

GUSTAVO DE MORAES RÊGO

DESEMPENHO DOS MODELOS DA NBR-6118 PARA ANÁLISE  
DE VIGAS CONTÍNUAS EM CONCRETO ARMADO

RECIFE

2005

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

GUSTAVO DE MORAES RÊGO

DESEMPENHO DOS MODELOS DA NBR-6118 PARA ANÁLISE  
DE VIGAS CONTÍNUAS EM CONCRETO ARMADO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Pernambuco para obtenção de título de Mestre em Engenharia Civil

Área de concentração: Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Bernardo Horowitz

RECIFE

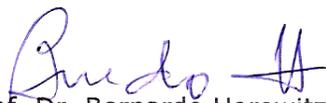
2005

DESEMPENHO DOS MODELOS DA NBR-6118 PARA ANÁLISE DE  
VIGAS CONTÍNUAS EM CONCRETO ARMADO

Gustavo de Moraes Rêgo

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA CIVIL DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO COMO  
PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL

Banca examinadora:



Prof. Dr. Bernardo Horowitz  
Professor Adjunto do Departamento de Engenharia Civil  
Universidade Federal de Pernambuco



Prof. Dr. Libânio Miranda Pinheiro  
Professor Doutor do Departamento de Engenharia de Estruturas  
Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo



Prof. Dr. Ézio da Rocha Araújo  
Professor Adjunto do Departamento de Engenharia Civil  
Universidade Federal de Pernambuco

Recife, Pernambuco – Brasil

Abril 2005

**R343d Rêgo, Gustavo de Moraes**

Desempenho dos modelos da NBR-6118 para análise de vigas contínuas em concreto armado / Gustavo de Moraes Rêgo . - Recife : O Autor, 2005.

160 folhas. : il. ; tab, fig. e símbolos.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Engenharia Civil. Área de concentração, Estruturas, 2005.

Inclui bibliografia .

1. Engenharia civil (Estruturas).2. Concreto armado - análise não-linear 3. Vigas contínuas - análise I. Título.

**UFPE**

**624**

**CDD (22.ed)**

**BCTG/2005-25**

Dedico este trabalho aos meus pais,  
minhas irmãs e a Carol.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Professor Bernardo Horowitz, pela excelente orientação, incentivo, profissionalismo e dedicação às disciplinas da Pós-Graduação e Graduação desta Escola.

Aos meus pais Ernani e Vivi, e minhas irmãs Viviane e Paulinha pela paciência e carinho durante a realização deste trabalho.

A Carol, pelo amor, compreensão, incentivo e a todo o apoio durante esse período.

Ao amigo e Professor Paulo de Araújo Regis, meu orientador durante três anos da Iniciação Científica.

À minha tia Ana Maria, meu cunhado Paulo Bentes e meu primo Artur pelo incentivo.

Aos grandes amigos Rodrigo e Théa, pela amizade e companheirismo.

Aos amigos da Pós-Graduação e Laboratório de Estruturas da UFPE: André, Thiago, Gustavo, Aloísio, Rebeca, Juliana, Marlon, Luiz Gustavo, Diego e Marcelo.

A todos os professores, da Universidade Federal de Pernambuco, que contribuíram para minha formação acadêmica.

Aos Professores Sérgio Lopes e Ricardo do Carmo pelos esclarecimentos oportunos.

Aos colegas de trabalho da Engedata Engenharia Estrutural, pelo incentivo.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro.

A todos aqueles que colaboraram para realização deste trabalho.

## RESUMO

Vigas contínuas são peças essenciais em soluções estruturais para prédios, pontes, passarelas e viadutos. O colapso, em flexão, dessas peças não se dá necessariamente com o esgotamento da capacidade resistente da seção transversal mais solicitada. Devido ao fenômeno de redistribuição de esforços, o colapso pode ocorrer quando um número suficiente de rótulas plásticas é formado, transformando a estrutura em mecanismo. No entanto, para a formação deste mecanismo é preciso que determinadas seções críticas tenham capacidade de rotação plástica suficiente.

Este trabalho tem como objetivo avaliar, comparar com resultados experimentais e implementar os diversos modelos de análise estrutural, na flexão, contemplados na NBR-6118: (I) Análise Linear Elástica; (II) Análise Linear com Redistribuição; (III) Análise Plástica; (IV) Análise Não-Linear. No segundo modelo, são utilizados coeficientes de redistribuição permitidos pela norma. Na análise plástica é utilizado um método matemático de otimização não-linear, o qual limita as rotações plásticas requeridas pelas seções críticas às rotações admissíveis de norma. Para o cálculo das rotações requeridas, pode-se utilizar relação momento-curvatura bilinear ou trilinear. Já para a análise não-linear, inicialmente é desenvolvido procedimento computacional para o cálculo da relação momento-curvatura, considerando as relações constitutivas não-lineares para o aço e para o concreto. Para este último, dentre algumas curvas, utiliza-se um modelo que descreve o comportamento pós-pico da compressão, levando em consideração fatores importantes, tais como as dimensões da peça e o gradiente de deformação da seção transversal. É considerada a contribuição à tração do concreto entre fissuras com controle pós-fissuração. De posse das relações momento-curvatura a análise não-linear de vigas contínuas é efetuada através do método da rigidez secante com controle de deformação.

Finalmente, as respostas (coeficiente de redistribuição, modo de ruptura da viga, carga última e momentos nas seções críticas) dos modelos apresentados são comparadas com vigas contínuas de dois vãos ensaiadas experimentalmente, disponíveis na literatura.

*Palavras-chave: Concreto Armado, Análise Não-Linear, Análise Plástica e Ductilidade.*

## **ABSTRACT**

Continuous beams are essential to structural solutions to buildings, bridges and walkways. Collapse in flexure does not necessarily occur when critical section reaches its strength capacity. Due moment redistribution collapse may occur when a sufficient number of plastic hinges transforms the structure into a mechanism. On the other hand, in order to develop this mechanism it is required that certain critical sections have sufficient plastic hinge rotation capacity.

The objectives of present work is to assess, compare with experimental results and implement the various structural analysis models included in NBR-6118: (I) Linearly elastic analysis; (II) Linearly elastic analysis with redistribution; (III) Plastic analysis; (IV) Nonlinear analysis. The second model uses redistribution factors allowed by the code. For plastic analysis a nonlinear optimization procedure is used the limits required plastic rotation in critical sections to allowable code values. In the computation of required rotations it may be used a bilinear or trilinear moment/curvature relationship. For the nonlinear analysis it is initially developed a computational procedure to compute moment/curvature relationship taking into account nonlinear constitutive relationships for steel and concrete, and for the former, among a number of curves a model is used that describes post peak compression behavior taking into account important factors like member size and deformation gradient. Tension stiffening is taken into account with a crack check procedure. With moment/curvature relationship defined nonlinear analysis of continuous beams is performed employing a deformation control secant stiffness algorithm.

Finally, response (redistribution factors, mode of failure, ultimate load and moments at critical sections) of the presented models is compared to two-span continuous beams experiments available in the literature.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Gráfico carga x deslocamento de uma viga simplesmente apoiada	27
Figura 2.2 – Deformação de uma peça sujeita à flexão	29
Figura 2.3 – Rotação de uma viga	30
Figura 2.4 - Relação tensão-deformação para o aço de concreto armado (NBR-6118)	32
Figura 2.5 – Relação tensão-deformação para o aço de concreto armado	33
Figura 2.6 – Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras ativas	33
Figura 2.7 – Dados fornecidos pelo fabricante	35
Figura 2.8 – Curva proposta para cordoalha	35
Figura 2.9 – Reposta tensão-deformação do concreto e seus constituintes (CEB, 1990)	36
Figura 2.10 – Estágios de fissuração no concreto sob compressão uniaxial (baseado em Borges, 2002)	37
Figura 2.11 – Diagrama parábola-retângulo para concreto na compressão	38
Figura 2.12 – Curvas tensão-deformação para diferentes $f_c$	39
Figura 2.13 – Resposta da barra envolvida pelo concreto (Baseado em Collins; Mitchell, 1991)	40
Figura 2.14 – Formação de fissuras internas (Baseado em Collins; Mitchell, 1991)	41
Figura 2.15 – Carga absorvida pelo concreto e a barra de aço (Baseado em Collins; Mitchell, 1991)	42
Figura 2.16 – Concreto de envolvimento da armadura (NBR-6118, 2003)	44
Figura 2.17 – Tensão de tração na fissura do concreto (Bentz, 2000)	44
Figura 2.18 – Curva tensão-deformação para um concreto de $f_{ck}=45\text{MPa}$	45
Figura 2.19 – Detalhe da contribuição do concreto à tração	45
Figura 2.20 – Distribuição de deformação no concreto	47
Figura 2.21 – Fases de um diagrama momento-curvatura	48

Figura 2.22 – Prisma de concreto armado tracionado _____	50
Figura 2.23 – Comportamento dos materiais à tração – concreto e aço _____	50
Figura 2.24 – Comportamento do prisma _____	51
Figura 2.25 – Comportamento do prisma com controle pós-fissuração _____	51
Figura 2.26 – Peça fletida (Bentz, 2000) _____	52
Figura 2.27 – Momento-Curvatura – comparação da contribuição do concreto à tração _____	53
Figura 2.28 – Diagrama $M-\phi$ de vigas de concreto armado _____	55
Figura 2.29 – Curva tensão-deformação concreto: ramo de amolecimento _____	56
Figura 2.30 - Esmagamento do concreto na flexão (Kaminska, 2002) _____	58
Figura 2.31 - Modelo utilizado para ruptura do concreto na compressão uniaxial ____	59
Figura 2.32 – Experimento de Weiss et al (2001). a) Esquema do ensaio experimental; b) Análise qualitativa da relação momento-curvatura _	60
Figura 2.33 - Modelo para ruptura do concreto de vigas de concreto armado na flexão _____	61
Figura 2.34 – Curvas tensão-deformação do concreto _____	64
Figura 2.35 – Geometria da viga SL1 – Alca et al (1997) _____	65
Figura 2.36 – Comparação entre os diagramas momento-curvatura _____	65
Figura 2.37 – Variação da tensão na fibra a uma altura h - Viga SL1 de Alca et al (1997) _____	66
Figura 2.38 – Distribuição de tensão, no trecho comprimido, para diferentes valores de curvatura _____	67
Figura 2.39 – Curvas de tensão-deformação para o concreto e o aço _____	68
Figura 2.40 – Detalhe da seção transversal – Viga T _____	68
Figura 2.41 – Seção transversal e distribuição de deformação _____	69
Figura 2.42 – Reposta momento-curvatura da viga T protendida _____	69
Figura 2.43 – Reposta momento-curvatura da viga retangular _____	70

Figura 2.44 – Deformação na seção no momento da ruptura do aço _____	71
Figura 3.1 – Momento-curvatura idealizado (Gaylord et al, 1992) _____	72
Figura 3.2 – Viga biapoiada com carregamento distribuído _____	73
Figura 3.3 – Viga bi-engastada _____	74
Figura 3.4 – Comportamento elasto-plástico trilinear e bilinear _____	81
Figura 3.5 – Comparação entre os braços de alavanca do $M_u$ e $M_y$ _____	82
Figura 3.6 – Comparação entre as relações momento-curvatura _____	82
Figura 3.7 – Viga de concreto armado – curvatura no apoio central _____	83
Figura 3.8 – Rotação plástica idealizada no apoio central _____	84
Figura 3.9 – Distribuição de curvatura obtida pela análise não-linear (Rotação Elástica e Rotação Plástica) _____	85
Figura 3.10 – Capacidade de rotação plástica segundo NBR6118 (2003) _____	87
Figura 3.11 – Viga contínua com carregamento qualquer e diagrama de momentos fletores _____	88
Figura 3.12 – Rotação nas rótulas _____	91
Figura 3.13 – Momento-Curvatura simplificado _____	93
Figura 3.14 – Domínios do estado limite último de uma seção transversal _____	95
Figura 3.15 – Esquema da viga T _____	98
Figura 3.16 - Redistribuição de momento fletor da primeira análise _____	99
Figura 3.17 – Redistribuição de momento fletor da segunda análise _____	99
Figura 3.18 - Redistribuição de momento fletor da terceira análise _____	100
Figura 3.19 – Possibilidades do cálculo da rigidez _____	102
Figura 3.20 - Viga contínua com carregamento qualquer, diagrama de momento e curvatura alvo _____	104
Figura 4.1 – Dados do teste 2.1 Eligehausen;Fabritius _____	109
Figura 4.2 - Diagrama de momento antes a depois da redistribuição _____	113
Figura 4.3 - Redistribuição de momento fletor. Análise Plástica (bilinear) _____	115

Figura 4.4 - Redistribuição de momento fletor. Análise Plástica (Trilinear) _____	116
Figura 4.5 - Momento-curvatura das seções: sec1, sec2 e sec3 _____	118
Figura 4.6 - Detalhe do momento-curvatura da sec3 _____	119
Figura 4.7 - Distribuição de deformação no apoio central _____	119
Figura 4.8 - Momento-curvatura das seções: sec1, sec2 e sec3 _____	121
Figura 4.9 - Redistribuição de momento fletor. Análise Não-Linear (Popovics <sup>2</sup> )____	122
Figura 4.10 - Distribuição de curvatura no comprimento da peça _____	122
Figura 4.11 - Informação sobre as vigas da 1ª série de ensaio _____	123
Figura 4.12 - Seção transversal dos tipos de seções das vigas V1-0.7 e V1-3.8 __	125
Figura 4.13 - Redistribuição de momento fletor. Análise Plástica (Bilinear) _____	128
Figura 4.14 - Variação da carga com o incremento de curvatura: ciclo externo __	131
Figura 4.15 - Momento-curvatura da seção 1 - V1-0.7 _____	131
Figura 4.16 - Momento-curvatura da seção 2 - V1-0.7 _____	132
Figura 4.17 - Curvas tensão-deformação aço e concreto - V1-0.7 _____	133
Figura 4.18 - Relação momento-curvatura para as seções 1 e 3 da viga V1-0.7__	134
Figura 4.19 - Variação da tensão na fibra a uma altura h - Viga V1-0.7 _____	135
Figura 4.20 - Distribuição de tesões para diferentes curvaturas _____	136
Figura 4.21 - Variação da carga com o incremento de curvatura: ciclo externo __	136
Figura 4.22 - Distribuição de curvatura no comprimento da peça _____	137
Figura 4.23 - Redistribuição de momento fletor. Análise Plástica (Bilinear) _____	140
Figura 4.24 - Variação da carga com o incremento de curvatura: ciclo externo __	142
Figura 4.25 - Comparação entre as curvas tensão-deformação para o concreto, viga V1-3.8 _____	143
Figura 4.26 - Distribuição de curvatura no comprimento da peça _____	143
Figura 4.27 - Variação da tensão na fibra a uma altura h - Viga V1-3.8 _____	144
Figura 4.28 - Distribuição de deformação para diferentes curvaturas _____	144

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Propriedades mecânicas exigíveis de barras e fios de aço destinados a armaduras para concreto armado (NBR-7480,1996)	31
Tabela 4.1 – Propriedades do aço Eligehausen;Fabritius (1993)	109
Tabela 4.2 – Causas da ruptura	111
Tabela 4.3 – Comparação entre a análise experimental e a análise linear (laje)	111
Tabela 4.4 - Comparação entre a análise experimental e a análise linear com redistribuição (laje)	112
Tabela 4.5 - Comparação entre a análise experimental e a análise plástica - bilinear (laje)	114
Tabela 4.6 - Comparação entre a análise experimental e a análise plástica - trilinear (laje)	116
Tabela 4.7 - Comparação entre a análise experimental e a análise plástica - hipotética (laje)	117
Tabela 4.8 - Comparação entre a análise experimental e a análise não-linear -NBR (laje)	119
Tabela 4.9 - Comparação entre a análise experimental e a análise não-linear - NBR* (laje)	120
Tabela 4.10 - Comparação entre a análise experimental e a análise não-linear – Popovics (laje)	121
Tabela 4.11 – Definição da área das armaduras das vigas 1ª série	123
Tabela 4.12 - Características mecânicas do aço	125
Tabela 4.13 - Comparação entre a análise experimental e a análise linear (V1-0.7)	126
Tabela 4.14 - Comparação entre a análise experimental e a análise linear com redistribuição (V1-0.7)	127

Tabela 4.15 - Comparação entre a análise experimental e a análise plástica Bilinear - (Viga 0.7) _____	128
Tabela 4.16 - Comparação entre a análise experimental e a análise plástica Trilinear - (Viga 0.7) _____	129
Tabela 4.17 - Comparação entre a análise experimental e a análise não-linear - NBR (V1-0.7) _____	129
Tabela 4.18 - Comparação entre a análise experimental e a análise não-linear - Popovics (V1-0.7) _____	130
Tabela 4.19 - Comparação entre a análise experimental e a análise não-linear - (V1- 0.7). _____	132
Tabela 4.20 - Características dos pontos escolhidos _____	133
Tabela 4.21 - Comparação entre a análise experimental e a análise não-linear - Popovics/Fantilli (V1-0.7) _____	135
Tabela 4.22 - Comparação entre a análise experimental e a análise linear (V1-3.8) _____	138
Tabela 4.23 - Comparação entre a análise experimental e a análise linear com redistribuição (V1-3.8). _____	138
Tabela 4.24 - Comparação entre a análise experimental e a análise plástica Bilinear - (Viga 3.8). _____	139
Tabela 4.25 - Comparação entre a análise experimental e a análise plástica Trilinear - (Viga 3.8) _____	140
Tabela 4.26 - Comparação entre a análise experimental e a análise não-linear - NBR (V1-3.8) _____	141
Tabela 4.27 - Comparação entre a análise experimental e a análise não-linear - Popovics (V1-3.8) _____	141
Tabela 4.28 - Comparação entre a análise experimental e a análise não-linear - Popovics/Fantilli (V1-3.8) _____	142

Tabela 4.29 - Resumo dos resultados - laje	145
Tabela 4.30 - Resumo dos resultados - V1-0.7	146
Tabela 4.31 - Resumo dos resultados - V1-3.8	146
Tabela 4.32 - Média dos resultados para as análises indicadas	148

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Letras Romanas

$A_s$	área da armação passiva de tração,
$z$	distância do eixo neutro à fibra estudada
$dx$	comprimento diferencial
$d$	altura útil para armação tracionada
$w$	deslocamento vertical, encurtamento longitudinal inelástico
$E$	módulo de elasticidade do concreto
$EI_{sec}$	rigidez secante
$f_{su}$	limite de resistência do aço
$f_{sy}$	resistência característica de escoamento do aço
$E_p$	módulo de elasticidade da armadura ativa
$E_s$	módulo de elasticidade da armadura passiva
$f_p$	tensão na armadura ativa
$f_s$	tensão na armadura passiva
$f_{pu}$	limite de resistência da cordoalha
$f_{py}$	resistência característica a cordoalha
$f_p$	tensão na cordoalha
$A_p$	área da armadura ativa
$A_s'$	área da armadura de compressão
$M_{pl}$	momento de plastificação
$q_e$	carga de ruptura para análise elástica
$q_u$	carga de ruptura para análise plástica
$x$	profundidade do eixo neutro
$M_r$	momento de fissuração
$l_p$	comprimento de plastificação
$M^{(-)}$	momento fletor na seção crítica negativa

$M^{(+)}$	momento fletor na seção crítica positiva
$f_{ck}$	resistência característica do concreto
$E_{cs}$	módulo de elasticidade secante do concreto
$N$	esforço normal
$f_c$	tensão no concreto
$f_{cr}$	tensão de fissuração do concreto
$y$	eixo vertical com origem no centróide da seção
$x$	eixo horizontal
$M$	momento fletor
$z_s$	cota da armação
$H$	altura da peça
$L$	comprimento da peça
$EI_r$	rigidez da peça fissurada
$f_{ct}$	resistência à tração direta do concreto
$f_{ctm}$	resistência média à tração do concreto
$I_c$	momento de inércia da seção bruta de concreto
$k$	rigidez secante de cada seção
$M_R$	momento resistente
$P_{teór.}$	carga última obtida pela análise teórica
$P_{exp.}$	carga última obtida pela análise experimental

### **Letras Gregas**

$\varepsilon$	deformação numa fibra distante do eixo neutro
$\rho$	raio de curvatura, taxa de armadura
$\varphi$	curvatura de uma seção
$\theta$	rotação num comprimento $dx$ de uma peça
$\varepsilon_c$	deformação no concreto
$\varepsilon_s$	deformação na armadura passiva

$\epsilon_{suk}$	deformação máxima característica do aço
$\epsilon_{su}$	deformação máxima no aço
$\epsilon_{sh}$	deformação para o início do endurecimento do aço
$\epsilon_{pu}$	deformação de ruptura da armadura ativa
$\phi$	diâmetro da armadura
$\delta$	coeficiente de redistribuição
$\phi_{pl}$	curvatura para o início do comportamento plástico
$\theta$	rotação
$\theta_{pl}$	rotação plástica
$\theta$	rotação elástica
$\phi_r$	curvatura para o início de fissuração
$\epsilon_{c2}$	deformação no limite da parábola da curva tensão-deformação parábola-retângulo para o concreto
$\epsilon_{cu2}$	deformação última da curva tensão-deformação parábola-retângulo para o concreto
$\epsilon_{ck}$	deformação no pico da curva tensão-deformação para o concreto
$\epsilon_{cen}$	deformação ao nível do centróide da seção
$\epsilon_{cu}$	deformação última do concreto
$\phi_u$	curvatura última determinada
$\phi_y$	curvatura de escoamento
$\theta_{req}$	rotação plástica requerida
$\theta_{adm}$	rotação plástica admissível
$\phi_{tar}$	curvatura alvo
$\phi_{lim}$	curvatura limite
$\phi_{unit}$	curvatura obtida pela análise linear para carregamento unitário
$\phi_{unit,key}$	curvatura obtida pela análise linear para carregamento unitário na seção chave
$\eta$	índice de redistribuição

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>22</b>
1.1	OBJETIVOS	24
1.2	APRESENTAÇÃO	25
<b>2</b>	<b>RELAÇÃO MOMENTO-CURVATURA</b>	<b>27</b>
2.1	INTRODUÇÃO	27
2.2	CURVATURA DE UMA PEÇA	28
2.3	RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DOS MATERIAIS	30
2.3.1	AÇO PARA ARMADURA DE CONCRETO ARMADO	30
2.3.2	AÇO PARA ARMADURA DE CONCRETO PROTENDIDO	33
2.3.3	COMPORTAMENTO DO CONCRETO NA COMPRESSÃO UNIAXIAL	36
2.3.4	CONTRIBUIÇÃO DO CONCRETO ENTRE FISSURAS	40
2.4	INTEGRAÇÃO DE TENSÕES	46
2.4.1	COMPATIBILIDADE DE DEFORMAÇÕES	46
2.4.2	EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO	47
2.5	DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA	48
2.5.1	PROCEDIMENTO PARA OBTENÇÃO DA RELAÇÃO MOMENTO-CURVATURA	49
2.5.2	CONTROLE PÓS-FISSURAÇÃO	50
2.5.3	CURVATURA ÚLTIMA	53
2.5.4	RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO NO CONCRETO EM PEÇAS FLETIDAS	56
2.5.5	RUPTURA DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO	58

2.5.6	EXEMPLOS	64
<b>3</b>	<b>PROCESSOS DE VERIFICAÇÃO</b>	<b>72</b>
3.1	INTRODUÇÃO	72
3.2	TEOREMA DO LIMITE INFERIOR	73
3.3	ANÁLISE LINEAR	75
3.4	ANÁLISE LINEAR COM REDISTRIBUIÇÃO	77
3.5	ANÁLISE PLÁSTICA	79
3.5.1	INTRODUÇÃO	79
3.5.2	ROTAÇÃO PLÁSTICA	80
3.5.3	DUCTILIDADE	85
3.5.4	ALGORITMO PARA OBTER A CARGA ÚLTIMA	88
3.5.5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	98
3.6	ANÁLISE NÃO-LINEAR	100
3.6.1	INTRODUÇÃO	100
3.6.2	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	101
3.6.3	ALGORITMO	102
<b>4</b>	<b>COMPARAÇÃO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS</b>	<b>108</b>
4.1	INTRODUÇÃO	108
4.2	ESTUDO 1 – LAJE CONTÍNUA	108
4.2.1	ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA	110
4.2.2	ANÁLISE LINEAR COM REDISTRIBUIÇÃO	111
4.2.3	ANÁLISE PLÁSTICA	113
4.2.4	ANÁLISE NÃO-LINEAR	117

<b>4.3 ESTUDO 2 – VIGA CONTÍNUA</b>	<b>122</b>
4.3.1 VIGA V1-0.7	126
4.3.2 VIGA V1-3.8	137
<b>4.4 RESUMO DOS RESULTADOS</b>	<b>145</b>
<b>4.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>146</b>
<b>5 CONCLUSÕES</b>	<b>149</b>
<b>5.1 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>152</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>153</b>
<b>BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR</b>	<b>158</b>

# 1 INTRODUÇÃO

O projetista estrutural pode-se confrontar com dois tipos de problemas: dimensionamento e verificação estrutural.

O primeiro constitui-se no trabalho diário dos projetistas de estruturas de concreto armado, os quais, muitas vezes, utilizam programas computacionais para considerar as não-linearidades físicas e geométricas. Muitos desses programas utilizam coeficientes redutores de rigidez dos elementos estruturais para simular o efeito de fissuração, como também coeficientes de engastamento entre viga e pilar (viga/pilar) e nos apoios das lajes contínuas (laje/laje), introduzindo rótulas plásticas sem verificar a capacidade de rotação plástica das seções críticas. Esses processos, mesmo de maneira indireta, estão promovendo uma redistribuição de esforços.

O estudo do comportamento de vigas contínuas em concreto armado, perto da carga última, é necessário para determinar a possível redistribuição de esforços que poderá ser utilizada no cálculo.

As estruturas hiperestáticas possuem capacidade de transferir esforços de regiões mais solicitadas para as menos solicitadas. Esta capacidade depende, principalmente, da ductilidade das regiões mais solicitadas (críticas) e faz, por exemplo, com que vigas contínuas não entrem em colapso necessariamente quando sua seção mais crítica esgote sua capacidade resistente.

No dimensionamento, a forma mais simples de utilizar a ductilidade de vigas contínuas é realizar uma análise linear seguida de uma redistribuição limitada, através de coeficientes indicados por norma. Dessa maneira, pode-se encontrar cargas últimas potencialmente maiores que as calculadas sem a redistribuição, como também promover:

- Transferência de momentos de áreas mais solicitadas para outras menos solicitadas.
- Menor quantidade de armação em zonas de momento negativo, desse modo, transferindo esforços para zona de momento positivo.
- Redução no congestionamento de armação nos apoios de vigas contínuas ou lajes, melhorando a concretagem nestas áreas críticas. Inclusive a concretagem do pilar.
- Maior liberdade para o projetista estrutural no detalhamento da armação.
- Diminuição do momento atuante no pilar.

A ductilidade é uma característica bastante importante das estruturas em concreto armado. Pode ser inicialmente explicada como a característica de uma seção ou estrutura se deformar de maneira inelástica, sem ocorrer grandes perdas na sua capacidade de resistir aos esforços.

As estruturas dúcteis, de certa forma, avisam antes do colapso através de grandes deslocamentos, e podem retardar o colapso quando transferem os esforços de uma seção mais solicitada para outra menos solicitada.

A redistribuição dos esforços ocorre em duas fases. A primeira é a elástica, e nesta ocorre uma pequena redistribuição devido aos diferentes níveis de fissuração ao longo da peça estrutural, o que provoca uma variação na distribuição das rigezas, podendo ocasionar uma redistribuição de esforços das regiões mais fissuradas (menor rigidez) para regiões menos fissuradas (maior rigidez). Esta redistribuição inicial, pode, muitas vezes, ser ignorada quando comparada com a redistribuição da segunda fase (plástica), a qual, de maneira geral, proporciona redistribuição consideravelmente maior.

O segundo tipo de problema, que o projetista estrutural pode se confrontar, é a verificação estrutural, o qual na maioria dos casos, tem como proposta determinar

as solicitações (distribuição de esforços internos, tensões, deformações e deslocamentos) em toda a estrutura ou em um trecho isolado, para que sejam realizadas as verificações nos diversos estados de carregamento. Problemas desse tipo aparecem até mesmo na fase posterior ao pré-dimensionamento a fim de comprovar as exigências dos estados limites ou, por exemplo, em ampliações e reformas, quando se pretende modificar as condições de carregamento para as quais a estrutura foi inicialmente dimensionada. Outro exemplo seria: supor uma viga contínua, a qual foi armada e concretada em desacordo com o projeto estrutural, por exemplo, com armadura deficiente na parte superior de um apoio. O projetista precisa responder se a viga deve ser recuperada ou se a configuração que foi concretada é suficiente para resistir aos esforços com nível de segurança adequado, redistribuindo esforços do apoio para os vãos adjacentes. Estas e outras questões são respondidas após a verificação estrutural por algum modelo eficiente e seguro.

## **1.1 OBJETIVOS**

Algumas normas, incluindo a NBR-6118 (2003), admitem os seguintes tipos de análise estrutural:

- Análise linear.
- Análise linear com redistribuição limitada.
- Análise plástica.
- Análise não-linear.
- Análise através de modelos físicos.

A primeira análise é baseada na teoria elástica e admite comportamento elástico-linear para os materiais. Para estender os resultados dessa análise, para o estado limite último, deve existir ductilidade nos elementos estruturais, por isso, limita-se a profundidade relativa do eixo neutro, como será discutido no capítulo 3. Na segunda análise é permitida uma redistribuição limitada por coeficientes

fornecidos pelas normas. Nessa análise não é verificada, explicitamente, a capacidade de redistribuição das seções mais solicitadas, e os coeficientes dependem da profundidade relativa do eixo neutro no estado limite último. Na análise plástica, a capacidade de rotação é verificada de forma explícita e admite comportamento rígido-plástico perfeito ou elasto-plástico perfeito. Já na análise não-linear, as não-linearidades dos materiais (aço e concreto) são consideradas. Devem-se utilizar as relações constitutivas dos materiais que possam representar o comportamento mais próximo da realidade para cada um deles. Os resultados dependerão da geometria da estrutura, como também da distribuição final das armações.

Existem muitos estudos sobre cada um destes tipos de análise estrutural, e são, normalmente, realizados de forma isolada ou são dedicados a pontos específicos de cada análise. Havendo a necessidade da comparação dos resultados de cada um deles, foi escolhido para esta dissertação implementar os quatro primeiros tipos de análise e comparar os seus resultados com as repostas provenientes de análises através de modelos físicos (ensaios experimentais) disponíveis na literatura.

## **1.2 APRESENTAÇÃO**

Este trabalho está dividido em cinco capítulos. No segundo capítulo, mostra-se o procedimento para construção do diagrama momento-curvatura para peças submetidas à flexão. Também, são apresentadas as relações constitutivas dos materiais (aço e concreto). Nas três primeiras análises, utilizam-se as mesmas relações, já na análise não-linear adotam-se outras mais realistas. A contribuição do concreto à tração entre fissuras é detalhada com um controle de pós-fissuração. No final do capítulo, apresenta-se um modelo para obter o comportamento pós-pico da curva tensão-deformação do concreto, levando-se em consideração fatores importantes, tais como as dimensões da peça e o gradiente de deformação da seção transversal. E, por fim, mostram-se alguns exemplos.

No terceiro capítulo, os diversos modelos de análise estrutural são discutidos e implementados. Na análise plástica é mostrada a obtenção da rotação requerida<sup>1</sup> e a rotação admissível da norma, como também o procedimento computacional utilizado para efetuar esta análise. Segue-se então com a análise não-linear e a descrição do seu algoritmo.

No quarto capítulo, os resultados dos ensaios experimentais, de três vigas, são comparados com os obtidos através das quatro análises estudadas. As vigas foram ensaiadas por outros autores e possuem dois vãos.

O último capítulo contém as conclusões deste trabalho, além de sugestões para futuros estudos.

---

<sup>1</sup> O CEB (Comité Euro-International du Béton), Bulletin 242, May 1998, utiliza a terminologia "*required rotation*", que foi traduzida pelo autor do presente trabalho com *rotação requerida*. Essa terminologia será utilizada como a rotação requerida pela rótula plástica.

## 2 RELAÇÃO MOMENTO-CURVATURA

### 2.1 INTRODUÇÃO

Estruturas em concreto armado podem apresentar comportamento dúctil ou frágil. A ruptura brusca, sem aviso prévio, deve ser evitada quando possível. As peças devem ter capacidade de serem submetidas a grandes deformações antes de atingirem a carga de colapso. A Figura 2.1 apresenta os tipos de comportamento carga-deslocamento de uma viga simplesmente apoiada com uma carga no centro do vão.

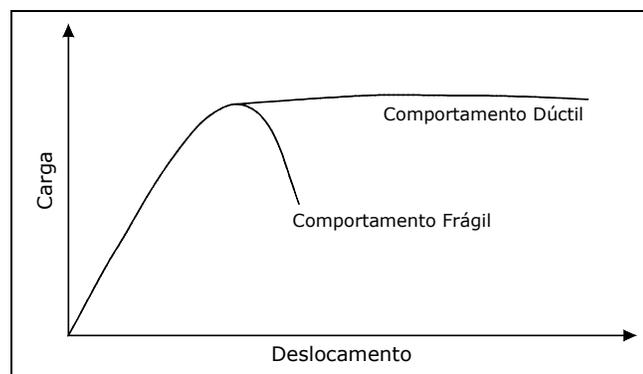


Figura 2.1 – Gráfico carga x deslocamento de uma viga simplesmente apoiada

Segundo Park;Paulay (1975), nas peças em que a maioria das deformações provém de tensões associadas à flexão, o comportamento carga-deslocamento depende, principalmente, da característica da relação momento-curvatura da seção transversal.

Neste capítulo é mostrada a obtenção do diagrama momento-curvatura para seções em concreto armado e protendido submetidas à flexão. Este diagrama será usado para achar os momentos associados às curvaturas para cada seção discretizada no processo iterativo da análise não-linear. Também, será usado para

achar deslocamentos e rotações através da integração ao longo do comprimento da peça.

O diagrama momento-curvatura teórico reflete as propriedades dos materiais que compõem a peça. As leis constitutivas dos materiais aço e concreto devem representar, da melhor forma possível, as respostas destes materiais às solicitações, conforme CEB (1995).

## 2.2 CURVATURA DE UMA PEÇA

Uma viga, simplesmente apoiada com um carregamento transversal, apresenta certa configuração de deslocamento ao longo do seu comprimento. Considerando-se um elemento de comprimento infinitesimal  $dx$  desta viga, como mostra a Figura 2.2a, pode-se definir a curvatura como a razão da variação da rotação  $d\theta$  por unidade de comprimento  $dx$ , equação (2.3).

Uma outra forma de definir a curvatura, baseada na hipótese de Bernoulli<sup>2</sup>, é como o gradiente das deformações na seção transversal, apresentada na Figura 2.2b.

Devido à formação de fissuras, a profundidade do eixo neutro terá vários valores ao longo do comprimento da peça, e como consequência a curvatura assumirá valores distintos. Numa seção fissurada, a profundidade do eixo neutro é menor do que em uma seção não fissurada. Analisando um pequeno elemento de comprimento  $dx$ , pode-se concluir que:

$$\text{Comprimento do segmento } \overline{AB} = \rho\theta$$

$$\text{Comprimento de segmento } \overline{A'B'} = (\rho+z)\theta$$

---

<sup>2</sup> Hipótese de Bernoulli: manutenção da seção plana após a deformação.

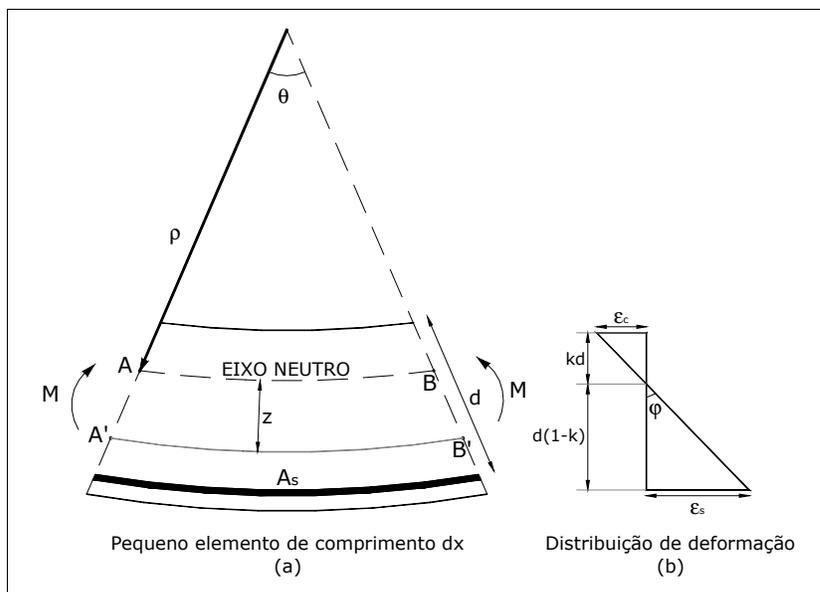


Figura 2.2 - Deformação de uma peça sujeita à flexão

Deformação unitária de uma fibra a uma distância  $z$  do eixo neutro:

$$\varepsilon = \frac{(\rho + z) \cdot \theta - \rho \cdot \theta}{\rho \cdot \theta} = \frac{z}{\rho} \quad (2.1)$$

Observando a figura 2.2a:

$$dx = \rho \cdot d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \quad (2.2)$$

Usando a primeira definição de curvatura, conclui-se que:

$$\text{Curvatura} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\rho} \quad (2.3)$$

onde:  $\rho$  = raio da curvatura

Utilizando as equações (2.1) e (2.3):

$$\varepsilon = \varphi \cdot z \quad (2.4)$$

Da segunda definição da curvatura e observando a figura 2.2b:

$$\varphi = \frac{\varepsilon_c}{kd} = \frac{\varepsilon_s}{d \cdot (1-k)} = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_s}{d} \quad (2.5)$$

A Figura 2.3 mostra deslocamentos verticais  $w$ , de uma viga simplesmente apoiada.

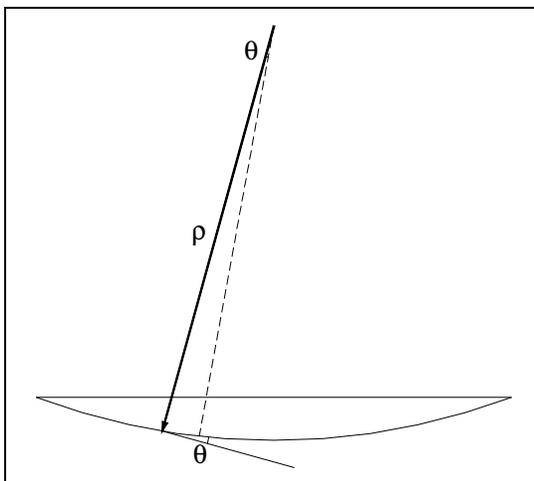


Figura 2.3 – Rotação de uma viga

Admitem-se pequenos deslocamentos verticais, e como consequência pequenas rotações:

$$\theta \approx \text{sen}\theta \approx \text{tg}\theta \approx \frac{dw}{dx} \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d(\theta)}{dx} = \frac{d^2w}{dx^2} = w'' \quad (2.7)$$

Substituindo a equação (2.7) na clássica equação elástica chega-se em:

$$w'' = -\frac{M}{EI} \Rightarrow \varphi = \frac{M}{EI_{\text{sec}}} \quad (2.8)$$

## 2.3 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DOS MATERIAIS

### 2.3.1 AÇO PARA ARMADURA DE CONCRETO ARMADO

O aço para concreto armado é caracterizado por: geometria (tamanho e característica da superfície); propriedades mecânicas (limite de escoamento, ductilidade, comportamento à fadiga e comportamento em altas temperaturas); propriedades tecnológicas (aderência, dobramento, soldagem e expansão térmica). Dentre as características citadas, as mais importantes para este trabalho são: ductilidade e limite de escoamento.

Os aços são normalmente classificados quanto a sua ductilidade (capacidade do material de se deformar sob a ação de cargas antes de se romper). Uma maneira de quantificar a ductilidade é através do quociente entre o limite de resistência e a resistência característica de escoamento,  $(f_{su}/f_{sy})$  como também da deformação máxima característica,  $\epsilon_{su}$ .

A Tabela 2.1 mostra a classificação utilizada pela norma Brasileira NBR-7480 (1996) - Barras e fios de aço destinados a armaduras para concreto armado. O módulo de elasticidade do aço é admitido igual a 210 GPa.

*Tabela 2.1 – Propriedades mecânicas exigíveis de barras e fios de aço destinados a armaduras para concreto armado (NBR-7480,1996)*

Categoria	Ensaio de tração (valores mínimos)			Ensaio de Dobramento a 180°		Aderência
	Resistência característica de escoamento $f_{sy}$ (MPa)	Limite de Resistência $f_{su}$ (MPa)	Alongamento em 10 $\phi$ (%)	Diâmetro de pino (mm)		Coeficiente de conformação superficial mínimo para $\phi \geq 10\text{mm}$ $\eta$
				$\phi < 20$	$\phi \geq 20$	
CA-25	250	1,20 $f_{sy}$	18	2 $\phi$	4 $\phi$	1,0
CA-50	500	1,10 $f_{sy}$	8	4 $\phi$	6 $\phi$	1,5
CA-60	600	1,05 $f_{sy}$	5	5 $\phi$	-	1,5

Neste trabalho, será utilizada a curva tensão-deformação bilinear, Figura 2.4, permitida pela NBR-6118 (2003), equação (2.9), para o cálculo dos momentos de plastificação utilizados na análise plástica, e ficará como opção a ser aplicada na construção da curva momento-curvatura empregada na análise não-linear.

1. Elástica,  $\epsilon_s < \epsilon_{sy}$

$$f_s = E_s \cdot \epsilon_s$$

2. Patamar de escoamento,  $\epsilon_{sy} \leq \epsilon_s < \epsilon_{su}$

$$f_s = f_{sy}$$

(2.9)

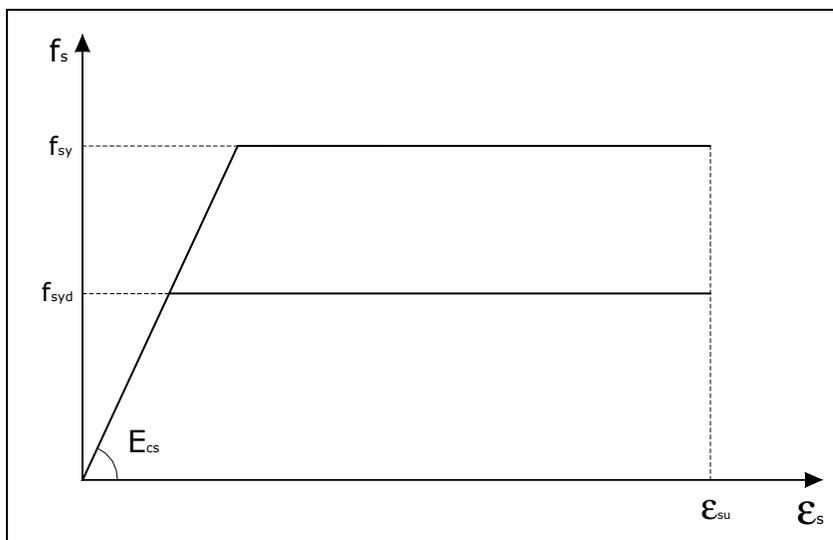


Figura 2.4 - Relação tensão-deformação para o aço de concreto armado (NBR-6118)

Para análise não-linear poderá ser utilizada, também, uma curva mais realista deste material, Figura 2.5, a qual considera individualmente as regiões: comportamento elástico, patamar de escoamento e endurecimento.

1. Elástica,  $\varepsilon_s < \varepsilon_{sy}$

$$f_s = E_s \cdot \varepsilon_s$$

2. Patamar de escoamento,  $\varepsilon_{sy} \leq \varepsilon_s < \varepsilon_{sh}$

$$f_s = f_{sy}$$

3. Deformação de endurecimento,  $\varepsilon_{sh} < \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su}$

$$f_s = f_{sy} + (f_{su} - f_{sy}) \cdot \left[ 2 \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{sh}}{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sh}} - \left( \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{sh}}{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sh}} \right)^2 \right]$$

(2.10)

Onde  $\varepsilon_{sh}$  é a deformação para o início do endurecimento do aço.

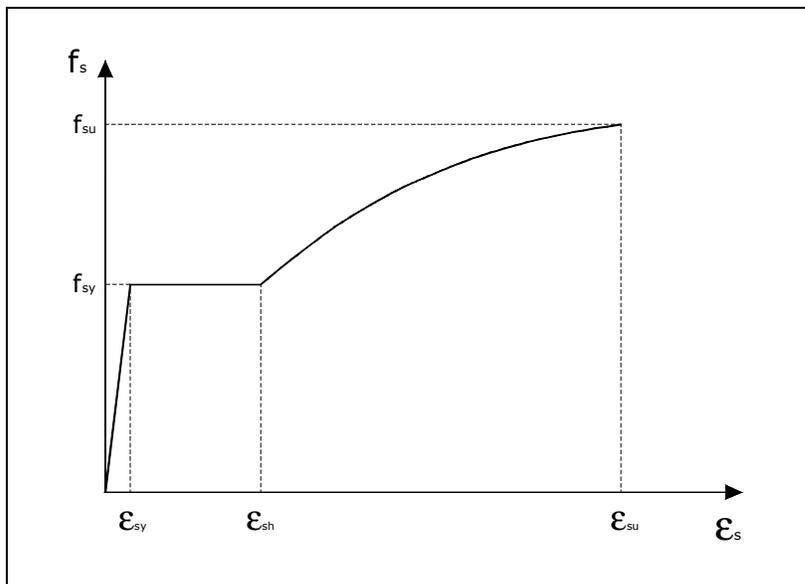


Figura 2.5 – Relação tensão-deformação para o aço de concreto armado

### 2.3.2 AÇO PARA ARMADURA DE CONCRETO PROTENDIDO

O diagrama tensão-deformação simplificado para o aço de armaduras ativas, fornecido pela NBR-6118 (2003), para o cálculo no estado-limite de serviço e último é mostrado na Figura 2.6.

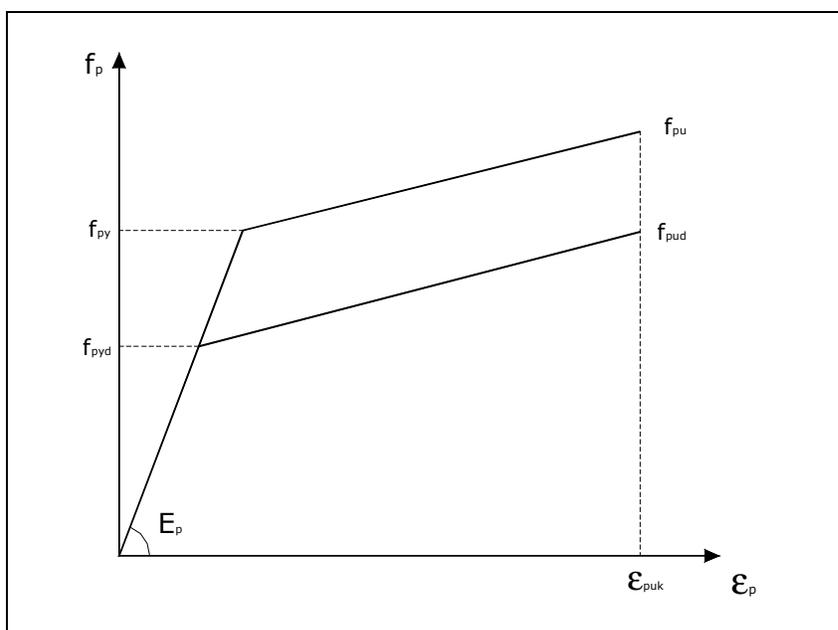


Figura 2.6 – Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras ativas

O comportamento das armaduras ativas utilizado para obter a relação momento-curvatura de peças protendidas será o fornecido pelo fabricante *Belgo Bekaert Arames S.A.* O produto utilizado como exemplo é a cordoalha 7 fios para concreto protendido CP 190 RB-NUA-NBR7483/90. O fabricante fornece valores de cargas e deformações para este produto.

Uma representação precisa da resposta tensão-deformação de cordoalhas para concreto protendido pode ser obtida, usando a função modificada de Ramberg-Osgood, recomendada por Collins; Mitchell; (1991) e mostrada abaixo:

$$f_p = E_p \cdot \varepsilon_p \cdot \left\{ A + \frac{1 - A}{\left[ 1 + (B \cdot \varepsilon_p)^C \right]^{\frac{1}{C}}} \right\} \leq f_{pu} \quad (2.11)$$

Se os dados fornecidos pelo fabricante forem desenhados, será conhecida a curva experimental da cordoalha. Então a equação (2.11) poderá ser ajustada para esses pontos. Os quatro parâmetros A, B, C e  $E_p$  são constantes determinadas através da Figura 2.7, de acordo com o procedimento descrito abaixo:

- i. representar a curva experimental por duas retas pontilhadas como mostra a figura;
- ii. determinar  $E_p$  através da inclinação da primeira reta;
- iii. determinar A pela inclinação da segunda reta. A inclinação é  $A \cdot E_p$ ;
- iv. determinar B pela interseção da segunda linha com o eixo  $f_p$ . O valor de  $f_p$  na interseção é  $E_p(1-A)/B$ ;
- v. determinar C por tentativa e erro para obter uma curva de transição adequada. Um valor alto de C dá uma transição brusca.

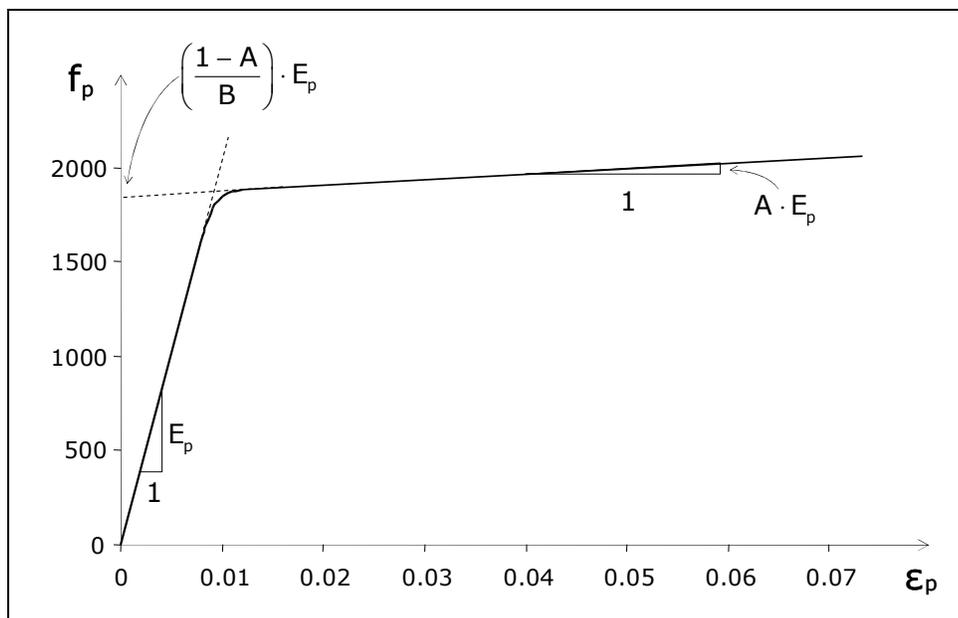


Figura 2.7 - Dados fornecidos pelo fabricante

As constantes teóricas obtidas com o procedimento descrito foram:

$A=0.0131$ ,  $B=109.5$ ,  $C=13$  e  $E_p = 206$  GPa.

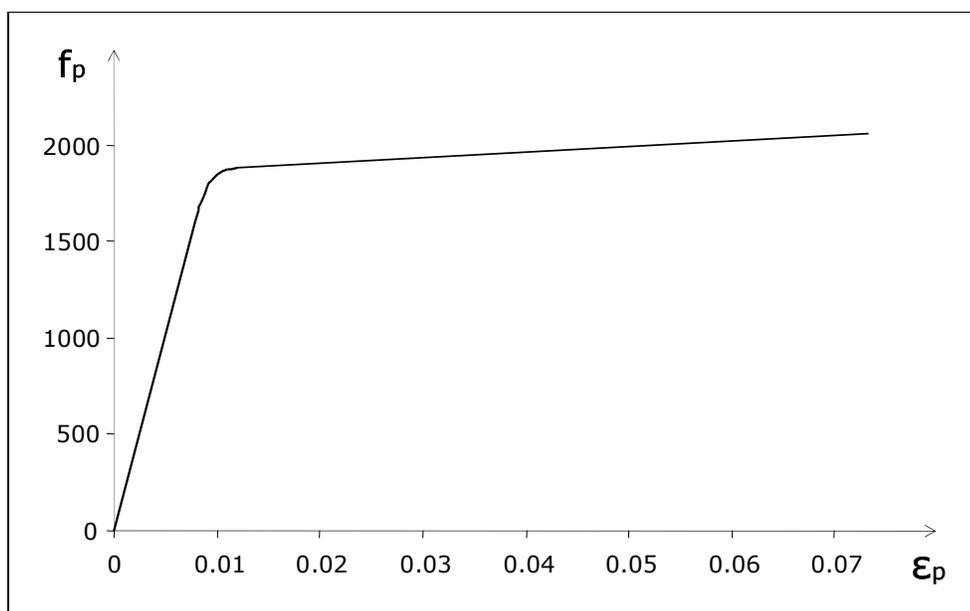


Figura 2.8 - Curva proposta para cordoalha

Equação proposta para a cordoalha 7 fios para concreto protendido CP 190 RB-  
NUA-NBR7483/90:

$$f_p(\epsilon_p) = 206 \cdot 10^3 \cdot \epsilon_p \cdot \left\{ 0.0131 + \frac{0.987}{\left[ 1 + (109.5 \cdot \epsilon_p)^{13} \right]^{\frac{1}{13}}} \right\} \leq f_{pu} \quad (2.12)$$

### 2.3.3 COMPORTAMENTO DO CONCRETO NA COMPRESSÃO UNIAXIAL

O comportamento à compressão dos constituintes do concreto, agregado e a pasta de cimento, é próximo do linear e com ruptura frágil. Mas a resposta tensão-deformação do concreto é não-linear, e o comportamento pré-pico é compreendido entre as retas do agregado graúdo e da pasta de cimento, mostrado na Figura 2.9, conforme Collins; Mitchell (1991) e CEB (1990).

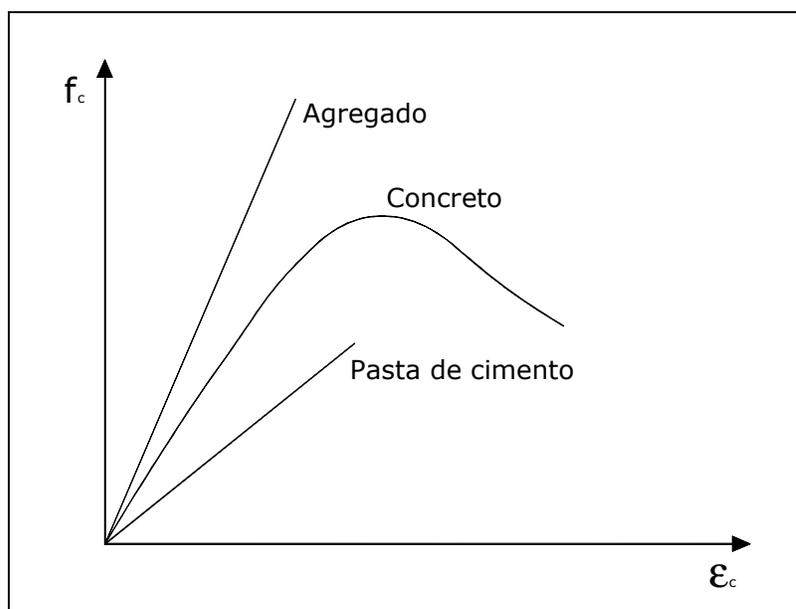


Figura 2.9 – Resposta tensão-deformação do concreto e seus constituintes (CEB, 1990)

Baseado em observações experimentais, o comportamento de fraturamento de um corpo-de-prova submetido à compressão uniaxial pode ser esquematizado como na Figura 2.10. A curva tensão-deformação pode ser dividida em várias etapas. Inicialmente, a tensão aumenta de forma aproximadamente linear com a deformação. As microfissuras começam a abrir no ponto A, acerca de 30% da tensão máxima. As fissuras de aderência agregado-pasta começam a se propagar no ponto

B, a aproximadamente 50% da tensão máxima. Essas fissuras de aderência invadem a matriz de argamassa e começam a formar várias fissuras principais na direção do carregamento aplicado, ponto C. Essas fissuras principais crescem de forma estável até o atingimento da tensão máxima no ponto D. Desse ponto em diante, as fissuras são propagadas automaticamente, mesmo com a diminuição da tensão (ramo de amolecimento), até o fraturamento final do corpo-de-prova (Borges, 2002).

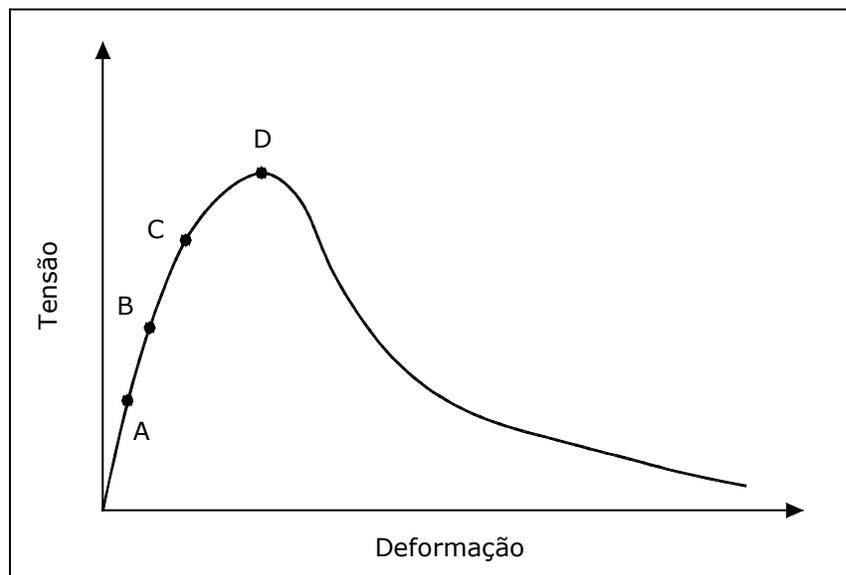


Figura 2.10 – Estágios de fissuração no concreto sob compressão uniaxial (baseado em Borges, 2002)

Para o cálculo dos momentos resistente e de escoamento, utilizados na análise plástica, será usado o diagrama parábola-retângulo, adotado pela NBR-6118, mostrado na Figura 2.11, além do módulo de elasticidade secante obtido através da equação (2.14).

$$f_c = 0,85 \cdot f_{ck} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{2\text{‰}} \right)^2 \right] \quad (2.13)$$

$$E_{CS} = 0,85 \cdot 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (2.14)$$

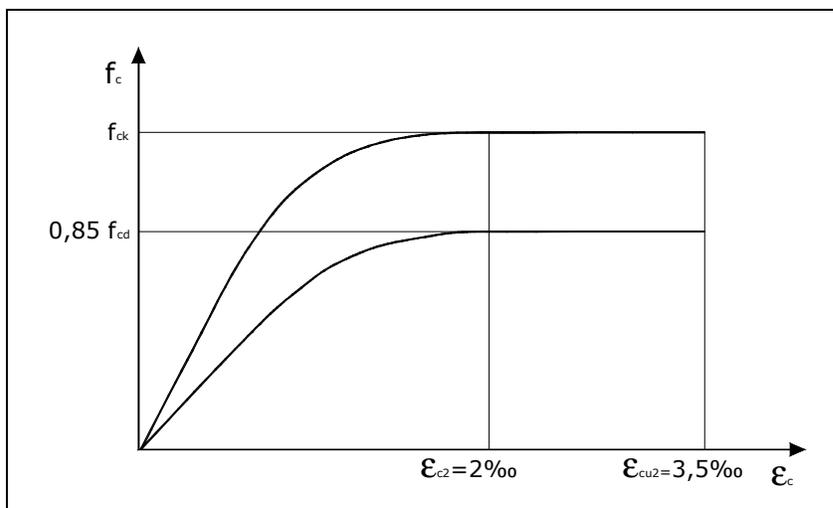


Figura 2.11 – Diagrama parábola-retângulo para concreto na compressão

Para a análise não-linear é possível utilizar, além das equações (2.13) e (2.14), a curva tensão-deformação para o concreto na compressão, idealizada por Popovics;Thorefeldt;Collins, apresentada por Collins;Mitchell (1991), a qual representa bem famílias de curvas de concretos de diferentes resistências.

$$f_c = f_{ck} \cdot \left[ \frac{n \cdot \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{ck}} \right)}{n - 1 + \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{ck}} \right)^{nk}} \right] \quad (2.15)$$

Onde,

$f_{ck}$  = tensão máxima obtida no ensaio do cilindro;

$\epsilon_{ck}$  = deformação quando  $f_c$  alcançar  $f_{ck}$ ;

$n$  = coeficiente determinado pela resistência característica do concreto;

$k$  = coeficiente para levar em consideração danos no concreto após a resistência de pico.

O módulo de elasticidade tangente inicial do concreto assume valores intermediários entre os valores do agregado e a pasta de cimento, como mostra a Figura 2.9. Na falta deste valor experimental, pode-se estimar o valor do módulo de elasticidade através da equação (2.16).

$$E_c = 3320\sqrt{f_{ck}} + 6900 \quad (\text{MPa}) \quad (2.16)$$

A equação (2.17) fornece o valor do fator-curva n:

$$n = 0.8 + \frac{f_{ck}}{17} \quad (\text{MPa}) \quad (2.17)$$

Conhecendo n,  $f_{ck}$ , e  $E_c$ , o valor de  $\epsilon_{ck}$  pode ser calculado por:

$$\epsilon_{ck} = \frac{f_{ck}}{E_c} \cdot \frac{n}{n-1} \quad (2.18)$$

O fator de decaimento k é diretamente proporcional à resistência do concreto. E possui valor aproximadamente 1,0 para  $f_{ck} \leq 21$  MPa e 2,0 para  $f_{ck} = 83$  MPa. A expressão para o valor de k é:

$$k = 0,67 + \frac{f_{ck}}{62} \quad (2.19)$$

Contudo, este valor não deve ser menor que a unidade.

A Figura 2.12 mostra várias curvas tensão-deformação para diferentes valores de  $f_c$ , obtidas com a expressão (2.15).

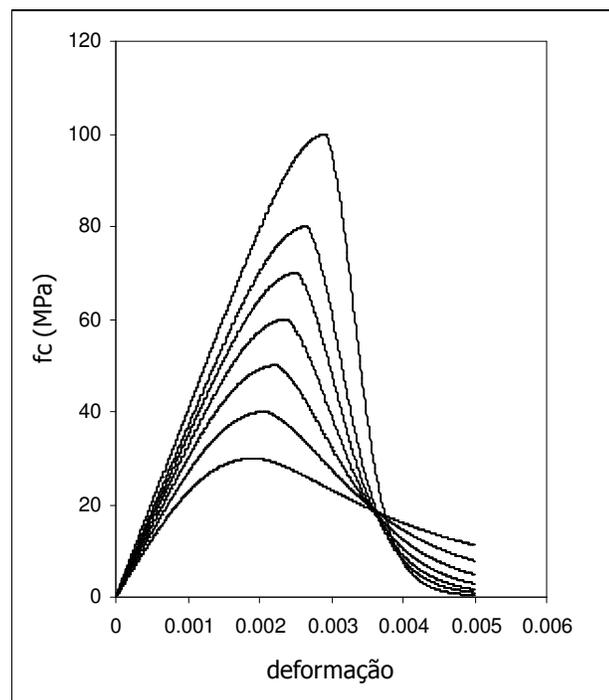


Figura 2.12 – Curvas tensão-deformação para diferentes  $f_c$

### 2.3.4 CONTRIBUIÇÃO DO CONCRETO ENTRE FISSURAS

Em cálculos correntes, quando a deformação no concreto  $\epsilon_c$  excede a deformação de fissuração do concreto na tração  $\epsilon_{cr}$ , a tensão de tração no concreto é tomada com valor igual a zero. Esta suposição negligencia a presença das partes íntegras do concreto entre as fissuras. Desse modo, quando o concreto fissura, a resposta carga-deformação de uma barra envolvida pelo concreto é tomada como se ela estivesse descoberta.

Experimentos mostraram que o concreto de envolvimento, mesmo fissurado, apresenta tensão de tração devido à aderência existente entre a barra de aço e as porções não fissuradas de concreto, além da resistência à tração que ainda existe nos trechos íntegros que se localizam entre as fissuras.

A resposta pós-fissuração de uma peça submetida à tração, Figura 2.13, é considerada de uma maneira na qual a carga axial é compartilhada entre o concreto e aço ao longo do comprimento da barra.

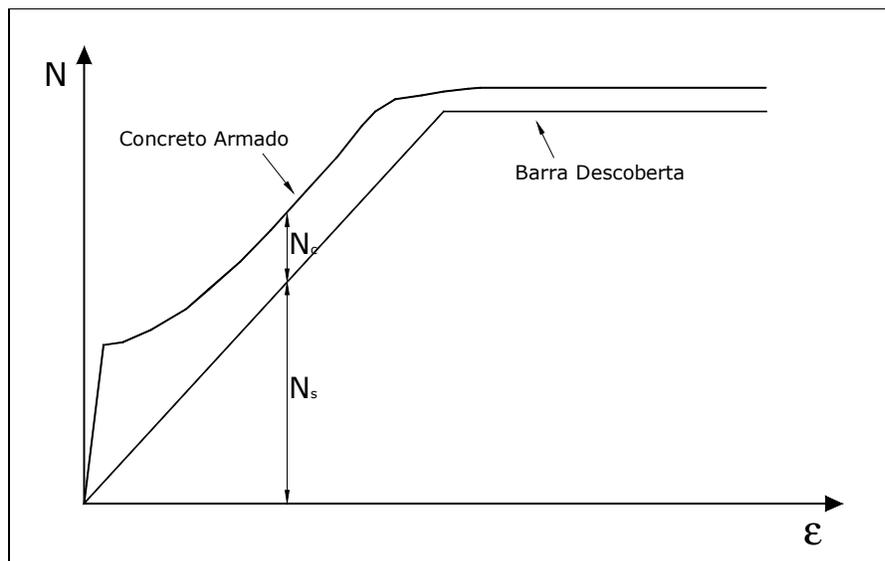


Figura 2.13 – Resposta da barra envolvida pelo concreto (Baseado em Collins; Mitchell, 1991)

A ligação entre a barra e o concreto possibilitará uma transferência de tensão de tração do aço para o concreto. Esta transferência de força é dada através de esforços de compressão radial à barra, Figura 2.14. Este efeito foi denominado “Tension Stiffening”.

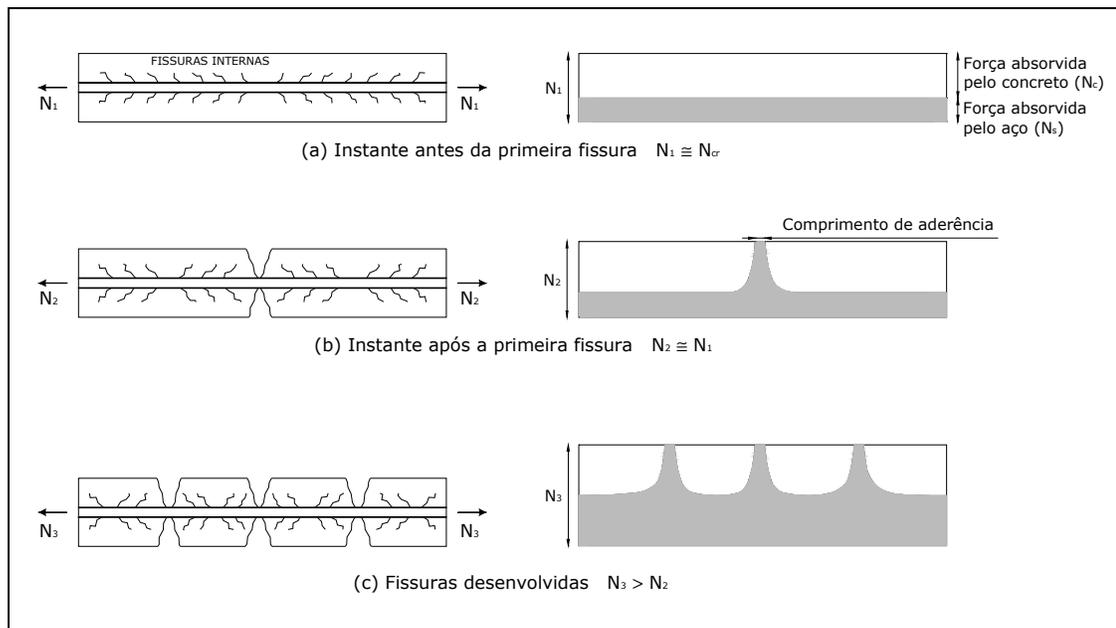


Figura 2.14 – Formação de fissuras internas (Baseado em Collins; Mitchell, 1991)

A Figura 2.14 mostra a seqüência de fissuração de uma peça com uma barra envolvida por concreto. No primeiro estágio, Figura 2.14a, a peça encontra-se não fissurada e por isso a carga absorvida pelo concreto e a barra de aço têm valor constante ao longo do comprimento da peça. Considerando que, no primeiro estágio, a carga aplicada tinha valor muito próximo da carga de fissuração, com um aumento do carregamento, a carga aplicada chega ao valor da carga de fissuração e aparece a primeira fissura no concreto, Figura 2.14b. A partir desse instante, o concreto no local fissurado transfere carga para a barra, precisando de um comprimento de aderência. A Figura 2.14c mostra a peça com fissuras desenvolvidas ao longo do seu comprimento. A tensão de tração na armação será maior na seção da fissura onde a

tensão no concreto possui valor nulo, e por conseqüência, a ruptura por flexão ocorrerá numa seção que contém fissura.

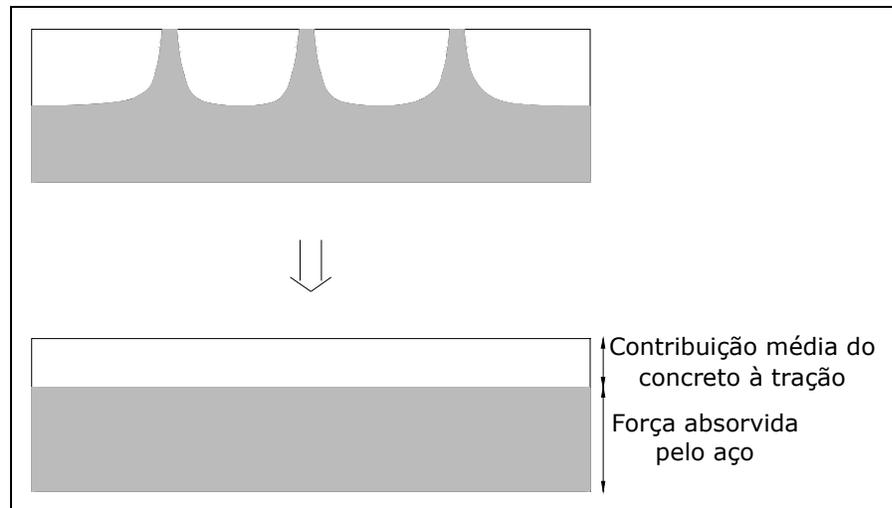


Figura 2.15 - Carga absorvida pelo concreto e a barra de aço (Baseado em Collins; Mitchell, 1991)

A Figura 2.15 mostra a variação da força absorvida pelo concreto ao longo da peça. Diferentes equações para tensão média de tração no concreto após a fissuração têm sido propostas ao longo dos anos através de resultados experimentais. Neste trabalho, será adotado o modelo desenvolvido por Vecchio e Collins, Collins; Mitchell (1991) o qual estima a média da contribuição do concreto à tração.

Para deformações no concreto maiores que a deformação de fissuração,  $\epsilon_c > \epsilon_{cr}$ , adota-se:

$$f_c = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot f_{cr}}{1 + \sqrt{500 \cdot \epsilon_c}} \quad (2.20)$$

onde:

$\alpha_1 \Rightarrow$  coeficiente que caracteriza o tipo de ligação entre o aço e o concreto.

$\alpha_1=1.0$  para barras nervuradas

$\alpha_1=0.7$  para barras lisas e cordoalha

$\alpha_1=0.0$  para barra sem ligação, solta

$\alpha_2 \Rightarrow$  coeficiente que caracteriza o modo do carregamento.

$\alpha_2=1.0$  para carregamento monotônico de curta duração

$\alpha_2=0.7$  para carregamento prolongado e/ou cíclico

$f_{cr} \Rightarrow$  tensão de fissuração do concreto, equação (2.21).

$$f_{cr} = 0.33\lambda \cdot \sqrt{f_{ck}} \quad (2.21)$$

onde:

$\lambda \Rightarrow$  coeficiente que considera a densidade do concreto.

$\lambda=1.00$  para concreto normal.

$\lambda=0.85$  para concreto com areia leve

$\lambda=0.75$  para concretos leves.

A deformação de fissuração é calculada pela equação (2.22):

$$\varepsilon_{cr} = \frac{f_{cr}}{E_c} \quad (2.22)$$

A equação (2.20), é apropriada para regiões de concreto armado e protendido com cordoalhas aderentes. Mas só é válida para regiões relativamente próximas das barras ou cordoalhas. O MC-90 sugere que a tração no concreto só existe até uma porção de concreto que envolve a barra. Esta porção é chamada de região de envolvimento da barra, Figura 2.16 e Figura 2.17, e é limitada pela área de um quadrado cujos lados são 15 vezes o diâmetro da barra ou cordoalha. Fora desta região, tensões no concreto são desprezadas. A NBR-6118 (2003) utiliza esta região para controle de fissuração no concreto, Figura 2.16.

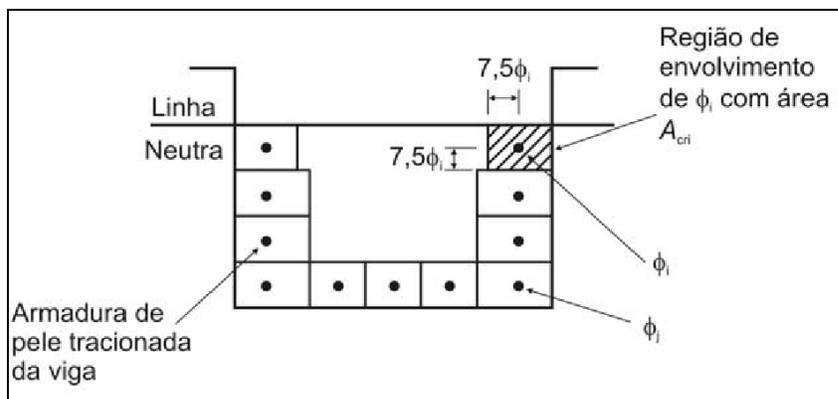


Figura 2.16 – Concreto de envolvimento da armadura (NBR-6118, 2003)

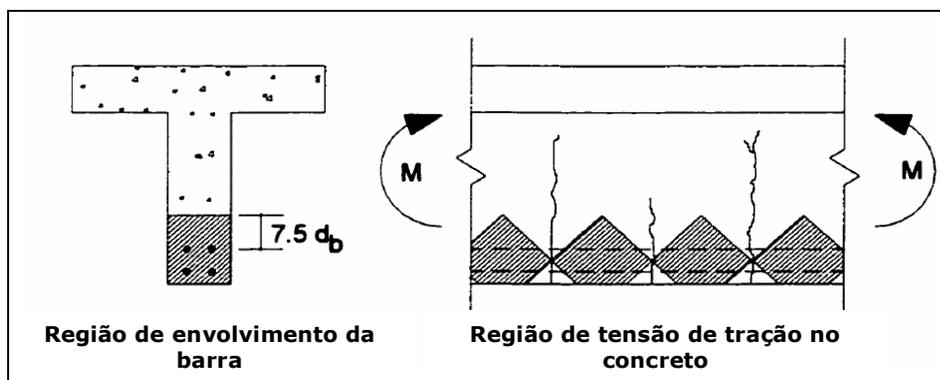


Figura 2.17 – Tensão de tração na fissura do concreto (Bentz, 2000)

A curva completa para o concreto pode ser definida pela equação (2.23) .

1. para  $\epsilon_c < \epsilon_{cr}$

$$f_c = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot f_{cr}}{1 + \sqrt{500 \cdot \epsilon_c}}$$

2. para  $\epsilon_{cr} \leq \epsilon_c \leq 0$

$$f_c = E_c \cdot \epsilon_c$$

3. para  $\epsilon_c > 0$

$$f_c = f_{ck} \cdot \left[ \frac{n \cdot \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{ck}} \right)}{n - 1 + \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{ck}} \right)^{nk}} \right]$$

(2.23)

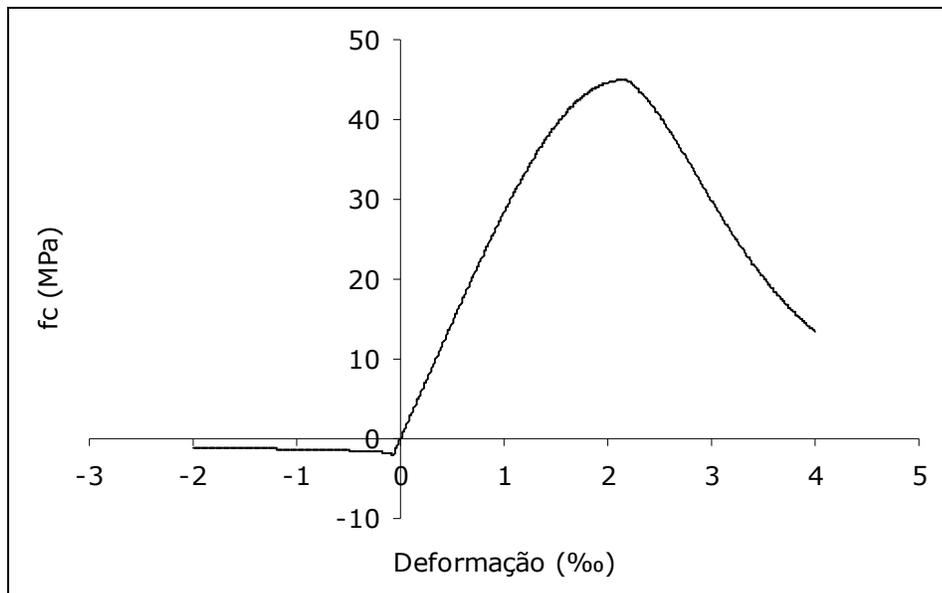


Figura 2.18 - Curva tensão-deformação para um concreto de  $f_{ck}=45\text{MPa}$

A figura a seguir mostra em detalhe a contribuição entre fissuras do concreto.

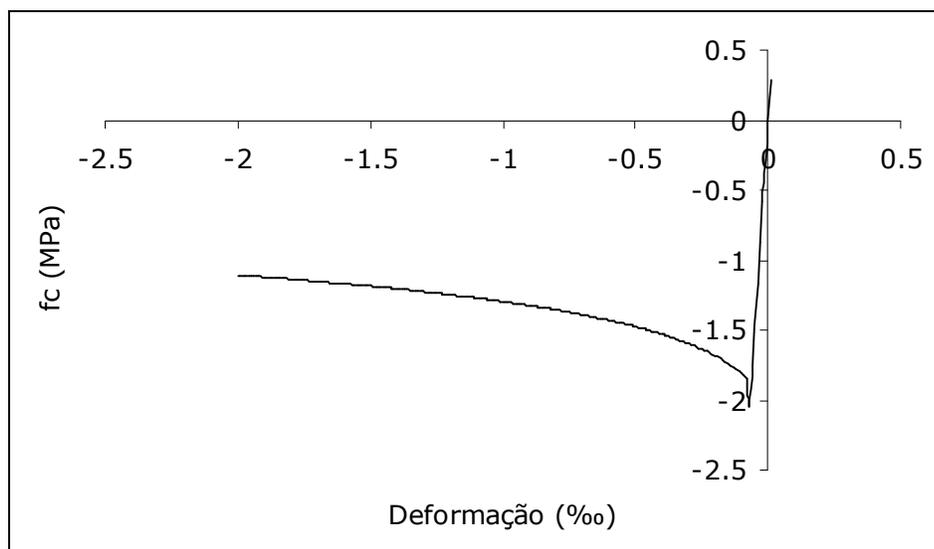


Figura 2.19 - Detalhe da contribuição do concreto à tração

## 2.4 INTEGRAÇÃO DE TENSÕES

As curvas teóricas, de momento-curvatura para diversas seções de concreto armado e protendido sujeitas à flexão, são obtidas utilizando as hipóteses básicas assumidas para flexão:

1. Seções inicialmente planas permanecerão planas após a flexão.
2. Aderência perfeita entre o concreto e a armadura (compatibilidade de deformações).

Somando-se ao conhecimento prévio das curvas tensão-deformação dos materiais (associação das tensões às deformações com a utilização dessas curvas).

### 2.4.1 COMPATIBILIDADE DE DEFORMAÇÕES

As duas primeiras hipóteses básicas da flexão permitem definir a distribuição de deformação na seção transversal através de duas variáveis: deformação no centróide da seção  $\varepsilon_{cen}$  e curvatura  $\varphi$ , mostradas na Figura 2.20.

Neste trabalho, são adotadas deformação e a tensão de tração com valor positivo. Na deformação e tensão de compressão utiliza-se valor negativo. O momento será positivo quando tracionar as fibras inferiores da peça. Mas com objetivo de simplificar a apresentação, nos gráficos a compressão poderá ser mostrada no primeiro quadrante.

A deformação do concreto  $\varepsilon_c$  ao longo do eixo vertical  $y$  da seção é dada pela fórmula (2.24). Este eixo tem origem no centróide e é dirigido para cima.

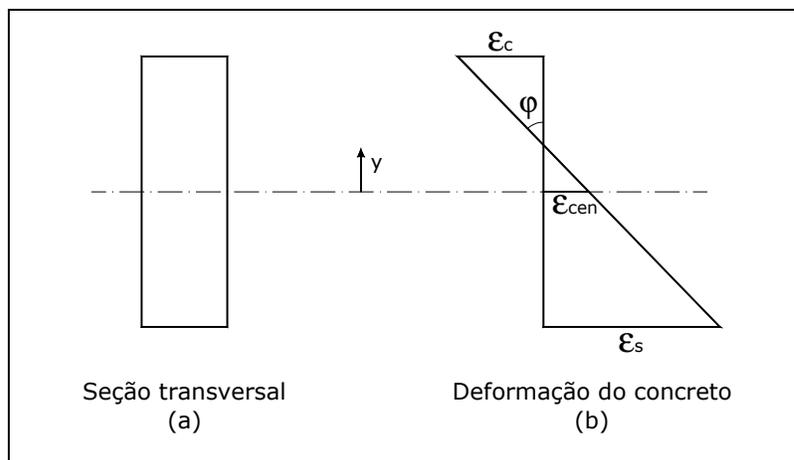


Figura 2.20 – Distribuição de deformação no concreto

A deformação no concreto a uma distância  $y$  do centróide é dada por:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{cen} - \varphi \cdot y \quad (2.24)$$

A deformação numa barra que está envolvida pelo concreto é dada pela fórmula (2.25), e esta utiliza a compatibilidade de deformações entre a barra e o concreto.

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{cen} - \varphi \cdot y \quad (2.25)$$

Deformação nas cordoalhas que estão submetidas a uma deformação inicial:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{cen} - \varphi \cdot y + \Delta\varepsilon_p \quad (2.26)$$

## 2.4.2 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Somatório dos esforços normais:

$$\int_{A_c} f_c \cdot dA_c + \sum f_{s_i} \cdot A_{s_i} + \sum f_{p_i} \cdot A_{p_i} = N \quad (2.27)$$

Somatório do momento fletor:

$$-\int_{A_c} f_c \cdot y \cdot dA_c - \sum f_{s_i} \cdot y_i \cdot A_{s_i} - \sum f_{p_i} \cdot y_i \cdot A_{p_i} = M \quad (2.28)$$

## 2.5 DIAGRAMA MOMENTO-CURVATURA

Mostra-se na Figura 2.21 o comportamento de uma seção sujeita à flexão através da variação de sua curvatura associada ao momento fletor solicitante. Este diagrama é simplificado e será visto com mais detalhe adiante.

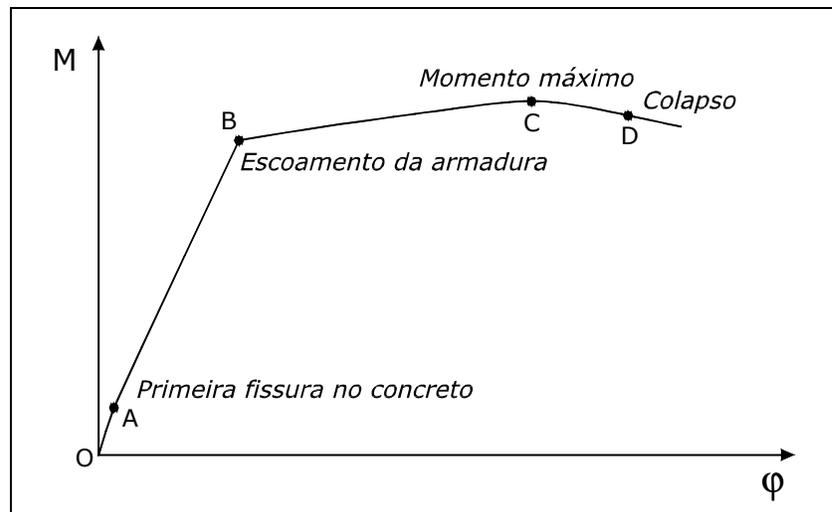


Figura 2.21 – Fases de um diagrama momento-curvatura

Inicialmente, entre os pontos O e A, a peça não está fissurada, portanto encontra-se no Estádio I. A resistência de tração do concreto ainda não foi ultrapassada. A rigidez da peça até o ponto A é igual à rigidez da seção bruta homogeneizada. O diagrama momento-curvatura até este ponto tem comportamento linear.

Quando a tensão na borda tracionada for maior que a resistência à tração do concreto, a peça iniciará a fissuração e, com isso, parte dos esforços de tração absorvido pelo concreto, será transferido para a armadura. A partir deste instante, a peça encontra-se no Estádio II e sua inércia terá valor menor que o valor da inércia inicial, alterando a inclinação do diagrama momento-curvatura.

Com o aumento da sollicitação, a armadura atinge o escoamento, ponto D, e a partir deste, a curvatura aumenta consideravelmente sem acréscimo significativo de momento.

Por fim, a peça entra em colapso quando o concreto é esmagado e/ou a armadura rompe.

### 2.5.1 PROCEDIMENTO PARA OBTENÇÃO DA RELAÇÃO MOMENTO-CURVATURA

Admite-se que seções planas permanecem planas após fletirem e que as curvas tensão-deformação do concreto e o aço sejam conhecidas. Os diagramas momento-curvatura para as diversas seções devem ser determinados usando as hipóteses adotadas para flexão e pela compatibilidade de deformações e equilíbrio de forças.

Existem duas formas de se obter a relação momento-curvatura: momento em função da curvatura  $M(\varphi)$ , por controle de deformação, ou curvatura em função do momento  $\varphi(M)$ , por controle de carga. A primeira maneira é mais apropriada para se chegar à curvatura última do momento-curvatura e será usada neste trabalho  $M(\varphi)$ . Ou seja, para uma dada curvatura  $\varphi$ , é possível conhecer o valor do momento associado  $M$ . Esse procedimento será útil como ferramenta para encontrar a rigidez secante das seções para cada incremento de curvatura nas seções discretizadas no processo iterativo da análise não-linear. Servirá também para achar deslocamentos e rotações através da integração ao longo do comprimento da peça, como já foi comentado anteriormente.

A relação momento-curvatura, para um dado valor de carga axial, pode ser determinada através de incrementos de curvatura  $\varphi$  na seção. Para cada valor de curvatura, é então calculada a deformação no centróide da seção  $\varepsilon_{cen}$ , já que as deformações no concreto e aço estão relacionadas com esta de acordo com as equações (2.24) a (2.26). A deformação  $\varepsilon_{cen}$  é determinada por ajustamento até que a equação (2.27) satisfaça o equilíbrio. Para flexão pura fazer  $N=0$ , ou de outra forma utilizar o valor da força normal na seção. Já conhecida a deformação  $\varepsilon_{cen}$  e a curvatura associada, pode-se então calcular o momento utilizando a equação (2.28).

Pela variação dos valores de  $\varphi$ , a curva momento-curvatura pode ser construída. Podem ser utilizadas as equações (2.9) ou (2.10) para tensão-deformação do aço e (2.13) ou (2.23) para o concreto.

## 2.5.2 CONTROLE PÓS-FISSURAÇÃO

A contribuição do concreto entre fissuras à tração pode ocasionar resultados potencialmente contra a segurança. Nesta seção é discutido o controle apresentado Bentz (2000).

Através de um exemplo simples, será mostrada a importância do controle pós-fissuração. Considere um prisma de concreto armado o qual será submetido à solicitação de tração, como mostra a Figura 2.22. A carga total axial de tração  $N$  será equilibrada com a contribuição do concreto  $N_c$  somada à contribuição do aço  $N_s$ .

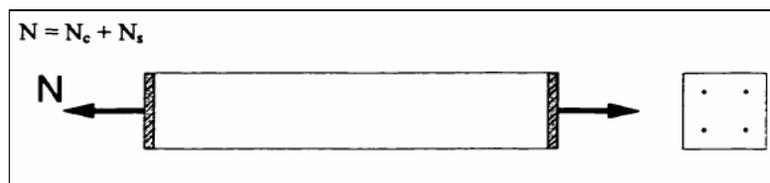


Figura 2.22 – Prisma de concreto armado tracionado

Admitindo que o concreto e o aço se comportem, na tração, de acordo com as equações (2.20) e (2.9) respectivamente, pode-se visualizar o comportamento de ambos na Figura 2.23.

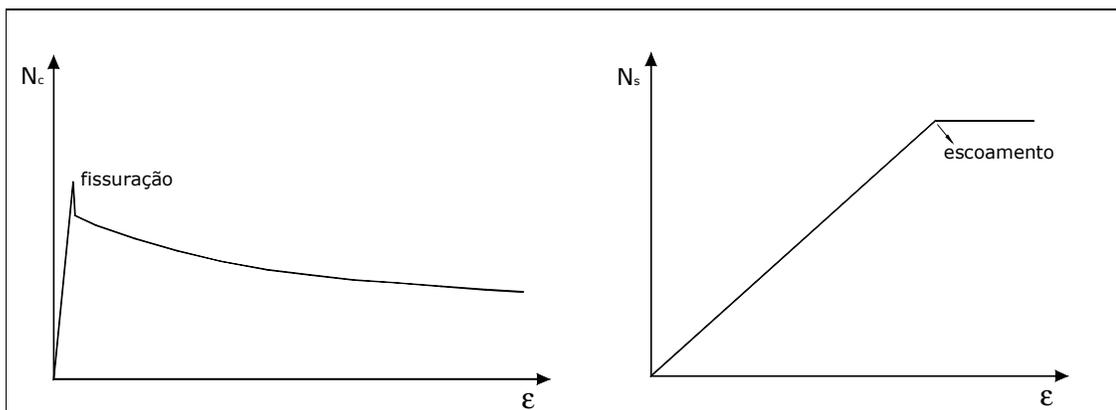


Figura 2.23 – Comportamento dos materiais à tração – concreto e aço

Numa análise preliminar é possível obter o resultado contra a segurança, mostrado na Figura 2.24.

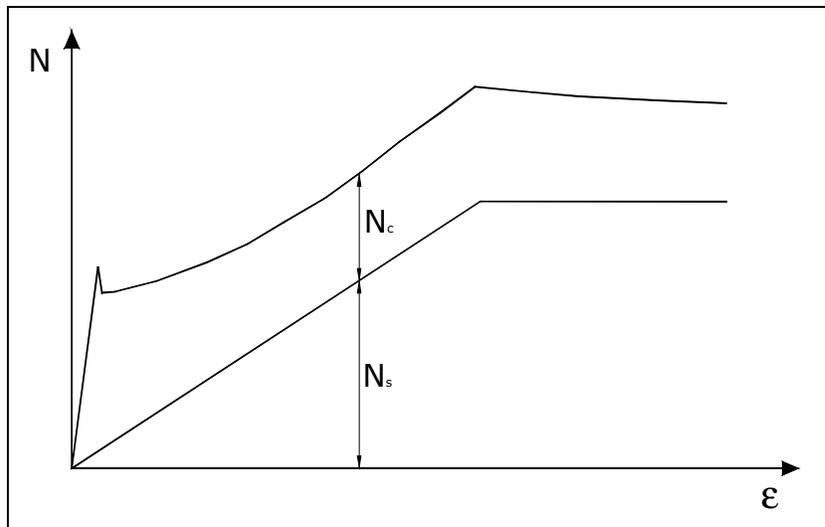


Figura 2.24 – Comportamento do prisma

Note que a força total numa seção fissurada excede a força de escoamento. A função do controle pós-fissuração será então limitar a contribuição do concreto à tração para que a soma das resultantes do concreto e do aço não ultrapasse a força máxima do aço na seção fissurada. A Figura 2.25 mostra a análise com este controle.

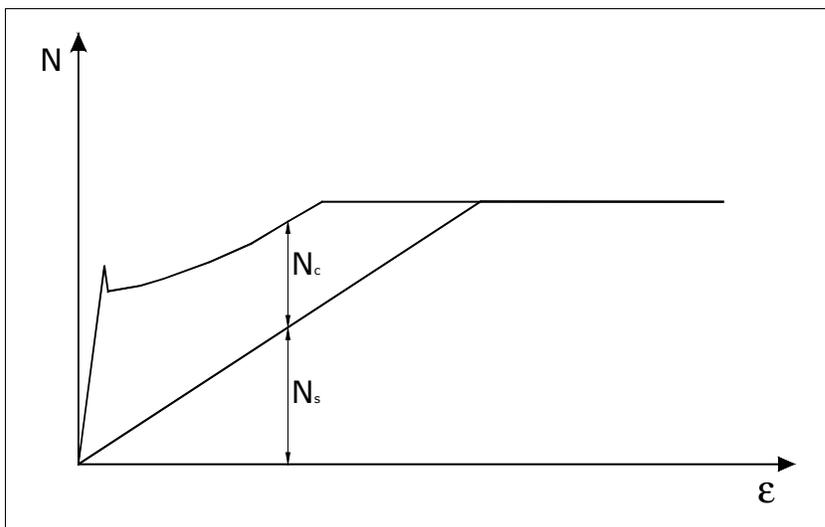


Figura 2.25 – Comportamento do prisma com controle pós-fissuração

A peça sob ação de esforço normal será agora substituída por uma peça sob flexão. A limitação, neste caso, será que a soma dos momentos em relação ao eixo neutro, provocados pelo concreto tracionado e pelo aço, seja menor ou igual ao momento de escoamento, calculado apenas com a contribuição do aço tracionado sob tensão de escoamento. A Figura 2.26 mostra uma peça retangular na flexão simples.

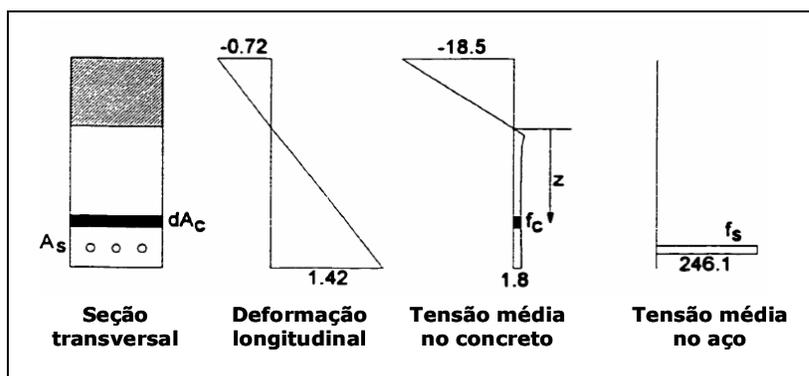


Figura 2.26 – Peça fletida (Bentz, 2000)

A força de tração do concreto fissurado produz momento em relação ao eixo neutro. O valor deste momento será limitado à diferença do momento provocado pelo aço em escoamento e pelo aço sob a tensão real. A equação a seguir descreve este procedimento:

$$\int f_c \cdot z \cdot dA_c \leq \sum A_s \cdot (f_{sy} - f_s) \cdot z_s \quad (2.29)$$

A Figura 2.27 mostra o exemplo de um trecho de uma curva momento-curvatura obtida utilizando-se o procedimento descrito na seção 2.5.1. A seção estudada foi retirada de Eligehausen; Fabritius (1993), teste número 2.1. Note que a contribuição do concreto entre fissuras foi limitada até o escoamento da armadura, por isso, depois da curvatura de escoamento, as respostas das análises (Análise 1 - sem contribuição do concreto entre fissuras; Análise 2 - com contribuição do concreto entre fissuras) se superpõem. Na Análise 2, chegando ao valor do momento de fissuração, há um salto de tensão na armadura provocado pela

transferência de esforços do concreto para o aço, o qual proporciona uma instabilidade no comportamento desta curva, detalhe A.

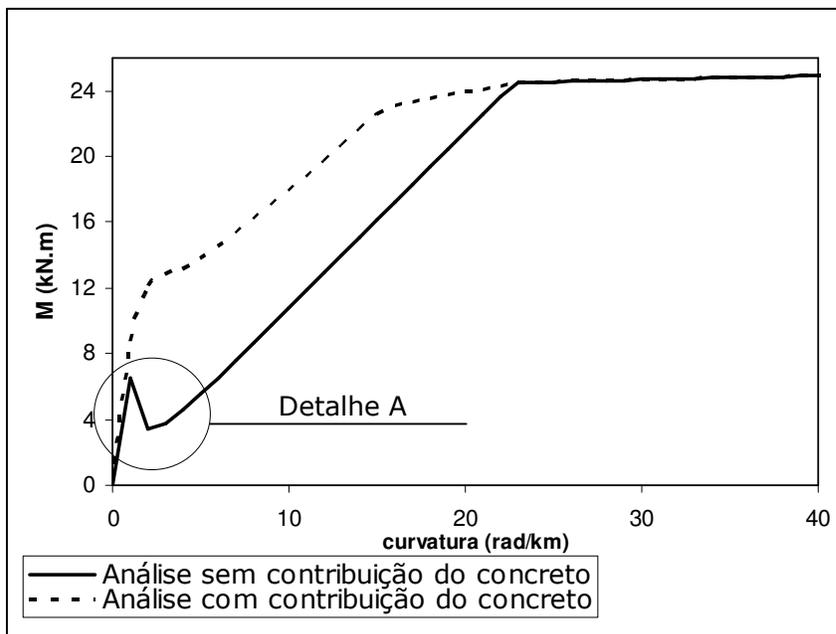


Figura 2.27 - Momento-Curvatura - comparação da contribuição do concreto à tração

### 2.5.3 CURVATURA ÚLTIMA

No desenvolvimento do diagrama momento-curvatura teórico de uma seção, surge a seguinte questão: quando interrompê-lo, ou seja, qual a sua curvatura última? Este questionamento poderia ser respondido inicialmente da seguinte forma: o esgotamento da capacidade resistente da seção é encontrado quando a armadura rompe e/ou quando é chegada a deformação última do concreto. Nas seções limitadas pelo rompimento da armadura, este processo é mais seguro pelo conhecimento prévio do comportamento à tração e a compressão deste material. Mas a deformação última do concreto numa peça submetida à flexão não é facilmente determinada.

As normas adotam valores determinados através de ensaios de prismas de concreto sob compressão uniaxial. A norma NBR-6118 (2003) assume para deformação última do concreto  $\epsilon_{cu}$  o valor 3.5‰, o qual é o mesmo adotado pelo

EC2 para concretos com valores de  $f_{ck}$  até 50MPa. Já o ACI-318R (1999) recomenda o limite de 3.0‰.

A característica da curva tensão-deformação obtida da compressão uniaxial tem se mostrado incapaz de descrever o comportamento no estado limite último de zonas comprimidas como em vigas sujeitas à flexão.

Os valores adotados pelas normas para  $\epsilon_{cu}$  mostram-se conservadores comparados com resultados experimentais obtidos por diversos pesquisadores (Ziara et al, 1995); (Kaminska, 2002); (Alca;McGregor et al, 1997); (Sarkar et al,1997); (Ashour et al, 2000); (Wu et al, 2004); (Lee;Pan, 2003).

Park;Paulay (1975) mostra o resultado dos valores da deformação última do concreto de viga sob flexão, dos ensaios realizados por Rush (1955). As deformações  $\epsilon_{cu}$  obtidas nos ensaios foram maiores que as indicadas pelas normas. É mostrado que o valor escolhido para  $\epsilon_{cu}$  tem pouca influência no valor do momento resistente para vigas. Mas por outro lado, este valor tem influência no cálculo da curvatura última, e então para este cálculo são indicados valores maiores que os designados pelas normas.

No seu estudo, Ziara et al (1995), indica como valor mínimo para deformação última do concreto  $\epsilon_{cu}$  de 5‰.

Uma maneira de evitar as incertezas no valor de  $\epsilon_{cu}$  é interromper o diagrama momento curvatura no ramo descendente, após o momento máximo. Normalmente, esse diagrama é interrompido quando o momento na seção chega, novamente, ao valor de 95% do momento máximo já alcançado anteriormente, ver Figura 2.28. Esse valor foi proposto por Rao et al (1971), e também por Calvi et al (1990), mostrados no CEB (1998).

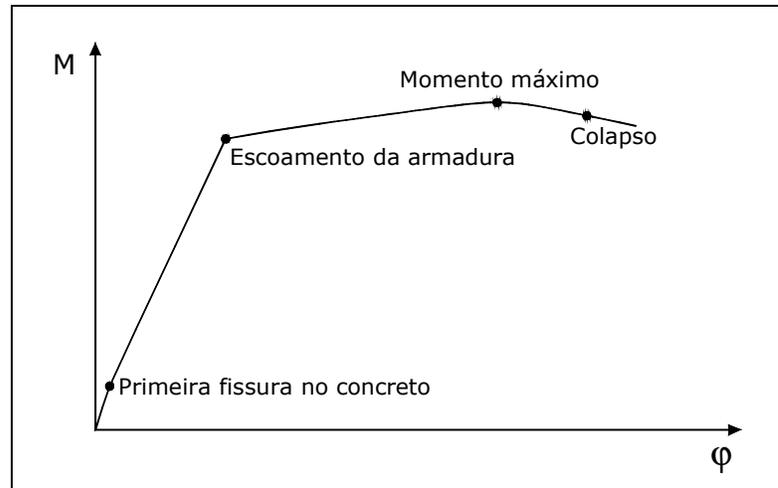


Figura 2.28 – Diagrama  $M-\phi$  de vigas de concreto armado

A ductilidade de uma seção transversal pode ser quantificada pelo quociente  $\phi_u/\phi_y$ , o qual depende da deformação última do concreto. Visto que o diagrama momento-curvatura será utilizado na análise não-linear, é preciso definir o valor limite para a deformação última do concreto  $\epsilon_{cu}$  para então calcular a curvatura última  $\phi_u$ .

Neste trabalho serão adotados os seguintes valores para  $\epsilon_{cu}$ :

$\epsilon_{cu2}=3.5\text{‰}$  – para o uso da curva tensão-deformação (parábola-retângulo) do concreto fornecida pela NBR6118-2003 ou o valor de  $\epsilon_{cu2}$  calculado pelo EC2.

$\epsilon_{cu}=5.0\text{‰}$  – para o uso da curva tensão-deformação desenvolvida por Popovics;Thorefeldt;Collins apresentado por Collins;Mitchell (1991).

Será adotada também uma terceira curva tensão-deformação para o concreto, baseada na teoria da Mecânica da Fratura, desenvolvida na seção 2.5.5.

Todas estas três curvas serão utilizadas na análise não-linear e seus resultados comparados entre si e com resultados experimentais.

## 2.5.4 RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO NO CONCRETO EM PEÇAS FLETIDAS

No diagrama tensão-deformação do concreto, após o pico a tensão diminui com o aumento da deformação, e este evento é denominado de amolecimento de deformações, Figura 2.29. Vários trabalhos mostram que este ramo da curva não é uma propriedade intrínseca do material, e sim uma propriedade do conjunto estrutural, para peças de concreto submetidas à compressão uniaxial ou à flexão.

Em peças sob momento fletor, alguns trabalhos mostram que não é correto admitir que a curva tensão-deformação, obtida em ensaios de compressão uniaxial, seja representativa para zona comprimida. A presença do gradiente de deformações é apontada como o principal motivo para estas diferenças, porque ele faz com que as fibras comprimidas da seção transversal sejam submetidas a diferentes valores de deformações, fazendo com que a fibra mais distante fique restringida pelas fibras menos solicitadas, e, como conseqüência, produz um confinamento nas fibras externas, provocando um aumento na deformação máxima.

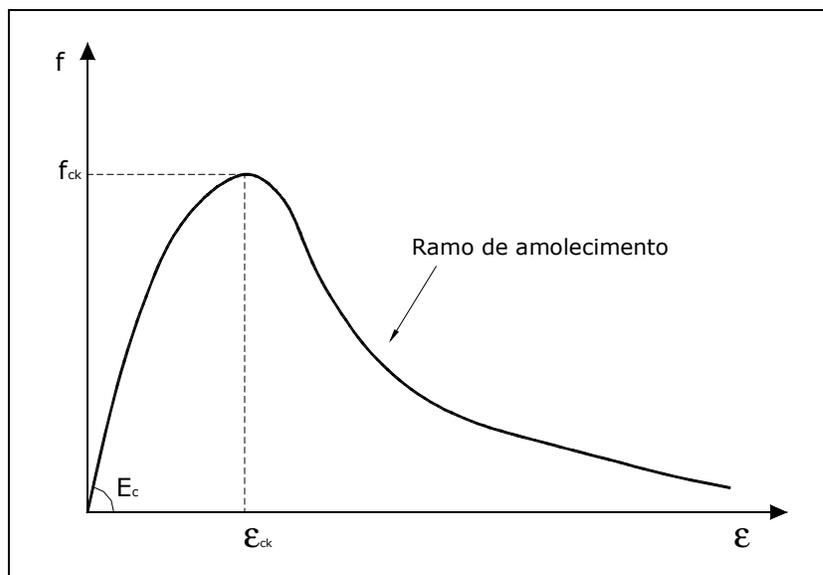


Figura 2.29 – Curva tensão-deformação concreto: ramo de amolecimento

As dimensões (altura e largura), a forma da seção transversal (retangular, seção T e outras) e a esbeltez ( $H/L$ ) também são apontadas como fatores que influenciam no ramo de amolecimento e na deformação máxima do concreto.

Visando obter uma curva mais realista da relação tensão-deformação, será então utilizado o modelo proposto por Fantilli et al (2002) baseado na Mecânica da Fratura e descrito na próxima seção.

A utilização dos conceitos da Mecânica da Fratura pode contribuir para o entendimento do comportamento de peças de concreto e para o conhecimento da curva completa tensão-deformação, incluindo o ramo de amolecimento, o qual é muito importante para a correta descrição do processo de fraturamento.

A Mecânica da Fratura é o ramo da ciência, que descreve as condições de tensão e deformação na vizinhança e à frente da ponta de uma fissura. Em muitos casos o colapso de estruturas de concreto é governado pela iniciação e propagação de fissuras, na presença de localização de deformações e de efeitos de escala, BORGES (2002).

### 2.5.5 RUPTURA DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO

O modelo apresentado nesta seção foi desenvolvido por Fantilli et al (2002), ver também Fantilli et al (2004). Este modelo propõe-se a descrever o comportamento da curva tensão-deformação do concreto pós-pico, como também a ruptura de vigas por esmagamento do concreto. Como pode ser visto na Figura 2.30, o esmagamento provoca expulsão do bloco triangular de concreto danificado.



*Figura 2.30 - Esmagamento do concreto na flexão (Kaminska, 2002)*

Inicialmente, será estudada a fratura de peças submetidas à compressão uniaxial. Para isto, na Figura 2.31a é mostrado o esmagamento do concreto, no qual as hipóteses de dano localizado e a existência de um plano de deslizamento são assumidas. Nesta figura, o ângulo  $\alpha$  entre a face horizontal do prisma e o plano de deslizamento é tomado igual a  $17.5^\circ$ . Em casos de compressão uniaxial, o valor de  $\alpha$  é obtido através do critério de fratura de Mohr-Coulomb, assumindo que a resistência à tração do concreto possui valores próximos de 10% da resistência à compressão. O deslocamento  $s$  no plano de deslizamento produz um encurtamento longitudinal  $w = s \cos(\alpha)$ .

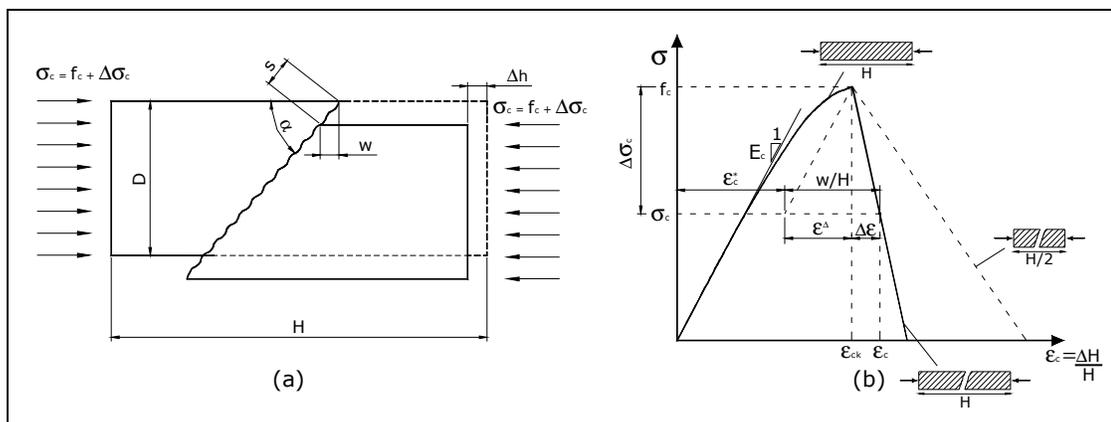


Figura 2.31 - Modelo utilizado para ruptura do concreto na compressão uniaxial

A Figura 2.31b mostra que a deformação média de compressão no pós-pico pode ser calculada pela soma de duas contribuições: a deformação residual  $\epsilon_c^*$  da zona não danificada e o encurtamento longitudinal proporcionado por  $w$  ao longo do comprimento da peça  $H$ . Dessa forma,  $\epsilon_c$  pode ser calculado do seguinte modo:

$$\epsilon_c = \epsilon_c^* + \frac{w}{H} = \epsilon_c^* + \frac{s \cdot \cos \alpha}{H} \quad (2.30)$$

$$\epsilon_{ck} = \epsilon_c^* + \epsilon^\Delta \rightarrow \epsilon_{ck} = \epsilon_c^* + \frac{\Delta \sigma_c}{E_c} \rightarrow \epsilon_c^* = \epsilon_{ck} - \frac{\Delta \sigma_c}{E_c} \quad (2.31)$$

Substituindo a equação (2.31) na (2.30):

$$\epsilon_c = \epsilon_{ck} + \frac{\Delta \sigma_c}{E_c} + \frac{s \cdot \cos \alpha}{H} \quad (2.32)$$

$$\Delta \epsilon_c = \frac{\Delta \sigma_c}{E_c} + \frac{s \cdot \cos \alpha}{H} \therefore \epsilon_c = \epsilon_{ck} + \Delta \epsilon_c \quad (2.33)$$

Onde,  $\epsilon_{ck}$  = deformação no pico do  $f_c$ ,  $E_c$  = módulo de elasticidade e  $\Delta \sigma_c$  = decaimento de tensão pós-pico (valor negativo  $\rightarrow$  deformação de compressão) assumida como:

$$\Delta \sigma_c = -a \cdot f_c \cdot w = -a \cdot f_c \cdot s \cdot \cos \alpha \quad (2.34)$$

$a$  = parâmetro obtido através da curva experimental  $\frac{\sigma_c}{f_c} \times w$ . Para vigas será adotado  $a=1 \text{ mm}^{-1}$  independente do seu tamanho, conforme Fantilli et al (2002).

Considerando  $K = a \cdot f_c \cdot \cos \alpha$

$$\Delta\sigma_c = -K \cdot s \quad (2.35)$$

Substituindo a equação (2.35) na equação (2.32) e reajustando:

$$\Delta\sigma_c = -K \cdot \frac{\frac{\epsilon_c - \epsilon_{ck}}{\cos \alpha} - \frac{K}{E_c}}{H} \quad (2.36)$$

Weiss et al (2001) realizaram estudos em quatro séries de vigas, possuindo diferentes resistências para o concreto, e diferentes taxas de armaduras. Cada série continha quatro vigas com a mesma seção transversal, mas diferentes zonas de momento constante  $L$  (respectivamente 1, 2, 3, e 4 vezes a altura útil da seção,  $d$ ). A Figura 2.32a mostra os resultados, os quais indicam que o dano no concreto ocorre na zona de momento constante. A relação momento-curvatura média  $M-\phi$  (Figura 2.32b), mostra que o início do ramo descendente, decresce com o aumento de  $L$ . Isso demonstra o efeito de escala na ruptura nas vigas de concreto armado devido a localização do dano, ver, também, Fantilli et al. (2002a).

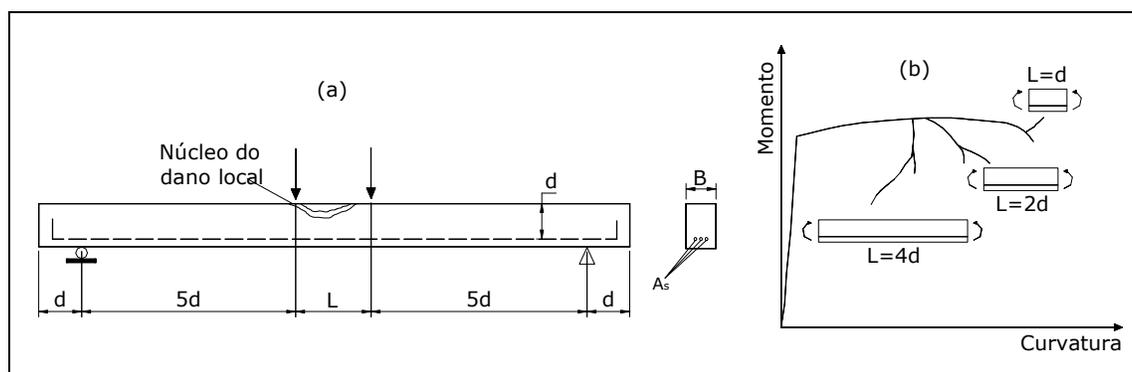


Figura 2.32 – Experimento de Weiss et al (2001). a) Esquema do ensaio experimental; b) Análise qualitativa da relação momento-curvatura

O modelo para vigas foi desenvolvido para o caso particular de vigas sujeitas a momento fletor constante.

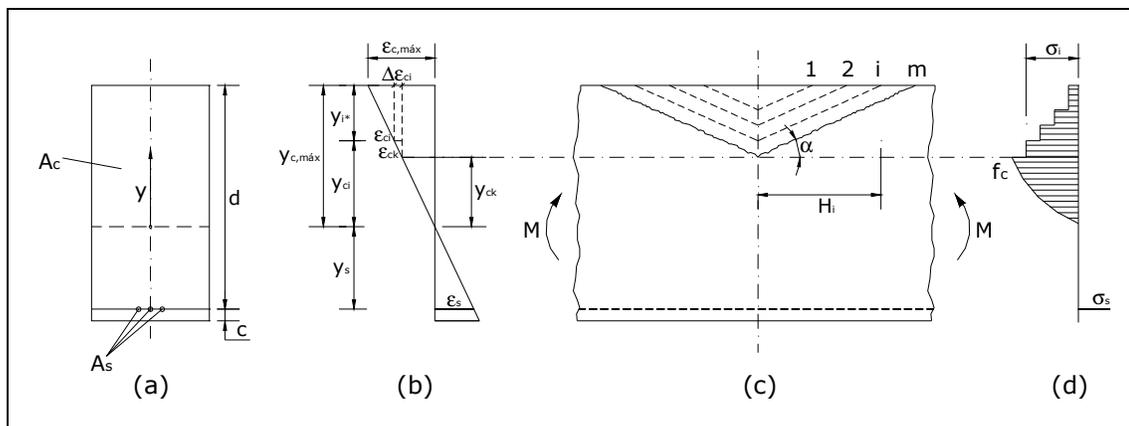


Figura 2.33 - Modelo para ruptura do concreto de vigas de concreto armado na flexão

Dentre as possíveis configurações, a Figura 2.33b mostra a distribuição de deformação na seção para a profundidade do eixo neutro dada como solução. A estratégia usada para desenvolver o modelo para vigas foi a seguinte: perfis que possuem deformações maiores que  $\epsilon_{ckr}$ , correspondem a fibras com concretos danificados, e os planos de deslizamentos serão expulsos através de um retângulo de base  $\Delta\epsilon_{ci}$ , e altura  $y_i^*$  o qual pode ser calculada de acordo com a Figura 2.33b.

$$\epsilon_{c,máx} = \varphi \cdot y_{c,máx} \rightarrow \epsilon_{c,máx} = \varphi \cdot (y_i^* + y_{ci}) \rightarrow \epsilon_{c,máx} = \varphi \cdot \left( y_i^* + \frac{\epsilon_{ci}}{\varphi} \right)$$

então,

$$y_i^* = \frac{\epsilon_{c,máx} - \epsilon_{ci}}{\varphi} \quad (2.37)$$

onde  $\epsilon_{c,máx}$  = máxima deformação de compressão no topo da viga e  $\epsilon_{ci}$  = deformação em cada retângulo. A altura de cada retângulo pode ser calculada da seguinte forma:

$$H_i = \frac{y_i^*}{\tan \alpha} \quad (2.38)$$

onde  $\alpha$  = inclinação do plano de deslizamento, Figura 2.33c.

A redução de tensão  $\Delta\sigma_{ci}$ , afetando a altura  $y_i^*$ , Figura 2.33d, pode ser calculada substituindo as equações (2.37) e (2.38) na equação (2.36)

$$\Delta\sigma_{ci} = -K \cdot \frac{\Delta\varepsilon_{ci}}{\frac{\varphi \cdot \text{sen}\alpha}{\varepsilon_{c,m\acute{a}x} - \varepsilon_{ci}} - \frac{K}{E_c}} \quad (2.39)$$

A tensão total  $\sigma_{ci}$  em um nível  $y_i^*$  é obtida pela soma dos efeitos de todos os "m" planos de deslizamento previamente formados. Ou seja, dentro de uma altura  $y_i^*$ , e considerando deformações dentro dos limites  $\varepsilon_{ck}$  e  $\varepsilon_{ci}$ , é possível calcular  $\sigma_{ci}$  através da seguinte equação:

$$\sigma_{ci} = f_c - \sum_{j=m}^i \Delta\sigma_{cj} \geq 0 \quad (2.40)$$

As fibras onde a tensão  $\sigma_{ci} < 0$  são removidas por estarem completamente danificadas. A distância entre dois consecutivos planos de deslizamento pode ser tomada com o tamanho máximo do agregado, mas, na falta desse valor, pode ser adotado como um diferencial da equação (2.39):

$$d\sigma = - \frac{K d\varepsilon_c}{\frac{\varphi \cdot \text{sen}\alpha}{\varepsilon_{c,m\acute{a}x} - \varepsilon_{ci}} - \frac{K}{E_c}} \quad (2.41)$$

Assumindo o valor da curvatura constante,  $\varphi = \text{constante}$ , a equação (2.39) torna-se:

$$\sigma_c = f_c - \int_{\varepsilon_{ck}}^{\varepsilon_c} \frac{K \cdot d\varepsilon_c}{\frac{\varphi \cdot \text{sen}\alpha}{\varepsilon_{c,m\acute{a}x} - \varepsilon_c} - \frac{K}{E_c}} \quad (2.42)$$

desenvolvendo,

$$\sigma_c = f_c - \frac{E_c^2 \cdot \varphi \cdot \text{sen}\alpha}{K} \cdot \ln \left[ \frac{E_c \cdot \varphi \cdot \text{sen}\alpha - K \cdot (\varepsilon_{c,m\acute{a}x} - \varepsilon_c)}{E_c \cdot \varphi \cdot \text{sen}\alpha - K \cdot (\varepsilon_{c,m\acute{a}x} - \varepsilon_{ck})} \right] + E_c \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_{ck}) \quad (2.43)$$

onde  $\varepsilon_{c,m\acute{a}x}$  deve ser menor que a deformação última  $\varepsilon_{cu}$  calculada fazendo  $\sigma_c=0$ .

Fazendo  $\varepsilon_{c,m\acute{a}x} = \varphi y_{c,m\acute{a}x}$ , a equação acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma_c = f_c - \frac{E_c^2 \cdot \varphi \cdot \text{sen}\alpha}{K} \cdot \ln \left[ \frac{\varphi \cdot (E_c \cdot \text{sen}\alpha - y_{c,m\acute{a}x} \cdot K) + K \cdot \varepsilon_c}{\varphi \cdot (E_c \cdot \text{sen}\alpha - y_{c,m\acute{a}x} \cdot K) + K \cdot \varepsilon_{ck}} \right] + E_c \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_{ck}) \quad (2.44)$$

Nota-se que a tensão no concreto depende do gradiente de deformação (representado pela curvatura), da distância da fibra mais comprimida para o eixo neutro  $y_{c,m\acute{a}x}$  e da deformação  $\varepsilon_c$ . Os outros termos são constantes, então a tensão no concreto depende de variáveis  $\sigma(\varepsilon_c, \varphi, y_{c,m\acute{a}x})$ . Isso faz com que a curva tensão-deformação obtida para o concreto seja construída simultaneamente com o diagrama momento-curvatura para uma seção específica. Esse procedimento fornece o ramo de amolecimento da curva tensão-deformação do concreto, como, também, o instante da ruptura da viga, sem a necessidade da escolha de um valor para a deformação última para o concreto. Esse instante é determinado quando certa quantidade de fibras for danificada de tal forma que a seção não apresente mais equilíbrio.

Já foram apresentadas duas curvas representativas do comportamento tensão-deformação do concreto (parábola-retângulo e Popovics). A terceira será composta pela curva desenvolvida por Popovics até a deformação  $\varepsilon_{ck}$  e a parte do ramo de amolecimento desenvolvida por Fantilli, aqui denominada de Popovics/Fantilli.

Na Figura 2.34 são apresentadas as três curvas tensão-deformação do concreto. Como a terceira curva, Popovics/Fantilli, é obtida após a análise da seção com o momento-curvatura, foi escolhida para ilustrar, a análise feita na seção V1-0.7-sec1, do trabalho de Carmo (2004), o qual é apresentado com detalhe no capítulo 5.

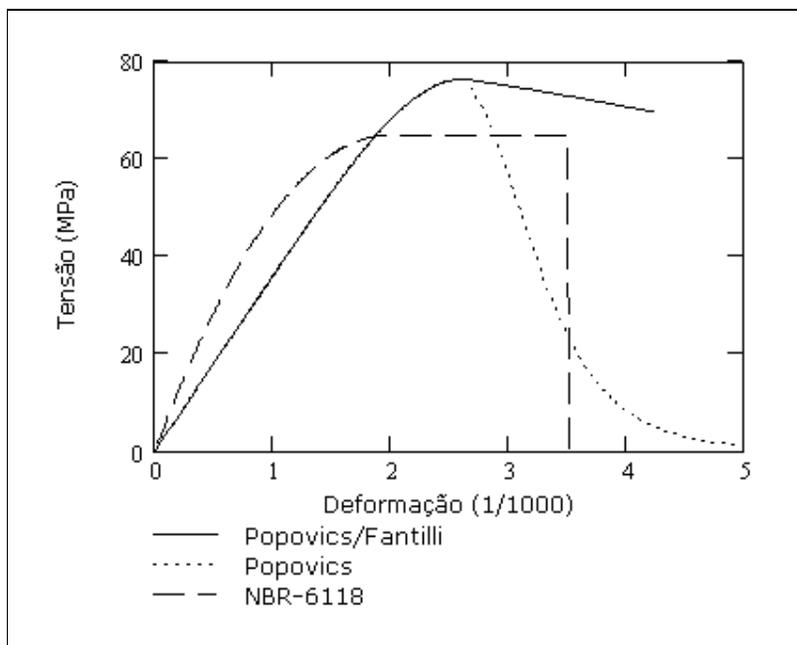


Figura 2.34 – Curvas tensão-deformação do concreto

## 2.5.6 EXEMPLOS

### 2.5.6.1 EXEMPLO 1: VIGA RETANGULAR DE CONCRETO ARMADO

O modelo utilizado para a ruptura de vigas em concreto armado descrito na seção 2.5.5 será exemplificado por meio da viga SL1 de Alca et al (1997). O esquema de ensaio utilizado pelo autor é mostrado na Figura 2.35.

As vigas foram armadas com estribo entre os trechos (apoios-carga concentrada), evitando, desse modo, a ruptura por esforço cortante. A viga SL1 possui estribo de  $\varnothing 10c15$  neste trecho. O aço não tem endurecimento e  $f_{sy}=f_{su}=410\text{MPa}$ . O concreto possui  $f_c=51.1\text{MPa}$ .

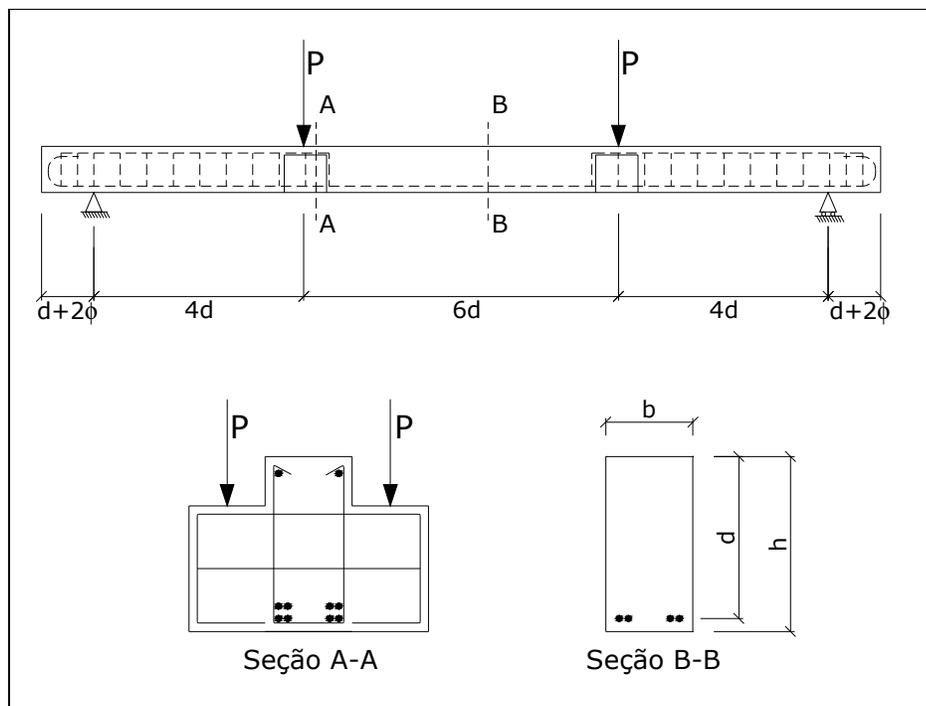


Figura 2.35 – Geometria da viga SL1 – Alca et al (1997)

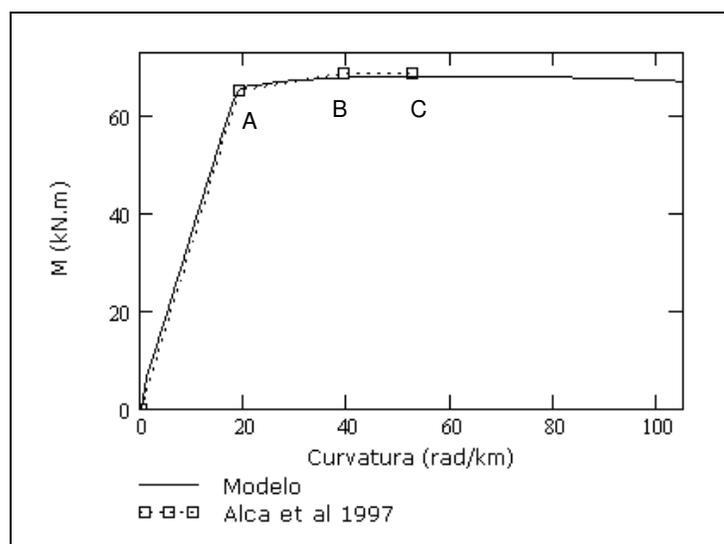


Figura 2.36 – Comparação entre os diagramas momento-curvatura

A Figura 2.36 mostra a comparação entre relação momento-curvatura obtida através do modelo e resultados experimentais. Os pontos A, B e C referem-se respectivamente aos pontos: início de escoamento, momento máximo e momento

último. As curvaturas foram calculadas pela razão entre a rotação e o comprimento de medição da rotação (3.7d). Maiores discussões sobre o resultado desse diagrama momento-curvatura, e outros, serão apresentadas no capítulo 5.

Foram obtidas curvas tensão-deformação para diferentes fibras comprimidas ao longo da altura da peça ( $H$ ) e comparadas à curva tensão-deformação, calculada com Popovics, Figura 2.37.

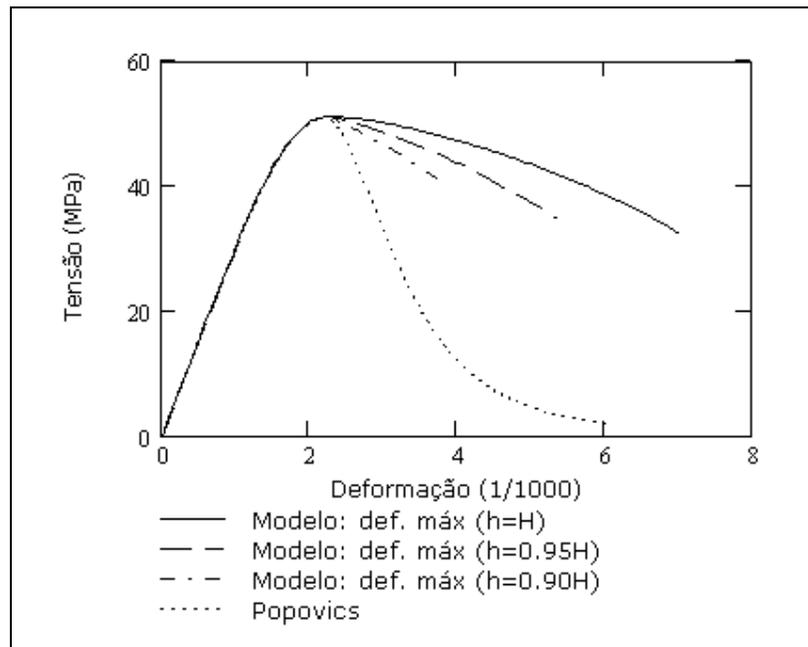


Figura 2.37 – Variação da tensão na fibra a uma altura  $h$  - Viga SL1 de Alca et al (1997)

Também foram obtidas as distribuições de tensão sobre as fibras comprimidas para diferentes curvaturas como mostra a Figura 2.38.

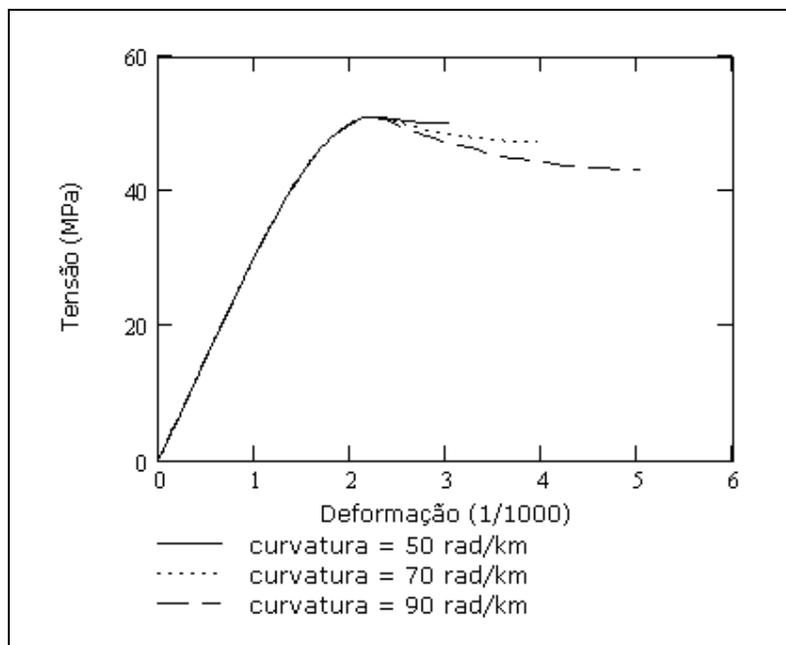


Figura 2.38 – Distribuição de tensão, no trecho comprimido, para diferentes valores de curvatura

### 2.5.6.2 EXEMPLO 2: VIGA T PROTENDIDA

A Figura 2.42 mostra a resposta momento-curvatura de uma viga T protendida, utilizada como exemplo em Collins;Mitchell (1991), seção 5.9. Esta curva momento-curvatura foi desenvolvida através do procedimento descrito na seção 2.5.1 e foi utilizada a relação tensão-deformação para cordoalha por meio da função de Ramberg-Osgood, com os parâmetros indicados por Collins;Mitchell. Já para o concreto foi utilizada a equação (2.23) na descrição do seu comportamento.

O concreto tem  $f_c=35$  MPa e o aço possui  $\epsilon_{pu}=40\text{‰}$  e  $E_p=200$ GPa e a equação que descreve seu comportamento segue a abaixo, ver Figura 2.39.

$$f_p(\epsilon_p) = E_p \cdot \epsilon_p \cdot \left( 0.025 + \frac{0.975}{\left[ 1 + (118 \cdot \epsilon_p)^{10} \right]^{0.10}} \right)$$

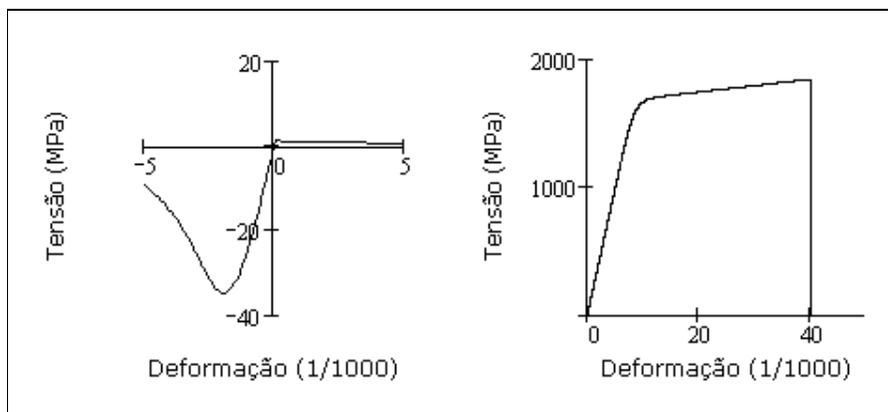


Figura 2.39 – Curvas de tensão-deformação para o concreto e o aço

A armação foi constituída de sete pares cordoalhas,  $\phi=13\text{mm}$ , totalizando  $A_p=13.86\text{ cm}^2$  com pré-alongamento de 6.9‰ e foram dispostas conforme a Figura 2.40.

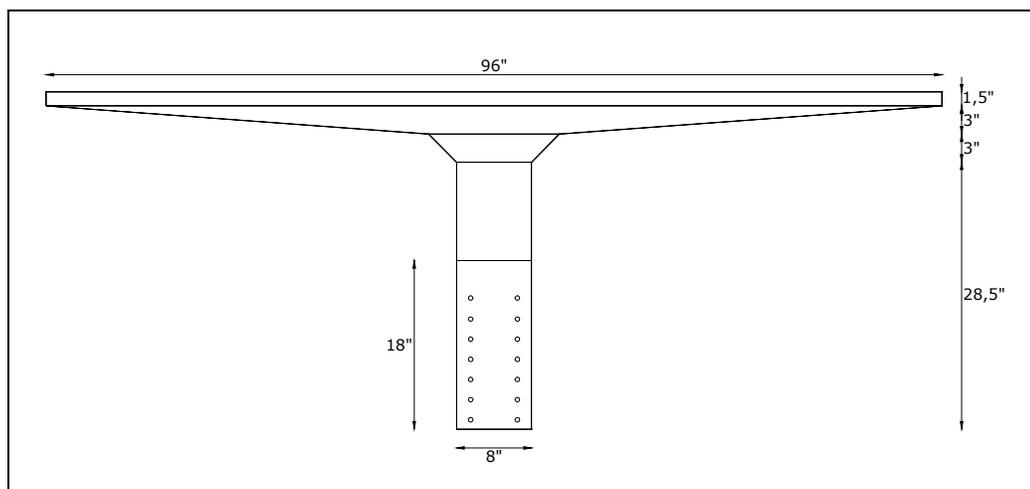


Figura 2.40 – Detalhe da seção transversal – Viga T

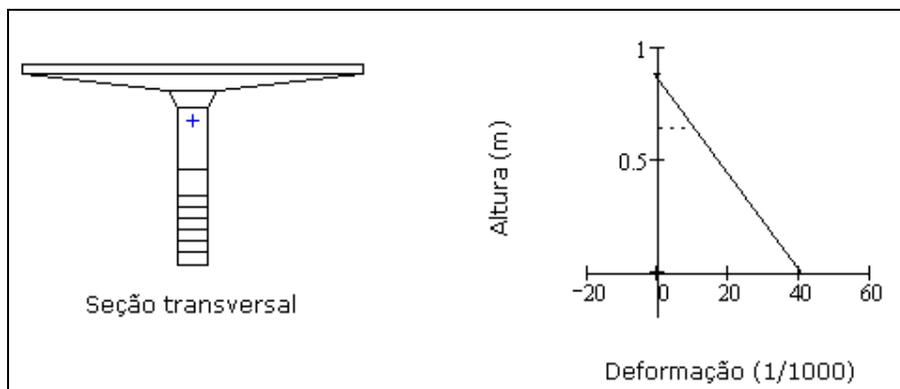


Figura 2.41 - Seção transversal e distribuição de deformação

A Figura 2.41 mostra como a seção transversal foi discretizada para obter a geometria desejada e para considerar a contribuição à tração do concreto, como também a distribuição de deformação na altura da peça para  $\varphi=47$  rad/km.

O resultado do modelo apresenta uma boa concordância comparado ao obtido por Collins;Mitchell.

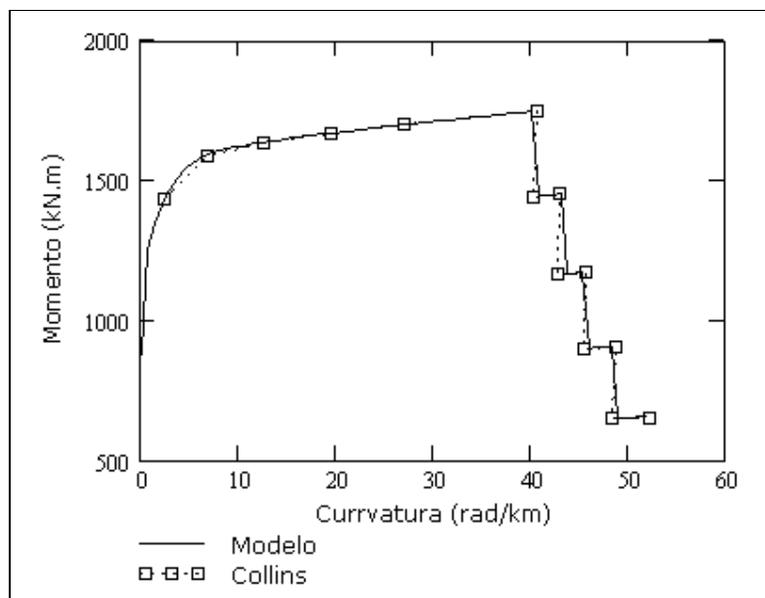


Figura 2.42 - Reposta momento-curvatura da viga T protendida

### 2.5.6.3 EXEMPLO 3: VIGA RETANGULAR DE CONCRETO ARMADO

O segundo exemplo refere-se a uma seção retangular de concreto armado com as seguintes características:  $f_{ck}=25\text{MPa}$ ; dimensões ( $H=50\text{cm}$  e  $b=14\text{cm}$ ); armações ( $A_s=2.26\text{cm}^2(2\varnothing 12\text{mm})$ ,  $\rho=0.32\%$ ,  $A_s^l=1.00\text{ cm}^2(2\varnothing 8\text{mm})$ ,  $\rho^l=0.14\%$ ,  $d=d^l=5\text{cm}$ ); aço: (CA50,  $E_s=219\text{Gpa}$ ,  $f_{sy}=500\text{MPa}$ ,  $f_{su}=550\text{MPa}$ ,  $\varepsilon_{su}=80\text{‰}$ , sem endurecimento); curva do concreto dada pela equação (2.23).

A curva momento-curvatura encontrada com o modelo apresentado será comparada com a análise através do programa Response 2000. Este programa foi desenvolvido por Bentz (2000).

Nesta análise, ver Figura 2.43, foi considerada a contribuição do concreto à tração. A análise do *Response* foi interrompida na curvatura  $\varphi=99\text{ rad/km}$ . Já a análise pelo modelo chegou a uma curvatura  $\varphi=202\text{ rad/km}$ , curvatura esta que leva a armadura de tração à ruptura. Conforme Bentz (2004) a ruptura prematura da armação se deve a aproximação utilizada no programa.

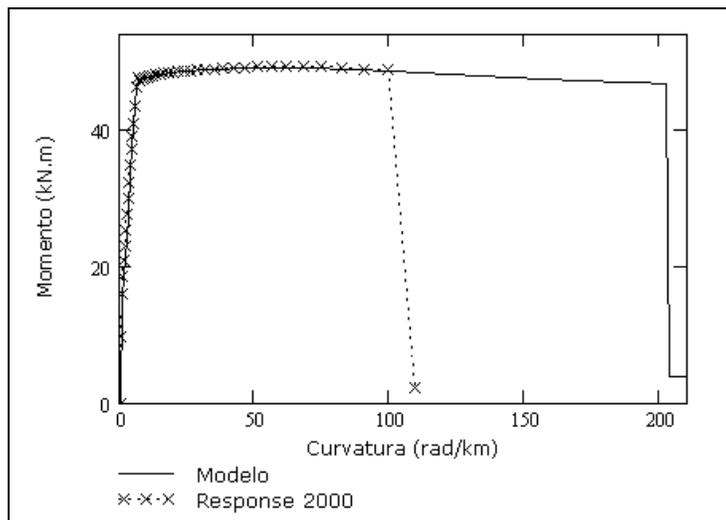


Figura 2.43 – Resposta momento-curvatura da viga retangular

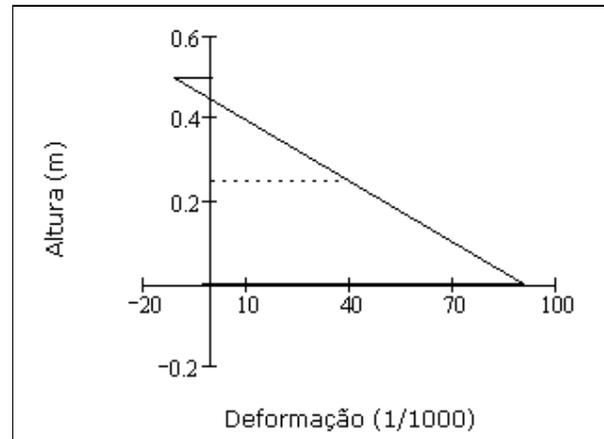


Figura 2.44 – Deformação na seção no momento da ruptura do aço

As curvas foram coincidentes até a curvatura  $\phi=99$  rad/km, já que foi utilizado as mesmas relações constitutivas para os materiais (concreto: equação (2.23) e aço: equação (2.10)). Revelaram também o bom resultado do modelo comparado ao programa.

### 3 PROCESSOS DE VERIFICAÇÃO

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Dada uma viga contínua com propriedades dos materiais, geometria, condições de apoio e armação conhecida, sujeita a certo carregamento, verificá-la significa informar se a viga é estável para este carregamento. A forma utilizada neste trabalho é achar um multiplicador do carregamento para o qual torne a viga instável, aqui denominado de fator de colapso. O valor do fator de colapso maior ou igual a um, significa que a viga é estável para o carregamento dado.

Um ponto de partida conveniente para introduzir o processo, o qual será utilizado para obter o fator de colapso, é admitir que todas as seções de vigas prismáticas apresentem a mesma relação momento-curvatura, mostrada abaixo, com ductilidade ilimitada.

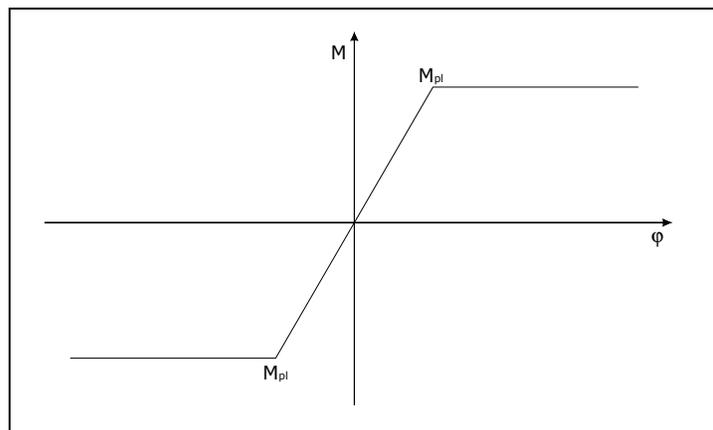


Figura 3.1 – Momento-curvatura idealizado (Gaylord et al, 1992)

### 3.2 TEOREMA DO LIMITE INFERIOR

Seja a viga simplesmente apoiada uniformemente carregada. Quando o momento máximo na viga atinge o valor  $M_{pl}$ , qualquer aumento de deformação resulta em rotação na seção central, sem aumento de carga. É dito então que se formou uma rótula plástica nesta seção, que transforma a viga em um mecanismo. Portanto, a carga de colapso vale:

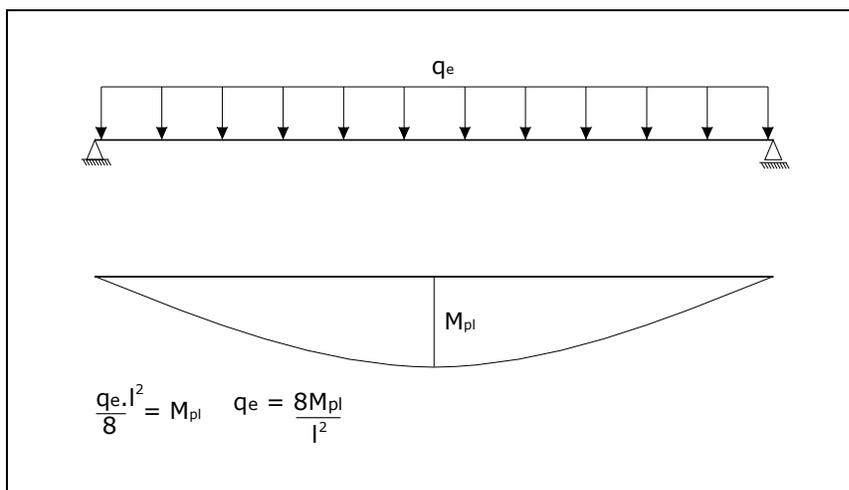


Figura 3.2 – Viga biapoiada com carregamento distribuído

Vê-se, portanto, que a viga entra em colapso quando a seção crítica entra em escoamento.

Considere agora a viga biengastada, Figura 3.3a. Enquanto todas as seções permanecem elásticas, o diagrama de momentos fletores é o indicado nessa figura. Com o aumento da carga, as armaduras das seções dos engastes entrarão em escoamento, formando as rótulas plásticas. No entanto, a formação destas rótulas não é suficiente para transformar a estrutura em mecanismo. O primeiro escoamento, na seção mais solicitada, não corresponde ao colapso da estrutura. Nas seções, A e B, os momentos permanecem constantes e apresentam rotações plásticas, com aumento de carga. Desse modo, a viga consegue redistribuir os esforços até que a seção no centro do vão atinja o momento de plastificação *Figura*

3.3b. Com a formação da terceira rótula plástica, a estrutura se deforma por rotações em cadeia, assim a estrutura é transformada em mecanismo e entra em colapso com a carga  $q_u$ .

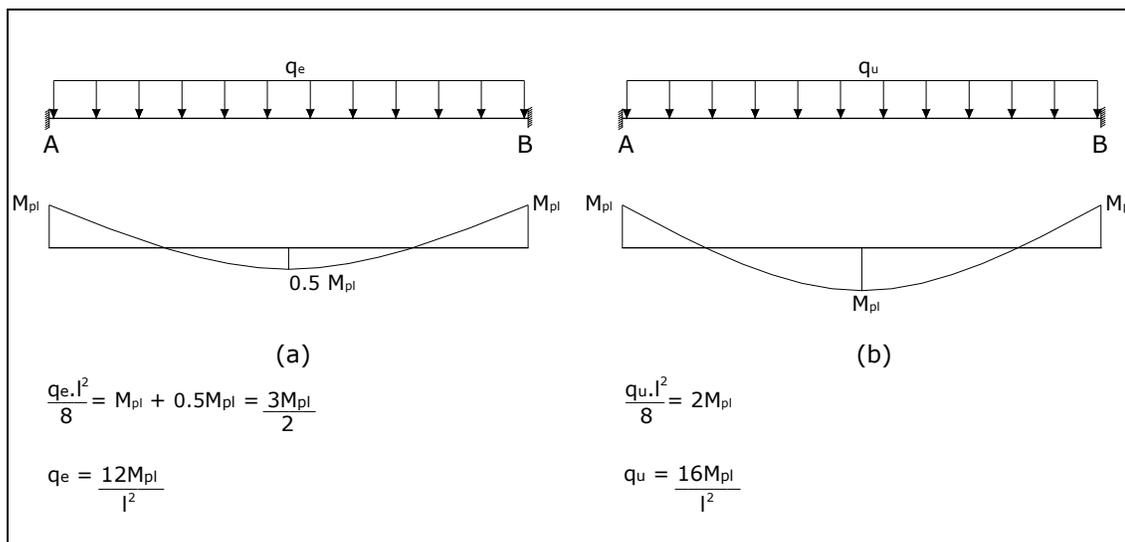


Figura 3.3 – Viga bi-engastada

Observa-se na figura acima que o diagrama de momentos fletores no colapso é diferente do diagrama elástico. Isso acontece devido à redistribuição de esforços das seções mais solicitadas para as menos solicitadas, pela formação e rotação das rótulas plásticas. Para a relação momento-curvatura adotada, Figura 3.1, é achada a razão entre a carga última, na formação de mecanismo, e a carga elástica, na no primeiro escoamento, com  $q_u/q_e=1.33$ , conforme Ghali (1998). É visto que, a carga que a viga suporta utilizando o critério do primeiro escoamento pode ser muito conservadora.

De fato, é possível mostrar que para essas estruturas, conforme Gaylord et al (1992), o seguinte teorema é válido:

Teorema do Limite Inferior: Para uma dada distribuição de momentos fletores, a carga correspondente que equilibra esta distribuição e que não excede o momento

de plastificação nas seções é menor ou igual à carga de colapso do sistema, e em nenhuma hipótese, superestima a carga de colapso correta. É assumido que:

1. As condições de equilíbrio sejam satisfeitas em todos os pontos do sistema estrutural;
2. O momento de plastificação não seja excedido em nenhuma seção;
3. As condições de contorno sejam satisfeitas.

Vê-se, portanto, a obtenção do diagrama de momentos fletores, que satisfaz as condições acima, fornece um estimador do fator de carga de colapso que nunca é contrário à segurança. Baseados nesta última observação, serão discutidos os seguintes processos de verificação da NBR-6118 (2003): 1-Análise Linear; 2-Análise Linear com Redistribuição; 3-Análise Plástica e 4-Análise Não-Linear.

É preciso acrescentar uma quarta condição ao teorema exposto, visto que seções em concreto armado possuem ductilidade limitada.

4. As condições de ductilidade sejam satisfeitas.

Para formação do mecanismo, as seções críticas devem possuir ductilidade suficiente para permitir seu desenvolvimento.

### **3.3 ANÁLISE LINEAR**

A análise linear admite comportamento elástico-linear para os materiais. Normalmente, os problemas estruturais são analisados de forma linear. Esta análise apresenta bons resultados para cargas e deslocamentos pequenos, fazendo com que o comportamento elástico-linear seja satisfatório.

Os resultados desta análise são baseados nas seguintes premissas:

I. Uso das características geométricas determinadas pela seção bruta do concreto, recomendado pela NBR-6118 (2003).

II. Relação linear para tensão-deformação.

A verificação é realizada, utilizando-se o critério do primeiro escoamento. Para concreto armado, isso significa que a seção entra em escoamento quando a armadura alcança a tensão de escoamento. Para peça que possua várias camadas de armadura, o CEB (1998) recomenda que o momento de escoamento seja aquele que provoque a tensão de escoamento na armadura mais tracionada. Quando a seção mais solicitada chega à tensão de escoamento, a estrutura atinge a carga de colapso. Foi mostrado na seção anterior que este tipo de análise pode levar a uma carga de colapso conservadora para estrutura hiperestática. Por outro lado, imaginando uma situação hipotética, se uma viga for armada exatamente para o diagrama de momentos fletores elástico, no qual todas as seções resistam, rigorosamente, apenas a esses momentos, todas as seções chegariam ao escoamento no mesmo instante e com isto a carga de colapso real seria a carga calculada pela análise linear. Para isto acontecer é preciso apenas uma pequena quantidade de redistribuição de momentos fletores, visto que as seções críticas tenderão a alcançar, no mesmo instante, a capacidade resistente última. Desse modo, a rotação plástica requerida para estas seções será pequena.

A opção por uma análise linear elástica proporciona as seguintes vantagens: a primeira é assegurar que as tensões no aço e no concreto sejam mantidas o mais baixo possível para a carga de serviço, o que minimiza as aberturas de fissuras; a segunda é que podem ser achadas as solicitações de cálculo usando uma teoria estrutural já difundida e bem estabelecida.

A verificação de vigas utilizando a análise linear, pode ser feita de forma razoavelmente simples. Como o objetivo é analisar uma viga, é pressuposto então que a geometria, propriedades dos materiais, condições de apoio, distribuição de

armação sejam conhecidas. Deve-se conhecer a capacidade resistente das seções da viga. No caso de verificação à flexão é preciso conhecer os momentos de escoamento das seções. Então, para o carregamento dado, calcula-se a distribuição do momento fletor sujeito às condições de equilíbrio de acordo com a análise elástica. Por fim, calcula-se o fator de colapso comparando os momentos elásticos aos momentos de escoamento das seções. É adotado o maior valor calculado para o fator de colapso, dentre aqueles que satisfaçam as condições do teorema do limite inferior.

### **3.4 ANÁLISE LINEAR COM REDISTRIBUIÇÃO**

A NBR-6118 (2003) permite que a distribuição do momento fletor, obtida pela análise linear elástica, possa ser modificada quando as seções possuem ductilidade suficiente para permitir a redistribuição de momentos fletores.

O parâmetro utilizado para quantificar a ductilidade é a profundidade relativa da linha neutra no estado limite último,  $x/d$ . Quanto menor for  $x/d$ , maior será a capacidade de rotação plástica disponível na rótula plástica, e, com consequência, maior a redistribuição de momentos fletores permitida. Esse parâmetro pode ser utilizado, também, para quantificar a ductilidade de peças em concreto de alta resistência, conforme Bernardo;Lopes (2004). A profundidade relativa da linha neutra pode representar vários fatores, como: a característica da relação tensão-deformação dos materiais (incluindo a ductilidade do aço), geometria da seção transversal (viga T ou viga I, por exemplo) e as tensões de tração e compressão da armação.

É determinado na NBR-6118 que, para melhorar a ductilidade das estruturas nas regiões de apoio das vigas ou de ligações com outros elementos estruturais, mesmo quando não for feita redistribuição de esforços solicitantes, a posição relativa da linha neutra no estado limite último deve obedecer aos seguintes limites:

- a)  $x/d \leq 0.50$  para concretos com  $f_{ck} \leq 35$  MPa; ou (3.1)  
b)  $x/d \leq 0.40$  para concretos com  $f_{ck} > 35$  MPa.

Esta determinação pode vir do fato que a análise linear, sem redistribuição, baseada na seção não-fissurada, necessita de certa quantidade de rotação em áreas plásticas, porque a distribuição de momento final difere da distribuição assumida para o comportamento elástico, devido à fissuração do concreto e a subsequente mudança de distribuição de rigezas ao longo do comprimento da peça.

É afirmado que esses limites podem ser alterados se forem utilizados detalhes especiais de armaduras, como por exemplo, os que produzem confinamento nessas regiões. Esses detalhes são propostos para provocar o confinamento do concreto comprimido, aumentando a deformação última do concreto na flexão e, como consequência, aumenta a capacidade de rotação plástica. Alguns trabalhos apresentados por Ventrini (2003), mostram armadura usada para confinamento da forma helicoidal e retangular. Foi mostrado por Ventrini que o confinamento é mais eficiente em seções com alta taxa de armação longitudinal do que em seções com taxa mais baixa, em função destas já possuírem altas ductilidades.

Note que o limite inferior para  $x/d=0.5$  é menor que o valor calculado para uma viga normalmente armada,  $x/d=0.628$ . Em muitos casos, isto pode ser resolvido apenas incluindo a armadura complementar superior no cálculo da linha neutra. Outra forma é adicionar armadura de compressão que garanta a posição da linha neutra nos valores estabelecidos. A NBR-6118 apresenta o seguinte comentário a respeito disto: a introdução da armadura de compressão para garantir o atendimento de valores menores da posição da linha neutra ( $x$ ), que estejam nos domínios 2 ou 3, não conduz a elementos com ruptura frágil (usualmente chamados de superarmados). A ruptura está associada à linha neutra no domínio 4, com ou sem armadura de compressão.

Para realizar a redistribuição é utilizado um coeficiente de redistribuição denominado  $\delta$ . A redistribuição em uma determinada seção é feita multiplicando o valor do momento fletor  $M$  por  $\delta$ . Para um maior valor de  $\delta$ , menor será a redistribuição,  $M(1-\delta)$ . Este coeficiente é calculado a partir da profundidade relativa da linha neutra nesta seção, como segue:

$$a) \delta \geq 0.44 + 1.25 x/d \text{ para concretos com } f_{ck} \leq 35 \text{ MPa; ou} \quad (3.2)$$

$$b) \delta \geq 0.56 + 1.25 x/d \text{ para concretos com } f_{ck} > 35 \text{ MPa.}$$

Como nesta análise não é verificada a capacidade de rotação de maneira explícita, então, são adotados valores conservadores para o coeficiente de redistribuição. Este coeficiente deve, ainda, obedecer aos seguintes limites:

- a)  $\delta \geq 0.90$  para estruturas de nós móveis (deslocáveis);
- b)  $\delta \geq 0.75$  para qualquer outro caso.

O procedimento para realizar a análise linear com redistribuição é o mesmo descrito para a análise linear acrescentando a redistribuição dos momentos.

Para adotar valores maiores que os estabelecidos anteriormente, a estrutura deverá ser analisada através da análise não-linear ou da análise plástica, com verificação explícita da capacidade de rotação das rótulas plásticas localizadas nas seções críticas, (NBR-6118, 2003). Estas duas análises serão apresentadas a seguir.

## **3.5 ANÁLISE PLÁSTICA**

### **3.5.1 INTRODUÇÃO**

Enquanto que no caso de estruturas lineares simples, apoiadas isostaticamente, a perda de capacidade resistente ocorre desde que o aço entre em escoamento ou a tensão de compressão no concreto atinja o valor da resistência à compressão, em algum lugar da peça, no caso de estruturas hiperestáticas, por ocasião de uma solicitação em excesso em uma zona, ocorre uma redistribuição dos esforços internos para um trecho adjacente que ainda não esteja integralmente aproveitado.

As estruturas hiperestáticas possuem, portanto, reservas de capacidade, que somente são mobilizadas quando surgem deformações plásticas em um ou mais locais que são sempre críticos. Para que se possam aproveitar integralmente estas reservas de capacidade, deve-se conhecer o comportamento à deformação de vigas de concreto armado no regime plástico e, principalmente, os limites de deformações (LEONHARDT, 1979).

Em estruturas hiperestáticas podem se formar rótulas plásticas suficientes para desenvolver um mecanismo. Mas para concretizar a formação deste mecanismo, as seções críticas precisam de capacidade de rotação plástica suficiente para atender à rotação plástica requerida. A possível redistribuição de momentos fletores calculados através da análise elástica é, principalmente, controlada pela ductilidade da peça a qual envolve o cálculo da capacidade de rotação requerida e admissível nas rótulas plásticas. Ou seja, a estrutura chegará à capacidade resistente última por formação do mecanismo ou por limitação da deformação (rotação plástica).

Nesta análise, será abordada, então, de forma explícita, a quarta condição imposta ao Teorema do Limite Inferior, a qual exige que as condições de ductilidade sejam verificadas.

### 3.5.2 ROTAÇÃO PLÁSTICA

#### 3.5.2.1 MOMENTO CURVATURA SIMPLIFICADO

A NBR-6118 (2003) admite análise plástica quando as não-linearidades puderem ser consideradas concentradas, admitindo-se materiais de comportamento rígido-plástico perfeito ou elasto-plástico perfeito.

O MC-90 explica que no comportamento elástico do material pode ser utilizada uma aproximação bilinear elástica, a qual é dividida em dois estágios: 1) Linear elástico, concreto não-fissurado. 2) Concreto fissurado. Isto propicia duas opções para serem utilizadas na análise plástica: comportamento elasto-plástico perfeito

bilinear e trilinear. As figuras 3.4b e 3.4c mostram a aproximação utilizada para o comportamento plástico perfeito.

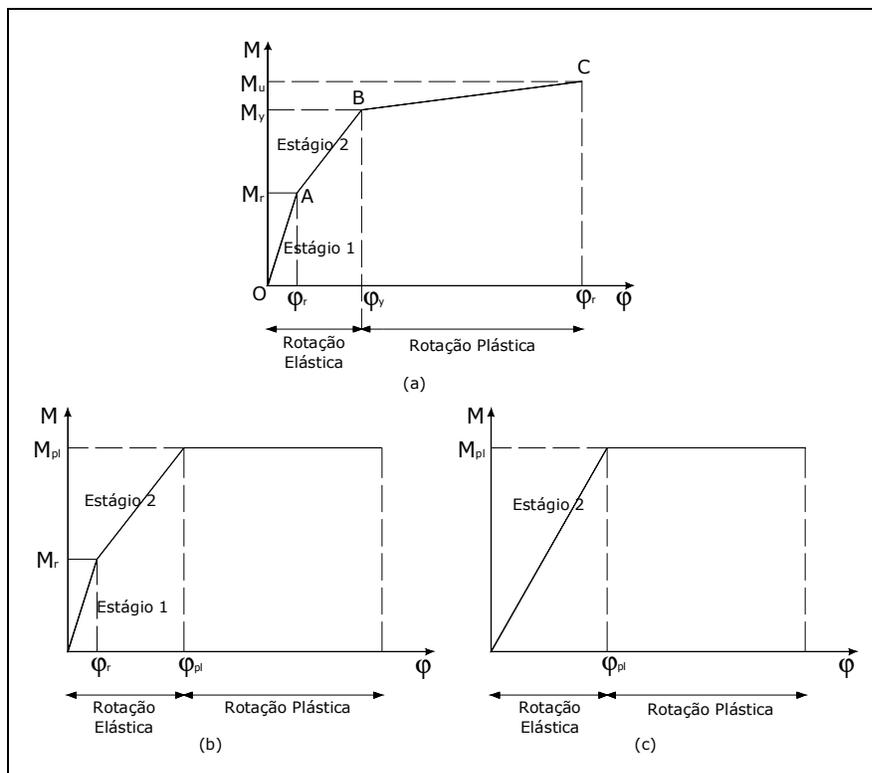


Figura 3.4 – Comportamento elasto-plástico trilinear e bilinear

A simplificação exigida pela análise plástica para que a relação momento-curvatura seja perfeitamente plástica leva à seguinte pergunta: qual o valor utilizado para o momento de plastificação? Numa análise simplificada este valor é adotado igual ao momento de escoamento, fazendo com que a peça permaneça com momento de escoamento até a curvatura última. Outra maneira, seria igualar o momento de plastificação ao momento resistente último da seção.

É possível afirmar que  $M_u \approx M_y$  se o aço tem diagrama bilinear (elasto-plástico perfeito). Neste caso, a diferença entre  $M_y$  e  $M_u$  é apenas a diferença entre os braços de alavanca nos dois estados, ver Figura 3.5, já que não é considerado o endurecimento do aço. Ou seja, adotar o momento de plastificação igual ao

momento resistente, analogamente assumido por Park;Paulay (1975), é um procedimento aceitável e será adotado neste trabalho.

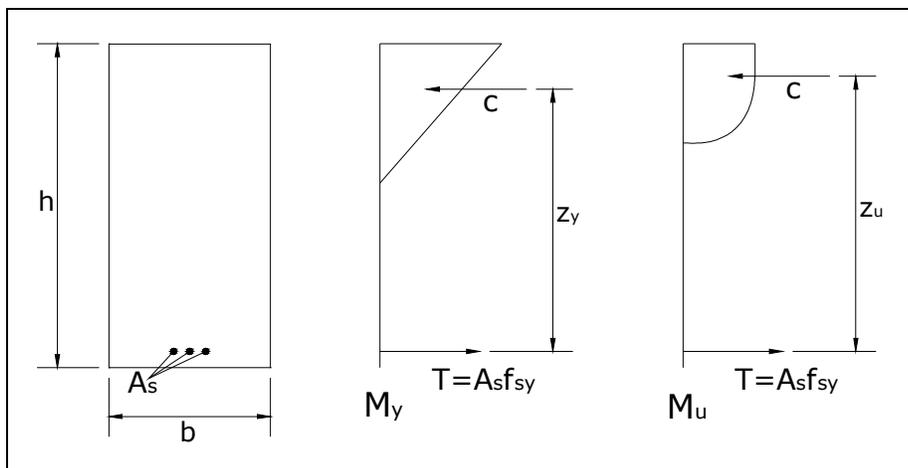


Figura 3.5 - Comparação entre os braços de alavanca do  $M_u$  e  $M_y$

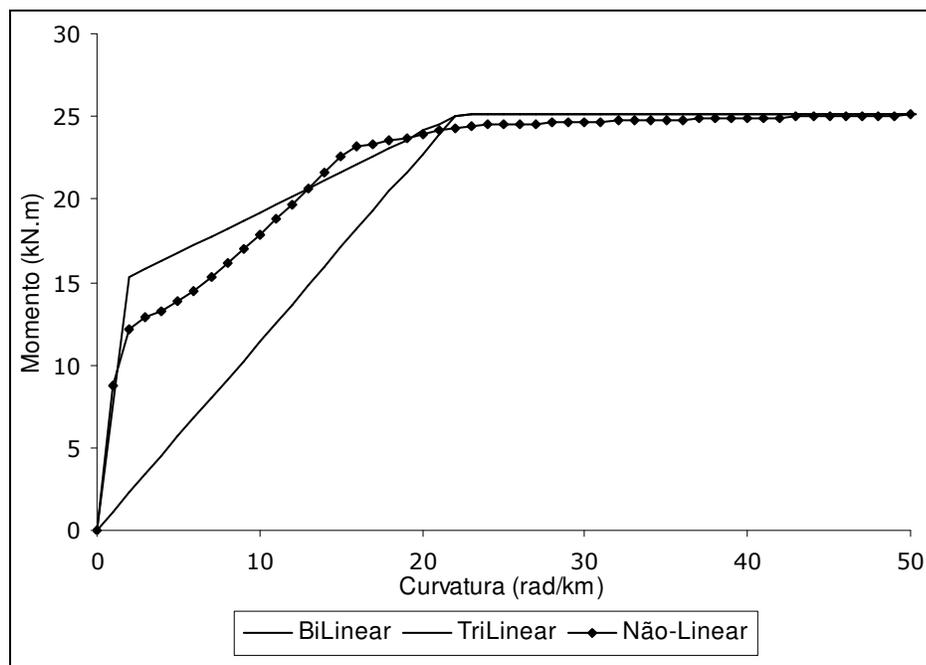


Figura 3.6 - Comparação entre as relações momento-curvatura

Na Figura 3.6 é mostrado um exemplo que compara a relação momento-curvatura obtida pela análise não-linear descrito no item 2.5.1 às relações momento-curvatura adotadas para a Análise-Plástica (elasto-plástico perfeito trilinear e

bilinear). Essas curvas foram produzidas a partir da análise da seção crítica negativa proveniente de Eligehausen; Fabritius (1993), teste número 2.1. Foi considerado o endurecimento do aço no diagrama não simplificado.

Note que o comportamento trilinear é mais próximo do modelo não-linear para esta seção.

### 3.5.2.2 ROTAÇÃO PLÁSTICA

A Figura 3.7 mostra uma viga contínua de concreto armado cujo diagrama de momentos fletores é desenvolvido até o momento último na seção do apoio central. Neste estágio, a viga se encontra fissurada. Mostra-se também a distribuição de curvatura ao longo do comprimento  $a$ , o qual está compreendido entre os pontos de momentos nulos que contém a região de plastificação.

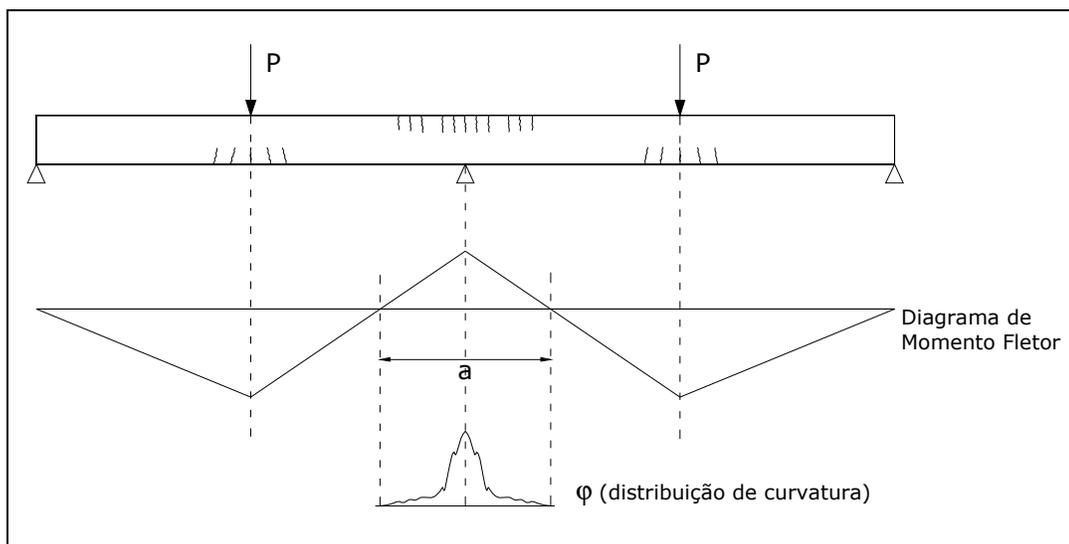


Figura 3.7 – Viga de concreto armado – curvatura no apoio central

A Figura 3.8 mostra em detalhe a distribuição de curvatura na seção crítica do apoio central. A flutuação dos valores da curvatura é devido ao incremento de rigidez nas seções entre fissuras. Cada pico localizado de curvatura corresponde a uma seção fissurada. As curvaturas inelásticas ocorrem quando o *momento* fletor em cada seção excede o seu momento de escoamento.

De acordo com o MC-90 o ramo descendente pós-pico da curva momento-rotação só deve ser utilizado para margem de segurança, devendo ser negligenciado no cálculo da rotação plástica admissível. Consequentemente, a rotação plástica,  $\theta_{pl}$ , é definida como a diferença entre a rotação total na rótula no nível do momento máximo,  $\theta_u$ , e a rotação que provoca o primeiro escoamento da armação,  $\theta_y$ , conforme Bigaj;Mayer (1998). A partir da equação (2.2) pode-se concluir que:

$$\theta = \int \varphi \cdot dx \quad (3.3)$$

Então, a área hachurada na Figura 3.8 é igual à rotação plástica a qual é a rotação que excede a rotação elástica. Esta rotação plástica, no estágio último, pode ser representada e substituída por um retângulo com altura igual a  $(\varphi_u - \varphi_y)$  e com largura  $l_p$ , denominada comprimento de plastificação. Desta forma, a rotação plástica pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\theta_p = (\varphi_u - \varphi_y) \cdot l_p \quad (3.4)$$

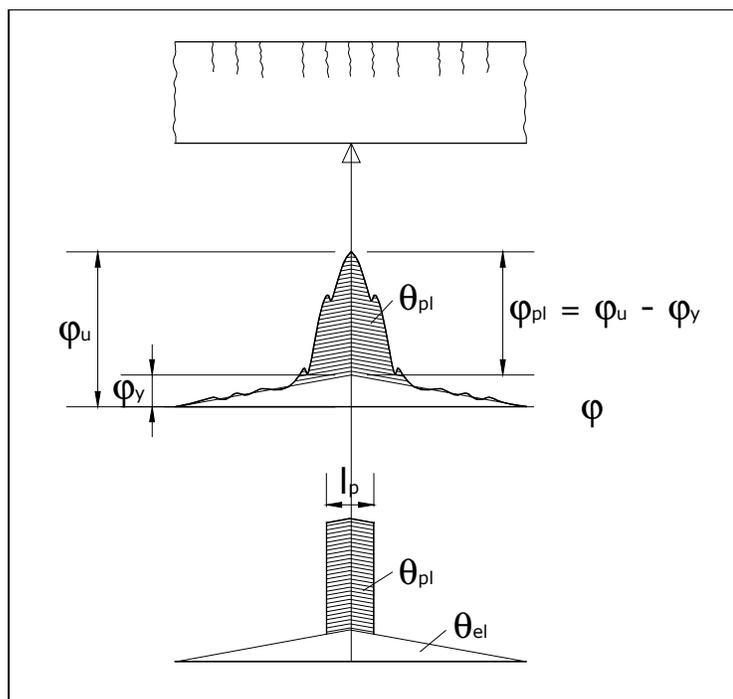


Figura 3.8 – Rotação plástica idealizada no apoio central

Existem vários trabalhos teóricos e experimentais que apresentam equações para o cálculo do comprimento de plastificação, mas não serão abordados aqui neste estudo porque este comprimento estará implícito no cálculo da capacidade de rotação plástica fornecida pela NBR6118 (2003) e apresentado na próxima seção.

A figura seguinte mostra a distribuição de curvatura a partir da análise da seção crítica negativa, proveniente do trabalho de Eligehausen; Fabritius (1993), teste número 2.1.

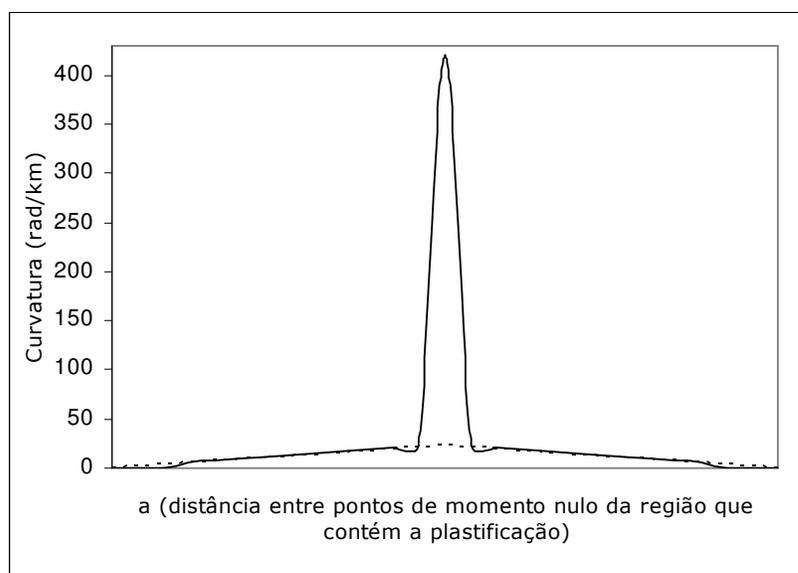


Figura 3.9 – Distribuição de curvatura obtida pela análise não-linear (Rotação Elástica e Rotação Plástica)

### 3.5.3 DUCTILIDADE

Em 1987, vários grupos de pesquisa investigavam de forma experimental e teórica a influência de vários parâmetros no comportamento não-linear em peças de concreto armado. Então, nesse ano, o CEB formou um grupo denominado CEB Task Group 2.2 "Ductility - Reinforcement" para sintetizar os resultados das pesquisas existentes, julgando-as para aplicação na engenharia prática e também para propor um modelo de cálculo. Desde então, os membros deste grupo, de forma individual, se dedicaram à pesquisa e publicação deste assunto. Estas pesquisas serviram de

base para a formulação dos tópicos sobre a capacidade de rotação em vigas de concreto armado e a capacidade de redistribuição de momentos fletores para o CEB-FIP Model Code (1990), denominado MC-90. Dentre as pesquisas realizadas, o MC-90, adotou a curva, recomenda por Elgehausen; Fabritius (1993a) para obter a rotação plástica admissível.

Segundo Stucchi (2005), as curvas da capacidade de rotação plástica, fornecidas pela NBR-6118 (2003), foram baseadas nas curvas do MC-90 e modificadas utilizando um modelo desenvolvido por Elgehausen para ajustar o alongamento na ruptura do aço  $f_{su}/f_{sy}$ , de forma a adaptar aos aços brasileiros.

A norma brasileira recomenda que para verificações de estados limites últimos, através da análise plástica da estrutura, devem ser adotadas rótulas plásticas localizadas nas seções críticas. Desta forma, deve-se ainda, obrigatoriamente, verificar se a rotação plástica necessária pelas seções críticas não excede à rotação plástica disponível da seção.

Portanto, na análise plástica deve-se calcular a rotação plástica necessária para a estrutura alcançar a redistribuição, a qual será mostrada adiante. Para determinar a rotação disponível na rótula, o método adotado pela norma brasileira é análogo ao do MC-90.

Na análise plástica, devido ao fato de poder assumir que a rotação plástica esteja concentrada na seção crítica, a rotação plástica admissível pode ser calculada de acordo com o gráfico apresentado na Figura 3.10. A rotação plástica disponível é fornecida em função da profundidade relativa da linha neutra no estado limite último,  $x/d$ . Os resultados experimentais, utilizados para a construção deste gráfico, foram baseados em vigas/lajes com esbeltez  $a/d=6$  (onde  $a$  é a distância entre pontos de momentos nulos da região que contém a seção plastificada). Em virtude disto, é utilizado um multiplicador para corrigir os valores das rotações extraídos do gráfico para vigas com esbeltez diferente da adotada inicialmente. Pesquisas indicam que

uma maior esbelteza proporciona uma maior capacidade de rotação plástica, com isto utiliza-se fator  $k = \sqrt{(a/d)/6}$  para multiplicar as rotações obtidas pelo gráfico da Figura 3.10.

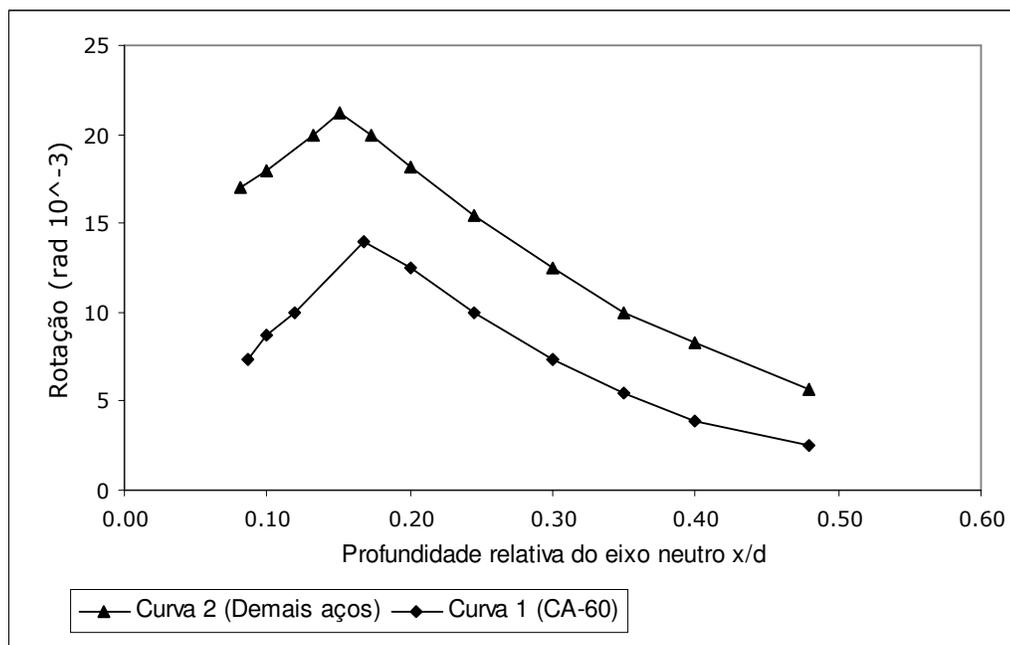


Figura 3.10 – Capacidade de rotação plástica segundo NBR6118 (2003)

Esta norma utiliza as seguintes funções para representar os trechos descendentes desta curva:

- Curva 1 (CA-60): para  $x/d \geq 0.17 \Rightarrow 1000 \theta_{pl} = 2 x/d$
- Curva 2 (demais aços): para  $x/d \geq 0.15 \Rightarrow 1000 \theta_{pl} = 3.5 x/d$

Observa-se, ainda, que a equação dada para a curva 2 concorda no ramo descendente com a curva do aço A do MC-90, que por sua vez concorda, no mesmo ramo, com a do EC-2 para aço de alta ductilidade (Buchaim, 2001).

O CEB (1998) comenta sobre os ramos ascendente e descendente desta curva. Primeiramente, fala sobre a existência de dois tipos de ruptura numa seção transversal de concreto armado, podendo ser pela ruptura da armadura ou pelo esmagamento do concreto comprimido com seguida expulsão do mesmo. Mas, para

este último modo vir ocorrer, a deformação na armação tracionada deve ser suficientemente alta. Uma curva com comportamento semelhante à da Figura 3.10 é mostrada, mas com a rotação plástica em função da porcentagem de armação. O ramo ascendente é indicado com a ruptura da armação. Neste ramo, o aumento da capacidade de rotação é explicado porque taxas maiores de armação aumentam a fissuração na região da rótula plástica e, desse modo, melhora a contribuição do concreto à tração entre fissuras. Já no ramo descendente, a ruptura é causada pela expulsão do concreto por causa da diminuição da deformação máxima na armação. Neste último ramo, pode-se dizer, então, que o confinamento do concreto pode resultar num aumento da capacidade de rotação, conforme foi explicado na seção 3.4. Entretanto, pode-se fazer uma analogia, já que baixos valores de  $x/d$  representam pequena porcentagem de armação, e afirmar que os ramos ascendentes do gráfico da NBR6118 (2003) até  $x/d=0.17$  e  $x/d=0.15$  são governados pela ruptura do aço, e, por outro lado, os ramos descendentes pela expulsão do concreto.

### 3.5.4 ALGORITMO PARA OBTER A CARGA ÚLTIMA

Nesta seção será mostrado o algoritmo desenvolvido para calcular a carga última de uma viga/laje contínua, de acordo com a teoria da análise plástica.

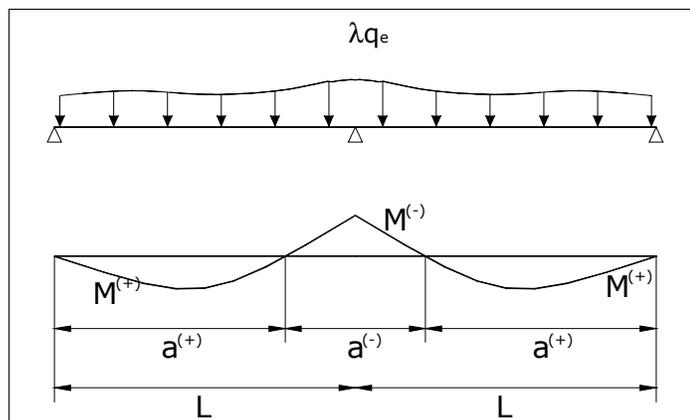


Figura 3.11 – Viga contínua com carregamento qualquer e diagrama de momentos fletores

Como já foi mencionado anteriormente, a forma utilizada para encontrar a carga última é achar o multiplicador do carregamento (fator de colapso -  $\lambda$ ) que torne a viga instável. Este multiplicador deve garantir que a peça satisfaça as quatro condições descritas no Teorema do Limite Inferior.

O diagrama de momentos fletores mostrado na Figura 3.11 pode ser obtido utilizando a superposição do diagrama de momentos fletores positivos (considerando como se a viga estivesse simplesmente apoiada em todos os vãos) com o diagrama de momentos fletores negativos para momentos concentrados nos apoios intermediários (neste caso especificamente no apoio central). O momento na seção crítica positiva  $M^{(+)}$  fica, assim, função do momento da seção crítica negativa  $M^{(-)}$ .

A configuração final de momentos, após a redistribuição e rotações plásticas, pode ser considerada como função do valor do momento negativo do apoio central e pelo valor do fator de colapso.

Uma das formas de resolver este problema é observando o fato de que o teorema do limite inferior nunca superestima o valor do fator de colapso  $\lambda$ , quando as quatro condições apresentadas estejam satisfeitas. Ou seja, o valor de  $\lambda$  será sempre igual ou menor ao correto. A solução do problema pode ser obtida maximizando  $\lambda$ . O problema fica então:

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } \lambda \\ & \lambda, M^{(-)}, \theta_{req}^{(-)}, \theta_{req}^{(+)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Sujeito a:

$$0 \leq M^{(-)} \leq M_{pl}^{(-)} \quad (3.6)$$

$$0 \leq M^{(+)}(\lambda, M^{(-)}) \leq M_{pl}^{(+)} \quad (3.7)$$

$$0 \leq \theta_{req}^{(+)} \leq \theta_{adm}^{(+)}(\lambda, M^{(-)}) \quad (3.8)$$

$$0 \leq \theta_{req}^{(-)} \leq \theta_{adm}^{(-)}(\lambda, M^{(-)}) \quad (3.9)$$

$$\theta_{req}^{(+)} \cdot [M_{pl}^{(+)} - M^{(+)}(\lambda, M^{(-)})] = 0 \quad (3.10)$$

$$\theta_{req}^{(-)}(M_{pl}^{(-)} - M^{(-)}) = 0 \quad (3.11)$$

$$\theta_{req}^{(-)} - 2 \cdot \frac{C^*}{L} \cdot \theta_{req}^{(+)} = \delta w_{int}^1 \quad (3.12)$$

As restrições (3.6) e (3.7) impõem a condição que o momento de plastificação  $M_{pl}$  não é excedido em nenhuma seção. Já as (3.8) e (3.9) garantem que a rotação plástica requerida  $\theta_{req}$  seja menor ou igual à permitida por norma, aqui denominada de rotação admissível  $\theta_{adm}$ . Visto que só poderá existir rotação plástica depois que os momentos nas seções críticas atingirem aos momentos de plastificação das seções, as restrições (3.10) e (3.11) são impostas. A última restrição (3.12) provém do princípio dos trabalhos virtuais e será explicada adiante.

Considere a viga a seguir com molas de rigidez  $k$ , á torção, nas rótulas B, C e E, e que se deseja calcular a rotação da rótula sobre o apoio C.

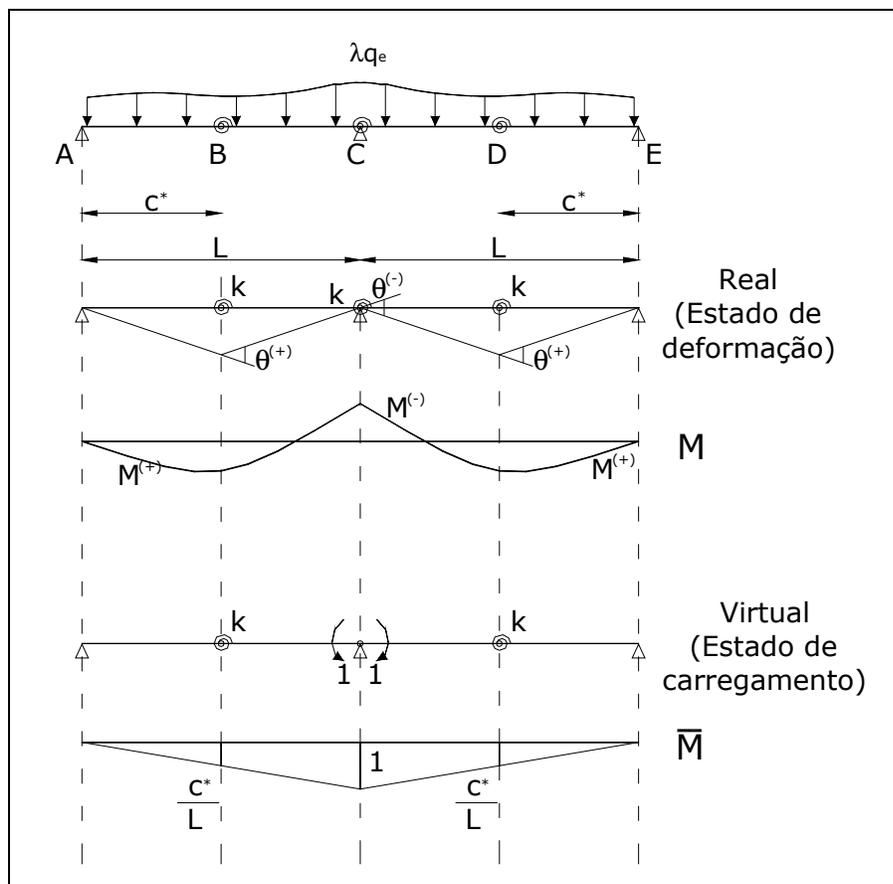


Figura 3.12 – Rotação nas rótulas

Baseado no princípio de D'Alembert, e utilizando a nomenclatura apresentada por Süsskind (1973), é imposto à estrutura, no estado de carregamento virtual mostrado na Figura 3.12, deslocamentos virtuais idênticos ao indicado no estado de deformação real.

Trabalho virtual das forças externas:

$$\delta w_{\text{ext}} = 1 \cdot \theta^{(-)} = \theta^{(-)} \quad (3.13)$$

Trabalho virtual das forças internas:

$$\delta w_{\text{int}} = \delta w_{\text{int}}^1 + \delta w_{\text{int}}^2 = -\int_0^{2L} \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} \cdot dx - 2 \cdot \frac{c^*}{L} \cdot \theta^{(+)} \quad (3.14)$$

Com:

$\delta W_{int}^1 \rightarrow$  trabalho dos trechos entre as rótulas.

$\delta W_{int}^2 \rightarrow$  trabalho da rótula positiva.

Como o trabalho virtual realizado pelas forças externas somado ao trabalho virtual das forças internas tem que ser nulo, faz-se então:

$$\delta W_{ext} + \delta W_{int} = 0 \therefore \theta^{(-)} - 2 \cdot \frac{C^*}{L} \cdot \theta^{(+)} - \int_0^{2L} \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} \cdot dx = 0 \quad (3.15)$$

Para peças com vãos iguais e carregamento simétrico pode-se fazer:

$$\theta^{(-)} - 2 \cdot \frac{C^*}{L} \cdot \theta^{(+)} = 2 \cdot \int_0^L \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} \cdot dx \quad (3.16)$$

O procedimento apresentado neste trabalho foi desenvolvido para vigas com dois vãos simétricos. Ver Horowitz;Rêgo (2005) para análise plástica de vigas, em geral, conforme NBR6118 (2003). O trabalho interno realizado pelos trechos entre as rótulas está sendo calculado admitindo que a peça permaneça com inércia constante ao longo do seu comprimento. Mas, o detalhamento da armação nas peças do concreto armado produz variação na rigidez da peça, por isso a integral deveria ser subdividida em intervalos que contenham rigidez constante. No entanto a análise plástica concentra as rotações plásticas nas rótulas plásticas e desse modo torna possível subdividir o intervalo da integral para que contenha apenas uma rótula plástica. A Figura 3.11 mostra o comprimento entre os pontos de momento nulo, que contém a rótula "positiva", denominada  $a^{(+)}$ . Para a peça mostrada, o trabalho virtual pode ser calculado da seguinte forma:

$$\delta W_{int}^1 = -2 \cdot \left( \int_0^{a^{(+)}} \frac{M \cdot \bar{M}}{EI_r^{(+)}} \cdot dx + \int_{a^{(+)}}^L \frac{M \cdot \bar{M}}{EI_r^{(-)}} \cdot dx \right) \quad (3.17)$$

Foi mostrado, no item 3.5.2.1, que será admitido tanto comportamento elasto-plástico perfeito bilinear como também trilinear. Neste último, a inércia não continua constante ao longo da peça, fazendo com que esse trabalho tenha que ser calculado

admitindo inércia variável. Introduzindo a equação (2.8) é possível fazer a seguinte modificação:

$$\delta W_{int}^1 = -2 \cdot \left( \int_0^{a^{(+)}} \varphi^{(+)}(M) \cdot \bar{M} \cdot dx + \int_{a^{(-)}}^L \varphi^{(-)}(M) \cdot \bar{M} \cdot dx \right) \quad (3.18)$$

Vê-se que agora a curvatura é uma função do momento fletor,  $\varphi(M)$ . Esta função é obtida por interpolação da curva momento-curvatura, adotada para a análise plástica (bilinear ou trilinear) e apresentada na Figura 3.6 e Figura 3.13.

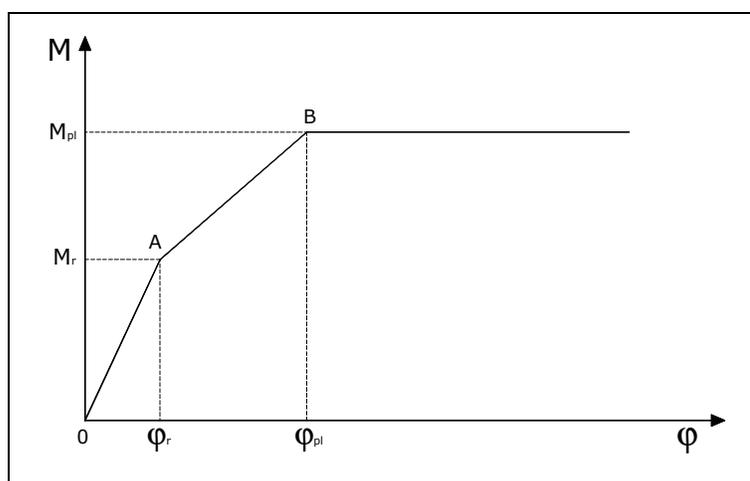


Figura 3.13 – Momento-Curvatura simplificado

O momento de fissuração  $M_r$  deve ser calculado de acordo com o item 17.3.1 da norma brasileira e pode ser determinado pela seguinte expressão aproximada:

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ct} \cdot I_c}{Y_t} \quad (3.19)$$

Sabendo que:

$\alpha$  = fator que correlaciona aproximadamente a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta;

$\alpha = 1.2$  para seções T ou duplo T;

$\alpha = 1.5$  para seções retangulares;

$f_{ct}$  = resistência à tração direta do concreto, e deve ser usado  $f_{ctm}$  no estado limite da deformação de fissura;

$$f_{ctk,inf} = 0.7 \cdot f_{ct,m} \quad (\text{MPa}) \quad (3.20)$$

Que por sua vez, o  $f_{ct,m}$  é:

$$f_{ct,m} = 0.3 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (\text{MPa}) \quad (3.21)$$

$y_c$  = distância do centro de gravidade à fibra mais tracionada;

$I_c$  = momento de inércia da seção bruta de concreto;

Já obtido o momento de fissuração e a inércia da seção, pode-se então calcular a curvatura de fissuração pela seguinte expressão:

$$\phi_r = \frac{M_r}{E_{cs} \cdot I_c} \quad (3.22)$$

O módulo de elasticidade secante do concreto  $E_{cs}$  deve ser calculado utilizando a equação (2.14).

A partir deste ponto já são conhecidas as coordenadas do ponto A –  $(\phi_r, M_r)$ , restando agora o ponto B.

Já foi discutido anteriormente que o momento de plastificação é adotado igual ao momento resistente da seção.

O dimensionamento constitui o trabalho diário dos projetistas das estruturas de concreto armado. Entretanto, em muitas situações, surge a necessidade de resolver um outro tipo de problema: a capacidade resistente. O problema de verificação de capacidade resistente na flexão normal pode ser colocado da seguinte forma: “dada uma seção transversal de concreto armado com todas as dimensões e as armaduras conhecidas, procura-se o momento fletor que leve a seção à ruína” (Araújo, 2003).

Por sua vez, a obtenção do momento resistente, normalmente, não pode ser realizada de maneira explícita, devendo-se empregar um processo iterativo para achar a profundidade da linha neutra e, posteriormente, calcular este momento.

A capacidade resistente, na seção, à flexão é caracterizada através da distribuição de deformações na seção transversal. Esta pertencerá a uma

das configurações apresentadas na Figura 3.14 que mostra os domínios do estado limite último.

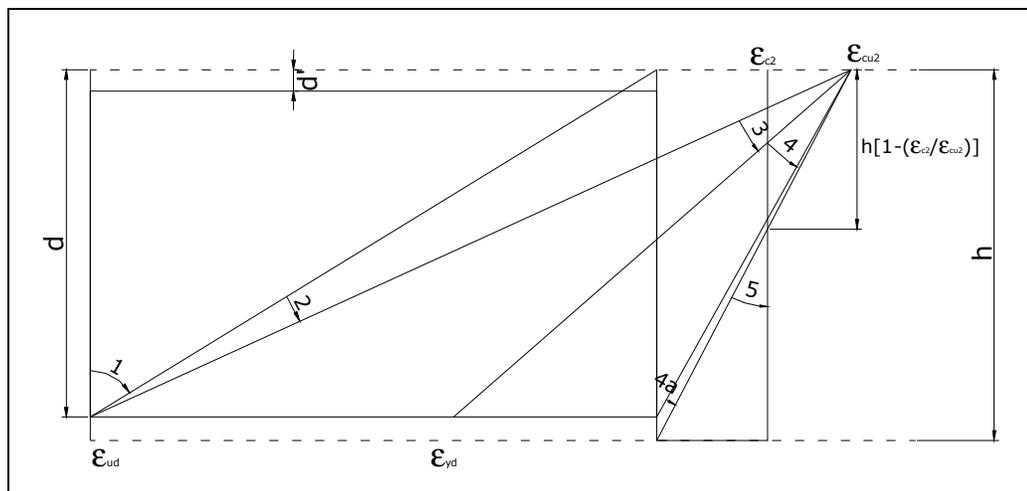


Figura 3.14 – Domínios do estado limite último de uma seção transversal

No capítulo 5, são exibidas análises de vigas com resistência característica do concreto maior que 50 MPa, valor este fora dos limites estabelecidos pela NBR-6118 (2003). Por este motivo, são utilizadas, também, as deformações limites propostas pelo EC2 para o concreto. Esta última norma contempla estruturas com  $f_{ck}$  maior que 50 MPa. Estes valores de deformações são utilizados nas descrições da curva tensão-deformação do concreto, Figura 2.11.

A partir das duas normas pode-se chegar a:

$$\begin{aligned} \epsilon_{c2}(\text{‰}) &= 2 \text{ se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ &2 + 0.085(f_{ck} - 50)^{0.53} \text{ se } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{cu2}(\text{‰}) &= 3.5 \text{ se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ &2.6 + 35((90-f_{ck})/100)^4 \text{ se } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Já a deformação  $\epsilon_{sud}=10\text{‰}$  para NBR-6118 (2003) e  $\epsilon_{sud}=0.9\epsilon_{suk}$  para o EC2, no entanto, a deformação do EC2 não poderá ser utilizada, pois provocaria uma

redução na profundidade da linha neutra. As curvas de capacidade de rotação plástica foram formuladas limitando a deformação no aço em 10‰.

As hipóteses de cálculo são semelhantes entre as duas normas: seções planas permanecem planas após a deformação e aderência perfeita.

No programa desenvolvido para o cálculo do momento resistente, as seções são informadas através de associações de trapézios e as armações por intermédios das suas áreas e das suas cotas de profundidade.

$$N_r(y) = \int b(y) \cdot f_c(\varepsilon_c(y)) \cdot dy + \sum A_s \cdot f_s(\varepsilon_s(y)) = 0 \quad (3.25)$$

O esforço normal resultante deve ser igualado a zero por se tratar de flexão simples. A deformação no concreto e no aço é calculada de acordo com as expressões (2.24) e (2.25). Estas deformações são expressas em função de um parâmetro adimensional  $D$  apresentado por Musso (1987), servindo para delimitar os domínios do estado limite último. Este procedimento foi estendido para atender à distribuição de deformação fornecida pelo EC2, e, desta forma, foi preciso interpolar os valores de  $D$  para atender às equações (3.23) e (3.24).

Após resolver a equação (3.25) é possível calcular o valor do momento resistente a partir da equação abaixo:

$$M_r(y) = \int b(y) \cdot f_c(\varepsilon_c(y)) \cdot y \cdot dy + \sum A_s \cdot f_s(\varepsilon_s(y)) \cdot y \quad (3.26)$$

Nesse procedimento, também, é possível calcular a profundidade do eixo neutro e, conseqüentemente, calcular a profundidade relativa do eixo neutro no estado limite último  $x/d$ , a qual será utilizada para determinar a rotação admissível  $\theta_{adm}$ .

Já é conhecida, então, a abscissa do ponto B, restando a ordenada, ou seja,  $\varphi_{pl}$ . E este por sua vez, aqui, é calculado como:

$$\varphi_{pl} = \frac{M_{pl}}{E_{cs} \cdot I_r} \quad (3.27)$$

Na seqüência, é preciso calcular a inércia da seção fissurada. Como o concreto encontra-se no estágio II faz com que a parte do concreto tracionado não esteja incluída no cálculo. O  $I_r$  deve ser calculado para seção homogeneizada, a qual é feita substituindo-se a área de aço por uma área correspondente de concreto, obtida a partir da multiplicação da área de aço  $A_s$  pelo coeficiente  $\alpha_e = E_s/E_c$ . Foi desenvolvida, então, uma sub-rotina para o cálculo desta inércia para uma seção transversal qualquer. Por fim é calculado o  $\varphi_{pl}$ , obtendo-se dessa maneira as coordenadas do ponto B.

Entretanto, a partir do gráfico da Figura 3.13, é possível determinar as funções  $\varphi^{(+)}(M)$ , utilizando as características da seção crítica positiva, e  $\varphi^{(-)}(M)$  de forma análoga.

Nas equações (3.8) e (3.9) é utilizada a rotação admissível  $\theta_{adm}$ . Como já foi calculada a profundidade relativa do eixo neutro  $x/d$  para as seções críticas positivas e negativas é possível determinar o  $\theta_{adm}$ , lembrando que para isto é preciso incluir o fator  $k = \sqrt{(a/d)/6}$ . Note que a distância entre pontos de momento nulo da região que contém a plastificação  $a$  é uma função do diagrama de momentos fletores, então  $k = \sqrt{(a(\lambda, M^{(-)})/d)/6}$ . A rotação admissível deve ser:

$$\theta_{adm}^{(+)}(\lambda, M^{(-)}) = \sqrt{\frac{a^{(+)}(\lambda, M^{(-)})/d}{6}} \cdot \theta(x/d) \quad (3.28)$$

$$\theta_{adm}^{(-)}(\lambda, M^{(-)}) = \sqrt{\frac{a^{(-)}(\lambda, M^{(-)})/d}{6}} \cdot \theta(x/d) \quad (3.29)$$

O  $\theta(x/d)$  é extraído do gráfico da Figura 3.10 para o  $x/d$  correspondente à seção crítica positiva ou negativa.

### 3.5.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A viga T mostrada na Figura 3.15 é utilizada para exemplificar uma aplicação do algoritmo apresentado. Nessa figura, mostra-se uma viga contínua de dois vãos com duas cargas concentradas aplicadas em cada vão. O peso próprio será desprezado. O diagrama de momentos fletores elástico foi utilizado para armar esta viga. No cálculo da armação não foi adotado coeficiente de majoração das cargas nem de minoração das resistências dos materiais (aço e concreto).

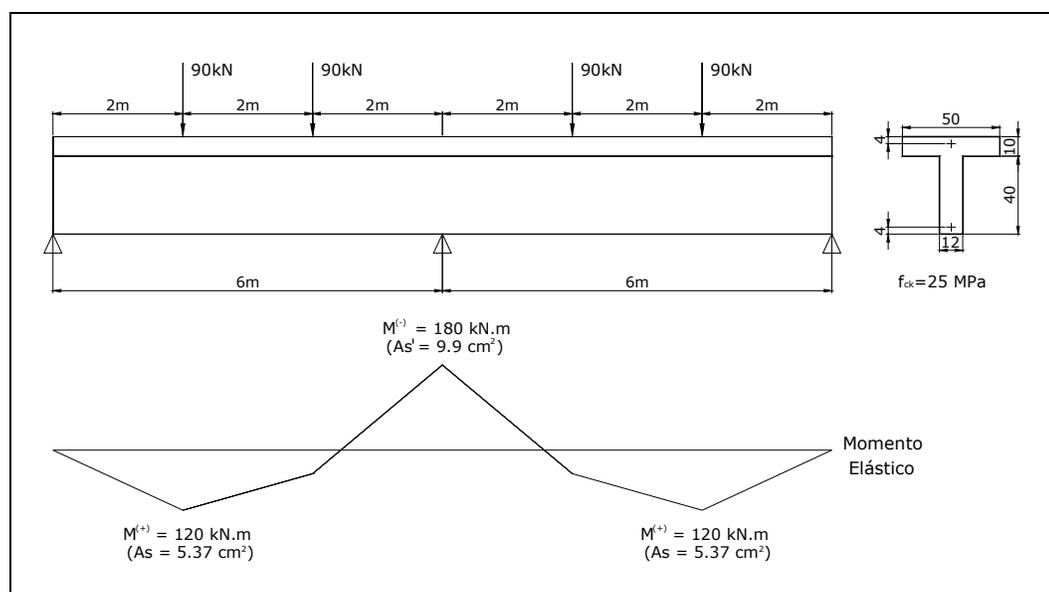


Figura 3.15 – Esquema da viga T

Numa primeira análise, utilizando as armações calculadas ( $A_s=5.37 \text{ cm}^2$  e  $A_s^l=9.9 \text{ cm}^2$ ), resultou numa carga de colapso igual à carga inicial  $P_u=90 \text{ kN}$  e uma redistribuição de momento fletor desprezível, Figura 3.16. Já numa segunda análise, objetivando redistribuição do apoio central para o centro do vão, foram utilizadas  $A_s=7.0 \text{ cm}^2$  e  $A_s^l=8.0 \text{ cm}^2$ . Resultando numa redistribuição  $\eta = 24.5\%$  calculada com a equação abaixo:

$$\eta = \left(1 - \frac{M_{pl}}{M_{elast}}\right) \cdot 100 \quad (3.30)$$

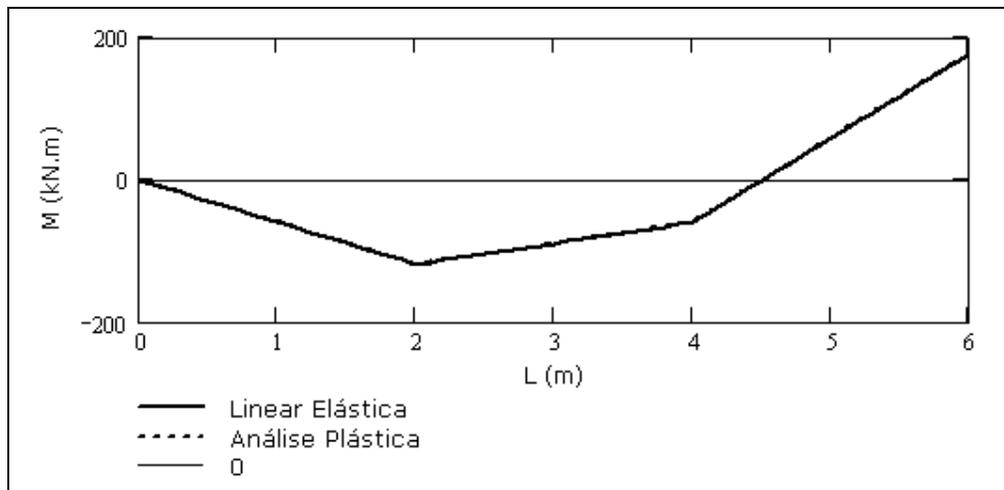


Figura 3.16 - Redistribuição de momento fletor da primeira análise

Sendo  $M_{pl}$  o momento plástico no apoio central e por sua vez  $M_{elat}$  o momento elástico devido à carga de colapso. A nova carga encontrada foi  $P_u=100$  kN, maior que a carga utilizada no cálculo elástico, e momentos  $M^{(+)}=151.2$  kN.m e  $M^{(-)}=151.4$  kN.m. Não foi possível chegar ao momento máximo resistente na seção positiva, devido à limitação de ductilidade da rótula negativa.

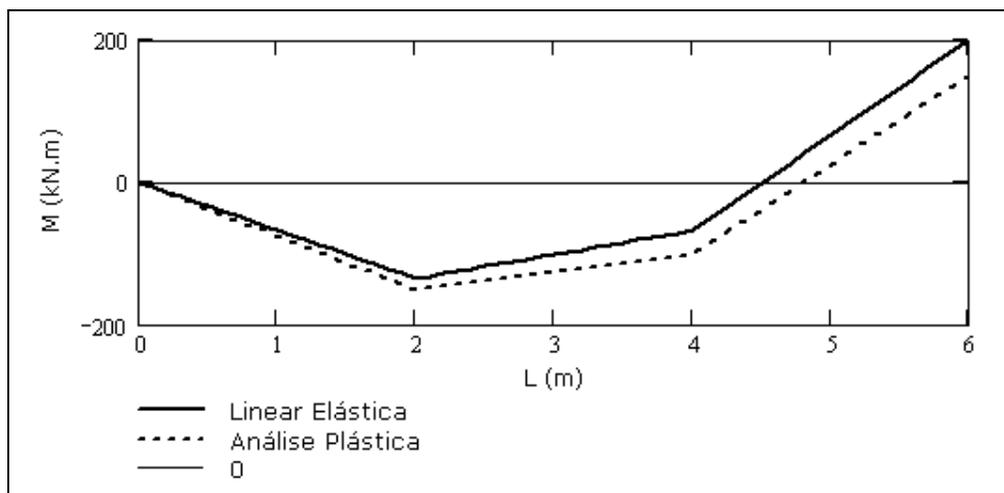


Figura 3.17 - Redistribuição de momento fletor da segunda análise

A NBR-6118 (2003), item 14.6.4.3, e seção 3.4 desta dissertação, estabelecem que para melhorar a ductilidade das estruturas nas regiões de apoio, a posição relativa da linha neutra, no estado limite último, deve obedecer aos limites da

equação (3.1). Nota-se que existe uma preocupação exclusiva com a ductilidade da seção crítica negativa.

Entretanto, nesta última análise é mostrado que pode existir redistribuição do momento positivo para o negativo, e deste modo, necessitando de ductilidade na seção crítica positiva. Para isso, as armações utilizadas são  $A_s=4.0 \text{ cm}^2$  e  $A_s^l=12.0 \text{ cm}^2$ . A redistribuição foi  $\eta=-28.4\%$  e a carga última  $P_u=77.5 \text{ kN}$  para momentos  $M^{(-)}=198 \text{ kN.m}$  e  $M^{(+)}= 89 \text{ kN.m}$ . Momentos estes iguais aos momentos resistentes das seções. Isto pôde acontecer, porque a rótula plástica positiva proporcionou capacidade de rotação plástica suficiente para a formação do mecanismo.

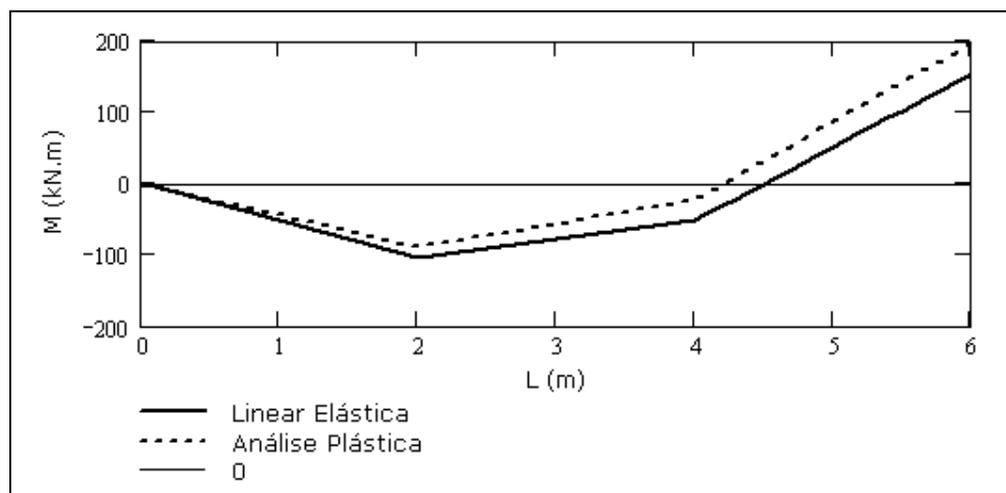


Figura 3.18 - Redistribuição de momento fletor da terceira análise

## 3.6 ANÁLISE NÃO-LINEAR

### 3.6.1 INTRODUÇÃO

Esta seção descreve um método computacional para analisar de forma não-linear vigas contínuas em concreto armado até o estágio último, inclusive estágio pós-pico, baseado nos trabalhos: Campbell;Kodur (1990), Wong;Warner (1998), Wong et al (1998) e Wong;Warner (1998a) . Enquanto que a análise plástica concentra as rotações plásticas nas seções críticas, nesta análise, a viga é

discretizada de modo que seja possível admitir rotação inelástica em cada seção que ultrapasse o seu momento de escoamento. O momento-curvatura utilizado é o calculado a partir do procedimento descrito na seção 2.5.1.

### 3.6.2 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

No algoritmo apresentado na próxima seção, é preciso calcular a rigidez de cada seção através da relação momento-curvatura. Existem algumas possibilidades de realizar este cálculo. A primeira seria o uso da rigidez tangente com a curvatura em função do momento fletor. A dificuldade inicial seria utilizar a curvatura em função do momento  $\varphi(M)$ , pois, desta forma, dificultaria a análise pós-pico do diagrama momento-curvatura, mesmo, admitindo o conhecimento prévio do momento máximo  $M_4$ , antes do início da análise do algoritmo, Figura 3.19a e equação (3.31). O segundo problema é o uso da rigidez tangente a qual possui uma variação muito forte nas regiões de mudança de comportamento do diagrama, e até mesmo, inversão no sinal da rigidez (no pós-pico do diagrama momento-curvatura). O que ocasionaria uma dificuldade para a convergência do algoritmo, podendo gerar problema numérico.

$$EI_{\text{tan}} = \frac{\partial M}{\partial \varphi(M)} \quad (3.31)$$

Para resolver os problemas citados, é adotado o momento em função da curvatura  $M(\varphi)$  e também o uso da rigidez secante, equação (3.32). Isto torna o processo de convergência mais estável. Proporciona também implementar a técnica de análise por controle de deformação (incremento de curvatura), o que possibilita a obtenção de todo o comportamento da peça até o colapso, incluindo o estágio de descarregamento, com o uso  $M(\varphi)$ , Figura 3.19b.

$$EI_{\text{sec}} = \frac{M(\varphi)}{\varphi} \quad (3.32)$$

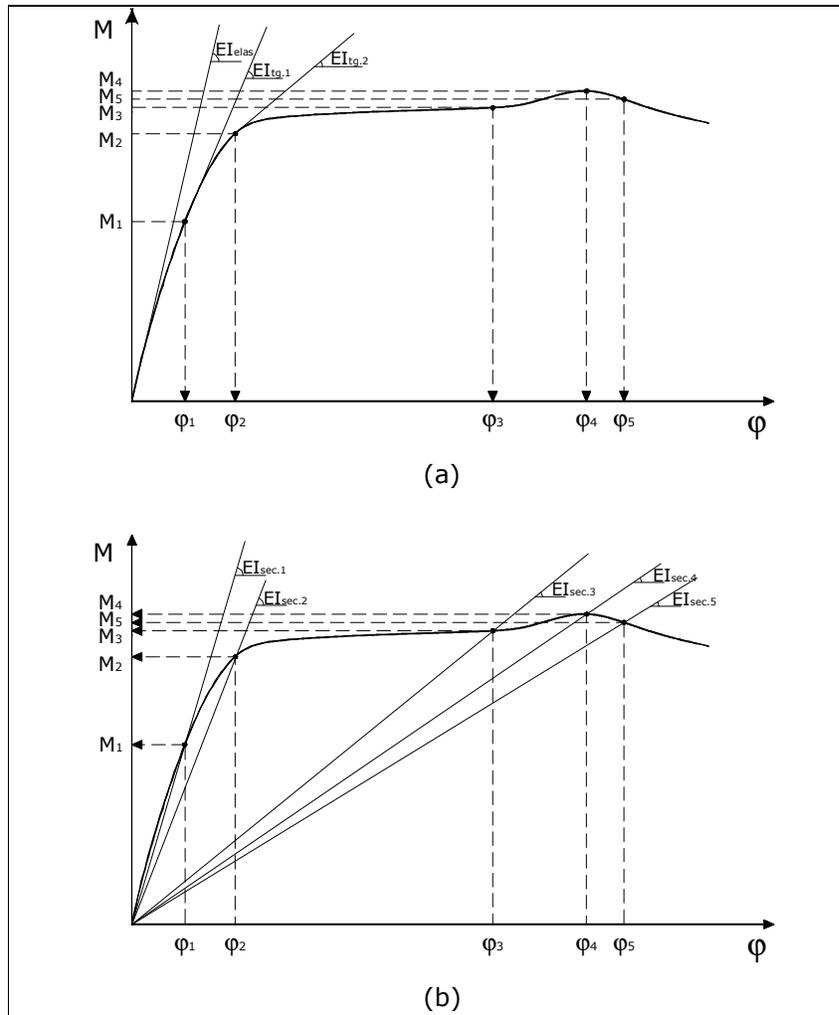


Figura 3.19 – Possibilidades do cálculo da rigidez

### 3.6.3 ALGORITMO

#### 3.6.3.1 OBJETIVO

Numa análise linear é admitida rigidez constante, mesmo usando inércia efetiva ou fissurada, para todas as seções no comprimento da viga. Mas os resultados teóricos e experimentais mostram uma distribuição de rigidez final diferente daquela adotada inicialmente. A rigidez final de cada seção depende da armação, geometria, resistência e propriedades dos materiais (concreto e aço), tipo e modo de carregamento e dos esforços solicitantes, com destaque para o diagrama de momentos fletores para peças fletidas. Mas por sua vez, a configuração final do

diagrama de momento depende também da distribuição final de rigezas, o que torna um problema não-linear. Por outro lado, se fosse de conhecimento prévio a distribuição correta de rigezas, o desenvolvimento apenas de uma análise linear elástica poderia encontrar o resultado exato do problema (curvatura, deslocamento e momentos). Portanto, o objetivo é encontrar distribuição exata de rigezas no instante do colapso.

### 3.6.3.2 PROCEDIMENTO

A viga em análise é discretizada em seções cuja relação momento-curvatura (seção 2.5.1 e seguintes) é determinada para cada seção. Dentro do processo, é preciso determinar onde ocorrerá a falha na estrutura e então determinar a seção chave que será determinante no colapso da estrutura.

A idéia básica é analisar a estrutura de maneira progressiva com incremento de curvatura, por controle de deformação, como já foi discutido, até a curvatura última da seção chave,  $\varphi_{lim}$ . Para cada incremento de curvatura, é preciso achar a distribuição correta de rigezas que faz com que a peça fique em equilíbrio para o passo de curvatura, de forma a encontrar o carregamento correspondente.

### 3.6.3.3 O ALGORITMO

Este algoritmo foi desenvolvido para complementar o presente estudo sobre análise de vigas contínuas. Em seguida, é apresentada a seqüência utilizada no desenvolvimento do mesmo.

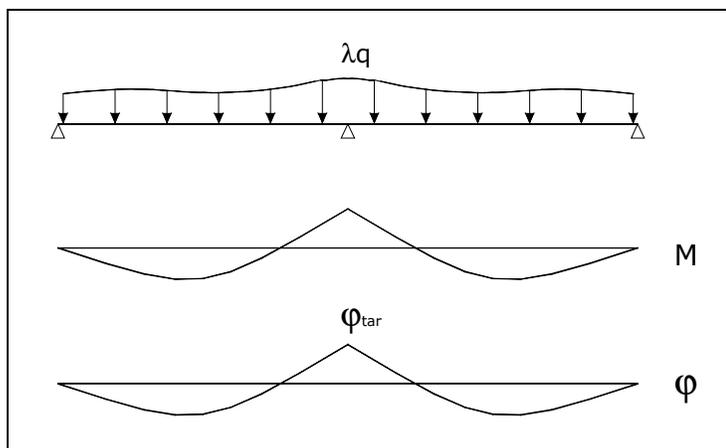


Figura 3.20 - Viga contínua com carregamento qualquer, diagrama de momento e curvatura alvo

Na figura 3.20 é mostrada uma viga com dois vãos e admitindo que a seção chave encontra-se no apoio central. A curvatura última desta seção é aqui denominada de  $\varphi_{lim}$ .

Peças em concreto armado, normalmente, seriam armadas para cobrir o diagrama de momentos fletores e desta forma, apresentariam seções com características distintas ao longo do comprimento da viga. As características intrínsecas das seções estarão representadas pelo diagrama momento-curvatura.

A seguir descreve-se a seqüência do algoritmo.

(I) Primeiro deve-se adotar um valor para curvatura no início da análise. Recomenda-se utilizar o valor nulo. Do mesmo modo, a rigidez secante de cada seção necessita de um valor inicial. Mas, diferentemente da curvatura, é recomendado o valor da rigidez secante inicial, ou seja, para seção não-fissurada. Pode-se utilizar os pontos iniciais de cada diagrama momento-curvatura para achar esta distribuição de rigezas. A rigidez secante de cada seção é denominada de  $k_{is}$ . Sendo  $is$  a variável utilizada para representar cada seção a qual varia de um ao número total de seção. Adotar  $k_{is} = EI_{g, is}$ .

(II) A curvatura limite  $\varphi_{lim}$ , *curvatura última na seção chave*, deve ser dividida em um número suficiente de partes para que garanta a convergência em cada incremento de curvatura. A curvatura de cada passo é denominada de curvatura alvo  $\varphi_{tar}$ . Então para cada passo ela é acrescida  $\varphi_{tar} = \varphi_{tar} + \Delta\varphi$ .

(III) Para cada incremento de curvatura, a análise linear elástica, é utilizada para determinar o momento e a curvatura em cada seção, utilizando a distribuição de rigezas do passo anterior com carregamento assumindo valor unitário. A curvatura obtida nesta análise é denominada de  $\varphi_{unit}$ .

(IV) No item anterior, foram obtidos valores de curvatura utilizando uma distribuição de rigezas imposta, o que torna possível não obter a curvatura na seção chave igual a  $\varphi_{tar}$ . O processo adotado é linear e admite o princípio da superposição, e com isto pode-se corrigir a distribuição de curvatura através do fator de escala  $\lambda$ , obtido pelo quociente entre a curvatura alvo e a curvatura unitária, resultante da análise linear na seção chave,  $\lambda = \varphi_{tar} / \varphi_{unit, key}$ .

(V) Neste ponto, pode-se achar uma nova distribuição de curvatura chamada de "curvatura teste"  $\varphi_{trial}$ . Então, as curvaturas das seções são corrigidas pelo fator de escala,  $\varphi_{trial} = \lambda \cdot \varphi_{unit}$ .

(VI) O objetivo, em cada passo de deformação, é achar uma distribuição de rigezas igual à admitida inicialmente. Para isto, é preciso calcular a nova distribuição de  $k$ . De início, é preciso achar os momentos para depois calcular as rigezas. Os momentos são achados através da relação momento-curvatura de cada elemento. Como já foi discutido antes, o momento é função da curvatura e com isto  $M_{trial} = M(\varphi_{trial})$ . De posse dos momentos nas seções é possível calcular a rigidez secante, utilizando a equação (3.34):  $k = M_{trial} / \varphi_{trial}$ .

(VII) Como a nova distribuição de rigezas, pode ser diferente da inicialmente assumida, é preciso verificar a convergência através de uma tolerância previamente estabelecida. Se a diferença estiver dentro do limite, o processo chega ao fim para

este passo de deformação, caso não, a última distribuição de rigezas é assumida e o ciclo é repetido até convergir.

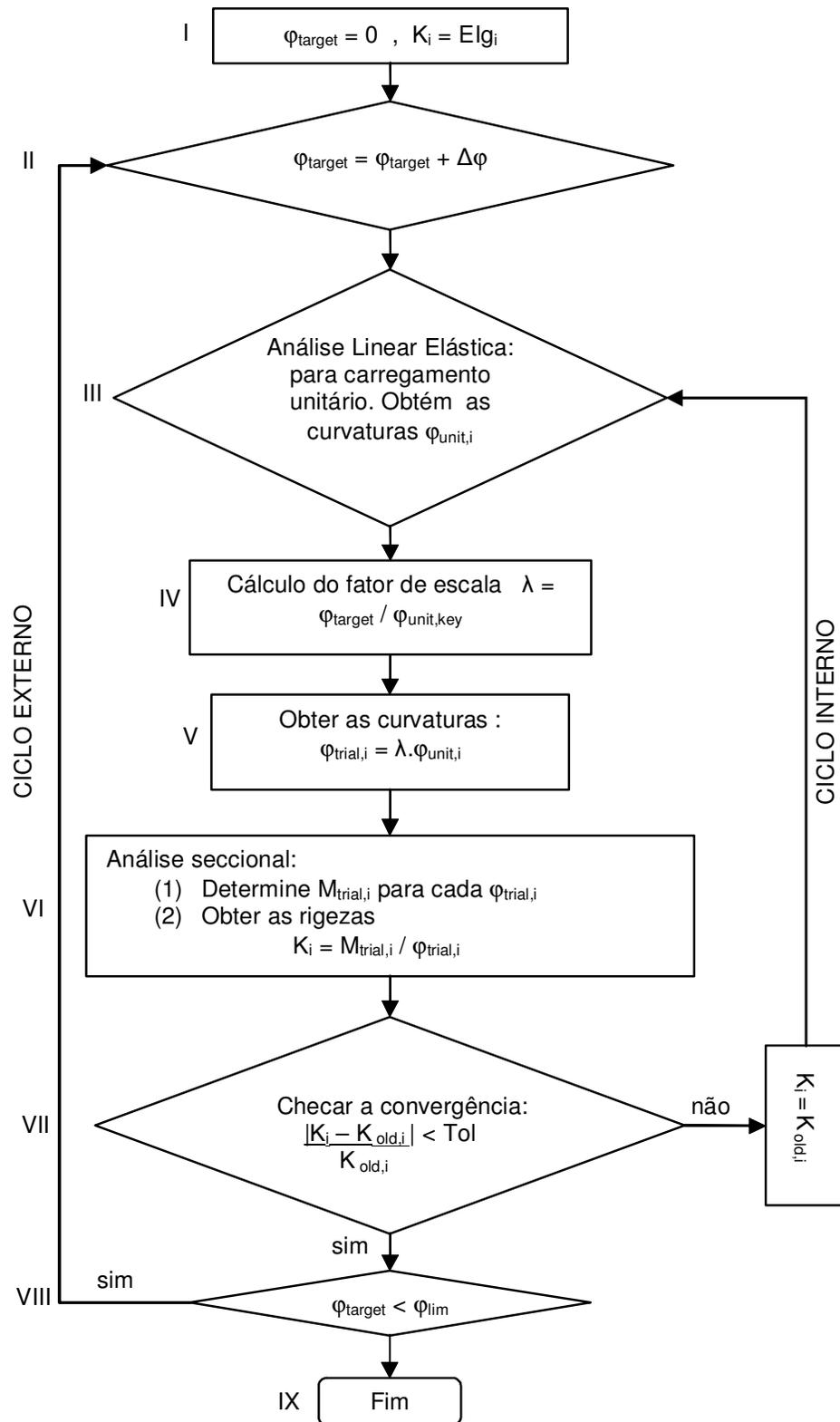
(VIII) Após a convergência em cada passo (ciclo interno) uma nova curvatura é assumida  $\varphi_{tar} = \varphi_{tar} + \Delta\varphi$  até o valor  $\varphi_{lim}$  (ciclo externo).

(IX) Após chegar ao valor de  $\varphi_{lim}$  já é conhecida a distribuição de curvatura final, assim, obtendo os deslocamentos e esforços seccionais (momento e cortante), através da última análise linear elástica. O carregamento que equilibra estes esforços, pode ser admitido igual ao último fator de escala  $\lambda$  já que o carregamento utilizado é unitário.

#### 3.6.3.4 A ANÁLISE LINEAR

Uma maneira de realizar a análise linear elástica é através da Analogia de Mohr, bastante eficiente para viga com dois vãos. É informada para esta análise a distribuição de rigezas do passo anterior e com isto é possível calcular o pseudo-carregamento  $\varphi = M/k$ , onde  $M$  é o momento para o carregamento unitário. A reação do apoio central é calculada, substituindo o seu vínculo por uma força unitária e igualando a zero o deslocamento no apoio. A nova distribuição de curvaturas é obtida pelo quociente entre o momento fletor após a análise e a distribuição de rigezas informada inicialmente.

## 3.6.3.5 FLUXOGRAMA



## **4 COMPARAÇÃO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS**

### **4.1 INTRODUÇÃO**

No capítulo anterior, foram mostrados quatro tipos de análises utilizadas no processo de verificação estrutural. Neste capítulo, serão mostrados alguns exemplos com o intuito de comprovar a eficiência de cada tipo de análise. Os resultados são comparados aos obtidos por análises experimentais de peças contínuas de concreto armado.

São utilizadas duas séries de ensaios. A primeira foi realizada por Eligehausen;Fabritius (1993), já a segunda foi efetuada por Carmo (2004) em sua tese de doutoramento.

### **4.2 ESTUDO 1 – LAJE CONTÍNUA**

O primeiro a ser apresentado é a laje contínua de concreto armado com dois vãos simétricos. Este estudo foi apresentado por Eligehausen;Fabritius (1993).

Os autores executaram uma série de ensaios, contendo sete testes. Alguns com aços mais dúcteis que outros, apoio intermediário com chapa metálica ou viga concretada monoliticamente e diferenças nos diâmetros das barras. Dentre eles é utilizado o teste número 2.1 para comparação analítica.

A seguir são mostradas as características e propriedades geométricas deste teste.

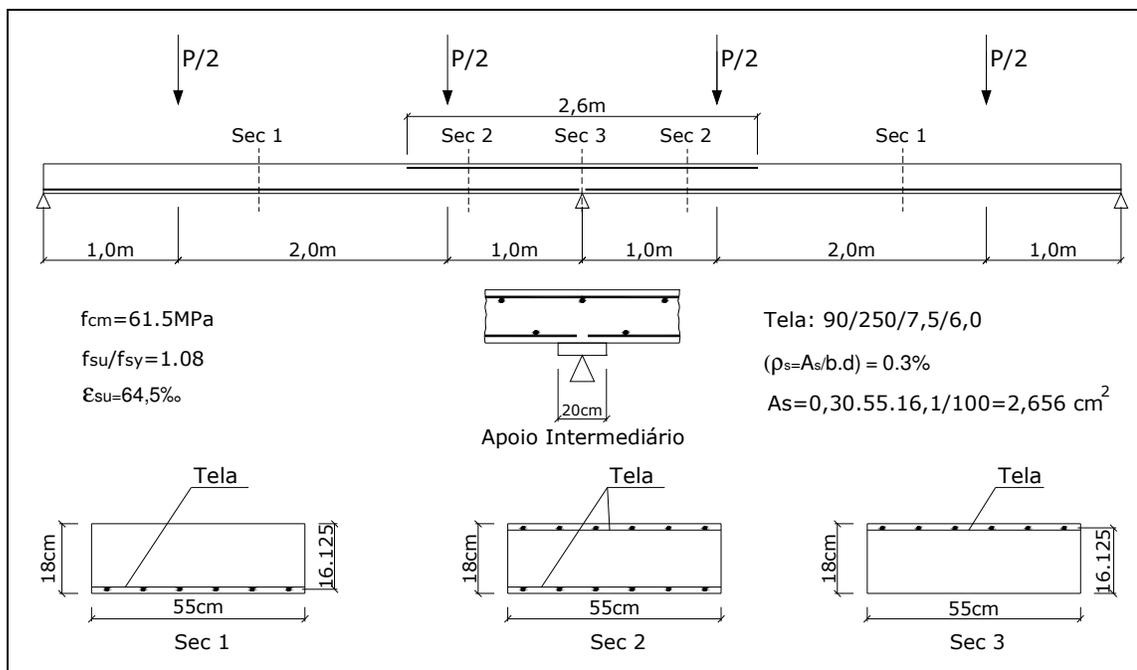


Figura 4.1 - Dados do teste 2.1 Eligehausen;Fabritius

O carregamento é simétrico e constituído por duas cargas concentradas em cada vão, somadas ao peso próprio da peça. O concreto possui resistência média  $f_{cm}=61.5\text{ MPa}$ . As lajes são armadas com telas soldadas com a mesma área nos vãos e no apoio central ( $\rho_s = A_s/b.d$ ) = 0.3%. As barras de aço foram instrumentadas com o intuito de medir suas deformações longitudinais durante a realização do ensaio. A tabela abaixo mostra o resultado para o teste 2.1.

Tabela 4.1 - Propriedades do aço Eligehausen;Fabritius (1993)

	$f_{sy}$ (MPa)	$f_{su}$ (MPa)	$f_{su}/f_{sy}$	$A_G$ (%)	$A_{10}$ (%)
Apoio central	594	642	1.080	3.3	9.6
Vão esquerdo	612	648	1.059	2.7	8.8
Vão direito	606	640	1.056	3.0	8.3

Segundo Buchaim (2001), toma-se como deformação última do aço  $\epsilon_{su}$  a média entre  $A_G$  e  $A_{10}$  (a primeira é a deformação plástica correspondente ao pico da curva

carga-deformação da barra nua ensaiada, a segunda é a deformação plástica residual medida na distância igual a  $10\phi$ , após a ruptura).

#### 4.2.1 ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA

Utilizando o exposto na seção 3.3 é mostrada de maneira simplificada a análise linear elástica para a peça em estudo. Sabe-se que a carga de colapso é atingida quando a seção mais solicitada entra em escoamento. Esta seção, para este exemplo, encontra-se no apoio central (maior momento fletor). Os autores do experimento informaram a soma das duas cargas concentrada num vão e da mesma forma será calculada a carga última através de cada tipo de análise. Os momentos resistentes foram calculados utilizando as equações (3.25) e (3.26) e serão utilizados nos três primeiros tipos de análise estrutural (Linear, Linear com Redistribuição e Plástica). O valor encontrado foi  $M_R^{(-)}=25.23$  kN.m para a seção central e  $M_R^{(+)}=24.62$  kN.m para a seção crítica positiva. Valores estes obtidos utilizando os dados da Tabela 4.1. Foi assumida a média entre os valores dos vãos esquerdo e direito para a seção positiva. Ambas as seções encontram-se no domínio 2.

É possível encontrar que o momento no apoio central é governado por:  $M^{(-)}(\lambda)=0.56\lambda P+4.95$ . Encontra-se o fator 0.56, para duas cargas concentradas iniciais  $P = 0.5$  kN. Já o valor 4.95 é devido ao peso próprio da laje. Fazendo  $M^{(-)}(\lambda)=M_R^{(-)}$  pode-se achar o valor da carga de colapso, obtendo desta forma  $P_u=36.21$  kN.

Substituindo em  $M^{(-)}(\lambda)$  o momento no apoio será  $M^{(-)}=25.23$  kN como era de se esperar, e o momento máximo positivo (abaixo da carga concentrada mais próxima o apoio esquerdo) pode ser calculado pela expressão  $M^{(+)}=0.36\lambda P+2.47$ , obtendo-se  $M^{(+)}=15.51$  kN.m. A Tabela 4.3 mostra a comparação com os resultados experimentais.

Tabela 4.2 – Causas da ruptura

<i>Nomenclatura</i>	<i>Causa da Ruptura</i>
tp1	Esgotamento da capacidade resistente (apoio central)
tp2	Rompimento da armação no apoio central
tp3	Capacidade de rotação plástica no apoio central
tp4	Deformação limite imposta para o aço
tp5	Formação do mecanismo
tp6	Deformação limite imposta para o concreto
tp7	Expulsão do concreto

A Tabela 4.2 descreve todos os tipos de ruptura encontrados nas análises analíticas e experimentais. Esta nomenclatura será utilizada no restante deste capítulo, e servirá para uma melhor comparação entre os diversos tipos de análises.

Tabela 4.3 – Comparação entre a análise experimental e a análise linear (laje)

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (KN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Linear	36.21	0.62	-	25.23	15.51	tp1
Análise Experimental	58.80	1.00	28.40	27.30	26.10	tp2

O índice de redistribuição foi calculado a partir da equação 3.30.

#### 4.2.2 ANÁLISE LINEAR COM REDISTRIBUIÇÃO

Nesta análise, é preciso ter conhecimento da profundidade relativa do eixo neutro  $x/d$  a qual é calculada através das equações (3.25) e (3.26). O valor de  $x/d$  deve ser calculado para seção crítica no ELU, neste caso apoio central. O valor encontrado foi  $x/d=0.0869$ . Pode-se observar que esta seção, encontra-se dentro do limite estabelecido para  $x/d$  através da equação (3.1b) que seria  $x/d \leq 0.40$ . Já a equação (3.2b) fornece o valor do coeficiente de redistribuição  $\delta=0.67$ . Mas este

valor deve ser maior ou igual a 0.75, então  $\delta=0.75$ . Devem-se calcular as cargas últimas para os pontos críticos e em seguida verificar, dentre elas, quais asseguram as condições do teorema do limite inferior, e adotar a maior. O primeiro é o apoio central e pode ser calculado da seguinte forma:  $(0.56\lambda P+4.95)\delta=M_R^{(-)}$  obtendo  $P_{u,neg}=51.23$  kN. O outro ponto é no local do momento máximo positivo e seu cálculo provém de  $(0.36\lambda P+2.47)+0.25(0.56\lambda P+4.95)0.25 =M_R^{(+)}$ . O valor encontrado foi  $P_{u,pos}=55.29$  kN e será adotado  $P_{u,neg}$ , já que com o uso de  $P_{u,pos}$  significaria que a redistribuição pretendida  $\eta=25\%$  não seria possível de se obter de forma integral, porque o momento resistente da seção negativa seria ultrapassado.

Depois da redistribuição limitada, o momento no apoio torna-se  $M^{(-)}=\delta M_R^{(-)}=25.23$  kN.m. Novamente, o momento positivo máximo será em baixo da primeira carga concentrada. Podemos chamar de  $\Delta M$  a variação do momento negativo. Diante disso, o momento positivo será  $M^{(+)}=M_{linear}^{(+)}+0.25\Delta M$ . Com  $\Delta M=8.41 \rightarrow M^{(+)}=20.92+2.10=23.02$  kN.m.

*Tabela 4.4 - Comparação entre a análise experimental e a análise linear com redistribuição (laje)*

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (KN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Linear com Redistribuição	51.23	0.87	25	25.23	23.02	tp1
Análise Experimental	58.80	1.00	28.40	27.30	26.10	tp2

A carga última encontrada foi 87% da carga experimental  $P_{exp}$ , já os momentos positivo e negativo foram 92% e 88% respectivamente em relação ao experimental.

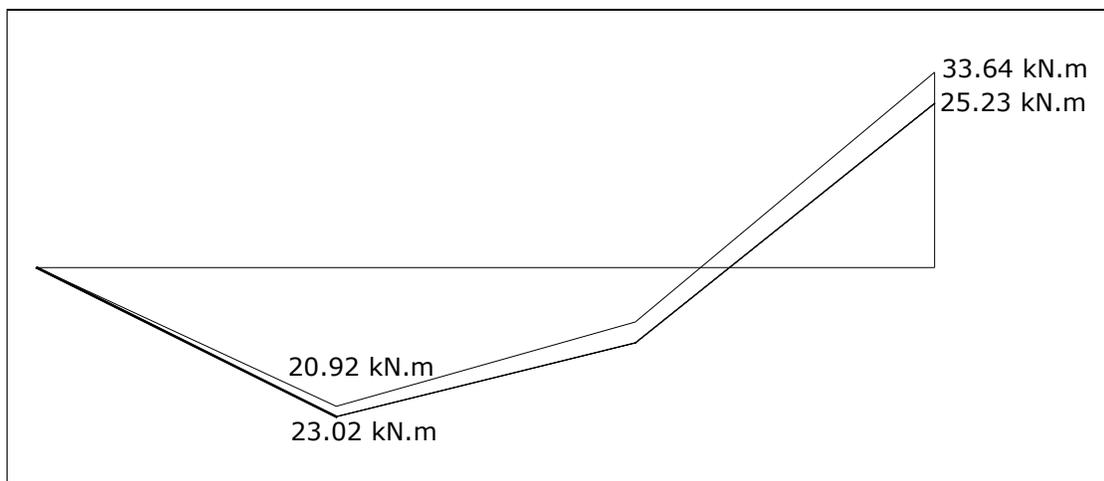


Figura 4.2 - Diagrama de momento antes e depois da redistribuição

### 4.2.3 ANÁLISE PLÁSTICA

Apesar da possibilidade de haver rotação plástica nas seções críticas positivas e negativas, como foi mostrada na seção 3.5.5, esta peça apresentou apenas rotação plástica no apoio central. Esta observação ressalta a importância das características da seção central. A Tabela 4.1 fornece os seguintes valores  $f_{su}/f_{sy} = 1.08$  e  $\epsilon_{su} = 6.45\%$  para o aço. A classificação para o aço classe A dada pelo MC-90 é  $(f_{su,e}/f_y)_k \geq 1.08$  e  $(\epsilon_{su,e})_k \geq 5\%$ . Note que esta classificação abrange o aço utilizado no experimento. Ressaltando o comentário feito por Buchaim (2001) que a curva do aço tipo A do MC-90 concorda no ramo descendente com a Curva 2 mostrada na Figura 3.10 e devido à aproximação destas curvas este aço poderá ser representado pelo comportamento da Curva 2 (demais aços). Mas como este aço possui características intermediárias entre os dois aços CA50 e CA60, Tabela 2.1, esta viga será estudada também através da Curva 1.

Primeiramente, foi realizada uma análise plástica utilizando a relação momento-curvatura elasto-plástico perfeito bilinear. Nesse estudo, o algoritmo apresentou uma solução que foi limitada pela capacidade de rotação plástica na seção central, com  $\theta_{req}^{(-)} = \theta_{adm}^{(-)} = 9.44 \cdot 10^{-3}$  rad e  $\theta_{req}^{(+)} = \theta_{adm}^{(+)} = 20.69 \cdot 10^{-3}$  para a

curva 1 e 2 respectivamente. A tabela 4.5 mostra os resultados relevantes da análise. Posteriormente, foram substituídas as curvas da capacidade de rotação admissível da norma brasileira pela curva do MC-90 para o aço tipo A. Esta análise é denominada Análise Plástica Bilinear\*. Por fim, foi introduzida nesta última análise a curva tensão-deformação (parábola-retângulo) para o concreto fornecida pelo EC2. Foi utilizada a equação (2.13), mas com os valores de  $\varepsilon_{c2}$  e  $\varepsilon_{cu2}$  calculados pelas equações (3.23) e (3.24) respectivamente, Análise Plástica Bilinear\*\*. As rotações plásticas da rótula, no apoio intermediário, encontradas analiticamente foram  $\theta_{req}^{(-)} = \theta_{adm}^{(-)} = 15.59 \cdot 10^{-3}$  rad para as duas últimas análises (Bilinear\* e Bilinear\*\*).

Já a fornecida experimentalmente foi  $\theta_{exp}^{(-)} = 15.00 \cdot 10^{-3}$  rad.

*Tabela 4.5 - Comparação entre a análise experimental e a análise plástica - bilinear (laje)*

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (KN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Plástica (Bilinear Curva1)	43.22	0.74	14.10	25.23	19.02	tp3
Análise Plástica (Bilinear Curva2)	51.76	0.88	26.22	25.23	23.28	tp3
Análise Plástica (Bilinear*)	47.87	0.81	21.15	25.23	21.34	tp3
Análise Plástica (Bilinear**)	47.87	0.81	21.15	25.23	21.34	tp2
Análise Experimental	58.80	1.00	28.40	27.30	26.10	tp2

A partir da carga última encontrada  $P_u$ , é calculado o diagrama de momentos fletores, através da análise linear elástica, e comparado ao diagrama obtido pela análise plástica, Figura 4.3.

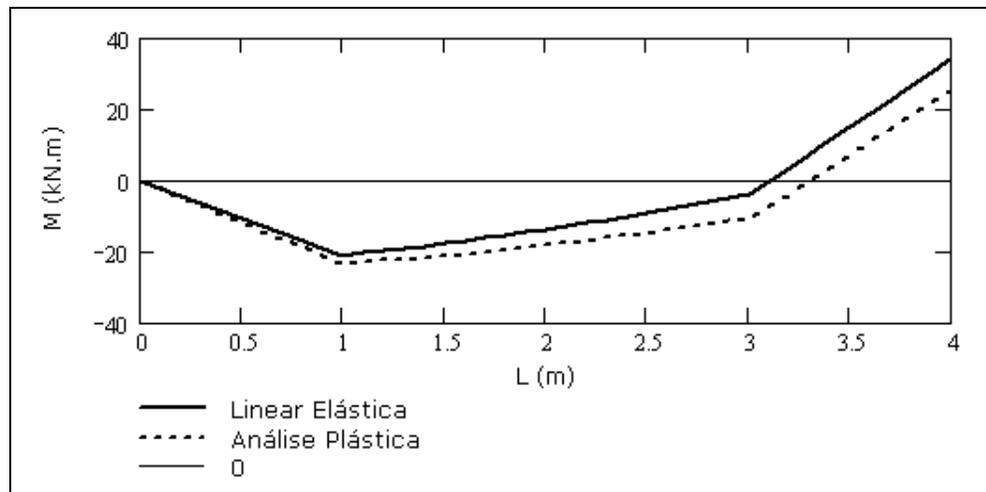


Figura 4.3 - Redistribuição de momento fletor. Análise Plástica (bilinear)

A análise plástica já se mostrou mais acurada do que as análises anteriores. O momento negativo não foi atingido devido à diferença entre o momento resistente, calculado pelo modelo de cálculo da NBR-6118 (2003), e o encontrado de forma experimental. Mas é notado que o valor calculado é a favor da segurança. Já o momento positivo não pode chegar ao seu valor resistente devido à falta de capacidade de rotação plástica.

Este estudo refere-se a uma laje. Neste tipo de estrutura as seções fissuradas apresentam-se mais concentradas nas rótulas plásticas, e, deste modo, muitas de suas seções não estão totalmente fissuradas, fazendo com que a utilização da relação momento-curvatura trilinear apresente um melhor resultado como mostra o quadro a seguir e a Figura 4.4.

Utilizam-se as mesmas observações anteriores (Bilinear\* e Bilinear\*\*) para as análises Trilinear\* e Trilinear\*\*

Tabela 4.6 - Comparação entre a análise experimental e a análise plástica - trilinear (laje)

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (kN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Plástica (Trilinear Curva1)	48.05	0.82	21.40	25.23	21.43	tp3
Análise Plástica (Trilinear Curva 2)	55.26	0.94	30.26	25.23	25.04	tp3
Análise Plástica (Trilinear*)	52.29	0.89	26.85	25.23	23.54	tp3
Análise Plástica (Trilinear**)	52.28	0.89	26.85	25.23	23.54	tp3
Análise Experimental	58.80	1.00	28.40	27.30	26.10	tp2

Do mesmo modo, a limitação da capacidade de rotação provocou rotações semelhantes  $\theta_{req}^{(-)} = \theta_{adm}^{(-)} = 20.23 \cdot 10^{-3}$  rad na análise trilinear.

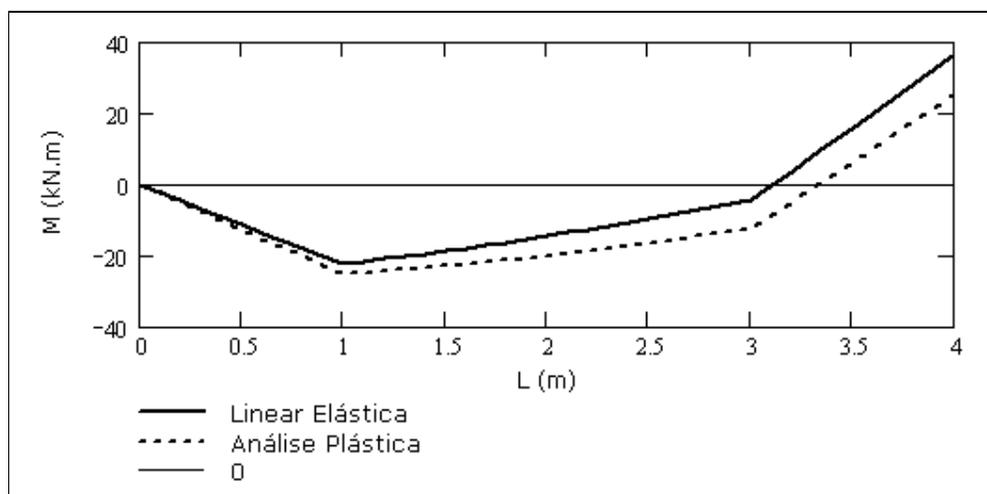


Figura 4.4 - Redistribuição de momento fletor. Análise Plástica (Trilinear)

Caso os momentos resistentes achados na análise experimental fossem adotados na Análise Plástica Trilinear, seriam encontrados os valores da Tabela 4.7. Denominada análise hipotética. Isto mostra que boa parte da diferença encontrada entre estas análises provém da diferença entre os valores obtidos para os momentos

resistentes teóricos e experimentais, e em grande parte devido a não consideração do endurecimento do aço.

*Tabela 4.7 - Comparação entre a análise experimental e a análise plástica - hipotética (laje)*

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (kN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Plástica (hipotética)	58.35	0.99	28.07	27.30	26.06	tp3
Análise Experimental	58.80	1.00	28.40	27.30	26.10	tp2

#### 4.2.4 ANÁLISE NÃO-LINEAR

A última análise a ser comparada é a análise não-linear. Primeiro é mostrado os resultados desta análise, utilizando as curvas propostas pela NBR-6118 (2003) para o concreto, equação (2.13), e a equação (2.9) para o aço. Também, é admitido que a seção rompe quando o amadura mais tracionada atinge a deformação  $\epsilon_{su}=10\%$ , ou quando a fibra mais comprimida chegue à deformação última assumida para o concreto, 3.5 ‰. Inicialmente, a contribuição do concreto entre fissuras será negligenciada.

Como a peça é simétrica, foi estudada com se tivesse um vão (apoiado-engastado). A viga foi discretizada em quarenta elementos o que significam quarenta e uma seções (nós). Foram admitidos três tipos de seções: sec1 – só com armação positiva; sec2 – com armação de tração e de compressão e sec3 – com armação negativa, mostradas na Figura 4.1.

A Figura 4.5 mostra as relações momento-curvatura para os três tipos de seções, os quais apresentaram ruptura por ruptura do aço tracionado. Em detalhe é mostrado o momento-curvatura para sec3, Figura 4.6. Admitindo o limite estabelecido pela NBR-6118 (2003) para  $\epsilon_{su}$ , podem-se encontrar resultados bastante conservadores, porque esta deformação é encontrada ainda no início do

comportamento plástico, para uma curvatura  $\phi=69$  rad/km, ver Figura 4.6 e Figura 4.7a. A Tabela 4.8 mostra que estes resultados são mais próximos da análise linear do que da análise experimental.

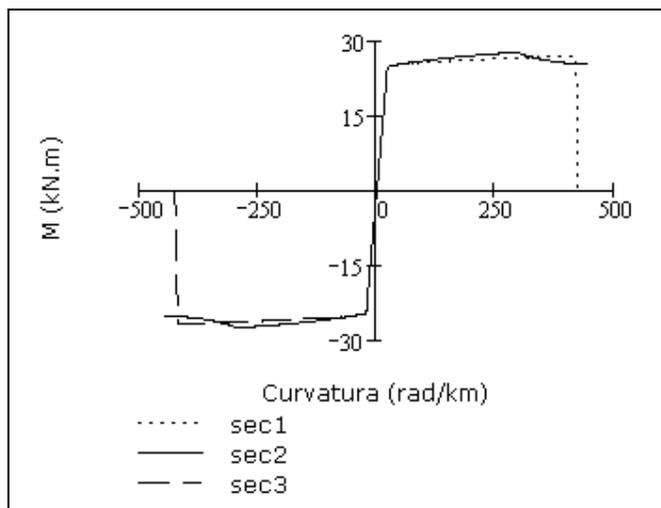


Figura 4.5 – Momento-curvatura das seções: sec1, sec2 e sec3

A deformação no concreto, ainda, encontra-se em níveis baixos, próximo de 0.96‰. O limite estabelecido para deformação no aço e até mesmo no concreto não influenciam muito na determinação dos esforços resistentes no ELU, tanto na ruptura convencional por deformação plástica excessiva como, também, na ruptura convencional por encurtamento limite do concreto. Mas é notável a influência destes limites numa análise não-linear, já que a deformação última influencia bastante na curvatura última desenvolvida numa seção que por sua vez é determinante para o comportamento plástico da estrutura.

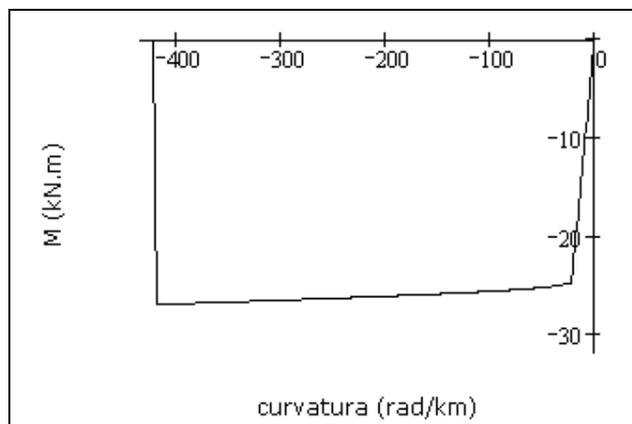


Figura 4.6 - Detalhe do momento-curvatura da sec3

Note uma pequena variação de momento para uma grande variação de deformação, representada pela curvatura, Figura 4.6.

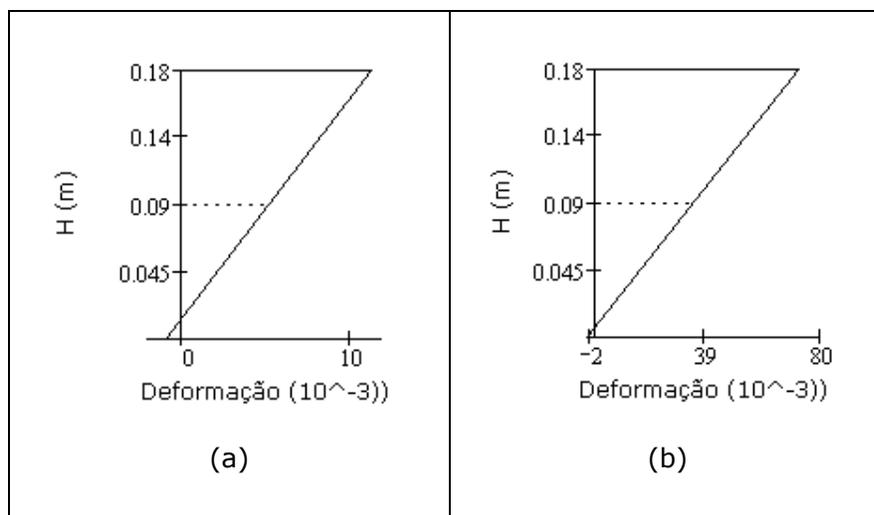


Figura 4.7 - Distribuição de deformação no apoio central

Tabela 4.8 - Comparação entre a análise experimental e a análise não-linear -NBR (laje)

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (kN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Não-Linear (NBR)	39.15	0.67	5.01	25.60	16.89	tp4
Análise Experimental	58.80	1.00	28.40	27.30	26.10	tp2

A deformação no aço deve ser levada até o seu valor último determinado nos experimentos  $\varepsilon_{su}=64.50\%$  para que a análise apresente-se de forma realista. A Figura 4.6 mostra uma curvatura  $\varphi_{lim}=419$  rad/km na  $\varepsilon_{su}$ , ver Figura 4.7b. Estes resultados são mostrados na Tabela 4.9.

*Tabela 4.9 - Comparação entre a análise experimental e a análise não-linear - NBR\* (laje)*

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (kN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Não-Linear (NBR*)	57.28	0.97	27.63	26.88	25.63	tp2
Análise Experimental	58.80	1.00	28.40	27.30	26.10	tp2

Os resultados foram mais acurados do que os obtidos pela análise plástica. Esta análise é denominada de Análise Não-Linear (NBR\*). O resultado mais próximo da carga última, obtida pela análise plástica foi  $P_u=0.95P_{exp}$ , já nesta análise foi  $P_u=0.97P_{exp}$ . Note que houve uma boa concordância entre os resultados teóricos e experimentais.

Carregando a viga com o pseudo-carregamento, obtido pela distribuição de curvatura, pode-se calcular o deslocamento vertical e a rotação ao longo da viga, fornecidos pelo momento fletor e esforço cortante, respectivamente. Isso é possível, integrando a curvatura ao longo do comprimento da peça. Mas como não está sendo objeto de estudo neste trabalho, não será apresentado.

Em seguida, a análise não-linear é realizada, utilizando as equações (2.10) para o aço e (2.15) a (2.19) para o concreto. Será incluída agora a contribuição entre fissuras do concreto. Também será usado o controle pós-fissuração exposto na seção 2.5.2. As deformações limites para o aço e para o concreto não serão mais as estabelecidas pela NBR-6118 (2003). Para o aço é admitida a deformação última encontrada nos ensaios e para o concreto a deformação máxima  $\varepsilon_{cu}=5\%$ , como já

foi discutido. Mas como as seções estudadas nesta laje rompem com a deformação última do aço, o  $\varepsilon_{cu}$  não será tão influente nas respostas.

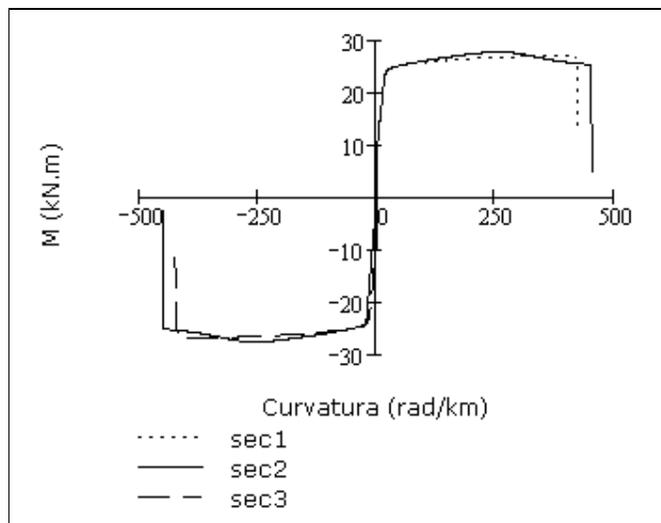


Figura 4.8 - Momento-curvatura das seções: sec1, sec2 e sec3

Tabela 4.10 - Comparação entre a análise experimental e a análise não-linear – Popovics (laje)

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (KN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Não-Linear (Popovics <sup>1</sup> )	51.18	0.88	27.49	26.89	25.58	tp2
Análise Não-Linear (Popovics <sup>2</sup> )	58.39	0.99	28.80	26.89	26.19	tp2
Análise Experimental	58.80	1.00	28.40	27.30	26.10	tp2

O primeiro resultado, mostrado na tabela, acima não utiliza a contribuição do concreto entre fissuras, já o segundo considera. Houve uma diferença de 11% na no valor da carga última.

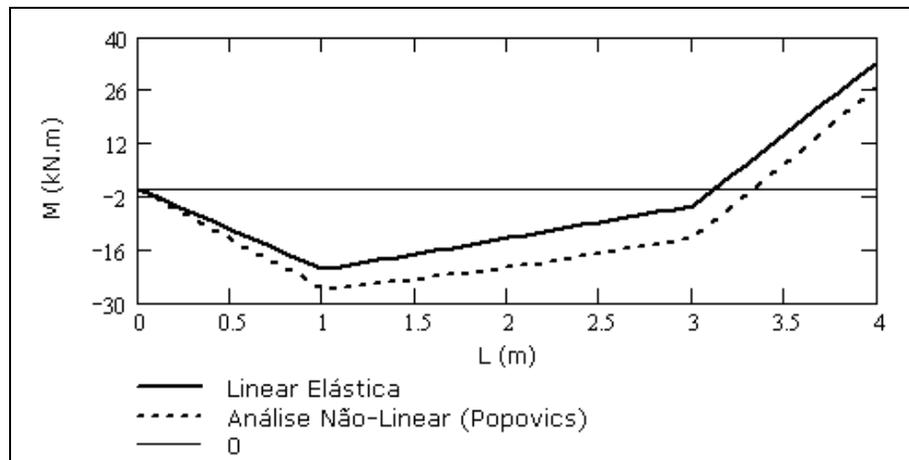


Figura 4.9 - Redistribuição de momento fletor. Análise Não-Linear (Popovics<sup>2</sup>)

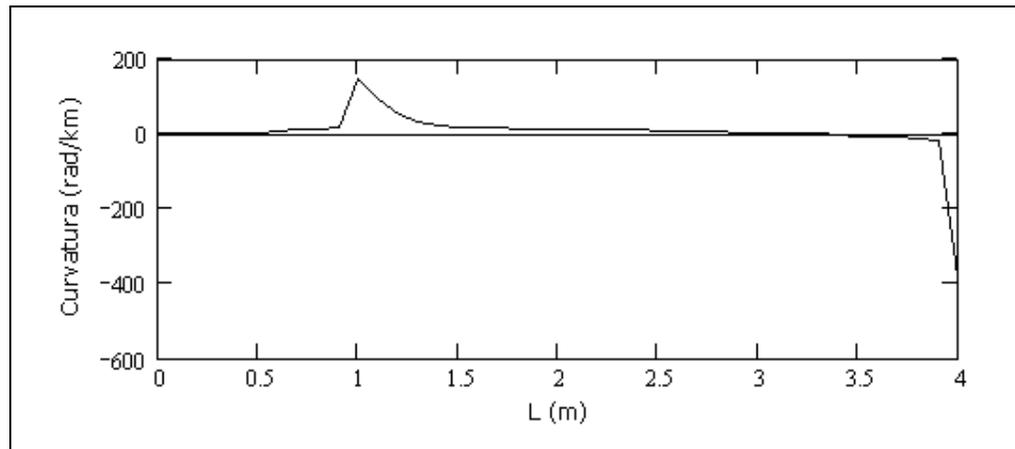


Figura 4.10 - Distribuição de curvatura no comprimento da peça

A Figura 4.10 mostra a distribuição de curvatura ao longo do comprimento de um vão da peça. Existe concentração de curvaturas nos pontos críticos (momento máximo positivo e apoio central).

### 4.3 ESTUDO 2 – VIGA CONTÍNUA

A segunda comparação será com o trabalho de Carmo (2004), ver também Carmo;Lopes (2002). Este programa experimental foi dividido em seis séries de ensaios, objetivando estudar a influência de diversos fatores na redistribuição de esforços e na capacidade de rotação de vigas contínuas em concreto armado. A

primeira série estudou a influência da variação da taxa de armadura longitudinal de tração e será utilizada para comparações.

As vigas foram armadas, partindo do pressuposto da existência de uma redistribuição de esforços previstas em normas. Deste modo foram introduzidas armaduras longitudinais de tração na zona de momentos positivos e negativos (apoio central). Algumas vigas foram armadas com armaduras ainda maiores que o previsto teoricamente para possibilitar uma redistribuição maior que a teórica.

A Figura 4.11 mostra o esquema geral do ensaio com um corte longitudinal das vigas.

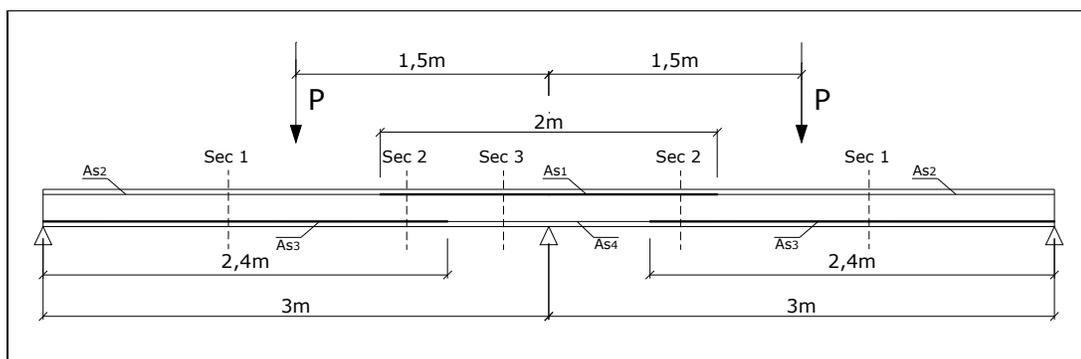


Figura 4.11 – Informação sobre as vigas da 1ª série de ensaio

Os índices 0.7 e 3.8, na Tabela 4.11, significam a taxa de armadura longitudinal de tração na seção do apoio central.

Tabela 4.11 – Definição da área das armaduras das vigas 1ª série

Viga	$A_{S1}$ (mm <sup>2</sup> )	$A_{S2}$ (mm <sup>2</sup> )	$A_{S3}$ (mm <sup>2</sup> )	$A_{S4}$ (mm <sup>2</sup> )
V1-0.7	157	157	383	157
V1-1.4	314	157	383	157
V1-2.1	452	226	559	157
V1-2.9	628	402	854	226
V1-3.8	804	402	854	226
V1-5.0	1030	402	854	226

As vigas foram armadas com estribos,  $\varnothing 8c10$ , para evitar a ruptura por esforço cortante. Dentre as vigas ensaiadas na 1ª série foram escolhidas a V1-0.7 e a V1-3.8. A primeira foi escolhida por apresentar a maior capacidade de redistribuição com menor coeficiente de redistribuição teórico  $\delta_{teórico}$ , calculado pelo autor para uma situação hipotética de não haver limitação de capacidade de rotação plástica (análise plástica ilimitada). Já a segunda viga foi escolhida por possuir um valor alto para  $\delta_{teórico}$  e desta forma uma pequena capacidade de redistribuição teoricamente. Os valores apresentados foram  $\delta_{teórico,1}=0.49$  e  $\delta_{teórico,2}=0.87$ .

Serão utilizadas as resistências médias do concreto encontradas no dia do ensaio para cada viga. A viga V1-0.7 foi ensaiada com 34 dias e  $f_{cm}=76.4$  MPa. Já a viga V1-3.8 foi ensaiada com 90 dias e  $f_{cm}=84$  MPa.

As armaduras longitudinais utilizadas, possuíam diâmetros de 10, 12, 16 e 20 mm. A Figura 4.12 mostra em corte o detalhe dos tipos seções transversais utilizadas nas análises. As barras na segunda camada foram colocadas face a face com as barras da primeira camada.

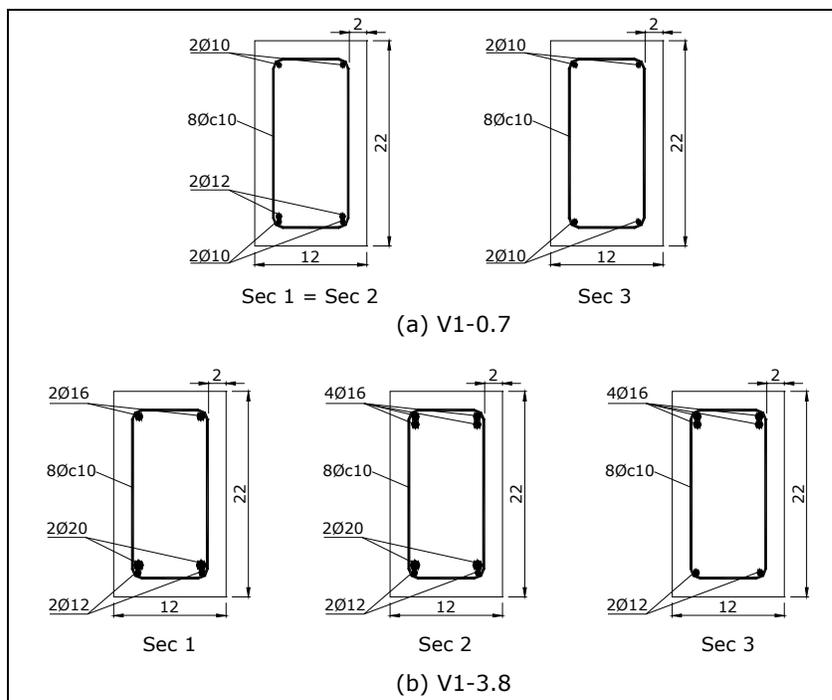


Figura 4.12 – Seção transversal dos tipos de seções das vigas V1-0.7 e V1-3.8

A armadura utilizada foi: barras nervuradas laminadas a quente, de alta aderência, da classe A500NR (classificação segundo REBAP – regulamento português). As características mecânicas são mostradas na Tabela 4.12.

Tabela 4.12 - Características mecânicas do aço

Designação	$E_{aço}$ (GPa)	$f_{syk}^3$ (MPa)	$f_{suk}$ (MPa)	$\epsilon_{suk}^4$ (%)
A500NR	200	500	550	12

O autor apresentou uma tabela, mostrando os resultados dos ensaios de tração das armaduras:  $\varnothing 6$ ,  $\varnothing 8$ ,  $\varnothing 10$ ,  $\varnothing 12$ ,  $\varnothing 16$ ,  $\varnothing 20$ . A partir dos resultados dos ensaios foi calculada uma média ponderada para determinar  $f_{sy}$  e  $f_{su}$ . A ponderação foi a área da barra de aço, o que resultou em  $f_{sy} = 575$  MPa e  $f_{su} = 675$  MPa. Como não se calculou

<sup>3</sup> Tensão limite convencional de proporcionalidade a 0.2%.

<sup>4</sup> Comprimento de referência inicial igual a  $5\varnothing$ .

experimentalmente a deformação última das barras, utilizou-se na análise o valor indicado pela especificação A500NR,  $\epsilon_{su}=12\%$ . Estes valores indicam um aço de elevada ductilidade, classificando-se, desta forma, em classe S para o MC-90, classe C para o EC2 e para a norma brasileira como aço CA50.

#### 4.3.1 VIGA V1-0.7

Novamente, foram usadas as equações (3.25) e (3.26) para calcular os momentos resistentes  $M_R^{(+)}=36.42$  kN.m e  $M_R^{(-)}=16.49$  kN.m e serão utilizados nas três primeiras análises. Não será considerado o peso próprio da viga nem o perfil metálico utilizado na aplicação da carga, pois o autor da análise experimental iniciou as leituras com o valor zero nos instrumentos. As taxas de armação foram para as seções críticas positiva e negativa ( $\rho=1.77\%$  e  $\rho^l=0.7\%$ ) e ( $\rho=0.70\%$  e  $\rho^l=0.7\%$ ) respectivamente, com  $\rho=As/b.d$ .

##### 4.3.1.1 ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA

O momento no apoio central é governado por:  $M^{(-)}(\lambda)=0.56\lambda P$  onde fator 0.56 é a constante achada para uma carga concentrada inicial  $P=1.0$  kN. Igualando os momentos  $M^{(-)}(\lambda)=M_R^{(-)}$  são achados  $P_u=29.45$  kN e  $M^{(-)}=16.49$  kN. O momento no meio do vão é  $M^{(+)}=0.47\lambda P$ , obtendo-se  $M^{(+)}=13.84$  kN.m. O quadro abaixo mostra a comparação com os resultados experimentais.

*Tabela 4.13 - Comparação entre a análise experimental e a análise linear (V1-0.7)*

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (kN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Linear	29.45	0.51	-	16.49	13.84	tp1
Análise Experimental	58.25	1.00	39.73	19.66	33.00	tp5

#### 4.3.1.2 ANÁLISE LINEAR COM REDISTRIBUIÇÃO

A profundidade relativa da linha neutra no ELU foi calculada, e foi encontrado o valor  $x/d=0.1304$  na seção central, o qual obedece ao limite da equação (3.1b). O valor do coeficiente de redistribuição, calculado através da equação (3.2b),  $\delta=0.723$  é menor que o limite inferior 0.75, então é adotado  $\delta=0.75$ .

A carga última pode ser calculada igualando  $(0.56\lambda P)\delta=M_R^{(-)}$ , encontrando  $P_u=39.26$  kN para seção crítica no apoio central. Pela análise da seção no meio do vão  $0.47\lambda P+0.50\Delta M=M_R^{(+)}$  o que fornece  $P_u=67.44$  kN.  $P_u=39.26$  será então adotado. Entretanto  $M^{(-)}=16.49$  kN.m e  $M^{(+)}=21.20$  kN.m

*Tabela 4.14 - Comparação entre a análise experimental e a análise linear com redistribuição (V1-0.7)*

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (kN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Linear com Redistribuição	39.26	0.67	25	16.49	21.20	tp1
Análise Experimental	58.25	1.00	39.73	19.66	33.00	tp5

#### 4.3.1.3 ANÁLISE PLÁSTICA

As características do aço utilizado mostraram ser um aço dúctil. Novamente, será apresentada a análise Bilinear, utilizando dois tipos de curva para capacidade de rotação plástica (curva 2, Figura 3.10 e a curva do aço classe S do MC-90). Ainda, utilizando a curva do MC-90 será acrescentado novamente a mudança das deformações previstas no EC2, para concretos com resistências maiores que 50 MPa, na tensão-deformação parábola-retângulo para o concreto.

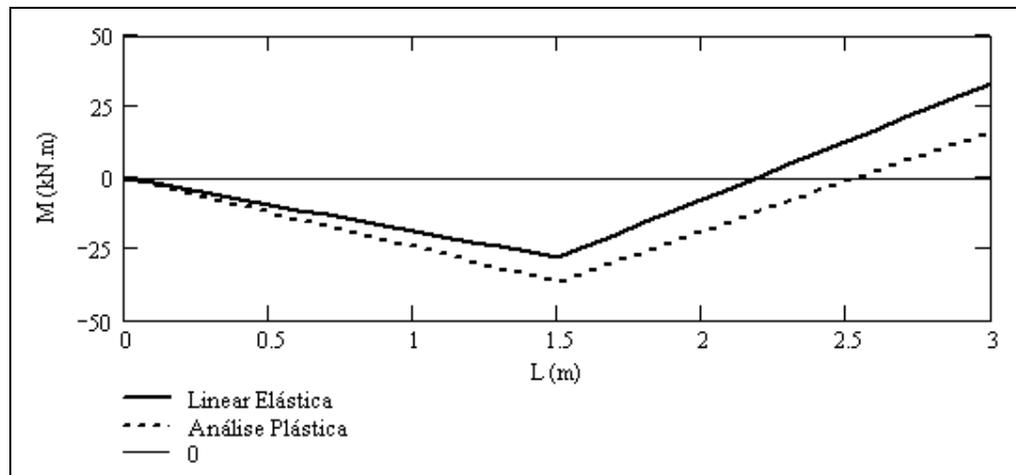


Figura 4.13 - Redistribuição de momento fletor. Análise Plástica (Bilinear)

A Figura acima mostra a redistribuição do momento fletor, obtida pela análise plástica Bilinear.

Do estudo do equilíbrio da viga, depreende-se que os resultados experimentais apresentam inconsistência de 2%. Portanto o erro de 2% contrário à segurança está dentro da margem de precisão do experimento.

Tabela 4.15 - Comparação entre a análise experimental e a análise plástica Bilinear - (Viga 0.7)

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (KN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Plástica (Bilinear)	59.28	1.02	50.33	16.49	36.21	tp3
Análise Plástica (Bilinear*)	59.55	1.02	50.55	16.49	36.42	tp5
Análise Plástica (Bilinear**)	59.52	1.02	50.53	16.49	36.39	tp5
Análise Experimental	58.25	1.00	39.73	19.66	33.00	tp5

Tabela 4.16 - Comparação entre a análise experimental e a análise plástica Trilinear - (Viga 0.7)

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (KN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Plástica (Trilinear)	53.51	0.92	44.97	16.49	31.89	tp3
Análise Plástica (Trilinear*)	57.64	0.99	48.92	16.49	34.99	tp3
Análise Plástica (Trilinear**)	57.64	0.99	48.92	16.49	34.99	tp3
Análise Experimental	58.25	1.00	39.73	19.66	33.00	tp5

A curva de capacidade de rotação plástica fornecida pelo MC-90, mesmo, sendo apresentada no código como conservadora, proporcionou ductilidade suficiente à rótula plástica (Tabela 4.15) para a formação do mecanismo igualmente como no resultado experimental.

#### 4.3.1.4 ANÁLISE NÃO-LINEAR

Como resultado de experimentação numérica, verificou-se que seguimentos de 10cm era a discretização mais apropriada para o problema. A Figura 4.12a mostra os dois tipos de seções para esta viga. A Tabela 4.17 apresenta o resultado da análise não-linear, obtida para as condições da NBR 6118 (2003). Esta análise foi limitada pela deformação última do concreto  $\epsilon_{cu2}=3.5\%$ .

Tabela 4.17 - Comparação entre a análise experimental e a análise não-linear - NBR (V1-0.7)

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (KN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Não-Linear (NBR)	52.58	0.90	39.75	17.74	30.67	tp6
Análise Experimental	58.25	1.00	39.73	19.66	33.00	tp5

Em seguida, é mostrado na Tabela 4.18 o resultado da análise não-linear (Popovics), mantendo as mesmas observações da seção 4.2.4 para esta análise. E foi limitada pela deformação no concreto em 5‰.

Diferentemente do resultado obtido na análise da laje, a contribuição do concreto à tração não proporcionou um aumento considerável no valor da carga última, como mostra o resultado da análise Popovics<sup>2</sup> nesta tabela.

*Tabela 4.18 - Comparação entre a análise experimental e a análise não-linear - Popovics (V1-0.7)*

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (kN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Não-Linear (Popovics <sup>1</sup> )	50.62	0.87	40.81	16.78	29.58	tp6
Análise Não-Linear (Popovics <sup>2</sup> )	51.18	0.88	41.46	16.78	30.00	tp6
Análise Experimental	58.25	1.00	39.73	19.66	33.00	tp5

Analisando a variação da carga última em relação a cada incremento de curvatura (ciclo externo) no algoritmo da análise não-linear, observa-se que para cada curvatura limite assumida, o valor da carga última muda, com era de se esperar. Cada curvatura limite representa um valor para deformação última do concreto. O último incremento, mostrado na Figura 4.14, representa a curvatura limite de 450 rad/km.

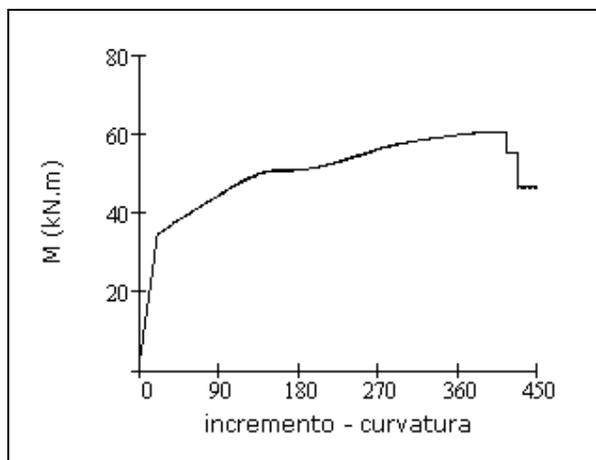


Figura 4.14 – Variação da carga com o incremento de curvatura: ciclo externo

As Figura 4.15 e 4.16 mostram as curvas momento-curvatura para a seção do centro do vão e do apoio intermediário da viga V1-0.7. Apenas, é mostrada a parte positiva para a seção com momento positivo e a parte negativa para a seção central. Mas na análise é preciso as curvas completas, já que não é conhecida a configuração final dos momentos fletores.

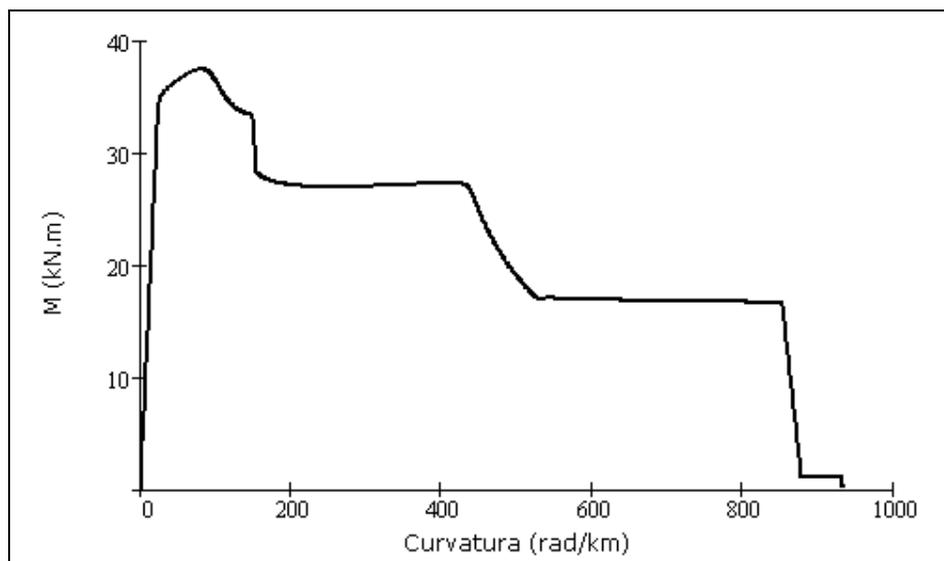


Figura 4.15 – Momento-curvatura da seção 1 – V1-0.7

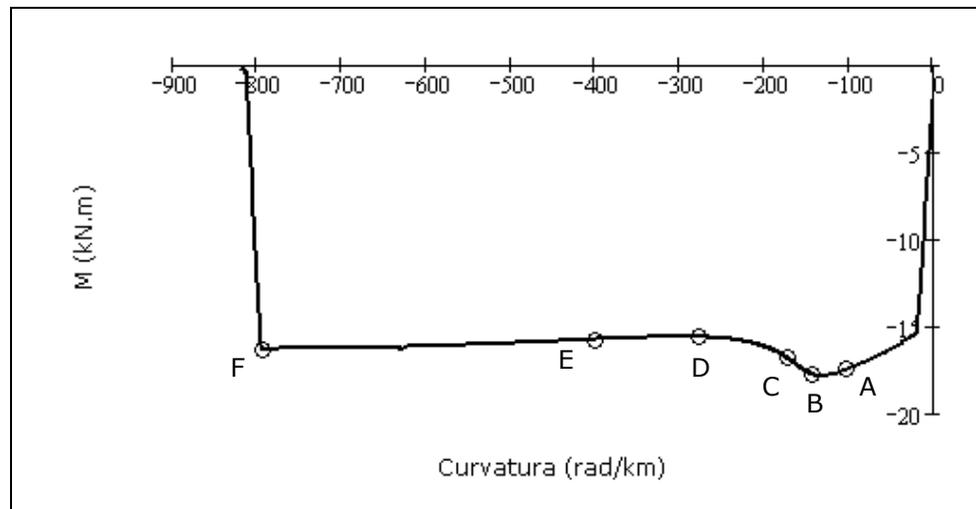


Figura 4.16 – Momento-curvatura da seção 2 – V1-0.7

Foram efetuadas algumas análises com diversas curvaturas escolhidas em função de determinadas deformações na fibra mais comprimida da seção transversal. As Tabela 4.19 e Tabela 4.20 mostram os resultados.

Tabela 4.19 - Comparação entre a análise experimental e a análise não-linear - (V1-0.7).

Análise Não-Linear	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (KN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
(Popovics <sup>A</sup> )	46.84	0.80	32.65	17.67	26.29	tp6
(Popovics <sup>B</sup> )	50.53	0.87	37.20	17.77	29.01	tp6
(Popovics <sup>C</sup> )	51.18	0.88	41.46	16.78	30.00	tp6
(Popovics <sup>D</sup> )	57.11	0.98	51.13	15.63	35.02	tp6
(Popovics <sup>E</sup> )	60.66	1.04	53.61	15.76	37.62	tp6
(Popovics <sup>F</sup> )	33.42	0.57	12.85	16.31	16.91	tp2
Análise Experimental	58.25	1.00	39.73	19.66	33.00	tp5

O valores mostrados na tabela 4.20 para  $\epsilon_s$  e  $f_s$  são referentes à armadura mais tracionada.

Tabela 4.20 – Características dos pontos escolhidos

Análise	$\varphi$ (rad/km)	$\varepsilon_{cu}$ (‰)	$f_c$ (MPa)	$\varepsilon_s$ (‰)	$f_s$ (MPa)
(Popovics <sup>A</sup> )	-105	-2.5	-76.00	17.04	597.7
(Popovics <sup>B</sup> )	-144	-3.5	-23.88	23.44	607.06
(Popovics <sup>C</sup> )	-175	-5.0	-1.153	27.51	612.66
(Popovics <sup>D</sup> )	-279	-10.0	0	42.23	630.94
(Popovics <sup>E</sup> )	-400	-14.78	0	60.01	648.81
(Popovics <sup>F</sup> )	-795	-28.73	0	120.0	675.00

O ponto A foi escolhido para a deformação de pico da curva tensão-deformação concreto, Figura 4.16. O ponto B possui a deformação limite da norma brasileira. Os pontos D e E foram escolhidos a partir da análise de uma curva semelhante a da Figura 4.14. Já o ponto F encontra-se na deformação última do aço  $\varepsilon_{su}=120\text{‰}$ , Figura 4.17b.

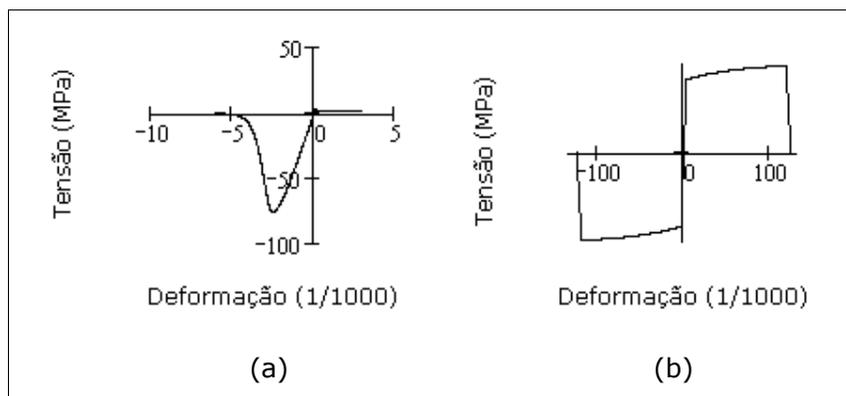


Figura 4.17 – Curvas tensão-deformação aço e concreto – V1-0.7

Existem vários fatores que influenciam na deformação última do concreto na flexão, e provavelmente, esta curva tensão-deformação do concreto não representa a realidade do ensaio, mas pode ser utilizada na falta de conhecimento da curva correta, como mostram os resultados.

Na seção 2.5.5 foi mostrado um modelo para prever a ruptura de vigas de concreto armado na flexão. As curvas momento-curvatura para as seções 1,2 e 3 obtidas utilizando este modelo, são mostradas na Figura 4.18.

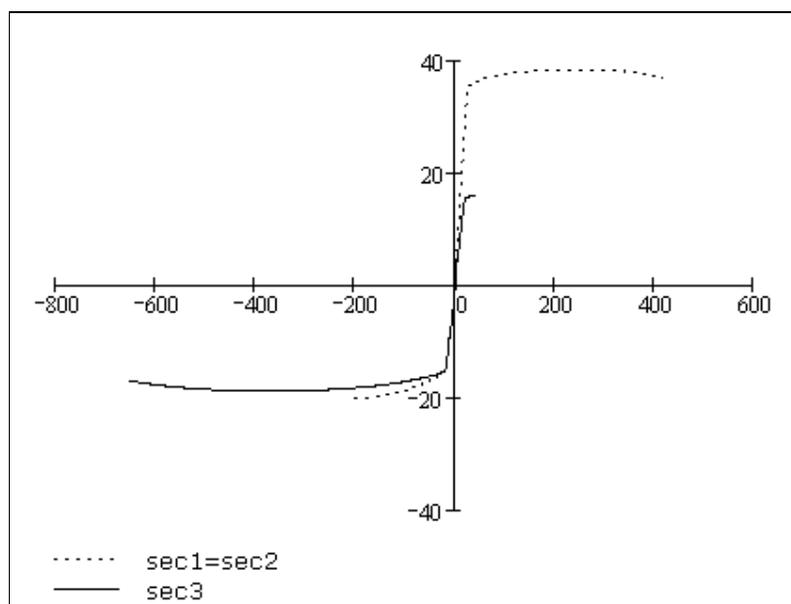


Figura 4.18 – Relação momento-curvatura para as seções 1 e 3 da viga V1-0.7

Os valores da Tabela 4.21 (Popovics/Fantilli<sup>1</sup>) mostram os resultados obtidos utilizando o modelo de ruptura de vigas de concreto armado. A curvatura última na seção chave foi  $\varphi_{lim}=650$  rad/km, achada quando esta seção perdeu o equilíbrio. O nome Popovics/Fantilli é devido à utilização das duas curvas para o concreto.

A análise quantitativa deste resultado mostra que o modelo não previu o instante de ruptura da viga. Pois, foram achados: a) índice de redistribuição aproximadamente 30% maior que o experimental; b) carga 8% maior; c) redistribuição em excesso do momento negativo para o positivo e como consequência, momento negativo menor e positivo maior, comparados aos valores experimentais.

O exemplo 1 do capítulo 2 foi mostrado na Figura 2.36 a curva momento curvatura obtida com o modelo e pontos obtidos experimentalmente. Após a

comparação com a curvatura última obtida no experimento e a do modelo, é possível afirmar que este modelo não foi eficiente para prever o instante de ruptura da peça.

Para aproveitar a relação tensão-deformação conseguida após a análise com o modelo de ruptura, será imposta novamente uma deformação máxima na fibra mais comprimida do concreto,  $\varepsilon_{cu}=5\text{‰}$ . Esta nova análise é denominada Popovics/Fantilli<sup>2</sup>.

Tabela 4.21 - Comparação entre a análise experimental e a análise não-linear - Popovics/Fantilli (V1-0.7)

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (KN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Não-Linear (Popovics/Fantilli <sup>1</sup> )	62.75	1.08	51.14	17.17	38.48	tp6
Análise Não-Linear (Popovics/Fantilli <sup>2</sup> )	58.44	1.00	43.26	18.57	34.54	tp6
Análise Experimental	58.25	1.00	39.73	19.66	33.00	tp5

Os resultados da segunda análise mostram-se bastante satisfatórios, principalmente no valor da carga última.

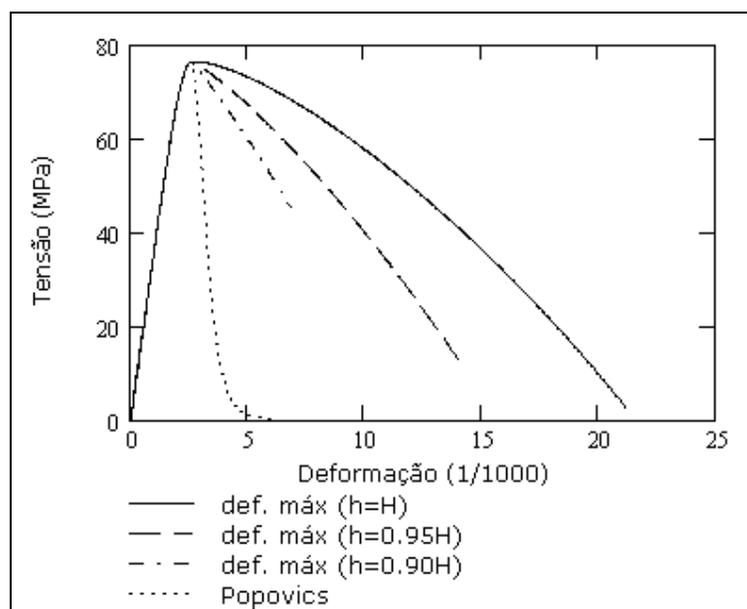


Figura 4.19 - Variação da tensão na fibra a uma altura  $h$  - Viga V1-0.7

As curvas tensão-deformação para diferentes fibras comprimidas são mostradas na Figura 4.19. Foram escolhidas fibras em cotas distintas, medidas da parte inferior da peça para cima. H representa a altura total da seção. Já a Figura 4.20 mostra a distribuição de deformação, iniciando no eixo neutro até a fibra mais comprimida, para diferentes valores de curvatura. A Figura 4.20 mostra a distribuição de tensões.

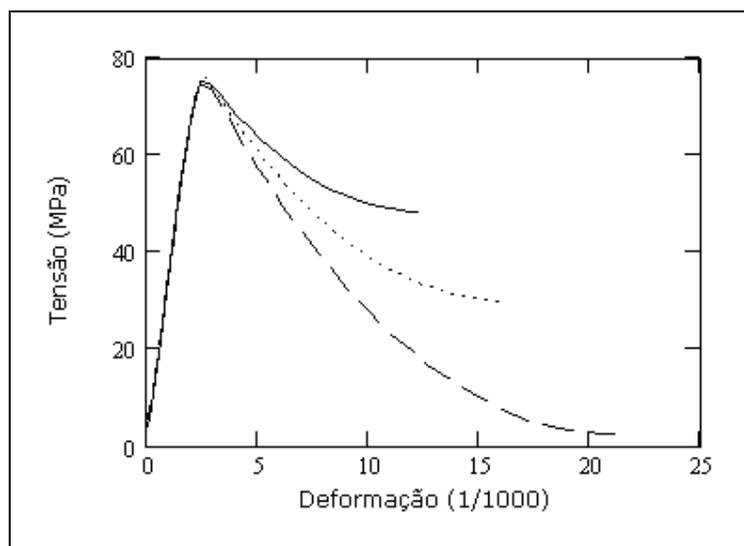


Figura 4.20 - Distribuição de tensões para diferentes curvaturas

A variação da carga para os diversos incrementos de curvaturas na primeira análise é mostrada na Figura 4.21.

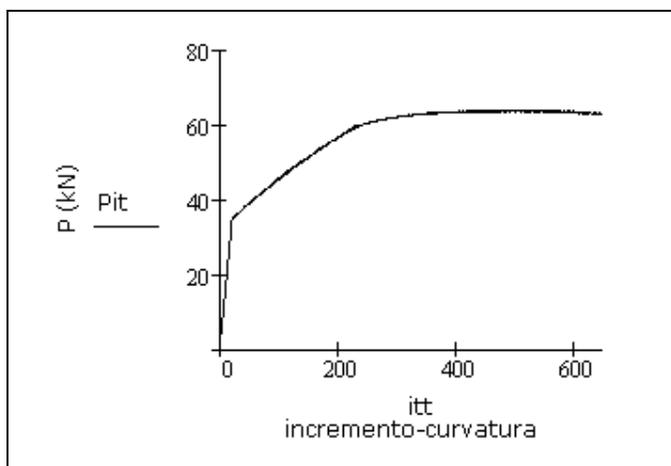


Figura 4.21 - Variação da carga com o incremento de curvatura: ciclo externo

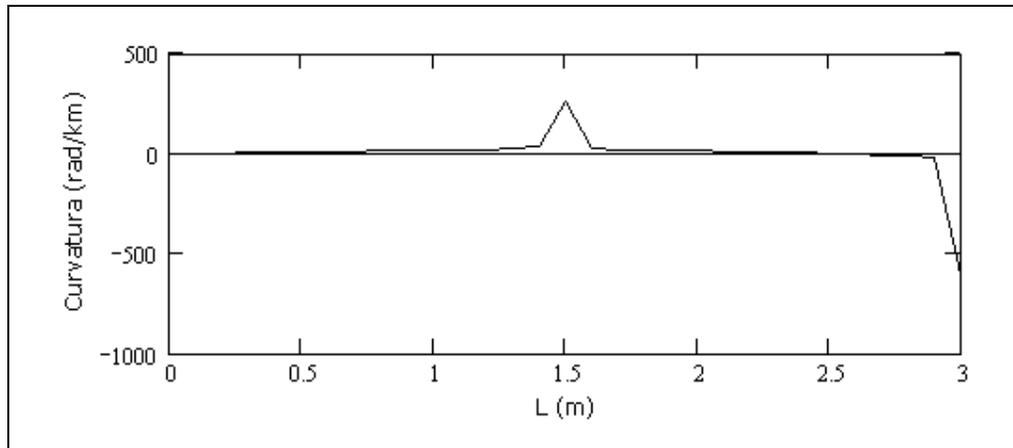


Figura 4.22 – Distribuição de curvatura no comprimento da peça

Na Figura 4.22, é apresentada a distribuição de curvatura ao longo do comprimento de um vão da peça. É notável a concentração de curvaturas nos pontos críticos (momento máximo positivo e apoio central).

#### 4.3.2 VIGA V1-3.8

As equações (3.35) e (3.26) forneceram momentos resistentes  $M_R^{(+)} = 72.60$  kN.m e  $M_R^{(-)} = 69.47$  kN.m para serem utilizados nas três primeiras análises. Novamente o peso próprio foi excluído. As taxas de armação foram para as seções críticas positiva e negativa: ( $\rho = 4.08\%$  e  $\rho^l = 1.82\%$ ) e ( $\rho = 3.80\%$  e  $\rho^l = 1.01\%$ ) respectivamente, com  $\rho = A_s/b.d$ .

##### 4.3.2.1 ANÁLISE LINEAR ELÁSTICA

Com  $P=1$  e fazendo  $M^{(-)}(\lambda) = 0.56\lambda P = M_R^{(-)}$  encontra-se  $P_u = 124.05$  kN e  $M^{(-)} = 69.47$  kN. No meio do vão é utilizado  $M^{(+)} = 0.47\lambda P$ , obtendo-se  $M^{(+)} = 58.30$  kN.m. A tabela abaixo mostra a comparação com os resultados experimentais.

Tabela 4.22 - Comparação entre a análise experimental e a análise linear (V1-3.8)

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (KN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Linear	124.05	0.82	-	69.47	58.30	tp1
Análise Experimental	145.50	1.00	7.11	75.69	69.69	tp7

Os resultados da viga V1-3.8 aproximaram-se mais da análise linear do que os outros exemplos, já que houve uma pequena redistribuição para esta viga.

#### 4.3.2.2 ANÁLISE LINEAR COM REDISTRIBUIÇÃO

A profundidade relativa da linha neutra no ELU encontrada foi  $x/d=0.3323$  na seção central, e é mais próxima do limite da equação (3.1b), deste modo, mostra-se menos dúctil do que a viga V1-0.7. O valor do coeficiente de redistribuição calculado através da equação (3.2b)  $\delta=0.975$  é maior que o limite inferior 0.75, então ele é adotado,  $\delta=0.975$ .

A carga última encontrada igualando  $(0.56\lambda P)\delta=M_R^{(-)}$  foi  $P_u=127.23$  kN para seção crítica no apoio central. A análise da seção no meio do vão  $0.47\lambda P+0.50\Delta M=M_R^{(+)}$  fornece  $P_u=152.20$  kN. O primeiro valor é adotado. Os momentos são  $M^{(+)}=60.69$  kN.m e  $M^{(-)}=69.47$  kN.m.

Tabela 4.23 - Comparação entre a análise experimental e a análise linear com redistribuição (V1-3.8).

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (KN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Linear com Redistribuição	127.23	0.87	2.5	69.47	60.69	tp1
Análise Experimental	145.50	1.00	7.11	75.69	69.69	tp7

### 4.3.2.3 ANÁLISE PLÁSTICA

As características do aço utilizado, mostraram ser um aço dúctil. Novamente será apresentada a análise Bilinear, utilizando dois tipos de curva para capacidade de rotação plástica (curva 2, Figura 3.10 e a curva do aço classe S do MC-90). Ainda, utilizando a curva do MC-90 será acrescentado, novamente, a mudança das deformações previstas no EC2 para concretos com resistências maiores que 50 MPa na tensão-deformação parábola-retângulo para o concreto.

A seção crítica possui profundidade relativa do eixo neutro com valor no ramo descendente das curvas de capacidade de rotação plástica, a mudança nos valores das deformações  $\varepsilon_{c2} = 2.534 \text{ ‰}$  e  $\varepsilon_{cu2} = 2.601 \text{ ‰}$  prevista pelo EC2 provocaram um aumento de  $x/d = 0.3323$  para  $x/d = 0.3729$  e isso explica a diminuição da carga última calculada, utilizando estas deformações, Tabela 4.24 e Tabela 4.25.

*Tabela 4.24 - Comparação entre a análise experimental e a análise plástica Bilinear - (Viga 3.8).*

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (KN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Plástica (Bilinear)	143.11	0.98	13.31	69.47	72.60	tp5
Análise Plástica (Bilinear*)	143.11	0.98	13.31	69.47	72.60	tp5
Análise Plástica (Bilinear**)	141.98	0.98	13.34	68.90	72.04	tp5
Análise Experimental	145.50	1.00	7.11	75.69	69.69	tp7

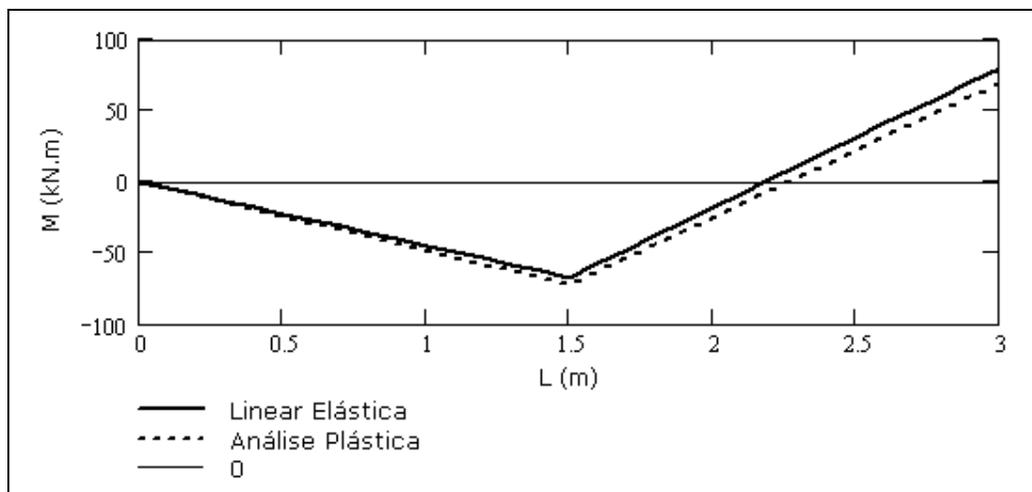


Figura 4.23 - Redistribuição de momento fletor. Análise Plástica (Bilinear)

Como foi previsto anteriormente, através do cálculo do coeficiente de redistribuição calculado pela análise plástica com ductilidade ilimitada, a viga V1-3.8 mostra uma menor redistribuição do que a viga V1-0.7.

Tabela 4.25 - Comparação entre a análise experimental e a análise plástica Trilinear - (Viga 3.8)

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (KN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Plástica (Trilinear)	132.04	0.91	6.05	69.47	64.29	tp3
Análise Plástica (Trilinear*)	142.17	0.98	12.74	69.47	71.89	tp3
Análise Plástica (Trilinear**)	135.08	0.93	8.87	68.90	66.81	tp3
Análise Experimental	145.50	1.00	7.11	75.69	69.69	tp7

#### 4.3.2.4 ANÁLISE NÃO-LINEAR

A Tabela 4.26 mostra o resultado da análise não-linear obtida para as condições da NBR 6118 (2003). Esta análise foi novamente limitada pela deformação

última do concreto  $\varepsilon_{cu2}=3.5\%$  na relação tensão-deformação parábola retângulo para o concreto.

*Tabela 4.26 - Comparação entre a análise experimental e a análise não-linear - NBR (V1-3.8)*

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (KN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Não-Linear (NBR)	143.07	0.98	5.03	71.31	64.90	tp6
Análise Experimental	145.50	1.00	7.11	75.69	69.69	tp7

Continuando com o raciocínio, foi introduzida a curva para o concreto, Popovics, e foi encontrada uma carga de ruptura menor que na análise anterior. Uma explicação para este resultado seria que a deformação última tomada para o concreto  $\varepsilon_{cu}=5\%$  seria maior do que a real, já que com o uso de uma deformação limite menor  $\varepsilon_{cu}=3.5\%$  nesta mesma análise, levaria a uma carga de ruptura maior. Outra explicação seria o fato da curva parábola-retângulo, neste caso, está representando melhor as variáveis que envolvem a ruptura desta seção, Figura 4.25.

*Tabela 4.27 - Comparação entre a análise experimental e a análise não-linear - Popovics (V1-3.8)*

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (KN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Não-Linear (Popovics <sup>1</sup> )	121.50	0.84	5.64	64.20	59.02	tp6
Análise Não-Linear (Popovics <sup>2</sup> )	122.09	0.84	6.10	64.20	59.47	tp6
Análise Experimental	145.50	1.00	7.11	75.69	69.69	tp7

Novamente, a análise com a contribuição do concreto à tração, popovics<sup>2</sup>, não contribuiu de forma significativa no resultado da análise. Nesta viga este fato foi ainda mais acentuado por possuir mais armadura tracionada.

Tabela 4.28 - Comparação entre a análise experimental e a análise não-linear - Popovics/Fantilli (V1-3.8)

Análise Não-Linear	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (KN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
(Popovics/Fantilli <sup>1</sup> )	145.99	1.00	12.91	71.2	73.89	tp6
(Popovics/Fantilli <sup>2</sup> )	140.79	0.97	8.12	72.45	69.37	tp6
Análise Experimental	145.50	1.00	7.11	75.69	69.69	tp7

As observações da Tabela 4.21 são assumidas para a Tabela 4.28.

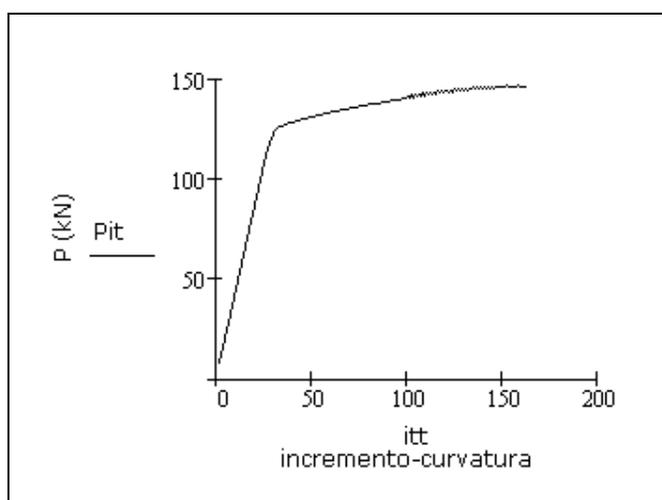


Figura 4.24 - Variação da carga com o incremento de curvatura: ciclo externo

O aumento da carga com o incremento de curvatura do ciclo externo é mostrado na Figura 4.24. As relações tensão-deformação obtidas são mostradas na Figura 4.25.

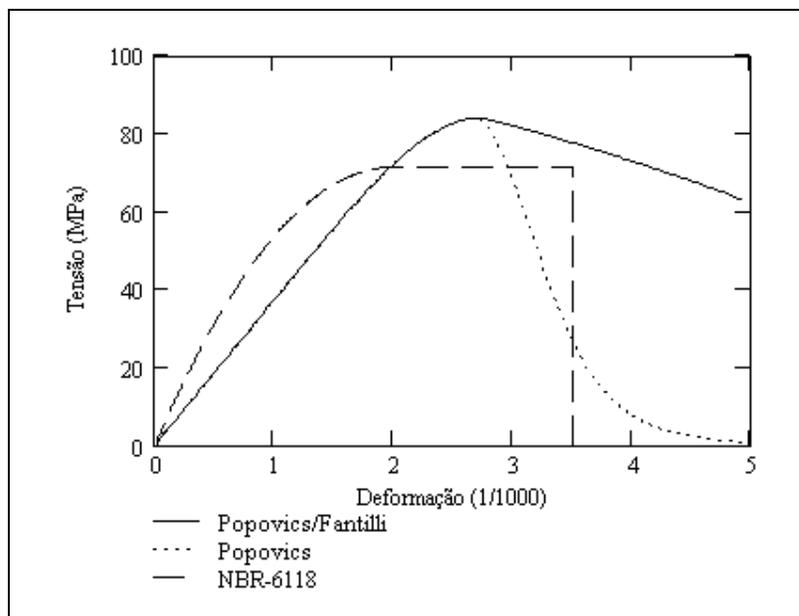


Figura 4.25 – Comparação entre as curvas tensão-deformação para o concreto, viga V1-3.8

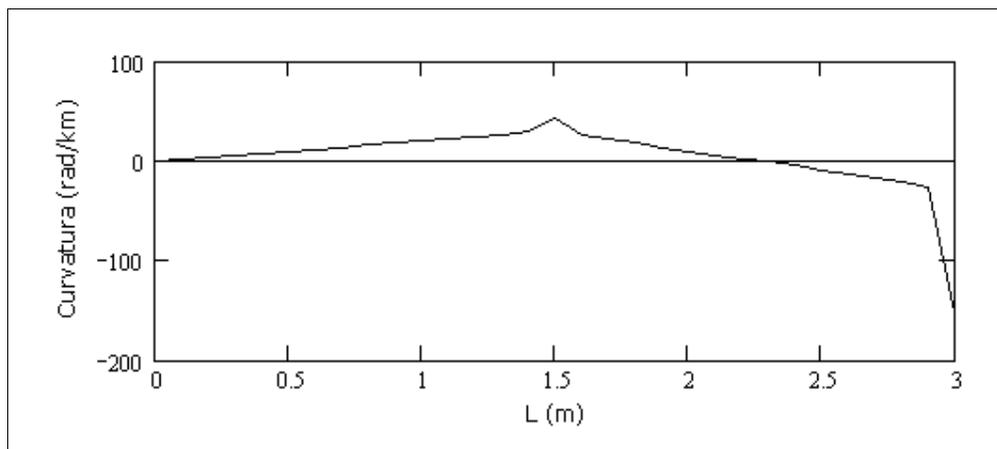


Figura 4.26 – Distribuição de curvatura no comprimento da peça

A Figura 4.26 mostra a distribuição de curvatura ao longo do comprimento de um vão da peça. É notável a concentração de curvaturas nos pontos críticos (momento máximo positivo e apoio central).

Curvas tensão-deformação para diferentes fibras comprimidas são mostradas na Figura 4.27. A Figura 4.28 mostra a distribuição de tensão, iniciando no eixo neutro até a fibra mais comprimida, para diferentes valores de curvatura.

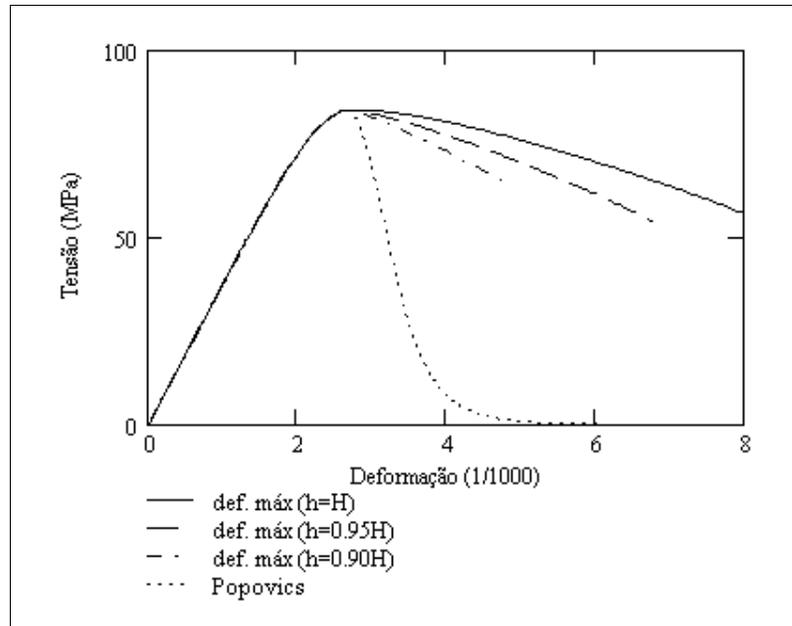


Figura 4.27 - Variação da tensão na fibra a uma altura  $h$  - Viga V1-3.8

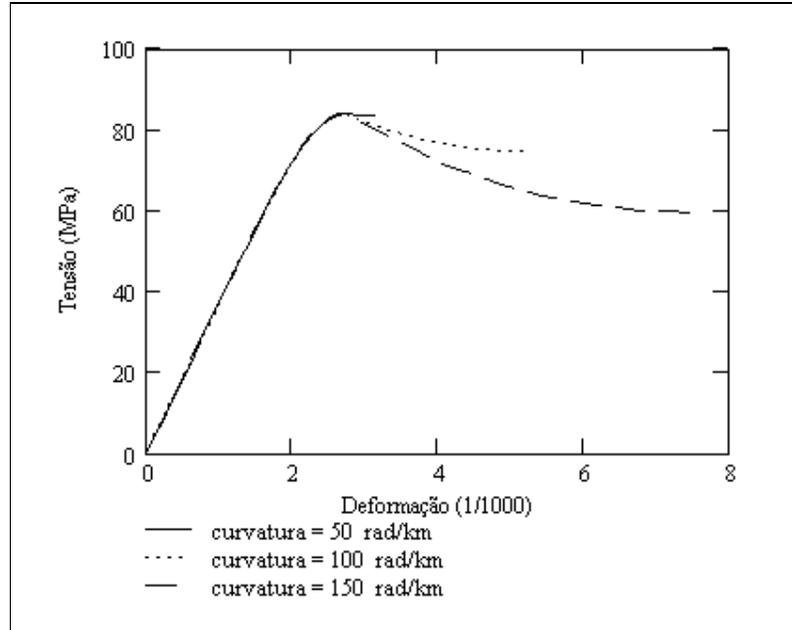


Figura 4.28 - Distribuição de deformação para diferentes curvaturas

#### 4.4 RESUMO DOS RESULTADOS

A seguir são apresentados três quadros com os resultados das três peças estudadas pelos diversos modelos de análises de vigas contínuas utilizados. São apresentados, também, resultados para cada tipo de análise escolhida como solução.

A análise plástica utilizando o diagrama momento-curvatura trilinear mostrou-se mais precisa para peças com seção transversais menos esbeltas (laje) do que para vigas. Portanto, é indicado o uso da análise plástica utilizando a relação momento-curvatura trilinear para peças com seção transversais menos esbeltas (laje) e o uso da relação momento curvatura bilinear para seções mais esbeltas (vigas).

Tabela 4.29 – Resumo dos resultados - laje

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (kN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Linear	36.21	0.62	-	25.23	15.51	tp1
Análise Linear com Redistribuição	51.23	0.87	25	25.23	23.02	tp1
Análise Plástica (Trilinear Curva 2)	55.26	0.94	30.26	25.23	25.04	tp3
Análise Não-Linear (Popovics <sup>2</sup> )	58.39	0.99	28.80	26.89	26.19	tp2
Análise Experimental	58.80	1.00	28.40	27.30	26.10	tp2

Para a análise não-linear foi escolhida a análise, utilizando uma curva tensão-deformação para o concreto composta pelas curvas de Popovics e Fantilli. O modelo de fratura de vigas será utilizado para fornecer o ramo descendente desta curva, pois com os modelos utilizados ainda não foi possível descrever com exatidão o instante da expulsão do concreto. Por isto, é indicado a limitação da deformação última do concreto comprimido por flexão  $\epsilon_{cu}=5\text{‰}$ .

Tabela 4.30 - Resumo dos resultados – V1-0.7

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (KN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Linear	29.45	0.51	-	16.49	13.84	tp1
Análise Linear com Redistribuição	39.26	0.67	25	16.49	21.20	tp1
Análise Plástica (Bilinear)	59.28	1.02	50.33	16.49	36.21	tp3
Análise Não-Linear (Popovics/Fantilli <sup>2</sup> )	58.44	1.00	43.26	18.57	34.54	tp6
Análise Experimental	58.25	1.00	39.73	19.66	33.00	tp5

Tabela 4.31 - Resumo dos resultados – V1-3.8

	$P_u$ (kN)	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta$ (%)	$M^{(-)}$ (KN.m)	$M^{(+)}$ (kN.m)	Tipo de Ruptura
Análise Linear	124.05	0.82	-	69.47	58.30	tp1
Análise Linear com Redistribuição	127.23	0.87	2.5	69.47	60.69	tp1
Análise Plástica (Bilinear)	143.11	0.98	13.31	69.47	72.60	tp5
Análise Não-Linear (Popovics/Fantilli <sup>2</sup> )	140.79	0.97	8.12	72.45	69.37	tp6
Análise Experimental	145.50	1.00	7.11	75.69	69.69	tp7

## 4.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

i - Foi observado que os resultados dos dois últimos experimentos, vigas V1-0.7 e V1-3.8, não apresentaram variações significativas com a consideração da contribuição à tração entre fissuras do concreto, como mostraram as Tabela 4.18 e

Tabela 4.27. Em virtude disto, para examinar o que levou a este resultado foi realizada uma nova análise na laje, Eligehausen/Fabritius (1993). Na análise inicial, foi obtido o ganho de 11% no valor da carga última, incluindo a contribuição do concreto à tração. Mas a taxa de armação da laje,  $\rho=0.3\%$ , é bem inferior que as taxas das duas vigas na seção crítica negativa,  $\rho=0.7\%$  e  $\rho=3.8\%$ . Com o objetivo de confirmar se realmente as diferenças nas taxas estavam influenciando o efeito da contribuição do concreto, foi formulada uma nova análise hipotética, mantendo todos os dados do experimento da laje, mas introduzindo mais armação para que fique com taxa  $\rho=3.8\%$ . O resultado mostrou que a carga foi aumentada em apenas 1%, a mesma majoração encontrada para a viga V1-3.8. O que leva a concluir que para peças com taxas menores, a contribuição do concreto entre fissuras, proporciona maiores aumentos nos valores da carga última, conforme CEB (1997).

ii - No experimento (laje) a curva indicada pela MC-90 para o aço classe A mostrou-se conservadora, visto que o experimento apresentou uma redistribuição maior e a carga última foi limitada pela capacidade de rotação plástica na seção do apoio intermediário. A utilização da curva 2 da norma brasileira, que na teoria seria potencialmente contra a segurança porque o aço CA50 é mais dúctil, comparado ao aço usado no experimento, mostra uma redistribuição maior do que a encontrada experimentalmente, mas a carga última, ainda, foi menor do a carga do ensaio. O motivo mais provável é a diferença no momento resistente último, calculado para o ELU com as condições da norma brasileira, e o experimental como foi mostrado na Tabela 4.6.

iii - Nas vigas estudadas V1-0.7 e V1-3.8, o aço utilizado pode ser classificado como CA-50. Para a viga V1-0.7 a curva 2 não proporcionou a formação do mecanismo como foi mostrado no experimento. Podem-se apontar duas causas: a primeira é o fato do aço do experimento possuir deformação última maior do que o aço CA-50 e a segunda é que a rotação plástica disponível pela norma seja

insuficiente. Já na viga V1-3.8 a rotação disponível foi suficiente para formação do mecanismo, e a pequena diferença encontrada na carga última, novamente, é motivada pelas diferenças dos momentos (calculado e experimental).

Para uma melhor comparação entre os resultados apresentados nas Tabelas 4.29, 4.30 e 4.31, foram calculadas as médias dos valores Teórico/Experimental para cada tipo de análise.

*Tabela 4.32 – Média dos resultados para as análises indicadas*

	$P_{teór}/P_{exp}$	$\eta_{teór}/\eta_{exp}$	$M_{exp}^{(-)}/M_{teór}^{(-)}$	$M_{exp}^{(+)}/M_{teór}^{(+)}$
Análise Linear	0.65	-	0.89	0.62
Análise Linear com Redistribuição	0.80	0.62	0.89	0.79
Análise Plástica	0.98	1.40	0.89	1.03
Análise Não-Linear	0.99	1.08	0.96	1.02

Estes valores mostram que a análise não-linear apresentou resultados mais próximos dos experimentais do que as outras análises.

## 5 CONCLUSÕES

### Análise Linear:

Todos os resultados apresentaram cargas últimas inferiores às encontradas experimentalmente, com coeficientes  $P_{\text{teórico}}/P_{\text{experimental}}$  variando de 0.51 a 0.82. Os valores teóricos dos momentos negativos foram mais próximos dos experimentais do que os momentos positivos. A maior causa disto foi a não existência de redistribuição para esta análise. Para os experimentos estudados, a análise linear elástica mostrou-se bastante conservadora na estimativa da carga de ruptura e obtendo valores para momentos aquém dos obtidos pela análise experimental.

### Análise Linear com Redistribuição:

Os coeficientes indicados na NBR-6118 (2003) mostram-se conservadores. Comparados com os resultados da análise linear, estes foram mais próximos dos experimentais, e são indicados para uma análise expedita.

### Análise Plástica:

É indicado o uso da análise plástica, utilizando a relação momento-curvatura trilinear para peças com seção transversais menos esbeltas (laje) e o uso da relação momento-curvatura bilinear para seções mais esbeltas (vigas).

As curvas fornecidas pela NBR-6118 (2003), para capacidade de rotação plástica, necessitam de uma melhor análise em termos de capacidade de rotação, já

que os aços utilizados nos experimentos são diferentes dos adotados para confecção dessas curvas.

O algoritmo desenvolvido para análise plástica mostra-se eficiente para resolver problemas com rotação plástica na seção crítica negativa e também positiva. A implementação da otimização tornou a análise bastante rápida e prática para este tipo de problema.

É possível afirmar, mesmo com suas limitações, a análise plástica leva a resultados mais próximos aos experimentais e normalmente a favor da segurança, por isto o seu uso é indicado frente às duas análises que precederam.

#### Análise Não-Linear:

Como resultado dos estudos comparativos, recomenda-se que a análise não-linear de vigas contínuas de concreto armado, seja realizada através do método de rigidez secante com controle de deformação utilizando para a equação constitutiva do concreto o modelo de Fantilli com limitação da deformação no concreto de 5‰.

Esta análise mostrou-se ser mais complexa e trabalhosa do que todas as anteriores. A utilização desta proporciona trabalho computacional bem maior, já que precisa da construção da curva momento-curvatura para cada tipo de seção contida na viga.

Os resultados mostraram que vigas com taxas de armação de tração menores  $\rho < 0.7\%$  (na seção crítica) levam a maiores ganhos no valor da carga última com a utilização da contribuição do concreto à tração entre fissuras. A contribuição do

concreto deve sempre ser utilizada na fabricação da curva momento-curvatura e, conseqüentemente, na análise não-linear.

Uma das maiores dificuldades na realização desta análise é definir a deformação última do concreto na flexão. O modelo utilizado para descrever o ramo de amolecimento da curva tensão-deformação do concreto na flexão, baseado na teoria da mecânica da fratura, mostrou-se insuficiente para prever o comportamento e o instante da ruptura de vigas.

Esta análise foi desenvolvida sem a consideração das deformações de cisalhamento, sem uma relação tensão-deformação para concreto que considere o confinamento do bloco comprimido e sem o escorregamento da armadura. Podendo ser apontados como possíveis motivos para as diferenças encontradas nas análises.

O algoritmo implementado para a análise não-linear, utilizando a técnica por controle de deformação (incremento de curvatura), possibilitou a análise de todo o comportamento da peça até o colapso, incluindo o estágio de descarregamento, mostrou-se eficiente.

Os resultados obtidos, utilizando a análise não-linear apresentaram-se mais próximos que os obtidos através das análises linear, linear com redistribuição e plástica. Portanto seu uso é indicado frente a outras análises nos casos em que se necessite de resultado mais acurado.

## 5.1 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Introduzir uma relação tensão-deformação para o concreto que considere o confinamento do concreto comprimido por estribos.

Acrescentar na análise não-linear as deformações devido ao cisalhamento.

Introduzir modelos que considerem o escorregamento da armação.

Realizar estudos em peças contínuas, utilizando aços que atendam às especificações da norma brasileira e com concreto de resistências usuais  $f_c < 50\text{MPa}$ .

Implementar e efetuar as análises apresentadas para peças contínuas de concreto protendido, como, também, em seções transversais em forma de T.

Realizar os quatro tipos de análise estrutural, em um número maior de experimentos, para desta forma, construir uma tabela semelhante à Tabela 4.32, e assim representar melhor a eficiência de cada análise.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALCA, N.S.; ALEXANDER, D. B.; MACGREGOR, J. G. Effect of Size Flexural Behavior of High-Strength Concrete Beams. **ACI Structural Journal**, v.94, n.1, p.59-67, Jan./Feb. 1997.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Standard Building Code. **Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary (ACI 318R-99)**. Detroit: 1999.

ARAÚJO, J. M. **Curso de Concreto Armado**. Rio Grande, Dunas, 2003, vol.1, 2.ed., 222 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, **NBR 7480**: Barras e fios de aço destinados a armaduras para concreto armado: apresentação. Rio de Janeiro, 1996.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, **NBR 1991**: Cordoalha de aço para concreto protendido. Rio de Janeiro, 1991.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

ASHOUR, S. A.; et al. Effect of the Concrete Compressive Strength and Tensile Reinforcement Ratio on the Flexural Behavior of Fibrous Concrete Beams, **Engineering Structures**. Elsevier Science, Vol. 22, 2000, p. 1145-1158.

BENTZ, I. **Sectional Analysis of Reinforced Concrete Members**. PhD Thesis, University of Toronto, Toronto, 2000.

BENTZ, I. Correspondência pessoal, Toronto, Fevereiro, 2004.

BERNARDO, L.; LOPES, S. Ductilidade em Flexão em Vigas de Alta Resistência. **Encontro Nacional Betão Estrutural 2002**. Lisboa, Nov. 2002, p. 243-254.

BIGAJ, A. J.; MAYER, U. Round Robin Analysis of Available Rotation Capacity of Plastic Hinges – Evaluation, **CEB Bulletin d'information No 242**, Comité Euro-International du Béton, Lausanne, p 143-156, May 1998.

BORGES, J. U. A. **Análise do Comportamento de Vigas de Concreto de Alto Desempenho por Meio da Mecânica da Fratura**. Tese (Doutorado em Ciências), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2002.

BUCHAIM, R. **A Influência da Não-Linearidade Física do Concreto Armado na Rigidez à Flexão e na Capacidade de Rotação Plástica**. Tese (Doutorado em Ciências), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2001.

CAMPBELL, T. I.; KODUR, V. K. R. Deformation Controlled Nonlinear Analysis of Prestressed Concrete Beams. **PCI Journal – Precast-Prestressed Concrete Institute**. p. 42-55, Sep./Oct. 1990.

CARMO, R. N. F.; LOPES, S. Avaliação da Redistribuição de Esforços em Vigas Contínuas de Betão de Alta Resistência. **Encontro Nacional do Betão Estrutural 2002**. LNEC, Lisboa, Nov.2002, p. 255-264.

CARMO, R. N. F. **Rotação Plástica e Redistribuição de Esforços em Vigas de Betão de Alta Resistência**. PhD Thesis, Faculdade de Ciência e Tecnologia da Faculdade de Coimbra, Coimbra, 2004.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. High Strength Concrete – State-of-the-Art. **CEB Bulletin d’information No 197**, Lausanne, 1990.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB-FIP MODEL CODE 1990 – Final Draft. **CEB Bulletin d’information No 203/205**, Vienne, 1991.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. Ductility Reinforcement. **CEB Bulletin d’information No 218**, Lausanne, 1993.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. Non-Linear Analysis of Beams and Frames. **CEB Bulletin d’information No 227**, Lausanne, 1995.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. Non-linear Analysis. **CEB Bulletin d’information No 239**, Lausanne, 1997.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. Ductility of Reinforced Concrete Structures – Synthesis Report and Individual Contributions. **CEB Bulletin d’information No 242**, Stuttgart, 1998.

COLLINS, M. P.; MITCHELL, D. **Prestressed Concrete Structures**. New Jersey, Prentice Hall, 1991, 766 p.

ELIGEHAUSEN, R.; FABRITIUS, E. Tests on Continuous Slabs Reinforced With Welded Wire Mesh. **CEB Bulletin d’information No 218**, Comité Euro-International du Béton, Lausanne, p 133-148, Ago 1993.

ELIGEHAUSEN, R.; FABRITIUS, E. Steel Quality and Static Analysis. **CEB Bulletin d'information No 219**, Comité Euro-International du Béton, Lausanne, p 69-107, Ago 1993a.

EUROCODE 2 (EC2): **Design of concrete structures - Part 1.1: General rules and rules for buildings**. European Committee for Standardization, Apr 2003.

FANTILLI, A. P.; FERRETTI, D. et al. Flexural Deformability of Reinforced Concrete Beams. **ASCE Journal of Structural Engineering**, v.124, n.9, p.1041-1049, Sep. 1998.

FANTILLI, A. P.; FERRETTI, D. et al. Mechanical Model for Failure of Compressed Concrete in Reinforced Concrete Beams. **ASCE Journal of Structural Engineering**, v.128, n.5, p.637-645, May. 2002.

FANTILLI, A.; IORI, I.; VALLINI, P. Effetti scala e duttilità in elementi monodimensionali inflessi di conglomerato armato. **Estratto dagli atti 14° Congresso C.T.E.** Mantova, Nov. 2002a.

FANTILLI, A.; VALLINI, P.; IORI, I. Size of Compressed Concrete in Four Point Bending RC Beams. FraMCoS-5 – **Fifth International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures**, Vail-Colorado, 2004.

GHALI, A.; NEVILLE, A. M., **Structural Analysis: A Unified Classical and Matrix Approach**. London and New York, 1998, 4ed, 822 p.

GAYLORD Jr, E. H.; GAYLORD C. N.; STALLMEYER, J. E. **Design of Steel Structures**. New York, McGraw-Hill, 1992.

HOROWITZ, B; RÊGO, G. M. Mathematical Programming with Complementarity Constraints Applied to Limited Ductility Analysis of Concrete Beams. **6<sup>th</sup> World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization**. Rio de Janeiro, 2005.

KAMINSKA, M. E. High-Strength Concrete and Steel interaction in RC Members, **Cement & Concrete Composites**. Elsevier Science, Vol. 24, 2002, p 281-295.

LEE, T.; PAN, A. D. E. Estimative the Relationship Between Tension Reinforced and Ductility of Reinforced Concrete Beam Sections. **Engineering Structures**. Elsevier Science, Vol. 25, 2003, p. 1057-1067.

LEONHARDT, F. **Construções de Concreto**: Verificação de Capacidade de Utilização. Rio de Janeiro, Interciência ,1979, Vol.4, 1ed, 205 p.  
MACGREGOR, J. G. **Reinforced Concrete**: Mechanics and Design. Ney Jercey, Prentice-Hall, 1997, 939p.

PARK, R.; PAULAY, T. **Reinforced Concrete Structures**. Canada, Wiley, 1975, 800 p.

RAO, P. S.; et al, Influence of Span Length and Application of Load on the Rotational Capacity of Plastic Hinges, **ACI Journal**, v.69-44, p.968-980, 1971.

RUSH, H. Versuche zur Festigkeit der Biegedruckzone. **Deutscher Ausschuss für Stahlbeton** – Bulletin No. 120, Berlin, 1955, 94 p.

SARKAR, S.; ADWAN, O.; MUNDAY, J. G. L. High strength concrete: an investigation of the flexural behavior of high strength RC beams. **Structure Engineering International**. V.75, n.7, p 115-121, Apr. 1997.

STUCCHI, F. Correspondência pessoal, São Paulo, Fevereiro, 2005.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de Análise Estrutural**. São Paulo, Globo, 12 ed., 1994.

VENTORINI, L. A. **Influência da Aderência na Capacidade de Rotação Plástica de Vigas de Concreto Armado**. Tese (Doutorado em Ciências), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Mar. 2003.

ZIARA, M. M.; HALDANE. D.; KUTTAB. A. S. Flexural Behavior of Beams with Confinement. **ACI Structural Journal**, v.92, n.1, p.103-114, Jan./Feb. 1995.

WEISS, W. J.; GÜLER, K.; SHAH, P. S. Localization and size-dependent response of reinforced concrete beams. **ACI Structural Journal**, v.98, n.5, p. 686-695, 2001.

WONG, K. W.; YEO, M. F.; WARNER, R. F. Non-Linear Behavior of Reinforced Concrete Frames. **Civil Engineering Transaction**. Inst. Engrs. Aust. Vol.CE30, No3 July, 1988, p57-65.

WONG, K. W.; WARNER, R. F. Collapse Load Analysis of Prestressed Concrete Structures, **Department of Civil and Environmental Engineering the University of Adelaide**. Research Report n. 162, July. 1998.

WONG, K. W.; WARNER, R. F. Non-linear Design of Continuous Reinforced Concrete Flexural Members, **Department of Civil and Environmental Engineering the University of Adelaide**. Research Report n. 161, May. 1998a.

WU, Y.; OEHLERS, D. J.; GRIFFITH, M. C. Rational Definition of the Flexural Deformation Capacity of RC Column Sections. **Engineering Structures**. Elsevier Science, Vol. 26, 2004, p. 641-650.

## BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

AHNER, C.; KILVER, J. Developed of a New Concept for the Rotation Capacity. In: DIN 1045 – Part 1. **Leipzig Annual Civil Engineering Report**. Universitat Leipzig, Leipzig, 1998, p. 213-392.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, **NBR 8953**: Concreto para fins estruturais – Classificação por grupos de resistência. Rio de Janeiro, 1992.

BERNARDO, L. F. A.; LOPES, S. M. R. Flexural Ductility of High-Strength Concrete Beams. **Structural Concrete**, 2003, Vol.4, 3ed, p. 135-154.

BERNARDO, L. F. A.; LOPES, S. M. R. Neutral Axis Depth versus Flexural Ductility in High-Strength Concrete Beams. **ASCE Journal of Structural Engineering**, v.130, n.3, p.452-459, Mar. 2004.

CAGNEY, B. R.; WONG, K, W. The Effect of Detailing Steel in the Compression Regions of Internal Supports on the Ductility of Reinforced Concrete Beams. **Electronic Journal of Structural Engineering**. Vol.4, 2004, p 45-54.

CAIVI, G. M., CANTÙ, E., MACCHI, G. MAGENES, G. Experimental Investigation on the Rotation Capacity of Concrete Slabs Reinforced with Wloded Wire Meshes. **Dipartimento di Meccanica Strutturale dell`Universita de Paiva**. Rapporto N. 34, 1990.

CARMO, R. N. F.; LOPES, S. M. R.; BERNARDO, L. F. A. Theoretical model for the determination of plastic rotation capacity in reinforced concrete beams. **Structural Concrete**, 2003, Vol.4, 2ed, p. 75-83.

CHEN, W. F. **Plasticity in Reinforced Concrete**. New York, McGraw-Hill, 1982, 463 p.

CHEN, W. F. **Plasticity for Structural Engineers**. New York, Springer-Verlag, 1988, 606 p.

COSENZA, E.; GRECO, C.; PECCE, M. Nonlinear Design of Reinforced Concrete Continuous Beams. **Structure Engineering International**. Vol.1, n.1, Bridges USSR, Feb. 1991.

DARKOV, A. **Structural Mechanics**. Moscow, Mir Publishers, 1979, 3ed., 650p.

ELIGEHAUSEN, R.; FABRITIUS, E.; LI, L.; ZHAO, R. An Analysis of Rotation Capacity Tests. **CEB Bulletin d'information No 218**, Comité Euro-International du Béton, Lausanne, p 251-273, Ago 1993b.

GAMINO, A. L. **Análise Numérica da Ductilidade de Vigas de Concreto Armado Convencional e de Alto Desempenho**. Dissertação (Mestrado), Faculdade de Engenharia Civil de Ilha Solteira, Ilha Solteira, 2003.

GRAUBNER, C. A. Rotation Capacity And Moment Redistribution In Hyperstatic Reinforced Concrete Beams. **CEB Bulletin d'information No 239**, Comité Euro-International du Béton, Lausanne, p 69-96, May 1997.

HISHAM, H.; IBRAHIM. H.; MACGREGOR, J. G. Modification of the ACI Rectangular Stress Block for High-Strength Concrete. **ACI Structural Journal**, v.94, n.1, p. 40-48, Jan./Feb. 1997.

HODGE, O. G. **Plastic Analysis of Structures**. New York, McGraw-Hill, 1959, 364 p.

KACHANOV, L. M. **Foundation of Theory of Plasticity**. Amsterdam, North-Holland Publishing, 1971, 482p.

KIM, J.; YI, S. Application of Size Effect to Compressive Strength of Concrete Members. **Academy Proceedings in Engineering Sciences**. Sādhanā, India, vol.27, Part4, Aug.2002, p. 467-484.

LANGER, P.; FÜRSTENFELDBRUCK, H. A. The Influence of HSC on the Rotation Capacity of Plastic Regions in RC Structural Members, **CEB Bulletin d'information No 242**, Comité Euro-International du Béton, Stuttgart, p 225-2367, May 1998.

LOPES, S. M. R. **Moment Redistribution Partially Prestressed Composite Concrete Beams**. PhD Thesis, The University of Leeds, Leeds 1990.

LOPES, S. M. R.; BERNARDO, L. F. A. Plastic Rotation Capacity of High-Strength Concrete Beams, **Journal Materials and Structures**, Vol.36, Jan./Feb. 2003, p. 22-31.

MEYER, J. Deformation Capacity of the concrete compression zone, **Leipzig Annual Civil Engineering Report**. Universitat Leipzig, Leipzig, 1996, p. 289-303.

MUSSSO, Jr. F, **Dimensionamento de Seções de Concreto Armado e Verificação da Estabilidade de Vigas Colunas no Estado Limite**. Dissertação (Mestrado), Pontifca Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1987.

PERDIGÃO, R. S. **Roteiro para Dimensionamento Não Linear de Edifícios de Concreto Armado Segundo as Normas Norte Americanas.** Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2000.

SHEHATA, I. A. E.M.; SHEHATA, L. C. D.; MATTOS, T. S. Stress-Strain Curve for the Design of High-Strength Concrete Elements. **Materials and Structures.** Paris, vol.33, n.231, p. 411-418, 2000.

STRAMANDINOLI, R. S. B.; ROVERA, H. L. L. Análise de Vigas de Concreto Armado Considerando a Não-Linearidade Física. **IBRACON – 46º Congresso Brasileiro do Concreto,** Florianópolis, Vol. 6, p. 156-171, 2004.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)