Roberto Preussler

O PROCESSO DE FORMAÇÃO DOS CONCEITOS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS SENO E COSSENO USANDO OS SOFTWARES CABRI-GÉOMÈTRE II E GRAPHMATICA

Passo Fundo

2006

Roberto Preussler

O PROCESSO DE FORMAÇÃO DOS CONCEITOS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS SENO E COSSENO USANDO OS SOFTWARES CABRI-GÉOMÈTRE II E GRAPHMATICA

Dissertação de Mestrado apresentado ao curso de Mestrado em Educação da Faculdade de Educação da Universidade de Passo Fundo, como requisito para obtenção do título de Mestre em Educação, sob orientação da Prof.ª Dr.ª Neiva Ignês Grando.

Passo Fundo

2006

CIP – Catalogação na Publicação

P935p Preussler, Roberto
O processo de formação dos conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno usando os softwares Cabri-Géomètre II e Graphmatica / Roberto Preussler. -- 2006.
108 f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de Passo Fundo, 2006.
Orientadores: Dra. Neiva Ignês Grando

1. Matemática – Ensino 2. Função trigonométrica 3. So matemático I. Grando, Neiva Ignês (orient.) II. Título.

CDU: 372.851

Bibliotecária Ana Paula Benetti Machado CRB 10/1641

Para minha esposa Graciele.

A todos que acreditam no poder transformador da *educação*!

A Deus, o Ser Superior, que me atendia nos momentos de angústias, ouvindo, na sua infinita bondade e misericórdia, as preces, orientando-me e fornecendo esperanças nos caminhos da busca pela qualificação.

À professora Dr.ª Neiva Ignês Grando, que nesses vinte e quatro meses, com postura, determinação e conhecimento, orientou-me, acreditando neste trabalho.

Ao professor Dr.° Edemilson Jorge Ramos Brandão, que me fez o convite inicial ao programa de pós-graduação e me apresentou a universidade. Além de várias orientações, permitiu-me rever muitas aprendizagens no estágio de docência.

Aos professores Dr.ª Maria Tereza Carneiro Soares e Dr.° Adriano Canabarro Teixeira, que contribuíram com intervenções valiosas para qualificar a pesquisa.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação da Universidade de Passo Fundo, que contribuíram nas aprendizagens e conquistas alcançadas.

À minha noiva Graciele, que me esperou, compartilhou discussões, acreditou e, acima de tudo, não dispensou o carinho e o incentivo de muitos momentos.

Aos amigos e colegas que compartilharam angústias e aprendizagens, que orientaram, incentivaram e aguardaram. Agora, comemorem comigo!

Aos familiares, que em muitos momentos solicitavam presença, mas entendiam que a falta era por uma causa nobre: a educação.

À direção e professores da escola na qual se realizou a pesquisa, que disponibilizou espaço e recursos onde tão bem fui acolhido.

Aos colegas Sabrina, Tânia, Judite, Marília, Maria Ângela, Irineu, Mauro e Beatriz, que transformavam as cansativas viagens em discussões acadêmicas, refeições, horário de chimarrão, renovação de livros, traduções...

À Capes, que me concedeu a bolsa de estudos, permitindo maior dedicação à pesquisa.

“A boa educação é moeda de ouro, em toda parte tem valor”.

(Pe. Antônio Vieira)

RESUMO

O uso de *softwares* nas aprendizagens em matemática vem se apresentando como instrumento instigador de outras formas de aprendizado e exigindo posturas diferenciadas dos educadores. Nesse sentido, por meio desta pesquisa buscou-se investigar o processo de formação dos conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno no ciclo trigonométrico e suas representações gráficas usando os *softwares* Cabri-Géomètre II e Graphmatica. Optou-se pelo tema da pesquisa principalmente porque no ensino das funções trigonométricas emergiam desafios nas atividades docentes, os quais instigam práticas para ressignificar as aprendizagens e identificar as implicações que emergem com o uso de *softwares* em matemática. Para isso foi elaborada uma proposta pedagógica composta de uma seqüência de atividades que levaram os sujeitos a interações com os *softwares*. Esta proposta apoiou-se na teoria histórico-cultural de Vygotsky e na teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval. Sua aplicação ocorreu no primeiro semestre de 2005, com 27 alunos do segundo ano do ensino médio da Escola Estadual de Ensino Médio Gustavo Langsch - Polivalente em São Luiz Gonzaga. A análise do processo de formação dos conceitos das funções trigonométricas e suas representações gráficas efetivou-se de forma qualitativa.

Palavras-chave: funções trigonométricas, formação de conceitos, *softwares* de matemática.

ABSTRACT

The use of softwares in the mathematical learnings comes as an instrument that stimuilates other learning ways, demanding the educators' differentiated postures. Thus, this research aims to investigate the process of formation of the concepts of the trigonometrical functions sine and cosine in the trigonometrical cycle as well as its graphic representations using the softwares Cabri-Géomètre II and Graphmatica. The Option for the theme was mainly because in the teaching of the trigonometrical functions challenges emerged for the educational activities, such as ressignifying the learnings and identifying the implications that appeared with the use of softwares in mathematics. For that a pedagogic proposal was elaborated with a sequence of activities that took the subjects to interact with the softwares. This proposal is based on the teoria historico-cultural of Vygotsky and the teoria dos registros de representação semiótica of Raymond Duval. The application of both theories was accomplished in the first semester of 2005, with 27 students of the segundo ano of the ensino médio in Escola Estadual de Ensino Médio Gustavo Langcsh - Polivalente in São Luiz Gonzaga. The analysis of the process of formation of the concepts of the trigonometrical functions and graphic representations of them were executed in a qualitative way.

Key-words: trigonometrical functions, formation of concepts, mathematics softwares.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Repensar as aprendizagens em matemática constitui-se num desafio constante aos educadores. Mudanças nas formas de aprendizagem, nas técnicas utilizadas, nas questões epistemológicas e metodológicas integram as mais diversas pautas acadêmicas. Nas últimas décadas, a informática, especificamente com os *softwares* de matemática, impulsionou ainda mais as discussões relacionadas às aprendizagens em matemática.

Ratifica-se essa idéia quando Penteado (1999, p. 297) afirma que "vivemos em uma sociedade em que prevalecem as informações, a velocidade, o movimento, a imagem, o tempo e o espaço com uma nova conceituação". Assim, abster-se dessas mudanças sociais, dos novos métodos de aprendizagem, é não assumir possibilidades emergentes de mudanças nas aprendizagens em matemática. Teixeira (2002, p. 41-2) destaca que "todo e qualquer elemento que dinamize de alguma forma o processo de ensino-aprendizagem é valioso e deve não somente ser utilizado, mas reinventado constantemente [...]". Eis, pois, a importância de pesquisas que possam apresentar reflexões a educadores matemáticos, principalmente relacionadas às possíveis implicações pedagógicas da utilização de *software* nas aprendizagens em matemática.

Pode-se inferir que, no contexto social em que se vive e com os recursos tecnológicos disponíveis, as aprendizagens em matemática encontram-se potencializadas, especificamente, em virtude da vasta produção de *softwares* aplicados à disciplina, os quais permitem de forma diferenciada representar situações matemáticas, ampliando e significando as possibilidades de aprendizagens nessa disciplina. Entretanto, os *softwares* precisam ser compreendidos pelos educadores para que possam, evidentemente, contribuir com as aprendizagens em matemática e oportunizar avanços nos métodos atualmente utilizados; para isso são necessárias pesquisas que relacionem esses instrumentos tecnológicos, ampliando e reinventando práticas pedagógicas.

Nesse contexto, essa pesquisa apresenta-se com uma proposta de aprendizagem em matemática utilizando dois *softwares*, Cabri-Géomètre II e Graphmatica, para estudo das funções trigonométricas seno e cosseno. Essa opção deveu-se, sobretudo, a observações feitas em ações praticadas como professor, nas quais alguns alunos demonstravam certas dificuldades de aprendizagem, seja pelo uso inadequado de metodologias de ensino, seja pela falta de recursos auxiliares. Outro fator considerado na opção pelas funções trigonométricas é a disponibilidade de *softwares* que podem auxiliar na visualização diferenciada do conhecimento matemático em discussão.

Optou-se pelo software Cabri-Géomètre II por possibilitar o desenvolvimento de ações com geometria dinâmica[1] e, dessa forma, representar as funções trigonométricas seno e cosseno e suas características no ciclo trigonométrico. A manipulação das ferramentas desse *software* possibilita abstrair características das funções e apropriar-se dos significados que compõem o conjunto de conceitos. O *software* Graphmatica possibilita a representação gráfica dessas funções e, nelas, a identificação de suas características.

O objetivo principal da pesquisa foi analisar o processo de formação dos conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno. Como objetivos específicos, propôs-se identificar as implicações do *software* Cabri-Géomètre II e Graphmatica na representação geométrica e gráfica dessas funções e como essas diferentes representações contribuíram para formar os conceitos das funções trigonométricas.

Desenvolveu-se uma proposta que considerasse o pesquisador como professor na situação real de sala de aula para, dessa forma, possibilitar, qualitativamente, a coleta de informações sobre o processo de formação dos conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno nas interações dos sujeitos com as atividades e com os *softwares*. As ações dos sujeitos para desenvolver as atividades propostas geraram os dados utilizados na análise, coletados por meio de registros de observações feitas pelo professor, em áudio e vídeo.

No primeiro capítulo apresenta-se da uma breve análise da proposta pedagógica da escola sobre funções trigonométricas; considerações sobre os fundamentos da matemática e as propostas de alguns livros didáticos; sobre softwares e relações com a aprendizagem matemática; contribuições da teoria histórico-cultural e da teoria dos registros de

[1] Segundo Bernard, Tavares e Ortega Júnior (2000), a geometria dinâmica possibilitada pela utilização de software de matemática, é aquela que permite representar dinamicamente a situação objeto de estudo, ou seja, quando é possível manter invariáveis as propriedades matemáticas envolvidas na manipulação dos objetos.

representação semiótica. A apresentação da proposta pedagógica para funções trigonométricas é descrita no segundo capítulo e a análise do processo de formação dos conceitos de seno e cosseno, no terceiro capítulo. No último capítulo traçam-se considerações "finais" sobre a pesquisa realizada.

1 DOS LIVROS DIDÁTICOS À LITERATURA ACADÊMICA: ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES TEÓRICAS

Este capítulo destaca as contribuições teóricas que sustentam a pesquisa. Além disso, caracteriza o modo como os conceitos matemáticos integrantes do objetivo da pesquisa apresentam-se na proposta pedagógica da escola, como são apresentados por autores que discutem os fundamentos da matemática e como são definidos pelos autores nos livros didáticos. A seguir, destaca-se uma revisão de literatura observando alguns resultados de pesquisas que discutem a utilização da informática nas aprendizagens em matemática e, num terceiro momento, destacam-se alguns conceitos das teorias cognitivas, da teoria histórico-cultural e da teoria dos registros de representação semiótica, que servirão de referência para a análise dos resultados da aplicação da proposta pedagógica.

Para atingir o objetivo da pesquisa foram desenvolvidas atividades envolvendo as funções trigonométricas seno e cosseno no ciclo trigonométrico, suas representações gráficas e algumas características dessas funções. Considerando que a pesquisa foi realizada numa escola da rede pública estadual que possui uma proposta elaborada por um colegiado de professores, buscou-se verificar o que propõe essa instituição escolar em relação a esses conceitos e, também, como são abordados pelos autores nos livros didáticos de matemática adotados no ensino médio dessa escola.

1.1 A proposta da escola para o ensino das funções trigonométricas

A proposta pedagógica da escola para o ensino da trigonometria é organizada com base em duas referências: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e Programa de Ingresso no Ensino Superior (Peies) da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). O primeiro, de acordo com a coordenadora pedagógica, "é usado como referência, pois integra a Base Nacional Comum[2] proposta pelos PCNs", os quais se referem ao ensino da trigonometria desta forma: "Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos." (BRASIL, 1999, p. 255). Salienta a coordenadora pedagógica da escola que "não basta esses conteúdos serem apresentados pelos PCNs para serem desenvolvidos na escola, mas o importante é que os professores passam a integrá-los à realidade social dos alunos". Afirma ainda que a metodologia de trabalho adotada "é baseada na pesquisa participante desenvolvida com a comunidade". A escola adota essa metodologia de trabalho porque pretende aproximar a comunidade da escola e essa, da comunidade. As ações educativas usando essa metodologia buscam ampliar e qualificar a discussão e a presença da comunidade escolar, visando valorizar o pensamento da realidade social dos alunos no desenvolvimento dessas ações.

Para o ensino da trigonometria, a entrevistada buscou nos PCNs argumento para justificar essa aproximação social, ratificando que o estudo da "trigonometria, [...] esteja ligado às aplicações, evitando-se o excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos." (BRASIL, 1999, p. 257). Segundo a coordenadora, essa metodologia de trabalho "é integrante do currículo flexível[3] de livre organização de cada escola".

Encontram-se na proposta pedagógica da escola a proposta do Peies da UFSM, a qual integra os conceitos de trigonometria como base para o ingresso no ensino superior pelo vestibular. Com base nessas referências, dos PCNs e do Peies, os conceitos de trigonometria, para a 2ª série do ensino médio são assim apresentados no plano de estudo da escola elaborado em 2002: "função trigonométrica; arcos e ângulos (graus e radianos); ciclo trigonométrico; funções trigonométricas (seno, cosseno e tangente); definição, gráfico, período, sinal, variação, domínio e imagem".

---

[2] A Base Nacional Comum, segundo o art. 26 da LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – lei n.° 9394/96, determina para a construção dos currículos escolares uma base nacional comum de conceitos a ser contemplada em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar e de uma parte diversificada, contemplando as características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela. (BRASIL, 1999, p. 30). Os PCNs trazem uma proposta para atender uma determinação lega.

[3] O currículo flexível, destacado pela coordenadora pedagógica, contempla a parte diversificada dos PCNs. Essa parte diversificada, segundo os PCNs, permite não só flexibilizar a lei como estimular as particularidades regionais, assegurando autonomia à escola para organização dos conteúdos e da metodologia adotada no processo de ensino-aprendizagem e na avaliação. (BRASIL, 1999, p. 31-2).

Observando o foco principal do objetivo da pesquisa, as preocupações da escola com o ensino das funções trigonométricas e suas aplicações, procurou-se considerar também as preocupações da escola na organização da proposta pedagógica da pesquisa.

1.2 Fundamentos da matemática e propostas de livros didáticos

Esta seção do capítulo apresentará os principais conceitos matemáticos envolvidos nas atividades propostas. Entre as principais obras utilizadas pela escola considerada destacam-se: *Matemática: uma nova abordagem,* de José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno; *Matemática: contexto e aplicações* de Luiz Roberto Dante. Sobre os fundamentos da matemática, apóia-se em algumas contribuições de Bento de Jesus Caraça em *Conceitos fundamentais da matemática.*

Caraça (1998) discute fundamentos da matemática e apresenta os conceitos de função e, em especial, das funções circulares seno e cosseno. Exemplificando o conceito de função, o autor propõe a Tabela 1, a seguir, como um instrumento matemático para o estudo das variações quantitativas de espaço e tempo no fenômeno de queda de um objeto no vácuo. Propõe que se procure a regularidade do fenômeno na queda do objeto medindo as alturas da queda em intervalos de tempo iguais, para, assim, estudar as variações dessas alturas de queda. Considerando as medidas, exemplifica o autor:

Tabela 1 – Medidas dos espaços em tempos iguais

tempos (em segundos)	0	1	2	3	4	5	...
espaços (em metros)	0	4,9	19,6	44,1	78,4	122,5	...

Fonte: *Caraça, Bento de Jesus.* 1998, p. 118.

Caraça (1998) propõe que a análise das medidas da tabela deve resultar na identificação de uma lei quantitativa, observando que não se encontrará toda regularidade entre os valores. Salienta a necessidade de se encontrar correspondência entre o conjunto de valores da seguinte maneira:

> [...] em duas sucessões, dois conjuntos de números – o dos tempos, que representamos por *t,* e o dos espaços, que representamos por um conjunto *e* – postos em correspondência um com o outro, correspondência essa a qual podemos afirmar que é unívoca ([17]) no sentido de *t* para *e* [...]. (p. 118, grifo do autor).

A seguir, questiona: "Onde está a lei quantitativa de que aquela tabela nos da apenas a primeira aproximação" (p. 119). E afirma: "A lei está na forma como essa correspondência do conjunto *t* ao conjunto *e* se realiza; se a correspondência mudar, mudarão os conseqüentes – aqui os espaços – mudará, por conseqüência, a variação, mudará a lei." (p. 199). Salienta Caraça (1998) que a *lei* se encontra na correspondência dos dois conjuntos: "Se por conseqüência queremos estudar leis quantitativas, *temos que criar um instrumento matemático cuja essência seja a correspondência de dois conjuntos.*" (p. 119, grifo do autor).

Ciente da necessidade de criar instrumentos matemáticos com correspondência para o estudo da função, Caraça ainda propõe:

> Seja *t* a variável dos conjuntos dos tempos e *e* a variável do conjunto dos espaços; a lei consiste na existência de uma correspondência entre *t* e *e*, correspondência de que sabemos que é unívoca no sentido de $t \longrightarrow e$. Diremos que a variável *e* é função da variável *t,* e escrevemos simbolicamente $e = f(t)$; à variável *t* antecedente da correspondência, chamaremos de variável *independente*; à variável *e* chamaremos de variável *dependente.* (p. 121, grifo do autor).

Dessa forma, ressalta que função, no campo matemático, caracteriza-se como um instrumento próprio para estudo de leis, mostrando sua definição da seguinte maneira:

> *Sejam x e y duas variáveis respectivamente de conjuntos de número; diz-se que y é função de x e escreve-se y = f(x), se entre as duas variáveis existe um correspondência unívoca no sentido de* $x \longrightarrow y$*. A x chama-se variável independente, a y variável dependente.* (Caraça, 1998, p. 121, grifo do autor).

Definido o conceito de função, Caraça (1998) classifica algumas funções, em especial as funções circulares, nas quais se encontram as funções trigonométricas seno e cosseno. O autor apresenta várias definições a partir de uma figura na qual define o raio e divide a circunferência com eixos perpendiculares da seguinte forma: "Seja [...] uma circunferência de centro *O* e raio $\overline{OA} = r$ e sejam $\overline{A'A}$ e $\overline{B'B}$ dois diâmetros perpendiculares." (p. 136, grifos do autor).

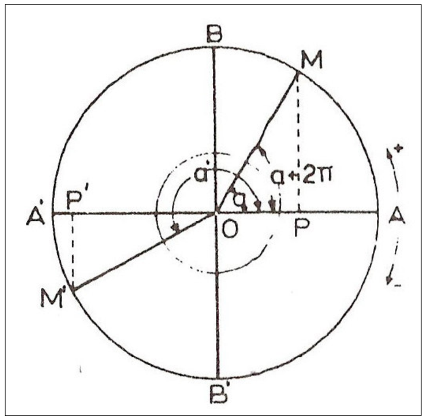


Figura 1 – Ciclo trigonométrico.

Considerando o sentido e sinal do arco, o autor afirma:

> Tomaremos o ponto A como origem de arcos sobre a circunferência, e convencionemos *tomar* como positivos os arcos no sentido da seta (sentido direto) e como negativos os arcos no sentido contrário (sentido retrógrado) – o arco *ABA'M'* é positivo, o arco *AB'M'* é negativo. (p. 136, grifo do autor).

Caraça define a relação entre ângulo e arco desta forma:

> A cada arco corresponde um *ângulo ao centro*, isto é, aquele ângulo cujo vértice está no centro da circunferência e cujos lados passam pelas extremidades do arco – ao arco *AM* corresponde ao ângulo *a.* Diz-se então que o ângulo *a* submete-se ao arco *AM*; um ângulo ao centro será positivo ou negativo conforme for positivo ou negativo o arco que ele submete. (1998, p. 136, grifo do autor).

Para definir radianos o autor escreve: "Chama-se radiano aquele ângulo ao centro tal que o arco que lhe corresponde (que ele submete) tem um comprimento igual ao raio *r* da circunferência." (p. 136, grifo do autor). Considerando a relação do ângulo central e em graus e radianos, Caraça destaca: "Como o perímetro da circunferência é $C = 2\pi$ [...]", isto é, vale

2π raios, o ângulo ao centro vale 2π radianos, visto que cada raio (em arco) corresponde a um radiano (em ângulo) (p.136).

Ao definir os conceitos de seno e cosseno, Caraça faz referência à figura anterior e define:

> Chama-se *seno* do ângulo *a,* e representa-se por sen *a,* ao cociente do segmento $\overline{PM}$ (orientado sempre com origem em *P*, qualquer que se seja a posição de *M*) pelo raio *r*:
>
> $$\text{sen}\, a = \frac{\overline{PM}}{r}$$
>
> Chama-se *co-seno* do mesmo ângulo, e representa-se por cos *a,* ao cociente do segmento $\overline{OP}$ (orientado, sempre com origem em *O*) pelo raio *r*.
>
> $$\cos a = \frac{\overline{OM}}{r}$$. (p. 137, grifo do autor).

Logo a seguir, o autor afirma que, conforme os quadrantes em que a extremidade do arco se encontra, tanto para seno como para cosseno, podem ser positivos ou negativos. Apresenta as definições no seguinte quadro:

Tabela 2 – Sinais das funções trigonométricas seno e cosseno

	0	1°qdt.	$\frac{\pi}{2}$	2°qdt.	π	3°qdt.	$\frac{3\pi}{2}$	4°qdt.	2π
seno	0	pos.	+1	pos.	0	neg.	-1	neg.	0
cosseno	+1	pos.	0	pos.	-1	neg.	0	neg.	+1

Fonte: Caraça, 1998, p. 137.

Para a definição das funções sen x e cos x, o autor retoma o conceito de função e afirma que se representa pela seguinte notação *y = sen x e y = cos x* (p. 138).

Considerando as imagens geométricas das funções sen *x* e cos *x,* o autor corresponde as valores dos ângulos em radianos a abscissa, não se limitando à representação da figura a seguir:

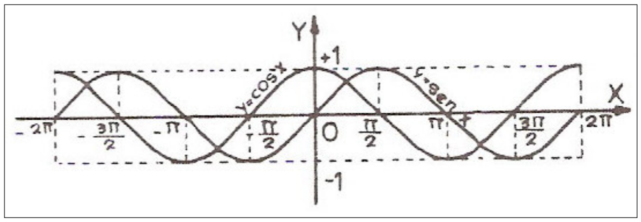


Figura 2 – Imagens geométricas das funções trigonométricas sen *x* e cos *x*.

Considerando a periodicidade da função, salienta que ocorre no intervalo de $(0,\ 2\pi)$; assim, conclui que as funções sen *x* e cos *x* são periódicas e tem períodos 2π .

Os conceitos apresentados até então, na ótica dos fundamentos da matemática integrantes da proposta da pesquisa, serão caracterizados da forma como os autores de livros didáticos os apresentam aos alunos, procurando destacar a forma metodológica em que aparecem.

Os autores dos dois livros didáticos, Dante (2002) e Giovanni e Bonjorno (2000) citados, referem-se às funções trigonométricas seno e cosseno como funções circulares e apresentam os conceitos com semelhanças metodológicas. Ambos trazem a figura do ciclo trigonométrico com a divisão perpendicular dos quadrantes e destacam as definições em cores diferentes.

Como exemplo, Giovanni e Bonjorno apresentam a definição de seno da seguinte forma:

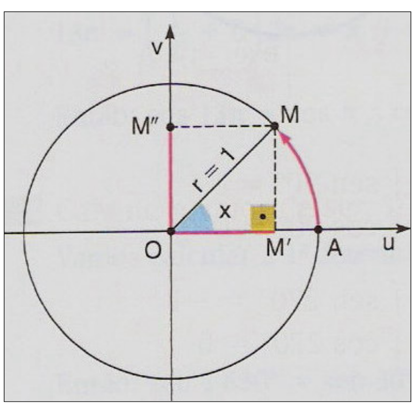


Figura 3 – Definição da função seno e cosseno.

Considerando o ciclo trigonométrico no qual marcamos o ponto *M,* que é a imagem do número real x, conforme indica a figura. Consideremos também o arco AM, que corresponde ao ângulo central de medida *x.* Seja $\overline{OM}$ o raio do ciclo, e M'' e M' as projeções de *M* nos eixos *v* e *u,* respectivamente.

Do triângulo retângulo OM'M, temos:

$$\text{sen x} = \frac{M'M}{OM} = \frac{OM''}{1} = OM'' \therefore \text{sen x} = OM''$$

$$\cos x = \frac{OM'}{OM} = \frac{OM'}{1} = OM' \therefore \cos x = OM'$$

Daí definimos:

Seno de *x* é a ordenada do ponto *M.*
Cosseno de *x* é a abscissa do ponto *M*. (2000, p. 27, grifo do autor).

Os mesmos autores definem como sendo *v* o eixo dos senos e *u* o eixo dos cossenos.

Já Dante (2002) discute os conceitos de seno e cosseno de forma separada, ou seja, primeiro define o seno e suas características e, depois, o cosseno e suas características. O autor apresenta a Figura 4, do ciclo trigonométrico, e define a idéia de seno de forma mais detalhada:

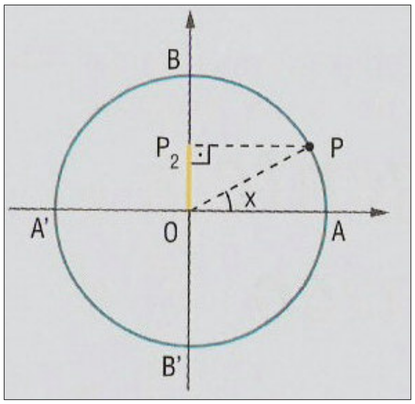


Figura 4 – Definição da função seno.

Dado um arco AP de medida **x**, definimos como sen x a ordenada do ponto **P** e representamos assim:

$$\text{sen } x = \overline{OP_2}$$

em que $\overline{OP_2}$ é a medida de um segmento orientado (pode ser positiva negativa ou nula). (2002, p. 46, grifos do autor).

A seguir o autor explica:

Observe que a definição de seno de um ângulo agudo vista em um triângulo retângulo está de acordo com a definição do ciclo trigonométrico.

$$\text{sen } x = \frac{\overline{PP_1}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP_2}}{1} = \overline{OP_2} \text{ . (p. 46).}$$

Após, apresenta a definição de cosseno e descreve:

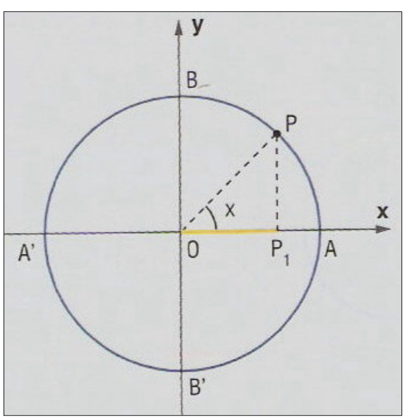


Figura 5 – Definição da função cosseno.

Dado um arco AP de medida **x,** definimos como cos x a abscissa do ponto **P** e representamos assim:

$$\cos x = \overline{OP_1}$$

em que $\overline{OP_1}$ é a medida de um segmento orientado (pode ser positiva, negativa ou nula). (2002, p. 53, grifo do autor).

Dante (2002) e Giovanni e Bonjorno (2000) apresentam algumas características das funções circulares seno e cosseno, entre as quais se destacam os sinais, variações, quadrantes e periodicidade das funções. Essas características são encontradas nos livros no decorrer das atividades e exercícios e sistematizadas quando apresentam os gráficos das funções circulares.

Os gráficos das funções circulares sen *x* e cos *x* mantêm as características das funções circulares, tais como sinais, variações e quadrantes, porém assumem a forma de representação geométrica, que possui outras características particulares, como domínio, imagem e período. Destaca-se a seguir o que apresentam os autores dos livros didáticos utilizados pela escola sobre os gráficos das funções seno e cosseno e as características dessas funções. Dante (2002, p. 68) apresenta o gráfico da função sen *x* com características.

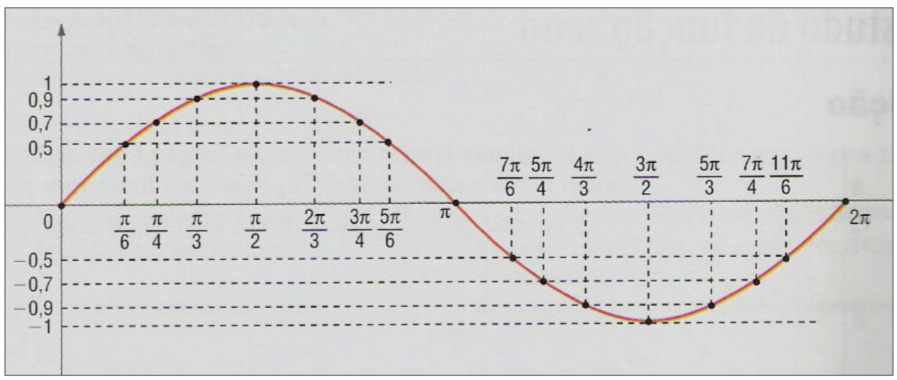


Figura 6 – Gráfico da função sen *x*.

Esse autor afirma que o domínio, a imagem e o período da função sen x dependem das variáveis da função. No caso da Figura 6, afirma que "a imagem é o intervalo [-1, 1]", que, representado na forma de conjuntos, é: "$Im = \{ y \in \Re / -1 \leq y \leq 1 \}$". O domínio da função é o conjunto dos números reais, ou seja, "$D = \Re$". Dante (2002) afirma ainda que "a função y = sen *x* é periódica de período 2π". Descreve que, "observan do o sinal da função seno, vemos que é *positiva* para os valores do 1° e 2° quadrantes e *negativa* para valores do 3° e 4° quadrantes." (2002, p. 67, grifo do autor).

Considerando o gráfico da função cos x, Dante afirma que "a função f(x) = cos *x* é definida no conjunto dos números reais." (2002, p. 74, grifo do autor). Embora a Figura 7 limite o gráfico no eixo das abscissas, o autor afirma que a "curva pode ser estendida para valores menores de 0 e maiores de 2π", constituindo, assim, o "conjunto domínio igual aos

$\Re$". Quanto à imagem, afirma que "ela pertence ao intervalo [-1, 1]", que escrita em forma de conjunto tem-se: $\text{Im} = \{y \in \Re \,/\, -1 \le y \le 1\}$". Acrescenta que "a função y = cos x é periódica de período 2π".

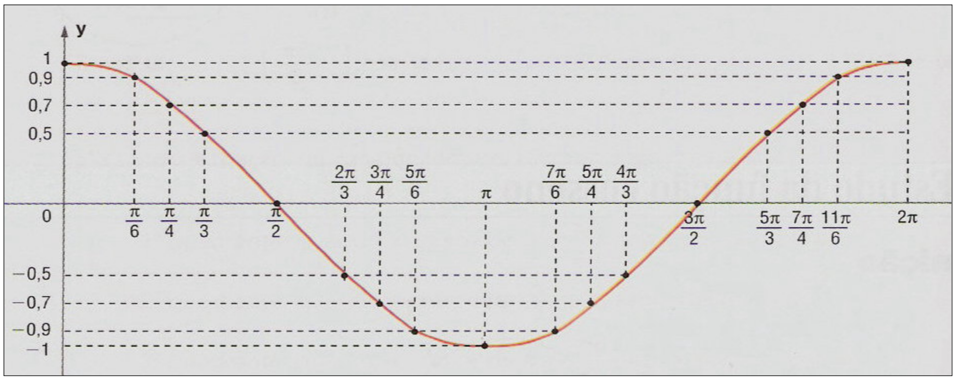


Figura 7 – Gráfico da função cos *x*.

As mesmas características das funções sen *x* e cos *x* apresentadas por Dante (2002) na forma geométrica são descritas, nos quadros a seguir, conforme apresentam Giovanni e Bonjorno (2000) usando a representação algébrica:

QUADRANTE	I	II	III	IV
ARCO	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$
SINAL	$+$	$+$	$-$	$-$
VARIAÇÃO	$0 \rightarrow +1$	$+1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0$
	CRESCENTE	DECRESCENTE	DECRESCENTE	CRESCENTE

Figura 8 - Características da função seno.

QUADRANTE	I	II	III	IV
ARCO	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$
SINAL	$+$	$-$	$-$	$+$
VARIAÇÃO	$+1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow +1$
	DECRESCENTE	DECRESCENTE	CRESCENTE	CRESCENTE

Figura 9 - Características da função cosseno.

As definições apresentadas por Caraça (1998) e nos livros didáticos foram reorganizadas em atividades considerando que no seu desenvolvimento seriam usados os *softwares* Cabri-Géomètre II e Graphmatica.

1.3 Informática e relações com aprendizagem matemática

Segundo Borba (2001), nas duas últimas décadas têm se intensificado no Brasil, estudos de relações entre informática e educação matemática, os quais se tornaram motivo de crescentes pesquisas, principalmente na busca de contribuições da informática para as aprendizagens em matemática. Gravina e Santarosa (1998) afirmam que, nos últimos anos, intensificou-se a produção de recursos tecnológicos que possibilitam uma aprendizagem em matemática que valoriza a ação e a experimentação do aluno sobre o fazer matemática.

Bernard, Ortega Junior e Tavares (2000) mostram que uma das grandes vantagens da utilização de *softwares* na educação matemática é a possibilidade de construir e representar dinamicamente a situação do objeto de estudo, isto é, poder movimentar de várias formas as construções geométricas mantendo-se invariantes suas propriedades. Para estes autores, as atividades de matemática utilizando ambientes informatizados têm servido de elemento motivacional aos alunos e contribuído para ampliar o desenvolvimento do raciocínio lógico no ensino dessa disciplina. De acordo com as experiências de Gravina e Santarosa (1998), as representações dinâmicas possibilitadas pelos softwares de matemática permitem no seu sistema de representação ampliar o caráter estático do conhecimento matemático, ratificando que esse caráter muitas vezes dificulta a construção do significado, tornando o objeto matemático um conjunto de símbolos, palavras ou desenhos a ser memorizado. As autoras constatam ainda:

> A instância física de um sistema de representações afeta substancialmente a construção de conceitos e teoremas. As novas tecnologias oferecem instâncias físicas em que a representação passa a ter um caráter dinâmico, e isto tem reflexos nos processos cognitivos, particularmente no que diz respeito as concretizações mentais. Um objeto passa a ter representação mutável. (1998, p. 4).

As autoras destacam um aspecto importante do pensamento matemático utilizando os ambientes informatizados, por permitirem ao aluno a abstração da invariância, que são as propriedades matemáticas constantes nos objetos em movimento.

Acrescenta-se à discussão uma importante contribuição de Papert (1988), que discute a possibilidade da diminuição da distância entre o concreto e o abstrato, afirmando que o computador possibilita mudar os limites entre o concreto e o formal. Nesse sentido, Gravina e Santarosa (1998) afirmam que "o computador permite criar um novo tipo de objeto - os objetos 'concreto-abstratos'". Atribuem esse conceit o aos objetos manipuláveis e defendem serem "concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados; abstratos por se tratarem de relações feitas a partir de construções mentais." (p. 3).

Podem-se analisar as contribuições dos autores, quando, por exemplo, tratam de gráficos de funções e relacionam os objetos concretos com as representações mentais. Por meio de uma situação concreta pode-se gerar uma função, a qual pode ser representada na forma de gráfico, com ou sem auxílio de *softwares* de matemática. Porém, o *software* permite manipular vários gráficos ao mesmo tempo, alterar variáveis, inverter sentidos, permitindo, dessa forma, abstrações matemáticas sobre relações construídas a partir da manipulação dos gráficos. Segundo Gravina e Santarosa (1998) a vantagem dos ambientes informatizados é "a possibilidade de realizar grande variedade de experimentos em pouco tempo, diferente da manipulação concreta". Consideram ainda que "é a primazia da ação favorecendo o processo de investigação e abstração com a conseqüente construção de conceitos e relações".

Nas reflexões sobre ensino e aprendizagem de matemática com informática tornam-se oportunas as contribuições de vários autores, como, por exemplo, Borba (2001, p. 36), o qual afirma que "as mídias informáticas associadas à pedagogia que esteja em ressonância com as novas tecnologias podem transformar o tipo de matemática que é abordada em sala de aula". O autor apresenta a reflexão no sentido de que a informática deve ser vista como ferramenta de possibilidades. À crítica de muitos educadores sobre quais seriam essas possibilidades, acredita-se ser difícil de responder, pois os contextos educacionais diferenciados, as diferentes culturas, metodologias, *softwares* utilizados, questões ideológicas, entre outros, tornam as possibilidades específicas para cada escola ou situação de aprendizagem. Sem minimizar as possibilidades dos *softwares*, o autor afirma que as questões mais específicas que devem permear as discussões quanto à utilização da informática no ensino devem relacionar os problemas escolares para os quais "o computador é a solução." (p. 11). Borba destaca ainda uma pergunta a ser feita: "Qual é o problema para o qual o computador é a resposta?". Observa-se que as questões que propõe o autor são apresentadas no sentido de postular a educadores a busca de questões mais específicas sobre a utilização da informática como amplificador de possibilidades para as aprendizagens em matemática. O mesmo é observado quando Rigodanzo e Ângelo (2004) alertam, com base em pesquisa realizada utilizando o Cabri Géomètre II no ensino de matemática para 7ª e 8ª séries, que "é prudente destacar também que o uso do computador como recurso didático não vai resolver todos os problemas do ensino e aprendizagem da Matemática, principalmente se o professor não utilizar adequadamente essa ferramenta." (p. 23).

Embora existam muitas críticas considerando a utilização inadequada de *softwares* nas aprendizagens em matemática, principalmente quando faltam reflexões críticas e fundamentação teórica adequada para sustentar a prática, no caso desta pesquisa assume-se uma posição de pesquisador mais otimista. Acredita-se que há possibilidades de reinventar, de ressignificar e ampliar a prática pedagógica de matemática com informática, ratificando a afirmação de Gravina e Santarosa:

> [...] o quão natural e intensas, se tornam, nesses ambientes, as ações, reflexões e abstrações dos aprendizes. O suporte oferecido pelos ambientes não só ajudam a superação de obstáculos inerentes ao próprio processo de construção do conhecimento matemático, mas também podem acelerar o processo de apropriação do conhecimento. Como exemplificou-se, modelos matemáticos significativos e de natureza complexa podem ser trabalhados, sob ponto de vista qualitativo, mesmo que os alunos ainda não dominem a complexidade das equações matemáticas que definem os modelos [...]. Conforme os ambientes tornam-se mais ricos nos seus recursos, mais acessíveis vão se tornando aos alunos idéias matemáticas significativas e profundas. (1998, p. 12).

Outra forma discutida quanto à inserção de recursos da informática nas aprendizagens em matemática está associada a outros recursos materiais. Costa (1997) apresenta uma importante contribuição para a educação matemática ao discutir, em especial, as seqüências de ensino da matemática em três contextos diferentes: no primeiro, verifica os níveis de aprendizagem no mundo experimental usando material concreto e depois no computador; no segundo, de forma inversa ao primeiro e, no terceiro, o da sala de aula. Os resultados desse estudo evidenciam a necessidade de utilização de diferentes recursos no ensino e aprendizagem da matemática. Os gráficos de desempenhos apresentados pela autora mostram vantagem significativa da aprendizagem no contexto do mundo experimental e da informática, ou seja, quando houve a utilização de outros recursos, a aprendizagem tornou-se mais significativa que no contexto da sala de aula em que não se utilizaram recursos.

Rigodanzo e Ângelo (2004) apresentam duas contribuições importantes no uso do *software* Cabri-Géomètre II no ensino da matemática: a primeira é relativa à aprendizagem dos conceitos geométricos, pois afirmam que "o uso do computador força a compreensão de detalhes importantes na formação de conceitos geométricos" (p. 22); o outro aspecto está relacionado à postura do professor na utilização da informática. Segundo os autores,

> a elaboração de atividades cujos passos levem os alunos a construir conceitos de geometria requer um tempo muito maior do que a preparação de uma aula expositiva sobre os mesmos conceitos. Esse tempo maior também se repete durante a transposição didática dos mesmos. (2004, p. 22).

No caso da pesquisa dos autores citados, observa-se uma mudança significativa na postura do professor na sala de aula e nas atividades em laboratório de informática. Segundo os autores, no laboratório o professor não é mais aquele que ensina, mas, sim, aquele que orienta a ação dos alunos visando à aprendizagem na manipulação do *software,* o que requer maior tempo. Observou-se ainda que, no caso da pesquisa de Rigodanzo e Ângelo, os alunos mantinham os primeiros contatos com o *software*. Nesse caso, a experiência ou familiarização dos alunos com as ferramentas do *software* deve ser considerada ao serem comparados aprendizagem e tempo, visto que em sala de aula há uma experiência metodológica de vários anos em atividades desenvolvidas, o que poderá torná-las mais rápidas.

A pesquisa de Rigodanzo e Ângelo ressalta outro aspecto importante nas aprendizagens em matemática, pois reorganiza a direção da aprendizagem ao colocar o aluno como centro do seu processo de aprendizagem. Sobre a postura dos autores citados, no caso desta pesquisa procura-se organizar as atividades de modo a considerar os alunos sujeitos ativos das suas aprendizagens, sem a preocupação com o tempo, e, ainda, considerar que a utilização da informática pode permitir maior liberdade ao aluno na realização de experiências com aprendizagem.

Rigodanzo e Ângelo caracterizam em suas discussões concepções distintas sobre a aprendizagem matemática: uma relaciona-se ao ensino em sala de aula, muito usada na matemática, que afirmam ser mais rápido; outra é a aprendizagem utilizando recursos da informática, o que levaria mais tempo. Penteado considera a necessidade de uma nova postura educacional do professor diante das novas formas de conhecer relacionadas à informática e defende a idéia de uma negociação entre professor e o aluno. De acordo com a autora,

> [...] a professora continua sendo a autoridade dentro da sala de aula, e é ela quem vai conduzir os alunos no sentido de explorar esse ou aquele conceito, mas a negociação entre ela e seu aluno parece ganhar força. O poder legitimado pelo domínio da informação não está só nas mãos da professora, e os alunos conquistam espaços cada vez maiores nesse processo de negociação. (1999, p. 305).

A afirmação da autora conduz a se repensar a postura docente na aprendizagem de matemática, tornando-a mais contextualizada, democrática e libertadora, de modo a levar o aluno a ser agente da apropriação de seus conhecimentos. Essa idéia é valorizada nesta pesquisa porque se acredita que a evolução nos modos de aprendizagem deve acompanhar a evolução da sociedade como um todo, bem como considerar as novas relações que se estabelecem entre professores e alunos; ainda, que as possibilidades de aprendizagem devam ser potencializadas com os mais variados recursos, tornando os alunos cada vez mais autônomos[4] no processo de aprendizagem. Considerando a postura e a ação dos professores, traz-se uma idéia de Papert, o qual salienta:

> Entre as insatisfações não menos encontram-se os sentimentos das crianças; no passado, elas podem não ter gostado da Escola, porém, foram persuadidas a acreditar que esta era o único passaporte para o sucesso da vida. Na medida em que as crianças rejeitam a escola como forma de sintonia com a vida contemporânea, elas tornam-se agentes ativos na criação de pressão para mudança. (1994, p. 13).

---

[4] Usa-se o termo "autônomo" considerando os significados atribuídos por Ferreira (1999, p. 236): "[...] liberdade e independência moral e intelectual [...]". Nesta pesquisa, o termo é utilizado referindo-se à autonomia do aluno diante de uma situação de aprendizagem.

O autor defende formas de aprendizagens em sala de aula que valorizem recursos contemporâneos e a ação do professor no sentido de colocá-lo, juntamente com a escola, como agente promotor de mudança, valorizando as ações e opiniões dos alunos.

Compreender a inserção e a utilização dos recursos da informática aplicados ao ensino da matemática torna-se indispensável ao professor e, sobretudo, compreender as implicações que trarão as ações e as metodologias utilizadas no ensino e na aprendizagem de matemática. Acredita-se que a utilização de recursos da informática possa contribuir significativamente para qualificar as aprendizagens em matemática, e não há dúvidas de que isso implicará a necessária formação e atualização do professor de matemática.

Em busca de aprofundamento teórico-epistemológico são a seguir apresentados subsídios para se compreender o processo de formação dos conceitos científicos na teoria histórico-cultural e, para melhor compreender o papel da linguagem na formação dos conceitos matemáticos, buscam-se subsídios na teoria dos registros de representação semiótica, apresentados a seguir.

1.4 Teoria histórico-cultural

Para compreender o processo de formação dos conceitos, buscou-se aprofundamento teórico-epistemológico na teoria histórico-cultural. Dos conceitos dessa teoria destacam-se aprendizagem e desenvolvimento, elementos mediadores, zona de desenvolvimento proximal, pensamento e linguagem, conceitos espontâneos e científicos e sobre o processo de formação de conceitos científicos em situação escolar.

Como a proposta pedagógica desta pesquisa foi desenvolvida em sala de aula, caracterizando situações organizadas de ensino-aprendizagem, a interação social ocupou um lugar privilegiado. Na abordagem histórico-cultural os processos de aprendizado e de desenvolvimento ocorrem principalmente em situações de interação, nas quais as relações interpessoais são responsáveis por fornecer os elementos da cultura, que internalizados vão constituindo o sujeito psicológico.

Oliveira (1997) explica que as relações sociais estabelecidas entre os indivíduos é algo dinâmico, de trocas num "plano de negociação". Na interação social cada sujeito é ativo e nela acontecem as relações entre o mundo da cultura e o mundo subjetivo de cada um.

Considerando os vários conceitos teóricos postulados pelo autor, busca-se esclarecer outro conceito, o de mediação, pois assume relevância na pesquisa. Baseada em Vygotsky, Oliveira (1997, p. 26) afirma que um elemento mediador é aquele que permite uma intervenção não direta do sujeito sobre o objeto de conhecimento. O uso do elemento mediador ocorre quando uma relação deixa de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento.

Torna-se necessário, então, definir o que é, para Vygotsky, "relação". Observando as definições do autor, é possível entender que relação é "aquilo" que acontece quando o sujeito desenvolve ação sobre o objeto, ou que toda ação é implicada de uma relação entre partes. Segundo Vygotsky (1993), uma relação cognitiva deve ser reflexiva e intencional.

Para a compreensão do elemento mediador destacado por Vygotsky (1991) necessita-se compreender dois conceitos que, embora diferentes, no desenvolvimento do aluno apresentam-se interligados: um ligado ao plano material, chamado de "instrumento mediador", e outro ligado ao plano psicológico, os "signos". A compreensão do que são os instrumentos pode ser feita em Oliveira (1997, p. 29), a qual ressalta que apresentam características sociais e são usados sempre que a relação entre o sujeito e o mundo não se dá de forma direta. Oliveira destaca que os signos são meios auxiliares utilizados para solucionar um dado problema psicológico (p. 30) e são orientados para o próprio indivíduo, ou seja, dirigem-se ao controle das ações psicológicas, internas ao indivíduo. A autora refere-se ao signo como sendo uma "representação" externa, que auxilia em tarefas que exigem memória e atenção e, ainda, como atividades "que podem ser recuperadas em momentos posteriores [...] e podem referir-se a elementos ausentes do espaço e do tempo presente." (p. 29).

Veer e Valsiner observam uma diferença essencial entre instrumentos e signos: "Os signos visam o controle da psique e o comportamento de outros e do próprio indivíduo, enquanto os instrumentos são empregados para dominar a natureza e os objetos materiais." (1999, p. 242). Afirmam ainda que "tal uso de signos externos para dominar processos psicológicos internos significa que o homem domina a si próprio assim como dominou a natureza." Assim, pode-se pensar que, mesmo que os conceitos sejam diferentes, estão imbricados, pois, como um instrumento externo pode gerar um signo mental, um signo mental pode gerar um novo instrumento externo. Outra interpretação que se pode fazer é que um mesmo signo pode ter várias representações e estas serem diferentes para os alunos.

Outros dois conceitos apresentados por Vygotsky são os de ensino e aprendizagem. O autor refere-se aos conceitos de maneira não distinta. Na interpretação de Castorina, Vygotsky entende os conceitos da seguinte forma: "significa o processo de ensino-aprendizagem, justamente para incluir quem aprende, quem ensina e a relação social entre eles" (2003, p. 19), ou no sentido em que Oliveira retoma o termo em russo usado por Vygotsky, *Obuchenie*. A autora afirma que, na tradução do russo para o inglês, e daí para o português, ora significa ensino, ora aprendizagem, muitas vezes se desconsiderando o "processo" e a "relação" (1997, p. 57) existente entre os envolvidos.

Em relação ao processo de aprendizado, o próprio Vygotsky afirma que "não pode, nunca, ser reduzido simplesmente à formação de habilidades, mas incorpora uma ordem intelectual que torna possível a transferência de princípios gerais descobertos durante a solução de uma tarefa para várias outras tarefas." (1991, p. 93-94). Ressalta ainda que "o aprendizado é mais do que a aquisição da capacidade de pensar; é a aquisição de muitas capacidades especializadas para pensar sobre várias coisas."

Oliveira destaca a importância atribuída por Vygotsky ao processo de aprendizado, afirmando que, "desde o nascimento, o aprendizado está relacionado com o desenvolvimento e é um aspecto necessário e universal no processo de desenvolvimento das funções psicológicas culturalmente organizadas e especificamente humanas." (1997, p. 56). E complementa que "o desenvolvimento fica impedido de ocorrer na falta de situações propícias ao aprendizado." (p. 57). Vygotsky atribui importância expressiva às atividades de aprendizagem para a promoção do desenvolvimento, dizendo que

> [...] a aprendizagem não é, em si mesma, desenvolvimento, mas uma correta organização de aprendizagem conduz ao desenvolvimento mental, ativa todo um grupo de processos de desenvolvimento, e esta ativação não poderia se produzir sem a aprendizagem. Por isso, a aprendizagem é um momento intrinsecamente necessário e universal para que se desenvolva na criança essas características humanas não-naturais, mas formadas historicamente. (2000, p. 115).

Vygotsky destaca que a relação entre aprendizagem e desenvolvimento "não é uma relação de identidade, mas uma relação muito mais complexa." (1991, p. 94). Para explicá-la, lança mão do conceito do conceito de zona de desenvolvimento potencial (ZDP), mostrando que crianças com mesma idade podem apresentar diferentes níveis de desenvolvimento. Afirma que "o estado de desenvolvimento de uma criança só pode ser determinado referindo-se a pelo menos dois níveis: o nível de desenvolvimento efetivo e a área de desenvolvimento potencial." (2000, p. 113). O primeiro, também chamado de "desenvolvimento real", caracteriza-se pelas funções já desenvolvidas na criança, ou seja, é possível perceber o desenvolvimento real de uma criança por meio das atividades que ela tem condições de fazer sozinha. Todo o contexto de aprendizagem que ocorre além ou em torno do desenvolvimento real faz parte do desenvolvimento potencial, caracterizando, assim, a "zona de desenvolvimento potencial" como "a diferença entre o nível das tarefas realizáveis com o auxílio de um adulto e o nível das tarefas que podem desenvolver-se com uma atividade independente define a área de desenvolvimento potencial da criança." (2001, p. 112). Quanto à área do desenvolvimento potencial, o autor afirma que permite determinar os futuros passos da dinâmica do desenvolvimento de uma criança e examinar não só o que o desenvolvimento já produziu, mas, também, o que produzirá no processo de maturação.

Outras interpretações sobre o conceito de ZDP podem ser destacadas. Oliveira afirma que "é, pois, o domínio psicológico em constante transformação." (1997, p. 60). Entende -se que o desenvolvimento potencial caracteriza aquilo que a criança é capaz de fazer com a ajuda de alguém hoje será capaz de fazer sozinha amanhã. Dessa forma, para que a ação do professor produza efeito deve atingir esse domínio psicológico, intervindo para impulsionar essa transformação. O próprio Vygotsky (1991, p. 97) destaca a ZDP como uma fase embrionária na qual se encontram os "brotos" ou "flores" de desenvolvimento.

Com base nas reflexões apresentadas, torna-se necessário, como professor, entender que, para a proposição de atividades de aprendizagem, é indispensável conhecer o nível de desenvolvimento real dos alunos. Assim, é possível propor atividades que possam estar agindo na ZDP; quanto maior a ação da atividade na ZDP, maior poderá ser o aprendizado e, conseqüentemente, o desenvolvimento mental do aluno. Para Rego, na ação do professor é possível verificar os ciclos de desenvolvimento que estão em via de formação, permitindo ao professor a "elaboração de estratégias pedagógicas que auxiliam nesse processo." (1995, p. 74).

Nos estudos do desenvolvimento dos conceitos científicos, Vygotsky (1993) mostra a evolução do pensamento em fase, subdividida em estágios. Apresentam-se a seguir algumas características que marcam a passagem das três fases propostas por Vygotsky (1993) e, em especial, dos pseudoconceitos, ou seja, a passagem do segundo estágio, o pensamento por complexo, para o estágio conceitual, objetivo de um olhar especial nesta pesquisa. A primeira fase, chamada "sincretismo", é caracterizada por fatores perceptivo s irrelevantes e os objetos de manipulação apresentam uma proximidade espacial com a criança. Uma criança nesta fase, ao manipular certos objetos, não apresenta, necessariamente, agrupamentos com atributos ou características comuns. Nesse caso, os objetos deverão estar no campo perceptual da criança. O autor também explica que as principais ações ou manifestações conceituais das crianças nessa fase se desenvolvem: por tentativa e erro, por seleção de proximidade com a configuração original e, num terceiro caso, quando a criança organiza vários grupos sincréticos e, a partir desses, organiza outro conjunto sincrético. Observa-se que nesta fase a criança não associa o signo ao seu significado, caracterizando-se suas ações pela instabilidade, tendendo a misturar os diversos elementos em imagens desarticuladas.

A segunda fase, chamada "pensamento por complexos", caracteriza -se, em especial, pelas ações concretas e factuais. O autor afirma que as impressões subjetivas das crianças nesta fase ocorrem principalmente pelo fato de os objetos apresentarem relações entre si. Neste período, o autor argumenta que a criança já superou parcialmente seu egocentrismo e, em relação ao pensamento, já constitui um pensamento coerente e objetivo, porém não há reflexões coerentes sobre esse pensamento, não apresentando ainda condições abstratas e lógicas. A reflexão coerente, abstrata e lógica, somente vai ocorrer na fase seguinte: a do pensamento conceitual.

Vygotsky (1993, p. 52) dividiu a segunda fase do pensamento em cinco estágios: complexos do tipo associativos, coleções, complexos em cadeia, complexo difuso e os pseudoconceitos. Segundo o autor, este último "serve de elo de ligação entre o pensamento por complexo e pensamento conceitual", ou, ainda, "carrega a semente que far á germinar um conceito." (p. 59). Para Vygotsky, o surgimento dos conceitos na criança vem após o uso correto do significado das palavras. Mesmo que a aplicação do significado das palavras da criança coincida com o adulto, seus entendimentos a respeito desse conceito são diferentes. (VEER; VALSINER, 1991, p. 290). Assim, o uso correto da linguagem não é suficiente para caracterizar que o desenvolvimento mental de uma criança esteja na fase do pensamento conceitual. Porém, se o uso da linguagem caracteriza manifestações verbais realizadas por meio de operações lógicas e abstratas e que o pensamento é realizado de forma consciente e intencional, pode-se dizer, então, que a criança revela um pensamento conceitual.

Para interpretação dos dados da pesquisa utilizar-se-á o termo "apropriar-se" do significado do conceito, por entender que os sujeitos até podem formar os conceitos nas interações desenvolvidas, entretanto, sendo um conceito expresso por meio da linguagem, através das palavras ou a escrita, um aluno passa a integrar esse conceito à sua estrutura interna à medida que se apropria do significado da linguagem que representa o conceito. Se apropriar-se significa "tomar posse" (FERREIRA, 1999), quando o sujeito toma posse dos conceitos apropria-se do significado dele.

Para Vygotsky (1993), o processo de desenvolvimento conceitual da criança é marcado por dois tipos de conceitos: os "conceitos espontâneos" e os "conceitos científicos". Os conceitos espontâneos são aqueles construídos pela criança em situações do dia-a-dia, fora de uma instituição escolar, e são baseados principalmente nos adultos do seu meio social. Pode-se afirmar que é nas relações com o meio onde vive, no uso da linguagem, nas interações com seus semelhantes e com os objetos de conhecimento que a criança vai formando os conceitos espontâneos. Sobre os conceitos científicos, o autor ressalta que se desenvolvem principalmente por meio de situações de ensino organizadas e constituem parte de um sistema de conhecimento ao qual as crianças são submetidas numa instituição escolar. Sobre isso Vygotsky afirma: "A disciplina formal dos conceitos científicos transforma gradualmente a estrutura dos conceitos espontâneos da criança e ajuda a organizá-los num sistema; isso promove a ascensão da criança para níveis mais elevados de desenvolvimento". (1993, p. 100).

Relendo a afirmação de Vygotsky na ótica da prática pedagógica, Veer e Valsiner caracterizam os conceitos científicos como sendo "aqueles que haviam sido explicitamente apresentados por um professor na escola. Idealmente, tais conceitos cobriam os aspectos essenciais de uma área do conhecimento e seriam apresentados como sistema de idéias inter-relacionadas." (1991, p. 296).

Vygotsky (1993, p. 80) salienta que "um conceito passa a submeter-se ao controle deliberado somente quando começa a fazer parte de um sistema". Em relação à compreensão dos conceitos matemáticos em situações escolares organizadas para esse fim, considera-se que são inseridos em categorias conceituais. Sempre que um novo conceito é proposto, a sua aprendizagem é mediada por outros conceitos anteriores do aluno. Dessa forma, inicia-se um processo de configuração de conceitos em hierarquias, nas quais existem níveis diferentes de conceitos. Sobre os níveis de conceitos, Vygotsky afirma que, "se consciência significa generalização, a generalização, por sua vez, significa a formação de um conceito supra-ordenado que inclui o conceito dado em um caso específico". A relação entre os conceitos subordinados que mediavam o conceito novo, supra-ordenado, é que configura um "sistema de relações e de generalidade", caracterizando a inclusão de um conceito científico num sistema de conceitos.

Ao referir-se aos dois tipos de conceitos, Vygotsky (1993) afirma que ocorrem em direções inversas: inicialmente distantes, chegam ao ponto de se encontrarem. Os conceitos espontâneos configuram-se principalmente no início da vida e em situações do dia-a-dia, na interação com o adulto e são ascendentes, ao passo que os conceitos científicos são descendentes, pois tendem a se dirigir dos níveis abstratos, intencionais e lógicos aos níveis mais elementares e concretos.

Outros aspectos a destacar, e que Vygotsky (1993) considerou importante, são os conceitos relacionados ao pensamento e à linguagem. Para o autor, a linguagem apresenta duas funções em especial: uma se relaciona ao "intercâmbio social", e a outra, ao "pensamento generalizante". O intercâmbio social tem como característica servir de elo de comunicação entre os indivíduos e, além disso, simplifica e generaliza as experiências, ordenando as instâncias do mundo real em categorias conceituais cujo significado é compartilhado pelos usuários da linguagem. Vygotsky (2000) afirma que, quando um aluno faz uso da linguagem para expressar um determinado conceito referente a um objeto, está, na verdade, classificando-o em categorias, numa classe de objetos que possuem certos atributos comuns. Segundo o autor, a linguagem estaria auxiliando no processo de abstração e generalização.

Em relação ao pensamento generalizante, pode-se inferir, a partir de Vygotsky, que o uso de palavras com significados sociais para comunicação entre pessoas serve como forma de intercambiar conceitos entre os usuários da linguagem. Entende-se que, quando um conceito é utilizado para comunicação entre pessoas, já é um conceito generalizado pelos usuários da linguagem. Oliveira afirma que "é essa função de pensamento generalizante que torna a linguagem um instrumento de pensamento: a linguagem fornece os conceitos e as formas de organização do real que constituem a mediação entre sujeito e objeto de conhecimento." (1997, p. 43).

Assim, a partir das idéias de Vygotsky, torna-se necessário considerar a utilização da linguagem como forma de expressão de conceitos ao procurar compreender o processo de formação dos conceitos das funções trigonométricas e, dessa forma, utilizá-la para representar a construção do pensamento generalizado sobre funções. Portanto, no momento em que um aluno fizer uso da fala para expressar um conceito, por exemplo, o da função trigonométrica seno, e esse conceito, traduzido pelas palavras, for entendido por outro aluno, pode-se entender que está se constituindo um pensamento generalizante sobre a função trigonométrica seno.

Nas atividades da proposta pedagógica da pesquisa, a discussão e socialização dos conceitos assumem funções importantes e serão consideradas como instrumentos de comunicação e intercâmbio social entre os sujeitos. A teoria de Vygotsky confirma a idéia de que se devem promover nos momentos de aprendizagem debates que levem o aluno à reflexão e ao intercâmbio de idéias. Considerando isso, o autor afirma:

> Todas as funções psicológicas superiores aparecem duas vezes no decurso do desenvolvimento da criança: a primeira vez, nas atividades coletivas, nas atividades sociais, ou seja, como funções interpsíquicas: a segunda, nas atividades individuais, como propriedades internas do pensamento da criança, ou seja, como funções intrapsíquicas. (2001, p. 114).

Se, para o autor, a linguagem é forma de expressão de pensamento conceitual, ele mesmo afirma que a linguagem serve de referência a todo o problema examinado, pois "origina-se em primeiro lugar como meio de comunicação entre a criança e as pessoas que a rodeiam. Só depois convertido em linguagem interna, transforma-se em função mental interna que fornece os meios fundamentais ao pensamento da criança." (p. 114). Afirma também que "o pensamento nasce pela primeira vez quando há uma discussão entre crianças, e só depois o pensamento apresenta-se na criança como atividade interna [...] Como a linguagem interior, o pensamento nasce do complexo de inter-relações entre as crianças e as pessoas que a rodeiam [...]." (2001, p. 114). Essas inter-relações, desenvolvidas entre os sujeitos participantes da pesquisa, poderiam estar originando a expressão da linguagem e do pensamento dos sujeitos.

Outra observação a considerar nas manifestações da linguagem dos sujeitos é que o significado das palavras caracteriza-se por dois componentes, o significado e o sentido. Segundo Oliveira (1997), o significado apresenta uma estrutura mais estável, construída num contexto social pertencente a um sistema de relações mais objetivas. Quanto ao sentido da palavra, a autora afirma que liga o significado objetivo do contexto de uso da língua, referindo-se ao atribuído de forma individual, caracterizado pelas vivências afetivas e pessoais do usuário.

Vygotsky destaca dos estudos da linguagem de Tolstoi um aspecto importante para a prática pedagógica. Considera que o uso das palavras no ensino direto de um conceito, realizado por um professor, "é impossível e infrutífero" e que tal prática gera um "verbalismo vazio" (1993, p. 72), entendimento de considerável importância para a prática pedagógica. Nesse caso, não há uma ligação mais estreita entre o conceito e a realidade social do sujeito, nem uma necessidade pessoal de apropriar-se do seu significado, pois para si não possui sentido. O autor afirma que "a criança necessita de uma oportunidade para adquirir um novo conceito a partir de um contexto", o qual deve significar a apropriação do conceito. Dessa forma, pode-se ratificar que a melhor aprendizagem, no mínimo, necessita de um motivo próprio do aluno ao novo conceito, de forma que sinta a necessidade de tal aprendizagem, pois, segundo o autor, é impossível um conceito ser simplesmente transmitido do professor para o aluno.

Após aproximar alguns dos principais conceitos sobre a teoria histórico-cultural a serem considerados na análise dos dados da pesquisa, passa-se a apresentar na seção seguinte algumas aproximações com a teoria dos registros de representação semiótica.

1.5 Teoria dos registros de representação semiótica

Raymond Duval propõe uma teoria sobre registros de representação semiótica na aprendizagem em matemática, referindo que

> a originalidade da abordagem cognitiva está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite ao aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade de processos matemáticos que lhe são propostos em situações de ensino. (2003, p. 12).

Eis um desafio aos educadores matemáticos, pois compreender o processo cognitivo dos alunos para interferir nele e impulsionar o seu desenvolvimento é tarefa complexa. O próprio autor reconhece a amplitude e a complexidade do cenário em que vive quando afirma:

> Essas questões passam a ter uma amplitude e uma importância particulares com a recente exigência de uma maior formação matemática inicial para todos os alunos, a fim de prepará-los para enfrentar um ambiente informático e tecnológico cada vez mais complexo. (Duval, 2003, p. 11).

A necessidade de mudanças, com novas exigências à formação dos professores e alunos, e o novo cenário social com informática tornaram esse processo mais complexo. A teoria proposta por Duval pode auxiliar na compreensão dos processos cognitivos matemáticos dos alunos durante as aprendizagens em matemática e traz contribuições para a organização de propostas de aprendizagem, visto que discute o funcionamento cognitivo do pensamento matemático por meio dos diferentes registros de representação semiótica.

Considerando as aprendizagens em matemática, Duval explicita em seus textos que estas apresentam particularidades específicas que as complexificam, principalmente relacionadas às formas de linguagem própria usadas pela matemática. Essa linguagem específica da matemática é muitas vezes diferente dos outros domínios do conhecimento. Nesse sentido, o autor afirma que há uma variedade de representações semióticas utilizada em matemática – além do sistema de numeração, existem as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural. (2003).

Observando a linguagem própria da matemática, Duval apresenta entre as idéias principais de sua teoria que, para a compreensão de um objeto matemático, o aluno necessita transpor o mesmo objeto a forma de representação diferente. Afirma que "a originalidade matemática está na mobilidade simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação." (2003, p. 14). Para compreensão das idéias centrais do autor sobre a importância dos diferentes registros de representação nas aprendizagens em matemática, apresentam-se alguns conceitos relacionados à teoria.

Inicialmente, procura-se esclarecer o que define Duval (2003) como "representação" e "objeto" matemático. Segundo Moretti, compreender os dois conceitos torna -se essencial para a compreensão da proposta de Duval. Moretti, além de afirmar que "em matemática, esta separação é fundamental" (2002, p. 345), diferencia os conceitos exemplificando da seguinte forma: *1, 3-2, 4/4, 5°*, referindo-se a quatro formas de representação diferentes de um mesmo objeto matemático. Pode-se, pois, interpretar que, para o autor, a representação tem relação com a operação matemática envolvida, no caso a subtração, divisão e potência, e o objeto, com o resultado ou o conceito representado, o *1*. Para Moretti um aluno pode reconhecer o objeto matemático na representação *3 – 2,* mas não conseguir fazer o mesmo em *4/4* ou em *5°*.

Outro exemplo que pode auxiliar no esclarecimento da definição de objeto matemático e sua representação é o seguinte: é solicitado a um aluno determinar o denominador da fração na expressão a seguir:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{50}+\frac{1}{?}$$

Moretti (2002) relata que a maioria dos alunos não consegue resolver esse problema. Porém, ele mesmo propõe a transformação do problema para números na forma decimal:

$$0{,}5 = 0{,}25 + 0{,}125 + 0{,}100 + 0{,}02 + \mathbf{?}$$

A seguir, afirma que a sua solução torna-se banal e que sem dificuldades pode-se obter o resultado 0,005, que, passado para a forma fracionária, é $\frac{1}{200}$. Com os dois exemplos, Moretti apresenta diferenças que mostram que a compreensão de um objeto matemático está intimamente ligada à forma de representação desse objeto.

Retomando idéias originais de Duval, este afirma que '[...] o conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que do objeto representado." (2002, p. 22). Pode-se relacionar a idéia do autor com o exemplo anterior de Moretti, pois nem todas as representações diferentes do mesmo objeto serão compreendidas pelos alunos. É necessário que o professor busque formas de representações mais adequadas, que venham ao encontro das aprendizagens de seus alunos.

Em relação às aprendizagens em matemática e referindo-se ao descrito acima, Duval defende como uma condição essencial que

> [...] a compreensão em matemática está intimamente ligada ao fato de dispor ao menos de dois registros de representação diferentes. Essa é a única possibilidade de que se dispõe para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado. [...] É a articulação entre os registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática [...]. (2002, p. 22).

Considerando as funções trigonométricas nas atividades da proposta pedagógica da pesquisa, Damm (1999) afirma que caracterizam diferentes registros. O autor traz um exemplo onde destaca: "A função pode ser represen tada através da expressão algébrica, tabelas e/ou gráficos que são diferentes registros de representação." (p. 137).

Como é parte do objetivo da pesquisa realizar atividades com as funções trigonométricas seno e cosseno usando dois *softwares* diferentes, um que possibilita as representações geométricas e outro as representações gráficas, e, ainda, as representações algébricas inerentes às atividades e as definições, que irão sendo definidas no decorrer dos encontros, as atividades caracterizavam três registros de representação semiótica diferente. Assim, poder-se-á observar a influência desses diferentes registros na formação dos conceitos das funções trigonométricas.

A necessária articulação de um mesmo objeto entre diferentes registros de representação semiótica proposta por Duval é condição à compreensão em matemática, citada anteriormente, mas pode tornar-se algo complexo. Kaleff (2005), em experiência realizada com uma professora, que possui "uma longa e profícua experiência com prática relacionada em atividades matemáticas – apresenta dificuldades na articulação de registros", demonstrou que as imagens geométricas formadas pela docente dificultavam a formação de outros registros, o que pode tornar-se positivo ao se trabalhar um objeto matemático pela primeira vez com os alunos, visto que ainda não há um registro mental formado. Pensando de outro modo, se a professora com experiência profícua em atividades matemáticas encontrou dificuldades em relacionar a compreensão por meio de dois registros de representação diferentes, como os alunos aceitarão as atividades da pesquisa que utilizam, no mínimo, três registros de representação diferentes que são apresentados em dois *softwares* diferentes e, ainda, em forma de texto? Nesse sentido, Duval afirma que, "se o objeto é acentuar a compreensão de uma noção matemática, *pode ser importante que tais seqüências sejam construídas por dois ou três pares de registros* [...]" (2003, p. 27, grifo do autor).

Duval refere-se aos pares de registro, propondo que para a compreensão do objeto matemático deve-se considerar sua articulação nos dois sentidos da conversão. Afirma que há conversão entre registros quando mudam esse registro, por exemplo, um mesmo objeto escrito na forma algébrica passa a ser representado na forma gráfica. Quando a mudança ocorre dentro do mesmo registro, por exemplo, quando um cálculo fica estritamente no mesmo sistema de escrita, ocorre apenas o tratamento da informação. Sobre a articulação entre diferentes registros de representação semiótica destaca o autor:

> A constituição das seqüências depende evidentemente da natureza dos fenômenos que se deseja estudar. Quando se trata da articulação entre dois registros em relação à representação de um objeto matemático, duas ou três condições devem ser efetivamente respeitadas: primeiramente, a seqüência deve ser construída de uma série de tarefas que tratem dos *dois sentidos da conversão*; em segundo lugar, para cada sentido da conversão deve haver tarefas que comportem casos de congruência e *casos mais ou menos complexos de não-congruência.* (p. 27 - grifos do autor).

O desenvolvimento da proposta pedagógica da pesquisa possibilitará refletir sobre o que Duval afirma sobre a pluralidade de registros de representação como condição para a compreensão das atividades matemáticas. (2003, p. 31).

2. A PROPOSTA PEDAGÓGICA DA PESQUISA

Neste capítulo são apresentadas as principais estratégias didáticas utilizadas na estruturação da proposta pedagógica da pesquisa. Com base no objetivo da pesquisa, que é analisar o processo de formação dos conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno, organizaram-se as atividades da proposta para os alunos. Nessa proposta é privilegiada a ação dos alunos sobre o fazer matemática. As atividades foram desenvolvidas em duplas, com os alunos manipulando os *softwares* para se apropriarem dos conceitos propostos.

Utilizaram-se atividades para organizar a aplicação da proposta da pesquisa, por se acredita, como Nuñes e Ramalho, que "é na atividade que se produzem as interações entre o indivíduo com o objeto de conhecimento." (2004, p. 54). Os autores ainda destacam que

> [...] quando a aprendizagem implica uma atividade caracterizada por expressiva novidade, e para qual o aluno não tem as representações necessárias para apropriar-se do objeto de estudo, o processo de internalização da atividade externa com objetivos para a atividade interna como representação mental tem um significado vital. (2004, p. 54).

Por se acreditar que as atividades poderiam provocar e impulsionar as interações dos sujeitos e, dessa forma, permitir a apropriação de conceitos, organizou-se a pesquisa em atividades caracterizadas a seguir. Pensando-se em privilegiar nessas atividades as ações dos sujeitos, procurou-se também valorizar as atividades de exploração. Conforme registram Gravina e Santarosa (1998) e ratificam Kampff, Machado e Cavedini (2004), essas atividades devem levar os alunos a interagir, manipulando, buscando compreender, estabelecendo relações e construindo conceitos. Afirmam ainda que, diferentemente da representação de um objeto matemático com lápis e papel, na tela do computador é possível alterar diretamente representações dos objetos matemáticos, buscando fazê-los variar e, dessas variações, abstrair as invariâncias. Durante a organização e desenvolvimento da proposta, sempre se procurou encaminhar as atividades levando à aprendizagem dos conceitos conforme descrevem os autores.

Ainda, parte considerável das concepções sobre a proposta da pesquisa é o dinamismo, possibilitado, principalmente, nos ambientes informatizados ou com uso de *softwares* de matemática. Segundo Gravina (1996), os *softwares* com ambientes dinâmicos possibilitam expandir para além do tratamento reprodutivo muitas vezes apresentado pelos livros didáticos; possibilitam a análise de situações do tipo "construa", atividades essas que levam o aluno a estabelecer estratégias próprias de investigação em busca da construção de conceitos geométricos.

Segundo a autora, uma das principais contribuições dos *softwares* com características dinâmicas para apropriação dos conceitos geométricos é que possibilitam a movimentação das figuras, possibilitando seu tratamento de formas diferenciadas, favorecendo o reconhecimento dos traçados particulares da figura e, assim, estabelecendo um equilíbrio entre o espaço figural e o conceitual. Nas atividades envolvendo o *software* Cabri-Géomètre II, os sujeitos recebiam um arquivo dinâmico[5] para manipular e, orientados pela atividade, deveriam interagir com os colegas para definir e se apropriar de conceitos.

O desenvolvimento da pesquisa caracterizou-se por encaminhar cada atividade – uma folha – orientando as interações e as apropriações dos conceitos dos sujeitos. No início, eram feitos comentários gerais sobre o seu desenvolvimento para orientar o trabalho da dupla e, durante a atividade, procurava-se auxiliar os alunos apenas nos momentos de real necessidade, a fim de que fosse possível observar suas interações e apropriações. Ao final de cada atividade, eram reunidas as construções e definições dos grupos – duplas ou trios – para definir, na ótica da matemática, os conceitos inerentes à atividade.

As interferências do professor/pesquisador nos grupos, quando necessário ou solicitado, ocorriam de forma a não responder diretamente, e, sim, a provocar questionamentos procurando orientar o pensamento, discutindo e, se necessário, indicando a

[5] Gravina e Santarosa (1998) referem-se aos arquivos dinâmicos destacando um aspecto importante das representações matemáticas utilizando os ambientes informatizados, pois permitem ao aluno a abstração das propriedades matemáticas na manipulação dos objetos matemáticos em estudos. Bernard, Ortega Junior e Tavares (2000) dizem serem as propriedades matemáticas constantes nos objetos em movimento como sendo as invariâncias, ou seja, as propriedades constantes sendo mantidas nos objetos (figuras) em movimento.

folha da atividade ou os arquivos dinâmicos dos *softwares*. As atividades foram realizadas em grupos organizados pelos próprios alunos.

A Figura abaixo apresenta o organograma com a estrutura do como a pesquisa foi organizada. As atividades serão detalhadas a seguir.

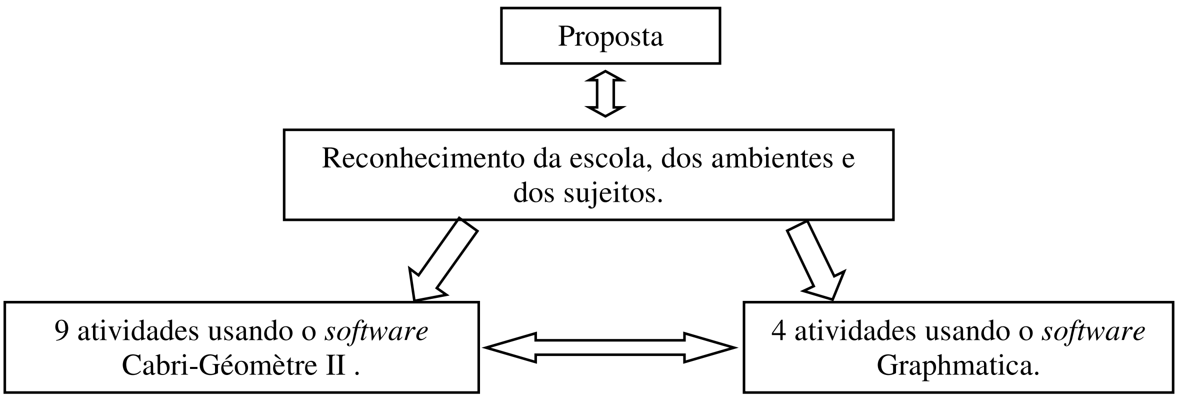


Figura 10 – Organização da proposta da pesquisa.

Embora já houvesse idéias preliminares sobre a problemática da pesquisa e do objeto matemático a ser desenvolvido, foram sendo mais bem definidas no momento em que se estabeleciam os primeiros contatos com a escola e com os sujeitos. Nos contatos preliminares percebeu-se a necessidade de saber qual era a aproximação dos alunos com o laboratório de informática, visto que, durante observações em sala de aula, os sujeitos pouco manifestavam sobre o laboratório de informática da escola. Observado isso, elaborou-se um questionário (Apêndice A) visando identificar qual era a aproximação dos alunos com o laboratório de informática e como, de forma geral, eles utilizavam o computador para atividades básicas.

As informações obtidas com o questionário foram decisivas para a organização das atividades, pois verificou-se ser oportuno aproximar os alunos do ambiente do laboratório de informática da escola e dos *softwares* que seriam utilizados. Considerando essas informações, organizou-se a atividade 01 de familiarização, caracterizada a seguir. A forma como essa e as demais atividades foram organizadas deveria proporcionar ao professor/pesquisador a observação das manifestações dos alunos em relação aos objetivos propostos para, assim, ser possível verificar a apropriação dos conceitos e a compreensão matemática pela conversão dos diferentes registros de representação. Optou-se por essa organização para poder observar, em momentos mais específicos das interações entre os alunos e deles com o *software*, a apropriação dos conceitos propostos nos objetivos.

A estrutura de cada atividade continha uma seqüência de orientações e questões que deveriam subsidiar a discussão e as interações dos grupos para a construção das definições e apropriação dos conceitos.

A primeira atividade[6] de familiarização tinha como objetivo específico familiarizar os alunos com o *software* Cabri-Géomètre II e desenvolver algumas habilidades quanto à utilização de suas ferramentas. Ainda, observar a possibilidade que o *software* oferecia para realizar atividades matemáticas usando suas ferramentas, tais como a construção de figuras; medidas de comprimento da circunferência, raio e diâmetro; superfície e suas unidades de medidas; definição de arco e sua unidade de medida e medir ângulos; movimentação de figuras, entre outras.

As demais atividades caracterizadas a seguir identificam-se como de exploração, ditas dessa forma porque nelas os alunos deveriam explorar os arquivos dinâmicos em busca de apropriar-se dos conceitos. A atividade 1 objetivava aproximar as representações das razões trigonométricas do triângulo retângulo, desenvolvidas anteriormente em sala de aula, para o ciclo trigonométrico, e verificar que estas não dependem do tamanho do triângulo retângulo, mas, sim, do ângulo que as forma. O arquivo dinâmico utilizado pelos alunos na atividade 1 é o apresentado na Figura 11.

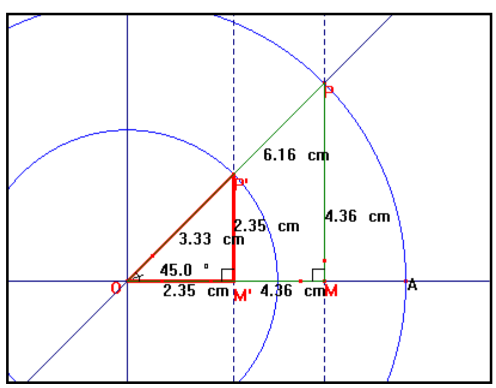


Figura 11 – Arquivo dinâmico utilizado na atividade 01
com o *software* Cabri-Géomètre II.

---

[6] Todas as atividades aplicadas aos alunos durante a pesquisa encontram-se disponíveis para consulta no Apêndice B.

A atividade 2 teve como objetivo definir a relação existente entre o arco, o raio e o ângulo central no ciclo trigonométrico, em radianos, e definir o valor de π como sendo o comprimento da circunferência dividido pelo diâmetro.

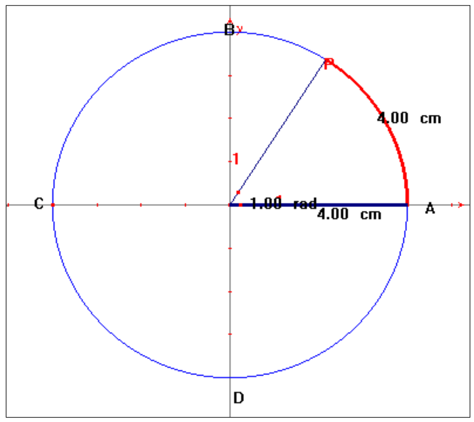


Figura 12 – Arquivo dinâmico utilizado na atividade 02
com o *software* Cabri-Géomètre II.

A atividade 3 buscou observar o ciclo trigonométrico, seus eixos coordenados, e definir a divisão dos quadrantes, com seus respectivos arcos e ângulos. Nesta atividade os alunos manipularam o seguinte arquivo:

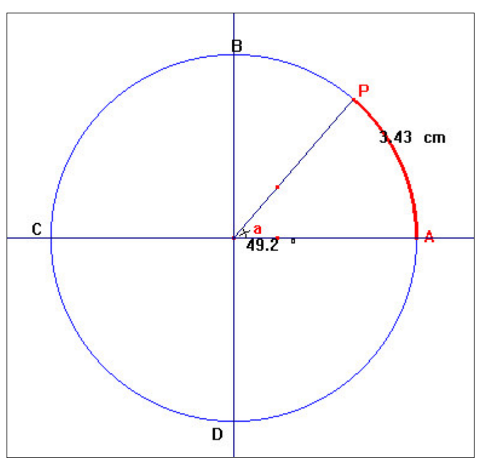


Figura 13 – Arquivo dinâmico utilizado na atividade 03
com o *software* Cabri-Géomètre II.

Na atividade 4 propôs-se verificar que o tamanho do arco depende do comprimento do raio e do ângulo que o forma. Para orientar o desenvolvimento dessa atividade, os alunos receberam o arquivo a seguir (Figura 14).

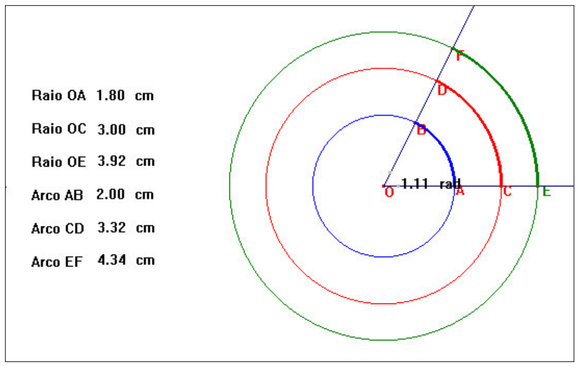


Figura 14 – Arquivo dinâmico utilizado na atividade 04
com o *software* Cabri-Géomètre II.

A atividade 5 foi desenvolvida em sala de aula, com o objetivo de exercitar e aplicar os conceitos definidos nas atividades anteriores no laboratório de informática. As atividades propostas até a atividade 5 foram importantes para que os alunos se apropriassem de vários conceitos pertencentes à parte integrante da proposta da escola e serviram para retomar ou aproximar conceitos necessários às atividades 6 e 7, nas quais seriam definidos os conceitos das funções seno e cosseno no ciclo trigonométrico e suas características.

Através da atividade 6 procurou-se definir o conceito da função trigonométrica seno no ciclo trigonométrico, como sendo a projeção do cateto oposto sobre o eixo das ordenadas $\overline{OM}$; observar os limites da função seno entre -1 e 1; identificar suas variações crescente e decrescente e os sinais da função nos respectivos quadrantes. Para esta atividade os alunos usaram o arquivo dinâmico a seguir (Figura 15).

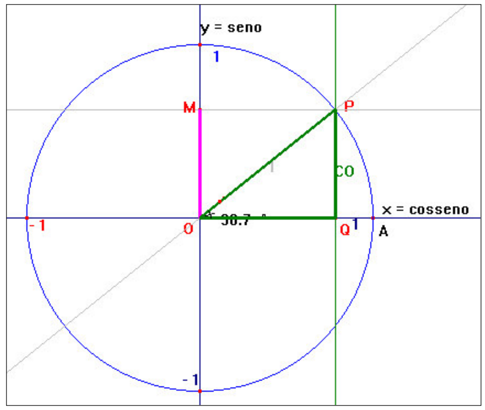


Figura 15 – Arquivo dinâmico utilizado na atividade 06
com o *software* Cabri-Géomètre II.

Com realização da atividade 7 buscou-se definir o conceito da função trigonométrica cosseno no ciclo trigonométrico como sendo a projeção do cateto adjacente sobre o eixo das abscissas $\overline{OQ}$; observar os limites da função cosseno entre -1 e 1; identificar suas variações crescente e decrescente e os sinais da função nos respectivos quadrantes.

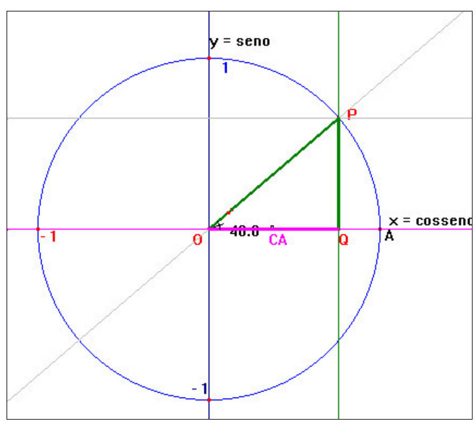


Figura 16 – Arquivo dinâmico utilizado na atividade 07
com o *software* Cabri-Géomètre II.

Após a realização da atividade 7, foi proposta aos alunos outra atividade a fim de sistematizar os conceitos definidos nas atividades 6 e 7. Isso porque se observou que eram vários e diferentes conceitos em atividades semelhantes, o que poderia confundi-los. A atividade 8, portanto, facilitaria a organização das definições das funções trigonométricas seno e cosseno. Na seqüência da atividade 8 realizou-se a avaliação 1, caracterizada no final deste capítulo, após a descrição das atividades.

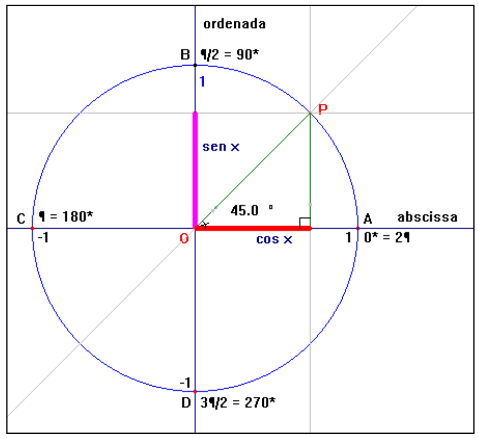


Figura 17 – Arquivo dinâmico utilizado na atividade 08
com o *software* Cabri-Géomètre II.

Todas as atividades desenvolvidas até então usavam, principalmente, para orientação a linguagem escrita e em alguns momentos a forma algébrica, tendo de ser transposta no *software* usando a representação geométrica. Nessas conversões os alunos deveriam interagir para construir definições e conceitos, os quais deveriam ser sistematizados em forma de respostas, usando a linguagem escrita e a forma algébrica. Na passagem para as atividades seguintes estaria sendo acrescentada a forma de representação gráfica das funções seno e cosseno.

As quatro atividades a seguir, de 9 a 12, foram desenvolvidas com o *software* Graphmatica, propostas para que os alunos se apropriassem dos conceitos relacionados aos gráficos das funções circulares definidos até então, bem como para complementar os conceitos das funções circulares e converter[7] as representações dos conceitos para forma de gráfico. Nessas atividades os alunos não recebiam arquivos para manipular e, sim, eram orientados a construir os gráficos e analisá-los.

---

[7] Usa-se o termo "conversão" atribuindo o mesmo sentido que Raymon d Duval o faz em sua teoria. O autor afirma que, para que o aluno não confunda o objeto matemático com sua representação, deve converter esse objeto em diferentes registros de representação semiótica.

A atividade 9 teve como objetivo conhecer o *software* Graphmatica e converter as representações do ciclo trigonométrico da forma geométrica para a tabela-resumo na forma algébrica e, dessa, para o gráfico da função y = sen (x); ainda, definir o domínio, a imagem e o período da função y = sen (x).

A atividade 10 foi proposta com o objetivo de definir a ação das variáveis a, b e α na função y = ± a ± b.sen (α x) e suas implicações na curva do gráfico, identificando o domínio, a imagem e o período numa função e num gráfico qualquer.

Definir a função das variáveis a, b e α da função y = ± a ± b.cos (α x) e suas implicações na curva do gráfico, identificando o domínio, a imagem e o período de uma função qualquer, eram os objetivos da atividade 11.

A atividade 12 foi realizada em sala de aula a fim de exercitar e verificar o nível de compreensão e transposição dos conceitos e características dos gráficos das funções seno e cosseno sem o auxílio do software Graphmatica. Após a atividade 12, foi desenvolvida a avaliação 2.

Na pesquisa foram organizados dois momentos específicos de avaliações. A organização dessas avaliações efetivou-se de forma a integrar metodologicamente as atividades da proposta da pesquisa e servir, também, como momento para os alunos sistematizarem alguns conceitos construídos nas atividades anteriores (Apêndice C). Uma foi desenvolvida logo após a conclusão das atividades com o *software* Cabri Géomètre II e outra, ao final das atividades com o *software* Graphmatica.

A análise das avaliações efetivou-se de forma qualitativa, procurando-se observar nas interações dos sujeitos a reconstrução dos conceitos definidos nas atividades anteriores acrescentando-se observações referentes à influência dos instrumentos e signos mediadores e à capacidade de conversão dos objetos matemáticos nos diferentes registros de representação.

A primeira avaliação, desenvolvida logo após as atividades com o *software* Cabri-Géomètre II, ocorreu de três formas distintas para três grupos diferentes de alunos, dos quais dois permaneceram na sala de aula e o terceiro foi ao laboratório de informática, podendo fazer uso do *software*. O organograma abaixo apresenta o local e a forma como os grupos foram distribuídos para a realização da avaliação 1.

Avaliação 1		
Grupo 1 Desenvolvida em sala de aula por quatro duplas.	Grupo 2 Desenvolvida em sala de aula por quatro duplas.	Grupo 3 Desenvolvida no laboratório de informática por cinco duplas.

Figura 18 – Organização da avaliação 1.

Os conceitos envolvidos na avaliação 1, para os três grupos, eram semelhantes, diferenciando-se pela formas como foram apresentados aos alunos. As quatro duplas do grupo 01 receberam a avaliação apenas com questões para representar conceitos construídos nas atividades anteriores. As duplas do segundo grupo receberam as mesmas questões da avaliação do Grupo 1, porém nesta, sempre que possível, era acrescentado um signo mediador à questão. Esses signos eram constituídos de figuras dos arquivos dinâmicos utilizados nas atividades anteriores para definição e apropriação dos conceitos. Objetivava-se, com isso, verificar a influência do elemento mediador na aprendizagem matemática (Apêndice C). O Grupo 3 iria desenvolvê-la no laboratório de informática. Este grupo recebeu a mesma avaliação do Grupo 1 sem os elementos mediadores, porém poderia usar e manipular o arquivo dinâmico (Apêndice D), semelhantes aos utilizados durante as aulas, caracterizando o uso de elemento mediador. Esse grupo responderia às questões da avaliação utilizando o *software* no laboratório de informática.

Para a avaliação, nenhum grupo tinha acesso ao material onde teriam registrado os conceitos definidos anteriormente, mas poderiam interagir e discutir com o colega da dupla para representar os conceitos.

A segunda avaliação desenvolveu-se após as atividades com o *software* Graphmatica. Nesta, todos os grupos desenvolveram a mesma avaliação em sala de aula, pois se considerou que a organização da avaliação utilizando este *software* levaria os alunos a respostas de forma direta, o que dificultaria a identificação do nível de compreensão dos conceitos dos alunos. A segunda avaliação foi organizada para analisar qualitativamente as interações ou discussões nos grupos e a influência dos signos mediadores. Nesta avaliação, além de representar os objetos matemáticos definidos nas atividades anteriores, acrescentou-se a conversão dos objetos matemáticos nos diferentes registros de representação (Apêndice C).

Considerando que seria necessário retomá-las posteriormente para melhor desenvolver as análises em busca de possíveis respostas aos questionamentos iniciais e aos objetivos da pesquisa, registraram-se as atividades desenvolvidas em vídeo e áudio. Outro recurso utilizado durante as atividades foi o registro imediato de manifestações dos alunos, o qual, no final de cada atividade, constituía-se num relatório da atividade.

No laboratório existia um quadro onde, na sistematização final das atividades, registravam-se as contribuições dos grupos, não sendo necessário, para isso, retornar à sala de aula. As atividades iniciariam logo após a conclusão do estudo da trigonometria no triângulo retângulo, realizadas pela professora titular, e eram desenvolvidas em dois encontros semanais, com dois períodos de 45 minutos cada.

No capítulo a seguir, apresenta-se a análise dos dados coletados nas atividades e nas avaliações, buscando destacar o processo de formação dos conceitos.

3 ANALISANDO O PROCESSO DE FORMAÇÃO DOS CONCEITOS

Para desenvolver a análise após a aplicação da proposta pedagógica da pesquisa tomou-se como categoria geral o processo de formação dos conceitos. Na análise destacam-se algumas interações mais significativas que contribuíram para o processo e modo como os diferentes registros de representação influenciaram na apropriação do significado dos conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno. Destacam-se também contribuições que podem qualificar práticas pedagógicas de aprendizagem em matemática utilizando os *softwares* Cabri-Géomètre II e Graphmatica. Salienta-se que as interações dos sujeitos durante a pesquisa foram muito diversificadas, podendo ser observadas sob diferentes aspectos, entretanto dar-se-á destaque àquelas que enriqueceram a formação de conceitos. Sendo as interações muito diversificadas, tornam complexa a análise, sobretudo, porque na transcrição utiliza-se apenas a linguagem escrita, e os dados coletados eram carregados de sentimentos, ações, manifestações, movimentos, discussões, característicos de uma sala de aula.

O primeiro ponto a destacar, observado na primeira atividade, criada para aproximar os sujeitos do *software* que seria utilizado, é que ela contribuiu além do objetivo previsto, que era familiarizar os alunos com o *software* e desenvolver algumas habilidades no manuseio de suas ferramentas. Nela se observaram momentos ricos em que se revisavam vários conceitos relacionados que seriam trabalhados a seguir, como, por exemplo, o de raio e diâmetro da circunferência, arco e ângulo, algumas unidades de medidas e a construção e manipulação de figuras dinâmicas. Verificou-se que o dinamismo possibilitado pelo *software,* até então não conhecido pelos alunos, contribuiu de forma especial, pois ficou explícito o envolvimento dos alunos ao observarem movimento nas figuras e nelas buscarem encontrar respostas para as questões de matemática da atividade. As interações da primeira atividade foram ampliadas gradativamente à medida que as atividades iam sendo desenvolvidas. Foi possível observar que, quanto maior era o domínio das ferramentas do *software* e a compreensão da metodologia usada, maior era a segurança demonstrada pelos sujeitos ao desenvolverem as atividades.

Já na primeira atividade observou-se que a característica dinâmica possibilitada pelo software educacional, apresentada nos estudos de Bernard, Tavares e Ortega Junior (2000), Gravina e Santarosa (1998) e Gravina (1996), constituiu-se em instrumento potencial para provocar a análise referente às propriedades matemáticas nas interações dos sujeitos com o objeto manipulável. Notou-se ainda nessa atividade que, inicialmente, os alunos sentiram-se receosos quando provocados a conduzir a sua aprendizagem orientada pelo roteiro da atividade, mas, à medida que perceberam a presença do colega como alguém que poderia auxiliá-los e com eles compartilhar incertezas e, caso não fosse suficiente, teriam o professor para orientá-los, mostraram-se impulsionados à realização das atividades. A falta de contato anterior de vários alunos com o *software* ou mesmo com o computador, que em alguns momentos caracterizava insegurança, foi sendo substituída gradativamente por uma sensação de segurança, encontrada principalmente num colega próximo.

Outra constatação a destacar, já na primeira atividade, é que os alunos mostraram-se envolvidos com a atividade. Observou-se que as duplas mais rápidas assumiam o compromisso de auxiliar os colegas que encontravam algumas dificuldades no manuseio do *software*, ou com conceitos matemáticos. Dessa forma, criavam-se inter-relações nos e entre os grupos, e nessas, por exemplo, um grupo que já havia desenvolvido determinada questão orientava o grupo ao próximo. Desse modo, tornavam a rever os conceitos já respondidos ao explicá-los para o colega. Momentos como esses foram freqüentes em todas as atividades da pesquisa, podendo-se, inclusive, dizer que se criavam interações ricas e se ampliavam zonas de desenvolvimento proximal porque eles iam discutindo diferentes conceitos.

Aos desenvolverem as atividades, observava-se que os alunos motivavam-se mais e envolviam o professor. A constatação ratifica a idéia de que o uso do *software* não dispensa a presença do professor, como afirma Penteado (1999), quando redefine sua função como aquele que conduz, orienta os alunos a explorar esse ou aquele conceito. A pesquisa evidencia a necessidade de uma reconfiguração metodológica em vista de uma prática pedagógica que amplia o espaço para metodologias de aprendizagens, valorizando momentos de negociação e autonomia dos alunos. O observado leva a pensar numa reconfiguração metodológica pelo professor em que sejam valorizadas situações que envolvam ações dos alunos na exploração de determinados conceitos. Nas situações da pesquisa, pode-se dizer que o uso do *software* impulsionou o desenvolvimento da atividade e, conseqüentemente, a exploração dos conceitos inerentes a ela. Nesse sentido, Costa (1997) evidencia a necessidade de utilização de diferentes recursos no ensino e na aprendizagem da matemática.

Destaca-se a manifestação de uma dupla que bem caracteriza as análises anteriores. No desenvolvimento da atividade, esses alunos mostravam uma discussão comprometida; a interação ocorria tanto nas duplas como com outros colegas, mesmo que estes estivessem no outro lado do laboratório. Notou-se que os sujeitos indicavam a tela do computador relacionando o arquivo dinâmico com a atividade, como se tentassem explicar ao colega o que pensavam. Momentos como esses eram freqüentes e ricos em interações. Para exemplificar, houve um momento em que a dupla C[8], discutindo o conceito de raio e diâmetro, chegou a solicitar uma calculadora em voz alta à turma. A dupla queria confirmar o que apresentava a Figura 19 que manipulavam: se a medida do raio era a metade do diâmetro, conforme demonstravam saber. A figura apresentava as medidas do raio com 6,48 cm e, para o diâmetro, 12,96 cm. Ouvindo a solicitação da dupla, o colega do grupo ao lado (Grupo A) mostrou-lhes como acessar a calculadora do Windows para testar a hipótese.

As duas figuras a seguir mostram o arquivo que a dupla construiu e o que escreveram quando a atividade solicitava: 'O que é o diâmetro da circunferê ncia? Qual é a sua unidade de medida?"

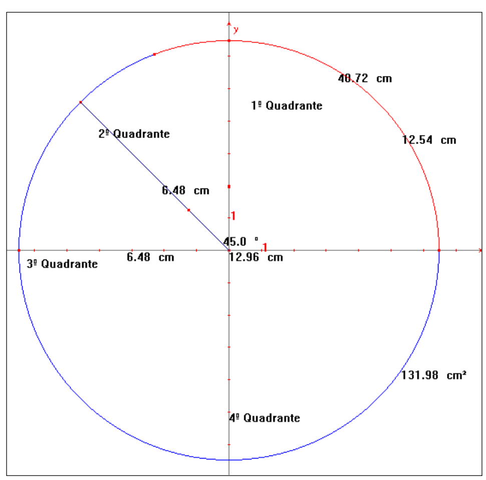


Figura 19 – Arquivo dinâmico construído pela dupla C utilizando o *software* Cabri-Géomètre II.

[8] As atividades foram desenvolvidas em duplas, sendo de A a O. Neste texto sempre que fizer referência a uma dupla, utilizar-se-á a letra maiúscula para indicar a dupla. No texto não se fará referência a todos os grupos, mas àqueles aos quais se dedicaram observações mais pontuais.

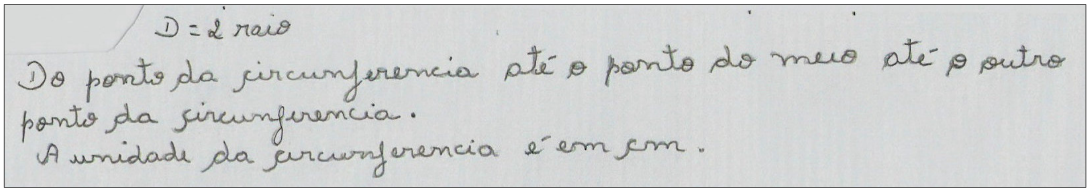

D = 2 raio
Do ponto da circunferencia até o ponto do meio até o outro
ponto da circunferencia.
A unidade da circunferencia é em cm.

Figura 20 – Resposta da atividade do Grupo C.

Entende-se a partir da Figura 20 que a organização de atividades em pequenos grupos, que privilegiem a discussão, torna-se espaço rico para testar hipóteses e compartilhar incertezas, conforme afirmam Santarosa e Gravina (1998). Acrescentando-se que, para Nuñes e Ramalho (2004), é nas atividades que se produzem interações entre os indivíduos como objeto de conhecimento. Nesse caso destaca-se também uma das teses fundamentais apresentadas por Vygotsky (1993) quando postula a necessidade de interações para as aprendizagens. Ao discutir a relação entre pensamento e linguagem, este autor afirma que o significado das palavras é um fenômeno da fala. Nas interações ocorridas, a fala dos alunos contribuiu para testar as hipóteses e significar os conceitos em discussão. O próprio Vygotsky afirma que uma palavra sem significado é um som vazio e que "o significado das palavras é um fenômeno de pensamento" (1993, p. 104). Pela afirmação do autor, pode-se inferir que o significado das palavras por meio da fala expressou o pensamento dos sujeitos naqueles momentos e, no caso das atividades, contribuiu para formar os conceitos em discussão. Se Vygotsky (1993) afirma que o pensamento ganha corpo por meio da fala, a expressão da fala valorizada nas atividades com as duplas, ou, para além delas, pode ter se constituído na base para a apropriação do conceito.

Outro aspecto importante a salientar, verificado logo no início das atividades da pesquisa, é a utilização do *software* com certa naturalidade pelos alunos, que demonstraram pouca dificuldade na exploração de suas ferramentas. Essa observação, em certa medida, no início, era inesperada, pois, antes das atividades da proposta pedagógica da pesquisa, foi aplicado um questionário (Apêndice A) com o objetivo de verificar qual era a relação que os alunos mantinham com o laboratório de informática da escola e, principalmente, com os *softwares* de matemática. As respostas indicaram certas dificuldades no manuseio dos *softwares,* o que motivou o planejamento da atividade de familiarização e uma reorganização das atividades seguintes. Nas primeiras atividades foram dadas orientações quanto ao uso das ferramentas do *software* Cabri. Nas observações da primeira atividade, de familiarização, confirmaram-se duas idéias da fundamentação teórica. Primeiro, que a presença do colega para discutir e testar hipóteses proporcionou segurança para manuseio do *software*. Sobre esse fato, Vygotsky (2001) salienta que é preciso promover nos momentos de aprendizagens debates que levem os alunos a intercambiar idéias. Nesse intercâmbio, pode-se inferir que muitas das dificuldades previstas foram sanadas pelo próprio colega da dupla, não constituindo empecilho à aprendizagem do conceito matemático. A outra idéia é o que afirma Papert, ao destacar o desnecessário zelo criado por vícios de pais e professores preocupados com o uso da informática. O autor vê esse zelo ou preocupação como desnecessários e faz uma observação sobre a relação dos alunos com o computador:

> O caso de amor envolvendo mais que o desejo de fazer coisas com os computadores. Ele também apresenta um elemento de possessividade e, mais importante, de afirmação de identidade intelectual. Grande número de crianças vê o computador como "nosso" – como algo que pertence a elas e a sua geração. (2002, p. 7).

O ocorrido na pesquisa não chegou a ser um caso de "amor" entre alunos e computador, mas ficou evidente na relação uma identificação entre eles, que era maior quando havia colega para interagir e compartilhar eventual dúvida. A observação foi decisiva para a reorganização das atividades seguintes, constatando-se que não se deve subestimar a capacidade dos alunos diante da informática.

Outra observação importante na pesquisa é que os alunos precisam compreender e adaptar-se à metodologia de trabalho em uso. A forma como as aulas anteriores eram desenvolvidas em sala de aula apresentava muitas diferenças metodológicas das desenvolvidas no laboratório. Observou-se que, à medida que iam sendo desenvolvidas as atividades da pesquisa, as duplas ampliavam sua autonomia e segurança ao resolverem as questões e também no manuseio dos instrumentos. Após algumas atividades, foi possível notar que os sujeitos ampliavam as interações na e entre as duplas e manifestavam-se de forma mais segura quanto à abstração e à generalização de conceitos.

A necessária adaptação dos alunos à metodologia, ou dessa aos alunos, constatada na pesquisa, permite a inferência de que possa ter contribuído para a formação dos conceitos. Nas atividades que envolvam *softwares* de matemática ou outros recursos é necessário haver uma sintonia entre as situações-problema da atividade e o recurso em uso, de tal forma que a atividade se encarregue de desafiar e conduzir os sujeitos por conta própria aos objetivos propostos. No caso da pesquisa, essa observação ficou explícita na realização da atividade seguinte (atividade 02). A sintonia entre a figura do arquivo dinâmico entregue aos alunos e a organização das questões da atividade orientadora contribuiu de forma a possibilitar a visualização e chegar a abstração da relação entre o arco, raio e ângulo, conforme era o objetivo. Constatou-se que uma atividade de apropriação de significados de conceitos, como era o objetivo desta, necessita ser organizada de forma simples, clara e lógica, havendo identidade entre a orientação dada na atividade, o material entregue aos alunos e o recurso que está sendo utilizado.

A figura a seguir caracteriza as etapas que os alunos deveriam desenvolver para abstrair a relação entre o raio, o arco e o ângulo central em qualquer circunferência, em que o comprimento do arco da circunferência é obtido multiplicando-se o raio pelo ângulo central, medido em radianos. A Figura 21 indica as quatro posições de análise do arquivo dinâmico que os alunos manipulavam. A exploração e a apropriação do significado da relação foram orientadas por questões da atividade.

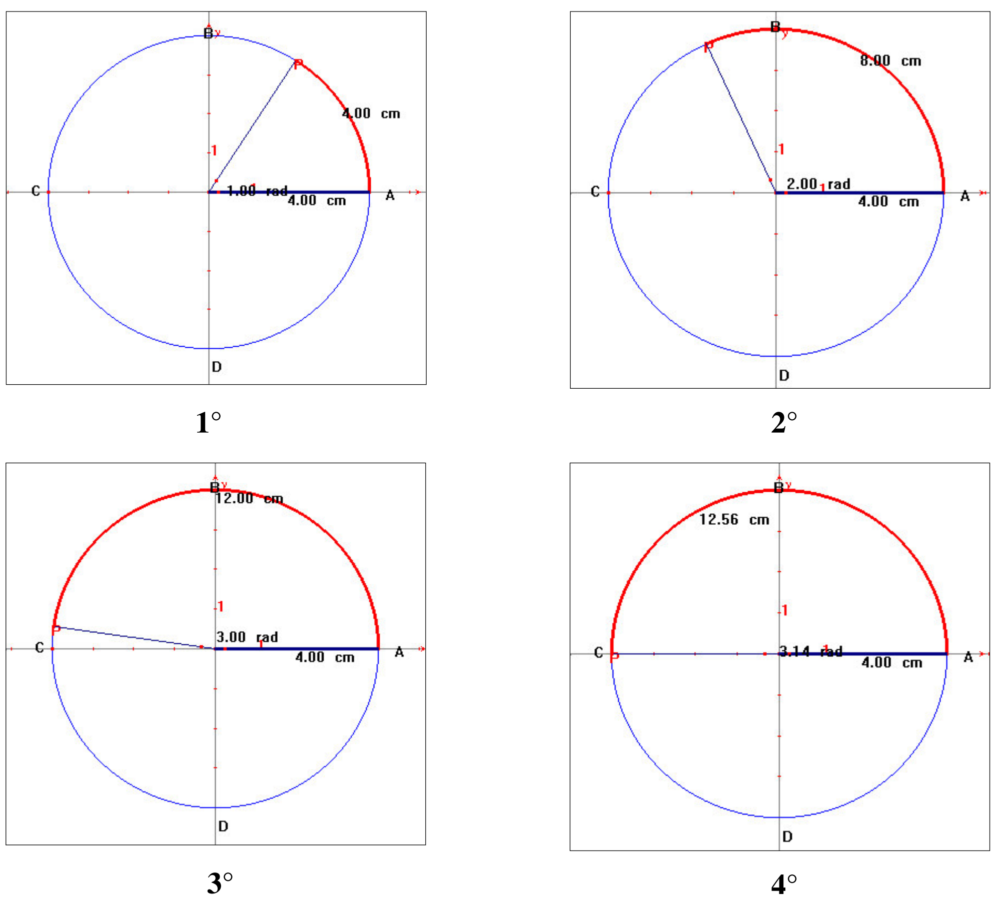


Figura 21 – Representação do processo de movimentação do arquivo dinâmico da atividade 02 para construção da relação entre o arco, o raio e o ângulo central.

Salienta-se que a sintonia entre as questões dessa atividade e o arquivo dinâmico usado nela (Figura 21) possibilitou orientar a seqüência e a organização do pensamento dos sujeitos. Com esse fato retoma-se um aspecto importante do uso dos *softwares* em atividades matemáticas trazido por Gravina e Santarosa, no qual destacam que "a aprendizagem nessa perspectiva depende das ações que caracterizam o fazer matemática" e que nessas os alunos tornam-se "autores das ações que dão sentido ao conhecimento matemático." (1998, p. 3).

Na atividade 02 tinha-se um segundo objetivo, definir o valor de π (Questão 2.4). Os alunos deveriam posicionar o ponto P exatamente sobre o ponto C (ver o quarto arquivo da figura), formando, assim, o ângulo central igual a 3,14 radianos, valor de π. Percebeu-se que isso não foi difícil, entretanto a questão seguinte solicitava que fosse criada uma expressão para representar o valor de π em qualquer circunferência. A dupla B respondeu: $\frac{arco}{raio} = \pi$. Apresenta-se a resposta da dupla para destacar o descrito anteriormente, ou seja, a necessidade da presença do professor nas atividades, pois a resposta da dupla é válida somente se o arco tiver medida igual ao comprimento da semicircunferência. Em casos como esse, a presença do professor é indispensável, pois não há dúvidas sobre as capacidades dos sujeitos em construírem relações, porém nem sempre são apresentadas da forma mais correta, ou necessitam de complementos do ponto de vista da matemática. Rediscutir ou redefinir os conceitos com os alunos, durante ou ao final de uma atividade, é necessário para que eles não se apropriem dos significados dos conceitos de forma incompleta.

Após as primeiras atividades, quando os alunos já estavam mais familiarizados com a metodologia, foi possível analisar outro aspecto importante que influenciou na formação dos conceitos. Quando os alunos percebiam os desafios provocados pela atividade, imediatamente começavam a demonstrar compromisso com a aprendizagem do conceito em discussão. Dessa forma, pode-se ratificar a necessidade de atividades significativas e desafiadoras e quanto à reavaliação permanente das propostas das atividades, pois percebeu-se a importância de provocá-los e de envolvê-los em interações e reflexões para abstraírem as relações entre os objetos matemáticos considerados e se apropriarem dos significados dos conceitos subjacentes a elas.

Ao iniciar este capítulo, afirmou-se que seriam feitas algumas considerações sobre o processo de formação dos conceitos. Até a presente parte do texto, procurou-se destacar vários fatores relevantes que contribuíram para a formação dos conceitos dos alunos. Na análise a seguir procura-se ser mais específico no que se refere ao processo de formação de um conceito, o da função cosseno. Ciente de que não se pode generalizar para todas as atividades, utilizar-se-á esse para melhor caracterizar o processo, ainda que em cada atividade a variedade de relações e a subjetividade permitam múltiplos pontos de análise.

Realiza-se a análise a partir do registro de áudio de uma dupla durante a atividade 07, na qual os alunos deveriam apropriar-se do significado do conceito da função trigonométrica cosseno e de características dessa função, constituindo-se, conforme Vygotsky (1993), o sistema de conceitos. Toma-se essa atividade para análise porque nela, com freqüência, a dupla faz referência à atividade anterior de seno e porque na interpretação das duas atividades encontram-se vários pontos semelhantes. Nessa parte da análise serão referenciadas as falas de H_1[9], H_2 e P. A atividade foi dividida em partes – questões – considerando como sendo os conceitos subordinados constituintes do sistema de conceitos a serem apropriados durante a atividade. As interações da dupla nessa atividade emergiram quando os alunos manipulavam o arquivo dinâmico da Figura 22.

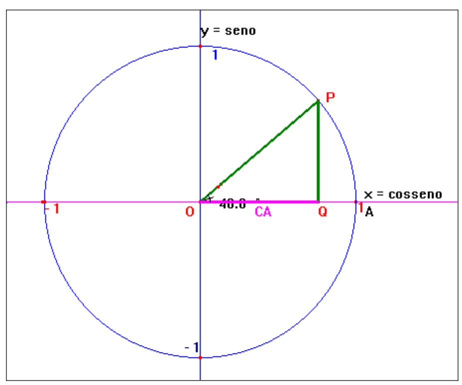


Figura 22 – Arquivo dinâmico utilizado na atividade 07
com o *software* Cabri-Géomètre II.

Na seqüência das questões que orientavam a atividade (7.1 a 7.4) os alunos deveriam definir o conceito da função cosseno como sendo a projeção do cateto adjacente sobre a ordenada. Procurando algumas falas mais significativas da interação dos alunos com o software, o arquivo dinâmico e a atividade na qual manifestaram esse resultado, destacam-se:

[9] Para referenciar as falas dos alunos serão utilizadas letras maiúsculas H indicando a dupla, e o número subscrito 1 e 2 para indicar o aluno da fala. Quando a letra for P, indica a fala do professor.

(H_1) – Continua sendo igual a $\overline{OQ}$ e o cosseno continua sendo igual ao $\overline{OQ}$. Cateto adjacente ou $\overline{OQ}$.
(H_2) – É, o cosseno continua sendo igual ao cateto adjacente ou $\overline{OQ}$, ou seja.
(H_2) – E agora, o que ficou aqui?
(H_1) – Que independente do ângulo o cosseno vai ser sempre igual à medida do cateto.

Na questão 7.1 os alunos eram solicitados a observar a relação entre o cosseno de 45° e o segmento $\overline{OQ}$. Na discussão é possível observar que a dupla já se apropriou do significado do conceito da função cosseno, quando diz: "O cosseno continua sendo igual ao cateto adjacente ou $\overline{OQ}$[10]". Em seguida, na questão 7.3 deveriam definir o valor do cos 225° e 330°, ambos não marcados na figura. Para essa resposta esperava-se que tivessem condições de transpor o significado do cosseno de 45° para qualquer ângulo do ciclo trigonométrico. Nesse sentido a dupla assim reflete:

(H_2) – Ah, lembra que aqui é 270, aqui não tem 225! 270 como é que eu vou fazer?
(H_1) – É foi isso que ele disse oh, assim oh.
(H_2) – Se for solicitado para calcular o valor do cosseno de 225, qual a medida que você poderia atribuir ao cosseno sem calcular, apenas movimentando a figura?
(H_2) – Ah, mas é o ângulo, não é! O ângulo de 270. Ah, mas aqui zera. Aqui é 270 né. 270! 270! Aqui é 180, né. Que medida você atribuiu, sem calcular, apenas.
(H_1) – Não sei como que é. Eu não sei por que aqui zera, oh, vai fica 180 aqui.
(H_1) – Ô professor! Olha isso aqui.
(H_1) – Eu não sei, eu vou adivinhar que aqui é 225?
(P) – Não.
(P) – Não é.
(P) – Tá! Mas e se você não conseguisse marcar o 225 ali, o que vocês iriam deduzir para o valor do cosseno de 225°.
(H_1) – É o cateto adjacente, a medida aqui.
(H_1) – Tá, então escreve isso aqui.
(H_1) – Só isso!
[...]
(H_2) – Tá meu, o de 330 também a mesma coisa.
(H_1) – Também!
(H_2) – Quanto que deu o seno de 330?
(H_1) – Olha, 330 vai entra no quarto quadrante lá, vai ou não.
[...]
(H_1) – A gente já respondeu isso.
(H_2) – Tá, independente do ângulo, o cosseno vai ser sempre igual ao cateto adjacente.
(H_1) – Independente do ângulo, independente do quadrante, independente da circunferência.

[10] OQ representa a medida do cateto adjacente. Ver Figura 22.

Observa-se na fala anterior que, ao final, os alunos se apropriaram do significado do conceito da função cosseno e transferem esse significado para os ângulos de 225° e 330°. Embora os ângulos de 225° e 330° não tivessem sido apresentados no ciclo trigonométrico, eles conseguem produzir afirmações que indicam que sabem sobre a divisão dos quadrantes e a localização dos respectivos ângulos e que para os dois ângulos o valor do cosseno é a medida do cateto adjacente. As duas figuras a seguir (23 e 24) reproduzem as duas situações do arquivo dinâmico com o qual os alunos interagiam e que manipulavam relacionando aos ângulos de 225° e 330°.

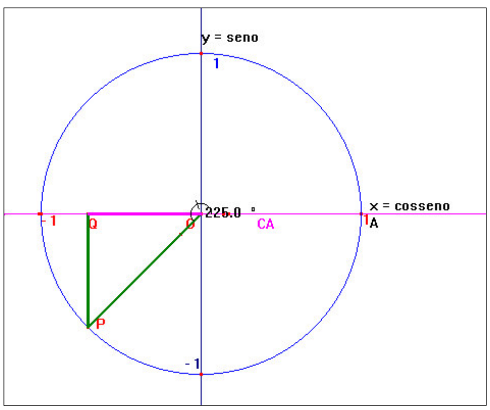


Figura 23

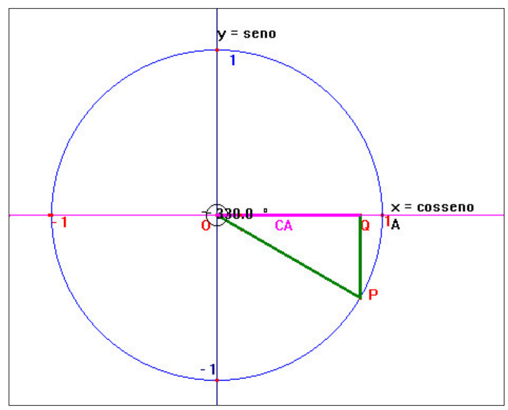


Figura 24

Arquivos dinâmicos representando a projeção sobre a ordenada dos ângulos de 225° e 330°, utilizado na atividade 07.

Observa-se que, para os ângulos de 225° e 330°, os valores numéricos do cosseno não são os mesmos, porém até esse momento esperava-se que tivessem se apropriado do significado da função cosseno como sendo equivalente à medida da projeção do cateto adjacente sobre a ordenada.

Em outro momento da fala eles debateram sobre a questão 7.5. Nessa era solicitado que observassem os limites da função cosseno no ciclo trigonométrico entre -1 e 1. Nas duplas, as manifestações referindo-se às atividades anteriores eram freqüentes, principalmente da função seno, como demonstra uma fala: 'Lembra aqui, não existe ângulo[11] maior do que um e nem menor que menos um". (H_1). Nesta, o aluno retoma a definição que teria sido

[11] O aluno expressa-se usando o termo "ângulo", porém, nas observações, foi possível verificar que referia -se ao valor da função seno variando entre -1 e 1.

apropriada na atividade anterior. A seguir, discutem e apropriam-se dos limites da função cosseno:

> (H_1) – Não, não é que não vai subi lá, ele não vai passá de um ponto aqui, vai só dá um ali né. Aqui é um.
> (H_2) – Tá, mas sabe que daqui até aqui é um né.
> (H_1) – Ele nunca vai se maior que um e nem menor que menos um.

À medida que interagiam, as discussões produzidas tornavam-se cada vez mais significativas. Em determinado momentos H_2 chegou a duvidar de uma afirmação de H_1:

> (H_1) – Aham... Tá, então ele não vai, o rosa não vai passá do um, e nem vai passá do menos um pra cá. Por causa que depende do tamanho da circunferência daí.
> (H_2) – É, não depende! Se tu diminuir a circunferência, vai permanecer um por quê?

Observa-se que H_2 retoma a discussão no sentido de aumentar ou diminuir o tamanho da circunferência, o que aumentaria ou diminuiria a medida do raio alterando o seu limite. Em outras falas H_1 retoma e reafirma a apropriação do limite das funções seno e cosseno e lembra a definição do raio padrão para o ciclo trigonométrico. Nessa mesma parte da fala, os sujeitos demonstram lembrar vários significados apropriados nas atividades anteriores, pois, nas atividades um, dois e três, tinham-se se apropriado de vários conceitos relacionados a arco, ângulo, raio, diâmetro, quadrantes, relações, os quais eram freqüentemente retomados pela dupla de modo a constituir o sistema de conceitos que originavam os conceitos supra-ordenados (VYGOTSKY, 1993).

Em outra parte da fala manifestam-se em relação a outra questão em que deveriam definir os ângulos em que as medidas do cosseno tivessem valor igual a -1, 0 e 1. Apresentam-se suas falas:

> (H_1) – Assim aqui oh! Bota ali ou aqui, aqui a gente vai (...) É o mesmo critério que o anterior.
> (H_1) – Do um é o ângulo de zero a noventa né, a mesma pergunta oh! Valores. Pede oh, descreva oh. A mesma coisa oh. Oh aqui oh.
> [...]

> (H_2) – Hum. Ângulo maior que um e menor que menos um. Então é isso!
> (H_1) – Que nem no seno.
> (H_1) – Movimentando o ponto P, encontre o máximo de ângulo de raio que as medidas do cosseno sejam iguais a menos um, zero e menos um.
> (H_1) – 90 graus ali, não é?
> (H_2) – Não, o cosseno é esse daqui, o seno que era.
> [...]
> (H_2) – Não, é o cosseno de menos um é 180. O seno de zero, o cosseno de zero vai se aqui oh. Que aqui fica zero lembra? Aqui tem o um.
> [...]
> (H_1) – O seno de um era 90 oh, então, ó.
> (H_1) – O cosseno de um.
> (H_1) – O cosseno de menos um é 180, 270, 180 oh.
> (H_1) – O cosseno de menos um é?
> (H_1) – O cosseno de um é 360, e de zero é zero.
> (H_2) – Então tá. Mas vai sabê se tá correto agora.
> [...]
> (H_1) – Então tá. E de, zero é um né. De um é de 360?
> (H_2) – Não, cosseno de 360 é um né.
> (H_2) – É um, o cosseno. O cosseno de 360 é um.
> (H_1) – É, então porque tá falando virado.
> (H_2) – Tá, agora o cosseno de um é 360?
> (H_1) – Não, não, em graus! Ele depende do ângulo. O cosseno de quanto?

Mesmo que na fala a resposta não tenha ficado clara, a discussão circula em torno do que foi solicitado e na folha da atividade encontra-se escrita a resposta de forma correta. Destacam-se na fala três aspectos importantes mencionados na proposta da pesquisa. No primeiro retoma-se a fala de Nuñes e Ramalho (2004), que valorizam a atividade como um espaço privilegiado para que brotem interações entre o indivíduo e o objeto de conhecimento. No segundo aspecto, Gravina e Santarosa (1998) defendem a criação de atividades que levem os alunos a interagirem, manipulando, buscando compreender, estabelecendo relações e, assim, construindo conceitos. O uso do computador é visto como algo que permite diferentes representações, buscando compreender os objetos matemáticos de várias formas. No terceiro aspecto, também apresentado na proposta, destacam-se as representações possíveis do objeto matemático com o software, o que os autores Bernard, Tavares e Ortega Junior (2000), Gravina e Santarosa (1998) e Gravina (1996) chamam de "representações dinâmicas".

Embora nessa parte da fala não tenham ficado completamente explícitas as definições da dupla, pode-se dizer que intervenções do professor auxiliam para esclarecer os conceitos da discussão produzida. Até então, pode-se afirmar que para formar um conceito é necessário a articulação entre um conjunto de fatores que exercem força interativa nas interações entre os sujeitos.

Em outro momento do registro de áudio eles discutiram referindo-se à questão em que deveriam definir as medidas dos intervalos dos quadrantes em graus e radianos.

(H_1) – Então oh, o primeiro quadrante, vai se a mesma coisa do que a gente fez no passado, só que a gente não passou em radianos.
(H_2) – É só botá pi radianos.
(H_1) – Não é, meio e meio radianos.
(H_1) – Não, espera aí... Primeiro quadrante. Ô professor, fica a mesma coisa do passado né? Primeiro quadrante, continua do zero a 90 graus.
(P) – Sim, o ângulo não muda.
(H_2) – Tá, vai ficá de zero pi.
(H_2) – Vai fica de zero a 90, de 90 a 180 e de 180 a 270 e de 270 a 360 graus. É isso, os quadrantes nunca mudam.

Na fala é possível observar a referência feita pelos alunos à atividade da função seno, quando afirmam "ser a mesma coisa que no passado". A observação da dupla estava correta, pois os quadrantes não mudam para as funções seno e cosseno. Na fala observa-se claramente a importância da interação da dupla na apropriação do conceito quando H_2 afirma ser necessário apenas acrescentar o valor de *ð radianos* e, na fala seguinte, H_1 ratifica afirma que é de "meio e meio radiano". Observa -se que o conceito já construído por H_1 na atividade anterior, sobre cosseno é socializado para o colega, na interação. Em seguida, a dupla conclui a divisão dos quadrantes em graus. Embora nessa parte da atividade não seja possível verificar discussões no sentido de encontrar as medidas dos quadrantes em radianos, estas se encontram registradas no material escrito da dupla.

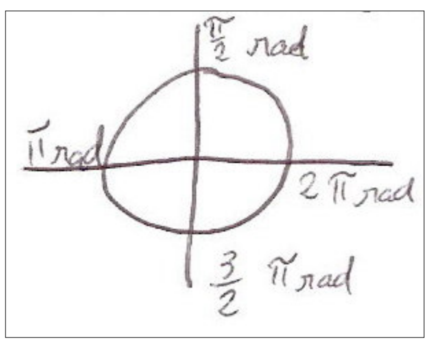


Figura 25 – Registro da dupla H na questão 7.6.

Em outra parte da fala, H_1 refere-se aos vários livros didáticos[12] disponíveis sobre uma mesa no centro da sala de informática e afirma ter encontrado a resposta para as outras duas

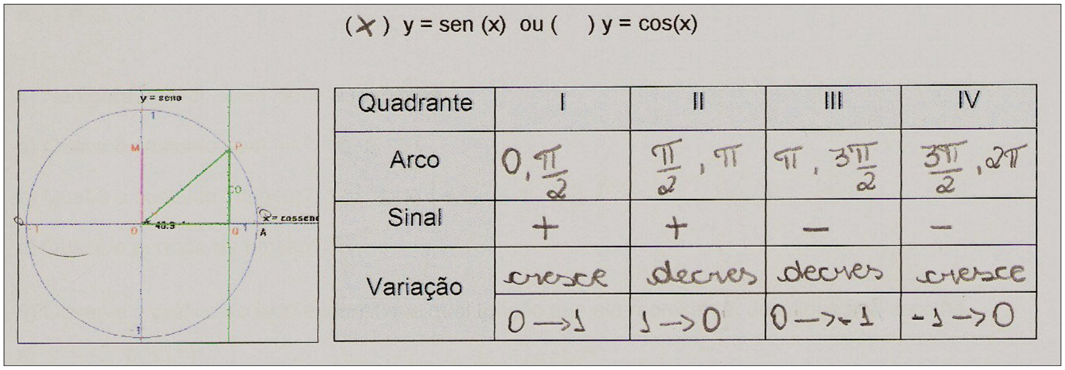
[12] Em todas as atividades da pesquisa existiam livros didáticos de autores diferentes numa mesa ao centro do laboratório a serem usados pelos alunos.

questões da atividade. O aluno apresenta a definição encontrada no livro de que em dois quadrantes o cosseno tem sinal positivo e, nos outros dois, negativos. A definição trazida pelo aluno leva a retomar a idéia de Almeida (s. d.), de que o uso do computador não substitui práticas e recursos usados em sala de aula, e, sim, é recurso diferente que complementa e enriquece a prática pedagógica.

Destaca-se outra característica presente nas atividades da pesquisa, que se tornou motivo de olhares especiais durante as observações. Em todas as atividades estavam presentes formas de representações diferentes dos objetos matemáticos em discussão. A teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2003) apresenta as afirmações do autor no sentido de que as aprendizagens em matemática dependem muito das possibilidades de articulação dos objetos matemáticos entre as formas diferentes de registro desse objeto. Durante as atividades da pesquisa procurou-se caracterizar essas diferentes formas de registro, considerando a defesa do autor, apresentada acima, e verificando de que maneira essas formas diferentes de registro estariam contribuindo para a formação dos conceitos matemáticos em discussão. A pesquisa apresentou evidências que não deixam dúvidas sobre a importância de diferentes formas de registros de representação semiótica na apropriação do significado dos objetos matemáticos, o que se destacará a seguir.

As duas situações a seguir referem-se aos resultados produzidos por duas duplas, F e I, na avaliação 03, na qual deveriam representar os conceitos e definições construídas nas atividades anteriores sem os *softwares* para manipular e material produzido nas atividades anteriores. As Figuras 26 e 27 referem-se à primeira questão da avaliação 03 (Apêndice C), em que era solicitado aos alunos a qual função, seno ou cosseno, se referia a figura do ciclo trigonométrico e que, a partir dessa, reconstruíssem as características e definições da função apropriadas nas atividades anteriores. Para isso deveriam preencher o quadro com essas características e representá-las no gráfico a ser construído no espaço disponível abaixo da questão (Figura 27).

A questão caracterizava representações geométricas por meio da figura do ciclo trigonométrico, desenvolvidas principalmente nas primeiras atividades, que deveriam ser transpostas para as representações algébricas na tabela-resumo (Figura 26) e, dessas duas formas, transpostas para a representação no gráfico da respectiva função. A avaliação 03 encontra-se na página 105.



(X) y = sen (x) ou ( ) y = cos(x)

Quadrante	I	II	III	IV
Arco	$0, \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}, \pi$	$\pi, \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}, 2\pi$
Sinal	+	+	−	−
Variação	cresce	decres	decres	cresce
	0 —> 1	1 —> 0	0 —> -1	-1 —> 0

Figura 26 – Resultado produzido pela dupla I na questão 01 da avaliação 03.

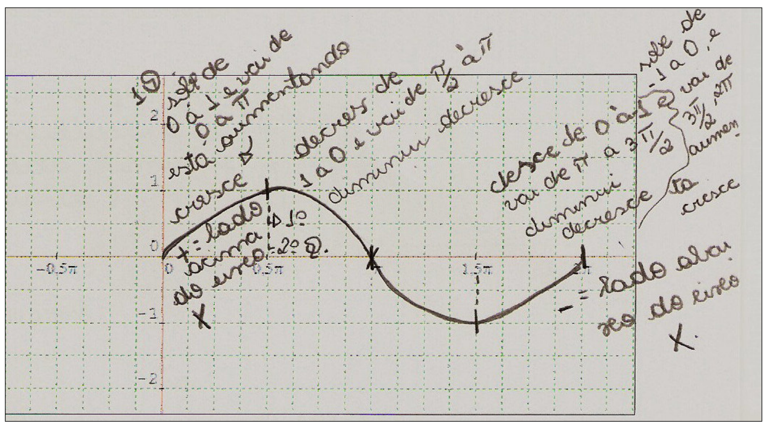


Figura 27 – Resultado produzido pela dupla I na questão 01 da avaliação 03.

As respostas apresentadas pela dupla mostram que houve apropriação dos significados matemáticos nas atividades realizadas anteriormente. Os resultados apresentadas pelas várias duplas nas diferentes questões da avaliação e também das atividades surpreendem quanto às diferentes formas criadas pelos alunos para representar os conceitos apropriados.

Ainda considerando essa avaliação, a Figura 28 apresenta o resultado da dupla F ao definir numa função trigonométrica genérica as implicações das variáveis e a influência dos sinais na construção do gráfico.

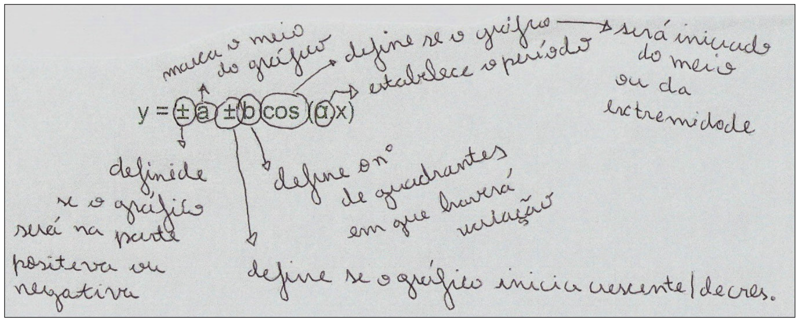


Figura 28 – Resultado produzido pela dupla F na questão 10 da avaliação 03.

Considerando o resultado apresentado pelas duas duplas e o observado na produção das demais, pode-se confirmar as propostas de Duval, o qual afirma que "a originalidade matemática está na mobilidade simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação". (2003, p. 14). Considerando a afirmação do autor, durante as atividades da pesquisa procurou-se caracterizar diferentes formas de representar os objetos matemáticos em discussão. Da mesma forma, procurou-se constituir seqüências de atividades "que tratem dos dois sentidos da conversão". (DUVAL, 2003, p. 27), ou seja, em alguns momentos, necessitava-se converter objetos geométricos para forma de gráfico e, em outros, para a forma algébrica. As conversões de registros tornaram-se constantes e, à medida que as atividades iam sendo desenvolvidas, ocorriam com mais freqüência e domínio. Dessa forma, pode-se confirmar o que diz o autor, que "o conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que do objeto representado". (p. 22).

A realização das várias atividades e os resultados obtidos por meio dos registros dos alunos mostram o quanto as diferentes formas de registro implicaram e contribuíram no processo de formação dos conceitos. Constatou-se também que, sendo um mesmo objeto matemático representado por meio de vários registros de representação, é necessário tempo para essas representações, porém pode-se afirmar que, no caso da pesquisa, esse tempo tornou-se sinônimo de aprendizagem.

A presença constante dos signos mediadores exerceu influência considerável na organização do pensamento dos alunos e, ainda, constituiu-se em referência para a retomada de conceitos já apropriados. As observações que levam a tais afirmações emergem, sobretudo, da primeira avaliação. Como as atividades desenvolvidas sempre se caracterizavam pela manipulação de determinado arquivo dinâmico, observou-se que, à medida que os alunos representavam conceitos apropriados, sempre faziam referência aos arquivos (desenhos, figuras...) das atividades. Sendo a avaliação 01 organizada de três formas, duas com e uma sem signos mediadores, foi possível observar que as duplas que dispunham dos signos mediadores conseguiam provir maior interação, relacionando os conceitos apropriados anteriormente e formando respostas mais adequadas.

As duplas que realizaram a avaliação 01 sem os signos mediadores apresentaram maior dificuldade ao estabelecer relações visando à construção das respostas. Era como se faltasse um ponto de referência para discussão, pois discutiam menos e produziam respostas mais simples, além de que os casos sem resposta tornaram-se mais presentes que nas avaliações com signos mediadores.

Ao encerrar essa análise, pode-se dizer que, para a apropriação do significado de um conceito matemático por um aluno, entra em jogo uma série de fatores, dos quais se procurou destacar os que se tornaram mais presentes na parte anterior da análise. Pode-se afirmar que o processo de formação dos conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno da pesquisa ocorreu durante as interações dos alunos provocadas pelas atividades. Eles participaram exercendo influência significativa, e o dinamismo dos *softwares* fez surgir uma identidade entre os alunos e o computador, contribuindo para desafiá-los à realização das questões das atividades, que encaminhavam à discussão dos conceitos e, nessas, à possibilidade da expressão da fala e do pensamento para testar as hipóteses a respeito do conceito em discussão nos pequenos grupos. Segundo Vygotsky (1991), o uso da linguagem ganha corpo por meio da fala, permitindo aos alunos inter-relacionar os conceitos do sistema necessários à apropriação do significado do conceito supra-ordenado.

Muitos e complexos foram os fatores que interferiram no processo de apropriação dos significados dos conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno, como por exemplo, o dinamismo do *software*, as interações sociais nos pequenos grupos, o teste de hipóteses, as orientações das atividades, o fazer matemática, enfim. A coordenação desses desafia o profissional da educação, que necessita conhecer as teorias que sustentam o processo de ensino-aprendizagem da matemática. Da complexidade desse processo emergem outros problemas de pesquisa que contribuem para a qualificação dos espaços de aprendizagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao apresentar as considerações sobre a pesquisa desenvolvida com sujeitos adolescentes, antes de tudo, é importante salientar que são seres humanos inseridos numa sociedade que nem sempre lhes oferece condições justas de acesso à informação. São seres que necessitam de oportunidades para o desenvolvimento físico e mental e, para que esse desenvolvimento aconteça, necessita-se do trabalho dos adultos.

Não se pode, contudo, por esse fato, tratá-los de forma excludente, reconhecendo-os como cidadão apenas quando forem úteis aos setores produtivos da sociedade. Deve-se, sim, propor que esses adolescentes, em pleno processo de formação, desenvolvam condições críticas e criativas para atuar na sociedade. Eis, pois, o desafio aos educadores, que por meio de seu trabalho pedagógico devem contribuir para a formação desse cidadão para que ele possa participar da sociedade de forma mais crítica e igualitária.

Neste momento, ao destacar considerações educacionais da pesquisa desenvolvida, conclui-se que muitas das questões iniciais encontram-se esclarecidas, entretanto são em número maior as angústias surgidas em torno de outras questões. Estas, porém, atribuem sabor ao ciclo educacional e constituem novas possibilidades de pesquisas, buscando qualificar cada vez mais a atividade educacional.

Em relação ao uso de softwares para apropriação de conceitos matemáticos, pode-se dizer que trouxeram contribuições importantes, contudo exigem dos professores novas habilidades e posturas diante da aprendizagem; habilidades para o manuseio de suas ferramentas, as quais possam produzir diferentes estratégias de aprendizagem, e novas posturas. Há necessidade de priorizar as interações entre os sujeitos aprendentes, valorizando sua autonomia, para que, dessa forma, possam tornar-se mais independentes intelectualmente dos recursos e dos professores.

As observações quanto ao uso dos *softwares* Cabri-Géomètre II e Graphmatica na pesquisa fizeram emergir reflexões, algumas já apresentadas por professores/pesquisadores, sobre o uso desses *softwares* em atividades que visam à aprendizagem em matemática. Entretanto, nesse caso, as reflexões apresentam-se numa situação real de sala de aula, o que nos responsabiliza de forma diferenciada.

Ao observar o processo de formação dos conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno na pesquisa, pode-se destacar que não acontece de forma isolada ou independente de outros conceitos. Assim, podem-se ratificar as afirmações de Vygotsky quanto ao sistema organizado de conceitos. Outra observação é que se exigem dos professores posturas diferenciadas em relação à aprendizagem, principalmente, pois devem provocar os alunos colocando-os como responsáveis pelas aprendizagens e desafiando-os a interagir nas atividades com os diversos recursos e sujeitos presentes.

Em relação às atividades, devem ser planejadas, de forma que, por conta de sua organização e recursos, envolvam os alunos levando-os a desenvolver seus objetivos e, ainda, que esse envolvimento leve-os a ações de pensamento conscientes e intencionais. Nas interações que exigem ações de pensamento conscientes e intencionais, manifestadas pela fala ou não, podem emergir conceitos. Criar situações de aprendizagem com essas características torna-se fundamental para apropriação de significados de conceitos.

Ainda, ao traçar considerações sobre o processo de formação de conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno no ciclo trigonométrico, observou-se que uma consistente fundamentação teórica torna-se indispensável. Das leituras sobre informática aplicada à educação matemática, pode-se dizer que as representações dinâmicas, possibilitadas pelos *softwares*, assumiram importância considerável na abstração e definição de relações e significados de conceitos. Essas características proporcionaram rever implicações educacionais no uso do *software* de matemática em atividades de ensino e suas potencialidades em propostas pedagógicas com esses recursos.

Considerando que os softwares possibilitam representações diferenciadas dos objetos matemáticos, podem-se ratificar suas contribuições ao processo de formação dos conceitos, pois, conforme afirma Bernard, Ortega Junior e Tavares (2000), permitiram analisar um mesmo objeto matemático de várias formas mantendo-se invariantes suas propriedades matemáticas. O dinamismo do software contribuiu de forma significativa para enfatizar a importância dos registros de representações semiótica. Observou-se que essas representações contribuíram de forma especial para a apropriação dos significados dos conceitos inerentes à proposta pedagógica. Observou-se que esses diferentes registros de representações proporcionaram as análises e sínteses que contribuíram para o processo de generalização dos conceitos (VYGOTSKY, 1991).

Ao encerrar a apresentação desta pesquisa, toma-se uma fala de Vygotsky em que afirma: "Estamos conscientes de algumas omissões e algumas falhas [...] talvez inevitáveis ao elaborar pela primeira vez um novo campo de estudo" (1993, p. 101). Ratifica-se que, sem estudo não se produz educação. Cada pesquisa, com sua particularidade, contribui de alguma forma, algumas mais, outras menos. Nesta, procurou-se compreender melhor e apresentar a educadores reflexões sobre o processo de apropriação social dos significados dos conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno no ciclo trigonométrico.

Antes de tudo, não se pode pensar em mudança social sem pensar em educação. E aos educadores, os quais esse material estará disponível, para contribuições e críticas, gostaria de dizer que, antes de colocar os olhos sobre os alunos, coloquem-nos sobre os livros e façam uma profunda análise de sua responsabilidade como educadores procurando, primeiro, conhecer a realidade em que seus alunos vivem e da escola em que estão inseridos, para que em seu trabalho não haja incoerência entre as teorias que sustentam sua prática, as metodologias de aprendizagem e a realidade sociocultural.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Maria Elizabeth de. **Matemática interativa**: o ataque dos computadores. Produção TV PUC São Paulo, Realização TV Escola. [s. d.]. 1 videocassete.

BERNARD, Jorge; TAVARES, Rui Alberto Ecke; ORTEGA JUNIOR, Rubens Robles. O ensino de ciências exatas utilizando representações dinâmicas. In: WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE PASSO FUNDO. **Anais** Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo, 2000. p. 77-83.

BORBA, Marcelo de Carvalho. Tecnologia informática na educação matemática e reorganização do pensamento. BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectiva. São Paulo: Unesp, 1999. p. 285 – 295.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Mirian Godoy. **Informática e educação.** Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BRASIL, MEC. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio. Brasília: Ministério da Educação, 1999.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. 2. ed. Lisboa, Gradiva, 1998.

CASTORINA, José Antônio et al. **Piaget – Vygotsky:** novas contribuições para o debate. São Paulo. Ática, 2003.

COSTA, Nilce Meneguelo Lobo da. **Funções seno e cosseno:** uma seqüência de ensino a partir do contexto do mundo experimental e do computador. 1997. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, 1997.

DAMM, Regina Flemming. Registro de representação. In: MACHADO, Sílvio Dias Alcântara (Org.). **Educação matemática uma introdução**. São Paulo: Educ, 1999. p. 135-153.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2002. v. 2.

DUVAL, Raymond. Registro de representação semiótica e o funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Sílvio Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registro de representação semiótica. Campinas – SP. Papirus, 2003. p. 11-34.

ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO MÉDIO GUSTAVO LANGSCH – POLIVALENTE. **Planos de Estudo.** São Luiz Gonzaga, 2002.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo Aurélio Século XXI:** o dicionário da língua portuguesa. 3 ed. Rio de Janeiro. Nova Fronteira, 1999.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática**: uma nova abordagem. versão trigonometria. São Paulo – SP: FTD, 2000. v. 2.

GRAVINA, Maria Alice. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO. **Anais**. Belo Horizonte, Brasil, nov. 1996. p. 1-13.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Maria Lucila. **A aprendizagem de matemática em ambientes informatizados.** Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/artigos/artigos.htm> Acesso em: 10 mar. 2005.

KALEFF, Ana Maria M. R. **Registros semióticos e sua importância para a compreensão de conceitos matemáticos:** o estudo de caso de uma professora frente à resolução de um problema introdutório às geometrias não-euclidianas. Disponível em: <http://www.anped.org.br/28/ textos/gt19/gt19512int.doc > Acesso em: 17 out. 2005.

KAMPFF, Adriana Justin Cerveira; MACHADO, José Carlos; CAVEDINI, Patrícia. **Novas tecnologias e educação matemática.** In: WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA, X; CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE COMPUTAÇÃO, XXIII; Bahia, jul 2004.

LURIA, Alexandr Romanovich. **Pensamento e linguagem:** as últimas conferências de Luria. Tradução Diana Myriam Lichtenstein e Mário Corso. Porto Alegre. Artes Médicas, 1996.

MORETTI, Méricles Thadeu. O papel dos registros de representação na aprendizagem em matemática. **Contrapontos,** Itajaí, ano 2, n. 6 - p. 343-362, set/dez 2002.

MOYSÉS, Lucia. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática.** Campinas, SP: Papirus, 1997.

NUÑES, Isauro Beltrán; RAMALHO, Betania Leite. **Fundamentos do ensino-aprendizagem das ciências e da matemática:** o novo ensino médio. Porto Alegre. Sulina, 2004.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. **Vygotsky**: aprendizagem e desenvolvimento um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione, 1997.

PAPERT, Seymour. **A máquina das crianças**: repensando a escola na era da informática. Tradução Sandra Costa. Porto Alegre. Artmed, 2002.

PENTEADO, Miriam Godoy. Novos atores, novos cenários: discutindo a inserção dos computadores na profissão docente. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999. p. 297- 313.

RIGODANZO, Mauro; ÂNGELO, Claudia Laus. Uma experiência da transposição didática com o cabri-géomètre II. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo. SBEM, ano 11, n. 16, p. 16-24, maio 2004.

TAILLE, YVES de la; OLIVEIRA, Marta Kool de; DANTAS, Heloisa. **Piaget, Vygotsky, Wallon**: teorias psicogenéticas em discussão. São Paulo. Summus, 1992.

TEIXEIRA, Adriano Canabarro. **Internet e democratização do conhecimento**: repensando o processo de exclusão social. Passo Fundo, UPF, 2002.

VAN DER VEER, René; VALSINER, Jaan. **Vygotsky**: uma síntese. 3. ed. Tradução Cecília C. Bartalotti, São Paulo. Loyola, 1999.

VIGOTSKII, Lev Semenovich; LURIA, Alexandre Romanovich; LEONTIEV, Alex N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. 8. ed. Tradução Maria da Penha Villalobos. São Paulo. Ícone, 2001.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. **A construção do pensamento e da linguagem**. Tradução Paulo Bezerra, São Paulo: Martins Fontes, 2000.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 4. ed. Tradução José Cipolla Neto, Luis Silveira Menna Bareto, Solange Castro Afeche. São Paulo. Martins Fontes, 1991.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. **Pensamento e linguagem**. Tradução Jeferson Luiz Camargo. São Paulo. Martins Fontes, 1993.

APÊNDICES

Apêndice A

Questionário[13]

Nome:____

1 – Com relação aos conhecimentos em informática, você:
(   ) Não possui nenhum conhecimento em informática.
(   ) Possui poucos conhecimentos em informática (por exemplo: tem dificuldades em digitar e formatar um texto simples).
(   ) Possui conhecimentos, eventualmente trabalha com computador (por exemplo: tem condições de digitar e formatar um texto simples).
(   ) Trabalha com computador há mais tempo (doméstico, amigo, experiência, etc.).

2 – Já realizou cursos de informática. (   ) sim (   ) não. Em caso afirmativo; quais:
(   ) Internet e navegação (   ) Windows (   ) Word (   ) PowerPoint (   ) HTML (   ) Editor de Figuras

Outro(s) especifique: ____

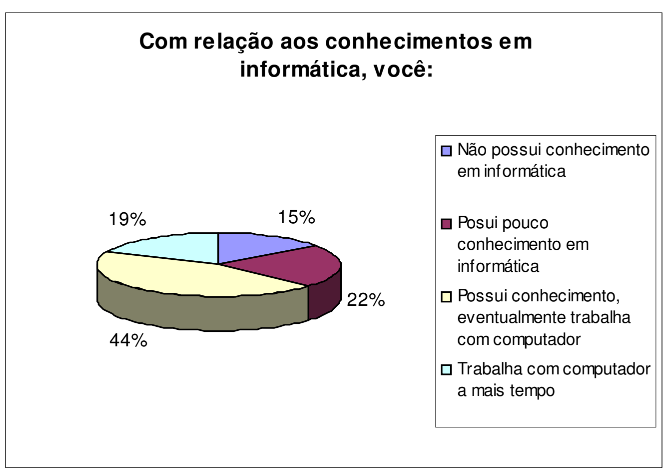
3 – Usa o laboratório de informática da escola com que freqüência:
(   ) semanalmente (   ) mensalmente (   ) semestralmente (   ) não usa

4 – O que você mais realiza no laboratório de informática da escola?
____

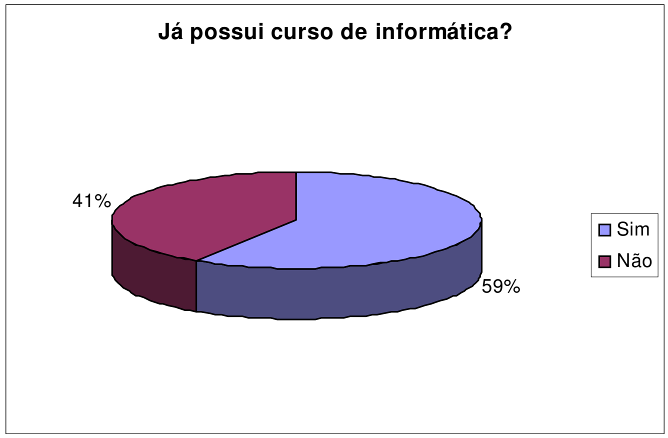
5 – Você já usou algum software de matemática na escola. Caso sim, quais?

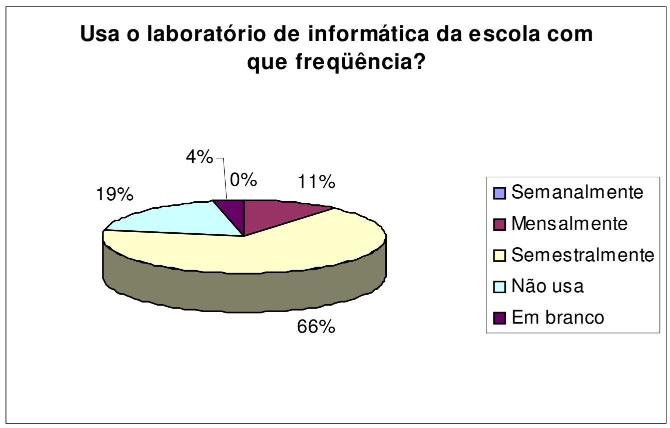
____

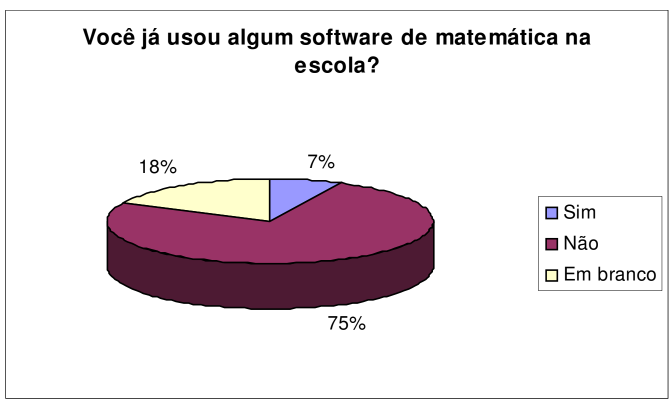
Gráficos referentes às questões 1, 2, 3 e 5 do questionário acima.



[13] O questionário teve como objetivo identificar a aproximação dos alunos, de forma geral com a informática.


Já possui curso de informática?
41%
59%
Sim
Não


Usa o laboratório de informática da escola com que freqüência?
4%
0%
11%
19%
66%
Semanalmente
Mensalmente
Semestralmente
Não usa
Em branco


Você já usou algum software de matemática na escola?
18%
7%
75%
Sim
Não
Em branco

Apêndice B – Atividades desenvolvidas

Atividade de Familiarização

Nome: .... Data: ....

Primeira parte:

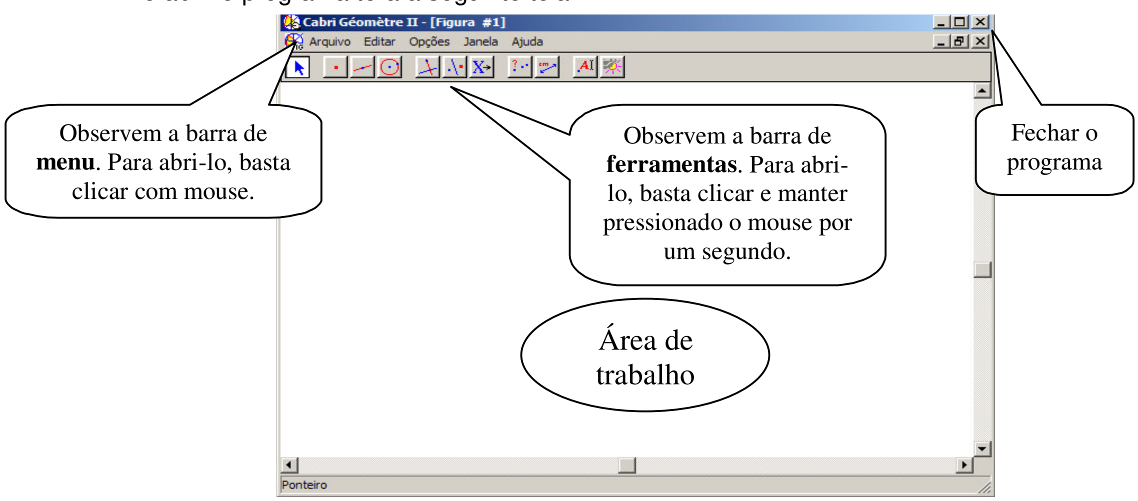
1 – Leia atentamente as sugestões abaixo e procure realizar as atividades propostas. Procure também identificar as partes do programa: Menu, Ferramentas e Área de Trabalho que serão usadas para as atividades.

- Inicie observando na área de trabalho de seu computador os atalhos que existem. Entre eles você encontrará o seguinte:

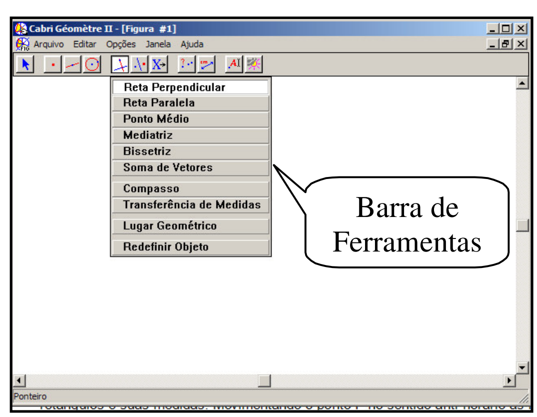
Cabri-géomètre II.:

Para abrir o programa, basta dar um clique duplo sobre o atalho ou, ir no menu Iniciar >> Programas >> Cabri Géomètre II e clicar.

Ao abrir o programa terá a seguinte tela:



Observe um menu aberto e uma barra de ferramentas:



Segunda parte:

2 – Na seqüência encontram-se alguns passos para construir uma figura usando o *Software* Cabri Géomètre II. Siga os itens a seguir e resolva um de cada vez. Sempre que for solicitada alguma definição que você não saiba ou não lembre, poderá consultar um colega, ou usarem o dicionário ou livro de matemática para encontrar resposta.

2.1 – Após ter aberto o software, passe o mouse pressionando sobre as ferramentas até que abram suas janelas e fiquem visíveis. Verifique as funções que cada uma apresenta e explore-as.

2.2 - Numa delas aparecerá a opção **Mostrar Eixos**, clique e observe o que acontecerá com a área de trabalho.

2.3 - Localize uma ferramenta que faça **Circunferência,** selecione-a clicando sobre ela. Agora clique no ponto de encontro dos eixos criados anteriormente. Amplie a circunferência até onde você desejar. Na última opção, você deve ter observado que o *software* pergunta o que você quer fazer. Por exemplo, quando perguntou "**Nesse ponto"** ao clicar no encontro dos eixos para iniciar com o centro da circunferência. Pode observar ainda que, se tentar mover a circunferência, ele perguntará que objeto você quer e, quando for arrastar a circunferência, o ponteiro do mouse transforma-se em uma mãozinha que arrasta o objeto indicado. Observe e teste.

2.4 – Nas atividades anteriores, você inseriu eixos e criou uma circunferência com centro no ponto de encontro dos eixos. Procure na Barra de Ferramentas aquela que faça **Comentário,** usada para escrever ou nomear objetos. Escreva a nomenclatura dos quatro pontos de encontro da circunferência com os eixos do plano cartesiano e o ponto central.

2.6 - Localize nas ferramentas a opção **Distância e Comprimento** e verifique a medida o comprimento da circunferência. Qual a unidade de medida que o *software* usou para medir?

2.7 – Após ter verificado o comprimento da circunferência, determine a medida de sua superfície, ou seja, a área. Para isso procure a ferramenta **Área** e clique na circunferência. Nesse caso, qual a unidade de medida que foi usada para a medida de sua superfície?

2.8 - Você sabe o que é o raio da circunferência? E qual a unidade de medidas que é usada para medi-lo? Responda abaixo. Para que o *software* forneça a medida do comprimento do raio, é necessário primeiro marcar os pontos inicial e final. Crie os pontos e, após, meça o comprimento do raio da circunferência que você traçou.

2.9 - O que é diâmetro da circunferência? Qual sua unidade de medida? Da mesma forma que o raio, marque os pontos que determinam as extremidades do diâmetro. Após verifique a medida do diâmetro.

2.10 - Você já ouviu falar em arco de circunferência? O que você entende por um arco de circunferência?

2.11 – Procure entre as ferramentas do *software* Cabri II uma que constrói **Arco**. Agora trace um arco sobre a circunferência. Qual a unidade de medida que o *software* usou para medir o arco?

2.12 – Crie um ponto sobre a circunferência. Após, trace um **Segmento** de reta que parta do centro da circunferência e se estende até esse ponto. Determine o seu comprimento. Veja se você consegue uma ferramenta para medir o **Ângulo.** Para determinar a medida do ângulo, você deve clicar sobre um segmento, o ponto de encontro deles e sobre o outro segmento. Se conseguir qual é a unidade de medida que o *software* usou para medir o ângulo?

2.13 - Depois de medido o comprimento e a área da circunferência, pegue a circunferência e amplie movimente-a, observando o que acontece com todas as medidas. Descreva.

2.14 - Depois de feito o desenho e calculadas suas medidas, vamos **salvar** a atividade. Procure o menu **Arquivo** e clique. Observe onde diz: **Salvar Como**. Ao clicar em Salvar Como abrirá uma janela e você deverá escolher em **Salvar em** o local onde deseja salvar, salve nos Meus Documentos. Onde diz: **Nome do arquivo** dê um nome à atividade que você fez. Após, é só clicar em **Salvar**. Sua atividade está salva.

Atividade 01

Nome:.. Data:.........................

1 - Abra o arquivo 01.

1.1 – Após ter aberto o arquivo 01, verifique se existe uma semelhança entre a figura aberta e o que era desenvolvido com a professora em sala de aula. Discuta com seus colegas. Sempre que achar conveniente fazer alguma anotação ou responder uma atividade, escreva na própria folha. Descreva as semelhanças que você observou.

1.2 – Após ter observado e discutido a figura com seu colega, veja se você consegue observar na figura 01 e descrever suas partes, nomear do triângulo pequeno: o ângulo central _____, o cateto oposto _____ o cateto adjacente _____ e a hipotenusa _____ . Faça o mesmo em relação ao triângulo maior. Identifique seus elementos: ângulo central: _____, cateto oposto _____, cateto adjacente _____ e a hipotenusa _____ .

1.3 – Vocês podem observar que as medidas dos lados e do ângulo estão indicadas na figura. Ao movimentando o ponto **P’** sobre a circunferência, o que você pode observar com relação às medidas da figura?

Ao movimentar o ponto **P’**, posicione-o de forma a obter o ângulo central com os seguintes valores: 30°, 45° e 60°. Faça um de cada vez e, retirando os dados da figura, preencha os valores na tabela a seguir e calcule o que se pede.

<table>
<tr><td colspan="5">Que fórmula você usa para calcular as funções trigonométricas seno e cosseno?
Após calcule o seno e o cosseno dos triângulos abaixo para os três ângulos indicados.
Responda e calcule nas linhas abaixo.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ângulos</td><td colspan="2">$sen\alpha =$</td><td colspan="2">$\cos\alpha =$</td></tr>
<tr><td>Triângulo OPM
(pequeno)</td><td>Triângulo OP’M’
(grande)</td><td>Triângulo OPM
(pequeno)</td><td>Triângulo OP’M’
(grande)</td></tr>
<tr><td>30°</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>45°</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>60°</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Após ter calculado os doze valores da tabela acima, observe e discuta com seu colega os resultados encontrados na linha horizontal de cada ângulo, e procure responder às questões abaixo:

1.4 – Após ter calculado o **seno** para os dois triângulos (pequeno e grande), o que você observou entre os valores da razão trigonométrica **seno** de mesmo ângulo (linhas horizontais) para os triângulos diferentes? Escreva sua resposta.

1.5 – Após ter calculado o **cosseno** para os dois triângulos (pequeno e grande), o que você observou entre os valores da razão trigonométrica **cosseno** de mesmo ângulo (linhas horizontais) para os triângulos diferentes? Escreva sua resposta.

1.6 – A qual conclusão você chega sobre as razões trigonométricas em triângulos de medidas diferentes e com mesmo ângulo?

Atividade 02

Nome:.. Data:.........................

2 - Abra o arquivo 02. Procure **não alterar** o tamanho da circunferência, apenas observe e responda às questões a seguir na própria folha. Sempre que for solicitada alguma definição que você não saiba ou não lembre, poderá consultar um colega ou usar o dicionário ou livro de matemática para encontrar resposta.

2.1 – Sem movimentar o ponto **P** da figura pode-se observar que as medidas do arco e do raio são iguais? Sendo assim, qual é a medida do ângulo central? E sua unidade de medida?

2.2 – Movimente o ponto **P** sobre a circunferência no <u>sentido anti-horário</u>, de forma que a mediada do arco passe a 8 cm. Observe o que acontece com o ângulo central. Qual é sua medida? É possível estabelecer alguma relação entre as medidas do arco, do raio e do ângulo?

2.3 - Da mesma forma, desloque o ponto **P** sobre a circunferência, no mesmo sentido, de forma que a medida do arco seja igual a 12 cm. Qual é a medida do ângulo central? Agora, é possível estabelecer alguma relação entre o arco, o raio e o ângulo?

2.4 – Desloque o ponto **P** sobre a circunferência até exatamente o ponto **C**. Se necessário ampliar o desenho para chegar exatamente em **C**, amplie-o. Qual a medida do comprimento do arco? Dividindo a medida do arco pelo raio, você obterá? Esse valor lembra alguma medida?

2.5 – Das questões anteriores, é possível chegar a alguma fórmula para calcular o valor de π ? Qual é a fórmula e qual é o valor de π ?

2.6 – Ao observar seqüência de figuras formadas nas questões 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4, é possível estabelecer uma relação entre o ângulo, o arco e o raio? Caso sim, descreva.

2.7 – Caso fosse necessário determinar a medida do comprimento de um arco de circunferência sem o *software* Cabri II, como você faria? Precisaria de alguns valores para isso, quais?

Atividade 03

Nome:.. Data: ....

3 - Abra o arquivo 03.

Após ter aberto o arquivo, observe o que você visualiza de dados ou medidas na figura. O ponto **P** é móvel, pegue-o e movimente-o pela circunferência. Observe o que acontece com as medidas do raio e do arco da circunferência.

Sempre que for solicitada alguma definição que você não saiba ou não lembre, poderá consultar um colega ou use o dicionário ou livro de matemática para encontrar resposta.

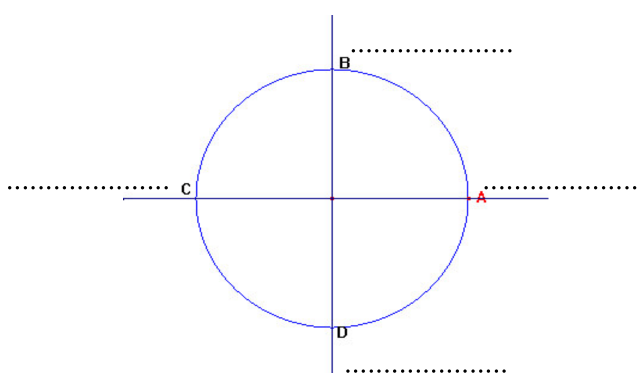
Responda às seguintes questões na própria folha:

3.1 – Observe a figura do arquivo 03. Veja se nela você encontra uma circunferência dividida em quatro partes, pelos eixos coordenados ***x*** e ***y***, e se cada ponto de intersecção dos eixos com a circunferência é nomeado. Verifique, ainda, se existe a medida do ângulo central e qual sua unidade.

3.2 – Verifique se observando a figura você consegue atribuir os valores aos ângulos em graus e aos arcos em radianos (lembrar a atividade anterior). Para isso pode movimentar o ponto **P** e posicionar nos pontos solicitados.

- Ponto de partida arco, com o ponto **P** posicionado no ponto **A**: ________ graus e _______ radianos;
- Arco PB, com **P** posicionado em **B**: _______ graus e _______ radianos;
- Arco PC, com **P** posicionado em **C**: _______ graus e _______ radianos;
- Arco PD, com **P** posicionado em **D**: _______ graus e _______ radianos;
- Arco PA, com **P** posicionado em **A** e arco com mesma medida da circunferência: _______ graus e _______ radianos;

3.3 - Para melhor visualizar as respostas anteriores, marque os respectivos valores dos arcos em graus e radianos nos respectivos pontilhados da circunferência abaixo:



3.4 – Observe que a circunferência ficou dividida em quatro partes iguais com suas respectivas medidas em graus e radianos. Que nome você atribuiria a essa figura e cada uma de suas partes?

Atividade 04

Nome:.. Data: ....

4 – Abra o arquivo 04.

Após ter aberto o arquivo, observe a figura e todas as medidas que nela estão indicadas e na tela do computador. Após observar, movimente do ponto **F** sobre a circunferência maior e observe o que acontece às medidas dos arcos das circunferências mostradas ao lado. Caso queira, você pode aumentar ou diminuir o tamanho das circunferências. Para isso basta pegá-la e arrastá-la. Com isso o que você observa com relação à medida dos seus raios.

Movimente o ponto **F** e as circunferências e deixe-os na posição que você quiser, após retire as medidas do *software* e preencha os valores dos raios e arcos indicados na tabela abaixo. Após, calcule os valores solicitados na terceira coluna.

Valores				Calcule	
Arco AB		Raio OA		AB / OA	
Arco CD		Raio OC		CD / OC	
Arco EF		Raio OE		EF / OE	

A partir dos dados da tabela responda às seguintes questões:

4.1 – As medidas dos raios são iguais? E dos arcos?

4.2 – Com relação à medida do ângulo central formado nas três circunferências, o que se pode afirmar?

4.3 – O que você observou no resultado da divisão dos arcos pelos raios?

4.4 – Sobre a terceira coluna da tabela acima onde você dividiu o arco pelo raio. O que você pode concluir sobre as três respostas? Esses resultados levam a concluir alguma coisa sobre arco, raio e ângulo em uma circunferência?

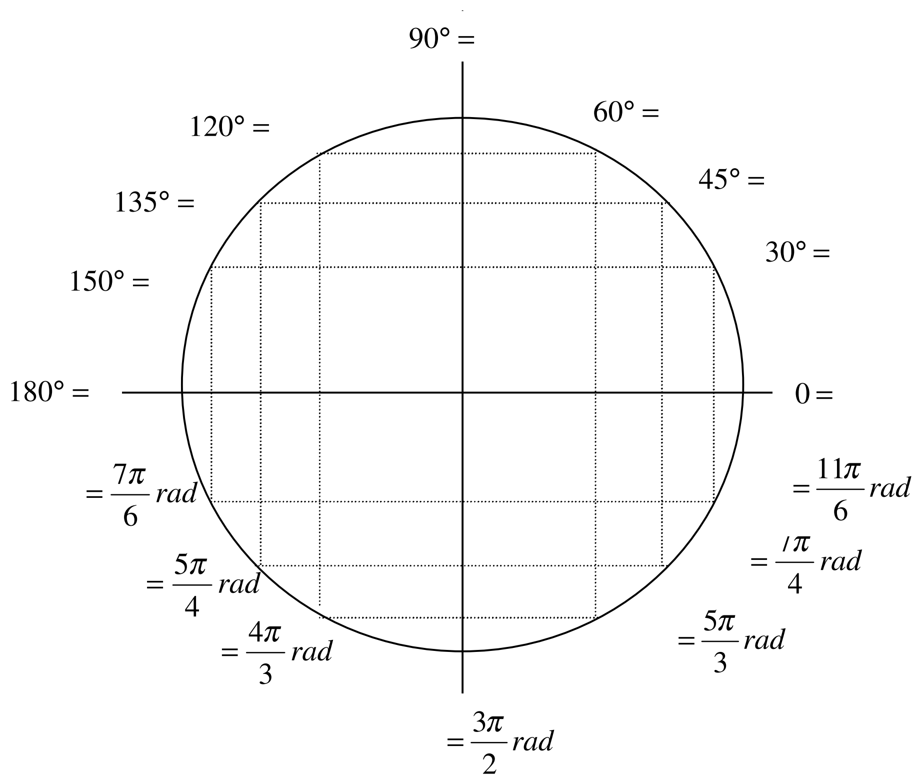
Atividade 05

Nome: .... Data: ....

5 – Usando as definições criadas no laboratório, procure resolver as atividades a seguir.

5.1 – Na atividade 03 você determinou as medidas dos quadrantes do ciclo trigonométrico em graus e radianos, onde se definiu que 180° é igual a π radianos. Sendo dado algum ângulo em graus, por exemplo 30°, é possível obter a medida correspondente do arco em radianos? Qual o processo que você usaria para calcular?

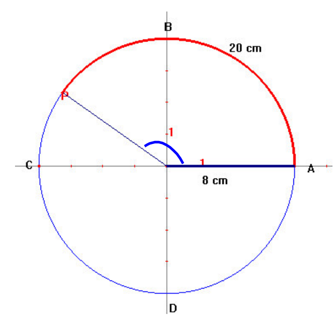
5.2 – Usando o processo do exercício anterior, calcule os valores dos arcos correspondentes em radianos e preencha os valores da primeira metade do ciclo trigonométrico. Para a segunda metade faça o inverso, calcule os valore dos arcos em graus.



5.3 – Para determinar o comprimento do arco de uma circunferência, quais medidas você precisaria?

5.4 – Na atividade 02 realizada no laboratório de informática definiu-se uma relação entre os valores de um arco, do raio e do ângulo central que a forma. Qual é essa relação?

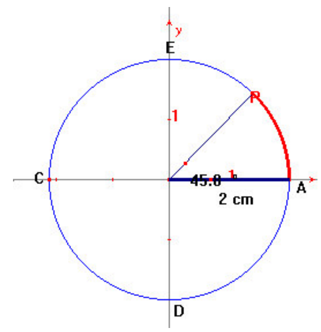
5.5 – Usando a relação anterior, calcule a medida do ângulo central da figura a seguir:



5.6 – Calcule em radianos a medida do ângulo central correspondente a um arco de comprimento 15 cm contido em uma circunferência de 3 cm de raio.

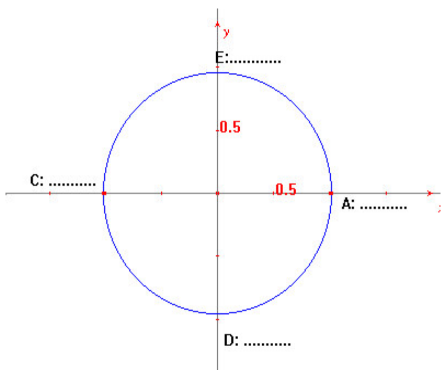
5.7 – Qual o comprimento de um arco, correspondente a um ângulo central de 60°, contido em uma circunferência de 1 cm de raio.

5.8 – Sendo dada a figura, calcule o comprimento do arco AP.

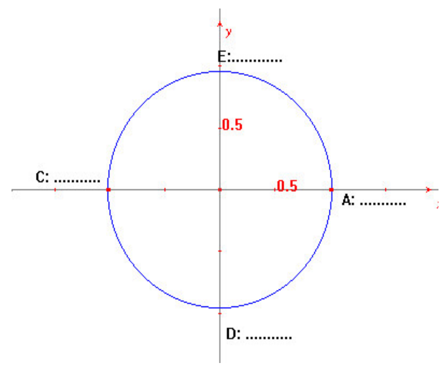


5.9 – Qual o valor das medidas nos pontilhados indicados nas figuras as seguir:

(em graus)



(em radianos)



5.10 – O que você usaria para calcular o valor de π ?

5.11 – O que você usaria para calcular a medida do comprimento de uma circunferência?

Atividade 06

Nome: .... Data: ....

6 – Abra o arquivo 05.

Observe a figura do arquivo e verifique se você consegue observar nela o descrito abaixo:

A figura apresenta um ciclo trigonométrico dividido em quatro quadrantes e dentro dele um triângulo retângulo OPQ. O triângulo possui um ângulo central Ô e a projeção do cateto oposto PQ sobre a ordenada y formando o segmento OM. O ciclo trigonométrico possui raio igual a 1 e conseqüentemente, a medida da hipotenusa OP também é 1. Aos catetos não são indicados medidas. Para os cálculos solicitados a seguir, sugere-se deixá-las indicadas como cateto oposto OM (em rosa, a projeção do cateto na ordenada) e cateto adjacente OQ.

Movimente o ponto P sobre o ciclo trigonométrico e observe as variações nas figuras.

6.1 – Posicione **P** de forma a formar um ângulo de 30° e calcule o valor de seu seno. (Lembre-se que a medida do cateto oposto é congruente a medida OM).

a) sen 30° =

O que você observa com relação ao seno 30° e a projeção OM?

6.2 – Posicione P agora de maneira a formar um ângulo de 70° ecalcule o valor de seu seno.

b) sen 70° =

E agora, o que você observa com relação ao valor do seno de 70°? O que pode concluir sobre o seno dos dois valores anteriores?

6.3 – Se fosse solicitado seno de 120° e seno de 225°, que valor você poderia atribuircomo resposta, sem calcular, apenas movimentando a figura? Explique sua resposta.

6.4 – A sua conclusão sobre o valor da função seno, da questão anterior, pode ser estendida para qualquer ângulo do ciclo trigonométrico? Procure escrever com suas palavras uma definição para o valor do seno de qualquer ângulo que esteja no ciclo trigonométrico.

6.5 – Sendo a medida do raio da circunferência igual a 1, movimente o ponto **P** sobre o ciclo trigonométrico e descreva todos os ângulos que formam o segmento OM (igual ao valor do seno) <u>maior que 1 e menor que –1</u>.

6.6 – Agora, movimentando o ponto **P** sobre o ciclo trigonométrico, localize todos os ângulos que tenham valores para seno <u>iguais a –1, 0 e 1</u>. Descreva os ângulos e os respectivos valores abaixo.

6.7 – Descreva as medidas dos <u>intervalos</u> de cada quadrante, em graus e radianos.

6.8 – Novamente movimente o ponto **P** sobre a circunferência e verifique em quais quadrantes o seno (segmento OM) <u>cresce e decresce</u>. Justifique sua resposta.

6.9 – Se compararmos os eixos do ciclo trigonométrico aos eixos cartesianos x e y, em quais quadrantes o seno (segmento OM) possui medida <u>positiva e negativa</u>? Por quê?

Atividade 07

Nome: .... Data: ....

7 – Abra o arquivo 06.

Após abrir a figura do arquivo, você observa um ciclo trigonométrico semelhante ao da atividade anterior onde se definiu a função seno. O ciclo desta atividade está dividido em quatro quadrantes com triângulo retângulo OPQ, com um ângulo central Ô, agora, porém, a projeção do cateto adjacente sobre o eixo x das abscissas formando o segmento OQ. O ciclo possui raio igual a 1 e medida igual ao valor da hipotenusa, também é 1. Aos catetos não são indicados medidas, para os cálculos a seguir, sugere-se deixá-las indicadas como PQ e OQ.

7.1 – Calcule o valor do cosseno nas seguintes situações abaixo:

a) cos 45° =

O que você observa em relação ao cos 45° e o segmento OQ?

b) cos 150° =

E agora, o que você observa em relação ao cos 150° e o segmento OQ?

7.2 – E agora, o que você pode concluir sobre o valor do cosseno para os dois ângulos anteriores?

7.3 - Se fosse solicitado para você calcular o valor do cos 225° e o cos 330°, que medida você poderia atribuir ao cosseno sem calcular, apenas movimentando a figura?

7.4 – O que se pode concluir sobre as questões anteriores sobre cosseno de um ângulo qualquer que esteja em qualquer parte do ciclo trigonométrico? Descreva sua conclusão.

7.5 – Agora, movimente o ponto **P** sobre o ciclo trigonométrico e localize todos os ângulos que formam o segmento CA (medida do cosseno) <u>maior que 1 e menor que –1</u>. Escreva os ângulos abaixo.

7.6 – Movimentando o ponto **P**, encontre o máximo de ângulos para que as medidas do cosseno sejam <u>iguais a –1, 0 e 1</u>, escreva-os abaixo.

7.7 – O ciclo trigonométrico ficou dividido, pelos eixos cartesianos, em quatro quadrantes. Descreva as medidas dos intervalos de cada quadrante, em graus e radianos.

7.8 – Agora, movimente o ponto **P** e verifique em que quadrantes o segmento OQ <u>cresce e decresce</u>. Descreva-os abaixo.

7.9 – Sendo os eixos que cortam o ciclo trigonométrico os eixos cartesianos *x* e *y,* em quais quadrantes o segmento OQ possui medida <u>positiva e negativa</u>?

Atividade 08

Nome: .... Data: ....

8 – Abra o arquivo 07.

Após ter aberto o arquivo, movimente o ponto **P** sobre a circunferência e observe as variações da figura. Após ter observado, movimentando o ponto **P** no sentido anti-horário sobre a circunferência, responda às questões solicitadas no quadro a seguir. Os dados para resposta estão na figura e ainda podem ser buscados nas atividades anteriores 06 e 07. Procure analisar seno e cosseno de forma separada.

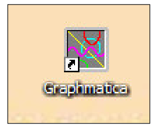
Quando P esta no:	O **intervalo** do **arco** varia de: (em rad)	O **intervalo** do **ângulo** varia de: (em graus)	O **valor** do **seno** cresce ou decresce?	O **valor** do **cosseno** cresce ou decresce?	O **sinal** do **seno** positivo ou negativo?	O **sinal** do **cosseno** positivo ou negativo?
1º quadrante						
2° quadrante						
3º quadrante						
4º quadrante						

Após ter completado todos os dados da tabela acima, relacione os valores das colunas que tratam dos itens **valor e sinal**, analise os resultados para seno e cosseno e observe suas diferenças. Descreva as observações.

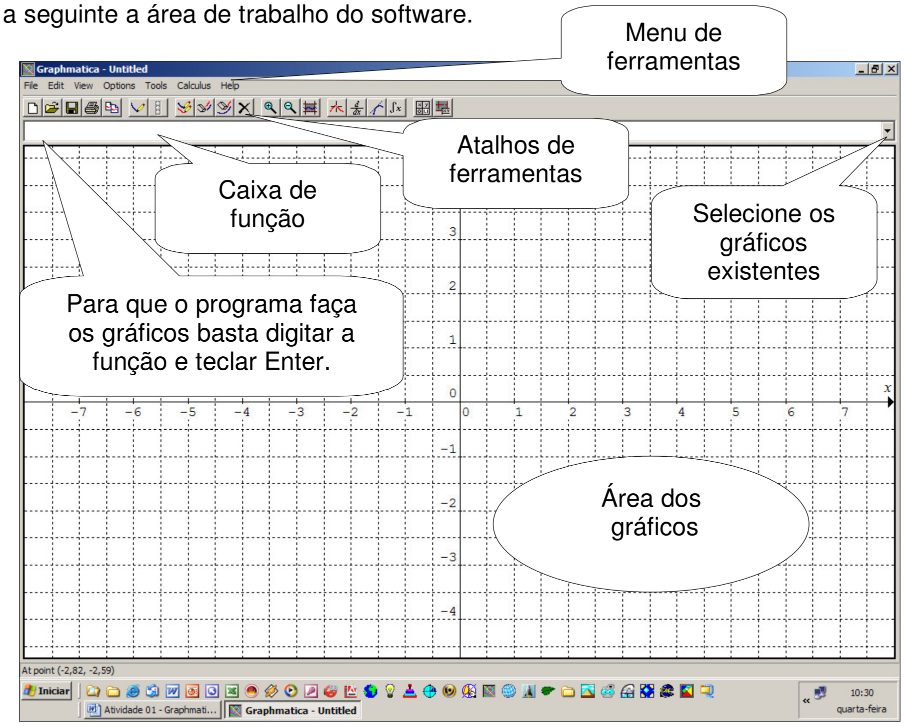
Atividade 09

Nome:.. Data:........................

As atividades a seguir serão desenvolvidas usando o *software* Graphmatica. Para abri-lo, basta clicar no ícone de atalho do programa, na área de trabalho do computador.

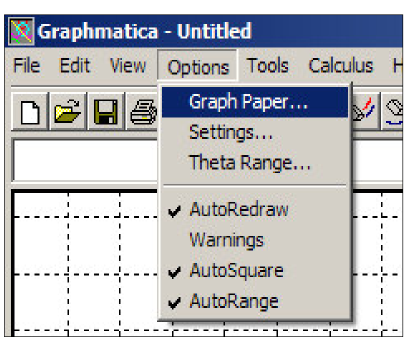


É a seguinte a área de trabalho do software.

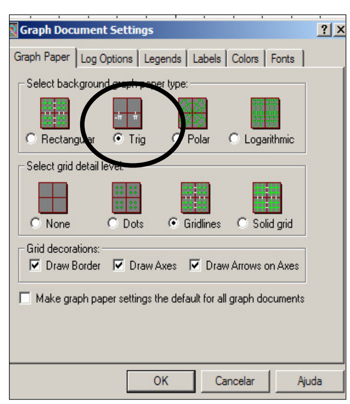


Para apagar um gráfico anterior, basta selecionar o gráfico na caixa de função e clicar no atalho

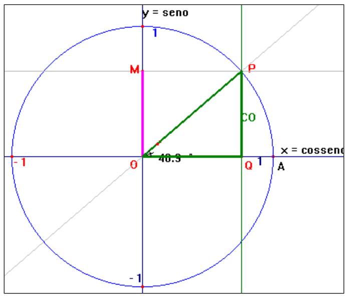
Para alterar as opções do *software* para função trigonométricas basta clicar em **Options >>> Graph Paper >>> Trig**. Siga o modelo das figuras abaixo.



>>>



Para realização da atividade a seguir, estaremos usando os dados das atividades anteriores construídas com o auxílio do *software* Cabri Géomètre II. A figura a seguir e o quadro resumo referem-se à atividade onde se definiu sen (x) e suas características. Observe na figura e no quadro as características (quadrante, arco, sinal e variação) da função seno.



Quadrante	I	II	III	IV
Arco	$0 \bullet \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \bullet \pi$	$\pi \bullet \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \bullet 2\pi$
Sinal	+	+	-	-
Variação	cresce	decresce	decresce	cresce
	0 • +1	+1• 0	0 • -1	-1 • 0

9.1 – Para realização dessa atividade, abra o *software* Graphmatica. Na caixa de função digite a função **y = sin (x) {0,2P}** e tecle enter. Veja se ele desenhou o gráfico da função y = sen (x).

Observe e discuta com seu(s) colega(s) do(s) grupo(s) as seguintes características do quadro acima no gráfico.

a) Veja se o gráfico apresenta, no eixo **x,** os intervalos do **arco** do ciclo trigonométrico.

b) Veja se o gráfico apresenta, no eixo **y,** as **variações** do valor da função sem(x), do quadro acima. Veja onde o gráfico **cresce** e **decresce** e para que valores.

c) Observe os **sinais** dos gráficos. Veja onde ele é **positivo** e onde é **negativo**.

Desenhe o gráfico construído pelo software no espaço abaixo e marque nele todas as características observadas acima.

9.2 - Usando o software graphmatica, digite a função **y=sin(x)**. Observe o gráfico gerado pelo software e identifique:

a) Onde o **domínio** é representado no gráfico? Qual é o conjunto Domínio da função?

b) Onde a **imagem** é representada no gráfico? Qual é o conjunto Imagem da função?

c) O que é **período** de uma função trigonométrica? Onde se verifica o período da função sen(x) no gráfico? E qual é o período da função sen(x)?

Atividade 10

Nome:... Data:.........................

Esta atividade tem como objetivo verificar quais as características que alteram o gráfico da função. Usando a função **y = a + b.sen (á.x)**, ao final da atividade, você deverá definir qual a função dos valores **a, b,** e **á** no gráfico da função acima.

10.1 – Ao fazer os gráficos a seguir, deixe-os na tela para que você possa compará-los. Neles, observe o que os valores, representados por **a,** que são **adicionados as funções** alteram no gráfico. Faça os três gráficos a seguir:

a) **y = sin (x)**

b) **y = 1 + sin (x)**

c) **y = - 1 + sin (x)**

10.2) Quais os conjuntos imagens dos gráficos representados pelas funções a, b e c?

10.3) Os gráficos apresentam imagens diferentes? Por quê?

10.4) O que os valores 1 e –1 **adicionados as funções** definem nos gráficos? O que se pode concluir?

10.5) Faça outros gráficos, como exercício, com valores adicionados as funções e confirme sua conclusão.

a) **y = 2 + sin (x)**

b) **y = - 2 + sin (x)**

c) **y = sin (x) – 2**

d) **y = sin (x) + 2**

e) **y = 3 + sin (x)**

Nas atividades a seguir, observe na mesma função **y = a + b.sen (á.x)** o que se altera com a mudança do valor **b.**

10.6 – Ao fazer os gráficos a seguir, deixe-os na tela para que você possa compará-los. Nos gráficos das funções observe o que os valores de **b,** que são **multiplicados nas funções,** alteram no gráfico. Faça os gráficos sugeridos a seguir:

a) **y = sin(x)**

b) **y = 2.sin (x)**

c) **y = - 2.sin (x)**

d) **y = 3.sin (x)**

10.7) Quais os valores dos conjuntos imagens dos gráficos a, b, c e d?

10.8) Os gráficos apresentam conjuntos imagens diferentes? Por quê?

10.9) O que os valores – 2, 2 e 3, **multiplicados nas funções,** definem nos gráficos? O que se pode concluir? Escreva sua resposta.

10.10) Caso seja alterado apenas o sinal da função (ver gráficos b e c), quando multiplicou 2 e –2, o que acontecerá no gráfico?

10.11) Faça outros gráficos, como exercício para testar sua conclusão acima, outros gráficos com valores somados às funções e confirme sua conclusão.

a) **y = 4.sin(x)**

b) **y = 1/2.sin(x)**

c) **y = 1/4.sin(x)**

Semelhante à atividade anterior, essa atividade tem como objetivo verificar quais as características que alteram o gráfico da função **y = a + b.sen (á.x)** quando se altera o valor de **á** multiplicado no arco da função.

10.12) Ao fazer os gráficos a seguir, da mesma forma, deixe-os na tela para que você possa compará-los. Nos gráficos das funções a seguir observe o que os valores **á** que são multiplicado no **arco** da função altera no gráfico. Faça os gráficos sugeridos a seguir:

a) **y = sin (x)**

b) **y = sin (2.x)**

c) **y = sin (1/2.x)**

10.13) Qual é o período dos gráficos a, b e c?

10.14) Os gráficos apresentam períodos diferentes? Por quê?

10.15) O que os valores 2 e 1/2 **multiplicados no arco das funções** definem nos gráficos? O que se pode concluir? Escreva sua resposta.

10.16) Faça outros gráficos como exercício para testar sua conclusão acima, outros gráficos com valores somados às funções e confirme sua conclusão.

a) **y = sin(4.x)**

b) **y = sin(1/4.x)**

c) **y = sin(3.x)**

d) **y = sin(1/3.x)**

Conclusão – Definição

10.17) Utilizando as atividades anteriores 01, 02 e 03, descreva explicando o que cada uma das variáveis **a, b,** e **á**, da função **y = a + b.sen (á.x)** define no gráfico, ou seja, o que cada uma altera no gráfico. Organize uma resposta explicando uma de cada vez nas questões a seguir.

a) y = **±a** + b.sen (á.x)

b) y = a **± b.**sen (á.x)

c) y = a + b.sen (**á.**x)

d) Agora explique a função das três variáveis reunidas na função principal :

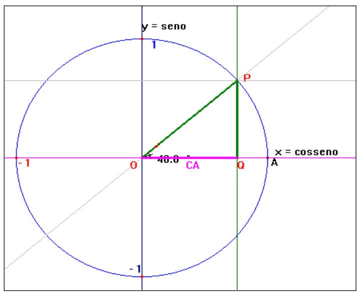
y = ± a ± b . sen (á . x)

e) E o conjunto domínio, onde é definido na função acima?

Atividade 11

Nome:.. Data:........................

Para realização da atividade a seguir, estaremos usando os dados das atividades anteriores construídas com o auxílio do *software* Cabri-Géomètre II. A figura a seguir e o quadro-resumo referem-se à atividade onde se definiram cos (x) e suas características. Observe na figura e no quadro as características (quadrante, arco, sinal e variação) da função cosseno.



Quadrante	I	II	III	IV
Arco	$0 \bullet \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \bullet \pi$	$\pi \bullet \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \bullet 2\pi$
Sinal	+	-	-	+
Variação	decresce	decresce	cresce	cresce
	1 •0	0 • -1	-1 •0	0 •1

11.1) Para realização dessa atividade, abra o *software* Graphmatica. Na caixa de função digite a função **y = cos (x) {0,2P}** e tecle enter. Veja se ele desenhou o gráfico da função y = cos (x).

Observe e discuta com seu(s) colega(s) do(s) grupo(s) as seguintes características, do quadro acima, representadas no gráfico.

a) Veja se o gráfico apresenta, no eixo **x,** os intervalos do **arco** do ciclo trigonométrico.

b) Veja se o gráfico apresenta, no eixo **y,** as **variações** da função seno, do quadro acima. Veja onde o gráfico **cresce** e **decresce** e para que valores.

c) Observe os **sinais** dos gráficos. Veja onde ele é **positivo** e onde é **negativo**.

Desenhe no espaço abaixo, o gráfico construído pelo software e marque nele todas as características observadas acima.

11.2) Usando o *software* Graphmatica, digite a função **y=cos(x)**. Observe o gráfico gerado pelo *software* e identifique:

a) Onde o domínio é representado no gráfico? Qual é o conjunto domínio da função?

b) Onde a imagem é representada no gráfico? Qual é o conjunto imagem da função?

c) Onde se verifica o período da função no gráfico? E qual é o período da função?

11.3) Construa os gráficos das funções seno e cosseno a seguir e veja o que há de semelhanças e diferenças nos gráficos. Os termos entre chaves indicam os intervalos das funções.

a) **y=sin(x) {0,2p}**

b) **y=cos(x) {0,2p}**

Desenhe os gráficos no espaço abaixo e descreva o que você observa de semelhança e de diferenças nos gráficos (semelhança e diferença entre: domínio, imagem, período e curva do gráfico).

11.4) Nas atividades de seno, definiu-se a função das variáveis **a, b** e **ά** na função **y = ± a ± b.sen (ά.x).** Agora comparando com a função cosseno, verifique se há diferenças entre os gráficos com os mesmos valores das variáveis. Faça os gráficos e verifique.

a) y= 1+2**sen**(2x) {0,2p}

b) y= 1+2**cos**(2x) {0,2p}

Após o *software* construir os gráficos das funções diferentes, um de seno e outro de cosseno, você observa algumas diferenças referentes às funções das variáveis **a, b** e **á**? Desenhe os gráficos no espaço abaixo e descreva.

No que se refere às variáveis **a, b** e **á**, pode-se concluir a mesma coisa para o seno e para o **cosseno**? Descreva e indique na função principal.

$$y = \pm a \pm b \,.\, \cos(á \,.\, x)$$

11.5) Agora, construa os gráficos das funções a seguir e observe a diferença entre eles. Descreva as diferenças dos gráficos.

a) y = **+** 2.sen(x) {0,2p} e, y = **–** 2.sen(x) {0,2p}

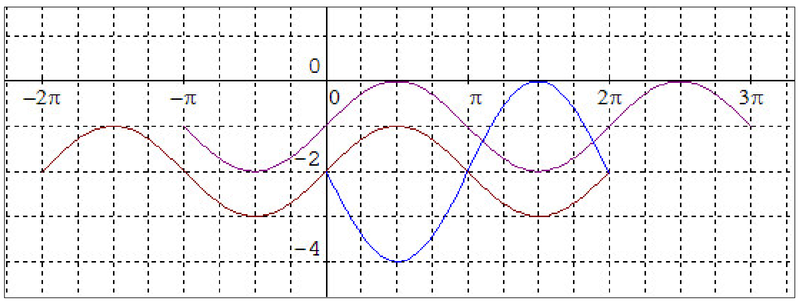
b) y = **+** 2.cos(x) {0,2p} e, y = **–** 2.cos(x) {0,2p}

Atividade 12

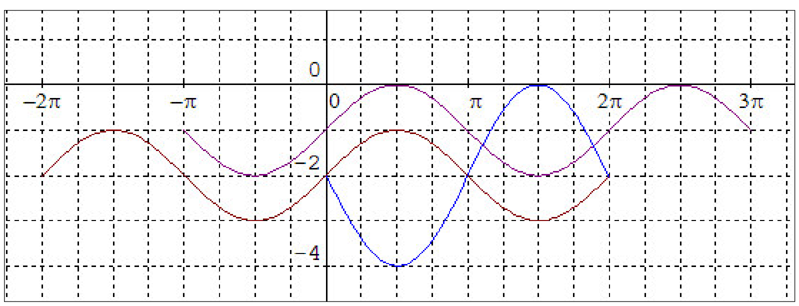
Nome:.. Data:.........................

Para resolver os exercícios das atividades a seguir, deverá usar os conceitos construídos nas atividades anteriores. Tendo presente os conceitos de domínio, imagem e período das funções, analise os seguintes gráficos e encontre a resposta solicitada.

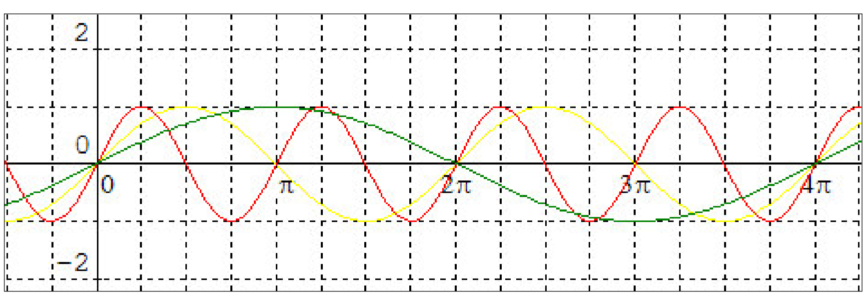
12.1) Identifique e indique o **domínio** dos gráficos das funções seno da figura a seguir.



2 – Agora, identifique e indique a **imagem** dos gráficos da função seno da figura a seguir.



3 – Observando os gráficos, identifique e indique o **período** das funções seno dos gráficos da figura a seguir.



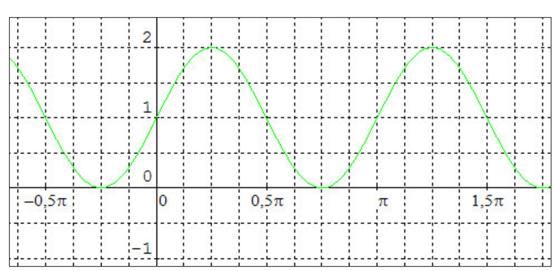
4 – Observe o gráfico ao lado e localize no nele o que se pede:

a) D =

b) Im =

c) P =

d) y =



5 – Analise o gráfico ao lado e responda:

a) D =

b) Im =

c) P =

d) y =

6 – Localize no gráfico ao lado o que se pede:

a) D =

b) Im =

c) P =

d) y =

7 – Observando no gráfico ao lado responda:

a) D =

b) Im =

c) P =

d) y =

8 – Analise as seguintes funções e responda: (Se dos exercícios 8 ao 10 forem solicitados os valores de a, b e α , é referente ao valor que representam na função y = a ± b. sen (α x))

8.1) y = 2.cos (x)

a) Domínio: d) b:

b) Imagem: e) α :

c) Período:

8.2) y = - 2 + sen (x/2)

a) Dominio: d) a:

b) Imagem: e) α :

c) Período:

8.3) y = 2 + 3 cos (x/3)

a) Domínio: d) a:

b) Imagem: e) b:

c) Período: f) α

9 – Observando a função y = 3 - 2 cos (2x), responda:

a) O valor de **a:** Conjunto domínio:

b) O valor de **b:** Conjunto imagem:

c) O valor de **á:** O período:

10) Indique e descreva o que cada valor destacado altera no gráfico da função.

y = **± a ± b** cos (**á.**x) {**0, 2p**}

11) Sendo dada a função y = a + b sen (2x) com Im: [-2, 2]. Discuta com seu colega e responda:

a) Domínio: d) a:

b) b: e) α :

c) Período:

12) Na função y = a + b cos (áx), onde Im: (-1, 3] e P = 4π . Discuta com seu colega e responda:

a) a: c) á:

b) b: d) Domínio

13) Para as funções a seguir, responda:

Função	Conjunto imagem	Período
y = 2 cos (x/2),		
y = 1+ sen (2x)		
y = 3 + 2 cos (x/4)		
y = 3 sen (x)		

14) Agora, analise os gráficos das funções a seguir e responda o que o sinal destacado altera no gráfico. Descreva.

a) y = **+** 2.sen(x) e y = **–** 2.sen(x)

b) y = **+** 2.cos(x) e y = **–** 2.cos(x)

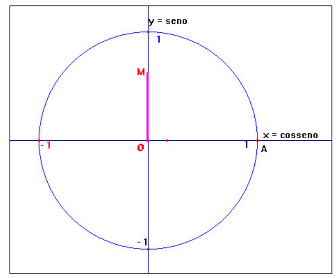
Apêndice C – Avaliações

Avaliação 01

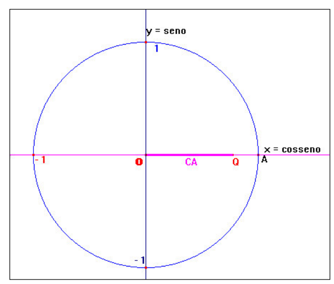
Nome: .... Data: ....

Usando as definições criadas nas atividades realizadas no laboratório, procure responder às atividades a seguir.

1 – Descreva, da forma como você compreendeu, uma definição para a função trigonométrica **seno** no ciclo trigonométrico.

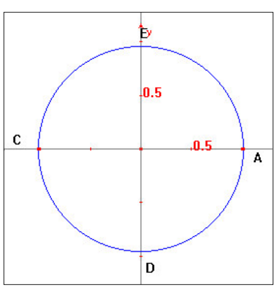


2 – Descreva, da forma como você compreendeu, uma definição para a função trigonométrica **cosseno** no ciclo trigonométrico.

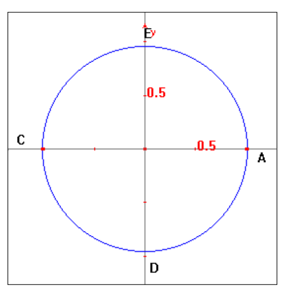


3 - Marque nos ciclos abaixo os sinais e os quadrantes correspondentes às funções seno e cosseno em cada ciclo trigonométrico.

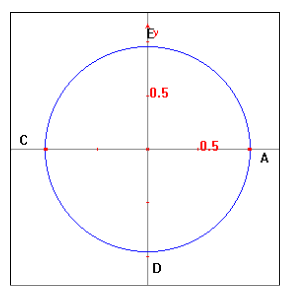
Sinal do seno



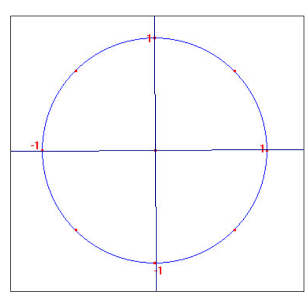
Sinal do cosseno

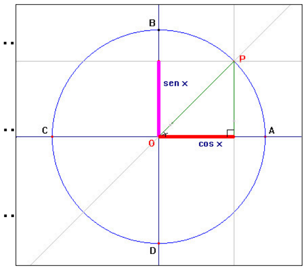


Quadrantes



4 - Explique e indique na figura ao lado por que o seno de 30° é ½ .





5 – Para quais ângulos o valor de seno é 0? ....

6 - Cite um ângulo que tenha valor de seno igual a 1:..................................

7 - Para qual ângulo o cosseno tem valor igual a -1:...................................

8 - Cite dois ângulos que tenham valor do cosseno igual a zero: ....

9 – Cite um ângulo que tenha o valor de seno = 0,5: .... ,

seno = 1,5:...e seno = 2,0..

10 - Transforme os seguintes valores de graus para radianos e de radianos para graus.

a) 100°

c) $\frac{3}{5}\pi\ rad$

b) 225°

d) $\frac{7}{2}\pi$ rad

11 – Qual é o intervalo, em radianos, do terceiro quadrante? ....

E qual é o intervalo, em graus, do segundo quadrante?...

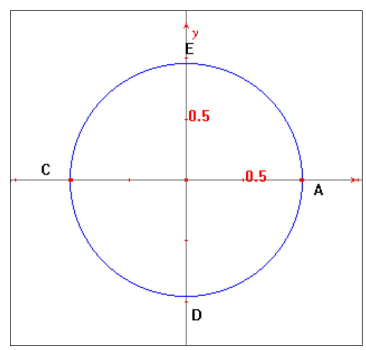
12 – Observe a figura ao lado e responda:

a) Em quais quadrantes o seno cresce? ....

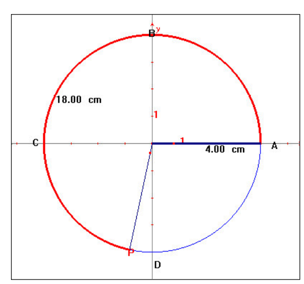
E em quais ele decresce?..

b) – Em quais quadrantes o cosseno cresce? ....

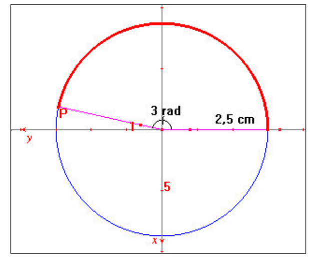
E em quais ele decresce?..



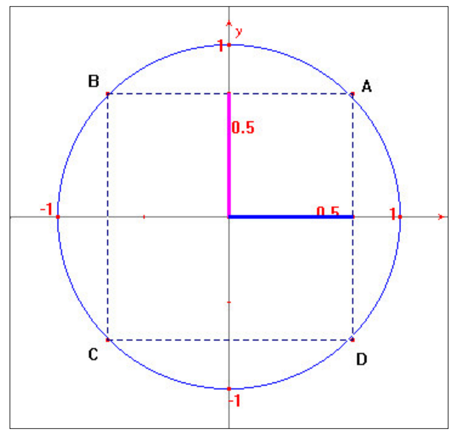
13 - Calcule, em radianos, a medida do ângulo central de uma circunferência que possui arco de 18 cm e o raio de 4 cm.



14 – Determine a medida do arco da circunferência onde o raio é 2,5 cm e o ângulo é 3,0 rad.



15 – Observando a figura ao lado, analise os valores de seno e cosseno nos pontos indicados no ciclo trigonométrico. Responda se as alternativas são **V**erdadeiras ou **F**alsas e justifique por que são verdadeiras ou falsas.



a) sen A = sen B

b) cos A = cos C

c) cos A = cos D

d) sen C = – sen D

e) – sen A = sen C

f) sen B = cos D

Avaliação 02

Nome: .... Data: ....

Usando as definições criadas nas atividades realizadas no laboratório, procure responder às atividades a seguir.

1 – Descreva, da forma como você compreendeu, uma definição para a função trigonométrica **seno** no ciclo trigonométrico.

2 – Descreva, da forma como você compreendeu, uma definição para a função trigonométrica **cosseno** no ciclo trigonométrico.

3 - Descreva os sinais e os quadrantes correspondentes às funções seno e cosseno em cada ciclo trigonométrico.

Quadrantes	Sinal do seno	Sinal do cosseno

4 - Explique por que o seno de 30° é ½.

5 – Para quais ângulos o valor de seno é 0? ....

6 - Cite um ângulo que tenha valor de seno igual a 1:...

7 - Para qual ângulo o cosseno tem valor igual a -1:...

8 - Cite dois ângulos que tenham valor do cosseno igual a zero: ....

9 – Cite um ângulo que tenha o valor de seno = 0,5: .... ,

seno = 1,5:..e seno = 2,0...

10 - Transforme os seguintes valores de graus para radianos e de radianos para graus.

a) 100°

c) $\frac{3}{5}\pi \ rad$

b) 225°

d) $\frac{7}{2}\pi$ rad

11 – Qual é o intervalo, em radianos, do terceiro quadrante? ....

E qual é o intervalo, em graus, do segundo quadrante?...

12 – Com base nas atividades resolvidas, responda:

a) Em quais quadrantes o seno cresce?...

E em quais ele decresce?...

b) Em quais quadrantes o cosseno cresce?..
E em quais ele decresce?..

13 - Calcule, em radianos, a medida do ângulo central de uma circunferência que possui arco de 18 cm e o raio de 4 cm.

14 – Determine a medida do arco da circunferência onde o raio é 2,5 cm e o ângulo é 3,0 rad.

15 – Observando a figura ao lado, analise os valores de seno e cosseno nos pontos indicados no ciclo trigonométrico. Responda se as alternativas são **V**erdadeiras ou **F**alsas e justifique por que são verdadeiras ou falsas.

g) sen A = sen B

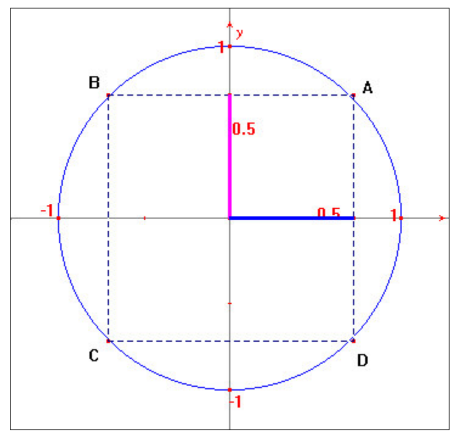
h) cos A = cos C

i) cos A = cos D

j) sen C = sen D

k) sen A = sen C

l) sen B = sen D



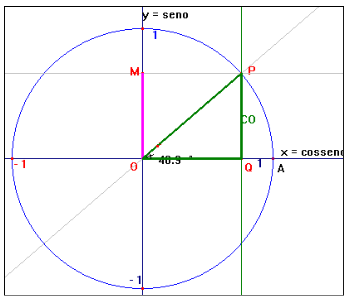
Avaliação 03

Nome: .... Data: ....

Usando as definições construídas durante as atividades realizadas no laboratório e em sala de aula, responda às questões a seguir.

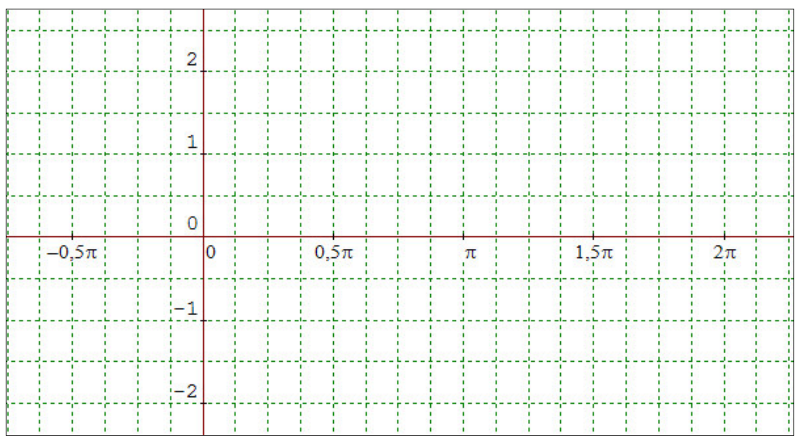
1) A figura do ciclo trigonométrico abaixo representa uma das funções: seno ou cosseno. Marque qual a função correspondente à figura e, após, preencha os espaços do quadro ao lado.

( ) y = sen (x) ou ( ) y = cos(x)



Quadrante	I	II	III	IV
Arco				
Sinal				
Variação				

Desenhe o gráfico da função correspondente à figura acima no espaço ao lado. Após, indique onde os valores do quadro são representados no gráfico.



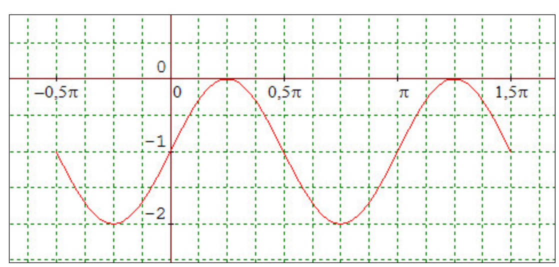
2) Observe o gráfico da figura ao lado e localize o que se pede:

a) Domínio:

b) Imagem:

c) Período:

d) y:



3) O gráfico ao lado é o da função **y = a.sen(b.x)**. Os números **a** e **b** correspondem, respectivamente, à qual alternativa? Justifique sua escolha.

a) 1 e 2.

b) 2 e 1.

c) 2 e -1.

d) -1 e 2.

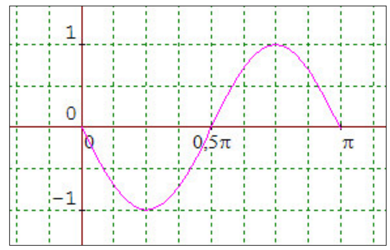
e) -1 e -2.

4) Na figura ao lado, identifique e responda:

a) Qual é o conjunto domínio?

b) Qual é o conjunto imagem?

c) Qual é o período da função?



5) Observe o gráfico ao lado e identifique a função que ele representa. Justifique sua escolha.

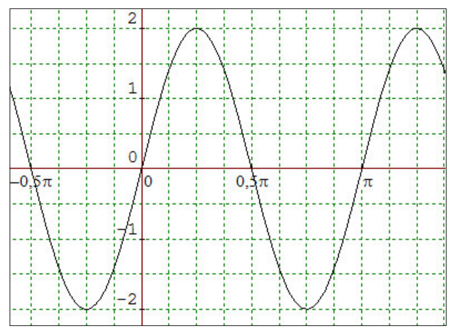
a) $y = -2 . \cos(x)$

b) $y = \cos(\frac{x}{2})$

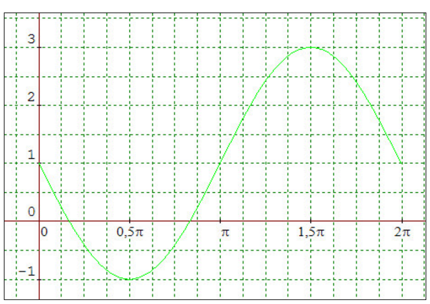
c) $y = 2 . \text{sen}(x)$

d) $y = \text{sen}(\frac{x}{2})$

e) $y = 2 . \text{sen}(2.x)$



6) Se f(x) = a + b.sen (x) tem como gráfico,



então:

a) a = - 2 e b = 1

b) a = - 1 e b = 2

c) a = 1 e b = - 1

d) a = 1 e b = - 2

e) a = 2 e b = - 1

7) Analisando a figura da questão anterior, responda:

a) Qual o conjunto domínio?

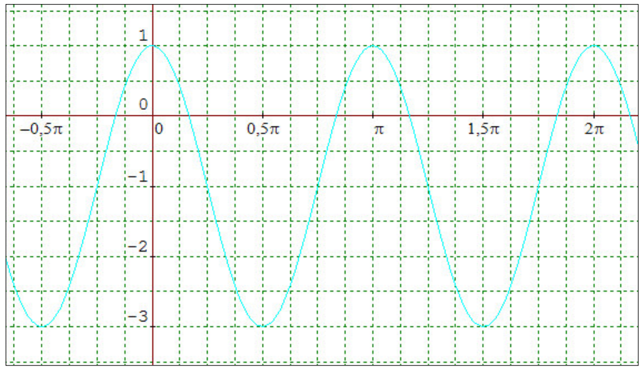
b) Qual o conjunto imagem?

c) Qual o período da função?

d) Escreva a função que corresponde ao gráfico:

8) Justifique, com suas palavras, por que o gráfico a seguir corresponde a função:

y = - 1 + 2.cos (2.x)



9) Sendo a função y = 1 – 3.cos (x/2), desenhe o gráfico e responda qual é:

a) O conjunto domínio:

b) O conjunto imagem:

c) O período da função:

10) Na função abaixo os valores de **± a, ± b** e **ά** representam números quaisquer. A partir dos vários gráficos construídos e analisados nas aulas, o que você define com relação ao que cada um desses valores representaria em um gráfico qualquer?

y = ± a ± b cos (ά.x)

11) Sendo dada a função y = a + b.sen (2.x) onde o conjunto imagem é {y ∈ ℜ / -1 • y • 3}. Desenhe o gráfico e responda:

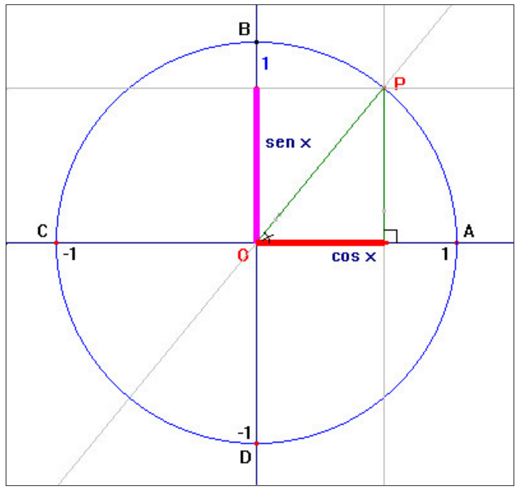
a) Qual é o conjunto domínio?

b) O valor de b?

c) Qual é o período da função?

d) O valor de a?

Apêndice D – Arquivos dinâmicos usado pelo grupo 03 na avaliação 01



Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo