Fredy Jonel Coral Alamo

Dinâmica de Estruturas Unidimensionais Esbeltas Utilizando o Contínuo de Cosserat

TESE DE DOUTORADO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
Programa de Pós–graduação em

Engenharia Mecânica

Rio de Janeiro

Dezembro de 2006

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Fredy Jonel Coral Alamo

Dinâmica de Estruturas Unidimensionais Esbeltas Utilizando o Contínuo de Cosserat

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós–graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC–Rio como parte dos requisitos parciais para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Hans Ingo Weber

Rio de Janeiro
Dezembro de 2006

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Fredy Jonel Coral Alamo

Dinâmica de Estruturas Unidimensionais Esbeltas Utilizando o Contínuo de Cosserat

Tese apresentada ao Programa de Pós–graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC–Rio como parte dos requisitos parciais para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Hans Ingo Weber, Ph.D.
Orientador
Departamento de Engenharia Mecânica — PUC–Rio

Prof. Luiz Bevilacqua, Ph. D.
Laboratório Nacional de Computação Científica – LNCC

Prof. Rubens Sampaio Filho, Ph. D.
Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Ilmar Ferreira Santos, Dr. Eng.
Technical University of Denmark, Department Of Mechanical Engineering

Prof. Domingos A. Rade, Ph. D.
Departamento de Engenharia Mecânica – UFU

Prof. João Carlos Ribeiro Plácido, Ph. D.
Cenpes/Petrobras

Prof. Prof. José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC–Rio

Rio de Janeiro, 18 de Dezembro de 2006

Fredy Jonel Coral Alamo

Graduou–se em Engenharia Mecânica na Universidad Nacional de Ingeniería (Lima, Perú). Cursou mestrado na PUC-Rio em 2003, especializando-se em vibrações mecânicas e dinâmica de sistemas rotativos. Apresentou vários trabalhos em congressos nacionais e internacionais (COBEM, CILAMCE, PACAM, ECCM, etc) junto com o seu orientador durante os estudos de Mestrado e de Doutorado. Atualmente trabalha na empresa Softec, como Engenheiro de suporte e consultoría, e paralelamente dedica-se à pesquisa na área de dinâmica, vibrações e sistemas rotativos

Ficha Catalográfica

Coral Alamo, Fredy Jonel

Dinâmica de Estruturas Unidimensionais Esbeltas Utilizando o Contínuo de Cosserat/ Fredy Jonel Coral Alamo; orientador: Hans Ingo Weber. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Engenharia Mecânica, 2006.

v., 120 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica.

Inclui referências bibliográficas.

1. Mecânica – Teses. 2. Sistemas Dinâmicos e Vibrações. 3. Sistemas Rotativos. 4. Perfuração de Poços. 5. Estruturas Flexíveis. 6. Viga de Cosserat I. Weber, Hans. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD: 621

Dedico este trabalho a meu filho Guilherme, em ocasião do seu nascimento.

Agradecimentos

Agradeço a meus pais Luís e Livia pela influência que tiveram na minha formação acadêmica e humana. Seu amor e sua demonstração da importância dos estudos e do trabalho foram essenciais no longo processo de aperfeiçoamento pessoal; a eles devo praticamente tudo. Não poderia deixar de agradecer a meus irmãos (Oscar, María, Manuel, Percy, Soledad e Arturo) pelo amor, confiança e apoio contínuo que sempre mostraram.

Também, agradeço a minha esposa Tacila, pela revisão do texto, pela sua paciência e sua conpreensão durante os dias mais difíceis.

Um especial agradecimento ao meu orientador Prof. Hans Ingo Weber pelo apoio constante, incentivo para a realização deste trabalho, exemplo de vocação para a pesquisa e amizade. A ele serei infinitamente grato.

Aos meus amigos e colegas da PUC-Rio, em especial para Harry Saavedra, Carlos Rivas, Germaín Venero, Raúl Valdivia, Ruben Gomez, Rómulo Reis, Thiago Ritto, Priscila de Almeida, Flavia e Luis Pedro, com quem travei inúmeras conversas tecnológicas e filosóficas.

Aos meus amigos e colegas da *Technische Universität Darmstadt - Alemanha*, em especial a Melissa Hopenstedt, a Martin Kreschel, a Ana Costa Conrado e a Rosa Ramirez; da *Universidad Tecnológica Nacional de Bahía Blanca - Argentina*, em especial a Marcelo Tulio Piovan e a Fernando Bueza, com quem compartí momentos interessantes.

Ao CNPq, à CAPES, à FAPERJ e à PUC–Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Aos professores e pessoal do departamento de Engenharia Mecânica e ao tecnico do Laboratório de Vibrações, Wagner Epifanio, pela sua cooperação e ajuda.

Aos idealizadores do projeto VICONDIA, minha gratidão é para o Prof. Nicolò Bachschmid da *Politecnico di Milano*, o Prof. Richard Markert da *Technische Universität Darmstadt* e o Prof. Hans Ingo Weber da PUC-Rio.

Resumo

Coral Alamo, Fredy Jonel; Weber, Hans. **Dinâmica de Estruturas Unidimensionais Esbeltas Utilizando o Contínuo de Cosserat**. Rio de Janeiro, 2006. 124p. Tese de Doutorado — Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Neste trabalho é formulado e analisado o equilíbrio estático e a dinâmica de uma viga elástica tridimensional. A teoria tridimensional empregada, que pode ser chamada de teoria de Cosserat para vigas, é exata geometricamente, ou seja, não está baseada em aproximações geométricas ou suposições mecânicas. Para a deformação da viga, assume-se a hipótese de Bernoulli e por simplicidade consideram-se relações constitutivas lineares para o material. A configuração deformada da viga é descrita através do vetor de deslocamento da curva de centróides, e uma base móvel, rigidamente unida à secção transversal da viga. A orientação da base móvel, relativa a um sistema inercial, é parametrizada usando três rotações elementares consecutivas. No teoria de Cosserat para vigas, as equações do movimento são equações diferenciais parciais não-lineares em função do tempo e de uma variável espacial. No entanto, para o equilíbrio estático, as equações tornam-se equações diferenciais ordinárias não-lineares com uma variável espacial que são resolvidas usando o método de perturbação. Da solução do equilíbrio estático, obtêm-se as funções de deslocamento da viga, em função dos deslocamentos e rotações nodais, as quais são usadas para a análise dinâmica. Para obter a dinâmica da viga usa-se a equação de Lagrange, que é formada pelas expressões da energia cinética e da energia potencial de deformação. Além disso, usa-se o método de Newmark para resolver as equações do movimento. Como aplicação, estuda-se numérica e experimentalmente a dinâmica de uma viga rotativa curva contida numa cavidade uniforme. Quando se usa a teoria de Cosserat para vigas, que leva em conta as não linearidades geométricas, a alta precisão da resposta dinâmica é obtida dividindo o sistema em poucos elementos, os quais são em número bem menor que no tradicional MEF. Essa é a principal vantagem da teoria desenvolvida.

Palavras–chave

Sistemas Dinâmicos e Vibrações; Sistemas Rotativos; Perfuração de Poços de Petróleo; Impacto; Estruturas Flexíveis; Viga de Cosserat.

Abstract

Coral Alamo, Fredy Jonel; Weber, Hans. **Dynamics of Slender One-dimensional Structures Using Cosserat Continuum**. Rio de Janeiro, 2006. 124p. PhD. Thesis — Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this work, it is formulated and analyzed the static equilibrium and the dynamics for three dimensional deformation of elastic rods. The intrinsically one-dimensional theory that is employed, which may be called the special Cosserat theory of rods, is geometrically exact, namely, it is not based upon geometrical approximations or mechanical assumptions. For the rod deformation, it is adopted the Bernoulli hypotheses and for simplicity, the linear constitutive relations are employed. The deformed configuration of the rod is described by the displacement vector of the deformed centroid curve and an orthonormal moving frame, rigidly attached to the cross-section of the rod. The orientation of the moving frame, relative to the inertial one, is related by the rotation matrix, parameterized by three elemental rotations. In the sense of Cosserat theory, the equations of motion are nonlinear partial differential equations, which are functions of time and one space variable. For the static equilibrium, however, the equations become nonlinear ordinary differential equations with one space variable, which can be solved approximately using standard techniques like the perturbation method. After the static equilibrium equation are solved, the displacement functions are obtained. These nonlinear displacement functions, which are functions of generic nodal displacements and rotations, are used for dynamical analysis. To obtain the dynamics of the Cosserat rod, it is used the Lagrangian approach, formed from the kinetic and strain energy expressions. Furthermore, the equations of motion, which are nonlinear ordinary differential equations, are solved numerically using the Newmark method. As an application, a curved rod, constrained to rotate inside a hole, is investigated numerically and experimentally. When using the Cosserat rod approach, that take into account all the geometric nonlinearities in the rod, the higher accuracy of the dynamic responses is achieved by dividing the system into a few elements, which is much less than in the traditional FEM.

Keywords

Vibration and Dynamic Systems; Rotative Systems; Oil Well Drilling; Impact; Flexible Structures, Cosserat Rod.

Conteúdo

1 Introdução **15**
1.1 Teorias Reduzidas 15
1.2 Perfuração de Poços de Petróleo 17
1.3 Revisão Bibliográfica 18
1.4 Objetivos do Trabalho 20
1.5 Organização do Trabalho 20

2 Funções de Deslocamento da Viga de Cosserat **22**
2.1 Introdução 22
2.2 Convenções e Notações 23
2.3 Funções de Deslocamento 23
2.4 A Viga de Cosserat 24
2.5 Configuração de Referência 31
2.6 Equações de Movimento da Viga de Cosserat 33
2.7 Método de Perturbação 38

3 Dinâmica da Viga de Cosserat **44**
3.1 Introdução 44
3.2 Velocidades 45
3.3 Equações de Movimento da Viga de Cosserat 47
3.4 Sistemas de Referência Global e Local 56
3.5 Equações de Movimento do Sistema Como um Todo 59
3.6 Integração das Equações do Movimento 60

4 Aplicação da Teoria de Cosserat a Sistemas Simples e Complexos **62**
4.1 Introdução 62
4.2 Análise Numérica de um Rotor Horizontal 62
4.3 Análise de uma Viga em L 70
4.4 Validação Experimental de uma Viga com Impacto 71
4.5 Validação Experimental Usando uma Viga Rotativa Curva 74

5 Perfuração Direcional **89**
5.1 Introdução 89
5.2 Benefícios da Perfuração Direcional 90
5.3 Forças que Atuam sobre a Coluna de Perfuração 91
5.4 Especificações da Coluna Direcional 93
5.5 Simulações Numéricas 94

6 Conclusões, Dificuldades Encontradas e Trabalhos Futuros **102**
6.1 Conclusões 102
6.2 Dificuldades Encontradas no Desenvolvimento do Trabalho 103
6.3 Trabalhos Futuros 104

Anexos **105**

A Parâmetros de Contato **105**
A.1 Teoria de Contato de Hertz: Modelo Elástico Linear 105
A.2 Lei da Potência: Modelo Elástico Não Linear 105

B Características e Propriedades do Silicone **107**
B.1 Cálculo das Propriedades do Silicone 108
B.2 Coeficiente de Atrito 109

C Estudo da Convergência **110**

D Deslocamentos e Velocidades Virtuais **112**
D.1 Deslocamento virtual 112
D.2 Velocidade virtual 113

Bibliografia **114**

Lista de Figuras

1.1 Componentes do Sistema de Perfuração [39]. 18

2.1 Viga especial de Cosserat. 25
2.2 Parametrização dos diretores usando vetor de rotação. 28
2.3 Vetores tangente, principal normal e binormal de uma curva. 31
2.4 Viga de curvatura constante. 39
2.5 Configurações deformadas. 42

3.1 Interação com a parede do poço. 50
3.2 Forças de gravidade e desbalanceamento. 52
3.3 Sistema de referência global $G(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ e local $F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. 57

4.1 Visualização de modos normais e complexos [16]. 66
4.2 Sistema rotativo horizontal. 67
4.3 Diagrama de Campbell. 69
4.4 Resultados de Lalanne. 69
4.5 Viga engastada-livre em L. 71
4.6 Seis primeiros modos de vibração no plano $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$. 71
4.7 Modelo da viga engastada com impacto. 72
4.8 Bancada experimental. 73
4.9 Resultados para 4,0Hz (esquerda) e 8,3Hz (direita). 74
4.10 Modelo de uma viga rotativa curva. 75
4.11 Esquema da bancada experimental. 76
4.12 Bancada experimental. 77
4.13 Vibração torsional do disco para $\Omega = 4,6,\ 6,3,\ 8,2 rad/s$; disco (—), motor (—), vibração torsional (—). 79
4.14 Vibração torsional do disco para $\Omega = 9,27,\ 9,279,\ 9.1 rad/s$; disco (—), motor (—), vibração torsional (—). 80
4.15 Vibração torsional do disco para $\Omega = 9.5,\ 8.5,\ 9.0 rad/s$; disco (—), motor (—), vibração torsional (—). 81
4.16 FFT da vibração torsional do disco. 82
4.17 Órbitas do disco no plano $X - Y$ em milímetros. 82
4.18 FFT dos deslocamentos do disco; (—) eixo X, (—) eixo Y. 83
4.19 Resposta dinâmica do nó 29 durante 20s. Caso **a)**. 84
4.20 Resposta dinâmica do nó 29 durante 20s. Caso **b)**. 85
4.21 Resposta dinâmica do nó 29 durante 20s. Caso **c)**. 85
4.22 FFT da resposta dinâmica do nó 29. Casos **a)**, **b)** e **c)**. 86
4.23 Órbitas do nó 29 para os casos **a)**, **b)** e **c)**. 87
4.24 O sistema em diferentes instantes de tempo. Casos **a)**, **b)** e **c)**. 87

5.1 Chayvo, na costa leste de *Sakhalin Island*, Rússia. 90
5.2 Função de atrito sobre T_{bit}. 92
5.3 Coluna direcional simplificada. 93
5.4 Deslocamentos e rotações para $\mu = 0,1$. 95
5.5 Deslocamentos e rotações para $\mu = 0,1$. 96

5.6 Órbitas de vários nós (Fig. 5.3-esquerda) quando $\mu = 0,1$. 96
5.7 Forças de impacto para $\mu = 0.1$ 97
5.8 Órbitas de vários nós (Fig. 5.3-esquerda) quando $\mu = 0,2$. 98
5.9 Carregamento gradativo sobre o sistema. 98
5.10 Deslocamentos e Rotações (Fig. 5.3-direita) quando $\mu = 0,1$. 99
5.11 Deslocamentos e Rotações (Fig. 5.3-direita) quando $\mu = 0,1$. 100
5.12 Órbitas para os tubos e o comando. 101
5.13 Forças de impacto nos tubos e no comando. 101

B.1 Provas de tração e flexão estática do silicone. 107
B.2 Teste de tração do silicone. 109
B.3 Provas do plano inclinado. 109

C.1 Resposta dinâmica para vários elementos, caso **b)**. 111

D.1 Movimento de uma partícula sobre uma superfície. 112

Lista de Tabelas

4.1 Propriedades geométricas dos discos. 67
4.2 Freqüências naturais em Hz para $\Omega = 25000rpm$. 68
4.3 Freqüências naturais (rad/s) no plano $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$. 70
4.4 Propriedades mecânicas do silicone. 77

B.1 Teste de tração do silicone. 108

Lista de Símbolos

(F)	Base fixa ou inercial.
(S)	Base móvel.
${}^{S}(\bullet)$	Vetor ou matriz $(\bullet)$ escrita na base $\mathbf{S}$.
${}^{S}(\tilde{\bullet})$	Matriz antisimétrica $(\bullet)$ escrita na base $\mathbf{S}$.
$(\bar{\bullet})$	Representação adimensional da variável $(\bullet)$.
${}^{A}\mathbf{T}^{B}$	Matriz de rotação.
$\mathbf{E}$	Matriz identidade.
$\mathbf{M}$	Matriz de massa.
$\mathbf{G}$	Matriz giroscópica.
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez linear.
$\mathbf{K}_g$	Matriz de rigidez não linear.
$\mathbf{v}, \mathbf{u}$	Vetores de deformação linear e angular.
$\mathbf{v}^{\circ}, \mathbf{u}^{\circ}$	Vetores de referência das deformações linear e angular.
$\mathbf{e}_i, \mathbf{d}_i$	Vectores unitários $(i = 1 \cdots 3)$.
$\mathbf{n}, \mathbf{m}$	Vetores de força e momento internos.
$\mathbf{f}, \mathbf{l}$	Vetores de densidade de força e momento externos.
κ, τ	Curvatura e torção geométrica de uma curva.
φ	Variável torsional.
ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z	Ângulos consecutivos.
$\phi_{xi}, \phi_{yi}, \phi_{zi}$	Deslocamentos angulares nodais.
x_i, y_i, z_i	Deslocamentos lineares nodais.
$\mathbf{w}$	Vetor de velocidade angular.
Ω	Velocidade angular constante.
$\mathbf{Q}$	Vetor de forças generalizadas.
$\mathbf{q}$	Vetor de coordenadas generalizadas.
$\mathbf{p}^i, \mathbf{p}^c, \mathbf{p}^d$	Vetores de força interna, concentrada e distribuída.
$\mathbf{F}_{bit}$	Força sobre a broca.
$\mathbf{T}_{bit}$	Torque sobre a broca.

La oscuridad nos envuelve a todos, pero mientras el sabio tropieza en alguna pared, el ignorante permanece tranquilo en el centro de la estancia.

Anatole France , *Escritor Frances.*

1
Introdução

Os esforços pioneiros de Euler e Bernoulli no século XVII estenderam as leis de Newton, de massas pontuais, para qualquer corpo deformável e, assim, iniciaram o reconhecimento independente do Princípio do Momento Angular. Com a introdução do conceito de tensor de esforço por Cauchy no século XIX, as bases da elastodinâmica clássica foram completadas. Mas a implementação dessas bases para a resolução de problemas práticos tiveram que esperar por ferramentas matemáticas efetivas. Naturalmente, o primeiro uso dessa teoria envolve linearizações das equações em torno de configurações estacionárias.

No entanto, a priori não é possível supor que as aproximações baseadas em deslocamentos pequenos, em torno de uma configuração particular, irão prever uma dinâmica exata do sistema para períodos longos de tempo.

1.1
Teorias Reduzidas

Historicamente, as teorias dimensionalmente reduzidas estavam disponíveis antes que a teoria tridimensional fosse totalmente desenvolvida. Especificamente, teorias unidimensionais de vigas e teorias bidimensionais de cascas ganharam acesso para aplicações de engenharia e, embora se tenha disponível uma teoria tridimensional bem desenvolvida, é geralmente aceito que o tratamento de problemas de elasticidade de elementos esbeltos é melhor estudado usando teorias dimensionalmente reduzidas.

Existem dois métodos para derivar as teorias dimensionalmente reduzidas: o método tridimensional e o método direto.

– **Método Tridimensional**

  Neste primeiro método, as equações que governam o sistema são reduzidas usando suposições no campo de deslocamentos (ou outros campos físicos), resultando em teorias uni- ou bi-dimensionais de

vigas ou cascas, respectivamente. A suposição adotada com muita freqüência é a variação linear do campo de deslocamentos sobre a espessura do corpo tridimensional.

– **Método Direto**

Neste segundo método, as equações que governam a dinâmica do sistema são derivadas considerando que o sistema possui dimensão menor que 3, mas com maior número de graus de liberdade para cada ponto material do sistema; neste segundo método encontra-se o contínuo de Cosserat, para vigas e cascas. O contínuo de Cosserat é caracterizado por um vetor de deslocamentos e um conjunto de diretores unido a cada ponto material do sistema. Esses diretores constituem os graus de liberdade adicionais que, para corpos tridimensionais, levam em conta efeitos típicos como flexão, extensão e torção. O contínuo de Cosserat é considerado de dimensão um ou dois, dependendo do tipo de teoria usada, teoria de vigas ou cascas.

Uma estrutura esbelta, tipo viga, é um corpo tridimensional que é basicamente uma curva no espaço e possui uma secção transversal pequena se comparada com seu comprimento. Esse tipo de estrutura pode ser modelada usando o contínuo de Cosserat unidimensional. Na engenharia, a análise desse tipo de estrutura é de grande interesse porque elas são usadas para modelar braços de robô, hélices de helicópteros, seqüências do DNA, cadeia de polímeros, etc. Neste trabalho, a teoria de Cosserat é estendida ao estudo da dinâmica de colunas de perfuração.

Resumidamente, o contínuo de Cosserat unidimensional considera, em cada ponto ao longo da curva de centróides da secção transversal da viga, um conjunto de três vetores ortogonais, usualmente chamados de diretores. Esses diretores descrevem a flexão, a torção, a extensão e o cisalhamento da viga. Usando equações constitutivas adequadas, é possível expressar a relação que existe entre as deformações elásticas e os esforços aplicados sobre a viga. Neste trabalho, o interese é a modelagem de estruturas esbeltas, como uma coluna de perfuração, consequentemente considera-se desprezível o cisalhamento.

A descrição simples, usando o contínuo de Cosserat, de estruturas esbeltas, fornece uma delineação clara entre os princípios físicos básicos, as propriedades do material e as aproximações matemáticas. Em problemas em que os métodos lineares são inapropriados (condições de contorno não lineares, material não linear, geometria complexa, impacto, precessão, interação interna, etc) o método de Cosserat é uma alternativa viável.

A teoria de Cosserat foi desenvolvida no início do século XX pelos irmãos Eugene e François Cosserat (1909), mas a recente retomada dessa teoria é devida, por um lado, ao incremento drástico da capacidade computacional e, por outro, ao estudo crescente de sistemas não lineares.

Atualmente, o contínuo de Cosserat unidimensional está sendo usado amplamente para modelar diferentes sistemas, entre eles pode-se citar: colunas verticais de poços de petróleo [36], cabos para aplicações cirúrgicas [46], modelagem de componentes de MEMS [52], comportamento mecânico de cadeias de DNA [53], componentes esbeltos de automóveis [63], modelagem do fluxo sangüíneo em vasos [64], entre outros.

1.2 Perfuração de Poços de Petróleo

O termo poço de petróleo é usado para qualquer perfuração, através da superfície do solo, projetada para encontrar e extrair petróleo ou gás. Um desenho esquemático de um sistema de perfuração vertical para poços de petróleo, com seus principais componentes, pode ser observado na Fig. 1.1. Neste trabalho, adota-se a seguinte tradução para os componentes da coluna de perfuração: *Drill pipe* (Tubo de perfuração), *BHA-Bottom Hole Assembly* (Comando) e *Bit* (Broca).

Os primeiros poços de petróleo foram perfurados percussivamente, isto é, simplesmente martelando o solo. No entanto, a limitação na profundidade do método percussivo fez que o método rotativo fosse introduzido. Modernos poços, usando perfuração rotativa, podem alcançar profundidades de 12,000 metros.

Até os anos 70, muitos dos poços eram verticais ou, mais especificamente, vertical-desviados. O desvio era induzido por diferentes litografias do terreno e imperfeições mecânicas. No entanto, as modernas tecnologias permitem realizar poços com grandes curvaturas e inclusive podem ser horizontais. Isso é de grande utilidade porque os reservatórios que contém petróleo, geralmente, possuem dimenssões horizontais bem maiores que as verticais. Conseqüentemente, um poço que passa ao longo do reservatórios pode produzir um grande volume de petróleo. Usando a perfuração curva ou horizontal tornou-se possível alcançar reservatórios muito distantes do ponto de perfuração, permitindo extrair petróleo de lugares de difícil acesso.

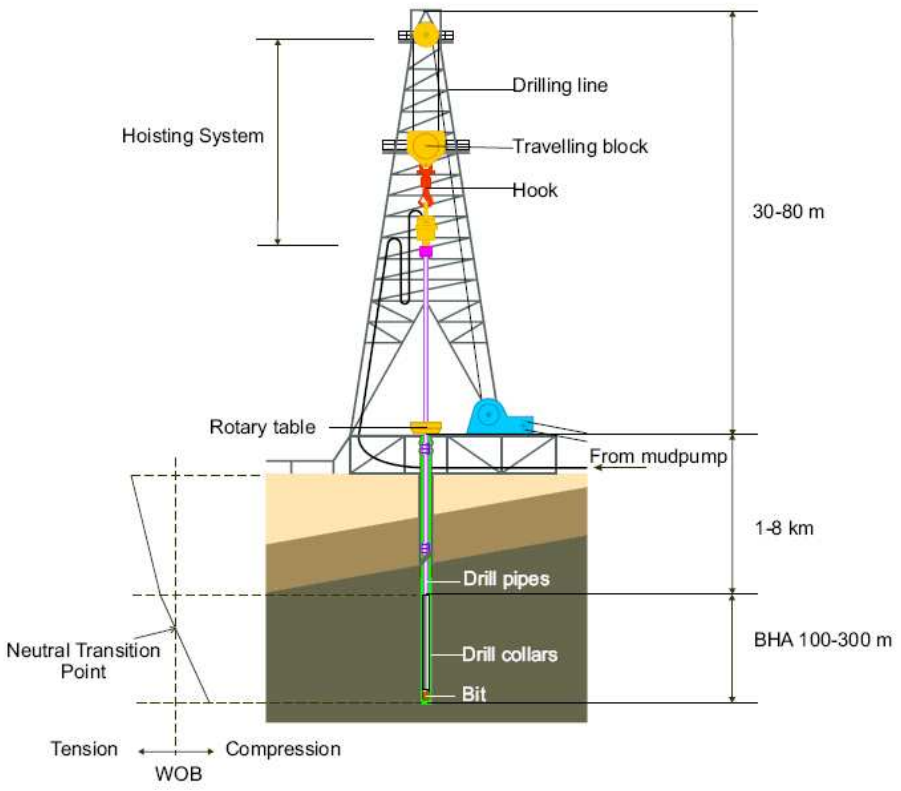

Figura 1.1: Componentes do Sistema de Perfuração [39].

1.3 Revisão Bibliográfica

A perfuração de poços de petróleo é amplamente conhecida desde os anos 1920. Desde então, muitos investigadores contribuíram enormemente para compreender e simular o comportamento dinâmico desses sistemas, por exemplo, existem várias teses de doutorado orientadas ao estudo de colunas de perfuração em poços verticais, entre elas: Jansen [20], Dykstra [25], Leine [39], Chen [54], Franca [55]. Nesses trabalhos, é possível encontrar diferentes tópicos relacionados com a perfuração de poços de petróleo verticais e, no esforço de entender o comportamento das colunas de perfuração, muitas formulações matemáticas foram reportadas.

Baseados em dados experimentais de campo, os pesquisadores Cunningham [3] e Dareing et al. [4] assinalam que as vibrações da coluna de perfuração causam baixa performance do processo de perfuração e, se não são tomadas as medidas corretivas necessárias, podem resultar em danos ao sistema de perfuração.

Observações de campo, fundamentado nas medições de vibração na superfície e na broca, indicam que as colunas de perfuração estão submetidas a vibrações severas [3, 4]. As vibrações da coluna deve-se, principalmente,

ao contato broca-formação e ao contato parede do poço-coluna (tubos de perfuração, comandos e estabilizadores). Também, tubos tortos e o desbalanceamento dos componentes da coluna são os causadores das vibrações no sistema. As vibrações da coluna, em geral, são do tipo axial, flexional ou lateral e torsional [4]. Essas vibrações quando excessivas conduzem à perda de eficiência, à fadiga dos componentes, à redução da vida útil das brocas, a mudanças inesperadas na inclinação e direção do poço e, eventualmente à destruição dos componentes do sistema.

Dareing et al. [4], empregando a teoria da elasticidade linear, estudaram as vibrações axiais e torsionais em colunas de perfuração rotativas usando métodos analíticos. Nesse trabalho supõe-se que o movimento axial da broca é uma função de seu deslocamento angular.

Jansen [18], usando parâmetros concentrados, derivou um modelo com 2-DOF para uma coluna de perfuração. O modelo massa-mola empregado é obtido a partir de uma formulação de dinâmica de rotores. Esse modelo representa o primeiro modo de vibração de uma parte do comando, suportado por estabilizadores nas extremidades, e foi utilizado para estudar a estabilidade dele mesmo. O modelo empregado ignora o acoplamento entre as vibrações de flexão e de torção.

Dunayevsky et al. [21] empregam a equação da coluna-viga para calcular os parâmetros modais da coluna de perfuração com o intuito de estabelecer os estados de alta severidade e instabilidade paramétrica. Porém, a resposta no tempo não foi investigada e não foi levado em conta o efeito giroscópico. A investigação foi centrada na modelagem das vibrações da coluna baseada em ressonância paramétrica de uma viga uniforme suportada nos extremos.

Também, Dunayevsky et al. [32] apresentaram o estudo de estabilidade da coluna, usando um modelo de parâmetros concentrados, levando em conta o acoplamento das vibrações axiais e torsionais na broca de perfuração.

Yigit et al. [26, 33, 43] apresentaram o modelo dinâmico da coluna de perfuração rotativa baseados na formulação Lagrangeana; um dos trabalhos leva em conta o acoplamento axial e lateral, o outro considera o acoplamento torsional e lateral e o último considera o acoplamento das vibrações axial, lateral e torsional e propõe uma estratégia de controle ativo para o fenômeno *stick-slip* gerado pelas vibrações torsionais.

Na década passada, Tucker e Wang [36] retomaram o contínuo de Cosserat para estudar as propriedades dinâmicas dos componentes ativos de um modelo integrado da coluna de perfuração; eles consideram a coluna

de perfuração como uma curva elástica espacial e propoẽm um modelo analítico baseado na teoria unidimensional do contínuo de Cosserat. No modelo proposto, o BHA é considerado como uma massa concentrada com inércia de rotação, solidária à parte final da coluna de perfuração vertical.

Embora exista uma extensa literatura orientada à análise da dinâmica das colunas de perfuração e BHA, só recentemente elas estão sendo tratadas como um sistema integrado [36]. Da mesma forma, percebe-se que muitos dos estudos realizados são orientados à modelagem de partes do BHA [25, 54].

1.4 Objetivos do Trabalho

Como um avanço na análise dinâmica de colunas de perfuração, neste trabalho é desenvolvido o elemento de Cosserat e apresenta-se a modelagem, usando elementos finitos, de um sistema de perfuração curvo. Na modelagem são consideradas os tubos de perfuração e o BHA como sistemas contínuos discretizados pelo método dos elementos finitos. Adicionalmente ao efeito giroscópico e ao acoplamento axial, lateral e torsional, o modelo leva em conta o impacto da coluna com a parede do poço.

A teoria usada para investigar a dinâmica de uma viga elástica rotativa, que sofre pequenas deformações, é a teoria de Cosserat unidimensional, desenvolvida por Antman [23], e que a partir de agora será denominada a viga de Cosserat. O uso da viga de Cosserat é ilustrado no estudo da dinâmica de uma coluna de perfuração curva.

1.5 Organização do Trabalho

No capítulo 2 é desenvolvida a análise estática da viga de Cosserat. Resolvendo a equação do equilíbrio estático, obtêm-se as funções de deslocamento da viga. Essas funções de deslocamento são função dos deslocamentos e das rotações nodais da viga.

No capítulo 3 é descrita a equação do movimento de um viga rotativa. Usando as funções de deslocamento obtidas da análise estática e empregando o princípio de Hamilton, desenvolve-se a equação de movimento da viga no espaço. Essa equação leva em conta as não linearidades geométricas e também considera forças distribuídas, de impacto e de desbalanceamento.

No capítulo 4 são discutidos vários exemplos numéricos e experimentais. Os exemplos simples são para verificar se o código, desenvolvido em Matlab, fornece resultados confiáveis. Um modelo interessante a ser mencionado é aquele da viga rotativa curva, no qual são mostrados resultados numéricos e experimentais.

No capítulo 5 estuda-se exclusivamente a dinâmica de uma coluna de perfuração curva simplificada. A geometria dessa coluna foi definida com a ajuda do Eng. João Carlos Ribeiro Plácido do CENPES-PETROBRAS. Nesse capítulo são mostrados resultados numéricos de deslocamentos e rotações de diferentes pontos da coluna.

Finalmente, no capítulo 6 são apresentadas as conclusões gerais do trabalho. Também, discorre-se sobre as dificuldades encontradas no desenvolvimento da tese e sobre os trabalhos futuros, com ênfase na aplicação da teoria de Cosserat unidimensional.

2
Funções de Deslocamento da Viga de Cosserat

2.1
Introdução

Este capítulo da tese é orientada à análise das condições do equilíbrio estático da deformação tridimensional de uma viga elástica. A teoria unidimensional que é empregada, e que pode ser chamada de teoria de Cosserat especial para vigas, possui várias virtudes: é geometricamente exata, isto é, não é desenvolvida usando aproximações geométricas ou suposições mecânicas. Para a deformação da viga, adoptam-se as hipóteses de Bernoulli, nas quais, são empregadas relações constitutivas lineares. Por outro lado, a configuração deformada da viga é descrita por um vetor de deslocamento da curva de centróides deformada e uma base ortogonal móvel, rigidamente unida à secção transversal da viga. A orientação da base móvel, em relação à base inercial, é parametrizada usando três rotações elementares consecutivas. No sentido da teoria de Cosserat, as equações de movimento são equações diferenciais parciais não-lineares, que estão em função do tempo e de uma variável espacial. No entanto, para o equilíbrio estático, a equação torna-se uma equação diferencial ordinária com uma variável espacial, que pode ser resolvida usando técnicas *standard*, como o método de perturbação, para satisfazer as condições de contorno. Este capítulo é um passo preliminar para o estudo da dinâmica de estruturas flexíveis como as colunas de perfuração curvas.

O problema fundamental da formulação usando o MEF é a escolha das funções de deslocamento. Tradicionalmente usam-se as soluções aproximadas das equações do movimento não-linear, no sentido quase estático, como funções de deslocamento para a análise dinâmica.

2.2
Convenções e Notações

Por simplicidade na nomenclatura, adotam-se as seguintes convenções: os subíndices minúsculos em letras latinas, exceto s, dmitem valores $1, 2, 3$ e expressões que contêm dois índices em letras latinas repetidas representam somas de 1 a 3, p. ex. $m_i n_i = m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3$.

No decorrer do trabalho usa-se a notação ${}^R\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}^T$ para representar o vetor $\mathbf{r}$ escrito na base (R) e $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$ é a norma Euclidiana do vetor. A partir desse vetor é possível definir uma matriz anti-simétrica na seguinte forma:

$$ {}^R\tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix} $$

O uso dessa matriz simplifica a operação do produto vetorial; por exemplo, um possível produto dos vetores ${}^R\mathbf{b}$ e ${}^R\mathbf{r}$ é ${}^R\mathbf{b} \times ({}^R\mathbf{b} \times {}^R\mathbf{r}) = {}^R\tilde{\mathbf{b}}{}^R\tilde{\mathbf{b}}{}^R\mathbf{r} = {}^R\tilde{\mathbf{b}}^{\mathbf{2}}{}^R\mathbf{r}$. Vale também a seguinte relação: ${}^R\tilde{\mathbf{b}}{}^R\mathbf{r} = -{}^R\tilde{\mathbf{r}}{}^R\mathbf{b}$. Poderiamos ter omitido a indicação da base (R) já que a equação deve ser toda calculada na mesma base.

Quando se trabalha com matrizes, a notação ${}^A\mathbf{T}^B$ é usada para representar a matriz de rotação, ou seja, a matriz que transforma um vetor escrito na base (B) para sua representação numa outra base (A): ${}^A\mathbf{b} = {}^A\mathbf{T}^B{}^B\mathbf{b}$ ou inversamente ${}^B\mathbf{b} = {}^B\mathbf{T}^A{}^A\mathbf{b}$; a matriz ${}^A\mathbf{T}^B$ é uma matriz ortogonal. Para representar a matriz identidade é empregado o símbolo $\mathbf{E}$.

No decorrer deste capítulo, as notações $\frac{d(\ )}{ds}$ e $(\ )'$ são usadas para representar, respectivamente, as derivadas total e local em relação ao parâmetro s.

2.3
Funções de Deslocamento

Quando se usa o método dos elementos finitos, sabe-se que uma boa seleção da função de deslocamento é a parte mais importante de todo o procedimento. Uma boa função de deslocamento levará à obtenção de um elemento de alta precisão e com características convergentes, enquanto por outro lado, a escolha de uma função de deslocamento ruim levará a resultados pobres ou não convergentes, ou pior ainda, convergirá para resultados incorretos.

A função de deslocamento pode ser dada como (i) um polinômio simples com coeficientes indeterminados que posteriormente são transformados em deslocamentos nodais; ou (ii) diretamente em termos de funções de forma, que têm valor nulo em todos os outros nós do elemento, mas valor unitário para o deslocamento ou sua derivada no nó em consideração. Fisicamente as funções de forma associadas com os parâmetros do deslocamento nodal fornecem um campo de deslocamentos para o elemento, quando o deslocamento de um nó particular é unitário e os outros são nulos. Sendo assim, a função de deslocamento pode ser dada na forma (i) como:

$$f(x, y) = A_1 + A_2 x + A_3 y + \dots$$

sendo A_i constantes polinomiais indeterminadas, ou de (ii) como:

$$f(x, y) = N_1(x, y) f_1 + N_2(x, y) f_2 + N_3(x, y) f_3 + \dots$$

sendo f_i os parâmetros de deslocamento nodal e N_i as correspondentes funções de forma (p. ex. polinômios de Lagrange, de Hermite). Uma discussão profunda e bem detalhada sobre funções de deslocamento é descrita no livro de Cheung [8].

2.4
A Viga de Cosserat

Para modelar os efeitos inerciais da viga, uma base Cartesiana fixa é usada $F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \equiv F$ com vetores unitários $\mathbf{e}_i$.

Na teoria de Cosserat o comportamento de uma viga esbelta é modelado em termos do movimento no espaço da linha de centróides de sua secção transversal, definida pelo vetor $\mathbf{r}(s)$ e por um conjunto ortogonal de linhas materiais chamadas diretores da secção transversal $\{\mathbf{d}_1(s), \mathbf{d}_2(s), \mathbf{d}_3(s)\}$, Fig. 2.1. Ao longo desses diretores define-se a base $S(\mathbf{d}_1(s), \mathbf{d}_2(s), \mathbf{d}_3(s)) \equiv S$ com vetores unitários ortogonais $\mathbf{d}_i(s)$, sendo que a coordenada s representa a distância ao longo da linha de centróides da viga não deformada. A base (S) pode ser interpretada como uma base móvel ao longo da curva de centróides, parametrizada pela coordenada s.

Os diretores $\mathbf{d}_i(s)$ estão associados a cada ponto da curva de centróides. Os vetores $\mathbf{d}_1(s)$ e $\mathbf{d}_2(s)$ estão contidos no plano da seção transversal e portanto $\mathbf{d}_3(s)$ é perpendicular a ele. Por definição, para deformação por cisalhamento puro, a normal em cada secção transversal, ou seja, o vetor $\mathbf{d}_3(s)$, não coincide com a tangente à curva de centróides nesse

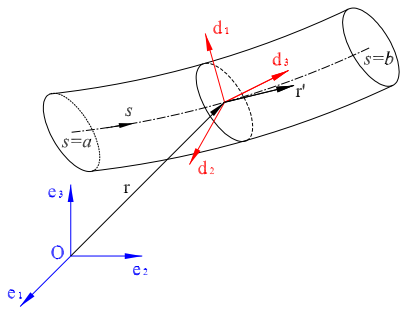

Figura 2.1: Viga especial de Cosserat.

ponto, $\frac{d\ \mathbf{r}(s)}{ds}$. Contrariamente, para o caso de flexão pura, o vetor $\mathbf{d}_3(s)$ em cada ponto da curva de centróides coincide com a tangente da curva de centróides naquele ponto. É necessário ressaltar que os diretores $\mathbf{d}_i(s)$ são definidos externamente à curva $\mathbf{r}(s)$, isto é, os diretores $\mathbf{d}_i(s)$ contêm informação adicional à curva de centróides. Assim, os diretores possuem características diferentes da base de Frenet-Serret, que é formada a partir da tangente, normal e binormal da curva de centróides e é definida por $\mathbf{r}(s)$ e suas derivadas.

2.4.1
Cinemática

Para a análise da viga adotam-se am mesmas suposições feitas por Rubin [28], ou seja, são consideradas as hipóteses de Bernoulli, conseqüentemente, a seção transversal plana sofre somente rotação rígida e mantém-se plana durante a deformação, preservando sua forma e área.

Na base inercial (F) a configuração deformada da linha de centróides $\mathbf{r}(s)$ é definida como:

$$^{F}\mathbf{r}(s) = \begin{bmatrix} x(s) & y(s) & z(s) \end{bmatrix}^T \tag{2-1}$$

Na teoria de Cosserat, as deformações da viga são classificadas em dois grupos: deformações lineares $\mathbf{v}(s)$ e deformações angulares $\mathbf{u}(s)$ que na base (S) são definidas como:

$$^{S}\mathbf{v}(s) = \begin{bmatrix} v_1(s) & v_2(s) & v_3(s) \end{bmatrix}^T \tag{2-2}$$

$$^{S}\mathbf{u}(s) = \begin{bmatrix} u_1(s) & u_2(s) & u_3(s) \end{bmatrix}^T \tag{2-3}$$

As componentes das deformações lineares e angulares $\{v_i(s), u_i(s)\}$

adotam diferentes nomes: as componentes $v_1(s)$ e $v_2(s)$ são chamadas de deformações de cisalhamento e $v_3(s)$ de elongação; em forma análoga, $u_1(s)$ e $u_2(s)$ são descritas como deformações de flexão e $u_3(s)$ é chamada de deformação de torção.

Vetor de Deformação Linear: O vetor de deformação linear $\mathbf{v}(s)$ é obtido da variação da linha de centróides ao longo da coordenada s:

$$^F\mathbf{v}(s) = \frac{d\ ^F\mathbf{r}(s)}{ds} = \begin{bmatrix} x'(s) & y'(s) & z'(s) \end{bmatrix}^T \tag{2-4}$$

sendo que $(\ )'$ representa a derivada local em relação ao parâmetro s.

Em geral, como resultado da deformação de cisalhamento da viga, a secção transversal deformada não é perpendicular à linha de centróides, mas, para vigas esbeltas como a coluna de perfuração, o efeito de cisalhamento pode ser desprezado. Conseqüentemente, a secção transversal da viga é suposta perpendicular à tangente da linha de centróides.

Desprezando a deformação por cisalhamento, o vetor unitário $\mathbf{d}_3(s)$ é ortogonal ao plano da secção transversal, e este plano é perpendicular à tangente da linha de centróides, ou seja:

$$^F\mathbf{v}(s) = \frac{d\ ^F\mathbf{r}(s)}{ds} = r'(s)\ ^F\mathbf{d}_3(s) \tag{2-5}$$

sendo $r'(s) = \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2 + (z'(s))^2}$. Logo, representando o vetor unitário $\mathbf{d}_3(s)$ nas bases (S) e (F), resulta:

$$\begin{aligned} ^S\mathbf{d}_3(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\ ^F\mathbf{d}_3(s) &= \begin{bmatrix} \nu_1(s) & \nu_2(s) & \nu_3(s) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{2-6}$$

e a seguinte relação é válida:

$$\nu_1^2(s) + \nu_2^2(s) + \nu_3^2(s) = 1 \tag{2-7}$$

Das Eqs. (2-5) e (2-6) obtém-se:

$$\nu_1(s) = \frac{x'(s)}{r'(s)}, \quad \nu_2(s) = \frac{y'(s)}{r'(s)}, \quad \nu_3(s) = \frac{z'(s)}{r'(s)} \tag{2-8}$$

Vetor de Deformação Angular: O vetor de deformação angular $\mathbf{u}(s)$ é calculado em forma análoga à matriz antisimétrica da velocidade angular quando a derivação, em relação ao tempo, é realizada em uma base

móvel. Neste caso, a variação da coordenada s produz deformação angular que é dada pela matriz antisimétrica $\tilde{\mathbf{u}}(s)$ em:

$$\frac{d\ \mathbf{d}_i(s)}{ds} = \tilde{\mathbf{u}}(s)\mathbf{d}_i(s) \tag{2-9}$$

A equação acima pode ser escrita nas bases (F) ou (S). Em um primeiro passo transforma-se a Eq. (2-9) em:

$$\tilde{\mathbf{d}}_i(s)\frac{d\ \mathbf{d}_i(s)}{ds} = \tilde{\mathbf{d}}_i(s)\tilde{\mathbf{u}}(s)\mathbf{d}_i(s) = -\tilde{\mathbf{d}}_i^2(s)\mathbf{u}(s), \quad i = 1, 2, 3$$

logo, usando a base (S) e somando nas três coordenadas:

$$\sum_{i=1}^{i=3}\left({}^S\tilde{\mathbf{d}}_i(s)\frac{d\ {}^S\mathbf{d}_i(s)}{ds}\right) = -\sum_{i=1}^{i=3}\left({}^S\tilde{\mathbf{d}}_i^2(s)\right){}^S\mathbf{u}(s) = 2\ \mathbf{E}\ {}^S\mathbf{u}(s) = 2\ {}^S\mathbf{u}(s)$$

finalmente, usando a convenção de indices repetidos:

$${}^S\mathbf{u}(s) = \frac{1}{2}{}^S\tilde{\mathbf{d}}_i(s)\frac{d\ {}^S\mathbf{d}_i(s)}{ds} \quad \text{ou} \quad {}^F\mathbf{u}(s) = \frac{1}{2}{}^F\tilde{\mathbf{d}}_i(s)\frac{d\ {}^F\mathbf{d}_i(s)}{ds} \tag{2-10}$$

A equação acima é valida para qualquer sistema de referência e é análoga ao teorema de Mozzi [6], sendo que $\mathbf{u}(s)$ é como se fosse um vetor de "velocidade angular"que porém representa evolução em relação ao parâmetro s ao invés do tempo t.

2.4.2
Representação dos Diretores d_i em Termos do Vetor de Rotação e três Rotações Elementares

Na teoria especial de Cosserat, a descrição cinemática da viga requer a determinação do campo de rotações da seção transversal. É aqui que está a maior dificuldade para resolver a equação de equilíbrio, porque as rotações a tornam fortemente não-lineares. Para descrever o campo de rotações, ou seja, as relações entre a base de diretores (S) e a base fixa (F), empregam-se dois métodos: o vetor de rotação (ou vetor de Euler) e três rotações elementares (rotações subsequentes sobre eixos coordenados).

Vetor de Rotação: A base (S) é parametrizada usando rotações consecutivas:

$$F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \xrightarrow{\theta\ (\mathbf{p})} D(\mathbf{d}_1', \mathbf{d}_2', \mathbf{d}_3' \equiv \mathbf{d}_3) \xrightarrow{\varphi\ (\mathbf{d}_3)} S(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$$

sendo $D(\mathbf{d}_1', \mathbf{d}_2', \mathbf{d}_3') \equiv D$ uma base intermediária.

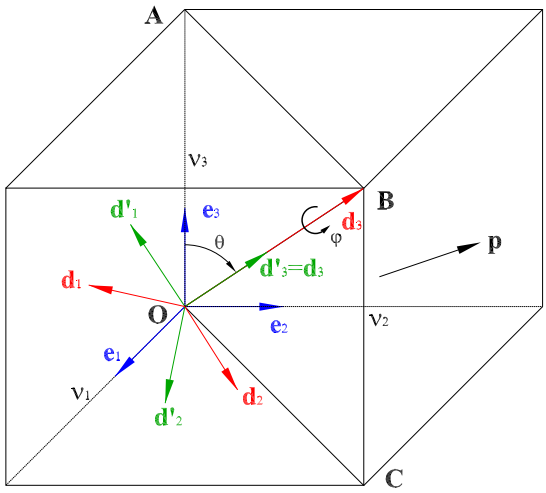

Figura 2.2: Parametrização dos diretores usando vetor de rotação.

Para chegar à base (S), começando de (F), primeiro é necessário obter a base intermediária (D). Isto é realizado girando a base (F) em torno do vetor unitário $\mathbf{p}(s)$ de um ângulo θ como se pode observar na Fig. 2.2. Isto significa que entre as direções $\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{d}_3(s)$ existe um ângulo θ. O vetor $\mathbf{p}(s)$ é ortogonal ao plano $OABC$, formado por $\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{d}_3(s)$, e é paralelo ao plano formado por $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$. Conseqüentemente ${}^F\mathbf{p}(s) = \begin{bmatrix} p_1(s) & p_2(s) & 0 \end{bmatrix}^T$. Também, o vetor unitário $\mathbf{p}(s)$ satisfaz as relações:

$$\begin{aligned} p_1^2(s) + p_2^2(s) &= 1 \\ {}^F\mathbf{p}^T(s)\,{}^F\mathbf{d}_3(s) &= p_1(s)\nu_1(s) + p_2(s)\nu_2(s) = 0 \end{aligned}$$

Logo, resolvendo para $p_i(s)$ as equações acima, as componentes do vetor unitário ${}^F\mathbf{p}(s)$ são:

$${}^F\mathbf{p}(s) = \begin{bmatrix} \frac{-\nu_2(s)}{\sqrt{\nu_1^2(s)+\nu_2^2(s)}} & \frac{\nu_1(s)}{\sqrt{\nu_1^2(s)+\nu_2^2(s)}} & 0 \end{bmatrix}^T \tag{2-11}$$

Para calcular a matriz de rotação ${}^F\mathbf{T}^D$, usa-se a seguinte equação [65]:

$${}^F\mathbf{T}^D = \mathbf{E} + \sin\theta\ {}^F\tilde{\mathbf{p}}(s) + (1-\cos\theta)\ {}^F\tilde{\mathbf{p}}^2(s)$$

As funções $\sin\theta$ e $\cos\theta$ são encontradas usando as definições de produto escalar e produto vetorial entre os vetores $\mathbf{e}_3$ e ${}^F\mathbf{d}_3(s)$, isto é:

$$\begin{aligned} \left|\tilde{\mathbf{e}}_3\ {}^F\mathbf{d}_3(s)\right| &= \sin\theta &&= \sqrt{\nu_1^2(s)+\nu_2^2(s)} \\ \mathbf{e}_3^T\ {}^F\mathbf{d}_3(s) &= \cos\theta &&= \nu_3(s) \end{aligned}$$

conseqüentemente, a matriz de rotação resulta:

$$
{}^{F}\mathbf{T}^{D} = \begin{bmatrix} \frac{\nu_2^2+\nu_3\nu_1^2}{\nu_1^2+\nu_2^2} & \frac{(\nu_3-1)\nu_1\nu_2}{\nu_1^2+\nu_2^2} & \nu_1 \\ \frac{(\nu_3-1)\nu_1\nu_2}{\nu_1^2+\nu_2^2} & \frac{\nu_1^2+\nu_3\nu_2^2}{\nu_1^2+\nu_2^2} & \nu_2 \\ -\nu_1 & -\nu_2 & \nu_3 \end{bmatrix} \tag{2-12}
$$

Finalmente, para alcançar a base (S), a base (D) é girada em torno do vetor unitário ${}^{D}\mathbf{d}_3 = {}^{S}\mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ de um ângulo $\varphi(s)$ e a matriz de rotação associada é dada por:

$$
{}^{D}\mathbf{T}^{S} = \begin{bmatrix} \cos\varphi(s) & -\sin\varphi(s) & 0 \\ \sin\varphi(s) & \cos\varphi(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-13}
$$

Usando as matrizes de rotação obtidas acima, é possível representar qualquer vetor $\mathbf{r}$ na base inercial (F) ou na base dos diretores (S) através da relação:

$$
{}^{F}\mathbf{r} = {}^{F}\mathbf{T}^{DD}\mathbf{r} = {}^{F}\mathbf{T}^{DD}\mathbf{T}^{SS}\mathbf{r} = {}^{F}\mathbf{T}^{SS}\mathbf{r}
$$

Resumindo, a matriz de rotação ${}^{F}\mathbf{T}^{S} = {}^{F}\mathbf{T}^{DD}\mathbf{T}^{S}$ resulta (por simplicidade $\nu_i(s) = \nu_i,\ \varphi(s) = \varphi$):

$$
{}^{F}\mathbf{T}^{S} = \begin{bmatrix} \frac{(\nu_2^2+\nu_3\nu_1^2)\cos\varphi}{\nu_1^2+\nu_2^2} + \frac{(\nu_3-1)\nu_1\nu_2\sin\varphi}{\nu_1^2+\nu_2^2} & \frac{(\nu_3-1)\nu_1\nu_2\cos\varphi}{\nu_1^2+\nu_2^2} - \frac{(\nu_2^2+\nu_3\nu_1^2)\sin\varphi}{\nu_1^2+\nu_2^2} & \nu_1 \\ \frac{(\nu_3-1)\nu_1\nu_2\cos\varphi}{\nu_1^2+\nu_2^2} + \frac{(\nu_1^2+\nu_3\nu_2^2)\sin\varphi}{\nu_1^2+\nu_2^2} & \frac{(\nu_1^2+\nu_3\nu_2^2)\cos\varphi}{\nu_1^2+\nu_2^2} - \frac{(\nu_3-1)\nu_1\nu_2\sin\varphi}{\nu_1^2+\nu_2^2} & \nu_2 \\ -\nu_1\cos\varphi - \nu_2\sin\varphi & \nu_1\sin\varphi - \nu_2\cos\varphi & \nu_3 \end{bmatrix} \tag{2-14}
$$

Neste ponto é útil lembrar que a variável $\varphi = \varphi(s)$ mede a torção da viga ao longo da coordenada s.

Três Rotações Elementares: Devido à dificuldade de interpretar fisicamente o significado das variáveis $\nu_i(s)$ nas equações acima, é conveniente descrever as rotações da viga usando três rotações elementares consecutivas:

$$
F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \xrightarrow{\phi_x\ (\mathbf{e}_1)} Q(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3') \xrightarrow{\phi_y\ (\mathbf{e}_2')} R(\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2'', \mathbf{e}_3'') \xrightarrow{\phi_z\ (\mathbf{e}_3'')} S(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) \tag{2-15}
$$

sendo $Q(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3') \equiv Q$ e $R(\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2'', \mathbf{e}_3'') \equiv R$ bases intermediárias. As

matrizes de rotação, associadas a cada rotação elementar, são:

$$
\begin{aligned}
{}^F\mathbf{T}^Q &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_x & -\sin\phi_x \\ 0 & \sin\phi_x & \cos\phi_x \end{bmatrix}, {}^Q\mathbf{T}^R = \begin{bmatrix} \cos\phi_y & 0 & \sin\phi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi_y & 0 & \cos\phi_y \end{bmatrix}, \\
{}^R\mathbf{T}^S &= \begin{bmatrix} \cos\phi_z & -\sin\phi_z & 0 \\ \sin\phi_z & \cos\phi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Logo, usando a propriedade multiplicativa das matrizes de rotação ${}^F\mathbf{T}^S = {}^F\mathbf{T}^Q{}^Q\mathbf{T}^R{}^R\mathbf{T}^S$, é possível encontrar a matriz ${}^F\mathbf{T}^S$ que leva a base inercial (F) a coincidir com a base dos diretores (S):

$$
{}^F\mathbf{T}^S = \begin{bmatrix} \cos\phi_z\cos\phi_y & -\sin\phi_z\cos\phi_y & \sin\phi_y \\ \sin\phi_x\sin\phi_y\cos\phi_z + \cos\phi_x\sin\phi_z & \cos\phi_x\cos\phi_z - \sin\phi_x\sin\phi_y\sin\phi_z & -\sin\phi_x\cos\phi_y \\ \sin\phi_x\sin\phi_z - \cos\phi_x\sin\phi_y\cos\phi_z & \cos\phi_x\sin\phi_y\sin\phi_z + \sin\phi_x\cos\phi_z & \cos\phi_x\cos\phi_y \end{bmatrix} \tag{2-16}
$$

Expandindo as funções trigonométricas da Eq. (2-16) em polinômios e igualando as componentes das matrizes, Eqs. (2-14) e (2-16), obtém-se:

$$
\begin{aligned}
\nu_1 &= +\sin\phi_y &&= +\phi_y - \tfrac{1}{6}\phi_y^3 + \cdots \\
\nu_2 &= -\sin\phi_x\cos\phi_y &&= -\phi_x + \tfrac{1}{2}\phi_x\phi_y^2 + \tfrac{1}{6}\phi_x^3 + \cdots \\
\nu_3 &= +\cos\phi_x\cos\phi_y &&= 1 - \tfrac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) + \tfrac{1}{4}\phi_x^2\phi_y^2 + \cdots
\end{aligned} \tag{2-17}
$$

e

$$
\begin{aligned}
-\nu_1\cos\varphi - \nu_2\sin\varphi &= \sin\phi_x\sin\phi_z - \cos\phi_x\sin\phi_y\cos\phi_z \\
+\nu_1\sin\varphi - \nu_2\cos\varphi &= \sin\phi_x\cos\phi_z + \cos\phi_x\sin\phi_y\sin\phi_z
\end{aligned}
$$

das duas últimas equações, facilmente pode-se encontrar que:

$$
\begin{aligned}
\sin\varphi &= \frac{\sin\phi_z(\cos\phi_x + \cos\phi_y) + \cos\phi_z\sin\phi_x\sin\phi_y}{1 + \cos\phi_x\cos\phi_y} \\
\cos\varphi &= \frac{\cos\phi_z(\cos\phi_x + \cos\phi_y) - \sin\phi_z\sin\phi_x\sin\phi_y}{1 + \cos\phi_x\cos\phi_y}
\end{aligned}
$$

Posteriomente, expandindo as funções trigonométricas $\sin(\bullet)$ e $\cos(\bullet)$ acima, encontra-se o valor aproximado para a variável de torção:

$$
\varphi \approx \phi_z + \frac{1}{2}\phi_x\phi_y - \frac{1}{6}\phi_z^3 + \cdots
$$

Para finalizar, considerando polinômios de até terceira ordem, as

relações entre $\{\varphi(s), x'(s), y'(s)\}$ e $\{\phi_x(s), \phi_y(s), \phi_z(s)\}$ são:

$$\begin{aligned}
\varphi(s) &= \phi_z(s) + \frac{1}{2}\phi_x(s)\phi_y(s) - \frac{1}{6}\phi_z^3(s) \\
\nu_1(s) &= \frac{x'(s)}{r'(s)} = +\phi_y(s) - \frac{1}{6}\phi_y^3(s) \\
\nu_2(s) &= \frac{y'(s)}{r'(s)} = -\phi_x(s) + \frac{1}{2}\phi_x(s)\phi_y^2(s) + \frac{1}{6}\phi_x^3(s)
\end{aligned} \tag{2-18}$$

As relações encontradas na Eq. (2-18) serão de muita utilidade para resolver o problema estático e serão usadas para encontrar as funções de deslocamento da viga.

2.5 Configuração de Referência

2.5.1 Geometria de Curvas no Espaço

O sistema de equações [56]:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} &= \mathbf{t}(s), \ \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = \tau(s)\mathbf{n}(s) \\
\frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} &= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s), \ \frac{d\mathbf{b}(s)}{ds} = -\tau(s)\mathbf{n}(s)
\end{aligned}$$

usualmente referidas como as fórmulas de Frenet-Serret, formam a base

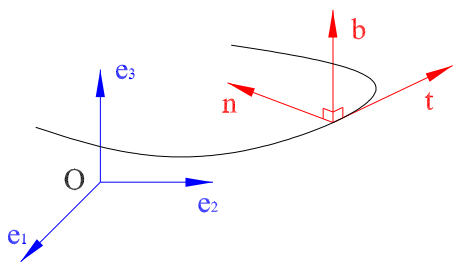

Figura 2.3: Vetores tangente, principal normal e binormal de uma curva.

da geometria diferencial das curvas no espaço. Nas equações acima $\mathbf{t}(s)$ representa o vetor unitário tangencial da curva espacial (apontando na direção crescente da coordenada s), $\mathbf{n}(s)$ representa o vetor unitário normal principal (dirigido para o centro principal de curvatura) e $\mathbf{b}(s)$ representa o vetor unitário binormal à curva na longitude de arco s desde algum ponto de referência. Os escalares $\kappa(s)$ e $\tau(s)$ são escalares positivos, e

representam a curvatura e a torção geométrica da curva na longitude de arco s, respectivamente. Os significados desses símbolos são mais bem ilustrados graficamente na Fig. 2.3 e são melhor vistos se escritos na forma matricial:

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{bmatrix}$$

ou, por conveniência, reordenando de uma outra forma:

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \\ \mathbf{t}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tau(s) & -\kappa(s) \\ -\tau(s) & 0 & 0 \\ \kappa(s) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \\ \mathbf{t}(s) \end{bmatrix} \tag{2-19}$$

2.5.2
Deformações de Referência

Certamente existe alguma arbitrariedade quando as deformações são definidas nas Eqs. (2-2, 2-3). Isso aparece devido à arbitrariedade da definição da base de diretores $\mathbf{d}_i(s)$ e do parâmetro s. Essa arbitrariedade é removida especificando uma deformação de referência particular devida ao estado de referência ou configuração de referência. Na configuração de referência, a base $S\left(\mathbf{d}_1^\circ(s), \mathbf{d}_2^\circ(s), \mathbf{d}_3^\circ(s)\right) \equiv S$ possui vetores unitários ortogonais $\mathbf{d}_i^\circ(s)$, e as deformações de referência são:

$$^S\mathbf{v}^\circ(s) = \begin{bmatrix} v_1^\circ(s) & v_2^\circ(s) & v_3^\circ(s) \end{bmatrix}^T \tag{2-20}$$

$$^S\mathbf{u}^\circ(s) = \begin{bmatrix} u_1^\circ(s) & u_2^\circ(s) & u_3^\circ(s) \end{bmatrix}^T \tag{2-21}$$

Usualmente supõe-se que o estado de referência é de energia mínima ou a configuração livre de esforços. Também, geralmente, o parâmetro s é escolhido como sendo a longitude de arco ao longo da linha de centros da configuração de referência $\mathbf{r}^\circ(s)$. Nesse caso, o vetor de deformação linear de referência satisfaz a relação $\frac{d\mathbf{r}^\circ(s)}{ds} = \mathbf{v}^\circ(s)$ com norma $v^\circ(s) = 1$. No presente trabalho, o vetor unitário de referência $\mathbf{d}_3^\circ(s)$ é escolhido como sendo paralelo ao vetor tangente à linha de centros da curva de referência. Logo, para todo s o vetor de deformação linear de referência satisfaz:

$$^S\mathbf{v}^\circ(s) = {}^S\mathbf{d}_3^\circ(s) \quad \longrightarrow \quad v_1^\circ(s) = v_2^\circ(s) = 0,\ v_3^\circ(s) = 1 \tag{2-22}$$

Diferentemente do vetor de deformação linear de referência, o vetor

de deformação angular de referência é obtido usando as equações de Frenet-Serret: definindo ${}^S\mathbf{d}_3^\circ(s) = \mathbf{t}(s)$ o vetor unitário tangente, ${}^S\mathbf{d}_1^\circ(s) = \mathbf{n}(s)$ o vetor unitário normal e ${}^S\mathbf{d}_2^\circ(s) = \mathbf{b}(s)$ o vetor unitário binormal, logo, usando as equações de Frenet-Serret, Eq. (2-19), com curvatura $\kappa_0(s)$ e torção $\tau_0(s)$ de referência, as derivadas dos vetores unitários ${}^S\mathbf{d}_i^\circ(s)$ resultam:

$$\begin{aligned}
\frac{d\ {}^S\mathbf{d}_1^\circ(s)}{ds} &= \begin{bmatrix} 0 & \tau_0(s) & -\kappa_0(s) \end{bmatrix}^T \\
\frac{d\ {}^S\mathbf{d}_2^\circ(s)}{ds} &= \begin{bmatrix} -\tau_0(s) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\
\frac{d\ {}^S\mathbf{d}_3^\circ(s)}{ds} &= \begin{bmatrix} \kappa_0(s) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a Eq. (2-9) para a base (S), as derivadas dos vetores unitários ${}^S\mathbf{d}_i^\circ(s)$ resultam:

$$\begin{aligned}
\frac{d\ {}^S\mathbf{d}_1^\circ(s)}{ds} &= \begin{bmatrix} 0 & u_3^\circ(s) & -u_2^\circ(s) \end{bmatrix}^T \\
\frac{d\ {}^S\mathbf{d}_2^\circ(s)}{ds} &= \begin{bmatrix} -u_3^\circ(s) & 0 & u_1^\circ(s) \end{bmatrix}^T \\
\frac{d\ {}^S\mathbf{d}_3^\circ(s)}{ds} &= \begin{bmatrix} u_2^\circ(s) & 0 & -u_1^\circ(s) \end{bmatrix}^T
\end{aligned}$$

Comparando as equações acima, percebe-se que as componentes do vetor de deformação angular, na configuração de referência, resultam:

$$u_1^\circ(s) = 0,\ u_2^\circ(s) = \kappa_0(s),\ u_3^\circ(s) = \tau_0(s) \tag{2-23}$$

O uso de uma configuração de referência curva tem aplicação imediata na dinâmica de colunas de perfuração em poços curvos.

2.6
Equações de Movimento da Viga de Cosserat

As equações de movimento da viga de Cosserat estão deduzidas no livro de Antman [23]. Para uma viga de densidade $\rho(s)$ e área da seção transversal $A(s)$, as leis dinâmicas são:

$$\begin{aligned}
\rho(s)A(s)\frac{d^2\ {}^S\mathbf{r}(s,t)}{dt^2} &= \frac{d\ {}^S\mathbf{n}(s,t)}{ds} + {}^S\mathbf{f}(s,t) \\
\frac{d\ {}^S\mathbf{h}(s,t)}{dt} &= \frac{d\ {}^S\mathbf{m}(s,t)}{ds} + {}^S\tilde{\mathbf{v}}(s,t){}^S\mathbf{n}(s,t) + {}^S\mathbf{l}(s,t)
\end{aligned}$$

sendo que:

$$
\begin{aligned}
{}^{S}\mathbf{n}(s,t) &= \begin{bmatrix} n_1(s,t) & n_2(s,t) & n_3(s,t) \end{bmatrix}^T && (2\text{-}24)\\
{}^{S}\mathbf{m}(s,t) &= \begin{bmatrix} m_1(s,t) & m_2(s,t) & m_3(s,t) \end{bmatrix}^T && (2\text{-}25)\\
{}^{S}\mathbf{h}(s,t) &= \begin{bmatrix} h_1(s,t) & h_2(s,t) & h_3(s,t) \end{bmatrix}^T && (2\text{-}26)
\end{aligned}
$$

${}^{S}\mathbf{n}(s,t)$ é a força de contato (interna) resultante, ${}^{S}\mathbf{m}(s,t)$ é o momento de contato (interno) resultante e ${}^{S}\mathbf{h}(s,t)$ é a quantidade de movimento angular; ${}^{S}\mathbf{f}(s,t)$ e ${}^{S}\mathbf{l}(s,t)$ denotam a densidade de força externa e densidade de momento externo prescritos (por unidade de comprimento de referência em (s,t)), respectivamente.

Supondo que as funções de deslocamento da viga satisfaçam as correspondentes equações de equilíbrio estático, obtem-se, na ausência das forças externas e da gravidade, as equações de equilíbrio estático local:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\ {}^{S}\mathbf{n}(s)}{ds} &= 0 && (2\text{-}27)\\
\frac{d\ {}^{S}\mathbf{m}(s)}{ds} + {}^{S}\tilde{\mathbf{v}}(s)\,{}^{S}\mathbf{n}(s) &= 0 && (2\text{-}28)
\end{aligned}
$$

sendo:

$$
{}^{S}\mathbf{n}(s) = \begin{bmatrix} n_1(s) & n_2(s) & n_3(s) \end{bmatrix}^T,\ {}^{S}\mathbf{m}(s) = \begin{bmatrix} m_1(s) & m_2(s) & m_3(s) \end{bmatrix}^T
$$

Neste ponto é importante ressaltar que, devido aos diretores $d_i(s)$ não serem constantes, as derivadas $\frac{d\ {}^{S}\mathbf{m}(s)}{ds}$ e $\frac{d\ {}^{S}\mathbf{n}(s)}{ds}$ não são as derivadas das componentes somente. Deve ser incluido um termo adicional dado por um produto vetorial, que corresponde ao equivalente à rotação da base (S), p. ex.:

$$
\frac{d\ {}^{S}\mathbf{m}(s)}{ds} = \begin{bmatrix} m_1'(s) \\ m_2'(s) \\ m_3'(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -u_3(s) & u_2(s) \\ u_3(s) & 0 & -u_1(s) \\ u_2(s) & u_1(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1(s) \\ m_2(s) \\ m_3(s) \end{bmatrix}
$$

2.6.1
Viga sem Cisalhamento

Referindo-se à expressão do vetor de deformação linear, Eq. (2-2), é possível classificar a viga da seguinte forma: A viga é chamada inextensível se $v_3(s) \equiv 1$ é imposto como restrição. A viga é chamada sem cisalhamento

se $v_1(s) = v_2(s) \equiv 0$ são impostos como restrições. Naturalmente, as três restrições podem ser impostas. Nessa situação a viga é inextensível e sem cisalhamento. Resumindo:

$$\begin{aligned} \text{Inextensível} \quad &\rightarrow \quad {}^S\mathbf{v}(s) = \begin{bmatrix} v_1(s) & v_2(s) & 1 \end{bmatrix}^T \\ \text{Sem cisalhamento} \quad &\rightarrow \quad {}^S\mathbf{v}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & v_3(s) \end{bmatrix}^T \\ \text{Inextensível e Sem cisalhamento} \quad &\rightarrow \quad {}^S\mathbf{v}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{2-29}$$

Para essas vigas, a força $\mathbf{n}(s)$ é desconhecida, sem uma relação constitutiva, no entanto, as deformações $\mathbf{u}(s)$ e momentos $\mathbf{m}(s)$ estão relacionados através de relações constitutivas [53].

Por outro lado, sabe-se que a norma de um vetor é um invariante, ou seja, é inalterável em qualquer sistema de referência, conseqüentemente, igualando a norma do vetor de deformação linear $\mathbf{v}(s)$ das Eqs. (2-4) e (2-29) obtém-se:

$$v_3(s) = r'(s) = \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2 + (z'(s))^2} \tag{2-30}$$

2.6.2 Equações Constitutivas

Nesta secção as propriedades do material da viga são caracterizadas, já que é necessário diferenciar entre vigas de aço, madeira, plástico ou outros materiais. Esta diferença é especificada usando as equações constitutivas do material, dadas por equações que relacionam os esforços ${}^S\mathbf{m}(s)$, ${}^S\mathbf{n}(s)$ em termos das deformações ${}^S\mathbf{u}(s)$, ${}^S\mathbf{v}(s)$ ou vice versa.

A escolha das equações constitutivas apropriadas é uma etapa importante na modelagem de vigas, já que elas descrevem o fenômeno físico. Talvez a equação mais simples seja aquela que é diagonal e linear, usada por Pai [46]. Para muitos materiais, a equação constitutiva linear é adequada. É necessário ressaltar que a viga de Cosserat pode realizar grandes deslocamentos mas mantendo pequenas deformações em cada ponto ao longo da viga. Assim, efeitos não-lineares importantes devido à mudança na geometria são levados em consideração, inclusive se o material é linear.

$$\begin{aligned} {}^S\mathbf{n}(s) &= {}^S\mathbf{K}(s)\left({}^S\mathbf{v}(s) - {}^S\mathbf{v}^\circ(s)\right) \\ {}^S\mathbf{m}(s) &= {}^S\mathbf{J}(s)\left({}^S\mathbf{u}(s) - {}^S\mathbf{u}^\circ(s)\right) \end{aligned} \tag{2-31}$$

Nas equações acima ${}^S\mathbf{K}(s)$ e ${}^S\mathbf{J}(s)$ são matrizes simétricas que determinam a rigidez em relação a deformações lineares e angulares, respectiva-

mente. A partir das equações constitutivas é fácil verificar que os esforços na configuração de referência são nulos, ou seja, a configuração de referência está livre de esforços.

Por conveniência, a base de diretores (S) é orientada com os eixos principais associados à seção transversal. Para materiais elásticos homogêneos e isotrópicos com módulo de Young E e módulo de cisalhamento G as componentes não nulas de ${}^{S}\mathbf{K}(s)$ e ${}^{S}\mathbf{J}(s)$ são:

$$J_1 = E\Gamma_1(s),\ J_2 = E\Gamma_2(s),\ J_3 = G\Gamma_3(s)$$
$$K_1 = GA(s),\ K_2 = GA(s),\ K_3 = EA(s)$$

Como exemplo, as componentes do segundo momento de área, de uma viga de secção circular uniforme, com raio interno r_i e raio externo r_e são:

$$\Gamma_1(s) = \Gamma_2(s) = \frac{\pi}{4}\left(r_e^4 - r_i^4\right),\ \Gamma_3(s) = \Gamma_1(s) + \Gamma_2(s) = \frac{\pi}{2}\left(r_e^4 - r_i^4\right)$$

Logo, da Eq. (2-31), as forças e momentos de contato resultam:

$${}^{S}\mathbf{n}(s) = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(s) \\ v_2(s) \\ v_3(s) - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 v_1(s) \\ K_2 v_2(s) \\ K_3\left(v_3(s) - 1\right) \end{bmatrix} \quad (2\text{-}32)$$

$${}^{S}\mathbf{m}(s) = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) - \kappa_0 \\ u_3(s) - \tau_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 u_1(s) \\ J_2\left(u_2(s) - \kappa_0\right) \\ J_3\left(u_3(s) - \tau_0\right) \end{bmatrix} \quad (2\text{-}33)$$

No presente trabalho, o estudo é realizado apenas para vigas com curvatura constante $\kappa_0 = \frac{1}{R}$ e sem torção $\tau_0 = 0$. Vigas esbeltas, onde as deformações de cisalhamento são desprezíveis podem ser modeladas como vigas de Cosserat sem deformação de cisalhamento. Conseqüentemente, as equações constitutivas são:

$$\begin{aligned} {}^{S}\mathbf{n}(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_3\left(v_3(s) - 1\right) \end{bmatrix}^T \\ {}^{S}\mathbf{m}(s) &= \begin{bmatrix} J_1 u_1(s) & J_2\left(u_2(s) - \kappa_0\right) & J_3 u_3(s) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2\text{-}34)$$

2.6.3
Funções de Deslocamento da Viga de Cosserat

Usando a equação de equilíbrio estático, Eq. (2-27), as forças de contato resultam:

$$\frac{d\ {}^{S}\mathbf{n}(s)}{ds} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} n_1'(s) \\ n_2'(s) \\ n_3'(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -u_3(s) & u_2(s) \\ u_3(s) & 0 & -u_1(s) \\ u_2(s) & u_1(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \\ n_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n_1'(s) - u_3(s)n_2(s) + u_2(s)n_3(s) \\ n_2'(s) + u_3(s)n_1(s) - u_1(s)n_3(s) \\ n_3'(s) - u_2(s)n_1(s) + u_1(s)n_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-35}$$

Analogamente, os momentos de contato são dados por:

$$\frac{d\ {}^{S}\mathbf{m}(s)}{ds} + {}^{S}\tilde{\mathbf{v}}(s)\,{}^{S}\mathbf{n}(s) = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} m_1'(s) \\ m_2'(s) \\ m_3'(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -u_3(s) & u_2(s) \\ u_3(s) & 0 & -u_1(s) \\ u_2(s) & u_1(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1(s) \\ m_2(s) \\ m_3(s) \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & -v_3(s) & 0 \\ v_3(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \\ n_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_1'(s) - u_3(s)m_2(s) + u_2(s)m_3(s) - v_3(s)n_2(s) \\ m_2'(s) + u_3(s)m_1(s) - u_1(s)m_3(s) + v_3(s)n_1(s) \\ m_3'(s) - u_2(s)m_1(s) + u_1(s)m_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-36}$$

Ao invés de considerar $n_1(s) = 0$ e $n_2(s) = 0$, como ocorre na Eq. (2-34), as componentes da força de contato $n_1(s)$ e $n_2(s)$ são calculadas, como feito em Maddocks [53], das duas primeiras componentes da Eq. (2-36), resultando:

$$\begin{aligned} n_1(s) &= \frac{1}{v_3(s)}\left[-m_2'(s) - u_3(s)m_1(s) + u_1(s)m_3(s)\right] \\ n_2(s) &= \frac{1}{v_3(s)}\left[+m_1'(s) - u_3(s)m_2(s) + u_2(s)m_3(s)\right] \end{aligned}$$

Portanto, tomando as três componentes da Eq. (2-35) e a terceira componente da Eq. (2-36), as equações diferenciais de equilíbrio estático

resultam:

$$\begin{aligned} n_1'(s) &= u_3(s)n_2(s) - u_2(s)n_3(s) \\ n_2'(s) &= u_1(s)n_3(s) - u_3(s)n_1(s) \\ n_3'(s) &= u_2(s)n_1(s) - u_1(s)n_2(s) \\ m_3'(s) &= u_2(s)m_1(s) - u_1(s)m_2(s) \end{aligned} \tag{2-37}$$

Resumindo, o sistema de equações a ser resolvido é altamente não linear e neste trabalho é empregado o método de perturbação [10] para sua solução. Todos os cálculos são realizados simbolicamente usando o programa Maple.

2.7 Método de Perturbação

Uma viga uniforme, de comprimento L, e inicialmente curva com curvatura $\kappa_0(s) = \frac{1}{R}$, contida no plano $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ é considerada, Fig. 2.4. O ângulo α é introduzido para definir alternativamente a posição de um ponto na configuração de referência. Também, supõe-se que o elemento viga esteja suportado arbitrariamente nos extremos $s = a = 0$ e $s = b = L$.

Como um prelúdio para expandir as funções de deslocamento numa forma adequada para a análise de perturbação, faz-se necessário introduzir alguns parâmetros adimensionais (o símbolo barra sobre as variáveis indica a forma adimensional). As seguintes variáveis adimensionais são introduzidas:

$$\sigma = \frac{s}{L_0},\ \bar{\mathbf{r}}(\sigma) = \frac{\mathbf{r}(s)}{L_0},\ \bar{x}(\sigma) = \frac{x(s)}{L_0},\ \bar{y}(\sigma) = \frac{y(s)}{L_0},\ \bar{z}(\sigma) = \frac{z(s)}{L_0}$$

Para a viga curva de comprimento total L, é conveniente considerar o comprimento de referência L_0 como sendo o comprimento não deformado $L_0 = L$.

Da Fig. 2.4, a variável adimensional $\sigma = \frac{s}{L_0}$ varia no intervalo $[0, 1]$ e, considerando pequenos ângulos α_0, as componentes adimensionais do vetor de posição e rotações, para um ponto genérico σ da viga, são:

$$\begin{aligned} \bar{x}(\sigma) &= \varepsilon\bar{x}_\sigma,\ \bar{y}(\sigma) = \varepsilon\bar{y}_\sigma,\ \bar{z}(\sigma) = \sigma + \varepsilon\bar{z}_\sigma \\ \phi_x(\sigma) &= \varepsilon\phi_{x\sigma},\ \phi_y(\sigma) = \varepsilon\phi_{y\sigma},\ \phi_z(\sigma) = \varepsilon\phi_{z\sigma} \end{aligned} \tag{2-38}$$

Nas equações acima $(\bar{x}_\sigma, \bar{y}_\sigma, \bar{z}_\sigma)$ são os deslocamentos lineares ao longo das direções $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ e $(\phi_{x\sigma}, \phi_{y\sigma}, \phi_{z\sigma})$ são as rotações em torno das direções $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'')$, como definido na Eq. (2-15). Também, ε foi introduzido

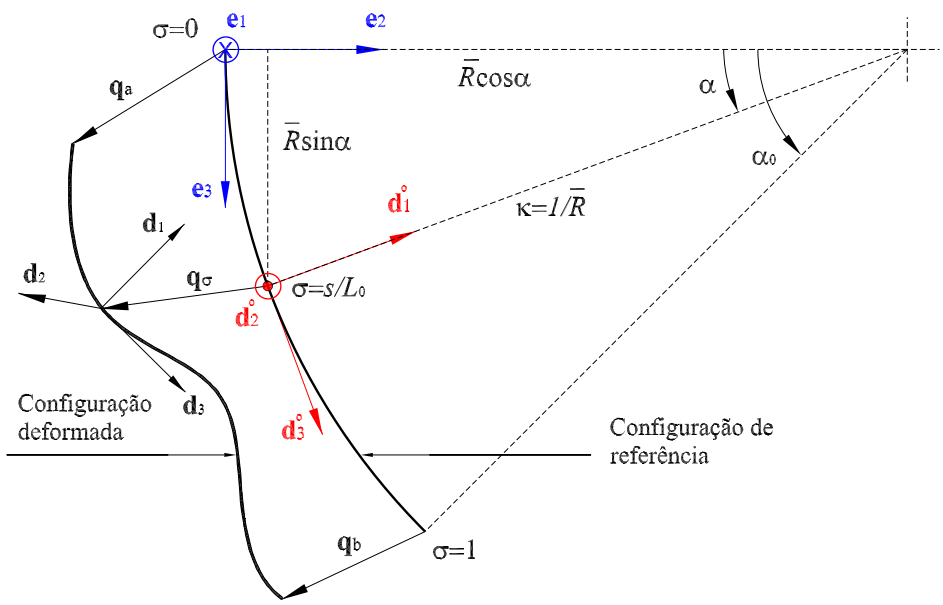

Figura 2.4: Viga de curvatura constante.

como parâmetro de perturbação. Logo, os deslocamentos e rotações de um ponto genérico σ podem ser arranjados num vetor adimensional $\bar{\mathbf{q}}_\sigma$, conseqüentemente, o vetor de deslocamento nodal para este ponto é:

$$\sigma = \frac{s}{L} \quad \longrightarrow \quad \bar{\mathbf{q}}_\sigma = \begin{bmatrix} \varepsilon\bar{x}_\sigma & \varepsilon\bar{y}_\sigma & \varepsilon\bar{z}_\sigma & \varepsilon\phi_{x\sigma} & \varepsilon\phi_{y\sigma} & \varepsilon\phi_{z\sigma} \end{bmatrix}^T$$

Supõe-se que os deslocamentos e rotações adimensionais nodais nas extremidades, $\sigma = 0$ $(s = a)$ e $\sigma = 1$ $(s = b)$, são:

$$\begin{aligned} \sigma = 0 \ (s = a) \quad &\longrightarrow \quad \bar{\mathbf{q}}_a = \begin{bmatrix} \varepsilon\bar{x}_a & \varepsilon\bar{y}_a & \varepsilon\bar{z}_a & \varepsilon\phi_{xa} & \varepsilon\phi_{ya} & \varepsilon\phi_{za} \end{bmatrix}^T \\ \sigma = 1 \ (s = b) \quad &\longrightarrow \quad \bar{\mathbf{q}}_b = \begin{bmatrix} \varepsilon\bar{x}_b & \varepsilon\bar{y}_b & \varepsilon\bar{z}_b & \varepsilon\phi_{xb} & \varepsilon\phi_{yb} & \varepsilon\phi_{zb} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{2-39}$$

Logo, da Eq. (2-38), as condições de contorno para $\bar{\mathbf{r}}(\sigma) = \begin{bmatrix} \bar{x}(\sigma) & \bar{y}(\sigma) & \bar{z}(\sigma) \end{bmatrix}^T$ nos pontos $\sigma = 0$ $(s = a)$ e $\sigma = 1$ $(s = b)$ são:

$$\begin{aligned} \bar{x}(0) &= \varepsilon\bar{x}_a, \quad \bar{y}(0) = \varepsilon\bar{y}_a, \quad \bar{z}(0) = \varepsilon\bar{z}_a \\ \bar{x}(1) &= \varepsilon\bar{x}_b, \quad \bar{y}(1) = \varepsilon\bar{y}_b, \quad \bar{z}(1) = 1 + \varepsilon\bar{z}_b \end{aligned} \tag{2-40}$$

Também, substituindo as rotações nodais, Eq. (2-39), na Eq. (2-18), as condições de contorno para $\{\varphi(\sigma), \bar{x}'(\sigma), \bar{y}'(\sigma)\}$ resultam:

para $\sigma = 0$:

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= +\varepsilon\phi_{za} + \varepsilon^2\frac{1}{2}\phi_{xa}\phi_{ya} - \varepsilon^3\frac{1}{6}\phi_{za}^3 \\
\frac{\bar{x}'(0)}{\bar{r}'(0)} &= +\varepsilon\phi_{ya} - \varepsilon^3\frac{1}{6}\phi_{ya}^3 \\
\frac{\bar{y}'(0)}{\bar{r}'(0)} &= -\varepsilon\phi_{xa} + \varepsilon^3\frac{1}{2}\phi_{xa}\phi_{ya}^2 + \varepsilon^3\frac{1}{6}\phi_{xa}^3
\end{aligned} \tag{2-41}$$

para $\sigma = 1$:

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= +\varepsilon\phi_{zb} + \varepsilon^2\frac{1}{2}\phi_{xb}\phi_{yb} - \varepsilon^3\frac{1}{6}\phi_{zb}^3 \\
\frac{\bar{x}'(1)}{\bar{r}'(1)} &= +\varepsilon\phi_{yb} - \varepsilon^3\frac{1}{6}\phi_{yb}^3 \\
\frac{\bar{y}'(1)}{\bar{r}'(1)} &= -\varepsilon\phi_{xb} + \varepsilon^3\frac{1}{2}\phi_{xb}\phi_{yb}^2 + \varepsilon^3\frac{1}{6}\phi_{xb}^3
\end{aligned} \tag{2-42}$$

Tratando a variável ε como parâmetro de perturbação, as funções de deslocamento da viga podem ser obtidas resolvendo a equação de equilíbrio estático, Eq. (2-37), com as correspondentes condições de contorno, Eqs. (2-40), (2-41) e (2-42). No método de perturbação, a seguinte expansão polinomial é empregada [10]:

$$\begin{aligned}
\bar{x}(\sigma) &= \varepsilon\bar{x}_1(\sigma) + \varepsilon^2\bar{x}_2(\sigma) + \cdots \\
\bar{y}(\sigma) &= \varepsilon\bar{y}_1(\sigma) + \varepsilon^2\bar{y}_2(\sigma) + \cdots \\
\bar{z}(\sigma) &= \sigma + \varepsilon\bar{z}_1(\sigma) + \varepsilon^2\bar{z}_2(\sigma) + \cdots \\
\varphi(\sigma) &= \varepsilon\varphi_1(\sigma) + \varepsilon^2\varphi_2(\sigma) + \cdots
\end{aligned} \tag{2-43}$$

Substituindo a Eq. (2-43) na Eq. (2-37) e levando em conta que $\{\bar{x}_i(\sigma),\ \bar{y}_i(\sigma),\ \bar{z}_i(\sigma),\ \varphi_i(\sigma)\}$ são independentes de ε, os coeficientes de cada potencia de ε são igualados a zero. Isto leva a um conjunto de equações diferenciais lineares ordinárias, com suas respectivas condições de contorno, que são resolvidas simbolicamente usando o programa Maple. Conseqüentemente, a solução aproximada é obtida e os termos de primeira ordem são:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1(\sigma) &= \bar{x}_a + \phi_{ya}\sigma - (2\phi_{ya} + \phi_{yb} + 3\bar{x}_a - 3\bar{x}_b)\,\sigma^2 + (\phi_{ya} + \phi_{yb} + 2\bar{x}_a - 2\bar{x}_b)\,\sigma^3 \\
\bar{y}_1(\sigma) &= \bar{y}_a + \phi_{xa}\sigma - (2\phi_{xa} + \phi_{xb} - 3\bar{y}_a + 3\bar{y}_b)\,\sigma^2 + (\phi_{xa} + \phi_{xb} - 2\bar{y}_a + 2\bar{y}_b)\,\sigma^3 \\
\bar{z}_1(\sigma) &= \bar{z}_a + (\bar{z}_b - \bar{z}_a)\,\sigma \\
\varphi_1(\sigma) &= \phi_{za} + (\phi_{zb} - \phi_{za})\,\sigma
\end{aligned}$$

Para investigar deformações de até segunda ordem em ε é necessário

truncar a Eq. (2-43) até os termos que contenham ε^2. Fazendo isso, resulta, por exemplo:

$$\bar{x}_2(\sigma) = c_{13}\sigma + c_{14}\sigma^2 + c_{15}\sigma^3 + c_{16}\sigma^4 + c_{17}\sigma^5$$

com constantes:

$$\begin{aligned} c_{13} &= (\bar{z}_b - \bar{z}_a)\,\phi_{ya} + \frac{1}{2}\phi_{xa}\phi_{za} \\ &\vdots \\ c_{17} &= \frac{K_3}{20J_2}\,(\bar{z}_b - \bar{z}_a)\,(\phi_{ya} + \phi_{yb} + 2\bar{x}_a - 2\bar{x}_b) \end{aligned}$$

Finalmente, os deslocamentos genéricos da viga, para $s = [0, L]$, são:

$$\begin{aligned} x(s) = L_0\bar{x}(\sigma) \longrightarrow x(s) &= \varepsilon x_1(s) + \varepsilon^2 x_2(s) \\ y(s) = L_0\bar{y}(\sigma) \longrightarrow y(s) &= \varepsilon y_1(s) + \varepsilon^2 y_2(s) \\ z(s) = L_0\bar{z}(\sigma) \longrightarrow z(s) &= s + \varepsilon z_1(s) + \varepsilon^2 z_2(s) \\ \varphi(s) &= \varepsilon\varphi_1(s) + \varepsilon^2\varphi_2(s) \end{aligned}$$

sendo:

$$\begin{aligned} x_1(s) &= x_a + \phi_{ya}s - \frac{2L\phi_{ya} + L\phi_{yb} + 3x_a - 3x_b}{L^2}s^2 + \frac{L\phi_{ya} + L\phi_{yb} + 2x_a - 2x_b}{L^3}s^3 \\ y_1(s) &= y_a + \phi_{xa}s - \frac{2L\phi_{xa} + L\phi_{xb} - 3y_a + 3y_b}{L^2}s^2 + \frac{L\phi_{xa} + L\phi_{xb} - 2y_a + 2y_b}{L^3}s^3 \\ z_1(s) &= z_a + \frac{z_b - z_a}{L}s \\ \varphi_1(s) &= \phi_{za} + \frac{\phi_{zb} - \phi_{za}}{L}s \\ x_2(s) &= c_{13}s + c_{14}s^2 + c_{15}s^3 + c_{16}s^4 + c_{17}s^5 \\ y_2(s) &= c_{18}s + c_{19}s^2 + c_{20}s^3 + c_{21}s^4 + c_{22}s^5 \\ z_2(s) &= c_{23}s + c_{24}s^2 + c_{25}s^3 + c_{26}s^4 + c_{27}s^5 \\ \varphi_2(s) &= c_{28}s + c_{29}s^2 + c_{30}s^3 + c_{31}s^4 \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
c_1 &= x_a;\ c_2 = \phi_{ya};\ c_3 = -(L\phi_{yb} + 2\phi_{ya}L + 3x_a - 3x_b)/L^2;\ c_4 = (L\phi_{yb} + \phi_{ya}L + 2x_a - 2x_b)/L^3 \\
c_5 &= z_a;\ c_6 = -(z_a - z_b)/L;\ c_7 = y_a;\ c_8 = -\phi_{xa};\ c_9 = (L\phi_{xb} + 2\phi_{xa}L - 3y_a + 3y_b)/L^2 \\
c_{10} &= -(L\phi_{xb} + \phi_{xa}L - 2y_a + 2y_b)/L^3;\ c_{11} = \phi_{za};\ c_{12} = -(\phi_{za} - \phi_{zb})/L;\ c_{13} = 1/2\phi_{xa}\phi_{za} + c_2c_6 \\
c_{14} &= 1/60(6c_4K_3c_6L^4 - 30J_2c_{10}c_{12}L^3 + 5c_3K_3c_6L^3 - 15c_{10}J_3c_{12}L^3 + 30c_{12}J_1c_{10}L^3 - \\
&\quad 180c_6c_4L^2J_2 - 60J_2\phi_{xa}\phi_{za} - 30\phi_{xb}\phi_{zb}J_2 - 120c_6c_3LJ_2 - 180c_2c_6J_2)/(LJ_2) \\
c_{15} &= -1/60(9c_4K_3c_6L^4 - 60J_2c_{10}c_{12}L^3 + 10c_3K_3c_6L^3 - 30c_{10}J_3c_{12}L^3 + 60c_{12}J_1c_{10}L^3 - \\
&\quad 180c_6c_4L^2J_2 - 30J_2\phi_{xa}\phi_{za} - 30\phi_{xb}\phi_{zb}J_2 - 120c_6c_3LJ_2 - 120c_2c_6J_2)/(L^2J_2) \\
c_{16} &= 1/12(6c_{12}J_1c_{10} - 6J_2c_{10}c_{12} + c_3K_3c_6 - 3c_{10}J_3c_{12})/J_2;\ c_{17} = 1/20c_4K_3c_6/J_2;\ c_{18} = 1/2\phi_{ya}\phi_{za} + c_8c_6 \\
c_{19} &= 1/60(6c_{10}K_3c_6L^4 + 5c_9K_3c_6L^3 + 15c_4J_3c_{12}L^3 + 30J_1c_4c_12L^3 - 30c_{12}J_2c_4L^3 \\
&\quad -180c_6c_{10}L^2J_1 - 60J_1\phi_{ya}\phi_{za} - 30\phi_{yb}\phi_{zb}J_1 - 120c_6c_9LJ_1 - 180c_8c_6J_1)/(LJ_1) \\
c_{20} &= -1/60(9c_{10}K_3c_6L^4 + 10c_9K_3c_6L^3 + 30c_4J_3c_{12}L^3 + 60J_1c_4c_{12}L^3 - 60c_{12}J_2c_4L^3 \\
&\quad -180c_6c_{10}L^2J_1 - 30J_1\phi_{ya}\phi_{za} - 30\phi_{yb}\phi_{zb}J_1 - 120c_6c_9LJ_1 - 120c_8c_6J_1)/(L^2J_1) \\
c_{21} &= 1/12(-6c_{12}J_2c_4 + c_9K_3c_6 + 3c_4J_3c_{12} + 6J_1c_4c_{12})/J_1;\ c_{22} = 1/20c_{10}K_3c_6/J_1 \\
c_{23} &= 1/30L(27L^3c_4^2K_3 + 27L^3c_{10}^2K_3 + 45L^2c_9c_{10}K_3 + 45L^2c_3c_4K_3 + 30Lc_8c_{10}K_3 + 20Lc_9^2K_3 + 180LJ_1c_{10}^2 \\
&\quad +180Lc_4^2J_2 + 30Lc_2c_4K_3 + 20Lc_3^2K_3 + 30K_3c_2c_3 + 30K_3c_8c_9 + 180c_3J_2c_4 + 180c_9J_1c_10)/K_3 \\
c_{24} &= -(6c_9J_1c_{10} + K_3c_2c_3 + K_3c_8c_9 + 6c_3J_2c_4)/K_3 \\
c_{25} &= -1/3(2c_9^2K_3 + 18J_1c_{10}^2 + 18c_4^2J_2 + 3K_3c_8c_{10} + 2c_3^2K_3 + 3K_3c_2c_4)/K_3 \\
c_{26} &= -3/2c_9c_{10} - 3/2c_3c_4;\ c_{27} = -9/10c_4^2 - 9/10c_{10}^2 \\
c_{28} &= 1/2L(-6c_4c_{10}L^2J_2 + 6c_4c_{10}L^2J_1 - 4Lc_9J_2c_4 - 4Lc_{10}J_2c_3 \\
&\quad +2LJ_3c_4c_9 - 2LJ_3c_3c_{10} + 4Lc_3J_1c_{10} + 4Lc_4J_1c_9 + 3J_3c_4c_8 - 3J3c_2c_{10} - 4c_9J_2c_3 + 4c_3J_1c_9)/J_3 \\
c_{29} &= -1/2(-3J_3c_2c_{10} - 4c_9J_2c_3 + 4c_3J_1c_9 + 3J_3c_4c_8)/J_3 \\
c_{30} &= -(-J_3c_3c_{10} - 2c_9J_2c_4 - 2c_{10}J_2c_3 + J_3c_4c_9 + 2c_3J_1c_{10} + 2c_4J_1c_9)/J_3;\ c_{31} = -3c_4c_{10}(-J_2 + J_1)/J_3
\end{aligned}
$$

A título de ilustração, na Fig. 2.5 mostram-se diferentes configurações deformadas da viga de Cosserat para várias condições de contorno.

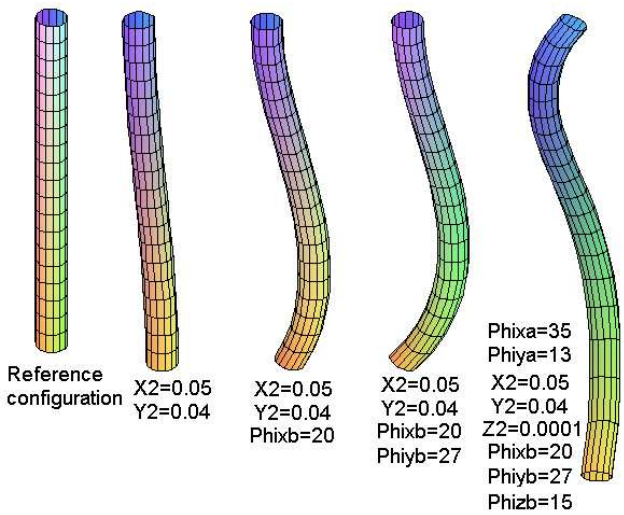

Figura 2.5: Configurações deformadas.

As soluções obtidas acima são parecidas com as soluções reportadas por Cao et. al. [66] e Bazoune et. al. [48] quando as deformações de cisalhamento são desprezíveis. Vale a pena ressaltar que os resultados da solução da equação de equilíbrio estático, foram apresentados no CILAMCE-2005 [57].

Em dinâmica, o movimento quase estático da viga pode ser estudado com deslocamentos e rotações nodais variáveis no tempo. Conseqüentemente, para a análise dinâmica, as funções de deslocamento, em qualquer ponto de viga de Cosserat, podem ser expressas na seguinte forma (o parâmetro ε é avaliado como $\varepsilon = 1$):

$$\begin{aligned} x(s,t) &= x_1(s,t) + x_2(s,t) \\ y(s,t) &= y_1(s,t) + y_2(s,t) \\ z(s,t) &= s + z_1(s,t) + z_2(s,t) \\ \varphi(s,t) &= \varphi_1(s,t) + \varphi_2(s,t) \end{aligned} \tag{2-44}$$

A dinâmica da viga de Cosserat será tratada no capítulo siguente.

3
Dinâmica da Viga de Cosserat

3.1
Introdução

Neste capítulo, a dinâmica de uma viga esbelta, intrinsecamente reta, é estudada sistematicamente para problemas tridimensionais usando a viga de Cosserat descrita no capítulo anterior. A modelagem leva em conta as deformações de flexão, extensão-compressão e torção da viga, permitindo assim, o estudo dos vários tipos de deformações. O problema fundamental quando se usa o MEF é a escolha das funções de deslocamento. No entanto, usando a viga de Cosserat, esse problema é contornado empregando as funções de deslocamento obtidas da equação do equilíbrio estático. Essas funções de deslocamento não lineares são função dos deslocamentos e rotações nodais genéricos da viga. Logo, usando a equação de Lagrange, formada pelas expressões das energias cinética e potencial da viga, são derivadas as equações do movimento não lineares da viga. A partir da equação do movimento da viga é possivel achar as equações de movimento de um sistema que serão aproximadas numericamente usando o método de Newmark. É necessário ressaltar que quando se usa o elemento de Cosserat, que leva em conta todas as não linearidades geométricas do sistema, alta precisão da resposta dinâmica pode ser obtida dividindo o sistema em uns poucos elementos, número que é bem menor que o tradicional MEF, onde as funções de interpolação, em geral, são funções simples tais como polinômios de baixa ordem. Essa é a principal vantagem de usar a viga de Cosserat. Resumindo, a viga de Cosserat fornece uma forma conveniente para a modelagem de estruturas esbeltas.

3.2
Velocidades

Para a análise dinâmica, o movimento da viga de Cosserat pode ser estudado considerando a evolução, no tempo, dos deslocamentos e rotações nodais da viga. Logo, as funções de deslocamento da viga de Cosserat, Eq. (2-44), variáveis no tempo são:

$$\begin{aligned} x(s,t) &= x_1(s,t) + x_2(s,t) \\ y(s,t) &= y_1(s,t) + y_2(s,t) \\ z(s,t) &= s + z_1(s,t) + z_2(s,t) \\ \varphi(s,t) &= \varphi_1(s,t) + \varphi_2(s,t) \end{aligned}$$

O movimento no espaço, de uma secção genérica da viga, pode ser visto como o movimento de um corpo rígido no espaço. Conseqüentemente, o movimento de qualquer seção transversal da viga, localizada a uma distancia s, será caracterizada por uma velocidade de translação e uma velocidade angular.

3.2.1
Velocidade de Translação

A velocidade de translação, da seção transversal da viga, é definida pela derivada do vetor posição, Eq. (2-1), em relação ao parâmetro tempo t:

$$\frac{\partial\ {}^F\mathbf{r}(s,t)}{\partial t} = \left[\ \frac{\partial x(s,t)}{\partial t} \quad \frac{\partial y(s,t)}{\partial t} \quad \frac{\partial z(s,t)}{\partial t}\ \right]^T \tag{3-1}$$

3.2.2
Velocidade Angular

Para calcular a velocidade angular da seção transversal na coordenada s (que possui uma velocidade de rotação própria Ω), ela deverá ser considerada como um corpo rígido com um vetor de velocidade angular $\mathbf{w}(s,t)$.

O vetor de velocidade angular $\mathbf{w}(s,t)$ é calculado usando três rotações elementares, como foi definido na Eq. (2-15):

$$F(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) \xrightarrow{\phi_x\ (\mathbf{e}_1)} Q(\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3) \xrightarrow{\phi_y\ (\mathbf{e}'_2)} R(\mathbf{e}''_1,\mathbf{e}''_2,\mathbf{e}''_3) \xrightarrow{\phi_z+\Omega t\ (\mathbf{e}''_3)} S(\mathbf{d}_1,\mathbf{d}_2,\mathbf{d}_3)$$

Das rotações elementares, as seguintes equações são válidas:

$$
\begin{aligned}
{}^{F}_{F}\mathbf{w}_Q &= {}^{Q}_{F}\mathbf{w}_Q = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_x & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\
{}^{Q}_{Q}\mathbf{w}_R &= {}^{R}_{Q}\mathbf{w}_R = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\phi}_y & 0 \end{bmatrix}^T \\
{}^{R}_{R}\mathbf{w}_S &= {}^{S}_{R}\mathbf{w}_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\phi}_z + \Omega \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

logo, as matrizes de rotação, para ângulos de flexão pequenos ϕ_x e ϕ_y (porque a viga está confinada dentro de uma superfície) são:

$$
{}^{F}\mathbf{T}^{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_x & -\sin\phi_x \\ 0 & \sin\phi_x & \cos\phi_x \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\phi_x \\ 0 & \phi_x & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{Q}\mathbf{T}^{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi_y & 0 & \sin\phi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi_y & 0 & \cos\phi_y \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & \phi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\phi_y & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{R}\mathbf{T}^{S} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_z + \Omega t) & -\sin(\phi_z + \Omega t) & 0 \\ \sin(\phi_z + \Omega t) & \cos(\phi_z + \Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Finalmente, o vetor de velocidade angular da seção transversal, válido para qualquer sistema de referência, é dado por: ${}_{F}\mathbf{w}_S = {}_{F}\mathbf{w}_Q + {}_{Q}\mathbf{w}_R + {}_{R}\mathbf{w}_S$. Na base (S), solidário à seção transversal, ela é expressa como:

$$
{}^{S}_{F}\mathbf{w}_S = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_x \cos(\phi_z + \Omega t) + \dot{\phi}_y \sin(\phi_z + \Omega t) \\ \dot{\phi}_y \cos(\phi_z + \Omega t) - \dot{\phi}_x \sin(\phi_z + \Omega t) \\ \phi_y \dot{\phi}_x + (\Omega + \dot{\phi}_z) \end{bmatrix}
$$

e para pequenos ângulos de torção ϕ_z, resulta:

$$
{}^{S}\mathbf{w} = {}^{S}_{F}\mathbf{w}_S = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_x(\cos\Omega t - \phi_z \sin\Omega t) + \dot{\phi}_y(\sin\Omega t + \phi_z \cos\Omega t) \\ \dot{\phi}_y(\cos\Omega t - \phi_z \sin\Omega t) - \dot{\phi}_x(\sin\Omega t + \phi_z \cos\Omega t) \\ \phi_y \dot{\phi}_x + (\Omega + \dot{\phi}_z) \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}2)
$$

3.3
Equações de Movimento da Viga de Cosserat

Nesta parte emprega-se a equação de Lagrange para formular a equação de movimento da viga de Cosserat.

3.3.1
Princípio de Hamilton

O princípio de Hamilton, possivelmente, é o mais famoso princípio variacional da mecânica. Esse princípio, que considera o movimento do sistema como um todo entre dois instantes de tempo, t_1 e t_2, é um princípio integral ($\int$) e reduz o problema dinâmico à investigação de uma integral escalar definida. Essa formulação tem a vantagem de ser invariante, ou seja, as expressões dos integrandos podem ser escritos em qualquer sistema de referência.

Para um sistema contínuo, no qual o movimento é definido por coordenadas que são funções não apenas do tempo, mas também de coordenadas espaciais, o princípio de Hamilton estendido é dado através da seguinte equação variacional [5]:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta T + \overline{\delta W}\right) dt = 0 \tag{3-3}$$

sendo T a energia cinética do sistema e $\overline{\delta W}$ é conhecido como o trabalho virtual realizado pelas forças aplicadas sobre o sistema.

Se o sistema está sobre a ação de algumas forças que são deriváveis de alguma função potencial $-U$ e outras não, o trabalho virtual realizado pelas forças pode separar-se na forma:

$$\overline{\delta W} = \delta W^P + \overline{\delta W}^{NP} = -\delta U + \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}$$

sendo $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_n \end{bmatrix}^T$ o vetor de forças generalizadas não deriváveis de alguma função potencial (não conservativas) e $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix}^T$ é o vetor de coordenadas generalizadas. Introduzindo $\overline{\delta W}$ na Eq. (3-3), ela resulta:

$$\int_{t1}^{t2} (\delta T - \delta U)\, dt + \int_{t1}^{t2} \left(\mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}\right) dt = 0$$

e usando a definição Lagrangiana ($L = T - U$), as equações de acima levam

a:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{3-4}$$

Para calcular as forças generalizadas $\mathbf{Q}$, considera-se o caso em que existe um vetor de força $\mathbf{F}$, que não é derivável de alguma função potencial, logo, o trabalho virtual realizado por essa força é:

$$\overline{\delta W}^{NP} = \mathbf{F}^T \delta \hat{\mathbf{r}} \tag{3-5}$$

sendo $\delta\hat{\mathbf{r}}$ o deslocamento virtual de $\hat{\mathbf{r}}$ e:
$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \hat{r}_1(\mathbf{q}) & \hat{r}_2(\mathbf{q}) & \cdots & \hat{r}_m(\mathbf{q}) \end{bmatrix}^T$ expressa a variável dependente em termos das coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix}^T$. A definição do termo *deslocamento virtual*, baseada no livro de Banach [1], é esclarecida no anexo D.

O deslocamento virtual $\delta\hat{\mathbf{r}}$ pode ser obtido da seguinte equação [5]:

$$\delta\hat{\mathbf{r}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} \tag{3-6}$$

sendo $\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}}$ conhecida como a matriz Jacobiana.

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{r}_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \hat{r}_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \hat{r}_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \hat{r}_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \hat{r}_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \hat{r}_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \hat{r}_m}{\partial q_1} & \frac{\partial \hat{r}_m}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \hat{r}_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \tag{3-7}$$

Introduzindo a Eq. (3-6) em (3-5) obtém-se:

$$\overline{\delta W}^{NP} = \mathbf{F}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} \tag{3-8}$$

O trabalho virtual, no entanto, também pode ser calculado como o produto das n forças generalizadas $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_n \end{bmatrix}^T$ atuando sobre os deslocamentos virtuais generalizados $\delta\mathbf{q}$:

$$\overline{\delta W}^{NP} = \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q} \tag{3-9}$$

Posteriormente, comparando as Eqs. (3-8) e (3-9), conclui-se que as forças generalizadas são da forma:

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{F}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} \tag{3-10}$$

3.3.2
Forças na Viga de Cosserat

Supõe-se que as forças que atuam no elemento são compostas de três partes: a primeira é conseqüência da interação dos elementos vizinhos, a segunda é devido à ação de forças externas concentradas que atuam nos nós e por último têm-se as forças externas distribuídas com direções fixas e intensidade prescrita.

Segundo a definição de forças, no princípio dos trabalhos virtuais, elas têm que estar definidas na base inercial (F) devido aos deslocamentos nodais generalizados $\mathbf{q}$ da viga, vide Fig. (2.4), estarem definidos em relação a ela.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_a & y_a & z_a & \phi_{xa} & \phi_{ya} & \phi_{za} & x_b & y_b & z_b & \phi_{xb} & \phi_{yb} & \phi_{zb} \end{bmatrix}^T \quad (3\text{-}11)$$

Forças e momentos internos

Supõe-se que a ação nodal ${}^F\mathbf{p}^i(t)$, constituída por forças internas f^i_{jk} e momentos internos l^i_{jk}, seja dada por:

$${}^F\mathbf{p}^i(t) = \begin{bmatrix} {}^F\mathbf{p}^i_a(t) \\ {}^F\mathbf{p}^i_b(t) \end{bmatrix} \quad (3\text{-}12)$$

sendo, para $k = a, b$:

$${}^F\mathbf{p}^i_k(t) = \begin{bmatrix} f^i_{xk}(t) & f^i_{yk}(t) & f^i_{zk}(t) & l^i_{xk}(t) & l^i_{yk}(t) & l^i_{zk}(t) \end{bmatrix}^T$$

É necessário ressaltar que as forças e momentos internos anulam-se quando o sistema é considerado como um todo, devido ao princípio de ação-reação.

Forças e momentos externos concentrados

De forma análoga, supõe-se que ${}^F\mathbf{p}^c(t)$ seja constituído por forças f^c_{jk} e momentos l^c_{jk} externos concentrados nos nós:

$${}^F\mathbf{p}^c(t) = \begin{bmatrix} {}^F\mathbf{p}^c_a(t) \\ {}^F\mathbf{p}^c_b(t) \end{bmatrix} \quad (3\text{-}13)$$

sendo, para $k = a, b$:

$${}^F\mathbf{p}^c_k(t) = \begin{bmatrix} f^c_{xk}(t) & f^c_{yk}(t) & f^c_{zk}(t) & l^c_{xk}(t) & l^c_{yk}(t) & l^c_{zk}(t) \end{bmatrix}^T$$

No caso particular da coluna de perfuração simplificada, as forças concentradas são aquelas devida ao impacto, como mostradas na Fig. 3.1.

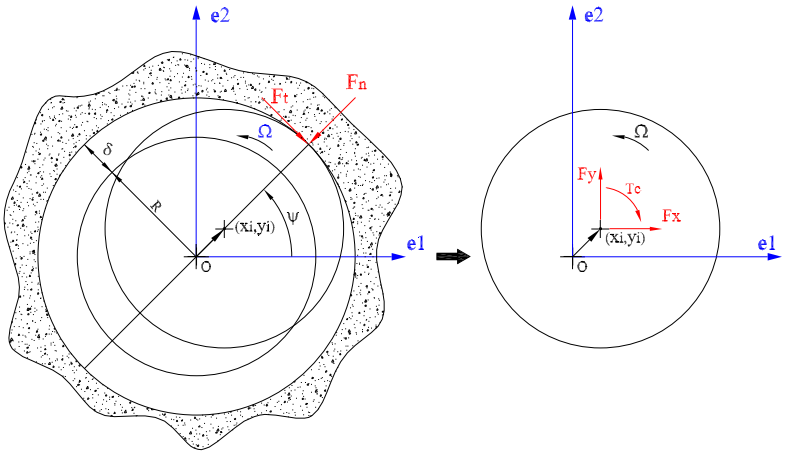

Figura 3.1: Interação com a parede do poço.

As restrições do poço são consideradas aplicando forças de contato nos nós cujo deslocamento, instantaneamente, escapa da restrição imposta pelo poço. A interação entre a coluna e o poço é modelada como um impacto inelástico, portanto, emprega-se um modelo visco-elástico. Escolhe-se o modelo de Kelvin-Voigt devido à facilidade de implementação [49]. Conseqüentemente, as forças normal, tangencial e o torque induzido, devido ao atrito entre a coluna e o poço, são:

$$\begin{aligned} F_n &= K_C\left(\sqrt{x_i^2+y_i^2}-\delta\right)+C_C\left(\sqrt{\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2}\right) \\ F_t &= \mu F_n \\ T_c &= F_t R \end{aligned} \tag{3-14}$$

Nas equações acima, K_C e C_C representam os coeficientes de rigidez e amortecimento de contato, respectivamente, μ é o coeficiente de atrito dinâmico, δ é a folga radial e o deslocamento do nó i está representado por (x_i, y_i).

Em geral, a rigidez e o amortecimento de contato são funções complexas das tensões e deformações na área de contato. Consequentemente, eles dependem do deslocamento e da velocidade do nó na direção radial.

$$K_C = K_C(x_i, y_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i), \quad C_C = C_C(x_i, y_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i)$$

No caso mais simples, K_C e C_C podem ser considerados constantes, e o amortecimento de contato C_C sempre é expresso como um múltiplo da rigidez de contato: $C_C = \beta K_C$. Valores referenciais desses parâmetros para

o aço são adotados como $K_C = 1 \times 10^8 N/m$, baseado na teoria de contato de Hertz, [44]. Para materiais não lineares como o silicone, por exemplo, existe uma relação não linear do tipo $K_C(\Delta) = a\Delta^b$, sendo $\Delta = (\sqrt{x_i^2 + y_i^2} - \delta)$ a penetração no silicone durante o contato; essa equação foi encontrada experimentalmente por Hyun-Yong Han et al. [37] e detalha-se no anexo A. Por outro lado, o coeficiente de proporcionalidade entre a rigidez e o amortecimento de contato é suposto como $\beta = 1 \times 10^{-7} s$.

As forças de impacto, Eq. 3-14, escritas na base (F) resultam:

$$
{}^F\mathbf{F}_{impacto} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{F_n}{\sqrt{x_i^2+y_i^2}}(\mu y_i - x_i) \\ -\frac{F_n}{\sqrt{x_i^2+y_i^2}}(\mu x_i + y_i) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -T_c \end{bmatrix} \tag{3-15}
$$

Precessão direta e retrógrada

A partir da Fig. 3.1 é possível reconhecer se algum nó da coluna está realizando precessão direta ou retrograda, usando o angulo ψ_i. Da geometria da figura em questão, o ângulo de precessão ψ está dado por:

$$
\psi_i = \arctan\left(\frac{y_i}{x_i}\right) \quad \therefore \quad \dot{\psi}_i = \frac{x_i\dot{y}_i - \dot{x}_i y_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \tag{3-16}
$$

Logo, se $\dot{\psi}_i > 0$ o nó está realizando precessão direta em caso contrário ele realiza precessão retrograda.

Forças e momentos distribuídos

Finalmente, as forças distribuídas (ξ_i) e os momentos distribuídos (η_i) sobre a viga podem ser expressos como:

$$
{}^F\bar{\mathbf{\Gamma}}(t) = \begin{bmatrix} \xi_x(t) & \xi_y(t) & \xi_z(t) & \eta_x(t) & \eta_y(t) & \eta_z(t) \end{bmatrix}^T
$$

Logo, usando a Eq. (3-8), o trabalho virtual realizado pelas forças e momentos distribuídos ${}^F\bar{\mathbf{\Gamma}}(t)$ tem a forma:

$$
\overline{\delta W}^d = \int_0^L \left({}^F\bar{\mathbf{\Gamma}}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}}\right) \delta\mathbf{q} ds
$$

sendo $\bar{\mathbf{r}} = \left[\begin{array}{cccccc} x(\mathbf{q},s) & y(\mathbf{q},s) & z(\mathbf{q},s) & \phi_x(\mathbf{q},s) & \phi_y(\mathbf{q},s) & \phi_z(\mathbf{q},s) \end{array} \right]^T$ a variável dependente e o vetor de variáveis generalizadas $\mathbf{q}$ está dado pela Eq. (3-11).

Por conveniência, as forças nodais equivalentes (forças generalizadas), devidas às cargas distribuídas, podem ser escritas como:

$$ {}^F\mathbf{p}^d(t) = \int_0^L \left({}^F\bar{\mathbf{\Gamma}}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T ds = \left[\begin{array}{c} {}^F\mathbf{p}_a^d(t) \\ {}^F\mathbf{p}_b^d(t) \end{array} \right] \tag{3-17} $$

sendo, para $k = a, b$:

$$ {}^F\mathbf{p}_k^d(t) = \left[\begin{array}{cccccc} f_{xk}^d(t) & f_{yk}^d(t) & f_{zk}^d(t) & l_{xk}^d(t) & l_{yk}^d(t) & l_{zk}^d(t) \end{array} \right]^T $$

Para modelar a coluna simplificada, consideram-se dois tipos de cargas distribuídas: devidas à gravidade e devidas ao desbalanceamento.

Em relação à **gravidade**, a massa distribuída na viga, que forma um angulo γ com a vertical, resulta em cargas axiais e transversais distribuídas, como mostrado na Fig. 3.2. Logo, pode-se escrever:

$$ {}^F\bar{\mathbf{\Gamma}}^{gravity} = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & \xi_y^g & \xi_z^g & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]^T $$

sendo $\xi_y^g = -\rho A g \sin\gamma$ e $\xi_z^g = \rho A g \cos\gamma$.

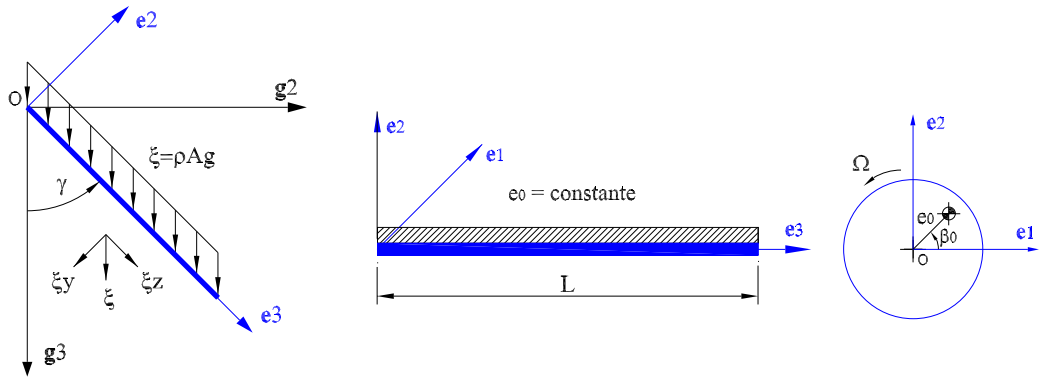

Figura 3.2: Forças de gravidade e desbalanceamento.

Usando a Eq. (3-17), a força nodal equivalente devido à gravidade resulta:

$$ {}^F\mathbf{p}_{gravity}^d = \frac{L}{2} \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & \xi_y^g & \xi_z^g & -\frac{L}{6}\xi_y^g & 0 & 0 & 0 & \xi_y^g & \xi_z^g & \frac{L}{6}\xi_y^g & 0 & 0 \end{array} \right]^T $$

Um elemento da coluna não está balanceado se o centro de gravidade de uma seção transversal não coincide com o seu centro de rotação. A

distância entre o centro de rotação e o centro de gravidade é a excentricidade e_0 e o lugar geométrico dos pontos que contém o centro de gravidade de cada seção transversal do elemento forma a distribuição de excentricidades do elemento, como mostrado na Fig. 3.2. Para simplificar, considera-se que a distribuição da excentricidade seja constante.

Se o elemento viga leva em conta o desbalanceamento, existe uma força centrífuga da forma $\rho A g e_0 \Omega^2$, conseqüentemente:

$$^F\bar{\mathbf{\Gamma}}^{unbalance}(t) = \begin{bmatrix} \xi_x^u & \xi_y^u & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

sendo:

$$\begin{aligned} \xi_x^u &= \rho A g e_0 \Omega^2 \cos(\Omega t + \beta_0) \\ \xi_y^u &= \rho A g e_0 \Omega^2 \sin(\Omega t + \beta_0) \end{aligned}$$

Nas expressões acima, as constantes e_0 e β_0 representam a excentricidade da viga e a posição angular inicial do centro de gravidade, respectivamente. Usando a Eq. (3-17), a força nodal equivalente, devida ao desbalanceamento, resulta:

$$^F\mathbf{p}^d_{unbalance} = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} \xi_x^u & \xi_y^u & 0 & -\frac{L}{6}\xi_y^u & \frac{L}{6}\xi_x^u & 0 & \xi_x^u & \xi_y^u & 0 & \frac{L}{6}\xi_y^u & -\frac{1}{6}\xi_x^u L & 0 \end{bmatrix}^T$$

Logo, considerando as forças de gravidade e desbalanceamento, a força nodal equivalente devido às cargas distribuídas resulta:

$$^F\mathbf{p}^d = {}^F\mathbf{p}^d_{gravity} + {}^F\mathbf{p}^d_{unbalance}$$

Para terminar, o trabalho virtual total, realizado pelas três forças Eq. (3-12), (3-13) e (3-17), é:

$$\overline{\delta W}^{NP} = \left({}^F\mathbf{p}^i(t) + {}^F\mathbf{p}^c(t) + {}^F\mathbf{p}^d(t)\right)^T \delta\mathbf{q} = \mathbf{Q}^T \delta\mathbf{q}$$

Por conseguinte:

$$\mathbf{Q} = {}^F\mathbf{p}^i(t) + {}^F\mathbf{p}^c(t) + {}^F\mathbf{p}^d(t) \tag{3-18}$$

3.3.3
Energias Cinética e Potencial da Viga

Em relação à Eq. (2.1), o movimento da viga envolve duas velocidades: a velocidade de translação da curva de centróides $\frac{\partial\ {}^F\mathbf{r}(s,t)}{\partial t}$ e a velocidade angular da secção transversal $\mathbf{w}(s,t)$. Logo, a energia cinética, por unidade

de comprimento, está dada através de:

$$\bar{T} = \frac{1}{2}\frac{\partial\ {}^F\mathbf{r}^T(s,t)}{\partial t}\mathbf{M}(s)\frac{\partial\ {}^F\mathbf{r}(s,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\ {}^S\mathbf{w}^T(s,t){}^S\mathbf{I}(s){}^S\mathbf{w}(s,t) \quad (3\text{-}19)$$

sendo $\mathbf{M}(s)$ e ${}^S\mathbf{I}(s)$ as matrizes de massa e inércia com componentes não nulas $M_1 = M_2 = M_3 = \rho A(s)$ e $I_1 = \rho\Gamma_1(s), I_2 = \rho\Gamma_2(s), I_3 = \rho\Gamma_3(s)$ e a velocidade angular da secção transversal, escrita na base (S), está dada pela Eq. (3-2).

Por outro lado, considerando pequenas deformações, a energia potencial elástica, por unidade de comprimento, pode ser expressa em termos dos vetores de deformação $\mathbf{v}(s,t)$ e $\mathbf{u}(s,t)$ como:

$$\bar{U} = \frac{1}{2}\ {}^S\mathbf{v}^T(s,t){}^S\mathbf{K}(s){}^S\mathbf{v}(s,t) + \frac{1}{2}\ {}^S\mathbf{u}^T(s,t){}^S\mathbf{J}(s){}^S\mathbf{u}(s,t) \quad (3\text{-}20)$$

sendo que as componentes do vetor de deformação linear são: $v_1(s,t) = v_2(s,t) = 0$ e $v_3(s,t) = |\frac{\partial \mathbf{r}(s,t)}{\partial s}|$, como discutido na secção 2.6.1. Por outro lado, o vetor de deformação angular, Eq. (2-10), está dado pela relação:

$${}^S\mathbf{u}(s,t) = \frac{1}{2}\ {}^S\tilde{\mathbf{d}}_i(s,t)\frac{\partial\ {}^S\mathbf{d}_i(s,t)}{\partial s}$$

Logo, as densidades de energia cinética, Eq. (3-19), e energia potencial, Eq. (3-20), estão expressas em função dos deslocamentos nodais $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}$ como $\bar{T} = \bar{T}(s,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ e $\bar{U} = \bar{U}(s,\mathbf{q})$ e a função Lagrangiana resulta:

$$L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \int_0^L \left(\bar{T}(s,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) - \bar{U}(s,\mathbf{q})\right) ds \quad (3\text{-}21)$$

Em termos da Lagrangiana, $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = L$, e usando o princípio do trabalho virtual, as equações de Lagrange estão dadas pela equação:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = p_j^i + p_j^c + p_j^d, \qquad j = 1,\ldots,12 \quad (3\text{-}22)$$

Usando a equação acima, para uma configuração geral com deslocamentos nodais não nulos, as equações diferenciais ordinárias do movimento, escritas na base (F) resultam:

$${}^F\mathbf{M}^e\ddot{\mathbf{q}} + {}^F\mathbf{G}^e\dot{\mathbf{q}} + ({}^F\mathbf{K}^e + {}^F\mathbf{K}_g^e(\mathbf{q}))\mathbf{q} = {}^F\mathbf{p}^i(t) + {}^F\mathbf{p}^c(t) + {}^F\mathbf{p}^d(t) \quad (3\text{-}23)$$

sendo que ${}^F\mathbf{M}^e = {}^F\mathbf{M}_1^e + {}^F\mathbf{M}_2^e$, ${}^F\mathbf{G}^e$ e ${}^F\mathbf{K}^e$ são matrizes 12×12 de massa, giroscópica e de rigidez do elemento viga; ${}^F\mathbf{K}_g^e(\mathbf{q}) = {}^F\mathbf{K}_{g1}^e(\mathbf{q}) + {}^F\mathbf{K}_{g2}^e(\mathbf{q})$ é uma matriz 12×12 que corresponde aos termos não lineares. As matrizes

estão dadas a seguir:

$$
{}^{F}\mathbf{M}_1^e = \begin{bmatrix}
\frac{13\rho AL^2}{35L} & & & & & & & & & & & \\
0 & \frac{13\rho AL^2}{35L} & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{\rho AL}{3} & & & & & & & & & \\
0 & -\frac{11\rho AL^2}{210} & 0 & \frac{\rho AL^3}{105} & & & & & & & & \\
\frac{11\rho AL^2}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho AL^3}{105} & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
\frac{9\rho AL^2}{70L} & 0 & 0 & 0 & \frac{13\rho AL^2}{420} & 0 & \frac{13\rho AL^2}{35L} & & & & & \\
0 & \frac{9\rho AL^2}{70L} & 0 & -\frac{13\rho AL^2}{420} & 0 & 0 & 0 & \frac{13\rho AL^2}{35L} & & & & \\
0 & 0 & \frac{\rho AL}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho AL}{3} & & & \\
0 & \frac{13\rho AL^2}{420} & 0 & -\frac{3L^3\rho A}{420} & 0 & 0 & 0 & \frac{11\rho AL^2}{210} & 0 & \frac{\rho AL^3}{105} & & \\
-\frac{13\rho AL^2}{420} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3L^3\rho A}{420} & 0 & -\frac{11\rho AL^2}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho AL^3}{105} & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
{}^{F}\mathbf{M}_2^e = \begin{bmatrix}
\frac{42I_2}{35L} & & & & & & & & & & & \\
0 & \frac{42I_1}{35L} & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
0 & -\frac{I_1}{10} & 0 & \frac{14I_1L}{105} & & & & & & & & \\
\frac{I_2}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{14I_2L}{105} & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_3L}{3} & & & & & & \\
-\frac{84I_2}{70L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{I_2}{10} & 0 & \frac{42I_2}{35L} & & & & & \\
0 & -\frac{84I_1}{70L} & 0 & \frac{I_1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{42I_1}{35L} & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
0 & -\frac{I_1}{10} & 0 & -\frac{14I_1L}{420} & 0 & 0 & 0 & \frac{I_1}{10} & 0 & \frac{14I_1L}{105} & & \\
\frac{I_2}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{14I_2L}{420} & 0 & -\frac{I_2}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{14I_2L}{105} & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_3L}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_3L}{3}
\end{bmatrix}
$$

$$
{}^{F}\mathbf{G}^e = \Omega I_3 \begin{bmatrix}
0 & \frac{6}{5L} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5L} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 \\
-\frac{6}{5L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & 0 \\
0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{2}{15} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{30} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{6}{5L} & 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5L} & 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\
\frac{6}{5L} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5L} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} & 0 \\
0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{2}{15} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
{}^{F}\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix}
\frac{12J_2}{L^3} & & & & & & & & & & & \\
0 & \frac{12J_1}{L^3} & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{K_3}{L} & & & & & & & & & \\
0 & -\frac{6J_1}{L^2} & 0 & \frac{4J_1}{L} & & & & & & & & \\
\frac{6J_2}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4J_2}{L} & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_3}{L} & & & & & & \\
-\frac{12J_2}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6J_2}{L^2} & 0 & \frac{12J_2}{L^3} & & & & & \\
0 & -\frac{12J_1}{L^3} & 0 & \frac{6J_1}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12J_1}{L^3} & & & & \\
0 & 0 & -\frac{K_3}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_3}{L} & & & \\
0 & -\frac{6J_1}{L^2} & 0 & \frac{2J_1}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6J_1}{L^2} & 0 & \frac{4J_1}{L} & & \\
\frac{6J_2}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2J_2}{L} & 0 & -\frac{6J_2}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4J_2}{L} & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{J_3}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_3}{L}
\end{bmatrix}
$$

$$
{}^{F}\mathbf{K}_{g1}^e = \begin{bmatrix}
-a_1\Delta z & 0 & -a_1\Delta x & -a_3\Delta\Phi_z & -a_2\Delta z & -a_3\Delta\Phi_x & a_1\Delta z & 0 & a_1\Delta x & a_3\Delta\Phi_z & -a_2\Delta z & a_3\Delta\Phi_x \\
0 & -a_1\Delta z & -a_1\Delta y & a_2\Delta z & -a_3\Delta\Phi_z & -a_3\Delta\Phi_y & 0 & a_1\Delta z & a_1\Delta y & a_2\Delta z & a_3\Delta\Phi_z & a_3\Delta\Phi_y \\
-a_1\Delta x & -a_1\Delta y & 0 & a_2\Delta y & -a_2\Delta x & 0 & a_1\Delta x & a_1\Delta y & 0 & a_2\Delta y & -a_2\Delta x & 0 \\
-a_3\Delta\Phi_z & a_2\Delta z & a_2\Delta y & -4a_4\Delta z & a_5\Delta\Phi_z & -a_3\Delta x & a_3\Delta\Phi_z & -a_2\Delta z & -a_2\Delta y & a_4\Delta z & -a_5\Delta\Phi_z & a_3\Delta x \\
-a_2\Delta z & -a_3\Delta\Phi_z & -a_2\Delta x & a_5\Delta\Phi_z & -4a_4\Delta z & -a_3\Delta y & a_2\Delta z & a_3\Delta\Phi_z & a_2\Delta x & a_5\Delta\Phi_z & a_4\Delta z & a_3\Delta y \\
-a_3\Delta\Phi_x & -a_3\Delta\Phi_y & 0 & -a_3\Delta x & -a_3\Delta y & 0 & a_3\Delta\Phi_x & a_3\Delta\Phi_y & 0 & a_3\Delta x & a_3\Delta y & 0 \\
a_1\Delta z & 0 & a_1\Delta x & a_3\Delta\Phi_z & a_2\Delta z & a_3\Delta\Phi_x & -a_1\Delta z & 0 & -a_1\Delta x & -a_3\Delta\Phi_z & a_2\Delta z & -a_3\Delta\Phi_x \\
0 & a_1\Delta z & a_1\Delta y & -a_2\Delta z & a_3\Delta\Phi_z & a_3\Delta\Phi_y & 0 & -a_1\Delta z & -a_1\Delta y & -a_2\Delta z & -a_3\Delta\Phi_z & -a_3\Delta\Phi_y \\
a_1\Delta x & a_1\Delta y & 0 & -a_2\Delta y & a_2\Delta x & 0 & -a_1\Delta x & -a_1\Delta y & 0 & -a_2\Delta y & a_2\Delta x & 0 \\
a_3\Delta\Phi_z & a_2\Delta z & a_2\Delta y & a_4\Delta z & a_5\Delta\Phi_z & a_3\Delta x & -a_3\Delta\Phi_z & -a_2\Delta z & -a_2\Delta y & -4a_4\Delta z & -a_5\Delta\Phi_z & -a_3\Delta x \\
-a_2\Delta z & a_3\Delta\Phi_z & -a_2\Delta x & -a_5\Delta\Phi_z & a_4\Delta z & a_3\Delta y & a_2\Delta z & -a_3\Delta\Phi_z & a_2\Delta x & -a_5\Delta\Phi_z & -4a_4\Delta z & -a_3\Delta y \\
a_3\Delta\Phi_x & a_3\Delta\Phi_y & 0 & +a_3\Delta x & a_3\Delta y & 0 & -a_3\Delta\Phi_x & -a_3\Delta\Phi_y & 0 & -a_3\Delta x & -a_3\Delta y & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
{}^{F}\mathbf{K}^{e}_{g2} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & a_2\Sigma\Phi_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2\Sigma\Phi_y & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_2\Sigma\Phi_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2\Sigma\Phi_x & 0 & 0 & 0 \\
a_2\Sigma\Phi_y & a_2\Sigma\Phi_x & 0 & a_4\delta 5 & a_4\delta 6 & 0 & a_2\Sigma\Phi_y & a_2\Sigma\Phi_x & 0 & a_4\delta 7 & a_4\delta 8 & 0 \\
0 & 0 & a_4\delta 1 & 0 & a_5\Delta\Phi_z & a_5\Delta\Phi_y & 0 & 0 & -a_4\delta 1 & 0 & -a_5\Delta\Phi_z & a_5\Delta\Phi_y \\
0 & 0 & a_4\delta 2 & a_5\Delta\Phi_z & 0 & a_5\Sigma\Phi_x & 0 & 0 & -a_4\delta 2 & a_5\Delta\Phi_z & 0 & a_5\Sigma\Phi_x \\
0 & 0 & 0 & a_5\Delta\Phi_y & a_5\Sigma\Phi_x & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5\Delta\Phi_y & a_5\Sigma\Phi_x & 0 \\
0 & 0 & a_2\Sigma\Phi_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2\Sigma\Phi_y & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_2\Sigma\Phi_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2\Sigma\Phi_x & 0 & 0 & 0 \\
a_2\Sigma\Phi_y & a_2\Sigma\Phi_x & 0 & -a_4\delta 5 & -a_4\delta 6 & 0 & a_2\Sigma\Phi_y & a_2\Sigma\Phi_x & 0 & -a_4\delta 7 & -a_4\delta 8 & 0 \\
0 & 0 & a_4\delta 3 & 0 & a_5\Delta\Phi_z & a_5\Delta\Phi_y & 0 & 0 & -a_4\delta 3 & 0 & -a_5\Delta\Phi_z & a_5\Delta\Phi_y \\
0 & 0 & a_4\delta 4 & -a_5\Delta\Phi_z & 0 & a_5\Sigma\Phi_x & 0 & 0 & -a_4\delta 4 & -a_5\Delta\Phi_z & 0 & a_5\Sigma\Phi_x \\
0 & 0 & 0 & -a_5\Delta\Phi_y & a_5\Sigma\Phi_x & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5\Delta\Phi_y & a_5\Sigma\Phi_x & 0
\end{bmatrix}
$$

sendo:

$$
\begin{array}{llllllllllll}
\delta 1 & = & \Phi_{xb} - 4\Phi_{xa}, & \delta 2 & = & \Phi_{yb} - 4\Phi_{ya}, & \delta 3 & = & \Phi_{xa} - 4\Phi_{xb}, & \delta 4 & = & \Phi_{ya} - 4\Phi_{yb}, \\
\delta 5 & = & \Phi_{xb} - 2\Phi_{xa}, & \delta 6 & = & \Phi_{yb} - 2\Phi_{ya}, & \delta 7 & = & \Phi_{xa} - 2\Phi_{xb}, & \delta 8 & = & \Phi_{ya} - 2\Phi_{yb}, \\
\Delta x & = & x_a - x_b, & \Delta\Phi_x & = & \Phi_{xa} - \Phi_{xb}, & \Sigma\Phi_x & = & \Phi_{xa} + \Phi_{xb}, & & & \\
\Delta y & = & y_a - y_b, & \Delta\Phi_y & = & \Phi_{ya} - \Phi_{yb}, & \Sigma\Phi_y & = & \Phi_{ya} + \Phi_{yb}, & & & \\
\Delta z & = & z_a - z_b, & \Delta\Phi_z & = & \Phi_{za} - \Phi_{zb}, & & & & & &
\end{array}
$$

e as constantes são:

$$
a_1 = \frac{12K_3}{5L^2}, \quad a_2 = \frac{K_3}{5L}, \quad a_3 = \frac{J_3}{L^2}, \quad a_4 = \frac{K_3}{15}, \quad a_5 = \frac{J_3}{2L}
$$

3.4 Sistemas de Referência Global e Local

As matrizes elementares obtidas anteriormente estão referidas ao sistema de coordenadas locais a cada um dos segmentos especificados, com seus eixos fixos à configuração não-deformada da viga. Se mais de um elemento é usado para modelar o sistema, faz-se necessário escrever as matrizes elementares em um mesmo sistema de referência, o sistema de referência global.

3.4.1 Transformação de Coordenadas

A Fig. 3.3 mostra dois sistemas de referência, a base $F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \equiv F$ representa o sistema local e a base $G(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) \equiv G$ representa o sistema global de coordenadas. Além disso, mostra-se um vetor qualquer $\mathbf{r}$, esse vetor pode representar força ou movimento de algum nó do sistema.

Definindo as componentes do vetor $\mathbf{r}$ nas bases (F) e (G) através de ${}^{F}\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$ e ${}^{G}\mathbf{r} = \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}^T$, é possível escrever a relação: ${}^{G}\mathbf{r} = {}^{G}\mathbf{T}^{F}\,{}^{F}\mathbf{r}$, sendo ${}^{G}\mathbf{T}^{F}$ a matriz de transformação de coordenadas entre o sistema de referência local e global.

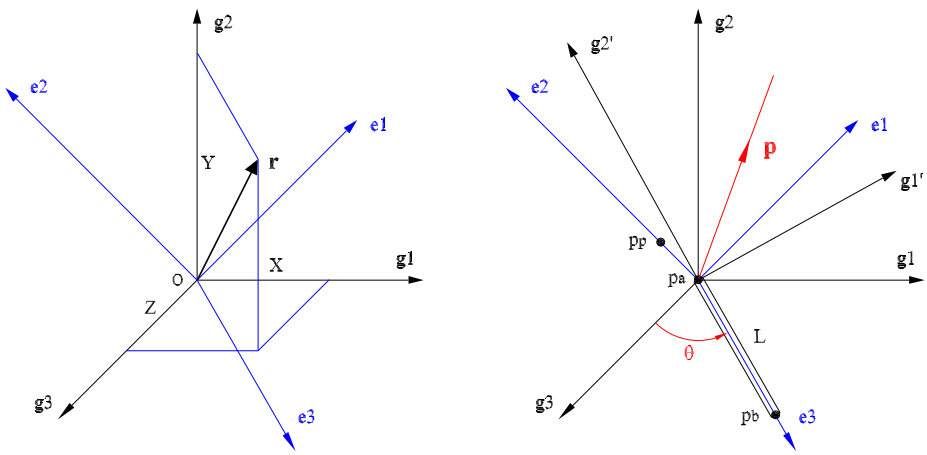

Figura 3.3: Sistema de referência global $G(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ e local $F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

$$
{}^{G}\mathbf{T}^{F} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \tag{3-24}
$$

A matriz de transformação ${}^{G}\mathbf{T}^{F}$ é usualmente calculada a partir das coordenadas globais de três pontos da viga: os dois pontos que definem os extremos da viga, ao longo do eixo local $\mathbf{e}_3$, e um terceiro ponto localizado no plano local $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, sendo $\mathbf{e}_2$ um dos eixos principais da seção transversal.

Existem vários procedimentos para obter a matriz de transformação ${}^{G}\mathbf{T}^{F}$, entre eles estão os cosenos diretores (Paz [29]) e os vetores de rotação (Shabana [34]). Esses procedimentos são detalhados a seguir.

Definindo os pontos p_a e p_b, que definem a direção $\mathbf{e}_3$ da viga indeformada, e um ponto p_p sobre o eixo $\mathbf{e}_2$, com vetores de posição,

$$
{}^{G}\mathbf{r}_a = \begin{bmatrix} X_a & Y_a & Z_a \end{bmatrix}^T, \quad {}^{G}\mathbf{r}_b = \begin{bmatrix} X_b & Y_b & Z_b \end{bmatrix}^T, \quad {}^{G}\mathbf{r}_p = \begin{bmatrix} X_p & Y_p & Z_p \end{bmatrix}^T
$$

é possivel escrever as seguintes equações:

$$
\begin{aligned}
{}^{G}\mathbf{e}_3 &= {}^{G}\mathbf{T}^{F}\ {}^{F}\mathbf{e}_3 = {}^{G}\mathbf{T}^{F} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\
{}^{G}\mathbf{e}_3 &= \frac{1}{L}\left({}^{G}\mathbf{r}_b - {}^{G}\mathbf{r}_a \right)
\end{aligned}
$$

sendo L o comprimento do elemento, logo:

$$\begin{aligned} t_{13} &= \frac{1}{L}(X_b - X_a),\ t_{23} = \frac{1}{L}(Y_b - Y_a),\ t_{33} = \frac{1}{L}(Z_b - Z_a) \quad \rightarrow \\ {}^G\mathbf{e}_3 &= \begin{bmatrix} t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Por outro lado, usando o ponto p_p, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} {}^G\mathbf{e}_2 &= {}^G\mathbf{T}^F\ {}^F\mathbf{e}_2 = {}^G\mathbf{T}^F \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \\ {}^G\mathbf{e}_2 &= \frac{1}{L_2}(\ {}^G\mathbf{r}_p - \ {}^G\mathbf{r}_a) \end{aligned}$$

sendo L_2 o comprimento do vetor $\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_a$, logo:

$$\begin{aligned} t_{12} &= \frac{1}{L_2}(X_p - X_a),\ t_{22} = \frac{1}{L_2}(Y_p - Y_a),\ t_{32} = \frac{1}{L_2}(Z_p - Z_a) \quad \rightarrow \\ {}^G\mathbf{e}_2 &= \begin{bmatrix} t_{12} & t_{22} & t_{32} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Finalmente, o vetor ${}^G\mathbf{e}_1$ é calculado através do produto ${}^G\mathbf{e}_1 = \ {}^G\tilde{\mathbf{e}}_2\ {}^G\mathbf{e}_3$.

O procedimento descrito anteriormente corresponde ao uso de cosenos diretores. Outro procedimento mais elegante para calcular a matriz ${}^G\mathbf{T}^F$ é usando o vetor de rotação, que é apresentado a seguir.

O vetor unitário $\mathbf{p}$ da Fig. 3.3 que permite girar $\mathbf{g}_3$ sobre $\mathbf{e}_3$ é ortogonal a esses dois vetores, ou seja, obtido do produto vetorial de $\mathbf{g}_3$ por $\mathbf{e}_3$ dividido pelo seu módulo. Por outro lado, como $\mathbf{g}_3^T\mathbf{e}_3 = \cos(\theta)$ e ${}^G\mathbf{g}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \rightarrow cos(\theta) = t_{33}$. O módulo de $\mathbf{p}$ é $p = \sin(\theta)$, logo, deixando $\mathbf{p}$ unitário:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\sin(\theta)}\tilde{\mathbf{g}}_3\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sin(\theta)} \begin{bmatrix} -t_{23} \\ t_{13} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Definindo um sistema de referência intermediário (V), composto dos eixos $\mathbf{g}_1', \mathbf{g}_2'$ e $\mathbf{g}_3' \equiv \mathbf{e}_3$, tem-se:

$$G(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) \xrightarrow{\theta\ (\mathbf{p})} V(\mathbf{g}_1', \mathbf{g}_2', \mathbf{g}_3' \equiv \mathbf{e}_3) \xrightarrow{\varphi\ (\mathbf{g}_3')} F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

O ângulo φ é calculado de tal forma que os vetores $\mathbf{g}_2'$ e $\mathbf{e}_2$ sejam coincidentes. Finalmente, a matriz de transformação entre o SR local e global resulta: ${}^GT^F = \ {}^GT^V\ {}^VT^F$. As matrizes de rotação são dadas por:

$${}^G\mathbf{T}^V = \mathbf{E} + \sin(\theta)\tilde{\mathbf{p}} + (1 - \cos(\theta))\tilde{\mathbf{p}}^2$$

$$
{}^{V}\mathbf{T}^{F} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

3.5
Equações de Movimento do Sistema Como um Todo

Para estudar estruturas bi- e tridimensionais é necessário representar as equações de movimento de todo o sistema no sistema de referência global. A transformação do sistema local para o global, e vice-versa, é realizada usando os cosenos diretores desenvolvidos anteriormente. Os vetores e matrizes da viga de Cosserat, representados no sistema global, são:

$$
{}^{G}\mathbf{M}^{e} = {}^{G}\mathbf{T}_{e}^{FF}\mathbf{M}^{eF}\mathbf{T}_{e}^{G}, \quad {}^{G}\mathbf{G}^{e} = {}^{G}\mathbf{T}_{e}^{FF}\mathbf{G}^{eF}\mathbf{T}_{e}^{G}, \quad {}^{G}\mathbf{K}^{e} = {}^{G}\mathbf{T}_{e}^{FF}\mathbf{K}^{eF}\mathbf{T}_{e}^{G}
$$

$$
{}^{G}\mathbf{K}_{g}^{e} = {}^{G}\mathbf{T}_{e}^{FF}\mathbf{K}_{g}^{eF}\mathbf{T}_{e}^{G}, \quad {}^{G}\mathbf{p}^{c} = {}^{G}\mathbf{T}_{e}^{FF}\mathbf{p}^{c}, \quad {}^{G}\mathbf{p}^{d} = {}^{G}\mathbf{T}_{e}^{FF}\mathbf{p}^{d}
$$

A matriz ${}^{G}\mathbf{T}_{e}^{F}$ é a matriz de transformação do elemento viga, que depende da orientação do elemento.

$$
{}^{G}\mathbf{T}_{e}^{F} = \begin{bmatrix} {}^{G}\mathbf{T}^{F} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{G}\mathbf{T}^{F} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^{G}\mathbf{T}^{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^{G}\mathbf{T}^{F} \end{bmatrix}
$$

Depois que as matrizes de massa, giroscópica, rigidez e forças nodais equivalente, da viga de Cosserat, são transformadas ao sistema global de coordenadas, é necessário montá-las para encontrar as equações de movimento de todo o sistema.

Definindo o vetor de deslocamento global $\mathbf{q}^{G}$, composto pelos deslocamentos de todos os nós, tal que:

$$
\mathbf{q}^{G} = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & \Phi_{x1} & \Phi_{y1} & \Phi_{z1} & X_2 & Y_2 & Z_2 & \Phi_{x2} & \Phi_{y2} & \Phi_{z2} & \cdots \end{bmatrix}^{T} \tag{3-25}
$$

as equações de movimento para todo o sistema pode ser construído simplesmente considerando a contribuição de todos os elementos. Nesse sentido, expandindo as matrizes(vetores) de cada elemento para fazê-lo da mesma dimensão que as matrizes(vetores) do sistema, como realizado no tradicional

MEF [9], resulta:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \sum_{e=1}^{n_e} {}^G\mathbf{M}^e,\ \mathbf{G} = \sum_{e=1}^{n_e} {}^G\mathbf{G}^e,\ \mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_e} {}^G\mathbf{K}^e \\
\mathbf{K}_g &= \sum_{e=1}^{n_e} {}^G\mathbf{K}_g^e,\ \mathbf{p}^c(t) = \sum_{e=1}^{n_e} {}^G\mathbf{p}_e^c(t),\ \mathbf{p}^d(t) = \sum_{e=1}^{n_e} {}^G\mathbf{p}_e^d(t)
\end{aligned}$$

sendo n_e o numero de elementos. Nas equações acima $\mathbf{M}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{K}$ e $\mathbf{K}_g$ representam, respectivamente, as matrizes de massa, giroscópica, rigidez e termos não lineares de todo o sistema. Analogamente, $\mathbf{p}^c(t)$ e $\mathbf{p}^d(t)$ são vetores de força nodal equivalente para todo o sistema. A contribuição das forças e momentos de interação interna $\mathbf{p}^i(t)$, de todos os elementos, têm que estar balanceadas e a ação total deve ser nula. Finalmente, as equações de movimento de todo o sistema, desprezando-se o amortecimento, resultam em:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_g)\mathbf{q} = \mathbf{p}^c(t) + \mathbf{p}^d(t) \tag{3-26}$$

Essa equação fornece as equações de movimento para todos os nós, livres ou restritos.

3.6
Integração das Equações do Movimento

Para integrar as equações de movimento emprega-se o método de Newmark [2, 9]. Este método, de integração passo a passo, é amplamente usado para a resolução de problemas lineares e não lineares. Em essência, esse método de integração direto está baseado em duas idéias [9]. A primeira, ao invés de tentar satisfazer a Eq. (3-26) para um instante genérico t, ela é obrigada a ser satisfeita somente em intervalos de tempo discretos Δt. A segunda idéia é que em cada intervalo de tempo Δt, as variações dos deslocamentos, das velocidades e das acelerações são preestabelecidas.

3.6.1
Procedimento de Integração no Tempo

Seguindo a nomenclatura padrão, usa-se $n = 0, 1, 2, \cdots$ para indicar o tempo discreto aproximado da variável temporal no instante t_n. No método de Newmark os deslocamentos e velocidades são interpoladas simultanea-

mente através de:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \Delta\mathbf{q}_n \\
\Delta\mathbf{q}_n &= h\dot{\mathbf{q}}_n + h^2\left[(\frac{1}{2}-\beta)\ddot{\mathbf{q}}_n + \beta\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}\right] + \mathbf{e}'_n \\
\dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{q}}_n + h\left[(1-\gamma)\ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}\right] + \mathbf{e}_n
\end{aligned}
$$

e os erros de truncamento, para os deslocamentos e velocidades, deduzidos por Géradin et al. [45], são:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_n &= (\gamma - \frac{1}{2})h^2\mathbf{q}^3(\tau) + \mathbf{O}(h^3\mathbf{q}^4) \\
\mathbf{e}'_n &= (\beta - \frac{1}{6})h^3\mathbf{q}^3(\tau) + \mathbf{O}(h^4\mathbf{q}^4)
\end{aligned}
$$

Os coeficientes constantes $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$ e $\gamma \in [0, 1]$ são os parâmetros de integração. Os valores $\beta = \frac{1}{4}$ e $\gamma = \frac{1}{2}$ (conhecidos como o método da aceleração média) garantem uma estabilidade condicional com o máximo de precisão, para sistemas lineares. No entanto, esta estabilidade não pode ser estendida para sistemas não lineares. Conseqüentemente, o método da aceleração média precisa de um tamanho de passo bem pequeno [22]. É importante ressaltar que para contornar esse problema Géradin et al. [45] usam multiplicadores de Lagrange para controlar a instabilidade numérica.

4
Aplicação da Teoria de Cosserat a Sistemas Simples e Complexos

4.1
Introdução

Os capítulos anteriores trataram da teoria de Cosserat para vigas esbeltas. Neste capítulo, aplica-se essa teoria, primeiro para sistemas simples, com o intuito de validar a teoria e verificar o programa desenvolvido em Matlab, e depois para sistemas complexos. Usa-se o termo sistemas simples para denotar aqueles sistemas cuja dinâmica é conhecida ou pode ser facilmente obtida. Portanto, primeiro é estudado o problema de autovalor de um rotor horizontal, logo, são calculados os autovalores e modos normais de vibração de uma viga em configuração L, posteriormente estuda-se a dinâmica não linear de uma viga com impacto, numérica e experimentalmente. Finalmente, a dinâmica de uma viga rotativa curva confinada num tubo metálico é analisada numérica e experimentalmente. Para os cálculos numéricos foi elaborado um programa usando o software Matlab e, as simulações numéricas foram realizadas usando um computador Pentium III (processador 1GHz, 3GB RAM).

4.2
Análise Numérica de um Rotor Horizontal

Para a análise do rotor horizontal, toma-se o exemplo do livro de Lalanne [11]. Considera-se que este sistema rotativo está apoiado em mancais elásticos nos extremos e leva três discos rígidos homogêneos ao longo do eixo. Como resultados, obtém-se as freqüências naturais, as quais são comparadas com aquelas da referência. Além disso, realiza-se uma análise do diagrama de Campbell.

4.2.1
Componentes do Sistema Rotativo

Os principais componentes de um sistema rotativo são o disco, o eixo flexível (estudado nos capítulos anteriores) e os mancais.

O Disco

Para modelar o disco, ele é suposto rígido, axi-simétrico e homogêneo, conseqüentemente, o seu centro geométrico coincide com o seu centro de massa e é caracterizado unicamente pela sua energia cinética.

Em relação à viga de Cosserat, sabe-se que qualquer nó i da viga possui seis graus de liberdade, nesse caso, o vetor de deslocamento nodal $\mathbf{q}_i$ pode ser dividido em vetores de translação $\mathbf{q}_t$ e rotação $\mathbf{q}_r$:

$$\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & \phi_{xi} & \phi_{yi} & \phi_{zi} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_t \\ \mathbf{q}_r \end{bmatrix} \tag{4-1}$$

Logo, supondo que o disco esteja localizado no nó i, o vetor de deslocamento nodal do centro geométrico do disco é representado através da Eq. (4-1).

Também, a expressão da energia cinética de uma seção transversal da viga é dada pela Eq. (3-19). Essa mesma equação pode ser usada para calcular a energia cinética do disco:

$$T_d = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}_t^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_t + \frac{1}{2}\, {}^S\mathbf{w}_d^T {}^S\mathbf{I}\, {}^S\mathbf{w}_d$$

sendo $\mathbf{M}$ e ${}^S\mathbf{I}$ as matrizes de massa e inércia do disco,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_d \end{bmatrix}, \quad {}^S\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{I_{d3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_{d3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{d3} \end{bmatrix}$$

onde m_d é a massa do disco e I_{d3} é o momento de inércia polar em relação a seu centro. Por outro lado, uma pequena modificação da Eq. (3-2) permite obter a velocidade angular do disco ${}^S\mathbf{w}_d$ no nó i:

$${}^S\mathbf{w}_d = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{xi}(\cos\Omega t - \phi_{zi}\sin\Omega t) + \dot{\phi}_{yi}(\sin\Omega t + \phi_{zi}\cos\Omega t) \\ \dot{\phi}_{yi}(\cos\Omega t - \phi_{zi}\sin\Omega t) - \dot{\phi}_{xi}(\sin\Omega t + \phi_{zi}\cos\Omega t) \\ \phi_{yi}\dot{\phi}_{xi} + (\Omega + \dot{\phi}_{zi}) \end{bmatrix}$$

Finalmente, usando a equação de Lagrange Eq. (3-4), as equações de movimento do disco resultam:

$$\mathbf{M}_d\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{G}_d\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_d^i \tag{4-2}$$

sendo $\mathbf{M}_d$ e $\mathbf{G}_d$ as matrizes de massa e giroscópica do disco, respectivamente; $\mathbf{F}_d$ é o vetor de forças externas atuando sobre o disco e $\mathbf{F}_d^i$ é o vetor de forças internas que se anulará quando o sistema todo for considerado. As expressões explícitas das matrizes são:

$$\mathbf{M}_d = \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_{d3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_{d3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{d3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_d = \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{d3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{d3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os Mancais

Os mancais são considerados como de suporte e podem ser localizados em qualquer nó i ao longo do eixo. Nos mancais, os valores de rigidez e amortecimento indicam a influência das forças em função dos deslocamentos e velocidades em cada direção e, os termos de acoplamento fornecem informações nas outras direções. Assumindo que os termos de rigidez e amortecimento são conhecidos, a seguinte relação é válida [11]:

$$\mathbf{K}_b\mathbf{q}_i + \mathbf{C}_b\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_b^i \tag{4-3}$$

sendo $\mathbf{K}_b$ e $\mathbf{C}_b$ as matrizes de rigidez e de amortecimento, respectivamente; $\mathbf{F}_b$ é o vetor de forças externas que atua sobre o mancal e $\mathbf{F}_b^i$ é o vetor de forças internas que se anulará quando o sistema todo for considerado.

$$\mathbf{K}_b = \begin{bmatrix} k_{txx} & k_{txy} & k_{txz} & 0 & 0 & 0 \\ k_{tyx} & k_{tyy} & k_{tyz} & 0 & 0 & 0 \\ k_{tzx} & k_{tzy} & k_{tzz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{rxx} & k_{rxy} & k_{rxz} \\ 0 & 0 & 0 & k_{ryx} & k_{ryy} & k_{ryz} \\ 0 & 0 & 0 & k_{rzx} & k_{rzy} & k_{rzz} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_b = \begin{bmatrix} c_{txx} & c_{txy} & c_{txz} & 0 & 0 & 0 \\ c_{tyx} & c_{tyy} & c_{tyz} & 0 & 0 & 0 \\ c_{tzx} & c_{tzy} & c_{tzz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{rxx} & c_{rxy} & c_{rxz} \\ 0 & 0 & 0 & c_{ryx} & c_{ryy} & c_{ryz} \\ 0 & 0 & 0 & c_{rzx} & c_{rzy} & c_{rzz} \end{bmatrix}$$

Os sub-índices t e r, usados nas matrizes $\mathbf{K}_b$ e $\mathbf{C}_b$, representam translação e rotação, respectivamente.

4.2.2
Equações de Movimento do Rotor Horizontal

Levando em conta a compatibilidade de todos os graus de liberdade do sistema, ou seja, do eixo Eq. (3-23), do disco Eq. (4-2) e dos mancais Eq. (4-3), a equação de movimento para o sistema rotativo resulta:

$$\mathbf{M}^*\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}^* + \mathbf{G}^*)\,\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^*\mathbf{q} = \mathbf{F} \tag{4-4}$$

sendo:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & \Phi_{X1} & \Phi_{Y1} & \Phi_{Z1} & X_2 & Y_2 & Z_2 & \Phi_{X2} & \Phi_{Y2} & \Phi_{Z2} & \cdots \end{bmatrix}^T$$

o vetor de deslocamento nodal de todo o sistema (eixo, discos e mancais); $\mathbf{M}^*$, $\mathbf{C}^*$, $\mathbf{G}^*$ e $\mathbf{K}^*$ são as matrizes de massa, de amortecimento, giroscópica e de rigidez do sistema, respectivamente, e $\mathbf{F}$ representa o vetor de forças externas.

4.2.3
Modos Normais de Vibração

Para obter os autovalores e os modos normais do sistema, Eq. (4-4), é necessário ignorar as matrizes giroscópica e de amortecimento. Portanto, a equação homogênea resulta:

$$\mathbf{M}^*\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^*\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{4-5}$$

Resolvendo o problema de autovalor, associado à Eq. (4-5), obtém-se um conjunto real de autovalores e autovetores [27].

Os modos normais podem ser imaginados como ondas estacionárias com nós fixos, Fig. 4.1. Os modos normais correspondem à vibração livre não amortecida em sistemas lineares, onde a análise modal clássica é empregada e está baseada nas seguintes hipóteses:

- A dinâmica é linear e pode ser descrita através de equações diferenciais lineares.
- As matrizes do sistema são invariantes no tempo, ou seja, elas são constantes.
- A matriz de amortecimento é nula ou proporcional ($\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$).

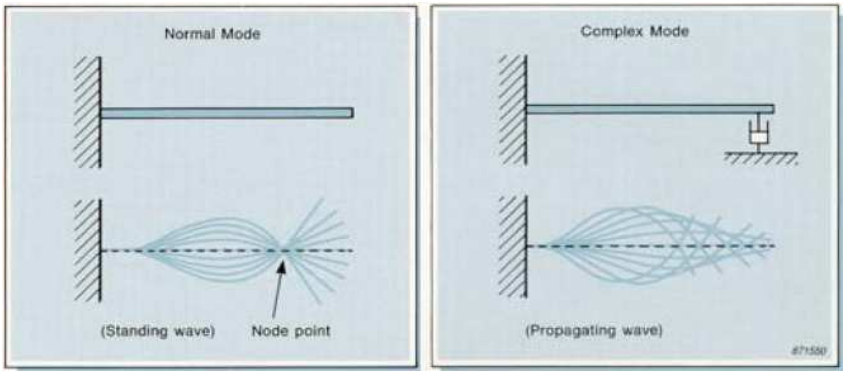

Figura 4.1: Visualização de modos normais e complexos [16].

4.2.4
Modos Complexos

Nos modos complexos não há nós estacionários nem forma bem definida como nos modos normais. Pode-se pensar nos modos complexos como ondas que se propagam sem nós fixos e são de difícil visualização, Fig. 4.1. Os modos complexos aparecem em sistemas com amortecimento não proporcional, com forças giroscópicas, com forças aerodinâmicas, etc. Para a vibração livre, a equação de movimento do sistema rotativo, que inclui forças giroscópicas, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{M}^*\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}^* + \mathbf{G}^*)\,\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^*\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{4-6}$$

Para resolver o problema de autovalor é necessário que a equação acima seja representada na forma de espaço-estado [58]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{M}^* \\ \mathbf{M}^* & \mathbf{C}^* + \mathbf{G}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ou na forma simplificada:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{0} \tag{4-7}$$

nessa equação $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T & \mathbf{q}^T \end{bmatrix}^T$ representa o vetor de estado, a matriz $\mathbf{B}$ é simétrica e $\mathbf{A}$ é antisimétrica, visto que $\mathbf{M}^*$ é simétrica.

É necessário ressaltar que as matrizes $\mathbf{M}^*$, $\mathbf{C}^*$, $\mathbf{G}^*$ e $\mathbf{K}^*$ são de dimensão $6n \times 6n$, sendo n o número de nós, portanto, as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são de dimensão $12n \times 12n$.

A solução do problema de autovalor, associada à Eq. (4-7), fornece a variação das freqüências naturais com a velocidade de rotação Ω. A solução do problema de autovalor é discutida com maior detalhe no item 4.2.6,

Diagrama de Campbell.

4.2.5
Características do Sistema Rotativo

O sistema rotativo a ser estudado é tomado do livro de Lalanne [11] e está reproduzido na Fig. 4.2.

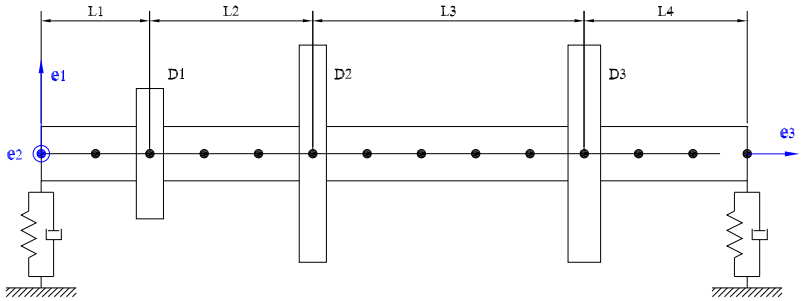

Figura 4.2: Sistema rotativo horizontal.

Para a análise dos autovalores, o rotor é dividido em elementos de igual comprimento. As características geométricas do eixo são: $L_1 = 0,2m, L_2 = 0,3m, L_3 = 0,5m, L_4 = 0,3m$, seção transversal uniforme de raio $0,05m$. Os discos, cujas dimensões estão na Tab. 4.1, são considerados rígidos e homogêneos. O material do eixo e dos discos é aço: $E = 2 \times 10^{11} N/m^2, \rho = 7800 kg/m^3$ com coeficiente de Poisson $0,3$. Também, se considera que ambos

Tabela 4.1: Propriedades geométricas dos discos.

Disco	D_1	D_2	D_3
Espessura (m)	0,05	0,05	0,06
Raio Interno (m)	0,05	0,05	0,05
Raio Externo (m)	0,12	0,2	0,2

mancais são idênticos e estão caracterizados pelas seguintes propriedades não nulas:

$$\begin{aligned} k_{txx} &= 5 \times 10^7 N/m, \quad k_{tyy} = 7 \times 10^7 N/m \\ c_{txx} &= 5 \times 10^2 Ns/m, \quad c_{tyy} = 7 \times 10^2 Ns/m \end{aligned}$$

A velocidade de rotação Ω do sistema varia de 0 até $30000 rpm$.

4.2.6
Diagrama de Campbell

O diagrama de Campbell representa a variação das freqüências naturais em função da velocidade de rotação. Esse diagrama é característico para sistemas rotativos e é importante porque fornece informação das velocidades críticas (freqüências de ressonância) do sistema. O diagrama é construído a partir da solução do problema de autovalor da Eq. (4-7).

Para resolver o problema de autovalor, supõe-se uma solução da forma $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}}e^{(i\omega t)}$ sendo $\hat{\mathbf{y}}$ o vetor de amplitude dos deslocamentos, ω a freqüência da vibração harmônica e $i = \sqrt{-1}$ representa o número imaginário, logo, substituindo essa solução na Eq. (4-7), obtém-se:

$$(\lambda_i \mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{R}_i \;=\; \mathbf{0} \tag{4-8}$$

Da equação acima: $\lambda_i = \lambda_i(\Omega) = i\omega_i(\Omega)$ porque $\mathbf{G}^* = \mathbf{G}^*(\Omega)$ e λ_i representa o i-ésimo autovalor associado ao autovetor complexo $\mathbf{R}_i$ [30].

As 13 primeiras curvas de autovalores do sistema, em função da velocidade de rotação, são mostradas na Fig. 4.3. Nessa figura percebe-se que existem duas linhas constantes em $\approx 250Hz$ e $\approx 700Hz$, elas representam as freqüências axiais e/ou torsionais e aparecem no diagrama de Campbell porque o modelo leva em conta as vibrações axiais, laterais e torsionais.

As freqüências naturais de flexão para $\Omega = 25000rpm$, considerando 13, 26 e 39 elementos, estão mostradas na Tab. 4.2 e são comparadas com os resultados da referência [11]. É necessario ressaltar que na referência, os autovalores foram obtidos usando o método pseudo-modal.

Tabela 4.2: Freqüências naturais em Hz para $\Omega = 25000rpm$.

Freq.	Lalanne	13 elem	26 elem	39 elem
ω_1	55,408	54,45	54,45	54,45
ω_2	67,209	65,95	65,95	65,95
ω_3	157,90	155,54	155,54	155,54
ω_4	193,71	190,87	190,87	190,87
ω_5	249,90	248,61	248,61	248,61
ω_6	407,62	404,91	404,90	404,90
ω_7	446,62	451,36	451,35	451,35
ω_8	715,03	729,62	729,58	729,57
ω_9	622,65	638,88	638,87	638,86
ω_{10}	1093,0	1111,97	1111,85	1111,83

Nas freqüências naturais de flexão tabuladas acima, conclui-se que 13 elementos são suficientes para obter uma boa aproximação das 10 primeiras

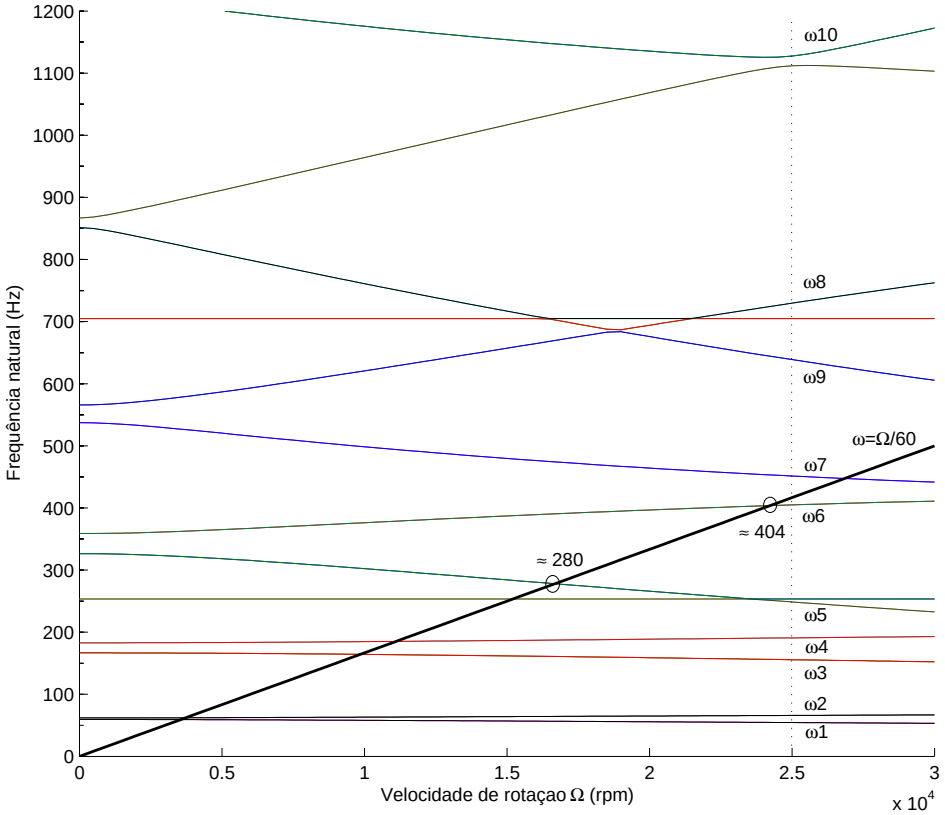

Figura 4.3: Diagrama de Campbell.

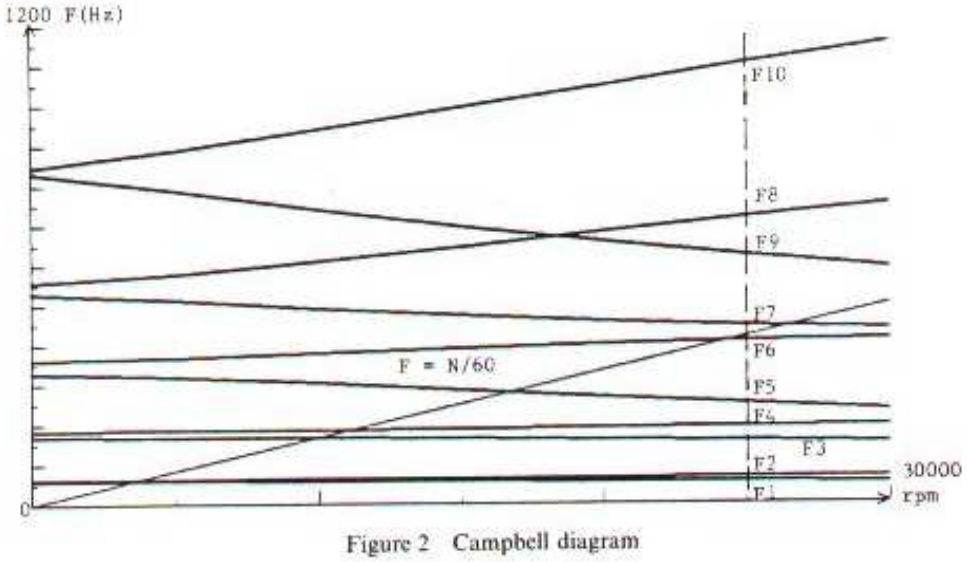

Figura 4.4: Resultados de Lalanne.

freqüências naturais. Por outro lado, percebe-se que existe uma diferença dos valores obtidos neste trabalho com aqueles da referência. Isso deve-se ao fato de Lalanne levar em conta a deformação por cisalhamento na modelagem da viga, que se traduz numa matriz de rigidez diferente daquela obtida no Capítulo 3.

No diagrama de Campbell é interessante observar o comportamento da variação das freqüências naturais com a velocidade de rotação Ω. No diagrama, algumas curvas de freqüência mostram uma pronunciada, mas contínua, mudança de direção, repelindo-se mutuamente e evitando a intersecção. Do ponto de vista matemático, especialmente em problemas de autovalor, isso é conhecido como *curve veering* [19].

Ao representar os autovalores num gráfico, a dependencia deles com Ω é mostrada através de uma família de lugares geométricos; quando dois lugares geométricos se aproximam, eles quase sempre divergem fortemente (*curve veering*) ou se cruzam (*curve crossing*) [19]. Uma análise mais profunda sobre o fenômeno de divergência, usando um sistema rotativo contínuo, é apresentada no artigo de Jei [19].

4.3
Análise de uma Viga em L

Usando o programa desenvolvido também é possível calcular os autovalores e autovetores de uma viga em configuração L, Fig. 4.5. Neste exemplo, a viga está engastada num de seus extremos e livre no outro. Esta viga é tomada do trabalho de Ritto [59] e as características geométricas são: comprimento horizontal $= 3m$, comprimento vertical $= 3m$, seção transversal $b \times h = 0,3 \times 0,25m$ e o material da viga é aço. Como resultados, a Tab. 4.3 mostra as freqüências naturais da viga e os seis primeiros modos de vibração estão representados na Fig. 4.6.

Tabela 4.3: Freqüências naturais (rad/s) no plano $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$.

Freq.	4 elem	10 elem	20 elem	40 elem	60 elem
ω_1	9,486	9,485	9,485	9,485	9,485
ω_2	25,835	25,829	25,828	25,828	25,828
ω_3	128,374	127,496	127,466	127,464	127,464
ω_4	188,986	186,868	186,776	186,770	186,770
ω_5	463,814	408,294	407,346	407,281	407,278
ω_6	643,370	507,572	505,785	505,663	505,656

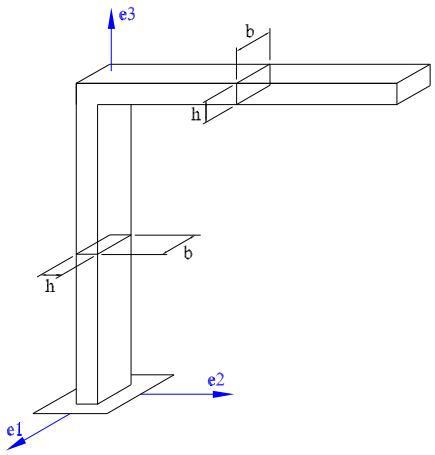

Figura 4.5: Viga engastada-livre em L.

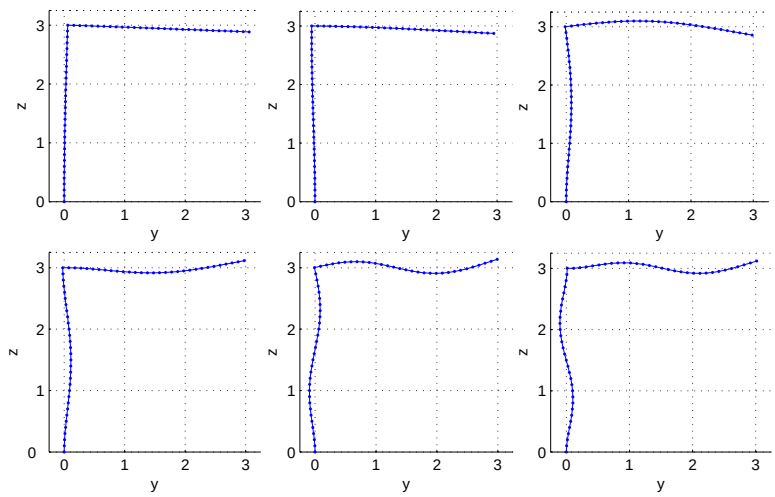

Figura 4.6: Seis primeiros modos de vibração no plano $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$.

Resumindo, as seis primeiras freqüências naturais e os modos de vibração conferem satisfatoriamente com aqueles obtidos por Ritto. Também, pode-se concluir que 10 elementos são suficientes para obter uma boa aproximação das seis primeiras freqüências naturais.

4.4 Validação Experimental de uma Viga com Impacto

Com o objetivo de validar o modelo de Cosserat desenvolvido e o modelo de impacto usado, modelo de Kelvin-Voigt, nesta secção estuda-se o comportamento dinâmico de uma viga esbelta excitada por uma força harmônica. No experimento, um extremo da viga está engastado e o extremo

livre está submetido a impactos. O movimento vertical do extremo livre é limitado por um dispositivo de impacto com folga nula, Fig. 4.7. O sistema de vibro-impacto foi construído para estudar a dinâmica do sistema e os resultados experimentais são comparados com aqueles obtidos da simulação numérica.

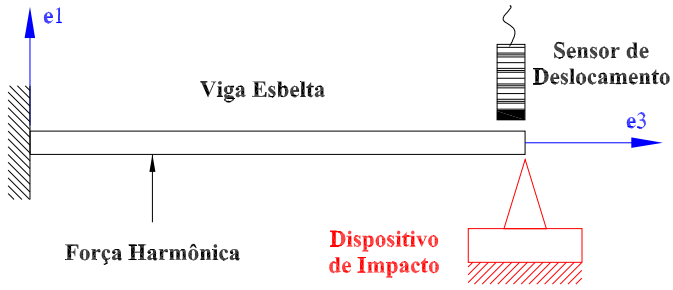

Figura 4.7: Modelo da viga engastada com impacto.

Para o estudo experimental, foi montada uma bancada de ensaios no Laboratório de Dinâmica Estrutural da Technische Universität Darmstadt. A realização da bancada experimental foi possível graças ao programa Alpha-II VICONDIA (Vibration, Control and Diagnostics) financiado pela Comunidade Européia. Além disso, vale mencionar que no livro final do VICONDIA [67] foi publicado um trabalho que trata da dinâmica de colunas de perfuração em poços verticais: *Vibrational Behavior of Slender Drillstrings*, no qual são reportados simulações numéricas, empregando o método de diferenças finitas [12], que mostram o comportamento dinâmico de uma coluna. Também são analisadas as condições operacionais para o surgimento do fenômeno *stick-slip* na broca.

4.4.1
Resultados Experimentais e Numéricos

As características geométricas da viga de aço usada no experimento são: $L \times b \times h = 280 \times 20 \times 2mm$. A viga está sob ação de uma força harmônica localizada a $120mm$ do engaste. Para gerar impacto, um dispositivo especial foi usado. Esse dispositivo de impacto, mostrado na Fig. 4.8, foi construído usando um parafuso pontiagudo fixo numa base, a característica pontiaguda é para assegurar que o impacto somente ocorra num "único ponto de contato". Os parâmetros de contato, extraidos de Zapomel et. al. [44], são supostos como: $K_C = 1 \times 10^8 Ns/m$ e $C_C = 1 \times 10^{-1} N/m$.

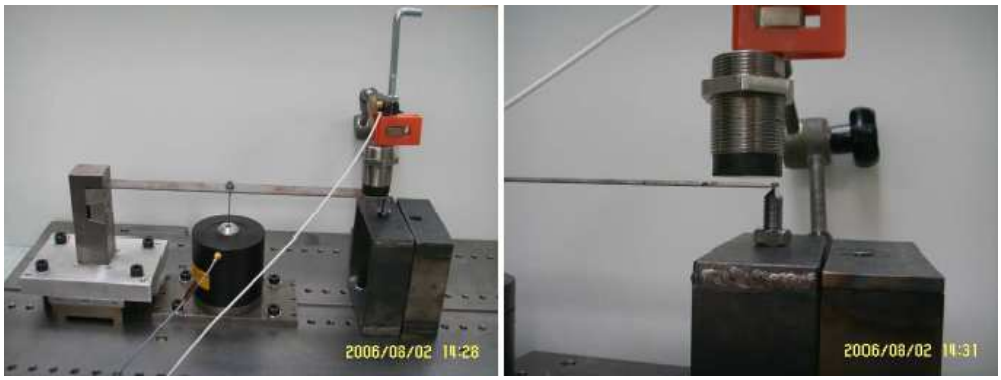

Figura 4.8: Bancada experimental.

No experimento, a viga engastada foi excitada harmônicamente, com um *Minishaker Bruël and Kjaer, Type 4810*, e o deslocamento vertical do extremo livre é medido. Para medir o deslocamento empregou-se um sensor de indução magnética *IWA A26-13625*.

Especificações do *Minishaker Bruël and Kjaer, Type 4810*

- Faixa de freqüências: 20Hz - 18kHz
- Força máxima: 7.0N (0.7kgf)
- Deslocamento: $\pm 3mm$
- Peso do shaker: 1.1kgf

Especificações do Sensor de Deslocamento *IWA A26-13625*

- Faixa de operação: 10mm
- Sensitividade: 1V/mm
- Comprimento: 47mm

As freqüências de excitação usadas para a força harmônica foram $4,0$ e $8,3Hz$. Como resultado da resposta dinâmica, as Figs. 4.9 mostram o registro temporal do deslocamento vertical da extremidade livre da viga, numérico e experimental superpostos.

Em relação aos resultados obtidos, é possível perceber que as amplitudes do deslocamento vertical da viga, experimental e numérico, conferem satisfatoriamente. Além disso, também é possível observar que o rebote da viga, devido ao impacto, é representado muito bem pela simulação numérica. No entanto, logo após o impacto existe uma pequena discrepância de amplitudes, dos resultados numérico e experimental. As possíveis causas para esta discrepância podem ser:

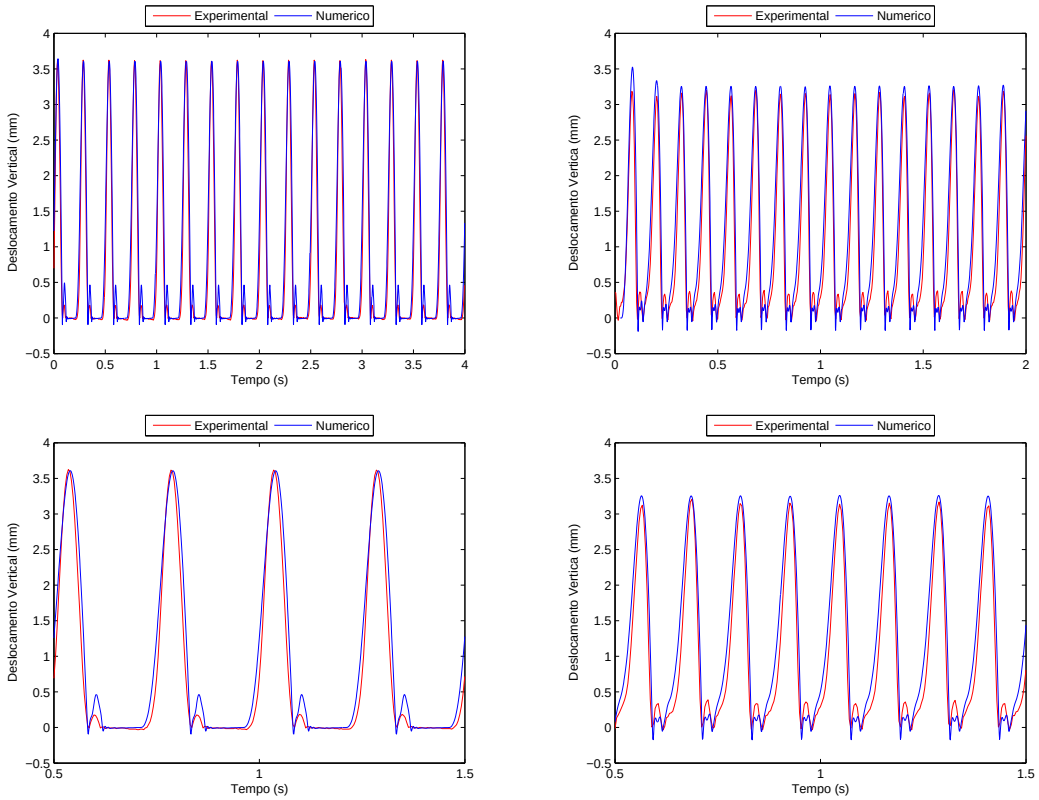

Figura 4.9: Resultados para 4,0Hz (esquerda) e 8,3Hz (direita).

– No experimento, o engaste não é perfeito, como assumido na simulação numérica.

– Na simulação numérica não se leva em conta o amortecimento estrutural da viga.

– As propriedades do material da viga, os parâmetros do impacto (rigidez e amortecimento de contato), no experimento e simulação numérica, podem diferir.

– Uma outra causa, ainda mais plausível, poderia ser que o modelo de impacto usado não está representando muito bem o impacto.

4.5 Validação Experimental Usando uma Viga Rotativa Curva

Nesta seção estuda-se a dinâmica de uma viga rotativa curva, confinada numa cavidade uniforme, como mostrada na Fig. 4.10. Esse modelo foi concebido pensando em estudar o comportamento dinâmico de uma coluna de perfuração curva simplificada. No modelo, considera-se que o extremo superior da viga está engastado e gira com velocidade angular Ω constante.

Por outro lado, o extremo inferior livre leva um disco rígido homogêneo que pode conter algum desbalanceamento.

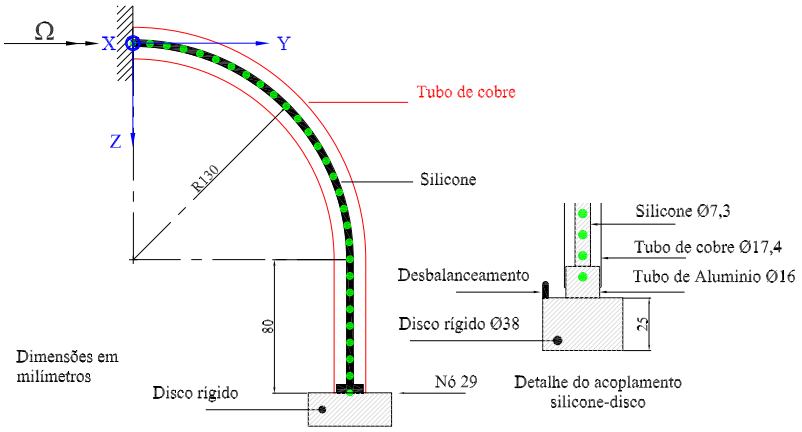

Figura 4.10: Modelo de uma viga rotativa curva.

4.5.1
Características da Construção da Bancada

Para a validação experimental, foi montada uma bancada no Laboratorio de Vibrações da PUC-Rio, Figs. 4.11 e 4.12. A bancada é constituída por uma barra de silicone cujo diâmetro é $Ø7,3mm$ e comprimento $280mm$, por um tubo de cobre curvo uniforme de diâmetro interno $Ø17,4mm$ e por um disco rígido de aço homogêneo de diâmetro $Ø38mm$ e espessura $25mm$. A barra de silicone, que está confinada no tubo de cobre, é acionada no extremo superior através de um motor elétrico, cuja velocidade de rotação é medida usando um sensor de rotação óptico. Por outro lado, o extremo inferior do silicone leva um disco rígido cujo ângulo de rotação é medido usando outro sensor óptico. Além das medições dos ângulos de rotação, mede-se o deslocamento do disco, no plano horizontal, usando quatro sensores de deslocamento. Para obter essas diferentes grandezas é usado o sistema de aquisição de dados HP 3566A, disponível no Laboratório de Vibrações.

Especificações do Motor elétrico

- Origem: Suíça.
- Outras informações não estão disponíveis.

Especificações do Sensor de Rotação

– O sensor de rotação está formado por um circuito optoeletrônico e por um disco com furos (12 furos), como mostrado na Fig. 4.12. Cada vez que um furo passa pelo sensor óptico, ele emite um sinal elétrico, resultando, ao longo do tempo, numa onda quadrada. A partir dessa onda quadrada, é possível obter o ângulo de rotação num período determinado.

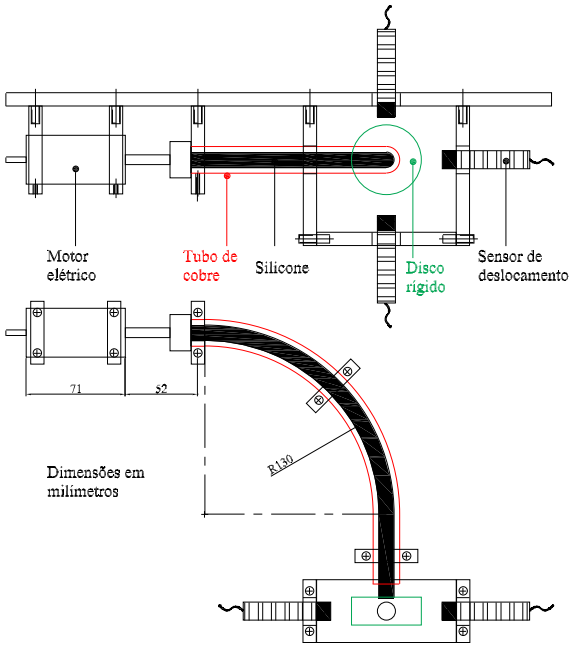

Figura 4.11: Esquema da bancada experimental.

Especificações do Sensor de Deslocamento

– Marca: Balluf

– Modelo: BAW 018-PF-1-K-03

– Faixa de operação linear: $1,75 - 5,75mm$

– Faixa máxima de trabalho: $1,25 - 8mm$

– Princípio de medição: Corrente indutiva

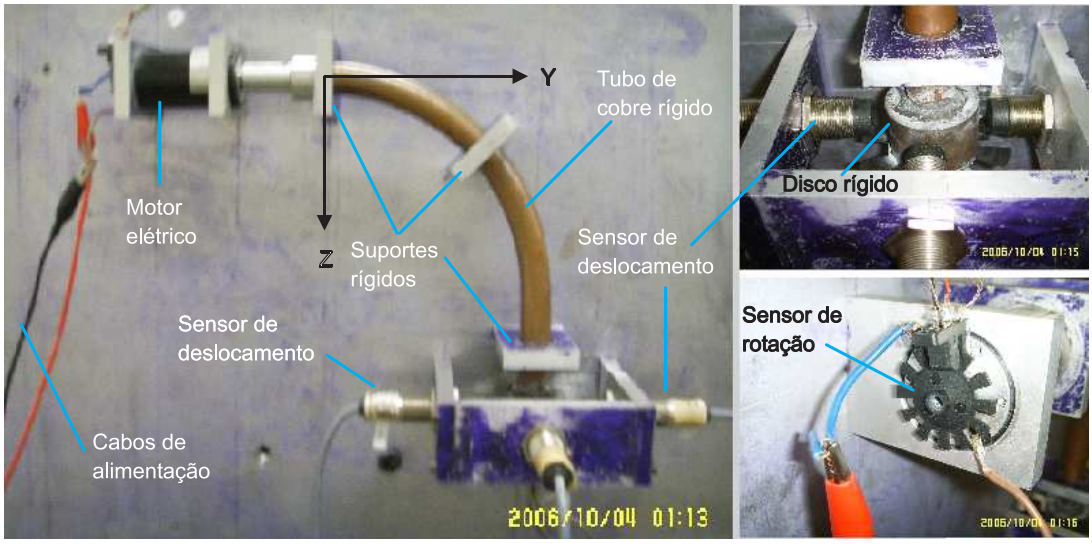

Figura 4.12: Bancada experimental.

Sistema de Aquisição de Dados

Para a aquisição de sinais foi utilizado um analisador de Fourier HP 3566A. O analisador consiste de um computador pessoal, um software aplicativo e um sistema de medição. O sistema permite a medição de até oito canais com uma taxa de aquisição máxima de até 12,8 kHz.

Propiedades do Silicone

Para determinar as propriedades da haste de silicone, foram realizados testes experimentais e os resultados são mostrados na Tab. 4.4. Mais detalhes do silicone e dos testes realizados podem ser encontrados no anexo B. Para as simulações numéricas, usando a barra de silicone, empregam-se

Propriedade	Referência	Experimental	Unidade
Densidade	$968 - 1510$	1017,2	kg/m^3
Rigidez axial $K_3 = EA$		$1,02 \times 10^3$	N
Módulo de elasticidade axial	$4,0 \times 10^6 - 12,5 \times 10^6$	$10,7 \times 10^6$	N/m^2
Rigidez à flexão $J_1 = J_2 = E\Gamma_1$		$1,13 \times 10^{-2}$	Nm^2
Módulo de elasticidade à flexão	$4,2 \times 10^6 - 24,8 \times 10^6$	$15,7 \times 10^6$	N/m^2
Coeficiente de Poisson	0,41		
Coeficiente de atrito silicone/cobre	$0,25 - 0,75$	0,388	

Tabela 4.4: Propriedades mecânicas do silicone.

as propriedades obtidas experimentalmente no laboratório e, para a rigidez de impacto adota-se a Eq. A-2 descrita no anexo A.

4.5.2
Resultados Experimentais

Os resultados experimentais obtidos são de dois tipos: o primeiro refere-se à vibração torsional no extremo inferior da haste de silicone (vibração torsional do disco) e o segundo está relacionado com a vibração lateral do disco no plano horizontal, plano $X - Y$.

Vibraçoes Torsionais

As Figs. 4.13, 4.14 e 4.15 mostram a vibração torsional do disco num período de $4s$ para diferentes velocidades de rotação do motor elétrico. Por exemplo, a primeira linha da Fig. 4.13 corresponde a $\Omega = 4,6rad/s$, nessa primeira linha mostram-se três sub-figuras:

1. Duas ondas quadradas (Volts), obtidas com o sensor óptico, que correspondem ao disco e ao motor.
2. A variação angular do disco e do motor (rad).
3. A diferença angular (rad) entre o disco e o motor. Essa terceira sub-figura corresponde à vibração torsional do disco.

Nas figuras, os traços da cor azul e verde representam o disco e o motor elétrico, respectivamente. Já, os traços da cor preta representam a diferença angular entre o disco e o motor, que é chamada de vibração torsional do disco. As velocidades de rotação do motor foram obtidos a partir do ajuste linear do ângulo de rotação do motor. Por outro lado, observando o lado direito das Figs. 4.13, 4.14 e 4.15 (vibração torsional do disco), pode-se chegar à conclusão que a amplitude da vibração torsional está na ordem de $\Phi_Z \approx \pm 0,2rad$. Também, a Fig. 4.16 mostra a transformada de Fourier FFT da vibração torsional do disco, nessas figuras exprimem-se a freqüência da vibração torsional $\approx 1,6rad/s$ e as freqüências de rotação do motor Ω.

Vibraçoes Laterais

Para induzir as vibrações laterais no sistema, introduz-se, no disco, uma massa de desbalanceamento $m_e = 10g$ localizada a $r_e = 19mm$, como mostra o detalhe da Fig. 4.10. Essa massa desbalanceada gera uma força centrífuga do tipo $m_e r_e \Omega^2 \cos(\Omega t + \Phi_{z\ disco})$ e $m_e r_e \Omega^2 \sin(\Omega t + \Phi_{z\ disco})$.

Usando os dados obtidos dos sensores de deslocamento é possível construir as órbitas do centro do disco, no plano $X - Y$, para diferentes velocidades do motor elétrico, as quais são mostradas na Fig. 4.17. A folga

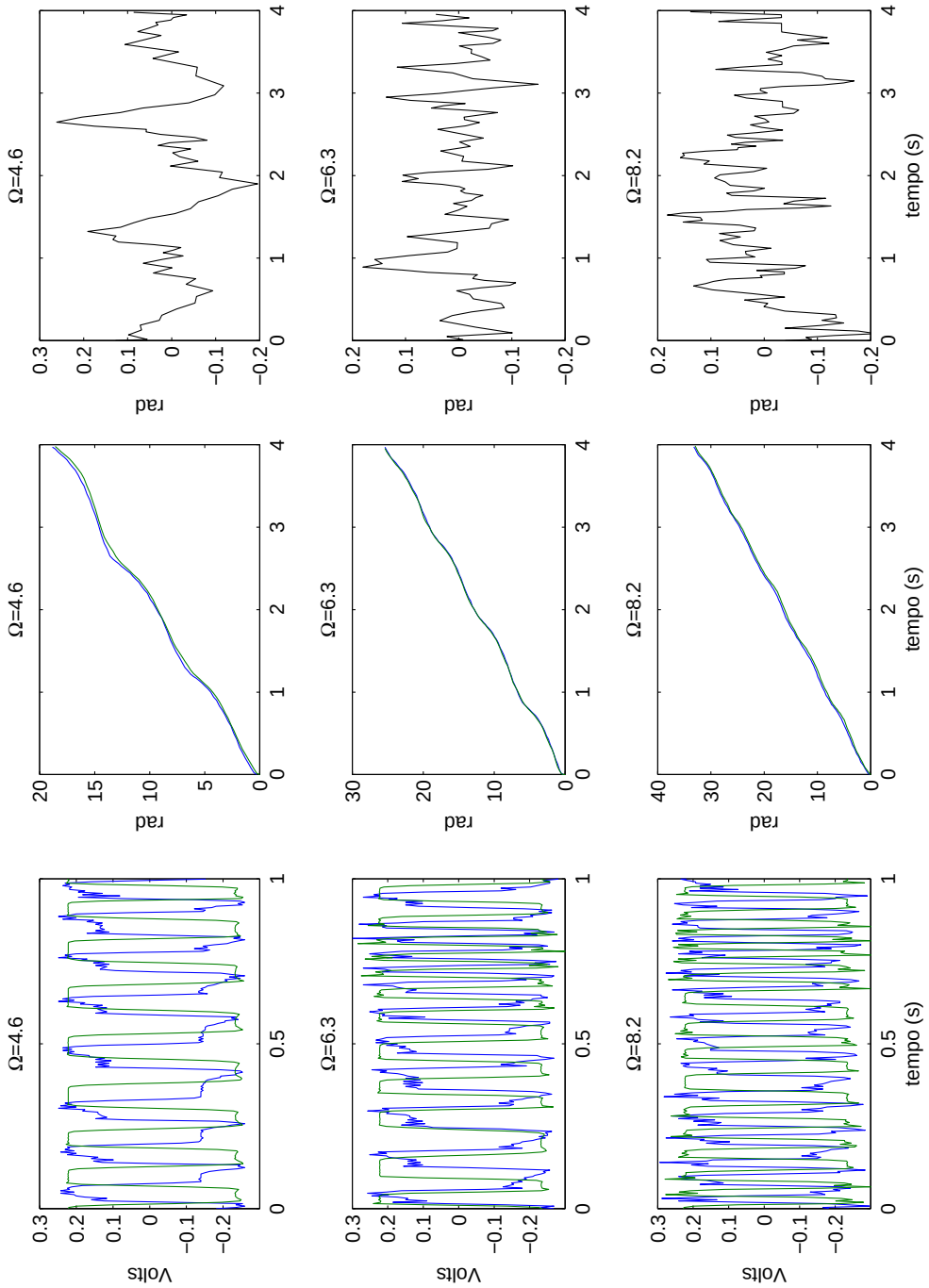

Figura 4.13: Vibração torsional do disco para $\Omega = 4,6,\ 6,3,\ 8,2 rad/s$; disco (—), motor (—), vibração torsional (—).

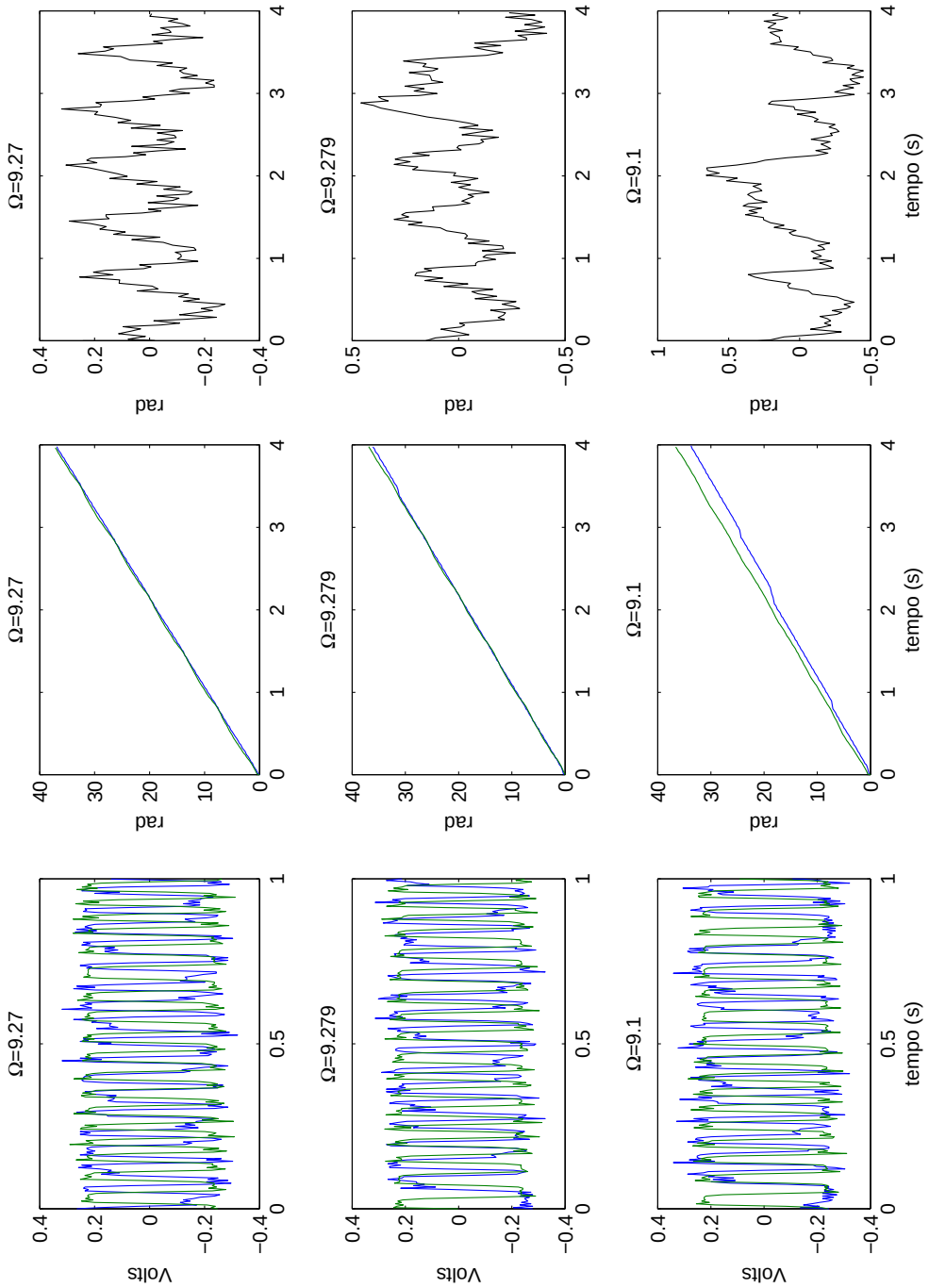

Figura 4.14: Vibração torsional do disco para $\Omega = 9,27,\ 9,279,\ 9.1 rad/s$; disco (—), motor (—), vibração torsional (—).

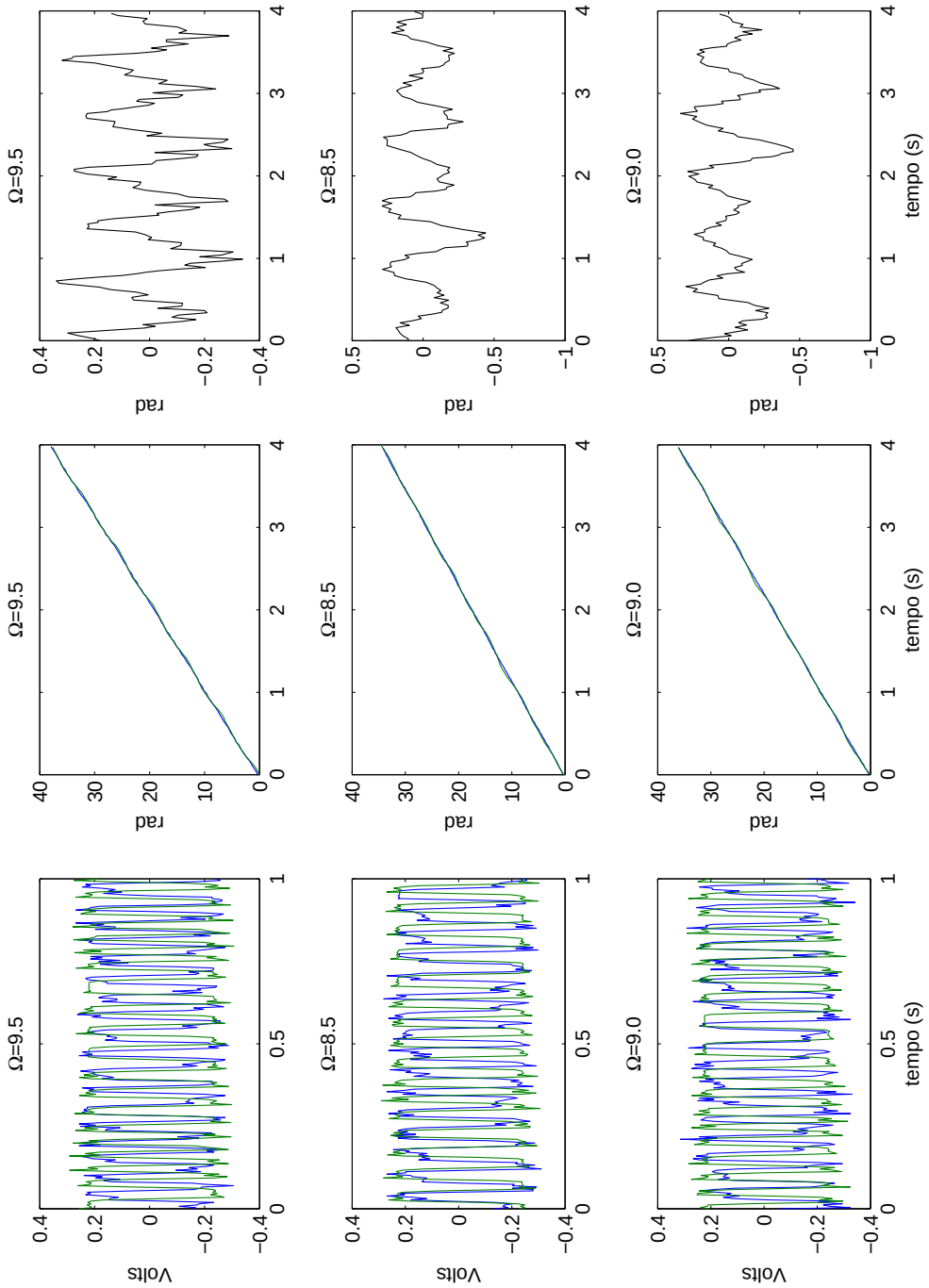

Figura 4.15: Vibração torsional do disco para $\Omega = 9.5,\ 8.5,\ 9.0 rad/s$; disco (—), motor (—), vibração torsional (—).

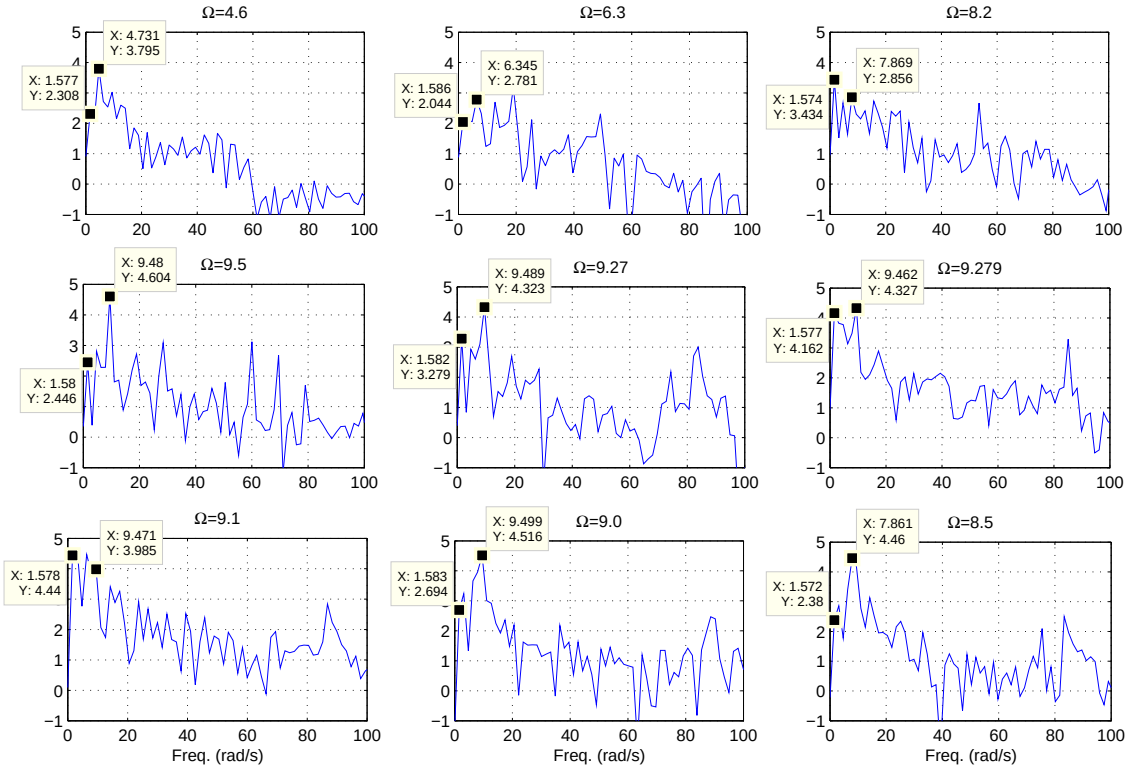

Figura 4.16: FFT da vibração torsional do disco.

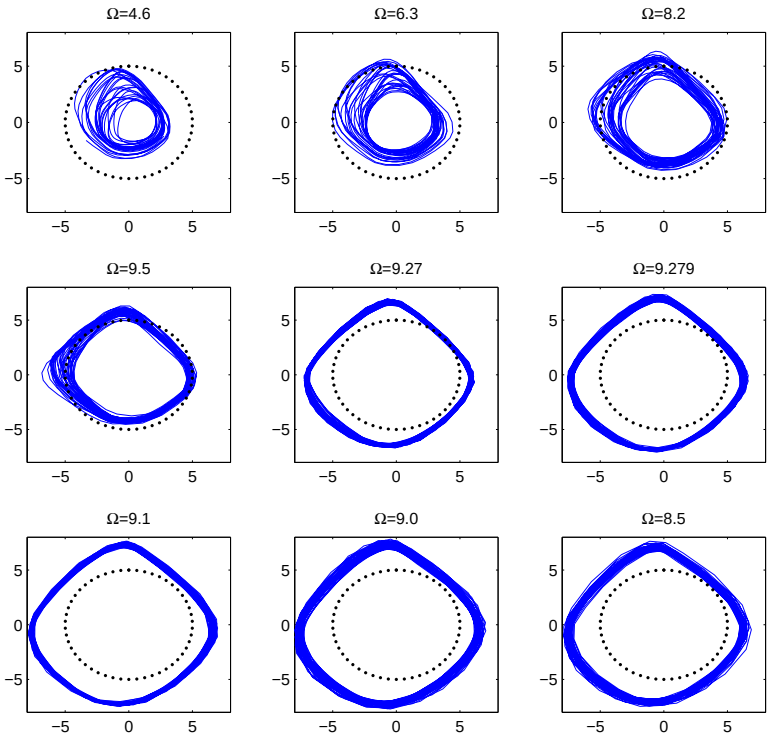

Figura 4.17: Órbitas do disco no plano $X - Y$ em milímetros.

radial entre o silicone e o tubo no nó 29 é apenas $\delta = 0,7mm$, mas a amplitude das órbitas é da ordem $\approx 5mm$, essa desconformidade deve-se ao fato de o disco não estar confinado no tubo, Fig. 4.10, gerando uma órbita maior que a folga permitida. Também, a partir da FFT dos deslocamentos do disco nos eixos X e Y mostradas na Fig. 4.18, pode-se obter várias freqüências (rad/s) interessantes; entre elas se tém as freqüências de rotação própria do motor Ω e as freqüências de precessão $\approx 42, 48, 53, 59, 83, 84, 87$ e $89rad/s$.

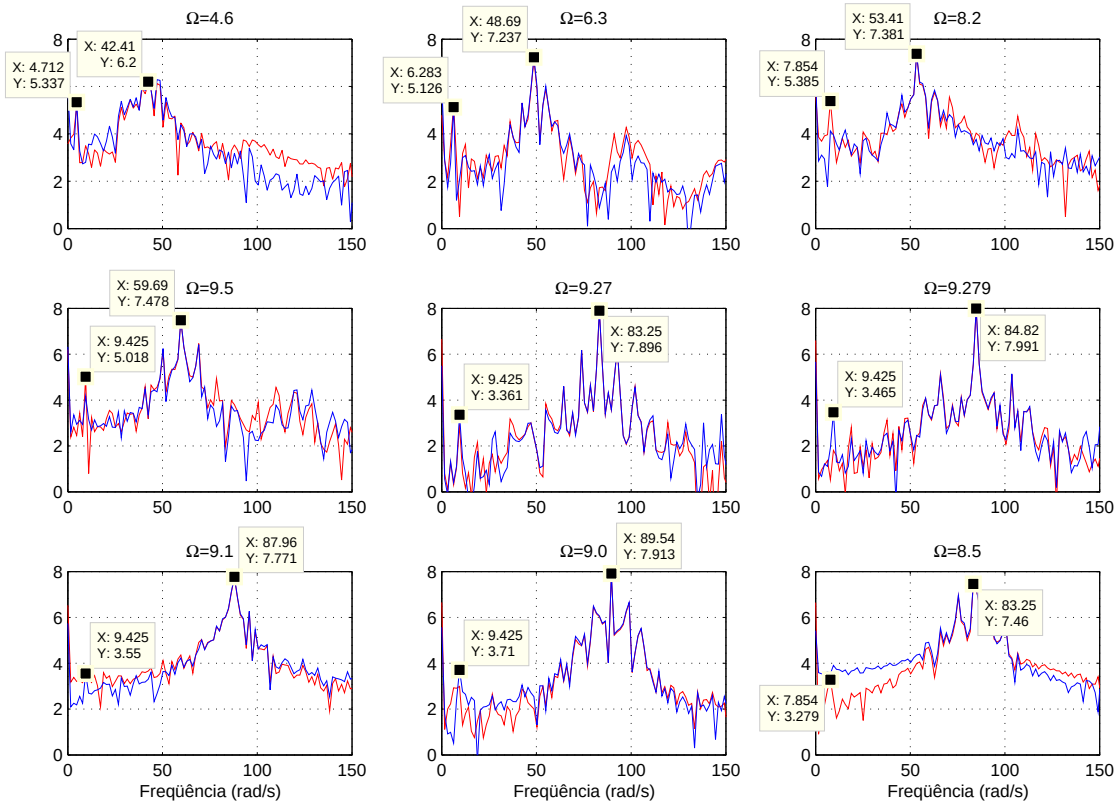

Figura 4.18: FFT dos deslocamentos do disco; (—) eixo X, (—) eixo Y.

4.5.3
Resultados Numéricos

Para a simulação numérica do modelo mostrado na Fig. 4.10, a haste de silicone é dividida em 28 elementos, o critério utilizado para determinar o número de elementos está descrito no anexo C. Também, considera-se que o extremo superior, da haste, possua uma velocidade de rotação Ω constante e, o extremo inferior leva um disco homogêneo de massa $m = 140g$ e um desbalanceamento ($m_e = 10g$, $r_e = 19mm$). As simulações numéricas são

realizadas para três casos:

a) Massa do disco desprezível e $\Omega = 9rad/s$.

b) Massa do disco não desprezível e $\Omega = 9rad/s$.

c) Massa do disco não desprezível e $\Omega = 6,3rad/s$.

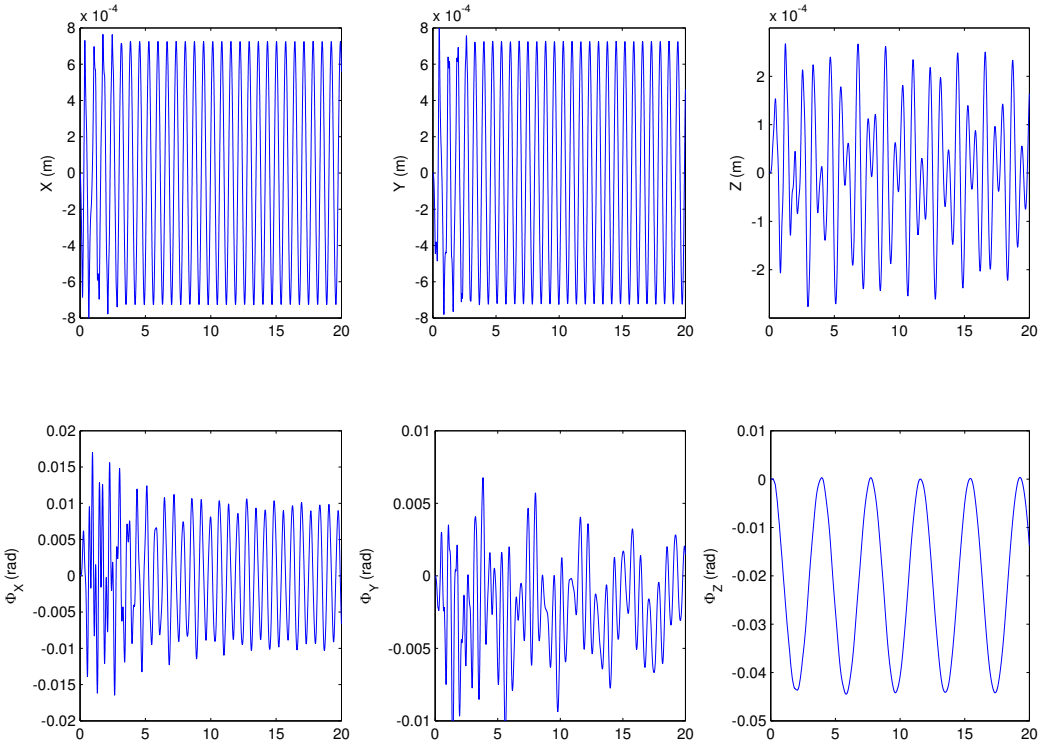

Figura 4.19: Resposta dinâmica do nó 29 durante 20s. Caso **a)**.

Para o nó 29, as Figs. 4.19, 4.20 e 4.21 mostram a resposta temporal dos deslocamentos (X, Y, Z) e rotações (Φ_X, Φ_Y, Φ_Z); essas grandezas representam os deslocamentos e as rotações da seção transversal em relação ao sistema de coordenadas inercial. É necessario ressaltar que as grandezas X, Y, Z e Φ_X, Φ_Y, Φ_Z são calculadas em relação à configuração inicial curva, consequentemente, a rotação Φ_X não inclui a curvatura do tubo.

Os resultados numéricos do caso **a)**, massa do disco desprezível, são mostrados nas Figs. 4.19, 4.22-a e 4.23-a. Na Fig. 4.19, percebe-se que existe uma variação do deslocamento $Z \approx \pm 2,5 \times 10^{-4} m$ em torno de zero. Essa pequena vibração acontece porque a equação de movimento do sistema, Eq. 3-26, está acoplada através das não linearidades geométricas. Por outro lado, a amplitude da vibração torsional é da ordem de $|\Phi_Z| \approx 0,02rad$ em torno de $\approx -0,02rad$; o valor negativo é conseqüência do torque resistivo que se opõe ao movimento rotativo da haste no nó 29. A transformada de Fourier, Fig. 4.22-a, revela que a freqüência da vibração torsional é $\approx 1,57rad/s$,

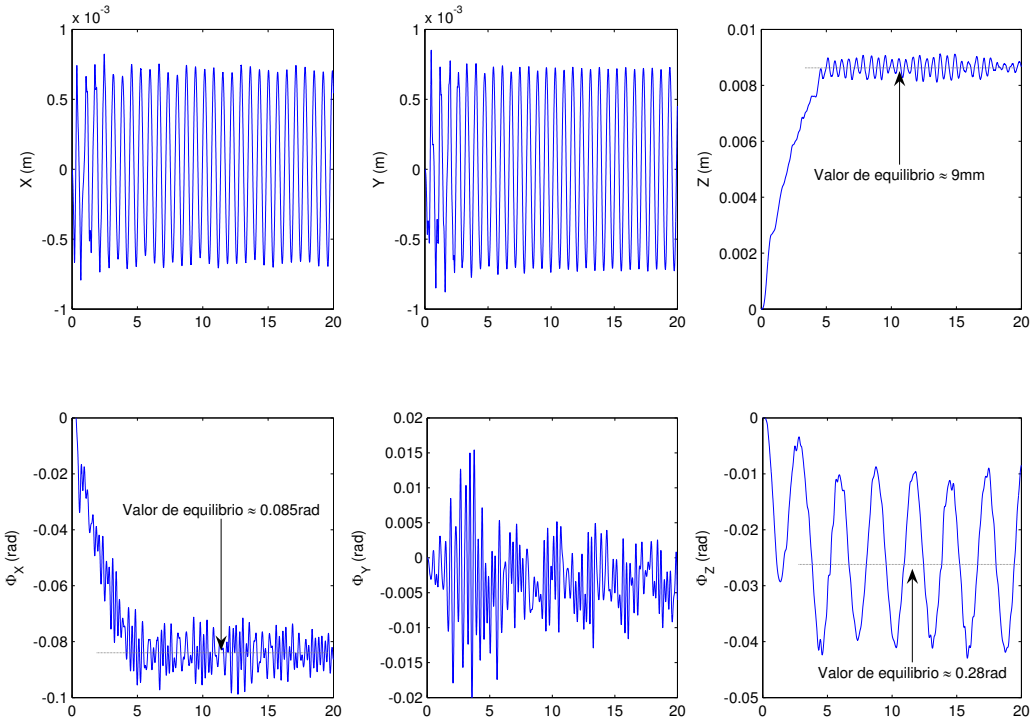

Figura 4.20: Resposta dinâmica do nó 29 durante 20s. Caso **b)**.

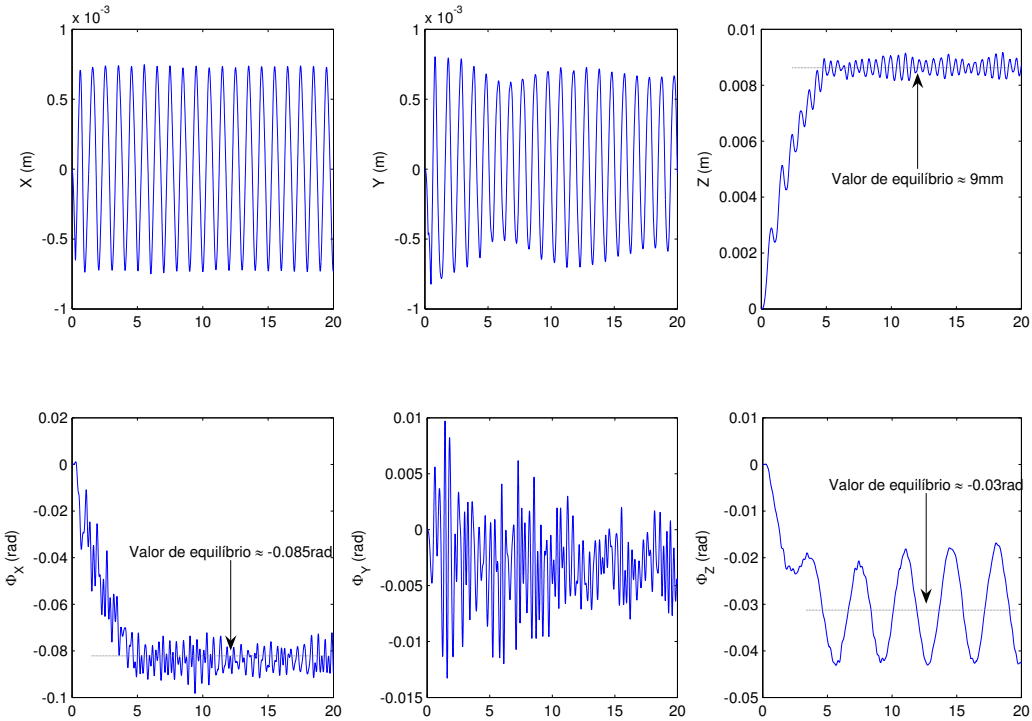

Figura 4.21: Resposta dinâmica do nó 29 durante 20s. Caso **c)**.

essa mesma figura mostra outras freqüências de interesse: de rotação do motor $\Omega \approx 9,1 rad/s$ e de precessão $\approx 24,19 rad/s$.

Os resultados numéricos quando o peso do disco é levado em conta, casos **b)** e **c)**, são mostrados nas Figs. 4.20, 4.21, 4.22-b-c e 4.23-b-c. Das Figs. 4.20 e 4.21, conclui-se que o valor de equilíbrio na direção Z, devido ao peso do disco, é da ordem $Z \approx 9mm$. Também, percebe-se que o valor de equilíbrio é atingido no período de 5s (*settling time* $= 5s$), isso é aceitável porque na simulação numérica considerou-se que o peso do disco W_0 é aplicado gradualmente durante 5s, ou seja, empregou-se uma equação rampa do tipo: $W = \frac{W_0}{5}t$ para $0 \leq t \leq 5$ e $W = W_0$ para $t > 5$. Por outro lado, comparando a grandeza Φ_X da Fig. 4.19 com aqueles das Figs. 4.20 e 4.21, constata-se que existe uma diferença; no primeiro caso a haste de silicone está sempre localizada no centro geométrico do tubo e Φ_X sofre pequenas variações em torno de zero, já nos casos **b)** e **c)**, devido ao peso do disco, Φ_X experimenta uma rotação permanente de $\Phi_X \approx -0,085 rad$ e vibra em torno desse valor. Além disso, as transformadas de Fourier, Fig. 4.22-b-c, revelam que a freqüência da vibração torsional é $\approx 1,88 rad/s$, essa mesma figura mostra outras freqüências de interesse: de rotação do motor $\Omega \approx 9,1,\ 6,3 rad/s$, e de precessão $\approx 25.13,\ 23.87 rad/s$.

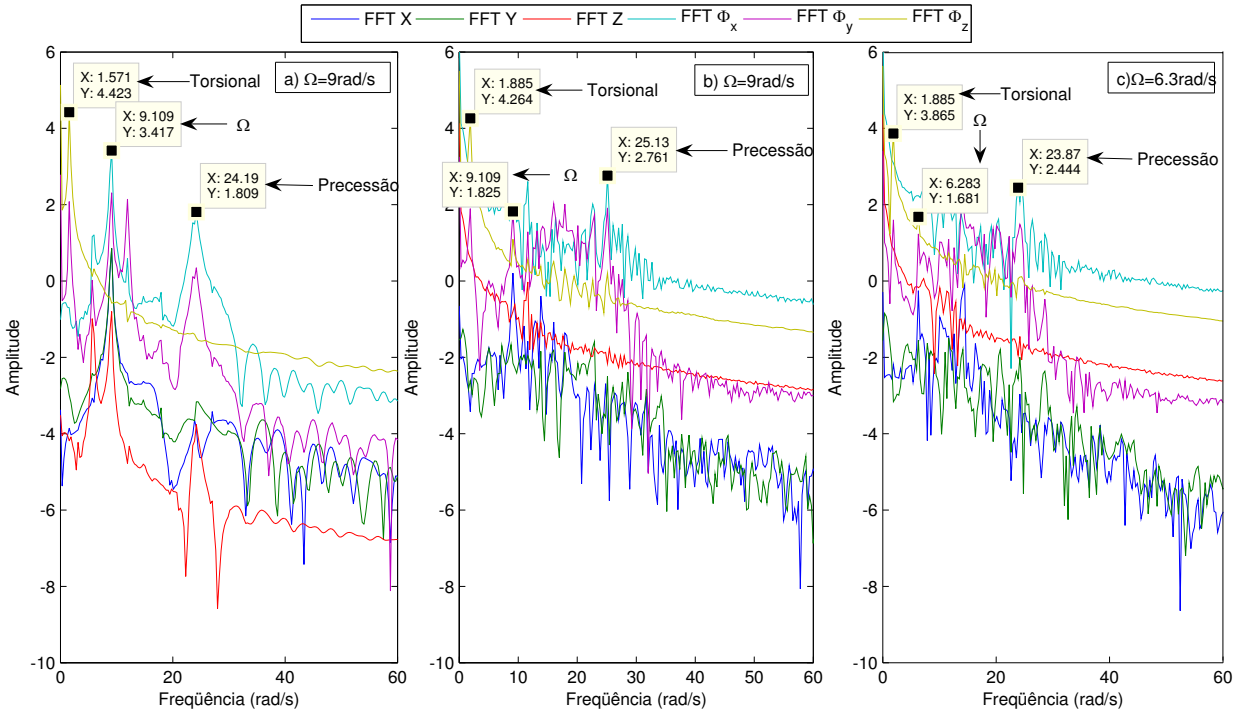

Figura 4.22: FFT da resposta dinâmica do nó 29. Casos **a)**, **b)** e **c)**.

As figuras da órbita do disco e a deformação do sistema, para diferentes instantes de tempo, permitem uma melhor visualização da resposta

dinâmica e são mostradas nas Figs. 4.23 e 4.24, respectivamente. As órbitas dos casos **a)** e **b)** da Fig. 4.23 mostram que nos primeiros instantes a órbita do nó 29 ultrapassa o limite permitido pela folga radial ($\delta = 0,7mm$). Isso pode ser interpretado como um força de impacto forte, devida à força centrífuga, que gera uma penetração maior. Na verdade isso representa uma deformação maior da mola usada para representar o impacto, modelo de Kelvin-Voigt. Por outro lado, no caso **c)** a penetração é mínima porque a velocidade de rotação é baixa $\Omega = 6,3rad/s$.

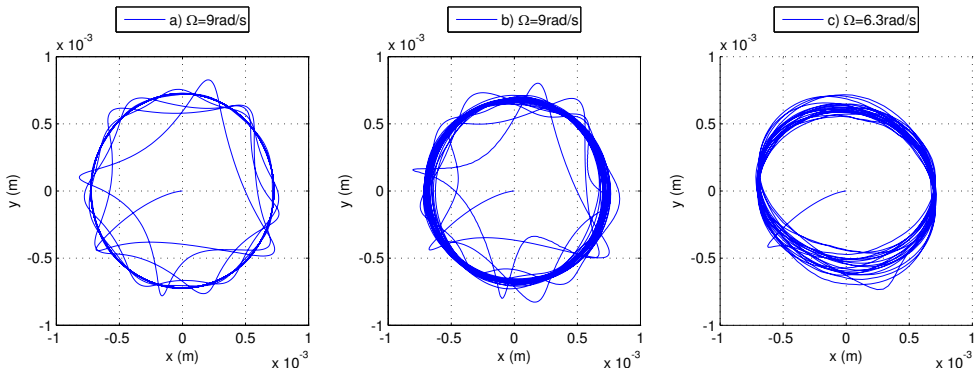

Figura 4.23: Órbitas do nó 29 para os casos **a)**, **b)** e **c)**.

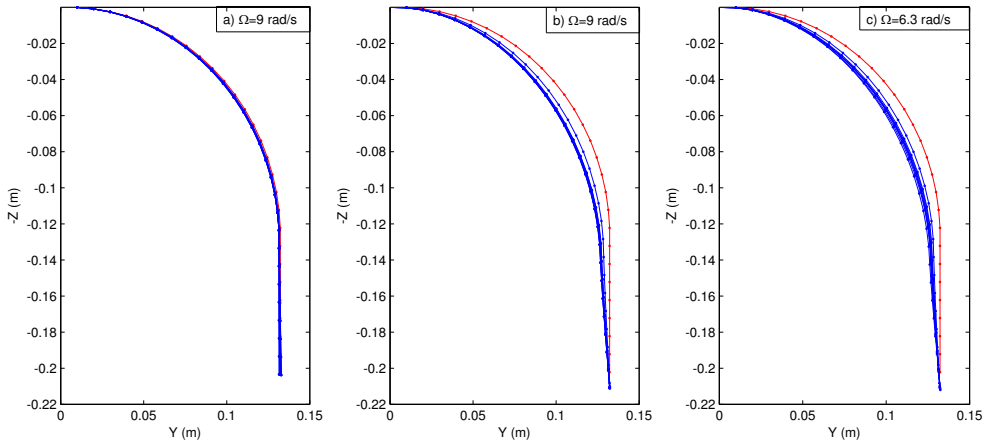

Figura 4.24: O sistema em diferentes instantes de tempo. Casos **a)**, **b)** e **c)**.

4.5.4
Comentários e Conclusões Gerais

O experimento da haste rotativa curva, confinada num tubo, foi realizado com o intuito de validar o modelo desenvolvido neste trabalho.

Do experimento foram obtidas três informações: as freqüências de vibração torsional, as freqüências de precessão e as órbitas do disco. Se compararmos os resultados numéricos e experimentais, percebe-mos que as freqüências torsionais obtidas no experimento ($\approx 1,57 rad/s$, Fig. 4.16) são próximas daquelas obtidas na simulação numérica ($\approx 1.88 rad/s$, Fig. 4.22). Mas, se olharmos as freqüências de precessão, os resultados numéricos ($\approx 25 rad/s$, Fig. 4.22) não conferem com os resultados experimentais ($\approx 42, 48, 53, 59, 83, 84, 87\ e\ 89 rad/s$, Fig. 4.18).

Por outro lado, em relação às órbitas para $\Omega = 9 rad/s$ e $\Omega = 6.3 rad/s$, percebe-se que as órbitas experimentais e as numéricas são parecidas, ou seja, elas conferem qualitativamente. Mas, se compararmos as amplitudes, conclui-se que o experimental ($\delta \approx 5mm$, Fig. 4.17) é bem maior que o numérico ($\delta = 0.7mm$, Fig. 4.23). Essa divergência dos resultados é porque o disco pendurado na haste de silicone, no experimento Fig. 4.12, não está confinado no tubo. Como consequência disso e, devido à alta flexibilidade do silicone, o disco movimentava-se livremente realizando órbitas de maior amplitude. Esse fato, também, pode ter influenciado para que as freqüências de precessão, numéricas e experimentais, sejam diferentes. Vale ressaltar que, na simulação numérica o disco foi modelado como sendo uma massa concentrada com inércia de rotação, localizada no nó 29, Fig. 4.10.

Finalizando, estamos analisando com parâmetros oriundos do estudo de sistemas lineares um corportamento basicamente não linear. Assim, a validação entre o modelo matemático e o sistema real não pode passar além das considerações qualitativas sobre alguns dos parâmetros presentes na análise.

5
Perfuração Direcional

5.1
Introdução

O termo perfuração direcional é usado para referir-se à perfuração de poços não verticais. Em geral, as vibrações das colunas de perfuração causam falha prematura dos componentes do sistema de perfuração e ineficiência na taxa de penetração.

Em operação, as colunas podem apresentar diferentes tipos de vibrações: Vibração Axial (ou longitudinal), este tipo de vibração existe devido à interação da broca com a formação rochosa, e pode produzir o fenômeno conhecido como quicar de broca ou *bit-bounce*; Vibração Flexional (ou lateral), usualmente causada pelo desbalanceamento dos tubos de perfuração, gerando forças centrífugas que, por sua vez, causam a precessão direta/retrógrada da coluna ou *forward/backward whirl*; e por último, a Vibração Torsional, causada pela interação não linear broca-formação e coluna-parede do poço. Como conseqüência da vibração torsional se produz o fenômeno *stick-slip*. O *stick-slip* está caracterizado por paradas e acelerações alternadas da broca. Medições de campo, reportadas por Leine [39], revelam que a vibração *stick-slip* coexiste com a precessão. Em um trabalho anterior [60] foi demonstrado que as vibrações axiais e torsionais estão acopladas através das forças que atuam na broca.

Neste capítulo são apresentados resultados numéricos que descrevem o *stick-slip* e a precessão na forma mais elementar. O sistema é analisado usando a viga de Cosserat, desenvolvida nos capítulos precedentes, junto ao tradicional Método dos Elementos Finitos. Neste trabalho, não se pretende modelar completamente todas as forças que atuam sobre o sistema; o objetivo é mostrar que, usando uns poucos elementos de Cosserat, é possível obter o comportamento dinâmico do sistema.

5.2
Benefícios da Perfuração Direcional

Os poços direcionais são perfurados por vários motivos:

- Atingir reservorios que são de difícil, ou impossível, acesso verticalmente.
- Obter poços mais baratos, tendo mais pontos de extração em uma mesma região.
- Perfurar poços de alívio (*relief wells*) para despressurizar um poço que está sem controle (*Blow Out*).

Aproximadamente 20 anos atrás, os poços eram perfurados em ângulos de no máximo 60 graus; atualmente, a perfuração horizontal é muito freqüente. No entanto, uma perfuração afastada do ponto inicial é ainda um desafio e requer uma planificação cuidadosa. O recorde atual são poços que distam horizontalmente 10.000m do ponto inicial, com profundidades que vão de 1.600-2.600m. Os seguintes poços são os únicos perfurados desde terra firme até o leito submarino:

- *Wytch Farm*, na costa sul de Inglaterra, operado pela BP (*British Petroleum*),
- *Dieksand Land*, na costa norte da Alemanha, operado pela RWG AG, e mais recentemente,
- *Chayvo*, na costa leste de *Sakhalin Island*, ver Fig. 5.1, na Rússia, operado pela *ExxonMobil*.

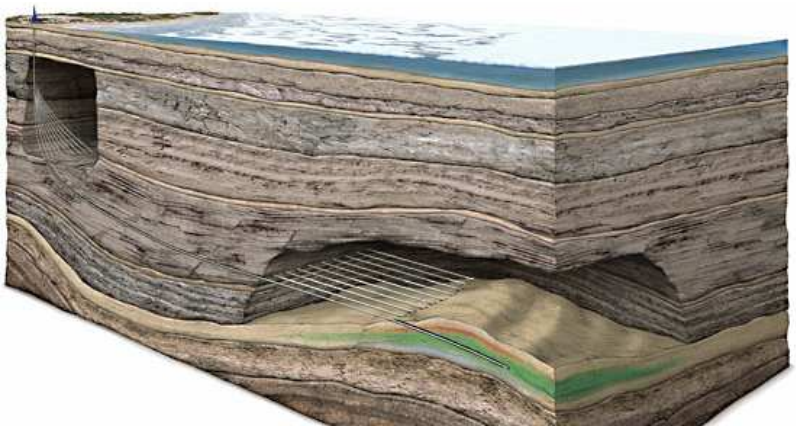

Figura 5.1: Chayvo, na costa leste de *Sakhalin Island*, Rússia.

5.3
Forças que Atuam sobre a Coluna de Perfuração

As forças que atuam na coluna de perfuração, quando está em operação são várias [47, 50]. Só para mencionar algumas: tração, compressão, momento fletor, torque, forças de atrito, forças dinâmicas, etc. Neste trabalho somente os dinâmicos como impacto, interação broca-formação e desbalanceamento são considerados. Além disso, o estudo está orientado a colunas de perfuração que usam brocas tri-cônicas.

Em geral, quando se perfura usando brocas com cones, uma estrutura tipo lobular é formada na formação rochosa. O número de lóbulos formado é igual ao número de cones da broca. Quando os cones rolam sobre a formação, um padrão do tipo crista-vale é continuamente formado e desintegrado; dito de outra forma, o padrão crista-vale gira a uma certa velocidade que depende da rigidez da rocha a ser destruída. Também, brocas cônicas rolando sobre a formação geram um movimento axial quase periódico da parte inferior da coluna. Como uma primeira aproximação, os deslocamentos axiais podem ser considerados como deslocamentos harmônicos.

Para a simulação numérica, considera-se que sobre a broca atuam uma força axial F_{bit}, denominada força sobre a broca, e um torque resistivo T_{bit}, denominado torque sobre a broca. Essas forças são descritas a seguir.

5.3.1
Modelo da Força sobre a Broca

Na coluna, supõe-se que exista uma força axial que atua sobre a broca. Essa força está formada por dois componentes: uma força estática e outra dinâmica. Usualmente, a força estática é chamada de peso sobre a broca ou *weight on bit* (WOB) e representa uma porcentagem, no caso de colunas verticais 80-85% do peso do comando [55]. Por outro lado, a força dinâmica é conseqüência do movimento axial da broca cônica. Supondo que são usadas brocas tri-cônicas, a expressão da força sobre a broca está definida como:

$$F_{bit} = WOB + F_0 \sin(3\phi_{zbit}) \tag{5-1}$$

nessa equação, ϕ_{zbit} é a rotação da broca e F_0 é a amplitude da força dinâmica. F_0 é uma porcentagem da força estática e usualmente varia entre 0 e 15% [55]. Conseqüentemente $0 \leq \frac{F_0}{WOB} \leq 0,15$.

5.3.2
Modelo do Torque sobre a Broca

Para o movimento torsional, um modelo de torque resistivo que atua sobre a broca é especificado, tal que possa descrever o movimento de *stick-slip* na sua forma mais elementar. O torque resistivo, usualmente conhecido como torque sobre a broca T_{bit}, representa a resistência da formação a ser destruída. Resultados experimentais obtidos por Wolf [13] mostram que durante o processo de perfuração existem torques negativos, que muitas vezes tendem a desenroscar os componentes da coluna.

Para a descrição do T_{bit}, usa-se o modelo proposto por Yigit et al. [43]. Esse modelo depende da força axial sobre a broca F_{bit} e da função de atrito $f(\dot{\phi}_{zbit})$. A função de atrito, extraída de Tucker et al. [31], representa a variação do atrito na interface broca-formação e é função da velocidade da broca $\dot{\phi}_{zbit}$:

$$T_{bit} = \mu_{bit} F_{bit} f(\dot{\phi}_{zbit}) \tag{5-2}$$

$$f(\dot{\phi}_{zbit}) = \tanh(\dot{\phi}_{zbit}) + \frac{\alpha_1 \dot{\phi}_{zbit}}{1 + \alpha_2 \dot{\phi}_{zbit}^2} \tag{5-3}$$

Nas equações acima, $\dot{(\ )} = \frac{\partial(\ )}{\partial t}$ representa a derivada em relação ao tempo e $\dot{\phi}_{zbit}$ é a velocidade angular da broca, as constantes α_1 e α_2 determinam a transição da região de atrito estático para o dinâmico [40]. A constante μ_{bit} é o fator de corte e depende do tipo de broca usado, por exemplo, $\mu_{bit} = 0,04$ para brocas cônicas [43]. A função contínua e não linear $f(\dot{\phi}_{zbit})$ é usada para representar a dependência do torque sobre a broca T_{bit} com a velocidade de rotação $\dot{\phi}_{zbit}$. Essa dependência é mostrada na Fig. 5.2 para diferentes valores de α_1 e α_2.

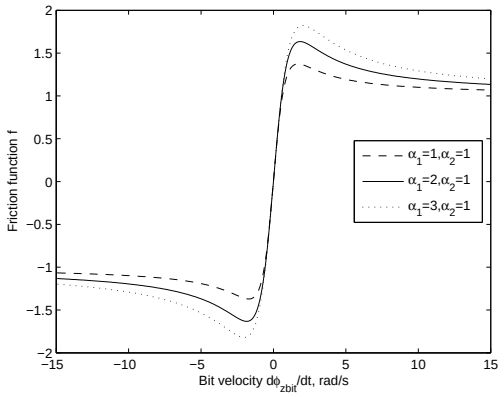

Figura 5.2: Função de atrito sobre T_{bit}.

5.4
Especificações da Coluna Direcional

Para a simulação numérica, considera-se uma coluna de perfuração direcional simplificada, mostrada na Fig. 5.3. A coluna está engastada na parte superior e, na parte inferior existem forças concentradas (F_{bit} e T_{bit}) que atuam na broca. Essa configuração foi projetada com a ajuda do Eng. João Carlos Ribeiro Plácido do CENPES-PETROBRAS, e é usada para mostrar a performance da viga de Cosserat.

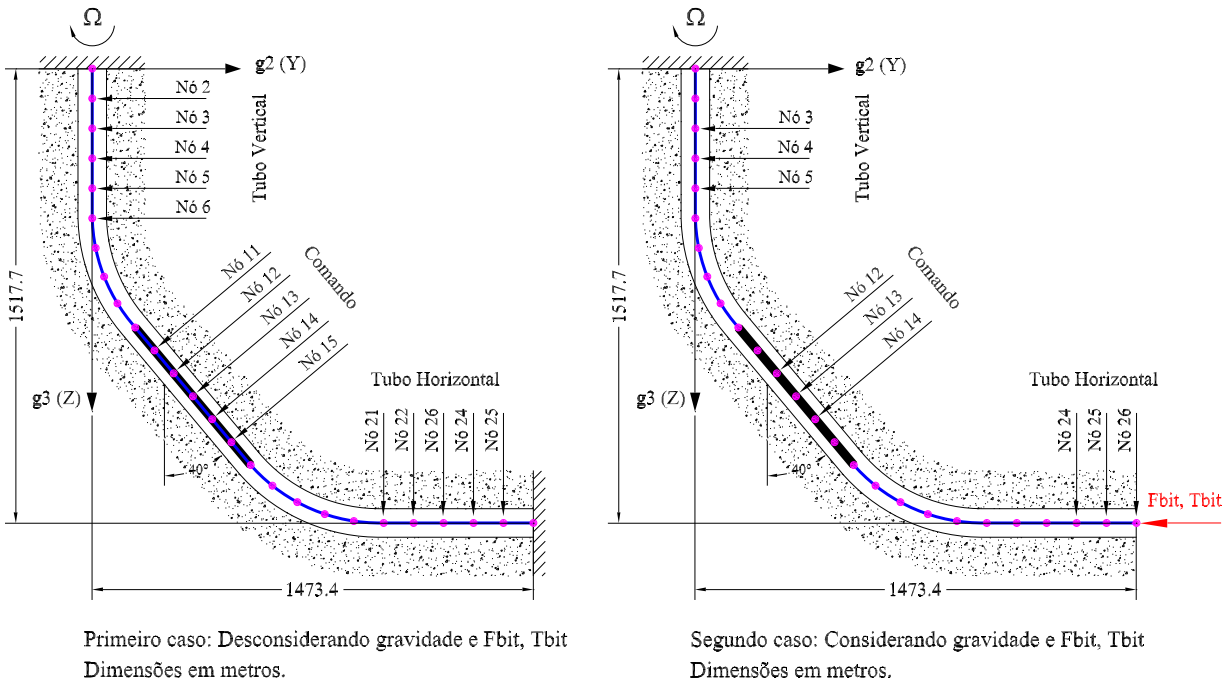

Figura 5.3: Coluna direcional simplificada.

A simulação numérica é realizada para uma coluna de comprimento total $L = 2500m$. A coluna, que é dividida em 25 elementos iguais, está girando a uma velocidade constante $\Omega = 50RPM$ $(5,236rad/s)$ e está contida em um poço de diâmetro uniforme $0,2168m$; o material da coluna e da parede do poço é aço. Outras propriedades mecânicas e geométricas do sistema são: A densidade e o módulo de Young do aço são assumidos como $\rho = 7850kg/m^3$ e $E = 2,1 \times 10^11N/m^2$, respectivamente. Para o impacto assume-se que $Kc = 1,0 \times 10^8N/m$ e $Cc = 0,1Ns/m$, também, $\mu = \{0,1,\ 0,2\}$ são usados como coeficientes de atrito entre a coluna e a parede do poço.
Especificações do tubo de perfuração: $L_p = 1900m, D_o = 0,127m, D_i = 0,1084m$.

Especificações do comando: $L_c = 600m, D_o = 0,1714m, D_i = 0,0762m$. Sendo D_o e D_i os diâmetros externo e interno, respectivamente.

5.5 Simulações Numéricas

Nesta secção são realizadas simulações numéricas da resposta dinâmica do sistema não linear para duas condições de contorno da coluna de perfuração. No primeiro caso, assume-se que os extremos superior e inferior da coluna estão engastados, já no segundo caso, considera-se que o extremo inferior da coluna está sobre a ação das forças F_{bit} e T_{bit}. Nas simulações numéricas, considera-se que a coluna está girando a velocidade constante de $\Omega = 50rpm$ e existe uma excentricidade $e_0 = 0,01m$ uniforme ao longo da coluna. Também, o tamanho do passo escolhido para a simulação é considerado como $\Delta t = 0,001s$ e todas as condições iniciais são consideradas nulas. Por outro lado, quando as forças de gravidade são consideradas, elas são aplicadas gradativamente até chegar à configuração estática deformada; depois de atingida essa configuração, impõe-se uma aceleração constante até alcançar a velocidade de rotação da coluna preestabelecida. Finalmente, as forças que atuam na broca são aplicadas gradualmente. Essas etapas são melhor entendidas observando a Fig. 5.9. A estratégia de carregamento descrita acima é usada para representar realisticamente o processo de operação da coluna de perfuração.

5.5.1 Primeiro Caso: Ambos Extremos Engastados

Para esta primeira simulação não se considera o efeito da gravidade nem as forças sobre a broca. Isto ajudará à compreensão da resposta dinâmica do sistema. No entanto, existem forças geradas pelo desbalanceamento e forças de impacto.

As Figs. 5.4 e 5.5 mostram o registro temporal dos deslocamentos e rotações para diferentes nós. Nessas figuras é possível observar as freqüências internas devidas à não linearidade do sistema. Além disso, também observam-se freqüências da excitação externa. Outro fato a ser observado é a variação angular torsional para os diferentes nós. As curvas revelam que aqueles nós mais afastados dos engastes são os que sofrem maior variação angular, p. ex., a máxima variação angular do nó 22, Fig. 5.5, está em torno de $\Phi_y(t) \approx 1,4rad$ [80°].

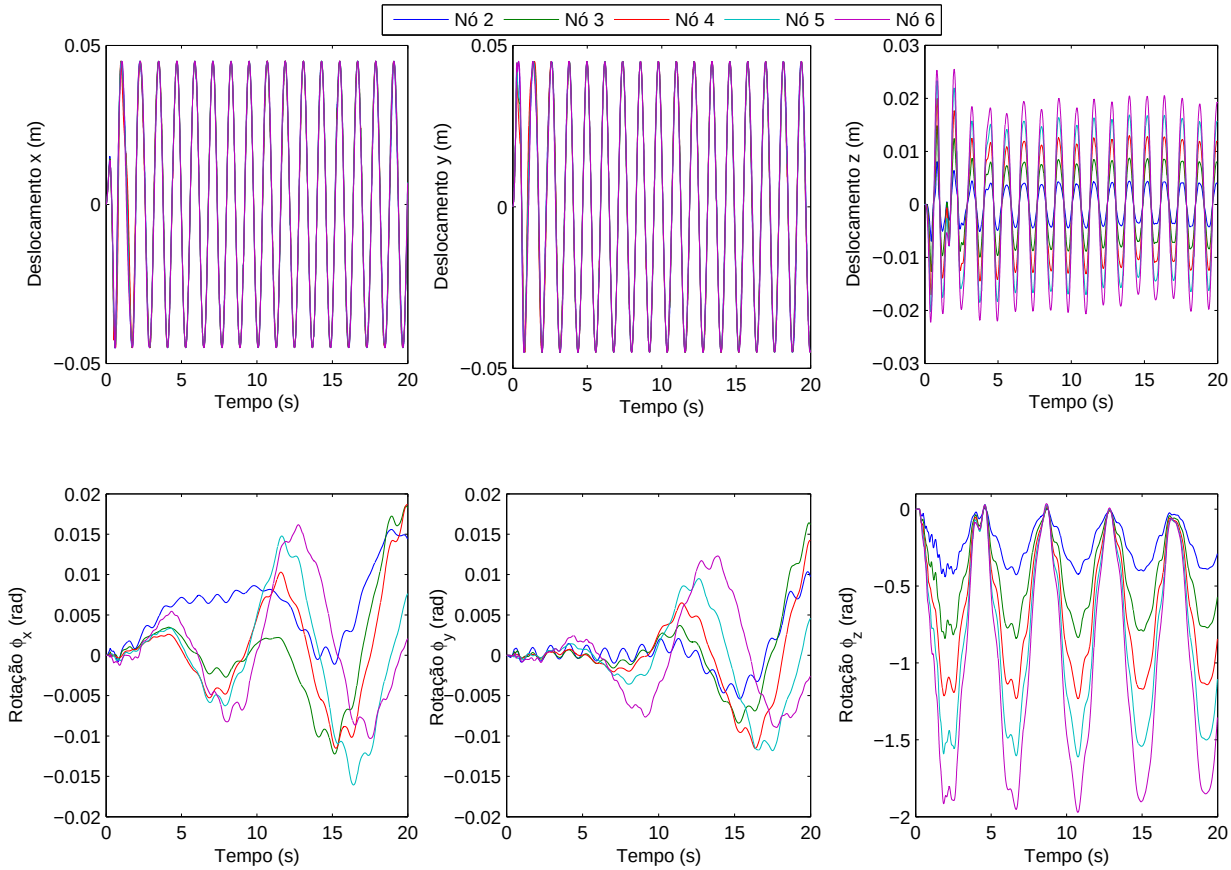

Figura 5.4: Deslocamentos e rotações para $\mu = 0,1$.

Uma outra forma de mostrar os resultados, ainda mais interessante e fácil de interpretar, é através das órbitas da secção transversal, como aquelas da Fig. 5.6. Nessas figuras estão mostradas as órbitas dos nós do tubo vertical, do comando e do tubo horizontal (Ver Fig. 5.3). A órbita do comando foi obtida projetando os deslocamentos no plano da secção transversal, ou seja: $Proj = Y\sin(40°) - Z\cos(40°)$. Os resultados mostrados são coerentes, porque as órbitas dos nós não podem ultrapassar a parede do poço. O deslocamento máximo dos nós do tubo é limitado pela folga $\delta_{tubo} = \frac{\emptyset_{poco} - \emptyset_{tubo}}{2} = 0,0449m$ e para os nós do comando através da folga $\delta_{comando} = \frac{\emptyset_{poco} - \emptyset_{comando}}{2} = 0,0227m$; esses resultados podem ser conferidos observando as órbitas da Fig. 5.6. Outra característica a ser observada é o sentido de rotação dos nós nas órbitas: depois de um período intermitente de impactos, o tubo (comando) atinge a parede do poço e todos os nós do tubo (comando) giram na mesma direção, ou seja, os nós realizam precessão direta.

Outro resultado importante da modelagem são as forças de impacto normal. As forças que resultam da interação da coluna com a parede do

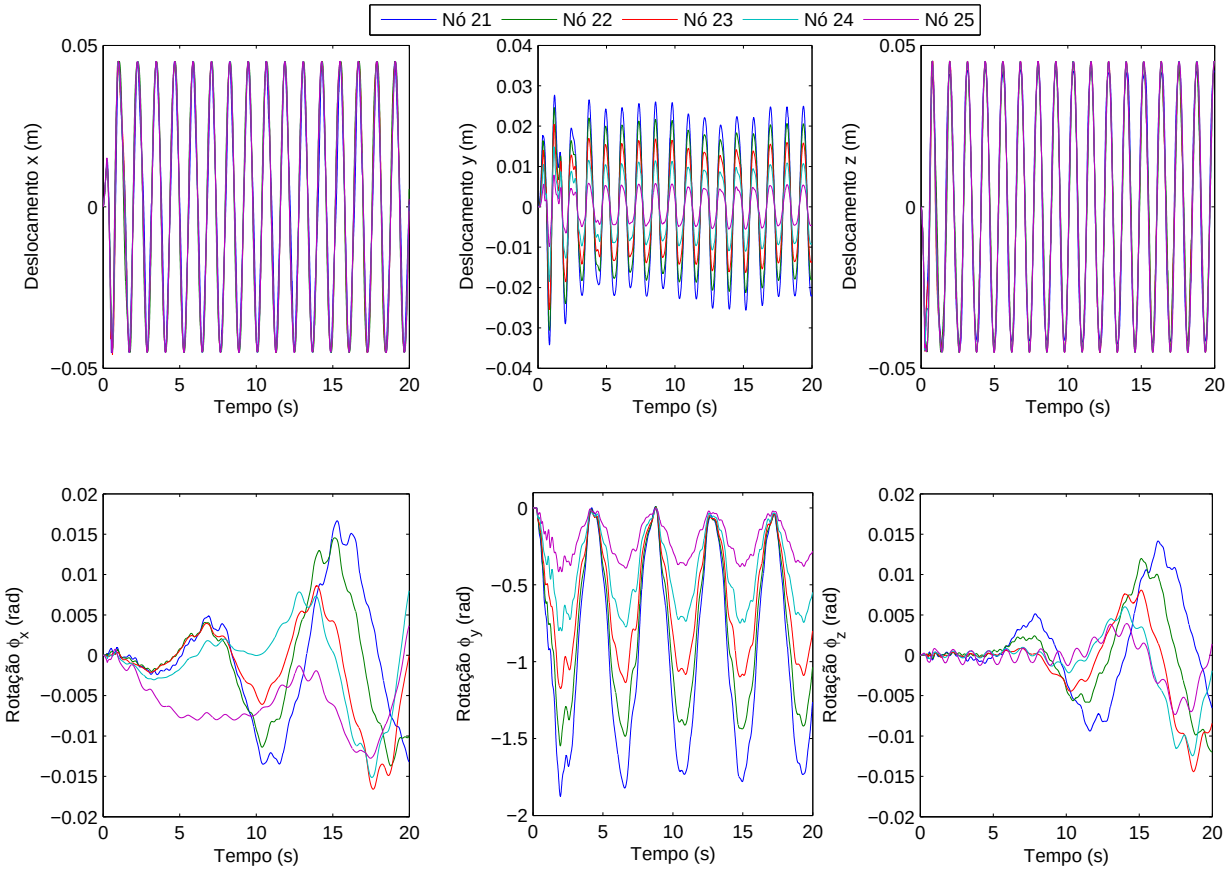

Figura 5.5: Deslocamentos e rotações para $\mu = 0,1$.

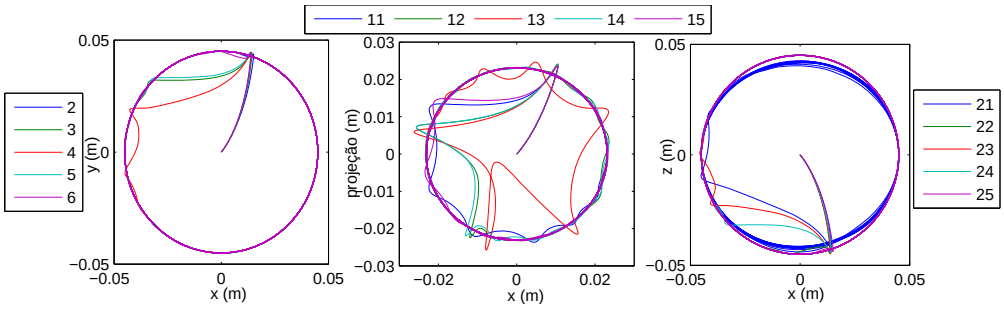

Figura 5.6: Órbitas de vários nós (Fig. 5.3-esquerda) quando $\mu = 0,1$.

poço podem ser observadas na Fig. 5.7. Nessas curvas exprimem-se as forças normais para o tubo e para o comando, sendo que a intensidade das forças no comando são maiores que no tubo. Quando a coluna encosta na parede do poço, observa-se que o valor médio das forças no tubo e no comando são $\approx 1,5 \times 10^4 N$ e $\approx 5 \times 10^4 N$, respectivamente. Nas curvas também é possível notar que as forças variam harmonicamente segundo a velocidade de rotaçao da coluna.

Todos os resultados mostrados acima foram obtidos usando os

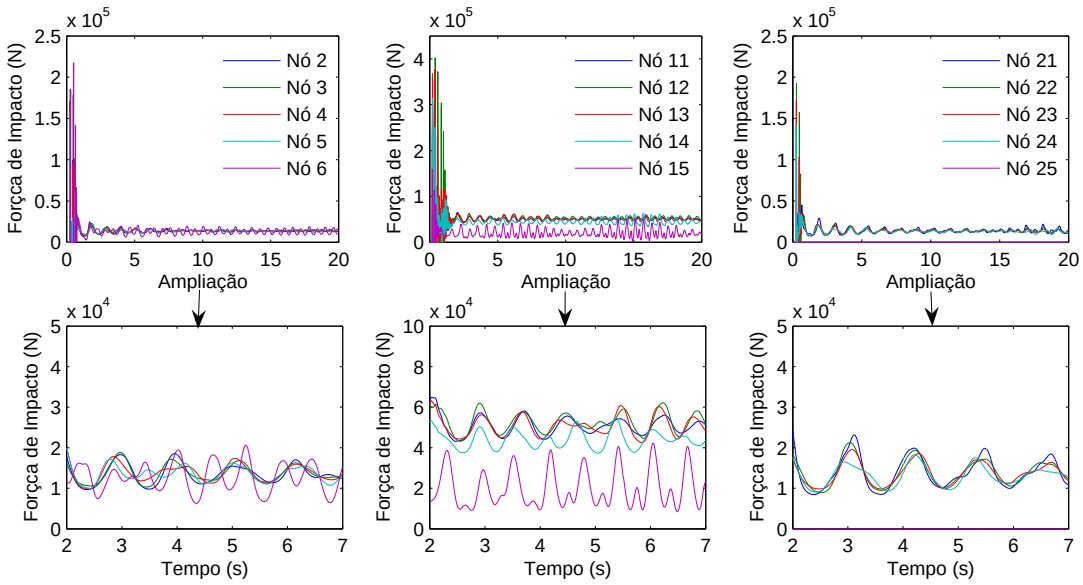

Figura 5.7: Forças de impacto para $\mu = 0.1$

parâmetros indicados anteriormente e usando um coeficiente de atrito baixo $\mu = 0,1$. Mas, será que aumentando esse valor para $\mu = 0,2$ a dinâmica do sistema sofrerá alterações drásticas?. Essa questão é respondida observando as órbitas do tubo e do comando, mostradas na Fig. 5.8. Essas órbitas mostram que o nó 13 do comando, depois do período de impactos, realiza precessão retrógrada e os outros nós precessão direta. A condição de precessão retrógrada é uma situação de instabilidade física e infelizmente o programa desenvolvido não consegue acompanhar o movimento posterior ao início da precessão retrógrada. Como conseqüência dessa falha, a órbita do nó 13 transfere-se, progressivamente, fora do limite da parede do poço, onde já não faz sentido continuar com a integração temporal. A precessão retrógrada é conseqüência do elevado valor do coeficiente de atrito, que tende a mudar o sentido da rotação da coluna. Esse tipo de comportamento de precessão direta/retrógrada é comum em problemas de dinâmica de rotores interagindo com o estator, p. ex., no trabalho de Liebich [35] podem-se encontrar resultados de precessão retrógrada que caem fora da órbita permissível. Vale ressaltar que os resultados numéricos obtidos da simulação foram apresentados no ECCM-2006 [68].

5.5.2
Segundo Caso: Um Extremo Engastado e o Outro Excitado por Forças

Uma coluna de perfuração real está atuada por varios tipos de forças e, nesta secção, são levadas em conta as forças sobre a broca e o peso próprio

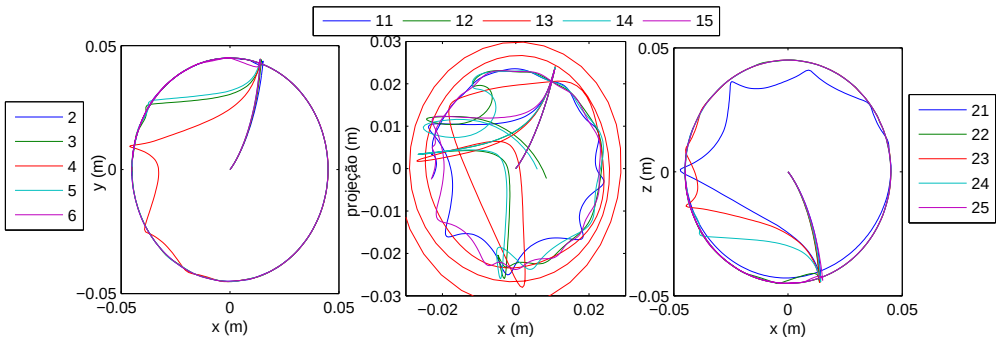

Figura 5.8: Órbitas de vários nós (Fig. 5.3-esquerda) quando $\mu = 0,2$.

da coluna; as forças que agem na broca são o F_{bit} e T_{bit}, discutidas anteriormente. Para as simulações numéricas, adotam-se os seguintes valores: $\mu = 0,1$ para o coeficiente de atrito, $WOB = 1000N$ para o peso sobre a broca e $F_0 = 0,1WOB$ (ver Eq. 5-1), $\mu_{bit} = 0,04$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ para os parâmetros do torque sobre a broca (ver Eq. 5-2). Para que a simulação numérica represente uma operação real do processo de perfuração, os carregamentos na coluna, Fig. 5.9, são aplicados gradativamente.

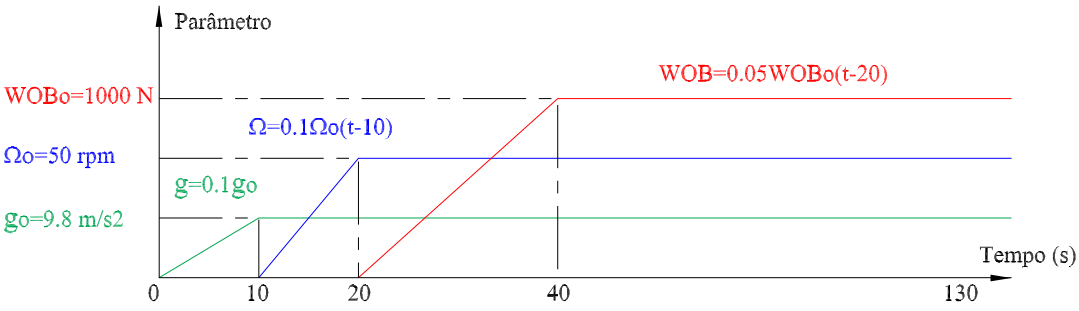

Figura 5.9: Carregamento gradativo sobre o sistema.

Da simulação numérica realizada para um período de 130s, obtêm-se vários resultados, entre eles: deslocamentos e rotações, órbitas e forças de impacto para diferentes seções da coluna.

Os registros temporais dos deslocamentos e rotações, referidos ao sistema de coordenadas inercial X, Y, Z, para diferentes seções da coluna de perfuração, são mostrados nas Figs. 5.10 e 5.11. Dessas figuras, percebe-se que o valor de equilíbrio de deslocamento do nó 5 é $Z(t) \approx 0,5m$ e do nó 26 é $Y(t) \approx 0,95m$. É necessario notar que os nós alinhados com a direção Y, nós 24, 25 e 26 da Fig. 5.3, possuem o mesmo deslocamento $Y(t)$ na Fig. 5.11. Isso é porque a força de gravidade não possui componentes na direção Y e o deslocamento devido ao WOB parece ser mínimo.

Por outro lado, devido ao torque resistivo imposto pela força de atrito entre a coluna e a parede do poço, existe uma forte variação do ângulo de torção $\Phi_y(t)$ do nó 26 em torno do valor de equilíbrio $\Phi_y(t) \approx -0,08rad$, Fig. 5.11. Se compararmos as variações angulares $\Phi_y(t)$ e $\Phi_z(t)$ dos diferentes nós, o efeito do T_{bit} pode ser observado no nó 26, o qual reconhece-se pela vibração de alta freqüência que acompanha a $\Phi_y(t)$ e $\Phi_z(t)$.

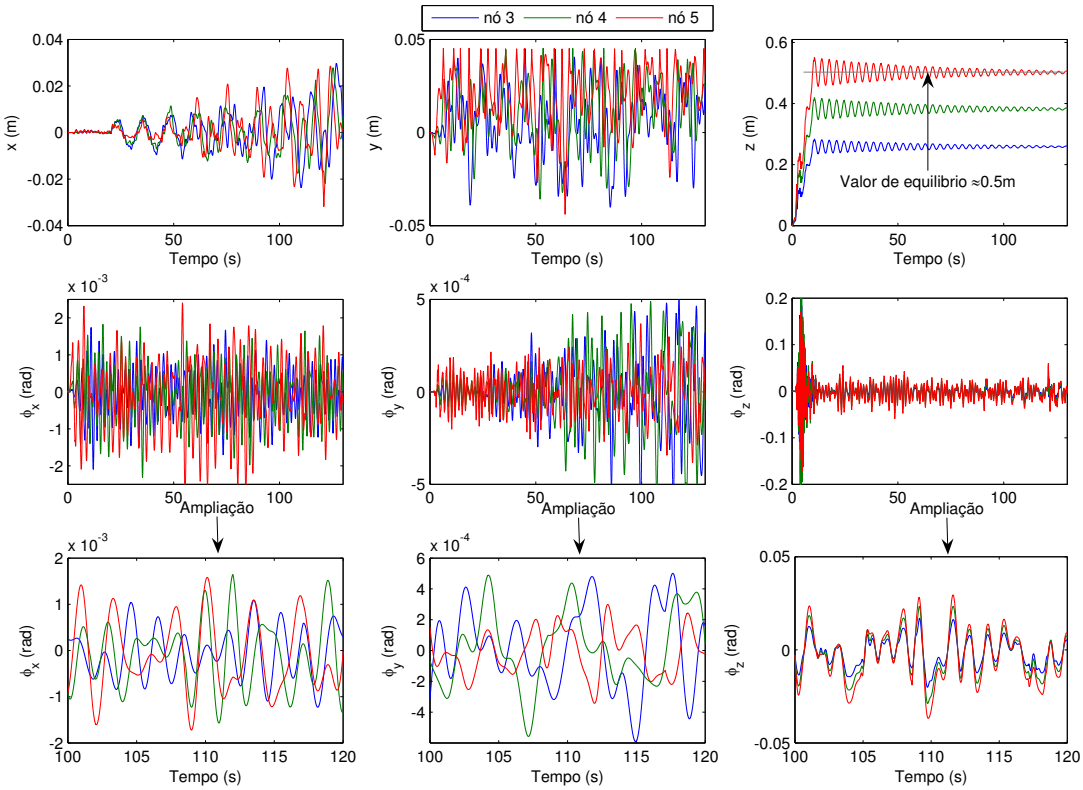

Figura 5.10: Deslocamentos e Rotações (Fig. 5.3-direita) quando $\mu = 0,1$.

A interpretação dos deslocamentos $X(t), Y(t)$ da Fig. 5.10 e $X(t), Z(t)$ da Fig. 5.11 é melhor realizada observando as órbitas da Fig. 5.12.

As órbitas mostram que a posição inicial da coluna é o centro geométrico do poço. Quando a força de gravidade começa a atuar, a coluna cai até atingir a parede do poço; os primeiros nós que chocam contra a parede são do comando, sucedidos pelos nós do tubo horizontal e depois aqueles do tubo vertical. Essa sucessão dos impactos pode ser observada na Fig. 5.13.

Observando as órbitas do comando e do tubo horizontal, percebe-se que posteriormente ao período de impactos, o comando e tubo horizontal ficam encostados na parede do poço e, mesmo impondo uma rotação Ω à coluna, eles continuam nessa posição. Esse tipo de comportamento só pode ser característico para colunas curvas. Por outro lado, o mesmo

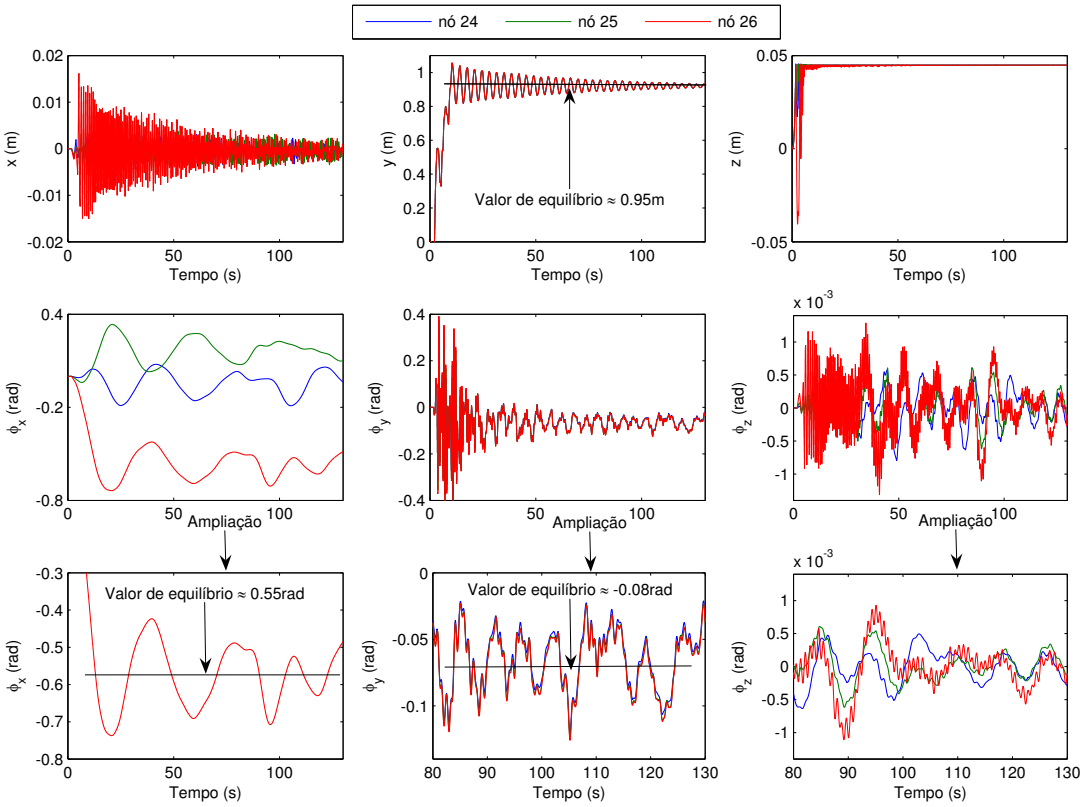

Figura 5.11: Deslocamentos e Rotações (Fig. 5.3-direita) quando $\mu = 0,1$.

não ocorre para o tubo vertical, nas órbitas observa-se que ele impacta continuamente. Outros parâmetros importantes do sistema analisado são as forças de impacto normais. Essas forças, entre a coluna e a parede do poço, são mostradas na Fig. 5.13. A duração do impacto é aproximadamente $\approx 0,03$s, esse tempo depende principalmente dos parâmetros de contato e a forma parabólica [41] é característica quando se emprega $Cc < 1$. A título de exemplo, o valor da força de impacto do nó 26 é da ordem $F_n(t) \approx 1000N$.

Finalizando, as equações do movimento do sistema estão totalmente acopladas pelos termos não lineares. Como consequência disso, os resultados numéricos mostram freqüências internas introduzidas pelas não linearidades. As respostas também mostram freqüências externas $(n \times \Omega,\ n = 1, \cdots)$ porque a excitação externa é periódica (forças de desbalanceamento).

5.5.3 Comentários Gerais

O exemplo apresentado acima é um sistema de muita importância na área de perfuração. Os resultados obtidos de forças, deslocamentos e órbitas possuem um sentido lógico. Infelizmente, não existe nenhuma bibliografia que faça referência ao estudo dinâmico desse tipo de sistema, especialmente

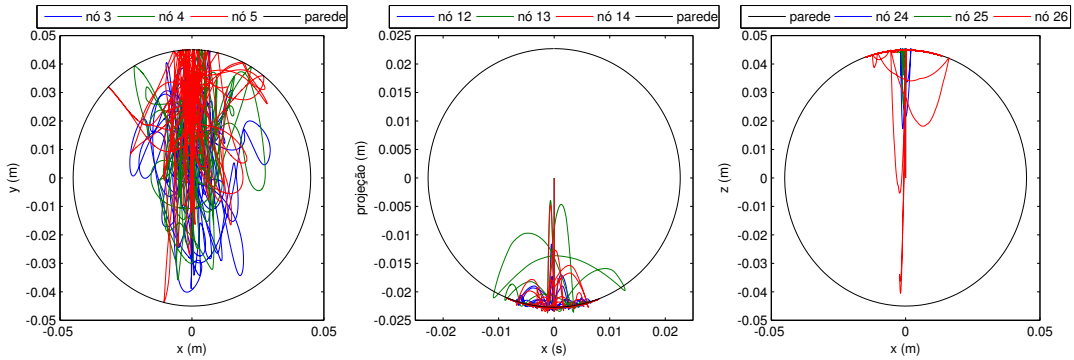

Figura 5.12: Órbitas para os tubos e o comando.

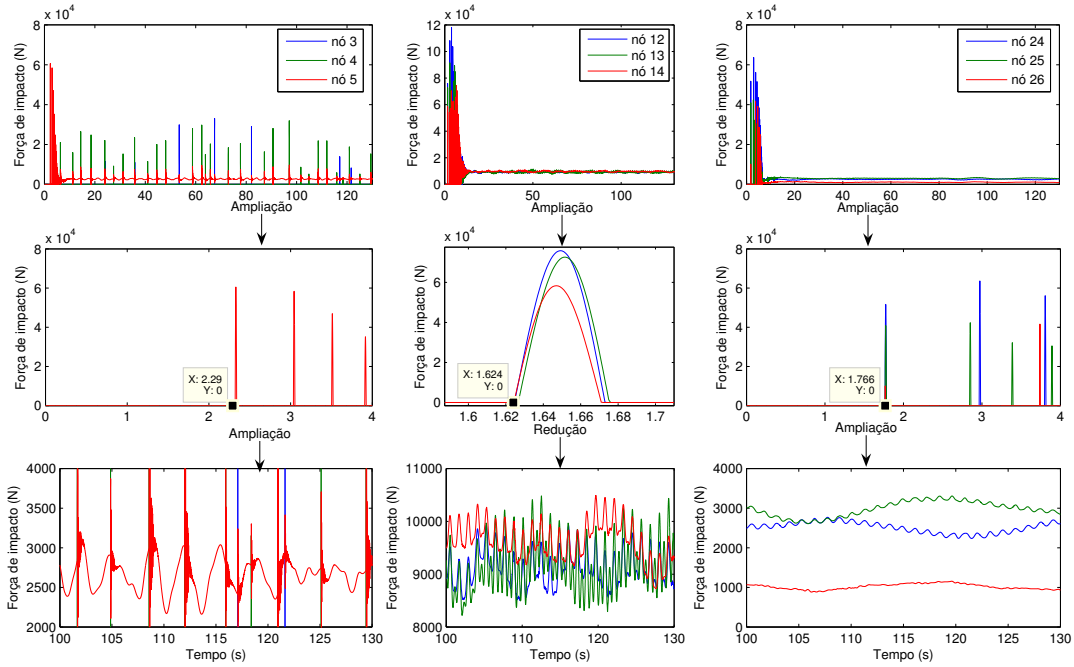

Figura 5.13: Forças de impacto nos tubos e no comando.

relacionado às forças que atuam na broca. No entanto, espera-se que as informações de força e torque na broca, a serem obtidos de uma bancada experimental montada na CSIRO-Austrália pelo Dr. L. F. Penna Franca, sirvam como dados de entrada para o sistema e que, aliados à teoria de Cosserat desenvolvida neste trabalho, serão valiosas para uma simulação mais próxima à realidade.

6
Conclusões, Dificuldades Encontradas e Trabalhos Futuros

6.1
Conclusões

- Para a modelagem tridimensional da dinâmica de estruturas esbeltas a teoria de Cosserat foi proposta.
- A modelagem leva em conta a exata relação cinemática não linear e são considerados os efeitos das deformações de torção, axial e de flexão.
- São escolhidas como funções de deslocamento as soluções aproximadas das equações de equilíbrio estático. Essas funções de deslocamento estão em função dos deslocamentos e das rotações nodais.
- Usando o princípio de Hamilton, as equações do movimento para um elemento de viga, denominada viga de Cosserat, foram obtidas. A viga de Cosserat possui rotação própria. Consequentemente, os efeitos giroscópicos são levados em conta.
- A solução da dinâmica de vários sistemas mecânicos foi encontrada, numérica e experimentalmente, entre elas: a dinâmica de uma viga fina com vibroimpacto e a dinâmica de uma haste de silicone confinada em um tubo curvo.
- Como aplicação da performance da técnica usando a viga de Cosserat, uma coluna de perfuração curva, simplificada, foi simulada numericamente.
- Os resultados numéricos revelam que a dinâmica da coluna depende fortemente do coeficiente de atrito e da folga radial.

6.2
Dificuldades Encontradas no Desenvolvimento do Trabalho

O objetivo da tese foi o estudo da dinâmica de colunas de perfuração curvas. O estudo de estruturas curvas implica no uso de elementos intrinsecamente curvos, ou seja, elementos de viga curvos. Achar as funções de deslocamentos de uma viga curva (que possui torção e curvatura), usando o método de perturbação, foi difícil e infelizmente não foi desenvolvido neste trabalho. Por algum motivo, ainda desconhecido, o programa empregado para a solução simbólica, Maple, só consegue resolver a equação de equilíbrio estático quando o elemento é inicialmente reto. Sendo assim, a alternativa usada foi considerar que a coluna de perfuração curva está constituída por elementos de viga, inicialmente retas. Na literatura, existe um trabalho recente muito interessante, realizado por Shömer [63], para a modelagem estática de estruturas finas. Nesse trabalho, ele consegue resolver a deformação estática de uma viga curva, considerando torção e curvatura inicial; mas, na parametrização das rotações ele usa quaternions [51] ao invés de rotações consecutivas. Contudo, é necessário ressaltar que o sistema estudado por Shömer é um problema estático e isto torna o problema menos difícil.

A viga de Cosserat desenvolvida neste trabalho fornece a dinâmica dela no espaço considerando as não linearidades geométricas, os efeitos giroscópicos devidos à rotação própria e, além disso, a viga pode impactar. No entanto, como o foco de estudo do presente trabalho é uma coluna de perfuração, que está contida numa superfície, o movimento da coluna está restrito a pequenos deslocamentos, entretanto, se a coluna não está confinada, ela pode realizar grandes deslocamentos. Existem vários trabalhos muito interessantes, especialmente cita-se os trabalhos de Simo e Vu-Quoc [14, 15, 17], que tratam de grandes rotações e grandes deslocamentos de sistemas flexíveis no espaço.

No exemplo numérico e experimental da viga curva rotativa, usou-se uma haste de silicone. A haste de silicone não é um material usual para experimentação na área de vibrações ou dinâmica. Conseqüentemente, suas propriedades mecânicas e de contato são quase um segredo. Para contornar esse problema, foi necessário realizar alguns testes experimentais e valer-se de resultados obtidos por pesquisadores de outras áreas.

Outra dificuldade encontrada, no capítulo 5, está relacionada com as forças que atuam na coluna de perfuração. Infelizmente existe pouca, por não dizer nenhuma, literatura disponível relacionada com colunas de

perfuração curvas. Mas isso foi contornado usando as forças que atuam nas colunas de perfuração vertical.

6.3 Trabalhos Futuros

Na área de estruturas flexíveis esbeltas existe muita coisa para ser realizada. Poder-se-ia começar resolvendo aqueles problemas citados no item anterior. Por outro lado existem outros temas que poderiam ser abordados, por exemplo:

- Realizar simulações numéricas da viga desconsiderando o tubo. Esse seria o caso de grandes deslocamentos/rotações.
- Usar algum método para achar a dinâmica reduzida do sistema, p. ex. Redução de Karhunen-Loève.
- Usar a teoria de controle para diminuir as vibrações que são prejudiciais na coluna de perfuração.
- Além disso, a partir da viga de Cosserat desenvolvida é possível estudar a dinâmica de MEMS [52], a dinâmica de nanotubos de carbono [61]. Da mesma forma, usando o contínuo de Cosserat unidimensional pode-se estudar estruturas de DNA [53], o comportamento dinâmico do movimento flagelar de bactérias [42] e inclusive estudar o movimento caótico de mangueiras flexíveis que conduzem água sob pressão, esse seria um problema do tipo interação fluido-estrutura [24].

A
Parâmetros de Contato

A.1
Teoria de Contato de Hertz: Modelo Elástico Linear

Hà mais de cem anos atrás, Hertz (1882) estudou o crescimento da área de contato como uma função da força normal N aplicada, baseado num modelo elástico linear. Segundo Xydas et al. [38], Hertz levou a cabo experimentos usando lentes de vidro esféricas contra placas de vidro. Usando os resultados experimentais, concluiu que o raio de contato r_c é proporcional à força normal aplicada elevada à potência $\frac{1}{3}$, ou seja: $r_c \propto N^{\frac{1}{3}}$, o que é consistente com os resultados analíticos que derivou baseado no modelo elástico linear.

No caso mais simples, K_C e C_C podem ser considerados constantes, e o amortecimento de contato C_C sempre é expresso como um múltiplo da rigidez de contato: $C_C = \beta K_C$. Valores referenciais desses parâmetros para o aço são adotados como $K_C = 1 \times 10^8 N/m$, baseado na teoria de contato de Hertz, [44]. Também, o coeficiente de proporcionalidade entre a rigidez e o amortecimento de contato é assumido como $\beta = 1 \times 10^{-7} s$.

A.2
Lei da Potência: Modelo Elástico Não Linear

Este modelo é empregado para incluir materiais não lineares, como o silicone, por exemplo. A relação geral entre o raio de contato r_c e a força normal N aplicada é expressada através de [38]:

$$r_c \propto N^{\frac{n}{2n+1}} \tag{A-1}$$

sendo n um expoente de tensão (*strain-hardening factor*) que depende do material. Em geral $0 \leq n \leq 1$, porém, para materiais elásticos lineares $n = 1$ o que corresponde à teoria de contato de Hertz.

Quando o material da viga é silicone, os parâmetros K_C e C_C não podem ser considerados constantes. Um estudo experimental realizado por Hyun-Yong Han et al. [37] revela que a rigidez de contato do silicone satisfaz a seguinte equação:

$$K_C(x) = ax^b \tag{A-2}$$

sendo $a = 1,037$ e $b = 0,827$ parâmetros constantes encontrados por Hyun-Yong Han. Na Eq. (A-2) a rigidez está em N/mm e a penetração x em milímetros; para as simulações numéricas adota-se essa equação.

B
Características e Propriedades do Silicone

Os silicones são polímeros inorgânicos formados por um núcleo de silício e oxigênio (...-Si-O-Si-O-Si-O-...). Pela variação no tamanho dessa cadeia, pode-se manipular as características do material que podem variar desde uma consistência totalmente sólida, até um líquido viscoso. Para determinar o módulo de elasticidade do silicone, foram realizados testes experimentais de tração e de flexão, Fig. B.1. Essas propriedades foram calculadas usando as equações da deformação estática [7], em tração e em flexão, e são mostradas na Tab. 4.4. Além disso, a densidade e o coeficiente

Figura B.1: Provas de tração e flexão estática do silicone.

de atrito também foram calculados experimentalmente e os detalhes são explicados próximos parágrafos. Vale ressaltar que os valores obtidos estão dentro dos limites indicados por outras referências:

- Dow Corning.[1]
- Ides - The Plastic Web.[2]

[1] www.dowcorning.com/content/rubber/rubberprop/rubber_mechanical.asp
[2] www.ides.com/generics/Silicone/Silicone_typical_properties.htm

B.1
Cálculo das Propriedades do Silicone

As características do silicone usado para obter as propriedades mecânicas são: comprimento $0,3m$, diâmetro $11 \times 10^{-3}m$ e massa $m_s = 29 \times 10^{-3}kg$. O cálculo da densidade é direta e resulta: $\rho_s = \frac{m_s}{V} = 1017,2kg/m^3$

B.1.1
Rigidez à Flexão

A equação da flecha estática $f(x)$ de uma viga em balanço, com carga uniformemente distribuída $w_0 = \frac{m_s g}{L} = 0,9483N/m$ está dada através de [7]:

$$f(x) = \frac{w_0 x^2}{24EI}(x^2 + 6L^2 - 4Lx)$$

A flecha máxima da viga resulta $f(x = L) = \frac{w_0 L^4}{8EI}$. No teste, com $L = 0,26m$, a flecha máxima medida resulta $0,048m$, Fig. B.1, com isso: $EI = 1,13 \times 10^{-2}N$.

B.1.2
Rigidez à Tração

Um teste simples é realizado para obter a rigidez à tração, Fig. B.1, e os dados obtidos são mostrados na Tab. B.1. A deformação estática axial

Tabela B.1: Teste de tração do silicone.

Deslocamento (mm)	1,0	1,8	2,3	3,1	4,0	5,2
Massa (kg)	1,0	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0
Peso (N)	9,8	19,6	24,5	29,4	39,2	49,1

δ_s de uma barra L devido ao peso P está dada por: $\delta_s = \frac{PL}{EA}$. Logo, usando o gráfico da Fig. B.2, obtém-se $\frac{EA}{L} = 9810N/m$. Conseqüentemente a rigidez axial resulta: $EA = 1,02 \times 10^3 N$

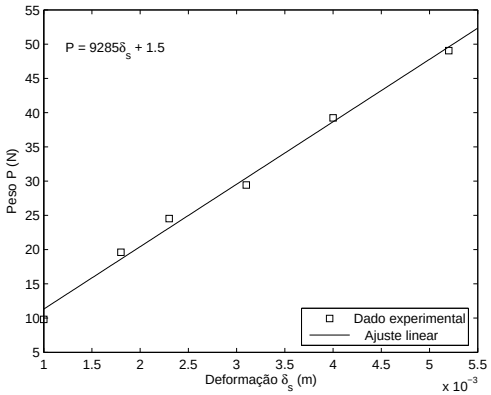

Figura B.2: Teste de tração do silicone.

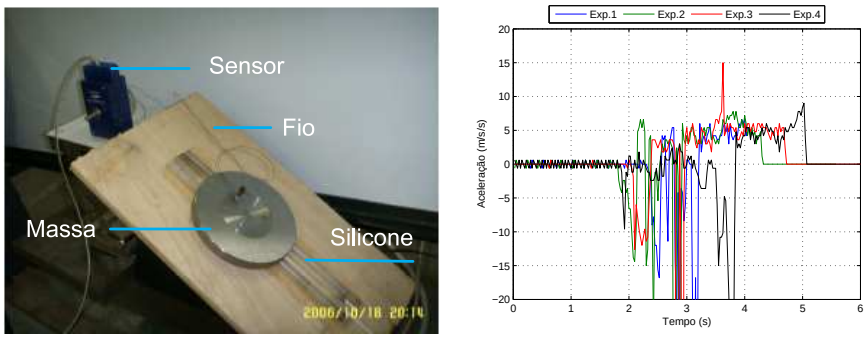

Figura B.3: Provas do plano inclinado.

B.2
Coeficiente de Atrito

Para obter o coeficiente de atrito estático μ_e, entre o silicone e uma superfície de cobre, realiza-se um simples teste, mostrado na Fig. B.3.

O valor do coeficiente de atrito correspondente à situação em que o corpo está na iminência de iniciar o seu movimento. Designa-se por coeficiente de atrito estático e pode ser calculado por: $\mu_e = \tan \alpha_c$. O ângulo crítico medido resulta $\alpha_c \approx 23,11°$, com isso: $\mu_e \approx 0,426$.

Para calcular o coeficiente de atrito cinético μ_c emprega-se a equação: $\sin \alpha_0 - \mu_c \cos \alpha_0 = \frac{a}{g}$. Essa equação resulta das equações do movimento de um corpo que se desliza sobre um plano inclinado que forma um ângulo $\alpha_0 > \alpha_c$ com a horizontal. A aceleração média a do disco, Fig. B.3, medida experimentalmente usando um sensor de rotação PASSPORT, resulta $a \approx 5m/s^2$ quando $\alpha_0 = 50°$. Com isso $\mu_c \approx 0,388$. O disco e o sensor de rotação estão unidos através de um fio de massa desprezível, sendo que o sensor mede a aceleração linear do disco no plano inclinado.

C
Estudo da Convergência

Quando se usam elementos finitos, é necessário estabelecer algum critério sobre a convergência dos resultados numéricos para determinar o número de elementos a serem usados na discretização. No modelo da viga em L, por exemplo, foram obtidos os modos de vibração e freqüências naturais usando diferentes números de elementos na discretização da viga. Portanto, é possível usar o critério das freqüências naturais para saber o número de elementos a usar satisfazendo um erro pré-estabelecido para as freqüências. No entanto, quando estudamos resposta no tempo, o critério das freqüências naturais não é a mais adequada e neste trabalho adota-se o critério sugerido por Sampaio [62].

Para conseguir uma boa aproximação da resposta dinâmica de um sistema é necessária uma medida de convergência, e uma medida da convergência pode ser obtida através do erro relativo, entre uma discretização grosseira e uma fina [62]. Essas medidas do erro, para deslocamentos e/ou velocidades, são computadas em uma posição definida s_d e em um instante dado t_d, ou seja:

$$\begin{aligned} \%erro_{deslocamento} &= 100\left|\frac{des(s_d,t_d)_{grossa} - des(s_d,t_d)_{fina}}{des(s_d,t_d)_{fina}}\right| \\ \%erro_{velocidade} &= 100\left|\frac{vel(s_d,t_d)_{grossa} - vel(s_d,t_d)_{fina}}{vel(s_d,t_d)_{fina}}\right| \end{aligned}$$

sendo: $des = deslocamento$ e $vel = velocidade$.

A Fig. C.1 mostra a resposta dinâmica para o nó 29 do silicone (caso **b)**) usando vários elementos.

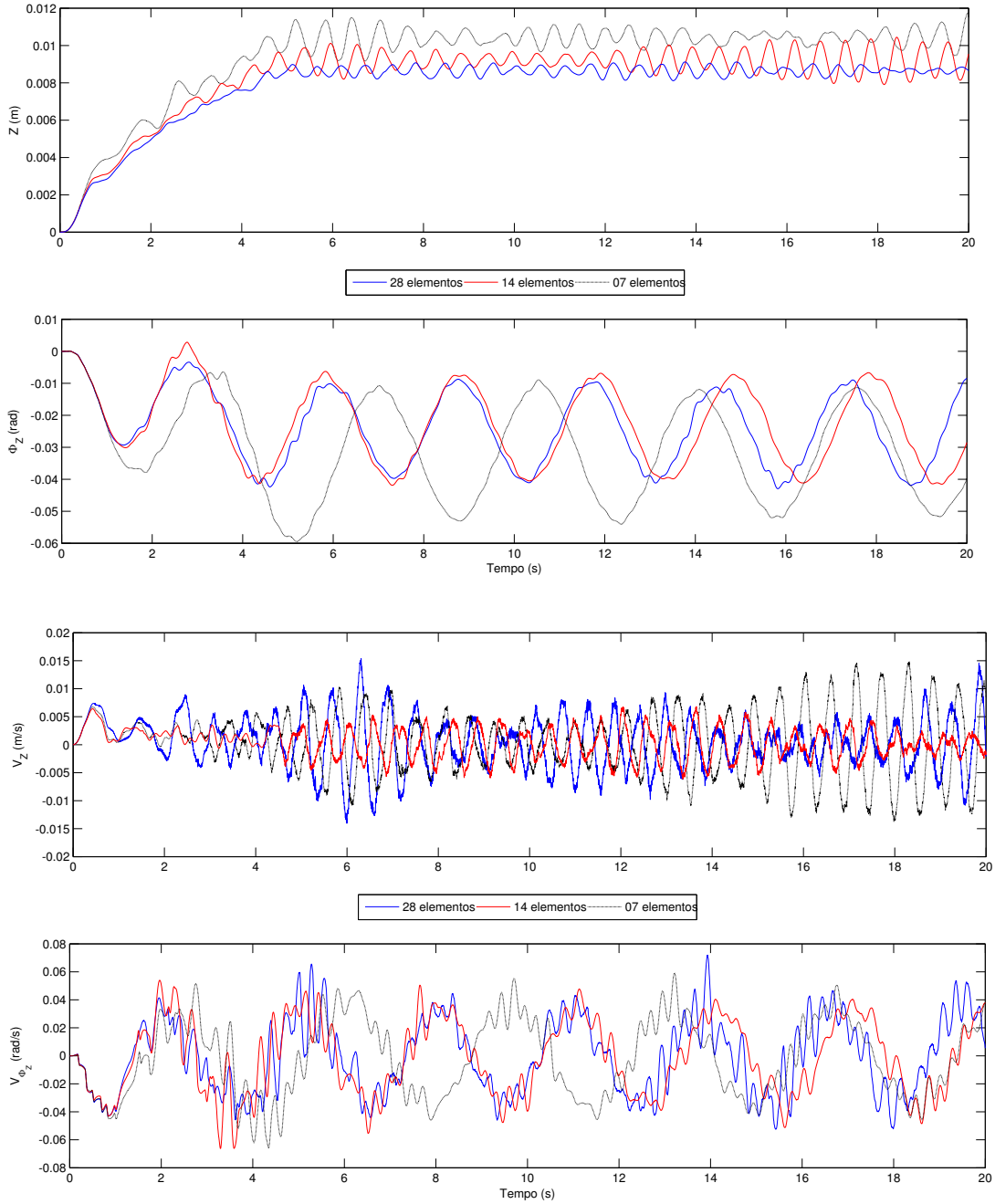

Figura C.1: Resposta dinâmica para vários elementos, caso **b)**.

D
Deslocamentos e Velocidades Virtuais

D.1
Deslocamento virtual

Supondo que uma partícula descansa sobre uma superfície $F(x, y, z) = 0$ num ponto A, e somente pode movimentarse sobre essa superfície, Fig. D.1. Se a partícula se desloca até um ponto B, também na superfície, esse deslocamento é chamado de deslocamento possível, em caso contrário chama-se deslocamento impossível.

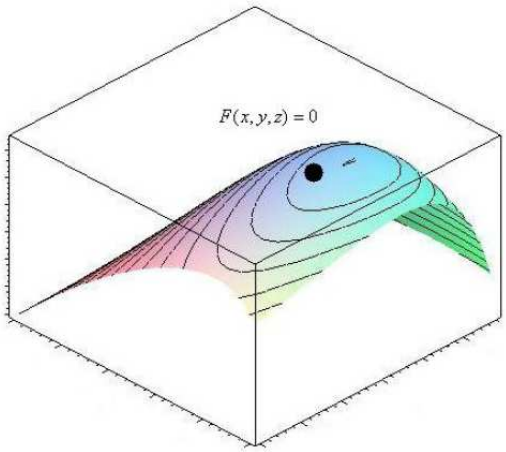

Figura D.1: Movimento de uma partícula sobre uma superfície.

Logo, se a partícula tem uma velocidade $\mathbf{v}$, essa velocidade é chamada de velocidade possível se a partícula se movimenta sobre a superfície, em caso contrario chama-se de velocidade impossível. Portanto, as velocidades possíveis são tangentes à superfície no ponto A .

Finalmente, aqueles deslocamentos que são proporcionais às velocidades possíveis num ponto A, são chamados de deslocamentos virtuais nesse mesmo ponto. Um deslocamento virtual, portanto, tem direção tangente à superfície, mas com uma orientação e magnitude arbitrária. Da Eq. da superfície $F(x, y, z) = 0$, derivando em relação ao tempo:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial F}{\partial z}\dot{z} = 0 \tag{D-1}$$

e representando a velocidade como $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix}^T$ e o vetor gradiente como $\nabla F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial t} & \frac{\partial F}{\partial t} & \frac{\partial F}{\partial t} \end{bmatrix}^T$, a Eq. D-1 fica:

$$\mathbf{v}^T \nabla F = 0 \tag{D-2}$$

portanto, a Eq. D-2 indica que a velocidade é perpendicular à normal da superfície (∇F).

Adotando a notação $\delta\mathbf{s}$ para representar um deslocamento arbitrário do ponto A, e $\delta\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \end{bmatrix}^T$ as projeções desse deslocamento sobre os eixo coordenados, o deslocamento virtual, segundo a definição, é proporcional à possível velocidade $\mathbf{v}$. Portanto, $\delta\mathbf{s} = \mathbf{v}$ será um deslocamento virtual. Finalmente, as projeções do deslocamento virtual satisfazem a seguinte equação:

$$\delta\mathbf{s}^T \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0 \tag{D-3}$$

D.2
Velocidade virtual

São velocidades possíveis exatamente na direção em que o movimento do partícula material pode acontecer, ou seja, respeitando as equações de vínculo, i.e. pode-se movimentar somente sobre a superfície prescrita por $F(x, y, z) = 0$. A essas velocidades virtuais representamos como $\delta\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \delta\dot{x} & \delta\dot{y} & \delta\dot{z} \end{bmatrix}^T$ e também satisfazem a Eq. D-3:

$$\delta\dot{\mathbf{s}}^T \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\delta\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\delta\dot{y} + \frac{\partial F}{\partial z}\delta\dot{z} = 0 \tag{D-4}$$

Bibliografia

[1] BANACH, S.. **Mechanics**. Warszawa - Wroclaw, 1951.

[2] NEWMARK, N. M.. **A method of computation for structural dynamics**. Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, 85:67–94, 1959.

[3] CUNNINGHAM, R. A.. **Analysis of downhole measurements of drill string forces and motions**. Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, p. 208–216, May 1968.

[4] DAREING, D. W.; LIVESAY, B. J.. **Longitudinal and angular drill-string vibrations with damping**. Journal Of Engineering For Industry, p. 671–679, 1968.

[5] MEIROVITCH, L.. **Methods of Analytical Dynamics**. McGraw-Hill, 1970.

[6] FONSECA, A.. **Curso de Mecânica - Dinâmica**. Livros Técnicos e Científicos, 1972.

[7] CRANDALL, S. H.; DAHL, N. C. ; LARDNER, T. J.. **An Introduction to the Mechanics of Solids**. McGraw-Hill, 1978.

[8] CHEUNG, Y. K.; YEO, M. F.. **A Practical Introduction to Finite Element Analysis**. PITMAN, 1979.

[9] BATHE, K. J.. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. Prentice-Hall, 1982.

[10] NAYFEH, A. H.. **Problems in Perturbation**. Wiley-Interscience, 1985.

[11] LALANNE, L.. **Rotordynamics**. Chapman and Hall, 1985.

[12] SMITH, G. D.. **Numerical Solution Of Partial Differential Equations: Finite Difference Method**. Oxford University Press, 1985.

[13] WOLF, S. F.; ZACKSENHOUSE, M. ; ARIAN, A.. **Field measurements of downhole drillstring vibration**. Drill ConferencePaper IADC/SPE 14330, Las Vegas, 1985.

[14] SIMO, J. C.. **A finite strain beam formulation. the three-dimensional dynamic problem. part i**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 49:55–70, 1985.

[15] SIMO, J. C.; VU-QUOC, L.. **A three-dimensional finite-strain model. part ii: Computational aspects**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 58:79–116, 1986.

[16] BRUEL-KJAER. **Structural testing part 2: Modal analysis and simulation**. http://www.bksv.nl/?ID=3618, 1988.

[17] SIMO, J. C.; VU-QUOC, L.. **On the dynamics in space of rods undergoing large motions - a geometrically exact approach**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 66:125–161, 1988.

[18] JANSEN, J. D.. **Whirl and chaotic motion of stabilized drill collars**. Society Of Petroleum Engineers, SPE 20930:435–448, 1992.

[19] JEI, Y. G.; LEE, C. W.. **Does curve veering occur in the eigenvalue problem of rotors?** Journal of Vibrations and Acustics, Trans. ASME, 114:32–36, January 1992.

[20] JANSEN, J. D.. **Nonlinear Dynamics of Oilwell Drillstrings**. PhD thesis, Delft University of Technology, 1993.

[21] DUNAYEVSKY, V. A.; ABBASSIAN, F. ; JUDZIS, A.. **Dynamic stability of drillstrings under fluctuating weight on bit**. SPE Drilling and Completion, p. 84–92, June 1993.

[22] CRISFIELD, M. A.; SHI, J.. **A co-rotational element/time-integration strategy for non-linear dynamics**. International Journal for numerical Methods in Engineering, 37:1897–1913, 1994.

[23] ANTMAN, S. S.. **Nonlinear Problems of Elasticity**. Springer-Verlag, 1995.

[24] STEINDL, A.; TROGER, H.. **Nonlinear three-dimensional oscillations of elastically constrained fluid conveying viscoelastic tubes with perfect and broken o(2)-symmetry**. Nonlinear Dynamics, 7(2):165–193, 1995.

[25] DYKSTRA, M. W.. **Nonlinear Drillstring Dynamics**. PhD thesis, The University of Tulsa, Oklahoma, 1996.

[26] YIGIT, A. S.; CHRISTOFOROU, A. P.. **Coupled axial and transverse vibrations of oilwell drillstrings,**. Journal of Sound and Vibration, 195(4):617–627, 1996.

[27] INMAN, D. J.. **Engineering Vibration**. Prentice-Hall Inc., 1996.

[28] RUBIN, M. B.. **An intrinsic formulation for nonlinear elastic rods**. Int. J. Solids Structures, 34:4191–4212, 1997.

[29] PAZ, M.. **Structural Dynamics**. Chapman and Hall, 1997.

[30] KHULIEF, Y. A.; MOHIUDDIN, M. A.. **On the dynamic analysis of rotors using modal reduction**. Finite Elements in Analysis and Design, 26:41–55, 1997.

[31] TUCKER, R. W.; WANG, C.. **The excitation and control of torsional slip-stick in the presence of axial vibration**. Lancsos University, 1997.

[32] DUNAYEVSKY, V. A.; ABBASSIAN, F.. **Application of stability approach to torsional and lateral bit dynamics**. SPE Drilling and Completion, p. 99–107, June 1998.

[33] YIGIT, A. S.; CHRISTOFOROU, A. P.. **Coupled torsional and bending vibrations of drillstrings subject to impact with friction**. Journal of Sound and Vibration, 215(1):167–181, 1998.

[34] SHABANA, A. A.. **Dynamics of Multibody Systems**. Cambridge University Press, 1998.

[35] LIEBICH, R.. **Rub induced non-linear vibrations considering the thermo-elastic effect**. 5th International Conference on Rotor Dynamics of the IFTOMM, Darmstadt, p. 802–815, 1998.

[36] TUCKER, R. W.; WANG, C.. **An integrated model for drill-string dynamics**. Journal of Sound and Vibration, (224):123–165, 1999.

[37] HYUN-YONG HAN, S. K.. **Analysis of stiffness of human fingertip and comparison with artificial fingers**. IEEE, 0-7803-5731, 1999.

[38] XYDAS, N.; KAO, I.. **Modeling of contact mechanics and friction limit surfaces for soft fingers in robotics, with experimental**

results. The International Journal of Robotics Research, 18(9):941–950, 1999.

[39] LEINE, R. I.. **Bifurcations in Discontinuous Mechanical Systems of Filippov-Type**. PhD thesis, Eindhoven University of Technology, The Netherlands, 2000.

[40] YIGIT, A. S.; CHRISTOFOROU, A. P.. **Coupled torsional and bending vibrations of actively controled drillstrings**. Journal of Sound and Vibration, 234(1):67–83, 2000.

[41] RAJALINGHAM, C.; RAKHEJA, S.. **Analysis of impact force variation during collision of two bodies using a single dof system**. Journal of Sound and Vibration, 229(4):823–835, 2000.

[42] WOLGEMUTH, C. W.; POWERS, T. R. ; GOLDSTEIN, R. E.. **Twirling and whirling: Viscous dynamics of rotating elastic filaments**. Physical Review Letters, 84(7):1623–1626, 2000.

[43] YIGIT, A. S.; CHRISTOFOROU, A. P.. **Active control of stick-slip vibrations: The role of fully coupled dynamics**. Society Of Petroleum Engineers, SPE 68093(1):167–181, 2001.

[44] ZAPOMEL, J.; FOX, C. H. J. ; MALENOVSKY, E.. **Numerical investigation of a rotor system with disc-housing impact**. Journal of Sound and Vibration, 243(2):215–240, 2001.

[45] GÉRADIN, M.; CARDONA, A.. **Flexible Multibody Dynamics**. John Wiley and Sons, 2001.

[46] PAI, D. K.. **Strands: Interactive simulation of thin solids using cosserat models**. Eurographics, 21(3), 2002.

[47] POLAK, M. A.; LASHEEN, A.. **Mechanical modelling for pipes in horizontal directional drilling**. Tunnelling and Underground Space Technology, 16(Supp. 1):S47–S55, 2002.

[48] BAZOUNE, A.; KHULIEF, Y. A. ; STEPHEN, N. G.. **Shape functions of three-dimensional timoshenko beam**. Journal of Sound and Vibration, 259(2):473–480, 2003.

[49] ALAMO, F. C.. **Dinâmica de um rotor vertical em balanço com impacto**. Master's thesis, PUC-Rio, 2003.

[50] HAIR, J. D.. **Analysis of theoretical vs actual hdd pulling loads**. ASCE, Pipelines 2003, Conference, 2003.

[51] WEBER, H. I.. **Rotações elementares, quaternions e soluções do problema inverso**. II Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações - Dincon 2003, S. J. dos Campos, SP-Brasil, 2003.

[52] LIU, D.; CAO, D. Q. ; WANG, C.. **Computational cosserat dynamics in mems components modeling**. Computational Mechanics, 2004. WCCM and APCOM'04, China.

[53] MADDOCKS, J. H.. **Mathematical Modelling of DNA**. École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland, 2004.

[54] CHEN, S.. **Linear and Nonlinear Dynamics of Drillstrings**. PhD thesis, Université de Liège, Belgium, 2004.

[55] FRANCA, L. F. P.. **Perfuração Percusiva-Rotativa Auto-Excitada Em Rochas Duras**. PhD thesis, PUC-Rio, 2004.

[56] BENECKE, S.; VAN VUUREN, J. H.. **Modelling torsion in an elastic cable in space**. Applied Mathematical Modelling, 29:117–136, 2005.

[57] ALAMO, F.; WEBER, H. I.. **Displacement functions for rods**. XXVI CILAMCE, Guarapari, ES-Brasil, Proceedings in CD, 2005.

[58] KHULIEF, Y. A.; AL-NASER, H.. **Finite element dynamic analysis of drillstrings**. Finite Elements in Analysis and Design, 41:1270–1288, 2005.

[59] RITTO, T. G.. **Análise de vibrações de sistemas lineares e não-lineares no contexto da formulação fraca, análise modal e decomposição de karhunen-loève**. Master's thesis, PUC-Rio, 2005.

[60] ALAMO, F. C.; WEBER, H. I.. **Stick-slip analysis in drill strings**. XVIII COBEM 2005, Ouro Preto, MG-Brasil, Proceedings in CD, 2005.

[61] KE, C. H.; PUGNO, N.; PENG, B. ; ESPINOSA, H. D.. **Experiments and modeling of carbon nanotube-based nems devices**. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 53:1314–1333, 2005.

[62] SAMPAIO, R.; PIOVAN, M. T. ; LOZANO, G. V.. **Stick-slip patterns in coupled extensional/torsional vibrations of drill-strings**. MECOM 2005, VIII Congreso Argentino de Mecánica Computacional, XXIV, 2005.

[63] SCHÖMER, E.. **Interactive simulation of one-dimensional flexible parts**. ACM Solid and Physical Modeling Symposium, Wales, UK, 2006.

[64] CARAPAU, F.; SEQUEIRA, A.. **1d models for blood flow in small vessels using the cosserat theory**. WSEAS Transactions on Mathematics, 5(1):54–62, 2006.

[65] WEBER, H. I.. **Raciocinando Dinâmica de Rotação: Fundamentos para o seu entendimento**. Livro em elaboração, PUC-Rio, 2006.

[66] CAO, D.; LIU, D. ; WANG, C. H.-T.. **Three-dimensional nonlinear dynamics of slender structures: Cosserat rod element approach**. International Journal of Solids and Structures, 43:760–783, 2006.

[67] BACHSCHMID, N.; PENNACCI, P.. **Advances in Vibration Control and Diagnostics - VICONDIA**. Polimetrica, 2006.

[68] ALAMO, F.; WEBER, H. I. ; ESPINOZA, H. S.. **Directional drillstring dynamics**. European Conference on Computational Mechanics, Lisbon, p. 1–21, 2006.

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas