Teoria de semigrupos e aplicações a equações impulsivas com retardamento dependendo do estado

Gabriel Gonçalves União

Orientador: *Eduardo Hernández M.*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

USP - São Carlos
Março/2006

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

Aos meus pais,

Antônio e Cleusa.

Agradecimentos

Ao professor Eduardo Alex Hernández Morales, pela orientação, confiança e profissionalismo com que conduziu este trabalho.

À Universidade de São Paulo.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos meus colegas do ICMC-USP, que tornaram esta caminhada mais agradável.

Aos grandes amigos, Amanda, Fernanda e Guilherme, obrigado pelo companheirismo e lealdade. Sou grato pelos conselhos e bons momentos de descontração proporcionados.

Aos amigos da salinha 3-203/3-024, em especial a Michelle, pelo incentivo.

A todos meus amigos de graduação, que embora estejam distantes, sempre serão lembrados.

Ao Rodrigo, Tony e Gustavo, que além de serem meus irmãos, são meus grandes amigos.

Aos meus tios, tias, primos e primas, que tanto me apoiaram.

Mais que agradecer, eu dedico este trabalho à minha família, especialmente meus pais: Cleusa e Antônio. Pelo incentivo, encorajamento e, principalmente, pela oportunidade de estudar e completar mais esta etapa em minha vida. Se cheguei até aqui, foi graças a eles.

Abstract

In this work we establish the existence of mild solutions for an impulsive abstract functional differential equation with state-dependent delay described in the form

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x_{\rho(t,x_t)}), \quad t \in I = [0, a], \tag{1}$$

$$x_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \tag{2}$$

$$\triangle x(t_i) = I_i(x_{t_i}), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{3}$$

where A is the infinitesimal generator of a compact C_0-semigroup of bounded linear operators $(T(t))_{t\geq 0}$ defined on a Banach space X; the functions $x_s : (-\infty, 0] \to X$, $x_s(\theta) = x(s+\theta)$, belongs to some abstract phase space $\mathcal{B}$ described axiomatically; $f : I \times \mathcal{B} \to X$, $\rho : I \times \mathcal{B} \to (-\infty, a]$, $I_i : \mathcal{B} \to X$, $i = 1, \cdots, n$, are appropriate functions; $0 < t_1 < .... < t_n < a$ are pre-fixed numbers and the symbol $\triangle\xi(t)$ represents the jump of the function ξ at t, which is defined by $\triangle\xi(t) = \xi(t^+) - \xi(t^-)$.

Resumo

Neste trabalho estudaremos a existência de soluções fracas para uma classe de equações diferenciais funcionais impulsivas com retardamento dependendo do estado modeladas na forma

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + f(t, x_{\rho(t,x_t)}), \;\; t \in I = [0, a], && (4) \\ x_0 &= \varphi \in \mathcal{B}, && (5) \\ \triangle x(t_i) &= I_i(x_{t_i}), \;\; i = 1, \cdots, n, && (6) \end{aligned}$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo compacto de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ definido em um espaço de Banach X; as funções $x_s : (-\infty, 0] \to X$, $x_s(\theta) = x(s + \theta)$, estão em um espaço de fase $\mathcal{B}$ descrito axiomaticamente; $f : I \times \mathcal{B} \to X$, $\rho : I \times \mathcal{B} \to (-\infty, a]$, $I_i : \mathcal{B} \to X$, $i = 1, \cdots, n$, são funções apropriadas; $0 < t_1 < .... < t_n < a$ são números pré-fixados e o símbolo $\triangle\xi(t)$ representa o salto da função ξ em t, que é definido por $\triangle\xi(t) = \xi(t^+) - \xi(t^-)$.

Sumário

Introdução **1**

1 Semigrupos de operadores Lineares **3**

1.1 Semigrupos uniformemente contínuos de operadores lineares limitados 3

1.2 Semigrupos fortemente contínuos 7

1.3 O Teorema de Hille-Yosida 11

1.4 Semigrupos Compactos 18

1.5 Semigrupos Diferenciáveis 20

1.6 O Operador Espectral de Riesz 23

2 O Problema Abstrato de Cauchy **33**

2.1 O Problema de Valor Inicial Homogêneo 33

2.2 O Problema de Valor Inicial não Homogêneo 34

2.3 O Problema de Valor Inicial Semilinear 39

3 Equações funcionais impulsivas com retardamento dependendo do estado **51**

3.1 Preliminares 52

3.2 Resultados de Existência 54

3.3 Exemplo 61

Introdução

Neste trabalho estudamos a existência de soluções fracas para uma classe de equações diferenciais funcionais impulsivas com retardamento dependendo do estado modeladas na forma

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x_{\rho(t,x_t)}), \quad t \in I = [0, a], \tag{7}$$

$$x_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \tag{8}$$

$$\triangle x(t_i) = I_i(x_{t_i}), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{9}$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo compacto de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ definidos em um espaço de Banach X; as funções $x_s : (-\infty, 0] \to X$, $x_s(\theta) = x(s+\theta)$, estão em um espaço de fase $\mathcal{B}$ descrito axiomaticamente; $f : I \times \mathcal{B} \to X$, $\rho : I \times \mathcal{B} \to (-\infty, a]$, $I_i : \mathcal{B} \to X$, $i = 1, \cdots, n$, são funções apropriadas; $0 < t_1 < .... < t_n < a$ são números pré-fixados e o símbolo $\triangle\xi(t)$ representa o salto da função ξ em t, que é definido por $\triangle\xi(t) = \xi(t^+) - \xi(t^-)$.

Equações funcionais com retardo dependendo do estado têm sido estudadas em diversos trabalhos, veja entre outros [1, 2, 3, 5, 6, 11, 12, 28, 30]. O estudo de sistemas em derivadas parciais com retardo dependendo do estado iniciou-se recentemente e, ao nosso entender, a literatura existente está limitada aos artigos Hernández, Prokopczyk & Ladeira [16] e Wu & Rezounenko [31].

Por outro lado, a teoria de equações impulsivas tem-se desenvolvido fortemente nos últimos anos, devido fundamentalmente às diversas aplicações em diferentes áreas técnicas, como mecânica, engenharia elétrica, medicina, biologia, ecologia, etc. Como referências relacionadas citamos [7, 13, 15, 18, 19, 20, 21, 25, 26, 27].

É importante mencionar que o estudo de sistemas abstratos com impulsos e retardamento dependendo do estado é um tópico não considerado na literatura. Motivados por este fato, neste trabalho de dissertação estabelecemos novos resultados de existência de soluções fracas para sistemas

que podem ser descritos na forma abstrata (7)-(9).

Este trabalho de mestrado tem três capítulos, que descreveremos brevemente a seguir.

No capítulo 1, estudamos questões básicas da teoria de semigrupos de operadores lineares limitados em espaços de Banach. Em particular estudamos o clássico Teorema de geração de Hille-Yosida para o caso de semigrupos de contrações.

No capítulo 2, estudamos aplicações da teoria de semigrupos de operadores lineares no estudo da existência e regularidade de soluções para sistemas abstratos modelados na forma

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \in (0, a],$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Os resultados deste capítulo nos auxiliaram em nosso estudo sobre a existência de soluções fracas do sistema (7)-(9).

Finalmente, no capítulo 3, estudamos a existência de soluções para o sistema (7)-(9). De fato, utilizando critérios de ponto fixo, nos Teoremas 3.8, 3.9 estabelecemos a existência de soluções fracas para (7)-(9). Relembramos que os resultados apresentados neste capítulo são resumidos em nosso artigo [14], o qual foi recentemente aceito para publicação em Computers & Mathematics with Applications.

Em todo este trabalho, X será um espaço de Banach. As notações são aquelas usadas em análise funcional. Em particular, para espaços normados Z, Y, a notação $\mathcal{L}(X, Y)$ representa o espaço das transformações lineares contínuas de Z em Y. Quando $Z = Y$, usaremos simplesmente o símbolo $\mathcal{L}(Z)$. Além disso, $B_r(z, Z)$ será a bola fechada de centro z e raio r em Z.

Capítulo 1

Semigrupos de operadores Lineares

Neste primeiro capítulo estudaremos conceitos e propriedades básicas de semigupos de operadores lineares limitados definidos em espaços de Banach. Destacamos como principal resultado deste capítulo o teorema de geração de Hille-Yosida.

Neste trabalho, X é um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ representa os espaço dos operadores lineares contínuos de X em X.

1.1 Semigrupos uniformemente contínuos de operadores lineares limitados

Começamos este capítulo com algumas definições e propriedades básicas de semigrupos.

Definição 1.1. *Uma família $(T(t))_{t\geq 0}$, de operadores lineares limitados de X em X é um semigrupo de operadores lineares limitados em X se*

(i) $T(0) = I$,

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, *para todo* $t, s \geq 0$.

Definição 1.2. *Um semigrupo de operadores lineares limitados, $(T(t))_{t\geq 0}$, é uniformemente contínuo se*

$$\lim_{t\downarrow 0} \| T(t) - I \| = 0. \tag{1.1}$$

Definição 1.3. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares em X e*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad existe \right\}.$$

O operador $A : D(A) \to X$ definido por

$$Ax = \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+T(t)x}{dt}\Big|_{t=0}, \quad para \quad x \in D(A),$$

é chamado o gerador infinitesimal do semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$.

Estabeleceremos agora um teorema que caracteriza o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo.

Teorema 1.4. *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, A é um operador linear limitado.*

Prova: Seja A um operador linear limitado em X e considere os operadores

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}, \quad t \geq 0. \tag{1.2}$$

Como A é limitado, para cada $t \geq 0$ temos

$$\| T(t) \| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n \| A \|^n}{n!} = e^{|t|\|A\|} < \infty,$$

o que implica que $T(t)$ é operador linear limitado para todo $t \geq 0$. Além disso, é claro que $T(0) = I$. Mais ainda, um longo cálculo com séries de potências mostra que $T(s+t) = T(s)T(t)$ para todo $s, t \geq 0$. Portanto $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo de operadores lineares limitados.

Para provarmos que $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo, observamos que

$$T(t) - I = tA \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{(n+1)!},$$

o que implica

$$\| T(t) - I \| \leq t \| A \| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\| tA \|^n}{n!} \leq t \| A \| e^{t\|A\|}.$$

Fazendo $t \downarrow 0$ na desigualdade anterior obtemos

$$\lim_{t\downarrow 0} \| T(t) - I \| = 0,$$

o que prova que o semigrupo é uniformemente contínuo.

Resta provar que A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t\geq 0}$. Como,

$$\frac{T(t)-I}{t} - A = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1}A^n}{n!},$$

para $t < 1$ temos

$$\left\| \frac{T(t)-I}{t} - A \right\| \leq t \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-2} \parallel A \parallel^n}{n!} \leq t \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\parallel A \parallel^n}{n!} \leq te^{\|A\|},$$

o que mostra que

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)-I}{t} = A.$$

Portanto, A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t\geq 0}$, o que completa a primeira parte da demonstração.

Suponhamos agora que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ em X. Da definição de gerador, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(s) - I\| < \frac{1}{2}$ se $0 \leq s < \delta$. Logo, para $0 < \rho < \delta$

$$\left\| \frac{1}{\rho} \int_0^{\rho} T(s)\ ds - I \right\| = \left\| \frac{1}{\rho} \int_0^{\rho} (T(s) - I)\ ds \right\| \leq \frac{1}{\rho} \int_0^{\rho} \|T(s) - I\|\ ds \leq \frac{1}{2},$$

o que implica que $\rho^{-1} \int_0^{\rho} T(s)ds$ é inversível e assim que $\int_0^{\rho} T(s)ds$ é também inversível. Agora, veja que para $h < \rho$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(T(h) - I) \int_0^{\rho} T(s)ds &= \frac{1}{h} \left(\int_0^{\rho} T(s+h)ds - \int_0^{\rho} T(s)ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_h^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^{\rho} T(s)ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_{\rho}^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^{h} T(s)ds \right), \end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{1}{h}(T(h) - I) = \frac{1}{h} \left(\int_{\rho}^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^{h} T(s)ds \right) \left(\int_0^{\rho} T(s)ds \right)^{-1}. \tag{1.3}$$

Como $\rho > 0$ é fixo, e $s \to T(s)$ é contínua, obtemos que $\lim_{h\downarrow 0} h^{-1} \int_0^h T(s)ds = I$. Além disso,

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\rho}^{\rho+h} T(s)ds = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h T(s+\rho)ds = T(\rho) \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h T(s)ds = T(\rho).$$

Fazendo $h \downarrow 0$ em (1.3) obtemos que

$$A = (T(\rho) - I) \left(\int_0^{\rho} T(s)ds \right)^{-1},$$

o que mostra que A é um operador linear limitado. A prova do teorema está agora completa. ■

Do resultado anterior segue o seguinte Corolário com propriedades muito usadas para semigrupos uniformemente contínuos. A prova segue de maneira imediata da prova do Teorema 1.4, por isto omitiremos a sua demonstração.

Corolário 1.5. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados. Então as seguintes propriedades são válidas.*

(a) *Existe uma constante $w \geq 0$ tal que $\|T(t)\| \leq e^{wt}$ para todo $t \geq 0$.*

(b) *Existe um único operador linear limitado A tal que $T(t) = e^{tA}$.*

(c) *O operador A de* **(b)** *é o gerador infinitesimal de $T(t)$.*

(d) *A função $t \longrightarrow T(t)$ é diferenciável em $t \geq 0$ na topologia uniforme de operadores e $\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A$, para todo $t \geq 0$.*

Veja que da Definição 1.3 é claro que um semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ tem um único gerador infinitesimal. Ainda, pelo Teorema 1.4, todo operador linear limitado A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo $(T(t))_{t\geq 0}$. O próximo resultado nos garantirá a unicidade desse semigrupo.

Teorema 1.6. *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ e $(S(t))_{t\geq 0}$ semigrupos de operadores lineares limitados uniformemente contínuos. Se*

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{h\downarrow 0} \frac{S(t) - I}{t},$$

então $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.

Prova: Mostremos que dado $a > 0$, $T(t) = S(t)$ para todo $0 \leq t \leq a$. Seja $a > 0$ fixado. Como $t \longrightarrow \|T(t)\|$ e $t \longrightarrow \|S(t)\|$ são contínuas, existe uma constante C tal que $\|T(t)\|\|S(t)\| \leq C$ para $0 \leq s, t \leq a$. Além disso, para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{1}{h}\|T(h) - S(h)\| \leq \left\|\frac{T(h) - I}{h} - A\right\| + \left\|\frac{T(h) - I}{h} - A\right\| < \frac{\varepsilon}{aC}, \quad 0 < h \leq \delta \tag{1.4}$$

Seja $0 \leq t \leq a$ e escolha $n \geq 1$ tal que $\frac{t}{n} < \delta$. Então da propriedade de semigrupo e de (1.4) segue que

$$\begin{aligned}
\|T(t) - S(t)\| &= \left\| T\left(n\frac{t}{n}\right) - S\left(n\frac{t}{n}\right) \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{kt}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) \right\| \left\| S\left(\frac{kt}{n}\right) \right\| \left\| T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \\
&\leq nC\frac{\varepsilon}{aC}\frac{t}{n} \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $T(t) = S(t)$ para $0 \leq t \leq a$. Para $s \geq a$, escreva $s = na + r$, onde $0 \leq r < a$ e $n \in \mathbb{N}$. Nestas condições,

$$S(s) = S(na + r) = S(a)^n S(r) = T(a)^n T(r) = T(na + r) = T(s),$$

o que prova que $S(t) = T(t)$, para todo $t \geq 0$. ■

1.2 Semigrupos fortemente contínuos

Definição 1.7. *Um semigrupo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ em X é um semigrupo fortemente contínuo, ou um C_0-semigrupo, se para todo $x \in X$*

$$\lim_{t\downarrow 0} T(t)x = x. \tag{1.5}$$

Estabeleceremos nesta seção algumas propriedades e conceitos básicos de C_0-semigrupos.

Teorema 1.8. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo. Então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\| T(t) \| \leq Me^{\omega t}$ para $0 \leq t < \infty$.*

Prova: Note primeiro que existe $\eta > 0$ tal que $\|T(t)\|$ é uniformemente limitado em $[0, \eta]$. De fato, caso contrário, existiria uma sequência $\{t_n\}$, com $t_n \geq 0$, tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ e $\|T(t_n)\| \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso teríamos que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T(t_n)\| = \infty$ e assim, pelo Princípio da Limitação Uniforme, existiria $x \in X$ tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T(t_n)x\| = \infty$. Como consequência, o conjunto $\{\|T(t_n)\| : n \in \mathbb{N}\}$ é não limitado, contrariando o fato de $(T(t))_{t\geq 0}$ ser um C_0-semigrupo. Logo, existe $M > 0$ tal que

$\|T(t)\| \leq M$ para $0 \leq t \leq \eta$. Como $T(0) = I$, temos que $M \geq 1$. Seja $\omega = \eta^{-1} \log M \geq 0$. Usando a propriedade de semigrupo, para $t = n\eta + \delta$, $\delta \in [0, \eta)$ temos que

$$\|T(t)\| = \|T(\delta)T(\eta)^n\| \leq MM^n \leq MM^{\frac{t}{\eta}} = Me^{\omega t},$$

o que completa a prova do resultado. ■

Corolário 1.9. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo. Então a função $t \to T(t)x$ é contínua de $(0, \infty)$ em X, para todo $x \in X$.*

Prova: Pelo Teorema 1.8, existem $M, \omega \geq 0$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ para todo $t \geq 0$. Veja que para $x \in X$, t e $h \geq 0$

$$\|T(t+h)x - T(t)x\| \leq \|T(t)\| \, \|T(h)x - x\| \leq Me^{\omega t}\|T(h)x - x\| \to 0 \quad \text{quando} \quad h \to 0.$$

Além disso, para $0 \leq h \leq t$ temos que

$$\|T(t-h)x - T(t)x\| \leq \|T(t-h)\| \, \|x - T(h)x\| \leq Me^{\omega t}\|x - T(h)x\| \to 0 \quad \text{quando} \quad h \to 0.$$

Do que fizemos, obtemos que $s \to T(s)x$ é contínua para todo $x \in X$. ■

O seguinte resultado estabelece algumas propriedades que serão fundamentais no restante deste trabalho.

Teorema 1.10. *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então as seguintes propriedades são válidas.*

(a) *Para todo $x \in X$ e $t \geq 0$, $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x$.*

(b) *Para todo $x \in X$ e $t \geq s \geq 0$, $\int_s^t T(\tau)x d\tau \in D(A)$ e $A \int_s^t T(\tau)x d\tau = T(t)x - T(s)x$.*

(c) *Para todo $x \in D(A)$ e $t \geq 0$, $T(t)x \in D(A)$ e $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$.*

(d) *Para todo $x \in D(A)$ e $t \geq s \geq 0$, $T(t)x - T(s)x = A \int_s^t T(\tau)x d\tau = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau$.*

Prova: A parte **(a)** segue diretamente da continuidade de $t \to T(t)x$. Para provarmos **(b)**, sejam $x \in X$ e $h > 0$. Então

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}\left(\int_s^t T(\tau)x\ d\tau\right) &= \frac{1}{h}\int_s^t (T(\tau+h)x - T(\tau)x)\ d\tau \\
&= \frac{1}{h}\int_{s+h}^{t+h} T(\tau)x\ d\tau - \frac{1}{h}\int_s^t T(\tau)x\ d\tau \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(\tau)x\ d\tau - \frac{1}{h}\int_s^{s+h} T(\tau)x\ d\tau.
\end{aligned}$$

Logo, fazendo $h \downarrow 0$ segue por **(a)** que

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{T(h)-I}{h}\int_s^t T(\tau)x\ d\tau = T(t)x - T(s)x.$$

Agora da definição de gerador obtemos que $\displaystyle\int_s^t T(\tau)x\ d\tau \in D(A)$ e que $\displaystyle A\int_s^t T(\tau)x\ d\tau = T(t)x - T(s)x$.

Para mostrarmos **(c)**, sejam $x \in D(A)$ e $h > 0$. Então

$$\frac{T(h)-I}{h}\ T(t)x = \frac{T(t+h)-T(t)}{h}x = T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x \to T(t)Ax, \quad \text{quando} \quad h \downarrow 0. \tag{1.6}$$

Segue disto que $T(t)x \in D(A)$ e que $AT(t)x = T(t)Ax$. Além disso, de (1.6) também concluímos que $\dfrac{d^+}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$. Mostremos agora que $\dfrac{d^-}{dt}T(t)x = T(t)Ax$. Se $0 < h \leq t$ e $M > 0$ é tal que $\|T(s)\| \leq M$, para todo $s \in (0,t)$ obtemos que

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax\right\| &\leq \|T(t-h)\|\left(\left\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right\| + \|Ax - T(h)Ax\|\right) \\
&\leq M\left(\left\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right\| + \|Ax - T(h)Ax\|\right)
\end{aligned}$$

Isto prova que $\dfrac{d^-}{dt}T(t)x$ existe e que $\dfrac{d^-}{dt}T(t)x = T(t)Ax$. Assim, $\dfrac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$ para todo $t \geq 0$ e todo $x \in D(A)$, o que completa a prova de **(c)**.

Finalmente provaremos **(d)**. Sejam $x \in D(A)$ e $s, t \geq 0$. Por **(a)** e **(c)** temos que

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t \frac{d}{d\tau}T(\tau)x\ d\tau = \int_s^t T(\tau)Ax\ d\tau = A\int_s^t T(\tau)x\ d\tau$$

A prova do Teorema está agora completa. ■

Segue do Teorema 1.10 o seguinte Corolário.

Corolário 1.11. *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$, então A é um operador linear fechado e $D(A)$ é denso em X.*

Prova: Para $x \in X$ e $t > 0$ e definimos $x_t = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t T(s)x\ ds$. Pela parte **(b)** do Teorema 1.10 sabemos que $x_t \in D(A)$ para todo $t > 0$, e por **(a)** do mesmo Teorema, vemos que $x_t \to x$ quando $t \downarrow 0$. Consequentemente, $x \in \overline{D(A)}$, donde concluímos que $\overline{D(A)} = X$, pois x é arbitrário.

Vejamos agora que A é operador linear fechado. A linearidade de A é óbvia. Para provarmos que A é um operador fechado, sejam $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in D(A)$, $x, y \in X$, tais que $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$ quando $n \to \infty$. Da parte **(d)** do Teorema 1.10 segue que

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds. \tag{1.7}$$

Afirmamos que $T(s)Ax_n \to T(s)y$, quando $n \to \infty$, uniformemente em intervalos limitados. De fato, para $0 < s \leq t$ vemos que

$$\|T(s)Ax_n - T(s)y\| \leq Me^{\omega t}\|Ax_n - y\| \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

onde M, ω são as constantes do Teorema 1.8.

Usando o que fizemos antes e fazendo $n \to \infty$ em (1.7) concluímos que

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\ ds.$$

Finalmente, do item **(a)** do Teorema 1.10 deduzimos que

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\ ds = y,$$

o que prova que $x \in D(A)$ e que $Ax = y$. Portanto, A é um operador linear fechado. A prova está agora completa. ■

O próximo resultado nos garante a unicidade do semigrupo associado a um gerador infinitesimal para o caso de semigrupos fortemente contínuos.

Teorema 1.12. *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ e $(S(t))_{t\geq 0}$ C_0-semigrupos com geradores infinitesimais A e B respectivamente. Se $A = B$, então $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.*

Prova: Seja $x \in D(A) = D(B)$. Pelo item (**c**) do Teorema 1.10 sabemos que a função $s \to T(t-s)S(s)x$ é diferenciável. Segue disto que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x = 0, \end{aligned}$$

e assim que a função $\theta(s) = T(t-s)S(s)x$ é constante sobre $[0,t]$. Por outro lado, $\theta(0) = \theta(t)$, o que mostra que $T(t)x = S(t)x$, para todo $x \in D(A)$ e $t > 0$.

Mostremos agora que a propriedade é válida para todo $x \in X$. Para $x \in X$, tome uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $D(A)$ tal que $x_n \to x$. Como $T(t)$ e $S(t)$ são contínuas, temos que $T(t)x_n \to T(t)x$ e $S(t)x_n \to S(t)x$, quando $n \to \infty$. Usando isto, e o fato que $T(t)x_n = S(t)x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $T(t)x = S(t)x$. Portanto $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$. ■

1.3 O Teorema de Hille-Yosida

Esta seção é dedicada ao Teorema de Hille-Yosida, o qual é um resultado básico da teoria de semigrupos. A importância deste teorema se dá pelo fato dele nos fornecer uma condição necessária e suficiente para que um operador $A : D(A) \subset X \to X$ seja o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de operadores. Para a apresentação deste resultado serão necessários introduzir alguns conceitos e definições adicionais.

Definição 1.13. *Um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ tal que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$, é chamado um C_0-semigrupo de contração se $w = 0$ e $M = 1$.*

Definição 1.14. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. O conjunto resolvente de A é definido por*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ (\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda : A) \text{ existe e é contínuo}\}$$

Definição 1.15. *Seja A um operador linear com $\rho(A) \neq \emptyset$. Definimos para $\lambda \in \rho(A)$ a aproximação de Yosida de A por*

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I.$$

Os próximos Lemas nos auxiliarão na demonstração do Teorema de Hille-Yosida.

Lema 1.16. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado tal que $\overline{D(A)} = X$, $\rho(A) \supset (0, \infty)$ e $\| R(\lambda : A) \| \leq \dfrac{1}{\lambda}$ para todo $\lambda > 0$. Então as seguintes propriedades são verificadas.*

(a) $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x, \quad$ *para todo* $\quad x \in X.$

(b) $\lim\limits_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = Ax, \quad$ *para todo* $\quad x \in D(A).$

(c) *Para cada $\lambda > 0$, A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações uniformemente contínuo $(e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$. Além disso, para $x \in X$, $\lambda > 0$ e $\mu > 0$*

$$\|e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x\| \leq t \ \|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

Prova: Mostremos **(a)**. Se $x \in \rho(A)$, da equação $(\lambda I - A)R(\lambda : A) = I$ segue que $\lambda R(\lambda : A) - I = AR(\lambda : A)$. Assim, para $x \in \rho(A)$

$$\|\lambda R(\lambda : A)x - x\| = \|AR(\lambda : A)x\| = \|R(\lambda : A)Ax\| \leq \frac{1}{\lambda} \ \|Ax\| \to 0 \quad \text{quando} \quad \lambda \to \infty.$$

Seja agora $x \in X$. Como $\overline{D(A)} = X$, existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in D(A)$ tal que $x_n \to x$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ e $L(\varepsilon) > 0$ tais que $\|x - x_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$, para todo $n \geq n_\varepsilon$, e

$$\|\lambda R(\lambda : A)x_{n_\varepsilon} - x_{n_\varepsilon}\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \textit{para todo} \quad \lambda > L(\varepsilon).$$

Disto, para $\lambda > L(\varepsilon)$ temos que

$$\|\lambda R(\lambda : A)x - x\| \leq \|\lambda R(\lambda : A)\| \ \|x - x_{n_\varepsilon}\| + \|\lambda R(\lambda : A)x_{n_\varepsilon} - x_{n_\varepsilon}\| + \|x - x_{n_\varepsilon}\| < \varepsilon,$$

o que mostra que $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x$, para todo $x \in X$.

Provemos agora o item **(b)**. Se $x \in D(A)$ segue pelo item **(a)** e da definição de A_λ que

$$\lim_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda : A)Ax = Ax.$$

Para finalizar, vejamos **(c)**. É claro da definição que A_λ é um operador linear limitado. Logo, pelo Teorema 1.4, A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo $(T_\lambda(t))_{t \geq 0}$, o qual é dado por $T_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}$. Além disso,

$$\|e^{tA_\lambda}\| = \|e^{t\lambda^2 R(\lambda : A)} e^{-\lambda t I}\| \leq e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 \|R(\lambda : A)\|} \leq 1,$$

o que mostra que $(e^{tA_\lambda})_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo de contração. Pelas definições, é fácil ver que os operadores e^{tA_λ}, e^{tA_μ}, A_λ e A_μ comutam entre si. Usando isto, segue que

$$\begin{aligned}\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds}\, e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x\, ds \right\| \\ &\leq \int_0^1 t\|e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}(A_\lambda x - A_\mu x)\|\, ds \leq t\, \|(A_\lambda x - A_\mu x)\|,\end{aligned}$$

o que completa a prova do resultado. ■

O seguinte resultado será usado freqüentemente no decorrer deste trabalho.

Lema 1.17. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado. Se $f : [0,a] \to X$ é tal que $f([0,a]) \subset D(A)$ e $Af \in L^1([0,a];X)$, então*

$$A\int_0^a f(s)\, ds = \int_0^a Af(s)\, ds.$$

Prova: Seja $P = \{s_i : i = 1,2,...,n\}$ uma partição do intervalo $[0,a]$ e definamos $S(f,P) = \sum_{s_i \in P} f(\xi_i)(s_{i+1} - s_i)$, $\xi_i \in [s_i, s_{i+1}]$. Como $D(A)$ é um subespaço vetorial, temos que $S(f,P) \in D(A)$, para toda partição P. Além disso, $S(f,P) \to \int_0^a f(s)ds$, quando $\Delta P \to 0$ e como $AS(f,P) = S(Af,P)$, temos que $AS(f,P) \to \int_0^a Af(s)ds$, quando $\Delta P \to 0$. Usando agora que A é fechado, segue que $\int_0^a f(s)ds \in D(A)$ e que $A\int_0^a f(s)ds = \int_0^a Af(s)ds$. A prova está completa. ■

Demonstraremos agora o principal resultado desta seção, o Teorema de Hille-Yosida para semigrupos de contração.

Teorema 1.18 (Hille-Yosida). *Um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração se, e somente se,*

(i) *A é um operador fechado e $\overline{D(A)} = X$,*

(ii) *$\rho(A) \supset (0,\infty)$ e $\| R(\lambda : A) \| \leq \dfrac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda > 0$.*

Prova: Seja A o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração $(T(t))_{t\geq 0}$ em X. O item **(i)** segue diretamente do Corolário 1.11. Para $\lambda > 0$ e $x \in X$ definimos o operador $R(\lambda)$ por

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt.$$

Como $t \to T(t)x$ é contínua, da estimativa

$$\|R(\lambda)x\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|T(t)\| \, \|x\| \, dt \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|, \tag{1.8}$$

concluímos que $R(\lambda)x$ existe, que $R(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$ e que $\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}$ para todo $\lambda > 0$. Mais ainda, para $x \in X$ e $h > 0$ vemos que

$$\begin{aligned} \frac{T(h)-I}{h} R(\lambda)x &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t+h)x \, dt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x \, dt \\ &= \frac{(e^{\lambda h}-1)}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x \, dt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)x \, dt. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Quando $h \downarrow 0$, o lado direito de (1.9) converge para $\lambda R(\lambda)x - x$, o que implica que $R(\lambda)x \in D(A)$ e que $AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x$. Ou seja, para todo $x \in X$ e $\lambda > 0$, $R(\lambda)x \in D(A)$ e

$$(\lambda I - A)R(\lambda)x = x. \tag{1.10}$$

Do item **(c)** do Teorema 1.10 e o Lema 1.17, para $x \in D(A)$ obtemos que

$$R(\lambda)Ax = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Ax \, dt = A\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x \, dt = AR(\lambda)x, \tag{1.11}$$

o que mostra que

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = x, \quad \textit{para todo} \quad x \in D(A). \tag{1.12}$$

Segue agora de (1.10) e (1.12) que $R(\lambda)$ é a inversa de $\lambda I - A$. Portanto, $\rho(A) \supset (0,\infty)$ e $\|R(\lambda)\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$, para $\lambda > 0$, o que conclui a prova de **(ii)**.

Suponhamos agora válidas as condições **(i)** e **(ii)**. Se $x \in D(A)$ e $t \geq 0$, do Lema 1.16 segue que

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t \, \|A_\lambda x - A_\mu x\| \leq t \, \|A_\lambda x - Ax\| + t \, \|Ax - A_\mu x\|, \quad \lambda, \mu > 0, \tag{1.13}$$

o que implica, pelo Lema 1.16, que $\{e^{tA_\lambda}x\}_{\lambda>0}$ é convergente em X para todo $x \in D(A)$, e que esta convergência é uniforme para t em intervalos limitados. Mais ainda, como $D(A)$ é denso em X e cada $(e^{tA_\lambda})_{\lambda>0}$ é um semigrupo de contração, podemos concluir que $\{e^{tA_\lambda}x\}_{\lambda>0}$ é convergente para todo $x \in X$ e que a convergência é uniforme para t em intervalos limitados. De fato, para $x \in X$, $t \in [0,a]$ e $a > 0$, fixemos $y \in D(A)$ e $\lambda_0 > 0$ tais que $\|x - y\| < \varepsilon$ e $\|e^{tA_\lambda}y - e^{tA_\mu}y\| < \varepsilon$, para todo $\lambda, \mu > \lambda_0$. Assim, para $\lambda, \mu > \lambda_0$ e $t \in [0,a]$ obtemos que

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &\leq \|e^{tA_\lambda}(x-y)\| + \|e^{tA_\lambda}y - e^{tA_\mu}y\| + \|e^{tA_\mu}y - e^{tA_\mu}x\| \\ &\leq 2\|x-y\| + \varepsilon \leq 3\varepsilon, \end{aligned}$$

o que mostra nossa afrimação, pois $\varepsilon > 0$ é arbitrário.

Considerando o que acabamos de fazer, definimos a família de operadores $(T(t))_{t\geq 0}$ por

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x, \quad x \in X. \tag{1.14}$$

É claro que $T(t)$ é um operador linear em X para todo $t \geq 0$. Além disso, usando o fato de $(e^{tA_\lambda})_{t\geq 0}$ ser de contração, vemos que

$$\|T(t)x\| = \|\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x\| \leq \|x\|,$$

o que implica que $\|T(t)\| \leq 1$ para todo $t \geq 0$.

Mostremos agora que $(T(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo e que A é seu gerador infinitesimal. Segue facilmente de (1.14) que $T(0)x = x$ para todo $x \in X$. Agora, para mostrar a propriedade de semigrupos, sejam $x \in X$, $s, t \geq 0$. Então, $T(t+s)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{sA_\lambda}e^{tA_\lambda}x$. No entanto, da desigualdade

$$\begin{aligned}
\|e^{sA_\lambda}e^{tA_\lambda}x - T(s)T(t)x\| &= \|e^{sA_\lambda}(e^{tA_\lambda}x - T(t)x) + (e^{sA_\lambda} - T(s))T(t)x\| \\
&\leq \|e^{sA_\lambda}\|\|e^{tA_\lambda}x - T(t)x\| + \|e^{sA_\lambda}T(t)x - T(s)T(t)x\| \\
&\leq \|e^{tA_\lambda}x - T(t)x\| + \|e^{sA_\lambda}T(t)x - T(s)T(t)x\|,
\end{aligned}$$

segue facilmente que $e^{sA_\lambda}e^{tA_\lambda}x$ converge para $T(s)T(t)x$ quando $\lambda \to \infty$, mostrando que $T(t+s) = T(t)T(s)$. Isto, juntamente com o fato que $\|T(t)\| \leq 1$ mostra que $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contração em X. Mais ainda, como $e^{tA_\lambda}x$ converge uniformemente para $t \in [0, a]$, $a > 0$, obtemos que $T(\cdot)x$ é uma função contínua em $[0, a]$. Portanto $(T(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo de contração.

Finalmente, mostremos que A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t\geq 0}$. Sejam $x \in D(A)$ e $t > 0$. Observe inicialmente que da desigualdade,

$$\begin{aligned}
\|e^{sA_\lambda}A_\lambda x - T(s)Ax\| &\leq \|e^{sA_\lambda}(A_\lambda x - Ax)\| + \|(e^{sA_\lambda} - T(s))Ax\| \\
&\leq \|e^{sA_\lambda}\|\|A_\lambda x - Ax\| + \|(e^{sA_\lambda} - T(s))Ax\| \\
&\leq \|A_\lambda x - Ax\| + \|(e^{sA_\lambda} - T(s))Ax\|,
\end{aligned}$$

segue que $e^{sA_\lambda}A_\lambda x$ converge uniformemente para s em intervalos limitados para $T(s)Ax$, quando $\lambda \to \infty$. Agora, usando (1.14) e o item **(d)** do Teorema 1.10, temos que

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\lim_{\lambda\to\infty}(e^{tA_\lambda}x - x) = \frac{1}{t}\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t e^{sA_\lambda}A_\lambda x\, ds,$$

de onde podemos concluir que

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)Ax\ ds, \quad x \in D(A). \tag{1.15}$$

Seja B o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t\geq 0}$. Fazendo $t \downarrow 0$ em (1.15) segue que $x \in D(B)$ e que $Bx = Ax$, o que mostra que $B : D(B) \subset X \to X$ é uma extensão de A. Mais ainda, como B é gerador infinitesimal de $(T(t))_{t\geq 0}$, vale a parte **(ii)** do Teorema e então $1 \in \rho(B)$. Como $B = A$ em $D(A)$ e por hipótese $1 \in \rho(A)$, vemos que $(I - B)D(A) = (I - A)D(A) = X$. Daí segue que $D(A) = (I - B)^{-1}X = D(B)$ e então que $A = B$. Portanto, A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração. Isto completa a prova. ■

Do Teorema de Hille-Yosida e de sua demonstração segue algumas consequências simples, como as que exibiremos a seguir.

Corolário 1.19. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração $(T(t))_{t\geq 0}$. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A, então*

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x, \quad \textit{para todo} \quad x \in X. \tag{1.16}$$

Prova: Da prova do Teorema 1.18 sabemos que a família $(S(t))_{t\geq 0}$ definida por $S(t) = \lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}$ é um semigrupo de contração e que A é seu gerador infinitesimal. Logo, pelo Teorema 1.12, obtemos que $T(t) = S(t)$, para todo $t \geq 0$. ■

Corolário 1.20. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração $(T(t))_{t\geq 0}$. Então $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) > 0\}$ e para tais λ vale que*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{Re(\lambda)}.$$

Prova: Para $\lambda \in \mathbb{C}$ com $Re(\lambda) > 0$, definimos $R(\lambda)x = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\ dt$. Usando as mesmas estimativas e idéias da prova do Teorema 1.18 segue que $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$. Portanto $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) > 0\}$. Além disso, para $x \in X$ temos que

$$\|R(\lambda)x\| \leq \int_0^\infty e^{-Re\lambda t}\|x\|\ dt \leq \frac{1}{Re\lambda}\ \|x\|,$$

e portanto $\|R(\lambda : A)\| \leq \dfrac{1}{Re(\lambda)}$. A prova está completa. ■

O próximo Corolário é uma generalização do Teorema de Hille-Yosida.

Corolário 1.21. *Um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ satisfazendo $\| T(t) \| \leq e^{\omega t}$ (para algum $\omega \geq 0$) se, e somente se,*

(i) *A é um operador linear fechado e $\overline{D(A)} = X$.*

(ii) *$\rho(A) \supset (\omega, \infty)$ e $\| R(\lambda : A) \| \leq \dfrac{1}{\lambda - \omega}, \quad \lambda > \omega$.*

Prova: Suponhamos que A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ satisfazendo $\| T(t) \| \leq e^{\omega t}$. O item **(i)** segue diretamente do Corolário 1.11. Definimos agora $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$, para $t \geq 0$. É fácil verificar que $(S(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo de contração. Além disso, $A - \omega I$ é o gerador infinitesimal de $(S(t))_{t\geq 0}$. De fato, se B é o gerador infinitesimal de $(S(t))_{t\geq 0}$ e $x \in D(B)$, então $S(t)x$ é diferenciável pela direita em $t = 0$, o que implica que $T(t)x = e^{\omega t}S(t)x$ é diferenciável pela direita em $t = 0$ e que $x \in D(A)$. Mais ainda,

$$Bx = \frac{d^+ S(t)x}{dt}\Big|_{t=0} = (e^{-\omega t}AT(t)x - \omega e^{-\omega t}T(t)x)\Big|_{t=0} = (A - \omega I)x. \tag{1.17}$$

Isto mostra que $D(B) \subset D(A)$ e que $Bx = (A - \omega I)x$ para todo $x \in D(B)$. Por outro lado, se $x \in D(A)$ é óbvio que $t \to S(t)x$ é diferenciável pela direita em $t = 0$, o que implica $D(A) \subset D(B)$ e assim que $B = A - \omega I$. Isto prova que $A - \omega I$ satisfaz as condições **(i)** e **(ii)** do Teorema 1.18. Em particular, $\delta \in \rho(A - \omega I)$ para todo $\delta > 0$, o que implica que $((\delta + \omega)I - A)^{-1}$ existe e é limitado para todo $\delta > 0$. Daí segue que $\{\delta + \omega, \delta > 0\} \subset \rho(A)$. Mais ainda, da parte **(ii)** do Teorema 1.18 segue que

$$\|R(\lambda : A)\| = \|R(\lambda - \omega : A - \omega I)\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \quad \lambda > \omega.$$

Suponhamos agora que as condições **(i)** e **(ii)** sejam vádidas. Então as condições **(i)** e **(ii)** do Teorema 1.18 são verificadas por $A - \omega I$, pois $D(A) = D(A - \omega I)$ e $R(\lambda + \omega : A) = R(\lambda : A - \omega I)$ para todo $\lambda > 0$. Como consequência, $A - \omega I$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração que denotaremos por $(S(t))_{t\geq 0}$. Procedendo como no início da prova, é possível mostrar que A é o gerador infinitesimal do semigrupo $T(t) = e^{\omega t}S(t)$.Mais ainda, é fácil ver que $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ para todo $t \geq 0$. Isto completa a prova do corolário. ■

O próximo resultado é uma versão mais geral do Teorema de Hille-Yosida. Sua importância se dá pelo fato de caracterizar o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo qualquer. Para não estender este trabalho, omitiremos sua demonstração.

Teorema 1.22. *Um operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ satisfazendo $\| T(t) \| \leq Me^{\omega t}$ se, e somente se,*

(i) *A é um operador fechado e $\overline{D(A)} = X$;*

(ii) *$\rho(A) \supset (\omega, \infty)$ e $\|R(\lambda : A)^n\| \leq \dfrac{M}{(\lambda - \omega)^n}$ para todo $\lambda > \omega$ e todo $n \geq 1$.*

1.4 Semigrupos Compactos

Tendo em vista a aplicação da teoria de semigrupos no estudo de equações diferenciais funcionais, estudaremos alguns tipos especiais de semigrupos, descritos nas próximas duas seções.

Definição 1.23. *Um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto para $t > t_0$, se $T(t)$ é um operador compacto para todo $t > t_0$. O C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto se é compacto para $t > 0$.*

Observação 1.24. *Se $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto para $t \geq 0$, em particular a identidade é compacta e portanto X é de dimensão finita. Reciprocamente, se X é um espaço de dimensão finita, então todo C_0-semigrupo em X é compacto. Note ainda que, se para algum $t_0 > 0$, $T(t_0)$ é compacto, então $T(t)$ também é compacto para todo $t \geq t_0$, pois $T(t) = T(t - t_0)T(t_0)$ e $T(t - t_0)$ é limitado.*

Teorema 1.25. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo. Se $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto para $t > t_0$, então a função $t \longrightarrow T(t)$ definida de (t_0, ∞) em $\mathcal{L}(X)$ é contínua.*

Prova: Sejam $\varepsilon > 0$, $t > t_0$ e fixemos $M > 0$ tal que $\|T(s)\| \leq M$ para todo $0 \leq s \leq 1$. Pela hipótese, o conjunto $U_t = \{T(t)x : \|x\| \leq 1\}$ é relativamente compacto, portanto existem pontos $x_1, x_2, ..., x_N$ em U_t, tais que as bolas abertas $B\left(T(t)x_j, \dfrac{\varepsilon}{2(M+1)}\right)$, $1 \leq j \leq N$, formam uma cobertura de U_t. Como $(T(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo, existe $0 < \delta \leq 1$ tal que

$$\|T(t+h)x_j - T(t)x_j\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para} \quad 0 \leq h \leq \delta \quad \text{e} \quad 1 \leq j \leq N.$$

Além disso, se $x \in X$ é tal que $\|x\| \leq 1$, então existe $j(x) \in \{1, 2, \ldots, N\}$ tal que

$$\|T(t)x - T(t)x_{j(x)}\| < \frac{\varepsilon}{2(M+1)}.$$

Logo, para $0 \leq h \leq \delta$ e $\|x\| \leq 1$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|T(t+h)x - T(t)x\| &\leq \|T(h)\| \, \|T(t)x - T(t)x_{j(x)}\| + \|T(t+h)x_{j(x)} - T(t)x_{j(x)}\| \\ &\quad + \|T(t)x_{j(x)} - T(t)x\| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

o que prova a continuidade pela direita de $t \to T(t)$ em t, na topologia uniforme de operadores. A continuidade pela esquerda é provada de maneira similar. A prova está completa. ■

O próximo resultado estabelece condições necessárias e suficientes para que um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ seja compacto.

Teorema 1.26. *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo compacto se, e somente se, $t \longrightarrow T(t)$ é contínua em $(0,\infty)$ na topologia uniforme de operadores e $R(\lambda : A)$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$.*

Prova: Sejam $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ para todo $t \geq 0$. Se $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto para $t > 0$, segue pelo Teorema 1.25 que a função $t \to T(t)$ é contínua em $(0,\infty)$ na topologia uniforme de operadores. Resta mostrarmos que $R(\lambda : A)$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$. Note primeiramente que este resultado vale para $\lambda \in \mathbb{C}$, com $Re(\lambda) > \omega$. De fato, da prova do Teorema 1.18 sabemos que

$$R(\lambda : A) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)\, ds, \tag{1.18}$$

Como a integral anterior é o limite em $\mathcal{L}(X)$ de operadores compactos, concluímos que $R(\lambda : A)$ também é compacto. Finalmente, da equação resolvente

$$R(\lambda : A) - R(\mu : A) = (\mu - \lambda)R(\lambda : A)R(\mu : A), \quad \lambda, \mu \in \rho(A),$$

deduzimos que $R(\mu : A)$ é compacto para todo $\mu \in \rho(A)$.

Assuma agora que $s \longrightarrow T(s)$ é contínua em $t > 0$ na topologia uniforme de operadores e que $R(\lambda : A)$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, com $\lambda > \omega$. Usando (1.18) vemos que

$$\lambda R(\lambda : A)T(t) - T(t) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s}(T(t+s) - T(t))\, ds.$$

Assim, para $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda : A)T(t) - T(t)\| &\leq \int_0^\delta \lambda e^{-\lambda s}\|T(t+s) - T(t)\|\, ds + \int_\delta^\infty \lambda e^{-\lambda s}\|T(t+s) - T(t)\|\, ds \\ &\leq \sup_{0\leq s\leq \delta} \|T(t+s) - T(t)\| + \frac{2\lambda M e^{\omega(t+\delta)} e^{-\lambda\delta}}{\lambda - \omega}, \end{aligned}$$

o que implica

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|\lambda R(\lambda : A)T(t) - T(t)\| \leq \sup_{0\leq s\leq\delta} \|T(t+s) - T(t)\|, \quad para \quad \delta > 0.$$

Como $\delta > 0$ é arbitrário e $s \longrightarrow T(s)$ é contínua em $(0, \infty)$, segue que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|\lambda R(\lambda : A)T(t) - T(t)\| = 0.$$

Como consequência, $T(t)$ é o limite uniforme de operadores compactos, o que mostra que $T(t)$ é compacto para todo $t > 0$, o que completa a prova. ■

Os próximos resultados são consequências imediatas do Teorema 1.26 e sua demonstração.

Corolário 1.27. *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Se $t \longrightarrow T(t)$ é contínua para $t > t_0$ na topologia uniforme de operadores e $R(\lambda : A)$ é compacto para algum $\lambda \in \rho(A)$, então $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo compacto para $t > t_0$.*

Corolário 1.28. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo uniformemente contínuo. Então $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo compacto se, e somente se, $R(\lambda : A)$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$.*

1.5 Semigrupos Diferenciáveis

Nesta seção consideraremos brevemente algumas questões básicas relativas a semigrupos diferenciáveis.

Definição 1.29. *Um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é diferenciável para $t > t_0$ se para cada $x \in X$, $t \to T(t)x$ é diferenciável para $t > t_0$. O C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é chamado diferenciável se ele é diferenciável para $t > 0$.*

Teorema 1.30. *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo diferenciável para $t > t_0$ e A seu gerador infinitesimal. Então as seguintes propriedades são válidas.*

(a) *Para $t > nt_0$, $n \in \mathbb{N}$, temos que $T(t) : X \to D(A^n)$, $T^{(n)}(t) = A^n T(t)$ e $T^{(n)}(t)$ é um operador linear limitado.*

(b) *Para $t > nt_0$, $n \in \mathbb{N}$, a função $t \to T^{(n-1)}(t)$ é contínua na topologia uniforme de operadores.*

Prova: Consideremos primeiro o caso $n = 1$. Por hipótese temos que $t \to T(t)x$ é diferenciável para $t > t_0$ e todo $x \in X$. Portanto $T(t)x \in D(A)$ e $T'(t)x = AT(t)x$, para todo $x \in X$ e $t > t_0$. Agora, como A é fechado e $T(t)$ é limitado, $AT(t)$ é fechado. Para $t > t_0$, $AT(t)$ está definido em todo X, e portanto, pelo Teorema do Gráfico Fechado é um operador linear limitado. Suponhamos

agora o resultado válido para n e provemos para $(n+1)$. Seja $t > (n+1)t_0$. Escolha $s > nt_0$ tal que $t - s > t_0$. Então,

$$T^{(n)}(t)x = A^n T(t)x = T(t-s)A^n T(s)x, \quad \text{para todo} \quad x \in X. \tag{1.19}$$

O lado direito de (1.19) é diferenciável, pois $t - s > t_0$. Portanto $T(t)x$ é $(n+1)$-vezes diferenciável e para todo $x \in X$ e $t > (n+1)t_0$ obtemos

$$T^{(n+1)}(t)x = AT(t-s)A^n T(s)x = A^{n+1}T(t)x.$$

Como no caso $n = 1$, isto implica que $T(t) : X \to D(A^{n+1})$ e que $A^{n+1}T(t)$ é um operador linear limitado para $t > (n+1)t_0$. Assim obtemos **(a)**.

Se $t_0 < t_1 \leq t_2 \leq t_1 + 1$ e $\| T(s) \| \leq M$ sobre $[0, t_1 + 1]$. Para $x \in X$ temos que

$$\begin{aligned} \| T(t_2)x - T(t_1)x \| &= \| \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{ds} T(s)x \, ds \| \\ &\leq \| \int_{t_1}^{t_2} AT(s)x \, ds \| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \| T(s-t_1) \| \| AT(t_1)x \| \, ds \\ &\leq (t_2 - t_1)M \| AT(t_1)x \|, \end{aligned} \tag{1.20}$$

o que pelo item (**a**) mostra que

$$\| T(t_2) - T(t_1) \| \leq M(t_2 - t_1) \| AT(t_1) \|, \tag{1.21}$$

e portanto a continuidade no caso $n = 1$. Similarmente, se $(n+1)t_0 < t_1 \leq t_2 \leq t_1 + 1$; para $x \in X$ temos que

$$\begin{aligned} \| T^{(n)}(t_2)x - T^{(n)}(t_1)x \| &= \| \int_{t_1}^{t_2} T^{(n+1)}(s)x ds \| \\ &= \| \int_{t_1}^{t_2} A^{n+1}T(s)x ds \| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \| T(s-t_1) \| \| A^{n+1}T(t_1)x \| \, ds, \\ &\leq M(t_2 - t_1) \| A^{n+1}T(t_1)x \|, \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\| T^{(n)}(t_2) - T^{(n)}(t_1) \| \leq M(t_2 - t_1) \| A^{n+1}T(t_1) \| .$$

Portanto (**b**) é verificada. A prova do teorema está completa. ■

Corolário 1.31. *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo diferenciável para $t > t_0$ e A seu gerador infinitesimal. Se $t > (n+1)t_0$, $n \in \mathbb{N}$, então a função $t \to T(t)$ é n-vezes diferenciável em t na topologia uniforme de operadores.*

Prova: Da parte **(b)** do Teorema 1.30 segue que $t \to A^k T(t)$, $1 \leq k \leq n$ é contínua na topologia uniforme de operadores, para $t > (n+1)t_0$. Agora, se $t > (n+1)t_0$ temos que

$$T^{(k-1)}(t+h) - T^{(k-1)}(t) = \int_t^{t+h} A^k T(s)\, ds, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Portanto,

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{T^{(k-1)}(t+h) - T^{(k-1)}(t)}{h} = A^k T(t), \quad 1 \leq k \leq n,$$

o que implica a diferenciabilidade de $T^{(k-1)}$ para $t > (n+1)t_0$ na topologia uniforme de operadores para todo $1 \leq k \leq n$. Logo, $(T(t))_{t\geq 0}$ é n-vezes diferenciável em t na topologia uniforme de operadores. ■

Corolário 1.32. *Se $(T(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo diferenciável, então a função $t \to T(t)$ é infinitas vezes diferenciável em $(0, \infty)$ na topologia uniforme de operadores.*

Prova: É consequencia direta do Corolário 1.31. ■

Corolário 1.33. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo diferenciável e seja A seu gerador infinitesimal. Então*

$$T^{(n)}(t) = \left(AT\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(T'\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \quad n = 1, 2, ... \tag{1.22}$$

Prova: Veja que se $n = 1$ o resultado foi provado no Teorema 1.30. Suponhamos que (1.22) vale para $n > 1$ e seja $t \geq s$. Então

$$T^{(n)}(t) = \left(AT\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = T(t-s)\left(AT\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n. \tag{1.23}$$

Derivando (1.23) em t, obtemos

$$T^{(n+1)}(t) = AT(t-s)\left(AT\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n. \tag{1.24}$$

Substituindo $s = \frac{nt}{n+1}$ em (1.24), obtemos facilmente o resultado para $n+1$ e portanto para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Encerramos este capítulo com um clássico exemplo de gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo.

1.6 O Operador Espectral de Riesz

O objetivo desta seção é apresentar um exemplo de um tipo de operador linear que é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Antes porém, precisamos de alguns conceitos e resultados preliminares. Nesta seção, $(Z, \|\cdot\|)$ será sempre um espaço de Hilbert, o qual é munido do produto interno $<\,,\,>$.

Definição 1.34. *Uma sequência de vetores $\{\phi_n : n \geq 1\}$ em Z, é uma base de Riesz para Z se as seguintes condições são verificadas.*

(a) $\overline{\langle\{\phi_n : n \geq 1\}\rangle} = Z$.

(b) *Existem constantes positivas m e M tais que para $N \in \mathbb{N}$ arbitrário e escalares α_n, $n = 1, ..., N$ arbitrários,*

$$m \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2 \leq \| \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \phi_n \|^2 \leq M \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2. \tag{1.25}$$

É claro, da definição, que uma base ortonormal de Z é uma base de Riesz para Z.

Definição 1.35. *Dizemos que duas sequências $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em Z são biortogonais se para todo $n, m \in \mathbb{N}$,*

$$\langle \phi_n, \psi_m \rangle = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \tag{1.26}$$

O próximo resultado mostra que se $\{\phi_n : n \geq 1\}$ é uma base de Riesz para Z, os elementos de Z podem ser representados unicamente como uma combinação linear de ϕ_n através de uma sequência biortogonal correspondendo à $\{\phi_n : n \geq 1\}$.

Lema 1.36. *Seja A um operador linear fechado em Z. Suponha que os autovalores $\{\lambda_n : n \geq 1\}$ de A sejam simples e que os autovetores correspondentes $\{\phi_n : n \geq 1\}$ formem uma base de Riesz para Z.*

(a) *Se $\{\psi_n : n \geq 1\}$ são os autovetores do adjunto A^* de A, correspondendo aos autovalores $\{\overline{\lambda_n} : n \geq 1\}$, então $\{\psi_n\}$ pode ser reordenado de modo que $\{\phi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ sejam biortogonais.*

(b) *Se* $\overline{\langle\{\psi_n : n \geq 1\}\rangle} = Z$, *então todo* $z \in Z$ *pode ser representado unicamente na forma*

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n, \tag{1.27}$$

e existem constantes positivas m *e* M *tais que*

$$m \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, \psi_n \rangle|^2 \leq \|z\|^2 \leq M \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, \psi_n \rangle|^2. \tag{1.28}$$

Prova: Para mostrar **(a)**, observemos primeiro que

$$\lambda_n \langle \phi_n, \psi_m \rangle = \langle A\phi_n, \psi_m \rangle = \langle \phi_n, A^* \psi_m \rangle = \langle \phi_n, \overline{\lambda_m} \psi_m \rangle = \lambda_m \langle \phi_n, \psi_m \rangle.$$

Ou seja, $(\lambda_n - \lambda_m)\langle \phi_n, \psi_m \rangle = 0$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Logo, se $\lambda_n \neq \lambda_m$, temos que $\langle \phi_n, \psi_m \rangle = 0$ para $n, m \in \mathbb{N}$. Como por hipótese os $\{\lambda_n : n \geq 1\}$ são autovalores simples, obtemos (1.26) redefinindo os vetores ψ_n.

Mostremos agora **(b)**. Sejam $z \in Z$ e $\{z^p\}_{p \in \mathbb{N}}$ uma sequência em Z com $z^p = \sum_{n=1}^{p} \alpha_n^p \phi_n$, e tal que $z^p \to z$, quando $p \to \infty$. Observe inicialmente que para $j \in \mathbb{N}$,

$$\langle z^p, \psi_j \rangle \quad = \quad \langle \sum_{n=1}^{p} \alpha_n^p \phi_n, \psi_j \rangle = \sum_{n=1}^{p} \alpha_n^p \langle \phi_n, \psi_j \rangle = \alpha_j^p,$$

de onde segue que $z^p = \sum_{n=1}^{p} \langle z^p, \psi_n \rangle \phi_n$ para todo $p \in \mathbb{N}$.

Para continuar, mostramos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, \psi_n \rangle|^2$ é convergente. Veja que para $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} |\langle z, \psi_n \rangle|^2 &\leq \frac{1}{m} \| \sum_{n=1}^{N} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n \|^2 \\
&= \frac{1}{m} \lim_{p \to \infty} \| \sum_{n=1}^{N} \langle z^p, \psi_n \rangle \phi_n \|^2 \\
&\leq \frac{M}{m} \lim_{p \to \infty} \sum_{n=1}^{N} |\langle z^p, \psi_n \rangle|^2 \\
&\leq \frac{M}{m} \limsup_{p \to \infty} \sum_{n=1}^{p} |\langle z^p, \psi_n \rangle|^2 \\
&\leq \frac{M}{m^2} \sup_{p \in \mathbb{N}} \| z^p \|^2,
\end{aligned}$$

o que prova que a sequência $\{\sum_{n=1}^{m} |\langle z, \psi_n \rangle|^2\}_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada e como consequência que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, \psi_n \rangle|^2$ é convergente.

Usando agora o fato que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, \psi_n\rangle|^2$ é convergente, podemos mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\langle z, \psi_n\rangle\phi_n$ é convergente em Z. De fato, para $N, P \in \mathbb{N}$ temos que

$$\| \sum_{n=N}^{P} \langle z, \psi_n\rangle\phi_n \|^2 \quad \leq \quad M \sum_{n=N}^{P} |\langle z, \psi_n\rangle|^2, \tag{1.29}$$

de onde concluímos que a sequência $\{\sum_{n=1}^{N}\langle z, \psi_n\rangle\phi_n\}_{N\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy e por tanto convergente em Z.

Mostremos que $z = \sum_{n=1}^{\infty}\langle z, \psi_n\rangle\phi_n$. Veja que para $j \in \mathbb{N}$,

$$\langle z - \sum_{n=1}^{\infty}\langle z, \psi_n\rangle\phi_n, \psi_j\rangle = \langle z, \psi_j\rangle - \sum_{n=1}^{\infty}\langle z, \psi_n\rangle\langle\phi_n, \psi_j\rangle = \langle z, \psi_j\rangle - \langle z, \psi_j\rangle = 0,$$

de onde segue que $\langle z - \sum_{n=1}^{\infty}\langle z, \psi_n\rangle\phi_n, x\rangle = 0$ para todo $x \in \langle\{\psi_n : n \geq 1\}\rangle$. Como $\overline{\langle\{\psi_n : n \geq 1\}\rangle} = Z$, obtemos que $\langle z - \sum_{n=1}^{\infty}\langle z, \psi_n\rangle\phi_n, x\rangle = 0$ para cada $x \in Z$ o que prova que $z = \sum_{n=1}^{\infty}\langle z, \psi_n\rangle\phi_n$.

Finalmente, usando que $z = \sum_{n=1}^{\infty}\langle z, \psi_n\rangle\phi_n$ e (1.25) com $\alpha_n = \langle z, \psi_n\rangle$, obtemos (1.28) pois N é arbitrário. Com isso a prova está completa. ■

Corolário 1.37. *Assuma as hipóteses do Lema 1.36. Se* $\overline{\langle\{\psi_n : n \geq 1\}\rangle} = Z$, *então,* $\{\psi_n : n \geq 1\}$ *também é uma base de Riesz para* Z. *Além disso, todo* $z \in Z$ *pode ser representado de maneira única na forma*

$$z = \sum_{n=1}^{\infty}\langle z, \phi_n\rangle\psi_n \tag{1.30}$$

e

$$\frac{1}{M}\sum_{n=1}^{\infty}|\langle z, \phi_n\rangle|^2 \leq \|z\|^2 \leq \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{\infty}|\langle z, \phi_n\rangle|^2. \tag{1.31}$$

Prova: Mostremos primeiramente uma desigualdade similar à (1.25) para a sequência $\{\psi_n : n \geq 1\}$. Seja $N > 0$. Sendo $\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\psi_n$ um elemento de Z, temos que

$$\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\psi_n\| = \sup_{y\in Z,\, y\neq 0}\frac{|\langle\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\psi_n, y\rangle|}{\|y\|} = \sup_{y\in Z,\, y\neq 0}\frac{|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\langle\psi_n, y\rangle|}{\|y\|}.$$

Logo, usando a desigualdade de Hölder e (1.28) vemos que

$$\begin{aligned}
\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\psi_n\|^2 &= \sup_{y\in Z,\, y\neq 0}\left(\frac{|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\langle\psi_n, y\rangle|}{\|y\|}\right)^2 \\
&\leq \sup_{y\in Z,\, y\neq 0}\left(\frac{\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2\sum_{n=1}^{N}|\langle\psi_n, y\rangle|^2}{\|y\|^2}\right) \\
&\leq \sup_{y\in Z,\, y\neq 0}\left(\frac{\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2\frac{1}{m}\|y\|^2}{\|y\|^2}\right) = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2.
\end{aligned}$$

Definamos agora, $y_0 = \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n}{\sqrt{\sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2}} \phi_n$. De (1.25) é fácil verificar que $\|y_0\|^2 \leq M$. Então,

$$\begin{aligned}
\|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \psi_n\|^2 &= \sup_{y \in Z,\, y \neq 0} \left(\frac{|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \langle \psi_n, y \rangle|}{\|y\|} \right)^2 \\
&\geq \left(\frac{|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \langle \psi_n, y_0 \rangle|}{\|y_0\|} \right)^2 \\
&= \left(\frac{\sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2}{\|y_0\| \sqrt{\sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2}} \right)^2 \\
&= \frac{\sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2}{\|y_0\|^2} \\
&\geq \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2.
\end{aligned}$$

Do que fizemos, temos que

$$\frac{1}{M} \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2 \leq \|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \psi_n\|^2 \leq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2,$$

o que mostra que $\{\psi_n : n \geq 1\}$ é uma base de Riesz para Z. A representação (1.30) e a desigualdade (1.31) seguem do Lema 1.36, o que completa a prova.■

Definição 1.38. *Seja A um operador linear fechado em Z, com autovalores simples $\{\lambda_n : n \geq 1\}$ e assuma que os autovetores correspondentes $\{\phi_n : n \geq 1\}$ formem uma base de Riesz para Z. Se o fecho de $\{\lambda_n : n \geq 1\}$ é totalmente desconexo, então A é chamado um operador espectral de Riesz.*

Observação 1.39. *Lembre que totalmente desconexo significa que, dados $\lambda, \mu \in \overline{\{\lambda_n : n \geq 1\}}$, não existe seguimento unindo λ e μ que esteja totalmente contido em $\overline{\{\lambda_n : n \geq 1\}}$.*

O próximo resultado impõe condições sobre um operador linear A, para garantir que A seja o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Mais ainda, conseguimos a representação deste semigrupo. No próximo resultado, $\sigma(A) = \rho(A)^c$ é o espectro de A.

Teorema 1.40. *Seja A um operador espectral de Riesz com autovalores simples $\{\lambda_n : n \geq 1\}$ e autovetores correspondentes $\{\phi_n : n \geq 1\}$. Sejam $\{\psi_n : n \geq 1\}$, os autovetores de A^* e assuma que $\langle \phi_n, \psi_m \rangle = \delta_{mn}$ para todo n, m e que $\overline{\langle \{\psi_n : n \geq 1\} \rangle} = Z$. Então A satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) *O conjunto resolvente e o espectro de A são dados por $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \inf_{n\geq 1} |\lambda - \lambda_n| > 0\}$ e $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n : n \geq 1\}}$, respectivamente. Mais ainda, para $\lambda \in \rho(A)$ e $z \in Z$,*

$$R(\lambda : A)z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n. \tag{1.32}$$

(b) *Para cada $z \in D(A)$,*

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle\ z, \psi_n \rangle \phi_n, \tag{1.33}$$

e $D(A) = \{z \in Z : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle\ z, \psi_n \rangle|^2 < \infty\}$.

(c) *O operador A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ se, e somente se, $\sup_{n\geq 1} Re\, \lambda_n < \infty$. Mais ainda, para $t > 0$ e $z \in Z$,*

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n. \tag{1.34}$$

Prova: Provemos inicialmente **(a)**. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\inf_{n\geq 1} |\lambda - \lambda_n| \geq \alpha > 0$. Mostremos que $(\lambda I - A)^{-1} = A_\lambda$, onde A_λ é o operador dado por $A_\lambda z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n$. Veja primeiro que A_λ é limitado, pois de (1.25) e (1.28) temos que

$$\begin{aligned} \|A_\lambda z\|^2 &\leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda - \lambda_n|^2} |\langle z, \psi_n \rangle|^2 \\ &\leq \frac{M}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, \psi_n \rangle|^2 \\ &\leq \frac{M}{m\alpha^2} \|z\|^2. \end{aligned}$$

Agora, defina $y_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n$. É claro que $y_N \to A_\lambda z$ quando $N \to \infty$. Além disso, como ϕ_n é autovetor associado a λ_n, temos que

$$\begin{aligned} (\lambda I - A) y_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle z, \psi_n \rangle (\lambda I - A) \phi_n \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle z, \psi_n \rangle (\lambda - \lambda_n) \phi_n \\ &= \sum_{n=1}^{N} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n, \end{aligned}$$

o que, do Lema 1.36, implica que $(\lambda I - A)y_N \to z$ quando $N \to \infty$. Como A é fechado, segue que $A_\lambda z \in D(A)$ e que

$$(\lambda I - A)A_\lambda z = z, \quad \text{para todo} \quad z \in Z. \tag{1.35}$$

Seja agora $y \in D(A)$ e defina $x = (\lambda I - A)y$. De (1.35) temos que $x = (\lambda I - A)A_\lambda x = (\lambda I - A)A_\lambda(\lambda I - A)y$. Logo, $0 = x - x = (\lambda I - A)[y - A_\lambda(\lambda I - A)y]$, de onde obtemos que $A_\lambda(\lambda I - A)y = y$, pois λ não é autovalor de A. Isto, junto com (1.35) mostra que $\lambda \in \rho(A)$ e que $A_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda : A)$. Portanto, $\{\lambda \in \mathbb{C} : \inf_{n\geq 1} |\lambda - \lambda_n| > 0\} \subset \rho(A)$.

Por outro lado, como $\lambda_n \in \sigma(A)$ e o espectro de um operador fechado é fechado, temos

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \inf_{n\geq 1} |\lambda - \lambda_n| > 0\}^c \subset \overline{\{\lambda_n : n \geq 1\}} \subset \overline{\sigma(A)} = \sigma(A) = \rho(A)^c,$$

o que completa a prova da parte **(a)** do Teorema.

Para provar **(b)**, mostremos primeiro que $S = \{z \in Z : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle\, z, \psi_n\rangle|^2 < \infty\} \subset D(A)$ e que (1.33) vale para todo $z \in S$. Dado $z \in S$, defina $z_N = \sum_{n=1}^{N} \langle\, z, \psi_n\rangle \phi_n$. Então,

$$Az_N = \sum_{n=1}^{N} \langle\, z, \psi_n\rangle A\phi_n = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle\, z, \psi_n\rangle \phi_n.$$

Assim, do Lema 1.36 segue que $z_N \to z$ quando $N \to \infty$ e de (1.25) deduzimos que $Az_N \to \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle\, z, \psi_n\rangle \phi_n$ em Z, pois $z \in S$. Como A é fechado, $z \in D(A)$ e $Az = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle\, z, \psi_n\rangle \phi_n$. Portanto, $S \subset D(A)$ e (1.33) vale para $z \in S$.

Do que fizemos, resta mostrarmos que $D(A) \subset S$. Seja $\lambda \in \rho(A)$ e fixemos $x \in D(A)$, $y \in Z$ tais que $x = (\lambda I - A)^{-1} y$. Por **(a)** e (1.27) sabemos, respectivamente, que $x = (\lambda I - A)^{-1} y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle y, \psi_n\rangle \phi_n$ e que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \psi_n\rangle \phi_n$, o que da unicidade da representação de Riesz, permite concluir que $\dfrac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle y, \psi_n\rangle = \langle x, \psi_n\rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\mu = \inf_{n\geq 1} |\lambda - \lambda_n| > 0$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle\, x, \psi_n\rangle|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \right|^2 |\langle\, y, \psi_n\rangle|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_n} - 1 \right|^2 |\langle\, y, \psi_n\rangle|^2 \\
&\leq \left[\frac{|\lambda|}{\mu} + 1 \right]^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle\, y, \psi_n\rangle|^2 \\
&\leq \frac{1}{m} \left[\frac{|\lambda|}{\mu} + 1 \right]^2 \|y\|^2 < \infty,
\end{aligned}$$

o que prova que $x \in S$ e assim que $D(A) \subset S$. Portanto, $D(A) = S$ o que completa a prova de **(b)**.

Vejamos finalmente a propriedade **(c)**. Suponhamos primeiro que A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ tal que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, para algum $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$. Do Corolário 1.20, segue que $\rho(A) \supset \{\lambda : Re\,\lambda > \omega\}$ e como consequência que $\sup\limits_{n\geq 1} Re\,\lambda_n < \omega + 1$.

Suponhamos agora que $\omega = \sup\limits_{n\geq 1} Re\,\lambda_n < \infty$ e seja $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Re\,\lambda > \omega$. Nestas condições, $\lambda \in \sigma(A)^c = \rho(A)$ e de **(a)**,

$$(\lambda I - A)^{-1} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n, \quad z \in Z.$$

Mais ainda, é fácil ver que

$$\begin{aligned}
(\lambda I - A)^{-2} z &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle (\lambda I - A)^{-1} z, \psi_n \rangle \phi_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \left\langle \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_m} \langle z, \psi_m \rangle \phi_m, \psi_n \right\rangle \phi_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - \lambda_n)^2} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n,
\end{aligned}$$

e um processo indutivo mostra que

$$(\lambda I - A)^{-r} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - \lambda_n)^r} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n, \quad \text{para todo} \quad r \in \mathbb{N}.$$

Usando a identidade anterior, (1.25) e (1.28) segue que

$$\|(\lambda I - A)^{-r} z\|^2 \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda - \lambda_n|^{2r}} |\langle z, \psi_n \rangle|^2 \leq \frac{M}{m} \frac{\|z\|^2}{(Re\,\lambda - \omega)^{2r}},$$

o que mostra que

$$\|R(\lambda : A)^r\| \leq \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{1}{(Re\,\lambda - \omega)^r}, \quad \text{para} \quad Re\,\lambda > \omega, r \in \mathbb{N}.$$

Aplicando agora o Teorema de Hille-Yosida, Teorema 1.22, segue que A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ tal que $\|T(t)\| \leq \sqrt{\frac{M}{m}} e^{\omega t}$ para todo $t > 0$.

Finalmente, para mostrarmos (1.34) defina o operador e^{tA} em Z, por $e^{tA} z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n$. Note que e^{tA} é um operador limitado para todo $t > 0$, pois

$$\|e^{tA} z\|^2 \leq M \sum_{n=1}^{\infty} e^{2t Re\,\lambda_n} |\langle z, \psi_n \rangle|^2 \leq \frac{M e^{2\omega t}}{m} \|z\|^2.$$

Além disso, para $Re\,\lambda > \omega$ vemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{tA} z dt &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\sum_{n=1}^\infty e^{\lambda_n t} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n \right) dt \\
&= \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty e^{(\lambda_n - \lambda)t} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n \right) dt \\
&= \sum_{n=1}^\infty \langle z, \psi_n \rangle \phi_n \int_0^\infty e^{(\lambda_n - \lambda)t} dt \\
&= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n = R(\lambda : A) z.
\end{aligned}$$

Da prova do Teorema de Hille-Yosida sabemos que $R(\lambda : A)z = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) z \; dt$, o que implica que $\int_0^\infty e^{-\lambda t} [e^{tA} z - T(t)z] \; dt = 0$ para todo $Re\,\lambda > \omega$. Agora da unicidade da Transformada de Laplace, concluímos que $T(t)z = e^{tA} z = \sum_{n=1}^\infty e^{\lambda_n t} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n$ para todo $z \in Z$, completando a prova do Teorema. ■

Apresentamos agora uma aplicação dos resultados anteriores.

Exemplo 1.41. Consideremos em $Z = (L^2[0, \pi], \| \cdot \|_2)$ o operador $A : D(A) \subset Z \longrightarrow Z$, dado por $Af = f''$ com domínio, $D(A) = \{f \in Z : f'' \in Z, \; f(0) = f(\pi) = 0\}$. Como uma aplicação do Teorema 1.40, veremos que A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo compacto em Z. Para este fim incluímos, sem demonstração, o seguinte Lema.

Lema 1.42. *Sejam X um espaço de Banach e $T : D(T) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear. Se T é invertível e $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, então T é fechado.*

Usando este resultado, mostraremos que $(I - A)$ é fechado e como consequência que A é fechado. Para provarmos que $(I - A)^{-1}$ existe, precisamos mostrar que para $g \in Z$ existe $f_g \in Z$ tal que $(I - A) f_g = g$. Isto é equivalente a resolver a seguinte equação diferencial

$$\begin{cases} f_g''(x) - f_g(x) &= -g(x), \quad 0 < x < \pi, \\ f_g(0) = f_g(\pi) &= 0. \end{cases} \tag{1.36}$$

Da teoria de equações diferenciais, o sistema (1.36) tem uma única solução dada por

$$\begin{aligned}
f_g(x) &= \frac{1}{2(e^\pi - e^{-\pi})} \int_0^\pi [e^{(\pi - |x-y|)} + e^{-(\pi - |x-y|)} - e^{(\pi - x - y)} - e^{-(\pi - x - y)}] g(y) \; dy \\
&= \frac{1}{2(e^\pi - e^{-\pi})} \int_0^\pi h(x, y) g(y) \; dy.
\end{aligned}$$

Além disso, se $\mid h(x,y) \mid \leq C$ para $x, y \in [0,\pi]$, da desigualdade de Hölder temos que

$$\begin{aligned}
\| (I-A)^{-1}g \|_2^2 = \|f_g\|_2^2 &= \int_0^\pi |f_g(x)|^2 \, dx = \int_0^\pi \left| \frac{1}{2(e^\pi - e^{-\pi})} \int_0^\pi h(x,y)g(y) \, dy \right|^2 dx \\
&\leq \frac{C^2}{4(e^\pi - e^{-\pi})^2} \int_0^\pi \left(\int_0^\pi |g(y)| \, dy \right)^2 dx \\
&\leq \frac{C^2}{4(e^\pi - e^{-\pi})^2} \int_0^\pi \left(\int_0^\pi 1^2 \, dy \int_0^\pi |g(y)|^2 \, dy \right) dx \\
&= \frac{C^2\pi^2}{4(e^\pi - e^{-\pi})^2} \|g\|_2^2,
\end{aligned}$$

o que implica que $(I-A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Agora, do Lema 1.42 concluímos que $(I-A)$ é fechado e portanto que A é também fechado.

No que segue, mostraremos que A é um operador espectral de Riesz. Considere para isto, a seguinte equação diferencial

$$\begin{cases} z''(x) - \lambda z(x) &= 0, \quad 0 < x < \pi, \\ z(0) = z(\pi) &= 0. \end{cases} \tag{1.37}$$

Da teoria geral de equações diferenciais ordinárias, sabemos que as soluções de (1.37) são da forma $z(\xi) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\,\xi) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\,\xi)$, onde c_1, c_2 são constantes reais. Impondo as condições iniciais em (1.37), obtemos que $c_1 = 0$ e que $c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\,\xi) = 0$. Assim, sendo $c_2 \neq 0$, chegamos que os autovalores de A são da forma $\lambda_n = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$ com autovetores unitários associados dados por $z_n(\xi) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \sin(n\xi)$, $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, é fácil ver que os autovetores $z_n(\cdot)$ são ortonormais e da teoria clássica de análise funcional, sabemos que $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base Hilbertiana para Z, veja Brezis [4, pp. 87], o que em particular mostra que $D(A)$ é denso em X. Como obviamente, o conjunto $\rho = \{-n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ é totalmente desconexo, dos comentários anteriores podemos concluir que A é um operador espectral de Riesz.

Para completar nossa análise, precisamos achar os autovetores de $A^* : D(A^*) \subset X \longrightarrow X$ (o adjunto de A), associados aos autovalores $\overline{\lambda}_n = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$ de A^*.

Sejam $f, g \in D(A)$. Então, aplicando integração por partes obtemos

$$\begin{aligned}
\langle Af, g\rangle = \langle f'', g\rangle &= \int_0^\pi f''(x)\overline{g(x)}\, dx \\
&= \overline{g(x)}f'(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\overline{g'(x)}\, dx \\
&= -\int_0^\pi f'(x)\overline{g'(x)}\, dx \\
&= -\overline{g'(x)}f(x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi f(x)\overline{g''(x)}\, dx \\
&= \int_0^\pi f(x)\overline{g''(x)}dx = \langle f, Ag\rangle.
\end{aligned}$$

Como f, g são arbitrários, do que fizemos antes podemos concluir que $A^*g = Ag$ para todo $g \in D(A)$. Segue em particular, que cada z_n é também autovetor de A^*.

Dos fatos anteriores, vemos que A verifica as hipóteses do Teorema 1.40. Portanto, A é o gerador de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ em Z. Mais ainda, as seguintes propriedades são verificadas.

(i) A possui espectro discreto, os autovalores são da forma $-n^2$, $n \in \mathbb{N}$, com correspondentes autovetores $z_n(\xi) := (2/\pi)^{1/2}\sin(n\xi)$. Além disso, o conjunto $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal de Z.

(ii) Se $f \in D(A)$, então $Af = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2\langle f, z_n\rangle z_n$.

(iii) Para cada $f \in X$, $T(t)f = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}\langle f, z_n\rangle z_n$. Mais ainda, segue desta expressão que $\|T(t)\| \leq e^{-t} \leq 1$ para todo $t \geq 0$.

Capítulo 2

O Problema Abstrato de Cauchy

Neste capítulo temos como objetivo básico o estudo do problema semilinear

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} &= Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \in (0, a), \\ u(0) &= x, \end{cases}$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo em X.

No decorrer deste capítulo, X é um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ em X. Como antes, $\mathcal{L}(X)$ representa o espaço dos operadores lineares de X em X, munido da norma da convergência uniforme.

2.1 O Problema de Valor Inicial Homogêneo

Dado $x \in X$, o problema abstrato de Cauchy para A com valor inicial x, consiste em achar uma solução $u(\cdot)$ para

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} &= Au(t), \quad t > 0, \\ u(0) &= x. \end{cases} \tag{2.1}$$

Definição 2.1. *Uma função $u(\cdot) \in C([0, \infty) : X)$ é uma solução do problema de valor inicial* (2.1) *se $u(\cdot)$ é continuamente diferenciável em $(0, \infty)$, $u(t) \in D(A)$ para $t > 0$ e* (2.1) *é satisfeita.*

Se $x \in D(A)$, do Teorema 1.10 seque que a função $u(t) = T(t)x$ é a única solução de (2.1). De fato, se $v(\cdot)$ é outra solução de (2.1), para $t > 0$ e $0 < s < t$ temos que

$$\frac{d}{ds}T(t-s)v(s) = T(t-s)\left[\frac{d}{ds}v(s) - Av(s)\right] = 0. \tag{2.2}$$

Integrando (2.2) entre 0 e t obtemos que $v(t) - T(t)v(0) = 0$, e assim que $v(t) = T(t)x = u(t)$, para todo $t > 0$.

2.2 O Problema de Valor Inicial não Homogêneo

Nesta seção estudaremos o problema de valor inicial não homogêneo,

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} &= Au(t) + f(t), \quad 0 < t < a \\ u(0) &= x, \quad x \in X, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $f : [0, a] \to X$ é uma função apropriada.

Primeiramente definiremos o conceito de solução clássica para (2.3).

Definição 2.2. *Uma função $u \in C([0, a], X)$ é uma solução clássica do problema de valor inicial* (2.3) *se $u(\cdot) \in C^1([0, a], X)$; $u(t) \in D(A)$ para todo $0 < t < a$ e* (2.3) *é satisfeita.*

Lema 2.3. *Se $f \in L^1([0, a]; X)$, então o problema de valor inicial* (2.3) *tem no máximo uma solução clássica. Mais ainda, se $u(\cdot)$ é solução clássica de* (2.3) *então,*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\, ds, \quad t \in [0, a]. \tag{2.4}$$

Prova: Seja $u(\cdot)$ uma solução clássica de (2.3). Então a função $g(s) = T(t-s)u(s)$ é diferenciável em $(0, t)$ e

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds} &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s) \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)f(s). \end{aligned}$$

Como $f \in L^1([0, a]; X)$, a função $s \to T(t-s)f(s)$ é integrável sobre $[0, t]$. Logo, integrando a igualdade acima entre 0 e t, obtemos que

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \tag{2.5}$$

e como $u(\cdot)$ é contínua, segue que (2.5) vale para todo $t \in [0, a]$.

A unicidade de $u(\cdot)$ é uma consequência direta da representação (2.5). A prova está completa.

Se $f \in L^1([0,a];X)$, o lado direito de (2.4) define uma função contínua em $[0,a]$. Logo, de maneira natural, podemos considerar (2.4) como uma solução generalizada de (2.3) mesmo se ela não for diferenciável e não satisfizer estritamente a equação no sentido da Definição 2.2. Considerando isto, introduzimos a seguinte definição.

Definição 2.4. *Seja $x \in X$ e $f \in L^1([0,a] : X)$. A função $u \in C([0,a] : X)$ dada por* (2.4) *é chamada solução fraca do problema de valor inicial* (2.3) *em* $[0,a]$.

Agora estamos interessados em estabelecer condições sobre f e x de modo que uma solução fraca seja uma solução clássica. Isso é o que faremos no próximo resultado.

Teorema 2.5. *Sejam $f \in L^1([0,a] : X) \cap C((0,a) : X)$, $x \in D(A)$ e $v \in C([0,a] : X)$ a função definida por*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\, ds, \quad 0 \leq t \leq a. \tag{2.6}$$

O problema de valor inicial (2.3) *tem uma solução clássica $u(\cdot)$ se uma das seguintes condições é satisfeita;*

(i) *v é continuamente diferenciável em $(0,a)$.*

(ii) *$v(t) \in D(A)$ para $0 < t < a$ e Av é contínua em $(0,a)$.*

Mais ainda, se (2.3) *tem uma solução clássica, então v satisfaz ambos* **(i)** *e* **(ii)**.

Prova: Suponhamos primeiro que (2.3) tem uma solução clássica $u(\cdot)$. Sabemos do Lema 2.3 que esta solução é dada por $u(t) = T(t)x + v(t)$. Claramente $v(t) = u(t) - T(t)x$ é diferenciável em $(0,a)$ e $v'(t) = u'(t) - T(t)Ax$ é contínua em $(0,a)$. Com isso provamos que v satisfaz a condição **(i)**. Além disso, como $x \in D(A)$, temos que $T(t)x \in D(A)$ para $t \geq 0$ e então $v(t) = u(t) - T(t)x \in D(A)$ para $0 < t < a$. Logo, como $Av(t) = Au(t) - AT(t)x = u'(t) - f(t) - T(t)Ax$ é contínua em $(0,a)$, provamos que v satisfaz a condição **(ii)**.

Suponha agora que a condição **(i)** é verificada. Observe inicialmente que para $t \in (0,a)$ e $h > 0$ tal que $t + h \in (0,a)$ temos que

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}v(t) &= \frac{1}{h}\int_0^t T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
&= \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Como f é contínua e $(T(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo, segue que o segundo termo do lado direito de (2.7) tem limite $f(t)$ quando $h \to 0$. Como $v(\cdot)$ é diferenciável em $(0,a)$ segue de (2.7) que $v(t) \in D(A)$ e que $Av(t) = v'(t) - f(t)$ para $t \in (0,a)$. Isto, juntamente com o fato de $v(0) = 0$, implica que $u(t) = T(t)x + v(t)$ é solução clássica de (2.3). De fato, é fácil ver que $u(\cdot)$ é contínua em $[0,a]$, continuamente diferenciável em $(0,a)$ e que $u(t) \in D(A)$ para $0 < t < a$. Além disso, temos que $u(0) = x$ e que $u'(t) = AT(t)x + v'(t) = AT(t)x + Av(t) + f(t) = A(T(t)x + v(t)) + f(t) = Au(t) + f(t)$, para todo $t \in (0,a)$.

Suponhamos agora que a condição **(ii)** é satisfeita. Como $v(t) \in D(A)$ para $0 < t < a$, segue de (2.7) que v é diferenciável pela direita e que $D^+v(t) = Av(t) + f(t)$, para todo $t \in (0,a)$. Agora, como f e Av são contínuas em $(0,a)$, D^+v é contínua em $(0,a)$. Daí segue que v é continuamente diferenciável em $(0,a)$ e que $v'(t) = Av(t) + f(t)$, $t \in (0,a)$. Como no caso anterior, é fácil verificar que $u(t) = T(t)x + v(t)$ é solução clássica de (2.3). Agora a prova está completa ■

Do Teorema anterior seguem os seguintes Corolários.

Corolário 2.6. *Se f é continuamente diferenciável em $[0,a]$, então o problema de valor inicial* (2.3) *tem uma solução clássica para todo $x \in D(A)$.*

Prova: Seja $v(\cdot)$ a função definida em (2.6). Se $t \in (0,a)$ e $h > 0$ são tais que $t + h \in (0,a)$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{v(t+h) - v(t)}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^h T(t+h-s)f(s)ds + \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^h T(t+h-s)f(s)ds + \frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s+h)ds \\
&\quad -\frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
&= T(t)\frac{1}{h}\int_0^h T(h-s)f(s)ds + \int_0^t T(t-s)\frac{f(s+h)-f(s)}{h}ds.
\end{aligned}$$

Usando agora o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e o fato que f é continuamente diferenciável em $(0,a)$, concluímos que D^+v existe em $[0,a]$ e que

$$D^+v(t) = T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)ds.$$

Mais ainda, $D^+v(\cdot)$ é contínua em $[0,a]$. Daí segue que $v(\cdot)$ é continuamente diferenciável em $(0,a)$ e que

$$v'(t) = T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)\ ds.$$

Portanto, v satisfaz a condição **(i)** do Teorema 2.5 e assim o sistema (2.3) possui uma solução clássica. ■

Corolário 2.7. *Seja $f \in L^1([0,a] : X) \cap C((0,a) : X)$. Se $f(s) \in D(A)$ para todo $s \in (0,a]$ e $Af \in L^1([0,a] : X)$ então para todo $x \in D(A)$ o problema de valor inicial* (2.3) *tem uma solução clássica.*

Prova: Seja $v(\cdot)$ a função definida em (2.6). De nossas hipóteses concluímos que $T(t-s)f(s) \in D(A)$, para todo $s < t < a$ e que $AT(t-s)f(s) = T(t-s)Af(s)$ é integrável. Além disso, como A é fechado, segue pelo Lema 1.17 que $v(t) \in D(A)$ para todo $0 < t \leq a$, e que

$$Av(t) = A\int_0^t T(t-s)f(s)\ ds = \int_0^t T(t-s)Af(s)\ ds,$$

Daí segue que $Av(\cdot)$ é contínua em $(0,a)$. Portanto, $v(\cdot)$ verifica a condição **(ii)** do Teorema 2.5, o que mostra que existe uma solução clássica para (2.3). ■

Como consequência dos resultados anteriores e da densidade de $D(A)$ em X, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.8. *Sejam $f \in L^1([0,a] : X)$ e $x \in X$. Se $u(\cdot)$ é solução fraca de* (2.3)*, então $u(\cdot)$ é o limite uniforme em $[0,a]$ de soluções clássicas de* (2.3)*.*

Prova: Sejam $x \in X$ e M, ω constantes positivas tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ para $t \in [0,a]$. Sejam $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in D(A)$ tal que $x_n \to x$ e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $C^1([0,a] : X)$ tal que $f_n \to f$ em $L^1([0,a] : X)$. Do Corolário 2.6 sabemos que, para cada $n \geq 1$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d\omega(t)}{dt} &= A\omega(t) + f_n(t), \quad 0 < t \leq a \\ \omega(0) &= x_n \end{cases} \tag{2.8}$$

tem uma solução clássica $u_n(\cdot)$, a qual é dada por

$$u_n(t) = T(t)x_n + \int_0^t T(t-s)f_n(s)\ ds, \quad 0 \leq t \leq a.$$

Por outro lado, se $u(\cdot)$ é uma solução fraca de (2.3), então

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\ ds, \quad 0 \leq t \leq a.$$

Disto, para $0 \leq t \leq a$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u(t)\| &\leq Me^{\omega t}\|x_n - x\| + \int_0^t Me^{\omega(t-s)}\|f_n(s) - f(s)\|\ ds \\ &\leq Me^{\omega a}\left(\|x_n - x\| + \int_0^a \|f_n(s) - f(s)\|\ ds\right), \end{aligned}$$

de onde concluímos facilmente que $u_n \to u$ em $C([0,a]:X)$, completando a prova.

Concluímos esta seção estudando o conceito de solução forte para (2.3).

Definição 2.9. *Uma função $u \in C([0,a]:X)$ é uma solução forte de (2.3), se $u(\cdot)$ é diferenciável q.t.p. em $[0,a]$; $u' \in L^1([0,a]:X)$; $u(0) = x$ e $u'(t) = Au(t) + f(t)$ q.t.p. em $[0,a]$.*

Obviamente uma solução clássica de (2.3) é uma solução forte. Pode-se mostrar também que uma solução forte de (2.3) é uma solução fraca. Assim um problema natural é determinar quando ocorre o contrário.

Teorema 2.10. *Sejam $f \in L^1([0,a]:X)$, $x \in D(A)$ e $v \in C([0,a]:X)$ a função definida por*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\ ds, \quad 0 \leq t \leq a. \tag{2.9}$$

O problema de valor inicial (2.3) tem uma solução forte, se uma das seguintes condições é satisfeita.

(i) *v é diferenciável q.t.p. sobre $[0,a]$ e $v'(\cdot) \in L^1([0,a]:X)$.*

(ii) *$v \in D(A)$ q.t.p. sobre $[0,a]$ e $Av \in L^1([0,a]:X)$.*

Mais ainda, se (2.3) tem uma solução forte, então v satisfaz **(i)** *e* **(ii)**.

Prova: A prova é basicamente a mesma do Teorema 2.5. Observando apenas que o termo

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)\ ds \to f(t)$$

q.t.p. sobre $[0,a]$, pois $f \in L^1([0,a]:X)$. ■

De maneira similar ao caso de soluções clássicas temos o seguinte resultado.

Corolário 2.11. *Seja $x \in D(A)$. Se f é diferenciável q.t.p. sobre $[0,a]$ e $f' \in L^1([0,a]:X)$, então o problema de valor inicial* (2.3) *tem uma única solução forte.*

Corolário 2.12. *Sejam $x \in D(A)$ e $f \in L^1([0,a]:X)$. Se $f(s) \in D(A)$ para todo $s \in (0,a)$ e $Af \in L^1([0,a]:X)$, então o problema de valor inicial* (2.3) *tem uma única solução forte.*

2.3 O Problema de Valor Inicial Semilinear

Nesta seção estudamos o seguinte problema de valor inicial semilinear

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} &= Au(t) + f(t,u(t)), \quad t_0 < t < a, \\ u(t_0) &= u_0, \ u_0 \in X, \end{cases} \tag{2.10}$$

onde $f : [t_0,a] \times X \to X$ é uma função apropriada.

Definição 2.13. *Uma função $u \in C([t_0,b]:X)$, $0 < b \leq a$, é uma solução clássica do problema de valor inicial* (2.10) *em $(0,b)$ se $u(\cdot)$ é continuamente diferenciável em (t_0,b); $u(t) \in D(A)$ para todo $t_0 < t < b$ e* (2.10) *é satisfeita em $[0,b)$.*

Se $f \in C([t_0,a]:X)$ e $u \in C([t_0,a]:X)$ é uma solução clássica de (2.10), segue do Lema 2.3 que

$$u(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s))\,ds, \quad t \in [t_0,a]. \tag{2.11}$$

Logo, é natural a seguinte definição.

Definição 2.14. *Uma função $u \in C([t_0,b]:X)$, $0 < b \leq a$ é chamada solução fraca do problema de valor inicial* (2.10) *em $[t_0,b]$ se u verifica* (2.11) *em $[t_0,b]$.*

O próximo Teorema estabelece a existência e unicidade de soluções fracas de (2.10) no caso em que f é Lipschitz.

Teorema 2.15. *Seja $f : [t_0,a] \times X \to X$ contínua em $[t_0,a]$ e uniformemente Lipschitz em X. Então, para todo $u_0 \in X$, o problema de valor inicial* (2.10) *tem uma única solução fraca $u(\cdot,u_0)$ em $[0,a]$. Além disso, a aplicação $x_0 \to u(\cdot,x_0)$ é Lipschitz de X em $C([t_0,a]:X)$.*

Prova: Sejam $u_0 \in X$ e $M > 0$ tal que $\|T(t-t_0)\| \leq M$, para todo $t \in [t_0, a]$. Como f é uniformemente Lipschitz em X, existe uma constante $L > 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|, \quad x, y \in X, \quad t \in [t_0, a].$$

Sobre o espaço $C([t_0, a] : X)$, munido da norma da convergência uniforme $\|u\| = \sup_{s \in [t_0,a]} \|u(s)\|$, definimos a função $F : C([t_0, a] : X) \to C([t_0, a] : X)$ por

$$Fu(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s, u(s))ds. \tag{2.12}$$

Logo, para $t_0 \leq t \leq a$, vemos que

$$\begin{aligned} \|Fu(t) - Fv(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|T(t-s)\| \, \|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\| \, ds \\ &\leq ML \int_{t_0}^{t} \|u(s) - v(s)\| \, ds \\ &\leq ML(t-t_0)\|u-v\|. \end{aligned}$$

Daí segue, por indução, que

$$\|F^n u(t) - F^n v(t)\| \leq \frac{(ML(t-t_0))^n}{n!}\|u-v\|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, a]. \tag{2.13}$$

De fato, suponhamos que a desigualdade (2.13) seja válida para $n-1$. Então,

$$\begin{aligned} \|F^n u(t) - F^n v(t)\| &= \|F(F^{n-1})u(t) - F(F^{n-1})v(t)\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|T(t-s)\| \, \|f(s, F^{n-1}u(s)) - f(s, F^{n-1}v(s))\| \, ds \\ &\leq ML \int_{t_0}^{t} \|F^{n-1}u(s) - F^{n-1}v(s)\| \, ds \\ &\leq ML \int_{t_0}^{t} \frac{(ML(s-t_0))^{n-1}}{(n-1)!}\|u-v\| \, ds \\ &\leq \frac{(ML(t-t_0))^n}{n!}\|u-v\|. \end{aligned}$$

Com isso obtemos (2.13), para todo $n \in \mathbb{N}$. Como consequência,

$$\|F^n u - F^n v\| \leq \frac{(MLa)^n}{n!}\|u-v\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como para n suficientemente grande $\dfrac{(MLa)^n}{n!} < 1$, pelo Princípio da Contração de Banach, podemos assumir que F^n possui um único ponto fixo $u \in C([t_0, a] : X)$. Isto implica que $u(\cdot)$ também é ponto fixo de F e como consequência uma solução fraca de (2.10).

Se $u(\cdot, u_0)$ representa a solução fraca de (2.10) com $u(0) = u_0$, então, para u_0, $v_0 \in X$ vemos que

$$\begin{aligned} \|u(t,u_0) - u(t,v_0)\| &\leq \|T(t-t_0)\|\|u_0 - v_0\| + \int_{t_0}^{t} \|T(t-s)\|\|f(s,u(s,u_0)) - f(s,u(s,v_0))\| \, ds \\ &\leq M\|u_0 - v_0\| + ML \int_{t_0}^{t} \|u(s,u_0) - u(s,v_0)\| \, ds, \end{aligned}$$

e pela Desigualdade de Gronwall,

$$\|u(t,u_0) - u(t,v_0)\| \leq Me^{ML(a-t_0)}\|u_0 - v_0\|.$$

Portanto

$$\|u(\cdot,u_0) - u(\cdot,v_0)\|_\infty \leq Me^{ML(a-t_0)}\|u_0 - v_0\|,$$

o que prova que a aplicação $u_0 \to u(\cdot, u_0)$ é Lipschitz de X em $C([t_0, a] : X)$. A prova está agora completa. ■

Corolário 2.16. *Assuma que as condições do Teorema* 2.15 *são satisfeita e seja* $g \in C([t_0, a] : X)$. *Então a equação integral*

$$\omega(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,\omega(s)) \, ds, \quad t \in [t_0, a], \tag{2.14}$$

tem uma única solução $\omega \in C([t_0, a] : X)$.

Prova: Basta modificarmos na prova do Teorema 2.15 a definição de F dada em (2.12) por

$$Fu(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s)) \, ds.$$

■

A condição Lipschitz uniforme da função f no Teorema 2.15 garante a existência de uma única solução fraca global de (2.10), ou seja, definida em todo $[t_0, a]$. Assumindo que f satisfaz apenas uma condição Lipschitz local em X, uniformemente para t em intervalos limitados, podemos mostrar a existência de solução local. Antes de nosso próximo resultado, lembramos que f é localmente Lipschitz em X, uniformemente para t em intervalos limitados, se para todo $t' \geq 0$ e todo $c \geq 0$ existe uma constante $L(c, t')$ tal que

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq L(c,t') \, \|u - v\|, \tag{2.15}$$

para todo $\|u\| \leq c$, $\|v\| \leq c$ e $t \in [0, t']$.

Teorema 2.17. *Seja $f : [0,\infty) \times X \to X$ contínua e localmente Lipschitz em X, uniformemente em t em intervalos limitados. Então, para todo $x_0 \in X$ existe $t_{max} \leq \infty$ e $u \in C([0, t_{max} : X)$ tal que $u(\cdot)$ é solução fraca do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} &= Au(t) + f(t, u(t)), \quad t > 0, \\ u(0) &= x_0, \ x_0 \in X, \end{cases} \tag{2.16}$$

em $[0, b]$ para todo $0 < b < t_{max}$. Além disso, se $t_{max} < \infty$ então $\lim\limits_{t \uparrow t_{max}} \|u(t)\| = \infty$.

Prova: Mostremos primeiro que para todo $t_0 \geq 0$ e $u_0 \in X$ ($u_0 \neq 0$), o problema de valor inicial (2.10) tem, sob as hipóteses do nosso Teorema, uma única solução fraca no intervalo $[t_0, t_1]$, cujo comprimento é limitado por

$$\delta(t_0, \|u_0\|) = \min\left\{1, \frac{\|u_0\|}{K(t_0)L(K(t_0), t_0 + 1) + N(t_0)}\right\}, \tag{2.17}$$

onde $L(c, t)$ é a constante Lipschitz local de f, como definida em (2.15), $M(t_0) = \max\{\|T(t)\| : 0 \leq t \leq t_0 + 1\}$, $K(t_0) = 2\|u_0\|M(t_0)$ e $N(t_0) = \max\{\|f(t, 0)\| : 0 \leq t \leq t_0 + 1\}$. De fato, seja $t_1 = t_0 + \delta(t_0, \|u_0\|)$. A aplicação $F : C([t_0, t_1] : X) \to C([t_0, t_1] : X)$ definida por (2.12) aplica a bola fechada $B_{K(t_0)}[0]$, de raio $K(t_0)$ e centro 0, de $C([t_0, t_1] : X)$ nela mesma. Isto segue do seguinte fato. Se $u \in B_{K(t_0)}[0]$, então

$$\begin{aligned} \|Fu(t)\| &\leq \|T(t - t_0)\|\|u_0\| + \int_{t_0}^{t} \|T(t - s)\|(\|f(s, u(s)) - f(s, 0)\| + \|f(s, 0)\|)\, ds \\ &\leq M(t_0)\|u_0\| + M(t_0)\int_{t_0}^{t} (L(K(t_0), t_0 + 1)\|u(s)\| + N(t_0))\, ds \\ &\leq M(t_0)(\|u_0\| + K(t_0)L(K(t_0), t_0 + 1)(t - t_0) + N(t_0)(t - t_0)) \\ &\leq M(t_0)(\|u_0\| + (K(t_0)L(K(t_0), t_0 + 1) + N(t_0))\delta) \\ &\leq 2M(t_0)\|u_0\| = K(t_0). \end{aligned}$$

Logo, podemos restringir F, à bola $B_{K(t_0)}[0]$ e nesta bola f satisfaz a condição Lipschitz uniforme com constante $L = L(K(t_0), t_0 + 1)$. Assim, como no Teorema 2.15, F possui um único ponto fixo na bola $B_{K(t_0)}[0]$. Este ponto fixo é a solução procurada de (2.10) no intervalo $[t_0, t_1]$.

Do que provamos, segue que se $u(\cdot)$ é uma solução fraca de (2.16) no intervalo $[0, \tau]$, ela pode ser estendida ao intervalo $[0, \tau + \delta]$ com $\delta > 0$, definindo em $[\tau, \tau + \delta]$ $u(t) = \omega(t)$, onde $\omega(t)$ é a solução da equação integral

$$\omega(t) = T(t - \tau)u(\tau) + \int_{\tau}^{t} T(t - s)f(s, \omega(s))\, ds, \quad \tau \leq t \leq \tau + \delta,$$

onde δ depende apenas de $\|u(\tau)\|$, $K(\tau)$ e $N(\tau)$. Veja que de fato, em $[\tau, \tau+\delta]$ $u(\cdot)$ é uma solução fraca de (2.16), pois se $\tau \leq t \leq \tau+\delta$, então

$$\begin{aligned} u(t) &= \omega(t) = T(t-\tau)u(\tau) + \int_\tau^t T(t-s)f(s,\omega(s))\,ds \\ &= T(t-\tau)\left(T(\tau)u_0 + \int_0^\tau T(\tau-s)f(s,u(s))\,ds\right) + \int_\tau^t T(t-s)f(s,\omega(s))\,ds \\ &= T(t)u_0 + \int_0^\tau T(t-s)f(s,u(s))\,ds + \int_\tau^t T(t-s)f(s,\omega(s))\,ds \\ &= T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))\,ds. \end{aligned}$$

Portanto $u(\cdot)$, definida como acima, é uma solução fraca de (2.16) no intervalo $[0, \tau+\delta]$.

Seja $[0, t_{max})$, o intervalo máximo de existência da solução fraca $u(\cdot)$ de (2.16). Se $t_{max} < \infty$, então $\lim\limits_{t\uparrow t_{max}} \|u(t)\| = \infty$, pois caso contrário, existiria uma sequência $t_n \uparrow t_{max}$ tal que $\|u(t_n)\| \leq c$, para todo n. O que implicaria que para cada t_n próximo de t_{max}, $u(\cdot)$ definida em $[0, t_n]$ poderia ser estendida para $[0, t_n+\delta]$, onde $\delta > 0$ não depende de t_n. Com isso, $u(\cdot)$ poderia ser estendida além de t_{max}, contradizendo a definição de t_{max}.

Finalmente, para provar a unicidade da solução fraca $u(\cdot)$ de (2.16) note que se $v(\cdot)$ é uma outra solução fraca de (2.16), então em todo intervalo fechado $[0, t_0]$, onde ambas, $u(\cdot)$ e $v(\cdot)$ existem elas coincidem, pelo Teorema 2.15. Então $u(\cdot)$ e $v(\cdot)$ têm o mesmo t_{max} e em $[0, t_{max})$, $u \equiv v$. ■

Sabemos que, em geral, a solução fraca de (2.10) não é uma solução clássica. O próximo resultado estabelece condições nas quais a solução fraca de (2.10) é, de fato uma solução clássica. Para mostrarmos nosso próximo Teorema são necessários algumas notações e Lemas preliminares. Sejam $(Z_1, \|\cdot\|_1)$, $(Z_2, \|\cdot\|_2)$ espaços de Banach e $\rho : [t_0, \delta] \times Z_1 \to Z_2$ uma função diferenciável. Sejam $t \in [t_0, \delta]$, $s \in \mathbb{R}$ com $t+s \in [t_0, \delta]$ e $x, y \in Z_1$. No que segue, usaremos a decomposição

$$\rho(t+s, x+y) - \rho(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\rho(t,x)s + \frac{\partial}{\partial x}\rho(t,x)y + R(\rho,t,x,y,s),$$

onde $\frac{\|R(\rho,t,x,y,s)\|}{\|(y,s)\|} \to 0$ quando $\|(y,s)\| = |s| + \|y\| \to 0$.

Lema 2.18. *Sejam $g : [t_0, a] \times X \to X$ continuamente diferenciável, $K, S \subset X$ compactos com $0 \in S$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $(t,x) \in [t_0, a] \times K$ e $(s,y) \in [-1,1] \times S$ com $t+s \in [t_0, a]$,*

$$\frac{\|R(g,(t,x),(s,y))\|}{\|(s,y)\|} < \varepsilon,$$

se $0 < \|(s,y)\| = |s| + \|y\| < \delta$.

Prova: Para $(t,x) \in [t_0,a] \times K$ e $(s,y) \in [-1,1] \times S$ com $t+s \in [t_0,a]$ temos que

$$\begin{aligned}
& g(t+s,x+y) - g(t,x) - \frac{\partial}{\partial t}g(t,x)s - \frac{\partial}{\partial x}g(t,x)y \\
= & \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau}g(t+\tau s, x+\tau y)d\tau - \frac{\partial}{\partial t}g(t,x)s - \frac{\partial}{\partial x}g(t,x)y \\
= & \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t}g(t+\tau s,x+\tau y)s + \frac{\partial}{\partial x}g(t+\tau s,x+\tau y)y - \frac{\partial}{\partial t}g(t,x)s - \frac{\partial}{\partial x}g(t,x)y\right)d\tau \\
= & \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t}g(t+\tau s,x+\tau y) - \frac{\partial}{\partial t}g(t,x)\right)sd\tau + \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}g(t+\tau s,x+\tau y) - \frac{\partial}{\partial x}g(t,x)\right)yd\tau.
\end{aligned}$$

Como as funções $\dfrac{\partial g}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ são contínuas e o conjunto $U = ([t_0,a] + [0,1] \times [-1,1]) \times (K + [0,1] \times S)$ é compacto, existe $\delta > 0$ tal que para todo $(\overline{s},\overline{x}), (s,x) \in U$ com $\overline{s}, s \in [t_0,a]$

$$\|\frac{\partial g}{\partial t}(\overline{s},\overline{x}) - \frac{\partial g}{\partial t}(s,x)\| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad \|\frac{\partial g}{\partial x}(\overline{s},\overline{x}) - \frac{\partial g}{\partial x}(s,x)\| < \varepsilon,$$

quando $|\overline{s} - s| < \delta$ e $\|\overline{x} - x\| < \delta$. Consequentemente, para todo $(t,x) \in [t_0,a] \times K$ e todo $(s,y) \in [-1,1] \times S$ com $t+s \in [t_0,a]$ e $0 < \|(s,y)\| = |s| + \|y\| < \delta$ obtemos que

$$\begin{aligned}
\|R(g,(t,x),(s,y))\| &= \|g(t+s,x+y) - g(t,x) - \frac{\partial}{\partial t}g(t,x)s - \frac{\partial}{\partial x}g(t,x)y\| \\
&\leq \int_0^1 \|\frac{\partial}{\partial t}g(t+\tau s,x+\tau y) - \frac{\partial}{\partial t}g(t,x)\||s|d\tau \\
&\quad + \int_0^1 \|\frac{\partial}{\partial x}g(t+\tau s,x+\tau y) - \frac{\partial}{\partial x}g(t,x)\|\|y\|d\tau \\
&< \varepsilon|s| + \varepsilon\|y\| = \varepsilon(|s| + \|y\|),
\end{aligned}$$

o que prova o resultado. ■

Lema 2.19. *Suponha que* $f \in C^1([t_0,a] \times X; X)$ *e que* $u_0 \in D(A)$. *Se* $u(\cdot)$ *é uma solução fraca de* (2.10), *então* $u(\cdot)$ *é Lipschitz sobre* $[t_0,a]$.

Prova: Usando que f é continuamente diferenciável, segue f é Lipchitz em $[t_0,a] \times K$ para cada $K \subset X$ compacto. Em particular, temos que existe $L_f > 0$ tal que

$$\|f(t_1,u(t)) - f(t_2,u(s))\| \leq L_f\left(|t_1 - t_2| + \|u(t) - u(s)\|\right),$$

para todo $t_1, t_2, t, s \in [t_0,a]$.

Sejam M, N constantes positivas tais que $\|T(t)\| \leq M$ e $\|f(t, u(t))\| \leq N$ para todo $t \in [t_0, a]$. Para $t \in [t_0, a)$ e $h > 0$ tal que $t + h \in [t_0, a]$, vemos que

$$\begin{aligned} u(t+h) - u(t) &= T(t+h-t_0)x_0 - T(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_0+h} T(t+h-s)f(s,u(s))ds \\ &\quad + \int_{t_0+h}^{t+h} T(t+h-s)f(s,u(s))ds - \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s))ds \\ &= \int_{t-t_0}^{t+h-t_0} T(s)Ax_0 ds + \int_{t_0}^{t_0+h} T(t+h-s)f(s,u(s))ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} T(t-s)[f(s+h,u(s+h)) - f(s,u(s))]ds, \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned} \|u(t+h) - u(t)\| &\leq \int_{t-t_0}^{t+h-t_0} \|T(s)\| \, \|Ax_0\| ds + \int_{t_0}^{t_0+h} \|T(t+h-s)\| \, \|f(s,u(s))\| ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \|T(t-s)\| \, \|f(s+h,u(s+h)) - f(s,u(s))\| ds \\ &\leq hM\|Ax_0\| + hMN + ML_f \int_{t_0}^{t} (h + \|u(s+h) - u(s)\|) ds \\ &\leq hM\|Ax_0\| + hMN + hML_f(a-t_0) + ML_f \int_{t_0}^{t} \|u(s+h) - u(s)\| ds \\ &\leq C_1 h + ML_f \int_{t_0}^{t} \|u(s+h) - u(s)\| ds, \end{aligned}$$

onde C_1 é uma constante que independe de f, t e h. Agora da desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\|u(t+h) - u(t)\| \leq C_1 h \, e^{MC \int_{t_0}^{t} ds} \leq C_2 h,$$

onde, como antes, C_2 independe de f, t e h. Isto prova que $u(\cdot)$ é Lipishitz sobre $[t_0, a]$. ■

Estamos agora em condições de mostrar o seguinte Teorema de regularidade de soluções.

Teorema 2.20 (Solução clássica). *Se $f : [t_0, a] \times X \to X$ é continuamente diferenciável em $[t_0, a] \times X$, $u_0 \in D(A)$ e $u(\cdot)$ é uma solução fraca de* (2.10) *em $[0, a]$, então $u(\cdot)$ é uma solução clássica de* (2.10) *em $[0, a]$.*

Prova: Do Teorema 2.17, sabemos que

$$u(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s)) \, ds, \quad t \in [t_0, a].$$

Seja $\delta < a$. Mostraremos que esta solução fraca é continuamente diferenciável em $[t_0, \delta]$. Antes porém, veja que se $u(\cdot)$ fosse diferenciável, usando o fato de f ser continuamente diferenciável e a mesma idéia da prova do Corolário 2.6, teríamos que

$$\begin{aligned} u'(t) &= AT(t-t_0)u_0 + T(t-t_0)f(t_0, u(t_0)) + \int_{t_0}^{t} T(t-s)\frac{\partial}{\partial s}f(s, u(s))\ ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} T(t-s)\frac{\partial}{\partial u}f(s, u(s))u'(s)\ ds, \quad t \in [0, \delta] \end{aligned}$$

Logo, para mostrarmos que $u(\cdot)$ é continuamente diferenciável em $[t_0, \delta]$, tomemos $\omega(\cdot)$ sendo uma solução da equação integral

$$\omega(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} T(t-s)\frac{\partial}{\partial u}f(s, u(s))\omega(s)ds, \quad t \in [t_0, \delta], \tag{2.18}$$

onde $g(t) = AT(t-t_0)u_0 + T(t-t_0)f(t_0, u(t_0)) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} T(t-s)\frac{\partial}{\partial s}f(s, u(s))ds$. Observemos que a existência de $\omega(\cdot)$ segue do Corolário 2.16 De fato, de nossas hipóteses temos que $g \in C([t_0, \delta] : X)$ e $\dfrac{\partial}{\partial u}f(t, u(t))\omega(t)$ é contínua em $[t_0, \delta]$. Além disso, $\dfrac{\partial}{\partial u}f(t, u(t))\omega(t)$ é uniformemente Lipschitz em X, pois

$$\begin{aligned} \|\frac{\partial}{\partial u}f(t, u(t))\omega(t) - \frac{\partial}{\partial u}f(t, u(t))v(t)\| &\leq \|\frac{\partial}{\partial u}f(t, u(t))\|\|\omega(t) - v(t)\| \\ &\leq M\|\omega - v\|, \quad t \in [t_0, \delta] \end{aligned}$$

onde $N = \max\left\{\left\|\frac{\partial}{\partial u}f(s, u(s))\right\| : s \in [t_0, \delta]\right\}$, o que mostra que as hipótese do Corolário 2.16 são verificadas.

Mostremos agora que $u'(t) = \omega(t)$ para $t \in [t_0, \delta]$. Se $t \in [t_0, \delta)$ e $h > 0$ são tais que $t+h \in [t_0, a]$, então

$$\begin{aligned} &\frac{u(t+h) - u(t)}{h} - \omega(t) \\ = \ &\frac{1}{h}T(t+h-t_0)u_0 + \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t+h} T(t+h-s)f(s, u(s))\ ds - \frac{1}{h}T(t-t_0)u_0 \\ &-\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s, u(s))\ ds - \omega(t) \\ = \ &\frac{1}{h}(T(t+h-t_0)u_0 - T(t-t_0)u_0) + \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} T(t+h-s)f(s, u(s))\ ds \\ &+\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t} T(t-s)\left(\frac{\partial}{\partial s}f(s, u(s))h + \frac{\partial}{\partial u}f(s, u(s))(u(s+h) - u(s)) + R(s)\right)\ ds - \omega(t), \end{aligned}$$

onde $R(s) = R(s, u(s), h, u(s+h) - u(s))$ é a função introduzida antes do Teorema. Logo, substituindo $\omega(t)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - \omega(t) &= \frac{1}{h}(T(t+h-t_0)u_0 - T(t-t_0)u_0) - AT(t-t_0)u_0 \\
&+\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t} T(t-s)R(s,u(s),h,u(s+h)-u(s))\ ds \\
&+\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} T(t+h-s)f(s,u(s))\ ds - T(t-t_0)f(t_0,u(t_0)) \\
&+\int_{t_0}^{t} T(t-s)\frac{\partial}{\partial u}f(s,u(s))\left(\frac{u(s+h)-u(s)}{h} - \omega(s)\right)\ ds.
\end{aligned}$$

É fácil verificar que a norma de cada um dos três primeiros termos do lado direito da igualdade acima tendem à zero quando $h \to 0$. De fato, para o primeiro termo basta observar que A é o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$. Para o segundo termo observamos que dos Lemas 2.18, 2.19 temos que

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\|R(s,u(s),h,u(s+h)-u(s))\|}{h}\ ds \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad h \to 0.$$

Finalmente, para o terceiro termo, observe que

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} T(t+h-s)f(s,u(s))\ ds - T(t-t_0)f(t_0,u(t_0))\right\| \\
= &\left\|\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} [T(t+h-s)f(s,u(s)) - T(t-t_0)f(t_0,u(t_0))]\ ds\right\| \\
\leq &\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} \|T(t+h-s)\|\|f(s,u(s)) - f(t_0,u(t_0))\|\ ds \\
&+\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} \|T(t+h-s)f(t_0,u(t_0)) - T(t-t_0)f(t_0,u(t_0))\|\ ds.
\end{aligned}$$

Como as funções $s \to f(s,u(s))$ e $s \to T(t+h-s)f(t_0,u(t_0))$ são contínuas, segue facilmente que o lado direito da última desigualdade converge para zero quando $h \to 0$.

Além disso, temos que

$$\left\|\int_{t_0}^{t} T(t-s)\frac{\partial}{\partial u}f(s,u(s))\left(\frac{u(s+h)-u(s)}{h} - \omega(s)\right)\ ds\right\| \leq MN\int_{t_0}^{t}\left\|\frac{u(s+h)-u(s)}{h} - \omega(s)\right\|.$$

Logo, obtemos do que fizemos antes que

$$\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - \omega(t)\right\| \leq \varepsilon(h) + MN\int_{t_0}^{t}\left\|\frac{u(s+h)-u(s)}{h} - \omega(s)\right\|,$$

onde $\varepsilon(h) \to 0$ quando $h \to 0$. Agora, da desigualdade de Gronwall vemos que

$$\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - \omega(t) \right\| \leq \varepsilon(h) e^{(\delta - t_0)MN},$$

e assim que

$$\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - \omega(t) \right\| \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad h \to 0.$$

Consequentemente, $u(\cdot)$ é diferenciável em $[t_0, \delta)$ e $u'(t) = \omega(t)$ para $t \in [t_0, \delta)$. Portanto, $u(\cdot)$ é continuamente diferenciável em $[t_0, a)$, pois δ é arbitrário.

Como u e f são continuamente diferenciáveis em $[t_0, \delta)$, então $s \to f(s, u(s))$ é também de classe C^1. Pelo Corolário 2.6, sabemos que a função

$$v(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s) f(s, u(s)) ds,$$

é solução clássica do problema de valor inicial.

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + f(t, u(t)), \\ x(t_0) &= u_0. \end{cases} \tag{2.19}$$

Agora, pela unicidade de soluções fracas para (2.19) segue que $u = v$ em $[t_0, \delta]$. Isto permite concluir que $u(\cdot)$ é uma solução clássica de (2.10) em $[t_0, a]$. ■

Provaremos agora um resultado de existência local usando um teorema de ponto fixo para operadores completamente contínuos.

Teorema 2.21. *Sejam A o gerador infinitesimal de um semigrupo compacto $(T(t))_{t \geq 0}$ para $t \geq 0$, $U \subset X$ aberto e $f : [0, a) \times U \to U$ contínua. Então, para cada $u_0 \in U$, existe $0 < t_1 = t_1(u_0) < a$ tal que o problema de valor inicial (2.10) tem uma solução fraca $u \in C([0, t_1] : X)$.*

Prova: Como estamos interessados em soluções locais, podemos assumir que $a < \infty$. Seja $M > 0$ tal que $\|T(t)\| \leq M$ para todo $0 \leq t \leq a$. Como $f(\cdot)$ é contínua, podemos fixar $0 < t' < a$, $N > 0$ e $\rho > 0$ tais que $B_\rho(u_0) = \{v;\ \|v - u_0\| \leq \rho\} \subset U$ e $\|f(s, v)\| \leq N$ para todo $(s, v) \in [0, t'] \times B_\rho(u_0)$. Fixemos agora $0 < t'' < t'$ tal que $\|T(t)u_0 - u_0\| < \dfrac{\rho}{2}$ para todo $t \in [0, t'']$ e seja $t_1 = t_1(u_0) = \min\left\{t', t'', a, \dfrac{\rho}{2MN}\right\}$.

Sejam $Y = C([0,t_1] : X)$ e $Y_0 = \{u \in Y,\, u(0) = u_0,\, u(t) \in B_\rho(u_0),\ 0 \le t \le t_1\}$ munidos da topologia da convergência uniforme. Note que Y_0 é um subconjunto limitado, fechado e convexo de Y.

Definimos agora a aplicação $\Gamma : Y_0 \to Y$ por

$$\Gamma u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds.$$

Afirmamos que $\Gamma(\cdot)$ é uma função completamente contínua de Y_0 em Y_0. Vejamos inicialmente que $\Gamma(Y_0) \subset Y_0$. Se $u \in Y_0$, então $u(s) \in B_\rho(u_0)$, para todo $s \in [0,t_1]$, e deste fato $\|f(s,u(s)\| \le \varepsilon N$ para $s \in [0,t_1]$. Logo, pela definição de Γ, temos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u(t) - u_0\| &\le \|T(t)u_0 - u_0\| + \left\| \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds \right\| \\
&\le \frac{\rho}{2} + \int_0^t \|T(t-s)\|\|f(s,u(s))\|ds \\
&\le \frac{\rho}{2} + \int_0^{t_1} MNds \le \frac{\rho}{2} + t_1 MN \le \rho,
\end{aligned}$$

o que implica que $u(t) \in B_\rho(u_0)$ para todo $t \in [0,t_1]$ e assim, que $\Gamma u \in Y_0$.

Vejamos agora que $\Gamma(\cdot)$ é completamente contínua. Sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em Y_0 e $u \in Y_0$ tal que $u_n \to u$ em Y_0. Da definição de Γ, segue que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u(t) - \Gamma u_n(t)\| &\le \left\| \int_0^t T(t-s)[f(s,u(s)) - f(s,u_n(s))]ds \right\| \\
&\le \int_0^a M\|f(s,u(s)) - f(s,u_n(s))\|ds = \Theta(u_n,u).
\end{aligned}$$

Como $f(\cdot)$ é contínua, $f(s,u_n(s)) \to f(s,u(s))$ para todo $s \in [0,a]$ quando $n \to \infty$. Além disso, $f(s,u_n(s))$ é uniformemente limitada para $n \in \mathbb{N}$ e $s \in [0,a]$. Então, o Teorema da Convergência Dominada nos permite concluir que $\Theta(u_n,u) \to 0$ quando $n \to \infty$, o que prova que $\Gamma u_n \to \Gamma u$ em Y_0. Portanto, $\Gamma(\cdot)$ é contínua em Y_0.

Mostraremos agora que ΓY_0 é relativamente compacto em Y.

(1) O conjunto $\Gamma Y_0(t) = \{\Gamma u(t);\, u \in Y_0\}$ é relativamente compacto em X para todo $t \in [0,t_1]$.

Para $t = 0$ temos que $\Gamma Y_0(0) = \{u_0\}$, que é compacto. Agora, para $0 < t \le t_1$, tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \varepsilon < t$ e seja $r = MN(t_1 - \varepsilon)$. Se $u \in Y_0$, então

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^{t-\varepsilon} T(t-s-\varepsilon)f(s,u(s))ds \right\| &\le \int_0^{t-\varepsilon} \|T(t-s-\varepsilon)\|\|f(s,u(s))\|ds \\
&\le MN(t_1-\varepsilon) = r,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^{t-\varepsilon} T(t-s-\varepsilon)f(s,u(s))ds \in B_r(0,X), \quad u \in Y_0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\Gamma u(t) &= T(t)u_0 + T(\varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon} T(t-s-\varepsilon)f(s,u(s))ds + \int_{t-\varepsilon}^{t} T(t-s)f(s,u(s))ds \\ &\in \{T(t)u_0\} + T(\varepsilon)B_r(0,X) + C_\varepsilon,\end{aligned}$$

onde $diam(C_\varepsilon) \leq MN\varepsilon$. Como $T(\varepsilon)$ é compacto e ε é arbitrário, podemos concluir que $\Gamma Y_0(t)$ é totalmente limitado e assim, relativamente compacto em X, para todo $t \in [0,t_1]$.

(2) O conjunto de funções $\Gamma Y_0 = \{\Gamma u;\ u \in Y_0\}$ é equicontínuo em $[0,t_1]$.

Seja $0 < \varepsilon < t < t_1$. Como $(T(t))_{t\geq 0}$ é contínuo em $(0,t_1]$, existe $0 < \delta < \varepsilon$, tal que $\|T(s) - T(s')\| < \varepsilon$ para todo $s, s' \in [\varepsilon, t]$ tal que $|s - s'| < \delta$. Nestas condições para $u \in Y_0$ e $0 < h < \delta$ temos que

$$\begin{aligned}\|\Gamma u(t+h) - \Gamma u(t)\| &\leq \|T(t)(T(h)-I)u_0\| + \int_0^{t-\varepsilon} \|T(t-s) - T(t+h-s)\|\|f(s,u(s))\|\, ds \\ &\quad + \int_{t-\varepsilon}^{t} \|T(t-s) - T(t+h-s)\|\|f(s,u(s))\|\, ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} \|T(t+h-s)\|\|f(s,u(s))\|\, ds \\ &\leq M\|(T(h)-I)u_0\| + \varepsilon N(t-\varepsilon) + 2MN\varepsilon + MNh. \qquad (2.20)\end{aligned}$$

Como o lado direito de (2.20) independe de $u \in Y_0$, podemos concluir que ΓY_0 é equicontínuo a direita em t. Usando argumentos similares, podemos mostrar que ΓY_0 é equicontínuo a esquerda em $t \in (0,t_1]$ e a direita em $t = 0$. Isto mostra que ΓY_0 é equicontínuo em $[0,t_1]$.

Do que fizemos antes e do Teorema de Arzelá-Ascoli segue que ΓY_0 é compacto. Portanto, $\Gamma(\cdot)$ é uma aplicação completamente contínua.

Finalmente, o Teorema do Ponto Fixo de Schauder garante a existência de um ponto fixo para $\Gamma(\cdot)$, o que prova a existência de uma solução fraca para (2.10) em $[0,t_1]$. ■

Capítulo 3

Equações funcionais impulsivas com retardamento dependendo do estado

Neste trabalho estudamos a existência de soluções fracas para uma classe de equações diferenciais funcionais impulsivas com retardamento dependendo do estado modeladas na forma

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x_{\rho(t,x_t)}), \quad t \in I = [0, a], \tag{3.1}$$

$$x_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \tag{3.2}$$

$$\triangle x(t_i) = I_i(x_{t_i}), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{3.3}$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo compacto de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ definidos em um espaço de Banach X; as funções $x_s : (-\infty, 0] \to X$, $x_s(\theta) = x(s+\theta)$, estão em um espaço de fase $\mathcal{B}$ descrito axiomaticamente; $f : I \times \mathcal{B} \to X$, $\rho : I \times \mathcal{B} \to (-\infty, a]$, $I_i : \mathcal{B} \to X$, $i = 1, \cdots, n$, são funções apropriadas; $0 < t_1 < .... < t_n < a$ são números pré-fixados e o símbolo $\triangle\xi(t)$ representa o salto da função ξ em t, que é definido por $\triangle\xi(t) = \xi(t^+) - \xi(t^-)$.

Equações funcionais com retardo dependendo do estado têm sido estudadas em diversos trabalhos, veja entre outros [1, 2, 3, 5, 6, 11, 12, 28, 30]. O estudo de sistemas em derivadas parciais com retardo dependendo do estado iniciou-se recentemente, e ao nosso entender a literatura existente está limitada aos artigos Hernández, Prokopczyk & Ladeira [16] e Wu & Rezounenko [31].

Por outro lado, a teoria de equações impulsivas tem-se desenvolvido fortemente nos últimos anos, devido fundamentalmente as diversas aplicações em diferentes áreas técnicas, como mecância, engenharia elétrica, medicina, biologia, ecologia, etc. Como referências relacionadas citamos [7, 13,

15, 18, 19, 20, 21, 25, 26, 27].

É importante observar que a literatura existente relacionada a sistemas impulsivos com retardamento dependendo do estado não considera sistemas em derivadas parciais. Assim, os resultados deste capítulo são inéditos. Como foi mencionado na introdução deste trabalho, os resultados estabelecidos neste capítulo são resumidos em nosso artigo [14], o qual foi recentemente aceito para publicação em Computers & Mathematics with Applications.

Iniciaremos este capítulo com uma seção introdutória para estabelecer notações e alguns resultados que utilizaremos posteriormente. Utilizando teoremas de ponto fixo, mostraremos a existência de soluções fraca para o sistema (3.1)-(3.3). Finalmente, na seção 3 estudaremos um exemplo.

3.1 Preliminares

Neste capítulo, X é um espaço de Banach, $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo compacto de operadores lineares $(T(t))_{t\geq 0}$ em X e $\widetilde{M} > 0$ é tal que $\|T(t)\| \leq \widetilde{M}$ para todo $t \in I = [0, a]$.

Para considerar a condição impulsiva (3.3), é conveniente introduzir alguns conceitos e notações adicionais. No que segue $\mathcal{PC}([\sigma, b])$, $\sigma < b$, é o espaço formado pelas funções $u : [\sigma, b] \to X$ que são contínuas exceto em um número finito de pontos, $u(t^+)$ existe, e $u(t^-) = u(t)$ para todo $t \in [\sigma, b]$. A notação $\mathcal{PC}$ será usada para denotar o espaço formado por todas as funções $u : [0, a] \to X$, tais que u é contínua em $t \neq t_i, u(t_i^-) = u(t_i)$ e $u(t_i^+)$ existe, para todo $i = 1, \cdots, n$. É claro que $\mathcal{PC}$ munido com a norma da convergência uniforme é um espaço de Banach.

Para simplificar as notações, no que segue usaremos $t_0 = 0$, $t_{n+1} = a$ e para $u \in \mathcal{PC}$ e $i = 1, \ldots, n$, denotamos por $\tilde{u}_i \in C([t_i, t_{i+1}]; X)$, a função definida por

$$\widetilde{u}_i(t) \quad = \quad \begin{cases} u(t), & \text{para } t \in (t_i, t_{i+1}], \\ u(t_i^+), & \text{para } t = t_i. \end{cases}$$

Além disso, para $B \subseteq \mathcal{PC}$ denotamos por $\widetilde{B}_i$, $i = 0, 1, ...n$, o conjunto $\widetilde{B}_i = \{\tilde{u}_i : u \in B\}$.

A prova do seguinte resultado será omitida, como referência citamos [22].

Lema 3.1. *Um conjunto $B \subseteq \mathcal{PC}$ é relativamente compacto em $\mathcal{PC}$ se, e somente se, cada conjunto $\widetilde{B}_i$ é relativamente compacto em $C([t_i, t_{i+1}] : X)$.*

Seja $x : (-\infty, a] \to X$. A notação x_t, a qual é chamada de história de x no tempo t, denota a função $x_t : (-\infty, 0] \to X$ definida por $x_t(\theta) = x(t+\theta)$. Neste trabalho assumiremos que as histórias pertencem a um espaço de funções, o espaço de fase que denotaremos por $\mathcal{B}$. Especificamente, $\mathcal{B}$ será um espaço vetorial de funções definidas de $(-\infty, 0]$ com valores em X, munido de uma seminorma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ e satisfazendo os axiomas:

(A) Se $x : (-\infty, \sigma + b] \to X$, $b > 0$, é tal que $x_\sigma \in \mathcal{B}$ e $x|_{[\sigma,\sigma+b]} \in \mathcal{PC}([\sigma, \sigma + b] : X)$, então para todo $t \in [\sigma, \sigma + b)$ as seguintes condições valem:

(i) x_t está em $\mathcal{B}$,

(ii) $\| x(t) \| \leq H \| x_t \|_{\mathcal{B}}$,

(iii) $\| x_t \|_{\mathcal{B}} \leq K(t - \sigma) \sup\{\| x(s) \| : \sigma \leq s \leq t\} + M(t - \sigma) \| x_\sigma \|_{\mathcal{B}}$,

onde $H > 0$ é uma constante; $K, M : [0, \infty) \to [1, \infty)$, K é contínua, M é localmente limitada e H, K, M são independentes de $x(\cdot)$.

(B) O espaço $\mathcal{B}$ é completo.

Exemplo 3.2. O espaço de fase $\mathcal{PC}_r \times L^2(h\,, X)$.

Sejam $h(\cdot) : (-\infty, -r] \to \mathbb{R}$ uma função positiva, Lebesgue integrável e $\mathcal{B} := \mathcal{PC}_r \times L^2(h; X)$, $r \geq 0$, o espaço formado por todas as classes de funções $\varphi : (-\infty, 0] \to X$ tais que $\varphi\,|_{[-r,0]} \in \mathcal{PC}([-r, 0], X)$, $\varphi(\cdot)$ é Lebesgue-mensurável em $(-\infty, -r]$ e $h \mid \varphi \mid^2$ é Lebesgue integrável em $(-\infty, -r]$. A seminorma em $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ é definida por

$$\| \varphi \|_{\mathcal{B}} := \sup_{\theta \in [-r,0]} \| \varphi(\theta) \| + \left(\int_{-\infty}^{-r} h(\theta) \| \varphi(\theta) \|^2 \, d\theta \right)^{1/2}.$$

Assuma que $h(\cdot)$ satisfaz as condições (g-6), (g-7) na terminologia de [17]. Especificamente

(g-6) $h : (-\infty, -r) \to \mathbb{R}$ é uma função positiva Lebesgue integrável, e existe uma função não-negativa γ em $(-\infty, 0]$ tal que $h(\xi + \theta) \leq \gamma(\xi) h(\theta)$, para todo $\xi \leq 0$ e $\theta \in (-\infty, -r) \backslash N_\varepsilon$, onde $N_\varepsilon \subset (-\infty, -r)$ é um conjunto de medida de Lebesgue nula.

(g-7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-r} h(\theta) \, d\theta < \infty$.

Procedendo como em [17, Teorema 1.3.8], segue que $\mathcal{B}$ é um espaço de fase que verifica os axiomas (**A**) e (**B**). Além disso, quando $r = 0$, $H = 1$; $M(t) = \gamma(-t)^{\frac{1}{2}}$ e $K(t) = 1 + \left(\int_{-t}^{0} h(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$, para $t \geq 0$ (veja [17]).

Observação 3.3. *Seja $\varphi \in \mathcal{B}$ e $t \leq 0$. A notação φ_t representa a função definida por $\varphi_t(\theta) = \varphi(t+\theta)$. Consequentemente, se a função $x(\cdot)$ no axioma* **A** *é tal que $x_0 = \varphi$, então $x_t = \varphi_t$. Observamos que φ_t está bem definida para $t < 0$ pois o domínio de φ é $(-\infty, 0]$. Observamos que em geral $\varphi_t \notin \mathcal{B}$; consideremos por exemplo, funções do tipo $x^{\mu}(t) = (t-\mu)^{-\alpha}\mathcal{X}_{(\mu,0]}$, $\mu > 0$, onde $\mathcal{X}_{(\mu,0]}$ é a função característica do intervalo $(\mu, 0]$, $\mu < -r$ e $\alpha p \in (0,1)$, no espaço $\mathcal{PC}_{\mathbf{r}} \times \mathbf{L^p}(\mathbf{g}; \mathbf{X})$.*

As terminologias e notações usadas neste capítulo são as usuais em análise funcional. Em particular, para espaços de Banach $(Z, \|\cdot\|_Z)$, $(W, \|\cdot\|_W)$, a notação $\mathcal{L}(Z, W)$ representa o espaço de Banach dos operadores lineares de Z em W. Além disso, $B_r(x, Z)$ denota a bola fechada em Z, com centro em x e raio $r > 0$. Adicionalmente, para uma função limitada $\xi : J \subset \mathbb{R} \to [0, \infty)$ e $t \in J$ usaremos a notação ξ_t para

$$\xi_t = \sup\{\xi(s) : s \in J \cap (-\infty, t]\}. \tag{3.4}$$

Para demonstrar nossos resultados, usaremos o clássico Teorema do Ponto Fixo de Schauder e o teorema a seguir, usualmente chamado de Teorema de Leray-Schauder.

Teorema 3.4. *([8, Teorema 6.5.4]) Seja D um subconjunto convexo de um espaço de Banach Z e assuma que $0 \in D$. Seja $F : D \to D$ uma aplicação completamente contínua. Então o conjunto $\{x \in D;\ \ x = \lambda F(x),\ \ 0 < \lambda < 1\}$ é não limitado ou a aplicação F tem um ponto fixo em D.*

Também faremos uso do seguinte teorema de ponto fixo.

Teorema 3.5. *([24, Corolário 4.3.2]) Suponha que D é um subconjunto fechado, convexo e limitado de um espaço de Banach Z e que B e C são funções contínuas de D em Z com*

(a) *$Bx + Cx \in D$ para todo $x \in D$,*

(b) *$\overline{C(D)}$ é compacto,*

(c) *Existe uma constante $0 \leq \gamma < 1$ tal que $\|Bx - By\| \leq \gamma\|x - y\|$ para todo $x, y \in D$.*

Então, existe $z \in D$ tal que $Bz + Cz = z$.

3.2 Resultados de Existência

Nesta seção estabelecemos a existência de solução fraca para o problema de Cauchy abstrato com impulsos (3.1)-(3.3). Para isso, assumiremos que $\rho : I \times \mathcal{B} \to (-\infty, a]$ é contínua e que φ e f verificam as seguintes condições:

$\mathbf{H}_\varphi$ Seja $\mathcal{R}(\rho^-) = \{\rho(s,\psi) : (s,\psi) \in I \times \mathcal{B},\ \rho(s,\psi) \leq 0\}$. A função $t \to \varphi_t$ é bem definida de $\mathcal{R}(\rho^-)$ em $\mathcal{B}$ e existe uma função contínua e limitada $J^\varphi : \mathcal{R}(\rho^-) \to \mathbb{R}$ tal que $\| \varphi_t \|_{\mathcal{B}} \leq J^\varphi(t) \| \varphi \|_{\mathcal{B}}$ para todo $t \in \mathcal{R}(\rho^-)$.

$\mathbf{H_1}$ A função $f : I \times \mathcal{B} \to X$ satisfaz as seguintes condições.

(i) Seja $x : (-\infty, a] \to X$ tal que $x_0 = \varphi$ e $x|_I \in \mathcal{PC}$. A função $t \to f(s, x_t)$ é contínua em $\mathcal{R}(\rho^-) \cup [0,a]$, para todo $s \in \mathcal{R}(\rho^-) \cup [0,a]$, e a função $t \to f(t, x_{\rho(t,x_t)})$ é fortemente mensurável em $\mathcal{R}(\rho^-) \cup [0,a]$.

(ii) Para cada $t \in I$, a função $f(t,\cdot) : \mathcal{B} \to X$ é contínua.

(iii) Existe uma função integrável $m : I \to [0,\infty)$ e uma função contínua não-decrescente $W : [0,\infty) \to (0,\infty)$ tal que

$$\| f(t,\psi) \| \quad \leq \quad m(t)W(\| \psi \|_{\mathcal{B}}), \qquad (t,\psi) \in I \times \mathcal{B}.$$

Motivados pelo conceito de solução fraca em [15], adotaremos o seguinte conceito de solução fraca.

Definição 3.6. *Uma função $x : (-\infty, a] \to X$ é uma solução fraca do problema abstrato de Cauchy (3.1)-(3.3) se $x_0 = \varphi$, $x_{\rho(s,x_s)} \in \mathcal{B}$ para todo $s \in I$ e*

$$x(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s) f(s, x_{\rho(s,x_s)}) ds + \sum_{0<t_i<t} T(t-t_i) I_i(x_{t_i}), \quad t \in I.$$

O próximo Lema é facilmente provado usando os axiomas do espaço de fase. Por isto omitiremos a demonstração.

Lema 3.7. *Seja $x : (-\infty, a] \to X$ uma função tal que $x_0 = \varphi$ e $x|_{[0,a]} \in \mathcal{PC}$. Então*

$$\| x_s \|_{\mathcal{B}} \leq (M_a + J_0^\varphi) \| \varphi \|_{\mathcal{B}} + K_a \| x \|_{\max\{0,s\}}, \quad s \in \mathcal{R}(\rho^-) \cup [0,a],$$

onde $J_0^\varphi = \sup_{t \in \mathcal{R}(\rho^-)} J^\varphi(t)$, $M_a = \sup_{t \in I} M(t)$ e $K_a = \sup_{t \in I} K(t)$.

Provaremos agora nosso primeiro resultado de existência.

Teorema 3.8. *Assuma que existam constantes L_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, tais que*

$$\| I_i(\psi_1) - I_i(\psi_2) \| \quad \leq \quad L_i \| \psi_1 - \psi_2 \|_{\mathcal{B}}, \quad \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B},\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

Se

$$\widetilde{M}K_a\left[\liminf_{\xi\to\infty}\frac{W(\xi)}{\xi}\int_0^a m(s)ds+\sum_{i=1}^n L_i\right]<1, \tag{3.5}$$

então existe uma solução fraca de (3.1)-(3.3).

Prova: Sejam $Y=\{u\in\mathcal{PC}:u(0)=\varphi(0)\}$ munido da topologia da convergência uniforme e $\Gamma:Y\to Y$ o operador definido por

$$\Gamma x(t)=T(t)\varphi(0)+\int_0^t T(t-s)f(s,\bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)})ds+\sum_{0<t_i<t}T(t-t_i)I_i(\overline{x}_{t_i}),\qquad t\in I,$$

onde $\bar{x}:(-\infty,a]\to X$ é tal que $\bar{x}_0=\varphi$ e $\bar{x}=x$ em I. Pelo axioma $(\mathbf{A})$, a continuidade forte de $(T(t))_{t\geq 0}$ e nossas hipóteses sobre f e φ, vemos que $\Gamma x(\cdot)\in Y$.

Seja $\overline{\varphi}:(-\infty,a]\to X$ a extensão de φ sobre $(-\infty,a]$ tal que $\overline{\varphi}(\theta)=\varphi(0)$ em I. Afirmamos que existe $r>0$ tal que $\Gamma B_r(\overline{\varphi}|_I,Y)\subset B_r(\overline{\varphi}|_I,Y)$. Se assumirmos que esta propriedade é falsa, então para todo $r>0$ existem $x^r\in B_r(\overline{\varphi}|_I,Y)$ e $t^r\in I$ tais que $r<\|\Gamma x^r(t^r)-\varphi(0)\|$. Então, usando o Lema 3.7 temos que

$$\begin{aligned}
r<&\parallel \Gamma x^r(t^r)-\varphi(0)\parallel\\
\leq\ &(\widetilde{M}+1)H\parallel\varphi\parallel_{\mathcal{B}}+\widetilde{M}\int_0^{t^r}m(s)W(\parallel\overline{x^r}_{\rho(s,\overline{x^r_s})}\parallel_{\mathcal{B}})ds+\widetilde{M}\sum_{i=1}^n(L_i\parallel\overline{x}_{t_i}\parallel_{\mathcal{B}}+\parallel I_i(0)\parallel)\\
\leq\ &(\widetilde{M}+1)H\parallel\varphi\parallel_{\mathcal{B}}+\widetilde{M}W\left((M_a+J_0^{\varphi})\parallel\varphi\parallel_{\mathcal{B}}+K_a\parallel x^r\parallel_a\right)\int_0^{t^r}m(s)ds\\
&+\widetilde{M}\sum_{i=1}^n\left(L_i((M_a+J_0^{\varphi})\parallel\varphi\parallel_{\mathcal{B}}+K_a\parallel x^r\parallel_a)+\parallel I_i(0)\parallel\right).
\end{aligned}$$

Segue disto que

$$1\leq\widetilde{M}K_a\left[\liminf_{\xi\to\infty}\frac{W(\xi)}{\xi}\int_0^a m(s)ds+\sum_{i=1}^n L_i\right],$$

o que contraria nossas hipóteses.

Seja $r>0$ tal que $\Gamma(B_r(\overline{\varphi}|_I,Y))\subset B_r(\overline{\varphi}|_I,Y)$. No que segue, provaremos que Γ é uma aplicação que satisfaz as hipótese do Teorema 3.5 em $B_r(\overline{\varphi}|_I,Y)$. Considere a decomposição $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$ onde

$$\begin{aligned}
\Gamma_1x(t)&=T(t)\varphi(0)+\int_0^t T(t-s)f(s,\bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)})ds,\quad t\in I,\\
\Gamma_2x(t)&=\sum_{0<t_i<t}T(t-t_i)I_i(x_{t_i}),\qquad t\in I.
\end{aligned}$$

Passo 1 O conjunto $\Gamma_1(B_r(\overline{\varphi}|_I, Y))(t) = \{\Gamma_1 x(t) : x \in B_r(\overline{\varphi}|_I, Y)\}$ é relativamente compacto em X para todo $t \in I$.

O caso $t = 0$ é óbvio. Seja $0 < \varepsilon < t \leq a$. Se $x \in B_r(\overline{\varphi}|_I, Y)$, do Lema 3.7 segue que

$$\| \bar{x}_{\rho(t,\bar{x}_t)} \|_{\mathcal{B}} \leq r^* := (M_a + J_0^{\varphi}) \| \varphi \|_{\mathcal{B}} + K_a(r + \| \varphi(0) \|),$$

e então

$$\left\| \int_0^{\tau} T(\tau - s) f(s, \bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)}) ds \right\| \leq r^{**} := \widetilde{M} W(r^*) \int_0^a m(s) ds, \qquad \tau \in I.$$

Consequentemente, para $x \in B_r(\overline{\varphi}|_I, Y)$ temos que

$$\begin{aligned} \Gamma_1 x(t) &= T(t)\varphi(0) + T(\varepsilon) \int_0^{t-\varepsilon} T(t - \varepsilon - s) f(s, \bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)}) ds + \int_{t-\varepsilon}^{t} T(t - s) f(s, \bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)}) ds \\ &\in \{T(t)\varphi(0)\} + T(\varepsilon) B_{r^{**}}(0, X) + C_\varepsilon, \end{aligned}$$

onde $diam(C_\varepsilon) \leq 2\widetilde{M} W(r^*) \int_{t-\varepsilon}^{t} m(s) ds$. Isto mostra que $\Gamma_1(B_r(\overline{\varphi}|_I, Y))(t)$ é totalmente limitado em X, e portanto relativamente compacto.

Passo 2 O conjunto de funções $\Gamma_1(B_r(\overline{\varphi}|_I, Y))$ é equicontínuo em I.

Seja $0 < t < a$ e $\varepsilon > 0$. Como $(T(t))_{t \geq 0}$ é fortemente contínuo e $\Gamma_1(B_r(0, \mathcal{PC}))(t)$ é relativamente compacto em X, podemos escolher $0 < \delta \leq a - t$ tal que

$$\| T(h)x - x \| < \varepsilon, \qquad x \in \Gamma_1(B_r(\overline{\varphi}|_I, Y))(t), \ 0 < h < \delta.$$

Sob estas condições, para $x \in B_r(\overline{\varphi}|_I, Y)$ e $0 < h < \delta$ temos que

$$\begin{aligned} \| \Gamma_1 x(t + h) - \Gamma_1 x(t) \| &\leq \| (T(h) - I)\Gamma_1 x(t) \| + \int_t^{t+h} \|T(t + h - s)\| \|f(s, \bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)})\| ds \\ &\leq \| (T(h) - I)\Gamma_1 x(t) \| + \widetilde{M} \int_t^{t+h} m(s) W(r^*) ds \\ &\leq \varepsilon + \widetilde{M} W(r^*) \int_t^{t+h} m(s) ds, \end{aligned}$$

onde $r^* = (M_a + J_0^{\varphi}) \| \varphi \|_{\mathcal{B}} + K_a(r + \| \varphi(0) \|)$. Isto prova que $\Gamma_1(B_r(\overline{\varphi}|_I, Y))$ é equicontínua a direita para $t \in (0, a)$. Utilizando um argumento similar e o fato do semigrupo ser compacto, prova-se a equicontinuidade a direita de zero e a equicontinuidade a esquerda em $t \in (0, a]$. Assim, concluímos que $\Gamma_1(B_r(\overline{\varphi}|_I, Y))$ é equicontínuo em I.

Passo 3 A aplicação $\Gamma_1(\cdot)$ é contínua em $B_r(\overline{\varphi}|_I, Y)$.

Seja $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $B_r(\overline{\varphi}|_I, Y)$ e $x \in B_r(\overline{\varphi}|_I, Y)$ tal que $x^n \to x$ em Y. Do axioma **A**, é fácil ver que $\overline{x^n}_s \to \overline{x}_s$, uniformemente para $s \in (-\infty, a]$, quando $n \to \infty$. Deste fato, da condição $\mathbf{H_1}$ e da desigualdade

$$\begin{aligned} \| f(s, \overline{x^n}_{\rho(s,\overline{x^n_s})}) - f(s, \overline{x}_{\rho(s,\overline{x}_s)}) \| &\leq \| f(s, \overline{x^n}_{\rho(s,\overline{x^n_s})}) - f(s, \overline{x}_{\rho(s,\overline{x^n_s})}) \|_{\mathcal{B}} \\ &\quad + \| f(s, \overline{x}_{\rho(s,\overline{x^n_s})}) - f(s, \overline{x}_{\rho(s,\overline{x}_s)}) \|_{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

vemos que $f(s, \overline{x^n}_{\rho(s,\overline{x^n_s})}) \to f(s, \overline{x}_{\rho(s,\overline{x}_s)})$, quando $n \to \infty$, para todo $s \in I$. Finalmente, uma aplicação do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue permite mostrar que $\Gamma_1 x^n \to \Gamma_1 x$ in $\mathcal{PC}$. Portanto, $\Gamma_1(\cdot)$ é contínua.

Passo 4 A aplicação $\Gamma_2(\cdot)$ é uma contração em $B_r(\overline{\varphi}|_I, Y)$.

A afirmação segue diretamente de (3.5) e da estimativa

$$\| \Gamma_2 x - \Gamma_2 y \|_a \leq K_a \widetilde{M} \sum_{i=1}^{n} L_i \| x - y \|_a .$$

Do que fizemos anteriormente segue que Γ é um operador que satisfaz as hipóteses do Teorema 3.5 em $B_r(\overline{\varphi}|_I, Y)$. Garantimos portanto a existência de uma solução fraca. A prova está completa.

Nosso próximo resultado estabelece a existência de solução fazendo uso do Teorema de ponto fixo 3.4.

Teorema 3.9. *Assuma que $\rho(t, \psi) \leq t$ para todo $(t, \psi) \in I \times \mathcal{B}$, que as aplicações I_i são completamente contínuas e que existem constantes c_i^j, $i = 1, 2, \cdots, n$, $j = 1, 2$, tais que $\| I_i(\psi) \| \leq c_i^1 \| \psi \|_{\mathcal{B}} + c_i^2$, para toda $\psi \in \mathcal{B}$. Se $\mu = 1 - K_a \widetilde{M} \sum_{i=1}^{n} c_i^1 > 0$ e*

$$\frac{K_a \widetilde{M}}{\mu} \int_0^a m(s) ds < \int_C^\infty \frac{ds}{W(s)},$$

onde $C = \frac{1}{\mu} \left[(K_a \widetilde{M} H + M_a + J_0^{\varphi}) \| \varphi \|_{\mathcal{B}} + K_a \widetilde{M} \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \right]$, então existe uma solução fraca de (3.1)-(3.3).

Prova: Definamos $S = \{x : (-\infty, a] \to X; \quad x_0 = 0 \quad e \quad x|_I \in \mathcal{PC}\}$, munido da norma $\| x \|_s = \| x|_I \|_{\mathcal{PC}}$.

Seja $y : (-\infty, a] \to X$, a função definida por

$$y(t) = \begin{cases} T(t)\varphi(0), & \text{para } t \geq 0, \\ \varphi(t), & \text{para } t < 0, \end{cases}$$

e $\Gamma : S \to S$ o operador dado por

$$\Gamma x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \displaystyle\int_0^t T(t-s) f(s, \bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)}) ds + \sum_{0<t_i<t} T(t-t_i) I_i(\overline{x}_{t_i}), & t \in I, \end{cases}$$

onde $\overline{x} = x + y$ em $(-\infty, a]$.

Consideremos a decomposição $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, onde

$$\Gamma_1 x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \displaystyle\int_0^t T(t-s) f(s, \bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)}) ds, & t \in I, \end{cases}$$

$$\Gamma_2 x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \displaystyle\sum_{0<t_i<t} T(t-t_i) I_i(\overline{x}_{t_i}), & t \in I. \end{cases}$$

Para começar, faremos estimativas *a priori* para as soluções da equação integral $z = \lambda \Gamma z$, $\lambda \in (0,1)$. Seja x^λ uma solução de $z = \lambda \Gamma(z)$, $\lambda \in (0,1)$. Observe inicialmente que dos axiomas do espaço de fase

$$\| \overline{x_t^\lambda} \| \leq (K_a \widetilde{M} H + M_a + J_0^\varphi) \| \varphi \|_B + K_a \| x^\lambda \|_{\max\{0,t\}}, \quad \text{para} \quad t \in \mathcal{R}(\rho^-) \cup [0,a].$$

Nestas condições, para $t \in [0,a]$ vemos que

$$\begin{aligned} \| x^\lambda(t) \| &\leq \widetilde{M} \int_0^t m(s) W \left((K_a \widetilde{M} H + M_a + J_0^\varphi) \| \varphi \|_{\mathcal{B}} + K_a \| x^\lambda \|_{\max\{0,\rho(s,\overline{x_s^\lambda})\}} \right) ds \\ &\quad + \widetilde{M} \sum_{0<t_i\leq t} c_i^1 \left((K_a \widetilde{M} H + M_a + J_0^\varphi) \| \varphi \|_{\mathcal{B}} + K_a \| x^\lambda \|_t \right) + \widetilde{M} \sum_{i=1}^n c_i^2 \\ &\leq \widetilde{M} \int_0^t m(s) W \left((K_a \widetilde{M} H + M_a + J_0^\varphi) \| \varphi \|_{\mathcal{B}} + K_a \| x^\lambda \|_s \right) ds \\ &\quad + \widetilde{M} \sum_{0<t_i\leq t} c_i^1 \left((K_a \widetilde{M} H + M_a + J_0^\varphi) \| \varphi \|_{\mathcal{B}} + K_a \| x^\lambda \|_t \right) + \widetilde{M} \sum_{i=1}^n c_i^2, \end{aligned}$$

pois $\rho(s, \overline{x_s^\lambda}) \leq s$ para todo $s \in I$. Definindo $\xi^\lambda(t) = (K_a\widetilde{M}H + M_a + J_0^\varphi) \parallel \varphi \parallel_{\mathcal{B}} + K_a \parallel x^\lambda \parallel_t$, obtemos que

$$\begin{aligned}\xi^\lambda(t) &\leq (K_a\widetilde{M}H + M_a + J_0^\varphi) \parallel \varphi \parallel_{\mathcal{B}} + K_a\widetilde{M}\sum_{i=1}^{n} c_i^2 + K_a\widetilde{M}\int_0^t m(s)W(\xi^\lambda(s))ds \\ &\quad + K_a\widetilde{M}\sum_{i=1}^{n} c_i^1 \xi^\lambda(t),\end{aligned}$$

e então

$$\xi^\lambda(t) \leq \frac{1}{\mu}\left[(K_a\widetilde{M}H + M_a + J_0^\varphi) \parallel \varphi \parallel_{\mathcal{B}} + K_a\widetilde{M}\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right] + \frac{K_a\widetilde{M}}{\mu}\int_0^t m(s)W(\xi^\lambda(s))\, ds,$$

pois $\mu > 0$. Denotando por $\beta_\lambda(t)$ o lado direito da última desigualdade, segue que

$$\beta_\lambda'(t) \leq \frac{K_a\widetilde{M}}{\mu} m(t)W(\beta_\lambda(t))$$

e assim

$$\int_{\beta_\lambda(0)=C}^{\beta_\lambda(t)} \frac{ds}{W(s)} \leq \frac{K_a\widetilde{M}}{\mu}\int_0^a m(s)ds < \int_C^\infty \frac{ds}{W(s)},$$

o que implica que o conjunto de funções $\{\beta_\lambda(\cdot) : \lambda \in (0,1)\}$ é limitado em $C(I : \mathbb{R})$. Isto mostra que $\{x^\lambda(\cdot) : \lambda \in (0,1)\}$ é limitado em S.

Da prova do Teorema 3.8 sabemos que Γ_1 é completamente contínua. Provaremos em seguida que Γ_2 é também completamente contínua. A continuidade de Γ_2 pode ser provada usando os axiomas dos espaço de fase. Da definição de Γ_2, para $r > 0$, $t \in [t_i, t_{i+1}] \cap (0, a]$ e $u \in B_r = B_r(0, S)$ temos que

$$[\widetilde{\Gamma_2 u}]_i(t) \in \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{0<t_j<t \\ i}} T(t-t_j)I_jB_{r*}(0;X), & t \neq t_i,\ t \neq t_{i+1}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{i} T(t_{i+1}-t_j)I_jB_{r*}(0;X), & t = t_{i+1}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} T(t_i-t_j)I_jB_{r*}(0;X) + I_i(B_{r*}(0;X)), & t = t_i, \end{cases}$$

onde $r^* := (M_a + J_0^\varphi) \parallel \varphi \parallel_{\mathcal{B}} + K_a r$, o que prova que $[\widetilde{\Gamma_2(B_r)}]_i(t)$ é relativamente compacto em X para todo $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Além disso, usando a compacidade do operador I_i e a continuidade forte de $(T(t))_{t\geq 0}$, prova-se facilmente que $[\widetilde{\Gamma_2(B_r)}]_i$ é equicontínuo em t para todo $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Assim, do Lema 3.1 concluímos que Γ_2 é completamente contínua.

Do que fizemos antes segue que Γ é completamente contínua. Garantimos então pelo Teorema 3.4 a existência de um ponto fixo $u \in S$ para Γ. Seja $\overline{u} : (-\infty, 0] \to X$ a função definida por

$$\overline{u}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{para } t < 0, \\ T(t)\varphi(0) + u(t), & \text{para } t \in I. \end{cases}$$

É fácil mostrar que $\overline{u}$ é uma solução fraca para o problema (3.1)-(3.3). A prova está completa. ■

3.3 Exemplo

Nesta seção apresentamos uma aplicação de nossos resultados abstratos. Introduzimos previamente os detalhes necessários. No que segue, $X = L^2([0,\pi])$ e $A : D(A) \subset X \to X$ é o operador $Af = f''$ com domínio $D(A) := \{f \in X : f'' \in X,\ f(0) = f(\pi) = 0\}$. Sabemos do Exemplo 1.41, que A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ em X. Além disso, A possui espectro discreto, os autovalores são $-n^2, n \in \mathbb{N}$, com correspondentes autovetores normalizados $z_n(\xi) := \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sin(n\xi)$, o conjunto $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal de X e $T(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} < x, z_n > z_n$ para todo $x \in X$.

Considere o sistema diferencial

$$\frac{\partial u(t,\xi)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,\xi)}{\partial \xi^2} + \int_{-\infty}^{0} \alpha(s) u(t + s - \|u(t)\|, \xi) ds,\ t \in [0,a], \xi \in [0,\pi], \tag{3.6}$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \qquad t \in [0,a] \tag{3.7}$$

$$u(\tau,\xi) = \varphi(\tau,\xi), \qquad \tau \leq 0,\ \xi \in [0,\pi], \tag{3.8}$$

$$\triangle u(t_j,\xi) = \int_{-\infty}^{t_j} \gamma_j(t_j - s) u(s,\xi) ds, \qquad j = 1, \cdots, n, \tag{3.9}$$

onde $\varphi \in \mathcal{B} = \mathcal{PC}_0 \times L^2(h\,, X)$ e $0 < t_1 < .... < t_n < a$ são pré-fixados. Observamos que o espaço $\mathcal{B} = \mathcal{PC}_0 \times L^2(h\,, X)$ foi introduzido no Exemplo 3.2.

Para estudar o sistema (3.6)-(3.9) assumiremos as seguintes condições.

(i) A função $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, limitada e $L_f = \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{\alpha^2(s)}{h(s)} ds\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$.

(ii) As funções $\gamma_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas e $L_j := \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{(\gamma_j(-s))^2}{h(s)} ds\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ para todo $j = 1, 2, \cdots, n$.

Definindo as funções $\rho(s,\psi) = s - \|\psi(0)\|$, $f(\psi)(\xi) = \int_{-\infty}^{0} \alpha(s)\psi(s,\xi) ds$ e $I_j(\psi)(\xi) = \int_{-\infty}^{0} \gamma_j(-s)\psi(s,\xi) ds$, $j = 1, 2, \cdots, n$, podemos representar o sistema (3.6)-(3.9) pelo problema de

Cauchy abstrato impulsivo (3.1)-(3.3). Além disso, as aplicações f, I_j, $j = 1, \cdots, n$, são operadores lineares limitados, $\| f \|_{\mathcal{L}(\mathcal{B},X)} \leq L_f$ e $\| I_j \|_{\mathcal{L}(\mathcal{B},X)} \leq L_j$ para todo $j = 1, \cdots, n$.

Proposição 3.10. *Seja $\varphi \in \mathcal{B}$ e assuma que a condição $\mathbf{H}_\varphi$ é satisfeita e que a função $t \to \varphi_t$ é contínua em $\mathcal{R}(\rho^-)$. Se $\left(1 + \left(\int_{-a}^{0} h(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\right)(aL_f + \sum_{i=1}^{n} L_i) < 1$, então existe uma solução fraca de (3.6)-(3.9).*

Prova: Para aplicarmos o Teorema 3.8, resta mostrarmos que a condição $\mathbf{H_1}$-(i) é verificada. Seja $x : (-\infty, a] \to X$ tal que $x_0 = \varphi$ e $x|_I \in \mathcal{PC}$. Observamos que para estabelecer a mensurabilidade forte da função $t \to f(x_{\rho(t,x_t)})$, basta mostramos que a função $t \to x_t$ é contínua q.t.p. em I, pois $t \to \varphi_t$ é contínua em $\mathcal{R}(\rho^-)$ e as funções f, ρ são contínuas. Em relação a isto, veja que para $t \in [0, a)$ e $h > 0$ com $t + h \in [0, a]$

$$\|x_{t+h} - x_t\|_{\mathcal{B}} = \|x(t+h) - x(t)\| + \left(\int_{-\infty}^{0} h(\theta)\|x_{t+h}(\theta) - x_t(\theta)\|^2 d\theta\right)^{1/2}. \tag{3.10}$$

Para o segundo termo do lado direito de 3.10 vemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{0} h(\theta)\|x(t+h+\theta) - x(t+\theta)\|^2 d\theta \\
&\qquad \leq \; C_1\|\varphi_h - \varphi\|_{\mathcal{B}} + \int_{-t-h}^{-t} h(\theta)\|x(t+h+\theta) - \varphi(t+\theta)\| d\theta \\
&\qquad\quad + \int_{-t}^{0} h(\theta)\|x(t+h+\theta) - x(t+\theta)\| d\theta,
\end{aligned}$$

onde C_1 é independente de t. Agora, cada um dos termos do lado direito converge para zero quando $h \to 0$. O primeiro pela continuidade de φ_t, o segundo pela limitação de $\|x(t+h+\theta) - \varphi(t+\theta)\|$ em X e o terceiro por uma aplicação padrão do Teorema da convergência dominada de Lebesgue. Isto permite concluir que $t \to x_t$ é contínua *q.t.p.* sobre I. Agora o resultado é uma consequência direta do Teorema 3.8. A prova está completa. ■

Referências Bibliográficas

[1] Aiello, Walter G.; Freedman, H.I.; Wu, J. Analysis of a model representing stage-structured population growth with state-dependent time delay. *SIAM J. Appl. Math.* 52 (1992), no. 3, 855–869.

[2] Alexander Domoshnitsky, Michael Drakhlin and Elena Litsyn On equations with delay depending on solution. *Nonlinear Analysis TMA.* 49, (2002), no. 5, 689-701.

[3] Arino, Ovide; Boushaba, Khalid; Boussouar, Ahmed A mathematical model of the dynamics of the phytoplankton-nutrient system. Spatial heterogeneity in ecological models (Alcalá de Henares, 1998). *Nonlinear Analysis RWA.* 1 (2000), no. 1, 69–87.

[4] Brezis, Haïm. Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983.

[5] Cao, Yulin; Fan, Jiangping; Gard, Thomas C. The effects of state-dependent time delay on a stage-structured population growth model. *Nonlinear Analysis TMA.* 19 (1992), no. 2, 95–105.

[6] Fengde Chen, Dexian Sun and Jinlin Shi, Periodicity in a food-limited population model with toxicants and state dependent delays. *J. Math. Anal. Appl.* 288, (2003), no. 1, 136-146.

[7] Franco, Daniel; Nieto, Juan J. Maximum principles for periodic impulsive first order problems. Positive solutions of nonlinear problems. *J. Comput. Appl. Math.* 88 (1998), no. 1, 149–159.

[8] Granas, A. and Dugundji, J., *Fixed Point Theory.* Springer-Verlag, New York, 2003.

[9] Hale, Jack K.; Kato, Junji. Phase space for retarded equations with infinite delay. *Funkcial. Ekvac.* 21 (1978), no. 1, 11–41.

[10] Hale, J. K. and Verduyn Lunel, S. M., *Introduction to Functional-Differential Equations.* Appl. Math. Sci, 99. Springer-Verlag, New York, 1993.

[11] Hartung, Ferenc, Linearized stability in periodic functional differential equations with state-dependent delays. *J. Comput. Appl. Math.* 174 (2005), no. 2, 201–211.

[12] Hartung, Ferenc; Herdman, Terry L.; Turi, Janos, Parameter identification in classes of neutral differential equations with state-dependent delays. *" Nonlinear Analysis TMA. "Ser. A: Theory Methods,* 39 (2000), no. 3, 305–325.

[13] He, Zhimin; Yu, Jianshe Periodic boundary value problem for first-order impulsive functional differential equations. *J. Comput. Appl. Math.* 138 (2002), no. 2, 205-217.

[14] Hernández, E.; Goncalves, G.; Pierri, M. Existence results for a impulsive abstract partial differential equation with state-dependent delay. Aceito para publicação em *J. Comput. Appl. Math.*

[15] Hernández, Eduardo; Henríquez, Hernán. Impulsive partial neutral differential equations. *Appl. Math. Lett.* 19 (2006), no. 3, 215-222.

[16] Hernández, Eduardo; Andréa C. Prokopczyk and Luiz A. C. Ladeira. A Note on State Dependent Partial Functional Differential Equations with Unbounded Delay. To appear in *Nonlinear Analysis, Real Word and Applications.* Available online 23 May 2005.

[17] Hino, Yoshiyuki; Murakami, Satoru; Naito, Toshiki *Functional-differential equations with infinite delay. Lecture Notes in Mathematics,* 1473. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[18] Lakshmikantham, V.; Bainov, D. D.; Simeonov, P. S. Theory of impulsive differential equations. Series in Modern Applied Mathematics, 6. World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1989.

[19] Lakshmikantham, V.; Drici, Z. Positivity and boundedness of solutions of impulsive reaction-diffusion equations. Positive solutions of nonlinear problems. *J. Comput. Appl. Math.* 88 (1998), no. 1, 175–184.

[20] Liu, James H. Nonlinear impulsive evolution equations. *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems* 6 (1999), no. 1, 77–85.

[21] Luo, Zhiguo; Shen, Jianhua Stability results for impulsive functional differential equations with infinite delays. *J. Comput. Appl. Math.* 131 (2001), no. 1-2, 55–64.

[22] Nogueira, Sérgio H. Resultados de Existência de Soluções de Equações Funcionais Impulsivas. Tese de Mestrado.

[23] Pazy, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Applied Mathematical Sciences, 44. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.

[24] R. H. Martin, Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces, Robert E. Krieger Publ. Co., Florida, 1987.

[25] Rogovchenko, Yuri V. Impulsive evolution systems: main results and new trends. *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems* 3 (1997), no. 1, 57–88.

[26] Rogovchenko, Yuri V. Nonlinear impulse evolution systems and applications to population models. *J. Math. Anal. Appl.* 207 (1997), no. 2, 300–315.

[27] Sun, Jitao; Zhang, Yinping Impulsive control of a nuclear spin generator. *J. Comput. Appl. Math.* 157 (2003), no. 1, 235–242.

[28] Willé, David R.; Baker, Christopher T. H. Stepsize control and continuity consistency for state-dependent delay-differential equations. *J. Comput. Appl. Math.* 53 (1994), no. 2, 163-170.

[29] Wu, Jianhong, *Theory and applications of partial functional-differential equations.* Applied Mathematical Sciences, 119. Springer-Verlag, New York, 1996.

[30] Yang, Zhihui; Cao, Jinde Existence of periodic solutions in neutral state-dependent delays equations and models. *J. Comput. Appl. Math.* 174 (2005), no. 1, 179–199.

[31] Wu, Jianhong; Rezounenko, A., A non-local PDE model for population dynamics with state-selective delay: Local theory and global attractors. Journal of Computational and Applied Mathematics (In Press).

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo