-invariant systems by using generating sets.

Five monovariate examples are used to show the effectiveness of the proposed method: two academic examples; a system model with time delay, for which the method yields to a rational proper transfer function model; a Magnetic Levitation System; and, finally, an application where the identification method is used in tandem with a modal truncation technique to obtain reduced-order models for large scale power systems. In this last case, the Brazilian interconnected power system, which has more than sixteen hundred states, was used.

The method is also tested on three multivariate system examples: a turbo-generator, an air-air missile and a combat aircraft. The elements of the estimated matrix transfer functions have a common denominator, that is, the transfer function channels share the same set of poles.

A method to determine the state-space realizations for the identified matrix transfer functions is also proposed. The obtained quasi-minimum realization is block-diagonal real and based on the Gilbert's diagonal realization.

Finally, the embedded electronics and the steps for the operation of a typical UAV are briefly described. The complexity involved in the conventional modeling of a small scale helicopter is presented with a special emphasis on the role of the identification methods.

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Ao longo da história, o ser humano vem buscando ajustar seus sistemas de modo que funcionem de acordo com condições pré-estabelecidas e atendam, ao final, às especificações do projeto. Dos sistemas mais simples, como o ajuste manual da temperatura da água de um chuveiro a partir da atuação nas torneiras de águas quente e fria, aos mais complexos, como os sistemas aeronáuticos, satélites e reatores nucleares, alguns conceitos como realimentação, observação, controle e estabilidade se fazem presentes.

Pode-se dizer que a Engenharia de Controle visa, basicamente, fazer com que os sistemas se comportem de acordo com especificações pré-estabelecidas. Não há, entretanto, como controlar a enorme variedade de dispositivos e sistemas desconhecendo suas dinâmicas, ou seja, sem saber como as saídas se comportam em face da aplicação de diferentes entradas. Esse relacionamento entre as entradas e as saídas é comumente descrito por um modelo matemático.

Os modelos matemáticos são normalmente utilizados para descrever fenômenos da natureza. As leis da Mecânica de Newton, as leis das Correntes e das Tensões de Kirchhoff e as leis da aerodinâmica são exemplos de tentativas de descrever fenômenos da natureza através de modelos ou relacionamentos matemáticos. Os modelos auxiliam o homem a entender melhor um fenômeno e são empregados para simular o comportamento dinâmico do sistema em estudo.

Em princípio, os modelos são obtidos a partir do equacionamento das leis que regem a dinâmica do sistema. Entretanto, a complexidade envolvida pode fazer da modelagem uma tarefa matematicamente complicada. O conhecimento restrito das leis da dinâmica do sistema e a imprecisão na medição de alguns parâmetros dificultam, significativamente, as tarefas intermediárias (equacionamento do problema) e contribuem para a obtenção de modelos não muito fiéis à planta sob análise. Os prazos estreitos e os recursos financeiros limitados para o desenvolvimento de projetos também podem inviabilizar uma operação deste tipo. Como exemplo, pode-se citar os sistemas aeronáuticos. Com características peculiares e dinâmica complexa, sua modelagem e controle requerem altos investimentos em pesquisa e recursos humanos e tempo relativamente grande para a obtenção de resultados satisfatórios e precisos. Este trabalho apresenta, de maneira simplificada, a

modelagem de um helicóptero em escala reduzida, onde é possível verificar, pela complexidade das equações e do assunto (aerodinâmica, corpo rígido, acoplamentos, etc), que a determinação de um modelo dinâmico a partir do equacionamento dos fenômenos que descrevem o comportamento desta aeronave não é uma tarefa trivial.

Neste contexto, a identificação surge como uma ferramenta alternativa para a obtenção de modelos matemáticos aproximados, em um ponto de operação desejado, do sistema em estudo. A partir da observação dos sinais de entrada e de saída aplicados ao sistema é formado um conjunto de dados para o problema. Os métodos de identificação buscam, através de algoritmos específicos, fornecer um modelo que reproduza o comportamento dinâmico do sistema real, com base no conjunto de dados disponível.

A identificação pode ser feita no domínio do tempo ou da frequência. No primeiro, dados temporais medidos na entrada e na saída do sistema são utilizados para ajustar um modelo. No segundo tipo, características frequenciais do sistema a ser identificado são utilizadas. As duas formas de identificação apresentam resultados bastante eficientes, porém PINTELLON et alii (1994) e VACLAVEK & VAVRIN (1995) citam as seguintes vantagens da identificação no domínio da frequência:

- a) Tratamento do ruído: as frequências de ruído estão normalmente distantes da frequência do sinal de teste. Sendo assim, o ruído pode ser avaliado e eliminado com facilidade;
- b) Volume de dados: o conjunto de dados utilizado, normalmente, medidas da resposta em frequência do sistema, é menor que aquele necessário para os métodos no domínio do tempo, que requerem a análise de grandes séries de medidas;
- c) Condições iniciais: o experimento no domínio da frequência não requer a imposição de condições iniciais, tendo em vista ser analisado em regime permanente;
- d) Combinação de dados: as medidas de resposta em frequência podem ser obtidas a partir de vários experimentos e os resultados podem ser combinados, posteriormente; e
- e) Validação do modelo: as próprias medidas de resposta em frequência obtidas do sistema real são bons pontos para avaliar o modelo obtido;

Busca-se com esta dissertação, apresentar uma metodologia de identificação de sistemas, no domínio da frequência, para aplicação em Veículos Aéreos Não-Tripulados

(VANT). As vantagens da abordagem freqüencial não significam que os métodos de identificação no domínio do tempo sejam ineficientes.

1.2 POSICIONAMENTO, OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO

É possível posicionar este trabalho nos contextos científico-tecnológico e estratégico. Para o segundo, pode-se afirmar que a dissertação segue a linha de pesquisa em sistemas de defesa e atinge uma das metas do Plano Básico de Ciência e Tecnologia (PBCT). O PBCT é o plano de ação do Sistema de Ciência e Tecnologia do Exército (SCTEx). Seus principais objetivos são planejar, executar, controlar e aperfeiçoar os macroprocessos de Ciência e Tecnologia do Exército, seus programas e projetos, e fomentar a Indústria Nacional de Defesa. Visa atingir, por meio de inovações, produtos e serviços, uma capacidade científico-tecnológica que permita à Força Terrestre contribuir para o poder dissuasório do País. O PBCT busca realizar os projetos prioritários do SCTEx através dos Grupos Finalísticos. Assim, cabe ao Grupo de Mísseis e Foguetes (GMF) a incumbência de realizar pesquisa básica e aplicada sobre Veículos Aéreos Não-Tripulados (VANT), implementar um protótipo de VANT para reconhecimento e busca de alvos, e desenvolver a estação de solo para o Projeto VANT do Ministério da Defesa (MD).

O assunto é relevante, tendo em vista as pesquisas que vêm sendo realizadas em todo o mundo com o objetivo de empregar os VANT nas mais diversas situações, tanto civis como, principalmente, militares. Esse tipo de aplicação tecnológica traz algumas vantagens agregadas, como: economia de tempo em treinamento de pilotos e mecânicos, economia de recursos financeiros na manutenção e logística envolvidas nas missões aeronáuticas e cumprimento de tarefas que não poderiam ser executadas por seres humanos ou que colocariam em risco a vida. Uma síntese histórica e alguns projetos sobre VANT que estão sendo desenvolvidos podem ser encontrados em MAGALHÃES NETO (2005) e BUDIYONO (2005a), respectivamente.

Cientificamente, a dissertação está situada na área de identificação de sistemas. A metodologia apresentada é paramétrica e de natureza freqüencial, visando obter modelos lineares das plantas em estudo. O método consiste em solucionar problemas de otimização cujas funções objetivo são baseadas em norma quadrática (N_2), convexas nas variáveis de projeto (C), com solução analítica (A), adotando conjuntos geradores otimizados (CGO) como estrutura de expansão para as Funções de Transferência (FT) estimadas. Com a finalidade de simplificar a notação, denomina-se a metodologia em questão N_2CACGO . Inicialmente, o método restringe-se a sistemas SISO (*Single Input Single Output*), ou

monovariáveis. Os parâmetros a serem determinados relacionam-se aos pólos e zeros das FT estimadas. Em seguida, é proposta uma extensão da metodologia N2CACGO para sistemas MIMO (*Multiple Input Multiple Output*), ou multivariáveis. Esta abordagem, além de manter as características de otimalidade e solução analítica do problema anterior, possibilita a obtenção de Matrizes Função de Transferência (MFT), cujos elementos (FT dos canais) compartilham uma dinâmica comum, ou seja, o mesmo conjunto de pólos. O desenvolvimento da técnica multivariável permite a identificação simultânea de todos os canais, dadas as respectivas respostas em frequência. Desta maneira, é possível obter modelos MIMO sem que seja necessário aplicar a técnica SISO em cada par entrada/saída individualmente.

Além de sistemas aeronáuticos civis e militares, a técnica de identificação proposta pode ser aplicada em sistemas elétricos de potência, plantas químicas, etc. A aplicação da metodologia N2CACGO em sistemas com retardo é uma alternativa aos métodos de obtenção de modelos que utilizam técnicas de aproximação, como a de Padé, por exemplo. Em algumas situações, a identificação pode, ainda, ser usada como uma técnica auxiliar de redução de ordem de modelos de sistemas de grande porte. De posse do modelo identificado e empregando uma estratégia de controle, pode-se alterar o comportamento dinâmico do sistema modelado, de acordo com os requisitos do projeto.

Tendo em vista a exposição anterior, os objetivos desta dissertação são:

- a) Estudar técnicas de identificação de sistemas no domínio da frequência;
- b) Desenvolver uma metodologia de identificação para sistemas monovariáveis, lineares (ou pelo menos, lineares em torno do ponto de operação) e do tipo caixa preta (ou seja, sobre os quais não se conhece, *a priori*, a dinâmica) utilizando CGO;
- c) Estender a metodologia monovariável para sistemas multivariáveis;
- d) Utilizar a técnica proposta para obtenção de modelos de sistemas diversos, como plantas químicas, elétricas, aeronáuticas, etc;
- e) Submeter a técnica a sistemas com retardo;
- f) Utilizar a técnica de truncamento modal em conjunto com metodologias de identificação para obtenção de modelos de ordem reduzida de sistemas elétricos de grande porte;
- g) Realizar um estudo na área de VANT;

- h) Mapear as fases de operação de um VANT; e
- i) Propor a aviônica embarcada para um projeto de VANT.

As contribuições científicas resultantes desse trabalho são:

- a) Desenvolvimento e implementação de uma técnica de identificação no domínio da frequência (N2CACGO) para aplicação em sistemas SISO, com determinação analítica dos parâmetros e onde os modelos estimados são lineares (ou lineares em torno de um ponto de operação) e invariantes no tempo;
- b) Extensão da técnica N2CACGO para a identificação de sistemas MIMO, com determinação analítica dos parâmetros e onde o modelo multivariável, estimado na forma de MFT, contém um denominador comum, isto é, com todos os canais compartilhando a mesma dinâmica;
- c) Desenvolvimento e implementação de uma metodologia para obtenção de modelos de ordem reduzida para sistemas elétricos de potência de grande porte, mantendo a dinâmica relevante, através da combinação da técnica N2CACGO e de truncamento modal;
- d) Desenvolvimento e implementação de uma metodologia para a realização em espaço de estados da MFT identificada; e
- e) Mapeamento das fases de operação de um VANT e proposta da sua aviônica embarcada.

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Para atender aos objetivos propostos, um extenso levantamento bibliográfico foi realizado. Desta maneira, a bibliografia selecionada foi dividida em sete áreas de concentração, de forma a atender às diversas etapas que serão cobertas no decorrer do trabalho, conforme a seguinte lista:

- Algoritmos e procedimentos de identificação: LEVY (1959), KUMARESAN (1990), GU et alii (1992), SOYSAL & SEMLYEN (1993), GUSTAVSEN & SEMLYEN (1999), ADES (1999), CARVALHO (2000), AGUIRRE (2000), MACEDO (2001), WULHYNEK (2002), WULHYNEK & ADES (2003), ADES & WULHYNEK (2004), VALLE (2005), ADES & VALLE (2005), ADES & SILVEIRA (2006);

- Teoria de sistemas de controle: KAILATH (1980), VIDYASAGAR (1985), DORF (1986), MACIEJOWSKI (1989), GREEN & LIMEBEER (1995), ZHOU (1996);
- Análise modal e redução de ordem de modelos: MOORE (1981), ENNS (1984), TOMBS & POSTLETHWEITE (1987), VARGA (1991), AGUIRRE (1994), WATANABE et alii (1995), VARGA (1995), ZHOU (1996), RAMIREZ (2004), GUSTAVSEN & SEMLYEN (2004), ROMMES & MARTINS (2005), MARTINS et alii (2005), SILVA (2005), SILVEIRA et alii (2006), ROMMES & MARTINS (2006);
- Realizações para MFT: GILBERT (1963), LUENBERGER (1967), WOLOVICH (1970), JORDAN & SRIDHAR (1973), DICKINSON et alii (1974), DATTA (1977), HANZON (1995);
- Modelagem e controle de sistemas elétricos de potência: LIMEBEER et alii (1979), MARTINS (1986), MARTINS et alii (1999), DENEGRI et alii (2001), SILVA (2005);
- Modelagem e controle de sistemas aeronáuticos (mísseis, aviões, helicópteros e VANT): SAFONOV et alii (1981), HUNG & MACFARLANE (1982), REICHERT (1992), NICHOLS et alii (1993), MORRIS et alii (1994), TISCHLER (1995), BENDOTTI & MORRIS (1995), ZHU & NIEUWSTADT (1996), GAVRILETS et alii (2000), METTLER et alii (2000a), METTLER et alii (2000b), SPRAGUE et alii (2001), METTLER et alii (2002), D'OLIVEIRA (2002), METTLER (2003), JANG & TOMLIN (2003), SIMÕES et alii (2004), HONG et alii (2005), CAI et alii (2005), BUDIYONO (2005a), BUDIYONO (2005b), SANTOS (2005); e
- Algoritmos diversos: STEWART (1973), eliminação Gaussiana (STRANG, 1988), métodos numéricos de otimização (BAZARAA et alii, 1993), procedimento para melhoria do número de condicionamento de um sistema de equações lineares (RUIZ, 2005).

1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Essa dissertação encontra-se dividida em 7 capítulos e 7 apêndices. No presente capítulo é feita uma introdução, composta pela motivação, posicionamento em relação ao meio científico e objetivos do trabalho. Apresenta-se também uma vasta referência bibliográfica sobre os assuntos abordados ao longo do texto, procurando selecionar e

levantar informações sobre trabalhos relevantes e sobre o que vem sendo estudado e implementado no meio científico. O restante do trabalho é dividido como se segue:

- Capítulo 2 - Teoria e notação: o capítulo tem início com a formulação do problema de identificação multivariável. A abordagem SISO (uma entrada e uma saída) é um caso particular. Em seguida, são apresentadas as estruturas geradoras das FT estimadas, fundamentais para o equacionamento do problema N2CACGO e sua extensão MIMO. Propõe-se também uma metodologia para obtenção de modelos reduzidos de sistemas de grande porte, a partir da combinação de técnicas de identificação (N2CACGO e imposição de pólos) e truncamento modal. Os resultados obtidos podem ser comparados àqueles alcançados por truncamento balanceado. Por fim, apresenta-se um algoritmo para melhoria do número de condicionamento da matriz de coeficientes dos sistemas de equações lineares envolvidos.
- Capítulos 3 e 4 - Identificação de Sistemas SISO e MIMO: inicialmente, desenvolve-se a metodologia N2CACGO para sistemas monovariáveis. Propõe-se uma extensão para o caso multivariável, onde a solução é ótima, segundo o critério adotado, e obtida analiticamente. Ambos os capítulos possuem seções específicas que apresentam o equacionamento do problema, a implementação computacional e algumas aplicações para cada caso. Para a identificação de sistemas monovariáveis são apresentados cinco exemplos, sendo: dois acadêmicos, um modelo de um sistema com retardo, um modelo de um sistema elétrico de grande porte (Sistema Interligado Brasileiro - SIB) e um sistema de levitação magnética com dados medidos em laboratório. As aplicações para o caso multivariável envolvem os modelos de um turbo gerador, de um míssil ar-ar e de uma aeronave de combate.
- Capítulo 5 - Realizações para a MFT: a metodologia N2CACGO e sua extensão para sistemas MIMO fornecem modelos sob a forma de FT e MFT, respectivamente. Essas representações, entretanto, não são muito robustas numericamente para implementações computacionais. Para o caso SISO, a transformação de uma FT em espaço de estados é uma tarefa relativamente simples, e pode ser feita utilizando-se, por exemplo, as formas canônicas. Entretanto, para sistemas MIMO, o número de realizações de uma MFT será igual ao número de fatorações possíveis dessa MFT, o que torna mais complexa a tarefa de estabelecer uma forma canônica. A solução proposta, denominada Quase-Mínima, busca encontrar uma realização para a MFT baseada na aproximação diagonal mínima de Gilbert. O capítulo termina

com a obtenção de realizações em espaço de estado para duas MFT anteriormente identificadas (turbo gerador e aeronave de combate).

- Capítulo 6 - Veículos Aéreos Não-Tripulados: seguindo uma das linhas de pesquisa do PBCT/EB, os principais objetivos desse capítulo são mapear as fases de operação de um VANT e propor, de maneira geral, a aviônica embarcada necessária para um projeto de veículo autônomo. São apresentadas também a teoria básica do voo do helicóptero e a modelagem deste tipo de aeronave, mostrando o papel da identificação para a obtenção do modelo. A compra de um helicóptero em escala reduzida pela Seção de Engenharia Elétrica do IME justifica a ênfase dada em helimodelos neste capítulo.
- Capítulo 7 - Conclusões e sugestões: são apresentados os pontos relevantes encontrados neste trabalho, bem como as perspectivas para investigações futuras.
- Apêndices: são expostas as informações que colaboram para a consolidação da dissertação, como, por exemplo, as demonstrações de lemas, teoremas e propriedades, tabelas e modelos utilizados nos exemplos.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS E NOTAÇÃO EMPREGADA

Este capítulo apresenta os principais tópicos da teoria e da notação matemática envolvidas no trabalho. Inicia-se pela formulação do problema de identificação na Seção 2.1. Na Seção 2.2, são apresentadas as estruturas de expansão geradoras das FT estimadas, representadas pela teoria de CGO. Faz-se também uma comparação desta com as expansões através da base de Laguerre, bastante empregada nos problemas de identificação. Na Seção 2.3, a técnica de imposição de pólos, utilizada em VALLE (2005) para o desenvolvimento de um método de identificação semi-analítico, é brevemente explicada. A idéia principal da metodologia de imposição de pólos foi utilizada em um exemplo neste trabalho, com o objetivo de aplicar a identificação como ferramenta de redução de ordem de modelo de sistemas de grande porte. Adaptando o problema, a função objetivo passa a ser convexa e admite solução analítica. A Seção 2.4 aborda duas técnicas de redução de modelos: truncamento balanceado (BALMR) e truncamento modal através de Índices de Dominância Modal baseados na Norma Infinito (IDMNI). A primeira mostra-se eficaz ao fornecer modelos de baixa ordem com erros de aproximação relativamente pequenos. A segunda é particularmente útil quando se deseja preservar, no modelo reduzido, os pólos dominantes do modelo completo. Isto é interessante nos problemas onde há a necessidade de manter o significado físico dos pólos, como, por exemplo, nos sistemas elétricos de potência. Por fim, a Seção 2.5 apresenta um procedimento para melhorar o condicionamento numérico de um Sistema de Equações Lineares (SEL), cuja solução é obtida por eliminação gaussiana usando a técnica de pivoteamento parcial (STRANG, 1988). A notação multivariável apresentada na Seção 2.1 é aplicável às Seções 2.2–2.4 deste capítulo. Entretanto, por simplicidade, apenas a teoria de CGO (Seção 2.2.2) a adota explicitamente, por esta ter sido eleita a estrutura de expansão geradora das FT estimadas nos problemas MIMO abordados ao longo do trabalho.

2.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere um sistema multivariável com p entradas e q saídas e o conjunto \mathcal{G} de matrizes complexas representando as observações $G(j\underline{\omega})$ de resposta em frequência, calculadas ou medidas em m valores na faixa de frequências de interesse $\underline{\omega} =$

$$\left[\omega_1 \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_m \right]^T : \quad \mathcal{G} \triangleq \{G(j\omega) \mid G(j\omega) \in \mathbb{C}^{q \times p}; \omega \in \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}\} \quad (2.1)$$

Sejam ainda (VIDYASAGAR, 1985):

- $\mathbb{R}(s)$ o conjunto de todas as funções de transferência próprias com coeficientes reais, de sistemas monovariáveis e invariantes no tempo; e
- $M(\mathbb{R}(s))$ o conjunto das matrizes cujos elementos pertencem a $\mathbb{R}(s)$.

A MFT identificada de um sistema MIMO com p entradas e q saídas pode ser expressa por:

$$G_e(s) \in M^{q \times p}(\mathbb{R}(s)) \quad (2.2)$$

e sua representação matemática assume a forma descrita pela EQ. 2.3:

$$G_e(\underline{\theta}, s) = \begin{bmatrix} G_{e,11}^n(s) & G_{e,12}^n(s) & \dots & G_{e,1p}^n(s) \\ G_{e,21}^n(s) & G_{e,22}^n(s) & \dots & G_{e,2p}^n(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{e,q1}^n(s) & G_{e,q2}^n(s) & \dots & G_{e,qp}^n(s) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

onde $G_{e,\lambda}^n(s)$ são as FT monovariáveis estimadas de ordem n e, λ um índice que indica o canal específico dentre todas as combinações possíveis entre as p entradas e q saídas do sistema sob análise, ou seja:

$$\lambda \in \Lambda = \{ij \mid i, j \in \mathbb{N}; i = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, p\} \quad (2.4)$$

Quando $p = q = 1$, $G_e(s) \in M^{1 \times 1}(\mathbb{R}(s))$ ou, simplesmente, $G_e(s) \in \mathbb{R}(s)$. Este é o caso particular de um sistema monovariável, sendo o índice λ desconsiderado para tornar a notação mais simples. Este trabalho considera ainda, a notação $G_e(s)$ como símbolo usado tanto para modelos monovariáveis quanto multivariáveis. A diferenciação entre SISO e MIMO ficará evidenciada no contexto do problema.

O objetivo do problema de identificação consiste em determinar um modelo $G_e(s)$ linear, invariante no tempo e de complexidade limitada, tendo p entradas e q saídas, cuja resposta em frequência se aproxime dos dados de \mathcal{G} na EQ. 2.1, de acordo com um critério pré-estabelecido. Entende-se por complexidade limitada o fato do modelo $G(\underline{\theta}, s)$

dependem do vetor paramétrico $\underline{\theta}$ real de dimensão finita. O ajuste dos dados em \mathcal{G} pelo modelo parametrizado $G_e(\underline{\theta}, s)$ buscará minimizar o seguinte erro aditivo:

$$E = \sum_{\lambda} \|G_{\lambda}(j\omega) - G_{e,\lambda}^m(j\omega)\|_2^2 \quad (2.5)$$

onde $G_{\lambda}(j\omega)$ representa a resposta em frequência do canal λ , de acordo com as EQ. 2.1 e 2.4.

2.2 ESTRUTURAS DE EXPANSÃO GERADORAS DAS FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA ESTIMADAS

Inicialmente, devem ser apresentados alguns conceitos que facilitam o entendimento do assunto. Um espaço vetorial normado é dito de Hilbert quando for dotado da definição de produto interno e possuir norma induzida por esse produto interno (ZHOU, 1996). Por exemplo, o \mathcal{L}_2 – espaço das matrizes cujos elementos são funções quadraticamente integráveis sobre o eixo imaginário – é um espaço de Hilbert, com produto interno definido por:

$$\langle F(s), G(s) \rangle \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} [F^*(j\omega)G(j\omega)] d\omega \quad (2.6)$$

para $F, G \in \mathcal{L}_2$, e norma induzida pelo produto interno dada por $\|F\|_2 \triangleq \sqrt{\langle F, F \rangle}$.

O espaço \mathcal{H}_2^+ é composto pelas matrizes de funções analíticas em \mathbb{C}_0^+ , quadraticamente integráveis nas retas $a + j\omega$ com $\omega \in \mathbb{R}$ para todo $a > 0$. Para este espaço define-se a norma da EQ 2.7, induzida pelo produto interno da EQ 2.6:

$$\|F(s)\|_2^2 = \langle F(s), F(s) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} [F^*(j\omega)F(j\omega)] d\omega \quad (2.7)$$

Analogamente, define-se o \mathcal{H}_2^- , considerando \mathbb{C}_0^- e $a < 0$. Ambos, \mathcal{H}_2^+ e \mathcal{H}_2^- , são espaços de Hilbert, subespaços de \mathcal{L}_2 e complementos ortogonais, permitindo escrever $\mathcal{L}_2 = \mathcal{H}_2^+ \oplus \mathcal{H}_2^-$, onde \oplus é a soma ortogonal.

Um subespaço importante do \mathcal{H}_2^+ para sistemas de controle é o \mathcal{RH}_2^+ , que consiste nas matrizes cujos elementos são funções racionais com coeficientes reais, estritamente próprias e estáveis. Da mesma forma, define-se o espaço \mathcal{RH}_2^- , ortogonal a \mathcal{RH}_2^+ , para as funções instáveis. Por serem espaços de Hilbert, o \mathcal{RH}_2^+ e o \mathcal{RH}_2^- são dotados de produto interno e do conceito de ortogonalidade. Para cada caso é possível encontrar um conjunto de funções ortogonais $\{V_1, V_2, \dots\}$ com infinitos elementos que corresponde a uma base do espaço considerado. Adotando o \mathcal{RH}_2^+ como espaço de interesse, qualquer

função de transferência $G_e(s)$ estritamente própria e estável pode ser determinada por uma combinação linear de funções ortogonais desse conjunto. O conjunto com as funções de Laguerre apresentado na Seção 2.2.1 forma uma base para o \mathcal{RH}_2^+ .

Um espaço de Banach, por outro lado, não contempla a definição de produto interno, inviabilizando a determinação de uma base através da propriedade da ortogonalidade no conjunto de funções considerado. A solução encontrada para que modelos $G_e(s)$ bipróprios possam ser expandidos por um conjunto de funções consiste em utilizar o CGO, conforme a Seção 2.2.2. Como exemplo de espaço de Banach, pode-se citar o \mathcal{RH}_∞^+ , que compreende as matrizes cujos elementos são FT racionais de coeficientes reais, próprias, estáveis e limitadas sobre o eixo imaginário.

A teoria de identificação de sistemas requer que o modelo seja parametrizado por uma estrutura matemática definida. Os modelos podem ser genericamente representados por:

$$G_e(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k V_k(s) \quad (2.8)$$

onde $V_k(s)$ são FT cuja expansão permite obter o modelo $G_e(s)$.

Matematicamente, os modelos de ordem infinita são aceitáveis. Na prática, para que a ordem da expansão na EQ. 2.8 não seja muito elevada, trunca-se o somatório com t termos, e o modelo estimado passa a ser representado por:

$$G_e^n(s) = \sum_{k=1}^t \alpha_k V_k(s) \quad (2.9)$$

Para o caso particular das funções de Laguerre, a inclusão de um novo termo à expansão eleva a ordem de $G_e^n(s)$ em uma unidade, permitindo concluir que $n = t$.

O modelo estimado tende a se ajustar melhor aos dados do sistema real com o aumento do número de termos considerado na expansão. A correta determinação dos parâmetros α_k e a escolha do conjunto de funções $\{V_k(s), k = 1 \dots n\}$ devem permitir que $G_e^n(s)$ contemple funções racionais estritamente próprias e bipróprias, além de possibilitar a representação de modelos que possuam pólos com multiplicidade maior que um e/ou pólos complexos conjugados.

2.2.1 BASE DE LAGUERRE E CONJUNTO DE LAGUERRE ESTENDIDO

As funções de Laguerre são definidas, no domínio da freqüência, por:

$$L_k(s) = \frac{\sqrt{2a}(s-a)^{k-1}}{(s+a)^k}, k = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

onde o parâmetro $0 < a \in \mathbb{R}$, denominado pólo de Laguerre, determina a localização de seus k pólos. A função estimada terá, portanto, todos os seus pólos localizados na mesma posição no semiplano s da esquerda.

Como as funções de Laguerre formam uma base ortonormal do espaço \mathcal{RH}_2^+ (ADES, 1999), qualquer modelo $G_e(s) \in \mathcal{RH}_2^+$ pode ser expandido por:

$$G_e(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k L_k(s) \quad (2.11)$$

com os coeficientes α_k determinados pelo produto interno da EQ 2.6, resultando em:

$$\alpha_k = \langle G_e(s), L_k(s) \rangle \quad (2.12)$$

Como $\{L_k(s), k = 1, 2, \dots\} \in \mathcal{RH}_2^+$, o produto interno da EQ 2.12 pode ser aplicado e, devido à ortonormalidade entre as funções, tem-se:

$$\langle L_k(s), L_j(s) \rangle = \begin{cases} 1 & , \text{ para } k = j \\ 0 & , \text{ para } k \neq j \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\langle G_e(s), L_k(s) \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j L_j(s), L_k(s) \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \langle L_j(s), L_k(s) \rangle = \alpha_k \quad (2.14)$$

Entretanto, para fins computacionais, deve-se considerar que a função estimada $G_e^m(\underline{\alpha}, s)$ tenha ordem finita. Trunca-se, portanto, o somatório em n termos e a forma da expansão adotada pela base de Laguerre passa a ser:

$$G_e^m(\underline{\alpha}, s) = \sum_{k=1}^n \alpha_k L_k(s) \quad (2.15)$$

Os parâmetros α_k adotados são aqueles que minimizam a função custo $J(\underline{\alpha})$ na EQ. 2.16, ou seja, aqueles que proporcionam o melhor ajuste entre as respostas em frequência do modelo estimado $G_e^m(\underline{\alpha}, j\omega)$ e do sistema a ser identificado $G(j\omega)$.

$$J(\underline{\alpha}) = \|G(j\omega) - G_e^m(\underline{\alpha}, j\omega)\|_2 \quad (2.16)$$

A estimação de funções bipróprias requer a adição do termo $L_0 \triangleq 1$ ao conjunto de funções da base original. Este novo conjunto de funções é denominado Conjunto de Laguerre Estendido (ADES, 1999), onde o conjunto das funções $\{L_k(s); k = 0, \dots, n\}$ perde a ortogonalidade. Assim, a função biprópria estimada através da expansão desse conjunto é tal que $G_e^n \in \mathcal{RH}_\infty^+$ e assume a forma:

$$G_e^n(\underline{\alpha}, s) = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k(s) \quad (2.17)$$

2.2.2 CONJUNTO GERADOR OTIMIZADO

Os conjuntos geradores surgem como alternativa à expansão da base de Laguerre e do Conjunto de Laguerre Estendido para a determinação de modelos estimados, permitindo obter FT estritamente próprias e bipróprias com pólos simples ou múltiplos, reais ou complexos conjugados. Para tanto, a representação dos modelos estimados adotará uma expansão sob a forma:

$$G_{e,\lambda}^n(\underline{\theta}, s) = \sum_{k=0}^n \alpha_k^\lambda P_k(s) = \frac{N(\underline{\alpha}^\lambda, s)}{D(\underline{\beta}, s)} = \frac{\alpha_0^\lambda s^n + \alpha_1^\lambda s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}^\lambda s + \alpha_n^\lambda}{s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n} \quad (2.18)$$

onde

$$P_k(s) = \frac{s^{n-k}}{s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n}$$

$$\underline{\alpha}^\lambda = \begin{bmatrix} \alpha_0^\lambda & \alpha_1^\lambda & \dots & \alpha_n^\lambda \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n+1},$$

$$\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad (2.19)$$

$$\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}^{11T} & \dots & \underline{\alpha}^{ijT} & \dots & \underline{\alpha}^{qpT} & \underline{\beta}^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}^{\Lambda T} & \underline{\beta}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(n+1)p.q+n}$$

Em outras palavras, deseja-se calcular os pólos e zeros de $G_{e,\lambda}^n(s)$ (parâmetros $\underline{\beta}$ de $D(s)$ e $\underline{\alpha}^\lambda$ de $N(s)$) de maneira a determinar uma aproximação adequada de \mathcal{G} na EQ. 2.1. O coeficiente do termo s^n do denominador é definido como $\beta_0 = 1$ ($\forall \lambda$), tendo em vista a possibilidade de simplificação de $G_{e,\lambda}^n(\underline{\theta}, s)$ e a vantagem de estimação de um parâmetro a menos. A estrutura de conjuntos geradores já foi utilizada em outros trabalhos com enfoque em sistemas SISO (ADES & WULHYNEK, 2004) (ADES & VALLE, 2005) (ADES & SILVEIRA, 2006) (SILVEIRA et alii, 2006). Em ADES (1999) e WULHYNEK (2002), utilizou-se um método numérico de otimização para o cálculo dos parâmetros $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$. O problema abordado em VALLE (2005) permitiu obter uma solução semi-analítica, em que $\underline{\alpha}$ era calculado analiticamente, de acordo com a função custo dada pela EQ. 2.16, e $\underline{\beta}$ determinado por imposição de pólos, conforme descrito na Seção 2.3. O fato do problema proposto não ser convexo em todas as variáveis de decisão pode dificultar a busca pela solução ótima, ou seja, a determinação do mínimo global da função custo adotada. A condição de não-convexidade não implica que a solução não possa ser obtida analiticamente mas, nesses casos, pode-se perder a garantia de otimalidade. Os métodos numéricos de otimização podem ser empregados quando o equacionamento envolvido para a obtenção de soluções analíticas é complexo.

Nesta dissertação, adota-se $J(\underline{\theta}) = J(\underline{\alpha}^\Lambda, \underline{\beta})$ de acordo com a EQ. 2.20, no lugar da função objetivo apresentada na EQ. 2.5. Dessa maneira, o problema torna-se convexo nas variáveis de decisão $\underline{\alpha}^\Lambda$ e $\underline{\beta}$. Estabelece-se o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\underline{\theta} \in \mathbb{R}^{(n+1)p+q+n}} J(\underline{\theta}) = \min_{\underline{\theta} \in \mathbb{R}^{(n+1)p+q+n}} \|D(\underline{\beta}, j\omega)G_\lambda(j\omega) - N(\underline{\alpha}^\Lambda, j\omega)\|_2^2 \quad (2.20)$$

Particularmente para o caso monovariável, os resultados apresentados em (WULHYNEK, 2002) e (VALLE, 2005) mostram que o emprego do CGO fornece soluções de custos J menores comparados àqueles obtidos pela expansão da base de Laguerre, para uma solução de ordem n . Ou, por outro lado, para um valor de custo pré-estabelecido J , a solução obtida utilizando-se conjunto gerador apresenta menor ordem que aquela obtida pela expansão da base de Laguerre. Pode-se afirmar que, fixada a ordem n da solução a ser calculada, o conjunto solução de Laguerre é um subconjunto do conjunto solução gerado pelo CGO e que os custos das soluções de Laguerre são limitantes superiores para os custos das soluções obtidas por CGO.

2.3 IMPOSIÇÃO DE PÓLOS

A função custo adotada em VALLE (2005), apresentada na EQ. 2.21, não possibilita o cálculo totalmente analítico dos parâmetros da função estimada $G_e^m(s)$, quando esta assume a expansão descrita pela EQ. 2.18. Para resolver este problema, utilizou-se uma técnica de imposição de pólos, que consiste em sugerir valores de pólos a $G_e^m(s)$, a partir da análise da resposta em frequência do sistema real. Informações como largura de banda, pico de ressonância, margens de ganho e de fase e demais frequências relevantes devem ser consideradas.

$$J(\underline{\theta}) = \|G(j\omega) - G_e^m(\underline{\theta}, j\omega)\|_2^2 \quad (2.21)$$

O algoritmo estimador é o responsável pela imposição e determinação do melhor vetor de pólos \underline{P} para $G_e^m(s)$. Através das informações relevantes da resposta em frequência do sistema, são determinadas as partes imaginárias para um vetor de pólos complexos \underline{P}_i . Uma vez estabelecidas as partes imaginárias de alguns pólos, e seus respectivos conjugados, é iniciada a determinação das partes reais para os mesmos, buscando sempre minimizar a função custo adotada. O algoritmo busca encontrar também pólos reais, colocando-os no vetor \underline{P}_r . O vetor completo de pólos sugeridos pelo algoritmo estimador para $G_e^m(s)$ é dado por:

$$\underline{P} = \left[\begin{array}{cc} \underline{P}_i^T & \underline{P}_r^T \end{array} \right]^T \quad (2.22)$$

Os pólos ressonantes são determinados a partir da análise dos pontos de máximo e mínimo da curva de resposta em freqüência discreta dada pela EQ. 2.23. Aplica-se, então, a diferença definida na EQ. 2.24 e observam-se os pontos em que há mudança de sinal para valores consecutivos das componentes do vetor de freqüências $\underline{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_m \end{bmatrix}^T$.

$$F(\underline{\omega}) \triangleq |G(j\underline{\omega})| \quad (2.23)$$

$$\Delta F(\omega_i) \triangleq F(\omega_i) - F(\omega_{i-1}); \quad i = 2, \dots, m \quad (2.24)$$

A freqüência ω_{pr} é aquela em que ocorre o maior pico de ressonância dentre aqueles determinados pelas EQ. 2.23 e 2.24. Esta freqüência é de grande importância caso o modelo tenha que reproduzir características de ressonância do sistema real. A busca por pólos reais segue os mesmos procedimentos daquela feita para pólos complexos, sendo executada em duas situações: quando o algoritmo não encontra pólos ressonantes ou no caso do custo desejado não ter sido alcançado considerando apenas o vetor de pólos \underline{P}_i . Uma vez obtido o vetor de pólos $\underline{P} \in \mathbb{C}^n$, o algoritmo de identificação calcula, analiticamente, o vetor de parâmetros $\underline{\alpha}$, responsável pelo ajuste ótimo dos zeros, segundo o critério:

$$J(\underline{\alpha}) = \|G(j\underline{\omega}) - G_e^n(\underline{\alpha}, j\underline{\omega})\|_2 \quad (2.25)$$

Essa análise da resposta em freqüência discreta permitirá que o conjunto original de dados $\{\omega_i, G(j\omega_i); i = 1, \dots, m\}$ seja reduzido para $\{\omega_l, G(j\omega_l); l = 1, \dots, k; m > k\}$. O conjunto reduzido deve conter os pontos relevantes da resposta em freqüência, de maneira que se alcance o melhor ajuste do modelo, ou menor custo J possível. O modelo pode ainda ser otimizado por métodos numéricos, obtendo-se um modelo estimado e otimizado $G_{e,o}^n(s)$.

2.4 REDUÇÃO DE ORDEM DE MODELOS

Tanto na modelagem de sistemas físicos complexos, quanto na estimação de funções de transferência através de técnicas de identificação, existe a possibilidade do modelo final apresentar uma ordem relativamente elevada ou não ser a realização mínima. Especificamente para o caso de identificação, o algoritmo que sugere o modelo estimado $G_e^n(s)$ pode ser combinado a outras técnicas que têm como objetivo eliminar as redundâncias que levam ao aumento da ordem do modelo. Entretanto, as alterações efetuadas não devem prejudicar o ajuste final, procurando uma representação mais simples $G_e^r(s) = G_R^r(s)$

(com custos computacionais mais baixos), onde $0 < r < n$, $r \in \mathbb{N}^*$ (conjunto dos números inteiros, positivos e não nulos). Ao se garantir erros de aproximação relativamente pequenos, segundo um determinado critério, as principais características do modelo original são preservadas no modelo de ordem reduzida $G_R^r(s)$.

2.4.1 TRUNCAMENTO BALANCEADO

O truncamento balanceado (MOORE, 1981) (GLOVER, 1984) é utilizado para a redução de ordem de modelos em espaço de estados. Seja:

$$G_e^n(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (2.26)$$

uma realização da função $G_e^n(s)$ racional e estável ($G_e^n(s) \in \mathcal{RH}_\infty^+$). Sejam ainda, P e Q os Gramianos de controlabilidade e de observabilidade, respectivamente. P e Q satisfazem as seguintes equações de Lyapunov:

$$\begin{aligned} AP + PA^* + BB^* &= 0 \\ A^*Q + QA^* + C^*C &= 0 \end{aligned}$$

com $P \geq 0, Q \geq 0$. Pode-se dizer que o par (A, B) é controlável se e somente se $P > 0$, e (C, A) é observável se e somente se $Q > 0$ (ZHOU, 1996).

Suponha a transformação de similaridade $\hat{x} = Tx$, tal que:

$$G_e^n(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} TAT^{-1} & TB \\ \hline CT^{-1} & D \end{array} \right] \quad (2.27)$$

Nota-se que, apesar dos Gramianos serem rescritos como $\hat{P} = TPT^*$ e $\hat{Q} = (T^{-1})^*QT^{-1}$, os autovalores do produto $\hat{P}\hat{Q} = TPQT^{-1}$ são invariantes na transformação de similaridade.

Considere a matriz T que fornece a decomposição:

$$PQ = T^{-1}\Lambda T, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 I_{s_1}, \dots, \lambda_n I_{s_n}) \quad (2.28)$$

onde os autovalores $\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}$ têm multiplicidade s_i ; $s_1 + s_2 + \dots + s_n = n$ e I é a matriz identidade de dimensão s_i . Dessa maneira, as colunas de T^{-1} são autovetores de PQ correspondentes aos autovalores λ_i . Embora os autovetores não sejam únicos, no caso da realização mínima eles podem ser sempre escolhidos de forma que (ZHOU, 1996):

$$\begin{aligned} \hat{P} &= TPT^* = \Sigma \\ \hat{Q} &= (T^{-1})^*QT^{-1} = \Sigma \end{aligned} \quad (2.29)$$

com

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1 I_{s_1}, \sigma_2 I_{s_2}, \dots, \sigma_n I_{s_n}) \quad (2.30)$$

onde $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_n \geq 0$ são definidos como os valores singulares de Hankel do sistema. Essa nova realização com os Gramianos de controlabilidade e observabilidade $\widehat{P} = \widehat{Q} = \Sigma$ é dita realização balanceada.

Obtida esta realização, o próximo passo do algoritmo consiste no truncamento dos estados pouco observáveis e pouco controláveis e, por ventura, no cancelamento perfeito de pólos e zeros. Cada valor de σ_i está associado a um estado x_i da realização balanceada e, fisicamente, representa a contribuição que o estado correspondente tem no comportamento de entrada e saída do sistema. Rescrevendo a realização balanceada $G_e^n(s) \in \mathcal{RH}_\infty^+$ como:

$$G_e^n(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right]$$

com gramiano $\Sigma = \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2)$ tal que:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \text{diag}(\sigma_1 I_{s_1}, \sigma_2 I_{s_2}, \dots, \sigma_r I_{s_r}) \\ \Sigma_2 &= \text{diag}(\sigma_{r+1} I_{s_{r+1}}, \sigma_{r+2} I_{s_{r+2}}, \dots, \sigma_n I_{s_n}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

é possível, a partir da análise dos valores singulares de Hankel, descartar os estados $\{x_{r+1}, \dots, x_n\}$, quando o erro de aproximação for aceitável. O limitante superior do erro é dado por:

$$\|G_e^n(s) - G_R^r(s)\|_\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \sigma_{r+2} + \dots + \sigma_n) \quad (2.32)$$

permitindo a escolha da dimensão r da representação em espaço de estados do modelo reduzido, balanceado e assintoticamente estável, dado por:

$$G_R^r(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right] \quad (2.33)$$

O método pode vir a apresentar custos computacionais proibitivos quando aplicado a modelos de sistemas de grande porte, tendo em vista a necessidade de solucionar duas equações matriciais de Lyapunov. Os modelos reduzidos $G_R(s)$ obtidos por truncamento balanceado normalmente apresentam um novo conjunto de pólos e zeros, distintos daqueles do modelo original (WATANABE et alii, 1995). Além disso, sistemas instáveis devem

ser tratados de maneira particular, onde são exigidos pré-condicionamentos. O truncamento balanceado também se caracteriza por ser um algoritmo não recursivo, ou seja, a alteração da ordem do modelo não permite o aproveitamento de resultados anteriores. Apesar da literatura de controle robusto sugerir seu uso (GREEN & LIMEBEER, 1995) (ZHOU, 1996) e de ser um algoritmo sistemático e matematicamente rigoroso, há aplicações em que o uso do truncamento balanceado se torna inadequado, devido à ordem elevada do modelo.

2.4.2 TRUNCAMENTO MODAL POR IDMNI

A técnica de redução de ordem por truncamento modal preserva, no modelo reduzido, os pólos mais dominantes e seus resíduos associados. É, particularmente, eficaz para os modelos que tenham observabilidade e controlabilidade significativas de somente uma pequena parte do espectro de pólos. Essa abordagem também se torna atrativa por manter a sensibilidade modal mais próxima à do modelo original. A decomposição da FT de um sistema em frações parciais permite formar um somatório de parcelas que podem ser analisadas separadamente. Desta maneira, calculam-se os Índices de Dominância Modal (IDM), segundo um critério baseado em uma norma pré-estabelecida da fração parcial correspondente a cada modo (GREEN & LIMEBEER, 1995) (VARGA, 1995) (SILVA, 2005).

Matematicamente, seja $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ uma FT monovariável genérica, onde as matrizes: da dinâmica e identidade $A, I \in \mathbb{R}^{n \times n}$, de entrada $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, de saída $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ e de transmissão direta $D \in \mathbb{R}$. A EQ. 2.34 descreve uma realização bloco-diagonal de $G(s)$, onde $\text{spec}(A_i)$, $i = 1, \dots, k$, define os pólos de $G(s)$. Os produtos $R_i \triangleq B_i C_i$ definem os resíduos associados, com $k = nc + nr$, onde nr é o número de pólos reais, nc é o número de modos complexos e $nr + 2nc = n$. As dimensões de A_i dependem da natureza dos pólos: real (1×1) ou complexos conjugados (2×2).

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} A_1 & \dots & 0 & B_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & A_k & B_k \\ \hline C_1 & \dots & C_k & D \end{array} \right] \quad (2.34)$$

A realização paralela na EQ. 2.34 é equivalente à decomposição aditiva na EQ. 2.35:

$$G(s) = D + \sum_{i=1}^k G_i(s) \quad (2.35)$$

onde $G_i(s) = C_i(sI - A_i)^{-1}B_i$, $i = 1, \dots, k$.

A aproximação modal para um modelo reduzido $G_R(s)$ pode ser vista como a obtenção de uma transformação de similaridade T que, aplicada ao modelo completo, resulta em:

$$\left[\begin{array}{c|c} T^{-1}AT & T^{-1}B \\ \hline CT & D \end{array} \right] \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_1 & 0 \\ \hline 0 & \hat{A}_2 \\ \hline \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \\ \hline & D \end{array} \right] \begin{array}{c} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ D \end{array} \quad (2.36)$$

onde $\text{spec}(\hat{A}_1)$ e $\text{spec}(\hat{A}_2)$ são os conjuntos dos r e $n - r$ modos dominantes e não dominantes de A , respectivamente. A partir do particionamento descrito na EQ. 2.36, tem-se o modelo reduzido $G_R(s) \triangleq (\hat{A}_1, \hat{B}_1, \hat{C}_1, D)$. Sem perda de generalidade, considera-se $D = 0$ no resto desta seção.

Supondo-se a ausência de pólos múltiplos, o somatório na EQ. 2.35 pode ser decomposto em:

$$G(s) = \sum_{j=1}^{nr} G_j^r(s) + \sum_{i=1}^{nc} G_i^c(s) \triangleq \sum_{j=1}^{nr} \frac{R_j}{s - \lambda_j} + 2 \sum_{i=1}^{nc} \frac{\alpha s + \beta}{s^2 - 2\text{Re}(\lambda_i)s + |\lambda_i|^2} \quad (2.37)$$

onde $\alpha = \text{Re}(R_i)$, $\beta = -(\text{Re}(R_i)\text{Re}(\lambda_i) + \text{Im}(R_i)\text{Im}(\lambda_i))$.

O método de redução de ordem por truncamento modal com os IDM baseados na Norma Infinito (IDMNI) (SILVA, 2005), ordena os n pólos em ordem decrescente de custos, segundo a norma \mathcal{H}_∞ (ou \mathcal{L}_∞ , para pólos instáveis) de cada parcela $G_i(s)$. A partir da propriedade da desigualdade triangular, define-se um limitante superior (\bar{e}) para o erro de modelo (e):

$$e \triangleq \|G(s) - G_R(s)\|_\infty = \left\| \sum_{i=r+1}^n G_i(s) \right\|_\infty \leq \sum_{i=r+1}^n \|G_i(s)\|_\infty = \bar{e} \quad (2.38)$$

O modelo reduzido $G_R^r(s)$ de ordem $r \ll n$ pode ser determinado segundo um erro admissível, através da escolha apropriada de r . Nesse método, os zeros da FT não são preservados, sendo determinados pelo somatório das frações parciais dos pólos e resíduos associados retidos no equivalente reduzido. Resultados satisfatórios, em termos de erro de modelagem, são obtidos quando os zeros do modelo reduzido se aproximam dos zeros da FT do modelo original. Particularmente, tal situação é alcançada aumentando-se gradativamente a ordem do modelo reduzido pela inclusão sucessiva de novas parcelas modais.

2.5 PROCEDIMENTO PARA MELHORIA DO CONDICIONAMENTO NUMÉRICO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

A estratégia utilizada neste trabalho para a solução dos SEL $Q\underline{\theta} = \underline{Y}$ envolvidos na metodologia de identificação proposta é a Eliminação Gaussiana com Pivoteamento Parcial (STRANG, 1988) (VALLE, 2005).

Entretanto, a solução calculada em aritmética de ponto flutuante $\tilde{\underline{\theta}}$ pode não ser exatamente igual a $\underline{\theta}$. Alguns fatores como erros de arredondamento e perturbação dos dados que compõem o SEL contribuem para a degradação da solução. O número de condicionamento η de uma matriz representa a sensibilidade da solução às incertezas nos dados do problema, ou seja, quantifica o quanto uma perturbação infinitesimal nos dados originais pode ser amplificada na solução. Por isso, buscam-se alternativas no sentido de minimizar η . Os problemas com η relativamente baixos são chamados bem condicionados. Caso contrário, recebem a denominação de mal condicionados.

As técnicas de escalonamento mostram-se eficientes ao reduzir o valor de η , usando estratégias diferenciadas. Em SKELL (1979), é feito um estudo sobre a estabilidade do procedimento de Eliminação Gaussiana e sobre os erros de arredondamento na solução de sistemas lineares algébricos, com ênfase em sistemas esparsos. Particularmente, na metodologia de identificação proposta neste trabalho, a disparidade nas ordens de grandeza dos elementos da matriz de coeficientes Q contribui significativamente para a degradação do condicionamento numérico do SEL $Q\underline{\theta} = \underline{Y}$. Assim, o algoritmo proposto por RUIZ (2005) é implementado, escalonando as linhas e colunas da matriz Q com o objetivo de torná-la balanceada. O procedimento consiste em pré e pós-multiplicar a matriz Q do SEL original $Q\underline{\theta} = \underline{Y}$ por duas matrizes diagonais D_1 e D_2 , respectivamente, obtendo \hat{Q} . Assim:

$$\hat{Q} = D_1 Q D_2 \quad (2.39)$$

e o objetivo passa a ser a solução de

$$\hat{Q}\hat{\underline{\theta}} = \hat{\underline{Y}} \quad (2.40)$$

onde $\hat{\underline{\theta}} = D_2^{-1}\underline{\theta}$ e $\hat{\underline{Y}} = D_1\underline{Y}$.

No escalonamento de linhas, cada vetor linha da matriz original Q é dividido pela sua norma infinito. O procedimento é análogo para o escalonamento de colunas. O algoritmo tem como objetivo fazer com que a matriz atinja, assintoticamente, uma representação na qual todas as linhas e colunas tenham norma infinito igual a 1. A forma da matriz

dos coeficientes utilizada neste trabalho não possui linhas e/ou colunas com todos os elementos iguais a zero. Para aplicações em que isso venha a ocorrer, utiliza-se o valor 1 na matriz D_R (D_C). Seja uma matriz genérica $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e considere:

- $r_i = a_i^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $i = 1, \dots, m$: vetores-linha de A ;
- $c_j = a_j \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $j = 1, \dots, n$: vetores-coluna de A ;
- $D_R \in \mathbb{R}^{m \times m} \mid D_R = \text{diag} \left(\sqrt{\|r_i\|_\infty} \right)$; e
- $D_C \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid D_C = \text{diag} \left(\sqrt{\|c_j\|_\infty} \right)$;

A matriz A escalonada, obtida através do procedimento iterativo descrito no algoritmo da FIG. 2.1, é dada por:

$$\hat{A} = D_R^{-1} A D_C^{-1} \quad (2.41)$$

Inicialização :

$$\hat{A}^{(0)} \leftarrow A$$

$$D_1^{(0)} \leftarrow I_m$$

$$D_2^{(0)} \leftarrow I_n$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$ até a convergência :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_R \leftarrow \text{diag} \left(\sqrt{\|r_i^{(k)}\|_\infty} \right) \\ D_C \leftarrow \text{diag} \left(\sqrt{\|c_j^{(k)}\|_\infty} \right) \\ \hat{A}^{(k+1)} \leftarrow D_R^{-1} \hat{A}^{(k)} D_C^{-1} \\ D_1^{(k+1)} \leftarrow D_1^{(k)} D_R^{-1} \\ D_2^{(k+1)} \leftarrow D_2^{(k)} D_C^{-1} \end{array} \right\}$$

Condição de convergência :

$$\max \left\{ \left| \left(1 - \|r_i^{(k)}\|_\infty \right) \right| \right\} \leq \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq m \quad \text{e} \quad \max \left\{ \left| \left(1 - \|c_j^{(k)}\|_\infty \right) \right| \right\} \leq \varepsilon, \quad 1 \leq j \leq n$$

FIG. 2.1: Algoritmo para escalonamento de linhas e colunas da matriz de coeficientes de um SEL.

3 METODOLOGIA DE IDENTIFICAÇÃO N2CACGO

Este capítulo tem por finalidade apresentar, detalhadamente, a metodologia de identificação N2CACGO aplicada a sistemas monovariáveis (SISO). Basicamente, o cenário matemático é composto por um problema de otimização com função objetivo em norma 2 e convexa, solução analítica e utilizando o CGO como estrutura de expansão para as FT estimadas. Este capítulo está organizado em quatro seções, onde são apresentadas algumas considerações iniciais, o equacionamento do problema, sua implementação computacional e os exemplos de aplicação.

Em BAZARAA et alii (1993), encontra-se a seguinte definição para função convexa:

Definição 3.1 (Função Convexa). *Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, onde $S \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo não vazio. Diz-se que a função f é convexa em S se*

$$f(\delta \underline{x}_1 + (1 + \delta) \underline{x}_2) \leq \delta f(\underline{x}_1) + f((1 + \delta) \underline{x}_2) \quad (3.1)$$

para cada $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in S$ e para cada $\delta \in [0, 1]$.

□

A extensão para o caso MIMO é apresentada no próximo capítulo. A notação a ser seguida foi apresentada na Seção 2.1 e a estrutura de expansão das FT estimadas é descrita em detalhe na Seção 2.2.2.

3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Para um sistema monovariável qualquer ($p = q = 1$), seja, inicialmente, o conjunto \mathcal{G}_S composto por observações $G(j\omega)$ de dados complexos de resposta em frequência, calculados ou medidos nos m valores de frequência $\underline{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_m \end{bmatrix}^T$ convenientemente escolhidos e distribuídos na faixa de interesse:

$$\mathcal{G}_S \triangleq \{G(j\omega) \mid G(j\omega) \in \mathbb{C}; \omega \in \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}\} = \{G(j\underline{\omega}) \mid G(j\underline{\omega}) \in \mathbb{C}^m\} \quad (3.2)$$

Admite-se que a FT racional estimada de ordem n , $G_e^n(s)$, possa ser escrita como:

$$G_e^n(\underline{\theta}, s) = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k(s) = \frac{N(\underline{\alpha}, s)}{D(\underline{\beta}, s)} = \frac{\alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n}{s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n} \quad (3.3)$$

onde:

$$P_k(s) = \frac{s^{n-k}}{s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n} \quad (3.4)$$

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (3.5)$$

$$\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n \quad (3.6)$$

$$\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha} & \underline{\beta} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2n+1} \quad (3.7)$$

A abordagem SISO para o problema N2CACGO tem por objetivo encontrar um modelo $G(s) \in \mathbb{R}(s)$, parametrizado pelo vetor $\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}^T & \underline{\beta}^T \end{bmatrix}^T$ que resolve o problema de otimização cujo objetivo consiste em minimizar a função custo dada por: $J_S(\underline{\theta}) = J_S(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ dada por:

$$J_S(\underline{\theta}) = \|D(\underline{\beta}, j\omega)G(j\omega) - N(\underline{\alpha}, j\omega)\|_2^2 \quad (3.8)$$

onde $N(\underline{\alpha}, j\omega)$ e $D(\underline{\beta}, j\omega)$ são, respectivamente, as respostas em frequência do numerador e do denominador de $G_e^n(s)$ e $\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}^T & \underline{\beta}^T \end{bmatrix}^T$ é o vetor de parâmetros a ser determinado. O problema N2CACGO consiste, portanto, em calcular os pólos e zeros de $G_e^n(s)$ (parâmetros $\underline{\beta}$ de $D(s)$ e $\underline{\alpha}$ de $N(s)$) de maneira que a função custo na EQ. 3.8 seja minimizada e possa ser utilizada como critério para determinar uma aproximação adequada de \mathcal{G}_S na EQ. 3.2.

O fluxograma da metodologia SISO pode ser visto na FIG. 3.1. Ressalta-se que, uma vez determinada a resposta em frequência, o algoritmo segue para o método de identificação propriamente dito. O método calcula analiticamente os pólos e zeros de maneira ótima, minimizando o custo na EQ. 3.8. Aumenta-se gradativamente a ordem do modelo estimado, visando alcançar o custo previamente estabelecido. Dessa forma, chega-se a uma família de modelos que satisfazem o problema. A escolha de $G_e^n(s)$ está baseada no compromisso entre a precisão necessária para se representar o comportamento da planta e a complexidade matemática desejada para o modelo. É possível também que seja feita, num primeiro momento, a estimação de um modelo de ordem n elevada. Caso esse procedimento seja adotado, verifica-se a possibilidade de redução da ordem desse modelo por truncamento balanceado via realização balanceada, através da análise dos valores singulares de Hankel. Esta seção apresenta em detalhes o bloco “Identificação” da FIG. 3.1. O bloco “Resposta em frequência” foi apresentado por VALLE (2005) e o bloco “Redução de Ordem” encontra-se abordado na Seção 2.4.1 desta dissertação.

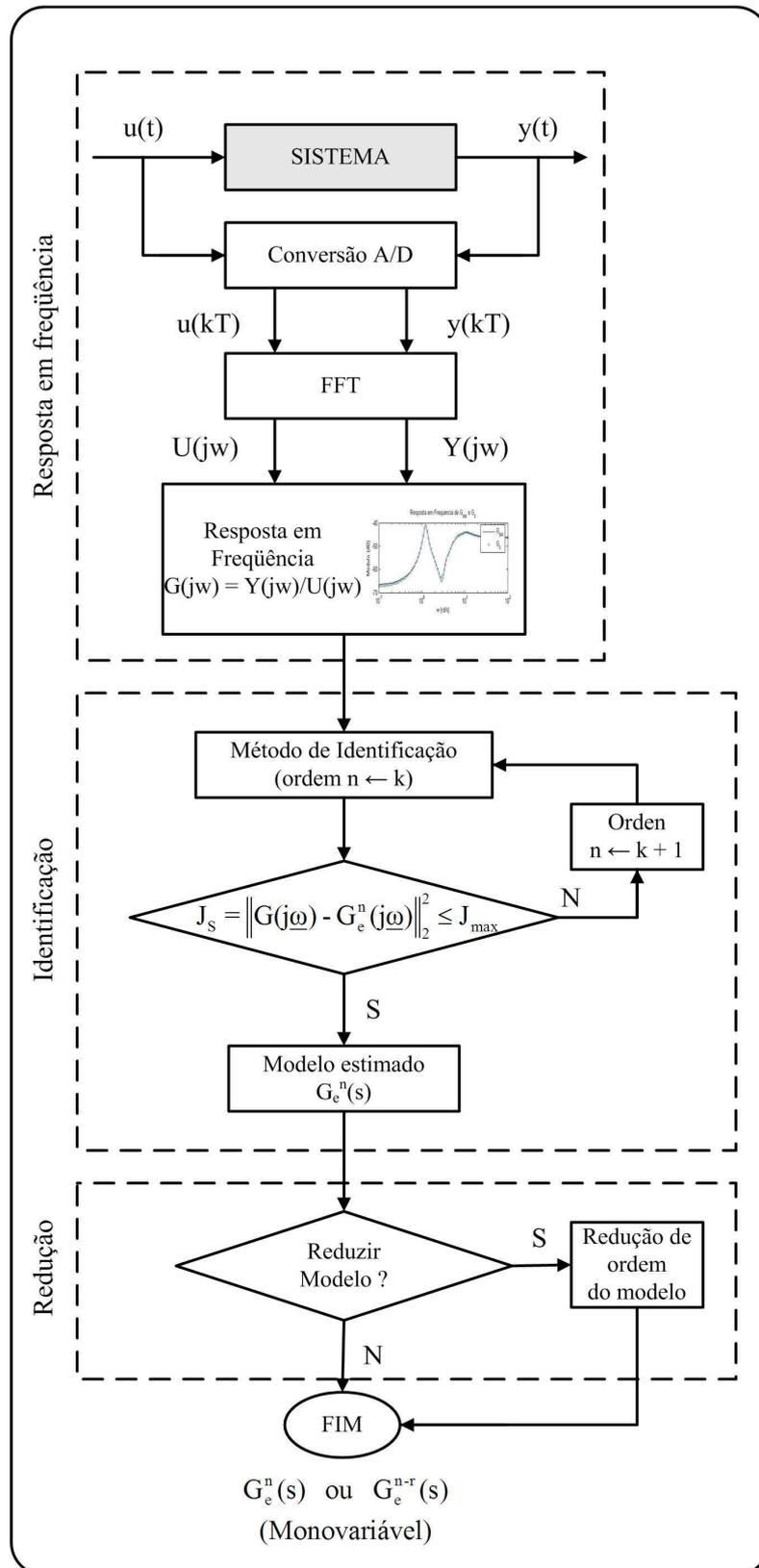


FIG. 3.1: Fluxograma da metodologia de identificação proposta (SISO).

3.2 EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA

De acordo com a expansão de $G_e^n(s)$ sob a forma de conjuntos geradores (EQ. 3.3) e arbitrada a ordem n do modelo estimado, estabelece-se o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\underline{\theta} \in \mathbb{R}^{2n+1}} J_S(\underline{\theta}) = \min_{\underline{\theta} \in \mathbb{R}^{2n+1}} \|D(\underline{\beta}, j\underline{\omega})G(j\underline{\omega}) - N(\underline{\alpha}, j\underline{\omega})\|_2^2 \quad (3.9)$$

onde $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ e $\underline{\theta}$ são dados pelas EQ. 3.5–3.7.

A função custo pode ser reescrita como:

$$J_S(\underline{\theta}) = \sum_{i=1}^m |D(\underline{\beta}, j\omega_i)G(j\omega_i) - N(\underline{\alpha}, j\omega_i)|^2 \quad (3.10)$$

ou, simplificada:

$$J_S(\underline{\theta}) = \sum_{i=1}^m \Psi(j\omega_i)\Psi^*(j\omega_i) \quad (3.11)$$

onde

$$\Psi(j\omega_i) = D(\underline{\beta}, j\omega_i)G(j\omega_i) - N(\underline{\alpha}, j\omega_i) \quad (3.12)$$

com $\Psi^*(j\omega_i) = \Psi(-j\omega_i)$, ou seja, “*” representa o operador conjugado.

Lema 3.1 ($J_S(\underline{\theta})$ é convexo em $\underline{\theta}$). Dada uma aproximação de ordem n da expansão de $G_e^n(\underline{\theta}, s)$, a função

$$J_S(\underline{\theta}) = \|D(\underline{\beta}, j\underline{\omega})G(j\underline{\omega}) - N(\underline{\alpha}, j\underline{\omega})\|_2^2 \quad (3.13)$$

é convexa em relação ao vetor paramétrico $\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}^T & \underline{\beta}^T \end{bmatrix}^T$.

Demonstração: Ver APÊNDICE 9.1.

□

Teorema 3.1 (Uma função estritamente convexa tem um único mínimo). Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo não vazio, e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Considere o problema de minimizar $f(\underline{x})$ com $\underline{x} \in S$. Suponha que $\underline{x}_{min} \in S$ seja uma solução ótima local para o problema.

a) Então, \underline{x}_{min} é uma solução ótima global.

b) Se f é estritamente convexa, então \underline{x}_{min} é a única solução ótima global.

Demonstração: Ver BAZARAA et alii (1993).

□

De acordo com o Lema 3.1, o problema de otimização descrito na EQ. 3.9 é convexo nas variáveis de decisão $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$. Utilizando o Teorema 3.1, a solução ótima é encontrada calculando-se o gradiente de $J_S(\underline{\theta})$ e fazendo $\nabla J_S(\underline{\theta}) = \mathbf{0}$ (BAZARAA et alii, 1993):

$$\nabla J_S(\underline{\theta}) = \left(\frac{\partial J_S}{\partial \alpha_0} \quad \frac{\partial J_S}{\partial \alpha_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial J_S}{\partial \alpha_n} \quad \frac{\partial J_S}{\partial \beta_1} \quad \frac{\partial J_S}{\partial \beta_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial J_S}{\partial \beta_n} \right)^T = \mathbf{0}_{(2n+1) \times 1} \quad (3.14)$$

Derivando parcialmente a EQ. 3.11 em relação a um parâmetro qualquer θ_t (α_k , $k = 0, \dots, n$ ou β_l , $l = 1, \dots, n$) de $\underline{\theta}$ dado pela EQ. 3.7:

$$\frac{\partial J_S}{\partial \theta_t} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \Psi(j\omega_i)}{\partial \theta_t} \Psi^*(j\omega_i) + \Psi(j\omega_i) \frac{\partial \Psi^*(j\omega_i)}{\partial \theta_t} \right) \quad (3.15)$$

As derivadas parciais de $\Psi(j\omega_i)$ em relação a α_k e β_l resultam em:

$$\frac{\partial \Psi(j\omega_i)}{\partial \alpha_k} = -(j\omega_i)^{n-k} = -R_{n-k}(j\omega_i) \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \Psi(j\omega_i)}{\partial \beta_l} = (j\omega_i)^{n-l} G(j\omega_i) = R_{n-l}(j\omega_i) G(j\omega_i) \quad (3.17)$$

e adota-se, por definição, $R_n(j\omega_i) \triangleq (j\omega_i)^n$.

Substituindo a EQ. 3.16 na EQ. 3.15:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_S}{\partial \alpha_k} &= \sum_{i=1}^m [-R_{n-k}(j\omega_i) \Psi^*(j\omega_i) - \Psi(j\omega_i) R_{n-k}^*(j\omega_i)] \\ &= \sum_{i=1}^m 2Re [-R_{n-k}(j\omega_i) \Psi^*(j\omega_i)] \\ &= \sum_{i=1}^m 2Re \{ -R_{n-k}(j\omega_i) [D^*(\underline{\beta}, j\omega_i) G^*(j\omega_i) - N^*(\underline{\alpha}, j\omega_i)] \} \\ &= \sum_{i=1}^m 2Re [R_{n-k}(j\omega_i) N^*(\underline{\alpha}, j\omega_i) - R_{n-k}(j\omega_i) G^*(j\omega_i) D^*(\underline{\beta}, j\omega_i)] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Analogamente, para o parâmetro β_l , substituindo a EQ. 3.17 na EQ. 3.15:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_S}{\partial \beta_l} &= \sum_{i=1}^m [R_{n-l}(j\omega_i) G(j\omega_i) \Psi^*(j\omega_i) + \Psi(j\omega_i) R_{n-l}^*(j\omega_i) G^*(j\omega_i)] \\ &= \sum_{i=1}^m 2Re [R_{n-l}(j\omega_i) G(j\omega_i) \Psi^*(j\omega_i)] \\ &= \sum_{i=1}^m 2Re \{ R_{n-l}(j\omega_i) G(j\omega_i) [D^*(\underline{\beta}, j\omega_i) G^*(j\omega_i) - N^*(\underline{\alpha}, j\omega_i)] \} \\ &= \sum_{i=1}^m 2Re [R_{n-l}(j\omega_i) \Gamma(j\omega_i) D^*(\underline{\beta}, j\omega_i) - R_{n-l}(j\omega_i) G(j\omega_i) N^*(\underline{\alpha}, j\omega_i)] \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde $\Gamma(j\omega_i) = G(j\omega_i)G^*(j\omega_i)$ e $Re[\cdot]$ representa a parte real do argumento.

De acordo com a EQ. 3.14, uma condição de otimalidade é ter $\partial J_S/\partial\alpha_k = 0$ e $\partial J_S/\partial\beta_l = 0$. As EQ. 3.18 e 3.19 podem ser rescritas como:

$$\sum_{i=1}^m Re[R_{n-k}(j\omega_i)N^*(\underline{\alpha}, j\omega_i) - R_{n-k}(j\omega_i)G^*(j\omega_i)D^*(\underline{\beta}, j\omega_i)] = 0 \quad (3.20)$$

$$\sum_{i=1}^m Re[R_{n-l}(j\omega_i)\Gamma(j\omega_i)D^*(\underline{\beta}, j\omega_i) - R_{n-l}(j\omega_i)G(j\omega_i)N^*(\underline{\alpha}, j\omega_i)] = 0 \quad (3.21)$$

Escolhida a ordem n para o modelo estimado, variam-se os índices k (referentes ao vetor de parâmetros $\underline{\alpha}$) e l (referentes ao vetor de parâmetros $\underline{\beta}$), nas EQ. 3.20 e 3.21. Manipulando-se algebricamente o conjunto de equações obtido, é possível rescrevê-lo na forma de um sistema de equações lineares $Q\underline{\theta} = \underline{Y}$, onde os termos independentes são aqueles correspondentes ao coeficiente $\beta_0 = 1$. A matriz dos coeficientes, Q , e o vetor \underline{Y} têm tratamento computacional mais fácil se analisados de maneira particionada. Assim:

$$Q\underline{\theta} = \underline{Y} \Rightarrow \begin{bmatrix} Q_1 & \vdots & -Q_2 \\ Q_3 & \vdots & -Q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 \\ \underline{Y}_2 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Simplificando a notação, adotam-se $R_n = R_n(j\omega_i)$, $G = G(j\omega_i)$ e $\Gamma = \Gamma(j\omega_i) = G(j\omega_i)G^*(j\omega_i)$. As matrizes Q_g , $g = 1, \dots, 4$, e os vetores \underline{Y}_1 e \underline{Y}_2 são dados por:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^m Re \begin{bmatrix} R_n R_n^* & R_n R_{n-1}^* & \dots & R_n R_0^* \\ R_{n-1} R_n^* & R_{n-1} R_{n-1}^* & \dots & R_{n-1} R_0^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_0 R_n^* & R_0 R_{n-1}^* & \dots & R_0 R_0^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \quad (3.23)$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^m Re \begin{bmatrix} R_n R_{n-1}^* G^* & R_n R_{n-2}^* G^* & \dots & R_n R_0^* G^* \\ R_{n-1} R_{n-1}^* G^* & R_{n-1} R_{n-2}^* G^* & \dots & R_{n-1} R_0^* G^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_0 R_{n-1}^* G^* & R_0 R_{n-2}^* G^* & \dots & R_0 R_0^* G^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n} \quad (3.24)$$

$$Q_3 = \sum_{i=1}^m Re \begin{bmatrix} R_{n-1} R_n^* G & R_{n-1} R_{n-1}^* G & \dots & R_{n-1} R_0^* G \\ R_{n-2} R_n^* G & R_{n-2} R_{n-1}^* G & \dots & R_{n-2} R_0^* G \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_0 R_n^* G & R_0 R_{n-1}^* G & \dots & R_0 R_0^* G \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)} \quad (3.25)$$

$$Q_4 = \sum_{i=1}^m Re \begin{bmatrix} R_{n-1}R_{n-1}^*\Gamma & R_{n-1}R_{n-2}^*\Gamma & \dots & R_{n-1}R_0^*\Gamma \\ R_{n-2}R_{n-1}^*\Gamma & R_{n-2}R_{n-2}^*\Gamma & \dots & R_{n-2}R_0^*\Gamma \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_0R_{n-1}^*\Gamma & R_0R_{n-2}^*\Gamma & \dots & R_0R_0^*\Gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.26)$$

$$\underline{Y}_1 = \sum_{i=1}^m Re \begin{bmatrix} R_n R_n^* G^* \\ R_{n-1} R_n^* G^* \\ \vdots \\ R_0 R_n^* G^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{e} \quad \underline{Y}_2 = \sum_{i=1}^m Re \begin{bmatrix} R_{n-1} R_n^* \Gamma \\ R_{n-2} R_n^* \Gamma \\ \vdots \\ R_0 R_n^* \Gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (3.27)$$

3.3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O objetivo desta seção é apresentar um exemplo particular literal que torne mais claro o procedimento descrito na seção anterior e mostre como pode ser feita a implementação computacional da solução do problema N2CACGO. Para tanto, são considerados para o sistema que se quer identificar:

- $\underline{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$: vetor de frequências de interesse ($m = 3$);
- $\mathcal{G}_S = \{G(j\omega_1), G(j\omega_2), G(j\omega_3)\}$: resposta em frequência na faixa de interesse; e
- $n = 2$: ordem arbitrada da FT estimada.

O modelo estimado $G(s)$ tem a forma da expansão de $G_e^n(s)$ apresentada na EQ. 3.28:

$$G_e^2(s) = \frac{\alpha_0 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2}{s^2 + \beta_1 s + \beta_2} \quad (3.28)$$

e o vetor de parâmetros a ser estimado é

$$\underline{\theta} = [\alpha_0 \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \beta_1 \ \beta_2]^T \quad (3.29)$$

A partir das EQ. 3.22–3.27, monta-se o sistema de equações descrito por:

$$\sum_{i=1}^3 Re \begin{bmatrix} R_2 R_2^* & R_2 R_1^* & R_2 R_0^* & -R_2 R_1^* G^* & -R_2 R_0^* G^* \\ R_1 R_2^* & R_1 R_1^* & R_1 R_0^* & -R_1 R_1^* G^* & -R_1 R_0^* G^* \\ R_0 R_2^* & R_0 R_1^* & R_0 R_0^* & -R_0 R_1^* G^* & -R_0 R_0^* G^* \\ \hline R_1 R_2^* G & R_1 R_1^* G & R_1 R_0^* G & -R_1 R_1^* G^* G & -R_1 R_0^* G^* G \\ R_0 R_2^* G & R_0 R_1^* G & R_0 R_0^* G & -R_0 R_1^* G^* G & -R_0 R_0^* G^* G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 Re \begin{bmatrix} R_2 R_2^* G^* \\ R_1 R_2^* G^* \\ R_0 R_2^* G^* \\ \hline R_1 R_2^* G^* G \\ R_0 R_2^* G^* G \end{bmatrix}$$

O objetivo é desenvolver um procedimento de maneira que os somatórios envolvidos neste sistema de equações sejam substituídos por produtos de matrizes, computacionalmente mais simples e rápidos.

Utilizando as equações EQ. 3.22 e EQ. 3.27:

$$\underline{Y} = \sum_{i=1}^3 Re \left[\begin{array}{c} R_2(j\omega_i)R_2^*(j\omega_i)G^*(j\omega_i) \\ R_1(j\omega_i)R_2^*(j\omega_i)G^*(j\omega_i) \\ R_0(j\omega_i)R_2^*(j\omega_i)G^*(j\omega_i) \\ \hline R_1(j\omega_i)R_2^*(j\omega_i)G^*(j\omega_i)G(j\omega_i) \\ R_0(j\omega_i)R_2^*(j\omega_i)G^*(j\omega_i)G(j\omega_i) \end{array} \right] = \sum_{i=1}^3 Re \left[\begin{array}{c} R_{2\omega_i}R_{2\omega_i}^*G_{\omega_i}^* \\ R_{1\omega_i}R_{2\omega_i}^*G_{\omega_i}^* \\ R_{0\omega_i}R_{2\omega_i}^*G_{\omega_i}^* \\ \hline R_{1\omega_i}R_{2\omega_i}^*G_{\omega_i}^*G_{\omega_i} \\ R_{0\omega_i}R_{2\omega_i}^*G_{\omega_i}^*G_{\omega_i} \end{array} \right] \quad (3.30)$$

A notação $X_{\omega_i} = X(j\omega_i)$ será por vezes adotada visando simplificar as fórmulas e evitar confusão com o produto entre X e $(j\omega_i)$.

Expandindo o somatório, pode-se escrever:

$$\underline{Y} = Re \left[\begin{array}{c} R_2R_2^*G_{\omega_1}^* + R_2R_2^*G_{\omega_2}^* + R_2R_2^*G_{\omega_3}^* \\ R_1R_2^*G_{\omega_1}^* + R_1R_2^*G_{\omega_2}^* + R_1R_2^*G_{\omega_3}^* \\ R_0R_2^*G_{\omega_1}^* + R_0R_2^*G_{\omega_2}^* + R_0R_2^*G_{\omega_3}^* \\ \hline R_1R_2^*G^*G_{\omega_1} + R_1R_2^*G^*G_{\omega_2} + R_1R_2^*G^*G_{\omega_3} \\ R_0R_2^*G^*G_{\omega_1} + R_0R_2^*G^*G_{\omega_2} + R_0R_2^*G^*G_{\omega_3} \end{array} \right] = Re \left[\begin{array}{c} \underline{Y_1} \\ \underline{Y_2} \end{array} \right] \quad (3.31)$$

Reescrevendo Y_1 na EQ. 3.31 na forma de um produto de matrizes:

$$\underline{Y_1} = \begin{bmatrix} R_2(j\omega_1) & R_2(j\omega_2) & R_2(j\omega_3) \\ R_1(j\omega_1) & R_1(j\omega_2) & R_1(j\omega_3) \\ R_0(j\omega_1) & R_0(j\omega_2) & R_0(j\omega_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G(j\omega_1) & 0 & 0 \\ 0 & G(j\omega_2) & 0 \\ 0 & 0 & G(j\omega_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2^*(j\omega_1) \\ R_2^*(j\omega_2) \\ R_2^*(j\omega_3) \end{bmatrix}$$

ou

$$\underline{Y_1} = \left\{ R_n^{j\omega} \cdot S_m^{j\omega} \cdot \overline{R_n^{j\omega}}(:, 1) \right\} \quad (3.32)$$

onde $\overline{R_n^{j\omega}}(:, 1)$ significa a primeira coluna do conjugado transposto da matriz $R_n^{j\omega}$ e $S_m^{j\omega}$ uma matriz diagonal formada pelos pontos de resposta em frequência $G(j\omega_i)$ em $\underline{\omega} = \left[\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_m \right]^T$, tais que:

$$R_n^{j\omega} = \begin{bmatrix} R_n(j\omega_1) & R_n(j\omega_2) & \dots & R_n(j\omega_m) \\ R_{n-1}(j\omega_1) & R_{n-1}(j\omega_2) & \dots & R_{n-1}(j\omega_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_0(j\omega_1) & R_0(j\omega_2) & \dots & R_0(j\omega_m) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

e

$$S_m^{j\omega} = \begin{bmatrix} G(j\omega_1) & & & \\ & G(j\omega_2) & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & G(j\omega_m) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Analogamente, obtém-se \underline{Y}_2 através da seguinte seqüência de operações:

$$\underline{Y}_2 = \begin{bmatrix} R_{1\omega_1} & R_{1\omega_2} & R_{1\omega_3} \\ R_{0\omega_1} & R_{0\omega_2} & R_{0\omega_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{\omega_1} & 0 & 0 \\ 0 & G_{\omega_2} & 0 \\ 0 & 0 & G_{\omega_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{\omega_1}^* & 0 & 0 \\ 0 & G_{\omega_2}^* & 0 \\ 0 & 0 & G_{\omega_3}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{2\omega_1}^* \\ R_{2\omega_2}^* \\ R_{2\omega_3}^* \end{bmatrix}$$

ou

$$\underline{Y}_2 = \left\{ R_n^{j\omega}(2 : n+1, :) \cdot S_m^{j\omega} \cdot S_m^{-j\omega} \cdot \overline{R_n^{j\omega}}(:, 1) \right\} \quad (3.35)$$

onde $R_n^{j\omega}(2 : n+1, :)$ significa a submatriz formada a partir de $R_n^{j\omega}$, excluindo-se a primeira linha, e $S_m^{-j\omega} = (S_m^{j\omega})^*$.

Para as matrizes Q_g , $g = 1, \dots, 4$, procede-se da mesma maneira, e chega-se aos seguintes resultados:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sum_{i=1}^3 Re \begin{bmatrix} R_2 R_2^* & R_2 R_1^* & R_2 R_0^* \\ R_1 R_2^* & R_1 R_1^* & R_1 R_0^* \\ R_0 R_2^* & R_0 R_1^* & R_0 R_0^* \end{bmatrix} = \\ &= Re \left\{ \begin{bmatrix} R_{2\omega_1} & R_{2\omega_2} & R_{2\omega_3} \\ R_{1\omega_1} & R_{1\omega_2} & R_{1\omega_3} \\ R_{0\omega_1} & R_{0\omega_2} & R_{0\omega_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{2\omega_1}^* & R_{1\omega_1}^* & R_{0\omega_1}^* \\ R_{2\omega_2}^* & R_{1\omega_2}^* & R_{0\omega_2}^* \\ R_{2\omega_3}^* & R_{1\omega_3}^* & R_{0\omega_3}^* \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

ou

$$Q_1 = Re \left\{ R_n^{j\omega} \cdot \overline{R_n^{j\omega}} \right\} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= \sum_{i=1}^3 Re \left\{ \begin{bmatrix} R_2 R_1^* G^* & R_2 R_0^* G^* \\ R_1 R_1^* G^* & R_1 R_0^* G^* \\ R_0 R_1^* G^* & R_0 R_0^* G^* \end{bmatrix} \right\} = \\ &= Re \left\{ \begin{bmatrix} R_{2\omega_1} & R_{2\omega_2} & R_{2\omega_3} \\ R_{1\omega_1} & R_{1\omega_2} & R_{1\omega_3} \\ R_{0\omega_1} & R_{0\omega_2} & R_{0\omega_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{\omega_1}^* & 0 & 0 \\ 0 & G_{\omega_2}^* & 0 \\ 0 & 0 & G_{\omega_3}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{1\omega_1}^* & R_{0\omega_1}^* \\ R_{1\omega_2}^* & R_{0\omega_2}^* \\ R_{1\omega_3}^* & R_{0\omega_3}^* \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

ou

$$Q_2 = Re \left\{ R_n^{j\omega} \cdot S_m^{-j\omega} \cdot \overline{R_n^{j\omega}}(:, 2 : n + 1) \right\} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} Q_3 &= \sum_{i=1}^3 Re \left\{ \begin{bmatrix} R_1 R_2^* G & R_1 R_1^* G & R_1 R_0^* G \\ R_0 R_2^* G & R_0 R_1^* G & R_0 R_0^* G \end{bmatrix} \right\} = \\ &= Re \left\{ \begin{bmatrix} R_{1\omega_1} & R_{1\omega_2} & R_{1\omega_3} \\ R_{0\omega_1} & R_{0\omega_2} & R_{0\omega_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{\omega_1} & 0 & 0 \\ 0 & G_{\omega_2} & 0 \\ 0 & 0 & G_{\omega_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{2\omega_1}^* & R_{1\omega_1}^* & R_{0\omega_1}^* \\ R_{2\omega_2}^* & R_{1\omega_2}^* & R_{0\omega_2}^* \\ R_{2\omega_3}^* & R_{1\omega_3}^* & R_{0\omega_3}^* \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

ou

$$Q_3 = Re \left\{ R_n^{j\omega}(2 : n + 1, :) \cdot S_m^{j\omega} \cdot \overline{R_n^{j\omega}} \right\} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} Q_4 &= \sum_{i=1}^3 Re \left\{ \begin{bmatrix} R_1 R_1^* G^* G & R_1 R_0^* G^* G \\ R_0 R_1^* G^* G & R_0 R_0^* G^* G \end{bmatrix} \right\} = \\ &= Re \left\{ \begin{bmatrix} R_{1\omega_1} & R_{1\omega_2} & R_{1\omega_3} \\ R_{0\omega_1} & R_{0\omega_2} & R_{0\omega_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{\omega_1} G_{\omega_1}^* & 0 & 0 \\ 0 & G_{\omega_2} G_{\omega_2}^* & 0 \\ 0 & 0 & G_{\omega_3} G_{\omega_3}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{1\omega_1}^* & R_{0\omega_1}^* \\ R_{1\omega_2}^* & R_{0\omega_2}^* \\ R_{1\omega_3}^* & R_{0\omega_3}^* \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

ou

$$Q_4 = Re \left\{ R_n^{j\omega}(2 : n + 1, :) \cdot S_m^{j\omega} \cdot S_m^{-j\omega} \cdot \overline{R_n^{j\omega}}(:, 2 : n + 1) \right\} \quad (3.39)$$

3.4 APLICAÇÕES

Nesta seção, são apresentados cinco exemplos que ilustram o emprego da metodologia N2CACGO. Para quatro deles, parte-se de um modelo conhecido $G(s)$. O conjunto de dados \mathcal{G}_S , definido na EQ. 3.2, é formado por valores de resposta em frequência calculados $G(j\omega)$, fazendo-se $s = j\omega$ para $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_m]^T$. O procedimento de gerar os dados a partir de modelos conhecidos é adotado com o objetivo de verificar o funcionamento da técnica de identificação para posterior aplicação em sistemas físicos reais. Em outro exemplo, o conjunto \mathcal{G}_S é formado por dados de resposta em frequência medidos em laboratório. Os custos são calculados por:

$$J = \|G(j\omega) - G_e^n(j\omega)\|_2 \quad (3.40)$$

e os modelos estimados obtidos em cada exemplo podem ser vistos no APÊNDICE 9.2.

3.4.1 EXEMPLO ACADÊMICO I

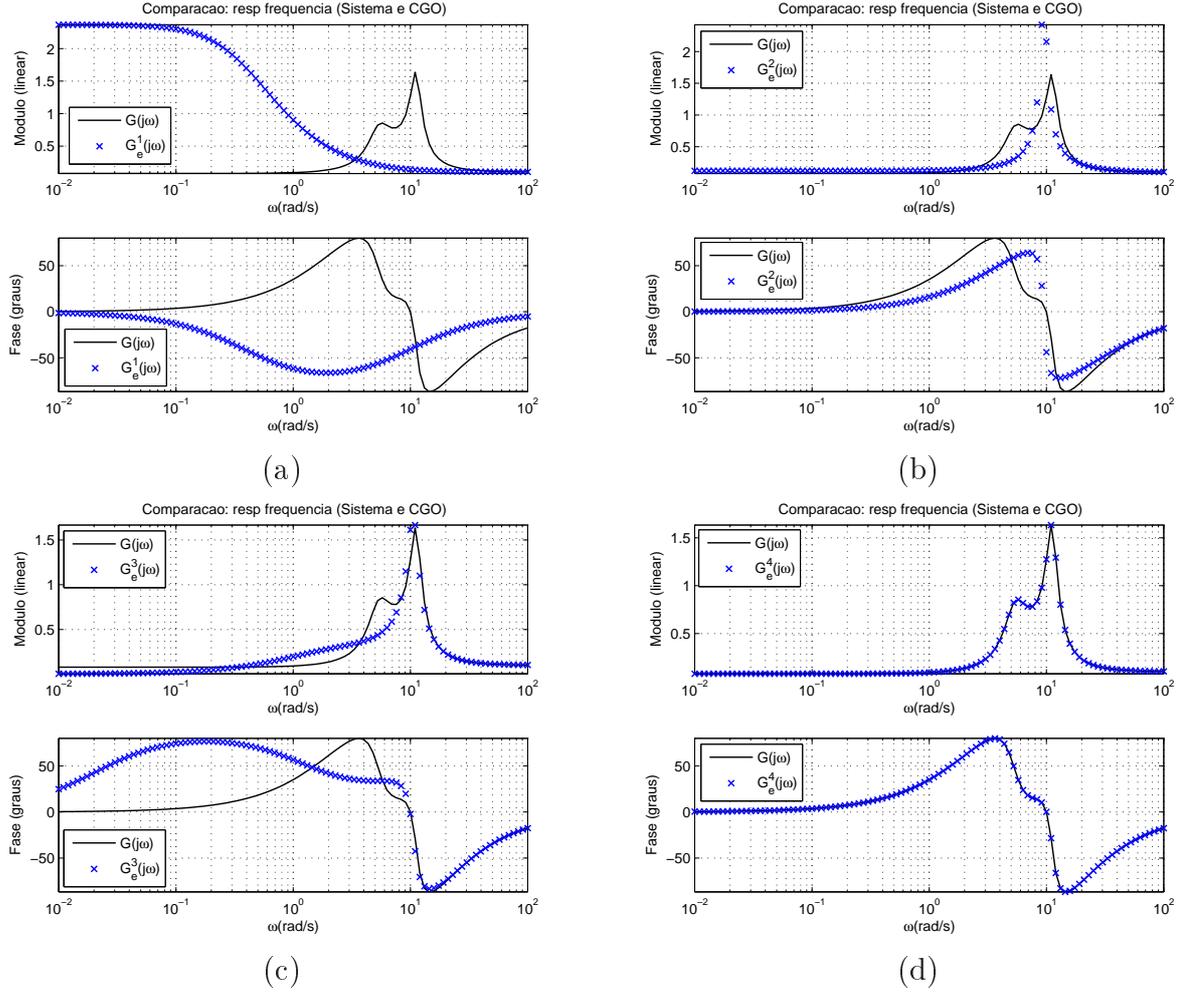
Seja a FT biprópria, de sétima ordem e de fase mínima, cujos coeficientes do numerador e do denominador estão apresentados na TAB. 3.1. A mesma FT foi utilizada em ADES & SILVEIRA (2006). A TAB. 3.2 mostra os custos de ajuste dos modelos estimados com ordens variando de 1 a 7, calculados pela metodologia proposta (J_1), comparativamente àqueles obtidos para os modelos de ordens 2, 5 e 7 obtidos a partir da aplicação da técnica apresentada em ADES & VALLE (2005) (J_2). O vetor de frequências compreende 100 pontos com espaçamento logarítmico uniforme entre 0,01 *rad/s* e 100 *rad/s*.

TAB. 3.1: Coeficientes de $G(s)$ para o Exemplo 3.4.1.

Grau em s	Coef. do numerador	Coef. do denominador
s^7	0,100000000	1,000000000
s^6	4,753000000	16,82000000
s^5	90,01275000	252,6691000
s^4	863,2453825	2476,872788
s^3	4417,863626	13659,19997
s^2	11761,82161	59044,40987
s^1	14942,80380	131354,0179
s^0	6958,320022	87580,35014

TAB. 3.2: Custos de ajuste dos modelos estimados $G_e^n(s)$ pela Metodologia N2CACGO (J_1) e por ADES & VALLE (2005) (J_2) para o Exemplo 3.4.1.

Ordem (n)	J_1	J_2
1	15,126	— — —
2	3,018	$2,440 \times 10^{-1}$
3	1,466	— — —
4	$6,320 \times 10^{-4}$	— — —
5	$3,795 \times 10^{-4}$	$2,745 \times 10^{-1}$
6	$6,306 \times 10^{-4}$	— — —
7	$3,439 \times 10^{-4}$	$1,495 \times 10^{-2}$



A análise da TAB. 3.2 permite concluir que a metodologia de identificação proposta apresentou resultados satisfatórios, com custos relativamente baixos, a partir do modelo de 4ª ordem. Assim, foi possível obter soluções de ordens mais baixas que a do modelo original. Para os modelos de ordens 5 e 7, os custos alcançados foram menores que aqueles apresentados por ADES & VALLE (2005). A FIG. 3.2 apresenta as respostas em frequência dos modelos estimados com ordens 1 a 4, obtidos pelo algoritmo proposto, comparativamente à resposta em frequência fornecida $G(j\omega)$. Nota-se, graficamente, a sobreposição das curvas de $G(j\omega)$ e $G_e^4(j\omega)$.

3.4.2 EXEMPLO ACADÊMICO II

A FT estritamente própria descrita pela EQ. 3.41 representa a dinâmica de um sistema de acionamento de quatro discos (ENNS, 1984) (AGUIRRE, 1994). Suas características principais são a presença de um par de zeros em $s = 2,2616 \pm 5,1916i$ (fase não-mínima) e um integrador duplo (pólo de multiplicidade 2 em $s = 0$).

$$G(s) = \frac{0,01(0,64s^5 + 0,235s^4 + 7,13s^3 + 100,02s^2 + 10,45s + 99,55)}{s^2(s^6 + 0,161s^5 + 6,004s^4 + 0,5822s^3 + 9,9835s^2 + 0,4073s + 3,982)} \quad (3.41)$$

A TAB. 3.3 apresenta os custos dos modelos de ordens 2 a 15 obtidos pela metodologia proposta. O modelo $G_e^8(s)$ é o primeiro a apresentar um custo relativamente baixo em relação ao modelo original. O vetor de frequências utilizado é formado por 100 pontos com espaçamento logarítmico uniforme entre $0,1 \text{ rad/s}$ e 10 rad/s .

TAB. 3.3: Custos de ajuste dos modelos estimados $G_e^n(s)$ pela Metodologia N2CACGO (J) para o Exemplo 3.4.2.

Ordem (n)	J	Ordem (n)	J
2	75,535	9	$3,903 \times 10^{-10}$
3	62,970	10	$1,668 \times 10^{-11}$
4	259,280	11	$6,756 \times 10^{-10}$
5	58,584	12	$3,288 \times 10^{-9}$
6	42,354	13	$4,917 \times 10^{-9}$
7	96,596	14	$1,237 \times 10^{-9}$
8	$1,583 \times 10^{-11}$	15	$3,463 \times 10^{-8}$

A FIG. 3.3 mostra os diagramas de resposta em frequência dos modelos estimados de ordens 6 e 8, comparativamente à resposta em frequência da FT original. Nota-se um bom ajuste para $G_e^8(s)$, conforme apresentado na TAB. 3.3.

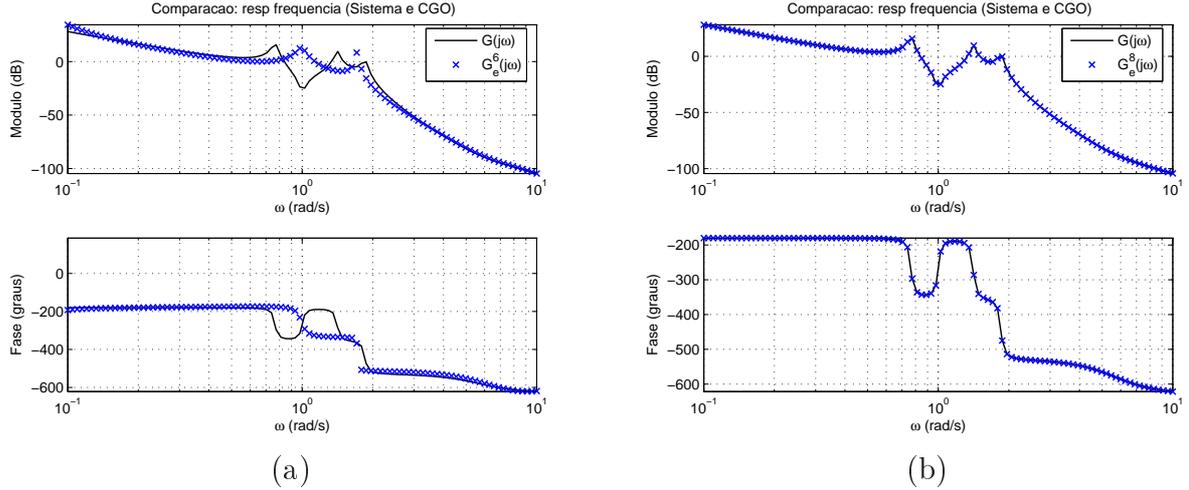


FIG. 3.3: Diagramas de resposta em frequência dos modelos obtidos e do sistema (Exemplo 3.4.2): (a) $G_e^6(s)$ e (b) $G_e^8(s)$.

3.4.3 SISTEMA COM ATRASO

Atrasos temporais frequentemente aparecem em sistemas de controle. Podem estar presentes no processo propriamente dito ou na manipulação dos sinais sensorados. O retardo faz-se presente em diversas situações como, por exemplo, nas plantas químicas e nas operações espaciais. No primeiro grupo, os atrasos estão relacionados ao tempo de escoamento do material ao longo dos dutos. No segundo, deve-se considerar o atraso existente na transmissão dos sinais sensorados de um veículo em órbita para a estação terrena.

Os atrasos diminuem a margem de estabilidade do sistema. Portanto, é necessário que seus efeitos sejam analisados e considerados nas aplicações em que se fazem presentes. Por exemplo, seja o sistema de controle de nível de um reservatório (DORF, 1986) mostrado na FIG. 3.4. Visando manter o nível constante, atua-se numa válvula de ajuste de vazão, segundo os dados fornecidos pelo sensor (bóia). Quando a demanda pelo líquido cresce, o reservatório tende a esvaziar, exigindo o aumento da abertura da válvula para a passagem de um maior volume de líquido. À medida que a demanda diminui, o reservatório volta a encher, aproximando-se do limite máximo estabelecido. Nesta operação, o atuador hidráulico age na válvula, estreitando sua abertura e impedindo que o reservatório transborde. O atraso entre a válvula de ajuste e a saída do líquido é de $T = d/v$, onde d é a distância entre a válvula e a extremidade de saída do tubo, e v , a velocidade de escoamento do líquido. Adotando a taxa de vazão de $5 \text{ m}^3/\text{s}$, a área da

seção reta do tubo de 1 m^2 e $d = 5\text{ m}$, tem-se $T = 1\text{ s}$. A FT em malha aberta é:

$$\begin{aligned} GH(s) &= G_A(s)G(s)G_f(s)e^{-sT} \\ &= \frac{31,5}{(s+1)(30s+1)[(s^2/9) + (s/3) + 1]} e^{-sT} \end{aligned}$$

As margens de fase (PM) são calculadas considerando o sistema sem e com atraso e fornecem os valores $PM = 40^\circ$ e $PM = -3^\circ$, respectivamente. As curvas de módulo não sofrem variação. Portanto, para o retardo considerado, o sistema é instável.

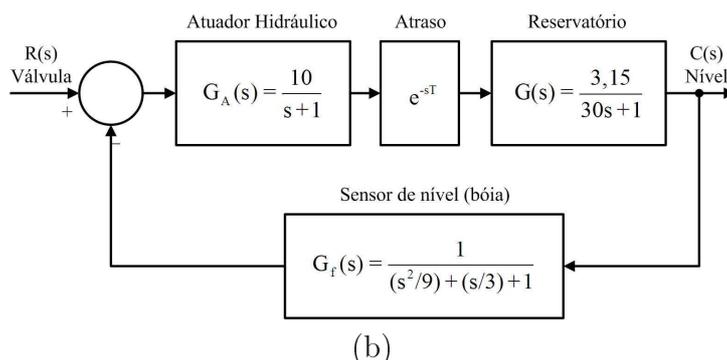
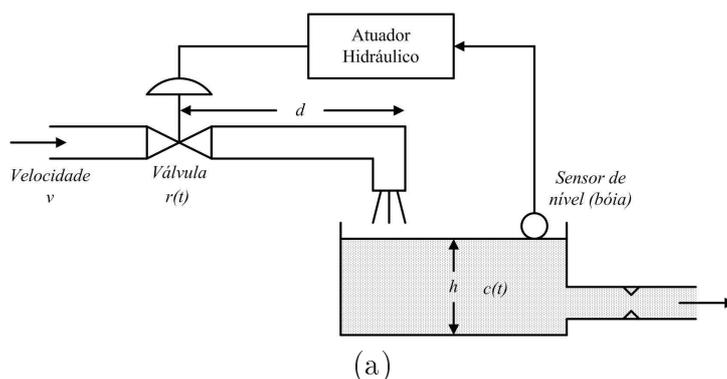


FIG. 3.4: Exemplo de um sistema com retardo: (a) Sistema de controle de nível, (b) Diagrama em blocos do sistema.

A manipulação do modelo de um sistema com retardo pode se tornar bastante complexa, uma vez que a FT envolvida não é uma razão de polinômios em s . As técnicas de aproximação tentam representar o termo referente ao retardo, e^{-sT} , por uma função racional, através de uma expansão em série. Em PICHE (1990), STAHL & HIPPE (1987) e BEGHI et alii (1997), são sugeridas algumas aproximações. Uma abordagem muito empregada na literatura é a aproximação de Padé. Este método procura determinar uma função racional $G_{padé}(s)$, tal que o erro ϵ dado por:

$$e^{-sT} - G_{padé}(s) = \epsilon, \quad G_{padé}(s) = \frac{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + 1}$$

seja pequeno. A estratégia utilizada consiste em expandir e^{-sT} e $G_{padé}(s)$ em série de Maclauren e igualar os coeficientes das potências correspondentes. O número de termos da expansão varia de acordo com a precisão desejada. Por exemplo, as aproximações de primeira e segunda ordens fornecem:

$$e^{-sT} \cong G_{padé}^1(s) = \frac{1 - (sT/2)}{1 + (sT/2)} \quad \text{e} \quad e^{-sT} \cong G_{padé}^2(s) = \frac{1 - (sT/2) + (sT)^2/12}{1 + (sT/2) + (sT)^2/12}$$

A aproximação de Padé sugere que a representação ideal do atraso por uma FT racional seja obtida quando o número de termos da expansão em série tende para infinito. Dessa maneira, uma FT aparentemente de baixa ordem, que apresenta retardo, tem sua ordem aumentada quando se deseja obter modelos cada vez mais precisos. Outra desvantagem dessa aproximação é a dificuldade de se obter soluções analíticas.

Considerando, agora, o modelo descrito na EQ. 3.42, a técnica de identificação proposta tem por objetivo sugerir um modelo estimado $G_e^n(s)$ racional, obtido analiticamente, que possa substituir matematicamente a FT com retardo:

$$G(s) = \frac{64/9 - \theta [1/3 + e^{-Ts}]}{s - 5/3} \quad (3.42)$$

onde T representa o atraso e $\theta = (64/9) [(1/3) + e^{-5T/3}]^{-1}$.

Os custos apresentados na TAB. 3.4 foram obtidos utilizando um vetor de freqüências com 100 pontos e espaçamento logarítmico uniforme na faixa de 0,1 *rad/s* a 100 *rad/s* e $T = 0,25$. A partir do modelo $G_e^9(s)$, a metodologia de identificação proposta apresentou custos relativamente baixos e boas aproximações para a função com retardo da EQ. 3.42.

TAB. 3.4: Custos dos modelos estimados $G_e^n(s)$ pela Metodologia N2CACGO (J) para o Exemplo 3.4.3.

Ordem (n)	J	Ordem (n)	J
2	4,0302	9	$7,9609 \times 10^{-2}$
3	3,6720	10	$4,3271 \times 10^{-3}$
4	2,8024	11	$1,8332 \times 10^{-4}$
5	3,8365	12	$6,2784 \times 10^{-6}$
6	1,7587	13	$3,9813 \times 10^{-6}$
7	2,8245	14	$3,7319 \times 10^{-6}$
8	1,2418	15	$2,2439 \times 10^{-6}$

A FIG. 3.5 compara as respostas em freqüência do modelo original com as dos modelos estimados de ordens 2, 4, 8 e 9. Da análise da TAB. 3.4 e dos gráficos de resposta em

freqüência, conclui-se que $G_e^9(s)$ pode ser adotado como aproximação racional da função com retardo original.

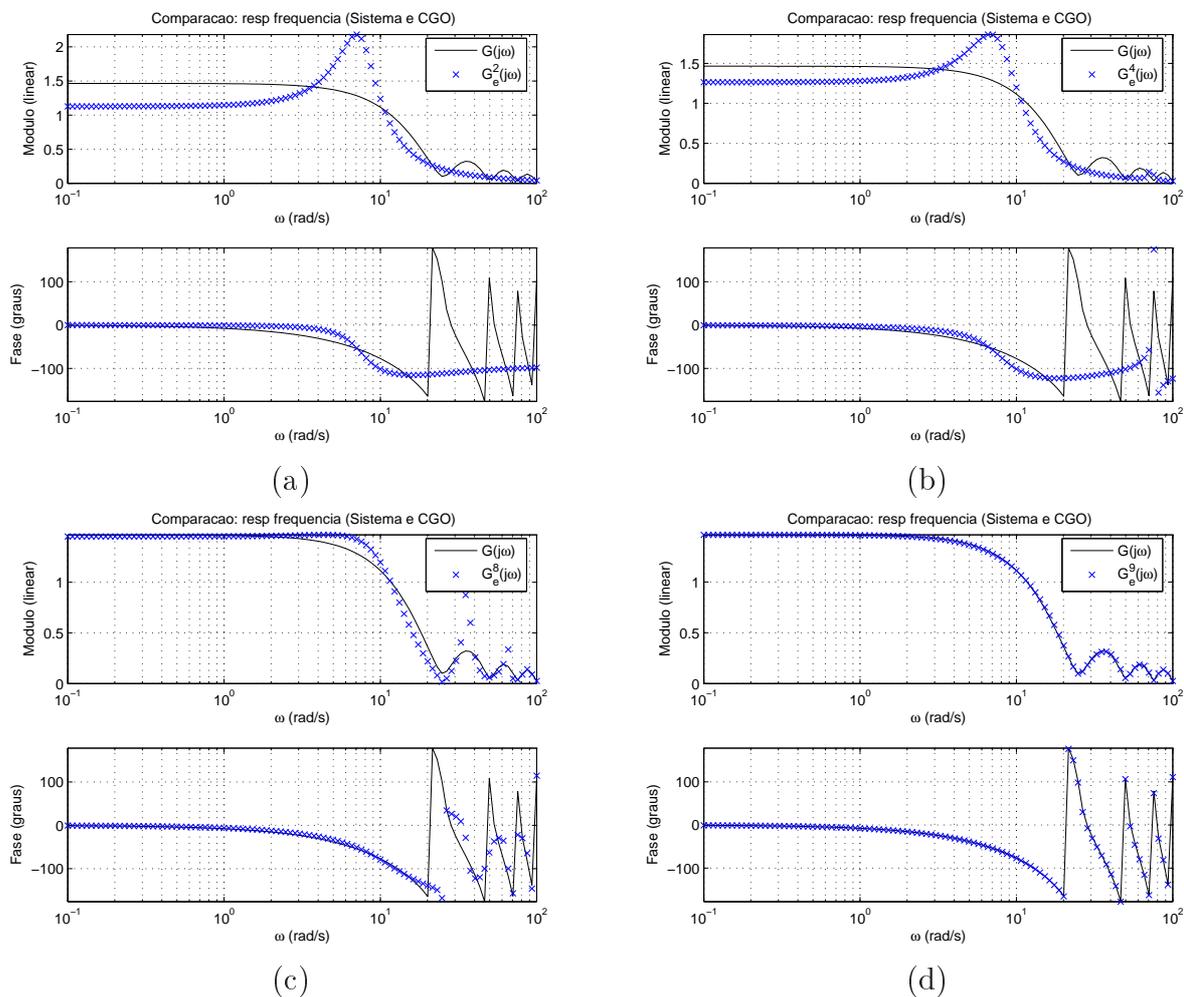


FIG. 3.5: Diagramas de resposta em freqüência dos modelos obtidos e do sistema (Exemplo 3.4.3): (a) $G_e^2(s)$, (b) $G_e^4(s)$, (c) $G_e^8(s)$ e (d) $G_e^9(s)$.

3.4.4 LEVITADOR MAGNÉTICO

O levitador magnético apresentado na FIG. 3.6 é um sistema que consiste em manter suspensa uma esfera de aço, atuando através de uma força magnética que se oponha à força peso provocada pelo campo gravitacional da terra. Devido à instabilidade inerente ao sistema, foi viável apenas realizar a identificação em malha fechada, isto é, com o sistema previamente estabilizado. O procedimento detalhado de obtenção da curva de resposta em freqüência é apresentado em WULHYNEK (2002).



FIG. 3.6: Levitador magnético (Laboratório de Controle, IME)

A TAB. 3.5 compara os custos obtidos com a técnica proposta (ADES & SILVEIRA, 2006) e aqueles apresentados por WULHYNEK (2002). O vetor de frequências compreende 61 pontos entre 10 rad/s e 160 rad/s , medidos em laboratório e apresentados em WULHYNEK (2002).

TAB. 3.5: Custos de ajuste dos modelos estimados $G_e^n(s)$ pela Metodologia N2CACGO (J_1) e por WULHYNEK (2002) (J_2) para o Exemplo 3.4.4.

Ordem (n)	J_1	J_2	Ordem (n)	J_1	J_2
1	7,8570	7,3989	8	1,3589	3,6760
2	5,1453	3,9146	9	0,7454	3,6760
3	11,8770	3,6892	10	2,4682	3,0147
4	1,2211	3,6760	11	1,6605	2,9803
5	2,6235	3,6760	12	1,0534	2,9803
6	0,9070	3,6760	13	2,7641	2,9803
7	0,8786	3,6760	14	1,3592	2,9803

A FIG. 3.7 mostra a resposta em frequência dos modelos estimados de ordens 4, 6, 7 e 9 obtidas pelo algoritmo proposto, comparativamente à resposta em frequência medida $G(j\omega)$. O exemplo do levitador magnético, mostra, particularmente, as dificuldades em se identificar um sistema real.

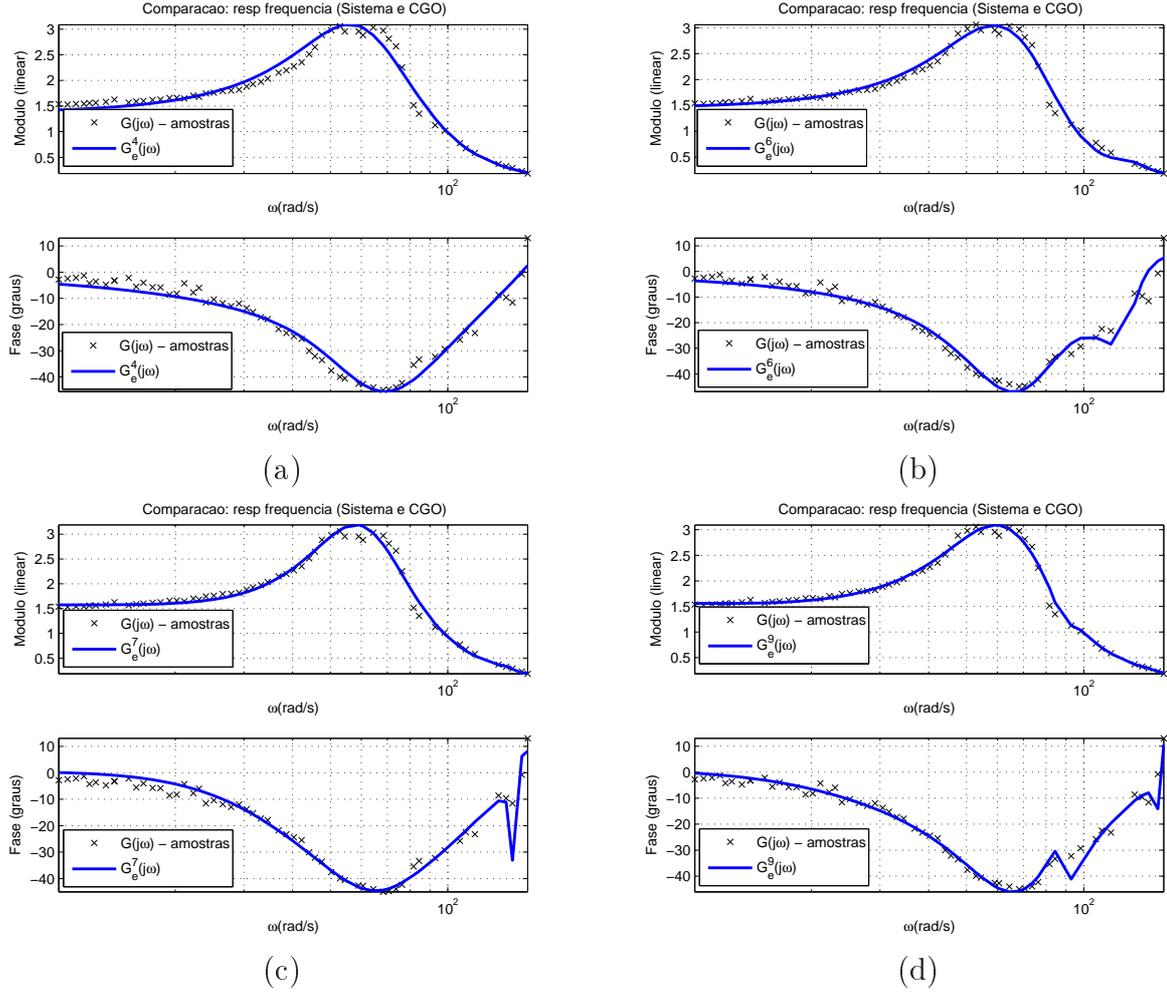


FIG. 3.7: Diagramas de resposta em frequência dos modelos obtidos e do sistema (Exemplo 3.4.4): (a) $G_e^4(s)$, (b) $G_e^6(s)$, (c) $G_e^7(s)$ e (d) $G_e^9(s)$.

Problemas como ruído e imprecisão dos sensores e dos instrumentos de medida podem tornar o levantamento de dados bastante complexo. Como consequência direta, a metodologia de identificação poderá fornecer modelos cujas dinâmicas não corresponderão aos comportamentos dos sistemas a serem controlados. Um maior número de medições com tratamento mais eficiente do ruído e um maior número de pontos de resposta em frequência são medidas que tendem a suavizar as curvas e fornecer modelos mais precisos.

3.4.5 SISTEMA ELÉTRICO DE POTÊNCIA INTERLIGADO BRASILEIRO (SIB)

Este exemplo propõe uma metodologia para redução de ordem de modelos de sistemas de grande porte, combinando a técnica de identificação N2CACGO e a técnica de truncamento modal apresentada na Seção 2.4.2. O objetivo consiste em obter modelos de

ordem reduzida $G_R(s)$, preservando alguns pólos dominantes do modelo de ordem elevada $G(s)$. Essa característica é particularmente útil para sistemas elétricos de potência, onde os pólos possuem um significado físico conhecido. Um dos passos do algoritmo consiste, portanto, na determinação por truncamento modal do modelo $G_M(s)$ que contenha a dinâmica relevante do sistema. O modelo reduzido final $G_R(s)$ é obtido através do ajuste da resposta em frequência, conforme a EQ. 3.43:

$$J = \|G(j\omega) - G_R(j\omega)\|_2^2 \quad (3.43)$$

O procedimento seguido neste exemplo está descrito resumidamente no diagrama em blocos da FIG. 3.8 e de maneira detalhada em SILVEIRA et alii (2006). Parte-se do modelo completo $G(s)$ do sistema. Em seguida, os pólos dominantes são calculados e ordenados, de acordo com os IDMNI, conforme apresentado na Seção 2.4.2. A dinâmica relevante do sistema a ser preservada no modelo de ordem reduzida $G_R(s)$ é, então, determinada, obtendo-se o equivalente modal com ordem mínima $G_M(s)$. A redução de ordem pode ser feita de três maneiras distintas, sendo uma delas via BALMR e as outras através do ajuste da resposta em frequência. Para a aplicação do método BALMR neste exemplo, foi necessária uma redução prévia de ordem do modelo completo. Neste caso, o equivalente modal $G_M(s)$ deve ser de ordem moderada, de forma que seu erro de truncamento seja muito pequeno. O truncamento balanceado foi utilizado apenas para fins comparativos. Apesar de ser uma técnica ótima de redução de ordem de modelos, o BALMR não preserva os pólos no modelo reduzido, conforme apresentado na Seção 2.4.1.

Os Métodos 1 e 2 de ajuste da resposta em frequência buscam minimizar o custo J da EQ. 3.43 seguindo estratégias diferenciadas. O Método 1 minimiza J através do ajuste de um modelo complementar $\tilde{G}(s)$, obtido através da metodologia N2CACGO, somado ao modelo $G_M(s)$, de modo que $G_R(s) = G_M(s) + \tilde{G}(s)$. Desta maneira, admitindo que a resposta em frequência do modelo completo $G(j\omega)$ é uma composição de outras duas:

$$G(j\omega) \approx G_M(j\omega) + \tilde{G}(j\omega) = G_R(j\omega)$$

o modelo complementar $\tilde{G}(s)$ é determinado pela metodologia N2CACGO utilizando como conjunto de dados:

$$\mathcal{G}_S = \left\{ \tilde{G}(j\omega) \mid \tilde{G}(j\omega) = G(j\omega) - G_M(j\omega) \right\}$$

O Método 2 propõe o ajuste de $G_R(s)$ através do posicionamento dos zeros de $G_M(s)$. Nesta segunda abordagem, que utiliza o princípio da técnica de imposição de pólos apresentada na Seção 2.3, é possível o cálculo de todos os zeros ou apenas de uma parte

deles, caso se deseje preservar alguns zeros do modelo completo. O algoritmo permite ainda que o modelo reduzido obtido pelo Método 2 seja reajustado pelo Método 1. Esse procedimento visa obter modelos reduzidos ainda mais precisos.

Para ambos os métodos, $G_R(s) = N_R(s)/D_R(s)$, onde $D_R(s)$ contém os pólos dominantes do modelo completo (Método 2) ou os dominantes acrescidos daqueles do modelo auxiliar $\tilde{G}(s)$ (Método 1). A busca se limita sempre a soluções $G_R(s)$ de ordens menores que a do modelo original cujos custos sejam inferiores ou iguais a um valor pré-determinado J_{max} . Os problemas são convexos nas variáveis de decisão, apresentando solução única, que é obtida de forma direta.

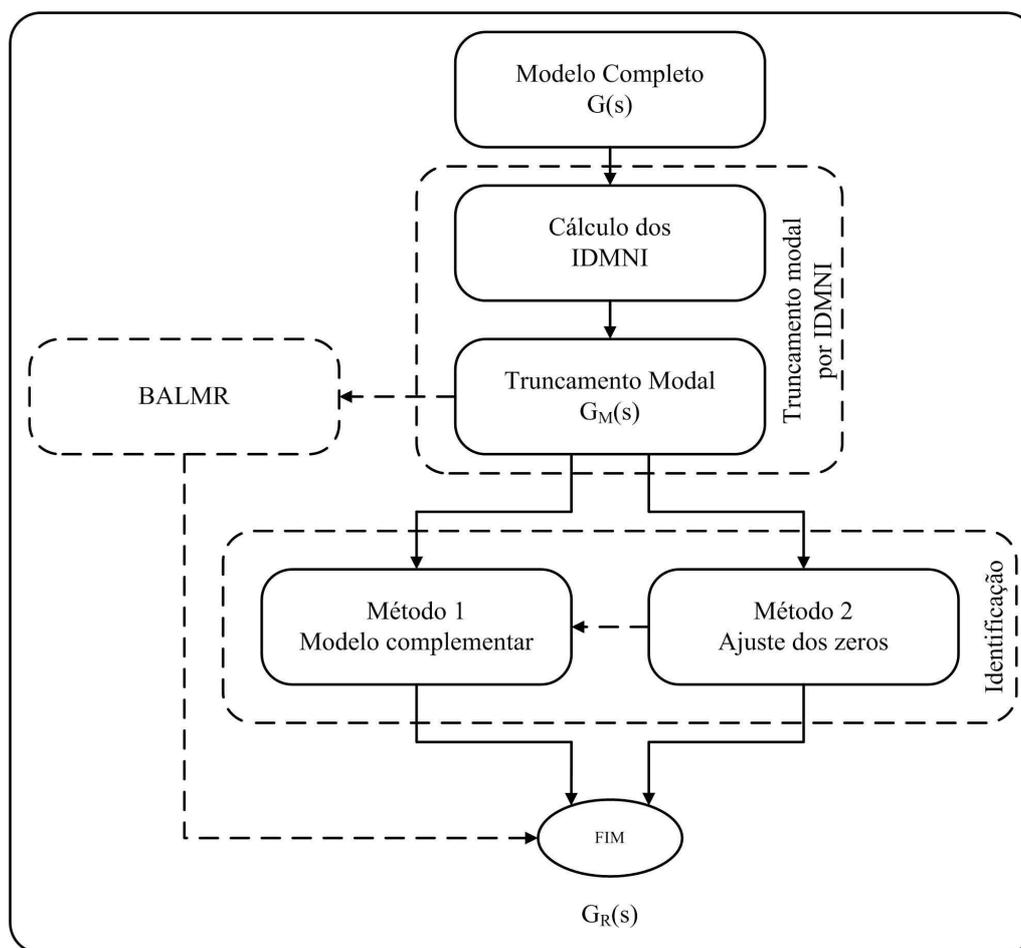


FIG. 3.8: Diagrama em blocos do procedimento adotado no Exemplo 3.4.5.

O presente exemplo faz uso do Sistema Elétrico de Potência Interligado Brasileiro. Este sistema possui características continentais com predominância de geração hidrelétrica, alimentando grandes cargas através de linhas de transmissão de longas distâncias. Este sistema foi recentemente ampliado com a interligação das áreas Norte (Norte/Nordeste) e Sul (Sul/Sudeste/Centro-Oeste) para intercâmbio energético. Todos

os equipamentos relevantes do sistema para esse estudo foram detalhadamente modelados (MARTINS et alii, 1999), resultando num modelo com 1.676 variáveis de estado. No trabalho descrito nesta dissertação, alguns controladores foram desconectados de forma a tornar instável, para uma dada condição operativa, o modo interárea Norte-Sul de oscilação eletromecânica $(0, 1089 \pm 1, 2052i)$, resultando em 1.637 estados.

A FT escolhida para aplicação da metodologia proposta é a mesma utilizada para a estabilização desse modo interárea, $G(s) = P(s)/B(s)$, onde P e B são as transformadas de Laplace do desvio de potência ativa na linha de interligação e da susceptância associada ao Compensador Série Controlado a Tiristores (TCSC) instalado no terminal Sul (Serra da Mesa), respectivamente. A realização em espaço de estados dessa FT possui o termo de transmissão direta não nulo $D = 4,88 \times 10^{-3}$.

A FIG. 3.9 mostra o espectro de pólos do modelo completo, destacando aqueles encontrados segundo o método proposto em SILVA (2005). O APÊNDICE 9.4 contém uma tabela com os 49 pólos mais dominantes e os respectivos IDM do modelo completo do SIB adotado neste exemplo.

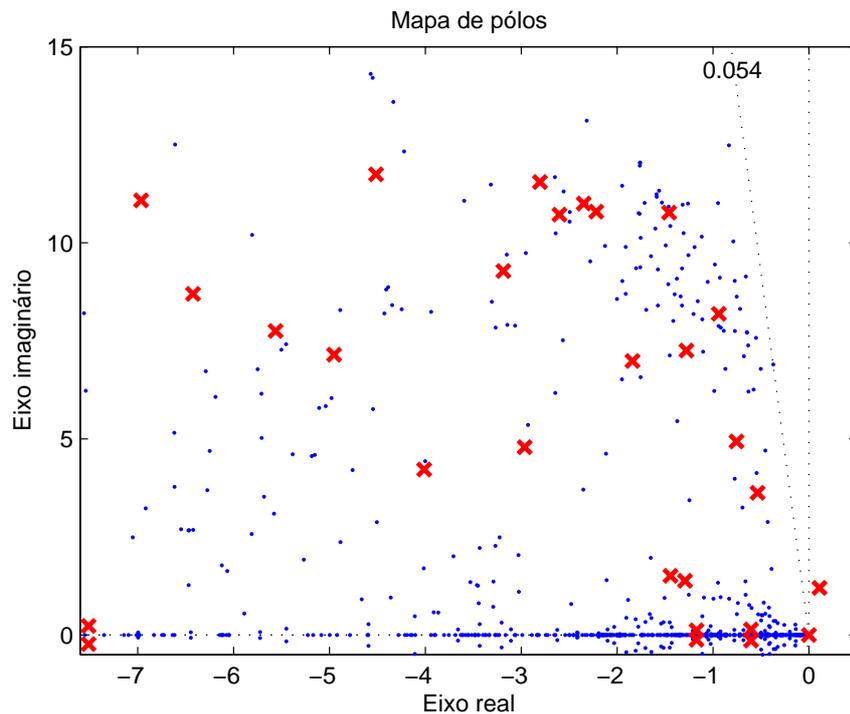


FIG. 3.9: Espectro de pólos (.) e pólos dominantes (x) do SIB.

A FIG. 3.10 apresenta o fluxograma detalhado da metodologia para redução de ordem de modelos de sistemas de grande porte (SILVEIRA et alii, 2006). Os Métodos 1 e 2 são apresentados na seqüência.

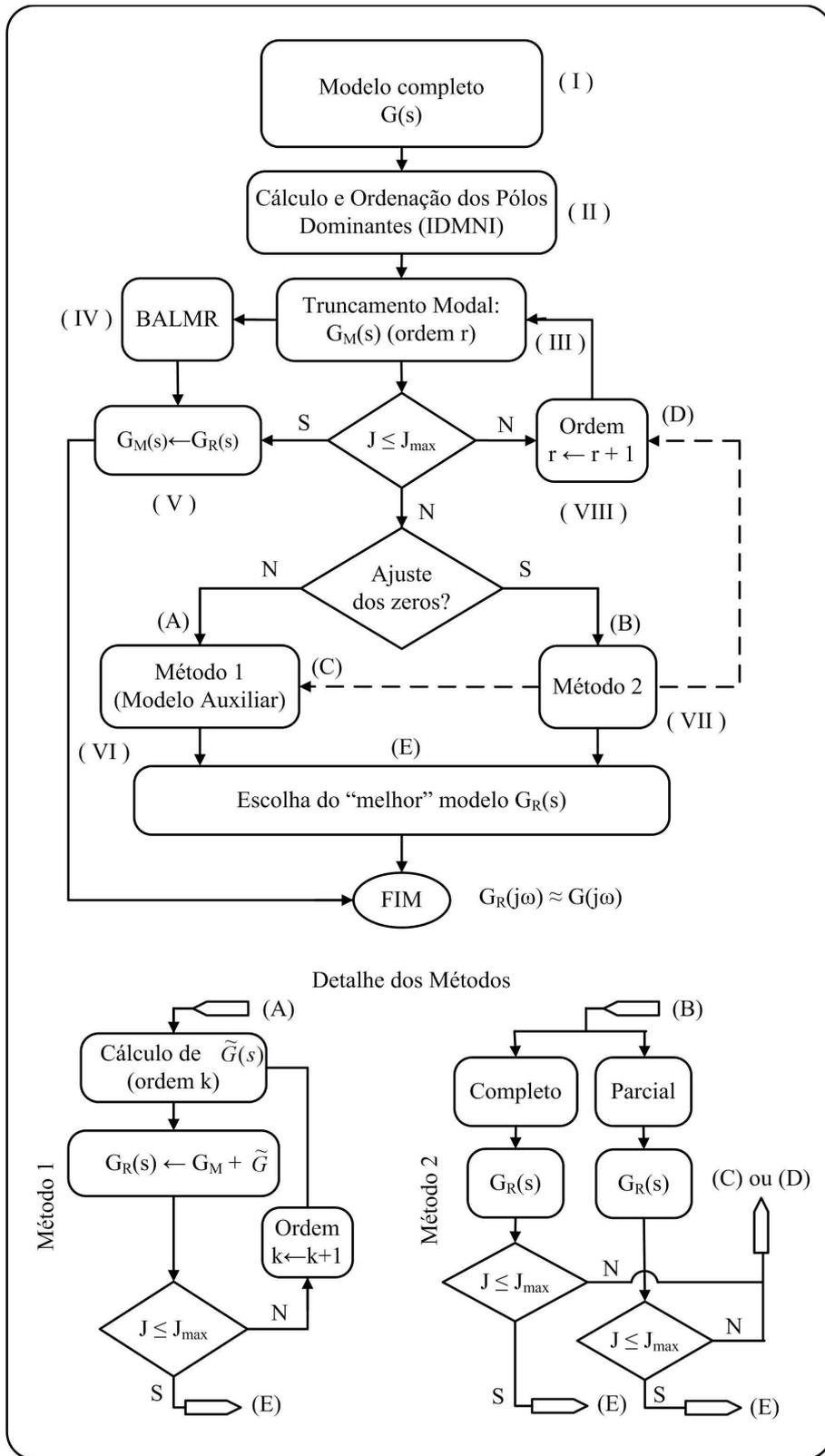


FIG. 3.10: Fluxograma da metodologia proposta para redução de ordem de modelos de grande porte (Exemplo 3.4.5).

No Método 1, admite-se que, na solução,

$$G(j\omega) \approx G_M(j\omega) + \tilde{G}(j\omega) = G_R(j\omega) \quad (3.44)$$

onde $\tilde{G}(j\omega)$ representa a resposta em frequência da FT responsável pelo ajuste entre $G(j\omega)$ e $G_R(j\omega)$. A combinação em paralelo $G_M(s) + \tilde{G}(s)$ foi adotada não somente por apresentar melhor condicionamento numérico que a combinação em série $G_M(s)\tilde{G}(s)$, mas também por resultar em modelos reduzidos de ordens mais baixas.

A técnica de identificação descrita neste capítulo é aplicada a

$$\tilde{G}(j\omega) = G(j\omega) - G_M(j\omega) \quad (3.45)$$

de forma a obter uma família de modelos de ajuste. As FT racionais estimadas de ordem p são dadas por $\tilde{G}_e^p(s) = N(\underline{\alpha}, s)/D(\underline{\beta}, s)$, conforme descrito pelas EQ. 3.3–3.7.

O critério de erro adotado $J(\underline{\theta})$ para o ajuste de um modelo que possua a resposta em frequência $\tilde{G}(j\omega)$ é dado por:

$$J(\underline{\theta}) = \left\| D(\underline{\beta}, j\omega)\tilde{G}(j\omega) - N(\underline{\alpha}, j\omega) \right\|_2 \quad (3.46)$$

onde $\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}^T & \underline{\beta}^T \end{bmatrix}^T$ é o vetor de parâmetros a ser determinado. O modelo complementar $\tilde{G}_e^p(s)$ é estimado segundo o procedimento descrito na metodologia N2CACGO.

No Método 2, o ajuste das curvas de resposta em frequência é feito pelo cálculo dos zeros ótimos de $G_M(s)$. Deseja-se encontrar a função estimada $G_e^k(s)$ com os pólos previamente escolhidos por truncamento modal e cuja resposta em frequência melhor se aproxime de $G(j\omega)$. O critério adotado é:

$$J(\underline{\gamma}) = \|G(j\omega) - G_e^k(j\omega)\|_2 \quad (3.47)$$

Nesta abordagem, as funções estimadas serão descritas pela EQ. 3.3. O Método 2 é um caso particular daquele apresentado por VALLE (2005). O vetor de pólos que antes era determinado pelo uso de um algoritmo estimador, que fazia a análise da resposta em frequência discreta do sistema real e determinava as informações relevantes é, agora, substituído pelos pólos dominantes obtidos por IDMNI.

Dado o polinômio característico de $P_i(s)$ (cujas raízes são os pólos dominantes especificados) para $G_e^k(\underline{\gamma}, s)$, pode-se determinar qual é o conjunto de zeros do modelo que proporciona o melhor ajuste. Para isso, resolve-se o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\underline{\gamma} \in \mathbb{R}^k} J(\underline{\gamma}) = \min_{\underline{\gamma} \in \mathbb{R}^k} \left\| G(j\omega) - \sum_{i=0}^k \gamma_i P_i(j\omega) \right\|_2 \quad (3.48)$$

onde o vetor de parâmetros $\underline{\gamma} = [\gamma_0 \ \gamma_1 \ \dots \ \gamma_k]^T$, calculado analiticamente, define os coeficientes do polinômio cujas raízes são os zeros ótimos para o problema. Escolhida a ordem k do modelo mínimo $G_M(s)$, o algoritmo estima uma função $G_e^k(s)$ cujo conjunto de zeros pode ser total ou parcialmente calculado. Para o segundo caso, fixa-se previamente uma parte do conjunto de zeros do modelo original. Os zeros a serem mantidos são escolhidos efetuando-se o cálculo dos pólos do sistema inverso e ordenando-os segundo o IDMNI. Considere o modelo do sistema original, com termo de transmissão direta $D \neq 0$, descrito por:

$$\text{Sistema original: } \begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \end{cases} \quad (3.49)$$

O modelo do sistema inverso pode ser determinado fazendo-se a saída igual a entrada ($\underline{y} = \underline{u}$) na EQ. 3.49, de maneira que:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}_i = A\underline{x}_i + B\underline{u} \\ \underline{u} = C\underline{x}_i + D\underline{u} \end{cases}$$

$$\underline{y} = D^{-1}(\underline{u} - C\underline{x}_i) = -D^{-1}C\underline{x}_i + D^{-1}\underline{u}$$

$$\dot{\underline{x}}_i = A\underline{x}_i + BD^{-1}(\underline{u} - C\underline{x}_i) = (A - BD^{-1}C)\underline{x}_i + BD^{-1}\underline{u}$$

e o modelo do sistema inverso pode ser escrito como:

$$\text{Sistema inverso: } \begin{cases} \dot{\underline{x}}_i = (A - BD^{-1}C)\underline{x}_i + BD^{-1}\underline{u} \\ \underline{y} = -D^{-1}C\underline{x}_i + D^{-1}\underline{u} \end{cases} \quad (3.50)$$

Verifica-se, na prática, que os pólos e os zeros do sistema original descrito pela EQ. 3.49 correspondem, respectivamente, aos zeros e pólos do sistema inverso, dado pela EQ. 3.50.

Para fins comparativos, os resultados obtidos pela aplicação dos Métodos 1 e 2 e pela técnica de truncamento modal são comparados àqueles obtidos por BALMR. Definindo-se, por exemplo, o limitante superior do custo $J_{max} = 9,50 \times 10^{-4}$, são obtidos modelos $G_R(s)$ de ordem $r = 6$ ($J = 9,37 \times 10^{-4}$), aplicando-se o BALMR em um equivalente modal de ordem 145, e de ordem $r = 40$ ($J = 8,66 \times 10^{-4}$), reduzindo-se o modelo completo por truncamento modal. Busca-se, portanto, através das metodologias de identificação propostas, contornar as restrições do método de truncamento modal, de maneira a obter resultados mais próximos aos apresentados pelo BALMR.

Na aplicação do Método 1, varia-se a ordem de $G_M(s)$ e estima-se o modelo de ajuste $\tilde{G}(s)$ correspondente, verificando-se a possibilidade da redução de sua ordem por truncamento balanceado. Aplicando-se o BALMR em $\tilde{G}(s)$, obtêm-se $\tilde{G}_r(s)$, que somado a $G_M(s)$ produz um modelo super-reduzido $G_{R,r}(s) = G_M(s) + \tilde{G}_r(s)$. Para fins

comparativos, foram definidos três custos, relacionando a resposta em frequência do sistema $G(j\underline{\omega})$ às respostas em frequência dos modelos mínimo $G_M(j\underline{\omega})$, reduzido $G_R(j\underline{\omega})$ e, quando possível, super-reduzido $G_{R,r}(j\underline{\omega})$. Desta maneira:

$$J_1 = \|G(j\underline{\omega}) - G_M(j\underline{\omega})\|_2 \quad (3.51)$$

$$J_2 = \|G(j\underline{\omega}) - G_R(j\underline{\omega})\|_2 \quad (3.52)$$

$$J_3 = \|G(j\underline{\omega}) - G_{R,r}(j\underline{\omega})\|_2 \quad (3.53)$$

Na aplicação do Método 2, realiza-se o ajuste dos zeros, de acordo com a ordem r determinada para o modelo $G_M(s)$. Para ambos os métodos, a ordem máxima do modelo reduzido $G_R(s)$ (ou $G_{R,r}(s)$, no caso do Método 1) foi limitada a $r \leq 15$. Para o estabelecimento de $G_M(s)$ foram sempre considerados os pólos mais dominantes segundo o IDMNI, sendo utilizados 100 pontos no vetor de frequências $\underline{\omega}$ com espaçamento logarítmico uniforme na faixa de interesse ($0,01 \text{ rad/s} \leq \omega \leq 100 \text{ rad/s}$). Os resultados obtidos estão apresentados nas TAB 3.6 e TAB. 3.7. Na TAB. 3.6, verifica-se que o custo J_1 referente ao equivalente modal de ordem 10 é maior que aquele calculado para o equivalente modal de ordem 8. Em alguns momentos, o acréscimo de novas parcelas modais ao modelo reduzido $G_M(s)$ pode degradar o custo. O que deve ser notado é que este valor deve ser menor ou igual ao limitante superior do erro, conforme apresentado na EQ. 2.38. A TAB. 3.7 mostra os modelos G_{MC} e G_{MP} , obtidos através do ajuste completo e parcial do conjunto de zeros, respectivamente.

TAB. 3.6: Custos das soluções obtidas pelo Método 1 para o Exemplo 3.4.5.

Ordem				Custos ($\times 10^{-4}$)		
$G_M(s)$	$\tilde{G}(s)$	$\tilde{G}_r(s)$	$G_{R,r}(s)$	J_1	J_2	J_3
2	7	4	6	355,16989	9,84029	9,42867
4	6	4	8	151,64296	11,87758	10,18977
6	6	4	10	144,81427	11,45566	10,47363
8	7	4	12	86,71269	9,32788	9,15654
10	7	5	15	135,69310	7,80563	7,78948

Esses resultados podem ser comparados com aqueles obtidos pelo método BALMR. Gerou-se um modelo reduzido $G_M(s)$ de ordem 145, por truncamento modal, para o qual o custo em relação ao modelo completo é $J = 2,74 \times 10^{-4}$. Sobre este modelo foi possível aplicar o BALMR, obtendo-se os resultados da TAB. 3.8.

O Método 2 apresentou bons resultados com ordens mais baixas que o Método 1. O modelo reduzido obtido por cálculo dos zeros pode ainda ser utilizado como $G_M(s)$ no

TAB. 3.7: Custos das soluções obtidas pelo Método 2 para o Exemplo 3.4.5.

Ordem $G_{MC}(s)$ e $G_{MP}(s)$	Custo ($\times 10^{-4}$)	
	$J_1(G_{MC}(s))$	$J_1(G_{MP}(s))$
2	223,57136	321,02317
4	31,30758	39,00038
6	13,42278	22,68564
8	9,17014	15,89764
10	7,66939	12,43946

TAB. 3.8: Custos das soluções obtidas por truncamento modal (IDMNI) e BALMR para o Exemplo 3.4.5.

Ordem		Custo ($\times 10^{-4}$)
$G_M(s)$	$G_{R,r}(s)$	
145	6	9,37651
	8	6,99355
	10	8,71139
	12	3,84083
	14	3,42313

Método 1, permitindo um melhor ajuste entre as respostas em frequência. As soluções que apresentaram os menores custos nos Métodos 1 e 2 estão resumidas nas TAB. 3.9 e 3.10, onde são mostrados os pólos e zeros calculados em cada caso. Essas tabelas mostram que os pólos de $G_M(s)$ foram preservados nos dois métodos. Particularmente, a TAB. 3.9 destaca os pólos acrescidos devido ao modelo de ajuste $\tilde{G}(s)$ e a TAB. 3.10 mostra o par de zeros que foi mantido ($s = -0,3127 \pm 2,9347i$) no ajuste parcial para obtenção de $G_{MP}(s)$.

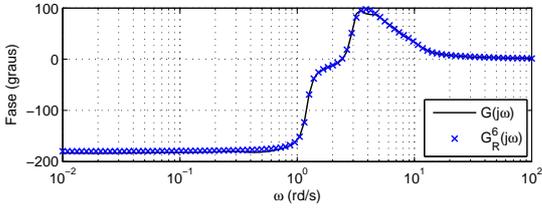
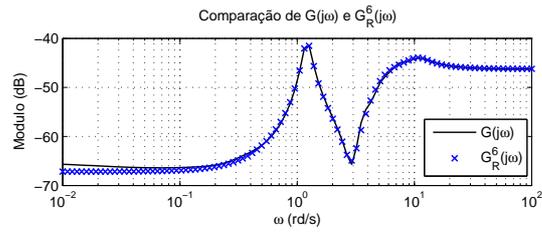
TAB. 3.9: Pólos e zeros do modelo $G_{R,r}^{15}(s)$ obtido pelo Método 1 para o Exemplo 3.4.5.

	Pólos	Zeros
$G_M(s)$	$+0,1089 \pm 1,2052i$	$-3,1691 \pm 12,126i$
	$-2,9648 \pm 4,7919i$	$-2,5663 \pm 10,275i$
	$-4,0121 \pm 4,2190i$	$-4,2590 \pm 9,0913i$
	$-3,1879 \pm 9,2842i$	$-0,3809 \pm 2,8503i$
	$-2,6030 \pm 10,721i$	$-4,2579 \pm 4,0552i$
$\tilde{G}(s)$	$-2,0592 \pm 4,2201i$	$-2,3040 \pm 4,5518i$
	$-3,3451 \pm 12,070i$	$+0,6849$
	$-116,16$	$-0,6728$
		$-115,05$

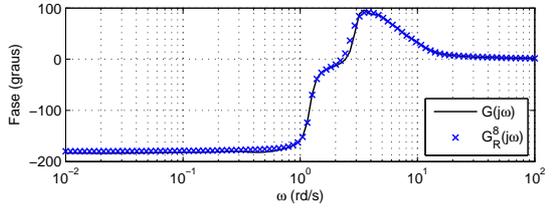
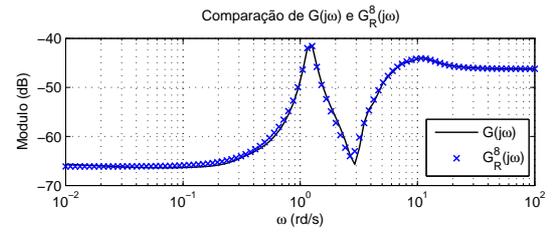
TAB. 3.10: Pólos e zeros dos modelos $G_{MC}^{10}(s)$ e $G_{MP}^{10}(s)$ obtidos pelo Método 2 para o Exemplo 3.4.5.

Pólos	Zeros	
	$G_{MC}^{10}(s)$	$G_{MP}^{10}(s)$
$+0,1089 \pm 1,2052i$	$-2,6024 \pm 10,409i$	$-0,3127 \pm 2,9347i$
$-2,9648 \pm 4,7919i$	$-4,0342 \pm 9,0864i$	$-2,7526 \pm 10,834i$
$-4,0122 \pm 4,2191i$	$-4,3236 \pm 4,7244i$	$-5,5063 \pm 3,6913i$
$-3,1879 \pm 9,2842i$	$-0,4589 \pm 2,8417i$	$-3,0395 \pm 8,6119i$
$-2,6030 \pm 10,721i$	$+0,6797$	$+0,6648$
	$-0,6600$	$-0,6167$

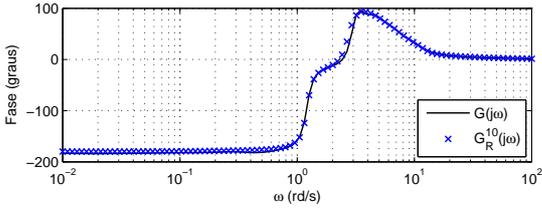
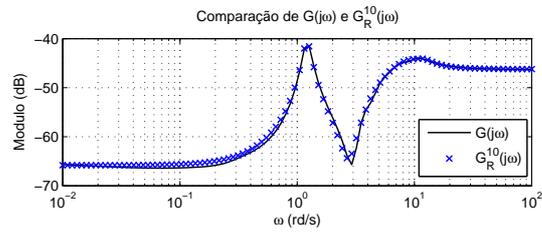
As respostas em freqüência dos quatro primeiros modelos obtidos em cada um dos métodos (Método 1 e Método 2 com ajuste completo e parcial) podem ser vistas nas FIG. 3.11–3.13. A FIG. 3.14 consolida os resultados obtidos, mostrando as curvas de resposta em freqüência dos modelos reduzidos que apresentaram os menores custos em cada método, comparativamente à curva do modelo completo.



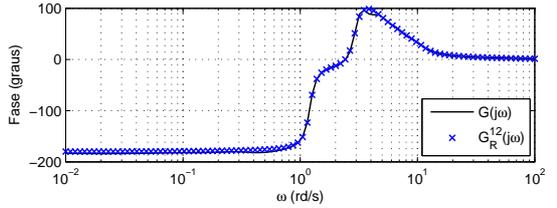
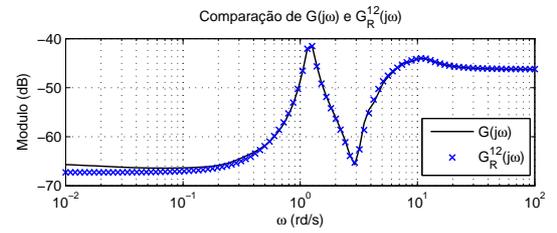
(a)



(b)

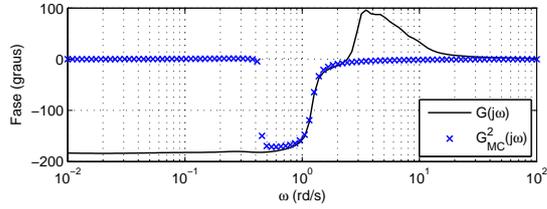
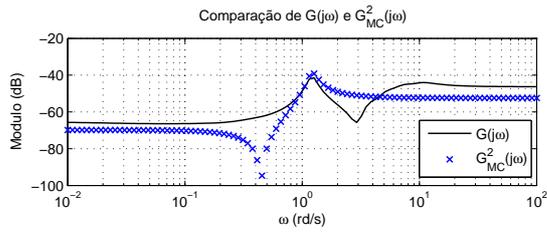


(c)

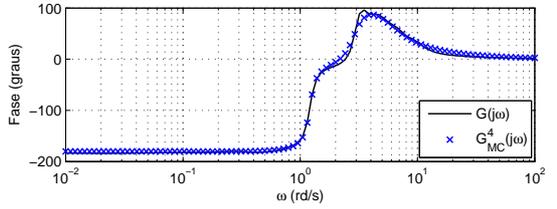
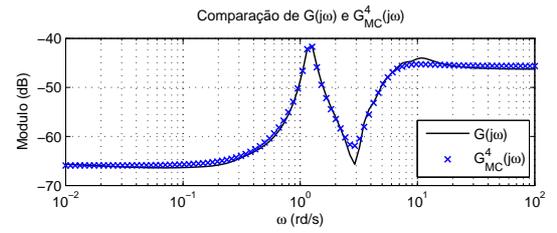


(d)

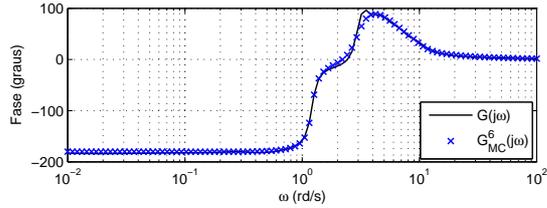
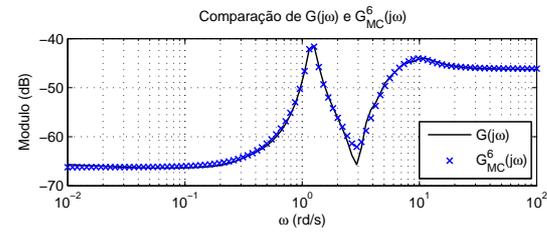
FIG. 3.11: Diagramas de resposta em frequência dos modelos obtidos pelo Método 1 e do sistema (Exemplo 3.4.5): (a) $G_R^6(s)$, (b) $G_R^8(s)$, (c) $G_R^{10}(s)$ e (d) $G_R^{12}(s)$.



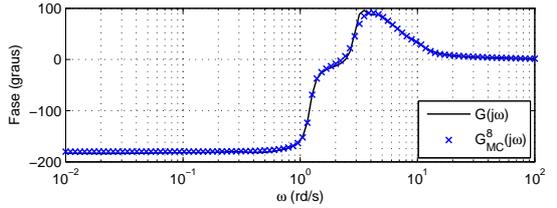
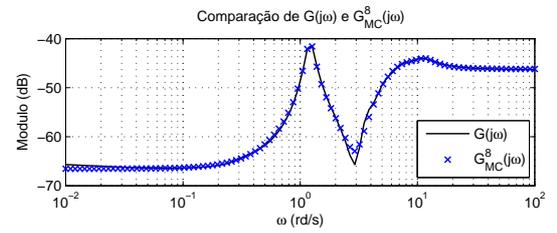
(a)



(b)

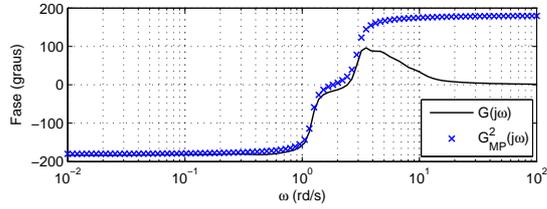
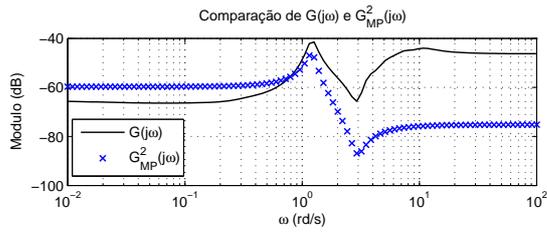


(c)

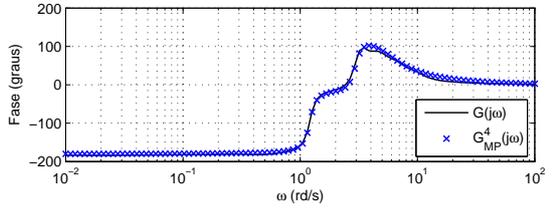
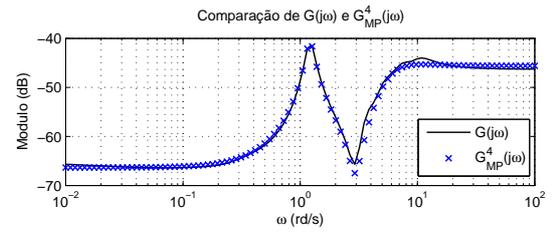


(d)

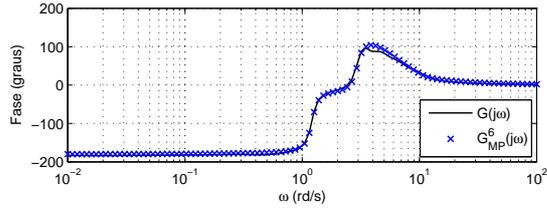
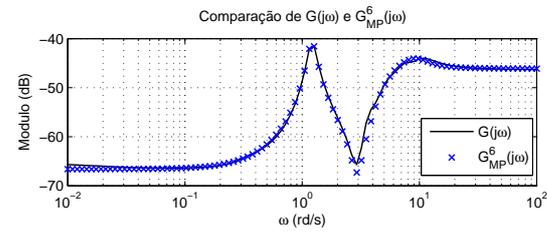
FIG. 3.12: Diagramas de resposta em frequência dos modelos obtidos pelo Método 2 com ajuste completo dos zeros e do sistema (Exemplo 3.4.5): (a) $G_{MC}^2(s)$, (b) $G_{MC}^4(s)$, (c) $G_{MC}^6(s)$ e (d) $G_{MC}^8(s)$.



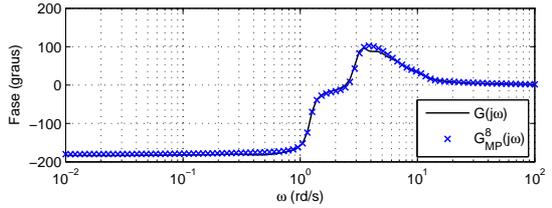
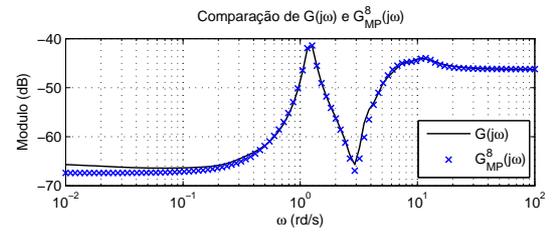
(a)



(b)



(c)



(d)

FIG. 3.13: Diagramas de resposta em frequência dos modelos obtidos pelo Método 2 com ajuste parcial dos zeros e do sistema (Exemplo 3.4.5): (a) $G_{MP}^2(s)$, (b) $G_{MP}^4(s)$, (c) $G_{MP}^6(s)$ e (d) $G_{MP}^8(s)$.

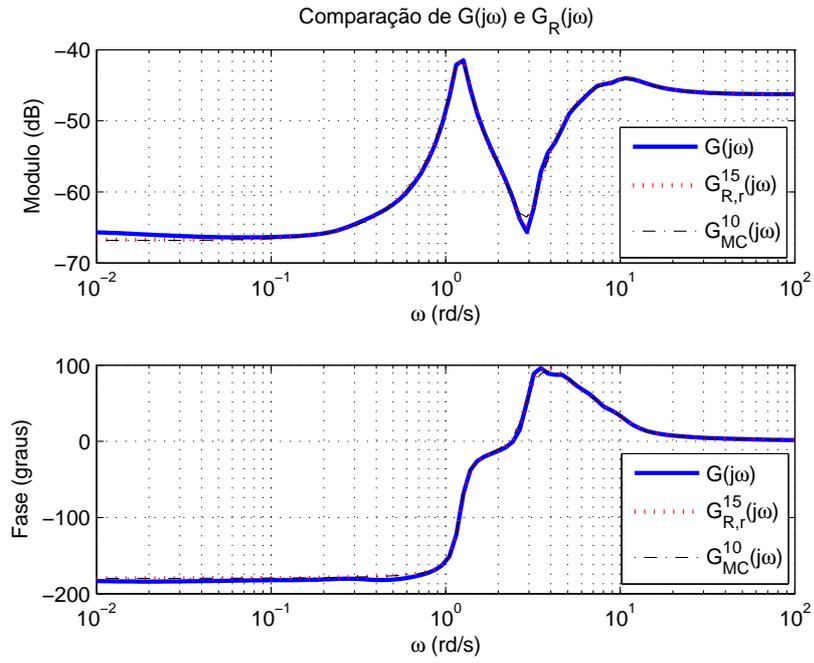


FIG. 3.14: Diagramas de resposta em frequência dos modelos que apresentaram os menores custos pelo Método 1 ($G_{R,r}^{15}(s)$), pelo Método 2 ($G_{MC}^{10}(s)$) e do modelo completo ($G(s)$) (Exemplo 3.4.5).

4 EXTENSÃO DA METODOLOGIA N2CACGO PARA SISTEMAS MIMO

O capítulo anterior abordou a identificação de sistemas monovariáveis com o uso da técnica N2CACGO. Entretanto, diversos sistemas reais são compostos por múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO) como, por exemplo, as plantas aeronáuticas, químicas e os sistemas elétricos de potência. Naturalmente, a complexidade dos sistemas multivariáveis, em todos os aspectos, tende a crescer, à medida que se aumenta a quantidade de canais considerados, ou seja, o número de combinações possíveis entre entradas e saídas. Busca-se, agora, não mais uma FT que descreva a dinâmica do sistema, mas uma Matriz Função de Transferência (MFT), composta por $p \times q$ FT, onde p é o número de entradas e q o número de saídas do sistema. Cada elemento da MFT descreve a dinâmica de um dos $p \times q$ canais. Neste contexto, a obtenção de um modelo preciso para o sistema facilita bastante a análise e a síntese de controle.

A técnica N2CACGO apresentada no Capítulo 3 pode ser empregada em sistemas MIMO, observadas a linearidade e a invariância no tempo destes últimos. Para isso, faz-se necessário aplicá-la individualmente, em cada um dos canais. Dessa maneira, cada canal terá um modelo estimado distinto.

É interessante que se tenha uma metodologia de identificação de sistemas MIMO que seja uma simples extensão da metodologia N2CACGO para sistemas monovariáveis, buscando manter suas principais características: solução analítica, convexidade e otimalidade, segundo o critério adotado.

A MFT obtida através da aplicação da extensão da metodologia SISO proposta contém denominador comum, isto é, todos os canais compartilham a mesma dinâmica. Dessa forma, esta técnica proposta para a identificação de sistemas multivariáveis permite que os modelos sejam estimados com menor quantidade de parâmetros que no caso citado no parágrafo anterior.

O Capítulo 4 está organizado em quatro seções. A primeira apresenta algumas considerações iniciais. As duas seguintes tratam do equacionamento do problema e da implementação computacional. A quarta se dedica às aplicações da metodologia proposta, enfatizando seu uso em plantas aeronáuticas e sistemas elétricos.

4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Considere um sistema multivariável de p entradas e q saídas, do qual se dispõe somente de um conjunto \mathcal{G}_M composto por observações $G(j\underline{\omega})$ de dados complexos de resposta em frequência, calculados ou medidos nos m valores de frequência $\underline{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_m \end{bmatrix}^T$ convenientemente escolhidos e distribuídos na faixa de interesse:

$$\mathcal{G}_M \triangleq \{G(j\omega) \mid G(j\omega) \in \mathbb{C}^{q \times p}; \omega \in \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}\} \quad (4.1)$$

A MFT identificada $G_e(\underline{\theta}, s) \in M^{q \times p}(\mathbb{R}(s))$ assume a forma genérica

$$G_e(\underline{\theta}, s) = \begin{bmatrix} G_{e,11}^n(s) & G_{e,12}^n(s) & \dots & G_{e,1p}^n(s) \\ G_{e,21}^n(s) & G_{e,22}^n(s) & \dots & G_{e,2p}^n(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{e,q1}^n(s) & G_{e,q2}^n(s) & \dots & G_{e,qp}^n(s) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

onde $G_{e,\lambda}^n(s)$ são as $p \times q$ FT estimadas de ordem n e $\lambda \in \Lambda$ é um índice que indica o canal específico, dado pela EQ. 2.4. Analogamente ao caso monovariável, as FT $G_{e,\lambda}^n(s)$ são racionais e próprias, sendo estimadas com ordem n e representadas como:

$$G_{e,\lambda}^n(\underline{\theta}, s) = \sum_{k=0}^n \alpha_k^\lambda P_k(s) = \frac{N(\underline{\alpha}^\lambda, s)}{D(\underline{\beta}, s)} = \frac{\alpha_0^\lambda s^n + \alpha_1^\lambda s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}^\lambda s + \alpha_n^\lambda}{s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n} \quad (4.3)$$

onde

$$P_k(s) = \frac{s^{n-k}}{s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n} \quad (4.4)$$

$$\underline{\alpha}^\lambda = \begin{bmatrix} \alpha_0^\lambda & \alpha_1^\lambda & \dots & \alpha_n^\lambda \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (4.5)$$

$$\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad (4.6)$$

$$\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}^{\Lambda T} & \underline{\beta}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(n+1)p \cdot q + n} \quad (4.7)$$

Define-se o critério de custo aditivo $J_M(\underline{\theta})$, baseado em norma quadrática:

$$J_M(\underline{\theta}) = \sum_{\lambda} \|D(\underline{\beta}, j\underline{\omega})G_\lambda(j\underline{\omega}) - N(\underline{\alpha}^\lambda, j\underline{\omega})\|_2^2 \quad (4.8)$$

sendo $N(\underline{\alpha}^\lambda, j\underline{\omega})$ e $D(\underline{\beta}, j\underline{\omega})$ as respostas em frequência dos numeradores de $G_{e,\lambda}^n(s)$ e do denominador comum de $G(s)$ e $\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}^{\Lambda T} & \underline{\beta}^T \end{bmatrix}^T$ o vetor de parâmetros a ser determinado. Assim como no caso N2CACGO, deseja-se calcular os zeros de $G_{e,\lambda}^n(s)$ e os pólos

comuns de $G_e(s)$, minimizando a função custo na EQ. 4.8 e permitindo determinar uma aproximação adequada de \mathcal{G}_M na EQ. 4.1.

O fluxograma da metodologia MIMO pode ser visto na FIG. 4.1. O conjunto de dados é formado pelas respostas em frequência dos canais de interesse, em uma faixa de frequências desejada. O método calcula analiticamente os pólos comuns do modelo $G_e(s) \in M^{q \times p}(\mathbb{R}(s))$ e os zeros de $G_{e,\lambda}^n(s)$ de maneira ótima, minimizando o custo na EQ. 4.8. Aumenta-se gradativamente a ordem do denominador comum de $G_e(s)$, visando alcançar o custo previamente estabelecido. Dessa forma, obtém-se uma família de modelos que satisfazem o problema, parametrizados através da ordem n . A escolha da ordem mais adequada está baseada no compromisso entre a precisão necessária para se representar o comportamento da planta e a complexidade matemática desejada para o modelo. É possível também que seja feita, num primeiro momento, a estimação de um modelo cujo denominador comum seja de ordem n elevada. Para esse caso, os valores singulares de Hankel do modelo final são analisados, verificando-se a possibilidade de redução de ordem por truncamento balanceado. O bloco “Identificação” da FIG. 4.1 é detalhadamente explicado na seção seguinte, e os blocos “Resposta em frequência” e “Redução de Ordem” utilizam a mesma teoria apresentada no caso SISO.

4.2 EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA

A solução ótima, segundo o critério descrito na EQ. 4.8, é obtida resolvendo-se o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\underline{\theta}} J_M(\underline{\theta}) = \min_{\underline{\theta}} \sum_{\lambda} \left\| D(\underline{\beta}, j\underline{\omega}) G_{\lambda}(j\underline{\omega}) - N(\underline{\alpha}^{\lambda}, j\underline{\omega}) \right\|_2^2 \quad (4.9)$$

onde $\underline{\theta}$ é dado pela EQ. 4.7 e $G_{\lambda}(j\underline{\omega})$ representa a resposta em frequência medida do canal $\lambda \in \Lambda$, de maneira que $G_{\lambda}(j\underline{\omega}) \in \mathcal{G}_M$.

A expansão do somatório da EQ. 4.8 permite escrever:

$$\begin{aligned} J_M(\underline{\theta}) &= \left\| D(\underline{\beta}) G_{11} - N(\underline{\alpha}^{11}) \right\|_2^2 + \left\| D(\underline{\beta}) G_{21} - N(\underline{\alpha}^{21}) \right\|_2^2 + \dots + \left\| D(\underline{\beta}) G_{qp} - N(\underline{\alpha}^{qp}) \right\|_2^2 \\ &= \sum_{i=1}^m \left| D(\underline{\beta}) G_{11}(j\omega_i) - N(\underline{\alpha}^{11}) \right|^2 + \dots + \sum_{i=1}^m \left| D(\underline{\beta}) G_{qp}(j\omega_i) - N(\underline{\alpha}^{qp}) \right|^2 \\ &= \sum_{i=1}^m \Psi_{11}(j\omega_i) \Psi_{11}^*(j\omega_i) + \sum_{i=1}^m \Psi_{21}(j\omega_i) \Psi_{21}^*(j\omega_i) + \dots + \sum_{i=1}^m \Psi_{qp}(j\omega_i) \Psi_{qp}^*(j\omega_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \left[\Psi_{11}(j\omega_i) \Psi_{11}^*(j\omega_i) + \Psi_{21}(j\omega_i) \Psi_{21}^*(j\omega_i) + \dots + \Psi_{qp}(j\omega_i) \Psi_{qp}^*(j\omega_i) \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{\lambda} [\Psi_{\lambda}(j\omega_i) \Psi_{\lambda}^*(j\omega_i)] \right\} \quad (4.10)$$

onde $D(\underline{\beta})$, $N(\underline{\alpha}^{\lambda})$ e G_{λ} são funções de $(j\omega_i)$ e $\Psi_{\lambda}(j\omega_i) = D(\underline{\beta}, j\omega_i)G_{\lambda}(j\omega_i) - N(\underline{\alpha}^{\lambda}, j\omega_i)$.

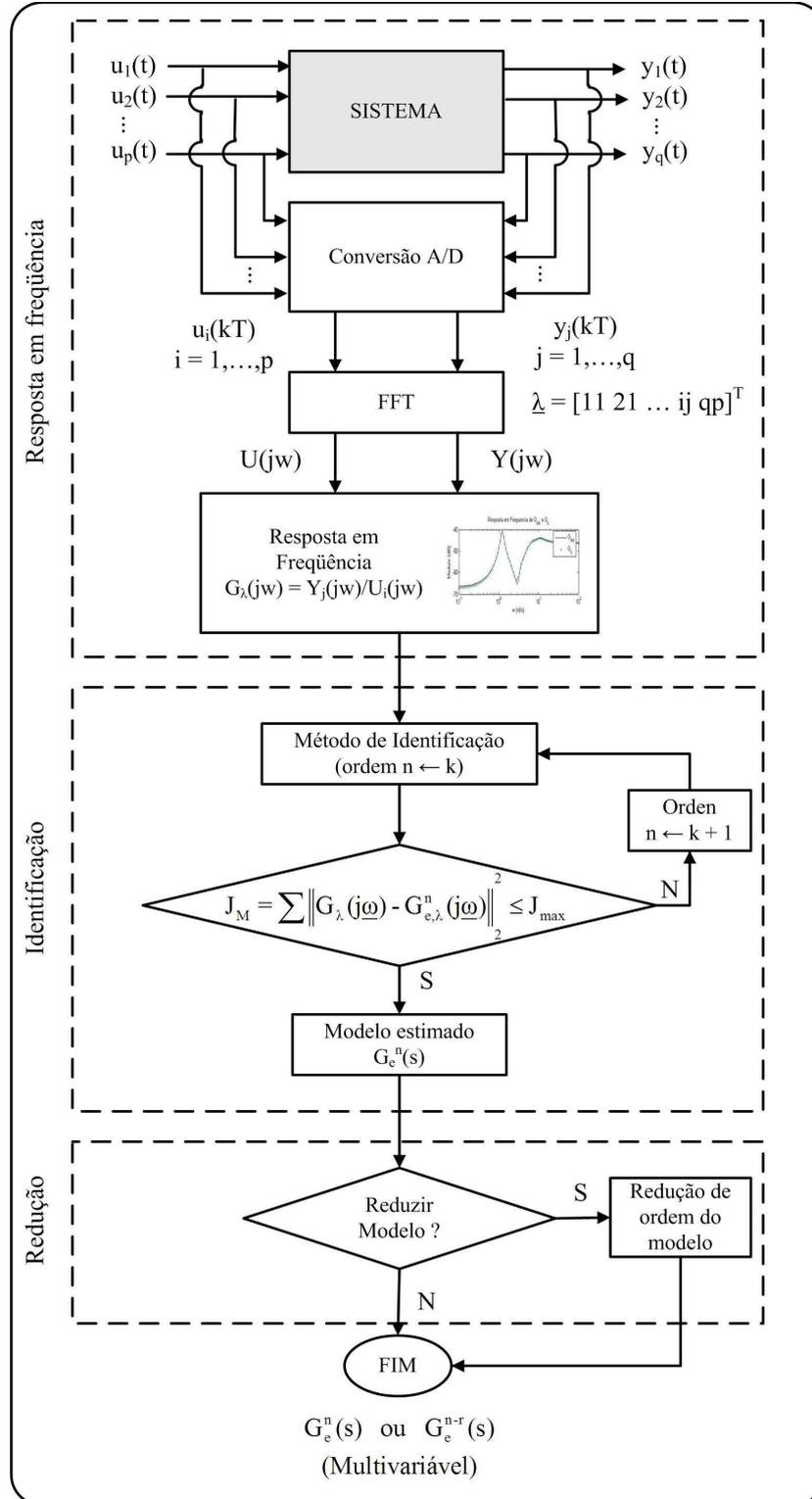


FIG. 4.1: Fluxograma da metodologia de identificação proposta (MIMO).

Lema 4.1 (A soma de funções convexas é também uma função convexa). *Sejam $f_1, f_2, \dots, f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções convexas. Considere a função f definida por $\sum_{i=1}^k \rho_i f_i(\underline{x})$, $\rho_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, k$. A função f é convexa.*

Demonstração: Ver APÊNDICE 9.1.

□

O uso combinado dos Lemas 3.1 e 4.1 permite afirmar que o problema descrito na EQ. 4.9 é convexo nas variáveis $\underline{\alpha}^\lambda$ e $\underline{\beta}$ e pode ser solucionado calculando-se o vetor $\underline{\theta} = \underline{\theta}_{min} = \left[\underline{\alpha}_{min}^{\Lambda T} \quad \underline{\beta}_{min}^T \right]^T$ que satisfaz:

$$\nabla J_M(\underline{\theta}) = \left(\frac{\partial J_M}{\partial \alpha^{11}} \quad \frac{\partial J_M}{\partial \alpha^{21}} \quad \dots \quad \frac{\partial J_M}{\partial \alpha^{ij}} \quad \dots \quad \frac{\partial J_M}{\partial \alpha^{qp}} \quad \frac{\partial J_M}{\partial \beta} \right)^T = \mathbf{0}_{[(n+1)p.q+n] \times 1} \quad (4.11)$$

Para um parâmetro θ_t qualquer de $\underline{\theta}$ descrito na EQ. 4.7, as diferenciações da EQ. 4.10 obedecem a:

$$\frac{\partial J_M}{\partial \theta_t} = \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{\lambda} \left[\frac{\partial \Psi_{\lambda}(j\omega_i)}{\partial \theta_t} \Psi_{\lambda}^*(j\omega_i) + \Psi_{\lambda}(j\omega_i) \frac{\partial \Psi_{\lambda}^*(j\omega_i)}{\partial \theta_t} \right] \right\} \quad (4.12)$$

As derivadas parciais de $\Psi_{\lambda}(j\omega_i)$ em relação a α_k^λ e β_l ($k = 0, \dots, n$; $l = 1, \dots, n$) resultam em:

$$\frac{\partial \Psi_{\lambda_r}}{\partial \alpha_k^{\lambda_s}} = \begin{cases} 0 & \text{se } r \neq s \\ -(j\omega_i)^{n-k} \triangleq -R_{n-k}(j\omega_i) & \text{se } r = s \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \Psi_{\lambda}}{\partial \beta_l} = (j\omega_i)^{n-l} G_{\lambda}(j\omega_i) \triangleq R_{n-l}(j\omega_i) G_{\lambda}(j\omega_i), \forall \lambda \in \Lambda$$

Substituindo a EQ. 4.13 na EQ. 4.12 e suprimindo o argumento $(j\omega_i)$, onde for conveniente, de maneira a simplificar a notação e evitar confusão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_M}{\partial \alpha_k^{\lambda}} &= \sum_{i=1}^m [-R_{n-k}(j\omega_i) \Psi_{\lambda}^*(j\omega_i) - \Psi_{\lambda}(j\omega_i) R_{n-k}^*(j\omega_i)] \\ &= \sum_{i=1}^m 2Re[-R_{n-k}(j\omega_i) \Psi_{\lambda}^*(j\omega_i)] \\ &= \sum_{i=1}^m 2Re[R_{n-k}(j\omega_i) N^*(\underline{\alpha}^{\lambda}, j\omega_i) - R_{n-k}(j\omega_i) G_{\lambda}^*(j\omega_i) D^*(\underline{\beta}, j\omega_i)] \\ &= \sum_{i=1}^m 2Re[R_{n-k} N^*(\underline{\alpha}^{\lambda}) - R_{n-k} G_{\lambda}^* D^*(\underline{\beta})] \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_M}{\partial \beta_l} &= \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{\lambda} [R_{n-l} G_{\lambda} \Psi_{\lambda}^* + \Psi_{\lambda} R_{n-l}^* G_{\lambda}^*] \right\} \\
&= \sum_{i=1}^m 2Re \left\{ \sum_{\lambda} (R_{n-l} G_{\lambda} \Psi_{\lambda}^*) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^m 2Re \left\{ \sum_{\lambda} [R_{n-l} G_{\lambda} N^*(\underline{\alpha}^{\lambda}) - R_{n-l} G_{\lambda} G_{\lambda}^* D^*(\underline{\beta})] \right\} \\
&= \sum_{i=1}^m 2Re \left\{ R_{n-l} \sum_{\lambda} [G_{\lambda} N^*(\underline{\alpha}^{\lambda})] - R_{n-l} D^*(\underline{\beta}) \sum_{\lambda} [G_{\lambda} G_{\lambda}^*] \right\} \quad (4.15)
\end{aligned}$$

onde $Re[\cdot]$ representa a parte real do argumento.

De acordo com a EQ. 4.11, uma condição necessária de otimalidade é ter $\partial J_M / \partial \alpha_k^{\lambda} = 0$ e $\partial J_M / \partial \beta_l = 0$. É possível escrever as EQ. 4.14 e 4.15 como:

$$\sum_{i=1}^m Re [R_{n-k} N^*(\underline{\alpha}^{\lambda}) - R_{n-k} G_{\lambda}^* D^*(\underline{\beta})] = 0 \quad (4.16)$$

$$\sum_{i=1}^m Re \left\{ R_{n-l} \sum_{\lambda} [G_{\lambda} N^*(\underline{\alpha}^{\lambda})] - R_{n-l} D^*(\underline{\beta}) \Pi_{\lambda} \right\} = 0 \quad (4.17)$$

onde

$$\Pi_{\lambda} = \Pi_{\lambda}(j\omega_i) = \sum_{\lambda} [G_{\lambda}(j\omega_i) G_{\lambda}^*(j\omega_i)] \quad (4.18)$$

Analogamente ao procedimento descrito na Seção 3.2, faz-se a substituição das variáveis n (ordem do denominador comum da MFT), k (índices dos vetores de parâmetros $\underline{\alpha}^{\lambda}$) e l (índices do vetor de parâmetros $\underline{\beta}$) nas EQ. 4.16 e 4.17. O conjunto de equações resultantes pode ser organizado sob a forma de um sistema de equações $Q\theta = \underline{Y}$, onde os termos independentes são aqueles correspondentes ao coeficiente $\beta_0 = 1$. A matriz dos coeficientes Q e o vetor independente \underline{Y} têm tratamento computacional mais fácil se analisados de maneira particionada. Suprimindo o argumento $(j\omega_i)$, genericamente, tem-se:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} Q_1 & 0 & \dots & 0 & -Q_2^{11} \\ 0 & Q_1 & \dots & 0 & -Q_2^{21} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Q_1 & -Q_2^{qp} \\ \hline Q_3^{11} & Q_3^{21} & \dots & Q_3^{qp} & -Q_4 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{\alpha}^{11} \\ \underline{\alpha}^{21} \\ \vdots \\ \underline{\alpha}^{qp} \\ \underline{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{\alpha}^{11} \\ \underline{Y}_{\alpha}^{21} \\ \vdots \\ \underline{Y}_{\alpha}^{qp} \\ \underline{Y}_{\beta} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

onde as submatrizes Q_1 e “0” possuem a mesma dimensão e Q_1 é dada pela EQ. 3.23.

De maneira geral, Q_2^λ , Q_3^λ e Y_α^λ seguem as formas das EQ. 3.24, 3.25 e 3.27, respectivamente, sendo calculadas para cada canal $\lambda \in \Lambda$ do sistema. As dimensões das submatrizes e dos vetores (Y_α^λ e Y_β) são as mesmas do caso SISO. A matriz dos coeficientes Q para o caso multivariável é quadrada de dimensão $(n+1)p.q + n$. A dinâmica comum do sistema (pólos), representada pelo termo Π_λ da EQ. 4.18, está concentrada em Q_4 e Y_β , que levam em consideração toda a informação contida no conjunto \mathcal{G}_M descrito pela EQ. 4.1, ou seja, as respostas em frequência de todos os canais, de maneira que:

$$Q_4 = \sum_{i=1}^m Re \begin{bmatrix} R_{n-1}R_{n-1}^*\Pi_\lambda & R_{n-1}R_{n-2}^*\Pi_\lambda & \dots & R_{n-1}R_0^*\Pi_\lambda \\ R_{n-2}R_{n-1}^*\Pi_\lambda & R_{n-2}R_{n-2}^*\Pi_\lambda & \dots & R_{n-2}R_0^*\Pi_\lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_0R_{n-1}^*\Pi_\lambda & R_0R_{n-2}^*\Pi_\lambda & \dots & R_0R_0^*\Pi_\lambda \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\underline{Y}_\beta = \sum_{i=1}^m Re \begin{bmatrix} R_{n-1}R_n^*\Pi_\lambda \\ R_{n-2}R_n^*\Pi_\lambda \\ \vdots \\ R_0R_n^*\Pi_\lambda \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

4.3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O exemplo literal utilizado para ilustrar a implementação computacional do problema de identificação multivariável consiste num sistema com duas entradas ($p = 2$) e duas saídas ($q = 2$), conforme descrito a seguir:

- $\underline{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$: vetor de frequências de interesse ($m = 3$);
- $\mathcal{G}_M = \left\{ \begin{bmatrix} G_{11}(j\omega_1) & G_{12}(j\omega_1) \\ G_{21}(j\omega_1) & G_{22}(j\omega_1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_{11}(j\omega_2) & G_{12}(j\omega_2) \\ G_{21}(j\omega_2) & G_{22}(j\omega_2) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_{11}(j\omega_3) & G_{12}(j\omega_3) \\ G_{21}(j\omega_3) & G_{22}(j\omega_3) \end{bmatrix} \right\}$; e
- $n = 2$: ordem do denominador comum de $G(s) \in M^{2 \times 2}(\mathbb{R}(s))$.

O modelo estimado $G(s)$ adota, de maneira geral, para cada canal $\lambda \in \Lambda$ a forma da expansão de $G_{e,\lambda}^n(s)$ apresentada na EQ. 3.28, e a MFT assume a representação:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_0^{11}s^2 + \alpha_1^{11}s + \alpha_2^{11}}{s^2 + \beta_1s + \beta_2} & \frac{\alpha_0^{12}s^2 + \alpha_1^{12}s + \alpha_2^{12}}{s^2 + \beta_1s + \beta_2} \\ \frac{\alpha_0^{21}s^2 + \alpha_1^{21}s + \alpha_2^{21}}{s^2 + \beta_1s + \beta_2} & \frac{\alpha_0^{22}s^2 + \alpha_1^{22}s + \alpha_2^{22}}{s^2 + \beta_1s + \beta_2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2 + \beta_1 s + \beta_2} \begin{bmatrix} \alpha_0^{11} s^2 + \alpha_1^{11} s + \alpha_2^{11} & \alpha_0^{12} s^2 + \alpha_1^{12} s + \alpha_2^{12} \\ \alpha_0^{21} s^2 + \alpha_1^{21} s + \alpha_2^{21} & \alpha_0^{22} s^2 + \alpha_1^{22} s + \alpha_2^{22} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

O vetor de parâmetros a ser estimado é

$$\begin{aligned} \underline{\theta} &= \left[\underline{\alpha}^{11T} \quad \underline{\alpha}^{21T} \quad \underline{\alpha}^{12T} \quad \underline{\alpha}^{22T} \quad \underline{\beta}^T \right]^T \\ &= \left[\alpha_0^{11} \quad \alpha_1^{11} \quad \alpha_2^{11} \quad \alpha_0^{21} \quad \alpha_1^{21} \quad \alpha_2^{21} \quad \alpha_0^{12} \quad \alpha_1^{12} \quad \alpha_2^{12} \quad \alpha_0^{22} \quad \alpha_1^{22} \quad \alpha_2^{22} \quad \beta_1 \quad \beta_2 \right]^T \end{aligned} \quad (4.23)$$

O sistema de equações resultante da simples substituição dos dados do problema nas EQ. 4.19–4.21 é apresentado na EQ. 4.27. Novamente, como no caso SISO, é interessante que os somatórios sejam substituídos por produtos de matrizes. A implementação computacional de $\underline{Y}_\alpha^\lambda$, Q_1 , Q_2^λ e Q_3^λ são dadas pelas EQ. 3.32, 3.36–3.38, observados os canais $\lambda \in \Lambda$.

Para Q_4 e \underline{Y}_β tem-se:

$$\begin{aligned} Q_4 &= \sum_{i=1}^3 Re \begin{bmatrix} R_1 R_1^* \sum_{\lambda} (G_{\lambda}^* G_{\lambda}) & R_1 R_0^* \sum_{\lambda} (G_{\lambda}^* G_{\lambda}) \\ R_0 R_1^* \sum_{\lambda} (G_{\lambda}^* G_{\lambda}) & R_0 R_0^* \sum_{\lambda} (G_{\lambda}^* G_{\lambda}) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 Re \begin{bmatrix} R_1 R_1^* \Pi_{\lambda} & R_1 R_0^* \Pi_{\lambda} \\ R_0 R_1^* \Pi_{\lambda} & R_0 R_0^* \Pi_{\lambda} \end{bmatrix} \\ &= Re \left\{ \begin{bmatrix} R_{1\omega_1} & R_{1\omega_2} & R_{1\omega_3} \\ R_{0\omega_1} & R_{0\omega_2} & R_{0\omega_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{\lambda\omega_1} & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_{\lambda\omega_2} & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_{\lambda\omega_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{1\omega_1}^* & R_{0\omega_1}^* \\ R_{1\omega_2}^* & R_{0\omega_2}^* \\ R_{1\omega_3}^* & R_{0\omega_3}^* \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

ou

$$Q_4 = Re \left\{ R_n^{j\omega} (2 : n + 1, :) \cdot M_m^{j\omega} \cdot \overline{R_n^{j\omega}}(:, 2 : n + 1) \right\} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \underline{Y}_\beta &= \sum_{i=1}^3 Re \begin{bmatrix} R_1 R_2^* \sum_{\lambda} (G_{\lambda}^* G_{\lambda}) \\ R_0 R_2^* \sum_{\lambda} (G_{\lambda}^* G_{\lambda}) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 Re \begin{bmatrix} R_1 R_2^* \Pi_{\lambda} \\ R_0 R_2^* \Pi_{\lambda} \end{bmatrix} \\ &= Re \left\{ \begin{bmatrix} R_{1\omega_1} & R_{1\omega_2} & R_{1\omega_3} \\ R_{0\omega_1} & R_{0\omega_2} & R_{0\omega_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{\lambda\omega_1} & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_{\lambda\omega_2} & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_{\lambda\omega_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{2\omega_1}^* \\ R_{2\omega_2}^* \\ R_{2\omega_3}^* \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.25)$$

ou

$$\underline{Y}_\beta = Re \left\{ R_n^{j\omega} (2 : n + 1, :) \cdot M_m^{j\omega} \cdot \overline{R_n^{j\omega}}(:, 1) \right\} \quad (4.26)$$

onde $M_m^{j\omega} = \text{diag} [\Pi_{\lambda}(j\omega_i)]$, conforme a EQ. 4.25; $R_n^{j\omega}$ e $\Pi_{\lambda}(j\omega_i)$ dadas pelas EQ. 3.33 e 4.18, respectivamente.

$$\underline{\theta} = [\alpha_0^{11} \alpha_1^{11} \alpha_2^{11}, \alpha_0^{21} \alpha_1^{21} \alpha_2^{21}, \alpha_0^{12} \alpha_1^{12} \alpha_2^{12}, \alpha_0^{22} \alpha_1^{22} \alpha_2^{22}, \beta_1 \beta_2]^T$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 & 0 & -Q_2^{11} \\ 0 & Q_1 & 0 & 0 & -Q_2^{21} \\ 0 & 0 & Q_1 & 0 & -Q_2^{21} \\ 0 & 0 & 0 & Q_1 & -Q_2^{21} \\ -Q_3^{11} & -Q_3^{21} & -Q_3^{12} & -Q_3^{22} & -Q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\alpha}^{11} \\ \underline{\alpha}^{21} \\ \underline{\alpha}^{12} \\ \underline{\alpha}^{22} \\ \underline{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_\alpha^{11} \\ \underline{Y}_\alpha^{21} \\ \underline{Y}_\alpha^{12} \\ \underline{Y}_\alpha^{12} \\ \underline{Y}_\beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m Re \begin{bmatrix} R_2 R_2^* & R_2 R_1^* & R_2 R_0^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_1 R_2^* & R_1 R_1^* & R_1 R_0^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_0 R_2^* & R_0 R_1^* & R_0 R_0^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2 R_2^* & R_2 R_1^* & R_2 R_0^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_1 R_2^* & R_1 R_1^* & R_1 R_0^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_0 R_2^* & R_0 R_1^* & R_0 R_0^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_2 R_2^* & R_2 R_1^* & R_2 R_0^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_1 R_2^* & R_1 R_1^* & R_1 R_0^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_0 R_2^* & R_0 R_1^* & R_0 R_0^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_2 R_2^* & R_2 R_1^* & R_2 R_0^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_1 R_2^* & R_1 R_1^* & R_1 R_0^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_0 R_2^* & R_0 R_1^* & R_0 R_0^* \\ R_1 R_2^* G_{11} & R_1 R_1^* G_{11} & R_1 R_0^* G_{11} & R_1 R_2^* G_{21} & R_1 R_1^* G_{21} & R_1 R_0^* G_{21} & R_1 R_2^* G_{21} & R_1 R_1^* G_{21} & R_1 R_0^* G_{21} & R_1 R_2^* G_{22} & R_1 R_1^* G_{22} & R_1 R_0^* G_{22} \\ R_0 R_2^* G_{11} & R_0 R_1^* G_{11} & R_0 R_0^* G_{11} & R_0 R_2^* G_{21} & R_0 R_1^* G_{21} & R_0 R_0^* G_{21} & R_0 R_2^* G_{21} & R_0 R_1^* G_{21} & R_0 R_0^* G_{21} & R_0 R_2^* G_{22} & R_0 R_1^* G_{22} & R_0 R_0^* G_{22} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m Re \begin{bmatrix} R_2 R_1^* G_{11}^* & R_2 R_0^* G_{11}^* \\ R_1 R_1^* G_{11}^* & R_1 R_0^* G_{11}^* \\ R_0 R_1^* G_{11}^* & R_0 R_0^* G_{11}^* \\ R_2 R_1^* G_{21}^* & R_2 R_0^* G_{21}^* \\ R_1 R_1^* G_{21}^* & R_1 R_0^* G_{21}^* \\ R_0 R_1^* G_{21}^* & R_0 R_0^* G_{21}^* \\ R_2 R_1^* G_{12}^* & R_2 R_0^* G_{12}^* \\ R_1 R_1^* G_{12}^* & R_1 R_0^* G_{12}^* \\ R_0 R_1^* G_{12}^* & R_0 R_0^* G_{12}^* \\ R_2 R_1^* G_{22}^* & R_2 R_0^* G_{22}^* \\ R_1 R_1^* G_{22}^* & R_1 R_0^* G_{22}^* \\ R_0 R_1^* G_{22}^* & R_0 R_0^* G_{22}^* \\ R_1 R_1^* (GG_{11}^* + GG_{21}^* + GG_{12}^* + GG_{22}^*) & R_1 R_0^* (GG_{11}^* + GG_{21}^* + GG_{12}^* + GG_{22}^*) \\ R_0 R_1^* (GG_{11}^* + GG_{21}^* + GG_{12}^* + GG_{22}^*) & R_0 R_0^* (GG_{11}^* + GG_{21}^* + GG_{12}^* + GG_{22}^*) \end{bmatrix} \quad \underline{Y} = \sum_{i=1}^m Re \begin{bmatrix} R_2 R_2^* G_{11}^* \\ R_1 R_2^* G_{11}^* \\ R_0 R_2^* G_{11}^* \\ R_2 R_2^* G_{21}^* \\ R_1 R_2^* G_{21}^* \\ R_0 R_2^* G_{21}^* \\ R_2 R_2^* G_{12}^* \\ R_1 R_2^* G_{12}^* \\ R_0 R_2^* G_{12}^* \\ R_2 R_2^* G_{22}^* \\ R_1 R_2^* G_{22}^* \\ R_0 R_2^* G_{22}^* \\ R_1 R_2^* (GG_{11}^* + GG_{21}^* + GG_{12}^* + GG_{22}^*) \\ R_0 R_2^* (GG_{11}^* + GG_{21}^* + GG_{12}^* + GG_{22}^*) \end{bmatrix}$$

4.4 APLICAÇÕES

A notação “Canal y:u” utilizada nesta seção faz referência à combinação formada pela saída “y” e entrada “u” de um sistema de p entradas e q saídas sob análise.

4.4.1 TURBO GERADOR

O modelo original não-linear do sistema com 2 entradas e duas saídas utilizado no presente exemplo é descrito em LIMEBEER et alii (1979). Para fins de aplicação da técnica de identificação proposta, faz-se uso de uma aproximação do modelo linearizado com dez estados, apresentado por HUNG & MACFARLANE (1982). O modelo efetivamente utilizado (MACIEJOWSKI, 1989) é reproduzido no APÊNDICE 9.5 e apresenta como características principais a estabilidade em malha aberta e um pico ressonante na frequência $\omega = 6,35$ rad/s, com fator de amortecimento de apenas 0,055.

Os resultados obtidos pela aplicação da técnica proposta encontram-se resumidos na TAB. 4.1. Para a identificação, foi utilizado um vetor de frequências de 100 posições, com espaçamento logarítmico uniforme na faixa de 0,03rad/s a 30 rad/s. Neste caso, o primeiro modelo estimado com custo satisfatório em relação ao modelo original foi $G_e^6(s)$. Os modelos de ordens $n \leq 5$ apresentaram custos bastante elevados e, portanto, não são boas aproximações para o sistema considerado.

TAB. 4.1: Custos obtidos (por canal e total) para o Exemplo 4.4.1.

Ordem (n) de D(s)	Custo/Canal (J_λ)				Custo Total ($J_M = \sum J_\lambda$)
	1:1	2:1	1:2	2:2	
3	11,369	6,468	491,009	688,824	1197,671
4	2,474	3,999	175,405	161,126	343,005
5	2,969	8,088	150,526	143,307	304,891
6	$1,079 \cdot 10^{-11}$	$5,140 \cdot 10^{-10}$	$7,812 \cdot 10^{-9}$	$8,762 \cdot 10^{-9}$	$1,710 \cdot 10^{-8}$
7	$7,120 \cdot 10^{-10}$	$1,924 \cdot 10^{-9}$	$3,694 \cdot 10^{-8}$	$3,638 \cdot 10^{-8}$	$7,596 \cdot 10^{-8}$
8	$5,040 \cdot 10^{-10}$	$1,864 \cdot 10^{-9}$	$2,222 \cdot 10^{-8}$	$2,611 \cdot 10^{-8}$	$5,070 \cdot 10^{-8}$

A FIG. 4.2 mostra as curvas de resposta em frequência dos modelos estimados de ordens 5 e 6 ($G_e^5(j\omega)$ e $G_e^6(j\omega)$), comparativamente à curva $G(j\omega)$ do modelo original. Observa-se que, conforme o custo apresentado na TAB. 4.1, a aproximação do sistema por um modelo estimado de 5ª ordem não é satisfatória. Verifica-se também que a sobreposição das curvas de resposta em frequência leva a uma falsa conclusão de que o modelo apresenta precisão relativamente boa em três dos quatro canais do sistema. A

FIG. 4.3, em escala linear, mostra a grande diferença que existe entre as curvas de módulo das respostas em frequência de $G_e^5(j\omega)$ e $G(j\omega)$. Particularmente, para os canais 1:2 e 2:2 foi necessário detalhar as curvas na sub-faixa de frequências compreendida entre 0,03 rad/s e 0,2 rad/s, onde as diferenças são maiores. Esse detalhamento foi feito apenas com a ampliação dos gráficos nos valores de frequência compreendidos nesta sub-faixa, sem qualquer alteração na simulação. Outro aspecto a ser observado é discrepância nos valores dos módulos máximos: para os canais 1:1 e 2:1, $|G(j\omega)|_{max} \cong 2$, e para os canais 1:2 e 2:2, $|G(j\omega)|_{max} \cong 685$. Esse fato sugere a normalização dos módulos das curvas de resposta em frequência com o objetivo de eliminar uma possível ponderação natural na função custo J_M adotada e, como consequência, melhorar o ajuste final. Os diagramas de fase permanecem inalterados com a mudança de escala.

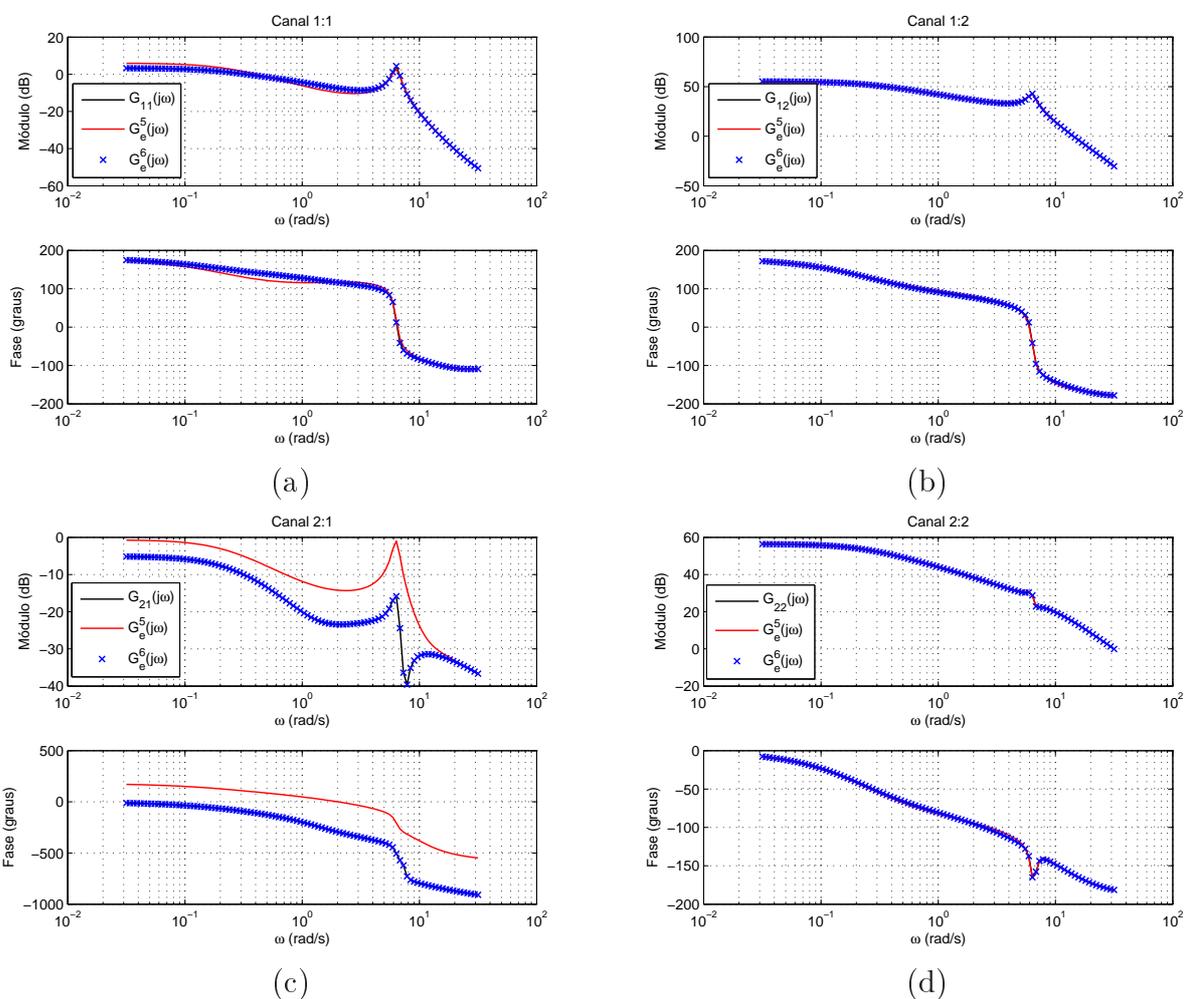


FIG. 4.2: Diagramas de resposta em frequência dos modelos obtidos ($G_e^5(s)$ e $G_e^6(s)$) e do sistema ($G(s)$) com escala em dB, nos seguintes canais (Exemplo 4.4.1): (a) 1:1, (b) 1:2, (c) 2:1, (d) 2:2

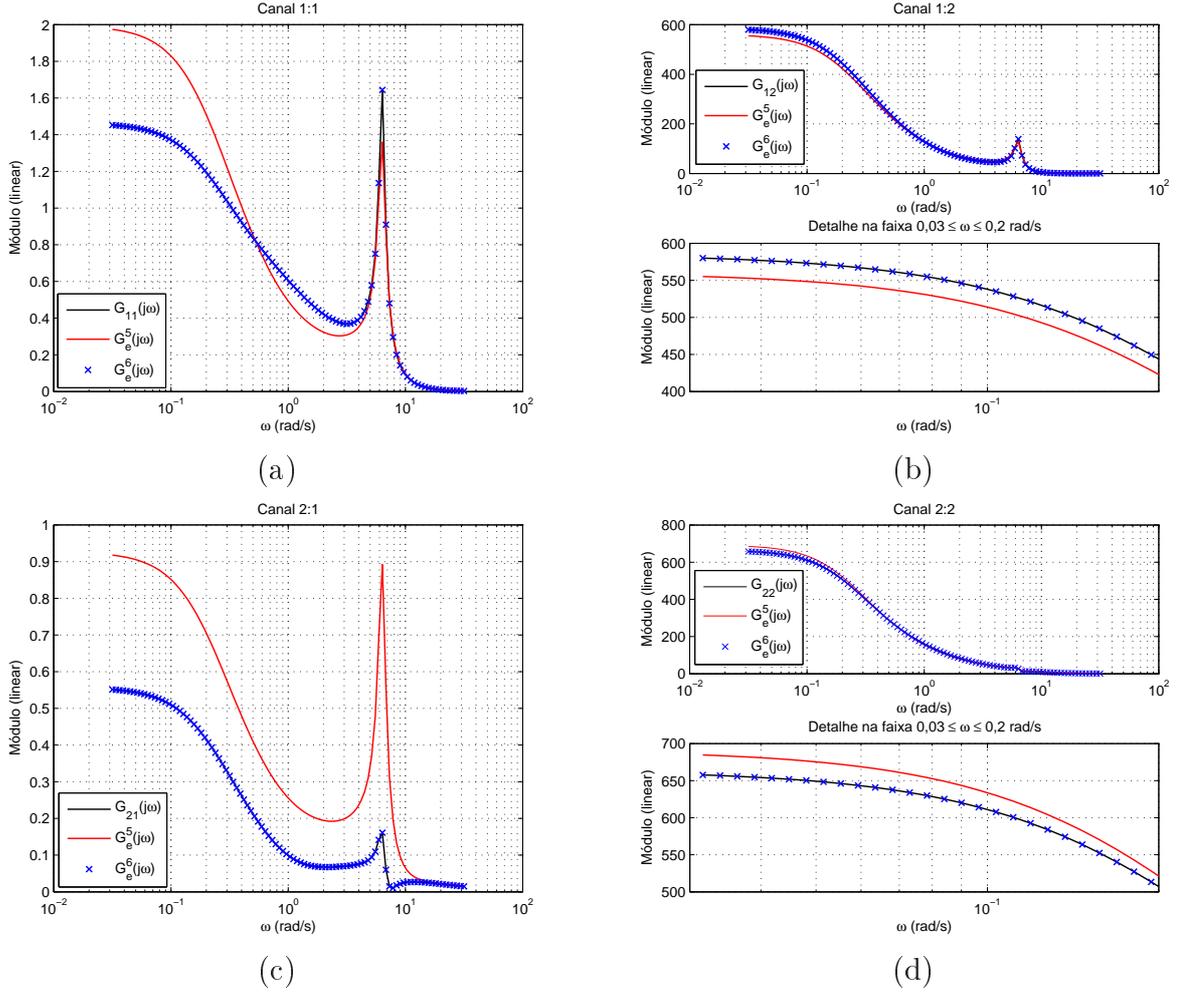


FIG. 4.3: Diagramas de resposta em frequência dos modelos obtidos ($G_e^5(s)$ e $G_e^6(s)$) e do sistema ($G(s)$) com escala linear, nos seguintes canais (Exemplo 4.4.1): (a) 1:1, (b) 1:2, (c) 2:1, (d) 2:2

Os gráficos de resposta em frequência apresentados nas FIG. 4.2 e 4.3 mostram também que a ressonância existente em $\omega = 6,35$ rad/s foi detectada nos modelos de ordens 5 e 6, conforme descrito na TAB. 4.2. Entretanto, $G_e^5(s)$ não apresenta um bom ajuste em baixas frequências e, como consequência direta, tem custo elevado. Algumas medidas podem ser tomadas com o objetivo de melhorar o ajuste numa sub-faixa: (i) imposição de pólos; (ii) ponderação do vetor de frequências e/ou (iii) aumento da ordem do modelo estimado. A primeira medida, adotada na Seção 3.4.5, requer o conhecimento prévio do sistema, o que pode inviabilizá-la. A segunda é particularmente interessante para o caso monovariável. Para sistemas MIMO, representa um compromisso entre os ajustes dos diversos canais, pois pode melhorar uns em detrimento de outros. Neste exemplo, adotou-se a terceira medida e os resultados foram satisfatórios, ou seja, ao

longo de toda a faixa de frequências de interesse ocorreram ajustes satisfatórios, em todos os canais, com custo total relativamente baixo.

TAB. 4.2: Identificação da ressonância para o Exemplo 4.4.1.

Modelo	Pólo	Amortecimento
$G(s)$	$-0,3492530082601602 \pm 6,344358608411902i$	0,0550
$G_e^5(s)$	$-0,4309655410972210 \pm 6,338370438250270i$	0,0678
$G_e^6(s)$	$-0,3492530082604493 \pm 6,344358608413071i$	0,0550

4.4.2 MÍSSIL AR-AR

O modelo não-linear do canal de elevação de um míssil ar-ar, visto na FIG. 4.4, foi proposto por REICHERT (1992) e NICHOLS et alii (1993), de onde podem ser extraídos os valores dos coeficientes numéricos. Esse modelo é reproduzido, resumidamente, no APÊNDICE 9.6. A dinâmica modelada representa um míssil voando a uma altitude de 20.000 pés (ft). É suposto verdadeiro o desacoplamento dos eixos de rumo (longitudinal) e de rolagem.

O vetor de estados é dado por $\underline{x}^T = [\alpha \quad q \quad \delta \quad \dot{\delta}]^T$, onde as variáveis são o ângulo de ataque (α , em graus), velocidade angular em arfagem (q , em graus/s), o ângulo do profundor (δ , em graus) e sua derivada ($\dot{\delta}$, em graus/s). As saídas são a aceleração vertical e a velocidade angular em arfagem. O comando de entrada é representado pela variável δ_c , e M é a velocidade Mach. O problema proposto consiste na identificação de um sistema com 1 entrada e 2 saídas.

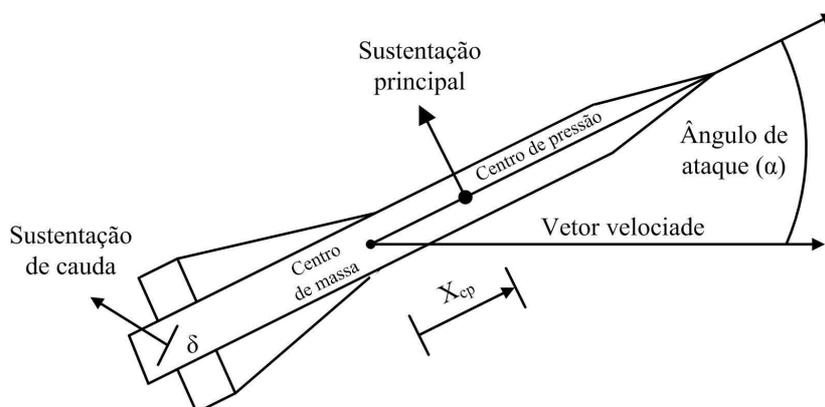


FIG. 4.4: Variáveis de estado e entrada do míssil utilizado.

A metodologia proposta, entretanto, requer que o sistema seja linear ou, pelo menos,

que apresente esta característica em torno do ponto de operação em que o modelo será identificado. O APÊNDICE 9.6 apresenta o modelo linearizado utilizado neste exemplo, obtido a partir da expansão de Taylor de primeiro ordem na vizinhança do ponto nominal $\underline{x}_0 = [\alpha_0 \quad q_0 \quad \delta_0 \quad \dot{\delta}_0]$ e $u_0 = \delta_{e0} = \delta_0$.

Os resultados obtidos encontram-se resumidos na TAB. 4.3. O vetor de frequências utilizado contém 100 pontos com espaçamento logarítmico uniforme na faixa de 0,01 rad/s a 100 rad/s. De acordo com a precisão necessária, é possível utilizar um modelo de ordem menor que a do modelo original, com erro de ajuste satisfatório. As curvas de resposta em frequência para os modelos estimados de ordens 2 e 3 ($G_e^2(j\omega)$ e $G_e^3(j\omega)$) são comparadas àquelas do modelo original ($G(j\omega)$) de ordem 4, e são apresentadas na FIG. 4.5. Como não são notadas melhorias nos gráficos para os modelos de ordem superior a 4, suas respostas em frequência foram suprimidas.

TAB. 4.3: Custos obtidos (por canal e total) para o Exemplo 4.4.2.

Ordem (n) de D(s)	Custo/Canal (J_λ)		Custo Total ($J_M = \sum J_\lambda$)
	1:1	2:1	
2	8,1467	30,5079	38,6545
3	0,7709	2,7901	3,5611
4	$2,4289 \times 10^{-11}$	$3,9113 \times 10^{-11}$	$6,3402 \times 10^{-11}$
5	$1,3199 \times 10^{-11}$	$2,2353 \times 10^{-11}$	$3,5553 \times 10^{-11}$
6	$1,6013 \times 10^{-10}$	$2,1719 \times 10^{-10}$	$3,7732 \times 10^{-10}$

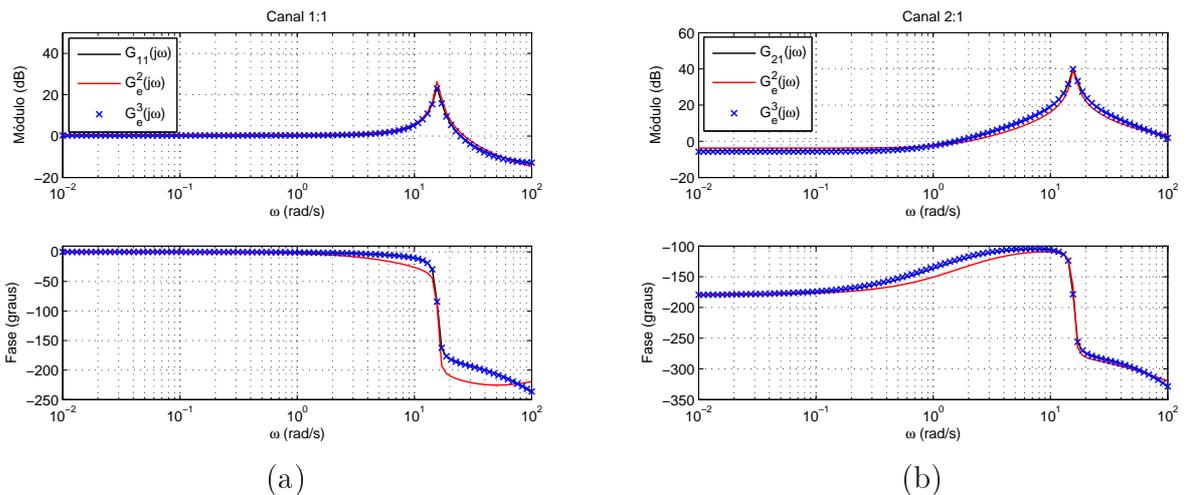


FIG. 4.5: Diagramas de resposta em frequência dos modelos obtidos ($G_e^2(s)$ e $G_e^3(s)$) e do sistema ($G(s)$) nos seguintes canais (Exemplo 4.4.2): (a) 1:1, (b) 2:1

4.4.3 AERONAVE DE COMBATE

Para este exemplo, é utilizado o modelo linearizado de uma aeronave de combate, sob determinadas condições de voo, apresentado, por SAFONOV et alii (1981). O vetor de estados $\underline{x}^T = \left[\delta V \quad \alpha \quad q \quad \theta \right]^T$ consiste nas principais variáveis de corpo rígido do veículo: velocidade longitudinal, ângulo de ataque, taxa de arfagem e ângulo de atitude em arfagem. O modelo final contém, além dos estados descritos, duas variáveis referentes à dinâmica de dois atuadores utilizados na aeronave, resultando num modelo de 6^a ordem. Define-se também o ângulo de trajetória (ângulo do vetor velocidade em relação à horizontal) como $\gamma = \theta - \alpha$. As variáveis de estado utilizadas para descrever os movimentos no plano vertical são ilustradas na FIG. 4.6.a, onde:

- δV : perturbações no vetor de velocidade;
- α : ângulo entre o vetor de velocidade e o eixo longitudinal da aeronave;
- q : taxa de variação do ângulo de atitude da aeronave;
- θ : ângulo de atitude da aeronave.

As entradas são os comandos de *elevon* (δ_e) e de *canard* (δ_c), conforme ilustrado na FIG. 4.6.b. As saídas medidas são os estados α e θ . São adicionados ao vetor de estados duas variáveis relacionadas aos atuadores. O problema consiste, portanto, na identificação de uma planta aeronáutica com 2 entradas e 2 saídas. O modelo original pode ser visto no APÊNDICE 9.7.

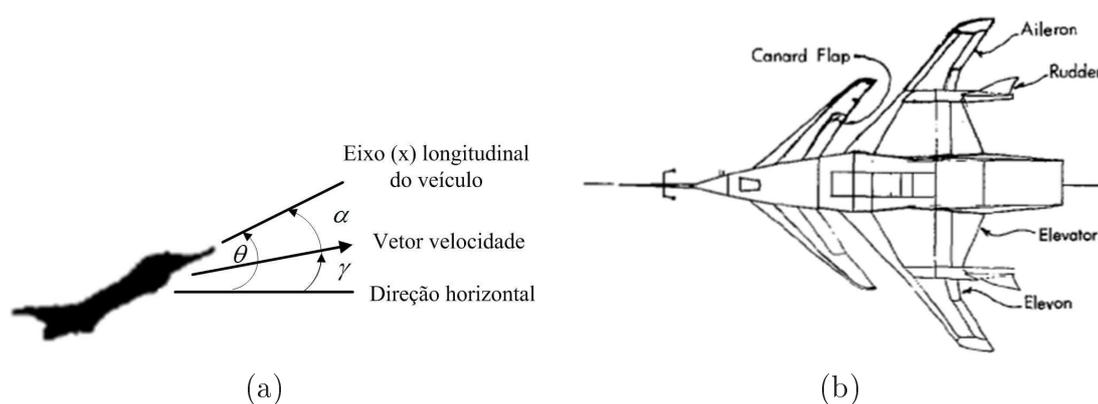


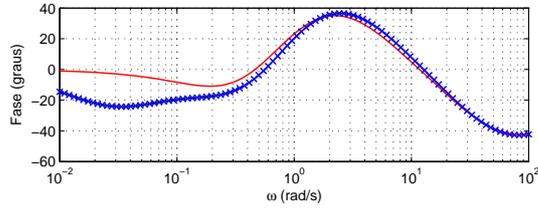
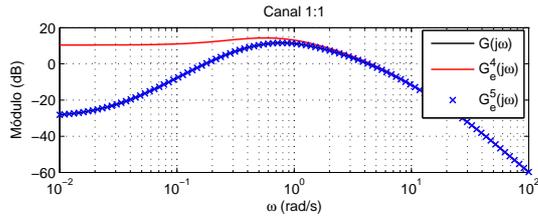
FIG. 4.6: Variáveis envolvidas no Exemplo 4.4.3: (a) Variáveis de estado da dinâmica vertical. (b) Comandos de entrada (*elevon* e *canard*).

Os resultados obtidos encontram-se resumidos na TAB. 4.4. O vetor de frequências utilizado contém 100 pontos com espaçamento logarítmico uniforme na faixa de 0,01

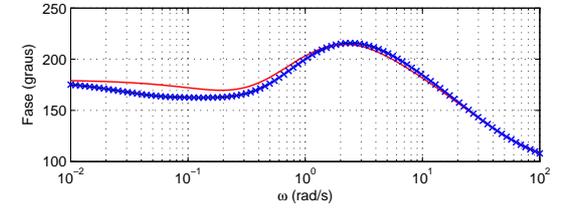
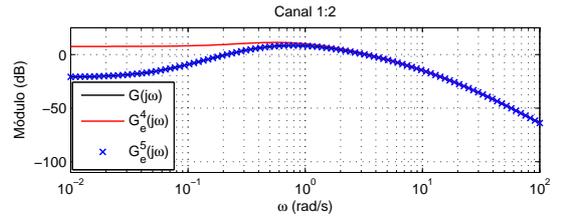
rad/s a 100 rad/s. O algoritmo alcançou uma solução de ordem menor que a do modelo original, com erro de ajuste satisfatório. As curvas de resposta em frequência para os modelos estimados de ordens 4 e 5 ($G_e^4(j\omega)$ e $G_e^5(j\omega)$) são comparadas àquelas do modelo original ($G(j\omega)$) de ordem 6, sendo apresentadas na FIG. 4.7.

TAB. 4.4: Custos obtidos por canal e total para o Exemplo 4.4.3.

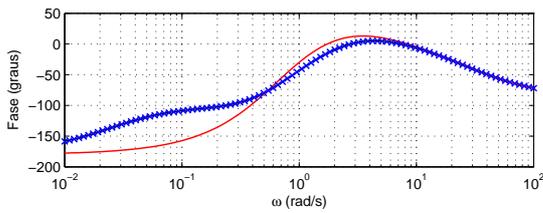
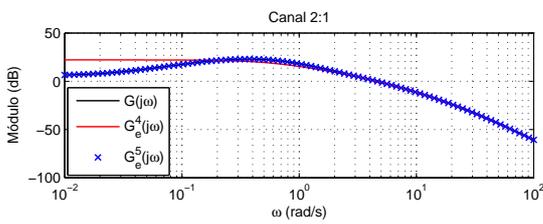
Ordem (n) de D(s)	Custo/Canal (J_λ)				Custo Total ($J_M = \sum J_\lambda$)
	1:1	2:1	1:2	2:2	
3	46,981	161,804	64,181	113,029	385,997
4	20,395	60,773	14,223	40,777	136,169
5	$1,687 \cdot 10^{-9}$	$4,612 \cdot 10^{-9}$	$1,174 \cdot 10^{-9}$	$3,064 \cdot 10^{-9}$	$1,053 \cdot 10^{-8}$
6	$6,342 \cdot 10^{-9}$	$2,536 \cdot 10^{-8}$	$5,065 \cdot 10^{-9}$	$1,675 \cdot 10^{-8}$	$5,351 \cdot 10^{-8}$
7	$4,813 \cdot 10^{-9}$	$7,709 \cdot 10^{-9}$	$1,988 \cdot 10^{-9}$	$4,648 \cdot 10^{-9}$	$1,916 \cdot 10^{-8}$
8	$2,096 \cdot 10^{-9}$	$1,661 \cdot 10^{-8}$	$1,327 \cdot 10^{-9}$	$1,224 \cdot 10^{-8}$	$3,228 \cdot 10^{-8}$



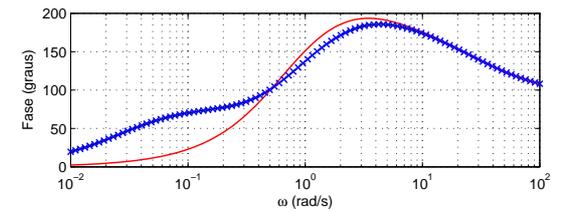
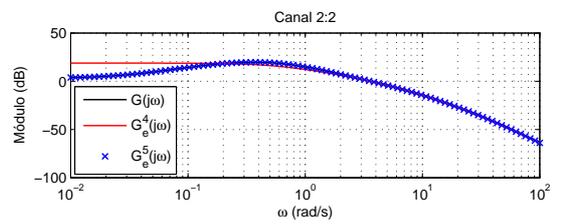
(a)



(b)



(c)



(d)

FIG. 4.7: Diagramas de resposta em frequência dos modelos obtidos ($G_e^4(s)$ e $G_e^5(s)$) e do sistema ($G(s)$) (Exemplo 4.4.3): (a) Canal 1:1, (b) Canal 1:2, (c) Canal 2:1, (d) Canal 2:2

5 REALIZAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS PARA A MFT IDENTIFICADA

Particularmente neste trabalho, os modelos estimados assumem a forma de FT ou MFT para, respectivamente, sistemas monovariáveis ou multivariáveis. A representação de um modelo por FT (MFT) fornece informações sobre a dinâmica do sistema, do ponto de vista do par (das diversas combinações) entrada/saída. Apesar de intuitiva, essa abordagem não descreve a estabilidade interna do sistema e restringe-se, basicamente, aos sistemas lineares, invariantes no tempo e relaxados (condições iniciais nulas).

Visando contornar as restrições impostas pela abordagem clássica no domínio da frequência, busca-se representar os modelos estimados em espaço de estados. Composta por matrizes numéricas, essa descrição é computacionalmente mais robusta e, portanto, mais indicada para simulações, tornando os cálculos mais rápidos e precisos, especialmente para sistemas multivariáveis. Por essas características, a representação em espaço de estados é normalmente utilizada na síntese do controle. Como desvantagem, cita-se o fato de não ser tão intuitiva quanto a FT (MFT), cabendo ao projetista efetuar muitos cálculos para que a interpretação física do modelo se torne aparente.

De acordo com a conveniência, é possível passar de uma representação para a outra (KAILATH, 1980). Uma MFT pode ser obtida a partir da representação em espaço de estados através da EQ. 5.1:

$$G_{kj}(s) = c^k (sI - A)^{-1} b_j + d_{kj} \quad (5.1)$$

onde os índices j e k relacionam-se às entradas e saídas do sistema, respectivamente, e

$$G(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (5.2)$$

com as matrizes A , B , C e D de dimensões compatíveis, de modo a permitir o cálculo da EQ. 5.1. O caso monovariável é uma particularização do caso multivariável, bastando ocultar os índices j e k na equação anterior, tendo em vista o sistema possuir apenas uma entrada e uma saída. Dessa maneira, a MFT passa a ser composta por uma única FT.

A realização de uma FT pode ser feita através das formas canônicas. Entretanto, encontrar uma realização canônica MIMO não é tarefa trivial. A dificuldade está no fato

de uma MFT poder ser representada por diversas fatorações, resultando, cada uma delas, em realizações diferentes. Por exemplo, dada uma fatoração à direita de uma MFT:

$$G(s) = N(s)D^{-1}(s) \quad (5.3)$$

é possível chegar a uma realização na forma controlador cuja ordem será igual ao grau do determinante de $D(s)$ (KAILATH, 1980). Essa realização, contudo, pode ser diferente para outras fatorações, considerando-se as possíveis multiplicações por matrizes unimodulares $U(s)$, que são aquelas cujos determinantes não dependem da variável s e, portanto, não alteram o grau do determinante de $D(s)$. Assim, seguindo os mesmos procedimentos para uma outra fatoração à direita de $G(s)$ chegar-se-ia a:

$$\begin{aligned} G(s) &= \tilde{N}(s)\tilde{D}^{-1}(s) \\ \tilde{N}(s) &= N(s)U(s), \quad \tilde{D}(s) = D(s)U(s) \end{aligned} \quad (5.4)$$

sendo diferentes as realizações obtidas para as MFT fatoradas segundo as EQ. 5.3 e 5.4. Diversos trabalhos apresentam contribuições para a determinação de formas canônicas MIMO em espaço de estados (LUENBERGER, 1967) (JORDAN & SRIDHAR, 1973) (DICKINSON et alii, 1974) (DATTA, 1977) (HANZON, 1995). Entretanto, os algoritmos propostos, além de complexos, não garantem que uma solução de ordem mínima seja alcançada.

Tendo em vista a complexidade para obtenção de uma forma canônica e a importância de se representar o modelo em espaço de estados, este capítulo objetiva apresentar uma metodologia para realizar a MFT estimada através da aplicação da técnica N2CACGO para sistemas MIMO. A ordem mínima de uma MFT é dada pelo grau de McMillan, que é encontrado a partir do cálculo da forma de Smith-McMillan, uma representação canônica genérica para matrizes racionais. É uma ferramenta útil, apesar de, normalmente, não ser implementada computacionalmente, devido às restrições numéricas encontradas quando o sistema apresenta um vasto conjunto de pólos e um grande número de combinações de entradas e saídas. Tendo em vista esta dificuldade, a metodologia propõe o cálculo de uma realização “Quase-Mínima”, onde não há garantias que a ordem alcançada seja igual ao grau de McMillan, mas que apresente erro de ajuste e ordem relativamente baixos, considerando o modelo original. Para tanto, utiliza-se a aproximação diagonal de Gilbert ou, simplesmente, realização de Gilbert (GILBERT, 1963), descrita na Seção 5.1. A Seção 5.2 apresenta os procedimentos numéricos para implementação computacional da realização Quase-Mínima. Estes procedimentos se resumem, basicamente, a dois passos: (i) redução de ordem visando a minimalidade através da eliminação dos estados não

controláveis e/ou não observáveis e (ii) transformação da realização diagonal complexa na forma bloco-diagonal real. A última seção consiste na aplicação da metodologia descrita em dois modelos de sistemas multivariáveis obtidos no capítulo anterior.

5.1 REALIZAÇÃO DE GILBERT

Considere um sistema de p entradas e q saídas descrito pelo modelo MIMO $G(s)$ cujo polinômio comum $d(s)$ do denominador tem r raízes distintas:

$$d(s) = \prod_{i=1}^r (s - \lambda_i), \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad (5.5)$$

O modelo $G(s)$ pode ser expandido em frações parciais de acordo com:

$$G(s) = \frac{N(s)}{d(s)} = \sum_{i=1}^r \frac{R_i}{s - \lambda_i} \quad (5.6)$$

onde as matrizes residuais R_i são obtidas por

$$R_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i)G(s) \quad (5.7)$$

Seja $\rho_i = \text{posto}(R_i)$, então o menor número de variáveis de estado necessário para realizar o sistema, isto é, a ordem mínima da realização do sistema, é dado por:

$$n_{min} = \sum_{i=1}^r \rho_i \quad (5.8)$$

As matrizes de resíduos R_i podem ser decompostas como o produto de duas matrizes, de maneira que:

$$R_i = \tilde{C}_i \tilde{B}_i, \quad \tilde{C}_i \in \mathbb{C}^{q \times \rho_i}, \quad \tilde{B}_i \in \mathbb{C}^{\rho_i \times p} \quad (5.9)$$

A realização em espaço de estados da MFT $G(s)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \text{diag}\{\lambda_i I_{\rho_i}; i = 1, 2, \dots, r\} \\ \tilde{B}^T &= \begin{bmatrix} \tilde{B}_1^T & \tilde{B}_2^T & \dots & \tilde{B}_q^T \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{p \times n_{min}} \\ \tilde{C} &= \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 & \dots & \tilde{C}_q \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{q \times n_{min}} \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde I_{ρ_i} é a matriz identidade de dimensão ρ_i . Apesar de se considerar inicialmente que o denominador comum de $G(s)$ possua apenas pólos com multiplicidade 1, os autovalores da matriz da dinâmica \tilde{A} podem ter multiplicidade maior ou igual a 1, conforme o posto da matriz de resíduos correspondente.

A dificuldade na obtenção da realização de ordem mínima de Gilbert resume-se à precisão numérica adotada para o cálculo dos postos de R_i . Portanto, um valor incorreto de ρ_i resultará em uma realização não-mínima. A seguir, apresenta-se o procedimento de decomposição das matrizes de resíduos $R_i = \tilde{C}_i \tilde{B}_i$ para a determinação das matrizes \tilde{C} e \tilde{B} . A realização Quase-Mínima é obtida a partir da realização de Gilbert, cumprindo-se dois passos: (i) eliminação de possíveis estados que tornem a realização não-mínima (não controláveis e/ou não observáveis) e (ii) transformação da realização diagonal complexa em bloco-diagonal real, quando existirem pólos complexos conjugados na matriz da dinâmica \tilde{A} .

5.1.1 DECOMPOSIÇÃO DAS MATRIZES DE RESÍDUOS

O procedimento apresentado nesta seção é baseado na decomposição em valores singulares (SVD). Particularmente, considere uma matriz de resíduos R_i de dimensão $m \times m$ com as primeiras ρ_i linhas linearmente independentes. Suprimindo o subscrito i para tornar a notação mais simples, a matriz R pode ser escrita utilizando a decomposição em SVD como:

$$R_{m \times m} = U_{m \times m} S_{m \times m} V_{m \times m}^T \quad (5.11)$$

onde S é uma matriz diagonal, com as mesmas dimensões de R , contendo elementos não negativos dispostos em ordem decrescente. U e V são matrizes unitárias. Como apenas as ρ linhas da matriz R são linearmente independentes, pode-se aproximá-la usando sub-blocos de U , S e V :

$$\begin{aligned} \hat{R}_{m \times m} &= \tilde{C}_{m \times \rho} \tilde{B}_{\rho \times m} \\ \tilde{C}_{m \times \rho} &= \hat{U}_{m \times \rho} \hat{S}_{\rho \times \rho} \\ \tilde{B}_{\rho \times m} &= \hat{V}_{\rho \times m}^T \end{aligned} \quad (5.12)$$

Como os valores singulares (σ_i) estão organizados em ordem decrescente na diagonal de S , caso o posto de $S(\rho)$ seja menor que m , os valores singulares abaixo do ρ -ésimo elemento na diagonal terão, teoricamente, valor zero. Entretanto, devido a erros de arredondamento, esses elementos não serão exatamente iguais a zero, mas sim assumirão valores muito pequenos. O algoritmo propõe, então, uma verificação dos valores singulares adotando uma tolerância ϵ , de maneira que, se $|\sigma_i/\sigma_{max}| \leq \epsilon$ faz-se $\sigma_i \leftarrow 0$. O valor de ϵ é definido observando-se o erro $\|\hat{R} - R\| \leq \eta$, onde η é uma tolerância pré-definida. Na prática, valores $\epsilon \leq 10^{-3}$ são suficientes para reconstruir a matriz de resíduos com erros relativamente pequenos.

5.2 REALIZAÇÃO QUASE-MÍNIMA

5.2.1 REDUÇÃO DE ORDEM

Uma realização em espaço de estados $\{A, B, C, D\}$ é dita mínima se a ordem do modelo é igual ao grau de McMillan ou, por outro lado, se e somente se é controlável e observável (KAILATH, 1980). Como mencionado anteriormente, o cálculo do grau de McMillan é uma ferramenta teórica útil, não sendo comum sua implementação computacional. Esta seção procura reduzir a ordem da realização diagonal complexa a partir da análise indireta da controlabilidade e da observabilidade.

A partir da análise da matriz \tilde{C} , obtida pelas EQ. 5.10 e 5.12, é possível eliminar modos não controláveis e/ou não observáveis. Isso ocorre sempre que a desigualdade $|\sigma_i/\sigma_{max}| \leq \epsilon$ for satisfeita e $\sigma_i \leftarrow 0$. Com essa aproximação, a matriz \tilde{C} passa a ter colunas iguais a zero, as quais podem ser eliminadas, ocasionando, também, a eliminação das linhas correspondentes em \tilde{A} e \tilde{B} .

Os resultados obtidos pelas aproximações utilizadas no procedimento de redução de ordem mostrado nesta seção podem ser comparados com aqueles alcançados por truncamento balanceado, descrito na Seção 2.4.1.

5.2.2 FORMA BLOCO-DIAGONAL REAL

Particularmente para o caso SISO, uma realização diagonal possível para a FT identificada, $G(s) = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + D$, contendo 2 pares de pólos complexos conjugados (λ_i e λ_i^* , $i = 1, 2$) e seus resíduos associados (R_i e R_i^* , $i = 1, 2$) é dada pela EQ. 5.13:

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc|c} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & R_1 \\ 0 & \lambda_1^* & 0 & 0 & R_1^* \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & R_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2^* & R_2^* \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & D \end{array} \right] \quad (5.13)$$

Entretanto, a adoção de uma forma real, isto é, uma realização contendo apenas elementos reais, minimiza a inserção de erros numéricos nas implementações computacionais. A matriz T na EQ. 5.14 é uma matriz que permite fazer uma transformação de similaridade na realização da EQ. 5.13, alterando-a para a realização bloco-diagonal real

(2×2) , conforme a EQ. 5.15:

$$T = \left[\begin{array}{cc|cc} 1/\sqrt{2} & j/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -j/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & j/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -j/\sqrt{2} \end{array} \right] \quad (5.14)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} T^{-1}\tilde{A}T & T^{-1}\tilde{B} \\ \hline \tilde{C}T & D \end{array} \right] =$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} Re(\lambda_1) & -Im(\lambda_1) & 0 & 0 & Re(R_1)\sqrt{2} \\ Im(\lambda_1) & Re(\lambda_1) & 0 & 0 & Im(R_1)\sqrt{2} \\ \hline 0 & 0 & Re(\lambda_2) & -Im(\lambda_2) & Re(R_2)\sqrt{2} \\ 0 & 0 & Im(\lambda_2) & Re(\lambda_2) & Im(R_2)\sqrt{2} \\ \hline \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & D \end{array} \right] \quad (5.15)$$

Estendendo o raciocínio para o caso multivariável, e partindo da MFT estimada em um sistema com $p = q = 2$, a forma diagonal contendo 2 modos complexos conjugados é descrita, genericamente, pela EQ. 5.16:

$$\left[\begin{array}{c|cc} \tilde{A} & \tilde{B}^1 & \tilde{B}^2 \\ \hline \tilde{C}^1 & D^{11} & D^{12} \\ \tilde{C}^2 & D^{21} & D^{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & b_1^1 & b_1^2 \\ 0 & \lambda_1^* & 0 & 0 & b_1^{1*} & b_1^{2*} \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & b_2^1 & b_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2^* & b_2^{1*} & b_2^{2*} \\ \hline c_1^1 & c_1^{1*} & c_2^1 & c_2^{1*} & d^{11} & d^{12} \\ c_1^2 & c_1^{2*} & c_2^2 & c_2^{2*} & d^{21} & d^{22} \end{array} \right] \quad (5.16)$$

A realização descrita pela EQ. 5.16 é dotada de significado físico, onde b_i^j e c_i^k ($i, j, k = 1, 2$) são, respectivamente, os fatores de controlabilidade e observabilidade de λ_i relacionados à entrada j e à saída k . Conseqüentemente, o resíduo associado a um dado pólo λ_i e a uma FT escalar genérica $G_{kj}(s) = c^k(sI - A)^{-1}b^j + d^{kj}$ pode ser expresso pelo produto $R_i^{kj} = c_i^k b_i^j$. Assim, é possível chegar às matrizes R_i da realização de Gilbert. O procedimento apresentado na seção anterior para decomposição das matrizes de resíduos não explora esta característica, tendo em vista a dificuldade de obtenção da realização neste formato específico.

A matriz T , definida na EQ. 5.14, pode novamente ser utilizada com o objetivo de se obter uma realização multivariável em espaço de estados, conforme a EQ. 5.17,

que é uma generalização da EQ. 5.15 para MFT. Esta mesma transformação pode ser aplicada às realizações complexas de Gilbert, viabilizando a obtenção de uma realização bloco-diagonal real.

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{c|cc} A & B^1 & B^2 \\ \hline C^1 & D^{11} & D^{12} \\ C^2 & D^{21} & D^{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} T^{-1}\tilde{A}T & T^{-1}\tilde{B}^1 & T^{-1}\tilde{B}^2 \\ \hline \tilde{C}^1T & D^{11} & D^{12} \\ \tilde{C}^2T & D^{21} & D^{22} \end{array} \right] = \\
& \left[\begin{array}{cc|cc|cc} Re(\lambda_1) & -Im(\lambda_1) & 0 & 0 & Re(b_1^1)\sqrt{2} & Re(b_1^2)\sqrt{2} \\ Im(\lambda_1) & Re(\lambda_1) & 0 & 0 & Im(b_1^1)\sqrt{2} & Im(b_1^2)\sqrt{2} \\ \hline 0 & 0 & Re(\lambda_2) & -Im(\lambda_2) & Re(b_2^1)\sqrt{2} & Re(b_2^2)\sqrt{2} \\ 0 & 0 & Im(\lambda_2) & Re(\lambda_2) & Im(b_2^1)\sqrt{2} & Im(b_2^2)\sqrt{2} \\ \hline Re(c_1^1)\sqrt{2} & -Im(c_1^1)\sqrt{2} & Re(c_2^1)\sqrt{2} & -Im(c_2^1)\sqrt{2} & d^{11} & d^{12} \\ Re(c_1^2)\sqrt{2} & -Im(c_1^2)\sqrt{2} & Re(c_2^2)\sqrt{2} & -Im(c_2^2)\sqrt{2} & d^{21} & d^{22} \end{array} \right] \quad (5.17)
\end{aligned}$$

5.3 APLICAÇÕES

O fluxograma da metodologia proposta é apresentado na FIG. 5.1. Parte-se da MFT do sistema, obtida pela técnica N2CACGO descrita no Capítulo 4. Em seguida, as matrizes de resíduos R_i são calculadas e, por decomposição em valores singulares (SVD), determinam-se as matrizes \tilde{B}_i e \tilde{C}_i que irão compor a realização de Gilbert $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D\}$. Neste ponto, é possível verificar a possibilidade de redução da ordem do modelo. As colunas da matriz \tilde{C} que apresentarem valores $c_{kj} \leq \tau$, onde τ é um parâmetro para aproximação do zero, podem ser eliminadas, assim como as correspondentes linhas das matrizes \tilde{A} e \tilde{B} . A próxima etapa do algoritmo consiste na aplicação da transformação de similaridade T , que torne a aproximação diagonal complexa de ordem reduzida de Gilbert em uma realização bloco-diagonal real, chamada realização quase-mínima.

5.3.1 TURBO GERADOR

A MFT escolhida para determinação da realização quase-mínima foi obtida na Seção 4.4.1. A solução $G_e^6(s)$ estimada tem custo $J_M = 1,7100 \times 10^{-8}$. A TAB. 9.10 do APÊNDICE 9.3 mostra os coeficientes das FT estimadas dos canais do sistema, com o denominador comum $D(s)$ de $G_e(s)$ de ordem 6.

A aproximação diagonal de Gilbert (forma complexa) foi calculada pela metodologia apresentada na Seção 5.1 e encontra-se descrita na EQ. 5.18. O algoritmo forneceu, como ordem mínima, $n_{min} = 12$. A partir da observação da matriz \tilde{C} , conclui-se que o modelo

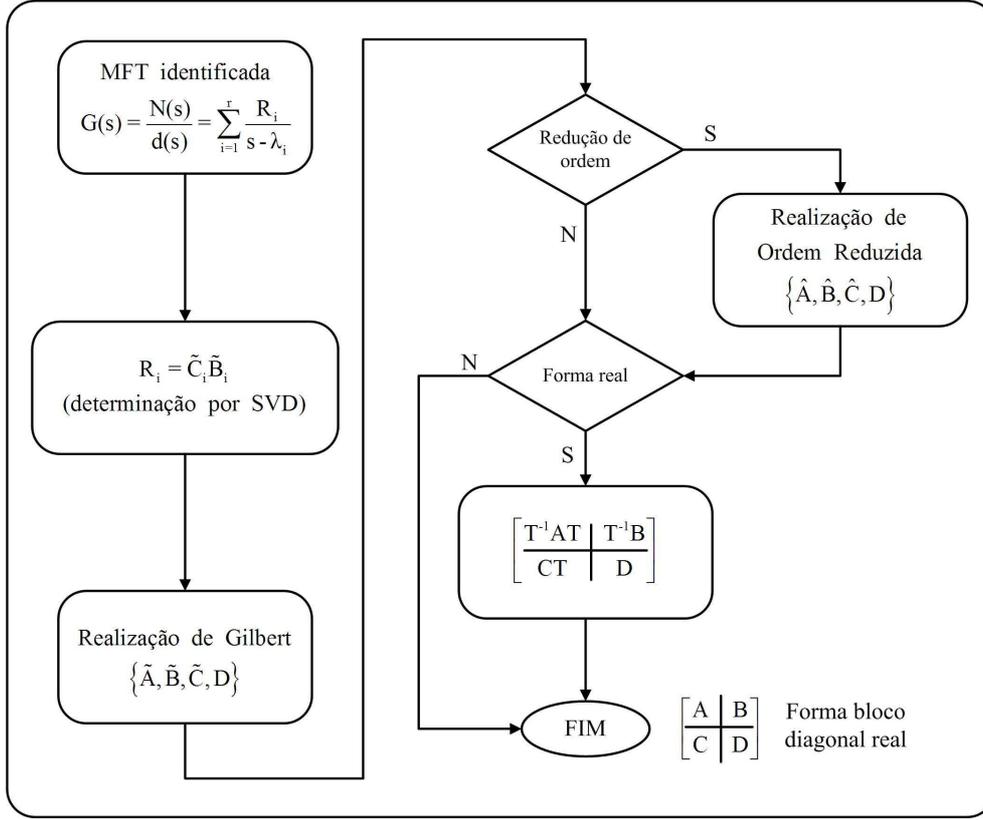


FIG. 5.1: Fluxograma da metodologia proposta para a realização da MFT identificada.

pode assumir ordem 6, eliminando-se as colunas identicamente nulas desta matriz e as respectivas linhas em \tilde{A} e \tilde{B} , obtendo-se o modelo reduzido da EQ. 5.19.

É possível obter uma estimativa para a redução de ordem do modelo na EQ. 5.18, a partir do cálculo dos valores singulares de Hankel, conforme a TAB. 5.1. Analisando essa tabela, pode-se concluir que a aplicação do truncamento balanceado ao modelo em questão fornece um modelo reduzido de 6^a. ordem, com erro de ajuste relativamente baixo. Todos os pólos são estáveis.

TAB. 5.1: Valores singulares de Hankel (σ_i) calculados para a realização complexa de Gilbert do Exemplo 5.3.1.

i	σ_i	i	σ_i
1	$4,558928504293472 \times 10^{+2}$	7	0
2	$7,651159921727115 \times 10^{+1}$	8	0
3	$6,855713337945181 \times 10^{+1}$	9	0
4	$1,0427874333696082 \times 10^{+1}$	10	0
5	$7,237016752769248 \times 10^0$	11	0
6	$2,703763861864333 \times 10^{-1}$	12	0

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccccccccc|cc} -15,87 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,02 & +0,99 \\ 0 & -15,87 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +0,99 & +0,02 \\ 0 & 0 & -10,38 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +0,01 & -0,99 \\ 0 & 0 & 0 & -10,38 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,99 & -0,01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,34 + 6,34i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,01 & -0,55 + 0,83i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,34 + 6,34i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +0,99 & -0,006 + 0,009i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,34 - 6,34i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,01 & -0,55 - 0,831i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,34 - 6,34i & 0 & 0 & 0 & 0 & +0,99 & -0,006 - 0,009i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,04 & 0 & 0 & 0 & +0,01 & -0,99 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,04 & 0 & 0 & +0,99 & +0,01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,23 & 0 & +0,001 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,23 & -1 & +0,001 \\ \hline -17,4 & 0 & -69,40 & 0 & -49,6 - 8,9i & 0 & -49,6 + 8,9i & 0 & -25 & 0 & -147,0 & 0 & 0 & 0 \\ +160 & 0 & +334,2 & 0 & +5,48 + 1,9i & 0 & +5,48 - 1,9i & 0 & -28 & 0 & +154,8 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (5.18)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccc|cc} -15,87 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,02 & +0,99 \\ 0 & -10,38 & 0 & 0 & 0 & 0 & +0,01 & -0,99 \\ 0 & 0 & -0,34 + 6,34i & 0 & 0 & 0 & -0,01 & -0,55 + 0,83i \\ 0 & 0 & 0 & -0,34 - 6,34i & 0 & 0 & -0,01 & -0,55 - 0,831i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,04 & 0 & +0,01 & -0,99 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,23 & +0,001 & +1 \\ \hline -17,4 & -69,40 & -49,6 - 8,9i & -49,6 + 8,9i & -25 & -147,0 & 0 & 0 \\ +160 & +334,2 & +5,48 + 1,9i & +5,48 - 1,9i & -28 & +154,8 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (5.19)$$

O passo seguinte consiste na aplicação da transformação de similaridade apresentada na EQ. 5.14. A realização quase-mínima de ordem 6 obtida é descrita na forma bloco-diagonal real na EQ. 5.20:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} T^{-1}\widehat{A}T & T^{-1}\widehat{B} \\ \hline \widehat{C}T & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccc|cc} -15,87 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,02 & +0,99 \\ 0 & -10,38 & 0 & 0 & 0 & 0 & +0,01 & -0,99 \\ 0 & 0 & -0,34 & -6,34 & 0 & 0 & -0,01 & -0,78 \\ 0 & 0 & +6,34 & -0,34 & 0 & 0 & 0 & +1,17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,04 & 0 & +0,01 & -0,99 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,23 & +0,001 & +1 \\ \hline -17,45 & -69,40 & -70,19 & +12,71 & -25,09 & -147,05 & 0 & 0 \\ +160,2 & +334,2 & +7,760 & -2,802 & -28,00 & +154,8 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (5.20)$$

onde

$$T = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,70711 & 0,70711i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,70711 & 0,70711i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

A TAB. 5.2 compara os custos entre as soluções obtidas por MFT, realização de Gilbert e realização Quase-Mínima (QM). Também é possível verificar os custos dessas representações em relação ao modelo original. Particularmente para a MFT, o campo “Ordem” da tabela se refere ao grau do denominador comum $D(s)$.

TAB. 5.2: Custos das soluções obtidas para o Exemplo 5.3.1.

Representação	Ordem	MFT	Gilbert	Sistema
MFT	6	---	---	$1,7100 \times 10^{-8}$
Gilbert	12	$1,6285 \times 10^{-9}$	---	$1,8344 \times 10^{-8}$
QM	6	$1,6285 \times 10^{-9}$	$2,3931 \times 10^{-13}$	$1,8344 \times 10^{-8}$

5.3.2 AERONAVE DE COMBATE

A MFT escolhida para determinação da realização quase-mínima foi obtida na Seção 4.4.3. A solução $G_e^6(s)$ estimada tem custo $J_M = 5,3511 \times 10^{-8}$. A TAB. 9.12 do APÊNDICE 9.3 mostra os coeficientes das FT estimadas dos canais do sistema, com o denominador comum $D(s)$ de $G_e(s)$ de ordem 6.

A aproximação diagonal de Gilbert (forma complexa) foi calculada pela metodologia apresentada na Seção 5.1 e encontra-se descrita na EQ. 5.21. Nota-se que o algoritmo forneceu, como ordem mínima, $n_{min} = 12$. Observando-se a matriz \tilde{C} , é possível concluir que o modelo pode assumir ordem 8, eliminando-se as colunas identicamente nulas desta matriz e as respectivas linhas em \tilde{A} e \tilde{B} , obtendo-se o modelo reduzido da EQ. 5.22.

É possível obter uma estimativa para a redução de ordem do modelo na EQ. 5.21, a partir do cálculo dos valores singulares de Hankel, conforme a TAB. 5.3. Analisando essa tabela, pode-se concluir que a aplicação do truncamento balanceado ao modelo em questão fornece um modelo reduzido de 6ª ordem, com erro de ajuste relativamente baixo. Nesta tabela, a coluna σ_i , $i = 1 \dots 6$, refere-se aos pólos estáveis do modelo, e a coluna σ_i , $i = 7 \dots 12$, corresponde aos pólos instáveis. Aparentemente, os dois procedimentos forneceram ordens reduzidas distintas: $n_{min} = 8$, pelo método proposto, e $n_{min} = 6$, pela análise dos valores singulares de Hankel. Entretanto, considerando que valores $\tilde{c}_{kj} \leq 10^{-10}$ podem ser considerados iguais a zero, é possível eliminar a 3ª e a 4ª colunas da matriz \tilde{C} e as linhas correspondentes nas matrizes \tilde{A} e \tilde{B} do modelo apresentado na EQ. 5.21, e obter um modelo reduzido de ordem 6.

TAB. 5.3: Valores singulares de Hankel (σ_i) calculados para a realização complexa de Gilbert do Exemplo 5.3.2.

i	σ_i	i	σ_i
1	$5,822172765183835 \times 10^0$	7	$1,079072930516144 \times 10^{+1}$
2	$6,253706947649165 \times 10^{-1}$	8	$3,821771833776940 \times 10^0$
3	$1,585780382529968 \times 10^{-2}$	9	$4,224877913034143 \times 10^{-15}$
4	$1,272381230972171 \times 10^{-3}$	10	$2,352317224224220 \times 10^{-17}$
5	0	11	0
6	0	12	0

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccccccccc|cc} -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +0,79 & -0,60 \\ 0 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,60 & -0,79 \\ 0 & 0 & 29,38 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,88 & +0,46 \\ 0 & 0 & 0 & 29,38 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,46 & -0,88 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5,67 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,81 & +0,58 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5,67 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,58 & -0,81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,68 + 0,24i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +0,82 & -0,56 - 0,001i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,68 + 0,24i & 0 & 0 & 0 & 0 & +0,56 & +0,82 + 0,001i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,68 - 0,24i & 0 & 0 & 0 & +0,82 & -0,56 + 0,001i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,68 - 0,24i & 0 & 0 & +0,56 & +0,82 - 0,001i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,25 & 0 & +0,82 & -0,55 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,25 & -0,55 & -0,82 \\ \hline -1,36 & -0,05 & -1,11 \cdot 10^{-13} & 1,14 \cdot 10^{-15} & -6,78 & 0 & -2,48 + 6,25i & 0 & -2,48 - 6,25i & 0 & -0,44 & 0 & 0 & 0 \\ -1,43 & +0,05 & +9,67 \cdot 10^{-14} & 1,31 \cdot 10^{-15} & -4,58 & 0 & -3,04 + 24,3i & 0 & -3,04 - 24,3i & 0 & +2,95 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (5.21)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccccc|cc} -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +0,79 & -0,60 \\ 0 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,60 & -0,79 \\ 0 & 0 & 29,38 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,88 & +0,46 \\ 0 & 0 & 0 & 29,38 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,46 & -0,88 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5,67 & 0 & 0 & 0 & -0,81 & +0,58 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,68 + 0,24i & 0 & 0 & +0,82 & -0,56 - 0,001i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,68 - 0,24i & 0 & +0,82 & -0,56 + 0,001i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,25 & +0,82 & -0,55 \\ \hline -1,36 & -0,05 & -1,11 \cdot 10^{-13} & 1,14 \cdot 10^{-15} & -6,78 & -2,48 + 6,25i & -2,48 - 6,25i & -0,44 & 0 & 0 \\ -1,43 & +0,05 & +9,67 \cdot 10^{-14} & 1,31 \cdot 10^{-15} & -4,58 & -3,04 + 24,3i & -3,04 - 24,3i & 2,95 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (5.22)$$

O passo seguinte consiste na aplicação da transformação de similaridade apresentada na EQ. 5.14. A realização quase-mínima de ordem 8 obtida é descrita na forma bloco-diagonal real na EQ. 5.23:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} T^{-1}\widehat{A}T & T^{-1}\widehat{B} \\ \hline \widehat{C}T & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccccc|cc} -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +0,79 & -0,60 \\ 0 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,60 & -0,79 \\ 0 & 0 & 29,38 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,88 & +0,46 \\ 0 & 0 & 0 & 29,38 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,46 & -0,88 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5,675 & 0 & 0 & 0 & -0,81 & +0,58 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,688 & -0,246 & 0 & +1,16 & -0,80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,246 & +0,688 & 0 & 0 & -0,001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,258 & +0,82 & -0,56 \\ \hline -1,36 & -0,05 & -1,11 \cdot 10^{-13} & 1,14 \cdot 10^{-15} & -6,78 & -3,51 & -8,85 & -0,44 & 0 & 0 \\ -1,43 & +0,05 & +9,67 \cdot 10^{-14} & 1,31 \cdot 10^{-15} & -4,58 & -4,30 & -34,47 & +2,95 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (5.23)$$

onde

$$T = \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,70711 & 0,70711i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,70711 & 0,70711i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

A TAB. 5.4 compara os custos entre as soluções obtidas por MFT, realização de Gilbert e realização Quase-Mínima (QM). Pode-se verificar também os custos dessas representações em relação ao modelo original. Particularmente para a MFT, o campo “Ordem” da tabela se refere ao grau do denominador comum $D(s)$.

TAB. 5.4: Custos das soluções obtidas para o Exemplo 5.3.2.

Representação	Ordem	MFT	Gilbert	Sistema
MFT	6	---	---	$5,3511 \times 10^{-8}$
Gilbert	12	$1,0622 \times 10^{-9}$	---	$5,3343 \times 10^{-8}$
QM	8	$1,0622 \times 10^{-9}$	$7,8300 \times 10^{-14}$	$4,6343 \times 10^{-8}$

6 VEÍCULOS AÉREOS NÃO-TRIPULADOS (VANT)

Este capítulo tem por objetivo mapear as fases necessárias para operação de um VANT e destacar o papel das técnicas de identificação de sistemas para a obtenção de um modelo de uma aeronave de asa rotativa em escala reduzida. A primeira parte do capítulo aplica-se a qualquer tipo de aeronave e pode ser estendida, inclusive, para outros tipos de veículos, como os terrestres e marítimos. A segunda parte trata, exclusivamente, de helimodelos, tendo em vista a aquisição de uma aeronave deste tipo pela Seção de Engenharia Elétrica do IME.

Define-se Veículo Aéreo Não-Tripulado (VANT) como um veículo capaz de voar na atmosfera, fora do efeito de solo, projetado ou modificado para não transportar um piloto humano; operando por controle remoto ou por mecanismo que lhe permita executar o voo autônomo. Especificamente para o caso dos helicópteros, o efeito solo representa o aumento de sustentação produzido pela reação do deslocamento de ar do rotor principal quando o aparelho paira ou se desloca com baixa velocidade próximo ao solo ou outra superfície. Em particular, deve ser levado em consideração nos casos em que a aeronave mantém altura da superfície correspondente a aproximadamente meio diâmetro do rotor.

Geralmente utilizados em situações nas quais o ambiente não é adequado à presença humana, os VANT tornam-se de grande importância em atividades rotineiras de grandes cidades, no campo e em situações de guerra. Nesses casos, podem ser empregados, por exemplo, em ações policiais, na verificação de queimadas e em missões de reconhecimento, respectivamente. Suas características de adaptação, flexibilidade, agilidade e relativo baixo custo de operação os tornam uma ferramenta de grande interesse para os meios civil e militar. Centros de pesquisa, universidades e diversas empresas de todo o mundo possuem implementações de seus projetos, inclusive com ensaios de voo, ou mantêm pessoal empregado em pesquisa para este fim. No Brasil, destacam-se o ITA, a USP, a Embraer e a UnB; nos EUA, MIT, CMU e Caltech e, na Europa, TU Berlin e ETH Zurich. Destacam-se ainda os projetos desenvolvidos em países como Israel, Austrália e África do Sul.

O capítulo inicia descrevendo as fases para um projeto de VANT, desde o levantamento dos requisitos até os ensaios de voo. Um diagrama em blocos com os subsistemas envolvidos é apresentado, com destaque para o bloco de eletrônica embarcada.

Em seguida, descrevem-se, sumariamente, a teoria do vôo do helicóptero e o modelo multivariável para a aeronave em escala, obtido a partir das equações das leis da física que regem a dinâmica do sistema. Esta seção não se compromete a levantar com exatidão o modelo MIMO que descreva a dinâmica da aeronave, mas sim, busca apresentar a complexidade envolvida para obtenção das equações de movimento da aeronave e destacar o papel da identificação como ferramenta para a solução de problemas desse tipo.

6.1 FASES DE OPERAÇÃO DE UM VANT

De maneira geral, a concepção de um VANT compreende cinco fases, mostradas na FIG. 6.1. A fase de Especificações consiste em levantar os requisitos necessários para o produto final. Deve ser bem definida, de modo a não comprometer a continuidade do processo. Sempre que necessário, durante as etapas seguintes e, principalmente, na verificação de desempenho nas fases, podem ser feitas observações, que serão consideradas na reavaliação do produto. A fase de Projeto engloba o desenvolvimento e a integração dos sub-sistemas (navegação, controle, etc) com a estação terrena. O modelo da dinâmica da aeronave é levantado nesta etapa. A fase de Simulações busca verificar, em laboratório, se o sistema como um todo funciona de maneira correta, atingindo os critérios de desempenho especificados. Os sub-sistemas de controle, alimentação e comunicação devem funcionar perfeitamente, permitindo o chaveamento entre os modos de operação autônomo e manual. Essa opção visa garantir a integridade do VANT em situações específicas, como eventuais falhas ou tarefas que exijam grande habilidade manual. Após a eletrônica ter sido testada, parte-se para a etapa de Desenvolvimento do protótipo, que consiste na adequação da aeronave para instalação do *hardware* e robustecimento físico da estrutura. Na quinta fase são feitos os Ensaios de vôo, em que todo o conjunto é testado e avaliado em condições reais de operação. Na prática, o desempenho do VANT é observado e, de acordo com a necessidade, novas especificações são estabelecidas.

6.1.1 ESPECIFICAÇÕES

Nesta fase, devem ser levantados todos os requisitos operacionais do VANT. Dois aspectos relevantes devem ser considerados: as condições de emprego da aeronave e o plano de manutenção continuada. Deve-se conciliar a preocupação com as características necessárias ao emprego militar e o uso de materiais comerciais que sejam facilmente encontrados no mercado. É uma etapa estratégica para a concepção de um VANT. Além das informações referentes aos fabricantes e fornecedores de peças e acessórios, essa fase

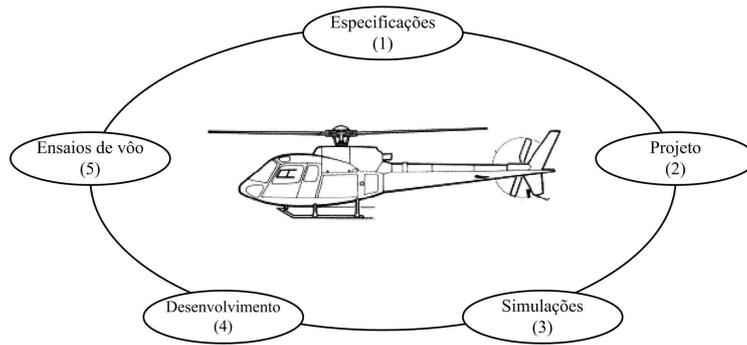


FIG. 6.1: Concepção de um VANT: fases de operação.

levanta as necessidades do projeto com relação a: alcance (distância), autonomia (tempo de voo mínimo), velocidade de cruzeiro, teto operacional, carga embarcada (*payload*), sistemas de visão diurna e noturna, sistema de armazenamento de informações, transmissão criptografada de dados em tempo real, sensores (químicos, biológicos, atmosféricos, etc), tipo de pouso e decolagem, armamento, operação autônoma (piloto automático), inserção e alteração de rotas pré-definidas, etc.

6.1.2 PROJETO

A fase de Projeto consiste em estudar, implementar e integrar, eletrônica e mecanicamente, os sub-sistemas (computação, comunicação, navegação, controle, energia e sensoramento) com a estação terrena. Todos os sub-sistemas devem ser capazes de gerar informações de modo que possam ser monitorados remotamente. O levantamento do modelo matemático que descreve a dinâmica da aeronave é feito nesta fase. Os testes para aquisição de dados devem compreender sinais de comando que excitem os modos críticos da planta, visando caracterizar da melhor maneira possível sua resposta em frequência. Quanto mais preciso o conjunto de dados, maior a chance da metodologia de identificação fornecer modelos fiéis à planta.

- Sub-sistema de Computação: consiste no computador principal – ou Unidade Central de Processamento (CPU) – onde as informações coletadas pelos sensores são processadas. Pode-se utilizar uma placa PC-104, comumente empregada em sistemas embarcados (GAVRILETS et alii, 2000) (JANG & TOMLIN, 2003) (CAI et alii, 2005). Essa placa, além de dimensões reduzidas, apresenta algumas funcionalidades como processador, portas de comunicação serial e paralela, conversores A/D e DC/DC, interface *ethernet* e um banco de memória. O modo de operação autônomo da aeronave requer, além de *hardware* complexo, que o *software* seja capaz de co-

ordenar as informações de maneira eficaz. É aconselhável instalar um Sistema Operacional de Tempo Real (RTOS) com o objetivo de tratar diferentemente as tarefas fortemente dependentes daquelas independentes ou pouco dependentes do tempo. Em HONG et alii (2005) foi proposta uma arquitetura de *software* em camadas, que garante o atendimento às tarefas prioritárias, baseada em RT-Linux. Em GAVRILETS et alii (2000) e CAI et alii (2005) foi utilizado o sistema operacional QNX.

- Sub-sistema de Comunicação: existem dois enlaces de comunicação com a aeronave. Quando o VANT está operando no modo manual, a aeronave obedece aos comandos de um piloto em terra com um rádio-controle (R/C). Na aeronave, cabe ao receptor repassá-los aos servos. Nesta situação, o outro canal funciona apenas para monitorar os sinais capturados pelos sensores e para determinar alguma tarefa específica, como filmagem, fotografia, etc. Por outro lado, no voo autônomo, a estação terrena fornece a trajetória a ser seguida. Os comandos repassados aos servos são resultado das leis de controle programadas na CPU e da leitura dos sensores inerciais, GPS, altímetro e bússola. A comunicação neste canal pode ser feita por interfaces de redes locais sem fio utilizando protocolo TCP/IP (GAVRILETS et alii, 2000) (HONG et alii, 2005) ou com modems desenvolvidos especificamente para este fim (CAI et alii, 2005).
- Sub-sistema de Navegação: a Unidade de Medição Inercial – *Inertial Measurement Unit* (IMU) – é responsável por grande parte das informações sensoreadas. É composta por três acelerômetros, que medem as acelerações a_x , a_y e a_z da aeronave nos eixos longitudinal, lateral e vertical, respectivamente, e três giroscópios, responsáveis pela medida das variações angulares p , q e r em torno dos mesmos eixos. A orientação e a colocação da aeronave na sua trajetória correta pode ainda ser feita com a ajuda de um GPS (*Global Position System*). De acordo com a precisão necessária, pode-se optar por um GPS com correção diferencial (DGPS). Para aplicações militares, recomenda-se o uso da IMU, por ser um sistema de orientação independente, ou seja, com tecnologia não-proprietária. A instalação do receptor GPS e/ou da IMU o mais próximo possível do centro de gravidade (CG) da aeronave permite a obtenção de medidas mais precisas. Em GAVRILETS et alii (2000) e BUDIYONO (2005a), sugere-se o uso do Filtro de Kalman Estendido – *Extended Kalman Filter* (EKF) – com o objetivo de juntar as duas informações

e fornecer dados mais precisos para a navegação. O uso de um sonar-altímetro visa melhorar a precisão da medida de altitude fornecida pelo GPS, especialmente para pequenas alturas ou quando se está muito próximo ao solo. O sub-sistema de navegação deve ser capaz de receber uma trajetória pré-estabelecida para execução de missões autônomas e fornecer, periodicamente, as coordenadas da aeronave para o acompanhamento do vôo em tempo real.

- Sub-sistema de Controle: a complexidade da dinâmica de uma aeronave (acoplamentos, não-linearidades e natureza multivariável) requer atenção especial na implementação do controle. Em BUDIYONO (2005a), duas técnicas de controle são propostas. A primeira utiliza um regulador linear quadrático (LQR). A segunda técnica, denominada CDM (*Coefficient Diagram Method*), é uma aproximação algébrica para o projeto de controladores robustos. Os parâmetros de projeto utilizados nesta técnica são os índices de estabilidade e de limiar de estabilidade, e as constantes de tempo. Os índices determinam a estabilidade, o comportamento do transitório e a robustez do sistema às variações dos parâmetros. As constantes de tempo, por sua vez, determinam as características da resposta no domínio do tempo. Os detalhes do método CDM podem ser vistos em BUDIYONO (2005b). O LQR também foi utilizado em ZHU & NIEUWSTADT (1996) e SPRAGUE et alii (2001). Em BENDOTTI & MORRIS (1995), é feito um estudo comparativo entre os controladores LQG e \mathcal{H}_∞ .
- Sub-sistema de Energia: deve ser compacto e leve, de maneira a não ocupar o espaço destinado a outros sensores e sobrecarregar o peso da aeronave. É composto por dois conjuntos de baterias: o primeiro alimenta os servos e o segundo, juntamente com os reguladores de tensão, fornece energia para o computador embarcado e os sensores. Essa configuração de alimentação, normalmente adotada em sistemas embarcados, visa proteger a CPU das quedas de tensão que podem ocorrer devido à carga requerida pelos servos para mover as partes mecânicas da aeronave.
- Sub-sistema de Sensoreamento: além dos sensores de navegação e controle (GPS, IMU, etc), os VANT podem requerer outros equipamentos para desempenhar tarefas específicas. Dispositivos de detecção de agentes químicos e biológicos, sensores atmosféricos (pressão, umidade do ar, temperatura, etc) e câmeras de vídeo são alguns dos equipamentos que as aeronaves podem transportar para realizar missões de reconhecimento e levantamento de informações.

- Estação Terrena: elo de comunicação entre a aeronave e o comando da missão. Deve apresentar mobilidade (instalação em viatura), tendo em vista o emprego operacional e tático dos VANT. É composta, basicamente, por um GPS, um computador – onde são instalados os *softwares* de gerência e acompanhamento de vôo e um banco de dados de informações estratégicas e operacionais – e uma interface de comunicação com o VANT. É essencial para que a aeronave realize vôos autônomos, mediante inserção de rotas pré-definidas, e para a coleta de dados dos diversos sensores. No modo de operação manual, sua tarefa consiste em monitorar as informações operacionais da aeronave (níveis de bateria, combustível, atividade da CPU, etc) e estratégicas da missão (coordenadas, resultados de testes químicos e biológicos, fotos, etc).

O diagrama em blocos da aviônica sugerida para o projeto de um VANT pode ser vista na FIG. 6.2.

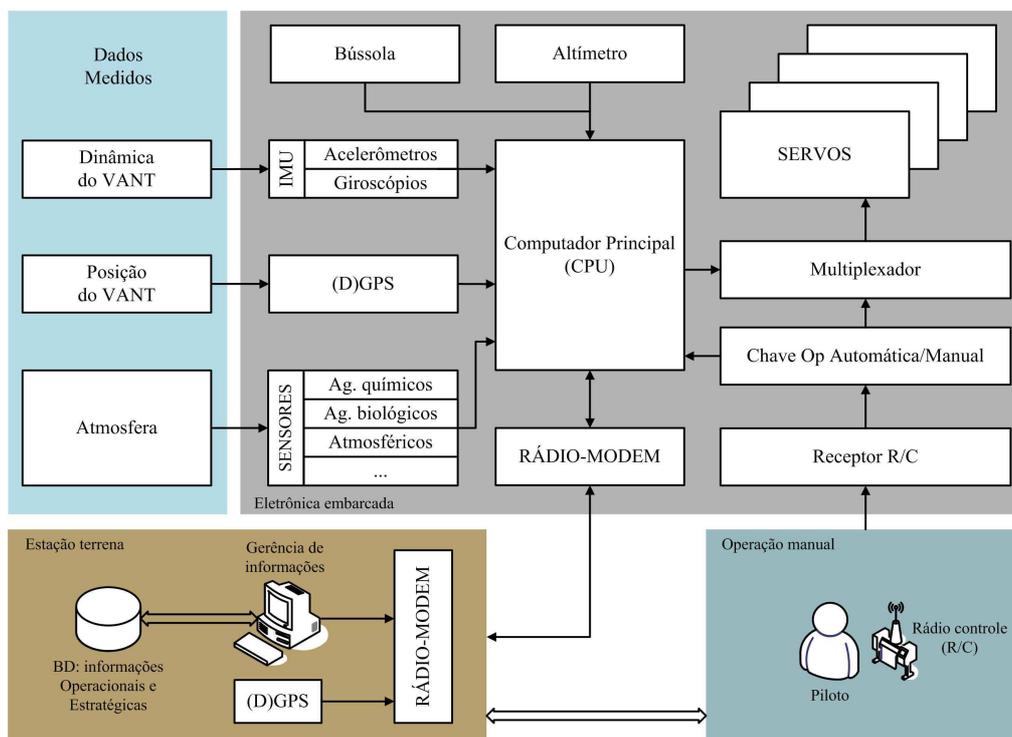


FIG. 6.2: Diagrama em blocos da aviônica de um projeto de VANT.

6.1.3 SIMULAÇÕES

O sistema completo é submetido a diversos testes em laboratório. Nesta etapa, os dados obtidos nas simulações são usados para verificar se os critérios de desempenho

especificados no projeto foram atingidos. Com isso, é possível concluir a respeito do funcionamento do conjunto. É a fase que requer maior atenção do projetista. Eventuais falhas não detectadas colocam em risco a integridade do protótipo e o tempo gasto na pesquisa. Deve-se testar a comutação entre as operações autônoma e manual, garantindo que o piloto possa assumir o controle da aeronave a qualquer instante. Nesta etapa, os modelos fornecidos pela metodologia de identificação apresentada no Capítulo 4 devem ser testados. O conjunto deve ser comandado com sinais de entrada diversos, procurando excitar frequências críticas, com o objetivo de verificar se a dinâmica do modelo empregado está satisfazendo as especificações. Nesta fase, é possível também reavaliar o modelo obtido na etapa anterior, gravando-se os sinais de comando e as correspondentes saídas diretamente nos servos e recalculando o modelo. O ruído nos dados de resposta em frequência e nos enlaces entre a aeronave e a estação terrena devem ser observados e tratados, visando obter modelos precisos e manter a relação sinal/ruído em níveis aceitáveis para as comunicações.

6.1.4 DESENVOLVIMENTO

O estágio de Desenvolvimento consiste na adequação da aeronave para instalação do *hardware* e robustecimento físico da estrutura. É, basicamente, uma etapa mecânica, de montagem e ajuste dos equipamentos. Com o conjunto montado, é interessante que seja feita uma análise de vibração e que seus efeitos sejam monitorados. Em GAVRILETS et alii (2000), são apresentadas algumas fontes de vibração de um helicóptero em escala reduzida e os procedimentos para eliminá-las ou, pelo menos, minimizá-las.

6.1.5 ENSAIOS DE VÔO

Esta fase compreende a execução de testes de campo do conjunto aeronave/estação terrena. O protótipo é submetido a situações variadas, visando reunir um conjunto de condições o mais próximo possível daquele do teatro de operações. Os requisitos de desempenho não alcançados e as falhas observadas devem ser levados em consideração nas fases de Especificações e de Projeto de uma nova implementação.

6.2 TEORIA BÁSICA DE VÔO DO HELICÓPTERO

Basicamente, o piloto controla quatro funções primárias:

- passo coletivo (u_{col}): varia o ângulo das pás do rotor principal e relaciona-se à potência consumida pelo rotor e à força de sustentação;
- cíclico lateral (u_{lat}): comanda o plano de rotação do rotor principal lateralmente, em torno do eixo longitudinal (rolagem);
- cíclico longitudinal (u_{lon}): comanda o plano de rotação do rotor principal longitudinalmente, em torno do eixo lateral (arfagem);
- pedal (u_{ped}): ou coletivo do rotor de cauda, varia o ângulo das pás do rotor de cauda e controla o movimento em torno do eixo vertical (guinada).

As pás do rotor têm um perfil característico e são projetadas e instaladas de forma a fazer um determinado ângulo com o fluxo de ar. Ao girar, o rotor gera a força vertical de sustentação F_N , à medida que o ar se desloca pelas pás. De acordo com a velocidade de rotação e o ângulo das pás do rotor, a força de sustentação varia. A descrição das forças que agem no helicóptero na situação de vôo pairado está ilustrada na FIG. 6.3. Neste caso, o piloto deve agir na alavanca do passo coletivo de maneira a controlar a força de sustentação, tornando-a igual ao peso para que o helicóptero se mantenha em equilíbrio. Em contrapartida, nos vôos ascendente e descendente, cujas forças atuantes são mostradas na FIG. 6.4, tem-se a sustentação maior e menor que o peso, respectivamente. O principal comando neste tipo de manobra é executado através da alavanca de passo coletivo (u_{col}).

No vôo em cruzeiro, o piloto atua nas alavancas dos cíclicos lateral e longitudinal, fazendo com que o plano de rotação seja deslocado em torno dos eixos de rolagem e arfagem. A decomposição da força de sustentação em F_R e F_L fará com que o helicóptero apresente deslocamentos laterais ou longitudinais, de acordo com a posição das alavancas dos comandos u_{lat} e u_{lon} . O diagrama das forças para este caso é mostrado na FIG. 6.5. Devido à decomposição de forças, é necessário também que o piloto atue na alavanca do coletivo de maneira a controlar a força de sustentação. O piloto deve, sempre, buscar compensar o torque que surge devido ao acoplamento rotor-fuselagem. O efeito do torque é fazer com que a fuselagem gire no sentido contrário ao de rotação do rotor principal. Sem a compensação, o vôo torna-se desconfortável e, às vezes, perigoso. É, portanto, um movimento não desejado que deve ser controlado. A compensação do torque (ou guinada) é feita pelo rotor do cauda. Analogamente ao rotor principal, o rotor de cauda produz empuxo proporcional à variação do passo coletivo comandado pelo pedal (u_{ped}). Esse empuxo deve ser tal que produza um torque contrário àquele produzido pelo rotor

principal. Quando o empuxo do rotor de cauda consegue anular o torque, a fuselagem pára de girar em torno do eixo vertical. Esta situação também caracteriza o estado de equilíbrio (*trimmed*) do helicóptero.

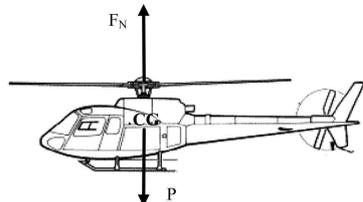


FIG. 6.3: Vôo pairado

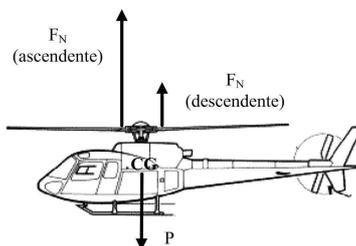


FIG. 6.4: Vôo vertical

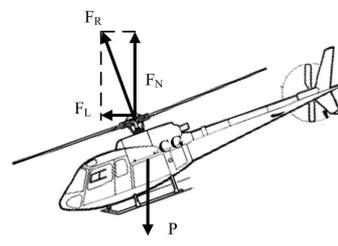


FIG. 6.5: Vôo em cruzeiro

Esta breve descrição do vôo do helicóptero mostra quão complexa é a pilotagem e prevê que a obtenção de um modelo a partir de técnicas convencionais de modelagem requer grandes estudos das leis da física (aerodinâmica, mecânica, etc) que regem a dinâmica do sistema. Tal procedimento pode dispendir muito tempo e fornecer modelos imprecisos ou redundantes. O emprego de técnicas de identificação considerando o sistema como uma caixa preta pode auxiliar bastante na determinação de uma representação matemática enxuta e precisa, obtida de maneira mais rápida que a convencional.

6.3 MODELAGEM DA DINÂMICA DO HELICÓPTERO

O helicóptero adquirido pela Seção de Engenharia Elétrica do IME é um Nova Cuatro da Robbe Schlüter, disponível comercialmente no mercado. Originalmente, é projetado para operações com Rádio-Controle (R/C). A TAB 6.1 compara as principais características físicas dos modelos Nova Cuatro, Yamaha R-50 e X-Cell .60. A segunda aeronave foi utilizada na CMU como plataforma para modelagem de um helicóptero em escala reduzida (METTLER, 2003). O mesmo trabalho utilizou os dados referentes ao terceiro helimodelo, do MIT, e os submeteu ao modelo obtido para o R-50. O modelo parametrizado determinado se mostra eficiente e pode ser utilizado em diversos helicópteros em escala reduzida (METTLER et alii, 2002). Em SANTOS (2005), por exemplo, foi utilizado um Raptor 30.

O modelo descrito em METTLER et alii (2002) parte das equações básicas de movimento de um corpo rígido e é incrementado com uma dinâmica adicional, visando obter modelos mais precisos. As equações de Newton-Euler descrevem a dinâmica de corpo rígido para um veículo capaz de se mover, livre e simultaneamente, em rotação e

TAB. 6.1: Características físicas do Nova Cuatro (IME), Yamaha R-50 (CMU) e X-Cell .60 (MIT)

Grandeza	Nova Cuatro	Yamaha R-50	X-Cell .60
Diâmetro do rotor principal (m)	1,765	3,07	1,45
Diâmetro do rotor de cauda (m)	0,330	0,52	0,28
Comprimento (m)	1,610	3,58	1,36
Altura (m)	0,465	1,08	0,41
Massa (kg)	5,30	44	4,4
Potência do Motor (cc)	13	98	10

translação nos seis graus de liberdade, como o helicóptero. A dinâmica adicional acrescida ao modelo considera os acoplamentos rotor principal/fuselagem, rotor principal/barra estabilizadora e um sistema de amortecimento de guinada. A FIG. 6.6 apresenta os eixos e as variáveis envolvidas na modelagem do corpo rígido. A origem dos eixos é considerada no centro de gravidade (CG) da aeronave; u , v e w são velocidades; ϕ , θ e ψ são os ângulos de Euler e p , q e r são as taxas de variação angular. Estão representados também na figura as forças (X , Y e Z) e os momentos resultantes (L , M e N) que agem no CG do helicóptero, além das variáveis b , a e d , c que relacionam-se aos batimentos lateral e longitudinal do rotor principal e da barra estabilizadora, respectivamente.

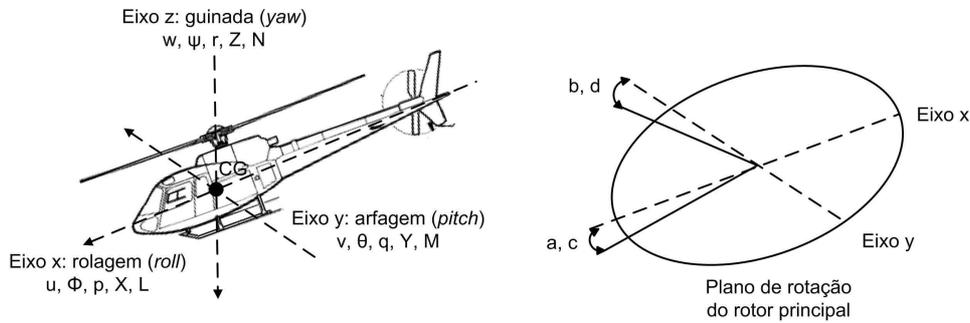


FIG. 6.6: Eixos e grandezas envolvidas na modelagem convencional da dinâmica do helicóptero.

Considerando apenas as equações de corpo rígido do helicóptero, chega-se a um modelo não-linear $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u})$ de ordem 9, cujos vetores de estados (\underline{x}) e de entradas (\underline{u}) são dados por:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} u & v & w & \phi & \theta & \psi & p & q & r \end{bmatrix}^T \quad \text{e} \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} u_{lat} & u_{lon} & u_{col} & u_{ped} \end{bmatrix}^T \quad (6.1)$$

A equação diferencial vetorial não-linear $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u})$ pode ser linearizada em torno

de um ponto de equilíbrio \underline{x}_0 conforme a EQ. 6.2:

$$\delta \dot{\underline{x}} = \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \right)_{\underline{x}_0, \underline{u}_0} \delta \underline{x} + \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \right)_{\underline{x}_0, \underline{u}_0} \delta \underline{u} \quad (6.2)$$

A notação em espaço de estados é dada por:

$$\delta \dot{\underline{x}} = A \delta \underline{x} + B \delta \underline{u} \quad (6.3)$$

a qual utiliza as perturbações lineares dos vetores de estado e de entrada. As trajetórias dos estados e das entradas de controle considerando o ponto de equilíbrio são dadas por:

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + \delta \underline{x} \quad \text{e} \quad \underline{u} = \underline{u}_0 + \delta \underline{u} \quad (6.4)$$

O procedimento de linearização consiste em representar as perturbações das forças e momentos externos envolvidos sob a forma de expansão em série de Taylor. Apenas os termos de primeira ordem são considerados, tendo em vista o interesse em se ter dependência linear nos estados e nas entradas. As derivadas parciais na matriz A em relação aos estados do veículo são denominadas derivadas de estabilidade. Por outro lado, as derivadas em relação às entradas na matriz B são chamadas derivadas de controle. Como exemplo da notação adotada, a EQ. 6.5 mostra as derivadas da força longitudinal em relação à velocidade longitudinal e à entrada cíclico lateral.

$$\frac{\partial X}{\partial u} \triangleq X_u \quad \text{e} \quad \frac{\partial X}{\partial \delta_{lat}} \triangleq X_{\delta_{lat}} \triangleq X_{lat} \quad (6.5)$$

Com o objetivo de melhorar a fidelidade do modelo de derivadas de estabilidade, outros efeitos considerados críticos para a dinâmica da aeronave podem ser explicitamente modelados e incorporados ao modelo de corpo rígido. Dentre esses efeitos, o acoplamento rotor/fuselagem é de grande importância. Para helicópteros em escala reduzida, a barra estabilizadora e o sistema de amortecimento de guinada, que facilitam a pilotagem, também devem ter suas dinâmicas modeladas e acrescentadas ao modelo.

A FIG. 6.7 ilustra a interconexão entre a aeronave (fuselagem e rotor), a barra estabilizadora e o sistema de amortecimento de guinada. Nota-se que os dois últimos sub-sistemas são representados como sistemas retroativos, com ganhos de realimentação K_c e K_d (barra estabilizadora) e K_r (sistema de amortecimento de guinada). Os blocos G_S e G_T representam os atuadores do prato cíclico (comandos cíclicos e coletivo) e do rotor de cauda (pedal), não modelados neste trabalho. Para reduzir o efeito de mudanças do comando coletivo na dinâmica de guinada, alguns helimodelos relacionam os comandos coletivo e pedal por um ganho K_f .

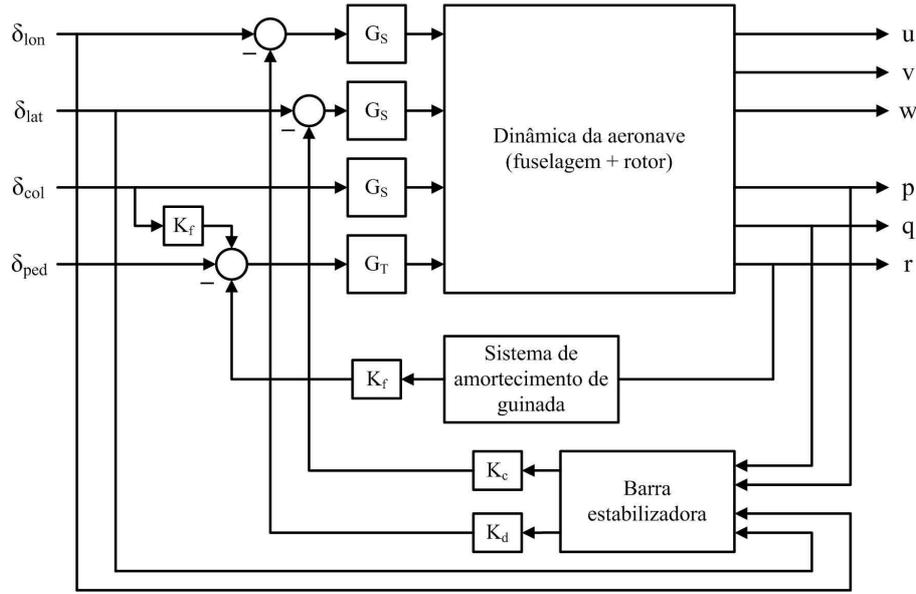


FIG. 6.7: Diagrama em blocos da dinâmica aumentada do helicóptero: aeronave, barra estabilizadora e sistema de amortecimento de guinada.

A dinâmica látero-longitudinal da fuselagem é descrita pelas EQ. 6.6–6.9. As forças e os momentos do rotor são representados pelas derivadas de batimento X_a , Y_b e M_a , L_b , respectivamente. Os efeitos da aerodinâmica são expressos pelas derivadas de velocidade X_u , Y_v , L_u , L_v , M_u e M_v . Os termos u_0 , v_0 e w_0 são relevantes apenas para o vôo de cruzeiro. O termo g representa o módulo da aceleração da gravidade.

$$\dot{u} = (-w_0q + v_0r) - g\theta + X_uu + \dots + X_aa \quad (6.6)$$

$$\dot{v} = (-u_0r + w_0p) + g\phi + Y_vv + \dots + Y_bb \quad (6.7)$$

$$\dot{p} = L_uu + L_vv + \dots + L_bb \quad (6.8)$$

$$\dot{q} = M_uu + M_vv + \dots + M_aa \quad (6.9)$$

A dinâmica vertical é obtida diretamente das equações de Newton-Euler do corpo rígido, sendo dada pela EQ. 6.10. A derivada Z_{col} representa a perturbação do empuxo devido a uma mudança no comando de passo coletivo, enquanto Z_w mostra o amortecimento do rotor e o arrasto da fuselagem.

$$\dot{w} = (-v_0p + u_0q) + Z_uu + Z_w w + \dots + Z_{col}\delta_{col} \quad (6.10)$$

Outra dinâmica a ser considerada é a do acoplamento rotor/barra estabilizadora. Os controles dos servos são transmitidos diretamente para a barra estabilizadora, tornando a resposta do rotor principal mais lenta e mais estável. Como as pás da barra estabilizadora têm área menor que as pás do rotor principal, não produzem nenhuma força ou

momento significativos. Suas implementações mais comuns são o sistema Bell e o misturador Bell-Hiller. As EQ. 6.11 e 6.12 referem-se aos movimentos de batimento lateral e longitudinal da barra estabilizadora, assim como as EQ. 6.13 e 6.14 para o rotor principal, considerando, neste caso, os comandos cíclicos lateral e longitudinal aumentados ($\bar{\delta}_{lat} = \delta_{lat} + K_d d$ e $\bar{\delta}_{lon} = \delta_{lon} + K_c c$, respectivamente).

$$\tau_s \dot{d} = -d - \tau_s p + D_{lat} \delta_{lat} \quad (6.11)$$

$$\tau_s \dot{c} = -c - \tau_s q + C_{lon} \delta_{lon} \quad (6.12)$$

$$\tau_f \dot{b} = -b - \tau_f p + B_a a + B_{lat} (\delta_{lat} + K_d d) + B_{lon} \delta_{lon} \quad (6.13)$$

$$\tau_f \dot{a} = -a - \tau_f q + A_b b + A_{lat} \delta_{lat} + A_{lon} (\delta_{lon} + K_c c) \quad (6.14)$$

Nestas equações, τ_s e τ_f são as constantes de tempo da barra estabilizadora e do rotor principal, respectivamente; D_{lat} , C_{lon} , B_{lat} , B_{lon} , A_{lat} e A_{lon} relacionam-se às engrenagens do prato cíclico; B_a e A_b são derivadas de acoplamento dos movimentos lateral e longitudinal. Por definição, $K_d = B_d/B_{lat}$ e $K_c = A_c/A_{lon}$.

Os helicópteros em escala reduzida têm um sistema dinâmico de amortecimento de guinada, implementado através da realimentação negativa do sinal de taxa de guinada do helicóptero, fornecido por um girômetro. A principal contribuição para o torque de guinada externo vem do torque gerado pela força aerodinâmica do rotor de cauda, que é controlada pelo ângulo de passo de suas pás (δ_{ped}). Devido ao seu pequeno tamanho e grande velocidade angular, a resposta desta força a uma variação de δ_{ped} pode ser considerada instantânea. Esta resposta é muito mais rápida que a dinâmica de guinada da fuselagem. Deste modo, a dinâmica do rotor de cauda não precisa ser modelada (METTLER, 2003). Segundo METTLER (2003), a inclusão do sistema de amortecimento de guinada requer o uso de mais um estado, r_{fb} (*feedback*). As equações diferenciais correspondentes para o modelo em espaço de estados, considerando o comando aumentado $\bar{\delta}_{ped} = \delta_{ped} - r_{fb}$, são:

$$\dot{r} = N_r r + \dots + N_{ped} (\delta_{ped} - r_{fb}) \quad (6.15)$$

$$\dot{r}_{fb} = K_r r - K_{r_{fb}} r_{fb} \quad (6.16)$$

onde $K_{r_{fb}} = -2N_r$.

O modelo completo em espaço de estados da dinâmica do helicóptero é obtido pela coleção de todas as equações diferenciais organizadas em um sistema da forma:

$$M \dot{\underline{x}} = F \underline{x} + G \underline{u} \quad (6.17)$$

onde \underline{x} é o vetor de estados e \underline{u} é o vetor de entrada. A matriz do sistema F contém as derivadas de estabilidade, a matriz de entrada G contém as derivadas de entrada e a matriz M contém as constantes de tempo do rotor e da barra estabilizadora. A estrutura final é obtida adicionando-se ou removendo-se algumas derivadas, de acordo com a qualidade do ajuste no domínio da frequência. Uma boa aproximação é alcançada ao considerar o modelo paramétrico descrito na EQ. 6.18 (METTLER, 2003):

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \tau_f \dot{a} \\ \tau_f \dot{b} \\ \dot{w} \\ \dot{r} \\ \dot{r}_{fb} \\ \tau_s \dot{c} \\ \tau_s \dot{d} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_u & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & X_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_v & 0 & 0 & g & 0 & 0 & Y_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_u & L_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_b & L_w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_u & M_v & 0 & 0 & 0 & 0 & M_a & 0 & M_w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau_f & 0 & 0 & -1 & A_b & 0 & 0 & 0 & A_c & 0 \\ 0 & 0 & -\tau_f & 0 & 0 & 0 & B_a & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_a & Z_b & Z_w & Z_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_v & N_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_w & N_r & N_{r_{fb}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_r & K_{r_{fb}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \\ q \\ \phi \\ \theta \\ a \\ b \\ w \\ r \\ r_{fb} \\ c \\ d \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{lat} & B_{lat} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{lat} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{lon} & B_{lon} & 0 & 0 & 0 & C_{lon} & 0 \\ 0 & Y_{ped} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{ped} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{col} & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{col} & N_{col} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta_{lat} \\ \delta_{lon} \\ \delta_{ped} \\ \delta_{col} \end{bmatrix} \quad (6.18)
\end{aligned}$$

onde as variáveis de estado são:

- u, v e w : velocidades nas coordenadas da fuselagem;
- p, q e r : taxas angulares de rolagem, arfagem e guinada;
- ϕ e θ : ângulos de atitude de rolagem e arfagem;
- a, b (c, d): ângulos de batimento longitudinal e lateral do rotor principal (barra estabilizadora);
- r_{fb} : estado adicional usado para o sistema de amortecimento da guinada.

Nesta seção, foi possível verificar a complexidade envolvida na modelagem da dinâmica de uma aeronave, especificamente, de um helicóptero em escala reduzida. O modelo final obtido é parametrizado em função de alguns ganhos e das derivadas de estabilidade e controle das forças e momentos gerados. Em METTLER (2003), utilizou-se uma ferramenta de identificação de sistemas, desenvolvida pela Divisão de Aeronaves de Asas Rotativas da NASA em conjunto com o Exército Americano, denominada CIFER (*Comprehensive Identification from Frequency Responses*). Com esta ferramenta, foi possível determinar os parâmetros do modelo. A extensão da técnica N2CACGO para sistemas MIMO, apresentada no Capítulo 4, também pode ser utilizada. Essa abordagem, em princípio, não mantém o significado físico dos parâmetros, mas agrega rapidez à determinação do modelo. Ao se considerar o sistema como uma caixa preta, elimina-se a fase de modelagem da dinâmica, muitas vezes complexa e dispendiosa em termos de tempo e custo.

7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

7.1 CONCLUSÕES

O trabalho apresentou uma metodologia de identificação de sistemas, denominada N2CACGO, no domínio da frequência para aplicação em sistemas monovariáveis, lineares (ou, pelo menos, lineares em torno de um ponto de operação) e invariantes no tempo. A extensão da técnica N2CACGO permitiu que sistemas multivariáveis pudessem ser identificados e representados por matrizes de funções de transferência, onde os modelos dos canais compartilham a mesma dinâmica, ou seja, utilizam um conjunto de pólos em comum. Ambos os métodos apresentam características semelhantes, como funções objetivo convexas e baseadas em norma quadrática. Os problemas de otimização envolvidos puderam ser solucionados de maneira analítica.

A implementação computacional da metodologia de identificação proposta é relativamente simples, envolvendo, de maneira geral, produtos de matrizes. A substituição dos somatórios por multiplicações matriciais permitem que o tempo de estimação dos modelos seja reduzido, viabilizando o emprego dos métodos em aplicações em tempo real. A plataforma computacional utilizada para os cálculos foi um computador Intel Celeron M 1.3 GHz com 256 MB de memória RAM. Para dar uma idéia da ordem de grandeza do tempo de estimação, pode-se utilizar o Exemplo Acadêmico II, cujo modelo de ordem 9 foi estimado em 70 ms. Verificou-se também que o número de condicionamento da matriz dos coeficientes dos sistemas de equações lineares envolvidos varia com a ordem do modelo, a faixa de frequências e o número de pontos adotados. O trabalho buscou submeter a técnica de identificação a sistemas de naturezas diversas, destacando-se as plantas aeronáuticas e as elétricas. Em alguns casos, a identificação forneceu soluções de ordens mais baixas que as dos modelos originais. Um sistema com retardo temporal também foi identificado, mostrando que a metodologia N2CACGO pode ser utilizada como uma alternativa para a determinação de modelos racionais, substituindo, por exemplo, a aproximação de Padé.

Outro ponto explorado no trabalho foi o uso combinado da identificação com o truncamento modal visando determinar modelos de ordem reduzida para sistemas de grande porte. Neste caso, os resultados podem ser comparados àqueles obtidos pela aplicação da técnica de truncamento balanceado (BALMR) no modelo completo. A técnica

N2CACGO também se mostrou eficiente para a obtenção de modelos a partir de pontos de resposta em frequência medidos em laboratório. Foi utilizado o levitador magnético do IME, cujos dados experimentais de resposta em frequência foram obtidos em malha fechada, por ser um sistema inerentemente instável e, por isso, requerer estabilização prévia. Para o levamento de modelos de sistemas reais, verifica-se a necessidade de se trabalhar com dados com a maior precisão possível. Isso requer a utilização de boa instrumentação e bons equipamentos de medida, como sensores precisos, por exemplo.

O trabalho também propôs a implementação de uma realização em espaço de estados para as MFT identificadas, denominada realização Quase-Mínima, baseada na aproximação diagonal de Gilbert. Foi necessário aplicar uma transformação de similaridade visando obter modelos com coeficientes reais. Uma realização com coeficientes complexos introduz erros de arredondamento nos cálculos podendo, inclusive, retornar FT com coeficientes e pólos complexos sem os respectivos conjugados. Apesar de não haver garantias de que a realização proposta seja de ordem mínima, os resultados obtidos foram satisfatórios, permitindo obter uma representação em espaço de estados que possa substituir a MFT identificada pela metodologia proposta.

O terceiro assunto abordado nesta dissertação diz respeito aos Veículos Aéreos Não-Tripulados (VANT). Foram mapeadas as fases de operação de um VANT, desde os requisitos até os ensaios de vôo. Também foi proposta, de maneira genérica, a aviônica necessária para um projeto de VANT, onde são descritos os sub-sistemas envolvidos. Neste contexto, foi destacado o papel da identificação para o levantamento de modelos de sistemas complexos, como o helicóptero.

7.2 SUGESTÕES

Esta seção destaca alguns tópicos para investigação e possível implementação em trabalhos futuros:

- a) Equacionamento da técnica N2CACGO para identificação de sistemas multivariáveis com dinâmicas dos canais em faixas distintas de frequências.
- b) Inserção das características do sistema, quando conhecidas *a priori*, no algoritmo de identificação (abordagem caixa cinza);
- c) Melhoria do condicionamento numérico da matriz de coeficientes dos sistemas de equações lineares envolvidos, através da normalização do vetor de frequências e da

normalização do vetor de módulo. Esse procedimento visa diminuir a discrepância entre o menor e o maior valor na matriz de coeficientes.

- d) Implementação de outros algoritmos para solução dos Sistemas de Equações Lineares (SEL). Apesar da eliminação gaussiana apresentar resultados satisfatórios, outros métodos para solução de SEL podem ser utilizados, como a decomposição em valores singulares (SVD).
- e) Melhoria do ajuste através da ponderação do vetor de frequências e da ponderação da função objetivo multivariável. Em alguns casos, em uma determinada sub-faixa de frequências, as curvas de resposta em frequência do sistema sob análise e do modelo estimado podem ficar desajustadas. Este problema pode ser minimizado através da redistribuição dos pontos ao longo da faixa de interesse, alocando uma maior quantidade para a sub-faixa em questão. Outra medida sugerida para a melhoria do ajuste consiste em ponderar as funções custo J_λ , $\lambda \in \Lambda$, da função objetivo multivariável $J_M = \sum_\lambda J_\lambda$, buscando priorizar o(s) canal(ais) com maior(es) erro(s) de ajuste.
- f) Tratamento do ruído através de uma técnica de filtragem das medidas de entrada $\underline{u}(t)$ e saída $\underline{y}(t)$ para a obtenção de modelos de sistemas físicos reais. Com esse procedimento anterior à aplicação da metodologia de identificação propriamente dita, os efeitos do ruído nas medidas serão minimizados e a aplicação da FFT para a cálculo do conjunto de dados de resposta em frequência do sistema fornecerá valores mais precisos. Outra consequência direta deste procedimento é tornar os algoritmos de identificação mais simples, uma vez que não precisariam preocupar-se com o tratamento do ruído.
- g) Alteração da função objetivo multivariável, relacionando-a aos valores singulares da MFT, em vez de considerar o somatório dos erros de cada um dos canais.
- h) Utilização da metodologia N2CACGO para determinação de modelos de sistemas com retardo.
- i) Levantamento de modelos de sistemas reais, especificamente, do helicóptero da Seção de Engenharia Elétrica do IME.
- j) Modificação da técnica de identificação para determinação direta de modelos em espaço de estados em vez de representações através de MFT.

- k) Aplicação da técnica N2CACGO em sistemas que exijam a identificação em tempo real.
- l) Implementação de uma realização que permita que os modelos dos canais tenham pólos múltiplos, tendo em vista que a aproximação diagonal de Gilbert parte do pressuposto que a multiplicidade máxima dos pólos é igual a 1.
- m) Determinação de uma realização sem a necessidade de utilizar a aproximação de Gilbert.
- n) Implementação de um VANT através do projeto e integração dos diversos sub-sistemas citados no Capítulo 6.

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADES, R. **Problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ - soluções aproximadas por meio de expansão em bases**. Tese (Doutorado em Ciências), Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1999.
- ADES, R. e SILVEIRA, B. P. **Identificação de sistemas por ajuste da resposta em frequência utilizando conjuntos geradores otimizados**. XVI Congresso Brasileiro de Automática, págs. 138–143, Outubro 2006.
- ADES, R. e VALLE, R. C. **Identificação de sistemas no domínio da frequência por conjuntos pré-selecionados via imposição de pólos**. VII SBAI, 2005.
- ADES, R., WULHYNEK, S. P. e SOUZA, J. V. M. **Identificação de sistemas no domínio da frequência utilizando conjuntos geradores otimizados**. XV CBA - Congresso Brasileiro de Automática, 1(1), Setembro 2004.
- AGUIRRE, L. A. **Partial least squares Padé reduction with exact retention of poles and zeros**. Int. J. Systems Sci., 25(12):2377–2391, 1994.
- AGUIRRE, L. A. **Introdução à identificação de sistemas**. Editora UFMG, Belo Horizonte, 2000.
- BAZARAA, M. S., SHERALI, H. D. e SHETTY, C. M.. **Nonlinear programming: theory and algorithms**. John Wiley and Sons, 2 edition, 1993.
- BEGHI, A., LEPSCHY, A. e VIARO, U. **Approximating delay elements by feedback**. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 44(9):824–828, 1997.
- BENDOTTI, P. e MORRIS, J. C. **Robust hover control for a model helicopter**. Proceedings of the IEEE American Control Conference, 1:682–687, Junho 1995.
- BUDIYONO, A. **Design and development of autonomous uninhabited air vehicles at ITB: challenges and progress status**. Aerospace Indonesia Meeting, Julho 2005a.
- BUDIYONO, A. **Onboard multivariable controller design for a small scale helicopter using coefficient diagram method**. International Conference on Emerging System Technology, Maio 2005b.
- CAI, G., PENG, K., CHEN, B. M. e LEE, T. H. **Design and assembling of a UAV helicopter system**. International Conference on Control and Automation, págs. 697–702, Junho 2005.
- CARVALHO, M. R. L. **Controle PID de plantas identificadas via parâmetros de Markov**. Dissertação (Mestrado em Ciências), Instituto Militar de Engenharia, 2000.

- DATTA, K. **An algorithm to compute canonical forms in multivariable control systems**. IEEE Transactions on Automatic Control, 22(1):129–132, Fevereiro 1977.
- DENEGRI, G. B., INVERNIZZI, M. e MILANO, F. **Synthesis of an equivalent dynamic model for load areas with LTC transformers**. IEEE Transmission and Distr Conference and Exposition, 2:641–646, Outubro 2001.
- DICKINSON, B., KAILATH, T. e MORF, M. **Canonical matrix fraction and state-space descriptions for deterministic and stochastic linear systems**. IEEE Transactions on Automatic Control, 19(6):656–667, Dezembro 1974.
- D’OLIVEIRA, F. A. **Aeronaves não tripuladas - ANT - histórico no CTA e perspectivas**. Revista ABEM ANT [online]. Disponível: <http://www.iae.cta.br/asa/asa-pp/revistaabemant20set2002.html> [capturado em 21 set. 2006], Setembro 2002.
- DORF, R. C. **Modern control systems**. Addison-Wesley, 4^a edition, 1986.
- ENNS, D. **Model reduction for control system design**. PhD Thesis, Stanford University, 1984.
- GAVRILETS, V., SHTERENBERG, A., DAHLEH, M. A. e FERON, E. **Avionics system for a small unmanned helicopter performing aggressive maneuvers**. The 19th Digital Avionics Systems Conferences, 1:1–7, Outubro 2000.
- GILBERT, E. G. **Controllability and observability in multivariable control systems**. SIAM J. Control, págs. 128–151, 1963.
- GLOVER, K. **All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their \mathcal{L}_∞ -error bounds**. International Journal of Control, (19):1115–1193, 1984.
- GREEN, M. e LIMEBEER, D. J. N. **Linear robust control**. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.
- GU, G., KHARGONEKAR, P. P. e LI, Y. **Robust convergence of two-stage nonlinear algorithms for identification in \mathcal{H}_∞** . Systems and control Letters, (18):253–263, 1992.
- GUSTAVSEN, B. e SEMLYEN, A. **Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting**. IEEE Transactions on Power Delivery, 14(3):1052–1061, Julho 1999.
- GUSTAVSEN, B. e SEMLYEN, A. **Order reduction of the dynamic model of a linear weakly periodic system - Part I: General methodology**. IEEE Transactions on Power Delivery, 19(3):1167–1173, Julho 2004.
- HANZON, B. **A new balanced canonical form for stable multivariable systems**. IEEE Transactions on Automatic Control, 40(2):374–378, Fevereiro 1995.
- HONG, W. E., LEE, J. S., RAI, L. e KANG, S. J. **RT-Linux based hard real-time software architecture for unmanned autonomous helicopters**. Proceedings of the 11th IEEE International Conference on Embedded and Real-Time Computing Systems and Applications, págs. 555–558, Agosto 2005.

- HUNG, Y. S. e MACFARLANE, A. G. J. **Multivariable feedback: a quasi-classical approach**, volume 40. Berlin: Springer-Verlag, 1982.
- JANG, J. S. e TOMLIN, C. **Longitudinal stability augmentation system design for the DragonFly UAV using a single GPS receiver**. Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Agosto 2003.
- JORDAN, D. e SRIDHAR, B. **An efficient algorithm for calculation of the Luenberger canonical form**. IEEE Transactions on Automatic Control, 18(3):292–295, Junho 1973.
- KAILATH, T. **Linear systems**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1980.
- KUMARESAN, R. **Identification of rational transfer function from frequency response samples**. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 26(6): 925–934, Novembro 1990.
- LAUB, A., HEATH, M., PAIGE, C. e WARD, R. **Computation of system balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms**. IEEE Transactions on Automatic Control, (32):115–122, 1987.
- LEVY, E. C. **Complex curve fitting**. IRE Transactions on Automatic Control, AC-4: 37–44, Maio 1959.
- LIMEBEER, D. J. N., HARLEY, R. G. e SCHUCK, S. M. **Subsynchronous resonance of the Koeberg turbo-generators and of a laboratory system**. Transactions of the South African Institute of Electrical Engineers, (70):278–297, 1979.
- LUENBERGER, D. G. **Canonical forms for linear multivariable systems**. IEEE Transactions on Automatic Control, 12(3):290–293, Junho 1967.
- MACEDO, R. B. S. **Identificação de sistemas usando conjuntos geradores otimizados**. Dissertação (Mestrado em Ciências), Instituto Militar de Engenharia, 2001.
- MACIEJOWSKI, J. M. **Multivariable feedback design**. Addison-Wesley, 1989.
- MARTINS, N. **Efficient eigenvalue and frequency response methods applied to power system small-signal stability studies**. IEEE Trans on Power Systems, PWRS-1:217–226, Fevereiro 1986.
- MARTINS, N., BARBOSA, A. A., FERRAZ, J. C. R., SANTOS, M. G., BERGAMO, A. L. B., YUNG, C. S., OLIVEIRA, V. R. e MACEDO, N. J. P. **Retuning stabilizers for the north-south brazilian interconnection**. Proc. of Power Eng. Society Summer Meeting, 1999.
- MARTINS, N., SILVA, F. G., PELLANDA, P. C., CASTRO, A. e QUINTÃO, P. E. M. **Utilizing transfer function modal equivalents of low-order for the design of power oscillation damping controllers in large power systems**. IEEE Power Eng. Society General Meeting, págs. 2642–2648, Junho 2005.
- METTLER, B. **Identification modeling and characteristics of miniature rotorcraft**. Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts, USA, 2003.

- METTLER, B., KANADE, T. e TISCHLER, M. B. **System identification modeling of a model-scale helicopter**. Carnegie Mellon University, Maio 2000a.
- METTLER, B., KANADE, T., TISCHLER, M. B. e MESSNER, W. **Attitude control optimization for a small-scale unmanned helicopter**. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Agosto 2000b.
- METTLER, B., TISCHLER, M. B. e KANADE, T. **System identification modeling of a small-scale unmanned rotorcraft for flight control design**. Journal of the American Helicopter Society, 47:50–63, Janeiro 2002.
- MOORE, B. **Principal component analysis in linear systems: controllability, observability, and model reduction**. IEEE Trans. Automat. Control, (26):17–32, 1981.
- MORRIS, J., VAN NIEUWSTADT, M. e BENDOTTI, P. **Identification and control of a model helicopter in hover**. Proceedings of the American Control Conference, 1994.
- MAGALHÃES NETO, J. M. **Identificação de modelos dinâmicos no domínio da frequência aplicada a sistemas aeronáuticos**. Dissertação (Mestrado em Ciências), Instituto Militar de Engenharia, 2005.
- NICHOLS, R., REICHERT, R. e RUGH, W. **Gain scheduling for H-infinity controllers: a flight control example**. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1(2):69–79, Junho 1993.
- PICHE, R. **Low-order rational all pass approximations to e^{-s}** . Proceedings of the 11th IFAC World Congress on Automatic Control, 2:134–137, 1990.
- PINTELON, R., GUILLAUME, P., ROLAIN, Y., SCHOUKENS, J. e VAN HAMME, H. **Parametric identification of transfer functions in frequency domain - a survey**. IEEE Transactions on Automatic Control, 39(11):2245–2260, Novembro 1994.
- RAMIREZ, A., SEMLYEN, A. e IRAVANI, R. **Order reduction of the dynamic model of a linear weakly periodic system - Part I: General methodology**. IEEE Transactions on Power Systems, 19(2):857–865, Maio 2004.
- REICHERT, R. **Dynamic scheduling of modern-robust-control autopilot designs for missiles**. IEEE Control Systems Magazine, 12(5):35–42, Outubro 1992.
- ROMMES, J. e MARTINS, N. **Efficient computation of transfer function dominant poles using subspace acceleration**. IEEE Transactions on Power Systems, 21(3): 1218–1226, Agosto 2005.
- ROMMES, J. e MARTINS, N. **Efficient computation of multivariable transfer function dominant poles using subspace acceleration**. IEEE Transactions on Power Systems, 21(4):1471–1483, Novembro 2006.
- RUIZ, D. **A scaling algorithm to equilibrate both rows and columns norms in matrices**. Second International Workshop on Combinatorial Scientific Computing, Toulouse, Junho 2005.

- SAFONOV, M., LAUB, A. e HARTMANN, G. **Feedback properties of multivariable systems: the role and use of the return difference matrix.** IEEE Trans. Automat. Control, 26(1):47–65, Fevereiro 1981.
- SAFONOV, M. e CHIANG, R.Y. **A schur method for balanced-truncation model reduction.** IEEE Trans. Automat. Control, (34):729–733, 1989.
- SANTOS, W. V. **Modelagem, identificação e controle de altitude de um helicóptero em escala reduzida.** Dissertação (Mestrado em Ciências), Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2005.
- SILVA, F. G. **Equivalentes modais de modelos de sistemas elétricos de potência de grande porte para projeto de estabilizadores.** Dissertação (Mestrado em Ciências), Instituto Militar de Engenharia, 2005.
- SILVEIRA, B. P., ADES, R., PELLANDA, P. C. e MARTINS, N. **Redução de ordem de funções de transferência escalares de sistemas de potência via truncamento modal e reajuste ótimo da resposta em frequência.** XVI Congresso Brasileiro de Automática, págs. 340–345, Outubro 2006.
- SIMÕES, A. M., APKARIAN, P. e PELLANDA, P. C. **Controle do modelo não-linear de um míssil ar-ar: Comparação entre técnicas LPV.** XV CBA - Congresso Brasileiro de Automática, 1(1), Setembro 2004.
- SKELL, R. D. **Scaling for numerical stability in gaussian elimination.** Journal of the Association for Computing Machinery, 26(3):494–526, Julho 1979.
- SOYSAL, A. O. e SEMLYEN, A. **Practical transfer function estimation and its application to wide frequency range representation of transformers.** IEEE Transactions on Power Delivery, 8(3):1627–1637, Julho 1993.
- SPRAGUE, K., GAVRILETS, V., DUGAIL, D., METTLER, B., FERON, E. e MARTINOS, I. **Design and applications of an avionics system for a miniature acrobatic helicopter.** The 20th IEEE Conference on Digital Avionics Systems, 1: 3C5/1–3C5/10, Outubro 2001.
- STAHL, H. e HIPPE, P. **Design of pole placing controllers for stable and unstable systems with pure time delay.** International Journal of Control, (45):2173–2182, 1987.
- STEWART, G. W. **Introduction to matrix computations.** Academic Press, New York, 1973.
- STRANG, G. **Linear algebra and its applications.** Saunders, 1988.
- TISCHLER, M. B. **System identification methods for aircraft flight control development and validation.** NASA Technical Memorandum/USAATCOM Technical Report, (110369), Outubro 1995.
- TOMBS, M. e POSTLETHWEITE, I. **Truncated balanced realization of a stable non-minimal state-space system.** Internat. J. Control, (46):1319–1330, 1987.

- VACLAVEK, P. e VAVRIN, P. **System identification in frequency domain using orthonormal bases**. Centre for Applied Cybernetics, 1995.
- VALLE, R. C. **Identificação de sistemas no domínio da frequência por conjuntos pré-selecionados via imposição de pólos**. Dissertação (Mestrado em Ciências), Instituto Militar de Engenharia, 2005.
- VARGA, A. **Efficient minimal realization procedure based on balancing**. Proceedings of the IMACS/IFAC Symposium on Modelling and Control of Technological Systems, 2:42–47, Maio 1991.
- VARGA, A. **Enhanced modal approach for modal reduction**. Math. Modelling of Systems, 1:91–105, 1995.
- VIDYASAGAR, M. **Control system synthesis: a factorization approach**. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1985.
- WATANABE, T., YASUDA, K. e YOKOHAMA, R. **Balanced truncation preserving poles in a specified disk**. Proceedings of the 34th SICE Annual Conference, págs. 1387–1390, Julho 1995.
- WOLOVICH, W. A. **A frequency domain approach to the design and analysis of linear multivariable systems**. NASA, (NASA TN D-5743), Maio 1970.
- WULHYNEK, S. P. **Identificação de sistemas no domínio da frequência utilizando conjunto gerador otimizado**. Dissertação (Mestrado em Ciências), Instituto Militar de Engenharia, 2002.
- WULHYNEK, S. P. e ADES, R. **Identificação de sistemas no domínio da frequência utilizando conjuntos geradores otimizados**. III SNCA - Seminário Nacional de Controle e Automação, 1(1):80–85, Junho 2003.
- ZHOU, K. **Robust and optimal control**. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- ZHU, X. e NIEUWSTADT, M. V. **The Caltech helicopter experiment**. CDS report, (CIT/CDS 96-009), 1996.

9 APÊNDICES

9.1 APÊNDICE 1: LEMAS E TEOREMAS

Lema 3.1: ($J_S(\underline{\theta})$ é convexo em $\underline{\theta}$) Dada uma aproximação de ordem n da expansão de $G_e^n(\underline{\theta}, s)$, a função

$$J_S(\underline{\theta}) = \|D(\underline{\beta}, j\underline{\omega})G(j\underline{\omega}) - N(\underline{\alpha}, j\underline{\omega})\|_2^2$$

é convexa em relação ao vetor paramétrico $\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}^T & \underline{\beta}^T \end{bmatrix}^T$.

Demonstração: $J_S(\underline{\theta})$ é convexo em $\underline{\theta} \Leftrightarrow$ o domínio de $J_S(\underline{\theta})$ é convexo e para dois pontos $\underline{\theta}_1$ e $\underline{\theta}_2$ quaisquer do domínio de $J_S(\underline{\theta})$

$$J_S(\delta\underline{\theta}_1 + (1 - \delta)\underline{\theta}_2) \leq \delta J_S(\underline{\theta}_1) + (1 - \delta)J_S(\underline{\theta}_2), \quad \forall \delta \in [0, 1]$$

A primeira parte, relativa ao domínio de $J_S(\underline{\theta})$, é direta pois $\underline{\theta} \in \mathbb{R}^{2n+1}$ e \mathbb{R}^{2n+1} é convexo. Basta então mostrar a desigualdade acima. Partindo de:

$$N(\underline{\alpha}, j\underline{\omega}) = \alpha_0(j\underline{\omega})^n + \alpha_1(j\underline{\omega})^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}(j\underline{\omega}) + \alpha_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k(j\underline{\omega})^{n-k}$$

$$D(\underline{\beta}, j\underline{\omega}) = \beta_0(j\underline{\omega})^n + \beta_1(j\underline{\omega})^{n-1} + \dots + \beta_{n-1}(j\underline{\omega}) + \beta_n = \sum_{k=0}^n \beta_k(j\underline{\omega})^{n-k}, \quad \beta_0 \triangleq 1$$

é possível escrever

$$\begin{aligned} & J_S(\delta\underline{\theta}_1 + (1 - \delta)\underline{\theta}_2) = \\ & = \left\| \left\{ \sum_{k=0}^n [\delta\beta_{1k} + (1 - \delta)\beta_{2k}] (j\underline{\omega})^{n-k} \right\} G(j\underline{\omega}) - \sum_{k=0}^n [\delta\alpha_{1k} + (1 - \delta)\alpha_{2k}] (j\underline{\omega})^{n-k} \right\|_2^2 \\ & = \left\| \underbrace{\delta \left[\sum_{k=0}^n \beta_{1k}(j\underline{\omega})^{n-k} G(j\underline{\omega}) - \sum_{k=0}^n \alpha_{1k}(j\underline{\omega})^{n-k} \right]}_A + \right. \\ & \quad \left. + (1 - \delta) \left[\sum_{k=0}^n \beta_{2k}(j\underline{\omega})^{n-k} G(j\underline{\omega}) - \sum_{k=0}^n \alpha_{2k}(j\underline{\omega})^{n-k} \right] \right\|_2^2 \end{aligned}$$

Trabalha-se agora com a notação simplificada e a desigualdade:

$$\|\delta A + (1 - \delta)B\|_2^2 \leq \underbrace{\|\delta A + (1 - \delta)B\|_2^2 + \delta(1 - \delta) \|A - B\|_2^2}_C \quad (9.1)$$

A igualdade é satisfeita para os valores $\delta = 0$ e $\delta = 1$. Por outro lado, a desigualdade ocorre quando $\delta \in (0, 1)$. Dessa maneira, expandindo o termo C da EQ. 9.1:

$$\begin{aligned} & \|\delta A + (1 - \delta)B\|_2^2 + \delta(1 - \delta) \|A - B\|_2^2 = \\ = & \delta^2 \|A\|_2^2 + (1 - \delta)^2 \|B\|_2^2 + 2\delta(1 - \delta) \langle A, B \rangle + \\ & + \delta(1 - \delta) \|A\|_2^2 + \delta(1 - \delta) \|B\|_2^2 - 2\delta(1 - \delta) \langle A, B \rangle \\ = & \delta \|A\|_2^2 + (1 - \delta) \|B\|_2^2 \end{aligned}$$

Portanto, é possível escrever:

$$J_S(\theta_1 + (1 - \delta)\theta_2) \leq \delta J_S(\theta_1) + (1 - \delta)J_S(\theta_2), \quad \forall \delta \in [0, 1]$$

□

Teorema 3.1 (Uma função estritamente convexa tem um único mínimo) *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo não vazio, e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Considere o problema de minimizar $f(\underline{x})$ com $\underline{x} \in S$. Suponha que $\underline{x}_{min} \in S$ seja uma solução ótima local para o problema.*

a) Então, \underline{x}_{min} é uma solução ótima global.

b) Se f é estritamente convexa, então \underline{x}_{min} é a única solução ótima global.

Demonstração: Ver BAZARAA et alii (1993).

□

Lema 4.1: (A soma de funções convexas é também uma função convexa)

Sejam $f_1, f_2, \dots, f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções convexas. Considere a função f definida por $\sum_{i=1}^k \rho_i f_i(\underline{x})$, $\rho_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, k$. A função f é convexa.

Demonstração: Para que $f(\underline{x})$ seja convexa, deverá satisfazer a condição:

$$f(\delta \underline{x}_1 + (1 - \delta)\underline{x}_2) \leq \delta f(\underline{x}_1) + (1 - \delta)f(\underline{x}_2), \quad \delta \in [0, 1], \quad \forall \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^n$$

Desenvolvendo a expressão:

$$\begin{aligned} f(\delta \underline{x}_1 + (1 - \delta)\underline{x}_2) &= \sum_{i=1}^k \rho_i f_i(\delta \underline{x}_1 + (1 - \delta)\underline{x}_2) \\ &= \rho_1 f_1(\delta \underline{x}_1 + (1 - \delta)\underline{x}_2) + \rho_2 f_2(\delta \underline{x}_1 + (1 - \delta)\underline{x}_2) + \dots + \rho_k f_k(\delta \underline{x}_1 + (1 - \delta)\underline{x}_2) \end{aligned}$$

Como, por definição, f_i é convexa, segue que:

$$f_i(\delta \underline{x}_1 + (1 - \delta)\underline{x}_2) \leq \delta f_i(\underline{x}_1) + (1 - \delta)f_i(\underline{x}_2), \quad i = 1, \dots, k \quad (9.2)$$

Substituindo a EQ. 9.2 na expansão anterior:

$$\begin{aligned} f(\delta \underline{x}_1 + (1 - \delta) \underline{x}_2) &\leq \rho_1 [\delta f_1(\underline{x}_1) + (1 - \delta) f_1(\underline{x}_2)] + \rho_2 [\delta f_2(\underline{x}_1) + (1 - \delta) f_2(\underline{x}_2)] + \dots \\ &\quad \dots + \rho_k [\delta f_k(\underline{x}_1) + (1 - \delta) f_k(\underline{x}_2)] \\ &= \delta [\rho_1 f_1(\underline{x}_1) + \rho_2 f_2(\underline{x}_1) + \dots + \rho_k f_k(\underline{x}_1)] + \\ &\quad + (1 - \delta) [\rho_1 f_1(\underline{x}_2) + \rho_2 f_2(\underline{x}_2) + \dots + \rho_k f_k(\underline{x}_2)] \\ &= \delta \sum_{i=1}^k \rho_i f_i(\underline{x}_1) + (1 - \delta) \sum_{i=1}^k \rho_i f_i(\underline{x}_2) \\ &= \delta f(\underline{x}_1) + (1 - \delta) f(\underline{x}_2) \end{aligned}$$

□

9.2 APÊNDICE 2: MODELOS MONOVARIÁVEIS ESTIMADOS

Considere um modelo $G_e^n(s)$ estimado de ordem n descrito genericamente por:

$$G_e^n(s) = \frac{\alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n}{\beta_0 s^n + \beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n}, \beta_0 \triangleq 1$$

A seguir, são apresentados os coeficientes das FT obtidas através da aplicação da metodologia N2CACGO em cada um dos exemplos do Capítulo 3. As tabelas seguem o seguinte formato:

TAB. 9.1: Coeficientes de $G_e^n(s)$.

Ordem	Coef. Numerador	Coef. Denominador
n	α_0	β_0
	α_1	β_1
	α_2	β_2
	\vdots	\vdots
	α_{n-2}	β_{n-2}
	α_{n-1}	β_{n-1}
	α_n	β_n

TAB. 9.2: Coeficientes de $G_e^n(s)$: Exemplo Acadêmico I.

Ord	Coef. Numerador	Coef. Denominador	Ord	Coef. Numerador	Coef. Denominador
1	+1, 038563224475893e - 001 +9, 692279559884353e - 001	+1, 000000000000000e + 000 +4, 094923938617398e - 001	2	+9, 731750257107742e - 002 +3, 244852780594049e + 000 +1, 088008586665833e + 001	+1, 000000000000000e + 000 +1, 121692117674098e + 000 +8, 994540805621209e + 001
3	+1, 001217899872065e - 001 +3, 438007654680500e + 000 +3, 721900643665232e + 001 +7, 875225059018879e - 001	+1, 000000000000000e + 000 +3, 736144583161817e + 000 +1, 160640073080216e + 002 +1, 548082960477553e + 002	4	+1, 000000273379406e - 001 +3, 559214536568263e + 000 +4, 406467024231435e + 001 +2, 116138460121732e + 002 +2, 800145436968488e + 002	+1, 000000000000000e + 000 +4, 882159225563293e + 000 +1, 597961737384818e + 002 +3, 756678828213007e + 002 +3, 525538249595730e + 003
5	+1, 000000000967613e - 001 +4, 715752060249466e + 000 +8, 522562909456705e + 001 +7, 211477270791208e + 002 +2, 725317195883438e + 003 +3, 237759598256411e + 003	+1, 000000000000000e + 000 +1, 644752067642614e + 001 +2, 162367240818903e + 002 +2, 223498526522183e + 003 +7, 866863604971893e + 003 +4, 075616003007216e + 004	6	+9, 999999850668627e - 002 +7, 338303071997962e + 000 +1, 947481826645428e + 002 +2, 452597405783887e + 003 +1, 540268879925017e + 004 +4, 477301401952657e + 004 +4, 529085282383994e + 004	+1, 000000000000000e + 000 +4, 267302996836219e + 001 +5, 060771271791489e + 002 +7, 203641362593950e + 003 +4, 356833493012405e + 004 +1, 939209566378500e + 005 +5, 700372217210676e + 005
7	+9, 999999953379861e - 002 +2, 521347472451033e - 001 +1, 585845588522626e + 002 +1, 080464114303323e + 004 +2, 303134075885534e + 005 +2, 149726067775921e + 006 +8, 653156094033286e + 006 +1, 059568255176248e + 007	+1, 000000000000000e + 000 -2, 818865289186709e + 001 +2, 320603018918002e + 003 +4, 427693492337573e + 004 +5, 469110674441214e + 005 +6, 803011360679091e + 006 +2, 239610710962220e + 007 +1, 333792379293758e + 008	-	- - - - -	- - - - -

TAB. 9.3: Coeficientes de $G_e^n(s)$: Exemplo Acadêmico II.

Ord	Coef. Numerador	Coef. Denominador	Ord	Coef. Numerador	Coef. Denominador
2	-3, 15562753546577e - 004	+1, 00000000000000e + 000	3	-6, 19152360176809e - 004	+1, 00000000000000e + 000
	-6, 103801667859872e - 003	+1, 844566642728708e - 003		+8, 130642643516544e - 005	+2, 933535376419002e - 003
	-2, 078429335777009e - 002	+4, 059297702969141e - 002		-4, 261273274552072e - 002	+6, 862347973055455e - 001
4	+1, 829578572286565e - 004	+1, 00000000000000e + 000	5	-1, 161066430941519e - 003	+1, 00000000000000e + 000
	-1, 036463084650494e - 003	+6, 966090904943449e - 003		+1, 100868713830991e - 004	+8, 150954458106074e - 002
	+1, 824549140118310e - 002	+2, 000673807833904e + 000		-5, 530078312767322e - 003	+2, 769531613041941e + 000
	-6, 780094904221626e - 002	-7, 586808322967522e - 003		+2, 016193258457728e - 002	+1, 718791790643005e - 001
	+2, 530825025357190e - 001	+3, 254705853686175e - 002		-1, 901925119092792e - 001	+5, 631293608577588e - 001
6	-8, 535521207560430e - 006	+1, 00000000000000e + 000	7	+4, 136614068756889e - 001	+1, 00000000000000e + 000
	+4, 031853342967143e - 005	+8, 511277596549756e - 002		-1, 419757247716013e - 006	+1, 340188295563529e - 001
	-1, 334516969733776e - 003	+3, 950902444303661e + 000		-2, 496058425082061e - 004	+4, 875276153725983e + 000
	+1, 162168600683873e - 002	+2, 096684582561021e - 001		+6, 878396570859035e - 003	+3, 600605699268103e - 001
	-5, 317254698942776e - 002	+2, 938628790881191e + 000		-1, 044316789070026e - 002	+5, 44683543444377e + 000
	+2, 046825148407867e - 001	-2, 505816640436386e - 002		+8, 047166585744203e - 002	+7, 106702012899477e - 003
+5, 726502758611307e - 001	+1, 857051610947655e - 002	+8, 352734923125996e - 001	+4, 893859446413760e - 001		
8	+5, 366450792527961e - 020	+1, 00000000000000e + 000	9	+5, 368200342155814e - 002	+1, 00000000000000e + 000
	-6, 974215827881317e - 018	+1, 609999999999860e - 001		-4, 308950687778664e - 018	+4, 249461657182646e - 001
	+6, 950883366313450e - 018	+6, 00400000000056e + 000		-1, 202084977526263e - 017	+6, 04649532680133e + 000
	+6, 399999999998860e - 003	+5, 821999999999744e - 001		-9, 141366700924309e - 016	+2, 166932778972051e + 000
	+2, 350000000000068e - 003	+9, 983500000000348e + 000		+6, 399999999997910e - 003	+1, 013716945767887e + 001
	+7, 129999999994943e - 002	+4, 073000000000889e - 001		+4, 039255460534048e - 003	+1, 013716945767887e + 001
	+1, 00019999999997e + 000	+3, 982000000000468e + 000		+7, 192027348932985e - 002	+3, 04206545447557e + 000
	+1, 044999999990864e - 001	+8, 000079166929802e - 014		+1, 019019361614193e + 000	+4, 089505273295514e + 000
+9, 95500000000627e - 001	+5, 980381911460649e - 015	+3, 684989549499809e - 001	+1, 051033631891281e + 000		
10	+1, 362023754656728e - 017	+1, 00000000000000e + 000	11	+2, 627584079709923e - 001	+1, 00000000000000e + 000
	+2, 118739340145375e - 017	-3, 340142956953622e - 001		+1, 284280205748767e - 016	+4, 249461657182646e - 001
	+3, 288869077214108e - 015	-4, 070038040524877e + 002		+4, 938499958528590e - 016	+2, 196332138288680e - 001
	+6, 400000000006976e - 003	-6, 887129101826461e + 000		+3, 318853565128398e - 014	+3, 987283101765065e + 001
	-8, 180914921758979e - 004	-2, 469525050255231e + 003		+6, 400000000118902e - 003	+2, 820395634185659e + 002
	-2, 572603166799806e + 000	-2, 449414189715467e + 002		+2, 725252571553539e - 003	+2, 576897090325691e + 002
	-5, 475570138632916e - 003	-4, 118687373070028e + 003		+2, 881378909117828e - 001	+1, 675732023884163e + 003
	-2, 983238730986665e + 001	-1, 701567648052668e + 002		+2, 848135510177893e + 000	+5, 025268520162983e + 002
	-4, 120669213660328e + 002	-1, 644279721082016e + 003		+3, 225106348055040e + 000	+2, 766015793377443e + 003
	-4, 364377388662837e + 001	-4, 993846489202710e - 011		+5, 452191801378533e + 001	+2, 471019562590070e + 002
-4, 110699302703981e + 002	-7, 469914214539924e - 012	+2, 793057741685960e + 002	+1, 097654099143208e + 003		
12	+1, 716603469066693e - 015	+1, 00000000000000e + 000	13	+2, 744135247897788e + 002	+1, 00000000000000e + 000
	-5, 407731458703538e - 015	+1, 097083659462485e + 000		-1, 580146650383409e - 015	+1, 00000000000000e + 000
	+4, 979632152862668e - 013	+1, 237165055661553e + 002		+4, 565014099121692e - 014	-2, 633296327916756e + 000
	+6, 399999998594113e - 003	-1, 182182642304183e + 003		-5, 029356068728454e - 013	+6, 028936619715474e + 001
	+8, 340935474148587e - 003	-3, 066328931007954e + 003		+6, 400000013152773e - 003	-6, 220193777912692e + 001
	+8, 258952914899342e - 001	-7, 748227008764841e + 003		-1, 553349655993015e - 002	-1, 891037403590746e + 004
	-6, 383587253346881e + 000	-7, 748227008764841e + 003		+4, 150389916306829e - 001	-5, 831224362830151e + 004
	-1, 637951272523963e + 001	-2, 106913593041273e + 004		+5, 787493325876038e - 001	-1, 238280908161738e + 005
	+2, 416469067075925e + 001	-1, 409071487429278e + 004		-1, 220431830319889e + 002	-3, 4129684064474557e + 005
	-1, 450184217527426e + 003	-3, 584761126712271e + 004		-3, 449660141578231e + 002	-2, 238292928365576e + 005
	-3, 598170180088130e + 003	-6, 269041718978184e + 003		-1, 552591655008817e + 003	-5, 560492619887887e + 005
	-1, 576859189058828e + 003	-1, 428869471614227e + 004		-2, 310728530331168e + 004	-9, 896457671124859e + 004
-3, 572173678715470e + 003	+4, 913836305539464e - 008	-5, 696605794648975e + 004	-2, 185722991386292e + 005		
14	-6, 956096543531851e - 015	+1, 00000000000000e + 000	15	-5, 464307477679120e + 004	+1, 00000000000000e + 000
	-4, 341643551612209e - 014	+7, 471680526263253e + 000		+7, 182910522796656e - 014	+1, 00000000000000e + 000
	-2, 416696572553505e - 012	-1, 179906822505305e + 002		+4, 162531421642462e - 013	+3, 886287294005439e + 000
	+6, 399999986361715e - 003	+6, 399682603766329e + 002		+2, 611489089910275e - 011	+1, 843715519614192e + 002
	+4, 91383503952984e - 002	+1, 963151036605793e + 003		+6, 400000138134711e - 003	-1, 499876864181588e + 002
	-7, 126187940122570e - 001	-1, 374862160132815e + 004		+2, 619184245536380e - 002	+1, 176024644453888e + 004
	+5, 167428422575685e + 000	-1, 677449969441320e + 006		+1, 217768239448685e + 000	-8, 608009086179108e + 004
	+1, 658713567115792e + 001	-3, 715968424789148e + 005		+3, 936019502777712e - 001	-7, 078925161233912e + 005
	-1, 877600889373593e + 002	-1, 012728259412674e + 007		+8, 459636994788788e + 001	+1, 583242712127643e + 006
	-1, 005811144796160e + 004	-1, 158352160190391e + 006		-3, 651163479360125e + 002	-4, 147686698724125e + 006
	-2, 702027285638508e + 003	-1, 686212308055924e + 007		-4, 482732529355564e + 003	+1, 203633192065291e + 007
	-1, 374308009520473e + 005	-7, 591907027238344e + 005		+1, 712225907189966e + 004	-6, 285589527509040e + 006
	-1, 688922963007640e + 006	-6, 726824060022178e + 006		-1, 347943481979508e + 005	+2, 152882789924908e + 007
	-1, 943165743957552e + 005	+1, 347764257275732e - 005		-6, 000326606271213e + 005	-2, 120937843454728e + 006
-1, 681706015050866e + 006	+3, 099919359916275e - 006	+2, 056726568977559e + 006	+8, 848157858216789e + 006		
		-5, 242905037610494e + 005	-5, 784119034608406e - 004		
		+2, 212039466078404e + 006	-1, 036703568351819e - 004		

TAB. 9.4: Coeficientes de $G_e^n(s)$: Sistema com Atraso.

Ord	Coef. Numerador	Coef. Denominador	Ord	Coef. Numerador	Coef. Denominador
2	-1, 353057798161822e - 003	+1, 000000000000000e + 000	3	-2, 761873133024691e - 002	+1, 000000000000000e + 000
	+4, 050715416429413e + 000	+4, 472102364771019e + 000		+4, 366942926195277e + 000	+3, 402769019675147e + 000
	+6, 470179810531552e + 001	+5, 739289739306301e + 001		-1, 155132662450640e + 002	+1, 807384830448101e + 003
4	-1, 908846318716333e - 003	+1, 000000000000000e + 000	5	+1, 109099590054252e + 004	+6, 853688520995666e + 003
	+2, 619334358024039e + 000	+6, 558277671585526e + 000		-1, 877016095544026e - 002	+1, 000000000000000e + 000
	+1, 030824980724179e + 002	+5, 388106450296667e + 003		+2, 949245392430091e + 000	+4, 701675949715230e + 000
	+2, 588798650295369e + 004	+3, 177029221421777e + 004		-1, 477059015574231e + 002	+7, 694302115642695e + 003
	+4, 216181988154753e + 005	+3, 336043515174849e + 005		+2, 863180157145005e + 004	+3, 523909045606741e + 004
6	+2, 533129924788116e + 007	+1, 669769340516274e + 009	7	-1, 934749201383636e + 005	+4, 629391529494407e + 006
	+3, 778871743157498e - 002	+1, 000000000000000e + 000		+2, 852489556883511e + 007	+1, 000000000000000e + 000
	+7, 126989917077256e - 001	+1, 629580941549830e + 001		+3, 792061505591357e - 002	+1, 631526209391936e + 001
	+6, 365719048830899e + 002	+1, 031419454808407e + 004		+1, 642439948565984e + 000	+1, 227780946677822e + 004
	+1, 163357451818723e + 004	+1, 280759808704026e + 005		+5, 974168403283994e + 002	+1, 396032143302236e + 005
	+2, 655667872648670e + 006	+1, 937180477461293e + 007		+2, 964284273738322e + 004	+3, 426887420965839e + 007
8	+2, 533129924788116e + 007	+1, 669769340516274e + 009	9	+1, 168622371432603e + 008	+2, 556631838841991e + 008
	+2, 317323118481749e + 009	+1, 000000000000000e + 000		+1, 832675640667583e + 009	+1, 09085890906978e + 010
	+1, 083241965826935e - 001	+2, 621105639767818e - 001		+6, 718129113361005e + 010	+4, 228259433552493e + 010
	+1, 961994575934667e + 003	+1, 416588018570765e + 004		-1, 137024028787881e - 001	+1, 000000000000000e + 000
	+9, 541371500472436e + 003	+3, 155068597476140e + 005		+1, 862651189019739e + 001	+1, 092828147040207e + 002
	+1, 071268148341211e + 007	+5, 495859464757366e + 007		-2, 393726677732015e + 003	+2, 166683484420789e + 004
	+4, 584337403611787e + 007	+9, 070978652009033e + 008		+3, 458678151642321e + 005	+1, 580498800336340e + 006
	+1, 936740432161504e + 010	+5, 460701704387421e + 010		-1, 568654542543664e + 007	+6, 373556765713403e + 008
+2, 288089447178426e + 010	+6, 354903260486252e + 011	+1, 950224467564776e + 009	+1, 411873221569987e + 009		
+8, 473740255790975e + 012	+5, 838390478016138e + 012	-3, 589773653169748e + 010	+2, 801545216802362e + 011		
10	+3, 941882663796729e + 015	+3, 084692753045510e + 017	11	+3, 630377977384018e + 012	+7, 272705396792021e + 012
	+1, 123795028437346e - 001	+1, 000000000000000e + 000		-2, 193681440448690e + 013	+1, 308854293139886e + 014
	-1, 898683121995436e + 001	+1, 995342139144201e + 002		+1, 575209392494129e + 015	+1, 074801649925058e + 015
	+5, 718788331539161e + 003	+3, 733338311821863e + 004		-1, 099466925007827e - 001	+1, 000000000000000e + 000
	-3, 991929401587138e + 005	+4, 156581600897805e + 006		+3, 864223212591823e + 001	+2, 983576865245792e + 002
	+7, 929416529722890e + 007	+3, 868023008561318e + 008		-6, 226163351954236e + 003	+6, 337069299045175e + 004
	-2, 641509223216575e + 009	+2, 600160317171693e + 010		+1, 471604931206056e + 006	+9, 080071285062283e + 006
	+4, 030414909375989e + 011	+1, 380140439592559e + 012		-9, 761579796659173e + 007	+1, 007735366884313e + 009
	+6, 180168672730126e + 012	+5, 331138386060340e + 013		+1, 806868431583186e + 010	+8, 580408866365523e + 010
	+7, 195244989849873e + 014	+1, 469165865098224e + 015		-5, 810243209025215e + 011	+5, 721156031947203e + 012
+3, 941882663796729e + 015	+2, 543215598618173e + 016	+8, 669320118123598e + 013	+2, 930963789257788e + 014		
12	+1, 031129254727208e - 001	+4, 036078055110390e + 002	13	-1, 300007419536548e + 015	+1, 126019188100864e + 016
	-3, 824817295472882e + 001	+1, 015848014987403e + 005		+1, 507657933924715e + 017	+3, 063772674166776e + 017
	+1, 327606491188542e + 004	+1, 774300235572132e + 007		-8, 155421343111951e + 017	+5, 291872970562350e + 018
	-1, 620586891522592e + 006	+2, 359583652471201e + 009		+6, 409525891892208e + 019	+4, 375743654308128e + 019
	+3, 847456311658583e + 008	+2, 446909211167221e + 011		+5, 844122558548139e - 002	+1, 000000000000000e + 000
	-2, 254812468113348e + 010	+2, 007445576868239e + 013		-1, 694246358372585e + 001	+4, 207321232129650e + 002
	+4, 241501111993452e + 012	+1, 298599731587441e + 015		+7, 199889344850851e + 003	+1, 107307723402244e + 005
	-1, 270307760948394e + 014	+6, 530062274384500e + 016		-3, 194418958132727e + 005	+2, 034270593119025e + 007
	+1, 934612364575902e + 016	+2, 474630375580379e + 018		+1, 991291528915416e + 008	+2, 866585305346219e + 009
	-2, 778116153961517e + 017	+6, 678436771412116e + 019		+4, 713531118904509e + 009	+3, 180399428357665e + 011
	+3, 288306746291096e + 019	+1, 148039625860121e + 021		+2, 059351014022966e + 012	+2, 827405618559475e + 013
	-1, 736101870342260e + 020	+9, 476329461071628e + 021		+1, 232511914119287e + 014	+2, 016615128194871e + 015
+1, 388077695898542e + 022	+1, 000000000000000e + 000	+8, 475208958864240e + 015	+1, 145850104849334e + 017		
14	+7, 568110897577396e - 002	+3, 364726808706302e + 002	15	+7, 454853760251640e + 017	+5, 090214607547014e + 018
	-2, 810784170280659e + 001	+7, 489224166922002e + 004		+1, 168911691829983e + 019	+1, 709781415548226e + 020
	+1, 024311751015594e + 004	+1, 083495817073386e + 007		+1, 458205903467955e + 021	+4, 093690485742186e + 021
	-1, 216823456454432e + 006	+1, 106786877164696e + 009		+2, 294506129528404e + 021	+6, 236902455321833e + 022
	+2, 661290114576703e + 008	+6, 841875195229193e + 010		+6, 663593974058568e + 023	+4, 549198013444457e + 023
	-1, 686563940882441e + 010	+4, 142041646698020e + 011		-3, 205398078143363e - 002	+1, 000000000000000e + 000
	+2, 040502456031204e + 012	-4, 730591401864199e + 014		+6, 871011460676104e + 000	+2, 549380261166311e + 002
	-8, 58355999555572e + 013	-6, 377339836512387e + 016		+1, 084716915879875e + 003	+5, 203176487803851e + 004
	-6, 508506766116229e + 014	-5, 079816925442860e + 018		+2, 224558466620942e + 005	+6, 803196472530483e + 006
	-8, 838938216818478e + 016	-2, 819156597605042e + 020		+1, 391303059012967e + 007	+7, 897189928047123e + 008
	-5, 114744910366959e + 019	-1, 113689523073860e + 022		+1, 17215053451758e + 010	+8, 631045474089334e + 010
	+3, 153684216381150e + 020	-3, 021588061310439e + 023		-1, 407356998614042e + 012	+1, 063120404401012e + 013
	-1, 251960681651950e + 023	-5, 085908483170629e + 024		+3, 357355195191257e + 014	+1, 317346623831747e + 015
	+4, 242582052284860e + 023	-4, 021938777160488e + 025		-2, 735654524513498e + 016	+1, 444747615859429e + 017
-5, 891272832934898e + 025		+3, 801314337186641e + 018	+1, 288552302333765e + 019		
		-1, 654136753003112e + 020	+9, 050229725361957e + 020		
		+1, 752828186546771e + 022	+4, 886554099284496e + 022		
		-3, 536519433131888e + 023	+1, 965243495023262e + 024		
		+2, 973625718816210e + 025	+5, 568494385684609e + 025		
		-2, 029224870266468e + 026	+9, 959274636704147e + 026		
		+1, 243300866346264e + 028	+8, 487945571702305e + 027		

TAB. 9.5: Coeficientes de $G_e^n(s)$: Levitador Magnético.

Ord	Coef. Numerador	Coef. Denominador	Ord	Coef. Numerador	Coef. Denominador
1	+6, 648594388332152e - 001 +7, 891248139662811e + 001	+1, 000000000000000e + 000 +2, 708838042043939e + 001	2	+6, 095796958296119e - 001 +2, 300344946754121e + 001 +6, 770651525328294e + 003	+1, 000000000000000e + 000 +2, 595113243570038e + 001 +4, 454667800341308e + 003
3	+1, 993481793967752e - 001 +1, 149026939127784e + 001 -9, 480811744631516e + 002 +8, 706805859105392e + 004	+1, 000000000000000e + 000 +1, 239052003654073e + 000 +3, 599552596247645e + 003 +4, 591068417344101e + 004	4	-3, 645931545798697e - 002 -1, 284325721588176e + 001 -3, 842697468608686e + 003 -1, 717699809283087e + 005 +2, 916839295121850e + 007	+1, 000000000000000e + 000 -2, 327910370890402e + 001 +6, 215697865421446e + 003 +4, 309198584985596e + 004 +2, 139570166114298e + 007
5	-2, 390265585869328e - 001 -2, 305218471568649e + 001 -1, 013848661288265e + 004 -2, 960965498277136e + 005 +1, 210520926679853e + 006 -7, 920427507951461e + 008	+1, 000000000000000e + 000 -5, 912508803665173e + 001 +3, 963957239242403e + 003 -2, 263334370156597e + 005 +8, 597313129988296e + 006 -4, 943779901737681e + 008	6	+3, 077278989186737e - 002 -1, 605969693130332e + 000 -2, 074405748033125e + 002 +4, 314682071236619e + 004 +2, 411584965490931e + 007 -1, 150944006788304e + 009 +5, 616772421965889e + 011	+1, 000000000000000e + 000 -2, 867792577039296e + 001 +2, 479236190364097e + 004 -7, 806220345196505e + 004 +1, 488787742588242e + 008 +1, 605986378324271e + 009 +3, 893625110755799e + 011
7	-1, 261366923173814e - 002 -2, 028454875436082e + 001 -3, 898844060993747e + 003 -7, 481601212726827e + 005 -5, 508585774772055e + 007 -7, 276499028001535e + 009 +5, 244749787573288e + 011 -1, 952452696319204e + 013	+1, 000000000000000e + 000 -3, 636052211115997e + 001 +2, 737933685360512e + 004 -1, 012249520214983e + 006 +1, 430989323203697e + 008 -4, 027689879390830e + 009 +3, 527985537111558e + 011 -1, 232971397138023e + 013	8	-5, 803389875307214e - 004 -8, 268713656670812e + 000 -2, 684875066240458e + 003 -2, 511889904764298e + 005 -4, 123209999615480e + 007 -1, 788634183579359e + 009 +7, 390512490395142e + 011 -1, 237109742633241e + 013 +4, 214898030185300e + 015	+1, 000000000000000e + 000 -3, 487676072425894e + 001 +3, 605791891583583e + 004 -9, 324279484423071e + 005 +3, 35606835314874e + 008 -1, 622439417444302e + 009 +1, 535060835314874e + 012 +7, 665534533985867e + 012 +2, 916018831848732e + 015
9	+4, 024274663047429e - 002 -1, 269974650756943e + 001 -6, 820821658990897e + 002 -5, 869433821279252e + 005 -2, 327478831473785e + 007 -8, 769683075922175e + 009 +7, 114694271582446e + 011 -5, 913695979074733e + 013 +6, 547198950876754e + 015 -1, 055497198126673e + 017	+1, 000000000000000e + 000 -2, 874156766292701e + 001 +3, 989017655660959e + 004 -1, 010433453301231e + 006 +4, 551086496267048e + 008 -6, 794698488548668e + 009 +2, 108450598635488e + 012 -1, 817067844209650e + 013 +4, 316165836511868e + 015 -6, 593532150955814e + 016	10	+2, 437270246501377e - 001 +1, 101710512501329e + 001 +1, 216411446579113e + 004 +5, 630693297235280e + 005 +2, 213864655532944e + 008 +8, 595762972181316e + 009 +2, 492181168375114e + 012 +2, 740827651588446e + 013 +1, 740095643307341e + 016 +2, 174678342191619e + 016 +3, 47497933477094e + 019	+1, 000000000000000e + 000 -1, 099962176010324e + 001 +5, 236609258386950e + 004 -2, 860997705134265e + 005 -8, 680122389812298e + 008 +3, 095556074808347e + 009 +5, 878957248813020e + 012 +5, 357359148347491e + 013 +1, 902420623135316e + 016 +1, 293848673197694e + 017 +2, 354425530525203e + 019
11	+1, 532242519884079e - 001 +8, 412588600936186e + 000 +6, 589196761236766e + 003 +3, 324845053714612e + 005 +7, 918538419632059e + 007 +1, 596801474782135e + 009 +9, 623423964805675e + 011 -5, 995028061093702e + 013 +1, 867981500389020e + 016 -5, 489212792175004e + 017 +8, 780133144234205e + 019 -1, 147054492431692e + 021	+1, 000000000000000e + 000 -1, 882818910776291e + 001 +5, 989883315421957e + 004 -8, 685592883283715e + 005 +1, 175186210592775e + 009 -1, 094578131560364e + 010 +9, 389640129141361e + 012 -3, 783202164617963e + 013 +3, 546147621045756e + 016 -1, 194773670616078e + 017 +5, 858121965519920e + 019 -7, 266318979932785e + 020	12	-3, 74668877698528e - 002 +6, 296548394273079e + 000 -5, 900792654773514e + 003 +3, 181591986239355e + 005 -2, 157842051158591e + 008 +3, 981117162251527e + 009 -2, 073952546323021e + 012 -7, 256643660705474e + 012 +8, 053616873274395e + 015 -3, 038995506449774e + 017 +1, 061509072967820e + 020 -9, 519793216803411e + 020 +9, 387189180556230e + 022	+1, 000000000000000e + 000 -3, 318009440149956e + 001 +6, 02243322982897e + 004 -1, 480824571962779e + 006 +1, 225889499616379e + 009 -2, 006081269433672e + 010 +1, 057278415280979e + 013 -6, 841697211803400e + 013 +4, 559018286561558e + 016 -3, 203054278600205e + 015 +1, 006129504047742e + 020 -3, 115232836433550e + 020 +6, 552495167661465e + 022
13	-5, 383400680355094e - 002 -1, 161985437694655e + 000 -6, 649741090380246e + 003 -1, 643326533896261e + 005 -2, 308680587126029e + 008 -7, 655106274741857e + 009 -2, 340057294514419e + 012 -1, 478426609957316e + 014 +8, 545162890716626e + 015 -1, 328797934213989e + 018 +1, 793969741387817e + 020 -5, 227350987098234e + 021 +4, 710676121057105e + 023 -6, 855264891778059e + 024	+1, 000000000000000e + 000 -3, 468757439202362e + 001 +6, 384470282524258e + 004 -1, 777396228946208e + 006 +1, 455225123383191e + 009 -3, 115454172046082e + 010 +1, 520083518311436e + 013 -2, 119194319438596e + 014 +8, 336682118967051e + 016 -6, 998778860527822e + 017 +2, 465828961426151e + 020 -2, 142056421459463e + 021 +3, 121358400973496e + 023 -4, 349708007997074e + 024	14	-1, 800364333265416e - 001 -1, 482502461222600e + 001 -1, 733133632181944e + 004 -1, 068338267991203e + 006 -6, 009204822872354e + 008 -2, 997224559838566e + 010 -8, 879680830214164e + 012 -4, 177665216182702e + 014 -4, 391239101922126e + 016 -3, 212630648594381e + 018 +1, 130643250964906e + 020 -1, 363097170225683e + 022 +1, 098895843653107e + 024 -2, 373866304480201e + 025 +5, 898966314957972e + 026	+1, 000000000000000e + 000 -4, 810615400003019e + 001 +6, 871678095439283e + 004 -3, 012324700874067e + 006 +1, 779769335382450e + 009 -6, 911910048780348e + 010 +2, 210491263837262e + 013 -6, 945918683931756e + 014 +1, 436257441879728e + 017 -3, 154615458247979e + 018 +5, 125906022199752e + 020 -7, 643517457611498e + 021 +9, 354532476671015e + 023 -1, 332744817101565e + 025 +4, 202107701852905e + 026

TAB. 9.6: Coeficientes de $G_{R,r}^n(s)$: SIB - Método 1.

Ord	Coef. Numerador	Coef. Denominador	Ord	Coef. Numerador	Coef. Denominador
6	+4, 879888690184853e - 003	+1, 000000000000000e + 000	8	+4, 879780600335892e - 003	+1, 000000000000000e + 000
	+4, 057052328677457e - 002	+1, 090416636060060e + 001		+8, 678637420369384e - 002	+2, 051287056872586e + 001
	+5, 862102204805524e - 001	+1, 669455750344097e + 002		+1, 253282158120953e + 000	+3, 241425823226815e + 002
	+6, 737155038775882e - 001	+6, 950096288269390e + 002		+6, 631526602620852e + 000	+2, 575470127767324e + 003
	+4, 114754905893278e + 000	+3, 039947926270419e + 003		+2, 913286596372927e + 001	+1, 460837849482839e + 004
	-4, 188626922116328e - 001	+4, 049151229412215e + 002		+4, 764291544545267e + 001	+4, 557052315331105e + 004
-1, 889721081388416e + 000	+4, 319382955730392e + 003	+1, 105005750163546e + 002	+9, 681619594896116e + 004		
			-3, 340045632088004e + 001	+4, 727514510150446e + 004	
			-6, 148727159672126e + 001	+1, 245799902758882e + 005	
10	+4, 879772582611075e - 003	+1, 000000000000000e + 000	12	+4, 879919324746962e - 003	+1, 000000000000000e + 000
	+8, 873438057587180e - 002	+2, 087341458782352e + 001		+1, 166216101822997e - 001	+2, 646012960461347e + 001
	+1, 801554412970233e + 000	+4, 399582032626036e + 002		+2, 950084897600505e + 000	+6, 911518133178570e + 002
	+1, 655787763493481e + 001	+4, 876335332750326e + 003		+3, 833013725463752e + 001	+1, 005630410578182e + 004
	+1, 495529516598836e + 002	+4, 770127387129105e + 004		+4, 792213707343908e + 002	+1, 330267851935319e + 005
	+6, 472632502750494e + 002	+2, 893620288494766e + 005		+3, 639782836258411e + 003	+1, 188148830798147e + 006
	+2, 670920547764981e + 003	+1, 420961496728201e + 006		+2, 614659533700533e + 004	+9, 335158617295452e + 006
	+4, 100464058342855e + 003	+3, 957627904340096e + 006		+1, 051193438582271e + 005	+4, 981526789494656e + 007
	+9, 467831297079101e + 003	+8, 784283972049514e + 006		+4, 199146104229391e + 005	+2, 253809090722819e + 008
	-2, 697381599402521e + 003	+3, 974468745491558e + 006		+6, 587414617985487e + 005	+6, 043287660757494e + 008
-5, 654011561319232e + 003	+1, 105399257247268e + 007	+1, 589590117501259e + 006	+1, 403601063471965e + 009		
			-3, 566123683211803e + 005	+5, 862257129012203e + 008	
			-7, 623290639431477e + 005	+1, 762905040606965e + 009	
15	+4, 879892252555029e - 003	+1, 000000000000000e + 000	-	-	-
	+7, 266911803956475e - 001	+1, 522918541952078e + 002			
	+2, 338010051623405e + 001	+5, 198822771608519e + 003			
	+5, 761931109174038e + 002	+1, 345563683297286e + 005			
	+9, 476178945799358e + 003	+2, 372079987648459e + 006			
	+1, 256142778541073e + 005	+3, 374672894495320e + 007			
	+1, 255045065506935e + 006	+3, 705991028007492e + 008			
	+1, 013249217717314e + 007	+3, 321768992796428e + 009			
	+6, 226640034009552e + 007	+2, 345198684003429e + 010			
	+3, 001271379361572e + 008	+1, 327568324769336e + 011			
	+1, 052763594309082e + 009	+5, 742682970617334e + 011			
	+2, 807723105384033e + 009	+1, 903260562768758e + 012			
	+4, 619677629492676e + 009	+4, 342533839807755e + 012			
	+5, 993357959210938e + 009	+6, 905526299933446e + 012			
	-2, 465872787967773e + 009	+4, 618739039703647e + 012			
-3, 419724377410156e + 009	+7, 429373345166599e + 012				

TAB. 9.7: Coeficientes de $G_{MC}^n(s)$: SIB - Método 2 (Ajuste completo).

Ord	Coef. Numerador	Coef. Denominador	Ord	Coef. Numerador	Coef. Denominador
2	+2, 395242423542583e - 003	+1, 000000000000000e + 000	4	+5, 219012925881397e - 003	+1, 000000000000000e + 000
	-2, 244264378282398e - 005	-2, 177911098103153e - 001		+6, 634800581310565e - 003	+5, 711725872559967e + 000
	+4, 714842141865241e - 004	+1, 464258166916789e + 000		+4, 137783602422918e - 002	+3, 192475168045919e + 001
			-9, 219590316572694e - 006	+1, 767064393234128e + 000	
			-2, 351173690203438e - 002	+4, 649296365857780e + 001	
6	+4, 933685442286035e - 003	+1, 000000000000000e + 000	8	+4, 894747230398269e - 003	+1, 000000000000000e + 000
	+4, 517990610119971e - 002	+1, 208750795509693e + 001		+7, 076811751840484e - 002	+1, 729340909379006e + 001
	+5, 692971688880842e - 001	+1, 647013640530865e + 002		+1, 415438052412932e + 000	+3, 493606870553723e + 002
	+9, 499633229385551e - 001	+7, 556936174666956e + 002		+9, 192691221082059e + 000	+3, 084560656693815e + 003
	+4, 014566547680242e + 000	+3, 134025033752136e + 003		+7, 997279630674601e + 001	+2, 711767447201692e + 004
	-1, 151668193080177e - 001	+4, 667031403272382e + 002		+1, 259761146660067e + 002	+1, 087749421727527e + 005
-2, 190434443469040e + 000	+4, 480056998465036e + 003	+4, 990108227461027e + 002	+3, 884237850763504e + 005		
			-4, 250767250874883e + 001	+8, 013588461102142e + 004	
			-2, 570378019821129e + 002	+5, 453705616468659e + 005	
10	+4, 855990104010982e - 003	+1, 000000000000000e + 000	-	-	-
	+1, 108071023041625e - 001	+2, 531776143510045e + 001			
	+2, 133050511352029e + 000	+5, 220272234021705e + 002			
	+2, 302596622252969e + 001	+6, 474168109149567e + 003			
	+2, 007219552860357e + 002	+6, 371194949559383e + 004			
	+1, 073110372275806e + 003	+4, 309375506153439e + 005			
	+4, 239091266402648e + 003	+2, 180510663447803e + 006			
	+7, 847649209354853e + 003	+6, 884252171582360e + 006			
	+1, 666059394051005e + 004	+1, 435524855113595e + 007			
	-4, 147001982578088e + 003	+7, 092702064915828e + 006			
-8, 422800956251909e + 003	+1, 848704143107215e + 007				

TAB. 9.8: Coeficientes de $G_{MP}^n(s)$: SIB - Método 2 (Ajuste parcial).

Ord	Coef. Numerador	Coef. Denominador	Ord	Coef. Numerador	Coef. Denominador
2	$-1, 737274058928036e - 004$	$+1, 000000000000000e + 000$	4	$+5, 245144550824778e - 003$	$+1, 000000000000000e + 000$
	$-1, 086376543922715e - 004$	$-2, 177911098103153e - 001$		$+3, 065955759480366e - 003$	$+5, 711725872559967e + 000$
	$-1, 513187076716879e - 003$	$+1, 464258166916789e + 000$		$+4, 297979446867298e - 002$	$+3, 192475168045919e + 001$
6	$+4, 949683214845626e - 003$	$+1, 000000000000000e + 000$	8	$-3, 472569974487321e - 003$	$+1, 767064393234128e + 000$
	$+4, 143869655306226e - 002$	$+1, 208750795509693e + 001$		$-2, 240444974848662e - 002$	$+4, 649296365857780e + 001$
	$+5, 742584403881730e - 001$	$+1, 647013640530865e + 002$		$+4, 889920848486913e - 003$	$+1, 000000000000000e + 000$
	$+6, 088872222455724e - 001$	$+7, 556936174666956e + 002$		$+6, 808082370795440e - 002$	$+1, 729340909379006e + 001$
	$+4, 150701892152447e + 000$	$+3, 134025033752136e + 003$		$+1, 416288688647673e + 000$	$+3, 493606870553723e + 002$
	$-5, 182287741235689e - 001$	$+4, 667031403272382e + 002$		$+8, 563854779849144e + 000$	$+3, 084560656693815e + 003$
$-2, 093787172882884e + 000$	$+4, 480056998465036e + 003$	$+8, 047953684605672e + 001$	$+2, 711767447201692e + 004$		
10	$+4, 793670334956111e - 003$	$+1, 000000000000000e + 000$	-	$+9, 507537021437024e + 001$	$+1, 087749421727527e + 005$
	$+1, 110890454896280e - 001$	$+2, 531776143510045e + 001$		$+5, 293873645675385e + 002$	$+3, 884237850763504e + 005$
	$+2, 083667970930824e + 000$	$+5, 220272234021705e + 002$		$-8, 27868856906356e + 001$	$+8, 013588461102142e + 004$
	$+2, 308632909106043e + 001$	$+6, 474168109149567e + 003$		$-2, 325793940975787e + 002$	$+5, 453705616468659e + 005$
	$+1, 937005298657866e + 002$	$+6, 371194949559383e + 004$			
	$+1, 074739421595265e + 003$	$+4, 309375506153439e + 005$			
	$+4, 006847709843173e + 003$	$+2, 180510663447803e + 006$			
	$+7, 754435485201336e + 003$	$+6, 884252171582360e + 006$			
	$+1, 702309248339562e + 004$	$+1, 435524855113595e + 007$			
	$-4, 365181569591882e + 003$	$+7, 092702064915828e + 006$			
	$-7, 841106326953489e + 003$	$+1, 848704143107215e + 007$			

9.3 APÊNDICE 3: MODELOS MULTIVARIÁVEIS ESTIMADOS

Seja um sistema MIMO de 2 entradas e 2 saídas. A MFT estimada para esse sistema, $G_e^n(s)$, com denominador comum $D(s)$ de ordem $n = 2$, é genericamente descrita por:

$$G_e^2(s) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_0^{11}s^2 + \alpha_1^{11}s + \alpha_2^{11}}{\beta_0s^2 + \beta_1s + \beta_2} & \frac{\alpha_0^{12}s^2 + \alpha_1^{12}s + \alpha_2^{12}}{\beta_0s^2 + \beta_1s + \beta_2} \\ \frac{\alpha_0^{21}s^2 + \alpha_1^{21}s + \alpha_2^{21}}{\beta_0s^2 + \beta_1s + \beta_2} & \frac{\alpha_0^{22}s^2 + \alpha_1^{22}s + \alpha_2^{22}}{\beta_0s^2 + \beta_1s + \beta_2} \end{bmatrix}, \beta_0 \triangleq 1$$

A seguir, são apresentados os coeficientes das FT dos canais, obtidas através da aplicação da extensão da metodologia N2CACGO para sistemas MIMO em cada um dos exemplos do Capítulo 4. As tabelas seguem o seguinte formato:

TAB. 9.9: Coeficientes de $G_e^n(s)$ (MFT).

Ordem D(s)	Coeficientes do Numerador (canal saída:entrada)		Coeficientes Denominador
2	1:1	1:2	β_0 β_1 β_2
	α_0^{11}	α_0^{12}	
	α_1^{11}	α_1^{12}	
	α_2^{11}	α_2^{12}	
	2:1	2:2	
	α_0^{21}	α_0^{22}	
α_1^{21}	α_1^{22}		
α_2^{21}	α_2^{22}		

TAB. 9.10: Coeficientes de $G_e^n(s)$: Turbo Gerador (2 entradas e 2 saídas).

Ordem D(s)	Coeficientes do Numerador (canal saída:entrada)		Coeficientes do Denominador
	1:1	1:2	
3	-1, 941473107665651e - 003	+2, 619369270422598e - 001	+1, 000000000000000e + 000 +1, 801415565914770e + 000 +3, 285857249723955e + 001 +5, 342047654686485e + 000
	+9, 251209668282365e - 002	-5, 822527932836027e + 000	
	-2, 157181879684612e - 001	+2, 441615301753205e + 002	
	-2, 016202135082808e + 001	-3, 584170155149339e + 003	
	2:1	2:2	
	-1, 488546665890324e - 002	-4, 029094518032352e - 001	
	+4, 174108798168606e - 003	+5, 698396118841266e + 000	
	+3, 120730347052834e - 001	+6, 789347080064372e + 002	
	-3, 877108924554473e + 000	+3, 410886825709225e + 003	
4	+8, 964725184025418e - 004	+4, 224258685893492e - 003	+1, 000000000000000e + 000 +7, 317542937705089e + 000 +4, 677801890781451e + 001 +2, 704333903813910e + 002 +6, 439934364359975e + 001
	+2, 584833599545045e - 002	+3, 330954745410843e - 002	
	+2, 266962274600266e + 000	-2, 536646327414555e + 000	
	-4, 929104626907111e + 001	+2, 607828363408640e + 002	
	2:1	2:2	
	-1, 046069675645466e - 002	+1, 792815362359118e - 001	
	-2, 105438237030377e - 001	-7, 182533034424909e + 000	
	+3, 552173596204498e + 000	+1, 162540007951967e + 003	
	-7, 372978963886233e + 001	+1, 198335342993570e + 003	
	+5, 738498245654139e + 001	+4, 403495194788717e + 004	
5	+8, 645440905191136e - 005	+1, 483685566089767e - 002	+1, 000000000000000e + 000 +1, 528082968431576e + 001 +1, 387518304817900e + 002 +6, 750538536807513e + 002 +3, 485906336520543e + 003 +7, 669816608625386e + 002
	+4, 449932237723080e - 002	-2, 962715303736450e - 001	
	+1, 553010490856406e + 000	+1, 829760095850795e + 001	
	-1, 975924191537571e + 001	-2, 617600446407905e + 002	
	2:1	2:2	
	-4, 455195551036220e - 003	+7, 727605187350352e - 002	
	-3, 608259837570167e - 001	-3, 414010967216262e + 000	
	+7, 758167824514135e + 000	+9, 795006357430767e + 002	
	-9, 450605549732299e + 001	+1, 248357084858335e + 004	
	+6, 031094349985498e + 002	+5, 420844901490326e + 004	
	-7, 101868355171429e + 002	+5, 300680021222009e + 005	
6	-6, 799304784974786e - 015	-2, 136669868619319e - 013	+1, 000000000000000e + 000 +2, 82376000044998e + 001 +2, 583147112328801e + 002 +1, 467928666752145e + 003 +8, 214488546551438e + 003 +8, 801214731020007e + 003 +1, 630596051072048e + 003
	+4, 828955000022811e - 002	+2, 915320000184756e - 002	
	+1, 875674990741732e + 000	+1, 288874364536262e + 000	
	+1, 949437466857293e + 000	-3, 041398902267202e - 001	
	2:1	2:2	
	+1, 228316277005277e + 003	-2, 388010396660699e + 004	
	-5, 761552380017612e + 003	-8, 290168671114952e + 005	
	-2, 384755136502876e + 003	-9, 544491986676360e + 005	
	2:1	2:2	
	+1, 236913086676108e - 013	-2, 228362468585120e - 012	
	-4, 919438600032222e - 001	-6, 715888999244989e - 001	
	+9, 482574861388468e + 000	+8, 044652529061245e + 002	
	-4, 904568274518017e + 001	+2, 781380196352016e + 004	
	+5, 516430629258960e + 002	+8, 085224452664466e + 004	
	-9, 396378936921271e + 002	+1, 213516273745784e + 006	
	+9, 075809507038473e + 002	+1, 081967565003485e + 006	
7	+9, 679011775931279e - 015	+1, 458847683024108e - 012	+1, 000000000000000e + 000 +7, 465466641510542e + 001 +1, 569021265896101e + 003 +1, 345813977465927e + 004 +7, 635143096853507e + 004 +3, 900936751894324e + 005 +4, 101571648630439e + 005 +7, 568748522300934e + 004
	+4, 82895499995054e - 002	+2, 915319997172467e - 002	
	+4, 117134240278267e + 000	+2, 642080387828074e + 000	
	+8, 901276808598482e + 001	+5, 952162706779603e + 001	
	2:1	2:2	
	-1, 137829108530487e + 003	-2, 389422124726493e + 004	
	-6, 277639058956603e + 004	-1, 937461238913966e + 006	
	-2, 698191146396151e + 005	-3, 943498017985790e + 007	
	-1, 106933375998403e + 005	-4, 430273185797459e + 007	
	2:1	2:2	
	-4, 514446176756280e - 013	+8, 641199058700153e - 012	
	-4, 919438599869931e - 001	-6, 715889002829507e - 001	
	-1, 335201596182036e + 001	+7, 732920663590568e + 002	
	+3, 911076243729169e + 002	+6, 515471903537562e + 004	
	-1, 724913650368329e + 003	+1, 371887337573674e + 006	
	+2, 466601479353938e + 004	+4, 966440278143455e + 006	
	-4, 270765356621244e + 004	+5, 740983304183669e + 007	
	+4, 212724525849680e + 004	+5, 022176034035878e + 007	
8	+3, 133160002935509e - 014	+1, 885505203613744e - 012	+1, 000000000000000e + 000 +1, 170827068203018e + 002 +2, 056623755521734e + 003 +4, 356141404627817e + 003 -4, 489041750632555e + 004 -3, 042914760671748e + 005 -5, 052519187554554e + 006 -6, 108071731641975e + 006 -1, 158479049814538e + 006
	+4, 828954999849940e - 002	+2, 915319998662016e - 002	
	+6, 165965218893473e + 000	+3, 878993536243544e + 000	
	+1, 342860175404438e + 002	+9, 349375493212563e + 001	
	2:1	2:2	
	-2, 387716998499792e + 003	-2, 482282355584368e + 004	
	-1, 162764474751818e + 005	-2, 950431174553144e + 006	
	+3, 584034437173110e + 005	-5, 764259801619423e + 007	
	+3, 881499099234102e + 006	+5, 041881205798173e + 008	
	+1, 694281586741829e + 006	+6, 781013605633429e + 008	
	2:1	2:2	
	-8, 959863115156830e - 013	+1, 983008335780681e - 011	
	-4, 919438599761174e - 001	-6, 715889005798240e - 001	
	-3, 422422993222708e + 001	+7, 447978654055671e + 002	
	+1, 142942872047878e + 003	+9, 976374271979147e + 004	
	-1, 054284960346279e + 004	+1, 980429216412749e + 006	
	+8, 291631853882287e + 004	-1, 136384974465163e + 007	
	-4, 744969336698309e + 005	+5, 145437833402131e + 007	
	+7, 482125941962466e + 005	-7, 66031548857845e + 008	
	-6, 448031787355174e + 005	-7, 686985110861080e + 008	

TAB. 9.11: Coeficientes de $G_e^n(s)$: Míssil (1 entrada e 2 saídas).

Ordem D(s)	Coeficientes do Numerador (canal saída:entrada)		Coeficientes do Denominador
2	1:1	2:1	
	-1, 114111134018962e - 001 -1, 155940153678283e + 001 +2, 658901592311395e + 002	+1, 091039106237557e + 000 -9, 287001415682506e + 001 -1, 622710902445208e + 002	+1, 000000000000000e + 000 +9, 141801330970594e - 001 +2, 506695077975997e + 002
	1:1	2:1	
3	+3, 115340101111260e - 001 -4, 230346145607396e + 001 -3, 107218412870186e + 002 +6, 358313267487584e + 004	-7, 369283991937661e - 001 +1, 938093675883932e + 002 -3, 317779690441416e + 004 -3, 148391828593945e + 004	+1, 000000000000000e + 000 +2, 490405272631931e + 002 +5, 726105884422331e + 002 +6, 120485360038874e + 004
	1:1	2:1	
	4	+7, 826108236090378e - 012 -1, 004750867498837e - 009 -4, 584989456868263e + 003 +2, 831773800951657e + 002 +5, 636523365715985e + 006	-1, 918766405942690e - 011 +4, 926911790394368e - 009 -8, 682472427907600e - 007 -2, 944494278642218e + 006 -3, 048755609067086e + 006
1:1		2:1	
5		+1, 893699174729353e - 012 -2, 320726203082467e - 010 -4, 584989456957472e + 003 +2, 362037306049806e + 004 +5, 635082017723814e + 006 -2, 868941139102791e + 007	-5, 175978729357148e - 012 +1, 199944136314163e - 009 -2, 205965469442006e - 007 -2, 944494278702767e + 006 +1, 193846296824843e + 007 +1, 551789963851052e + 007
	1:1	2:1	
	6	-3, 828440124977805e - 011 +4, 692733016237974e - 009 -4, 584989457721828e + 003 +4, 396325009402881e + 005 +1, 056883447569070e + 007 -5, 404171927513866e + 008 -6, 096858948177685e + 009	+1, 014905520261133e - 010 -2, 433814306587330e - 008 +4, 722955938100373e - 006 -2, 944494279217244e + 006 +2, 791027262604471e + 008 +3, 477113660127904e + 009 +3, 297747868688134e + 009

TAB. 9.12: Coeficientes de $G_e^n(s)$: Aeronave de Combate (2 entradas e 2 saídas).

Ordem D(s)	Coeficientes do Numerador (canal saída:entrada)		Coeficientes do Denominador
	1:1	1:2	
3	-1, 241115864428690e - 003	+1, 077334242728838e - 003	+1, 00000000000000e + 000 -2, 275516420046714e + 000 +3, 625689368481073e + 000 -9, 970832889284346e - 001
	+9, 938922010687133e - 002	-8, 763076058673394e - 002	
	-1, 825960253798897e + 001	+1, 116745025425650e + 001	
	-3, 353545615609216e + 000	+9, 533663218634871e + 000	
	2:1	2:2	
	-1, 513297606545441e - 003	+1, 072897578416422e - 003	
	+1, 268142121334477e - 001	-8, 982687486284290e - 002	
	-1, 572068623983844e + 001	+1, 114992963172886e + 001	
	-1, 754143238734079e + 001	+1, 228795353791387e + 001	
4	-2, 323988733155251e - 005	+1, 535691380516752e - 005	+1, 00000000000000e + 000 +3, 404669533009716e + 001 +1, 023800842253655e + 002 -1, 761430617007794e + 002 +6, 287312446247355e + 001
	+2, 899331238468471e - 004	-1, 344693104647870e - 004	
	-5, 362173238098157e + 000	+5, 405356384280186e - 003	
	-9, 419519599924995e + 002	+6, 601351425096666e + 002	
	2:1	2:2	
	+2, 119372380893356e - 005	-1, 383921548123160e - 005	
	-1, 927398586496822e - 004	+1, 261196242116938e - 004	
	+2, 471402550177286e - 001	-1, 623445433582035e - 001	
	-9, 509897880009561e + 002	+6, 738324886472092e + 002	
	-8, 034145078725347e + 002	+5, 486261419272810e + 002	
5	-5, 319633772467415e - 017	+1, 964060970488651e - 017	+1, 00000000000000e + 000 +3, 45569700002876e + 001 +1, 305381676137668e + 002 -1, 839761769495949e + 002 +3, 534064132437257e + 001 +2, 360403975049401e + 001
	+1, 093103498614159e - 015	-1, 282034967510434e - 015	
	-5, 12400000000486e + 000	-1, 48949999998001e - 001	
	-9, 457225578057405e + 002	+6, 601407475003313e + 002	
	2:1	2:2	
	-2, 191049983793523e + 001	+1, 496546927817916e + 001	
	+8, 046251031523264e - 001	-2, 067145219807210e + 000	
	-3, 246860940143599e - 017	+2, 612708412771803e - 017	
	+2, 941932872813417e - 015	-2, 091741262780182e - 015	
	-5, 030728597625547e - 013	+3, 913993585652634e - 013	
	-9, 48119999999629e + 002	+6, 71879999999737e + 002	
	-1, 884331796303474e + 003	+1, 291589643961145e + 003	
	-4, 628408539763020e + 001	+3, 450331357448069e + 001	
6	+1, 118399142357349e - 016	-7, 684105995567100e - 017	+1, 00000000000000e + 000 +5, 171027712622041e + 000 -8, 849509584392317e + 002 -4, 019962326882012e + 003 +5, 441653958980282e + 003 -1, 014914005884000e + 003 -6, 936269501180074e + 002
	-6, 122652058556502e - 015	+5, 399065906181643e - 015	
	-5, 123999999997874e + 000	-1, 489500000014559e - 001	
	-7, 951489895251806e + 002	+6, 645177836041390e + 002	
	2:1	2:2	
	+2, 776903800377557e + 004	-1, 938389243834035e + 004	
	+6, 446653124837652e + 002	-4, 418415643160818e + 002	
	-2, 364466740996746e + 001	+6, 074501062514590e + 001	
	+4, 536164353617219e - 017	-2, 302298933786326e - 017	
	-7, 477056907873546e - 015	+4, 007554074691528e - 015	
	+8, 572455067133721e - 013	-4, 864145852699471e - 013	
	-9, 481200000001053e + 002	+6, 71880000000605e + 002	
	+2, 597706780523997e + 004	-1, 845223726010666e + 004	
	+5, 532658133481548e + 004	-3, 792007542553684e + 004	
	+1, 360101465526465e + 003	-1, 013912383582834e + 003	
7	-3, 454340263390935e - 016	+2, 453388858384609e - 016	+1, 00000000000000e + 000 +8, 488195650874465e + 001 -4, 972142750108375e + 003 -2, 300451385710948e + 005 -9, 023340672736418e + 005 +1, 260522963678333e + 006 -2, 406043121215188e + 005 -1, 614931741848858e + 005
	+4, 174522561011598e - 014	-2, 562776440333259e - 014	
	-5, 124000000007103e + 000	-1, 489499999946957e - 001	
	-1, 203587788675718e + 003	+6, 526448407594177e + 002	
	2:1	2:2	
	-1, 255820739279595e + 004	+3, 425561982817488e + 004	
	+6, 469304894670939e + 006	-4, 515773468780275e + 006	
	+1, 499468728120646e + 005	-1, 024941772546533e + 005	
	-5, 505051633298449e + 003	+1, 414291131856971e + 004	
	-4, 318901867194772e - 016	+4, 940305519928781e - 016	
	+3, 939267692465381e - 014	-3, 301076293749579e - 014	
	-9, 118182644366290e - 012	+9, 611011922137795e - 012	
	-9, 481199999993088e + 002	+6, 718799999994421e + 002	
	+4, 959845800500880e + 004	+3, 510394157949519e + 004	
	+6, 391934203371762e + 006	-4, 531807951745899e + 006	
	+1, 288981660149329e + 007	-8, 835009940322354e + 006	
	+3, 166646021287039e + 005	-2, 360633892492200e + 005	
8	+8, 798905003719430e - 015	-7, 879692092564609e - 015	+1, 00000000000000e + 000 +4, 369009297005136e + 002 -9, 987945251617135e + 002 -2, 328170612500433e + 006 -6, 634720677592165e + 007 -2, 401526964496556e + 008 +3, 418594962629846e + 008 -6, 612408592007872e + 007 -4, 392732508209436e + 007
	-1, 533878114816119e - 013	+2, 063114813202449e - 013	
	-5, 123999999816953e + 000	-1, 489500001631735e - 001	
	-3, 007333007314513e + 003	+6, 002116147071708e + 002	
	2:1	2:2	
	-3, 034979580111568e + 005	+2, 678577911259067e + 005	
	+2, 374415569471149e + 007	-9, 640759171248503e + 006	
	+1, 760327684564115e + 009	-1, 228753532437534e + 009	
	+4, 076353656311066e + 007	-2, 781979409405936e + 007	
	-1, 497414373106377e + 006	+3, 846975383074628e + 006	
	+3, 379355608495325e - 015	-4, 597095737875055e - 015	
	-2, 095114008948056e - 013	+1, 401381444931965e - 013	
	+8, 109131531820434e - 011	-9, 785135257233730e - 011	
	-9, 48120000045842e + 002	+6, 71880000031173e + 002	
	-3, 833546868668463e + 005	+2, 716184492868247e + 005	
	+1, 349500672833862e + 007	-9, 580755433530964e + 006	
	+1, 792768404062462e + 009	-1, 269777315915504e + 009	
	+3, 507453800035844e + 009	-2, 404178352126858e + 009	
	+8, 613508913147925e + 007	-6, 421096937914439e + 007	

9.4 APÊNDICE 4: PÓLOS DOMINANTES DO SEP INTERLIGADO BRASILEIRO

TAB. 9.13: Dominância dos pólos do SIB segundo SILVA (2005).

Número	Modo	IDM
2	+0, 10889555490516 ± 1, 20515556051436 <i>i</i>	0,00931796607287
4	-2, 96475849118514 ± 4, 79187820032162 <i>i</i>	0,00388862664565
6	-3, 18789104126848 ± 9, 28424706710226 <i>i</i>	0,00158740204237
8	-2, 60295056934657 ± 10, 7218281980463 <i>i</i>	0,00142282829645
10	-4, 01217617065520 ± 4, 21907228800742 <i>i</i>	0,00084916032037
12	-0, 53610675315731 ± 3, 63029610408287 <i>i</i>	0,00078451764305
14	-0, 75669375234349 ± 4, 93719778843248 <i>i</i>	0,00071650787081
16	-2, 21735555074407 ± 10, 7958364040187 <i>i</i>	0,00053385891548
18	-0, 94076789606357 ± 8, 19290318646306 <i>i</i>	0,00045666007197
20	-7, 51187840150265 ± 0, 23234536550144 <i>i</i>	0,00043348339806
22	-1, 44373628444790 ± 1, 51022133101042 <i>i</i>	0,00041430268894
24	-6, 42231947357662 ± 8, 69872603180010 <i>i</i>	0,00035029389840
26	-0, 60361862242103 ± 0, 14154243783160 <i>i</i>	0,00033382308692
28	-1, 84161835917728 ± 6, 98599590342554 <i>i</i>	0,00031275785471
30	-4, 51526169533817 ± 11, 7468881454488 <i>i</i>	0,00030138924141
32	-1, 27860794028863 ± 7, 25460438871145 <i>i</i>	0,00028534764967
34	-2, 80523851501449 ± 11, 5513528607237 <i>i</i>	0,00023921063121
36	-1, 29368632808953 ± 1, 38542606326548 <i>i</i>	0,00023464004118
38	-2, 34882932030955 ± 11, 0052194128715 <i>i</i>	0,00022111697596
40	-4, 95308786022298 ± 7, 14855698473840 <i>i</i>	0,00021526256839
42	-6, 96463954786476 ± 11, 0840208742670 <i>i</i>	0,00020001206433
43	-0, 00002554567738	0,00019507530014
45	-1, 45948159127161 ± 10, 7704757817491 <i>i</i>	0,00014538878290
47	-5, 56303477415358 ± 7, 75077688587499 <i>i</i>	0,00012242835985
49	-1, 17392315931881 ± 0, 11944330740119 <i>i</i>	0,00011733304591

9.5 APÊNDICE 5: MODELO LINEARIZADO DO TURBO-GERADOR

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] =$$

-18,4456	4,2263	-2,283	0,2260	0,422	-0,0951	-0,2748	3,1463
-4,0977	-6,0706	5,6825	-0,6966	-1,2246	0,2873	-0,0501	-9,3737
1,4449	1,4336	-2,6477	0,6092	0,8979	-0,2300	-0,1550	7,4296
-0,0093	0,2302	-0,5002	-0,1764	-6,3152	0,1350	0,0716	-4,9176
-0,0464	-0,3489	0,7238	6,3117	-0,6886	0,3645	-0,0814	-10,265
-0,0602	-0,2361	0,2300	0,0915	-0,3214	-0,2087	0,0244	13,794
0,5971	-0,7697	4,8850	4,8608	-9,8177	-8,8610	0	0
3,1013	9,3422	-5,6000	-0,7490	2,9974	10,5719	0	0

Os parâmetros numéricos envolvidos e suas descrições podem ser obtidos em LIMEBEER et alii (1979), HUNG & MACFARLANE (1982) e MACIEJOWSKI (1989).

9.6 APÊNDICE 6: MODELOS NÃO-LINEAR E LINEARIZADO DO MÍSSIL

Modelo não-linear

$$\left(\underline{x}^T = \begin{bmatrix} \alpha & q & \delta & \dot{\delta} \end{bmatrix}^T \right)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \overline{A} & \overline{B} \\ \hline \overline{C} & \overline{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} Z_\alpha & 1 & Z_\delta & 0 & 0 \\ M_\alpha & 0 & M_\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_\alpha^2 & -2\zeta\omega_\alpha & \omega_\alpha^2 \\ \hline N_\alpha & 0 & N_\delta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

onde:

$$\begin{aligned} Z_\alpha &= K_\alpha M \cos \alpha \operatorname{sign}(\alpha) [a_n |\alpha|^3 + b_n |\alpha|^2 + c_n (2 - M/3) |\alpha|] \\ M_\alpha &= K_q M^2 \operatorname{sign}(\alpha) [a_m |\alpha|^3 + b_m |\alpha|^2 - c_m (7 - 8M/3) |\alpha|] \\ N_\alpha &= K_z M^2 \operatorname{sign}(\alpha) [a_n |\alpha|^3 + b_n |\alpha|^2 + c_n (2 - M/3) |\alpha|] \\ Z_\delta &= K_\alpha M \cos \alpha d_n \\ M_\delta &= K_q M^2 d_m \\ N_\delta &= K_z M^2 d_n \end{aligned}$$

Modelo linear

A aproximação linear, através da expansão de Taylor de primeira ordem na vizinhança do ponto nominal $x_0 = [\alpha_0 \quad q_0 \quad \delta_0 \quad \dot{\delta}_0]$ e $u_0 = \delta_{c0} = \delta_0$, das equações:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= f(\alpha, q, \delta, M) = Z_\alpha \alpha + q + Z_\delta \delta \\ \dot{q} &= g(\alpha, \delta, M) = M_\alpha \alpha + M_\delta \delta \\ \eta &= h(\alpha, \delta, M) = N_\alpha \alpha + N_\delta \delta \end{aligned}$$

resulta no modelo:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} A_{11} & 1 & A_{13} & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & A_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_\alpha^2 & -2\zeta\omega_\alpha & \omega_\alpha^2 \\ \hline C_{11} & 0 & C_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

onde:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= K_\alpha M \cos \alpha_0 [3a_n |\alpha_0|^2 + 2b_n |\alpha_0| + c_n (2 - M/3)] - \\
&\quad - K_\alpha M (\pi/180) \operatorname{sen} \alpha_0 [a_n |\alpha_0|^3 + \operatorname{sign}(\alpha_0) b_n |\alpha_0|^2 + c_n (2 - M/3) |\alpha_0|] + \\
&\quad + K_\alpha M (\pi/180) \operatorname{sen} \alpha_0 (d_n/d_m) [a_m |\alpha_0|^3 + \operatorname{sign}(\alpha_0) b_m |\alpha_0|^2 + c_m (2 - M/3) |\alpha_0|] \\
A_{13} &= K_\alpha M d_n \cos \alpha_0 \\
A_{21} &= K_p M^2 [3a_m |\alpha_0|^2 + 2b_m |\alpha_0| - c_m (7 - 8M/3)] \\
A_{23} &= K_p M^2 d_m \\
C_{11} &= K_z M^2 [3a_n |\alpha_0|^2 + 2b_n |\alpha_0| + c_n (2 - M/3)] \\
C_{13} &= K_z M^2 d_n
\end{aligned}$$

Os parâmetros numéricos envolvidos e suas descrições podem ser obtidos em REICHERT (1992) e NICHOLS et alii (1993).

9.7 APÊNDICE 7: MODELO LINEARIZADO DA AERONAVE DE COMBATE

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] =$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cc} -0,02567 & -36,617 & -18,897 & -32,09 & 3,2509 & -0,76257 & 0 & 0 \\ 9,257 \cdot 10^{-5} & -1,8997 & 0,98312 & -0,0007256 & -0,1708 & -0,004965 & 0 & 0 \\ 0,012338 & 11,72 & -2,6316 & 0,0008758 & -31,604 & 22,396 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -30 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30 & 0 & 30 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Os parâmetros numéricos envolvidos e suas descrições podem ser obtidos em SAFONOV et alii (1981).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)