UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
Centro de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

ALEXANDRE CUNHA MACHADO

UM ELEMENTO FINITO DE TUBO TRIDIMENSIONAL PARA ANÁLISE GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR DE DUTOS

MACEIÓ
2006

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

ALEXANDRE CUNHA MACHADO

UM ELEMENTO FINITO DE TUBO TRIDIMENSIONAL PARA ANÁLISE GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR DE DUTOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil

Área de concentração: *Estruturas*

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages.

MACEIÓ

2006

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

M149u Machado, Alexandre Cunha.
Um elemento finito de tubo tridimensional para análise geometricamente não linear de dutos / Alexandre Cunha Machado. – Maceió, 2006.
xiii, 85f. : il.

Orientador: Eduardo Nobre Lages.
Dissertação (mestrado em Engenharia Civil : Estruturas) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2006.

Bibliografia: f. 79-80.
Apêndices: f. [81]-85.

1. Elementos finitos – Análise não linear. 2. Tubos. 3. Cascas Cilíndricas . I. Título.

CDU: 624

Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Centro de Tecnologia – CTEC
Programa de Pós-Graduação de Engenharia Civil – PPGEC
Campus A. C. Simões
Tabuleiro do Martins – CEP 57072-970 – Maceió – Alagoas
Tel: (82) 32141276– Fax: (82) 32141276
E-mail: ppgec@ctec.ufal.br

ATA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL/ESTRUTURAS

Em sessão pública, às nove horas e quatorze minutos do dia três do mês de abril do ano de dois mil e seis, na Sala do Conselho do Centro de Tecnologia, foi iniciada a defesa da dissertação de mestrado do aluno **ALEXANDRE CUNHA MACHADO** tendo como título: **"Um elemento finito de tubo tridimensional para análise geometricamente não linear de dutos",** como requisito parcial para obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL**, na área de concentração de **ESTRUTURAS**. A Banca Examinadora foi constituída pelos seguintes membros: Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages (Orientador – CTEC/UFAL), Prof. Dr. Adeildo Soares Ramos Júnior (CTEC/UFAL) e Prof. Dr. Raul Rosas e Silva (PUC/RJ). O candidato fez a apresentação da dissertação em cinquenta e um minutos. A defesa foi encerrada às doze horas e trinta minutos. Após o encerramento da defesa, em reunião confidencial, a Banca Examinadora, com base no Regimento Interno, decidiu por APROVAR a dissertação de mestrado, sem restrição.
Em 3 de abril de 2006,

Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages (Orientador)

Prof. Dr. Adeildo Soares Ramos Júnior

Prof. Dr. Raul Rosas e Silva

Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti Marques
Coordenador do PPGEC/UFAL

Aos meus pais, Ivanildo e Gildete,
pelo apoio ao longo de toda a minha vida.
A Roseline, minha esposa, pelo amor,
companheirismo e compreensão sem
os quais este trabalho seria impossível.

Agradecimentos

Ao professor Eduardo Nobre Lages pela valorosa orientação, apoio e pela amizade cultivada ao longo deste trabalho.

A todo corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC da Universidade Federal de Alagoas pelos ensinamentos transmitidos ao longo do curso de Mestrado.

Ao colega Fábio Martins Gonçalves Ferreira pelas discussões sobre programação orientada a objetos e computação paralela.

Aos amigos do PPGEC/UFAL, em especial a Antônio Carlos, Edvaldo Lisbôa, Daniel Cavalcanti, Edson Pessoa, Fábio Martins, João Gilberto, Luciana Correia e Rodrigo Mero pela amizade e agradável convívio.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES pelo suporte financeiro concedido ao longo do curso.

Resumo

No transporte de fluidos ou mesmo como elementos estruturais as cascas cilíndricas são largamente utilizadas em diversos segmentos da engenharia civil. A compreensão do comportamento desse tipo de estrutura ao longo de uma trajetória de equilíbrio resultante de um histórico de carregamento de diferentes naturezas é importante na definição da real capacidade portante dos dutos. Neste trabalho, desenvolve-se um elemento finito para análises geometricamente não lineares tridimensionais de tubos. Levando-se em consideração a natureza da análise, são estudadas medidas adequadas de tensão e deformação, compatíveis com regimes de grandes deformações e deslocamentos. A formulação Lagrangeana Total é adotada, mas as relações constitutivas utilizadas são lineares. A implementação computacional desenvolvida emprega um elemento finito tridimensional de tubo com 2 ou 3 nós, compatível com o regime de grandes deformações e deslocamentos, incorporando, também, os movimentos de corpo rígido da estrutura. Com o objetivo de mapear as trajetórias não lineares de equilíbrio, utilizando-se algumas metodologias propostas na literatura, é usada uma estrutura de programação orientada a objetos, permitindo a aplicação de diferentes técnicas de análise incremental e iterativa integradas à implementação de elementos finitos supracitada. Visando validar a formulação, os resultados obtidos no programa desenvolvido são avaliados através da comparação com soluções analíticas e outras análises numéricas disponíveis na literatura.

Palavras-Chave: *Análise Não Linear, Elementos Finitos, Tubos, Cascas Cilíndricas.*

Abstract

In transport of fluids or even as structural elements, cylindrical shells are widely used in several segments of structure engineering. The understanding of the behavior of this type of structure along a trajectory of equilibrium resultant of a description of historical loading of different natures and, consequently, is important in the definition of the real load capacity of the ducts. In this work, a finite element for geometric and three-dimensional nonlinear analyses of pipes is developed. Taking into account the nature of the analysis, proper measure of tension and deformation that are compatible with states of large deformations and displacements are studied. The Total Lagrangean formulation is adopted, but the constitutive relationships used are linear. The developed computational implementation uses a three-dimensional finite element of pipe with 2 or 3 nodes, compatible with the state of great deformations and displacements, and, also, incorporating the movements of rigid body of the structure.In order to map the nonlinear trajectories of equilibrium, using some methodologies proposed in the literature, a structure of Object-Oriented Programming is used. It allows the application of different techniques of incremental and iterative analysis integrated to the implementation of the aforementioned finite elements.Aiming to validate the formulation, the results obtained by using the program here developed are evaluated through their comparison with analytical solutions and previously published results.

Keywords: *Nonlinear Analysis, Finite Elements, Pipes, Cylindrical Shells*

Lista de Figuras

Figura 2.1 – Efeito Brazier 10

Figura 2.2 – Enrugamento com deformação plástica e contato 10

Figura 2.3 – Curvas paramétricas ortogonais na superfície de uma casca cilíndrica 11

Figura 2.4 – Vetores posição com incremento na superfície média 13

Figura 2.5 – Comprimento infinitesimal na superfície média indeformada 13

Figura 2.6 – Mapeamentos de pontos fora da superfície média 14

Figura 2.7 – Relações entre cargas e deslocamentos nas análises linear e geometricamente não linear 15

Figura 2.8 – Solução incremental 17

Figura 2.9 – Solução incremental iterativa 18

Figura 2.10 – Estrutura organizacional de classes onde se propõe a inclusão de classes de elementos finitos Tubo3D 19

Figura 3.1 – Mapeamentos da superfície média do tubo 25

Figura 3.2 – Vetores $\mathbf{T}_3$ e $\mathbf{t}_3$ 26

Figura 3.3 – Ângulo θ 32

Figura 3.4 – Exemplo de expansão da matriz N para nc=ns=2 32

Figura 3.5 – Exemplo de expansão da matriz M para nc=ns=2 34

Figura 3.6 – Modelo discretizado com três elementos de dois nós interpolados axialmente por polinômios lineares 35

Figura 3.7 – Modelo discretizado com dois elementos de três nós interpolados axialmente por polinômios quadráticos 35

Figura 3.8 – Representação gráfica dos movimentos de corpo rígido da seção transversal e os correspondentes graus de liberdade 37

Figura 3.9 – Representação gráfica dos modos de deformação da seção transversal correspondentes a cada grau de liberdade 39

Figura 3.10 – Representação gráfica dos graus de liberdade relacionados a cada modo de giro do vetor normal 40
Figura 3.11 – Configuração deformada associada ao modo de deformação constante $\bar{\varepsilon}_{xx}$ 43
Figura 3.12 – Configuração deformada associada a modos de deformação constante $\bar{\varepsilon}_{ss}$ e $\bar{\kappa}_{ss}$ 44
Figura 3.13 – Configuração deformada associada ao modo de deformação constante $\bar{\gamma}_{sz}$ 46
Figura 3.14 – Configuração deformada associada a modos de deformação constante $\bar{\gamma}_{sx}$, $\bar{\kappa}_{xx}$ e $\bar{\kappa}_{sx}$ 46
Figura 3.15 – Configuração deformada associada a modo de deformação constante $\bar{\gamma}_{xz}$ 47
Figura 3.16 – Modos de ovalização da seção transversal não associados a estado de flexão pura 51
Figura 3.17 – Dedução do número de pontos de integração para o elemento com 3 nós 53
Figura 3.18 – Interpolação quadrática ao redor da seção transversal com utilização da regra de Simpson 54
Figura 3.19 – Variação do número de células de integração ao redor da seção circular. 55
Figura 3.20 – Variação dos cinco maiores autovalores para diferentes números de células de integração ao redor da seção transversal. 56
Figura 4.1 – Graus de liberdade correspondentes aos movimentos de corpo rígido. 58
Figura 4.2 – Teste axial com modelo de baixa discretização submetido a uma força de compressão F. 58
Figura 4.3 – Comparação da solução analítica com testes de compressão e tração. 59
Figura 4.4 – Modelo idealizado para análise de tubo submetido à flexão pura. 62
Figura 4.5 – Ovalização proposta pelo modelo de Karamanos. 63
Figura 4.6 – Deformação causada por falha no processo de modelagem. 64

Figura 4.7 – Deformação ε_{ss} para um tubo com ovalização inesperada da extremidade onde atua a carga momento 64
Figura 4.8 – Trajetória de equilíbrio de discretizações para o estudo do modelo flexionado. 65
Figura 4.9 – Análise comparativa do comportamento não linear de um tubo submetido à flexão pura com as soluções de Brazier e Karamanos. ... 67
Figura 4.10 – Deformação da seção transversal do nó central ao longo da trajetória de equilíbrio. 68
Figura 4.11 – Vista do plano XY da deformação de membrana $\bar{\varepsilon}_{xx}$ passos 2 e 5. ... 69
Figura 4.12 – Vista do plano XY da deformação de membrana $\bar{\varepsilon}_{xx}$ passos 8 e 12... 70
Figura 4.13 – Tensões de membrana σ_{XX} (Pa). 71
Figura 4.14 – Tempo de processamento dos modelos analisados com o Tubo3D. 72
Figura 5.1 – Paralelização por elemento. 77
Figura 5.2 – Paralelização nos pontos da integração numérica. 77

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Descrição dos graus de liberdade do elemento. 36

Tabela 3.2 – Graus de liberdade relacionados ao modo de deformação constante $\bar{\varepsilon}_{XX}$ 43

Tabela 3.3 – Graus de liberdade relacionados aos modos de deformação constante $\bar{\varepsilon}_{ss}$ e $\bar{\kappa}_{ss}$ 44

Tabela 3.4 – Graus de liberdade relacionados ao modo de deformação constante $\bar{\gamma}_{sz}$ 45

Tabela 3.5 – Graus de liberdade relacionados aos modos de deformação constante $\bar{\gamma}_{sX}$, $\bar{\kappa}_{XX}$ e $\bar{\kappa}_{sX}$ 47

Tabela 3.6 – Graus de liberdade relacionados ao modo de deformação constante $\bar{\gamma}_{Xz}$ 48

Tabela 4.1 – Relações Ovalização-Curvatura $(\zeta - \kappa)$ e Momento-Curvatura $(m - \kappa)$. 67

Tabela 4.2 – Tempo de processamento em segundos, horas e dias para os modelos flexionados analisados. 72

Lista de Símbolos

Romanos

$\mathbf{a}(X)$	–	Vetor posição de um ponto qualquer do eixo do elemento na configuração indeformada
$\mathbf{A}(s, X)$	–	Matriz de transformação do vetor normal
A	–	Área da seção transversal do Tubo
$\mathbf{B}(X)$	–	Matriz de rotação da seção transversal do tubo
$\mathbf{C}$	–	Matriz constitutiva do elemento
e_0	–	Parâmetro de Euler
e_1	–	Parâmetro de Euler
e_2	–	Parâmetro de Euler
e_3	–	Parâmetro de Euler
$\mathbf{E}$	–	Módulo de elasticidade
$\mathbf{E}_{ij}$	–	Tensor de deformações de Green-Lagrange
$\mathbf{F}$	–	Gradiente de Deformação
F	–	Força de compressão
$\mathbf{F}_{\mathbf{ext}}$	–	Vetor de forças externas
$\mathbf{F}_{\mathbf{int}}$	–	Vetor de forças internas
i	–	Identificador da passo de incremento corrente.
j	–	Identificador da iteração corrente.
J	–	Determinante do Jacobiano
$\mathbf{K}(\mathbf{u})$	–	Matriz de rigidez tangente
L	–	Comprimento do Tubo

L_1, L_2, L_3	–	Funções de forma
$\mathbf{p}$	–	Vetor de graus de liberdade associados à variação do raio
$\mathbf{P_0}$	–	Vetor de forças constantes
$\mathbf{P_{ref}}$	–	Vetor de cargas de referência
$\mathbf{q}$	–	Vetor de graus de liberdade associados ao giro do vetor normal
$\mathbf{r}$	–	Raio médio do tubo deformado
$\mathbf{R}$	–	Vetor de resíduo
R	–	Raio médio do tubo indeformado
s	–	Coordenada de comprimento de arco no sentido circunferencial
s	_	Comprimento da superfície deformada
S	_	Comprimento da superfície indeformada
$\mathbf{t_3}$	–	Vetor unitário, correspondente ao vetor normal, em sua configuração deformada
$\mathbf{T_3}$	–	Vetor unitário normal na configuração indeformada
$\mathbf{T}^{PK1}$	–	Primeiro tensor de tensões de Piolla-Kirchhoff
$\mathbf{T}^{PK2}$	–	Segundo tensor de tensões de Piolla-Kirchhoff
$\mathbf{u}$	–	Vetor de deslocamentos da estrutura
U	–	Energia de deformação do elemento
V_0	–	Domínio de integração na configuração indeformada
W_{ext}	–	Trabalho interno
W_{int}	–	Trabalho externo
$\mathbf{x}(s, X, z)$	–	Vetor posição de um ponto qualquer na configuração deformada
$\overline{\mathbf{x}}$	–	Vetor posição de um ponto na superfície média na configuração deformada
X	–	Coordenada no sentido axial
x_i	_	Curvas paramétricas no sentido axial de uma casca cilíndrica
$\mathbf{X}(s, X, Z)$	–	Vetor posição de um ponto qualquer na configuração indeformada
$\overline{\mathbf{X}}$	–	Vetor posição de um ponto na superfície média na configuração indeformada

z – Coordenada ao longo da espessura

Gregos

$\boldsymbol{\delta}(X)$ – Vetor deslocamento de um ponto no eixo do tubo

$\boldsymbol{\varepsilon}$ – Vetor de deformações do elemento

$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – Vetor de deformações de membrana do elemento

$\boldsymbol{\lambda}$ – Parâmetro de carga

μ – Coeficiente de Poisson

$\boldsymbol{\sigma}$ – Tensor de tensões de Cauchy

$\boldsymbol{\varphi}$ – Vetor de rotação

ζ_1,ζ_2,ζ_3 – Coordenadas paramétricas.

$\bar{\boldsymbol{\kappa}}$ – Vetor de deformações a flexão

θ – Coordenada angular de referência de um ponto na seção média do tubo

θ_i – Curvas paramétricas no sentido circunferencial de uma casca cilíndrica

$\bar{\boldsymbol{\nu}}$ – Vetor de deformações de cisalhamento

Sumário

Agradecimentos..... v
Resumo vi
Abstract vii
Lista de Figuras viii
Lista de Tabelas xi
Lista de Símbolos xii

Capítulo 1 - Introdução 3
1.1 – Relevância do Tema 3
1.2 – Objetivos 6
1.3 – Organização da Dissertação 7
Capítulo 2 – Análise Não Linear 9
2.1 – Teoria de Superfícies 11
2.2 – Não Linearidade Geométrica 15
2.3 – Procedimento Incremental e Iterativo 16
2.4 – Medidas de deformação e tensão 19
Capítulo 3 – Formulação em Elementos Finitos 24
3.1 – Cinemática do elemento 24
3.2 – Expressões de deformação 26
3.3 – Hipóteses constitutivas 28
3.4 – Critérios de Convergência 29
3.5 – Interpolação do Campo de deslocamentos 30
3.6 – Graus de Liberdade 36
3.6.1 – Representação gráfica dos graus de liberdade 37
3.7 – Representação dos modos de deformação constante 42
3.7.1 - Deformações $\bar{\varepsilon}_{XX}$ 43
3.7.2 - Deformações $\bar{\varepsilon}_{ss}$ e $\bar{\kappa}_{ss}$ 44
3.7.3 - Deformação $\bar{\gamma}_{sz}$ 45

3.7.4 - Deformações $\overline{\gamma}_{sX}$, $\overline{\kappa}_{XX}$ e $\overline{\kappa}_{sX}$ 46

3.7.5 - Deformação $\overline{\gamma}_{Xz}$ 47

3.8 – Matriz de Rigidez e Vetor de Forças Internas..... 48

3.8.1 – Origem 48

3.8.2 – Otimização na geração 50

3.9 – Integração numérica 51

3.9.1 – Integração no sentido axial 52

3.9.2 – Integração no sentido circunferencial 53

Capítulo 4 – Análises Numéricas 57

4.1 – Validação da Formulação 57

4.2 – Análises de tubos submetidos à flexão 60

4.2.1 – Modelagem 62

4.2.2 – Resultados 65

4.3 – Desempenho computacional 71

Capítulo 5 – Considerações Finais 74

5.1 – Conclusões 74

5.2 – Sugestões para trabalhos futuros 75

Referências Bibliográficas..... 79

Apêndices 81

Apêndice A – Derivadas da Matriz de Rotação 82

Apêndice B – Derivadas da Matriz de Rotação em relação aos parâmetros de Euler 84

Apêndice C – Derivadas dos parâmetros de Euler em relação ao vetor de rotação..... 85

Capítulo 1

Introdução

1.1 – Relevância do Tema

Cascas cilíndricas são estruturas largamente utilizadas em diversos segmentos da engenharia. Em alguns casos a aplicação apenas como elemento estrutural acontece, mas a utilização de tubos como condutos é bem mais usual. Ainda assim, por vezes, as cascas são submetidas também a carregamentos estruturais, já que além de serem utilizados como meio transportador são responsáveis pela manutenção do equilíbrio de uma determinada estrutura. Esses elementos são comumente utilizados transportando uma grande variedade de fluidos desde sua extração até sua distribuição passando, às vezes, por uma grande quantidade de etapas produtivas.

A crescente demanda energética aliada às incertezas do mercado internacional de petróleo têm tornado cada vez mais necessária à obtenção da auto-suficiência em produção de combustíveis minerais, criando uma enorme demanda de investimento e pesquisa para a exploração dessas fontes de energia. Por esse e outros motivos, estruturas capazes de conduzir fluidos em geral, seja no processo de exploração, como no seu transporte, têm recebido atenção de vários setores da engenharia.

No nosso país, devido à escassez do óleo no subsolo continental, a exploração tem se dado predominantemente no mar, através da utilização de estruturas *offshore* que buscam o petróleo em águas cada vez mais profundas. Atualmente, tubulações submersas estão sujeitas a pressão e outros tipos de carregamentos cada vez mais elevados. Essas solicitações podem levar essas estruturas a diferentes formas de perda de estabilidade. O estudo desse fenômeno tornou-se indispensável para a elaboração de projetos dessa natureza, visto que seus componentes são comumente submetidos a

condições de funcionamento bastante desfavoráveis, onde a manutenção é onerosa e o risco de perda do equipamento deve ser minimizado ao máximo, dado seu alto custo.

No Brasil a exploração em águas ultraprofundas já produz demanda de pesquisa e investimento no desenvolvimento de tecnologias para produção de equipamentos capazes de permitir a extração a mais de 3.000 metros de profundidade. Na exploração de óleo em profundidades tão elevadas, os diversos tipos de embarcações utilizam, em muitas situações, tubos flexíveis para condução do fluido extraído. Essas linhas, denominadas de *risers*, chegam a ter milhares de metros de comprimento, e em cada ponto de extração podem, frequentemente, ser usadas até 100 desses tipos de condutos simultaneamente. Utilizando, às vezes, várias camadas de diferentes tipos de materiais em sua construção, com o objetivo de resistir às variações de carregamento e temperatura, essas estruturas participam com alto percentual no custo total das ferramentas aplicadas no processo de exploração.

Dessa forma, estudos sobre o comportamento de cascas cilíndricas vêm sendo feitos por diferentes grupos de pesquisas em várias partes do mundo. Podemos destacar, neste contexto, o trabalho do *Offshore Technology Research Center*, da Universidade de Austin, no Texas.

Os dutos, sejam eles rígidos ou flexíveis, devido à grande variação da natureza de suas solicitações, podem ser analisados sob diferentes abordagens. Entre os vários estudos encontrados na literatura, vários se dedicam à análise de trechos específicos dos tubos. No estudo dos *risers*, grandes extensões das linhas possuem comportamento aproximado ao de elementos estruturais como treliças ou pórticos. Sendo assim, o método dos elementos finitos é aplicado com utilização de discretizações simplificadas em alguns tipos de análise. Já em alguns casos, em virtude da geometria, ou mesmo a natureza da solicitação, o comportamento do modelo estudado possui uma maior complexidade. Essa característica pode ser atribuída, em algumas situações, às grandes variações de curvatura, enrugamento das paredes ou ovalização da seção transversal. Dessa maneira, configura-se a necessidade de aplicar elementos mais complexos, capazes de captar as deformações características de partes das estruturas, a exemplo das ligações entre as linhas e as unidades flutuantes.

Estudos tridimensionais de cascas geralmente apresentam complicações analíticas e numéricas de difícil solução. Com o intuito de simplificar o estudo, esse tipo

de problema normalmente é reduzido a análises bidimensionais, usando hipóteses simplificadoras (GONÇALVES, 1985).

Essa metodologia foi primeiramente apresentada por Love, que ainda, segundo GONÇALVES, partiu das considerações feitas por Kirchhoff para placas esbeltas, que são equivalentes às expressões propostas por Bernoulli para vigas esbeltas, admitindo assim uma distribuição linear dos deslocamentos ao longo da espessura da casca. Essa abordagem deu origem à teoria linear clássica de Kirchhoff-Love, que serviu de base para a realização de diversos estudos.

A considerável evolução tecnológica e industrial proporcionou a utilização de cascas cada vez mais esbeltas, a exemplo das que são usadas como condutos, que possuem geralmente uma pequena espessura. Por esse motivo, tais elementos estão suscetíveis à perda de estabilidade em níveis não tão elevados de carregamento ocasionando grandes deslocamentos acompanhados ou não de deformações excessivas. Sendo assim, em virtude desses fenômenos, a teoria de Love se torna ineficiente para descrição do comportamento das estruturas estudadas, por não incorporar alguns efeitos decorrentes da não linearidade das hipóteses cinemáticas consideradas. A necessidade de execução de análises não lineares, sobretudo no aspecto geométrico, incentivou historicamente a criação de novas teorias para o estudo de cascas. Esses avanços só foram possíveis com a evolução das ferramentas computacionais que permitem a resolução de sistemas não lineares de equações com relativa simplicidade.

GONÇALVES também desenvolveu equações gerais para cascas esbeltas para uma análise geometricamente não linear. O trabalho apresenta uma teoria geral de superfície associada a relações físicas e geométricas gerais, que permitem a particularização para a teoria clássica de Love, as aproximações de Donnel e a teoria de Sanders, sendo esta última mais apropriada para soluções numéricas.

A teoria de Donnel gera um dos mais simples conjuntos de equações para soluções de problemas de equilíbrio e estabilidade de cascas cilíndricas esbeltas. SIMITSES *et al.* (1984) fizeram uma comparação entre essas equações e as propostas por Sanders, consideradas mais acuradas. O estudo foi feito através de experimentos em cilindros ortotrópicos com imperfeições, axialmente carregados. Esse trabalho oferece uma discussão sobre parâmetros de projeto que influenciam a precisão dos resultados obtidos das equações de Donnel.

JAUNKY & KNIGHT (1999) fizeram um estudo comparativo dessas três teorias a partir de aplicações usando a formulação de elementos finitos. Nesse trabalho a instabilidade de cilindros laminados e painéis compósitos comprimidos axialmente é estudada. São usados elementos de casca de nove nós e, a partir dos resultados obtidos, constatou-se a imprecisão da teoria de Donnel para alguns parâmetros geométricos.

Tais constatações reforçam a não adequação das equações de Donnel e também de Love para análises que consideram relevantes a rotação em torno do vetor normal à superfície da casca, que são movimentos bastante comuns em problemas que envolvem torção.

As lacunas percebidas em algumas teorias analíticas deixam margem para a aplicação de mais métodos numéricos e a utilização de outros sistemas que, comparados aos resultados experimentais, satisfaçam a compreensão desse comportamento estrutural. Por vezes, certas técnicas matemáticas não estabelecem correspondência completa com os preceitos de alguma solução analítica clássica. É o que acontece com o modelo proposto por JIANG & ARABYAN (1996). No entanto, algumas dessas ferramentas aliam hipóteses de diferentes autores permitindo o aproveitamento de determinados modelos matemáticos em estudos de problemas estruturais específicos.

1.2 – Objetivos

Este trabalho tem como principal objetivo o desenvolvimento de um elemento finito para a análise geometricamente não linear tridimensional de tubos, o Tubo3d. Para tanto, partindo inicialmente da formulação originalmente proposta por JIANG & ARABYAN (1996), a formulação Lagrangeana Total é adotada, onde, a despeito de grandes deslocamentos permitidos, admitem-se relações constitutivas lineares. Um modelo computacional é empregado, criando uma estrutura orientada a objetos, onde é agregada uma classe já existente para resolução de sistemas não lineares. Essa organização permite a utilização de diferentes algoritmos de controle em um processo incremental e iterativo. No desenvolvimento do elemento em questão pretende-se utilizar uma nova proposta de interpolação capaz de incorporar os modos de deformação constante e os movimentos de corpo rígido. Com o objetivo de validar os resultados

obtidos é feita uma comparação com soluções analíticas e outras análises numéricas disponíveis na literatura.

1.3 – Organização da dissertação

Admitindo a interligação das formulações não lineares de cascas a teoria de superfícies, este se torna o ponto inicial deste estudo.

No Capítulo 2, são apresentadas as características geométricas das cascas cilíndricas, onde a superfície pode ser definida por dois conjuntos de curvas paramétricas que são também linhas principais de curvatura, possibilitando o estudo através de um sistema ortogonal. Seguindo a metodologia proposta por GONÇALVES, a partir do referido sistema, são definidos alguns parâmetros da superfície através de equações vetoriais.

Ainda no segundo capítulo, a partir dessas equações encontram-se as relações de deformação. Neste ponto é feito um estudo das medidas adequadas a serem utilizadas na análise, devido as exigências das hipóteses cinemáticas. Aspectos da não linearidade são estudados delimitando o estudo ao campo da análise não linear geométrica. Como ferramenta para resolução dos sistemas não lineares é apresentado um modelo de procedimento incremental iterativo utilizado.

No Capítulo 3, a formulação não linear em elementos finitos é apresentada através de um elemento de tubo tridimensional de dois e três nós. A cinemática do elemento é determinada a partir da aplicação do tensor de deformações de Green-Lagrange aos vetores posição definidos por coordenadas curvilíneas ao longo da superfície e do vetor normal à mesma. Nesse momento são feitas considerações sobre as parcelas de deformação avaliadas como relevantes. O material é considerado como sendo isotrópico e elástico linear.

Dando continuidade à discussão sobre o elemento do Capítulo 3, as parcelas do campo de deslocamentos, incluindo o movimento de corpo rígido, são interpoladas no sentido longitudinal através de polinômios lagrangeanos e ao longo do comprimento circunferencial através de matrizes baseadas em séries de Fourier. Princípios

energéticos e variacionais possibilitam a obtenção da matriz de rigidez tangente e do vetor de forças internas. A integração no volume de tais expressões é feita analiticamente através da espessura da casca e numericamente ao longo de seu comprimento e no contorno de sua circunferência média. Para as análises numéricas é implementado um elemento finito, Tubo3D, integrado a uma plataforma MATLAB.

No Capítulo 4, durante a apresentação dos modelos estudados são feitas breves considerações sobre a instabilidade de estruturas, havendo uma delimitação do estudo ao foco do trabalho. A determinação de pontos críticos em tubos flexionados é analisada através da avaliação da trajetória de equilíbrio dos problemas estudados. Modelos são avaliados pelo sistema através de comparações com outros exemplos numéricos e formulações propostas na literatura.

Finalmente, no Capítulo 5 as conclusões são apresentadas e são feitas sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Análise Não Linear

Na Engenharia, por conveniência matemática, são usadas hipóteses simplificadoras em problemas onde a solução analítica é desconhecida ou de difícil obtenção. Uma proposição largamente utilizada é a adoção de relações lineares entre esforços aplicados às estruturas e seus deslocamentos. No entanto, em alguns problemas, como no estudo da instabilidade estrutural, não existe essa proporcionalidade. Esse fenômeno pode se manifestar basicamente de duas maneiras: nas relações entre deformações e deslocamentos, caracterizando a não linearidade geométrica, e nas relações constitutivas, originando a não linearidade física. Particularizando o efeito da não linearidade física ou geométrica é possível estudar esses fenômenos em diversas formas.

Em cascas cilíndricas, a não linearidade geométrica pode ser observada com relativa facilidade em situações onde o espécime é submetido à flexão pura ou combinada a outros tipos de esforços. Em tubos longos, com seção transversal deformável é possível verificar uma diminuição da resistência e da rigidez à flexão ocasionada pela ovalização da seção transversal que induz uma diminuição da inércia. BRAZIER (1927) foi o primeiro a descrever essa resposta não linear onde são feitas as primeiras considerações sobre esse efeito e apresentados valores para as curvaturas e momentos máximos suportados pela peça flexionada, conforme ilustrado na Figura 2.1. Tal inovação acabou batizando o fenômeno com o nome do autor.

Brazier propôs um modelo não linear novo, até então, para o estudo que comumente era feito através de aproximações lineares como as de Saint Venant onde uma relação linear era apresentada para momento e curvatura.

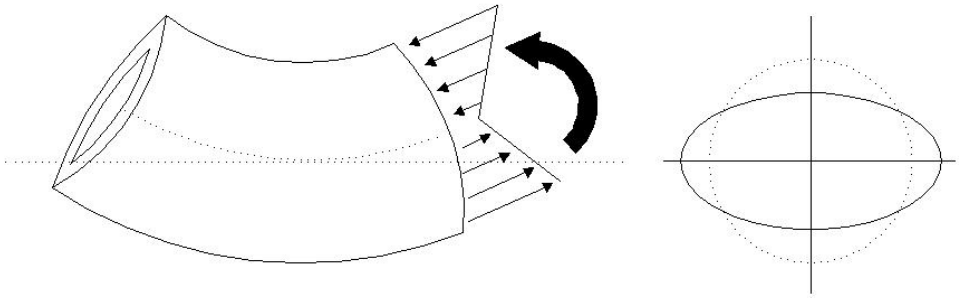


Figura 2.1 – Efeito Brazier.

TATTING *et al.* (1996) fizeram um estudo do efeito descrito por Brazier em cilindros compósitos submetidos à flexão. A teoria clássica de cascas é utilizada para derivar as equações utilizadas para realizar um estudo do efeito da variação dos parâmetros do material e da geometria.

Em cascas cilíndricas, a não linearidade física é mais comumente associada a deformações localizadas como enrugamentos observados em tubos submetidos à flexão ou compressão Nestas situações uma flambagem local (Figura 2.2) é observada acarretando dois tipos de efeitos não lineares:

- Deformação plástica;
- Contato de superfície

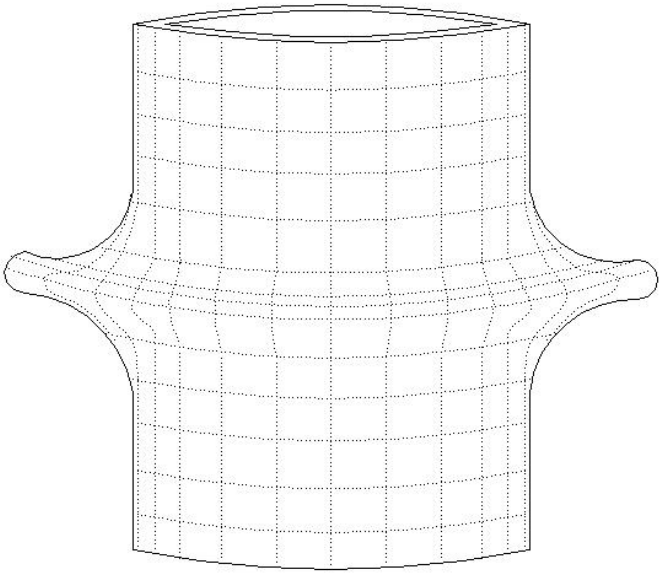


Figura 2.2 – Enrugamento com deformação plástica e contato.

Este trabalho se propõe a fazer um estudo apenas geometricamente não linear, onde a despeito de grandes deslocamentos permitidos, admitem-se relações constitutivas lineares. Para atender a exigências dos problemas citados, são analisadas medidas adequadas de tensão e deformação, compatíveis com regime de grandes deslocamentos.

A teoria das superfícies é a base das deduções das teorias de cascas e por esse motivo aspectos dessa formulação são abordados neste capítulo. Para solução de sistemas de equações não lineares gerados durante a análise é apresentada uma técnica incremental e iterativa, bem como os tensores convenientemente escolhidos para representação das tensões e deformações.

2.1 – Teoria de Superfícies

Cascas cilíndricas podem ser definidas por dois grupos de curvas paramétricas que são também linhas principais de curvatura. Essa coincidência gera um sistema ortogonal (Figura 2.3).

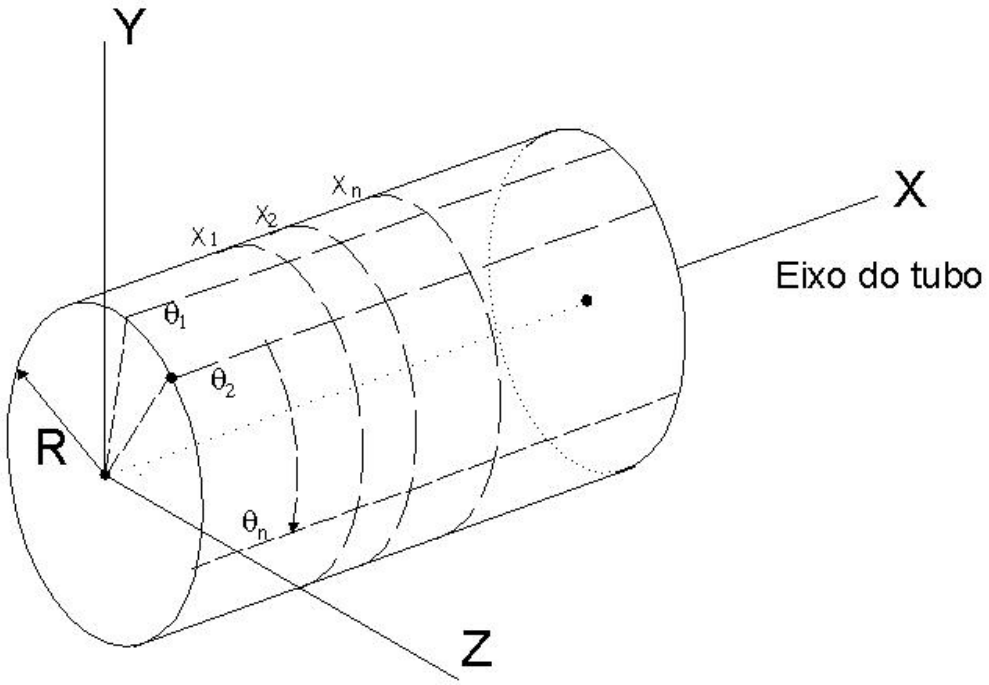


Figura 2.3 – Curvas paramétricas ortogonais na superfície de uma casca cilíndrica.

As curvas x_i e θ_i formam na configuração indeformada um ângulo de 90 graus. As variações das coordenadas desse sistema produzem um conjunto de curvas paramétricas cujas interseções podem definir qualquer ponto da superfície média da casca.

Os vetores posição na superfície média da casca em sua configuração inicial $\overline{\mathbf{X}}$ ou deformada $\overline{\mathbf{x}}$ são definidos inicialmente em função de três coordenadas quaisquer, a saber:

$$\overline{\mathbf{X}}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) \tag{2.1}$$

$$\overline{\mathrm{x}}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) \tag{2.2}$$

Aplicando uma pequena variação a esses vetores, conforme Figura 2.4, e aqui indicada por:

$$dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial \zeta_j} d\zeta_j \tag{2.3}$$

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \zeta_j} d\zeta_j \tag{2.4}$$

é possível definir também o quadrado de um comprimento infinitesimal na superfície indeformada dS, a saber:

$$dS^2 = dX_i \cdot dX_i \tag{2.5}$$

conforme é ilustrado na Figura 2.5, da mesma maneira que na superfície deformada esse comprimento é definido por ds, na forma:

$$ds^2 = dx_i \cdot dx_i \tag{2.6}$$

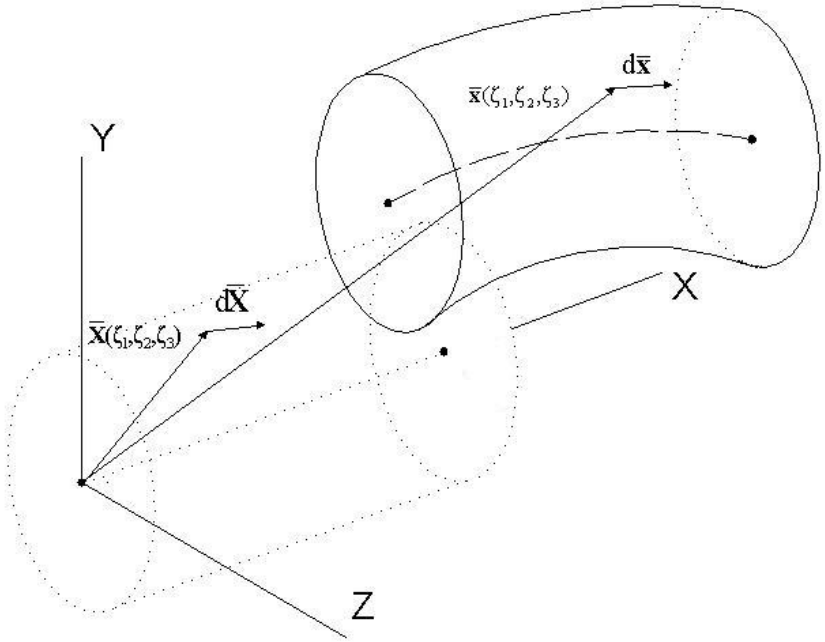


Figura 2.4 – Vetores posição com incremento na superfície média.

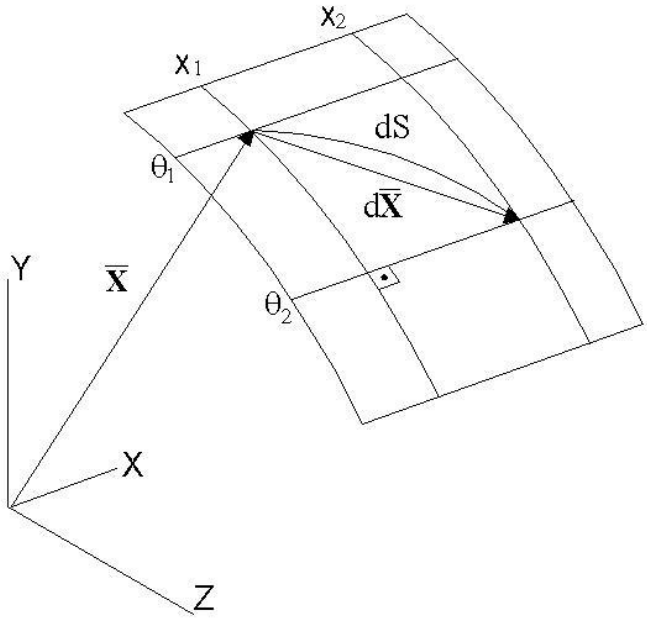


Figura 2.5 – Comprimento infinitesimal na superfície média indeformada.

A partir da diferença entre os quadrados dos comprimentos gerados pelas variações incrementais dos vetores posição indeformados e deformados é possível encontrar o tensor de deformação utilizado nesse estudo, a saber:

$$ds^2 - dS^2 = \frac{\partial x_i}{\partial \zeta_j} d\zeta_j \frac{\partial x_i}{\partial \zeta_k} d\zeta_k - \frac{\partial X_i}{\partial \zeta_j} d\zeta_j \frac{\partial X_i}{\partial \zeta_k} d\zeta_k \tag{2.7}$$

de onde é possível se chegar ao tensor que define a deformação em qualquer ponto da superfície média da casca:

$$\mathbf{E}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta_j} - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \zeta_j} \right) \tag{2.8}$$

Dependendo das hipóteses cinemáticas adotadas, mesmo em cascas finas, é possível admitir pontos fora da superfície média com deformação diferenciada dos que estão eqüidistantes das superfícies delimitadoras da casca, ditas paralelas. A localização de pontos nesse intervalo é feita através de uma coordenada z que percorre o vetor normal à superfície média $\mathbf{T}_3$, permitindo assim o mapeamento de qualquer ponto da casca.

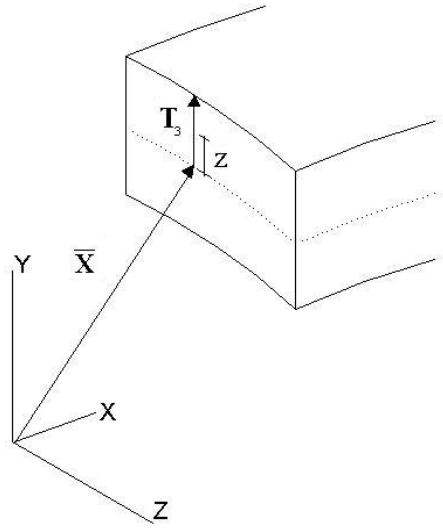


Figura 2.6 – Mapeamento de pontos fora da superfície média.

2.2 – Não linearidade geométrica

Uma das maiores dificuldades de uma análise não linear é solucionar as equações de equilíbrio na configuração deformada da estrutura. A não existência de proporcionalidade entre esforços aplicados e deslocamentos observados (Figura 2.7) torna a determinação da trajetória de equilíbrio uma tarefa mais complexa do que em análises lineares, visto que sistemas de equações não lineares precisam agora ser solucionados. Através de métodos numéricos essa dificuldade pode ser suplantada.

Diversas estratégias podem ser aplicadas para solução desses sistemas, podendo ser destacados pela sua larga aplicação em problemas dessa natureza os métodos de controle de carga e deslocamentos. A aplicação desses métodos caracteriza a utilização de um processo incremental e iterativo, descrito em vários trabalhos disponíveis na literatura, como VITÓRIA (2001) e AMORIM & LAGES (2004).

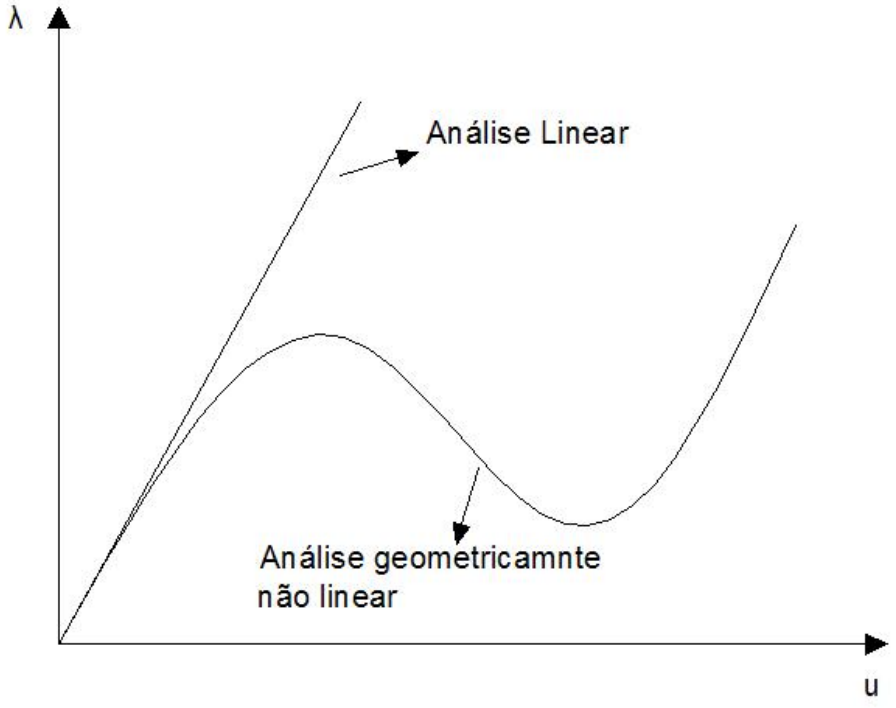


Figura 2.7 – Relações entre cargas e deslocamentos nas análises linear e geometricamente não linear.

2.3 – Procedimento incremental-iterativo

A determinação da trajetória de equilíbrio de sistemas geometricamente não lineares implica na determinação de um conjunto de pares $(\mathbf{u},\lambda)$ que representam, respectivamente, o vetor de deslocamento e o parâmetro de carga, que atendem a equação de equilíbrio:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{int}}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}_{\mathbf{ext}}(\lambda) \tag{2.9}$$

onde $\mathbf{F}_{\mathbf{int}}$ representa o vetor das forças internas da estrutura para o deslocamento corrente $\mathbf{u}$, assim como $\mathbf{F}_{\mathbf{ext}}$ corresponde ao vetor das forças externas aplicadas para o nível de carregamento λ, dado aqui por

$$\mathbf{F}_{\mathbf{ext}}(\lambda) = \lambda\mathbf{P}_{\mathbf{ref}} + \mathbf{P}_{\mathbf{0}} \tag{2.10}$$

onde $\mathbf{P}_{\mathbf{ref}}$ corresponde ao vetor das forças de referência e $\mathbf{P}_{\mathbf{0}}$ as forças constantes, a exemplo do peso próprio, pressão hidrostática ou imperfeição.

Neste ponto da análise a estratégia de solução consiste em atribuir, dependendo do método, valores para a carga ou o deslocamento que se deseja mapear. Dada à natureza não linear do comportamento, os valores atribuídos não vão satisfazer a equação de equilíbrio, resultando em um vetor de resíduo $\mathbf{R}$, também chamado de força não balanceada, expresso por

$$\mathbf{R}(\mathbf{u},\lambda) = \mathbf{F}_{\mathbf{int}}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}_{\mathbf{ext}}(\lambda) \tag{2.11}$$

Assim, aplicando-se um pequeno incremento de deslocamento ou carga tem-se uma variação em $\mathbf{R}$, e expandindo a expressão em série de Taylor, truncada para obter apenas seus termos lineares, tem-se:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u},\lambda+\Delta\lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{u},\lambda) + \frac{\partial\mathbf{R}(\mathbf{u},\lambda)}{\partial\mathbf{u}}\Delta\mathbf{u} + \frac{\partial\mathbf{R}(\mathbf{u},\lambda)}{\partial\lambda}\Delta\lambda\ldots \tag{2.12}$$

Objetivando determinar a configuração deformada de equilíbrio, faz-se uso de um processo incremental a fim de se anular o resíduo. Dessa forma a Eq. 2.12 assume a seguinte forma:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}_{j-1},\lambda_{j-1}) + \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u}_{j-1},\lambda_{j-1})}{\partial \mathbf{u}}\Delta\mathbf{u}_j + \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u}_{j-1},\lambda_{j-1})}{\partial \lambda}\Delta\lambda_j = 0 \qquad (2.13)$$

onde o índice j indica o número do incremento.

Admitindo a orientação das forças externas independentes da trajetória, tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u},\lambda)}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathbf{int}}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K}(\mathbf{u}) \qquad (2.14)$$

onde $\mathbf{K}(\mathbf{u})$ corresponde a matriz de rigidez tangente.

Uma análise puramente incremental levaria a determinação de um ponto ($\mathbf{u}^{(j)}, \lambda^{(j)}$), a partir da rigidez calculada no incremento anterior, ocasionando um desvio na trajetória de equilíbrio (ver Figura 2.8). Esse problema, em alguns casos, pode ser minimizado através da adoção de incrementos de pequena magnitude, com o objetivo de tornar a tangente em cada ponto próxima à trajetória de equilíbrio.

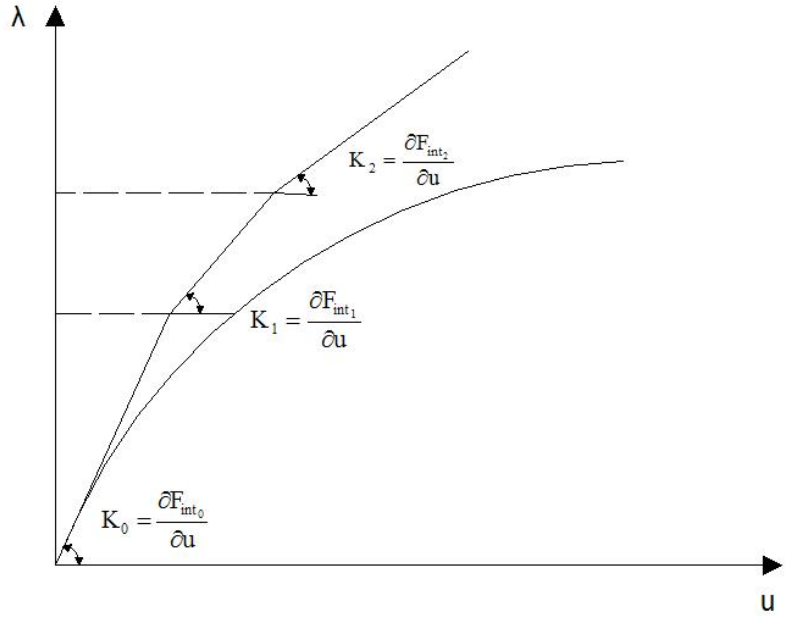


Figura 2.8 – Solução incremental.

Em uma análise numérica mais apurada são feitas iterações a cada incremento, tornando o resíduo nulo e permitindo que a partir de pontos inicialmente fora da trajetória de equilíbrio seja encontrado um par que satisfaça a Eq. 2.9, configurando equilíbrio entre as forças internas e externas. Esse processo pode ser ilustrado conforme Figura 2.9 que o representa para o método de Newton-Raphson.

Segundo YANG & SHIEH (1990), uma análise não linear requer a solução de um sistema de N + 1 equações, onde N representa o número de equações de equilíbrio, sendo a equação adicional, chamada de equação de restrição, é responsável pela distinção dentre os vários métodos iterativos disponíveis.

Dessa forma, utiliza-se a seguinte equação geral:

$$\mathbf{K}(\mathbf{u})^{i}_{j-1}\Delta\mathbf{u}^{i}_{j} = \lambda^{i}_{j}\mathbf{P}_{ref} + \mathbf{R}(\mathbf{u},\lambda)^{i}_{j-1} \tag{2.15}$$

onde os índices i e j correspondem aos números das iterações e incrementos, respectivamente.

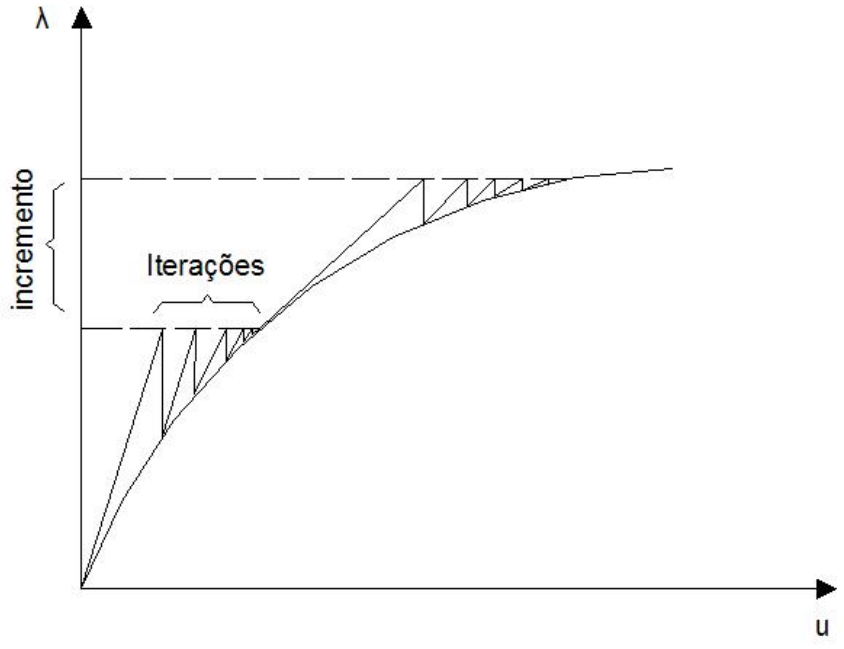


Figura 2.9 – Solução incremental-iterativa.

A utilização na equação geral de diferentes equações adicionais de restrição é apresentada por YANG & SHIEH (1990) e explorada no trabalho de AMORIM & LAGES (2004). Essa metodologia é aplicada com a formação da estruturas de uma

superclasse de estratégias de controle unificadas (ECU), responsável pela análise não linear, integrada a uma superclasse de modelos estruturais MODELOS. Nessa superclasse pode ser encaixada como contribuição à classe que representa o fruto deste trabalho com o elemento de tubo tridimensional TUBO3D, conforme ilustrado na Figura 2.10.

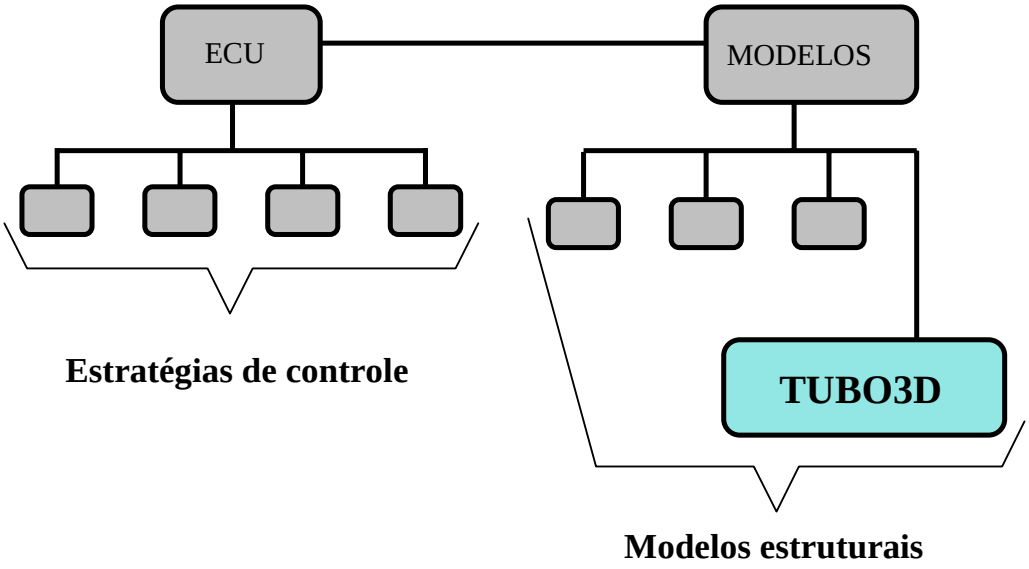


Figura 2.10 – Estrutura organizacional de classes onde se propõe a inclusão da classe de elementos finitos Tubo3D.

A classe em questão interage inicialmente com a estrutura existente através do método construtor *tubo3d* que cria o objeto da classe em questão armazenando as informações da geometria e parâmetros da análise. Durante o processo incremental-iterativo a trajetória de equilíbrio é mapeada ela estratégias de controle através da troca de informação com elemento de tubo através dos métodos para cálculo do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente.

2.4 – Medidas de deformação e tensão

A determinação das equações de equilíbrio na configuração deformada de um corpo é feita através de Princípio dos Trabalhos Virtuais. Esse princípio garante a condição de equilíbrio de um sistema mecânico dada à aplicação de um deslocamento virtual

admissível. Tal procedimento pode ser executado com a utilização de ferramentas de cálculo variacional.

O deslocamento virtual aplicado será correspondente a uma variação dos trabalhos da forças internas e externas, a saber:

$$\delta W_{ext} = \delta W_{int} \tag{2.16}$$

Concentrando as atenções na variação do trabalho das forças internas, que a posteriori, será útil na formulação em elementos finitos temos:

$$\delta W_{int} = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \tag{2.17}$$

onde σ_{ij} é o tensor de Cauchy e $\delta\varepsilon_{ij}$ o incremento da deformação de engenharia integrados numa configuração de volume final V. Estas grandezas serão na seqüência melhor explicitadas.

Uma medida de tensão qualquer representada devidamente por um tensor referenciada a uma certa configuração, quando relacionada convenientemente a uma outra medida de deformação através de relações constitutivas adequadas forma um par conjugado de tensão e deformação.

Alguns desses pares são particularmente desenvolvidos admitindo hipóteses de pequenas deformações e deslocamentos. Por este motivo, tornam-se inadequadas para o estudo em questão, por não representar corretamente as grandezas envolvidas. Tais medidas, muitas vezes, são sensíveis a movimentos de corpo rígidos, muito comumente observados em análises de natureza geometricamente não linear.

Em alguns tipos de análises, corpos esbeltos como vigas, placas e cascas, a complexidade de determinação de um par conjugado de tensão e deformação é deixada de lado tendo em vista que a ordem de grandeza dos deslocamentos e rotações é considerada muito maior que as correspondentes deformações.

No entanto, em regimes de grandes deslocamentos as características da estrutura em análise mudam significativamente. Neste contexto surge a necessidade de se utilizar tensores capazes de representar corretamente variações de deslocamentos e esforços.

Nesta seção são apresentadas medidas de tensão e deformação utilizadas na análise de elementos finitos.

Como já foi discutido, uma das maiores dificuldades de uma análise não linear se apresenta na determinação da configuração deformada de um corpo. Sendo assim, a formulação Lagrangeana Total, aplicada neste estudo, torna-se atraente por descrever a posição de uma partícula em sua configuração instantânea, através de uma integração realizada sobre o domínio em seu estado inicial.

Partindo desse pressuposto e da necessidade de se admitir termos de ordem mais alta no tensor de deformação em função da natureza não linear do estudo, opta-se neste trabalho pela adoção do tensor de deformações de Green-Lagrange. Esse tensor pode ser reconhecido na Eq. 2.8 deduzida a partir da teoria de superfícies.

A aplicação dessa medida de deformação exige a definição de uma medida de tensões compatível e, nesse sentido, o segundo tensor de Piola-Kirchhoff estabelece a formação de um par conjugado com a deformação de Green-Lagrange.

A tensão de Cauchy σ_{ij}, também conhecida como tensão real, ou de engenharia, é a medida mais atraente para análises de modelos físicos reais, no entanto, esta medida é referenciada a uma configuração de deformação de difícil determinação. Sendo assim, as atenções são voltadas para tensores de tensão que sejam determinadas a partir da configuração inicial.

Estabelecer o equilíbrio na configuração deformada a partir de uma integração sobre o volume inicial sugere o uso de uma tensão nominal, que representa força por unidade de área não deformada. O primeiro tensor de Piolla-Kirchhoff, que é um representante desta categoria, é determinado pela razão entre a força na configuração deformada e o volume inicial. Essa característica faz com que $\mathbf{T}^{\mathrm{PK1}}$ também seja conhecido como Tensor de Tensão Lagrangeano, sendo expresso por:

$$\mathbf{T}^{\mathrm{PK1}} = |\mathbf{F}|\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma} \tag{2.18}$$

onde $\mathbf{F}$ é o tensor gradiente de deformação e $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de Cauchy. No entanto, este tensor tem o inconveniente de não ser simétrico.

Segundo BAZANT & CEDOLIN (1991) um tensor de deformações finitas ε_{ij}, necessário na utilização do Princípio dos Trabalhos Virtuais, na teoria geral do contínuo, deve satisfazer aos seguintes requisitos:

- Deve ser um tensor de segunda ordem;
- Deve ser simétrico;
- Deve ser insensível a movimentos de corpo rígido;
- Deve depender continuamente e monotonicamente de $u_{i,j}$;
- A parte linear do tensor deve ser igual ao tensor de pequenas deformações e_{ij}.

O par conjugado correspondente ao referido tensor de deformações inevitavelmente acaba tendo que atender aos mesmos requisitos e, sendo assim, o primeiro Tensor de Piolla-Kirchhoff é descartado.

O tensor de Green-Lagrange deduzido a partir da teoria de superfícies satisfaz aos requisitos supracitados, restando assim, encontrar o tensor de tensão apropriado.

A alternativa encontrada é a utilização do segundo tensor de Piola-Kirchhoff, que é simétrico e pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$\mathbf{T}^{PK2} = \mathbf{T}^{PK1}\mathbf{F}^{-T} \tag{2.19}$$

Esse tensor forma par conjugado com a deformação de Green-Lagrange atendendo consequentemente aos requisitos para a aplicação dessas medidas no Princípio dos Trabalhos Virtuais.

Fisicamente, o segundo tensor de Piola-Kirchhoff tem pouca importância, porém, além do benefício da simetria, ele pode ser facilmente relacionado ao tensor de Cauchy na forma

$$\mathbf{T}^{PK2} = |\mathbf{F}|\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \tag{2.20}$$

Dessa maneira a variação do trabalho das forças internas inicialmente expressa em função do Tensor de Cauchy e da deformação de engenharia em uma integração sobre o volume deformado pode agora ser também expressa em função das medidas escolhidas como:

$$\delta W_{int} = \int_{V_0} T_{ij}^{PK2} \delta E_{ij} dV_0 \tag{2.21}$$

O destaque dado parcela da variação da energia potencial total referente ao trabalho das forças internas se deve ao fato dessa porção ser equivalente à energia de deformação do corpo e de onde serão extraídas as expressões da Matriz de Rigidez e do vetor de forças internas.

No estudo em questão é admitido um comportamento elástico linear dos materiais que compõem os modelos analisados. No entanto as características do tensor de Green-Lagrange, entre elas a de ser um tensor de segunda ordem, permitem que junto com seu par conjugado de Tensões seja feita uma análise em regime de grandes deformações.

Nestas situações seria necessária a adoção de relações constitutivas adequadas capazes de representar corretamente as relações entre deformações e deslocamentos.

Capítulo 3

Formulação em Elementos Finitos

Uma formulação não linear tridimensional de elementos finitos é adotada. O resultado do estudo apresentado por JIANG & ARABYAN (1996), que propõe um elemento de tubo de dois nós, chamou a atenção inicialmente por ser apropriado para a análise de problemas com grandes deslocamentos e rotações. Durante o desenvolvimento, examinando a formulação do elemento, são propostas modificações nas expressões de deformação e nas funções de interpolação circunferencial. O estudo se inicia com o desenvolvimento do elemento de dois nós interpolados com polinômios lineares e na seqüência a interpolação axial é apurada através da inserção de um terceiro, permitindo a utilização de funções quadráticas.

Dessa forma, da referência inicial são aproveitadas algumas hipóteses cinemáticas, integradas à formulação modificada proposta. Tais conceitos são aplicados a um estudo de um novo elemento finito de tubo de dois ou três nós.

3.1 – Cinemática do elemento

A definição completa da geometria do tubo é feita através de três coordenadas, e qualquer ponto de seu domínio, seja na configuração indeformada ou deformada pode ser determinado pelas equações

$$\mathbf{X}(s,X,z) = \overline{\mathbf{X}}(s,X) + z\mathbf{T}_3(s) \tag{3.1}$$

$$\mathbf{x}(s,X,z) = \overline{\mathbf{x}}(s,X) + z\mathbf{t}_3(s,X) \tag{3.2}$$

onde as coordenadas curvilíneas s e X são responsáveis pelo mapeamento da superfície média, na qual qualquer localização é apontado através dos vetores $\overline{\mathbf{X}}(s,X)$ e $\overline{\mathbf{x}}(s,X)$.

A coordenada z permite o mapeamento de pontos ao longo da espessura, conjuntamente com os vetores unitários $\mathbf{T}_3$ e $\mathbf{t}_3$, relacionados à superfície média indeformada e deformada, respectivamente (ver Figuras 3.1 e 3.2).

Restringindo o estudo a cascas de pequena espessura, não são levadas em consideração às tensões ao longo da coordenada z e o vetor normal à superfície média permanece retilíneo após a deformação, mas não necessariamente ainda normal a esta. Tal suposição indica que parcelas referentes à deformação de cisalhamento são consideradas. Sendo assim, no estudo do tensor de deformações essas considerações são descritas.

Uma outra modificação em relação ao estudo de JIANG & ARABYAN (1996) é a adoção da hipótese de não variação da espessura da casca; opção facilmente entendida ao lembrar que o universo de estudos limita-se a análise de cascas esbeltas.

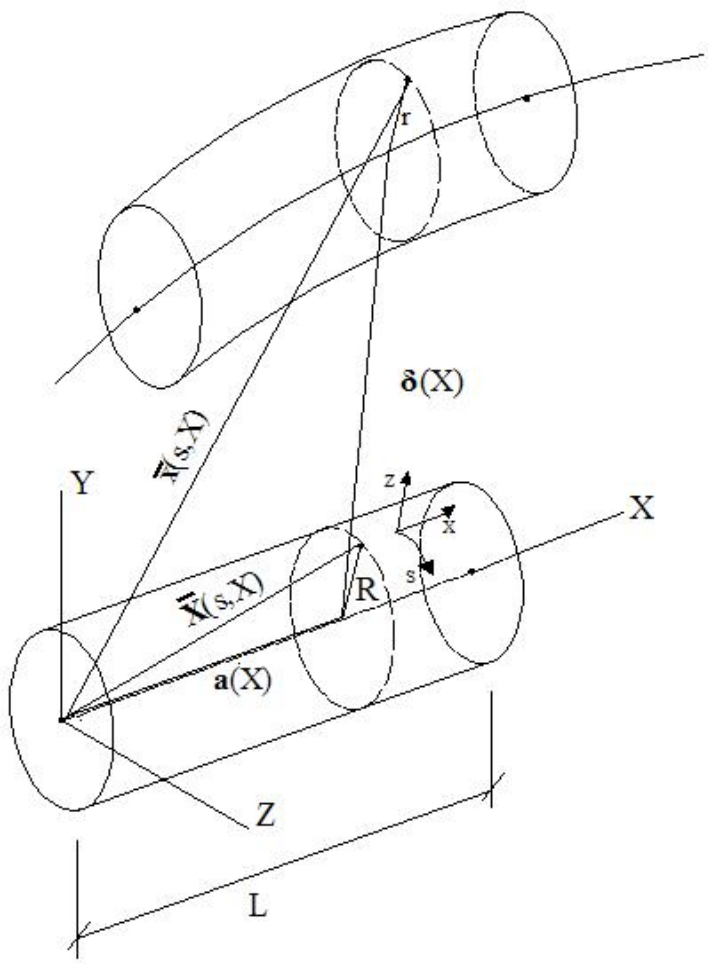


Figura 3.1 – Mapeamentos da superfície média do tubo.

Na formulação originalmente proposta, um parâmetro calculado pela razão entre as espessuras na configuração final e inicial é introduzido na parcela dependente de z na Eq. 3.2. Para o estudo em questão essa razão é assumida como unitária e o parâmetro descartado.

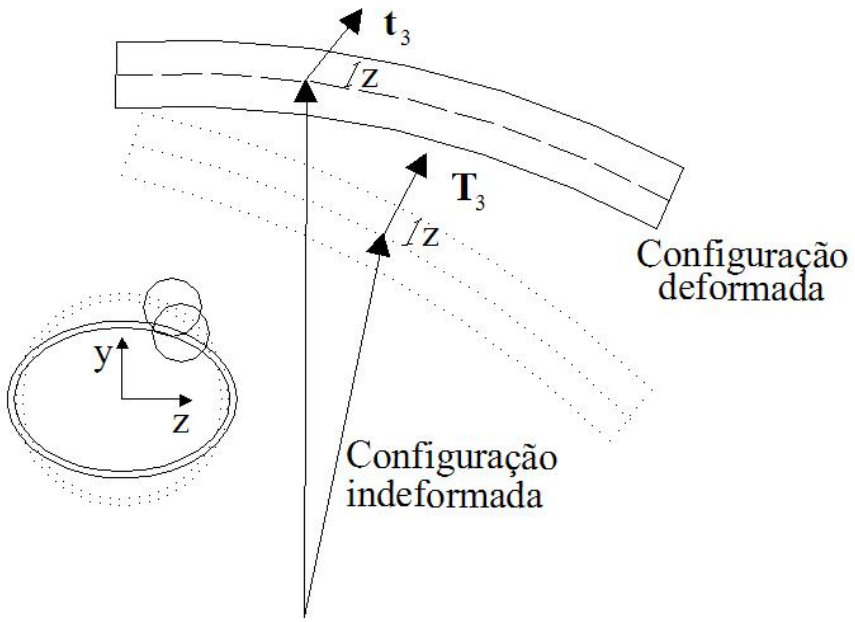


Figura 3.2 – Vetores $\mathbf{T}_3$ e $\mathbf{t}_3$.

3.2 – Expressões de deformação

A partir das considerações cinemáticas propostas, aplicando o tensor de deformações de Lagrange (Eq. 2.8) aos vetores posição (Eqs. 3.1 e 3.2), determinam-se as componentes do vetor de deformações em um ponto qualquer a partir dessas informações na superfície média, a saber:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{ss} \\ \bar{\varepsilon}_{XX} \\ \bar{\gamma}_{sX} \\ \bar{\gamma}_{sz} \\ \bar{\gamma}_{Xz} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \bar{\kappa}_{ss} \\ \bar{\kappa}_{XX} \\ 2\bar{\kappa}_{sX} \\ 2\bar{\kappa}_{sz} \\ 2\bar{\kappa}_{Xz} \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \bar{\nu}_{ss} \\ \bar{\nu}_{XX} \\ 2\bar{\nu}_{sX} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + z\bar{\boldsymbol{\kappa}} + z^2\bar{\boldsymbol{\nu}} \tag{3.3}$$

O procedimento é o mesmo ao da formulação original, no entanto, dentre as parcelas de deformação propostas neste estudo, as que são relacionadas à flexão $\overline{\boldsymbol{\kappa}}$ são linearmente dependentes de z.

Não foram consideradas as deformações presentes nos termos que dependem quadraticamente de z em $\overline{\mathbf{v}}$ e as parcelas de $\overline{\boldsymbol{\kappa}}$ relacionadas com as direções sz e Xz. Em função da pequena espessura considerada, termos de ordem superior, como os quadráticos em z perdem importância. No caso das outras parcelas de flexão desprezadas, a esbeltez da casca também é a motivação da exclusão. Dessa forma, as componentes do vetor de deformações assumiram a forma descrita conforme se segue:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \overline{\varepsilon}_{ss} \\ \overline{\varepsilon}_{XX} \\ \overline{\gamma}_{sX} \\ \overline{\gamma}_{sz} \\ \overline{\gamma}_{Xz} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \overline{\kappa}_{ss} \\ \overline{\kappa}_{XX} \\ 2\overline{\kappa}_{sX} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}} + z\overline{\boldsymbol{\kappa}} \tag{3.4}$$

onde as deformações de membrana correspondem às expressões abaixo:

$$\overline{\varepsilon}_{ss} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{\mathbf{x}}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \overline{\mathbf{x}}}{\partial s} - \frac{\partial \overline{\mathbf{X}}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \overline{\mathbf{X}}}{\partial s} \right) \tag{3.5}$$

$$\overline{\varepsilon}_{XX} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{\mathbf{x}}}{\partial X} \cdot \frac{\partial \overline{\mathbf{x}}}{\partial X} - \frac{\partial \overline{\mathbf{X}}}{\partial X} \cdot \frac{\partial \overline{\mathbf{X}}}{\partial X} \right) \tag{3.6}$$

$$\overline{\gamma}_{sX} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{\mathbf{x}}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \overline{\mathbf{x}}}{\partial X} - \frac{\partial \overline{\mathbf{X}}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \overline{\mathbf{X}}}{\partial X} \right) \tag{3.7}$$

$$\overline{\gamma}_{sz} = \frac{\partial \overline{\mathbf{x}}}{\partial s} \cdot \mathbf{t_3} \tag{3.8}$$

$$\overline{\gamma}_{Xz} = \frac{\partial \overline{\mathbf{x}}}{\partial X} \cdot \mathbf{t_3} \tag{3.9}$$

As parcelas de deformações de flexão consideradas são:

$$\overline{\kappa}_{ss} = \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{x}}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathbf{t_3}}{\partial s} - \frac{\partial \overline{\mathbf{X}}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathbf{T_3}}{\partial s} \right) \tag{3.10}$$

$$\overline{\kappa}_{XX} = \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{x}}}{\partial X} \cdot \frac{\partial \mathbf{t_3}}{\partial X} \right) \tag{3.11}$$

$$2\overline{\kappa}_{sX} = \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{x}}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathbf{t_3}}{\partial X} + \frac{\partial \overline{\mathbf{x}}}{\partial X} \cdot \frac{\partial \mathbf{t_3}}{\partial s} - \frac{\partial \overline{\mathbf{X}}}{\partial X} \cdot \frac{\partial \mathbf{T_3}}{\partial s} \right) \tag{3.12}$$

3.3 – Hipóteses constitutivas

Considera-se o material isótropo, elástico e com ralações lineares entre os os tensores de tensão e deformação, cuja matriz constitutiva utilizada na formulação tem a seguinte formação:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

onde E e ν representam, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson.

Como os tensores de Green-Lagrande para deformação e o de Piolla-Kirchhoff 2 para tensão são também compatíveis com outras hipóteses constitutivas, a utilização desse elemento finito para estudos dessa natureza não esta descartada desde que sejam adotadas relações apropriadas entre deformação e deslocamento.

3.4 – Critérios de convergência

De acordo com COOK *et al.* (1989), numa formulação em elementos finitos baseada em deslocamentos, para garantir que com o aumento da discretização haja uma convergência para um resultado mais apurado é necessário que sejam respeitadas algumas considerações.

Admitindo um campo de deslocamentos u(s,X) e o funcional $\Pi(u)$ que governa as equações diferenciais de equilíbrio, pelo princípio da estacionaridade $\delta\Pi = 0$. A ordem **m** da maior derivada da parcela de deformação do funcional que representa a energia potencial total (Eq. 3.34) é utilizada como parâmetro para referenciar alguns requisitos que devem ser atendidos numa malha de elementos:

- Em cada elemento, a função que descreve o campo de deslocamentos u(s,X) deve conter um polinômio completo de grau **m**, garantindo a continuidade entre os elementos.
- Através das bordas entre os elementos deve haver continuidade do campo de deslocamentos e de sua derivada de grau **m – 1**. Essa condição garante que uma malha se torne compatível quando esta é refinada tendendo ao infinito.
- Analisando uma malha de elementos deve-se assegurar que as condições de contorno proporcionem pré-requisitos necessários para valores constantes de qualquer derivada de grau **m** do campo de deslocamentos. Consequentemente com o refinamento da malha cada elemento será capaz de representar um estado de deformações constante.

Sendo assim, ainda segundo COOK *et al.* estas condições juntas permitem que seja assegurada em uma malha a correta representação de movimentos de corpo rígido e estados de deformação constante.

O estado de deformações constante foi avaliado no elemento através da aplicação de um campo de deslocamentos para o qual é criada uma configuração deformada correspondente aos modos de deformação relacionados.

A apresentação dessa discussão neste ponto do estudo se deve ao fato de que estas considerações influenciarem diretamente na formação das matrizes de interpolação

correspondentes a ovalização da seção transversal e ao giro do vetor unitário na superfície da casca, como é visto na seqüência.

3.5 – Interpolação do campo de deslocamentos

Interpola-se o campo de deslocamentos com o intuito de determinar os vetores $\bar{\mathbf{x}}(s,t)$ e $\mathbf{t}_3(s,t)$, conforme se segue:

$$\bar{\mathbf{x}}(s,X) = \mathbf{a}(X) + \boldsymbol{\delta}(X) + \mathbf{B}(X)\left[\mathbf{r}(s) + \Delta\mathbf{r}(s,X)\right] \tag{3.14}$$

$$\mathbf{t}_3(s,X) = \mathbf{A}(s,X)\mathbf{T}_3(s,X) \tag{3.15}$$

Tendo em vista as grandes rotações e deslocamentos essa interpolação incorpora movimentos de corpo rígido. Para atender os requisitos básicos para convergência da análise numérica utilizando elementos finitos, como visto anteriormente, os modos de deformação constante são também previstos.

O vetor $\bar{\mathbf{x}}(s,X)$ descreve a superfície média do tubo e $\mathbf{t}_3(s,X)$ o vetor unitário ainda reto, mas não mais necessariamente normal à superfície após a deformação. O vetor $\mathbf{a}(X)$ corresponde à posição de um ponto qualquer do eixo do elemento na configuração indeformada, $\boldsymbol{\delta}(X)$ é o deslocamento deste ponto em sua configuração deformada. Complementando as parcelas consideradas de deslocamento da superfície média da casca observamos ainda uma rotação de corpo rígido da seção transversal do elemento representada através da matriz $\mathbf{B}(X)$ e a ovalização e empenamento observados na parcela $\mathbf{B}(X)\Delta\mathbf{r}$.

As matrizes de rotação recebem uma atenção especial nesse estudo, já que cumprem a tarefa de incorporar os movimentos de corpo rígido. No mapeamento da mudança de direção de $\mathbf{T}_3(s,X)$ a matriz $\mathbf{A}(s,X)$ transforma o vetor normal em seu correspondente deformado.

$$\mathbf{A}(s,X) = 2\begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - \frac{1}{2} & e_1e_2 - e_0e_3 & e_1e_3 + e_0e_2 \\ e_1e_2 + e_0e_3 & e_0^2 + e_2^2 - \frac{1}{2} & e_2e_3 - e_0e_1 \\ e_1e_3 - e_0e_2 & e_2e_3 + e_0e_1 & e_0^2 + e_3^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

onde e_0, e_1, e_2 e e_3 são parâmetros de Euler, definidos a partir do vetor de rotação φ, dados por:

$$\begin{aligned} e_0 &= \cos\frac{\|\varphi\|}{2} \\ e_i &= \frac{\operatorname{sen}\left(\|\varphi\|/2\right)}{\|\varphi\|}\varphi_i \end{aligned} \tag{3.17}$$

A matriz de rotação $\mathbf{A}(s,X)$ também é utilizada para determinar a rotação de seção transversal em cada nó $\mathbf{B}(X)$.

Para o desenvolvimento das expressões da matriz de rigidez e do vetor de forças internas faz-se necessária a determinação das derivadas da matriz e do vetor de rotação em relação aos graus de liberdade. Esse desenvolvimento está explicitado nos Apêndices A, B e C.

A interpolação para a variação no comprimento do raio do elemento é feita com a utilização de uma expansão em séries de Fourier em função da variável θ, na forma:

$$\mathbf{\Delta r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cos2\theta & 0 & 0 & \dots & \operatorname{sen}2\theta & 0 & 0 & \dots \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta & 0 & \cos2\theta & 0 & \dots & 0 & \operatorname{sen}2\theta & 0 & \dots \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 & 0 & \cos2\theta & \dots & 0 & 0 & \operatorname{sen}2\theta & \dots \end{bmatrix}\mathbf{q} \tag{3.18}$$

Essa matriz é idêntica a proposta no estudo de JIANG & ARABYAN e passa a ser denominada de $\mathbf{N}(\theta, nc, ns)$. Além do ângulo θ ao redor da seção transversal, **N**

também é função de nc e ns que são respectivamente o número de discretizações em co-senos e senos que determinarão à ordem da matriz e do vetor de graus de liberdade **q**.

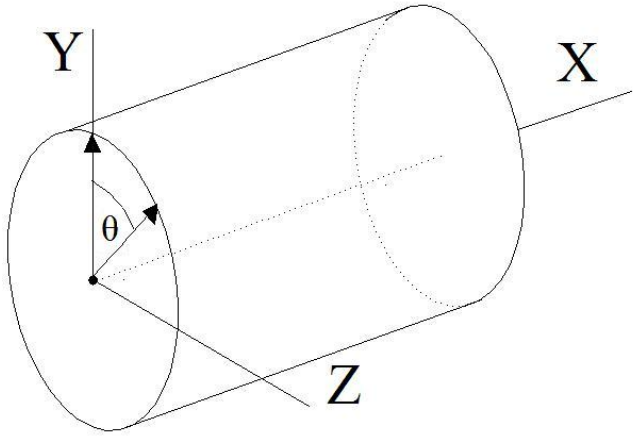


Figura 3.3 – Ângulo θ.

De acordo com a análise em questão, que exigirá diferentes níveis de discretização a matriz $\mathbf{N}(\theta, nc, ns)$ pode possuir uma ordem de 3 X (9 + 3x(nc + ns)). A expansão acontece da seguinte maneira para diferentes valores de nc e ns inteiros:

$$\begin{matrix} \dots & \cos 2\theta & 0 & 0 & \cos 3\theta & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \cos 2\theta & 0 & 0 & \cos 3\theta & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \cos 2\theta & 0 & 0 & \cos 3\theta & \dots \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \dots & \text{sen}2\theta & 0 & 0 & \text{sen}3\theta & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \text{sen}2\theta & 0 & 0 & \text{sen}3\theta & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \text{sen}2\theta & 0 & 0 & \text{sen}3\theta & \dots \end{matrix}$$

Figura 3.4 – Exemplo de expansão da matriz **N** para nc=ns=2.

Já a interpolação das componentes do vetor de rotação de corpo rígido $\boldsymbol{\varphi}$ ao redor da seção transversal foi originalmente proposta na seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & 0 & \cos 2\theta & 0 & 0 & \dots & \text{sen}\theta & 0 & 0 & \text{sen}2\theta & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 & \cos 2\theta & 0 & \dots & 0 & \text{sen}\theta & -\cos\theta & 0 & \text{sen}2\theta & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 & \cos 2\theta & \dots & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 & \text{sen}2\theta & \dots \end{bmatrix} \mathbf{p} \qquad (3.19)$$

Essa matriz recebe o nome de $\mathbf{M}(\theta, nc, ns)$ e também é construída em função dos parâmetros θ, nc e ns. É papel da matriz de interpolação $\boldsymbol{\varphi}$ gerar o vetor de rotação que servirá de base para cálculo dos parâmetros de Euler utilizados na matriz de rotação $\mathbf{A}(s, X)$. Como já foi explicitado, essa matriz transforma o vetor normal unitário $\mathbf{T}_3(s, X)$ no vetor unitário na configuração deformada $\mathbf{t}_3(s, X)$.

Essa operação deve ser capaz de representar os movimentos de corpo rígido, no entanto torna-se desnecessário representar o giro do vetor normal em torno de seu próprio eixo, visto que o vetor produzido seria o mesmo, capaz assim de indicar tanto a configuração inicial quanto a deformada. Por esse motivo a retirada da quinta coluna de **M**, que é responsável por esse movimento se configura na primeira mudança proposta.

Além dessa coluna, mais facilmente identificada, outras combinações de graus de liberdade foram relacionadas à ausência de deformação. Essas incoerências podem ser detectadas através da análise dos autovalores gerados a partir da matriz de rigidez produzida pela formulação aplicada a um dado modelo estrutural.

Durante a aplicação de um movimento de corpo rígido, correspondente a uma translação, num modelo analisado com o elemento finito em questão é esperado, a princípio, o aparecimento de 6 autovalores nulos. Esses valores correspondentes aos deslocamentos e rotações em relação aos eixos x, y e z. Entretanto, a partir da constatação de extrapolação da quantidade esperada uma nova matriz de interpolação **M** foi proposta (Eq. 3.20).

Assim, como o que acontece na matriz **N**, a ordem de $\mathbf{M}(\theta\theta nc, ns)$ também dependerá dos diferentes níveis de discretização, assumindo uma ordem de 3 X (10 + 2x(nc + ns)) para diferentes valores de nc e ns inteiros, assumindo o seguinte formato:

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cos\theta & \cos 2\theta & \operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}2\theta & 0 & 0 & 0 & \cos 3\theta & 0 & \ldots & \operatorname{sen}3\theta & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta & 0 & -\cos 3\theta\cdot\operatorname{sen}\theta & \ldots & 0 & -\operatorname{sen}3\theta\cdot\operatorname{sen}\theta & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos 3\theta\cdot\cos\theta & \ldots & 0 & \operatorname{sen}3\theta\cdot\cos\theta & \ldots \end{bmatrix} p \tag{3.20}$$

$$
\begin{array}{cccccc}
\ldots & \cos 3\theta & 0 & \cos 4\theta & 0 & \ldots \\
\ldots & 0 & -\cos 3\theta \cdot \mathrm{sen}\theta & 0 & -\cos 4\theta \cdot \mathrm{sen}\theta & \ldots \\
\ldots & 0 & \cos 3\theta \cdot \cos\theta & 0 & \cos 4\theta \cdot \cos\theta & \ldots \\
 & & & & & \\
\ldots & \mathrm{sen}3\theta & 0 & \mathrm{sen}4\theta & 0 & \ldots \\
\ldots & 0 & -\mathrm{sen}3\theta \cdot \mathrm{sen}\theta & 0 & -\mathrm{sen}4\theta \cdot \mathrm{sen}\theta & \ldots \\
\ldots & 0 & \mathrm{sen}3\theta \cdot \cos\theta & 0 & \mathrm{sen}4\theta \cdot \cos\theta & \ldots
\end{array}
$$

Figura 3.5 – Exemplo de expansão da matriz **M** para nc=ns=2.

Valores adequados de ns e nc tanto para **N** quanto para **M** são determinados empiricamente de acordo com a análise dos exemplos estudados, onde se busca a invariância dos resultados para sucessivos incrementos dos números de termos em senos e co-senos nas matrizes.

O uso de diferentes graus de expansões trigonométricas proporciona um alto nível de refinamento ao redor da seção transversal, no entanto ao longo da direção axial a interpolação originalmente proposta entre os dois nós é feita através de um polinômio lagrangeano linear, a saber:

$$L_1(X) = 1 - \frac{X}{L} \tag{3.21}$$

$$L_2(X) = \frac{X}{L} \tag{3.22}$$

As primeiras análises, com elementos pouco discretizados no sentido circunferencial, indicaram uma excessiva rigidez à flexão do elemento. Essa característica sinalizou, a princípio, para a utilização de um grande número de divisões ao longo do sentido axial, para representar configurações deformadas com curvaturas acentuadas.

A incapacidade do elemento para representar o estado de deformações esperado entre os nós foi atribuída ao polinômio de interpolação utilizado. Como solução para o problema a formulação foi modificada e o elemento passou a ser estudado também com três nós. Essa alteração passou a permitir a utilização de uma função quadrática para interpolar o campo de deslocamentos no sentido axial, a saber,

$$L_1(X) = 1 - \frac{3X}{L} + \frac{2X^2}{L^2} \tag{3.23}$$

$$L_2(X) = \frac{4X}{L} - \frac{4X^2}{L^2} \tag{3.24}$$

$$L_3(X) = \frac{2X^2}{L^2} - \frac{X}{L} \tag{3.25}$$

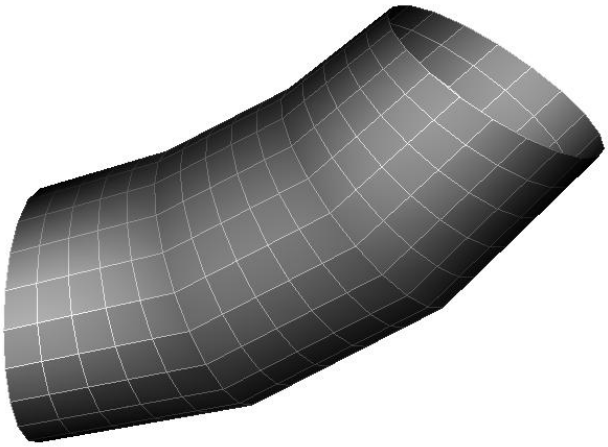


Figura 3.6 – Modelo discretizado com três elementos de dois nós interpolados axialmente por polinômios lineares.

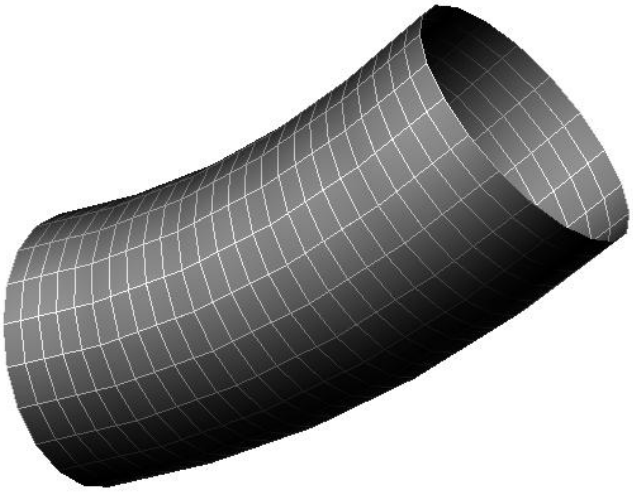


Figura 3.7 – Modelo discretizado com dois elementos de três nós interpolados axialmente por polinômios quadráticos.

A interpolação quadrática permite representar mais adequadamente as deformações provenientes da flexão, como mostram as linhas principais de curvatura ilustradas nas figuras 3.6 e 3.7.

3.6 – Graus de liberdade

Dessa forma, de acordo com a análise das expressões de deslocamento e os modos de deformação, são observados graus de liberdade conforme descrito na Tabela 3.1, elaborada para o elemento de três nós.

Tabela 3.1 – Descrição dos graus de liberdade do elemento

Denominação	Sentido físico
$\boldsymbol{\delta}_1$	Deslocamento do nó 1
$\boldsymbol{\varphi}_1$	Vetor de rotação da seção transversal do nó 1, associado à matriz de rotação $\mathbf{B}$.
$\mathbf{p}_1$	Vetor de rotação de corpo rígido ao redor da seção transversal do nó 1, associada à matriz de rotação $\mathbf{A}$
$\mathbf{q}_1$	Modos de ovalização e empenamento da seção transversal no nó 1
$\boldsymbol{\delta}_2$	Deslocamento do nó 2
$\boldsymbol{\varphi}_2$	Vetor de rotação da seção transversal do nó 2, associado à matriz de rotação $\mathbf{B}$
$\mathbf{p}_2$	Vetor de rotação de corpo rígido ao redor da seção transversal do nó 2, associado à matriz de rotação $\mathbf{A}$
$\mathbf{q}_2$	Modos de ovalização e empenamento da seção transversal no nó 2
$\boldsymbol{\delta}_3$	Deslocamento do nó 3
$\boldsymbol{\varphi}_3$	Vetor de rotação da seção transversal do nó 3, associado à matriz de rotação $\mathbf{B}$
$\mathbf{p}_3$	Vetor de rotação de corpo rígido ao redor da seção transversal do nó 3, associada à matriz de rotação $\mathbf{A}$
$\mathbf{q}_3$	Modos de ovalização e empenamento da seção transversal no nó 3

Os modos de deformação e deslocamentos associados a cada tipo de grau de liberdade podem ser melhor compreendidos através das representações a seguir.

3.6.1 – Representação gráfica dos graus de liberdade

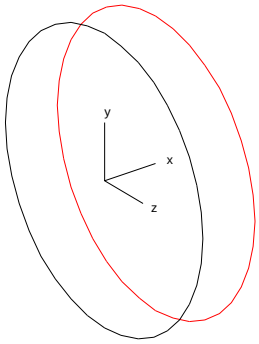
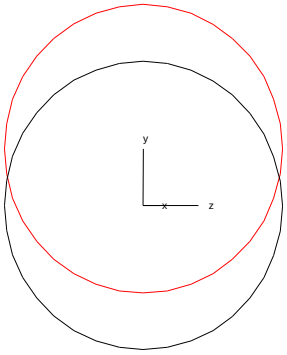
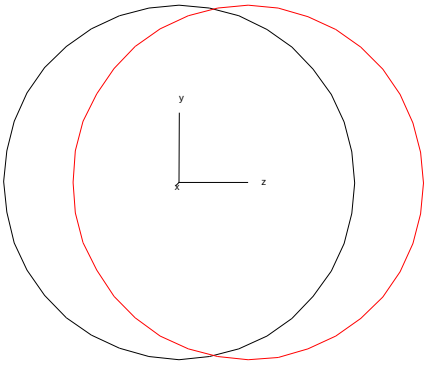
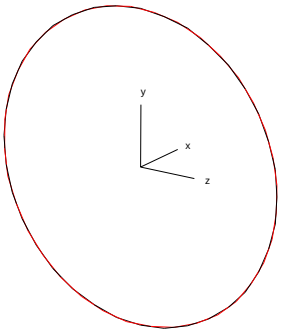
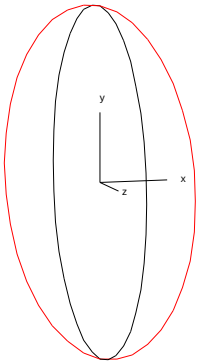
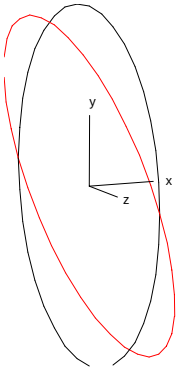
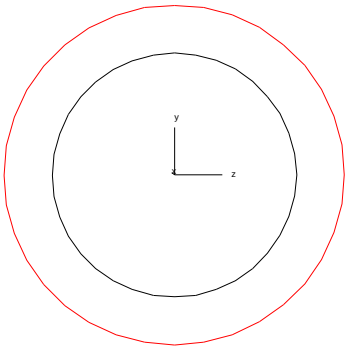
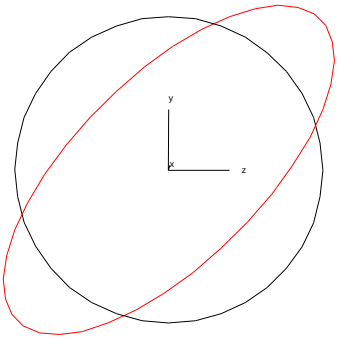
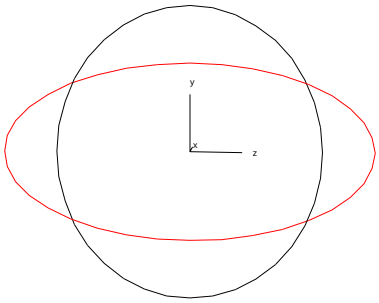
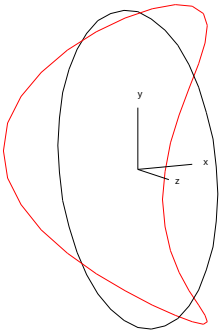
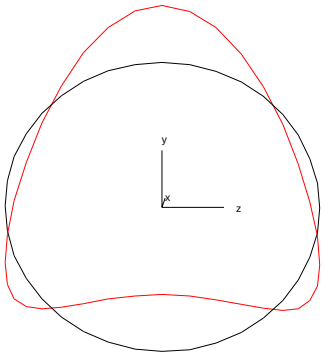
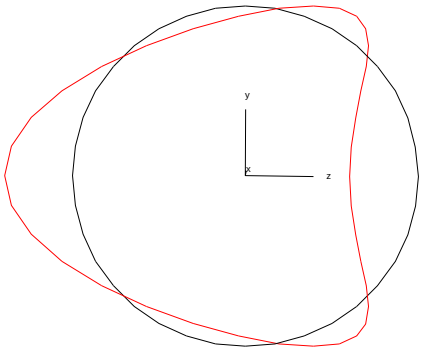
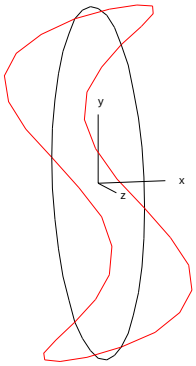
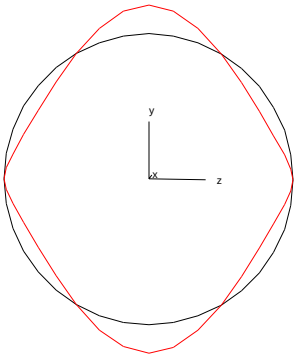
Movimentos de corpo rígido da seção transversal			
GL	**Representação gráfica**	**GL**	**Representação gráfica**
$\boldsymbol{\delta}_1$		$\boldsymbol{\delta}_2$	
$\boldsymbol{\delta}_3$		$\boldsymbol{\varphi}_1^B$	
$\boldsymbol{\varphi}_2^B$		$\boldsymbol{\varphi}_3^B$	

Figura 3.8 – Representação gráfica dos movimentos de corpo rígido da seção transversal e os correspondentes graus de liberdade.

Modos de ovalização e empenamento da seção transversal			
GL	**Representação gráfica**	**GL**	**Representação gráfica**
$\begin{bmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \text{sen}\theta \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 0 \\ \text{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} 0 \\ -\cos\theta \\ \text{sen}\theta \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} 0 \\ \cos 2\theta \\ 0 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos 2\theta \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} \cos 3\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 0 \\ \cos 3\theta \\ 0 \end{bmatrix}$	

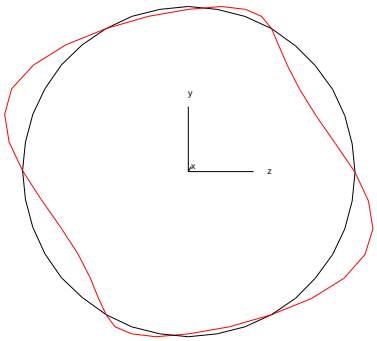
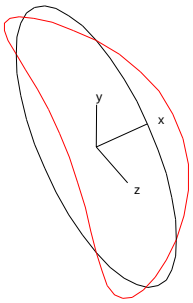
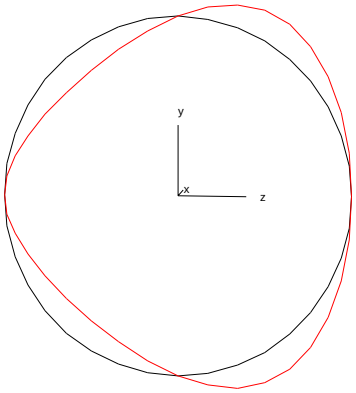
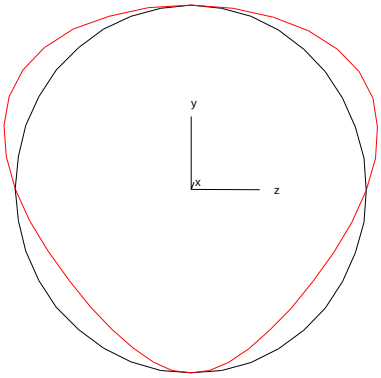
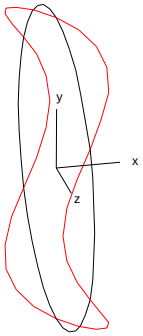
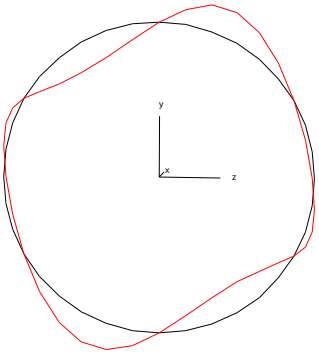
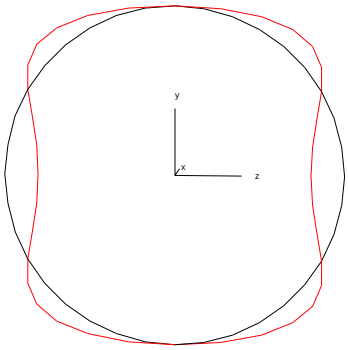
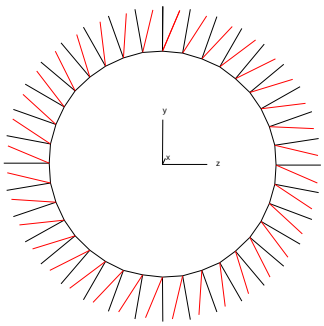
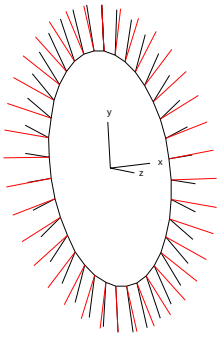
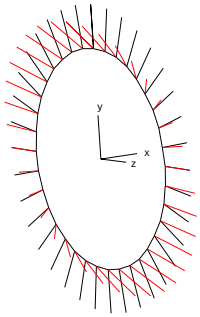
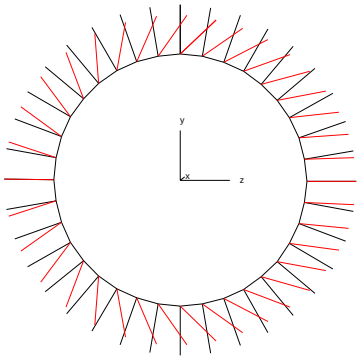
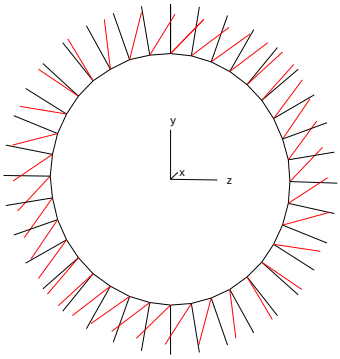
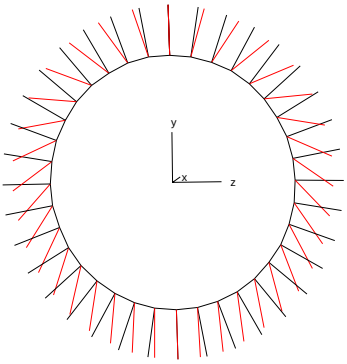
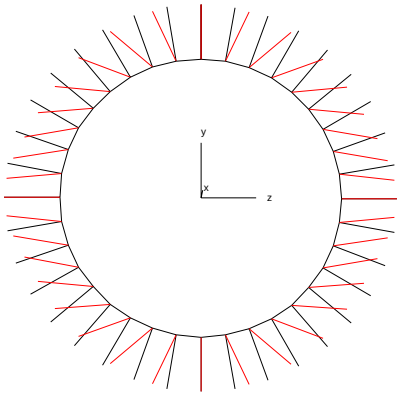
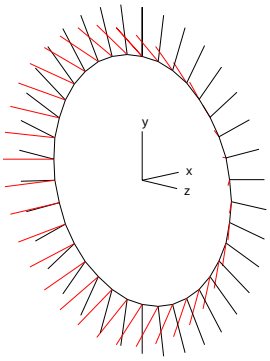
Modos de ovalização e empenamento da seção transversal			
GL	**Representação gráfica**	**GL**	**Representação gráfica**
$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos 3\theta \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \text{sen}2\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} 0 \\ \text{sen}2\theta \\ 0 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{sen}2\theta \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} \text{sen}3\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 0 \\ \text{sen}3\theta \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{sen}3\theta \end{bmatrix}$			

Figura 3.9 – Representação gráfica dos modos de deformação da seção transversal correspondentes a cada grau de liberdade.

Interpolação para o giro do vetor normal			
GL	**Representação gráfica**	**GL**	**Representação gráfica**
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \text{sen}\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} \text{sen}2\theta \\ 0 \\ \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 0 \\ -\text{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$	

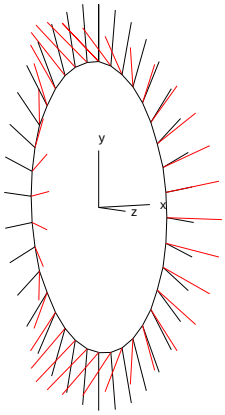
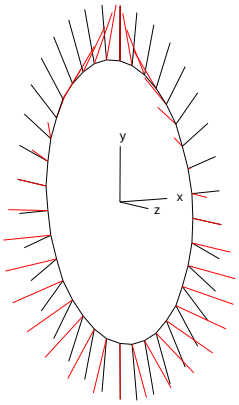
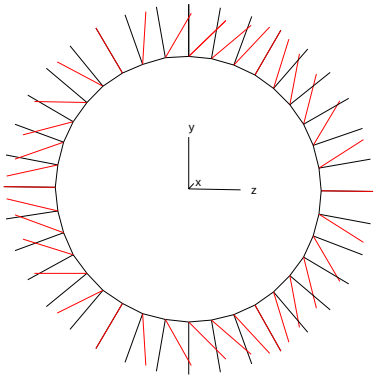
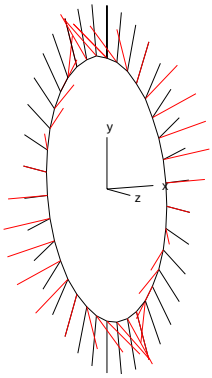
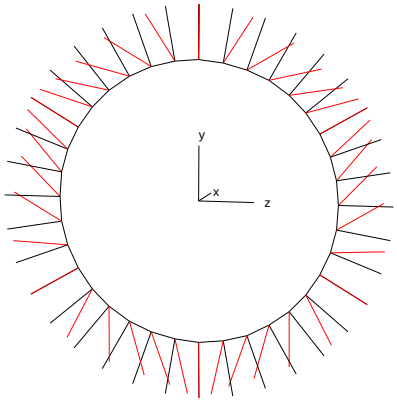
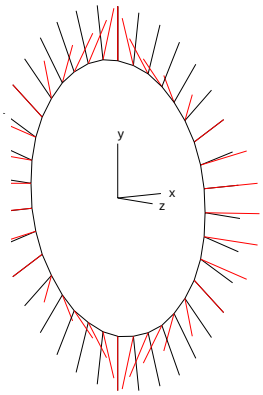
Interpolação para o giro do vetor normal			
GL	**Representação gráfica**	**GL**	**Representação gráfica**
$\begin{bmatrix} 0 \\ sen\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 0 \\ -\cos\theta \\ sen\theta \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} \cos 3\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 0 \\ -\cos 3\theta \cdot \operatorname{sen}\theta \\ \cos 3\theta \cdot \cos\theta \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} sen3\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 0 \\ -\operatorname{sen} 3\theta \cdot \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen} 3\theta \cdot \cos\theta \end{bmatrix}$	

Figura 3.10 – Representação gráfica dos graus de liberdade relacionados a cada modo de giro do vetor normal.

No elemento com dois nós a interpolação é feita com as funções lineares apresentadas nas equações 3.21 e 3.22 conforme ilustrado abaixo:

$$\boldsymbol{\delta}(X) = L_1(X)\boldsymbol{\delta}_1 + L_2(X)\boldsymbol{\delta}_2 \tag{3.26}$$

$$\mathbf{B}(X) = \mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi}_1^B L_1(X) + \boldsymbol{\varphi}_2^B L_2(X)) \tag{3.27}$$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{p}), X) = \mathbf{A}(\mathbf{M}_1\mathbf{p}_1 L_1(X) + \mathbf{M}_2\mathbf{p}_2 L_2(X)) \tag{3.28}$$

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}(\mathbf{q}, X) = L_1(X)\mathbf{N}_1\mathbf{q}_1 + L_2(X)\mathbf{N}_2\mathbf{q}_2 \tag{3.29}$$

Na formulação com três nós, a interpolação no sentido axial é feita com a utilização de polinômios Lagrangeanos quadráticos (equações 3.23 a 3.25):

$$\boldsymbol{\delta}(X) = L_1(X)\boldsymbol{\delta}_1 + L_2(X)\boldsymbol{\delta}_2 + L_3(X)\boldsymbol{\delta}_3 \tag{3.30}$$

$$\mathbf{B}(X) = \mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi}_1^B L_1(X) + \boldsymbol{\varphi}_2^B L_2(X) + \boldsymbol{\varphi}_3^B L_3(X)) \tag{3.31}$$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{p}), X) = \mathbf{A}(\mathbf{M}_1\mathbf{p}_1 L_1(X) + \mathbf{M}_2\mathbf{p}_2 L_2(X) + \mathbf{M}_3\mathbf{p}_3 L_3(X)) \tag{3.32}$$

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}(\mathbf{q}, X) = L_1(X)\mathbf{N}_1\mathbf{q}_1 + L_2(X)\mathbf{N}_2\mathbf{q}_2 + L_3(X)\mathbf{N}_3\mathbf{q}_3 \tag{3.33}$$

Assim como as equações 3.27 e 3.38, as equivalentes 3.31 e a 3.32 diferem da originalmente proposta na referência básica, visto que nesse estudo a interpolação das matrizes de rotação da seção transversal e do vetor normal era feita pelas matrizes de cada nó e agora por seus vetores de rotação para só então formar as matrizes de rotação.

Uma peculiaridade dessa formulação é o fato dos graus de liberdade não estarem associados apenas a deslocamento, mas também a deformação da seção transversal e giro do vetor normal à superfície média.

3.7 – Representação dos modos de deformação constante

Em virtude das razões supracitadas, dentre os graus de liberdade apresentados para o elemento, é necessário que haja combinações de deslocamento/deformação associados a todos os modos de deformação constante. Essas combinações e o modo de deformação criado por elas são apresentados na seqüência.

Os modos de deformação constante correspondentes a cada parcela do vetor $\boldsymbol{\varepsilon}$ coincidem na formulação de dois e três. Na representação a seguir, onde as tabelas com as variações dos graus de liberdade são construídas considerando três nós, é possível também, entender a variação para um elemento com apenas dois desde que sejam desconsideradas as variações no nó central e as do terceiro sejam atribuídas ao segundo.

3.7.1 - Deformação $\bar{\varepsilon}_{XX}$

A configuração de deformação associada a esse tipo de deformação é facilmente observado em uma configuração correspondente a um alongamento do tubo (Figura 3.11).

Este estado de deformação está associado à variação dos graus de liberdade relacionados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Graus de liberdade relacionados ao modo de deformação constante $\bar{\varepsilon}_{XX}$

Grau de liberdade	Descrição	Coluna da matriz de interpolação
$\boldsymbol{\delta}_1$	Deslocamento negativo do primeiro nó do elemento na direção do eixo x	-
$\boldsymbol{\delta}_3$	Deslocamento positivo do terceiro nó do elemento na direção do eixo x	+

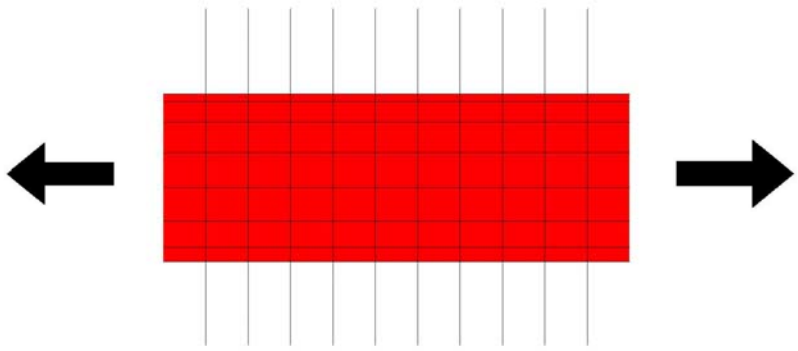


Figura 3.11 – Configuração deformada associada ao modo de deformação constante $\bar{\varepsilon}_{XX}$.

3.7.2 - Deformações $\overline{\varepsilon}_{ss}$ e $\overline{\kappa}_{ss}$

O estado de deformações constante relacionado a esses tipos de deformação pode ser observado em uma configuração correspondente a uma expansão uniforme da seção transversal do tubo (Figura 3.12).

Este estado de deformação está associado à variação dos graus de liberdade, relacionados na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Graus de liberdade relacionados aos modos de deformação constante $\overline{\varepsilon}_{ss}$ e $\overline{\kappa}_{ss}$

Grau de liberdade	**Descrição**	**Coluna da matriz de interpolação**
Δr	Expansão uniforme da seção transversal no nó 1	$+\begin{bmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$
Δr	Expansão uniforme da seção transversal no nó 2	$+\begin{bmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$
Δr	Expansão uniforme da seção transversal no nó 3	$+\begin{bmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$

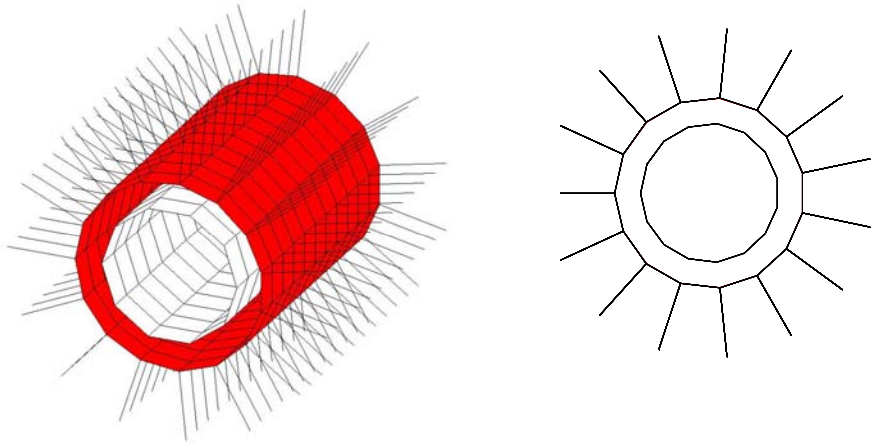


Figura 3.12 – Configuração deformada associada a modos de deformação constante $\overline{\varepsilon}_{ss}$ e $\overline{\kappa}_{ss}$.

3.7.3 - Deformação $\overline{\gamma}_{sz}$

A observação de deformações não nulas e constantes dessa natureza pode ser relacionada à variação dos graus de liberdade relacionados na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 – Graus de liberdade relacionados ao modo de deformação constante $\overline{\gamma}_{sz}$

Grau de liberdade	**Descrição**	**Coluna da matriz de interpolação**
$\boldsymbol{\varphi}_1^B$	Rotação no sentido negativo da seção em torno do eixo x no nó 1	$-\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$
Giro do $\mathbf{t_3}$	Rotação no sentido positivo do vetor $\mathbf{t_3}$ em relação ao eixo x para a matriz de interpolação do nó 1	$+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$
$\boldsymbol{\varphi}_2^B$	Rotação no sentido negativo da seção em torno do eixo x no nó 2	$-\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$
Giro do $\mathbf{t_3}$	Rotação no sentido positivo do vetor $\mathbf{t_3}$ em relação ao eixo x para a matriz de interpolação do nó 2	$+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$
$\boldsymbol{\varphi}_3^B$	Rotação no sentido negativo da seção em torno do eixo x no nó 3	$-\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$
Giro do $\mathbf{t_3}$	Rotação no sentido positivo do vetor $\mathbf{t_3}$ em relação ao eixo x para a matriz de interpolação do nó 3	$+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

O modo de deformações associado a tais variações de graus de liberdade pode ser obtido a partir de uma rotação uniforme do vetor $\mathbf{t_3}$ ao longo da seção transversal como mostra a Figura 3.13.

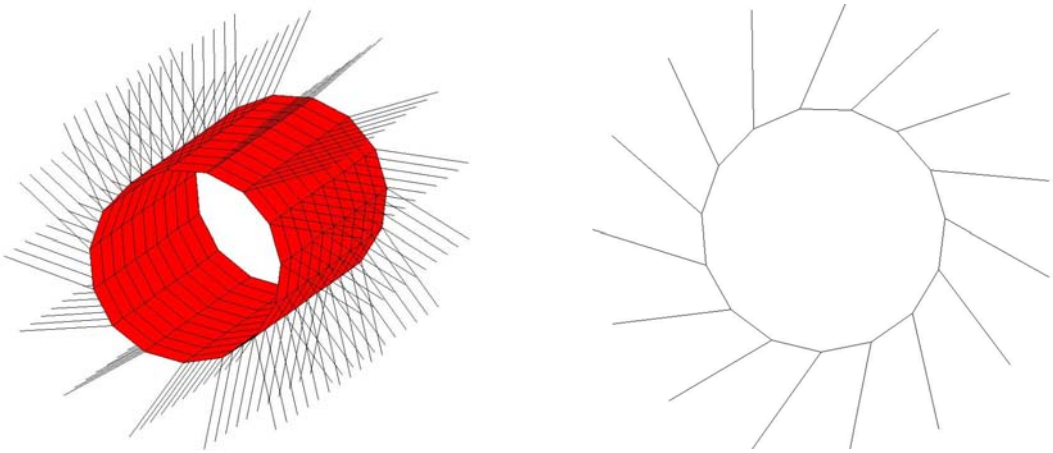


Figura 3.13 – Configuração deformada associada ao modo de deformação constante $\overline{\gamma}_{sz}$.

3.7.4 - Deformações $\overline{\gamma}_{sX}$, $\overline{\kappa}_{XX}$ e $\overline{\kappa}_{sX}$

Relaciona-se a esses tipos de deformação constante a variação dos graus de liberdade relacionados na Tabela 3.5 cujo modo de deformação representado na Figura 3.14 é correspondente ao produzido pela torção do tubo.

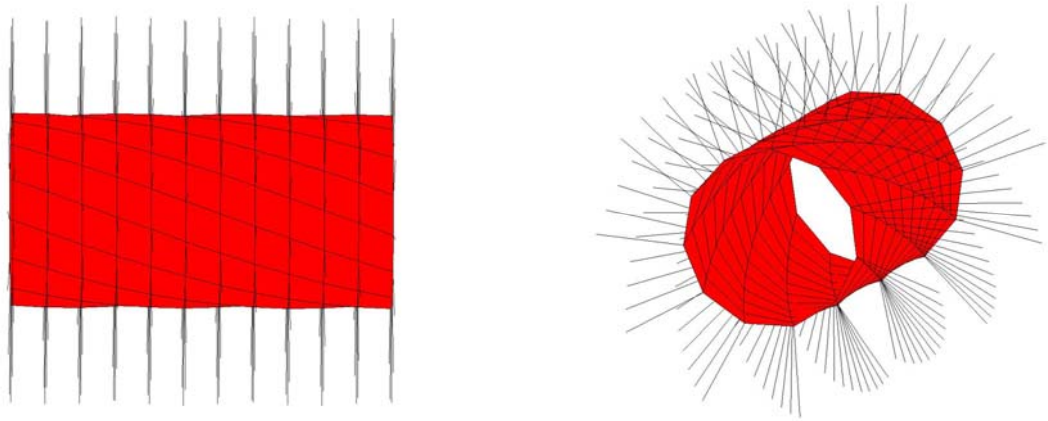


Figura 3.14 – Configuração deformada associada aos modos de deformação constante $\overline{\gamma}_{sX}$, $\overline{\kappa}_{XX}$ e $\overline{\kappa}_{sX}$.

Tabela 3.5 – Graus de liberdade relacionados aos modos de deformação constante $\overline{\gamma}_{sX}$, $\overline{\kappa}_{XX}$ e $\overline{\kappa}_{sX}$

Grau de liberdade	Descrição	Coluna da matriz de interpolação
$\boldsymbol{\varphi}_1^B$	Rotação nula da seção em torno do eixo x no nó 1	$-\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$
Giro do $\mathbf{t_3}$	Rotação no sentido positivo do vetor $\mathbf{t_3}$ em relação ao eixo x para a matriz de interpolação do nó 1	$-\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$
$\boldsymbol{\varphi}_3^B$	Rotação no sentido negativo da seção em torno do eixo x no nó 3	$+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$
Giro do $\mathbf{t_3}$	Rotação no sentido positivo do vetor $\mathbf{t_3}$ em relação ao eixo x para a matriz de interpolação do nó 3	$+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

3.7.5 - Deformação $\overline{\gamma}_{Xz}$

O modo de deformação constante em questão está relacionado à configuração deformada em forma de cone (Figura 3.15), que é obtida pela variação dos graus de liberdade relacionados na Tabela 3.6.

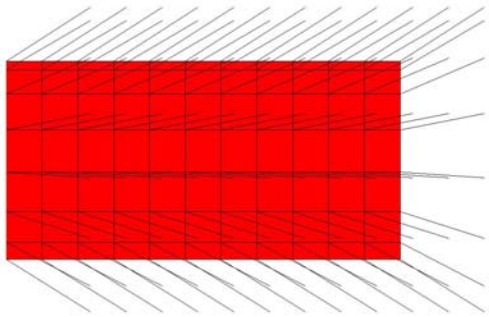


Figura 3.15 – Configuração deformada associada a modo de deformação constante $\overline{\gamma}_{Xz}$.

Tabela 3.6 – Graus de liberdade relacionados ao modo de deformação constante $\overline{\gamma}_{Xz}$

Grau de liberdade	**Descrição**	**Coluna da matriz de interpolação**
Giro do $\mathbf{t_3}$	Rotação uniforme do vetor normal em torno do eixo médio da seção no sentido negativo para a matriz de interpolação do nó 1	$-\begin{bmatrix} 0 \\ -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$
Giro do $\mathbf{t_3}$	Rotação uniforme do vetor normal em torno do eixo médio da seção no sentido negativo para a matriz de interpolação do nó 2	$-\begin{bmatrix} 0 \\ -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$
Giro do $\mathbf{t_3}$	Rotação uniforme do vetor normal em torno do eixo médio da seção no sentido negativo para a matriz de interpolação do nó 3	$-\begin{bmatrix} 0 \\ -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$

Dessa forma são contemplados modos de deformação não nulos e constantes associados aos oito tipos de deformações previstas.

3.8 – Matriz de Rigidez e Vetor de Forças Internas

3.8.1 - Origem

A formulação em elementos finitos, baseada em princípio energéticos variacionais, é utilizada para a obtenção da matriz de rigidez tangente e do vetor de forças internas. Esse procedimento é feito a partir da primeira e segunda derivadas da expressão da energia de deformação U, em relação ao vetor de graus de liberdade, conforme podemos observar na seqüência.

A energia de deformação pode ser obtida pela integração no volume da energia específica de deformação:

$$U = \int_{V_0} U_0 dV_0 \tag{3.34}$$

onde U_0 representa a energia específica de deformação que, por sua vez, nos casos unidimensionais é dada pela expressão:

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon \tag{3.35}$$

Essa integral equivale à área sob a curva do gráfico tensão-deformação. Admitindo-se o comportamento elástico linear para o material a curva em questão é representada por uma reta e a integral vale

$$U_0 = \frac{\sigma^T \varepsilon}{2} \tag{3.36}$$

Introduzindo a Eq. 3.36 em 3.34 e expressando a tensão em função da deformação e da matriz constitutiva tem-se

$$U = \frac{1}{2}\int_{V_0} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} dV_0 = \frac{1}{2}\int_{V_0} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + z\bar{\boldsymbol{\kappa}})^T \mathbf{C}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + z\bar{\boldsymbol{\kappa}}) dV_0 \tag{3.37}$$

Finalmente, após o desenvolvimento da expressão 3.37, cada termo de deformação é derivado em relação aos graus de liberdade conforme a indicação das equações 3.38 e 3.39.

$$F_{int_i} = \frac{\partial U}{\partial u_i} \tag{3.38}$$

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial u_j} \tag{3.39}$$

Dessas ações surge a necessidade de se conhecer as derivadas de cada termo da expressão de energia em relação aos graus de liberdade. As referidas derivadas, apresentadas nos Apêndices A, B e C, requerem uma extensa estrutura condicional no código computacional visto que as matrizes de interpolação $\mathbf{A}(s, X)$ e $\mathbf{B}(s, X)$ além dos vetores $\mathbf{T}_3(s, X)$ e $\mathbf{t}_3(s, X)$. Tais elementos compõem a expressão da energia de

deformação e dependem de diversos tipos de graus de liberdade, possuindo às vezes, mais de uma expressão para a derivada.

3.8.2 – Otimização na geração

O grande número de funções trigonométricas utilizadas nas interpolações dos deslocamentos e do movimento de corpo rígido acaba acarretando um aumento do custo computacional. Certas análises, no entanto, estão limitadas a um padrão de deslocamento e deformações, não sendo necessária a avaliação de alguns modos de deformação que equivalem a determinadas variações de certos graus de liberdade.

Analisando um modelo submetido a um regime de esforços ou deslocamentos que se aproximem do estado de flexão pura, torna-se desnecessária a avaliação de graus de liberdade relacionados a ovalizações assimétricas em relação ao plano principal de curvatura, como os exemplos da Figura 3.16.

Sendo a flexão representada por um giro das seções transversais do modelo em torno do eixo Z é intuitivo acreditar na não ocorrência de modos de deformação e deslocamento que não apresentem simetria em relação ao eixo Y. Dessa forma, é possível que na montagem da matriz de rigidez e do vetor de forças internas alguns deslocamentos ou deformações sejam considerados irrelevantes e por esse motivo sua contribuição pode ser omitida. Essa operação é feita com a retirada dos respectivos graus de liberdade dos vetores de deslocamento ou das matrizes de interpolação.

Dessa forma há um ganho computacional visto que a varredura feita em todos os graus de liberdade para a avaliação das derivadas envolvidas na implementação do elemento não seja executada desnecessariamente.

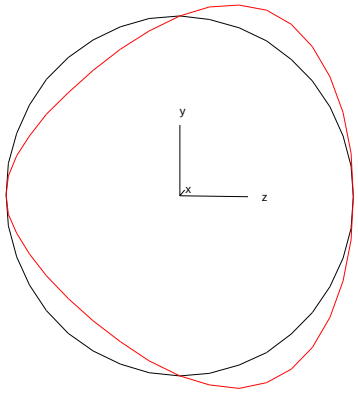
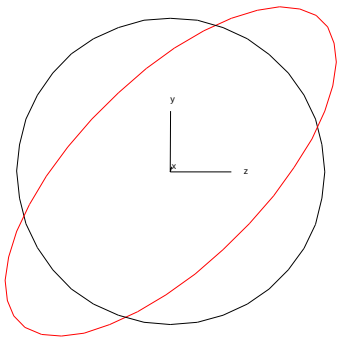
GL	Representação gráfica
$\begin{bmatrix} 0 \\ \text{sen}2\theta \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} 0 \\ \text{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$	

Figura 3.16 – Modos de ovalização da seção transversal não associados a estado de flexão pura.

3.9 – Integração numérica

A matriz de rigidez e o vetor de forças internas do elemento são obtidos através de derivadas da expressão da energia de deformação oriunda originalmente de uma integração tripla nos sentidos axial, circunferencial e ao longo da espessura através da coordenada z, na forma:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{0}^{L} \int_{0}^{2\pi} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + z\bar{\boldsymbol{\kappa}})^{T} \mathbf{C} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + z\bar{\boldsymbol{\kappa}}) |J| ds dX dz \tag{3.40}$$

A integração em z é feita analiticamente e para as direções s e x numericamente.

O determinante do jacobiano do volume indeformado (J), presente nas integrações, e calculado como sendo $(R+z)$ é aproximado para R, dado ao fato das cascas estudadas serem de pequena espessura. Esse procedimento permite que haja desacoplamento das parcelas que envolvem $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ e $\overline{\boldsymbol{\kappa}}$ na expressão da energia de deformação. Dessa forma a integração numérica é reduzida a seguinte expressão:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \int_0^{2\pi} \left(Rh\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T C\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{h^3}{12}\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T C\overline{\boldsymbol{\kappa}} + \frac{Rh^3}{12}\overline{\boldsymbol{\kappa}}^T C\overline{\boldsymbol{\kappa}} \right) dsdX \qquad (3.41)$$

3.9.1 – Integração no sentido axial

Segundo COOK *et al.* (1989) um polinômio de grau **2n-1** é integrado exatamente por **n** pontos da quadratura de Gauss. A determinação de n passa pelo entendimento do grau do polinômio que poderia ser associado à expressão da energia de deformação.

O produto $\overline{\varepsilon}^T\overline{\varepsilon}$ presente na primeira parcela da Eq. 3.41 se configura como a operação que produz os termos de mais alta ordem na expressão. No elemento com três nós, o campo de deslocamentos no sentido axial é interpolado por uma função quadrática, sendo assim, o vetor posição na configuração deformada $\overline{\mathbf{x}}(s,X)$ pode também ser associado a um polinômio do segundo grau. Essa relação faz com que as derivadas desse vetor em relação à coordenada s, ao longo da seção transversal sejam ainda quadráticas no sentido axial por não dependerem dessa coordenada. O produto dessas derivadas é, portanto um polinômio do quarto grau. Dessa forma a parcela da energia de deformação apresentada no início dessa discussão passa a ser equivalente a um polinômio do oitavo grau, exigindo assim um número de cinco pontos de integração no sentido axial para uma integração exata, como mostra a Figura 3.17.

A dedução para o elemento de dois nós é feita da mesma maneira, mas em virtude das funções de interpolação serem lineares, o produto das derivadas citado anteriormente resulta numa função quadrática, gerando um polinômio de quarto grau para a energia de deformação. Sendo assim, são necessários apenas dois pontos no sentido axial para uma integração exata.

$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$

contém

$$\bar{\varepsilon}_{ss} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial s}\cdot\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial s} - \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial s}\cdot\frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial s}\right)$$

2º grau

4º grau

assim,

$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{T}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ——— 8º grau

sendo 2n-1 = 8,
n=4,5 que leva a n= 5 pontos

Figura 3.17 – Dedução do número de pontos de integração para o elemento com 3 nós.

Testes para a verificação da possível aplicação de uma integração reduzida, com menos pontos, foram realizados, mas a variação nos resultados indicou a necessidade de se trabalhar com a quantidade de avaliações originalmente prevista.

3.9.2 – Integração no sentido circunferencial

Ao redor da seção transversal em uma integração como a quadratura Gaussiana a grande quantidade de pontos necessária para a obtenção de resultados acurados exigiria um complexo procedimento para a avaliação do posicionamento e do peso de ponderação de cada ponto de integração. Esse procedimento exigiria o cálculo e armazenamento no código de um volume grande dessas informações ou o desenvolvimento de uma complexa rotina para determinação de tais valores.

Objetivando a aplicação de uma estratégia de integração mais simplificada para nessa direção, a regra de 1/3 de Simpson repetida é empregada, conforme ilustrado na Figura 3.18.

Nessa estratégia a formulação de Lagrange é utilizada para obter a aproximação por um polinômio do 2º grau que interpola grupos de três pontos consecutivos de integração, que são denominados de células e são avaliadas ao longo da seção transversal.

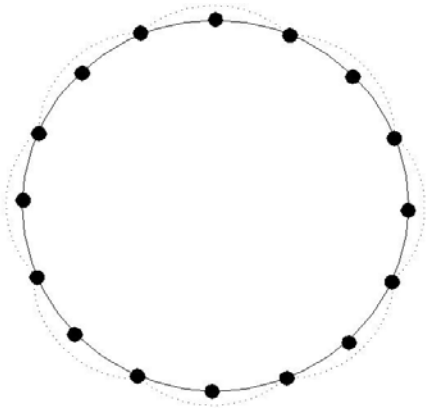


Figura 3.18 – Interpolação quadrática ao redor da seção transversal com utilização da regra de Simpson.

Os pontos correspondentes aos vértices de cada parábola são ponderados pelo peso 4 na regra de Simpson. Utilizando regra repetida, cada ponto final de célula, passa a ser início de uma outra e dessa forma, por ser avaliado duas vezes esses pontos são ponderados com peso 2. Sendo assim, para um número de n células e 2n pontos avaliados têm-se:

$$\int_0^{2\pi} U d\theta = \frac{2\pi}{3}\left(2U(\theta_0) + 4U(\theta_1) + 2U(\theta_2) ..... + 2U(\theta_{2n-1}) + 4U(\theta_{2n})\right) \qquad (3.42)$$

A quantidade de pontos de integração dependerá da ordem da expansão trigonométrica usada para as matrizes de interpolação da variação do raio e da rotação do vetor normal. No entanto, como as funções de interpolação ao redor da seção transversal não são polinomiais e sim trigonométricas, não foi encontrada indicação na literatura de um método analítico para a determinação da quantidade exata de pontos para a integração. Por esse motivo, essa determinação foi feita de maneira empírica.

A partir de um campo de deslocamentos compatível com os modos de deformação dos exemplos estudados foram geradas matrizes de rigidez com a utilização

de integrações com diferentes números de células ao redor da seção transversal, conforme ilustrado na Figura 3.19.

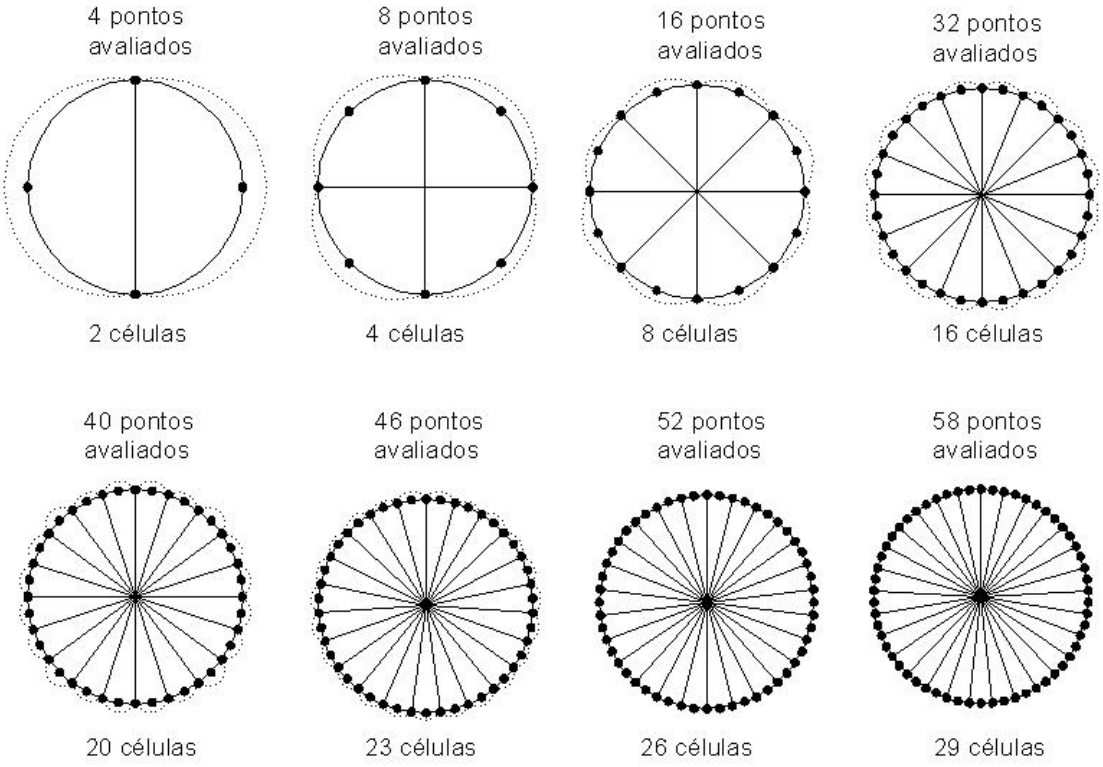


Figura 3.19 – Variação do número de células de integração ao redor da seção circular.

Os modos de deformação esperados sugerem o uso de uma quantidade razoável de pontos, ainda assim, a análise é feita a partir de duas células para obter uma perspectiva da sensibilidade do modelo à integração.

A análise das matrizes de rigidez geradas pela utilização de diferentes quantidades de células foi feita através de seus cinco maiores autovalores. Comparando as variações observadas com o incremento de pontos foi constatada uma estabilização a partir de um número de 25 células (Figura 3.20).

Essa metodologia é comum para a avaliação desse tipo de integração tanto para o elemento de dois nós como para o de três.

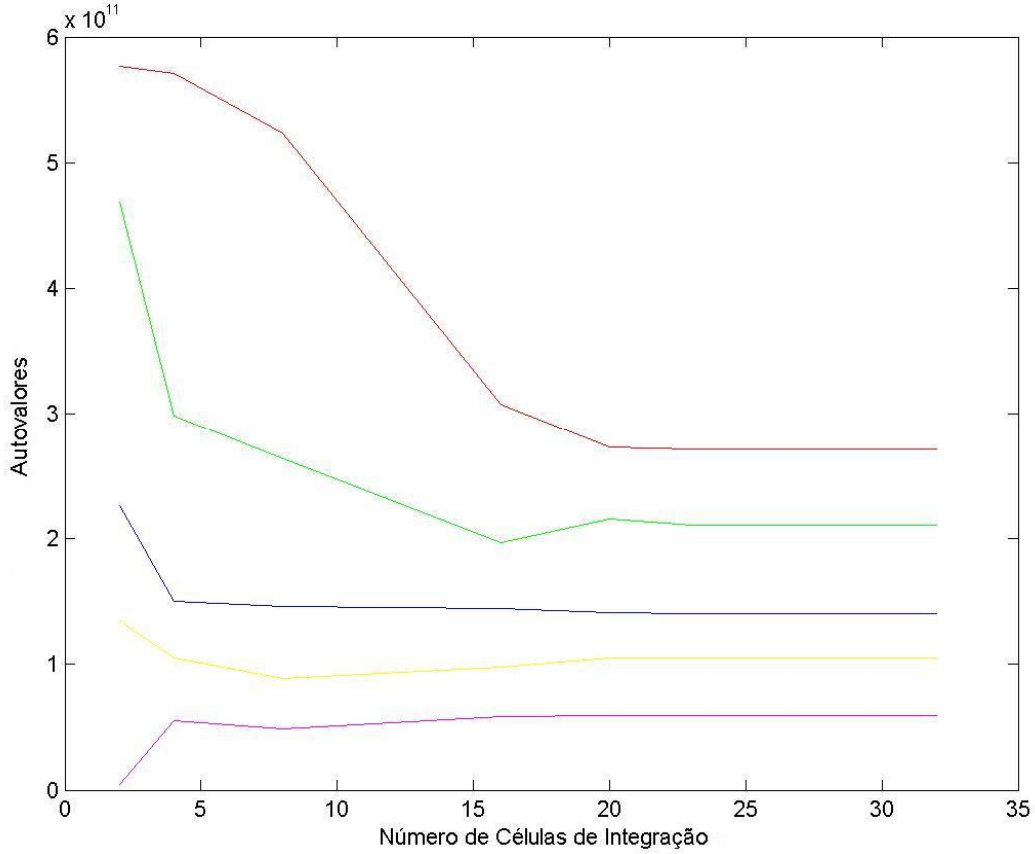


Figura 3.20 – Variação dos cinco maiores autovalores para diferentes números de células de integração ao redor da seção transversal.

Capítulo 4

Análises Numéricas

4.1 – Validação da formulação

As mudanças efetuadas em relação à formulação original de JIANG & ARABYAN (1996) fazem com que a implementação do Tubo3D se caracterize efetivamente como uma nova proposta para a interpolação de um elemento finito de tubo tridimensional. Os resultados numéricos oferecidos na publicação que originou o estudo seriam, no caso de manutenção da formulação, a primeira referência para se verificar a eficiência da nova implementação. Nesse sentido, os poucos parâmetros que sinalizavam como ferramenta de comparação são perdidos.

Por esse motivo, a quebra dessa vinculação direta cria a necessidade de procedimentos de avaliação que investiguem não apenas resultados de modelos estruturais complexos, mas a consistência de cada etapa da formulação agora proposta. Esse fato remete a análise a uma verificação da necessidade de reprodução pelo elemento dos movimentos de corpo rígido e dos modos deformação constante, que são buscados objetivando atender aos critérios de convergência. Modelos extremamente simplificados, sem intenção de reproduzir modos de deformação reais são utilizados apenas para atestar à continuidade do campo de deslocamentos e de sua primeira derivada, correspondente as deformações de membrana e flexão. Tais testes são feitos inicialmente por intermédio de alguns modelos que verificavam a correção das relações cinemáticas e constitutivas.

Com o objetivo de validar a consistência da formação da matriz de rigidez, aplica-se um campo de deslocamentos que não resulta em deformação a um modelo formado por um único elemento sem discretização. O objetivo desta investida consiste na verificação dos autovalores e autovetores da matriz de rigidez obtida. Tal matriz,

construída a partir de um campo de deslocamentos correspondente a um movimento de corpo rígido deverá possuir seis autovalores nulos, correspondendo às translações δ_i e aos giros ϕ_i^B em torno dos eixos X, Y e Z (Figura 4.1).

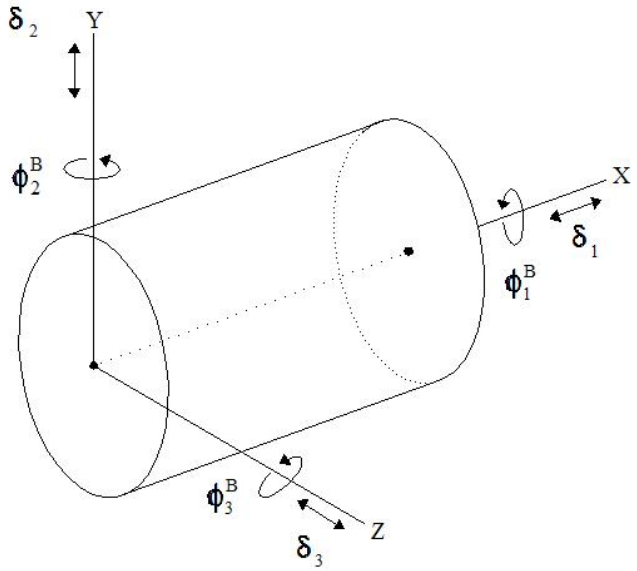


Figura 4.1 – Graus de liberdade correspondentes aos movimentos de corpo rígido.

As relações constitutivas são avaliadas com um teste axial simples, ilustrado na Figura 4.2, modelando um elemento com um baixo nível de discretização, permitindo assim que a resposta não linear observada possa ser atribuída apenas ao tensor de deformações adotado.

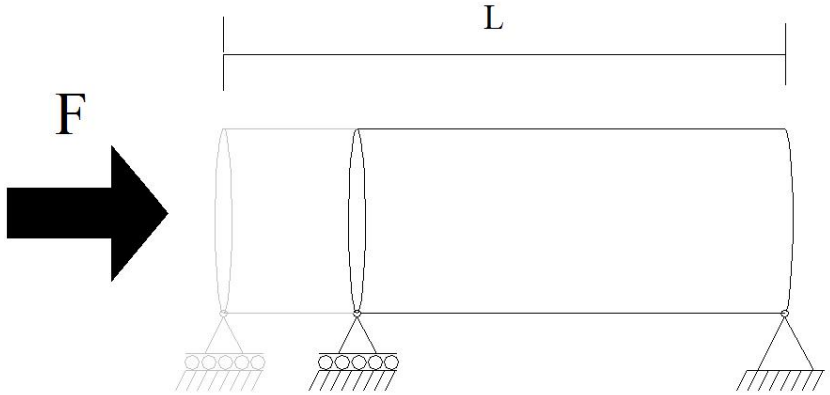


Figura 4.2 – Teste axial com modelo de baixa discretização submetido a uma força F.

O tubo representado no teste é modelado com L= 0,2m, R=0,05m, h=0,001m, E=200 x 10^9 N/m^2 e o coeficiente de Poisson ν=0,26.

Sendo a solução analítica do problema dada por:

$$F = EA\left(\frac{u}{L} + \left(\frac{u}{L}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{1+u}{L}\right) \tag{4.1}$$

Em uma análise por estratégia de controle de deslocamento, a força axial F se apresenta como função de E, A, L e do vetor de deformações **u**. A comparação dos resultados obtidos por esta expressão a os fornecidos pelo Tubo3D pode ser observada na Figura 4.3.

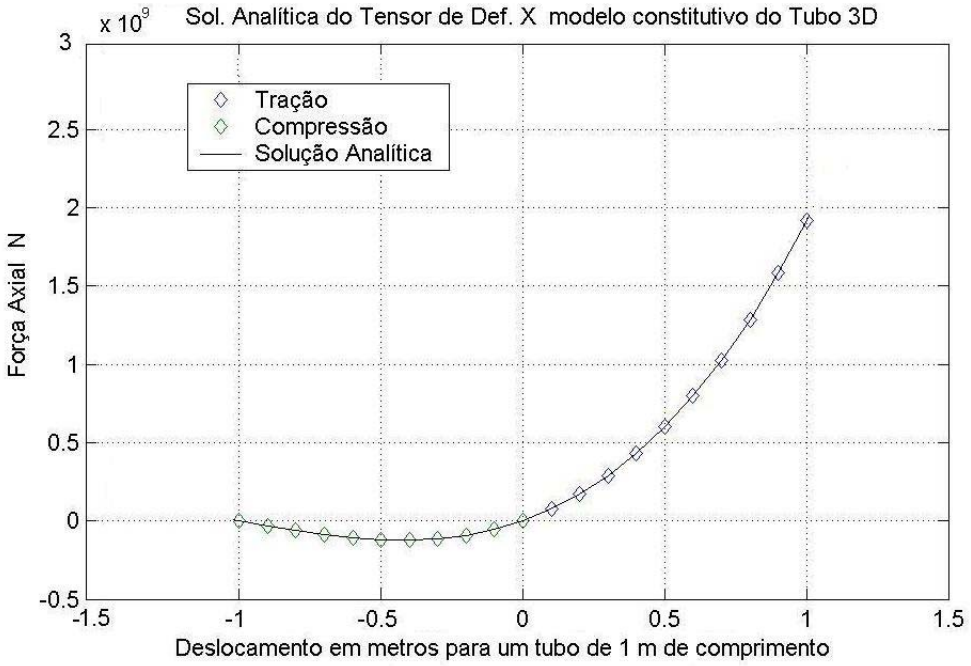


Figura 4.3 – Comparação da solução analítica com testes de compressão e tração.

Na comparação com resultados disponíveis na literatura um dos maiores empecilhos para a avaliação do elemento é a dificuldade em se reproduzir as condições de carregamento e vinculação de alguns modelos, sobretudo os que representam testes experimentais. Este problema se deve principalmente ao fato de que o Tubo3D ainda

não possuir um método para a representação de carregamentos distribuídos, inviabilizando a análise de tubos submetidos à pressão. Sendo assim, inicialmente o estudo dedica-se à análise de exemplos com modos de deformação simplificados cujas relações analíticas entre esforços e deslocamentos são fornecidas por alguns trabalhos disponíveis na literatura.

Em um estudo de estruturas laminares, a compreensão de alguns fenômenos inerentes a este tipo de geometria se torna indispensável para a análise do comportamento dos modelos avaliados. Sendo assim, algumas observações sobre instabilidade dos dutos são inicialmente feitas. Características gerais desses efeitos são apresentadas particularmente para tubos submetidos à flexão, onde são analisadas cargas e curvaturas críticas.

Com o intuito de continuar o processo de validação busca-se a obtenção de resultados de modelos numéricos mais complexos para atestar a eficiência do elemento. A escolha do modelo a ser estudado fica condicionada à necessidade de estabelecer um processo gradativo de avaliação dada a falta de referenciais numéricos diretos, ocasionada pela mudança na formulação do Tubo3D.

Um dos modos de carregamento mais simples e que induz o modelo a sofrer efeitos geometricamente não lineares é o estado de flexão pura. Por esse motivo o foco das análises se volta para modelos flexionados objetivando submeter o elemento a deformações e deslocamentos previstos no desenvolvimento de sua formulação.

4.2 - Análise de tubos submetidos à flexão

Como já discutido no Capítulo 2, em tubos flexionados com seção transversal deformável, observa-se uma diminuição da rigidez à flexão em virtude do já descrito “Efeito Brazier”.

A análise desse efeito não linear consiste em uma maneira de atestar a eficácia do elemento na base de sua formulação onde se descreve a interpolação do giro da seção transversal, sua ovalização e a rotação do vetor inicialmente normal à superfície.

De acordo com o exposto, inicialmente são identificadas certas dificuldades em se reproduzir algumas condições de carregamento e vinculação observadas em resultados numéricos apresentados na literatura que possam levar a uma comparação

criteriosa de tensão e deformação dos modelos estudados. Esse inconveniente desperta, nos ensaios a flexão, a comparação com os primeiros referenciais numéricos relacionados com a perda de resistência à flexão oriundos dos efeitos não lineares descritos anteriormente.

Os parâmetros comparativos visados são o Momento e a Curvatura propostos por Brazier, dados por:

$$M_{BR} = 0{,}987 \frac{ERt^2}{\sqrt{1-\nu^2}} \tag{4.2}$$

$$\kappa_{BR} = 0{,}471 \frac{t}{R^2\sqrt{1-\nu^2}} \tag{4.3}$$

onde R corresponde ao raio da seção transversal do tubo, t a espessura, E o modo de elasticidade e ν o coeficiente de Poisson.

Apesar de não haver uma discussão criteriosa no trabalho de Brazier sobre a influência da geometria do tubo no momento e curvatura relacionados à instabilidade por ovalização, KARAMANOS (2002), que entre outras análises, comparou sua formulação aos valores propostos nas equações 4.2 e 4.3, restringiu suas análises a tubos de paredes finas onde R>>t. No desenvolvimento da formulação do Tubo3D essa hipótese também é adotada, admitindo-se a invariância da espessura da casca e a influência desse fenômeno, conforme descrito no Capítulo 3.

LIBAI & SIMMONDS (1998) limitaram sua análise do colapso de tubos flexionados a hipótese de espécimes longos, onde os efeitos dos carregamentos aplicados na extremidade do modelo não possam influenciar no comportamento da seção transversal no centro. Além disso, segundo STEPHENS *et al.*, *apud* LIBAI & SIMMONDS (1988), em tubos longos o efeito Brazier domina o comportamento não linear em detrimento do aparecimento de deformações localizadas como enrugamentos. Nesse último caso, as deformações plásticas têm seu efeito potencializado tornando as relações constitutivas do Tubo3D inadequadas para o estudo visto que prevêem apenas um comportamento elástico linear.

Esse afastamento do carregamento ao centro do tubo é quantificado através de um parâmetro ρ calculado a partir do raio da seção transversal (R) e da espessura (t).

Para os autores o comprimento do tubo deveria ter no mínimo duas vezes e meia o valor de p, dado por

$$p = \frac{R^{3/2}}{\sqrt{t}} \tag{4.4}$$

Dessa forma, buscando atender às limitações sugeridas na literatura a geometria do modelo analisado foi convenientemente escolhida, conforme descrito a seguir.

4.2.1 - Modelagem

A partir de um modelo submetido a uma carga momento em uma extremidade do tubo e com algumas limitações cinemáticas para o outro extremo, objetiva-se reproduzir o estado de flexão pura, tomando partido da simetria.

Uma estrutura idealizada com 12m de comprimento é modelada com L/2= 6m, R=0,254m, h=0,002m, E=200 x 10^9 N/m^2 e o coeficiente de Poisson ν=0,26, sendo analisada com 1 a 4 elementos finitos e através de diversos níveis de discretização.

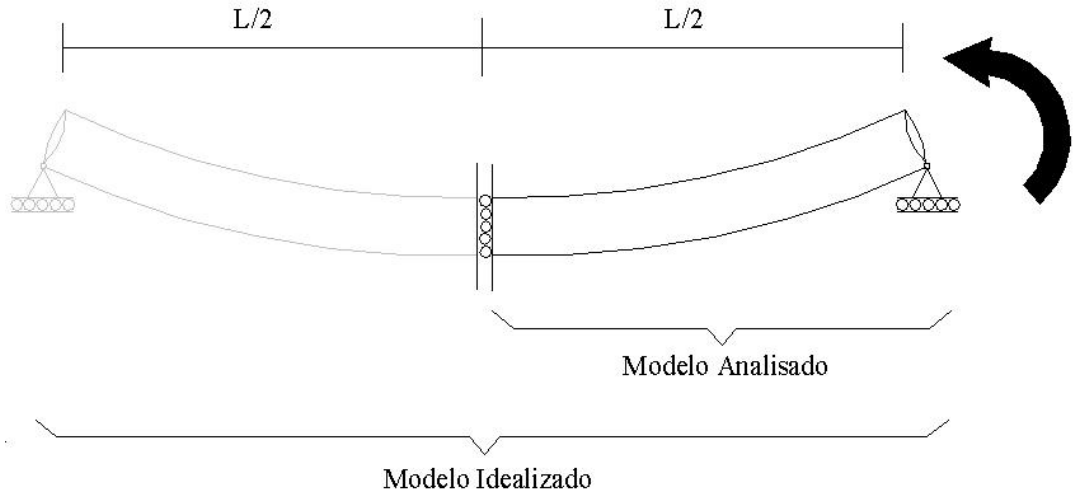


Figura 4.4 – Modelo idealizado para análise de tubo submetido à flexão pura.

A ordem das discretizações trigonométricas e o número de pontos de integração ao redor da seção transversal do tubo são definidos empiricamente com base no alcance de um patamar onde os refinamentos não implicam em alteração nos resultados obtidos.

O estudo inicia-se através da modelagem da estrutura com um único elemento sem discretizações trigonométricas.

Para a geometria escolhida, segundo a teoria de Brazier é esperado um ponto limite de carga de momento conforme o valor proposto pela Eq. 4.2, correspondendo no caso ao valor de 2,07 x 10^5 N.m.

Durante o uso da formulação com dois nós, mesmo para elevados níveis de discretização, o início do comportamento não linear esperado é observado em momentos máximos bem superiores aos sugeridos por Brazier, sinalizando uma excessiva rigidez do modelo.

Em testes com modelos discretizados por elementos de três nós, a tendência à rigidez também é observada inicialmente. Durante o processo de avaliação gradativa dos níveis de refinamento do modelo estudado, a pequeno número de graus de liberdade obnservado em exemplos pouco discretizados se traduz em uma perda de flexibilidade da estrutura. Essa característica pode ser observada pelo comportamento linear do gráfico momento *versus* curvatura mesmo após ser atingido o valor limite proposto por Brazier que implicaria em uma redução da rigidez à flexão convertida em uma trajetória não linear, como mostra a Figura 4.8.

KARAMANOS (2002) descreve esta deformação da seção transversal através de um modelo bidimensional que apresenta uma dupla simetria em relação aos eixos y e z.

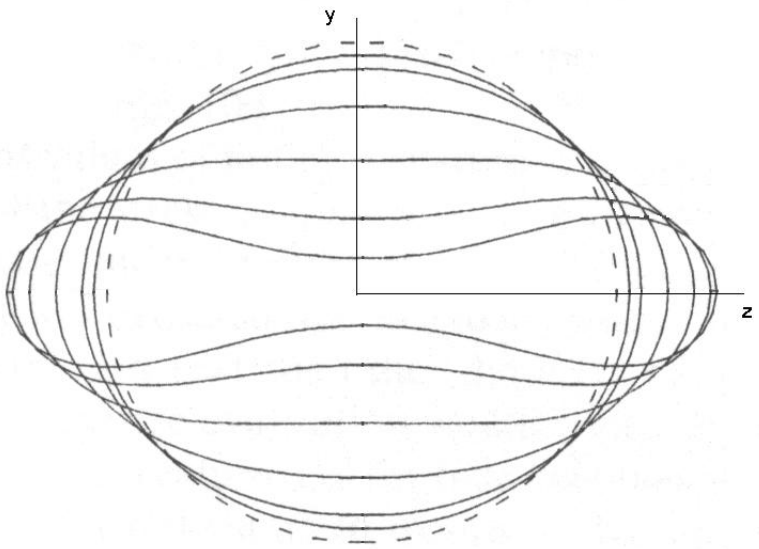


Figura 4.5 – Ovalização proposta pelo modelo de Karamanos.

A despeito do formato da ovalização, a expectativa em torno do modelo flexionado segundo o que já previa a teoria de Brazier era do aparecimento da deformação na seção transversal no centro do modelo idealizado. No entanto, a técnica para a modelagem das condições de contorno e carregamento pode interferir no comportamento do tubo flexionado, como sugere a Figura 4.6.

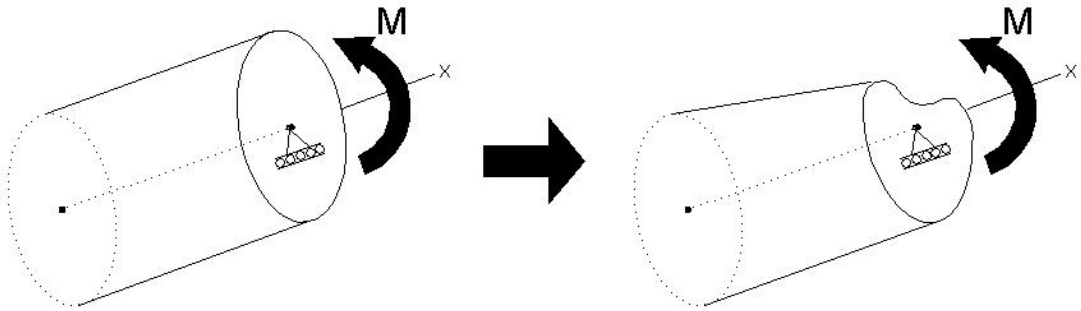


Figura 4.6 – Deformação causada por falha no processo de modelagem.

Essa falha é observada em análises com o elemento de dois nós onde não foi introduzida nenhuma restrição a ovalização da extremidade onde é aplicada a carga momento, conforme ilustra a Figura 4.7.

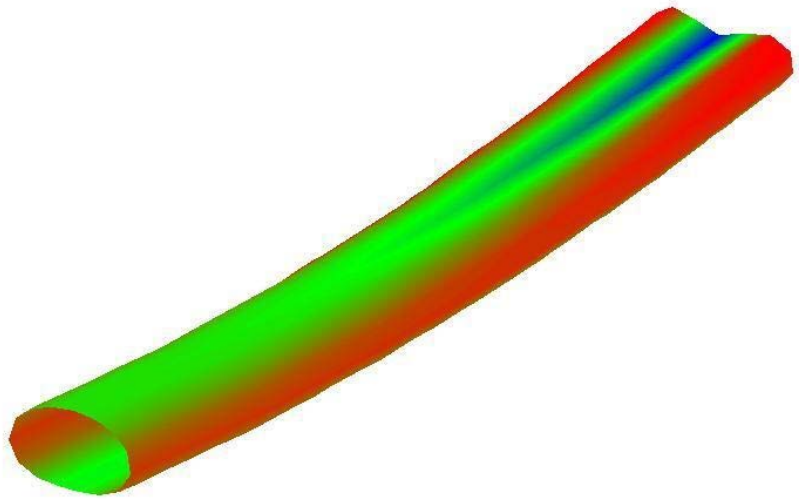


Figura 4.7 – Deformação ε_{ss} para um tubo com ovalização inesperada da extremidade onde atua a carga momento.

A introdução de restrições em graus de liberdade relacionados à ovalização na seção que recebe a carga concentrada simula a existência de um enrijecedor na extremidade do modelo evitando a distorção observada. Essa técnica permite uma distribuição mais uniforme da carga momento, aproximando assim a condição de carregamento ao estado de flexão pura.

4.2.2 – Resultados

Corrigidos os problemas de modelagem através do indicativo de ovalização da seção transversal central do modelo, gradativamente o número de elementos e a discretização são alterados objetivando a reprodução do comportamento não linear esperado. Em diferentes análises as trajetórias de equilíbrio são comparadas ao comportamento descrito nos estudos de Brazier e Karamanos.

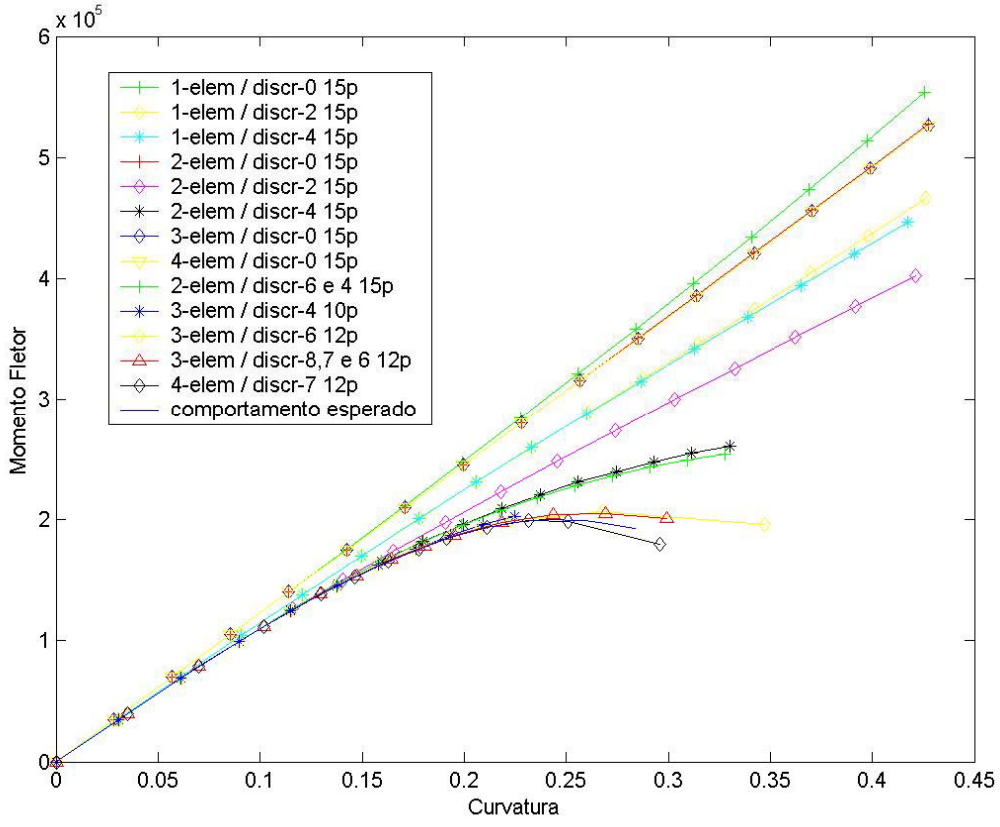


Figura 4.8 – Trajetórias de equilíbrio de diferentes discretizações para o estudo do modelo flexionado.

Com exceção das limitações impostas nos modos de deformação da extremidade do tubo onde é aplicada a carga momento, os demais nós são discretizados conforme indicação na legenda da Figura 4.8 onde também é descrita a quantidade de elementos utilizados e o número de pontos da trajetória de equilíbrio que são mapeados.

Por limitações de desempenho computacional descritas a seguir, alguns exemplos, que exigem um tempo maior de processamento, são mapeados numa quantidade menor de pontos a fim de tornar o processo de avaliação mais ágil desde que a trajetória observada se apresente divergente do comportamento esperado. Essa avaliação se torna possível, pois a curva é mapeada em trechos, facultando ao usuário a possibilidade de interromper uma análise com resultados fora das expectativas. Também com o objetivo de poupar esforço computacional os modos de deformação não previstos das seções transversais de cada nó na configuração deformada são considerados restringidos, otimizando o processo de geração das matrizes de rigidez e do vetor de forças internas conforme descrito no Capítulo 3.

As análises se encaminham para uma invariância de resultados na ocasião onde são usados na maior parte dos nós sete pares de senos e co-senos para montagem das matrizes **M** e **N.** Em todos os modelos analisados, ao contrário dos pontos intermediários, onde a discretização varia conforme que é descrito na Figura 4.8, nos nós correspondentes as extremidades do tubo, o número de graus de liberdade livres também foi diminuído conforme as limitações cinemáticas admitidas. Dessa forma, modos de ovalização e giros do vetor normal não compatíveis com o regime de deformação deixam de ser analisados.

Para a integração numérica, são utilizados 52 pontos divididos em 26 células conforme sugere a regra de Simpson.

No sentido axial, cinco pontos de Gauss foram utilizados para cada elemento de três nós. No elemento de dois nós, dois pontos de integração foram empregados de acordo com a dedução analítica descrita no Capítulo 3.

A partir da formulação dos valores propostos por Brazier, KARAMANOS (2002) apresentou soluções simplificadas para tubos inicialmente retos, a saber:

Tabela 4.1. Relações Ovalização-Curvatura ($\zeta - \kappa$) e Momento-Curvatura ($m - \kappa$)

Brazier (1927) tubos inicialmente retos	$\zeta = \kappa^2$	$m = \pi\kappa\left[1 - \frac{3}{2}\kappa^2\right]$
Brazier Modificado tubos inicialmente retos	$\zeta = \kappa^2 \frac{1}{1 + \frac{5\kappa^2}{6}}$	$m = \pi\kappa\left[1 - \frac{3}{2}\zeta + \frac{5}{8}\zeta^2\right]$

No trabalho de Karamanos foram apresentados os resultados de uma análise bidimensional de ovalização que quando comparada ao estudo feito com a formulação tridimensional de tubos resultou numa aproximação aceitável.

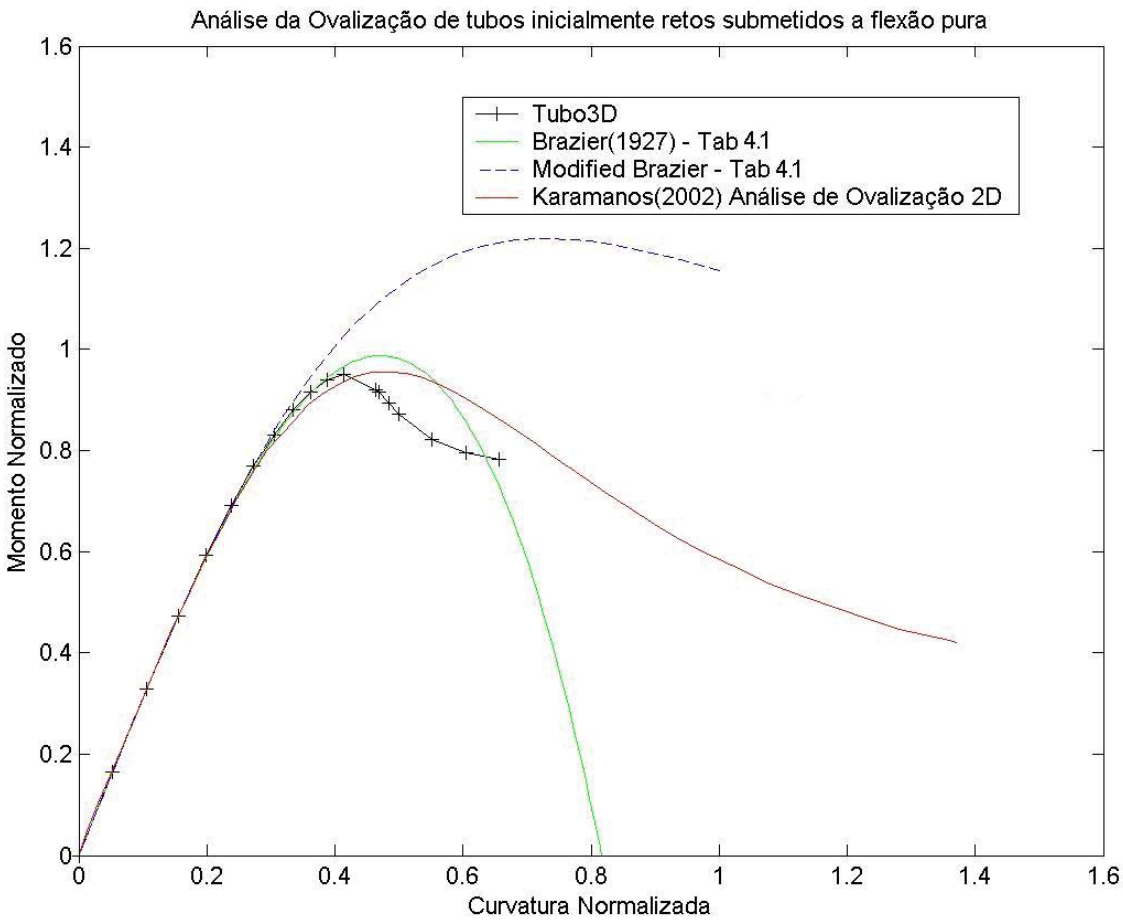


Figura 4.9 – Análise comparativa do comportamento não linear de um tubo submetido à flexão pura com as soluções de Brazier e Karamanos.

A Figura 4.9 ilustra a mesma comparação feita por Karamanos na ausência de bifurcação com as equações simplificadas propostas por Brazier (Tabela 4.1). Em relação ao modelo bidimensional proposto por Karamanos a formulação do Tubo3D apresenta uma concordância na trajetória linear e à medida que os efeitos não lineares se apresentam mais significativos o comportamento se diferencia. Essa divergência pode ser compreendida em função das diferenças entre as formulações, que ficam evidenciadas durante a observação da progressão da ovalização da seção transversal. A dupla simetria da seção em relação aos eixos y e z observada na formulação bidimensional não se repete no comportamento do modelo analisado pelo Tubo3D, que apresenta simetria apenas em relação ao eixo y. Esse desempenho parece ser bem mais condizente com a observação das configurações deformadas de testes experimentais encontrados na literatura.

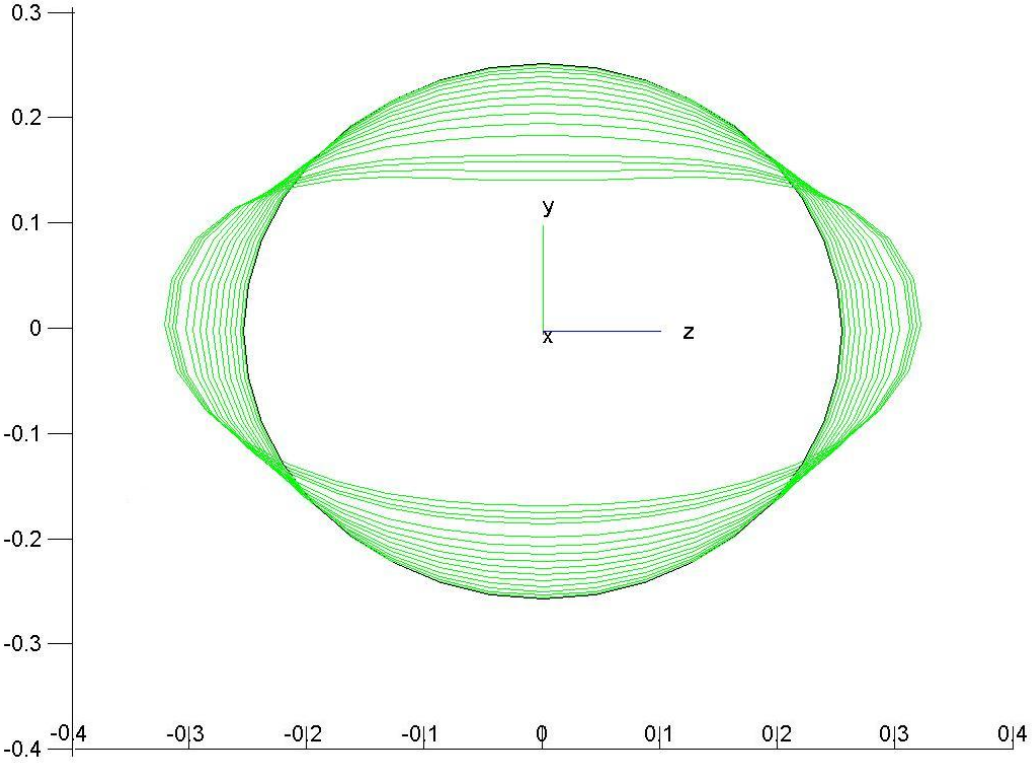


Figura 4.10 – Deformação da seção transversal do nó central ao longo trajetória de equilíbrio.

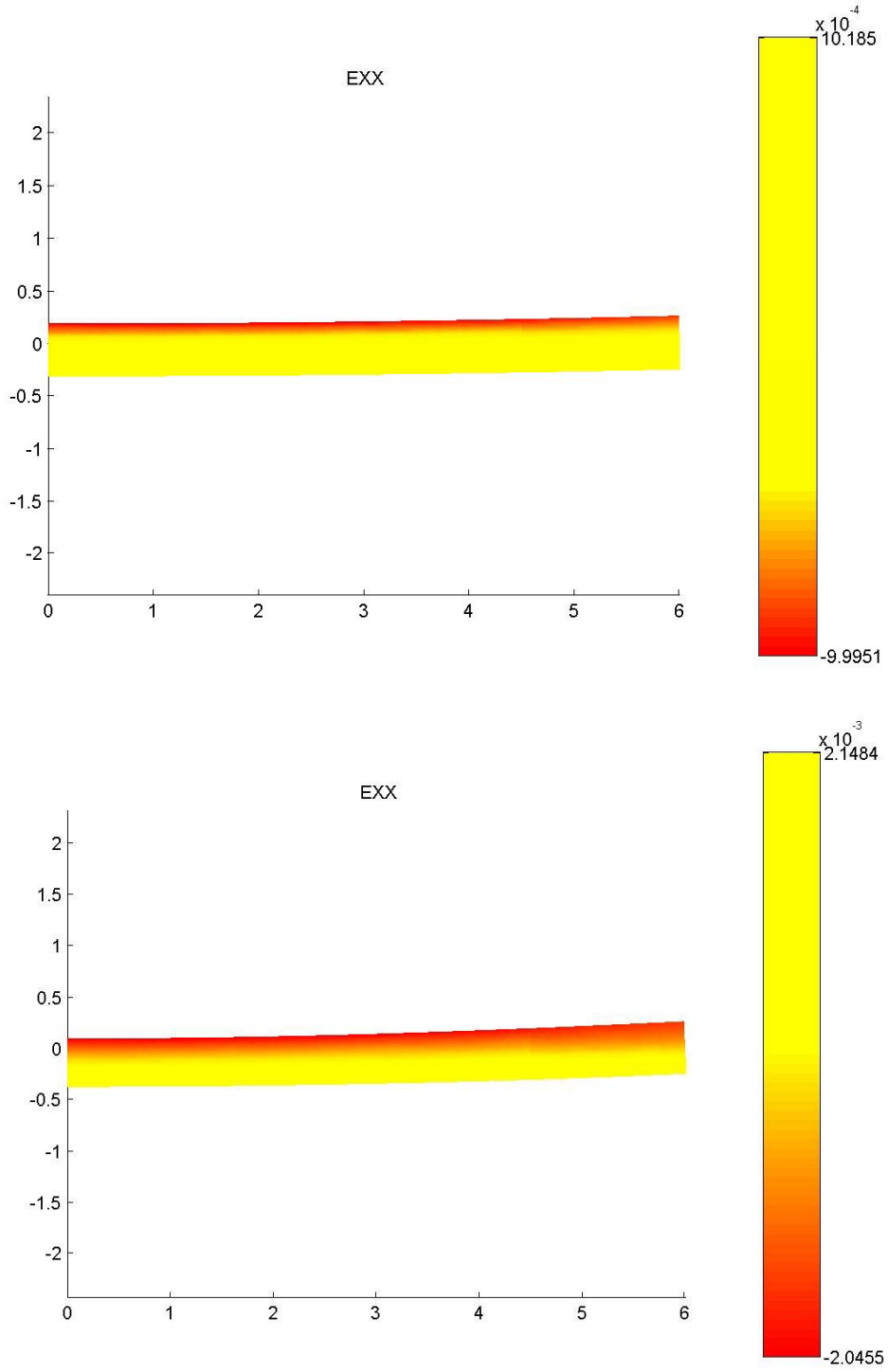


Figura 4.11 – Vista do plano XY da deformação de membrana ε_{XX} passos 2 e 5.

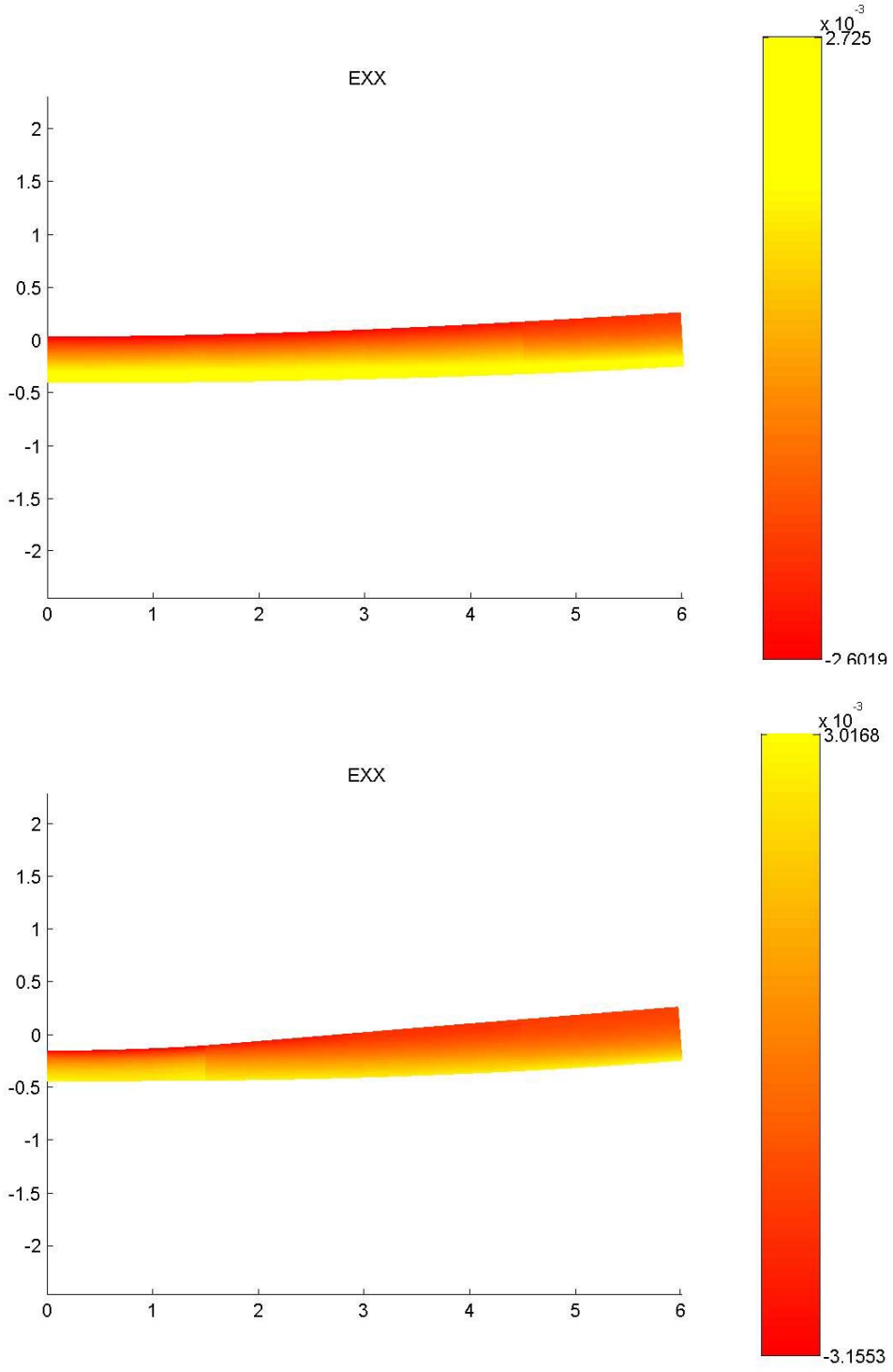


Figura 4.12 – Vista do plano XY da deformação de membrana ε_{XX} passos 8 e 12.

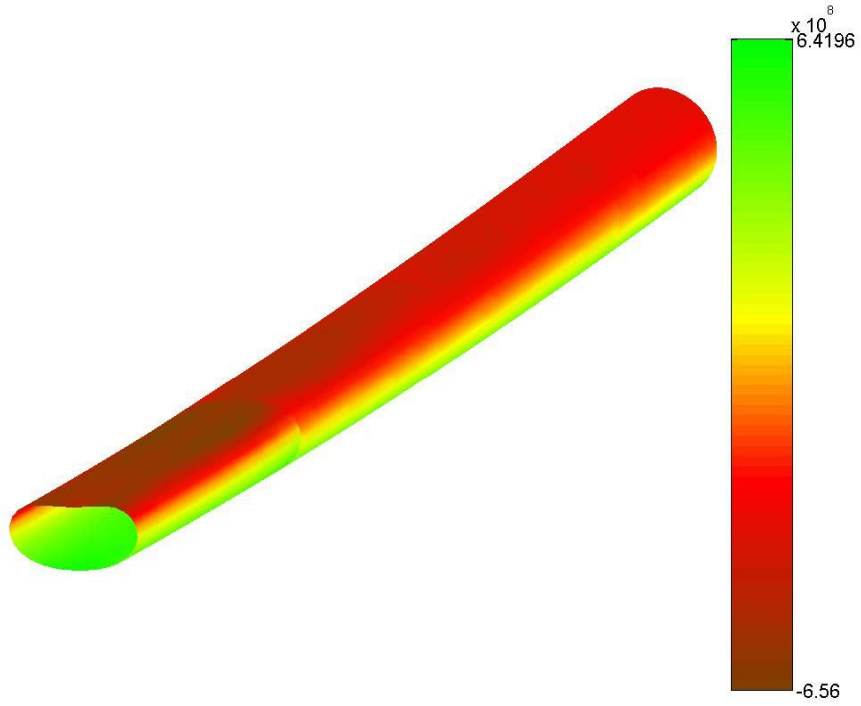


Figura 4.13 – Tensões de membrana σ_{XX} (Pa).

4.3 – Desempenho computacional

A eficiência computacional da formulação que define o Tubo3D se configura em um aspecto determinante para a escolha de sua utilização em análises mais complexas. Apesar de todos os cuidados na construção do código o tempo de processamento se apresenta bem maior do que o esperado.

A grande presença de funções trigonométricas na formulação pode ser atribuída como uma das razões dessa demanda, aliada à linguagem da implementação. O Matlab se configura em uma plataforma com camadas de abstração em relação à linguagem C com a qual este *software* matemático é construído. O modelo de integração também parece contribuir para essa perca de perfrmance.

As análises foram realizadas com um processador AMD Athlon 64 3000+ e os tempos de processamento podem ser visualizados na Tabela 4.2 em exemplos com diferentes números de elementos (x-elem) e níveis de discretizações trigonométricas (discr-x) e passos mapeados nna trajetória de equilírio (xx-p).

Tabela 4.2. Tempo de processamento em segundos horas e dias para os modelos de flexão analisados

Exemplo	Tempo (s)	Tempo (h)	Tempo (d)	Glibs
1-elem / discr-0 15p	9.838,8	2,7	0,1	24
1-elem / discr-2 15p	39.903,0	11,1	0,5	42
1-elem / discr-4 15p	74.172,0	20,6	0,9	60
2-elem / discr-0 15p	24.027,0	6,7	0,3	44
2-elem / discr-2 15p	126.530,0	35,1	1,5	82
2-elem / discr-4 15p	273.890,0	76,1	3,2	120
2-elem / discr-6 e 4 15p	297.970,0	82,8	3,4	144
3-elem / discr-0 15p	39.107,0	10,9	0,5	64
3-elem / discr-4 10p	393.860,0	109,4	4,6	180
3-elem / discr-6 12p	987.950,0	274,4	11,4	238
3-elem / discr-8,7 e 6 12p	986.340,0	274,0	11,4	271
4-elem / discr-0 15p	57.082,0	15,9	0,7	84
4-elem / discr-7 13p	2.113.550,0	587,1	24,5	357

Avaliando o tempo de processamento gasto por cada passo do processo incremental iterativo tem-se o gráfico apresentado na Figura 4.14.

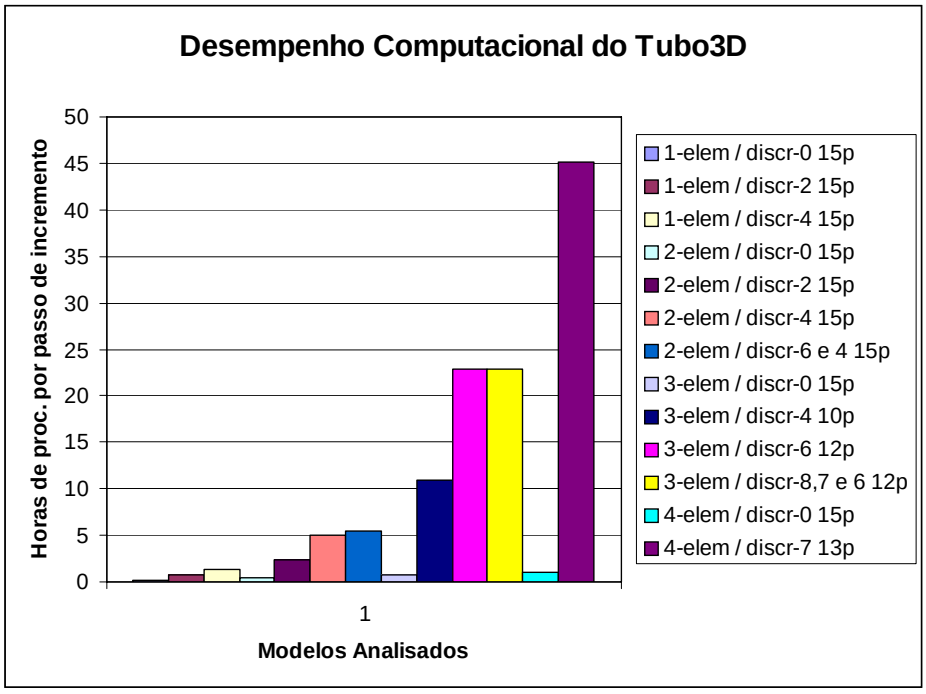


Figura 4.14 – Tempo de processamento dos modelos analisados com o Tubo3D.

É importante ressaltar que essa estimativa não leva em consideração o número de iterações por passo de incremento e por esse motivo há certa distorção em relação à avaliação do tempo de processamento medido ao longo da trajetória de equilíbrio. Nas análises com modelos menos discretizados o número de iterações é bem menor, reduzindo por conseqüência o tempo gasto em cada passo.

Como esperado, o gráfico mostra que o incremento do custo computacional está diretamente ligado ao acréscimo do grau de discretizações trigonométricas e consequentemente ao do aumento número de graus de liberdade.

Capítulo 5

Conclusões

5.1. Conclusões

Este trabalho apresenta uma nova interpolação para um elemento finito de tubo. A formulação é desenvolvida para um elemento de dois e três nós e a partir dela é feita uma análise não linear do comportamento de um duto submetido à flexão em comparação com as soluções analíticas propostas por Brazier e o modelo de Karamanos, com o intuito de validar o modelo e a implementação numérica. Constata-se que a simplicidade na discretização e na interpretação dos graus de liberdade, além da especificidade do elemento são atrativos para o uso do Tubo3D. Em respeito à formulação apresentada conclui-se que esta é capaz de representar corretamente os modos de deformação constante e os movimentos de corpo rígido compatíveis com o regime de grandes deslocamentos. A aplicação numérica desenvolvida sugere a eficiente integração entre o sistema de classes da plataforma orientada a objetos e a estrutura em elementos finitos proposta.

A proximidade dos resultados obtidos com os valores propostos por Brazier e com a análise 2D de Karamanos, qualificam essa ferramenta para estudos mais detalhados através da comparação com outros programas de elementos finitos tridimensionais e resultados experimentais. Em relação ao modelo bidimensional é constatada uma melhor capacidade do Tubo3D em representar os modos de deformação esperados para as solicitações impostas, tendo em vista que o estudo da ovalização da seção transversal, ao contrário do modelo em duas dimensões, apresenta assimetria em relação ao eixo z.

A necessidade de utilizar uma integração no sentido axial mais apurada é constatada em análises onde o espécime é submetido a grandes curvaturas. Nesse caso a

utilização de polinômios quadráticos, que permitem a avaliação em mais pontos de integração, se configura bem mais adequada.

Apesar de algumas condições de carregamento e deformação terem motivado o desenvolvimento do elemento com três nós a utilização do Tubo3D com apenas dois nós não é descartada. Essa aplicação se reserva, a princípio, a estudos onde deformações no sentido axial não sofrem grandes variações ao longo do comprimento do tubo, sugerindo um comportamento mais uniforme nessa direção.

O formato do elemento e a descrição de seus graus de liberdade agilizam o processo de modelagem dos exemplos estudados, tornando essa etapa relativamente simples. A utilização de poucos elementos facilita consideravelmente a geração da malha, que pode ser construída sem a necessidade de utilização de pré-processadores. A pequena quantidade de graus de liberdade também simplifica alguns tipos de análise ao passo que sugere a adequação do elemento em estudos onde deformações localizadas não se caracterizam como efeito dominante no comportamento da estrutura.

A adoção de outras hipóteses constitutivas, onde poderiam ser considerados efeitos como deformação plástica, pode ser utilizada. No entanto um estudo dessa natureza precisa avaliar a capacidade do elemento em representar deformações pontuais, fenômeno tipicamente associado à plastificação.

Em uma análise da eficiência do modelo adotado, com base no tempo utilizado para os exemplos até agora estudados, é constatada uma grave deficiência computacional. Essa limitação dificulta um programa de análises mais extenso, onde se busca avaliar mais precisamente a sensibilidade do modelo a uma variação sistemática de parâmetros como espessura, comprimento, presença de imperfeições e o material utilizado. Tal dificuldade sinaliza para a necessidade de se buscar ferramentas que proporcionem a diminuição do período de processamento.

5.2. Sugestões para Trabalhos Futuros

Após a validação do modelo apresentado, algumas modificações na estrutura computacional se fazem necessárias para permitir uma maior quantidade de análises.

A inclusão de uma classe de carregamentos distribuídos se apresenta como uma das primeiras ações que possibilitarão o estudo de tubos submetidos a pressões hidrostáticas e a cargas provenientes de movimentos geotécnicos.

A integração numérica ao longo da circunferência média da seção transversal poderia se tornar mais eficiente à medida que seja adotada uma estratégia onde a regra de Simpson, que utiliza polinômios quadráticos para interpolar grupos de 3 pontos, seria substituída pela quadratura Gaussiana. Semelhantemente ao que ocorre na estratégia atual, o domínio seria dividido em intervalos, onde dentro de cada intervalo seria aplicada a regra de Gauss.

Em relação à eficiência computacional, a primeira consideração a ser feita é referente à linguagem de programação adotada. O Matlab é um software matemático com diversos recursos e interfaces, que representa uma camada de abstração sobre a linguagem de programação primária usado em sua construção, no caso o C. A implementação computacional poderá utilizar uma linguagem mais eficiente diretamente na construção do código, tornando-o mais ágil.

Ainda considerando um grande tempo de processamento requerido para o sistema construído em outra linguagem, uma outra solução possível é a utilização de recursos de computação paralela. Dessa forma o esforço computacional pode ser dividido entre vários processadores.

A paralelização proposta poderá ser executada, a princípio, de duas maneiras: no modelo simplificado o código será paralelizado com a criação de tarefas durante a montagem da matriz de rigidez global e do vetor de forças internas para receberem os métodos encarregados destas ações. Dessa forma cada nó de processamento seria responsável pelo cálculo de um elemento (Figura 5.1) e levando em consideração o fato do maior custo computacional da análise estar relacionado a essas ações, espera-se uma redução do tempo de processamento da ordem de Ts/n, onde n é o número de nós de processamento e Ts é o tempo computacional da análise seqüencial. Essa opção pode ser adotada para uma rede com um número reduzido de nós de processamento e o número de n fica limitado ao número de elementos da malha do modelo analisado.

Em uma segunda opção, a paralelização seria efetuada no processo de integração numérica, criando um determinado número de tarefas onde seriam realizadas integrações numéricas em grupos de pontos (Figura 5.2). Neste caso torna-se possível a

utilização de um número maior de nós de processamento, usufruindo a estrutura de uma arquitetura Cluster, muito difundida em diversos centros de pesquisa, dentre os quais pode se incluir a Universidade Federal de Alagoas.

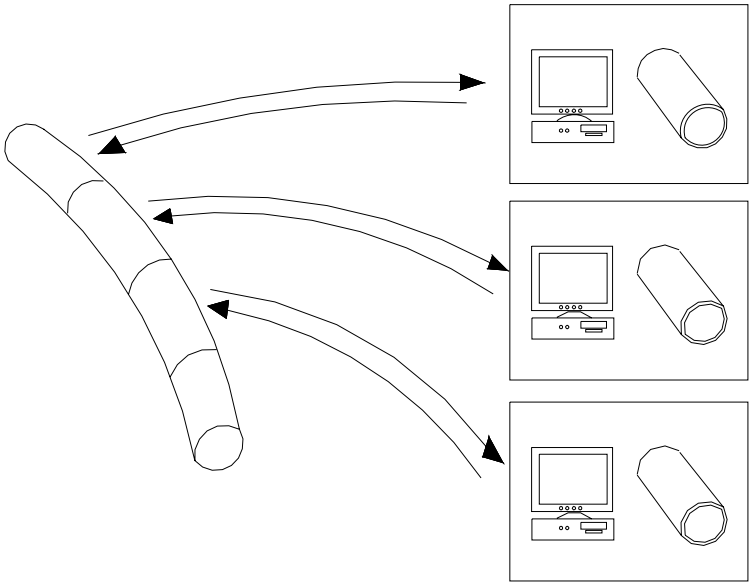


Figura 5.1 – Paralelização por elemento.

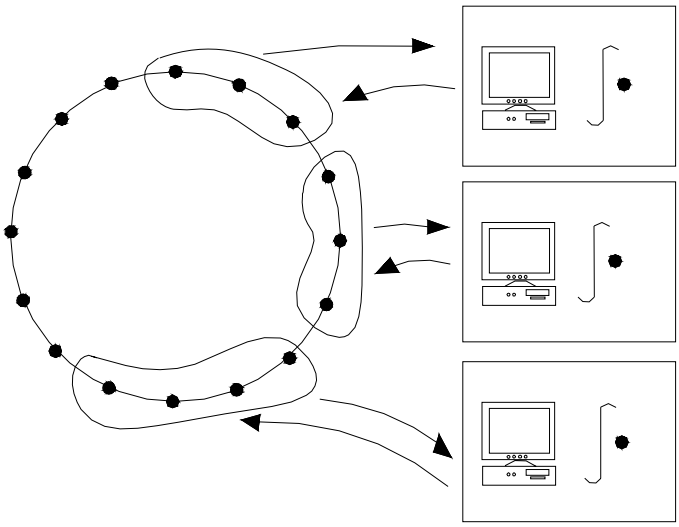


Figura 5.2 – Paralelização nos pontos da integração numérica.

Neste esquema cada processador seria responsável pela integração numérica ao redor da seção transversal em um ou mais pontos. O tempo seqüencial (Ts) necessário para realizar a análise em único processador pode ser dividido por uma quantidade de tarefas maior que a número de elementos usados para discretizar o modelo.

Uma metodologia para a determinação de pontos críticos e mapeamento de trajetórias secundárias de equilíbrio também deveria ser mais bem explorada.

Referências Bibliográficas

AMORIM, J.A. & LAGES, E.N. (2004). Organização de classes de algoritmos de controle para o traçado de trajetórias de equilíbrio não lineares segundo uma abordagem orientada a objetos. In XXV Iberian Latin American Congress on Computacional Methods in Engineering (XXV CILAMCE).

BAZANT, Z.P. & CEDOLIN, L. (1991). Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture, and DamageTheories. Oxford: Oxford University Press.

BRAZIER, L.G., (1927). On the flexure of thin cylindrical shells and other "thin sections". Proceedings of Royal Society, Series A 116, pp. 104-114.

COOK, R.D.; MALKUS, D.S., & PLESHA, M.E. (1989). Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Third Edition, Jonh Wiley & Sons.

GONÇALVES, P.B. (1985). Equações gerais de cascas esbeltas para análise não-linear da instabilidade elástica. Seminário de Doutorado. COPPE/UFRJ.

JAUNKY, N. & KNIGHT JR., N.F. (1999). An assessment of shell theories for buckling of circular cylindrical laminated composite panels loaded in axial compression. International Journal of Solids and Structures, 36, 3799-3820.

JIANG, Y. & ARABYAN, A. (1996). A new pipe element for modeling three dimensional large deformation problems. Finite Elements in Analysis and Design, 22, 59-68.

KARAMANOS, S.A. (2002). Bending instabilities of elastic tubes. International Journal of Solids and Structures, 39, 2059-2085.

LIBAI, A. & SIMMONDS J.G. (1998). The Nonlinear Theory of Elastic Shells, Second Edition, Cambridge University Press.

SIMITSES, G.J.; SHEINMAN, I. & SHAW, D. (1984). The Accuracy of Donnell's Equations for Axially-Loaded, Imperfect Orthotropic Cylinders. Computers & Structures, 20 (6), 939-945.

TATING, B.F. & GÜRDAL, Z. (1996). The Brazier Effect for Finite Length Composite Cylinders under bending. International Journal of Solids and Structures, 34, 1419-1440.

VITÓRIA, P.R. (2001). Flambagem Local de Dutos Sujeitos a Carregamentos Combinados. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro.

YANG, Y.B. & SHIEH, M.S. (1990). Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points AIAA Journal, Vol. 28, No. 12, 2110-2116.

APÊNDICES

Apêndice A

Derivadas da Matriz de Rotação

$\mathbf{A}(\mathbf{e}(\boldsymbol{\varphi}(\mathrm{u})))$

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial u} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial e_k}\frac{\partial e_k}{\partial \varphi_l}\frac{\partial \varphi_l}{\partial u} \tag{A.1}$$

$\mathbf{A}(\mathbf{e}(\boldsymbol{\varphi}(\mathrm{u},\mathrm{v})))$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial e_k}\right)\frac{\partial e_k}{\partial \varphi_l}\frac{\partial \varphi_l}{\partial u} + \frac{\partial A_{ij}}{\partial e_k}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial e_k}{\partial \varphi_l}\right)\frac{\partial \varphi_l}{\partial u} + \\
&\frac{\partial A_{ij}}{\partial e_k}\frac{\partial e_k}{\partial \varphi_l}\frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial u \partial v} = \\
&\frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial e_k \partial e_m}\frac{\partial e_m}{\partial \varphi_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial v}\frac{\partial e_k}{\partial \varphi_l}\frac{\partial \varphi_l}{\partial u} + \\
&\frac{\partial A_{ij}}{\partial e_k}\frac{\partial^2 e_k}{\partial \varphi_l \partial \varphi_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial v}\frac{\partial \varphi_l}{\partial u} + \frac{\partial A_{ij}}{\partial e_k}\frac{\partial e_k}{\partial \varphi_l}\frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial u \partial v}
\end{aligned} \tag{A.2}$$

$\mathbf{A}(\mathbf{e}(\boldsymbol{\varphi}(u,v,w)))$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 A_{ij}}{\partial u \partial v \partial w} &= \frac{\partial^3 A_{ij}}{\partial e_k \partial e_m \partial e_p}\frac{\partial e_p}{\partial \varphi_q}\frac{\partial \varphi_q}{\partial w}\frac{\partial e_m}{\partial \varphi_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial v}\frac{\partial e_k}{\partial \varphi_l}\frac{\partial \varphi_l}{\partial u} + \\
&\frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial e_k \partial e_m}\frac{\partial^2 e_m}{\partial \varphi_n \partial \varphi_q}\frac{\partial \varphi_q}{\partial w}\frac{\partial \varphi_n}{\partial v}\frac{\partial e_k}{\partial \varphi_l}\frac{\partial \varphi_l}{\partial u} + \\
&\frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial e_k \partial e_m}\frac{\partial e_m}{\partial \varphi_n}\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial v \partial w}\frac{\partial e_k}{\partial \varphi_l}\frac{\partial \varphi_l}{\partial u} +
\end{aligned} \tag{A.3a}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial e_k \partial e_m}\frac{\partial e_m}{\partial \varphi_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial v}\frac{\partial^2 e_k}{\partial \varphi_l \partial \varphi_q}\frac{\partial \varphi_q}{\partial w}\frac{\partial \varphi_l}{\partial u} + \\
&\frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial e_k \partial e_m}\frac{\partial e_m}{\partial \varphi_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial v}\frac{\partial e_k}{\partial \varphi_l}\frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial u \partial w} + \\
&\frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial e_k \partial e_m}\frac{\partial e_m}{\partial \varphi_q}\frac{\partial \varphi_q}{\partial w}\frac{\partial^2 e_k}{\partial \varphi_l \partial \varphi_n}\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial v}\frac{\partial \varphi_l}{\partial u} + \\
&\frac{\partial A_{ij}}{\partial e_k}\frac{\partial^3 e_k}{\partial \varphi_l \partial \varphi_n \partial \varphi_q}\frac{\partial \varphi_q}{\partial w}\frac{\partial \varphi_n}{\partial v}\frac{\partial \varphi_l}{\partial u} + \\
&\frac{\partial A_{ij}}{\partial e_k}\frac{\partial^2 e_k}{\partial \varphi_l \partial \varphi_n}\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial v \partial w}\frac{\partial \varphi_l}{\partial u} + \\
&\frac{\partial A_{ij}}{\partial e_k}\frac{\partial^2 e_k}{\partial \varphi_l \partial \varphi_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial v}\frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial u \partial w} + \\
&\frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial e_k \partial e_m}\frac{\partial e_m}{\partial \varphi_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial w}\frac{\partial e_k}{\partial \varphi_l}\frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial u \partial v} + \\
&\frac{\partial A_{ij}}{\partial e_k}\frac{\partial^2 e_k}{\partial \varphi_l \partial \varphi_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial w}\frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial u \partial v} + \\
&\frac{\partial A_{ij}}{\partial e_k}\frac{\partial e_k}{\partial \varphi_l}\frac{\partial^3 \varphi_l}{\partial u \partial v \partial w}
\end{aligned}
\tag{A.3b}
$$

Apêndice B

Derivadas da Matriz de Rotação em Relação aos Parâmetros de Euler

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial e_0} = 2\begin{bmatrix} 2e_0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 2e_0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 2e_0 \end{bmatrix} \tag{B.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial e_1} = 2\begin{bmatrix} 2e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & 0 & -e_0 \\ e_3 & e_0 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial e_2} = 2\begin{bmatrix} 0 & e_1 & e_0 \\ e_1 & 2e_2 & e_3 \\ -e_0 & e_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial e_3} = 2\begin{bmatrix} 0 & -e_0 & e_1 \\ e_0 & 0 & e_2 \\ e_1 & e_2 & 2e_3 \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

Apêndice C

Derivadas dos Parâmetros de Euler em relação ao vetor de rotação.

$$e_0 = \cos\left(\frac{\|\boldsymbol{\varphi}\|}{2} \right)$$

$$\frac{\partial e_0}{\partial \phi_i} = -\frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\|\boldsymbol{\varphi}\|}{2} \right)}{\|\boldsymbol{\varphi}\|} \varphi_{\mathrm{i}} = -\frac{1}{2} \mathrm{e}_{\mathrm{i}}$$

onde

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathrm{e}_i = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\|\boldsymbol{\varphi}\|}{2} \right)}{\|\boldsymbol{\varphi}\|} \phi_i \tag{C.1}$$

$$\frac{\partial \mathrm{e}_{\mathrm{i}}}{\partial \varphi_{\mathrm{j}}} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\|\boldsymbol{\varphi}\|}{2} \right)}{\|\boldsymbol{\varphi}\|} \delta_{\mathrm{ij}} + \left(\frac{e_0}{2} \varphi_i - e_i \right) \frac{\varphi_j}{\|\boldsymbol{\varphi}\|^2}$$

ou

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\|\boldsymbol{\varphi}\|}{2} \right)}{\|\boldsymbol{\varphi}\|} \mathbf{I} + \left(\frac{e_0}{2} \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{e} \right) \frac{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{\varphi}\|^2}$$

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo