



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO POLITÉCNICO - IPRJ

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

**UMA FORMULAÇÃO EXPLÍCITA MATRICIAL PARA
PROBLEMAS INVERSOS DE TRANSFERÊNCIA
RADIATIVA EM MEIOS PARTICIPANTES
HOMOGÊNEOS UNIDIMENSIONAIS**

Nancy Isabel Alvarez Acevedo

**Nova Friburgo
2006**

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Instituto Politécnico - IPRJ

**“UMA FORMULAÇÃO EXPLÍCITA MATRICIAL PARA PROBLEMAS
INVERSOS DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA EM MEIOS
PARTICIPANTES HOMOGÊNEOS UNIDIMENSIONAIS”**

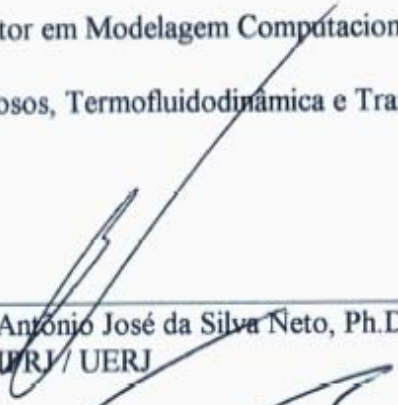
NANCY ISABEL ALVAREZ ACEVEDO

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional do Instituto Politécnico da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de


Doutor em Modelagem Computacional

Linha de Pesquisa: Meios Porosos, Termofluidodinâmica e Transporte de Partículas

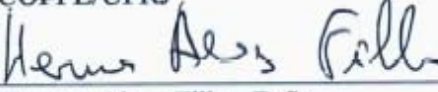
Tese aprovada por:




Antonio José da Silva Neto, Ph.D. - Orientador
IPRJ/ UERJ



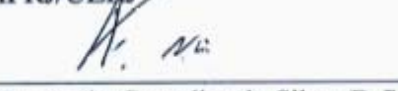
Nilson Costa Roberty, D.Sc. - Orientador
COPPE/UFRJ



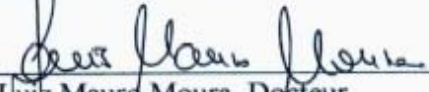
Hermes Alves Filho, D.Sc.
IPRJ/UERJ



Joaquim Teixeira de Assis, D.Sc.
IPRJ/UERJ



Fernando Carvalho da Silva, D.Sc.
PEN/COPPE/UFRJ



Luiz Mauro Moura, Docteur
PUC-Paraná

Nova Friburgo, RJ – Brasil
Fevereiro de 2006



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO POLITÉCNICO - IPRJ

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

**UMA FORMULAÇÃO EXPLÍCITA MATRICIAL PARA
PROBLEMAS INVERSOS DE TRANSFERÊNCIA
RADIATIVA EM MEIOS PARTICIPANTES
HOMOGÊNEOS UNIDIMENSIONAIS**

Nancy Isabel Alvarez Acevedo

Tese para obtenção do Título de Doutor em Modelagem Computacional, orientada pelos
Professores Antônio José da Silva Neto e Nilson Costa Roberty

Nova Friburgo, 17 de fevereiro de 2006

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/REDE SÍRIUS/CTC/E

A473 Alvarez Acevedo, Nancy Isabel.
Uma formulação explícita matricial para problemas inversos de transferência radiativa em meios participantes homogêneos unidimensionais / Nancy Isabel Alvarez Acevedo - 2006.
136 f.
Bibliografia.

Orientador : Antônio José da Silva Neto.
Orientador: Nilson Costa Roberty.
Tese (doutorado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico.

1. Radiação - Transferência – Teses. 2. Problemas inversos (Equações diferenciais) – Teses. 3. Teoria cinética do transporte – Método das ordenadas discretas – Teses. I. Silva Neto, Antônio José da. II. Roberty, Nilson Costa. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto Politécnico. IV. Título.

CDU 536.3

**A minhas filhas, Diana, Tânia e Claudia,
alicerces e sustentação deste trabalho, que me
incentivaram durante esta longa jornada.**

**A meu pai, *in memoriam*, e minha mãe, que
deram exemplo de luta e perseverança na
consecução dos próprios objetivos, sem esquecer
os padrões éticos nem morais.**

**A meus irmãos pelo carinho e apoio recebido
ainda que à distancia.**

AGRADECIMENTOS

A meus orientadores, Prof. Nilson Costa Roberty e Prof. Antônio Silva Neto, por terem acreditado em mim, pela orientação e ensinamentos que possibilitaram a culminação deste trabalho.

A meus amigos Sebastián, Haldamar e Silvana pelos momentos compartilhados dentro e fora do instituto. Ao colega e professor Ivan Medina, pelas sugestões na redação da tese. À Rosana com quem compartilhei a sala de estudos; pela troca de experiências; ao Alex, Fabiana e Victor pelos bons momentos e atenções recebidas.

Ao Márcio por seu otimismo contagiante, por cuidar de mim em todo momento, pelo seu carinho.

Aos funcionários, professores e demais colegas deste Instituto que de um ou outro modo fizeram agradável minha estada nesta casa.

Aos membros da banca examinadora pela predisposição em analisar este trabalho e pelas sugestões recebidas.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pelo apoio financeiro durante os três primeiros anos do curso de doutorado.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro – FAPERJ pelo suporte financeiro neste último ano.

**Ajuda-me, para que eu possa ajudar-te, para que juntos
possamos subir a montanha.**
Provérbio grego

Dar menos que seu melhor é sacrificar o dom que você recebeu.
Steve Prefontaine

É fantástico o que você consegue fazer se não se importa com quem leva o crédito.
Harry Truman, ex-presidente dos EUA.

RESUMO

A formulação explícita matricial desenvolvida nesta tese de doutorado foi proposta visando ser uma alternativa na solução de Problemas Inversos de estimativa de propriedades radiativas em meios participantes homogêneos unidimensionais usando a Equação de Transferência Radiativa para modelar a interação da radiação com o meio participante.

A equação de transporte é formulada em forma matricial e o domínio angular é discretizado usando conceitos do método de ordenadas discretas e a expansão da função de fase do espalhamento anisotrópico em uma série de polinômios de Legendre.

A formulação proposta consiste em uma formulação explícita para o problema inverso. Um arranjo apropriado das condições de contorno prescritas (fluxos incidentes) e dos fluxos emergentes nos contornos de uma placa permitem o cálculo direto do operador de transmissão, do operador albedo e do operador de colisão. A partir do operador de colisão calculado são obtidos os valores estimados dos coeficientes de extinção total e de espalhamento.

São apresentadas as formulações para problemas em regime estacionário e em regime transiente, bem como os resultados para alguns casos-teste.

Palavras-chave: Propriedades radiativas; Formulação explícita; Problema inverso; Equação de Transferência radiativa; Método de Ordenadas discretas.

ABSTRACT

The explicit matrix formulation developed in the present thesis has been proposed as an alternative for the solution of Inverse Problems for radiative properties estimation in one-dimensional homogeneous participating media using Radiative transfer equation for the modeling of the radiation interaction with the participating medium.

This transport equation is formulated in a matrix form and the angular domain is discretized using concepts of the discrete ordinates methods and the expansion of the function of phase function of anisotropic scattering in a series of Legendre polynomial.

The formulation proposed consists on an explicit formulation for the inverse problem. An adequate assembly of the prescribed boundary conditions (incidents flux) and of the emerging flux at the boundaries of the slab allows the direct computation of the transmission, albedo and collision operators. From the computed collision operator estimated values for total extinction and scattering coefficients are obtained.

The formulations for steady state and transient situations are presented, as well as test case results.

Keywords: Radiative properties; Explicit formulation; Inverse problems, Radiative transfer equation; Discrete ordinates method

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 GENERALIDADES	1
1.2 JUSTIFICATIVA DO TRABALHO	2
1.3 OBJETIVO DA TESE	5
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	5
CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	7
2.1 TRANSFERÊNCIA RADIATIVA EM MEIOS PARTICIPANTES	7
2.2 PROBLEMAS INVERSOS PARA A ESTIMATIVA DAS PROPRIEDADES RADIATIVAS DE UM MEIO PARTICIPANTE	15
CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO EXPLÍCITA MATRICIAL PARA O PROBLEMA INVERSO DE TRANSPORTE	24
3.1 FORMULAÇÃO EXPLÍCITA MATRICIAL PARA O PROBLEMA INVERSO DE TRANSPORTE ESTACIONÁRIO	26
3.1.1 Formulação matemática do problema direto	26
3.1.2 Formulação matemática do problema inverso	30
3.1.3 Formulação discreta do problema direto	31
3.1.4 Formulação discreta do problema inverso	34
3.2 FORMULAÇÃO EXPLÍCITA MATRICIAL PARA O PROBLEMA INVERSO UNIDIMENSIONAL ESTACIONÁRIO	36
3.2.1 Formulação matemática do problema direto	36
3.2.2 Formulação matemática do problema inverso	43
3.2.3 Fórmula explícita para o cálculo do operador Albedo.	49

3.3	FORMULAÇÃO EXPLÍCITA MATRICIAL PARA O PROBLEMA INVERSO UNIDIMENSIONAL TRANSIENTE	52
3.3.1	A equação de transferência radiativa transiente transformada	52
3.3.2	Formulação matricial do problema direto no espaço transformado	56
3.3.3	Formulação explícita matricial para o problema inverso no espaço transformado	57
3.4	ALGORITMO DESENVOLVIDO PARA A ESTIMATIVA DOS COEFICIENTES DE EXTINÇÃO TOTAL E DE ESPALHAMENTO	61
	CAPÍTULO 4 – RESULTADOS	62
4.1	PROBLEMA INVERSO ESTACIONÁRIO	63
4.1.1	Dados experimentais	63
4.1.2	Avaliação do algoritmo desenvolvido	64
	A. Casos Testes	64
	B. Resultados	65
4.1.3	Efeitos da discretização do domínio angular na formulação explícita matricial	84
	A. Casos Testes	84
	B. Resultados	85
4.2	PROBLEMA INVERSO TRANSIENTE	97
	A. Casos Testes	94
	B. Resultados	95
	CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E PROPOSIÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	106
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	109

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

O estudo da transferência radiativa em meios participantes cumpre um papel muito importante na Astrofísica e na Física Atmosférica, onde a atmosfera terrestre, exercendo um efeito atenuante da radiação solar, é exemplo clássico de meio participante. A sua aplicação em outros meios - como tecidos biológicos, tintas, papéis, cerâmicas, metais e ligas, águas oceânicas, os produtos derivados da combustão de motores, bem como os destinados ao isolamento térmico para veículos espaciais, etc. - tem uma longa história.

A formulação matemática e a solução de problemas diretos e inversos em transferência radiativa constituem ferramentas eficientes e versáteis para a estimativa de propriedades ópticas em meios participantes, onde concorrem diversos métodos matemáticos e rotinas computacionais.

O acelerado progresso da tecnologia laser nos últimos tempos, vem intensificando a cada dia sua aplicação em projetos de desenvolvimento de equipamentos e técnicas para aplicações em Engenharia, Medicina, Geofísica, Astrofísica (ALVAREZ ACEVEDO, ROBERTY e SILVA NETO, 2004a); bem como, na tecnologia da comunicação, na

automatização e controle, na tecnologia militar, na indústria de entretenimento, nas restaurações artísticas, etc.

Muitas destas aplicações fazem uso da teoria de problemas inversos, tais como a tomografia óptica, onde a radiação infravermelha na região de comprimento de onda de aproximadamente $650\text{nm} < \lambda < 900\text{nm}$ é usada para iluminar meios altamente espalhadores. A reconstrução da distribuição espacial das propriedades ópticas (como coeficiente de absorção, coeficiente de espalhamento, etc.) do meio é feita com base nas medições das intensidades refletidas e/ou transmitidas na superfície do meio (KLOSE et al., 2002).

Este trabalho desenvolve a formulação explícita matricial para solucionar problemas inversos de transferência radiativa, proposta por ROBERTY e SILVA NETO (2003), na estimativa dos coeficientes de espalhamento e de extinção total de um meio participante homogêneo unidimensional nos regimes estacionário e transiente.

Nesta formulação um arranjo apropriado da informação disponível das condições de contorno e dos dados experimentais permite estimar os coeficientes de espalhamento e de extinção total do meio. O domínio angular é discretizado usando conceitos do método de ordenadas discretas e a função de fase de espalhamento anisotrópico é expandida em uma série de polinômios de Legendre (ALVAREZ ACEVEDO, ROBERTY e SILVA NETO, 2004b).

1.2 JUSTIFICATIVA DO TRABALHO

As propriedades radiativas de um meio turvo, como o coeficiente de absorção, o coeficiente de espalhamento e a função de fase, podem fornecer informações importantes

sobre a composição e a dinâmica do meio. Enquanto o coeficiente de absorção pode discriminar diferentes componentes cromóforos (partículas que absorvem radiação eletromagnética de um determinado comprimento de onda, responsáveis pela coloração das substâncias presentes em um meio), o coeficiente de espalhamento e a função de fase podem ser usados para caracterizar a forma, tamanho e concentração de diversos componentes espalhadores presentes em um meio.

A determinação destas propriedades é muito usada em diversos campos das ciências, indústria, tecnologia ambiental, saúde, etc. Por exemplo, os valores dos coeficientes de absorção, espalhamento e da função de fase são indicadores da qualidade das águas oceânicas.

Dependendo das concentrações de substâncias dissolvidas, de fitoplâncton e de detritos, o coeficiente de absorção total de uma dada amostra de água pode variar desde valores quase idênticos com o da água pura até valores com ordens de magnitude muito maior. A função de fase da água pura é quase isotrópica, na medida em que se apresenta uma pequena quantidade de matéria particulada nas águas – ainda, nas mais claras – acentua-se na direção para a frente, e o coeficiente de espalhamento aumenta pelo menos num fator de 10. (CEREZO e SERÓN, 2002).

Os estudos tradicionais de radiação estiveram, no geral, restritos aos problemas em regime estacionário, onde o termo transiente da Equação de Transferência Radiativa (ETR) não era considerado.

Com o advento dos pulsos lasers curtos e de seu rápido emprego numa variedade de aplicações em engenharia como sensoriamento remoto de atmosferas, rios, lagos e oceanos; tomografia óptica; cirurgia laser; e no diagnóstico da combustão e na caracterização dos seus produtos; as tradicionais formulações da transferência radiativas no estado estacionário, não

podem ser usadas para analisar sua interação com meios participantes (MITRA, LAI e KUMAR, 1997).

A análise da transferência radiativa em meios espalhadores, particularmente para aplicações em imageamento de meios turvos, vem encontrando aplicações de forma crescente. Diversas técnicas foram desenvolvidas de modo a determinar a localização de alterações em tecidos biológicos fortemente espalhadores, usando as janelas do visível ou do infravermelho próximo. As medições de transmissão de pulsos em escalas de tempo curtas e a tomografia óptica coerente mostram resultados promissores. A transferência radiativa (ou condutiva) em escalas muito pequenas (em tempo e espaço) é também um domínio de interesse crescente, devido ao acelerado desenvolvimento das micro e nanotecnologias. Todos estes problemas requerem uma solução da Equação de Transferência Radiativa Transiente (ETRT) em um meio espalhador (ELALOUFI, CARMINATI e GREFFET, 2002).

Dos estudos realizados na área biomédica, sabe-se que existem regiões em um meio cujo coeficiente de absorção não é muito pequeno quando comparado com o coeficiente de espalhamento ou ambos são muito pequenos e em conseqüência métodos como a aproximação de difusão e a técnica padrão de retroprojeção da tomografia de Raios X, não são efetivas; pelo que, as pesquisas atuais são focadas na construção de modelos baseados na teoria de transporte para reconstrução de imagens com uma modelagem apropriada dos fenômenos de absorção, espalhamento e, às vezes, emissão, usando a ETR também conhecida como Equação Linear de Boltzmann (ROBERTY e SILVA NETO, 2003).

A formulação explícita matricial desenvolvida nesta tese de doutorado foi proposta visando ser uma alternativa na solução de problemas inversos de estimativa de propriedades radiativas em meios participantes homogêneos unidimensionais, utilizando as ETRs.

1.3 OBJETIVO DA TESE

O objetivo central dessa tese é a solução do problema inverso da estimativa dos coeficientes de absorção e de espalhamento de um meio participante usando dados transientes ou estacionários da intensidade da radiação que emerge na superfície desse meio.

De modo a cumprir este objetivo, divide-se o trabalho em dois estágios:

- Desenvolvimento da formulação explícita matricial para um problema de transferência radiativa unidimensional estacionária, considerando um meio participante homogêneo com geometria plano-paralela, absorvedor e espalhador anisotrópico.
- Estender sua aplicação para o mesmo problema de transferência radiativa, considerando o termo transiente.

No desenvolvimento da rotina computacional foram gerados dados sintéticos experimentais acrescentando ruído aos valores calculados a partir da solução do problema direto, a fim de suprir a não disponibilidade de dados reais.

A análise dos resultados permitirá determinar as condições nas quais a formulação usada fornecerá, com maior exatidão, os valores aproximados dos parâmetros procurados.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em 5 capítulos: Introdução, Revisão Bibliográfica, Formulação explícita matricial para o problema inverso de transporte, Resultados e Conclusões e Proposições para Trabalhos Futuros.

Nesta Introdução apresenta-se a Justificativa, o Objetivo e a Organização desta tese.

O segundo capítulo oferece uma revisão bibliográfica sobre os avanços nas pesquisas envolvendo problemas diretos de transferência radiativa e problemas inversos para a estimativa de propriedades radiativas, em meios participantes.

No terceiro capítulo apresenta-se a formulação explícita matricial para a solução do problema inverso de estimativa dos coeficientes de extinção total e de espalhamento e as estratégias desenvolvidas na abordagem do problema inverso unidimensional em regimes estacionário e transiente.

No quarto capítulo são apresentados os resultados obtidos nos casos testes estabelecidos para avaliar a performance do algoritmo desenvolvido com a formulação matricial para a estimativa dos coeficientes de espalhamento e de extinção total e a análise destes resultados.

O quinto capítulo contém as conclusões, assim como as proposições para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 TRANSFERÊNCIA RADIATIVA EM MEIOS PARTICIPANTES.

Quando a radiação se propaga em um meio participante podem acontecer três tipos de fenômenos: a absorção - que produz um decremento da intensidade; a emissão - que incrementa a intensidade; e o espalhamento - que muda a direção de propagação da energia. Como resultado da absorção e do espalhamento, a energia incidente é reduzida de uma quantidade igual à soma das energias espalhada e absorvida, sendo este fenômeno conhecido como atenuação ou extinção total.

O coeficiente de absorção, σ_a , de um meio é o parâmetro indicador do grau de absorção desse meio e é definido como a fração de energia perdida por unidade de comprimento, sendo a sua unidade $[\text{cm}^{-1}]$; ao passo que o coeficiente de espalhamento, σ_s , mede o grau de dispersão da energia incidente ao atravessar o meio, sendo dependente da estrutura interna deste e a sua unidade é também $[\text{cm}^{-1}]$. A soma destes dois coeficientes é definida como o coeficiente de extinção total, σ_t .

Outra propriedade importante em um meio participante é a função de fase, $p(\hat{s}, \hat{s}')$, que é determinada pelas características de espalhamento do meio. Ela descreve a quantidade de radiação espalhada desde a direção denotada pelo vetor \hat{s} na direção \hat{s}' . Geralmente é normalizada considerando-a como uma função de distribuição, i.e. a integral da função de fase em todas as direções é, por definição, igual a 1. (PRAHL, 1988)

Quando se estuda a propagação de radiação em meios participantes há que se considerar duas dificuldades: Em primeiro lugar, os fenômenos radiativos não ocorrem somente nos contornos do meio, senão em qualquer ponto do seu interior. Uma solução completa da troca de energia requer o conhecimento das propriedades físicas e a intensidade da radiação em cada ponto do meio. A segunda dificuldade resulta dos efeitos espectrais devidos à dependência dos parâmetros característicos com o comprimento de onda, tornando necessária uma análise espectral detalhada. (CEREZO e SERÓN, 2002)

Na teoria da transferência radiativa em meios participantes, onde se assume a propagação da radiação eletromagnética como transporte de fótons, os fenômenos físicos estabelecidos na interação radiação-meio são descritos pela aproximação da Equação de Transferência Radiativa (ETR) também conhecida como Equação Linear de Boltzmann.

A ETR e a propagação da radiação em um meio espalhador têm sido muito estudadas, analítica e numericamente, em astrofísica, óptica atmosférica e, mais recentemente, em aplicações médicas e computação gráfica. Porém, soluções analíticas não são, usualmente, factíveis - o que intensifica a pesquisa de soluções numéricas e a adoção de hipóteses simplificativas no seu tratamento.

Algumas destas hipóteses se baseiam nas características do meio como, por exemplo, meio homogêneo, espalhador isotrópico, geometria plano-paralela, etc. Outras envolvem

métodos aproximados como a aproximação de difusão (VENUGOPALAN, YOU e TRAMBERG, 1998; BAL, 2002; CONG, WANG e GANG, 2004; MOHAMMED e VERHEY, 2005), o método de Kubelka-Munk (ENGELDRUM e PRIDHAM, 1995; MOURAD et al., 2001, 2002), entre outros.

Métodos numéricos tais como o Método das Ordenadas Discretas (CHANDRASEKHAR, 1960; CHALHOUB, 2003), harmônicos esféricos (EVANS, 1993; BARICHELLO, GARCIA e SIEWERT, 1998), elementos finitos (SCHWEIGER et al., 1995) principalmente, têm sido usados na solução de problemas de transferência radiativa quando não há solução analítica disponível.

As técnicas de Monte Carlo (PRAHL, 1989; CHURMAKOV et al., 2003; LI et al., 2004) fornecem boas aproximações para a solução, mas apresentam como desvantagem seu elevado custo computacional.

LIANG e STRAHLER (1993, 1995) desenvolveram um modelo analítico de transferência radiativa em dosséis de vegetação, que aproxima a radiância de múltiplo espalhamento com uma formulação de dois e quatro fluxos.

KRYZHEVOI, EFIMOV e WEHRSE (2001) apresentaram uma solução analítica da equação de transferência na aproximação de dois fluxos, na qual usaram o método da teoria de espaços discretos, para um meio plano-paralelo com uma elevada densidade de heterogeneidades.

HIELSCHER, ALCOUFFE e BARBOUR (1998) analisaram os limites da aproximação de difusão da equação de transferência radiativa independente do tempo para meios biológicos homogêneos e heterogêneos. O cálculo analítico e simulações com diferenças

finitas baseadas na teoria de difusão, comparadas a cálculos de transporte com diferenças finitas e ordenadas discretas, demonstraram que a teoria da difusão falha ao descrever a propagação da luz em meios altamente absorvedores e em espaços “vazios” (regiões onde a absorção e o espalhamento são muito pequenos quando comparados com os do meio circundante).

EVANS (1998) desenvolveu um algoritmo para modelar a transferência radiativa em meios heterogêneos uni, bi e tridimensionais, conhecido como Método das Ordenadas Discretas com Harmônicos Esféricos (SHDOM sigla em inglês). O método de solução é iterativo entre a função fonte e o campo de radiância, conhecido como iteração de Picard ou Técnica de Ordens de Espalhamento Sucessivas. A representação angular em harmônicos esféricos permite reduzir o consumo de memória e o tempo de computação dos cálculos necessários para a solução.

KIM e ISHIMARU (1998a, 1999), e KIM e MOSCOSO (2003), solucionaram a ETR usando os Métodos Espectrais de Chebyshev e Fourier.

KLOSE e HIELSCHER (2003) empregaram a técnica de diferenças finitas com ordenadas discretas na solução da ETR, no estudo da propagação da luz em meios altamente espalhadores em função das dimensões do meio, tipo de espalhamento e tipo de fonte de luz.

FIRBANK et al. (1996) e ARRIDGE et al. (2000) desenvolveram o modelo híbrido radiossidade-difusão para estudar a propagação da luz em meios com regiões não espalhadoras implementando-a inicialmente como uma função de Green e melhoraram a performance da implementação ao usar o método de Elementos Finitos e estenderam-na para os domínios de tempo e frequência.

WANG (1998) desenvolveu um método híbrido que combina o método de Monte Carlo e a teoria de difusão, aliando as vantagens da facilidade na simulação do método de Monte Carlo com a velocidade de cálculo da teoria de difusão para meios turvos semi-infinitos; além do que mostrou eficiência e melhor precisão para cálculos de reflectância difusa em regiões próximas da fonte de luz.

BAL e MADAY (2002) desenvolveram um modelo acoplado da equação de transporte linear de Boltzmann com a equação de difusão, para a propagação da luz em meios com regiões difusivas e não difusivas. Consideraram a equação de transporte para o espaço fase (posição e velocidade) e a equação de difusão para espaço físico. No exemplo numérico apresentado para um meio bidimensional, usaram o método de discretização em diamante (*Diamond Discretization* -DD) para a equação de transporte e o método dos elementos finitos Q_1 para a equação de difusão.

MARKEL (2004) propôs um método de solução da ETR tridimensional para uma função de fase arbitrária. As funções dependentes da posição são expressas como integrais de Fourier e a dependência angular é tratada usando expansão em harmônicos esféricos. As diversas matrizes tridiagonais resultantes, as quais dependem da forma da função de fase, são truncadas e diagonalizadas numericamente. A partir dos autovetores e autovalores destas matrizes a solução é obtida analiticamente.

Na maioria dos estudos de transferência radiativa, as variações temporais das quantidades observáveis são comparativamente lentas com relação ao tempo de propagação do fóton. Para estas aplicações o termo transiente da ETRT pode ser desprezado, i.e., a radiação é assumida como um processo instantâneo (estado estacionário). Existem situações, no entanto, nas quais as variações temporais são requeridas em escalas de tempo tão

pequenas como 10^{-12} s até 10^{-15} s. Nestas situações é imprescindível a inclusão do termo transiente da equação de transferência radiativa.

Muitas tecnologias emergentes, como pulsos curtos de laser em meios turvos e pulsos laser em processamento de materiais e tecidos vivos, requerem a solução da ETRT. (CHAI, HSU e LAM, 2004).

Outros exemplos, nos quais a natureza transiente da radiação deve ser considerada são: (i) testes para caracterizações de um meio particulado a partir da análise das intensidades transmitidas ou retroespalhadas; (ii) na detecção de partículas e sua medida; (iii) em sensoriamento remoto de meios turvos em massas de águas e atmosfera (RATH et al., 2003).

Os problemas de transferência radiativa em regime transiente, incluindo absorção e espalhamento, são ainda muito mais complicados e sua solução analítica, no geral, é impossível, exceto para casos muito simples; e, mesmo assim, o custo computacional é muito superior quando comparado com os problemas estacionários.

Métodos de Monte Carlo (GUO et al., 2002), ordenadas discretas (SAKAMI, MITRA e HSU, 2002; GUO e YUNGHAN, 2003), volumes finitos (LU e HSU, 2003a; CHAI, HSU e LAM, 2004) e métodos da equação integral (LU e HSU, 2003a, 2003b, 2003c) têm sido muito usados para resolver a ETRT.

ARRIDGE et al. (1993) usou o método de elementos finitos e a aproximação de difusão no tempo para obter a densidade de fótons no interior de um objeto e o fluxo de fótons nos seus contornos.

TANIFUJI et al. (2003) propuseram uma formulação baseada em uma análise por diferenças finitas no domínio do tempo das equações de difusão para prever a reflectância

no domínio do tempo de um pulso óptico em um meio espalhador com regiões não espalhadoras.

WILSON e WANG (2001), ZHOU e BAI (2002), e PREMÖZE ASHIKHMIN e SHIRLEY (2003) fizeram uso da teoria de integração ao longo da trajetória (*path integration*) na modelagem do percurso dos fótons em meios espalhadores e turvos, para aplicações em tomografia óptica e imageamento.

SIMON e TRASCHLER (2003), e CARMINATI, ELALOUI e GREFFET (2004) estudaram as flutuações temporais do espalhamento da luz; desenvolvendo os primeiros um modelo tipo busca aleatória (*random walk*) baseado na teoria de Kubelka-Munk e os segundos, um outro usando a teoria da espectroscopia da onda-difusa.

KIM e ISHIMARU (1998) estudaram a propagação de pulsos em meios aleatórios, solucionando a equação de transferência radiativa em duas frequências e transformando a solução dentro do domínio do tempo usando a Transformada de Fourier.

OLIVEIRA e CARDONA (2000, 2002) apresentaram uma abordagem da solução da Equação de Transporte Linear (equivalente a ETR) dependente do tempo em domínios unidimensionais, combinando o método espectral e o método LTSn (transformada de Laplace - ordenadas discretas). Para aplicar o método espectral, expandiram o fluxo angular discreto em polinômios de Laguerre. O problema transiente é transformado em um conjunto de problemas unidimensionais estacionários tomando momentos e usando propriedades da ortogonalidade. O problema estacionário assim obtido é solucionado pela aplicação da transformada de Laplace na variável espacial com inversão analítica.

KIM e MOSCOSO (2002) estudaram a performance dos métodos espectrais de Chebyshev para equações de transferência radiativa dependente do tempo. Usaram a quadratura de Gauss para a variável angular, diferenças finitas de segunda ordem para a variável no tempo e o método de Chebyshev para a variável espacial, com ótimos resultados.

ELALOUFI, CARMINATI e GREFFET (2002) desenvolveram um esquema numérico para a ETRT em um meio absorvedor e espalhador. Com a transformada de Fourier no tempo a ETRT adota uma forma equivalente à ETR estacionária onde o coeficiente de extinção contém valores complexos. A solução da equação para a geometria de planos paralelos usando o esquema padrão de ordenadas discretas e a inversão da transformada de Fourier fornece as intensidades transmitidas e refletidas dependentes do tempo. O método permite tratar pulsos de luz com duração de fentosegundos e estudar sua distribuição temporal sobre várias ordens de magnitude.

SAWETPRAWICHKUL (2002), e SAWETPRAWICHKUL, HSU e MITRA (2002) utilizaram a técnica de Monte Carlo para analisar o problema transiente em meios participantes. Consideraram, inicialmente, uma placa semiinfinita conformada por múltiplas camadas, com propriedades radiativas não homogêneas e fontes laser de pulso curto; e, posteriormente, desenvolveram o modelo para meios tridimensionais. No modelo unidimensional/tridimensional cada camada/elemento de volume possui propriedades radiativas uniformes. Variando as propriedades radiativas de cada camada/elemento de volume foram simuladas as heterogeneidades do meio.

HAYASHI, KASHIO e OKADA (2003) desenvolveram um método híbrido Monte Carlo-aproximação de difusão, para modelar um meio com regiões de alto e baixo espalhamento, usando Monte Carlo para o transporte de luz em regiões de baixo

espalhamento e aproximação de difusão com método de elementos finitos nas regiões de alto espalhamento, e calcularam as intensidades e o tempo de propagação dos fótons.

LU e HSU (2003b, 2003c) implementaram o modelo da Equação Integral de Transferência Radiativa Transiente em computação paralela assumindo propagação de lasers de pulsos ultracurtos em meios participantes, homogêneos e não-homogêneos, altamente espalhadores. Reportaram resultados obtidos com os métodos de volumes finitos e da equação integral, demonstrando a maior precisão deste último.

RATH et al. (2003) estenderam o método de transferência discreta para solucionar problemas de transferência radiativa transiente em um meio participante. Eles validaram a formulação solucionando problemas de transferência radiativa transiente unidimensional em um meio plano espalhador e absorvedor, sujeito à irradiação de laser de pulsos curtos em um de seus contornos. Estudaram os efeitos da espessura óptica, do albedo de espalhamento e do fator de anisotropia sobre a reflectância e transmitância, demonstrando, então, com os resultados a boa performance do método para este tipo de problemas.

2.2 O PROBLEMA INVERSO DE ESTIMATIVA DAS PROPRIEDADES RADIATIVAS DE UM MEIO PARTICIPANTE

Usando diversos métodos matemáticos e rotinas computacionais, e com base na teoria de problemas inversos, podem ser estimadas as propriedades desconhecidas de um meio participante a partir da distribuição dos fótons emergentes.

Os problemas inversos de identificação de parâmetros são, na maioria dos casos, mal-postos. Uma indicação disto é dada pelo fato que grandes discrepâncias nos parâmetros radiativos causam apenas pequenas variações nos fluxos emergentes, sejam estes simulados ou medidos. (ORLT, WALZEL e MODEL, 1995).

Muitos pesquisadores têm trabalhado neste tipo de problema inverso geralmente considerando a transferência radiativa em estado estacionário (PRAHL, VAN GEMERT e WELCH, 1993; PAULSEN e JIANG, 1995; SILVA NETO e ÖZISIK, 1995; ÖZISIK e BOKAR, 1995; CHOULLI e STEFANOV, 1996; ARRIDGE e SCHWEIGER, 1998; LIN et al., 1998; CARITA MONTERO, ROBERTY e SILVA NETO, 1999, 2000, 2004; SARDAR et al., 2001, 2002; SARDAR, SAYKA e YOW, 2004; KLOSE e HIELSCHER, 2002; SIEWERT, 2002; BERROCAL TITO, ROBERTY e SILVA NETO, 2002a, b; PARK e LEE, 2003; HAKIM e MCCORMICK, 2003; ROBERTY, 2005).

Os algoritmos para a solução do problema inverso são, em geral, baseados em modelos físicos para a propagação da radiação, descrevendo a relação entre os valores medidos e as propriedades ópticas do meio em estudo (MODEL e HÜNLICH, 1995).

O desenvolvimento destes algoritmos envolve a simulação das medições nos contornos do meio, para um dado sistema experimental, sendo conhecidos os parâmetros ópticos (Problema Direto), e o uso deste conjunto de medições nas estimativas dos parâmetros desconhecidos deste meio (Problema Inverso).

Os problemas inversos podem ser formulados explícita ou implicitamente. Nos problemas inversos formulados explicitamente, as propriedades procuradas são obtidas diretamente das funções formuladas para a solução do problema. As formulações implícitas envolvem usualmente soluções numéricas iterativas nas quais uma função-objetivo (e.g. a

norma euclidiana dos resíduos entre as quantidades calculadas e as medidas) é minimizada para obter as estimativas dos parâmetros desconhecidos. (SILVA NETO, 2002; SILVA NETO et al., 2006).

TAO, MACCORMICK e SANCHEZ (1994) desenvolveram dois algoritmos, um explícito e outro implícito, baseados na aproximação a dois fluxos da ETR para solucionar os problemas inversos de estimativa dos coeficientes de absorção e espalhamento com dependência da variável espacial, e de determinação de fontes fluorescentes ou bioluminescentes, no estudo de oceanos.

SUNDMAN, SANCHEZ e MACCORMICK (1998), LEATHERS, ROESLER e MCCORMICK (1999), SILVA NETO e MCCORMICK (2002), e GORDON (2002) têm pesquisado o desenvolvimento de algoritmos explícitos para a solução de problemas inversos de transferência radiativa, visando a estimativa de propriedades radiativas e fontes internas, sendo que nos últimos anos têm focado principalmente nas aplicações biomédicas e oceanográficas.

ROBERTY, TAHIR e DAINTY (1966) propuseram a metodologia fonte-detector para obter uma formulação inversa da equação de transporte de Boltzmann, e SILVA NETO e ROBERTY (1988), KAUATI, SILVA NETO e ROBERTY (2001, 2002), aplicaram-na para problemas inversos de transporte unidimensional em meios participantes com espalhamento isotrópico e anisotrópico. O problema formulado explicitamente como um sistema de equações não lineares, produto da convolução do problema fonte com a solução do problema adjunto, é solucionado como um problema de otimização.

DEGHANI, DELPY e ARRIDGE (1999) calcularam a intensidade dos fótons nos contornos usando a equação de transporte e compararam com os dados calculados usando a

aproximação de difusão para regiões espalhadoras e não espalhadoras em um meio. Apresentaram imagens reconstruídas onde o problema direto foi solucionado usando a equação de transporte para um sistema bi-dimensional contendo um anel não espalhador, e o problema inverso é solucionado usando a aproximação de difusão para a equação de transporte.

ROBERTY e SILVA NETO (2003) propuseram uma formulação explícita matricial para a solução do problema inverso de estimativa das propriedades ópticas de um meio participante.

Como usualmente são empregadas técnicas numéricas iterativas na solução do problema inverso, i.e., o problema direto é solucionado diversas vezes até que se consiga uma solução aproximada do problema inverso, enfatiza-se a necessidade de se dispor de algoritmos rápidos e confiáveis para a solução do problema direto relacionado.

HESPEL, MAINGUY e GREFFET (2003) implementaram um método de identificação de parâmetros para a estimativa simultânea do albedo e a função de fase em um meio plano-paralelo espalhador. Usaram o método *Adding-Doubling* para solucionar a ETR. No problema inverso usaram a técnica quase-Newton, no qual a função de ajuste está relacionada a uma função custo de mínimos quadrados, envolvendo os valores calculados e os medidos das funções de distribuição bidirecional da transmitância (BTDF) e da refletância (BRDF).

KANMANI e VASU (2004) demonstraram a eficácia do método *Frozen-Newton* na solução de problemas não lineares de tomografia óptica usando a aproximação de difusão da ETR. Neste método considera-se o termo de segunda ordem da expansão em séries de Taylor (Hessiana) em adição à de primeira ordem (Jacobiana). Sendo a Hessiana diagonalmente dominante, a equação de perturbação não linear é formulada usando uma aproximação

envolvendo só os termos da diagonal. A solução é obtida iterativamente usando o método do gradiente conjugado sem recalculando a Jacobiana ou a Hessiana, as quais são avaliadas só uma vez ao início do procedimento. Compararam os resultados com aqueles obtidos com outros métodos: (i) *Model based iterative inverse reconstruction* (MOBIIR), na qual a Jacobiana é calculada em cada iteração e, (ii) MOBIIR modificada, na qual adiciona-se o cálculo da Hessiana em cada iteração. O método proposto supera a estes dois últimos, apresentando melhores resultados na reconstrução e menor tempo de computação.

Uma sucinta revisão dos modelos desenvolvidos para propagação de fótons baseados na teoria de transferência radiativa e derivados; e dos algoritmos para a solução do problema inverso transiente de estimativa dos coeficientes de absorção e espalhamento com aplicações em tomografia e imageamento; acha-se em ARRIDGE e HEBDEN (1997) e HANSON (2000).

Os resultados da estimativa dos parâmetros dependem dos dados experimentais fornecidos, sejam estes medidos ou simulados, e da escolha do método de reconstrução e dos parâmetros que controlam o algoritmo.

MITRA e KUMAR (1999) examinaram o transporte de pulsos curtos de luz em um meio espalhador e absorvedor com diferentes modelos matemáticos. Concluíram que as características esperadas dos sinais ópticos são influenciadas significativamente pelo modelo considerado. A velocidade efetiva de propagação da radiação espalhada, as magnitudes dos fluxos transmitidos e retroespalhados, e a extensão e forma temporal dos sinais ópticos são funções dos modelos usados para representar as distribuições das intensidades.

Uma solução do problema de transferência radiativa unidimensional transiente para o caso de um laser incidindo sobre uma superfície e propagando-se a uma velocidade c em um

meio absorvedor e espalhador, reportado na literatura, mostra que os resultados obtidos considerando as equações hiperbólicas completas de transferência radiativa transiente são significativamente diferentes daqueles obtidos com as equações de transferência radiativa nas que se despreza o termo transiente ou nas que se considera o transporte com a formulação transiente da difusão. Diferença que se acentua durante os transientes iniciais, o que torna importante a análise dos dados em tempos curtos.(MITRA, LAI e KUMAR, 1997).

WU et al. (1997) usaram a transformada de Laplace na aproximação à difusão da migração de fótons em um meio turvo e, as medições dos fótons prontos emergentes nos contornos do meio originados por pulsos laser, na ordem de ps, para detectar objetos fluorescentes nele contidos e obter explicitamente os seus parâmetros ópticos.

ARRIDGE e SCHWEIGER (1998) reconstruíram, simultaneamente, os coeficientes de absorção e espalhamento para problemas no domínio do tempo e da frequência, usando o método de gradiente conjugado com um esquema baseado no método de elementos finitos.

DORN (1998, 2000) desenvolveu o algoritmo de transporte - retrotransporte (*transport-backtransport* - TBT) para reconstruir simultaneamente os coeficientes de absorção e de espalhamento, baseado nas medidas dos fluxos emergentes no contorno para diferentes fontes radiativas. Em cada passo o algoritmo soluciona um problema direto e um problema adjunto. A partir de um dado valor inicial calcula as diferenças entre os valores medidos e os calculados solucionando o problema direto, e as reintroduz no meio solucionando o problema adjunto correspondente. A correção ao valor anterior é calculada a partir dos valores dos fluxos do problema direto e do problema adjunto no interior do meio. O algoritmo faz uma varredura para todas as fontes em cada iteração. Os resultados numéricos demonstraram que o algoritmo é capaz de reconstruir e distinguir entre objetos absorvedores e espalhadores quando se tem longos caminhos livre médios (≈ 1.0 - 10.0 cm, como no caso de aplicações de

tomografia de R-X com espalhamento). Para pequenos valores do caminho livre médio (aplicações de tomografia óptica) os objetos absorvedores e espalhadores são localizados durante as primeiras varreduras.

HIELSCHER et al. (1998) e KLOSE et al. (1998) apresentaram um método para tomografia de migração de fótons resolvida no tempo baseado no algoritmo MOBIIR, o qual não requer o conhecimento *a priori* das propriedades ópticas do meio de referência ou da extensão das heterogeneidades achadas. O algoritmo consiste de três componentes: (i) o problema direto, onde as medições são simuladas usando a formulação de diferenças finitas para a equação de difusão no domínio do tempo e adicionando ruído gaussiano; (ii) o esquema analítico que define a função-objetivo a minimizar e, (iii) o esquema de atualização das estimativas das propriedades do meio, baseado no gradiente da função-objetivo. O método levou a resultados estimuladores quando testado com mapas das propriedades ópticas geradas por imageamento com ressonância magnética (*Magnetic Resonance Imaging-MRI*).

ARRIDGE (1999) fez uma revisão dos métodos para problemas inversos dependentes do tempo em tomografia óptica com absorção e espalhamento; e em ARRIDGE (2001) analisou o problema de reconstrução de imagens em Tomografia óptica desde os pontos de vista da técnica da Tomografia por difração e do Problema de otimização, usando a aproximação de difusão da ETR no domínio da frequência.

ALVAREZ ACEVEDO (2002) e ALVAREZ ACEVEDO, ROBERTY e SILVA NETO (2003, 2004a) estenderam a metodologia fonte-detector para a solução do problema inverso de estimativa de propriedades ópticas de um meio participante, usando a ETR com condições de contorno dependentes do tempo. A transformada de Laplace da ETRT e um esquema de diferenças finitas com ordenadas discretas foram usados na solução do problema direto. No problema inverso, a solução é achada em forma iterativa. Resolveram o mesmo problema

utilizando o algoritmo Levenberg-Marquardt, e reportaram um método direto para a determinação do coeficiente de absorção baseado em um balanço de energia dos fótons que entram e saem do meio.

HYVÖNEN (2004) analisou o problema direto correspondente a tomografia óptica, usando o modelo radiossidade-difusão dependente do tempo, para objetos contendo regiões transparentes; e aplica o método de fatorização para localizar inclusões difusivas puras.

DIERKES et al. (2005) reportaram a reconstrução das propriedades ópticas de tecido mamário “*in vivo*” usando a inversão analítica da transformada de Fourier no tempo e no espaço com um modelo da aproximação de difusão em um meio turvo não homogêneo.

ZAREMBO (2005) apresenta a versão inversa do método de Monte Carlo, no tempo, para determinar os parâmetros ópticos de tecidos biológicos, considerando como fonte externa de radiação um laser no regime de fentosegundos. A solução do problema é obtida com um esquema de busca passo a passo. Comparando com resultados obtidos usando a inversa da aproximação de difusão e o modelo híbrido, Monte Carlo – aproximação de difusão, o autor estabelece as condições nas quais estes três métodos melhor se aproximam da solução exata: o Monte Carlo em meios finos (poucos milímetros), a aproximação de difusão para meios com poucos centímetros de altura e o modelo híbrido para objetos de geometria complexa.

TRIVEDI, BASU e MITRA (2005) realizaram um estudo experimental para investigar o espalhamento da luz em tecidos contendo heterogeneidades e demonstraram que as medições dos sinais ópticos temporais transmitidos e refletidos quando uma fonte laser de pulso curto incide em um meio podem ser usadas para obter informação relacionada com heterogeneidades contidas no interior dos tecidos. Eles validaram as medições dos sinais ópticos, usando *phantoms* de tecidos como meios de propagação da radiação, originados por

pulsos curtos de laser de distribuição gaussiana, com uma solução numérica da equação de transporte radiativo transiente obtida com o método das ordenadas discretas.

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO EXPLÍCITA MATRICIAL PARA O PROBLEMA INVERSO DE TRANSPORTE

A formulação explícita matricial para o problema inverso de transporte (ROBERTY e SILVA NETO, 2003) foi originalmente proposta para o problema inverso estacionário em n – dimensões espaciais, considerando somente detectores externos. O método visa estimar, simultaneamente, os coeficientes de espalhamento $\sigma_s(x)$ e de extinção $\sigma_t(x)$ de um meio, a partir das medições dos fluxos emergentes nos contornos.

A análise do problema inverso baseia-se na relação entre dois operadores: i) o operador Albedo, definido como o mapeamento dos fluxos incidentes aos fluxos emergentes em cada um dos contornos, e ii) um operador definido para os coeficientes de extinção e espalhamento.

As formulações matemáticas dos problemas direto e inverso desta proposta constam da seção 3.1.

Com base nas definições expostas na seção 3.1, desenvolve-se a formulação explícita matricial para o problema inverso de transporte unidimensional estacionário, na seção 3.2, a qual é obtida discretizando o domínio angular usando conceitos do método de ordenadas discretas e a expansão da função de fase do espalhamento anisotrópico em um série de

polinômios de Legendre. As formulações para o problema direto e inverso em um meio unidimensional são apresentadas nas subseções 3.2.1-3.2.2.

Na estratégia seguida para a solução do problema inverso unidimensional considera-se prescrito o operador Albedo. Duas matrizes são construídas, uma para cada superfície de contorno do meio, usando um ordenamento apropriado das condições de contorno impostas para o problema de transferência radiativa e os dados experimentais da radiação que emerge do meio em estudo. (ALVAREZ ACEVEDO, ROBERTY e SILVA NETO, 2005). Sendo estabelecida uma relação entre as duas matrizes e a matriz dos coeficientes procurados obtém-se as estimativas para os coeficientes de extinção e de espalhamento por cálculo direto.

Na subseção 3.2.3, deduz-se uma fórmula explícita para a estimativa do operador Albedo a partir da análise realizada na formulação explícita do problema de transmissão. (ALVAREZ ACEVEDO, ROBERTY e SILVA NETO, 2004).

Na seção 3.3, a formulação explícita matricial, desenvolvida para o problema estacionário na seção previa, é aqui estendida para o problema transiente.

A transformada de Laplace é aplicada na Equação de Transferência Radiativa Transiente (ETRT) obtendo-se uma equação transformada equivalente à estacionária. Os fluxos, incidentes e emergentes, transformados são usados na solução do problema inverso com a formulação explícita matricial.

O uso da transformada de Laplace obedece ao fato de que os coeficientes a serem estimados não dependem do tempo. Trabalhar no espaço transformado não altera, então, o resultado das estimativas, obtendo-se um formalismo análogo ao estacionário. (ALVAREZ ACEVEDO, ROBERTY E SILVA NETO, 1999).

Na subseção 3.3.1 apresenta-se a ETRT unidimensional e sua transformação em uma equivalente à ETR estacionária. Como resultado da aplicação da transformada de Laplace na ETRT, e nas condições de contorno, obtém-se o problema direto formulado no espaço transformado de Laplace.

Na subseção 3.3.2 o problema direto no espaço transformado é formulado no modo matricial e discretizado no domínio angular como descrito no tratamento do problema estacionário.

Em 3.3.3 descreve-se brevemente a formulação explícita matricial do problema transiente, no espaço transformado, destacando as pequenas diferenças com o desenvolvimento feito para o problema estacionário.

Na seção 3.4, apresenta-se o algoritmo desenvolvido para a estimativa dos coeficientes de espalhamento e de extinção total de um meio participante unidimensional com a formulação explícita matricial.

3.1 FORMULAÇÃO EXPLÍCITA MATRICIAL PARA O PROBLEMA INVERSO DE TRANSPORTE

3.1.1 Formulação matemática do problema direto

Considerando o transporte sem dependências espectral e temporal, a equação linearizada de Boltzmann é escrita como:

$$\omega \cdot \nabla \phi(\omega, x) = -\sigma_t(x)\phi(\omega, x) + \int_{S^{n-1}} \sigma_s(\omega \cdot \omega', x)\phi(\omega', x)d\omega'; \quad (\omega, x) \in S^{n-1} \times \Omega \quad (1)$$

onde,

$\phi \in L^2(S^{n-1} \times \Omega)$ é a intensidade da radiação com velocidade constante e cujo domínio é $S^{n-1} \times \Omega$;

$(x, \omega) \in \Omega \times S^{n-1}$, onde $S^{n-1} \cong [0, 2\pi)$ para $n=2$;

$\sigma_t \in L^\infty(\Omega)$ é o coeficiente de extinção total;

$\sigma_s(x, \omega \cdot \omega')$ é o coeficiente de espalhamento;

$\omega \cdot \omega' = \cos \theta_0$, onde θ_0 é o ângulo entre as direções da radiação incidente, ω' , e a radiação espalhada, ω ;

$\sigma_s(\cdot, s) \in L^\infty(\Omega)$ para $s \in [-1, 1]$ e $\sigma_s(x, \cdot) \in L^1([-1, 1])$ para $x \in \Omega$.

Definem-se:

$\Gamma = \partial\Omega$, a fronteira contínua da região convexa $\Omega \subset \mathbf{R}^n$;

$\Sigma^\pm = \{(\omega, \sigma) \in S^{n-1} \times \Gamma; \pm \nu(\sigma) \cdot \omega > 0\}$, a superfície do espaço de fase da radiação incidente e emergente na superfície física $\partial\Omega$;

$\tau^\pm(\omega, x) = \sup\{t \in \mathbf{R} \mid x \pm t\omega \in \Omega\}$, a distância a partir da posição x até a fronteira seguindo as direções $\pm\omega$;

$\tau(\omega, x) = \tau^+(\omega, x) + \tau^-(\omega, x)$, a espessura efetiva do corpo Ω na direção ω com suporte em x ; e

$L_2\left(\Sigma^\pm; \tau|\nu(\sigma) \cdot \omega| d\sigma dx\right)$, o espaço para os traços dos operadores no problema de valor de contorno com a Eq. (1).

Considerando-se o problema direto onde a radiação incidente é prescrita em $L_2\left(\Sigma^-; \tau|\nu(\sigma) \cdot \omega| d\sigma dx\right)$, e o problema adjunto

$$-\omega \cdot \nabla \phi^*(\omega, x) + \sigma_t(x) \phi^*(\omega, x) = \int_{S^{n-1}} \sigma_s(x, \omega \cdot \omega') \phi^*(x, \omega') d\omega'$$

$$(\omega, x) \in S^{n-1} \times \Omega \quad (2)$$

onde a radiação emergente é prescrita em $L_2\left(\Sigma^+; \tau|\nu(\sigma) \cdot \omega| d\sigma dx\right)$, têm-se as condições de contorno respectivas,

$$\phi(\omega, \sigma) = \phi_{in}(\omega, \sigma) \text{ para } (\omega, \sigma) \in \Sigma^- \quad (3)$$

$$\phi^*(\omega, \sigma) = \phi_{out}(\omega, \sigma) \text{ para } (\omega, \sigma) \in \Sigma^+ \quad (4)$$

existindo para cada problema adjunto um problema direto tal que $\phi(-\omega, \sigma) = \phi^*(\omega, \sigma)$ para $(\omega, \sigma) \in \Sigma^+$, se $(\omega, x) \in \Sigma^+$ então $(-\omega, x) \in \Sigma^-$.

Definem-se os seguintes operadores:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad T_0 : W_2(S^{n-1} \times \Omega) &\rightarrow L^2(S^{n-1} \times \Omega) \\ \phi(\omega, x) &\mapsto [T_0\phi](\omega, x) = \omega \cdot \nabla \phi(\omega, x) \end{aligned} \quad (5)$$

entendendo-se as derivadas como distribuição do fluxo.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad A_1 : L^2(S^{n-1} \times \Omega) &\rightarrow L^2(S^{n-1} \times \Omega) \\ \phi(\omega, x) &\mapsto [A_1\phi](\omega, x) = \sigma_t(x)\phi(\omega, x) \end{aligned} \quad (6)$$

e

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad A_2 : L^2(S^{n-1} \times \Omega) &\rightarrow L^2(S^{n-1} \times \Omega) \\ \phi(\omega, x) &\mapsto [A_2\phi](\omega, x) = - \int_{S^{n-1}} \sigma_s(x, \omega' \cdot \omega) \phi(\omega', x) d\omega' \end{aligned} \quad (7)$$

onde T_0 é multiplicativo em L^2 e seu domínio máximo é W_2 ; A_1 é um operador limitado com uma inversa contínua para $\sigma_t(x) > 0$ com $x \in \Omega$; e A_2 é um operador compacto.

Então, a Eq. (1) pode ser escrita como

$$[T_0\phi](\omega, x) + [A_1\phi](\omega, x) + [A_2\phi](\omega, x) = 0 \quad (8)$$

3.1.2 Formulação matemática do problema inverso

O problema inverso para fontes e detectores externos na Eq. (1) pode ser estabelecido do seguinte modo:

Supondo conhecidas tanto as condições de contorno incidentes, $\left\{ \phi_{in}(\omega, \sigma); (\omega, \sigma) \in \Sigma^- \right\}$, desde que se tenha o controle das fontes externas posicionadas ao redor da região Ω ; assim como as condições de contorno emergentes, $\left\{ \phi_{out}(\omega, \sigma); (\omega, \sigma) \in \Sigma^+ \right\}$, a partir das medições efetuadas com detectores externos; o operador Albedo supõe-se também conhecido, tanto no caso de transiluminação da região Ω quanto no caso oposto - meio com espessura óptica muito alta - onde a radiação é totalmente absorvida e espalhada numa posição muito próxima ao ponto de incidência da fonte.

O operador Albedo, Λ , é definido como o mapeamento dos fluxos incidentes para os fluxos emergentes:

$$\Lambda: L^2\left(\Sigma^-; \tau|\nu(\sigma) \cdot \omega| d\sigma d\omega\right) \rightarrow L^2\left(\Sigma^+; \tau|\nu(\sigma) \cdot \omega| d\sigma d\omega\right)$$

$$\phi_{in}(\omega, x) \mapsto [\phi|_{\Sigma^+}](\omega, x) = [\phi|_{out}](\omega, x) \quad (9)$$

Restringindo a formulação para problemas relacionados com as diversas posições e as diferentes ordens de magnitude dos fluxos emergentes, a hipótese central deste desenvolvimento baseia-se na relação entre o operador albedo, Λ , que se assume caracterizado pelo seu grafo,

$$(\phi_{in}, \phi_{out}) \in L^2\left(\Sigma^-; \tau |v(\sigma) \cdot \omega| d\sigma d\omega\right) \times L^2\left(\Sigma^+; \tau |v(\sigma) \cdot \omega| d\sigma d\omega\right) \quad (10)$$

e o operador $(A_1 + A_2) \in \mathcal{L}\left(L^2\left(S^{n-1} \times \Omega\right)\right)$.

A partir do conhecimento de ϕ_{in} e ϕ_{out} busca-se então determinar σ_t e σ_s .

3.1.3 Formulação discreta do problema direto

A Eq. (1) na sua forma discretizada fornece um sistema de equações diferenciais as quais podem ser representadas por uma equação matricial. Com base nesta discretização, usando o método de ordenadas discretas de Chandrasekhar, se desenvolve a formulação explícita matricial para o problema inverso de transporte.

Transforma-se a função angular $\phi \in L^2\left(S^{n-1} \times \Omega\right)$ no campo vetorial $\phi_N \in L^2\left(\Omega\right)^N$, com componentes $\phi_{(N)_i}(x) = \phi(\omega_i, x)$ para $i = 1, \dots, N$, onde N é a ordem da discretização usada.

Os operadores na forma discreta são escritos como:

$$a) \quad T_0^N : L^2\left(\Omega\right)^N \rightarrow L^2\left(\Omega\right)^N$$

$$\phi_N(x) \mapsto \left[T_0^N \phi_N\right](x) = \nabla \cdot \left(\Phi_N^T \mathcal{W}\right) \quad (11)$$

onde,

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} \vec{\omega}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vec{\omega}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vec{\omega}_N \end{bmatrix} \quad (12)$$

é a matriz dos vetores das direções discretas $\vec{\omega}_i$, $i = 1, 2, \dots, N$. A representação cartesiana destes vetores é $\vec{\omega}_i = \omega_{1i}\vec{e}_1 + \dots + \omega_{Ni}\vec{e}_N$; e obviamente $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 e_1 + \dots + \mathcal{W}_N e_N$. O domínio deste novo operador é o espaço $\Pi_{i=1}^N \mathbf{H}_{i,N}^1(\Omega)$, onde $\mathbf{H}_{i,N}^1(\Omega) = \{\phi_i \in L^2(\Omega) \mid \omega_i \cdot \nabla \phi \in L^2(\Omega)\}$.

$$\text{b) } A_1^N : L^2(\Omega)^N \rightarrow L^2(\Omega)^N$$

$$\phi_N \mapsto [A_1^N \phi_N] = [\sigma_t^N \phi_N] \quad (13)$$

onde, $\sigma_t^N = \sigma_t I^N$ é uma matriz diagonal e I_N é a matriz identidade em $\mathbf{R}^{N \times N}$.

$$\text{c) } A_2^N : L^2(\Omega)^N \rightarrow L^2(\Omega)^N$$

$$\phi_N \mapsto [A_2^N \phi_N] \quad (14)$$

onde, $(\sigma_s^N)_{ij} = w(\omega_i \cdot \omega_j) \sigma_s(x, \omega_i \cdot \omega_j)$, é o elemento ij da matriz de espalhamento A_2 , e w é o peso da quadratura gaussiana. Os parâmetros em A_1^N e A_2^N , estão em $L^\infty(\Omega)$, e a matriz A_2^N é sempre simétrica.

Introduzindo as Eqs.(11), (13) e (14) na Eq. (1), e omitindo o índice N para simplificar a notação, se tem

$$\nabla \cdot (\phi^T \vec{\mathcal{W}}) = -[\phi^T A](x); \quad x \in \Omega \text{ e } A = A_1 - A_2 \quad (15)$$

A Eq.(15) é a representação discreta do problema direto. A matriz A contém os coeficientes de extinção total e de espalhamento explicitamente definidos.

As definições para as superfícies de contorno no problema discreto são:

$$\Gamma_i^\pm(x) = \{\sigma \in \Gamma; x \pm t\omega_i = \sigma\},$$

$$\tau_i^\pm(x) = \sup\{t \in \mathbf{R} | x \pm t\omega_i \in \partial\Omega\} \text{ e}$$

$$\tau(\omega, x) = \tau^+(\omega, x) + \tau^-(\omega, x),$$

as quais preservam seu significado físico.

$L^2(\Gamma_i^\pm; \tau_i |\nu(\sigma) \cdot \omega| d\omega)$ é o espaço para a componente i do fluxo no contorno; e

os índices (\pm) , estão relacionadas com o ângulo entre a normal $\nu(\sigma)$ e a direção ω_i , e definem se o fluxo é incidente ou emergente.

A superfície normal $\nu(\sigma)$ em cada posição $\sigma \in \Gamma$ divide S^{n-1} em duas regiões dependentes de σ , de modo que ϕ encontra-se dividido em duas partes, ϕ^- e ϕ^+ , cada uma delas contendo os dados das fontes (fluxos prescritos) e os dados fornecidos pelos detectores (fluxos emergentes medidos ou calculados).

3.1.4 Formulação discreta do problema inverso

No problema inverso, o operador Albedo considera-se conhecido, cabendo determinar os coeficientes de extinção e de espalhamento.

O cálculo do operador Albedo, a partir de experimentos distintos onde, para um determinado fluxo incidente e usando detectores externos, são medidos os diversos fluxos emergentes nos contornos, é correspondente a uma generalização do problema de tomografia por transmissão.

Seja $\{\phi_i(x); i = 1, \dots, N\}$ um conjunto de experimentos. Considera-se na Eq. (15) um conjunto de N problemas fundamentais de valores de contorno gerados por um conjunto linearmente independente de condições de contorno,

$$\phi_i(\sigma) = [\phi_i^-, \phi_i^+](\sigma) = [\phi_{in}, \phi_{out}](\sigma); \quad i = 1, 2, \dots, N; \sigma \in \Gamma \quad (16)$$

onde os componentes com índice (+) são determinados usando o operador Albedo.

Desde que o problema discreto da Eq. (15) tem uma única solução para a radiação incidente descrita, os conjuntos dos N vetores $\phi_i(x)$ são linearmente independentes; podendo, então, ser usados para formar as colunas da matriz $\Phi = [\vec{\phi}_1 \quad \vec{\phi}_2 \quad \dots \quad \vec{\phi}_N]$, a qual é prescrita na fronteira $\sigma \in \Gamma$ e denotada, $\Phi_b(\sigma)$.

Agrupando estas soluções da Eq. (15) para o conjunto linearmente independente das condições de contorno em uma única equação matricial, escreve-se

$$\nabla \cdot [\Phi^T \vec{\mathcal{W}}](x) = -[\Phi^T \mathbf{A}](x); \quad x \in \Omega \quad (17)$$

$$\Phi(\sigma) = \Phi_b(\sigma); \quad \sigma \in \Gamma \quad (18)$$

Por construção, a matriz $\Phi(\sigma)$ tem posto completo para cada $\sigma \in \Gamma$ e se $\Phi(x)$ satisfaz a Eq. (15), então, pode ser demonstrado que ela também é de posto completo para cada $x \in \Omega$.

Invertendo Φ , tem-se

$$\nabla \cdot [\log(\Phi^T) \vec{\mathcal{W}}](x) = -\mathbf{A}(x); \quad x \in \Omega, \Phi \in C(\Omega)^{N \times N} \quad (19)$$

A Eq. (19) pode ser interpretada como a generalização da equação de tomografia por transmissão, desde que:

- i. Se o termo de espalhamento pode ser desprezado, então é possível integrar a Eq.(19) produzindo o usual sistema tomográfico por transmissão para o conjunto de direções discretas $\{\omega_i, i=1, 2, \dots, N\}$, ou
- ii. no caso contrário, a Eq. (19) tem que ser integrada no domínio completo de Ω . Pelo teorema da divergência o traço da matriz de logaritmos de $\Phi \in C(\Omega)^{N \times N}$ está relacionada com a matriz de coeficientes \mathbf{A} , por

$$\int_{\Gamma} \log(\Phi^T) \vec{\mathcal{W}} \cdot \nu(\sigma) d\sigma = - \int_{\Omega} \mathbf{A}(x) dx \quad (20)$$

3.2 FORMULAÇÃO EXPLÍCITA MATRICIAL PARA O PROBLEMA INVERSO UNIDIMENSIONAL

Este problema corresponde ao problema em uma placa na teoria de transporte, e o objetivo é reconstruir os coeficientes espacialmente homogêneos: $\sigma_l \in \mathbf{R}^1$ e os vetores dos coeficientes do *kernel* de espalhamento $\sigma_s = \sigma_{sl} \geq 0$ com $l = \{0, 1, \dots, M\} \in \mathbf{R}^{M+1}$, e $(M+1)$ o número de coeficientes σ_{sl} .

Como o operador original, σ_s , é desenvolvido numa série de polinômios de Legendre é de se esperar que os coeficientes σ_{sl} sejam reais. Tem-se também que $\sigma_l > \sigma_{s0} > \sigma_{sl} > \sigma_s(l+1)$, para $l = 1, \dots, M$; assumindo que o meio é absorvedor não multiplicativo.

A seguir, descreve-se a implementação da formulação explícita matricial para o problema inverso unidimensional estacionário.

3.2.1 Formulação matemática do problema direto

Considera-se uma placa plano-paralela semi-transparente, de espessura L , contendo um meio absorvedor e espalhador anisotrópico sujeito a uma fonte externa de radiação nos seus contornos; como é mostrado na Fig. 1.

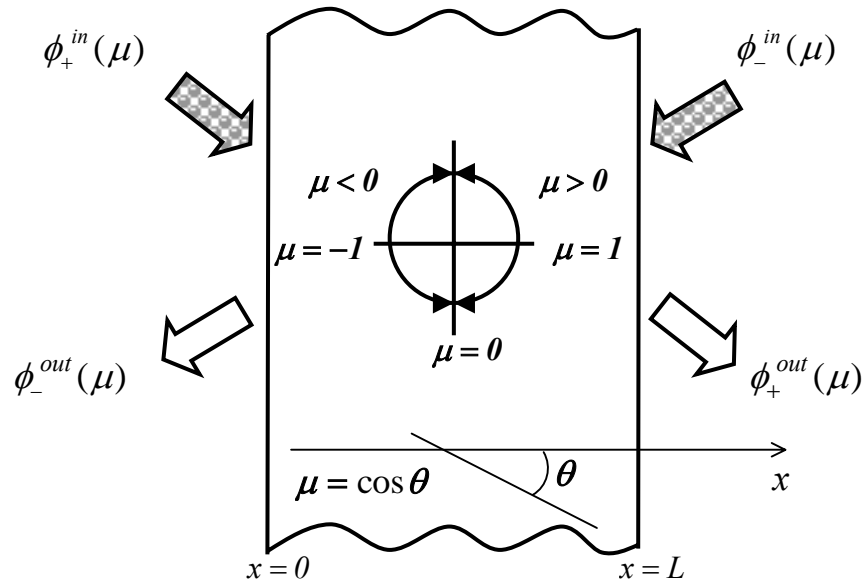


Figura 1. Meio participante unidimensional com geometria plano-paralela.

A equação linear de transporte de Boltzmann modela matematicamente a interação da radiação com o meio participante em estudo, e para o caso unidimensional com simetria azimutal é escrita como

$$\mu \frac{\partial \phi(x, \mu)}{\partial x} = -\sigma_t(x) \phi(x, \mu) + \sum_{l=0}^M \sigma_{sl}(x) p_l(\mu) \int_{-1}^1 \phi(x, \mu') p_l(\mu') d\mu'$$

para $(x, \mu) \in (0, L) \times [-1, 1]$ (21)

onde $\phi(x, \mu)$ representa a intensidade da radiação, x é a variável espacial, μ é o co-seno do ângulo polar, σ_t é o coeficiente de extinção total e p_l representa os polinômios de Legendre normalizados.

O coeficiente de espalhamento $\sigma_s(x, \mu, \mu')$ pode ser escrito como $\sigma_s(x, \mu, \mu') = \sigma_s(x) p(\mu, \mu')$, onde $p(\mu, \mu')$ é a função de fase do espalhamento. Esta função usualmente é representada como uma expansão em série de polinômios de Legendre na forma, $p(\mu, \mu') = \sum_{l=0}^M (2l+1) f_l P_l(\mu) P_l(\mu')$, logo

$$\sigma_{sl}(x) = \sigma_s(x) ((2l+1) f_l); \quad l = 0, 1, \dots, M. \quad (22)$$

onde $\sigma_s(x)$ é o coeficiente de espalhamento, f_l representa o coeficiente de expansão da função de fase, de espalhamento anisotrópico.

As condições de contorno são:

$$\phi(0, \mu) = \phi_+^{in}(\mu), \quad 0 \leq \mu \leq 1 \quad (23)$$

$$\phi(L, \mu) = \phi_-^{in}(\mu), \quad -1 \leq \mu \leq 0 \quad (24)$$

onde ϕ_+^{in} e ϕ_-^{in} são as intensidades das radiações incidentes em $x=0$ e $x=L$, respectivamente.

Definem-se os operadores para o problema unidimensional:

a) Operador multiplicativo, $T(\cdot) = \mu(\cdot)$

$$\mu(\cdot) : L^2([-1, +1] \times [0, L]) \rightarrow L^2([-1, +1] \times [0, L])$$

$$\phi(\mu, x) \mapsto \mu\phi(\mu, x) \quad (25)$$

O operador T é limitado, possui uma inversa ilimitada dado seu comportamento perto de $\mu = 0$, e um espectro contínuo em todo o intervalo $[-1,1]$.

b) Operador de colisão, $A_c(\cdot)$:

$$A_c(\cdot) : L^2([-1,+1] \times (0,L)) \rightarrow L^2([-1,+1] \times (0,L))$$

$$\phi(\mu, x) \mapsto [A_c\phi](\mu, x) \quad (26)$$

$$\text{onde, } [A_c\phi](\mu, x) = \sigma_t \phi(\mu, x) - \sum_{l=0}^M \sigma_{sl}(x) p_l(\mu) \int_{-1}^1 \phi(x, \mu') p_l(\mu') d\mu'.$$

Este operador contém os operadores de extinção e de espalhamento, e corresponde ao operador A do caso n -dimensional, é limitado, estritamente positivo, autoadjunto e tem inversa.

Levando os operadores definidos nas Eqs. (25) e (26), à Eq. (21) obtém-se

$$\left[\mathbf{T} \frac{d\phi}{dx} \right](\mu, x) = -[\mathbf{A}_c\phi](\mu, x) \quad (27)$$

A Eq. (27) é a expressão matricial da equação de transporte unidimensional estacionária.

Reescrevendo-a como

$$\frac{d\phi}{dx}(\mu, x) = -[\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_c\phi](\mu, x) \quad (28)$$

define-se o operador não limitado:

$$\mathbf{B}(\cdot) : L^2([-1, +1] \times (0, L)) \rightarrow L^2([-1, +1] \times (0, L))$$

o qual é o produto de dois operadores autoadjuntos, \mathbf{T} e \mathbf{A}_c

$$\mathbf{B} = [\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}_c]^{-1} = \mathbf{A}_c^{-1} \mathbf{T} \quad (29)$$

O operador \mathbf{B} é inversível e diagonalizável (KAPER; LEKKERKERKER; HEJTMANEK, 1982), então pode-se obter uma matriz diagonal \mathbf{T}_λ , tal que

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{T}_\lambda^{-1} \mathbf{F}^{-1} \quad (30)$$

onde as entradas diagonais de \mathbf{T}_λ são os autovalores de \mathbf{B}^{-1} e \mathbf{F} é uma matriz unitária.

Das Eqs. (29) e (30) obtém-se

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}_c \quad (31)$$

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}_c = \mathbf{F} \mathbf{T}_\lambda \mathbf{F}^{-1} \quad (32)$$

de onde,

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{T} \mathbf{F} \mathbf{T}_\lambda \mathbf{F}^{-1} \quad (33)$$

A solução da Eq. (28) é dada por

$$\phi(x) = \exp\left[-(x - x_0)\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_c\right]\phi(x_0) \quad (34)$$

onde x_0 é o ponto de incidência da radiação no meio.

Seguindo o método de ordenadas discretas de Chandrasekhar, o termo integral que aparece no operador de extinção é aproximado pela quadratura de Gauss. A discretização do domínio angular está representada de forma esquematizada como se mostra na Fig. 2.

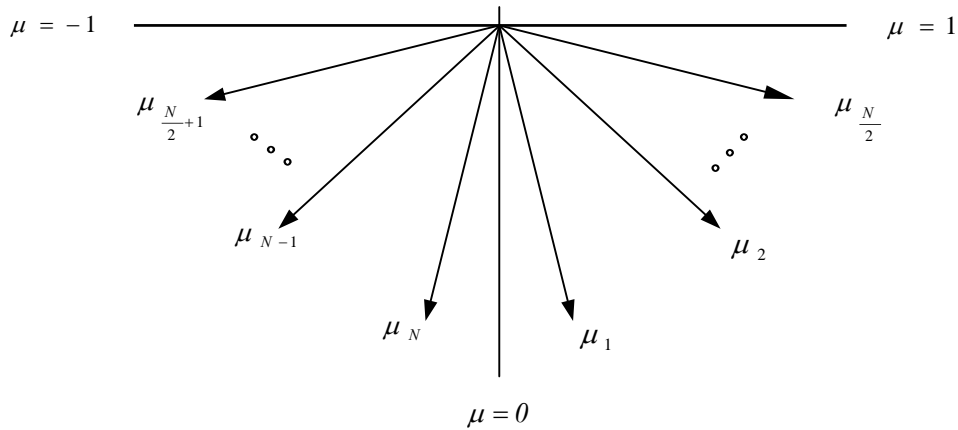


Figura 2. Discretização do domínio angular.

As intensidades da radiação são, assim, substituídas por uma função vetorial,

$$\phi^T = \left[\phi_1, \dots, \phi_{\frac{N}{2}}, \phi_{\frac{N}{2}+1}, \dots, \phi_N \right], \text{ cujas componentes } \phi_i \in H^1(0, L), \quad i = 1, \dots, N$$

estão correlacionadas aos pesos a_i da quadratura para $i=1, \dots, N$; de modo que as primeiras $\frac{N}{2}$ componentes correspondem a $\{a_i\} \in (0,1)$ e o restante a $\{a_i\} \in (-1,0)$.

Pode-se escrever, então,

$$\vec{\phi}(x) = \begin{Bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_N(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi(x, \mu_1) \\ \phi(x, \mu_2) \\ \vdots \\ \phi(x, \mu_N) \end{Bmatrix} \quad (35)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_N \end{bmatrix} \quad (36)$$

Denotando \mathbf{W} , a matriz diagonal composta com os pesos da quadratura de Gauss, $\{a_i; i=1, \dots, N\}$,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_N \end{bmatrix} \quad (37)$$

Então as Eqs. (21) e (27) podem ser escritas como

$$\mathbf{T} \frac{d\phi}{dx} = -\mathbf{A}_c \mathbf{W} \phi \quad (38)$$

onde, \mathbf{A}_c é simétrica e comutativa com \mathbf{W} .

O problema direto unidimensional na forma matricial é então formulado como: Achar $\phi \in H^1(0, L)^N$, de modo que sempre se cumpram as Eqs. (38), (23) e (24).

3.2.2 Formulação matemática do problema inverso

O objetivo aqui é estimar os valores dos coeficientes de extinção e de espalhamento a partir das condições de contorno prescritas (fluxos incidentes) e das medições dos fluxos emergentes para cada fluxo incidente.

Considerando-se o conjunto de N experimentos mencionados na seção 3.1.4, para cada experimento k , $k = 1, 2, \dots, N$; tem-se as seguintes condições de contorno

$$\phi^k(0, \mu) = f_0(\mu) \delta(\mu - \mu_k) \quad \text{para} \quad 1 \leq k \leq \frac{N}{2} \quad (39)$$

$$\phi^k(L, \mu) = f_L(\mu) \delta(\mu - \mu_k) \quad \text{para} \quad \frac{N}{2} + 1 \leq k \leq N \quad (40)$$

e tem-se, também, os valores dos fluxos emergentes calculados com o operador Albedo ou edidos diretamente nos contornos.

Então, pode-se construir as matrizes $\Phi(0)$ e $\Phi(L)$, combinando essa informação disponível nos contornos: i.e., a radiação incidente: $f_0(\mu)$ em $x = 0$ com $\mu > 0$ e $f_L(\mu)$ em $x = L$ com $\mu < 0$; e as intensidades da radiação emergente: $\phi_i^j(0)$ para $\mu < 0$ e $\phi_i^j(L)$ para $\mu > 0$), conforme apresentado a seguir

$$\Phi(0) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \text{Condições de contorno} \\ \hline \begin{array}{cccccc} f_0(\mu_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & f_0(\mu_2) & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & f_0(\mu_{\frac{N}{2}}) \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccc} \phi_{\frac{N}{2}+1}^1(0) & \phi_{\frac{N}{2}+1}^2(0) & \cdots & \cdots & \phi_{\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}}(0) \\ \phi_{\frac{N}{2}+2}^1(0) & \phi_{\frac{N}{2}+2}^2(0) & \cdots & \cdots & \phi_{\frac{N}{2}+2}^{\frac{N}{2}}(0) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \phi_N^1(0) & \phi_N^2(0) & \cdots & \cdots & \phi_N^{\frac{N}{2}}(0) \end{array} \\ \hline \text{Dados experimentais} \end{array} & \begin{array}{c} \text{Condições de contorno} \\ \hline \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccc} \phi_{\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}+1}(0) & \phi_{\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}+2}(0) & \cdots & \cdots & \phi_{\frac{N}{2}+1}^N(0) \\ \phi_{\frac{N}{2}+2}^{\frac{N}{2}+1}(0) & \phi_{\frac{N}{2}+2}^{\frac{N}{2}+2}(0) & \cdots & \cdots & \phi_{\frac{N}{2}+2}^N(0) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \phi_N^{\frac{N}{2}+1}(0) & \phi_N^{\frac{N}{2}+2}(0) & \cdots & \cdots & \phi_N^N(0) \end{array} \\ \hline \text{Dados experimentais} \end{array} \end{array} \right] \begin{array}{c} \mu > 0 \\ \uparrow \\ \mu = 0 \\ \downarrow \\ \mu < 0 \end{array} \quad (41)$$

$$\Phi(L) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \text{Dados experimentais} \\ \hline \begin{array}{cccccc} \phi_1^1(L) & \phi_1^2(L) & \cdots & \cdots & \phi_1^{\frac{N}{2}}(L) \\ \phi_2^1(L) & \phi_1^2(L) & \cdots & \cdots & \phi_2^{\frac{N}{2}}(L) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccc} \phi_{\frac{N}{2}}^1(L) & \phi_{\frac{N}{2}}^2(L) & \cdots & \cdots & \phi_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(L) \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \\ \hline \text{Condições de contorno} \end{array} & \begin{array}{c} \text{Dados experimentais} \\ \hline \begin{array}{cccccc} \phi_1^{\frac{N}{2}+1}(L) & \phi_1^{\frac{N}{2}+2}(L) & \cdots & \cdots & \phi_1^N(L) \\ \phi_2^{\frac{N}{2}+1}(L) & \phi_2^{\frac{N}{2}+2}(L) & \cdots & \cdots & \phi_2^N(L) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccc} \phi_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}+1}(L) & \phi_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}+2}(L) & \cdots & \cdots & \phi_{\frac{N}{2}}^N(L) \\ f_L(\mu_{\frac{N}{2}+1}) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & f_L(\mu_{\frac{N}{2}+2}) & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & f_L(\mu_{N-1}) & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f_L(\mu_N) \end{array} \\ \hline \text{Condições de contorno} \end{array} \end{array} \right] \begin{array}{c} \mu > 0 \\ \uparrow \\ \mu = 0 \\ \downarrow \\ \mu < 0 \end{array} \quad (42)$$

Introduzindo $x = L$ e $x_0 = 0$ na Eq. (34), tem-se

$$\vec{\phi}(L) = \exp[-L\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_c] \vec{\phi}(0) \quad (43)$$

Define-se o operador de transmissão $\mathbf{T}_R(\cdot)$ como

$$\vec{\phi}(x) \xrightarrow{\mathbf{T}_R} \exp[-L\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_c] \vec{\phi}(x_0) \quad (44)$$

e pode-se escrever,

$$\Phi(L) = \mathbf{T}_R \Phi(0) \quad (45)$$

Das Eqs. (32), (44) e (45)

$$\mathbf{T}_R = \exp[-L\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_c] = \exp[-L\mathbf{F}\mathbf{T}_\lambda\mathbf{F}^{-1}] \quad (46)$$

e usando a expansão em série da função exponencial,

$$\mathbf{T}_R = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-L)^n}{n!} (\mathbf{F}\mathbf{T}_\lambda\mathbf{F}^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F} \left(\frac{(-L)^n}{n!} \mathbf{T}_\lambda^n \right) \mathbf{F}^{-1} \quad (47)$$

escreve-se

$$\mathbf{T}_R = \mathbf{F} \exp[-L\mathbf{T}_\lambda] \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{FDF}^{-1} \quad (48)$$

onde \mathbf{D} é uma matriz diagonal

Sendo $\Phi(0)$ inversível, escreve-se a partir da Eq. (45)

$$\Phi(L)\Phi(0)^{-1} = \mathbf{T}_R \quad (49)$$

Usando a Eq. (48)

$$\Phi(L)\Phi(0)^{-1} = \mathbf{FDF}^{-1} \quad (50)$$

e definindo

$$\ln(\Phi(L)\Phi(0)^{-1}) = \mathbf{F} \ln \mathbf{D} \mathbf{F}^{-1} \quad (51)$$

das Eqs. (45) e (46) obtém-se,

$$\mathbf{A}_c = -\frac{1}{L} \mathbf{T} \ln(\Phi(L)\Phi(0)^{-1}) \quad (52)$$

Os elementos da matriz \mathbf{A}_c , da Eq. (38), são dados por

$$[A_c]_{ij} = \sigma_i(x) \delta_{ij} - \sum_{l=0}^M \sigma_{sl}(x) p_l(\mu_i) a_j p_l(\mu_j) \quad (53)$$

tal que

$$[A_c \vec{\phi}]_i = \sum_{j=1}^N [A_c]_{ij} \phi_j = \sigma_i(x) \phi_i - \sum_{l=0}^M \sigma_{sl}(x) p_l(\mu_i) \sum_{j=1}^N a_j p_l(\mu_j) \phi_j \quad (54)$$

Usando as séries de Fourier Legendre, $f(\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l p_l(\mu) d\mu$, onde

$$f_l = \int_{-1}^1 f(\mu) p_l(\mu) d\mu, \text{ tem-se que}$$

$$\phi(x, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\int_{-1}^1 p_l(\mu') \phi(x, \mu') d\mu' \right] p_l(\mu) \quad (55)$$

Da condição de ortogonalidade,

$$\int_{-1}^1 p_l(\mu) p_n(\mu) d\mu = \delta_{ln} \quad (56)$$

e sabendo que,

$$\int_{-1}^1 p_l(\mu) d\mu = 0 \text{ para } l \geq 1 \quad (57)$$

escreve-se

$$\phi_i = \sum_{j=1}^N \sum_{l=0}^{\infty} p_l(\mu_i) p_l(\mu_j) a_j \phi_j \quad (58)$$

Levando à Eq. (53),

$$[A_c \phi]_i = \sum_{j=1}^N \sum_{l=0}^{\infty} [\sigma_t(x) - \sigma_{sl}(x)] p_l(\mu_i) a_j p_l(\mu_j) \phi_j; \quad \sigma_{sl} = 0 \text{ para } l > M \quad (59)$$

e truncando o segundo somatório da Eq. (59) em $l = M_1$, com $M_1 > M$, definem-se as matrizes,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\mu_1) & p_2(\mu_1) & \cdots & p_{M_1}(\mu_1) \\ p_1(\mu_2) & p_2(\mu_2) & \cdots & p_{M_1}(\mu_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_1(\mu_N) & p_2(\mu_N) & \cdots & p_{M_1}(\mu_N) \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_t - \sigma_{s0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_t - \sigma_{s1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_t - \sigma_{sM_1} \end{bmatrix} \quad (61)$$

Considerando-se um meio homogêneo, escreve-se então

$$\mathbf{A}_c \vec{\phi} = \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{P}^T \mathbf{W} \vec{\phi} \quad (62)$$

Das Eqs. (52) e (62)

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{P}^T \mathbf{W} = -\frac{1}{L} \mathbf{T} \ln \left(\boldsymbol{\Phi}(L) \boldsymbol{\Phi}(0)^{-1} \right) \quad (63)$$

e a partir das Eqs.(51) e (63) obtém-se

$$\boldsymbol{\sigma} = -\frac{1}{L} \mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{F} \ln \mathbf{D} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{W}^{-1} \quad (64)$$

Sabe-se que os valores de σ_{sl} variam inversamente ao incremento de l e que $\sigma_{s_l} = 0$ para $l > M$. Então, dos termos de alta ordem pode-se obter o valor estimado para σ_t ; e dos termos de menor ordem, i.e; $l \leq M$, pode-se estimar os valores de σ_{sl} .

Usando as condições de contorno e os valores medidos da intensidade da radiação emergente, apropriadamente estruturados nas matrizes $\Phi(0)$ e $\Phi(L)$, calculam-se as matrizes \mathbf{F} e \mathbf{D} a partir da Eq. (50), e os valores estimados dos coeficientes desconhecidos são obtidos diretamente da Eq. (64).

3.2.3 Fórmula explícita para o cálculo do operador Albedo

Das seções anteriores tem-se deduzido uma formulação explícita para o problema de transmissão a partir das Eqs. (33) e (34). Desta formulação extrai-se uma fórmula explícita para o operador Albedo.

Observa-se nas matrizes construídas nas Eqs. (41) e (42), quatro regiões diferentes em concordância com a posição e direção dos dados disponíveis nos contornos do meio.

Estas matrizes podem ser escritas, em forma compacta, como:

$$\Phi(0) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{CC}_0 & 0 \\ \hline \mathbf{DE}_0^+ & \mathbf{DE}_0^- \end{array} \right] \quad (65)$$

$$\Phi(L) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{DE}_L^+ & \mathbf{DE}_L^- \\ \hline 0 & \mathbf{CC}_L \end{array} \right] \quad (66)$$

onde \mathbf{CC} e \mathbf{DE} representam as Condições de Contorno e os Dados Experimentais, respectivamente; e os símbolos (\pm) estão relacionados com os índices $i=1, \dots, N/2$ e $i=N/2+1, \dots, N$, respectivamente.

Introduzindo as Eqs. (65) e (66) na Eq. (45), tem-se

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{DE}_L^+ & \mathbf{DE}_L^- \\ 0 & \mathbf{CC}_L \end{array} \right] = \mathbf{T}_R \left[\begin{array}{cc} \mathbf{CC}_0 & 0 \\ \mathbf{DE}_0^+ & \mathbf{DE}_0^- \end{array} \right] \quad (67)$$

O operador de transmissão pode, também, ser dividido do mesmo modo

$$\mathbf{T}_R = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{T}_{R,11} & \mathbf{T}_{R,12} \\ \hline \mathbf{T}_{R,21} & \mathbf{T}_{R,22} \end{array} \right] \quad (68)$$

Sendo que o operador Albedo mapeia os fluxos incidentes, \mathbf{CC} , até aos fluxos emergentes, \mathbf{DE} , nos contornos $x=0$ e $x=L$, escreve-se

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{DE}_0^+ & \mathbf{DE}_0^- \\ \mathbf{DE}_L^+ & \mathbf{DE}_L^- \end{array} \right] = \Lambda \left[\begin{array}{cc} \mathbf{CC}_0 & 0 \\ 0 & \mathbf{CC}_L \end{array} \right] \quad (69)$$

como

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix} \quad (70)$$

Das Eq. (66)-(69) obtém-se:

$$\Lambda_{11} = -\mathbf{T}_{\mathbf{R},22}^{-1} \mathbf{T}_{\mathbf{R},21} \quad (71)$$

$$\Lambda_{12} = \mathbf{T}_{\mathbf{R},22}^{-1} \quad (72)$$

$$\Lambda_{21} = \mathbf{T}_{\mathbf{R},11} - \mathbf{T}_{\mathbf{R},12} \mathbf{T}_{\mathbf{R},22}^{-1} \mathbf{T}_{\mathbf{R},21} \quad (73)$$

e

$$\Lambda_{22} = \mathbf{T}_{\mathbf{R},12} \mathbf{T}_{\mathbf{R},22}^{-1} \quad (74)$$

Fazendo uso da teoria mostrada até aqui se gerou o algoritmo para o calculo do operador Albedo mostrado a seguir:

- 1) Calcular os N pontos de colocação e os pesos da quadratura de Gauss: μ_i e w_i , $i = 1, \dots, N$; e os N polinômios de Legendre $[P_l]$ normalizados, com $l = 0, \dots, N/2 - 1$.
- 2) Calcular, $\mathbf{T} = \mathbf{W}[\mu_i]$, e $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_l - \sigma_{sl}]$ com $l = 0, \dots, N/2 - 1$.
- 3) Calcular \mathbf{A}_c .
- 4) Calcular os autovalores λ , e os autovetores \mathbf{F} , da matriz $[\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}_c]$.

- 5) Calcular a matriz diagonal, $\mathbf{D} = -\exp(L\lambda)$.
- 6) Calcular $\mathbf{T}_R = \mathbf{FDF}^{-1}$.
- 7) Calcular $\mathbf{\Lambda}$ das Eqs. 71-74.

3.3 A FORMULAÇÃO EXPLÍCITA MATRICIAL PARA O PROBLEMA INVERSO TRANSIENTE

3.3.1 Equação de Transferência Radiativa transiente transformada

A equação de transferência radiativa unidimensional transiente com simetria azimutal para o caso monocromático, é escrita como:

$$\frac{\partial \phi(x, \mu, t)}{c \partial t} + \mu \frac{\partial \phi(x, \mu, t)}{\partial x} = -\sigma_t(x) \phi(x, \mu, t) + \sum_{l=0}^M \sigma_{sl}(x) p_l(\mu) \int_{-1}^1 \phi(x, \mu', t) p_l(\mu') d\mu'$$

para $0 \leq x \leq L$, $-1 \leq \mu \leq 1$ e $t > 0$ (75)

com a condição inicial

$$\phi(x, \mu, 0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq L, \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad (76)$$

e as condições de contorno

$$\phi(0, \mu, t) = \phi_+^{in}(\mu, t) \quad \text{para } 0 \leq \mu \leq 1 \text{ e } 0 \leq t \leq T \quad (77)$$

$$\phi(L, \mu, t) = \phi_-^{in}(\mu, t) \quad \text{para } -1 \leq \mu \leq 0 \text{ e } 0 \leq t \leq T \quad (78)$$

onde:

$\phi(x, \mu, t)$, descreve a intensidade do fluxo de radiação atravessando o meio no tempo t , no ponto x na direção μ com uma velocidade c (assumida constante);

$\sigma_t(x)$, é o coeficiente de extinção total;

$\sigma_{sl}(x)$, são os termos do coeficiente de espalhamento relacionados com os coeficientes de expansão da função de fase do espalhamento;

p_l , são os polinômios de Legendre normalizados e,

$\phi_+^{in}(\mu, t)$ e $\phi_-^{in}(\mu, t)$, representam a intensidade da radiação incidente em $x=0$ e $x=L$, respectivamente.

A condição inicial indica que nenhum fluxo de radiação existe no interior do meio, no tempo de início do experimento.

As condições de contorno indicam que durante o experimento, os fluxos radiativos propagando-se no meio foram originados pelas fontes posicionadas nos contornos $x=0$ e $x=L$.

Aplicando a transformada de Laplace nas Eqs. (75-78) escreve-se

$$\mu \frac{\partial \tilde{\phi}(x, \mu, s)}{\partial x} = -\tilde{\sigma}_t(x) \tilde{\phi}(x, \mu, s) + \sum_{l=0}^M \sigma_{sl}(x) p_l(\mu) \int_{-1}^1 \phi(x, \mu', s) p_l(\mu') d\mu' \quad \text{para } 0 \leq x \leq L, -1 \leq \mu \leq 1 \quad (79)$$

$$\tilde{\phi}(0, \mu, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \phi(0, \mu, t) dt = \tilde{\phi}_+^{in}(\mu, s) \quad 0 \leq \mu \leq 1 \quad (80)$$

$$\tilde{\phi}(L, \mu, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \phi(L, \mu, t) dt = \tilde{\phi}_-^{in}(\mu, s) \quad -1 \leq \mu \leq 0 \quad (81)$$

Na Eq. (79) o coeficiente de extinção total transformado é dado por:

$$\tilde{\sigma}_t(x, s) = \sigma_t(x) + s/c \quad (82)$$

onde s é o parâmetro de Laplace.

Matematicamente, o problema transformado dá ao problema estacionário um autovalor característico, com um espectro real contínuo na aproximação da teoria de transporte. Na aproximação dos polinômios de Legendre é observado um espectro quase contínuo (DUDERSTAD e MARTIN, 1979), o que implica em que existem valores especiais de s com os quais a informação obtida na superfície de contorno do meio pode levar à uma melhor estimativa a partir dos dados dos fluxos emergentes decorrentes da transformação por Laplace.

A transformada de Laplace introduz um fator de peso, e^{-st} , para os fluxos emergentes no tempo. Dependendo dos valores de s enfatiza-se diferentes partes da curva de intensidades no tempo. Se s é positivo, os fótons mais rapidamente espalhados têm maior

peso. Quando $s = 0$ os fótons tem peso idêntico para todos os instantes de tempo, e os fluxos são equivalentes àqueles fornecidos pelo detector. Se fazemos s negativo os fótons mais lentamente espalhados adquirem maior importância. (ALVAREZ ACEVEDO, 2002).

Por exemplo, Wu et al (1997) demonstraram a possibilidade de usar as medições, obtidas nos contornos de um meio, dos fótons prontos emitidos pela fluorescência estimulada por irradiação externa de pulsos laser em objetos posicionados no interior desse meio, para o qual determinaram um valor ótimo do parâmetro s . Usando como critério de escolha

$$\int_{t_1}^{t_2} I(t) \exp(-st) dt \approx \int_0^{\infty} I(t) \exp(-st) dt, \text{ o valor de } s \text{ ótimo ocorrerá para quando o topo da}$$

curva das intensidades transformadas é atingida no menor tempo t_0 dentro do intervalo $[t_1, t_2]$, o qual no caso foi $s = 4 \text{ ns}^{-1}$, como se mostra na Fig. 3.

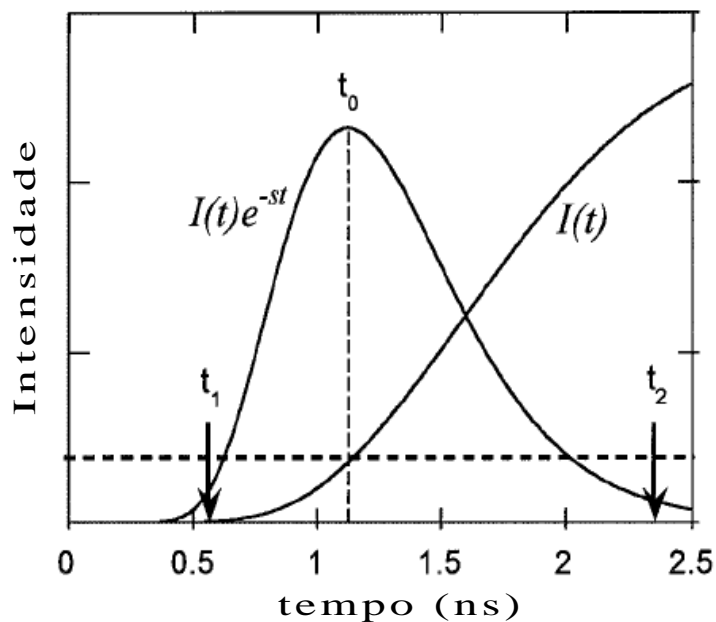


Figura 3. Determinação do valor ótimo de s , baseado no cálculo do nível da sinal pela teoria de difusão.(WU et al., 1997).

No início da curva, onde o sinal é pequeno - $t < t_1$, ela é muito sensível ao ruído razão pela qual s tem que ser menor que um valor crítico s_1 ; para evitar introduzir grandes erros na integração da transformada. Limitações na técnica de medição resultam em truncamento da parte da curva $t > t_2$, pelo que s tem que ser maior que um outro valor crítico s_2 .

3.3.2 A formulação matricial do problema direto no espaço transformado

A Eq. (79) na forma matricial pode ser escrita como

$$\left[\mathbf{T} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right] (x, \mu, s) = - \left[\tilde{\mathbf{A}}_c \tilde{\phi} \right] (x, \mu, s) \quad (83)$$

e seu equivalente discretizado é:

$$\mathbf{T} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} = -\tilde{\mathbf{A}}_c \mathbf{W} \tilde{\phi} \quad (84)$$

onde $\tilde{\mathbf{A}}_c$ é o novo operador de colisão contendo o coeficiente de extinção total transformado da Eq. (82). \mathbf{T} e \mathbf{W} já foram definidos no problema estacionário.

Daqui para frente segue-se o procedimento observado para o problema estacionário, vide (ALVAREZ ACEVEDO, ROBERTY e SILVA NETO, 2005c), só que trabalhando no espaço transformado de Laplace.

Tem-se assim que a solução das Eq.(83)-(84) é

$$\vec{\phi}(x) = \exp\left[-(x - x_0) \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_c\right] \vec{\phi}(x_0) \quad (85)$$

com x_0 sendo o ponto de incidência do fluxo de radiação;

A matriz de colisão no espaço transformado é dada por

$$\tilde{\mathbf{A}}_c = \mathbf{T} \mathbf{F} \mathbf{T}_\lambda \mathbf{F}^{-1} \quad (86)$$

onde \mathbf{F} e \mathbf{T}_λ são os autovetores e autovalores no espaço transformado.

3.3.3 Formulação explícita matricial para o problema inverso no espaço transformado

Assumindo a disponibilidade das medições dos fluxos emergentes transformados para N diferentes fluxos incidentes transformados nas duas superfícies de contorno de um meio; deseja-se, a partir desta informação, estimar os coeficientes de espalhamento (σ_{sl} , $l = 0, \dots, M$) e de extinção total (σ_t), simultaneamente.

Para o conjunto de N experimentos, sendo cada experimento representado pelo índice k ($k = 1, 2, \dots, N$), as condições de contorno transformadas são:

$$\tilde{\phi}^k(0, \mu, s) = f_0(\mu, s) \delta(\mu - \mu_k) \quad \text{se } 1 \leq k \leq \frac{N}{2} \quad (87)$$

$$\tilde{\phi}^k(L, \mu, s) = f_L(\mu, s) \delta(\mu - \mu_k) \quad \text{se } \frac{N}{2} + 1 \leq k \leq N \quad (88)$$

Para um dado valor de s constrói-se as matrizes $\tilde{\Phi}(0)$ e $\tilde{\Phi}(L)$,

$$\tilde{\Phi}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \text{Condições de contorno} \\ \hline \begin{array}{cccc} f_0(\mu_1, s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_0(\mu_2, s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_0\left(\mu_{\frac{N}{2}}, s\right) \end{array} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \text{Condições de contorno} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \text{Dados experimentais} \\ \hline \begin{array}{cccc} \tilde{\phi}_{\frac{N}{2}+1}^1(0) & \tilde{\phi}_{\frac{N}{2}+1}^2(0) & \dots & \tilde{\phi}_{\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}}(0) \\ \tilde{\phi}_{\frac{N}{2}+2}^1(0) & \tilde{\phi}_{\frac{N}{2}+2}^2(0) & \dots & \tilde{\phi}_{\frac{N}{2}+2}^{\frac{N}{2}}(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{\phi}_N^1(0) & \tilde{\phi}_N^2(0) & \dots & \tilde{\phi}_N^{\frac{N}{2}}(0) \end{array} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \text{Dados experimentais} \\ \hline \begin{array}{cccc} \tilde{\phi}_{\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}+1}(0) & \tilde{\phi}_{\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}+2}(0) & \dots & \tilde{\phi}_{\frac{N}{2}+1}^N(0) \\ \tilde{\phi}_{\frac{N}{2}+2}^{\frac{N}{2}+1}(0) & \tilde{\phi}_{\frac{N}{2}+2}^{\frac{N}{2}+2}(0) & \dots & \tilde{\phi}_{\frac{N}{2}+2}^N(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{\phi}_N^{\frac{N}{2}+1}(0) & \tilde{\phi}_N^{\frac{N}{2}+2}(0) & \dots & \tilde{\phi}_N^N(0) \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \mu > 0 \\ \updownarrow \\ \mu < 0 \end{array} \quad (89)$$

$$\tilde{\Phi}(L) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} \text{Dados experimentais} & \text{Dados experimentais} \\ \hline \begin{array}{cccc} \tilde{\phi}_1^1(L) & \tilde{\phi}_1^2(L) & \dots & \tilde{\phi}_1^{\frac{N}{2}}(L) & \tilde{\phi}_1^{\frac{N}{2}+1}(L) & \tilde{\phi}_1^{\frac{N}{2}+2}(L) & \dots & \tilde{\phi}_1^N(L) \\ \tilde{\phi}_2^1(L) & \tilde{\phi}_2^2(L) & \dots & \tilde{\phi}_2^{\frac{N}{2}}(L) & \tilde{\phi}_2^{\frac{N}{2}+1}(L) & \tilde{\phi}_2^{\frac{N}{2}+2}(L) & \dots & \tilde{\phi}_2^N(L) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{\phi}_{\frac{N}{2}}^1(L) & \tilde{\phi}_{\frac{N}{2}}^2(L) & \dots & \tilde{\phi}_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(L) & \tilde{\phi}_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}+1}(L) & \tilde{\phi}_{\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}+2}(L) & \dots & \tilde{\phi}_{\frac{N}{2}}^N(L) \end{array} & \begin{array}{c} \mu > 0 \\ \uparrow \\ \mu < 0 \\ \downarrow \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} & & & f_L(\mu_{\frac{N}{2}+1}, s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & 0 & f_L(\mu_{\frac{N}{2}+2}, s) & \dots & \\ & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & 0 & \dots & f_L(\mu_N, s) \end{array} \\ \hline \text{Condições de contorno} & \text{Condições de contorno} \end{array} \right] \end{array} \quad (90)$$

O operador de transmissão transformado é dado por

$$\mathbf{T}_R = \exp[-L\mathbf{T}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}_c] = \mathbf{FDF}^{-1} \quad (91)$$

onde \mathbf{D} é uma matriz diagonal.

A matriz transformada dos coeficientes é dada por

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = -\frac{1}{L} \mathbf{P}^T \mathbf{T} \mathbf{F} \ln \mathbf{D} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{W}^{-1} \quad (92)$$

Esta matriz dos coeficientes transformada contém os valores desses coeficientes de espalhamento e de extinção total transformado. Conhecendo s/c , estes coeficientes são obtidos por simples cálculo, seguindo o critério da ordem dos termos, i.e. dos termos de ordem $l < M$ obtêm-se os coeficientes de espalhamento e dos termos de ordem $M < l < M_1$ calcula-se o coeficiente de extinção.

Com relação ao termo s/c , considerando s real, ele é definido como um termo de absorção fictício,

$$\tilde{\sigma}_t(s) = \sigma_t + s/c = (\sigma_a + s/c) + \sigma_s \quad (93)$$

Para manter o significado físico do coeficiente de extinção total, s/c deve ser maior que um valor s_0 , relacionado com o coeficiente de absorção

$$s/c > -\sigma_a = s_0 \quad (94)$$

Se $s/c = -\sigma_a$, o termo de absorção na Eq. (92) anula-se, significando, matematicamente, que a propagação está-se efetuando em um meio somente espalhador, i.e. $\sigma_s \equiv \sigma_t$. Se $s/c = -0.5\sigma_a$, o valor de σ_s será incrementado no mesmo valor.

3.4 ALGORITMO DESENVOLVIDO PARA A ESTIMATIVA DOS COEFICIENTES DE EXTINÇÃO TOTAL E DE ESPALHAMENTO.

1. Entradas:

Espessura do meio, L ; número de pontos de quadratura, N ; coeficiente de extinção total σ_t e, os coeficientes de espalhamento anisotrópico σ_{sl} com $l = 1, \dots, M$.

2. Gerar dados experimentais sintéticos:

- A) Calcular o Albedo
- B) Calcular os fluxos emergentes nos contornos.
- C) Adicionar ruído.

3. Construir as matrizes $\Phi(L)$ e $\Phi(0)$.

4. Calcular \mathbf{T}_R com a Eq. (49).

5. Calcular as matrizes dos autovetores, \mathbf{F} , e dos autovalores, \mathbf{D} desde \mathbf{T}_R .

6. Calcular \mathbf{A}_c com a Eq. (50).

7. Calcular a matriz dos coeficientes σ .

8. Calcular σ_t com os termos de ordem $l > M$ da matriz dos coeficientes.

9. Calcular cada um dos coeficientes σ_{sl} com os termos de ordem $l = 1, \dots, M$ da matriz dos coeficientes.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

De modo a analisar a performance da formulação explícita matricial na estimativa das propriedades radiativas de um meio participante unidimensional, foram estabelecidos casos testes considerando uma placa homogênea com contornos transparentes e propriedades radiativas uniformes.

Para hipótese estacionária, analisou-se casos testes para placas de espessuras L com propriedades radiativas diferentes, assim como diferentes ordens de discretização.

No caso transiente, considerou-se casos testes para dois valores diferentes do termo s/c para uma placa de espessura L , meio altamente espalhador, e diferentes ordens de discretização.

4.1 PROBLEMA INVERSO ESTACIONÁRIO

4.1.1 Dados experimentais

Não havendo dados experimentais reais disponíveis foram empregados dados sintéticos, os quais constituíram os dados de entrada para o problema inverso.

Os dados sintéticos foram gerados adicionando ruído gaussiano branco aos valores calculados da intensidade da radiação, como se mostra na seguinte equação.

$$\phi_i^{\text{experimental sintético}} = \phi_i^{\text{calculado}} + r_i \sigma, \quad i = 1, \dots, N. \quad ($$

onde r_i representam números pseudo-randômicos escolhidos a partir de uma distribuição normal com média zero e σ emula o desvio-padrão dos erros dos diversos conjuntos de medições.

Os valores calculados dos fluxos emergentes são obtidos usando o algoritmo para calcular o operador albedo apresentado na seção 3.2.3.

4.1.2 Avaliação do algoritmo desenvolvido

A. Casos testes

Estabeleceu-se doze casos testes usando quatro conjuntos distintos de valores para os coeficientes de espalhamento, σ_{sl} , e três outros valores diferentes para o coeficiente de extinção total, σ_t , os quais constituem os valores considerados como exatos para cada caso. Estes valores foram combinados como se mostra na Tabela 1.

TABELA 1- Valores exatos dos coeficientes de espalhamento, $\sigma_{sl} [\text{cm}^{-1}]$, e de extinção, $\sigma_t [\text{cm}^{-1}]$, dos Casos Teste. $L = 0.5 \text{ cm}$.

Caso teste	Coefficientes de espalhamento	Coefficiente de extinção
1	A	0.5
	B	[0.4, 0.2, 0.1, 0.0]
	C	1.2
2	A	0.5
	B	[0.4, 0.2, 0.1, 0.05, 0.0]
	C	1.2
3	A	0.5
	B	[0.4, 0.0647, 0.0431, 0.0080, 1.7E-6, 0.0]
	C	1.2
4	A	0.5
	B	[0.4, -0.0754, 0.0238, 0.0049, 0.0004, 2.29E-5, 0.0]
	C	1.2

Deste modo simulam-se meios altamente espalhadores (A), medianamente espalhadores(B) e pouco espalhadores (C). A espessura da placa da placa foi tomada como $L = 0.5$ cm .

Nos casos 1 e 2 usaram-se valores arbitrários para cada um dos termos do coeficiente de espalhamento. Nos casos 3 e 4 estes termos foram calculados com a Eq. (22), usando valores para os coeficientes de expansão da função de fase tomadas da Tabela apresentada em ÖZISIK (1973).

B. Resultados

Os dados experimentais foram obtidos como se indica na subseção 4.1.1. Eles foram computados usando 12 pontos de colocação na discretização angular dos casos teste 1-2, 14 para o caso teste 3 e 16 no caso teste 4.

Os valores usados para o desvio-padrão dos erros das medições, σ , foram ajustados de modo a simular dados experimentais sem ruído, e com erros intervalares até 5%, 9.5%, 14 % .

Na Tabela 2 e Figs. 4-7, apresentam-se os valores calculados dos coeficientes de espalhamento, σ_{sl} , para os casos teste 1-4, respectivamente.

As colunas com cabeçalho ED contêm os valores calculados para cada um dos termos do coeficiente de espalhamento em ordem crescente, onde ED indica o erro presente nos dados experimentais. Assim, na Tabela 2 b), coluna 4, tem-se os valores estimados para $\sigma_{s0} = 0.39999$, $\sigma_{s1} = 0.20014$ e $\sigma_{s2} = 0.10057$ obtidos quando usados dados experimentais com erros de até 5%.

Nas colunas adjacentes respectivas apresenta-se o erro relativo de cada estimativa para cada um dos termos dos coeficientes, na ordem correspondente.

Na Tabela 3 mostram-se os valores calculados dos coeficientes de extinção total, σ_t ; e na Fig. 8 os erros relativos destas estimativas, para todos os casos teste.

TABELA 2. Valores calculados dos coeficientes de espalhamento, σ_{sl} [cm^{-1}]. $L = 0.5$ cm

(ED = erro no dado experimental; $EE(\%) = \left| \left(\sigma_{sl}^{\text{calculado}} - \sigma_{sl}^{\text{exato}} \right) / \sigma_{sl}^{\text{exato}} \right| \times 100 = \text{erro relativo na estimativa}$)

a) Caso teste 1 - $N = 12$

Caso teste	ED=0%	EE (%)	ED<5%	EE (%)	ED<9.5%	EE (%)	ED<14%	EE (%)
A	0.4000	0.0000	0.39999	0.0057	0.39999	0.0113	0.39998	0.0170
	0.2000	0.0000	0.20014	0.9674	0.20028	1.9362	0.20042	2.9115
	0.1000	0.0000	0.10057	7.6023	0.10114	15.257	0.10171	22.962
B	0.4000	0.0000	0.40028	0.0694	0.40055	0.1368	0.40081	0.2023
	0.2000	0.0000	0.20137	0.6847	0.20273	1.3675	0.20410	2.0485
	0.1000	0.0000	0.10686	6.8645	0.11374	13.739	0.12063	20.625
C	0.4000	0.0000	0.40021	0.0521	0.40042	0.1039	0.40062	0.1553
	0.2000	0.0000	0.20030	0.1515	0.20061	0.3029	0.20091	0.4543
	0.1000	0.0000	0.10214	2.1442	0.10429	4.2863	0.10643	6.4265

b) Caso teste 2 - $N = 12$

Caso teste	ED=0%	EE (%)	ED<5%	EE (%)	ED<9.5%	EE (%)	ED<14%	EE (%)
A	0.4000	0.0000	0.40003	0.0066	0.40005	0.0130	0.40008	0.0195
	0.2000	0.0000	0.20215	1.0732	0.20430	2.1489	0.20646	3.2322
	0.1000	0.0000	0.10842	8.4206	0.11691	16.9060	0.12545	25.453
	0.0500	0.0000	0.04606	7.8865	0.04214	15.7290	0.03823	23.535
B	0.4000	0.0000	0.40027	0.06686	0.40053	0.1319	0.40078	0.1952
	0.2000	0.0000	0.20131	0.65501	0.20262	1.3082	0.20392	1.9598
	0.1000	0.0000	0.10655	6.5462	0.11310	13.1020	0.11967	19.669
	0.0500	0.0000	0.04731	5.3767	0.04463	10.7430	0.04195	16.098
C	0.4000	0.0000	0.40024	0.0596	0.40048	0.1188	0.40071	0.1775
	0.2000	0.0000	0.20035	0.1736	0.20069	0.3470	0.20104	0.5204
	0.1000	0.0000	0.10245	2.4456	0.10489	4.8887	0.10733	7.3293
	0.0500	0.0000	0.04928	1.4387	0.04856	2.8787	0.04784	4.3201

TABELA 2 (continuação).

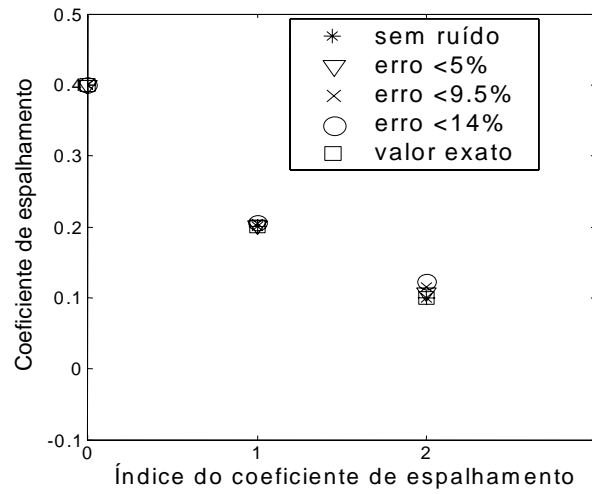
$$\left(\text{ED} = \text{erro no dado experimental}; \text{EE}(\%) = \left| \left(\frac{\sigma_{sl}^{\text{calculado}} - \sigma_{sl}^{\text{exato}}}{\sigma_{sl}^{\text{exato}}} \right) \right| \times 100 = \text{erro relativo na estimativa} \right)$$

c) Caso teste 3 - $N = 14$

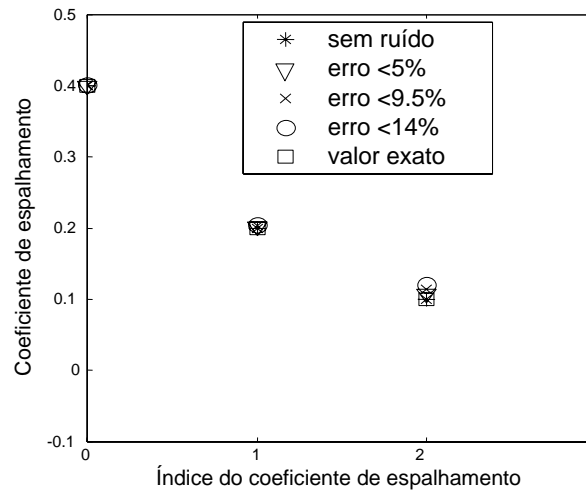
Caso teste	ED=0%	EE(%)	ED<5%	EE(%)	ED<9.5%	EE(%)	ED<14%	EE(%)
A	0.4000	0.0000	0.39840	0.4006	0.39718	0.7061	0.39603	0.9923
	0.0647	0.0000	0.05863	9.36350	0.05239	19.0090	0.04770	26.2710
	0.0431	0.0000	0.07928	83.8500	0.11568	168.270	0.15151	251.360
	0.0080	0.0000	0.02016	151.960	0.03043	280.340	0.03943	392.890
	1.78e-06	0.0000	0.03907	2.2e+06	0.07640	4.3e+06	0.11179	6.3e+06
B	0.4	0.0000	0.39748	0.6308	0.39499	1.2518	0.39255	1.8624
	0.0647	0.0000	0.06306	2.5188	0.06124	5.3383	0.05927	8.3807
	0.0431	0.0000	0.05866	36.0270	0.07411	71.8580	0.08947	107.490
	0.008	0.0000	0.01307	63.3850	0.01783	122.890	0.02231	178.810
	1.78e-06	0.0000	0.01684	9.5e+05	0.03344	1.9e+06	0.04981	2.8e+06
C	0.4	0.0000	0.39935	0.1627	0.39870	0.3250	0.39805	0.4870
	0.0647	0.0000	0.06446	0.3536	0.06423	0.7100	0.06400	1.0693
	0.0431	0.0000	0.04573	6.0510	0.04833	12.0870	0.05093	18.1090
	0.008	0.0000	0.00879	9.9132	0.00958	19.7470	0.01036	29.5030
	1.78e-06	0.0000	0.00280	1.6e+05	0.00560	3.2e+05	0.00838	4.7e+05

d) Caso teste 4 - $N = 16$

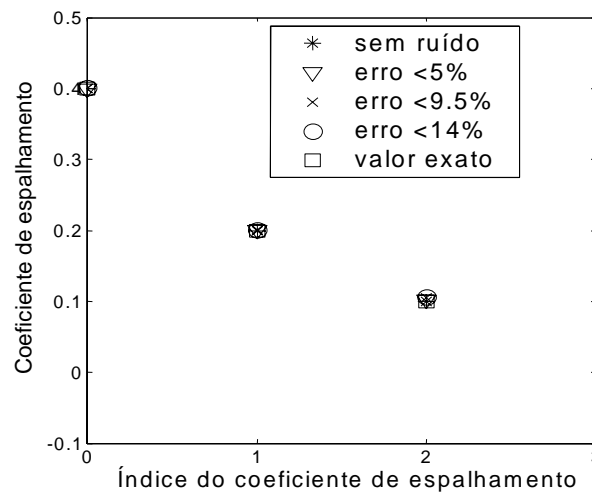
Caso teste	ED=0%	EE(%)	ED<5%	EE(%)	ED<9.5%	EE(%)	ED<14%	EE(%)
A	0.4000	0.0000	0.39790	0.526	0.39595	1.0135	0.39377	1.5563
	-0.0754	0.0000	-0.07448	1.2273	-0.07136	5.3552	-0.06298	16.4770
	0.0238	0.0000	0.05001	110.140	0.07508	215.460	0.10107	324.6500
	0.0049	0.0000	0.02882	488.180	0.05424	1007.00	0.09479	1834.500
	0.0004	0.0000	-0.01173	3031.70	-0.02302	5854.40	-0.04963	12508.00
	2.29e-05	0.0000	-0.01095	47931.0	-0.02159	94362.0	-0.04827	2.1e+05
B	0.4000	0.0000	0.39444	1.3894	0.38917	2.7067	0.38418	3.9553
	-0.0754	0.0000	-0.07534	0.0795	-0.07500	0.5319	-0.07418	1.6245
	0.0238	0.0000	0.05034	111.510	0.07524	216.140	0.09879	315.0900
	0.0049	0.0000	0.02708	452.590	0.04918	903.690	0.07145	1358.200
	0.0004	0.0000	-0.00430	1175.10	-0.00944	2458.80	-0.01487	3817.600
	2.29e-05	0.0000	-0.00913	39965.0	-0.01837	80308.0	-0.02770	1.2e+05
C	0.4000	0.0000	0.39981	0.0476	0.39962	0.0952	0.39943	0.1427
	-0.0754	0.0000	-0.07541	0.0186	-0.07543	0.0372	-0.07544	0.0557
	0.0238	0.0000	0.02474	3.9597	0.02568	7.9098	0.02662	11.8500
	0.0049	0.0000	0.00555	13.3330	0.00621	26.6500	0.00686	39.9500
	0.0004	0.0000	0.00056	24.1220	0.00059	47.9310	0.00069	71.4270
	2.29e-05	0.0000	-9.5e-05	514.210	-0.00021	1031.00	-0.00033	1550.30



(a) Caso teste 1A - $\sigma_t = 0.5 \text{ cm}^{-1}$.

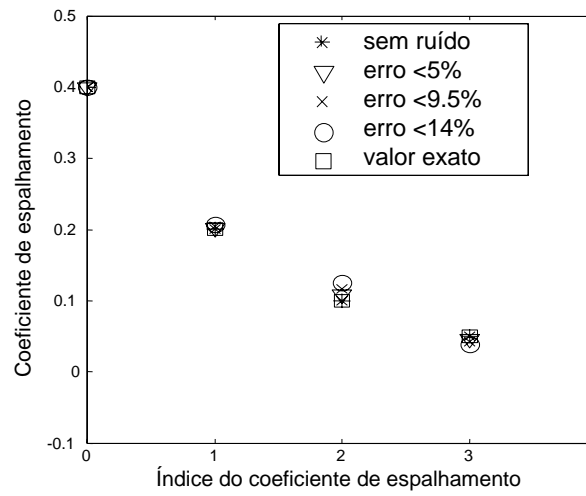


Caso teste 1B - $\sigma_t = 0.8 \text{ cm}^{-1}$.

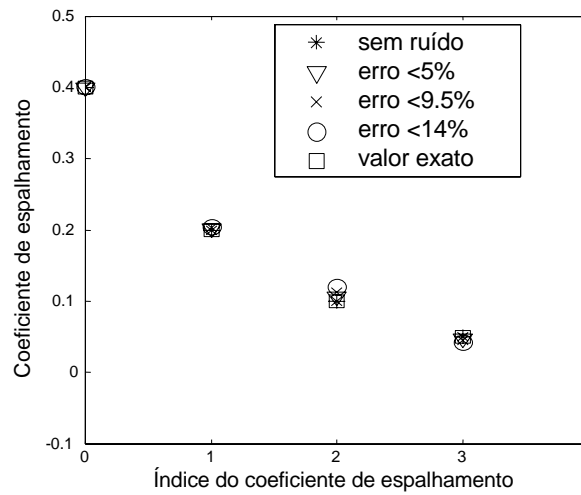


c) Caso teste 1C - $\sigma_t = 1.2 \text{ cm}^{-1}$.

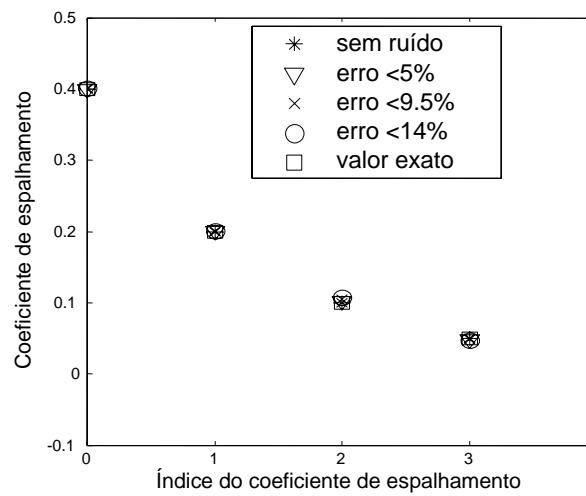
Figura 4 – Valores calculados para os coeficientes de espalhamento. Caso teste 1. ($\sigma_{sl} = [0.4, 0.2, 0.1, 0.0] \text{ cm}^{-1}$). $L = 0.5 \text{ cm}$. $N = 12$. Erro no dado experimental: * = 0%, $\nabla < 5\%$, $\times < 9.5\%$ e $\circ < 14\%$.



(a) Caso teste 2A - $\sigma_t = 0.5 \text{ cm}^{-1}$.

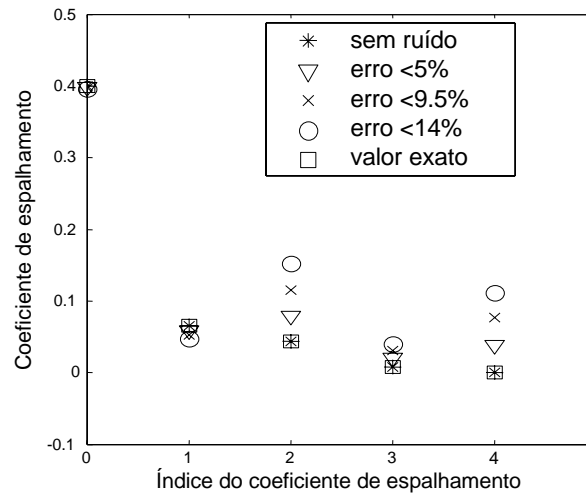


(b) Caso teste 2B - $\sigma_t = 0.8 \text{ cm}^{-1}$.

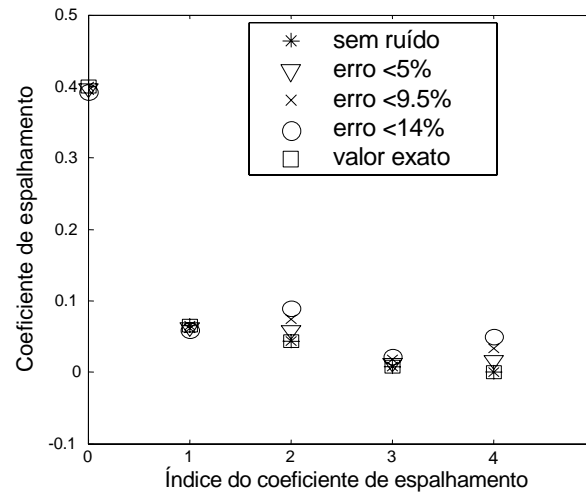


(c) Caso teste 2C - $\sigma_t = 1.2 \text{ cm}^{-1}$.

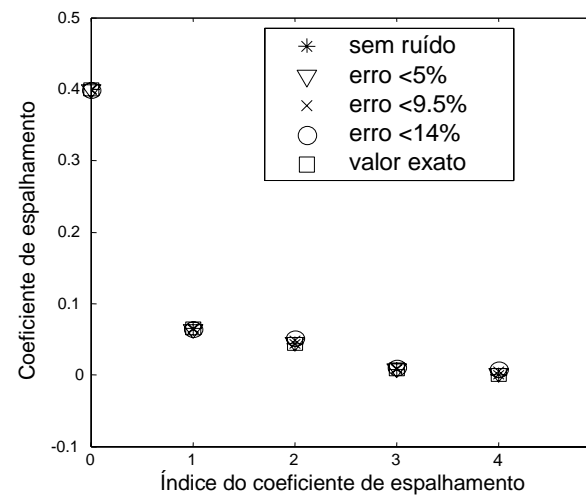
Figura 5 – Valores calculados para os coeficientes de espalhamento. Caso teste 2 ($\sigma_{sl} = [0.4, 0.2, 0.1, 0.05, 0.0] \text{ cm}^{-1}$). $L = 0.5 \text{ cm}$. $N = 12$. Erro no dado experimental: * = 0%, $\nabla < 5\%$, $\times < 9.5\%$ e $\circ < 14\%$.



a) Caso teste 3A - $\sigma_t = 0.5 \text{ cm}^{-1}$.

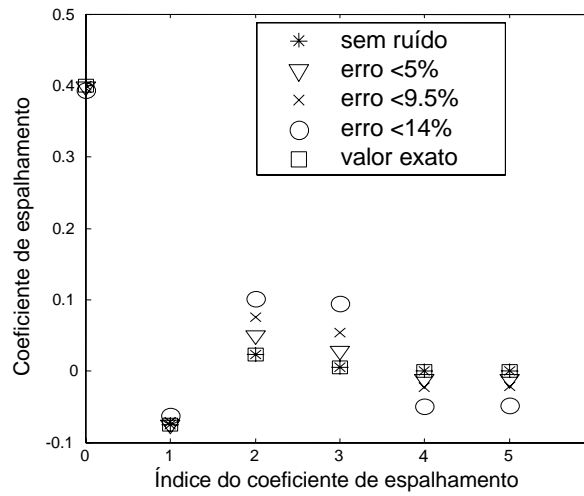


Caso teste 3B - $\sigma_t = 0.8 \text{ cm}^{-1}$

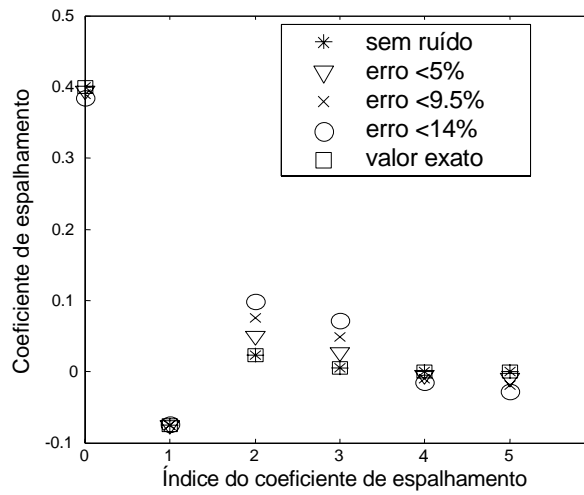


c) Caso teste 3C - $\sigma_t = 1.2 \text{ cm}^{-1}$.

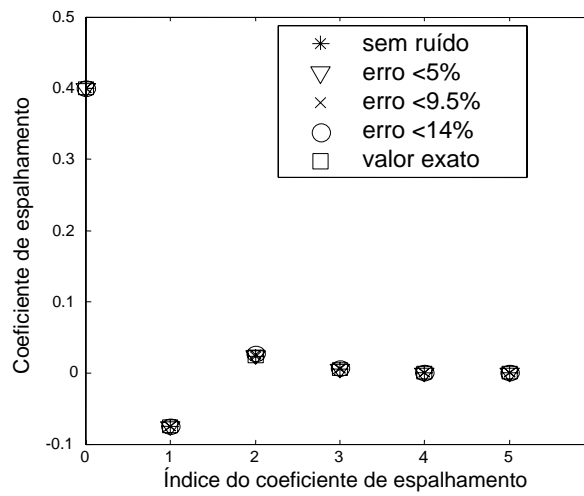
Figura 6 – Valores calculados para os coeficientes de espalhamento. Caso teste 3. $(\sigma_{st} = [0.4, 0.0647, 0.0431, 0.0080, 1.7E-6, 0.0] \text{ cm}^{-1})$. $L = 0.5 \text{ cm}$. $N = 14$. Erro no dado experimental: * = 0%, $\nabla < 5\%$, $\times < 9.5\%$ e $\circ < 14\%$.



Caso teste 4A - $\sigma_t = 0.5 \text{ cm}^{-1}$.



Caso teste 4B - $\sigma_t = 0.8 \text{ cm}^{-1}$.



Caso teste 4C - $\sigma_t = 1.2 \text{ cm}^{-1}$.

Figura 7 - Valores calculados para os coeficientes de espalhamento. Caso teste 4. ($\sigma_{sl} = [0.4, -0.0754, 0.0238, 0.0049, 0.0004, 2.29E-5, 0.0] \text{ cm}^{-1}$). $L = 0.5 \text{ cm}$. $N = 16$. Erro no dado experimental: * = 0%, $\nabla < 5\%$, $\times < 9.5\%$ e $\circ < 14\%$.

TABELA 3. Valores calculados dos coeficientes de extinção total, σ_t [cm^{-1}]. $L = 0.5 \text{ cm}$.

(ED = erro no dado experimental; $EE(\%) = \left| \left(\sigma_t^{\text{calculado}} - \sigma_t^{\text{exato}} \right) / \sigma_t^{\text{exato}} \right| \times 100 = \text{erro relativo na estimativa}$)

(a) Caso teste 1. $N = 12$

Caso teste	ED=0%	EE(%)	ED<5%	EE(%)	ED<9.5%	EE(%)	ED<14%	EE(%)
1 <u>A</u>	0.500	0.0000	0.5035	0.7090	0.5071	1.4154	0.5106	2.1174
<u>B</u>	0.800	0.0000	0.8027	0.3319	0.8053	0.6639	0.8080	0.9958
<u>C</u>	1.200	0.0000	1.2006	0.0462	1.2011	0.0925	1.2017	0.1388

(b) Caso teste 2. $N = 12$.

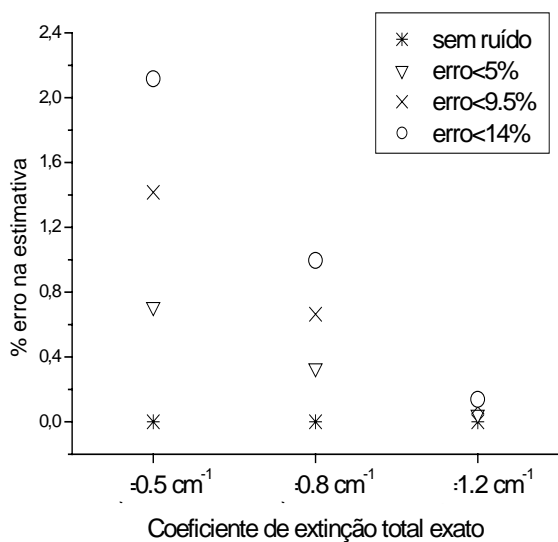
Caso teste	ED=0%	EE(%)	ED<5%	EE(%)	ED<9.5%	EE(%)	ED<14%	EE(%)
2 <u>A</u>	0.500	0.0000	0.5038	0.7548	0.5075	1.5065	0.5112	2.2495
<u>B</u>	0.800	0.0000	0.8023	0.2893	0.8046	0.5793	0.8070	0.8698
<u>C</u>	1.200	0.0000	1.2005	0.0452	1.2011	0.0905	1.2016	0.1359

(c) Caso teste 3. $N = 14$.

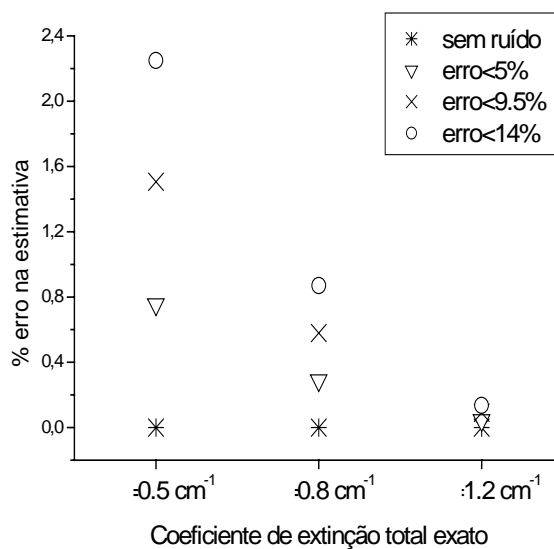
Caso teste	ED=0%	EE(%)	ED<5%	EE(%)	ED<9.5%	EE(%)	ED<14%	EE(%)
3 <u>A</u>	0.500	0.0000	0.4888	2.2424	0.4838	3.2314	0.4858	2.8360
<u>B</u>	0.800	0.0000	0.7938	0.7735	0.7881	1.4922	0.7828	2.1526
<u>C</u>	1.200	0.0000	1.1987	0.1100	1.1974	0.2192	1.1961	0.3278

(d) Caso teste 4. $N = 16$.

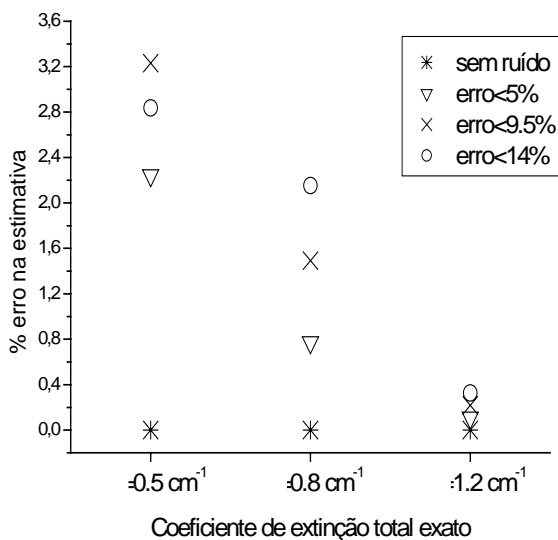
Caso teste	ED=0%	EE(%)	ED<5%	EE(%)	ED<9.5%	EE(%)	ED<14%	EE(%)
4 <u>A</u>	0.500	0.000	0.5134	2.6878	0.5282	5.6339	0.5585	11.7079
<u>B</u>	0.800	0.000	0.8087	1.0914	0.8184	2.3032	0.8292	3.6438
<u>C</u>	1.200	0.000	1.2001	0.0085	1.2002	0.0171	1.2003	0.0258



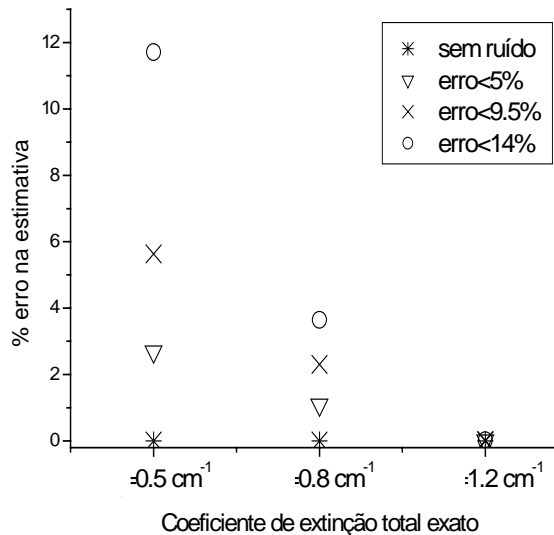
a) Caso teste 1 - $N=12$



b) Caso teste 2 - $N=12$



c) Caso teste 3 - $N=14$



d) Caso teste 4 - $N=16$

Figura 8 – Erros relativos nas estimativas para os coeficientes de extinção total. $L = 0.5 \text{ cm}$.

Erro no dado experimental: $*$ =0%, ∇ <5%, x <9.5% e o <14%.

Das Tabelas 2-3 e as Figs. 4-8, observa-se que o algoritmo consegue calcular os valores exatos dos coeficientes procurados para os casos sem ruído nos dados experimentais em todos os casos teste, e a presença de ruído nos dados experimentais afeta a precisão das estimativas tanto dos coeficientes de espalhamento quanto dos coeficientes de extinção.

Um segundo teste foi realizado considerando uma discretização angular de ordem $N = 32$ para todos os casos teste.

Nas Tabelas 4 e 5 apresentam-se os valores calculados dos coeficientes de espalhamento e de extinção total, respectivamente, usando $N = 32$. Nas Figuras 9-13 são mostrados os gráficos para os resultados informados nestas tabelas.

Observa-se das Tabela 4 e 5 e das Figs. 9-12, que, em geral, os resultados obtidos com $N = 32$ apresentam uma melhor aproximação aos valores exatos dos coeficientes dos que os mostrados nas Tabelas 2 – 3 e Figs. 4-11.

Verifica-se que os termos de maior ordem dos coeficientes de espalhamento são os mais afetados pela presença de ruído nos dados experimentais.

TABELA 4. Valores calculados dos coeficientes de espalhamento, σ_{sl} [cm^{-1}].

$$L = 0.5 \text{ cm} . N = 32 .$$

$$\left(\text{ED} = \text{erro no dado experimental}; \text{EE}(\%) = \left| \left(\sigma_{sl}^{\text{calculado}} - \sigma_{sl}^{\text{exato}} \right) / \sigma_{sl}^{\text{exato}} \right| \times 100 = \text{erro relativo na estimativa} \right)$$

a) Caso Teste 1

Caso teste	ED=0%	EE(%)	ED<5%	EE(%)	ED<9.5%	EE(%)	ED<14%	EE(%)
A	0.4000	0.0000	0.39993	0.0164	0.39986	0.0355	0.39977	0.0573
	0.2000	0.0000	0.19898	0.5109	0.19792	1.0389	0.19686	1.5715
	0.1000	0.0000	0.10380	3.7980	0.10754	7.5356	0.11121	11.212
B	0.4000	0.0000	0.39993	0.0169	0.39977	0.0578	0.39951	0.1227
	0.2000	0.0000	0.19937	0.3154	0.19871	0.6454	0.19802	0.9900
	0.1000	0.0000	0.10348	3.4834	0.10674	6.7425	0.10978	9.7802
C	0.4000	0.0000	0.40010	0.0311	0.40015	0.5507	0.40014	1.9131
	0.2000	0.0000	0.19995	0.1649	0.19989	0.3406	0.19984	0.5234
	0.1000	0.0000	0.10068	2.4163	0.10125	0.7618	0.10170	7.9336

b) Caso teste 2

Caso teste	ED=0%	EE(%)	ED<5%	EE(%)	ED<9.5%	EE(%)	ED<14%	EE(%)
A	0.4000	0.0000	0.3999	0.0214	0.3998	0.0472	0.3997	0.0839
	0.2000	0.0000	0.1987	0.6572	0.1973	1.3365	0.1959	2.0370
	0.1000	0.0000	0.1048	4.8429	0.1096	9.5857	0.1142	14.2180
	0.0500	0.0000	0.0422	15.5940	0.0339	32.2370	0.0251	49.7660
B	0.4000	0.0000	0.3999	0.0312	0.3996	0.1109	0.3990	0.2398
	0.2000	0.0000	0.1991	0.4576	0.1981	0.9452	0.1971	1.4634
	0.1000	0.0000	0.1049	4.9322	0.1094	9.4162	0.1135	13.454
	0.0500	0.0000	0.0435	12.9690	0.0364	27.2140	0.0286	42.7960
C	0.4000	0.0000	0.4001	0.0133	0.4001	0.0237	0.4001	0.0315
	0.2000	0.0000	0.2000	0.0120	0.2000	0.0241	0.1999	0.0363
	0.1000	0.0000	0.1003	0.3230	0.1006	0.6229	0.1009	0.8999
	0.0500	0.0000	0.0498	0.4318	0.0496	0.8731	0.0493	1.3237

Tabela 4 (continuação)

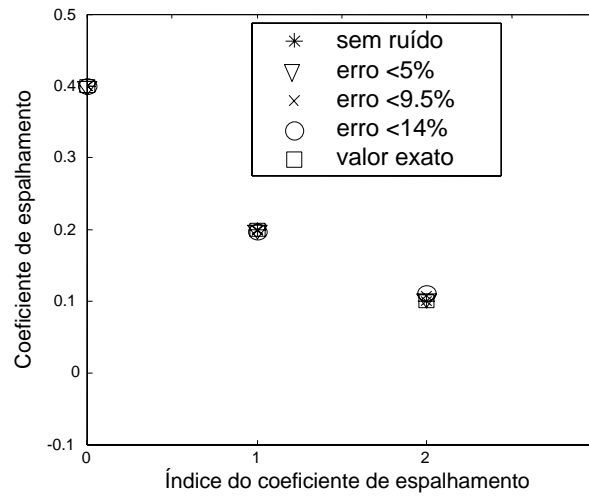
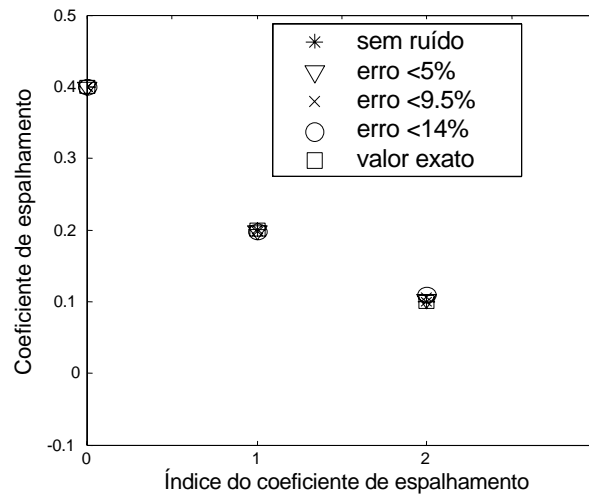
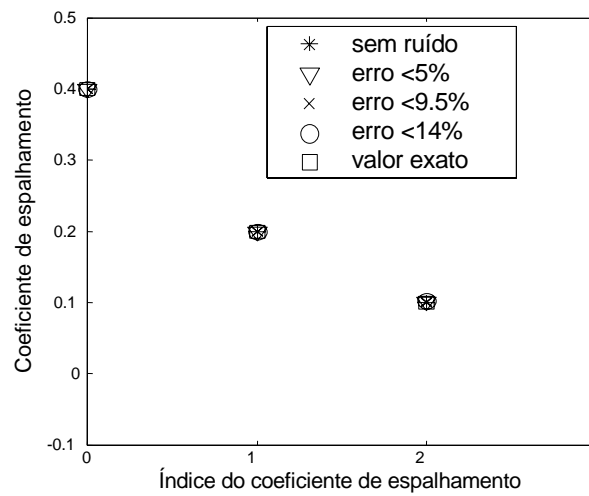
(ED = erro no dado experimental; $EE(\%) = \left| \left(\frac{\sigma_{sl}^{\text{calculado}} - \sigma_{sl}^{\text{exato}}}{\sigma_{sl}^{\text{exato}}} \right) \right| \times 100 = \text{erro relativo na estimativa}$)

c) Caso Teste 3

Caso teste	ED=0%	EE(%)	ED<5%	EE(%)	ED<9.5%	EE(%)	ED<14%	EE(%)
A	0.4000	0.0000	0.3998	0.0521	0.3995	0.1266	0.3992	0.2087
	0.0647	0.0000	0.0617	4.6750	0.0585	9.6401	0.0544	15.9540
	0.0431	0.0000	0.0544	26.0670	0.0648	50.1960	0.0743	72.3780
	0.0080	0.0000	-0.0102	227.520	-0.0306	482.910	-0.0556	795.360
	1.78e-6	0.0000	-0.0129	7.3e+05	-0.0298	1.8e+06	-0.0497	2.8e+06
B	0.4000	0.0000	0.3997	0.0847	0.3987	0.3252	0.3970	0.7388
	0.0647	0.0000	0.0631	2.4838	0.0613	5.2329	0.0594	8.2532
	0.0431	0.0000	0.0516	19.726	0.0585	35.638	0.0636	47.432
	0.0080	0.0000	-0.0037	146.42	-0.0175	318.89	-0.0337	520.80
	1.78e-6	0.0000	-0.0076	4.3e+05	-0.0153	8.6e+05	-0.0233	1.3e+06
C	0.4000	0.0000	0.4001	0.0165	0.4001	0.0283	0.4001	0.0353
	0.0647	0.0000	0.0647	0.0450	0.0646	0.0906	0.0646	0.1369
	0.0431	0.0000	0.0435	0.9832	0.0439	1.8647	0.0443	2.6463
	0.0080	0.0000	0.0077	3.4130	0.0075	6.9329	0.0072	10.559
	1.78e-6	0.0000	-5.1e-05	2969.6	-0.0001	7648.5	-0.0003	14005.0

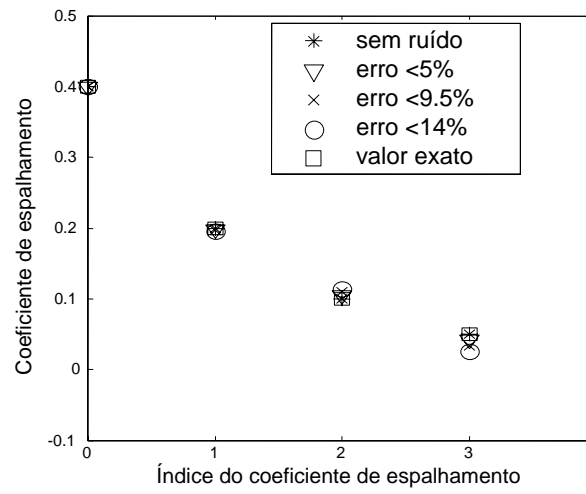
d) Caso teste 4

Caso teste	ED=0%	EE(%)	ED<5%	EE(%)	ED<9.5%	EE(%)	ED<14%	EE(%)
A	0.4000	0.0000	0.3996	0.1798	0.3944	1.9246	0.3881	2.6580
	-0.0754	0.0000	-0.0804	14.642	-0.1128	70.5760	-0.1323	165.760
	0.0238	0.0000	0.0416	136.07	0.0548	284.640	0.0725	898.460
	0.0049	0.0000	-0.0247	1310.3	-0.0618	1938.70	-0.0797	3518.10
	0.0004	0.0000	-0.0199	12488.0	-0.0502	20558.0	-0.0772	30891.0
	2.29e-5	0.0000	-0.0159	1.9e+05	-0.0461	3.7e+05	-0.0719	2.2e+05
B	0.4000	0.0000	0.3984	0.40182	0.3969	0.78085	0.3938	1.5549
	-0.0754	0.0000	-0.0812	7.6556	-0.0817	8.3523	-0.0820	8.7968
	0.0238	0.0000	0.0332	39.4500	0.0429	80.2100	0.0483	102.730
	0.0049	0.0000	-0.0129	362.720	-0.0316	745.030	-0.0555	1231.70
	0.0004	0.0000	-0.0103	2680.90	-0.0196	5009.30	-0.0300	7586.20
	2.29e-5	0.0000	-0.0070	30801.0	-0.0141	61721.0	-0.0224	98066.0
C	0.4000	0.0000	0.4002	0.0369	0.3998	0.0412	0.3990	0.2427
	-0.0754	0.0000	-0.0755	0.1882	-0.0757	0.3910	-0.0759	0.6063
	0.0238	0.0000	0.0260	7.0550	0.0261	9.5340	0.0255	7.1097
	0.0049	0.0000	0.0035	28.9640	0.0018	62.3580	-3.3e-05	100.660
	0.0004	0.0000	-0.0002	137.630	-0.0014	457.580	-0.0036	973.410
	2.29e-5	0.0000	-0.0003	1490.20	-0.0009	4035.80	-0.0017	7715.50

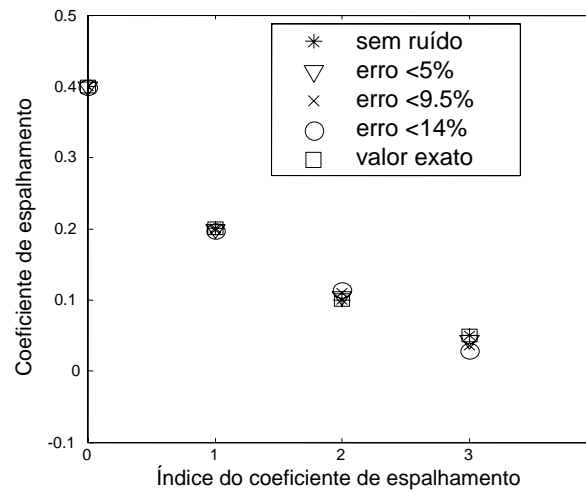
Caso teste 1A - $\sigma_t = 0.5 \text{ cm}^{-1}$.Caso teste 1B - $\sigma_t = 0.8 \text{ cm}^{-1}$.Caso teste 1C - $\sigma_t = 1.2 \text{ cm}^{-1}$.**Figura 9** – Valores calculados para os coeficientes de espalhamento. Caso teste 1.

$$(\sigma_{sl} = [0.4, 0.2, 0.1, 0.0] \text{ cm}^{-1}). L = 0.5 \text{ cm}. N = 32.$$

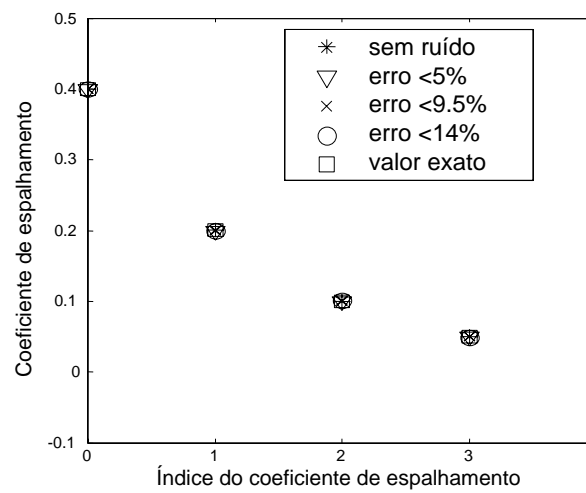
Erro no dado experimental: * = 0%, ▽ < 5%, × < 9.5% e ○ < 14%.



Caso teste 2A - $\sigma_t = 0.5 \text{ cm}^{-1}$.

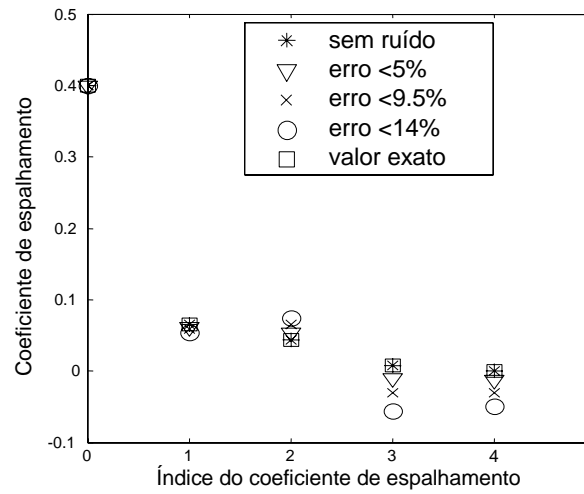
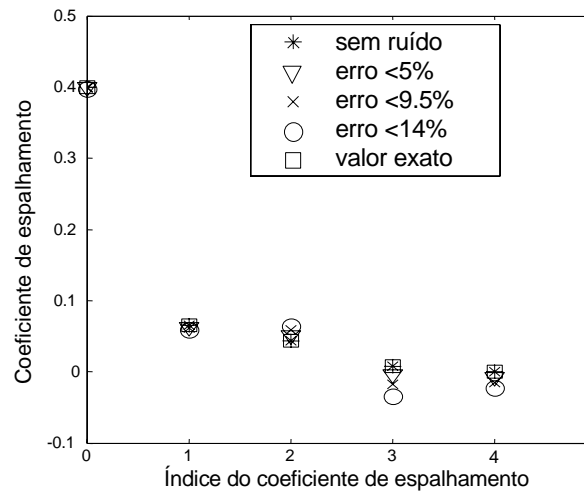
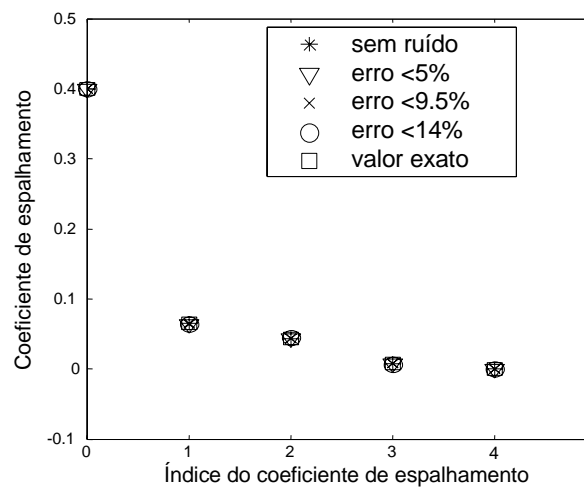


Caso teste 2B - $\sigma_t = 0.8 \text{ cm}^{-1}$.



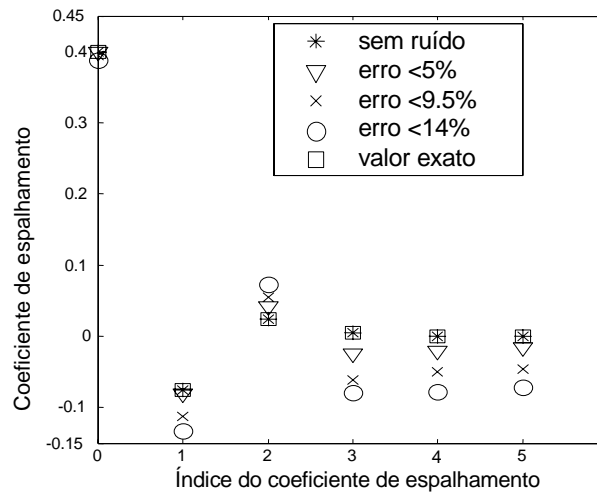
Caso teste 2C - $\sigma_t = 1.2 \text{ cm}^{-1}$.

Figura 10 - Valores calculados para os coeficientes de espalhamento. Caso teste 2 ($\sigma_{sl} = [0.4, 0.2, 0.1, 0.05, 0.0] \text{ cm}^{-1}$). $L = 0.5 \text{ cm}$. $N = 32$. Erro no dado experimental: * = 0%, ∇ <5%, \times <9.5% e \circ <14%.

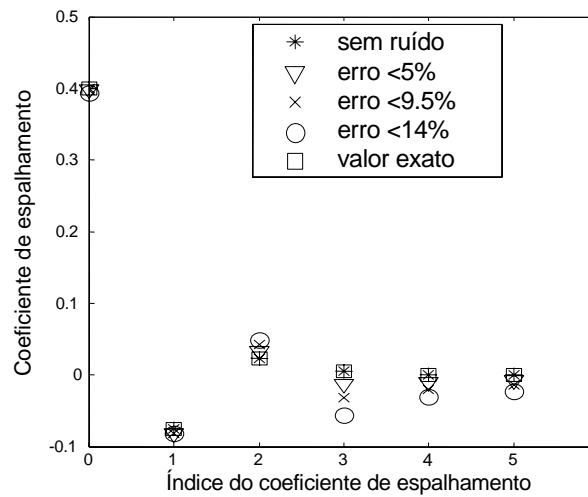
Caso teste 3A - $\sigma_t = 0.5 \text{ cm}^{-1}$.Caso teste 3B - $\sigma_t = 0.8 \text{ cm}^{-1}$.Caso teste 3C - $\sigma_t = 1.2 \text{ cm}^{-1}$.**Figura 11** – Valores calculados para os coeficientes de espalhamento. Caso teste 3.

($\sigma_{sl} = [0.4, 0.0647, 0.0431, 0.0080, 1.7E-6, 0.0] \text{ cm}^{-1}$). $L = 0.5 \text{ cm}$. $N = 32$.

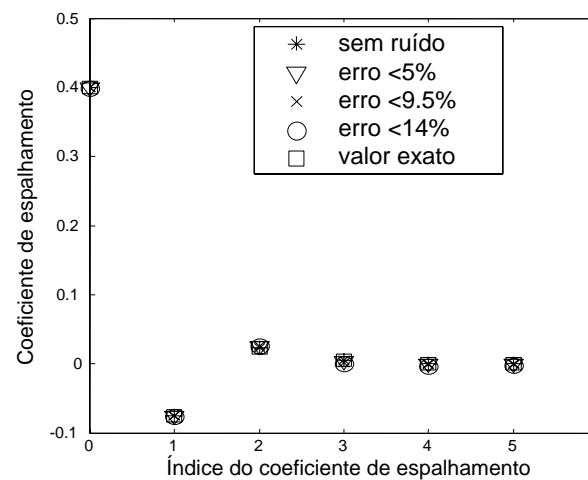
Erro no dado experimental: * = 0%, $\nabla < 5\%$, $\times < 9.5\%$ e $\circ < 14\%$.



Caso teste 4A - $\sigma_t = 0.5 \text{ cm}^{-1}$.



Caso teste 4B - $\sigma_t = 0.8 \text{ cm}^{-1}$.



Caso teste 4C - $\sigma_t = 1.2 \text{ cm}^{-1}$.

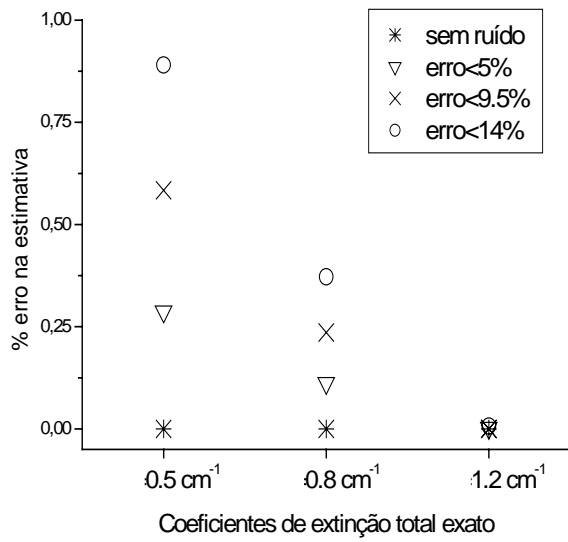
Figura 12 - Valores calculados para os coeficientes de espalhamento. Caso teste 4. ($\sigma_{sl} = [0.4, -0.0754, 0.0238, 0.0049, 0.0004, 2.29E-5, 0.0] \text{ cm}^{-1}$). $L = 0.5 \text{ cm}$. $N = 32$. Erro no dado experimental: * = 0%, $\nabla < 5\%$, $\times < 9.5\%$ e $\circ < 14\%$.

TABELA 5. Valores calculados dos coeficientes de extinção total, $\sigma_t[\text{cm}^{-1}]$.

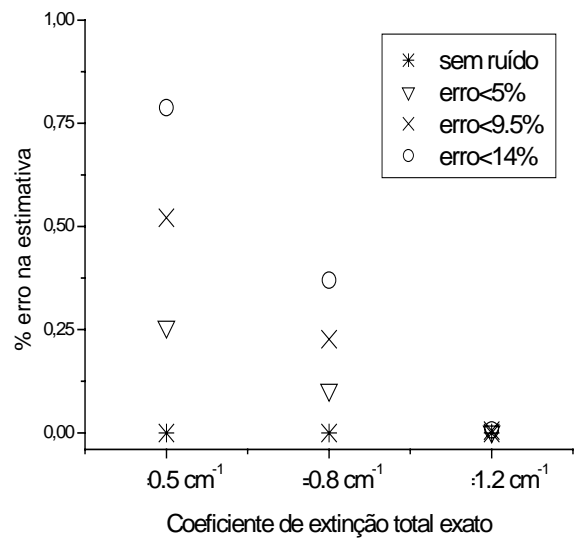
$$L = 0.5 \text{ cm} . N = 32 .$$

(ED = erro no dado experimental; $EE(\%) = \left| \left(\sigma_t^{\text{calculado}} - \sigma_t^{\text{exato}} \right) / \sigma_t^{\text{exato}} \right| \times 100 = \text{erro relativo na estimativa}$)

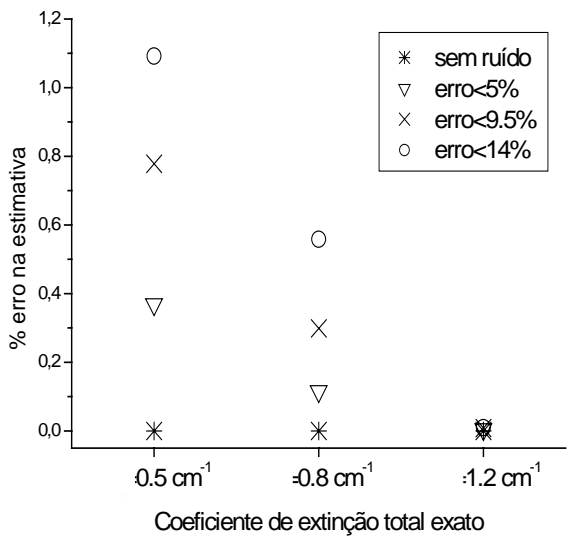
Caso teste	ED=0%	EE(%)	ED<5%	EE(%)	ED<9.5%	EE(%)	ED<14%	EE(%)
1 <u>A</u>	0.5000	0.0000	0.5014	0.2872	0.5029	0.5837	0.5045	0.8903
<u>B</u>	0.8000	0.0000	0.8009	0.1121	0.8019	0.2362	0.8030	0.3724
<u>C</u>	1.2000	0.0000	1.2000	0.0022	1.2000	0.0003	1.2001	0.0072
2 <u>A</u>	0.5000	0.0000	0.5013	0.2572	0.5026	0.5213	0.5039	0.7883
<u>B</u>	0.8000	0.0000	0.8008	0.1041	0.8018	0.2271	0.8030	0.3697
<u>C</u>	1.2000	0.0000	1.2000	0.0034	1.1999	0.0058	1.1999	0.0072
3 <u>A</u>	0.5000	0.0000	0.5018	0.3690	0.5039	0.7785	0.5055	1.0917
<u>B</u>	0.8000	0.0000	0.8009	0.1155	0.8024	0.2985	0.8045	0.5584
<u>C</u>	1.2000	0.0000	1.1999	0.0049	1.1999	0.0082	1.1999	0.0099
4 <u>A</u>	0.5000	0.0000	0.5015	0.2977	0.4988	0.4021	0.4957	0.8669
<u>B</u>	0.8000	0.0000	0.7999	0.0171	0.8026	0.3239	0.8069	0.8573
<u>C</u>	1.2000	0.0000	1.1999	0.0124	1.2002	0.0166	1.2011	0.0902



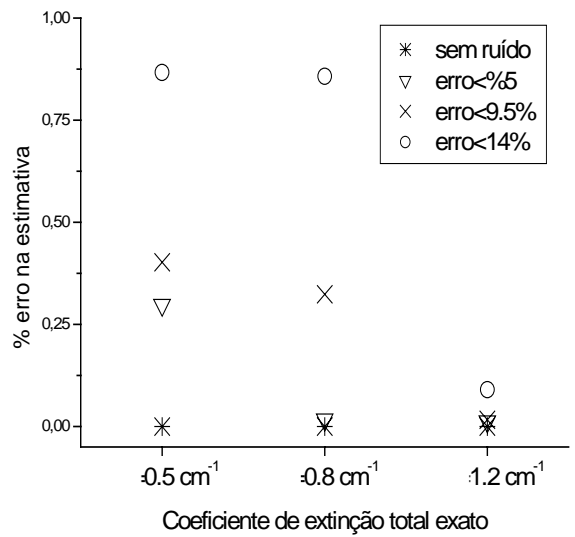
a) Caso teste 1



b) Caso teste 2



c) Caso teste 3



d) Caso teste 4

Figura 13 – Erros relativos nas estimativas para os coeficientes de extinção. Casos teste 1-4. $L = 0.5 \text{ cm}$. Erro no dado experimental: $*$ = 0%, ∇ < 5%, x < 9.5% e o < 14%.

Os resultados apresentados nas Tabelas 2-5 mostram que a formulação explícita matricial consegue estimar os coeficientes de extinção e de espalhamento (em geral, os dois primeiros termos) com uma razoável precisão, ainda que em presença de ruído nos dados experimentais.

Nos casos teste A, que simulam meios altamente espalhadores, foram obtidos os valores mais altos dos erros nas estimativas tanto dos coeficientes de espalhamento como dos coeficientes de extinção; e as estimativas com menores erros encontram-se nos casos teste C os quais simulam meios pouco espalhadores. Isto pode ser observado claramente para os coeficientes de extinção na Fig. 13.

Os erros nas estimativas também são afetados pela ordem de expansão da função de fase de espalhamento. Os Casos teste 1 apresentam os menores erros nas estimativas destes coeficientes.

Concordando com a observação feita por SILVA NETO e ÖZISIK (1995) os valores estimados dos termos de mais alta ordem são mais afetados pelo ruído nos dados experimentais.

É sabido, da teoria geral das aproximações, que uma maior ordem de discretização consegue melhores estimativas, o que foi corroborado com o segundo teste.

No seguinte passo testamos o desempenho do algoritmo para diferentes ordens de discretização e para dois valores diferentes de espessura da placa.

4.1.3 Efeitos da discretização do domínio angular na formulação explícita matricial

Usando casos testes estabelecidos no capítulo anterior são aqui estudados os efeitos da ordem de discretização do domínio angular na formulação explícita matricial do problema inverso de estimativa dos coeficientes de extinção total e de espalhamento proposto.

A. Casos Teste

Foram derivados quatro casos teste, com base nos casos teste 3 e 4 da Tabela 1, para um coeficiente de extinção $\sigma_t = 0.5 \text{ cm}^{-1}$ e para duas espessuras diferentes da placa, $L = 0.5 \text{ cm}$ e $L = 2 \text{ cm}$, como se mostra na Tabela 6.

TABELA 6- Valores exatos dos coeficientes de espalhamento, $\sigma_{sl} [\text{cm}^{-1}]$.

Casos teste 5 - 6. $\sigma_t = 0.5 \text{ cm}^{-1}$.

Caso teste	Coefficientes de espalhamento.	$L[\text{cm}]$
5 $\frac{A}{B}$	[0.4, 0.0647, 0.0431, 0.0080, 1.7E-6, 0.0]	0.5
		2.0
6 $\frac{A}{B}$	[0.4, -0.0754, 0.0238, 0.0049, 0.0004, 2.29E-5, 0.0]	0.5
		2.0

Considerou-se ordens de discretização entre $N = 16$ até $N = 88$ pontos para uma espessura $L = 0.5 \text{ cm}$ e até $N = 36$ para quando $L = 2 \text{ cm}$.

A ordem de discretização inicial $N = 16$ é válido para os dois casos escolhidos considerando o mínimo número de discretizações requerido para o número de coeficientes da expansão da função de fase a ser usados no algoritmo.

B. Resultados

Nas Figs. 14 e 15 mostram-se os valores calculados para os coeficientes de espalhamento nos casos teste 5, e nas Figs. 16 e 17 os resultados correspondentes aos casos teste 6.

Nas Tabelas 7 e 8 apresentam-se os resultados obtidos nas estimativas dos coeficientes de extinção e nas Figs. 18 e 19 os gráficos dos erros relativos destas estimativas, para os Casos teste 5 e 6, respectivamente.

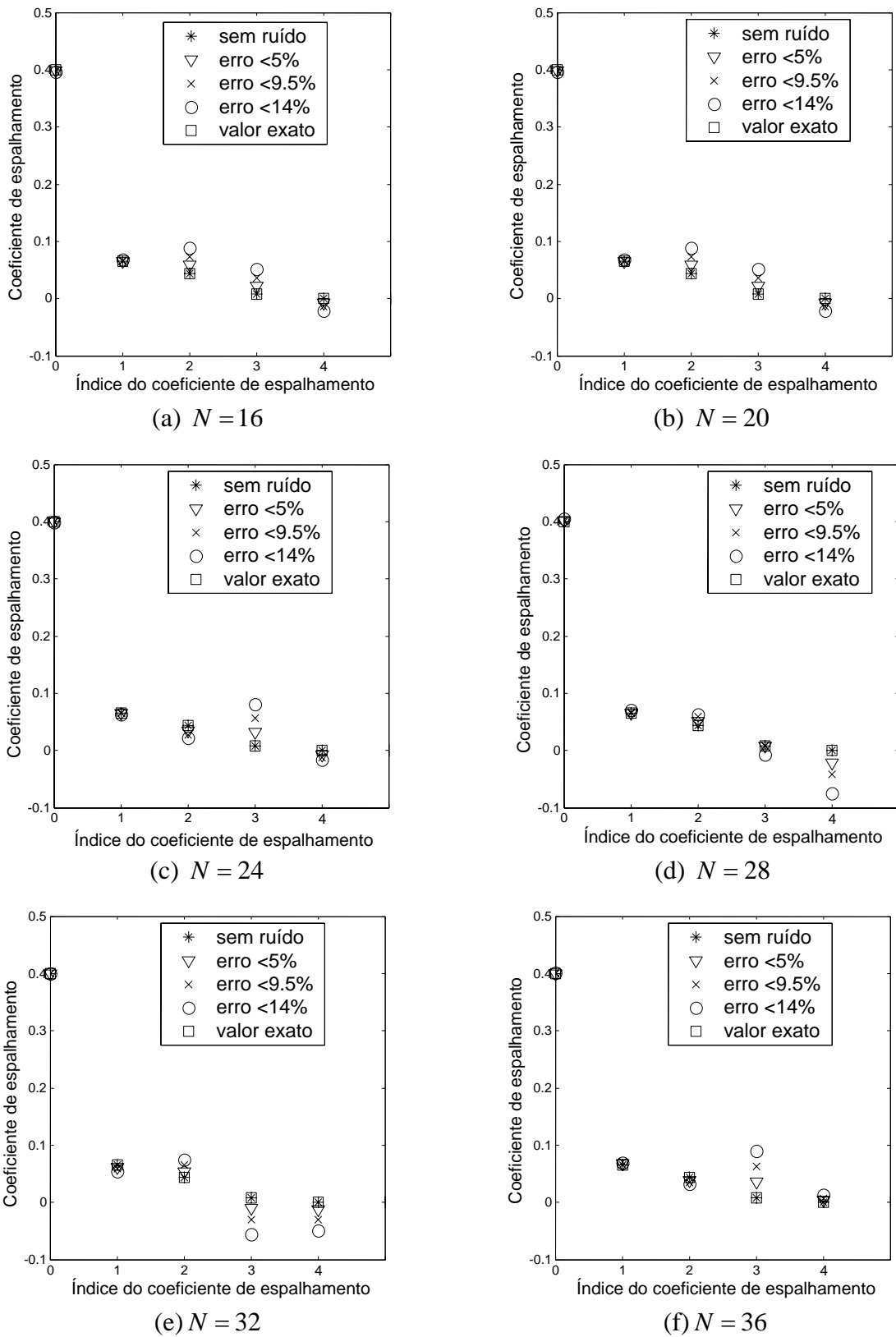
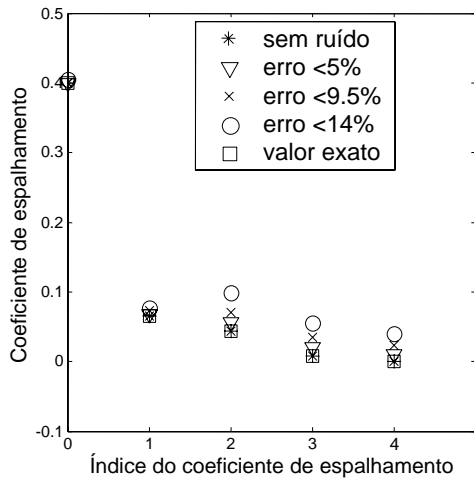
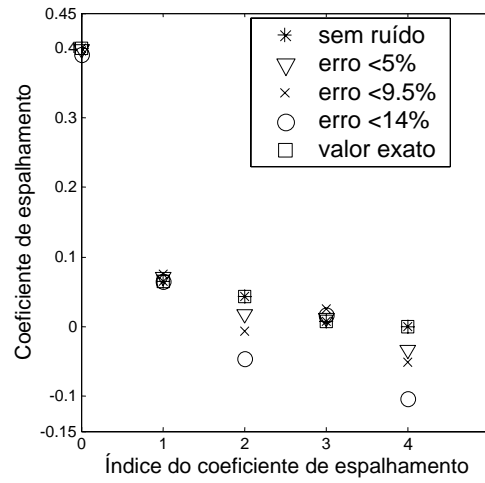


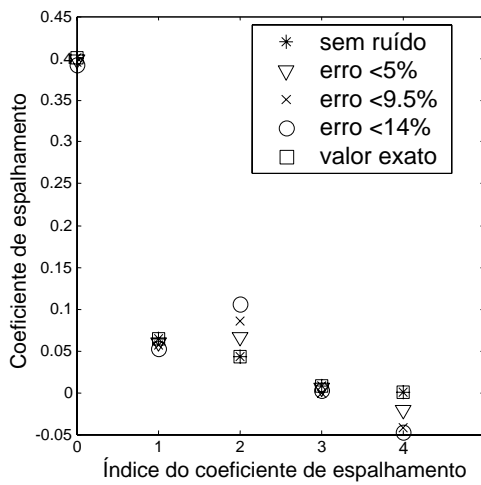
Figura 14 – Valores calculados para os coeficientes de espalhamento. Caso teste 5A. $(\sigma_{sl} = [0.4, 0.06469, 0.04312, 0.008, 1.7778E-006, 0.00] \text{cm}^{-1})$. $\sigma_t = 0.5 \text{ cm}^{-1}$. $L = 0.5 \text{ cm}$. Erro no dado experimental: * = 0%, ∇ < 5%, \times < 9.5% e \circ < 14%.



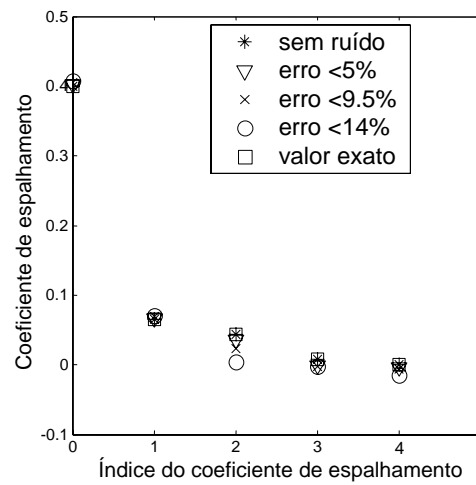
(g) $N = 40$



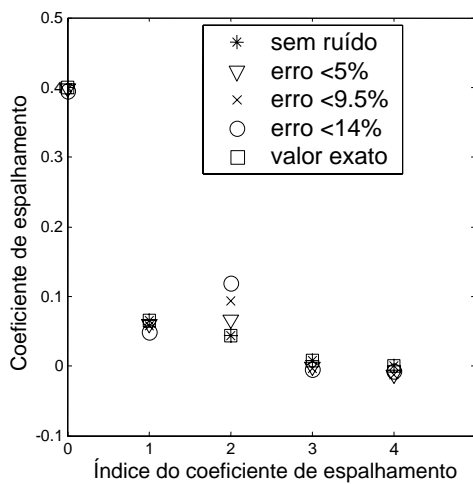
(h) $N = 44$



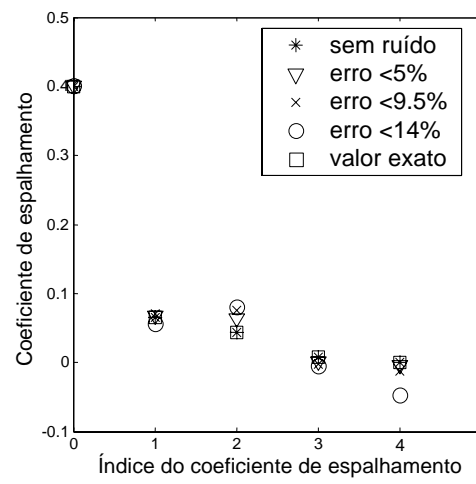
(i) $N = 48$



(j) $N = 52$



(k) $N = 72$



(l) $N = 88$

Figura 14(continuação) – Valores calculados para os coeficientes de espalhamento. Caso teste 5A. $(\sigma_{sl} = [0.4, 0.06469, 0.04312, 0.008, 1.7778E-006, 0.00] \text{cm}^{-1})$. $\sigma_l = 0.5 \text{ cm}^{-1}$. $L = 0.5 \text{ cm}$. Erro no dado experimental: * = 0%, $\nabla < 5\%$, $\times < 9.5\%$ e $\circ < 14\%$.

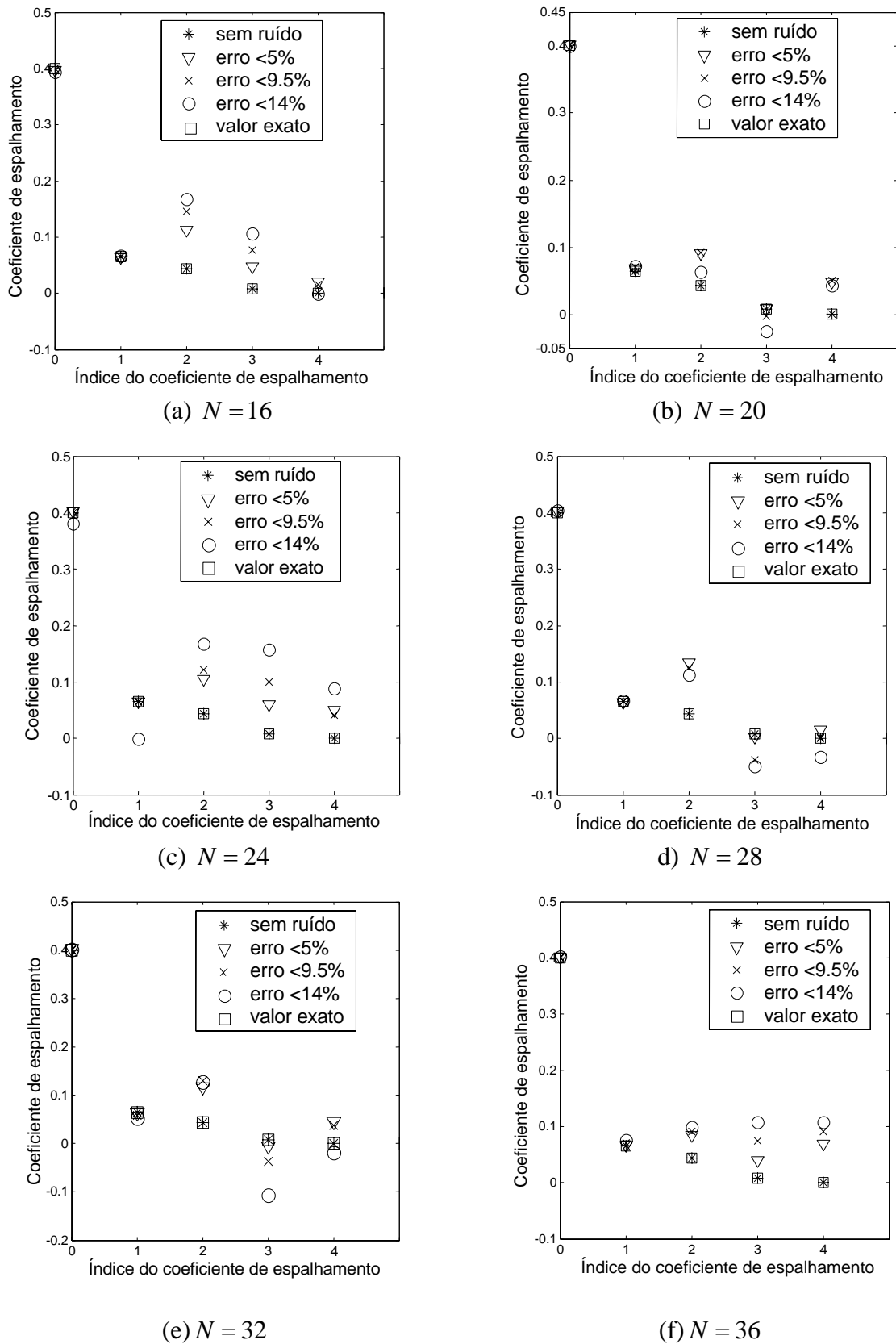


Figura 15 – Valores calculados para os coeficientes de espalhamento. Caso teste 5B. $(\sigma_{sl} = [0.4, 0.06469, 0.04312, 0.008, 1.7778E-006, 0.00] \text{cm}^{-1})$. $\sigma_t = 0.5 \text{ cm}^{-1}$. $L = 0.2 \text{ cm}$.

Erro no dado experimental: $*$ = 0%, Δ < 5%, \times < 9.5% e O < 14%.

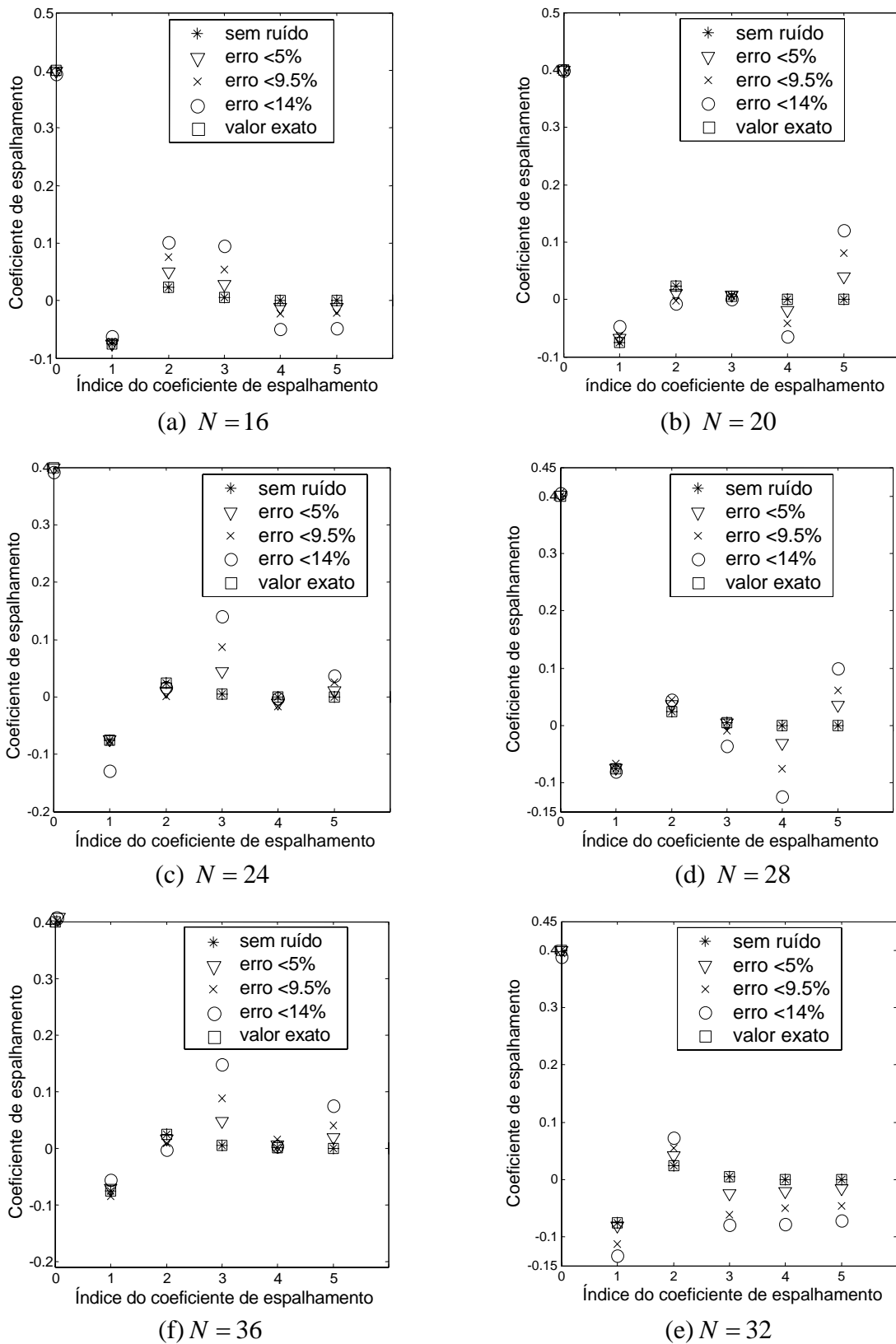
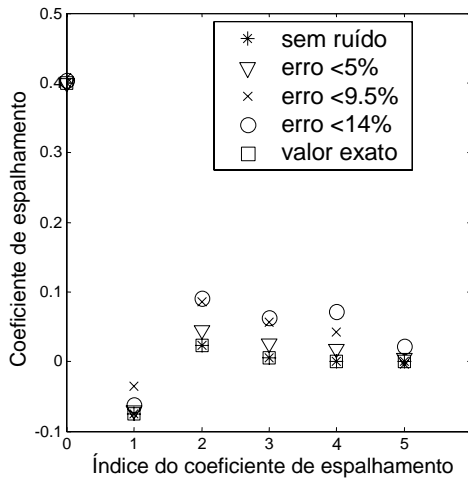
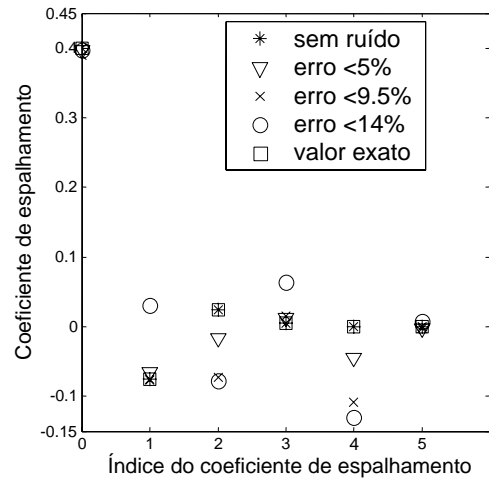


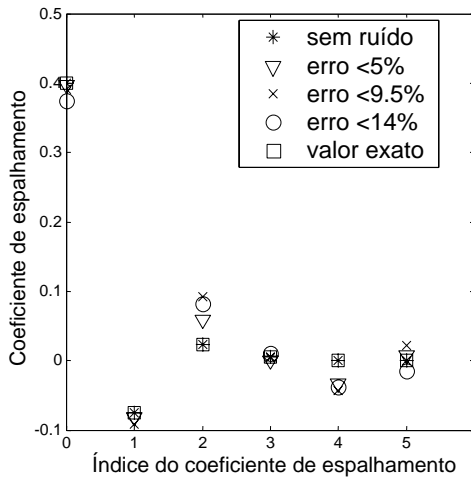
Figura 16 - Valores calculados para os coeficientes de espalhamento. Caso teste 6A. $(\sigma_{sl} = [0.4, -0.0754, 0.0238, 0.0049, 0.004, 2.29E-06, 0.00] \text{cm}^{-1})$. $\sigma_t = 0.5 \text{ cm}^{-1}$. $L = 0.5 \text{ cm}$. Erro no dado experimental: * = 0%, ▽ < 5%, × < 9.5% e ○ < 14%.



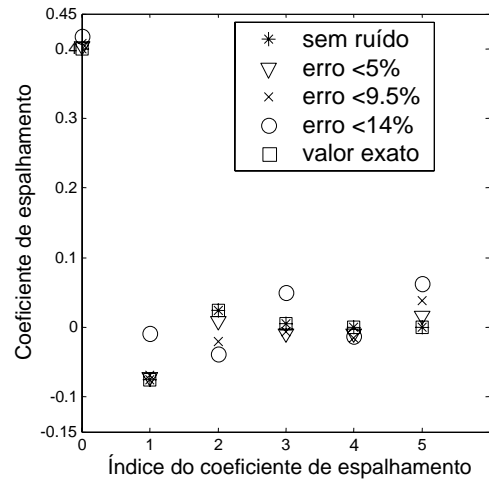
(g) $N = 40$



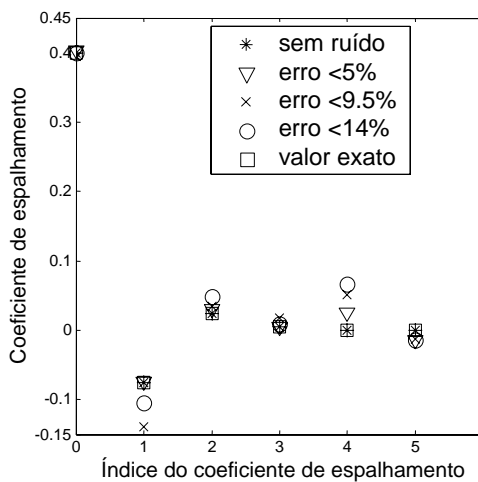
(h) $N = 44$



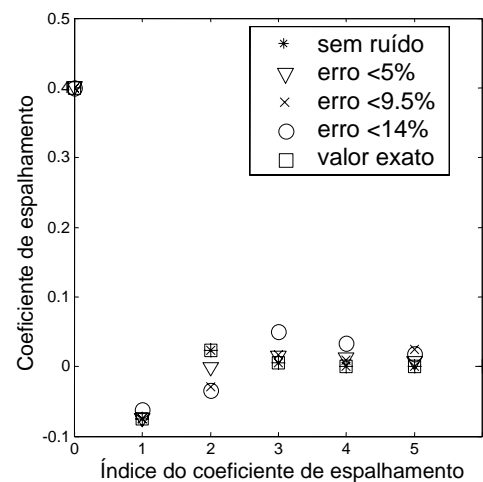
(i) $N = 48$



(j) $N = 52$

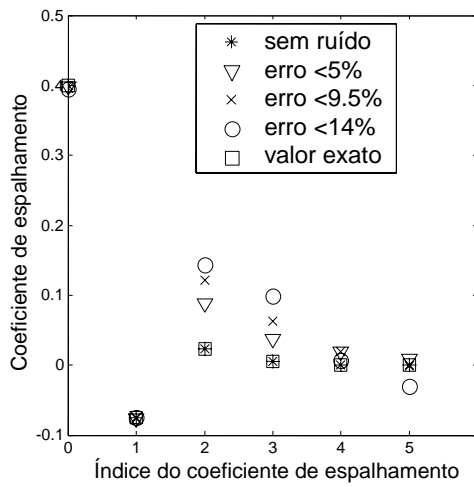


(k) $N = 56$

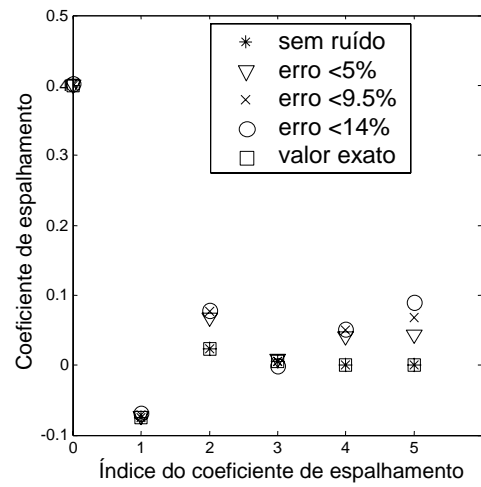


(l) $N = 64$

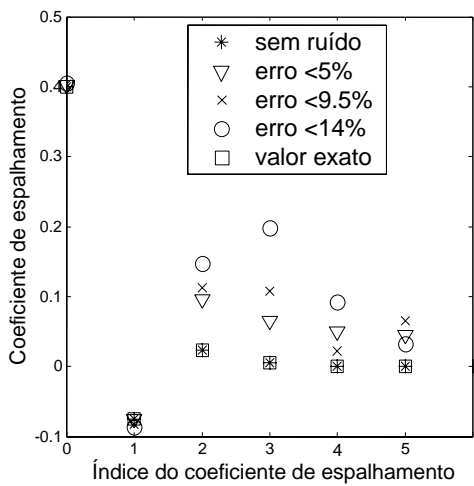
Figura 16 (continuação) – Valores calculados para os coeficientes de espalhamento. Caso teste 6A. $(\sigma_{sl} = [0.4, -0.0754, 0.0238, 0.0049, 0.004, 2.29E-06, 0.00] \text{cm}^{-1})$. $\sigma_t = 0.5 \text{ cm}^{-1}$. $L = 0.5 \text{ cm}$. Erro no dado experimental: * = 0%, $\nabla < 5\%$, $\times < 9.5\%$ e $\circ < 14\%$.



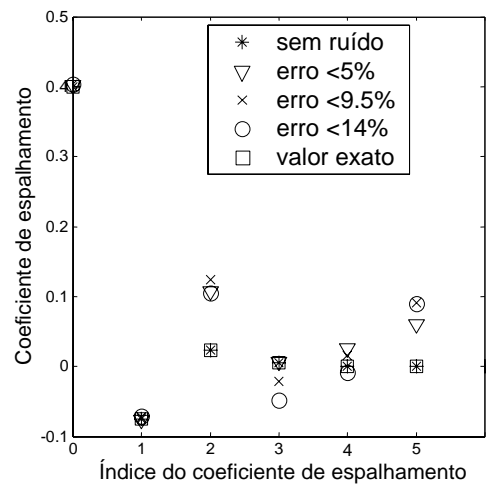
(a) $N = 16$



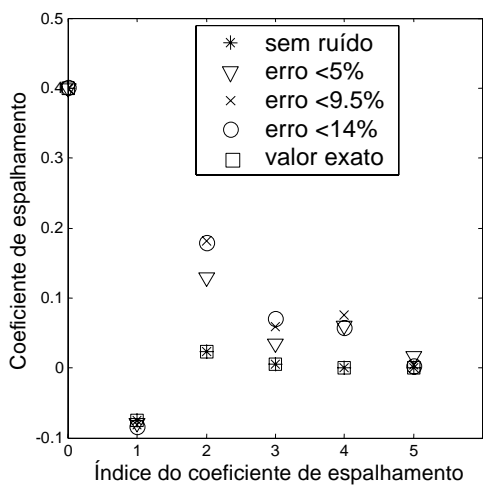
(b) $N = 20$



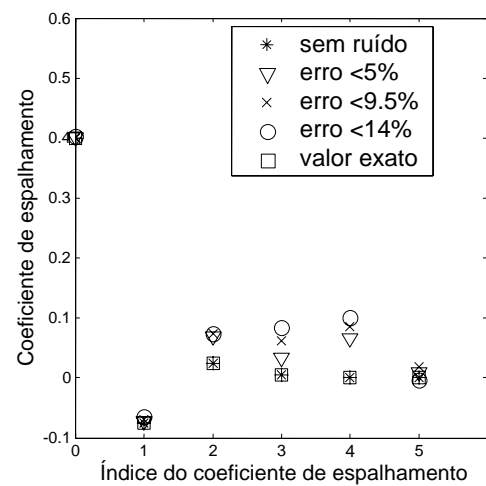
(c) $N = 24$



(d) $N = 28$



(e) $N = 30$



(f) $N = 32$

Figura 17 – Valores calculados para os coeficientes de espalhamento. Caso teste 6B. $(\sigma_{sl} = [0.4, -0.0754, 0.0238, 0.0049, 0.004, 2.29E-06, 0.00] \text{cm}^{-1})$. $\sigma_t = 0.5 \text{ cm}^{-1}$. $L = 2.0 \text{ cm}$. Erro no dado experimental: * = 0%, $\nabla < 5\%$, $\times < 9.5\%$ e $\circ < 14\%$.

TABELA 7. Valores calculados dos coeficientes de extinção total, σ_t^{exato} [cm^{-1}]. Caso teste 5.

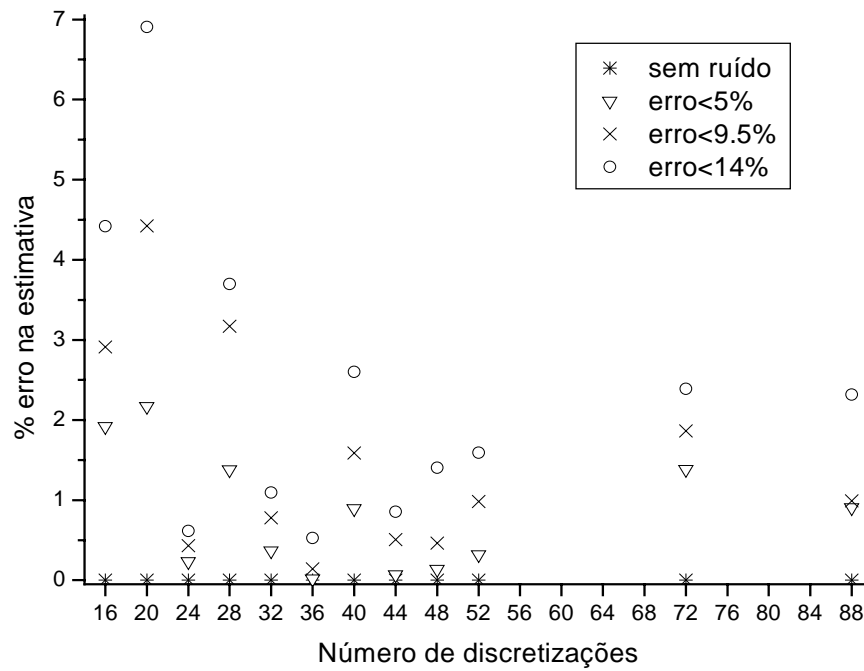
(ED = erro no dado experimental; $\text{EE}(\%) = \left| \left(\sigma_t^{\text{calculado}} - \sigma_t^{\text{exato}} \right) / \sigma_t^{\text{exato}} \right| \times 100 = \text{erro relativo na estimativa}$)

(a) $L = 0.5\text{cm}$.

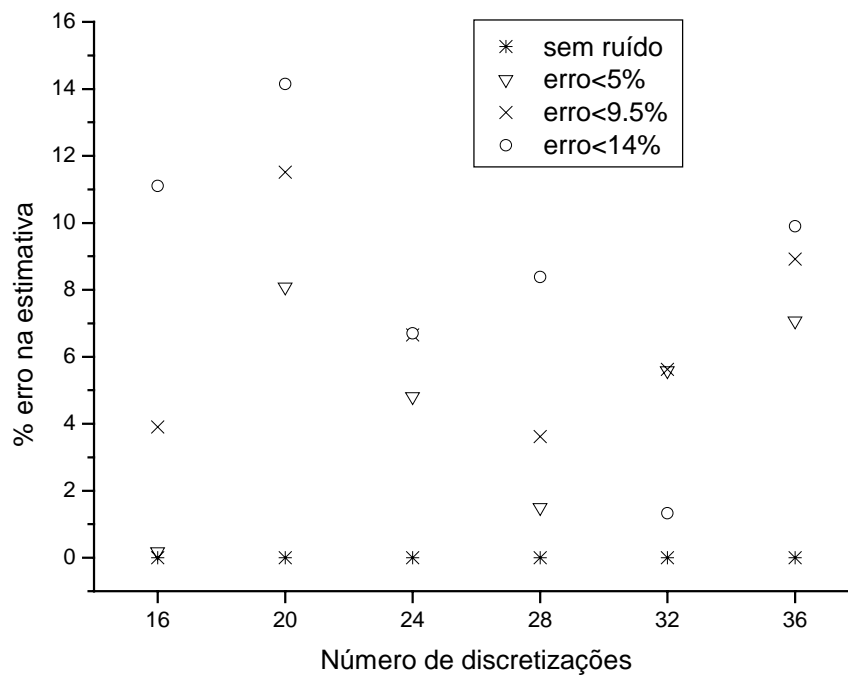
N	ED=0%	EE(%)	ED<5%	EE(%)	ED<9.5%	EE(%)	ED<14%	EE(%)
16	0.5000	0.0000	0.5072	1.9192	0.5146	2.9129	0.5221	4.4205
20	0.5000	0.0000	0.4891	2.1716	0.4779	4.4241	0.4655	6.9052
24	0.5000	0.0000	0.5012	0.2330	0.5022	0.4327	0.5031	0.6173
28	0.5000	0.0000	0.5069	1.3809	0.5159	3.1729	0.5185	3.6957
32	0.5000	0.0000	0.5018	0.3691	0.5039	0.7788	0.5055	1.0922
36	0.5000	0.0000	0.5001	0.0193	0.5007	0.1420	0.5026	0.5289
40	0.5000	0.0000	0.4955	0.8930	0.4921	1.5873	0.4870	2.6000
44	0.5000	0.0000	0.4996	0.0704	0.5025	0.5081	0.5043	0.8566
48	0.5000	0.0000	0.5007	0.1380	0.5023	0.4644	0.5070	1.4045
52	0.5000	0.0000	0.5016	0.3207	0.5049	0.9826	0.5080	1.5923
72	0.5000	0.0000	0.4931	1.3867	0.4907	1.8643	0.4881	2.3884
88	0.5000	0.0000	0.4955	0.9081	0.4950	0.9901	0.4884	2.3186

(b) $L = 2.0\text{cm}$.

N	ED=0%	EE(%)	ED<5%	EE(%)	ED<9.5%	EE(%)	ED<14%	EE(%)
16	0.5000	0.0000	0.4991	0.1846	0.5195	3.9021	0.5555	11.1070
20	0.5000	0.0000	0.4596	8.0889	0.4424	11.5161	0.4292	14.1505
24	0.5000	0.0000	0.4759	4.8149	0.4667	6.6591	0.4665	6.7063
28	0.5000	0.0000	0.5075	1.5019	0.4819	3.6180	0.4581	8.3789
32	0.5000	0.0000	0.4721	5.5889	0.4719	5.6233	0.4934	1.3252
36	0.5000	0.0000	0.4646	7.0750	0.4554	8.9192	0.4505	9.8984



a) Caso teste 5A - $L = 0.5\text{cm}$



b) Caso teste 5B - $L = 2.0\text{cm}$

Figura 18 – Erros relativos nas estimativas do coeficiente de extinção total. Caso teste 5.

$(\sigma_{sl} = [0.4, 0.06469, 0.04312, 0.008, 1.7778\text{E-}006, 0.00]\text{cm}^{-1})$. $\sigma_t^{\text{exato}} [\text{cm}^{-1}]$. $L = 0.5\text{cm}$.

Erro no dado experimental: * = 0%, ▽ < 5%, × < 9.5% e ○ < 14%.

TABELA 8. Valores calculados dos coeficientes de extinção total, $\sigma_t^{\text{exato}}[\text{cm}^{-1}]$. Caso teste 6.

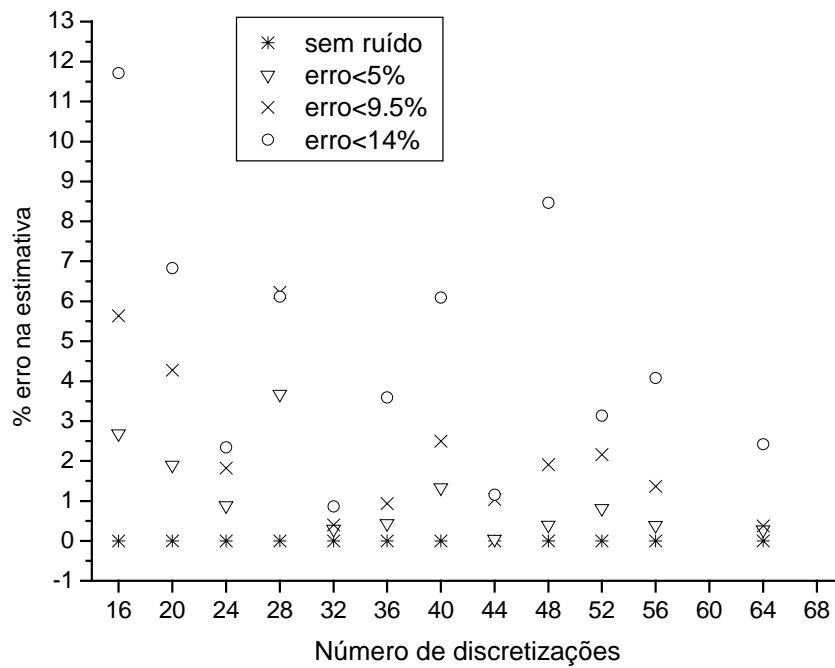
(ED = erro no dado experimental; $\text{EE}(\%) = \left| \left(\sigma_t^{\text{calculado}} - \sigma_t^{\text{exato}} \right) / \sigma_t^{\text{exato}} \right| \times 100 = \text{erro relativo na estimativa}$)

(a) Caso teste 6A. $L = 0.5\text{cm}$.

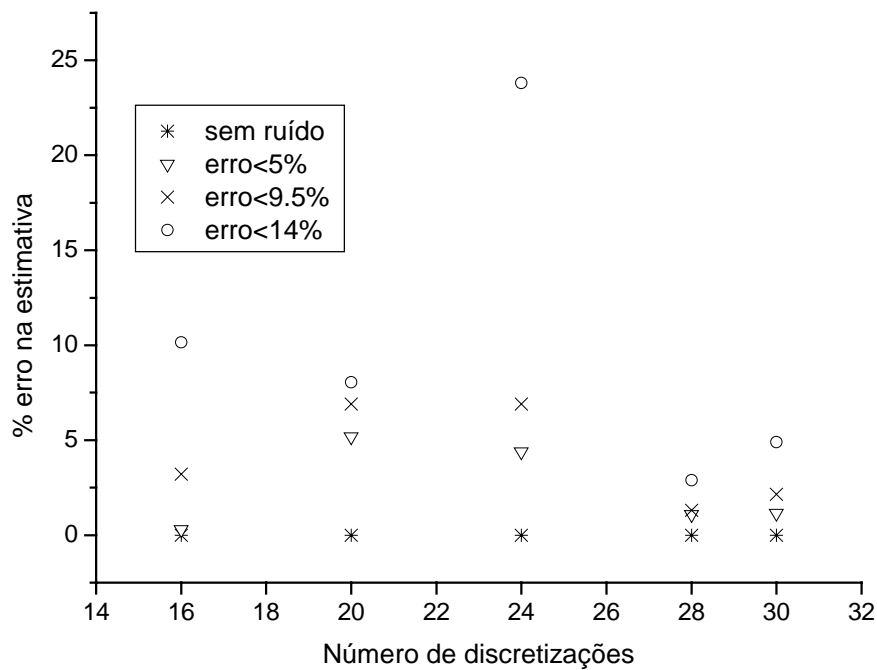
N	ED=0%	EE(%)	ED<5%	EE(%)	ED<9.5%	EE(%)	ED<14%	EE(%)
16	0.5000	0.0000	0.5134	2.6878	0.5282	5.6339	0.5585	11.7079
20	0.5000	0.0000	0.4905	1.8971	0.4786	4.2752	0.4658	6.8304
24	0.5000	0.0000	0.5044	0.8886	0.5091	1.8223	0.5117	2.3426
28	0.5000	0.0000	0.5184	3.6774	0.5311	6.2249	0.5306	6.1136
32	0.5000	0.0000	0.5015	0.2977	0.4988	0.4021	0.4957	0.8669
36	0.5000	0.0000	0.5022	0.4407	0.5047	0.9314	0.5179	3.5882
40	0.5000	0.0000	0.4933	1.3350	0.4933	2.5011	0.4875	6.0894
44	0.5000	0.0000	0.5002	0.0493	0.5052	1.0371	0.5058	1.1567
48	0.5000	0.0000	0.5020	0.4009	0.5096	1.9117	0.5423	8.4651
52	0.5000	0.0000	0.5041	0.8189	0.5108	2.1564	0.5173	3.1329
56	0.5000	0.0000	0.4981	0.3879	0.4932	1.3667	0.4796	4.0755
64	0.5000	0.0000	0.5014	0.2846	0.4981	0.3720	0.4879	2.4177

(b) Caso teste 6B. $L = 2.0 \text{ cm}$.

N	ED=0%	EE(%)	ED<5%	EE(%)	ED<9.5%	EE(%)	ED<14%	EE(%)
16	0.5000	0.0000	0.5015	0.2928	0.5160	3.2099	0.5508	10.1583
20	0.5000	0.0000	0.4741	5.1885	0.4655	6.9073	0.4598	8.0460
24	0.5000	0.0000	0.4781	4.3865	0.4655	6.8998	0.3810	23.8056
28	0.5000	0.0000	0.5055	1.0914	0.5065	1.3099	0.4856	2.8885
30	0.5000	0.0000	0.4943	1.1470	0.5108	2.1570	0.4755	4.8923



a) Caso teste 6A - $L = 0.5\text{cm}$



b) Caso teste 6B - $L = 2.0\text{ cm}$.

Figura 19 – Erros relativos nas estimativas do coeficiente de extinção total. Caso teste 6. $(\sigma_{sl} = [0.4, -0.0754, 0.0238, 0.0049, 0.004, 2.29E-06, 0.00]\text{cm}^{-1})$. $\sigma_i^{\text{exato}} [\text{cm}^{-1}]$. $L=20\text{cm}$. Erro no dado experimental: $*$ =0%, ∇ < 5%, x < 9.5% e o < 14%.

Os valores aqui mostrados correspondem à faixa na qual os resultados convergem para os valores exatos dos coeficientes procurados quando são usados dados experimentais sem ruído.

Para uma maior discretização angular o algoritmo não converge para todos os valores exatos dos coeficientes, mesmo quando usados dados experimentais sem ruído. Nestes casos as matrizes envolvidas no cálculo apresentam um número de condição da ordem de $E+19$ ou mais.

No caso teste 5A as melhores estimativas para ambos coeficientes encontram-se entre $N = 24$ até $N = 52$ e no caso teste 5B entre $N = 24$ até $N = 36$.

Nas estimativas do coeficiente de extinção do caso teste 5A destacam-se os resultados obtido com $N = 24, 36$ e 44 , os quais alcançaram erros menores que 1% para dados com nível de ruído de até 14% no primeiro termo, como pode ser observado na Tabela 7.

Abaixo desta faixa os erros são maiores do que 4%, ao passo que acima são observados erros maiores do que 1%. Apesar de se esperar que precisão das aproximações melhores com o aumento das discretizações, tal não ocorre em vista do rápido aumento dos números de condição das matrizes.

Para o caso teste 5B, observa-se da Tabela 7(b) que as três melhores estimativas encontram-se em $N = 24$ e $N = 28$.

Os resultados para os casos teste 6 apresentam resposta semelhante aos casos teste 5 como pode ser observado nas Figs. 16,17 e 19. Da Tabela 13 tem-se que as melhores

estimativas do coeficiente de extinção para o caso teste 6A encontram-se em $N = 24, 32$ e 44 ; e para o caso teste 6A em $N = 28$ e $N = 30$.

Para ambos casos as estimativas obtidas com $L = 0.5$ cm são muito melhores do que as obtidas com $L = 2.0$ cm.

Das Figs. 14-19 e Tabelas 7 e 8, tem-se que os melhores resultados nas estimativas foram obtidas para valores de N entre 24 e 44. Para menores valores de N os erros são maiores nas estimativas, e para valores maiores o algoritmo não converge para todos os valores exatos.

4.2 PROBLEMA INVERSO TRANSIENTE

A. Casos teste

Com a finalidade de analisar a performance da formulação explícita matricial estendida para o problema transiente, determinaram-se dois casos testes derivados do caso teste 5A da Tabela 6: o caso teste 7A com $s/c = 0.1 \text{ cm}^{-1}$ e o caso teste 7B com $s/c = 0.2 \text{ cm}^{-1}$ mostrados na tabela 9.

Os valores de s/c foram escolhidos considerando que $s/c > -\sigma_a$.

Do mesmo modo que no problema estacionário foram gerados dados experimentais sintéticos, sem ruído (erro de 0%) e com erros de até 5%, 9.5% e 14%; e considerou-se para o domínio angular, ordens de discretização desde $N = 24$ até $N = 52$.

TABELA 9- Valores exatos dos coeficientes de espalhamento, $\sigma_{sl} [\text{cm}^{-1}]$. Casos teste 7.

$$\sigma_t = 0.5 \text{ cm}^{-1} . L = 0.5 \text{ cm} .$$

Caso teste	Coeficientes de espalhamento.	$\frac{s}{c}$ [cm^{-1}]
7A	[0.4, 0.0647, 0.0431, 0.0080, 1.7E-6, 0.0]	0.1
7B		0.2

B. Resultados

Nas Tabelas 10 e 11, e Figs. 20 e 21 são apresentados os valores calculados para os coeficientes de espalhamento dos casos 7A e 7B, respectivamente.

Na Figura 22 mostra-se o gráfico do % do erro nas estimativas dos coeficientes de extinção total.

Observam-se das Fig. 20 e 21, que as melhores estimativas para os coeficientes de espalhamento no caso teste 7A encontram-se entre $N = 24$ e $N = 36$ e no caso teste 7B entre $N = 24$ e $N = 32$, respectivamente. As estimativas dos primeiros termos têm erros menores de 0.5%, e dos segundos termos são menores de 13% no caso 7A; valores que são maiores em 7B.

TABELA 10. Valores calculados dos coeficientes de espalhamento $\sigma_{sl}[\text{cm}^{-1}]$. Caso teste 7A.

$$\sigma_t^{exato} = 0.5 \text{ cm}^{-1} \cdot L = 0.5 \text{ cm} \cdot \frac{s}{c} = 0.1 \text{ cm}^{-1}$$

(ED = erro no dado experimental; EE(%) = $\left| \left(\sigma_{sl}^{\text{calculado}} - \sigma_{sl}^{\text{exato}} \right) / \sigma_{sl}^{\text{exato}} \right| \times 100$ = erro relativo na estimativa)

N	ED=0%	EE(%)	ED<5%	EE(%)	ED<9.5%	EE(%)	ED<14%	EE(%)
24	0.4000	0.0000	0.3996	0.0898	0.3992	0.0898	0.3986	0.3544
	0.0647	0.0000	0.0655	1.1831	0.0660	1.1831	0.0661	2.2331
	0.0431	0.0000	0.0344	20.1730	0.2676	20.173	0.0205	52.495
	0.0080	0.0000	0.0310	287.670	0.0542	287.67	0.0776	869.75
	1.78e-06	0.0000	-0.0062	3.5e5	-0.0115	3.5e5	-0.0156	8.8e5
32	0.4	0.0000	0.3997	0.0827	0.3991	0.23046	0.3983	0.4276
	0.0647	0.0000	0.0619	4.3655	0.0587	9.3194	0.0551	14.866
	0.0431	0.0000	0.0548	27.007	0.0656	52.046	0.0749	73.608
	0.008	0.0000	-0.0098	222.97	-0.0305	481.57	-0.0544	779.98
	1.78e-06	0.0000	-0.0123	6.9e5	-0.0247	1.4e6	-0.0434	2.4e6
36	0.4000	0.0000	0.4005	0.1221	0.4009	0.2253	0.4012	0.3111
	0.0647	0.0000	0.0678	4.818	0.0706	9.1701	0.0723	12.009
	0.0431	0.0000	0.0360	16.473	0.0278	35.5680	0.0137	68.24
	0.0080	0.0000	0.0351	338.54	0.0616	669.63	0.0871	998.79
	1.78e-06	0.0000	0.0009	54610	-0.0008	39448	-0.0142	8.0e5
44	0.4000	0.0000	0.3959	1.0179	0.3845	3,8691	0.3837	4.0715
	0.0647	0.0000	0.0713	10.217	0.0777	20.075	0.0731	12.928
	0.0431	0.0000	0.0117	72.949	-0.0521	220.73	-0.0381	188.27
	0.0080	0.0000	0.0127	58.105	0.0093	16.307	0.0323	303.18
	1.78e-06	0.0000	-0.0363	2.0e6	-0.1101	6.2e6	0.0983	5.5e6
48	0.4	0.0000	0.3959	1.019	0.3901	2.477	0.3804	4.8977
	0.0647	0.0000	0.0605	6.4431	0.0555	14.225	0.0445	31.143
	0.0431	0.0000	0.0687	59.331	0.0852	97.676	0.1018	136.04
	0.008	0.0000	0.0061	23.911	0.0025	68.243	0.0047	41.181
	1.78e-06	0.0000	-0.0184	1.0e6	-0.0380	2.1e6	-0.0410	2.3e6
52	0.4	0.0000	0.4043	1.0831	0.4114	2.84	0.41787	4.4675
	0.0647	0.0000	0.0660	1.9553	0.0686	6.0647	0.07143	10.423
	0.0431	0.0000	0.0327	24.121	0.0023	94.629	-0.01305	130.27
	0.008	0.0000	-0.0005	105.87	-0.0076	195.04	-0.00472	158.93
	1.78e-06	0.0000	-0.0037	2.1e5	-0.0257	1.5e6	-0.02125	1.2e6

TABELA 11. Valores calculados dos coeficientes de espalhamento $\sigma_{sl}[\text{cm}^{-1}]$. Caso teste 7A.

$$\sigma_t^{\text{exato}} = 0.5 \text{ cm}^{-1} \cdot L = 0.5 \text{ cm} \cdot \frac{s}{c} = 0.2 \text{ cm}^{-1}$$

(ED = erro no dado experimental; EE(%) = $\left| \left(\sigma_{sl}^{\text{calculado}} - \sigma_{sl}^{\text{exato}} \right) / \sigma_{sl}^{\text{exato}} \right| \times 100 = \text{erro relativo na estimativa}$)

N	ED=0%	EE(%)	ED<5%	EE(%)	ED<9.5%	EE(%)	ED<14%	EE(%)
24	0.4000	0.0000	0.3996	0.1125	0.39891	0.27296	0.3981	0.48862
	0.0647	0.0000	0.0654	1.0871	0.06598	1.9918	0.0666	2.8764
	0.0431	0.0000	0.0341	20.824	0.02588	39.984	0.0185	57.022
	0.0080	0.0000	0.0304	279.50	0.05273	559.15	0.0752	840.32
	1.78e-06	0.0000	-0.0055	3.1e5	-0.01036	5.8e5	-0.0143	8.1e5
28	0.4	0.0000	0.4031	0.07688	0.40704	1.7594	0.4105	2.6264
	0.0647	0.0000	0.0648	0.1964	0.06579	1.7060	0.0659	1.8317
	0.0431	0.0000	0.0532	23.2680	0.06225	44.3670	0.0706	63.823
	0.008	0.0000	0.0083	3.4871	-0.00962	20.2330	0.0063	21.238
	1.78e-06	0.0000	-0.0242	1.4e6	-0.04704	2.7e6	-0.0773	4.4e6
32	0.4000	0.0000	0.3995	0.1156	0.39852	0.3700	0.3971	0.7338
	0.0647	0.0000	0.0621	3.9991	0.05915	8.5577	0.0560	13.267
	0.0431	0.0000	0.0550	27.4780	0.06523	51.271	0.0734	70.2830
	0.0080	0.0000	-0.0096	219.310	-0.03064	483.01	-0.0553	790.700
	1.78e-06	0.0000	-0.0116	6.5e5	-0.02318	1.3e6	-0.0394	2.2e6
36	0.4000	0.0000	0.3997	0.0876	0.39583	1.043	0.4012	0.2874
	0.0647	0.0000	0.0675	4.3436	0.06998	8.1788	0.0728	12.453
	0.0431	0.0000	0.0302	30.0740	-0.01467	134.01	0.0251	41.879
	0.0080	0.0000	0.0342	327.000	0.05871	633.82	0.0856	969.76
	1.78e-06	0.0000	-0.0058	3.3e5	-0.05801	3.3e6	0.0098	5.5e5
40	0.4	0.0000	0.3959	1.019	0.39009	2.477	0.3804	4.8977
	0.0647	0.0000	0.0605	6.4431	0.05547	14.225	0.0445	31.143
	0.0431	0.0000	0.0687	59.331	0.08524	97.676	0.1018	136.04
	0.008	0.0000	0.0061	23.911	0.00254	68.243	0.0047	41.181
	1.78e-06	0.0000	-0.0184	1.0e6	-0.03804	2.1e6	-0.0410	2.3e6
44	0.4	0.0000	0.3873	3.1755	0.3881	2.9827	0.3886	2.8533
	0.0647	0.0000	0.0707	9.3533	0.0777	20.1700	0.0762	17.85
	0.0431	0.0000	-0.0168	138.9100	-0.0189	143.7300	-0.0117	127.02
	0.008	0.0000	0.0102	26.997	0.0138	72.6770	-0.0310	287.36
	1.78e-06	0.0000	-0.0657	3.7e6	-0.0989	5.3e6	-0.0549	3.1e6

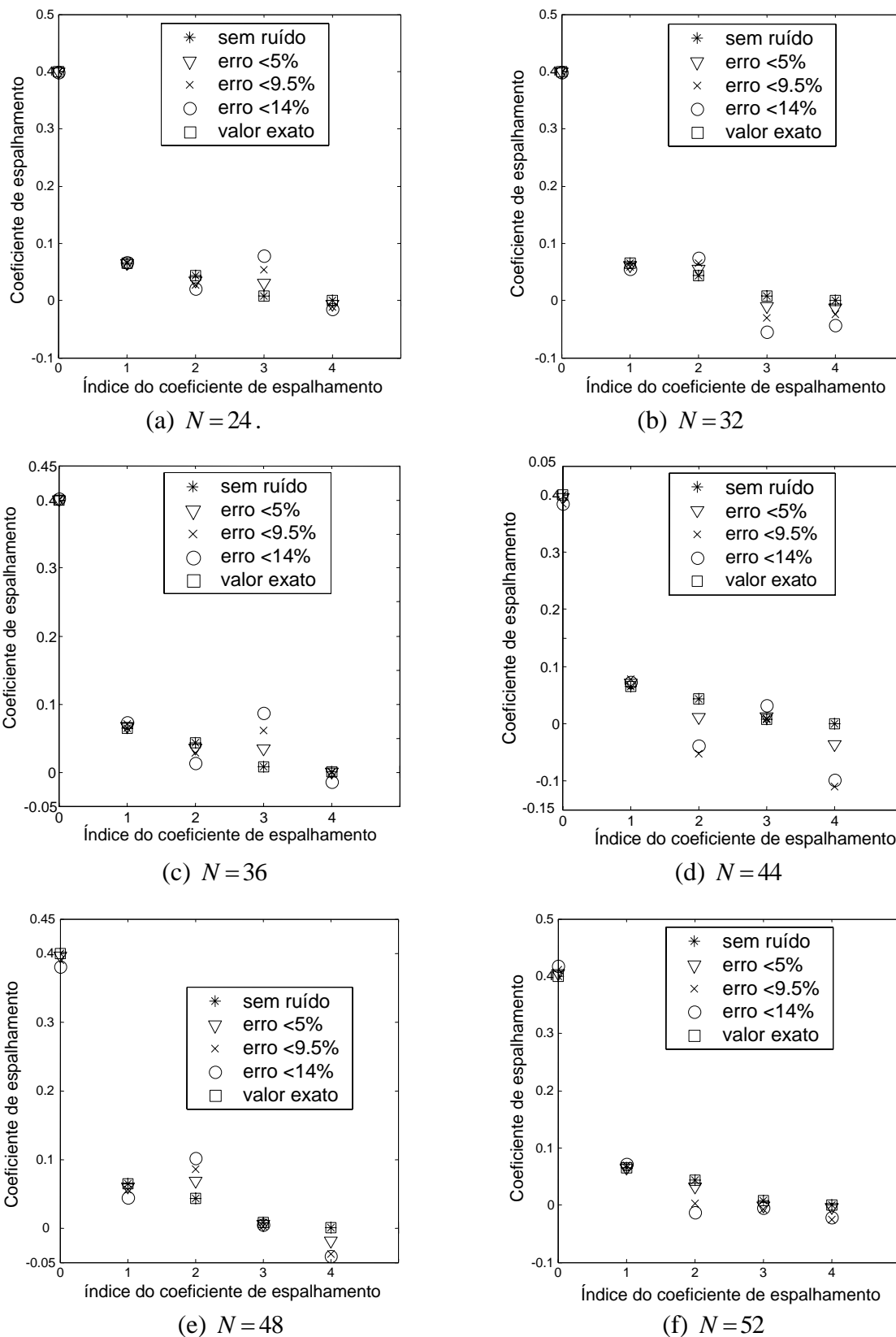


Figura 20 – Valores calculados para os coeficientes de espalhamento. Caso teste 7A. $\sigma_{sl} = [0.4, 0.06469, 0.04312, 0.008, 1.7778E-6, 0.0] \text{ cm}^{-1}$. $L = 0.5 \text{ cm}$. $\sigma_t = 0.5 \text{ cm}^{-1}$. $s/c = 0.1 \text{ cm}^{-1}$. Erro no dado experimental: * = 0%, $\nabla < 5\%$, $\times < 9.5\%$ e $O < 14\%$.

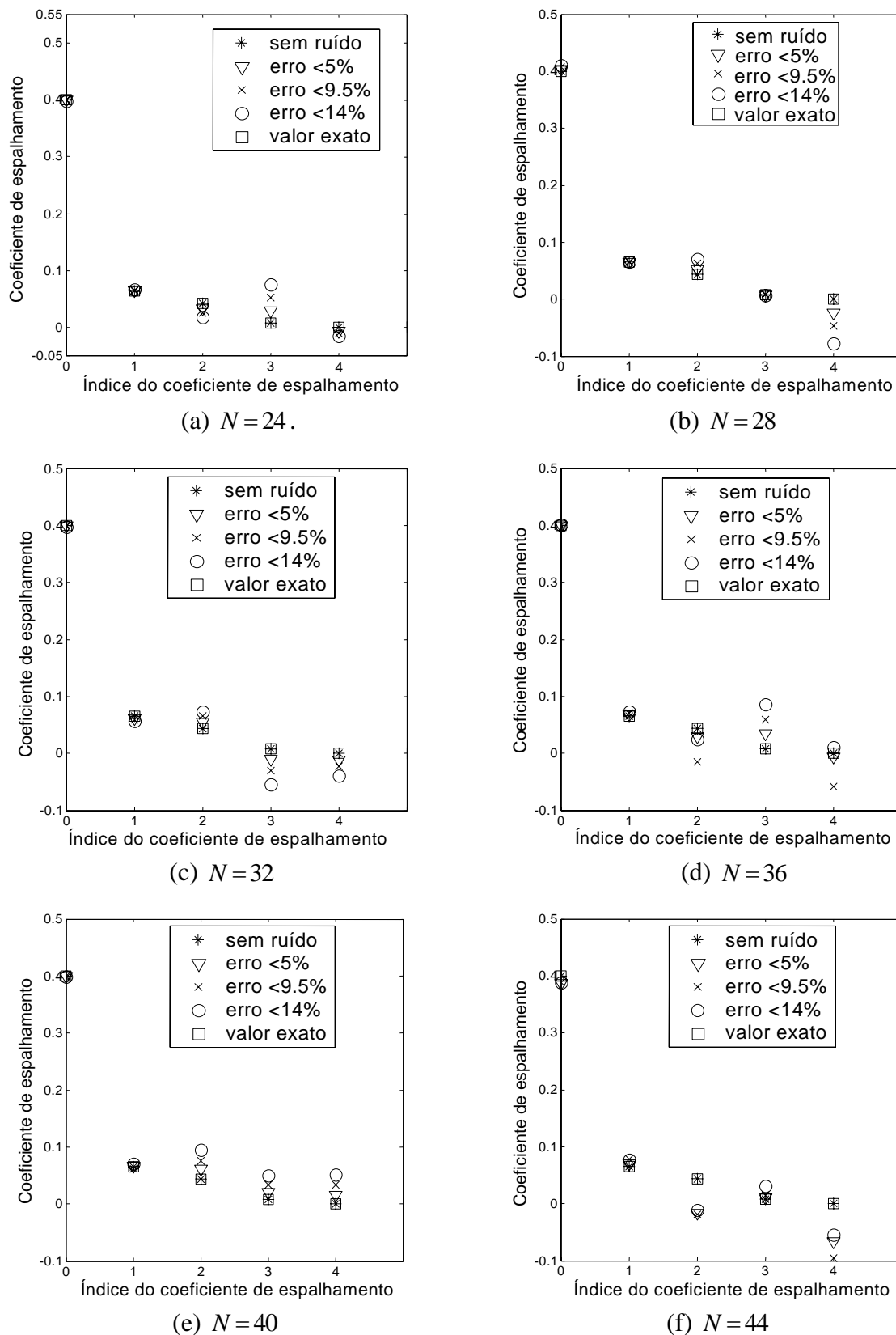
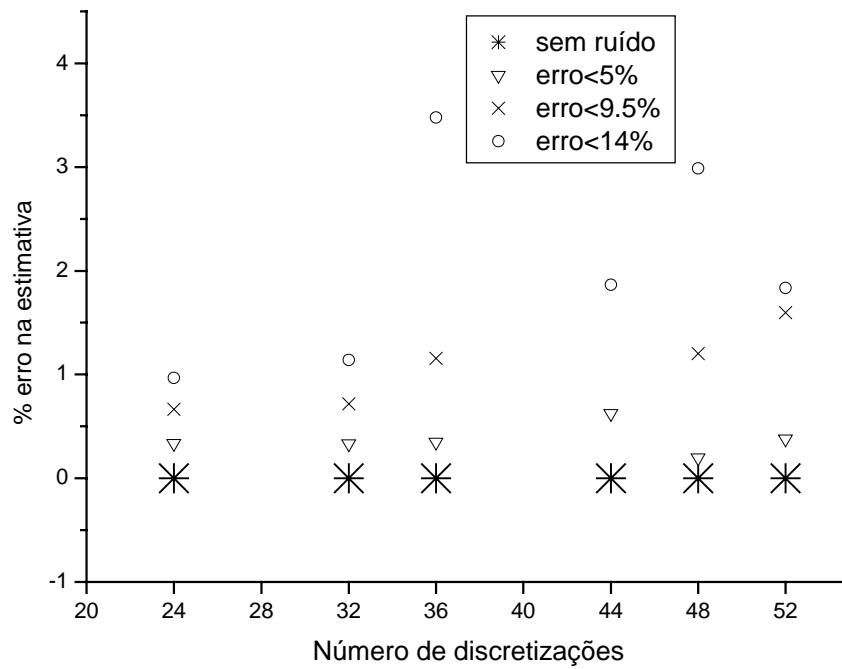


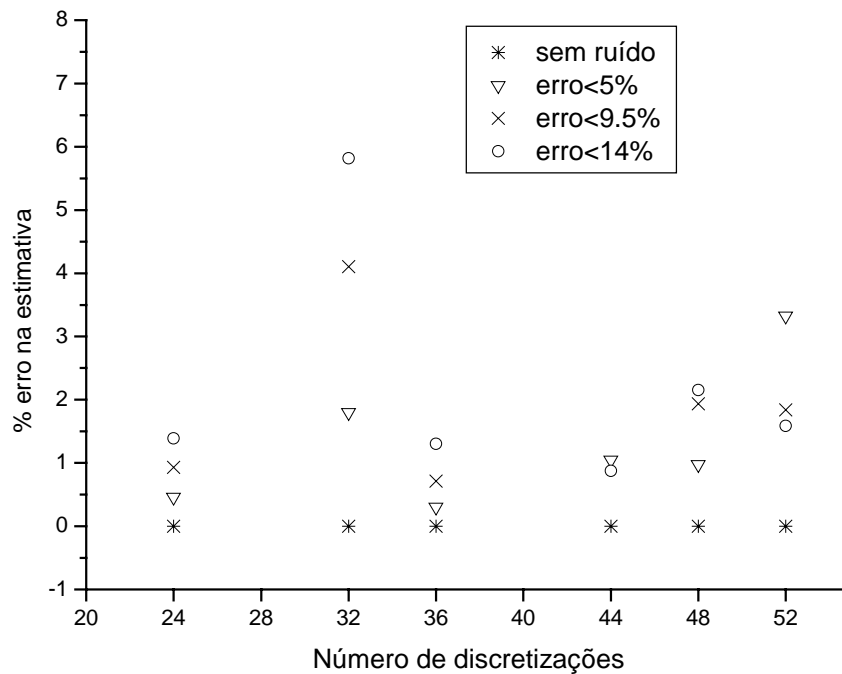
Figura 21 – Valores calculados para os coeficientes de espalhamento. Caso teste 7B.

$$\sigma_{sl} = [0.4, 0.06469, 0.04312, 0.008, 1.7778E-6, 0.0] \text{ cm}^{-1}. L = 0.5 \text{ cm}. \sigma_t = 0.5 \text{ cm}^{-1}.$$

$$s/c = 0.2 \text{ cm}^{-1}. \text{ Erro no dado experimental: } * = 0\%, \nabla < 5\%, \times < 9.5\% \text{ e } \circ < 14\%.$$



a) Caso teste 7A - $s/c = 0.1 \text{ cm}^{-1}$



b) Caso teste 7B - $s/c = 0.2 \text{ cm}^{-1}$

Figura 22 – Erros relativos nas estimativas para os coeficientes de extinção total. $\sigma_t^{\text{exato}} = 0.5 \text{ cm}^{-1}$.

Caso teste 7. $L = 0.5 \text{ cm}$.

Erro no dado experimental: $*$ = 0%, ∇ < 5%, x < 9.5% e o < 14%.

TABELA 12. Valores calculados dos coeficientes de espalhamento, $\sigma_{sl} [\text{cm}^{-1}]$, e de

extinção total, $\sigma_t [\text{cm}^{-1}]$. Caso teste 7A. $L = 0.5 \text{ cm}$. $N = 16$ e 20 . $s/c = 0.1 \text{ cm}^{-1}$

(ED = erro no dado experimental; $\text{EE}(\%) = \left| \left(\sigma_{sl}^{\text{calculado}} - \sigma_{sl}^{\text{exato}} \right) / \sigma_{sl}^{\text{exato}} \right| \times 100 = \text{erro relativo na estimativa}$)

a) Coeficientes de espalhamento

$$\sigma_{sl}^{\text{exato}} = [0.4, 0.06469, 0.04312, 0.008, 1.7778\text{E-}6, 0.0] \text{cm}^{-1}$$

N	ED=0%	EE(%)	ED<5%	EE(%)	ED<9.5%	EE(%)	ED<14%	EE(%)
16	0.4000	0.0000	0.3979	0.5348	0.3958	1.0482	0.3939	1.5379
	0.0647	0.0000	0.0650	0.4771	0.0655	1.3036	0.0665	2.7464
	0.0431	0.0000	0.0585	35.603	0.0733	69.934	0.0877	103.32
	0.0080	0.0000	0.0217	170.73	0.0354	343.01	0.0495	518.75
	1.78e-06	0.0000	-0.0055	3.11e5	-0.0111	6.228e5	-0.0165	9.31e5
20	0.4	0.0000	0.3999	0.0304	0.3998	0.0507	0.3999	0.0345
	0.0647	0.0000	0.0697	7.7729	0.0741	14.578	0.0775	19.87
	0.0431	0.0000	0.0358	16.932	0.0285	33.918	0.0214	50.445
	0.008	0.0000	0.0103	28.795	0.0113	41.084	0.0109	36.448
	1.78e-06	0.0000	-0.0096	5.4e5	-0.0206	1.16e6	-0.0329	1.85e6

b) Coeficiente de extinção total

$$\sigma_t^{\text{exato}} = 0.5 \text{ cm}^{-1}$$

N	ED=0%	EE(%)	ED<5%	EE(%)	ED<9.5%	EE(%)	ED<14%	EE(%)
16	0.5	0.000	0.50655	1.3094	0.51324	2.6477	0.52011	4.022
20	0.5	0.000	0.4886	2.2776	0.4772	4.5623	0.4653	6.9345

As melhores estimativas para ambos coeficientes encontra-se em $N = 24$, nos dois casos testados. Os erros para o caso 7B são maiores do que para o caso 7A.

Se testou o caso 7A para $N = 16$ e $N = 20$. Para valores menores de $N = 24$ os estimados são degradados como se pode observar na Tabela 12.

Observa-se dos resultados que a formulação explícita matricial pode estimar os coeficientes de espalhamento e de extinção total, trabalhando no espaço transformado.

Do mesmo modo que no problema estacionário, o ruído nos dados experimentais e o número de discretizações afeta o erro das estimativas. O valor do parâmetro s/c também determina o nível do erro dos valores estimados.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E PROPOSIÇÕES DE TRABALHOS FUTUROS

O algoritmo da formulação explícita matricial para o problema inverso de estimativa dos coeficientes de extinção e espalhamento anisotrópico foi desenvolvido inicialmente considerando a propagação de fótons, em uma placa unidimensional com propriedades radiativas uniformes, em regime estacionário. A placa é considerada como um meio participante espalhador, absorvedor e não emissor. O modelo foi depois estendido para o regime transiente.

Os dados experimentais foram calculados usando o operador Albedo definido no capítulo 3. O algoritmo converge para os valores exatos quando não existe ruído nos dados experimentais para o número de discretizações apresentadas nos resultados.

Os coeficientes de maior ordem dos coeficientes de espalhamento, como esperado, foram mais afetados pela presença de ruído.

O número de termos da função de fase determina o número mínimo para a ordem de discretização do domínio angular a ser usado na solução do problema.

As melhores estimativas, tanto para os coeficiente de espalhamento como para os coeficientes de extinção total, foram obtidas considerando um meio participante altamente absorvente e, as piores quando se considera um meio altamente espalhador.

A convergência do algoritmo para a solução exata é afetada pela ordem da discretização angular empregada na análise. Existe uma faixa para a qual os resultados apresentam um desempenho melhor e que corresponde ao intervalo entre $N = 24$ e 36, conforme visto no capítulo 4, para os casos testados no problema estacionário.

No caso transiente, trabalhando no espaço transformado de Laplace, foi possível obter os valores exatos dos coeficientes de extinção e de espalhamento considerando dados experimentais sem ruído.

A presença de ruído nos dados experimentais afeta os resultados, tal qual observado no caso estacionário.

Teoricamente, qualquer valor para o parâmetro s pode ser utilizado, sempre que se cumpra $s/c > -\sigma_a$. Levando em conta que s exerce uma função do peso para os fótons emergentes, existe um valor ótimo que permitirá obter informação desejada com maior precisão.

A aproximação aos valores exatos dos valores estimados dos coeficientes no caso transiente, varia com a ordem da discretização e com o valor de s/c usado. Para os casos teste, aqui empregados, as melhores estimativas dos coeficientes de espalhamento e de extinção total se acharam em $N = 24$, conforme mostrado no capítulo 4.

O algoritmo para a formulação explícita matricial é de fácil implementação e não faz uso de métodos iterativos no cálculo das propriedades radiativas, possuindo grande eficiência

computacional em termos de tempo de resposta - que é da ordem de segundos. Para a solução do problema inverso não é necessário solucionar o problema direto. As quadraturas e os polinômios de Legendre são calculados em tempo real.

Para obter um maior conhecimento da performance do algoritmo se faz necessário gerar dados experimentais com outros métodos, como o de ordenadas discretas ou o de Monte Carlo; assim como, comparar com resultados obtidos usando outros algoritmos disponíveis na literatura para problemas inversos de estimativa de propriedades radiativas em meios participantes.

No caso transiente tem-se a necessidade de aprofundar a análise da performance da formulação explícita matricial para o problema inverso de estimativa dos coeficientes de meios com diferentes características radiativas. O presente estudo ateve-se, apenas, a meios altamente espalhadores, bem como a uma expansão da função de fase de grau 6.

O espalhamento da luz em materiais estratificados é um problema de grande importância em diversos campos, por exemplo, na indústria de pinturas e vernizes, ou na óptica biomédica.

Uma próxima etapa implicaria a avaliação de coeficientes com variação contínua na variável espacial; como no caso de meios com estrutura multicamadas com contornos transparentes adjacentes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVAREZ ACEVEDO, N. I. **Problemas inversos de transferência radiativa transiente em meios homogêneos unidimensionais**. 2002. 110 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de pós-graduação em Engenharia Nuclear, Universidade Federal de Rio de Janeiro – COPPE, Rio de Janeiro, 2002.

ALVAREZ ACEVEDO, N. I.; ROBERTY, N. C.; SILVA NETO, A. J. da. A matrix explicit formulation for the solution of transient inverse radiative transfer problems. In: ENCONTRO DE MODELAGEM COMPUTACIONAL, 8., 2005. Nova Friburgo, RJ, Brasil. **Anais VIII EMC**. Nova Friburgo: IPRJ-UERJ, 2005. CD-ROM.

ALVAREZ ACEVEDO, N. I.; ROBERTY, N. C.; SILVA NETO, A. J. da. Effects of the angular domain discretization on the matrix explicit formulation developed for the solution of inverse radiative transfer problems. In: IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 26., 2005. Guarapari, ES, Brasil. **Proceedings XXVI CILAMCE**. Guarapari: UFES, 2005. CD-ROM.

ALVAREZ ACEVEDO, N. I.; ROBERTY, N. C.; SILVA NETO, A. J. da. A matrix based explicit formulation for inverse radiative transfer problems. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INVERSE PROBLEMS IN ENGINEERING: THEORY AND PRACTICE, 5., 2005, Cambridge, UK. **Proceedings V ICIPE**. Cambridge: UEF/CC, 2005.

v. 1, p. A05 1-10. Disponível em:
<<http://www.me.ua.edu/inverse/5icipe/Proceedings/Vol1/A05%20acevedo.pdf>>.

ALVAREZ ACEVEDO, N. I.; ROBERTY, N. C.; SILVA NETO, A. J. da. A one-dimensional inverse radiative transfer problem with time-varying boundary conditions. **Inverse Probl Eng.** v. 12, n. 2, p. 123-140. Apr. 2004a. DOI: 10.1080/10682760410001633246.

ALVAREZ ACEVEDO, N. I.; ROBERTY, N. C.; SILVA NETO, A. J. da. An explicit formulation for the estimation of the albedo operator in inverse radiative transfer problems. In: INVERSE PROBLEMS IN ENGINEERING SEMINAR, 13., 2004. Cincinnati, USA. **Proceedings 13th IPES.** Cincinnati, USA, 2004b. p. 1-8.

ALVAREZ ACEVEDO N. I.; ROBERTY N. C.; SILVA NETO, A. J. da. Estimation of participating media radiative properties with time dependent external illumination. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TRANSPORT THEORY, 18, 2003. Rio de Janeiro, RJ, Brasil. **Proceedings 18th ICTT.** Rio de Janeiro: UERJ, 2003. p. 154-161.

ALVAREZ ACEVEDO, N. I.; ROBERTY, N. C.; SILVA NETO, A. J. da. Sobre o uso da Transformada de Laplace. In: ENCONTRO DE MODELAGEM COMPUTACIONAL, 2., 1999. Nova Friburgo, RJ, Brasil. **Anais VIII EMC.** Nova Friburgo: IPRJ-UERJ, 1999.

ARRIDGE, S. R. Methods for the inverse problem in optical tomography. In: SEBBA, P. (Comp.), **Waves and Imaging Through complex media**. Dordrecht: P. Sebbah, 2001. p. 307-329. Disponível em: <http://www.cs.ucl.ac.uk/staff/ucacarr/papers/online_papers.html>. Acesso em: 26 nov. 2004.

ARRIDGE, S. R. Methods for the inverse problem in time-resolved optical absorption and scatter tomography. In: INT. PHYSICS SCHOOL: WAVES AND IMAGING THROUGH COMPLEX MEDIA, 1999. Cargèse, Francia. Disponível em: <<http://www.unice.fr/lpmc/cargese/>>. Acesso em: 26 nov. 2004.

ARRIDGE, S. R. et al. The finite element model for the propagation of light in scattering media: A direct method for domain with nonscattering regions. **Med Phys.** v. 27, n. 1, p. 252-264. Jan. 2000. DOI: 10.1118/1.598868. Disponível em: <<http://scitation.aip.org/getpdf/servlet/GetPDFServlet?filetype=pdf&id=MPHYA60000270000010000252000001&idtype=cvips>>. Acesso em: 26 nov. 2004.

ARRIDGE, S. R. et al. A finite element approach for modeling photon transport in tissue. **Med Phys.** v. 20, n. 2, p. 299-309. Apr. 1993. DOI: 10.1118/1.597069. Disponível em: <<http://scitation.aip.org/getabs/servlet/GetabsServlet?prog=normal&id=MPHYA60000200000020000299000001&idtype=cvips&gifs=yes>>. Acesso em: 6 mar. 2003

ARRIDGE, S. R.; SCHWEIGER, M. A gradient-based optimization scheme for optical tomography. **Opt Express**. v. 2, n. 6, p. 213-226. 16 Mar. 1998. Disponível em: <<http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=oe-2-6-213>>. Acesso em: 6 mar. 2003.

ARRIDGE, S. R.; HEBDEN, J. C. Optical imaging in medicine: II. Modeling and reconstruction. **Phys Med Biol**. v. 42, n. 5, p. 841-53. 16 May. 1997. DOI: 10.1088/0031-9155/42/5/008. Disponível em: <http://www.medphys.ucl.ac.uk/research/borl/pdf/arridge_pmb_1997.pdf>. Acesso em: 6 mar. 2003.

BAL, G. Particle transport through scattering regions with clear layers and inclusions. **J. Comp. Phys**. v. 180, n. 2, p. 659-685. 10 Aug. 2002. DOI: 10.1006/jcph.2002.7111. Disponível em: <<http://www.columbia.edu/~gb2030/>>. Acesso em: 10 dez. 2003.

BAL, G.; MADAY, Y. Coupling of transport and diffusion models in linear transport theory. **ESAIM-Math Model Num**. v. 36, n. 1, p. 69-86. Feb. 2002. DOI: 10.1051/m2an:2002007. Disponível em: <<http://www.columbia.edu/~gb2030/>>. Acesso em: 10 dez. 2003.

BARICHELLO, L. H.; GARCIA, R. D. M.; SIEWERT, C. E. A spherical-harmonics solution for radiative transfer problems with reflecting boundaries and internal sources. **J Quant Spectrosc Rad**. v. 60, n. 2, p. 247-260. Aug. 1998. DOI: 10.1016/S0022-4073(97)00176-3.

BERROCAL TITO, M. J.; ROBERTY N. C.; SILVA NETO, A. J. da. Estimación de los coeficientes de absorción en un medio participante mediante una aproximación del unidimensional al bidimensional. In: ENCONTRO DE MODELAGEM COMPUTACIONAL, 4, 2002. Nova Friburgo, RJ, Brasil. **Anais IV EMC**. Nova Friburgo: IPRJ-UERJ, 2002a.

BERROCAL TITO, M. J.; ROBERTY N. C.; SILVA NETO, A. J. da. Absorption and scattering coefficient estimation in two-dimensional participating media using the generalized maximal entropy and Levenberg-Marquardt. In: INTERNATIONAL ATLANTIC NUCLEAR CONFERENCE: NATIONAL MEETING OF REACTOR PHYSICS AND THERMAL HYDRAULICS, 13., 2002. Rio de Janeiro, RJ, Brasil. **Anais INAC 2002/ENFIR XIII**. Rio de Janeiro: ABEN, 2002b. CD-ROM.

CARITA MONTERO, R. F.; ROBERTY, N. C; SILVA NETO, A. J. da. Natural Base Construction for Absorption Coefficient Estimation in Heterogeneous Participating Media with Divergent Beams. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INVERSE PROBLEMS IN ENGINEERING: THEORY AND PRACTICE, 3., 1999. Port Ludlow, Washington, USA. **Proceedings of the 3th ICIPE**. Washington,USA, 1999. CD-ROM. Disponível em: <http://www.me.ua.edu/3icipe/FinalPapers/ht22.pdf>. Acesso em: 4 jul. 2004.

CARITA MONTERO, R. F.; ROBERTY, N. C; SILVA NETO, A. J. da. Absorption coefficient estimation in two-dimensional participating media using a base constructed with divergent beams. In: NATIONAL HEAT TRANSFER CONFERENCE, 34., 2000.

Pittsburgh, Pennsylvania, USA. **Proceedings NHTC'00**. Pennsylvania: ASME, 2000. CD-ROM.

CARITA MONTERO, R. F; ROBERTY, N. C.; SILVA NETO, A. J. da. Reconstruction of a combination of the absorption and scattering coefficients with a discrete ordinates method consistent with the source-detector system. **Inverse Probl Eng.** v.12, n.1, p. 81-101. Feb. 2004. DOI: 10.1080/10682760310001597527.

CARMINATI, R.; ELALOUI, R.; GREFFET, J.-J. Beyond the diffusing-wave spectroscopy model for the temporal fluctuation of scattered light. **Phys Rev Lett.** v. 92, n. 21, p. 213903-1/213903-4. 28 May. 2004. DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.213903.

CEREZO, E.; SERÓN, F. J. Rendering natural waters: Mergin computer graphics with physics and biology. In: VINCE J. (Comp.), **Advances in Modeling, Animation and Rendering**: Proceedings of computer graphics international 2002. New York: Vince, J.; Earnshaw, R., 2002. p. 481-498. Disponível em: <http://giga.cps.unizar.es/download/cerezoCGI2002.pdf>. Acesso em: 8 jan. 2004.

CHAI, J.; HSU, P.-f.; LAM, Y. C. Tree-dimensional transient radiative transfer modeling using the finite-volume method. **J Quant Spectrosc Ra.** v. 86, n. 3, p. 299-313. 1 July 2004. DOI:10.1016/j.jqsrt.2003.08.008.

CHANDRASEKHAR, S. **Radiative Transfer**. New York: Dover Publications Inc., 1960.

CHALHOUB, E. S. Discrete-ordinates solution for radiative-transfer problems. **J Quant Spectrosc Rad.** v. 76, n. 2, p. 193-206. 15 Jan. 2003. DOI: 10.1016/S0022-4073(02)00053-5.

CHOULLI, M; STEFANOV, P. Reconstruction of the coefficients of the stationary transport equation from boundary measurements. **Inverse Probl.** v. 12, p. L19-L23. Oct. 1996. DOI: 10.1088/0266-5611/12/5/001.

CHURMAKOV, D. Y. et al. Analysis of skin tissues spatial fluorescence distribution by the Monte Carlo simulation. **J Phys D Appl Phys.** v. 36, n. 14, p. 1722-1728. 2003. DOI: 10.1088/0022-3727/36/14/311. Disponível em: <<http://dspace.lib.cranfield.ac.uk:8080/bitstream/1826/887/2/Meglinski+APD+03.pdf>> Acesso: 5 nov. 2004.

CONG, W.; WANG, L. V.; GANG, G. Formulation of photon diffusion from spherical bioluminescent source in an infinite homogeneous medium. **Biomed. Eng. Online.** 4 May, 2004, (3:12). DOI:10.1186/1475-925X-3-12. Disponível em: <http://www.biomedical-engineering-online.com/content/3/1/12>. Acesso em: 22 fev. 2005.

DEGHANI, H.; DELPY, D. T.; ARRIDGE S. R. Photon migration in non-scattering tissue and the effects on image reconstruction. **Phys Med Biol.** v. 44, n.12, p. 2897-2906. Dec. 1999. DOI: 10.1088/0031-9155/44/12/303. Disponível em: <<http://www.medphys.ucl.ac.uk/research/borl/pdf/1999Dehghani.pdf>>. Acesso em: 15 jan. 2006.

DIERKES, T. et al. Reconstruction of optical properties of phantom and breast lesion in vivo from paraxial scanning data. **Phys Med Biol.** v. 50, n. 11, p. 2519-2545. 7 Jun. 2005. DOI: 10.1088/0031-9155/50/11/006. Disponível em: <http://www.medphys.ucl.ac.uk/research/borl/pdf/dierkes_pmb_2005.pdf>. Acesso em: 1 feb. 2004.

DORN, O. Scattering and absorption transport sensitivity functions for optical tomography. **Opt Express.** v. 7, n. 13, p. 492-506. 18 Dec. 2000. Disponível em: <<http://www.opticsexpress.org/ViewMedia.cfm?id=63537&seq=0>>. Acesso em: 27 nov. 2004.

DORN, O. A transport-backtransport method for optical tomography. **Inverse Prob.** v. 14, n. 5, p. 1107-1130. Oct. 1998. DOI: 10.1088/0266-5611/14/5/003. Disponível em: <<http://public.lanl.gov/kmh/publications/fully3d99.pdf>>. Acesso em: 27 nov. 2004.

DUDERSTAD, J. J.; MARTIN, W. R. **Transport theory**. New York: John Willey & Sons, 1979.

EDSTRÖM, P. A fast and stable solution method for the radiative transfer problem. **SIAM Rev.** v. 47, n. 3. p. 447-468. 2005. DOI: 10.1137/S0036144503438718.

ELALOUI, R.; CARMINATI, R.; GREFFET, J.-J. Short-time transfer through thin scattering slabs: A numerical and theoretical study. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON MICRO/NANOSCALE ENERGY CONVERSION & TRANSPORT, 1., 2002. Antalya, Turkey. **Abstract MECT-02 on line**. ICHMT, 2002. Disponível em: <<http://www.ichmt.org/old-meetings/MECT-02/announce.html>>. Acesso em: 10 fev. 2004.

ENGELDRUM, P. E.; PRIDHAM, B. Application of turbid medium theory to paper spread function measurements. In: ANNUAL TAGA CONFERENCE, 34., 1995. Orlando, FL, USA. **TAGA Proceedings**. New York, 1995. v. 1, p. 339-352. Disponível em: <<http://home.comcast.net/~imcotek/pdf/taga1995.pdf>>. Acesso em: 18 abr. 2004.

EVANS, K. F. The spherical harmonic discrete ordinate method for three-dimensional atmospheric radiative Transfer. **J Atmos Sci.** v. 55, n.3, p. 429-446. 1 Feb. 1998. DOI: 10.1175/1520-0469(1998)055<0429:TSHDOM>2.0.CO;2.

EVANS, K. F. Two-dimensional radiative transfer in cloudy atmospheres: The spherical harmonic spatial grid method. **J Atmos Sci.** v. 50, n. 18, p. 3111-3124. 15 Sept. 1993. DOI: 10.1175/1520-0469(1993)050<3111:TDR TIC>2.0.CO;2.

FIRBANK, M. et al. An investigation of light transport through scattering bodies with non-scattering regions. **Phys Med Biol.** v. 41, n. 4, p. 767-783. Apr. 1996. DOI: 10.1088/0031-9155/41/4/012.

GORDON, H. R. Inverse methods in hydrologic optics. **Oceanologia.** v. 44, n. 1, p. 9-58. 2002. Disponível em: <<http://www.iopan.gda.pl/oceanologia/441Gordo.pdf>>. Acesso em: 12 jan. 2004.

GUO, Z.; ABER, J.; GARETZ, B. A.; KUMAR, S. Monte Carlo simulation and experiments of pulsed and radiative transfer. **J Quant Spectrosc Ra.** v. 73, n. 2-5, p. 158-168. June 2002. DOI: 10.1016/S0022-4073(01)00203-5.

GUO, Z.; YUNGHAN, K. K. Ultrafast-laser-radiation transfer in heterogeneous tissues with the discrete-ordinates method. **Appl Opt.** v. 42, n. 16, p. 2897-2905. June 2003. Disponível em: <<http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=ao-42-16-2897>>. Acesso em: 11 nov. 2004.

HAKIM, A H.; MCCORMICK, N. J. Ocean optics estimation for absorption, backscattering, and phase function parameters. **Appl Opt.** v.42, n.6, p. 931-938. Feb. 2003. Disponível em: <<http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=ao-42-6-931>>. Acesso em: 12 jan. 2004.

HANSON, K. M. **Optical tomography reconstruction: inversion based on adjoint differentiation.** Mar. 2000. Disponível em: <<http://public.lanl.gov/kmh/talks/duke03-00.pdf>>. Acesso em: 16 nov. 2004.

HAYASHI, T.; KASHIO, Y.; OKADA, E. Hybrid Monte Carlo-diffusion method for light propagation in tissue with a low-scattering region. **Appl Opt.** v. 42, n. 16, p. 2888-2896. June 2003. Disponível em: <<http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=ao-42-16-2888>>. Acesso: 6 set. 2004.

HESPEL, L.; MAINGUY, S.; GREFFET, J.-J. Radiative properties of scattering and absorbing dense media: theory and experimental study. **J Quant Spectrosc Rad.** v. 77, n. 2, p.193-210. 1 Mar. 2003. DOI: 10.1016/S0022-4073(02)00123-1.

HIELSCHER, A. H. et al. Tomographic imaging of biological tissue by time-resolved, model-based, iterative image reconstruction. **OSA TOPS: Advances in optical imaging and photon migration II.** v. 21, p 156-161. 1998. Disponível em: <<http://public.lanl.gov/kmh/publications/orl98.pdf>>. Acesso em: 10 nov. 2004.

HIELSCHER, A. H.; ALCOUFFE, R. E.; BARBOUR, R. L. Comparison of finite-difference transport and diffusion calculations for photon migration in homogeneous and heterogeneous tissues. **Phys Med Biol.** v. 43, n. 5, p. 1285-302. May. 1998. DOI: 10.1088/0031-9155/43/5/017. Disponível em: <http://www.columbia.edu/~ahh2004/publications/Transport_Diffusion.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2004.

HYVÖNEN, N. **Diffusive tomography methods: Special boundary conditions and characterization of inclusions.** 2004. Dissertation (Doctoral) – Department of Engineering Physics and Mathematics, Institute of Mathematics, Helsinki University of Technology, Helsinki, 2004. Disponível em: <<http://math.tkk.fi/reports/a471.pdf>>. Acesso em: 13 nov. 2004.

KANMANI, B.; VASU, R. M. Diffuse optical tomography through solving a system of quadratic equations without re-estimating the derivatives: The “Frozen-Newton” method. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON BIOMEDICAL CIRCUITS & SYSTEMS, 2004. Singapore, Singapore. **IEEE Proceedings: International Workshop BIOCAS 2004.** Singapore: Yip Xu, 2004. v. 1, p. s2,2-17/s2,2-20. DOI: 10.1109/BIOCAS.2004.1454106.

KAUATI, A. T.; SILVA NETO, A. J. da; ROBERTY, N. C. The source-detector methodology for applications with anisotropic scattering. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INVERSE PROBLEMS IN ENGINEERING: THEORY AND PRACTICE, 4., 2002. Angra dos Reis, RJ, Brasil. **Proceedings 4th ICIPE.** Rio de Janeiro:

H. Orlande, 2002. Disponível em: <<http://www.lttc.coppe.ufrj.br/4icipe/Articles/final122/icipe-2002-122.pdf>>. Acesso em: 10 nov. 2004.

KAUATI, A. T.; SILVA NETO, A. J. da; ROBERTY, N. C. A source-detector methodology for the construction and solution of the one dimensional inverse transport equation. **Inverse Probl. Eng.** v. 9, n. 1, p. 45-66. Apr. 2001. Disponível em: <<http://www.me.ua.edu/3icipe/FinalPapers/im07.pdf>> Acesso em: 8 Jul. 2002.

KAPER, H. G.; LEKKERKERKER, C. G.; HEJTMANEK, J. Spectral methods in linear transport theory. In: **Operator Theory: Advances and Application**, Boston: Birkhäuser Verlag, 1982. v. 5.

KIM, A. D; ISHIMARU, A. Chebyshev spectral method for radiative transfer equations applied to electromagnetic wave propagation and scattering in a discrete random medium. **J Comput Phys.** v. 152, n. 1, p. 264-280. 10 June 1999. DOI: 10.1006/jcph.1999.6247.

KIM, A. D.; ISHIMARU, A. **Chebyshev spectral method for solving radiative transport equations.** Seattle: Department Applied Mathematics, Univ. of Washington, 1988a. 15 pag. (98-25). Disponível em: <<http://www.amath.washington.edu/research/techreports/>>. Acesso em: 5 jul. 2004.

KIM, A. D.; ISHIMARU, A. Optical and millimeter wave pulse propagation through fog and rain layers. In: GEOSCIENCE AND REMOTE SENSING SYMPOSIUM: SENSING AND MANAGING THE ENVIRONMENT, 1998. Seattle, USA. **IEEE Proceedings: International IGARSS'98**. 1988b. v. 1, p. 33-35. DOI: 10.1109/IGARSS.1998.702789. Disponível em: <www.amath.washington.edu/research/techreports/>. Acesso em: 5 jul. 2004

KIM, A. D.; MOSCOSO, M. Radiative transfer computations for optical beams. **J Comput Phys**. v. 185, n. 1, p. 50-60. 10 Feb. 2003. DOI: 10.1016/S0021-9991(02)00047-5.

KIM, A. D.; MOSCOSO, M. Chebyshev spectral methods for radiative transfer. **J Scien Comput**. v. 23, p. 2075-2095. 2002. Disponível em: <<http://faculty.ucmerced.edu/adkim/papers/sisc2002.pdf>>. Acesso em: 5 jul. 2004

KLOSE, A. D. et al. Optical tomography using the time-independent equation of radiative transfer – Part 1: forward model. **J Quant Spectrosc Rad**. v. 72, n. 5, p. 691-713. 1 Mar. 2002. DOI: 10.1016/S0022-4073(01)00150-9.

KLOSE, A. D. et al. Two- and three-dimensional optical tomography of finger joints for diagnostics of rheumatoid arthritis. In: PHOTON PROPAGATION IN TISSUES, 4., 1998. Stockholm, Sweden. **Proceedings of the SPIE: Photon Propagation In Tissues IV**. D. Benaron et al., 1998. v. 3566, p. 151-160. DOI: 10.1117/12.334363. Disponível em: <<http://public.lanl.gov/kmh/publications/pmt98.pdf>> Acesso em : 30 nov. 2004.

KLOSE, A. D.; HIELSCHER, A. H. Modeling photon propagation in anisotropically scattering media with the equation of radiative transfer. In: OPTICAL TOMOGRAPHY AND SPECTROSCOPY OF TISSUE, 5, 2003. San José, CA, USA. **Proceedings of the SPIE: Optical Tomography and Spectroscopy of Tissue V.** B. Chance et al., 2003. v. 4955, p. 624-633. DOI: 10.1117/12.478131.

KLOSE, A. D.; HIELSCHER, A. H. Optical tomography using the time-independent equation of radiative transfer – Part 2: inverse model. **J Quant. Spectrosc Rad.** v. 72, n. 5, p. 715-732. Mar. 2002. DOI: 10.1016/S0022-4073(01)00151-0.

KRYZHEVOI, N. V.; EFIMOV, G. V.; WEHRSE, R. Analytical solution of the radiative transfer equation in the two-stream approximation. **Astron Astrophys.** v. 370, p. 707-714. 2001. DOI: 10.1051/0004-6361:20010310.

LEATHERS, R. A.; ROESLER, C. S.; MCCORMICK, N. J. Ocean inherent optical property determination from in-water light field measurements. **Appl Opt.** v. 38, n. 24, p. 5096-5103. Aug. 1999. Disponível em: http://www.bigelow.org/srs/Leathers_et_al_1999_ApplOpt.pdf. Acesso em: 5 nov. 2000.

LI, H. et al. A mouse optical simulation environment (MOSE) to investigate bioluminescent phenomena in the living mouse with the Monte Carlo method. **Acad Radiol.** v. 11, n. 9., p. 1029-1038. Sept. 2004. DOI: 10.1016/j.acra.2004.05.021. Disponível em:

<http://www.sciencedirect.com/science?_ob=ArticleURL&_udi=B75BK-4D8FFRX-C&_user=686218&_handle=V-WA-A-W-WA-MsSAYZA-UUA-U-AACUEEVAUY-AAVYCDVEUY-YYYZVYZAA-WA-U&_fmt=full&_coverDate=09%2F01%2F2004&_rdoc=11&_orig=browse&_srch=%23toc%2312985%232004%23999889990%235674371&_cdi=12985&_view=c&_acct=C000037238&_version=1&_urlVersion=0&_userid=686218&md5=589e5cd97022e53da544b6dbfe01c9ae>.

Acesso em 10 oct. 2004.

LIANG, S.; STRAHLER, A. H. An analytic radiative transfer model for a coupled atmosphere and leaf canopy. **J Geophys Res.** v. 100, n. D3, p. 5089-5094. Mar. 1995. DOI: 10.1029//94JD03249. Disponível em: <http://modis.gsfc.nasa.gov/EOS/SCITEAM/ARTICLES/MST_A0008.pdf>. Acesso em: 13 fev. 2005.

LIANG, S.; STRAHLER, A. H. An analytic BRDF model of canopy radiative transfer and its inversion. **IEEE T Geosci Remote.** v.31, n. 5, p. 1081-1092. Sept. 1993. DOI: 10.1109/36.263779. Disponível em: <http://modis.gsfc.nasa.gov/EOS/SCITEAM/ARTICLES/MST_A0007.pdf>. Acesso em: 3 abr. 2004.

LIN, E.-Y.; WANG, Y.; PEI, Y.; BARBOUR, R. L. Solutions of the perturbation equation in optical tomography using weight functions as a transform basis. **OSA TOPS: Advances in Optical Imaging and Photon Migration.** v. 21, p. 197-202. 1998.

LU, X.; HSU, P-f. Transient radiative transfer of light pulse propagation in three-dimensional scattering media with finite volume method and integral equation model. In: ASME SUMMER HEAT TRANSFER CONFERENCE-, Las Vegas, Nevada, USA, 2003. **Proceedings of the ASME: Summer Heat Transfer Conference 2003**, USA: ASME, 2003a. Disponível em: <http://olin.fit.edu/beowulf/research_publications/HT2003-47455.pdf>. Acesso em: 28 Nov. 2004.

LU, X.; HSU, P-f. Parallel Computing of an integral formulation of transient radiation transport. **J. Thermophys. Heat. Tr.** v. 17, n. 4, p. 425-433. 2003b. Disponível em: <http://my.fit.edu/beowulf/research_publications/JTHT03.pdf>. Acesso em: 28 nov. 2004.

LU, X; HSU, P-f. Parallel computing of two numerical quadratures for an integral formulation of transient radiation transport. In: ASME SUMMER HEAT TRANSFER CONFERENCE, Las Vegas, Nevada, USA. 2003. **Proceedings of the ASME: Summer Heat Transfer Conference 2003**. 2003c. p. HT2003-47235 1-10. Disponível em: <http://my.fit.edu/beowulf/research_publications/HT2003-47235.pdf>. Acesso em: 28 nov. 2004.

MARKEL, V. A. Modifies spherical harmonics method for solving the radiative transport equation. **Wave Random Media.** v. 14, n. 1, p. L-13/L-19. Jan. 2004. DOI: 10.1088/0959-7174/14/1/L02. Disponível em: <http://ej.iop.org/links/q40/9KznFhR4u6tk4VIZCp8eaQ/wrm4_1_L02.pdf>. Acesso em: 9 dec. 2004.

MITRA, K.; KUMAR, S. Development and comparison of models for light-pulse transport through scattering-absorbing media. **Appl Opt.** v. 38, n. 1, pp. 188-96. Jan. 1999.

Disponível em: <<http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=ao-38-1-188>>. Acesso em: 4 nov. 2005.

MITRA, K; CHURNSIDE, J. H. Transient radiative transfer equation applied to oceanographic lidar. **Appl Opt.** v. 38, n. 6, p. 889-895. Feb. 1999. Disponível

em:<[http://www2.etl.noaa.gov/technology/instruments/floe/pdf/transient_radiative_transfer_e
quation_applied_to_oceanograph.pdf](http://www2.etl.noaa.gov/technology/instruments/floe/pdf/transient_radiative_transfer_equation_applied_to_oceanograph.pdf)>. Acesso em: 4 nov. 2005

MITRA, K.; LAI, M-S; KUMAR, S. Transient radiation transport in participating media within a rectangular enclosure. **J Thermophys Heat Tr.** v. 11, n. 3, p. 409-414. 1997.

Disponível em: <<http://pdf.aiaa.org/jaPreview/JTHT/1997/PVJAIMP6255.pdf>>. Acesso em: 4 nov. 2005.

MOHAMMED, Y.; VERHEY, J. F. A finite element method model to simulate laser interstitial thermotherapy in anatomical inhomogeneous regions. **Biomed Eng. Online.** 4

Jan. 2005 (4:2). DOI: 10.1186/1475-925X-4-2. Disponível em: <<http://www.biomedical-engineering-online.com/content/4/1/2>>. Acesso em: 22 fev. 2005.

MOURAD, S. et al. Prediction of monochrome reflectance spectra with an extended Kubelka-Munk model. In: COLOR IMAGING CONFERENCE: COLOR SCIENCE AND

ENGINEERING SYSTEMS, TECHNOLOGIES, APPLICATIONS, 10., 2002. Scottsdale, Arizona, USA. **Proceedings IS&T/SID's: 10th CIC: Color Science and Engineering Systems, Technologies, Applications.** 2002. v. 10, p. 298-304. Disponível em: <<http://diwww.epfl.ch/w3lsp/publications/colour/pomrswqekmm.html>>. Acesso em: 18 abr. 2004.

MOURAD, S. et al. Extending Kubelka-Munk's theory with lateral light scattering. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON DIGITAL PRINTING TECHNOLOGIES, 17., 2001. Ft. Lauderdale, USA., **Proceedings IS&T NIP17: International Conference On Digital Printing Technologies.** 2001. v. 17, p. 469-473. Disponível em: <<http://diwww.epfl.ch/w3lsp/publications/colour/ektwls.pdf>>. Acesso em: 18 abr. 2004.

MODEL, R; HÜENLICH, R. Parameter sensitivity in near infrared imaging. In: PHOTON PROPAGATION IN TISSUES, 1995. Barcelona, Spain. **Proceedings of SPIE: Photon Propagation In Tissues.** B. Chance, D. Delpy, J. Mueller, 1995. v. 2626, p. 56-65. DOI: 10.1117/12.228686. Disponível em: <http://www.wias-berlin.de/main/publications/wias-publ/wiaspubl.cgi?type=preprint&year=1995&number=204>. Acesso em: 16 fev. 2004.

OLIVEIRA, J. V. P. de; CARDONA, A. V. Solução da equação transiente de transporte em domínio semi-infinito pela combinação dos métodos espectral e LTS_N. **TEMA: Seleta do XXIV CNMAC**, v. 3, n. 1, p. 157-164, 2002. Anual. Disponível em: <http://www.dcce.ibilce.unesp.br/sbmac_regional_XI/proc24-POR.html>. Acesso em: 30 jan. 2005.

OLIVEIRA, J. V. P. de; CARDONA, A. V. Solução semi-analítica da equação transporte dependente do tempo. **TEMA**: Seleta do XXII CNMAC, v. 1, n. 1, p. 193-200, 2000. Anual. Disponível em: <http://www.sbmac.org.br/tema/seletas/docs/v1_1/117_0OliveiraJV.pdf>. Acesso em: 30 jan. 2005.

ORLT M. M.; WALZEL, M.; MODEL, R. Transillumination imaging performance using time domain data. In: PHOTON PROPAGATION IN TISSUES, 1995. Barcelona, Spain. **Proceedings of SPIE: Photon Propagation in Tissues**. B. Chance, D. Delpy, J. Mueller, 1995. v. 2626, p. 346-357. DOI: 10.1117/12.228687. Disponível em: <<http://www.wias-berlin.de/main/publications/wias-publ/wiaspubl.cgi?type=preprint&year=1995&number=204>>: (WIAS pre-print No. 24) . Acesso em: 20 jul. 2005.

ÖZISIK, M. N. **Radiative Transfer and Interactions with conduction and convection**. New York. John Wiley & Sons. 1973

ÖZISIK, M. N.; BOKAR, J. C. Inverse problems of radiative transfer in absorbing, emitting and scattering media. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON RADIATIVE HEAT TRANSFER, 1., 1995. Kusadasi, Turkey. **Proceedings of Radiative Transfer-I**. M. P. Mengüç, 1996. Disponível (abstract) em: <<http://www.ichmt.org/abstracts/RHT-95/session-10.html>>. Acesso em: 13 fev. 2000.

PARK, H. M.; LEE, W. J. An inverse radiation problem of simultaneous estimation of heat transfer coefficient and absorption coefficient in participating media. **Int J Numer Meth Engng.** v. 56, n. 6, p. 787-807. 14 Feb. 2003. DOI: 10.1002/nme.584. Disponível em: <<http://www3.interscience.wiley.com/cgi-bin/abstract/101521689/ABSTRACT>>. Acesso em: 18 fev. 2000.

PAULSEN, K. D.; JIANG, H. Spatially varying optical property reconstruction using a finite element diffusion equation approximation. **Med Phys.** v. 22, n. 6, p. 691-701. June 1995. DOI: 10.1118/1.597488. Disponível em: <<http://scitation.aip.org/getabs/servlet/GetabsServlet?prog=normal&id=MPHYA6000022000006000691000001&idtype=cvips&gifs=Yes>>. Acesso em: 15. jan. 2006.

PRAHL S. A. **Light Transport in Tissue.** 1988. Thesis PhD - University of Texas, Austin. 1988. Disponível em: <omlc.ogi.edu/pubs/pdf/prahl88.pdf>. Acesso em: 19 mar. 2000.

PRAHL, S. A. et al. A Monte Carlo model of light propagation in tissue. **SPIE Institute series.** v. IS 5, p. 102-111. 1989. Disponível em: <omlc.ogi.edu/pubs/pdf/prahl89.pdf>. Acesso em: 19 mar. 2000.

PRAHL, S. A.; VAN GEMERT, M. J. C.; WELCH, A. J. Determining the optical properties of turbid media using the adding-doubling method. **Appl Optics.** v. 32, n. 4, p. 559-568.

Feb. 1993. Disponível em: <<http://omlc.ogi.edu/pubs/pdf/prahl93a.pdf>>. Acesso em: 19 mar. 2000.

PREMOŽE, S.; ASHIKHMIN, M.; SHIRLEY, P. Path integration for light transport in volumes. In: EUROGRAPHICS SYMPOSIUM ON RENDERING, 14., 2003. Leuven, Belgium. **ACM International Conference Proceeding Series**. Switzerland: Christensen,P; Cohen-Or, D., 2003. v. 44. p. 52-63. Disponível em: <<http://www.cs.utah.edu/vissim/papers/PathIntegration/PathIntegrationColor.pdf>>. Acesso em: 21 jan. 2004.

QIN, Y.; BOX, M. A.; JUPP, D. L. B. Inversion of multi-angle sky radiance measurement for the retrieval of atmospheric optical properties I: Algorithm. **J Geophys Res-Atmos.** v. 107, n. (D22), p. 4652. 27 Nov. 2002. DOI: 10.1029/2001JD000945. Disponível em: <<http://www.phys.unsw.edu.au/downloads/share/atmos/>>. Acesso em: 2 dez. 2004.

RATH, P. et al. Discrete transfer methods applied to transient radiative transfer problems in participating medium. **Numer Heat Tr A-Appl.** v. 44, p. 183-197. Aug. 2003. DOI: 10.180/10407780390206634. Disponível em: <<http://my.fit.edu/~kmitra/>>. Acesso em: 13 jul. 2005.

ROBERTY, N. C. Remarks on coefficient determination for the stationary anisotropic transport equation. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INVERSE PROBLEMS IN

ENGINEERING: THEORY AND PRACTICE, 5., 2005. Cambridge, UK. **Proceedings V ICIPE.** Cambridge: UEF/CC. 2005. v.3, p. R04-1/9. Disponível em: <<http://www.me.ua.edu/inverse/5icipe/Proceedings/Vol3/R04%20Roberty.pdf>>. Acesso em: 21 out. 2005.

ROBERTY, N. C.; SILVA NETO, A. J. An explicit formulation for the inverse transport problem using only external detectors. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 26., 2003. São José de Rio Preto, SP, Brasil. **Anais XXVI CNMAC.** SBMAC, 2003.

ROBERTY, N. C.; TAHIR, K. B.; DAINTY, J. C. Methodology for the solution of the inverse Boltzmann transport equation. No publicado. 1996.

SAKAMI, M.; MITRA K.; HSU, P.-f. Analysis of light pulse transport through two-dimensional scattering and absorbing media. **J Quant Spectrosc Ra.** v. 73, n. 2-5, p. 169-179. June 2002. DOI: 10.1016/S0022-4073(01)00216-3.

SARDAR, D. K. et al. Optical characterization of positive photoresists. **Semiconductor International.** 1 June 2001. Disponível em: <<http://reed-electronics.com/semiconductor/index.asp?layout=articlePrint&articleID=CA151785>>.

Acesso em: 14 nov. 2004.

SARDAR, D. K. et al. Optical characterization of i-line photoresist. **Semiconductor International**. 1 Nov. 2002. Disponível em: <<http://reed-electronics.com/semiconductor/index.asp?layout=articlePrint&articleID=CA256108>>.

Acesso em: 14 nov. 2004.

SARDAR, D. K.; SAYKA, A.; YOW, R. M. Optical Characterization of positive deep UV photoresists. **Semiconductor International**. 1 May. 2004. Disponível em: <<http://reed-electronics.com/semiconductor/index.asp?layout=articlePrint&articleID=CA415043>>.

Acesso em: 14 nov. 2004.

SAWETPRAWICHKUL, A. **A study of the transient radiative transfer within participating media**. 2002. 170 f. Dissertation (Doctoral) – Mechanical and Aerospace Engineering Department, Florida Institute of Technology, Melbourne. 2002. Disponível em: <http://my.fit.edu/beowulf/research_publications/research_pubs.html>. Acesso em: 18 nov. 2004.

SAWETPRAWICHKUL, A; HSU, P-f.; MITRA K. Parallel computing of three-dimensional Monte Carlo simulation of transient radiative transfer in participatin media. In: AIAA/ASME JOINT THERMOPHYSICS AND HEAT TRANSFER CONFERENCE, 8., 2002. St. Louis, Missouri, USA. **8th AIAA/ASME Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference Proceedings**. AIAA, 2002. p. 2002-2901. Disponível em: <http://my.fit.edu/beowulf/research_publications/research_pubs.html>. Acesso em: 18 nov. 2004.

SCHWEIGER, M. et al. The finite element model for the propagation of light in scattering media: Boundary and source conditions regions. **Med Phys.** v. 22, n. 11, p. 1779-1792. 1995. Disponível em: <<http://scitation.aip.org/getabs/servlet/GetabsServlet?prog=normal&id=MPHYA6000022000011001779000001&idtype=cvips&gifs=yes>>. Acesso em: 4 jul. 2000.

SILVA NETO, A. J. da et al. Inverse problems explicit and implicit formulations with applications in engineering, byophysics and biotechnology. **Inverse Probl Eng.** 2006 (aceito para publicação).

SILVA NETO, A. J. da. Explicit and Implicit Formulations for Inverse Radiative Transfer Problems. In: WORLD CONGRESS ON COMPUTATIONAL MECHANICS, 5., 2002, Vienna, Austria. **Proceedings of 5th WCCM.** Vienna: H. Mang, F. Rammerstorfer, Eberhardsteiner, 2002. p. 1-16. Disponível em: <<http://wccm.tuwien.ac.at/>>. Acesso em: 12 jan. 2005.

SILVA NETO A. J. da; MCCORMICK, N. J. An explicit formulation based on the moments of the exit radiation intensity for the one-dimensional inverse radiative transfer problem. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INVERSE PROBLEMS IN ENGINEERING: THEORY AND PRACTICE, 4, 2002. Angra dos Reis, Brasil. **Proceedings 4th ICIPE.** Rio de Janeiro: H. Orlande, 2002. v. 2, p. 347-354.

SILVA NETO, A. J. da; ROBERTY, N. C. A abordagem fonte-detetor na solução de problemas inversos em meios participantes. In: CONGRESSO DE ENGENHARIA MECÂNICA NORTE NORDESTE, 5., 1998. Fortaleza, CE, Brasil. **Anais do V CEMN-NE**, 1998. v. 1, p. 340-347.

SILVA NETO, A. J. da; ÖZISIK, M. N. An inverse problem of simultaneous estimation of radiation phase function, albedo and optical thickness. **J Quant Spectrosc Rad.** v. 53, n. 4, p. 379-409. Apr. 1995. DOI: 10.1016/0022-4073(95)90015-2.

SIMON, K.; TRACHSLER, B. A random walk approach for light scattering in material. In: **Discret Math Theor C: Discrete Random Walks.** Paris, France: C. Banderier & C. Krattentahler, 2003. v. AC, p. 289-300. Disponível em: <http://www.dmtcs.org/proceedings/>. Acesso em: 4 nov. 2005.

SIEWERT, C. E. Inverse solutions to radiative-transfer problems based on the binomial or the Henyey-Greenstein scattering law. **J Quant Spectrosc Rad.** v. 72, n.6, p. 827-835. 15 Mar. 2002. DOI: 10.1016/S0022-4073(01)00161-3.

SUNDMAN, L. K.; SANCHEZ, R.; MCCORMICK, N. J. Ocean optical source estimation with widely spaced irradiance measurements. **Appl Opt.** v. 37, p. 3793–3803. 1988.

TANIFUJI, T. et al. Time-resolved reflectance of an optical pulse from scattering bodies with nonscattering regions utilizing the finite difference time domain analysis. In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF THE IEEE IN ENGINEERING IN MEDICINE AND BIOLOGY SOCIETY, 25., 2003. Cancun, Mexico. **IEEE Proceedings: 25th Annual International Conference EMBS.** 2003. v. 2, p. 1094-1097. DOI: 10.1109/IEMBS.2003.1279438.

TAO, Z.; MCCORMICK, N. J; SANCHEZ, R. Ocean source and optical property estimation from explicit and implicit algorithms. **Appl Opt.** v. 43, n. 15, p.3265-3275. May. 1994.

TRIVEDI, A; BASU, S; MITRA, K. Temporal analysis of reflected optical signals for short pulse laser interaction with nonhomogeneous tissue phantoms. **J Quant Spectrosc Rad.** v. 93, n. 1-3p. 337-348. July 2005. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2004.08.033.

VENUGOPALAN, V.; YOU, J. S.; TRAMBERG, B. J. Radiative transport in the diffusion approximation: An extent for highly absorbing media and small source-detector separations. **Phys Rev E.** v. 58, n. 2, p. 2395-2407. Aug. 1998. DOI: 10.1103/PhysRevE.58.2395. Disponível em: <<http://archive.bli.uci.edu/lammp/PDFs/venugopalan1.pdf>>. Acesso em: 10 dez. 2003

WANG, L. V. Rapid modeling of diffuse reflectance of light in turbid slabs. **J Opt Soc Am. A.** v. 15, n. 4., p. 936-944. Apr. 1998.

WILSON, M. J.; WANG, R. K. A path-integral model of light scattered by turbid media. **J. Phys B-At Mol Opt.** v. 34, n. 8, p. 1453-1472, 2001. Disponível em: <<http://ej.iop.org/links/q76/qtHjMJSwIKcJT3zyzJzEQw/b10810.pdf>>. Acesso em: 9 nov. 2005.

WU, J. et al. Fluorescence tomographic imaging in turbid media using early-arriving photons and Laplace transforms. **Proceedings of Natl Acad Sci USA.** v. 94, n. 16, p. 8783-88. Aug. 1997. Disponível em: <<http://www.pnas.org/cgi/reprint/94/16/8783>>. Acesso em: 10 jan. 2005.

ZAREMBO, M. S. Inverse time-resolved method Monte Carlo for the determination of optical parameters of biological tissues. In: SARATOV FALL - SFM'05: MEETING WORKSHOP ON OPTICAL TECHNOLOGIES IN BIOPHYSICS AND MEDICINE, 7., 2005. Saratov, Rússia. Disponível em: <http://optics.sgu.ru/SFM/2005/?internet_session>. Acesso em: 4 dez. 2005.

ZHOU, J.; BAI, J. Photon migration in turbid media: a finite-element solution for the most favorable path. **Optical Eng.** v. 41, n. 10, p. 2577-2581. Oct. 2002. DOI: 10.1117/1.1499973. Disponível em: <www.paper.edu.cn/schoar/paper.jsp?name=baijing>

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)