

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
DO RIO DE JANEIRO



**Danny Hernán Zambrano Carrera**

**Determinação da Trajetória de Veículos Terrestres a Alta  
Velocidade em Pistas Pré-Definidas Através de Técnicas  
de Otimização**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Mauro Speranza Neto

Rio de Janeiro, Setembro de 2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



**Danny Hernán Zambrano Carrera**

**Determinação da Trajetória de Veículos Terrestres a Alta  
Velocidade em Pistas Pré-Definidas Através de Técnicas  
de Otimização**

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Mecânica da PUC-Rio.  
Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Mauro Speranza Neto**

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC-Rio

**Prof. Francisco José da Cunha Soeiro**

Departamento de Engenharia Mecânica - UERJ

**Prof. Fernando Ribeiro da Silva**

Departamento de Engenharia Mecânica - IME

**Prof. Carlos Alberto Almeida**

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC-Rio

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro

Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 20 de Setembro de 2006

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Danny Hernán Zambrano Carrera**

Graduou-se em Engenharia Mecânica na Universidad Nacional de Ingeniería - UNI (Lima, Perú) em 2001.

#### Ficha Catalográfica

Carrera, Danny Hernán Zambrano

Determinação da trajetória de veículos terrestres a alta velocidade em pistas pré-definidas através de Técnicas de otimização / Danny Hernán Zambrano Carrera; orientador: Mauro Speranza Neto. – Rio de Janeiro: PUC, Departamento de Engenharia Mecânica, 2006.

179 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia mecânica – Teses. 2. Dinâmica de veículos. 3. Modelos de veículos terrestres. 4. Otimização. 5. Trajetória ótima. 6. Circulo de aderência. 7. Veículos de competição. 8. Simulação virtual. I. Speranza Neto, Mauro. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD: 621

Dedicado a minha mãe e meu pai.

## **Agradecimentos**

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que tornaram possível a elaboração deste trabalho, em especial:

Aos meus pais, meus irmãos e toda a minha família por terem me incentivado a realizar este curso de Mestrado.

Ao professor Mauro Speranza Neto pela orientação e constante incentivo.

Aos Professores membros da banca, pelos comentários e sugestões feitas.

Aos professores do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio, pelos momentos compartilhados e conselhos a nível acadêmico.

Aos meus amigos e colegas do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio, pelos momentos gratos.

À CAPES e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

## Resumo

Zambrano Carrera, D. Hernán; Mauro. **Determinação da Trajetória de Veículos Terrestres a Alta Velocidade em Pistas Pré-Definidas Através de Técnicas de Otimização.** Rio de Janeiro, 2006. 179p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Em veículos de competição com velocidades elevadas, o principal objetivo é chegar em primeiro lugar, o que significa percorrer um determinado número de voltas em uma trajetória fechada fazendo algumas manobras para cumprir o circuito no menor tempo possível, dentro das limitações impostas pelas características dinâmicas e de condução destes veículos. A otimização é uma metodologia que pode ser usada para reproduzir trajetórias e técnicas de condução usadas pelos pilotos de corrida, e também para investigar os efeitos de vários parâmetros nas condições limites da estabilidade veicular. Neste trabalho, inicialmente é apresentado o desenvolvimento de um modelo dinâmico do veículo considerando as características suficientes para análise da trajetória, influenciada por parâmetros geométricos e físicos pertinentes. Em seguida é definido o problema de obtenção da trajetória empregando procedimentos de otimização, de modo a determinar como um veículo irá percorrer um traçado, considerando como função objetivo o tempo de percurso, que deverá ser mínimo, e tendo como restrições as condições dinâmicas do veículo e geométricas da pista, implementando rotinas que são usadas em conjunto com os algoritmos existentes na Optimization Toolbox do Matlab. Finalmente apresenta-se o comportamento do veículo, representado pelo modelo desenvolvido anteriormente em uma malha de controle de trajetória, de modo a comparar o comportamento assim obtido com aquele previsto pelo procedimento de otimização.

## Palavras-chave

Dinâmica Veicular. Modelos de Veículos Terrestres. Otimização. Trajetória Ótima. Circulo de Aderência. Veículos de Competição. Simulação Virtual.

## Abstract

Zambrano Carrera, D. Hernán; Mauro. **Determination of the Trajectory of High Speed Ground Vehicles in Predefined Tracks Through Optimization Techniques.** Rio de Janeiro, 2006. 179p. Thesis of Master - Department of Mechanics Engineering, Pontifical University Catholic of Rio De Janeiro.

High speed competition vehicles are required to cover a determined number of laps in a closed trajectory circuit in a time that is the least possible, in the limits of the governing dynamic and driving characteristics of these vehicles. Optimization is a methodology that can be used in order to simulate trajectories and driving techniques of used by the competition pilots and to investigate the effects of several parameters in limit conditions of car stability. In this work it is first presented the development of the vehicle model considering the sufficient characteristics for trajectory analysis, influenced by pertinent geometric and physical parameters. In continuation, the problem of the optimal trajectory is defined using optimization procedures, in order to determine how a vehicle will follow the path, considering as an objective function the time to follow it, that must be the minimum, and having as constraints the vehicle dynamic conditions and the path geometry, implementing routines that are used with the Matlab's Optimization Toolbox. Finally the behavior of the vehicle is presented, represented by the model developed previously in a trajectory control loop, in such a way to compare the resulting behavior with the one predicted by the optimization procedure.

## Key Words

Vehicular Dynamics. Models of Terrestrial Vehicles. Optimization. Optimal Path. Circulate of Tack. Vehicles of Competition. Virtual simulation.

## Sumário

1	Introdução	20
1.1	Motivação para o estudo	20
1.2	Revisão sobre o estado da arte	21
1.2.1	Dinâmica veicular	21
1.2.2	Modelos do veículo	23
1.2.3	Métodos de otimização	25
1.2.3.1	Problema do tempo mínimo	27
1.2.4	Estratégias de controle	27
1.3	Objetivo da dissertação	28
1.4	Descrição da dissertação	29
2	Modelos do Veículo	30
2.1	Equações de movimento	31
2.2	Modelo dos componentes do veículo	39
2.2.1	Geometria de Ackermann	41
2.2.2	Ângulos de deriva	47
2.2.3	Forças laterais nos pneus	50
2.2.4	Geometria do veículo	52
2.2.5	Forças normais nos pneus	56
2.2.6	Forças aerodinâmicas	60
2.2.7	Transformação de coordenadas	62
2.3	Considerações sobre o modelo	64
2.3.1	Equações de movimento	65
2.3.2	Geometria de Ackermann	66
2.3.3	Ângulos de deriva	66
2.3.4	Forças no plano horizontal xy	67
2.3.5	Forças laterais nos pneus	68
2.3.6	Forças normais nos pneus e força aerodinâmica	68
2.3.7	Círculo de aderência e diagrama GG	69
2.4	Modelo completo e implementação em <i>Simulink/Matlab</i>	73
2.5	Simulação e avaliação do modelo completo	82

2.6 Proposta de modelagem da força de tração	91
2.6.1 Forças de aceleração e frenagem	92
3 Determinação da Trajetória Ótima	97
3.1 Definição da otimização aplicada aos veículos	97
3.2 Modelo massa pontual	99
3.3 Algoritmos de otimização	102
3.4 Definição das variáveis e restrições	104
3.4.1 Variáveis de entrada	104
3.4.2 Variáveis de saída	109
3.4.3 Restrições de otimização	109
3.4.4 Função objetivo	111
3.5 Apresentação da função objetivo	113
3.5.1 Movimento longitudinal acelerado	113
3.5.2 Movimento longitudinal desacelerado	115
3.6 Movimento em curvas	118
3.6.1 Movimento na entrada na curva	118
3.6.2 Movimento na saída da curva	121
3.7 Procedimento de otimização	122
4 Simulação da Trajetória Ótima	126
4.1 Casos de simulação	126
4.2 Caso 1: Aceleração em linha reta	127
4.3 Caso 2: Aceleração e velocidade constante em linha reta	130
4.4 Caso 3: Desaceleração e entrada de uma curva	132
4.5 Caso 4: Aceleração e saída de uma curva	137
4.6 Caso 5: Velocidade constante em curvas	144
4.7 Caso 6: Movimento geral	154
4.8 Caso 7: Movimento em duas curvas consecutivas	159
5 Conclusões	167
5.1 Recomendações	169
6 Referências Bibliográficas	171
7 Apêndice	173
7.1 Apêndice A: Tratamento no programa <i>Matlab/Simulink</i>	174
7.2 Apêndice B: Trajetória ótima no <i>Toolbox de Matlab</i>	174

## Lista de Figuras

Figura 1.1 Diagrama de blocos representativo de um veículo terrestre ...	22
Figura 2.1 Sistemas de referência e variáveis no plano .....	30
Figura 2.2 Determinando as acelerações em x e y .....	32
Figura 2.3 Diagrama de corpo livre em relação ao eixo z .....	34
Figura 2.4 Diagrama de aceleração de rolagem .....	37
Figura 2.5 Esquema do modelo do veículo .....	40
Figura 2.6 Ângulo de esterçamento, geometria de Ackermann.....	41
Figura 2.7 Função entrada da volante, ângulos estacionários .....	44
Figura 2.8 Ângulo de esterçamento estacionário, roda direita .....	44
Figura 2.9 Ângulo de esterçamento estacionário, roda esquerda .....	44
Figura 2.10 Função de entrada para o ângulo da volante.....	45
Figura 2.11 Ângulo de esterçamento da roda dianteira direita.....	45
Figura 2.12 Ângulo de esterçamento da roda dianteira esquerda.....	46
Figura 2.13 Ângulos de esterçamento em função ao ângulo da volante..	46
Figura 2.14 Comparação entre os ângulos de esterçamento das rodas ..	46
Figura 2.15 Identificação dos ângulos de deriva .....	47
Figura 2.16 Comportamento do ângulo de deriva .....	47
Figura 2.17 Função entrada da velocidade lateral, ângulos de deriva .....	49
Figura 2.18 Função entrada da velocidade do yaw, ângulos de deriva....	49
Figura 2.19 Ângulo de deriva de cada pneumático, entrada conhecida...	49
Figura 2.20 Curva característica dos ângulos de deriva .....	51
Figura 2.21 Força lateral em função ao ângulo de deriva .....	51
Figura 2.22 Orientação dos componentes das forças nos pneus.....	52
Figura 2.23 Força no eixo x, teste de modelo das forças no plano xy .....	55
Figura 2.24 Força no eixo y, teste de modelo das forças no plano xy .....	56
Figura 2.25 Momento no eixo z, teste de modelo das forças, plano xy....	56
Figura 2.26 Função da aceleração lateral variável.....	58
Figura 2.27 Forças normais em cada pneumático, aceleração lateral .....	59
Figura 2.28 Função da aceleração longitudinal variável .....	59
Figura 2.29 Forças normais em cada pneumático, aceleração long. ....	60
Figura 2.30 Valor médio do coeficiente de sustentação negativa .....	62

Figura 2.31	Sistemas de coordenadas local e global .....	63
Figura 2.32	Deslocamento em $x$ , teste da transf. de coordenadas .....	63
Figura 2.33	Deslocamento em $y$ , teste da transf. de coordenadas .....	64
Figura 2.34	Deslocamento espacial, teste da transf. de coordenadas .....	64
Figura 2.35	Círculo de aderência de um veículo de competição, F1.....	70
Figura 2.36	Diagrama GG de um veículo percorrendo uma trajetória.....	72
Figura 2.37	Relação entrada-saida, dinâmica do veículo.....	73
Figura 2.38	Dinâmica do veículo representada em <i>Simulink/Matlab</i> .....	74
Figura 2.39	Relação entrada-saida, direção, geometria e Ackermann.....	74
Figura 2.40	Direção e geometria de Ackermann <i>Simulink/Matlab</i> .....	75
Figura 2.41	Relação entrada-saida para os ângulos de deriva .....	75
Figura 2.42	Ângulos de deriva representados em <i>Simulink/Matlab</i> .....	76
Figura 2.43	Relação entrada-saida para as forças laterais .....	77
Figura 2.44	Forças laterais representadas em <i>Simulink/Matlab</i> .....	77
Figura 2.45	Relação entrada-saida, forças e momentos .....	78
Figura 2.46	Esforços aplicados ao veículo em <i>Simulink/Matlab</i> .....	78
Figura 2.47	Relação entrada-saida para as forças normais .....	79
Figura 2.48	Forças normais aplicadas aos pneus em <i>Simulink/Matlab</i> ....	79
Figura 2.49	Relação entrada-saida para a transf. de coordenadas.....	80
Figura 2.50	Transf. de coordenadas em <i>Simulink/ Matlab</i> .....	80
Figura 2.51	Diagrama de blocos feito no <i>Simulink/Matlab</i> . .....	81
Figura 2.52	Função entrada da volante e ângulos de esterçamento.....	83
Figura 2.53	Ângulos de deriva no tempo.....	84
Figura 2.54	Velocidade lateral no referencial local no tempo .....	85
Figura 2.55	Ângulo <i>yaw</i> e ângulos <i>roll</i> e <i>pitch</i> no tempo. ....	85
Figura 2.56	Deslocamento do veículo .....	86
Figura 2.57	Função entrada da volante e ângulos de esterçamento.....	87
Figura 2.58	Ângulos de deriva no tempo.....	87
Figura 2.59	Velocidade lateral no referencial local no tempo.....	87
Figura 2.60	Ângulo <i>yaw</i> e ângulos <i>roll</i> e <i>pitch</i> no tempo. ....	88
Figura 2.61	Deslocamento do veículo. ....	88
Figura 2.62	Função entrada da volante e ângulos de esterçamento.....	89
Figura 2.63	Ângulos de deriva no tempo.....	89
Figura 2.64	Velocidade lateral no referencial local no tempo.....	90

Figura 2.65 Ângulo <i>yaw</i> e ângulos <i>roll</i> e <i>pitch</i> no tempo. ....	90
Figura 2.66 Deslocamento do veículo. ....	91
Figura 2.67 Curva característica de velocidade, torque do motor. ....	93
Figura 2.68 Curva característica de velocidade, potência do motor.....	93
Figura 2.69 Curva característica de força de tração vs velocidade .....	95
Figura 2.70 Curva característica, força de tração vs velocidade (50%) ...	96
Figura 2.71 Força de frenagem do veículo.....	96
Figura 3.1 Duas trajetórias possíveis em uma curva.....	99
Figura 3.2 Variáveis do modelo massa pontual.....	100
Figura 3.3 Diagrama do algoritmo de otimização. ....	103
Figura 3.4 Exemplo dos dados obtidos da telemetria.....	105
Figura 3.5 Função para a aceleração longitudinal do veículo. ....	106
Figura 3.6 Função para aceleração e desaceleração long. do veículo ..	107
Figura 3.7 Função para aceleração lateral do veículo.....	108
Figura 3.8 Restrição da pista.....	111
Figura 3.9 Trechos de uma pista com diferentes acelerações. ....	113
Figura 3.10 Fluxograma do procedimento de otimização.....	125
Figura 4.1 Deslocamento espacial. Caso 1.....	128
Figura 4.2 Aceleração para o caso 1.....	128
Figura 4.3 Velocidade para o caso 1.....	128
Figura 4.4 Deslocamento espacial, caso 1 modificado. ....	129
Figura 4.5 Aceleração para o caso 1 modificado. ....	129
Figura 4.6 Velocidade para o caso 1 modificado.....	130
Figura 4.7 Deslocamento espacial, caso 2.....	131
Figura 4.8 Aceleração para o caso 2.....	131
Figura 4.9 Velocidade em função da distancia percorrida, caso 2. ....	132
Figura 4.10 Deslocamento espacial, caso 3.....	133
Figura 4.11 Aceleração para o caso 3.....	133
Figura 4.12 Aceleração lateral para o caso 3. ....	133
Figura 4.13 Velocidade em função da distancia percorrida, caso 3. ....	134
Figura 4.14 Diagrama G-G do veículo, caso 3. ....	134
Figura 4.15 Deslocamento espacial, caso 3 modificado. ....	135
Figura 4.16 Aceleração lateral para o caso 3 modificado.....	135
Figura 4.17 Desaceleração para o caso 3 modificado. ....	135

Figura 4.18 Diagrama G-G do veículo, caso 3 modificado.....	136
Figura 4.19 Velocidade em função da distancia, caso 3 modificado. ....	136
Figura 4.20 Raio de curvatura vs distancia, caso 3 modificado.....	137
Figura 4.21 Atitude do veículo ( <i>yaw</i> ) vs distancia, caso 3 modificado....	137
Figura 4.22 Deslocamento espacial, caso 4.....	138
Figura 4.23 Aceleração lateral para o caso 4.....	139
Figura 4.24 Aceleração para o caso 4.....	139
Figura 4.25 Diagrama G-G do veículo, caso 4. ....	140
Figura 4.26 Velocidade em função da distancia percorrida, caso 4. ....	140
Figura 4.27 Raio de curvatura instant. em função à distancia, caso 4 ...	141
Figura 4.28 Atitude do veículo ( <i>yaw</i> ) em função à distancia, caso 4.....	141
Figura 4.29 Deslocamento espacial, caso 4 modificado. ....	142
Figura 4.30 Aceleração lateral para o caso 4 modificado.....	142
Figura 4.31 Aceleração para o caso 4 modificado. ....	143
Figura 4.32 Diagrama G-G do veículo, caso 4 modificado.....	143
Figura 4.33 Velocidade em função da distancia, caso 4 modificado. ....	143
Figura 4.34 Raio de curvatura vs distancia, caso 4 modificado.....	144
Figura 4.35 Atitude do veículo ( <i>yaw</i> ) vs distancia, caso 4 modificado....	144
Figura 4.36 Deslocamento espacial, caso 5.....	145
Figura 4.37 Aceleração para o caso 5.....	146
Figura 4.38 Aceleração lateral para o caso 5.....	146
Figura 4.39 Diagrama G-G do veículo, caso 5. ....	146
Figura 4.40 Velocidade em função da distancia percorrida, caso 5. ....	147
Figura 4.41 Raio de curvatura instant. em função à distancia, caso 5... ..	147
Figura 4.42 Atitude do veículo ( <i>yaw</i> ) em função à distancia, caso 5.....	148
Figura 4.43 Trajetória percorrida pelo modelo dinâmico (azul). ....	149
Figura 4.44 Volante do veículo no tempo, modelo dinâmico. ....	150
Figura 4.45 Ângulos de esterçamento dianteiros, modelo dinâmico. ....	150
Figura 4.46 Ângulos de deriva no tempo, modelo dinâmico.....	150
Figura 4.47 Forças laterais no tempo, modelo dinâmico.....	151
Figura 4.48 Forças totais nos eixos <i>x</i> e <i>y</i> , modelo dinâmico.....	151
Figura 4.49 Momento no eixo <i>z</i> , modelo dinâmico. ....	152
Figura 4.50 Forças normais em cada pneumático, modelo dinâmico. ...	152
Figura 4.51 Aceleração do veículo, modelo dinâmico. ....	152

Figura 4.52	Aceleração angular do veículo, modelo dinâmico. ....	153
Figura 4.53	Velocidade do <i>yaw</i> , modelo dinâmico. ....	153
Figura 4.54	Velocidades angulares do <i>roll</i> e <i>pitch</i> , modelo dinâmico. ....	153
Figura 4.55	O ângulo <i>yaw</i> no tempo, modelo dinâmico. ....	154
Figura 4.56	Os ângulos <i>roll</i> e <i>pitch</i> no tempo, modelo dinâmico. ....	154
Figura 4.57	Deslocamento espacial, caso geral. ....	156
Figura 4.58	Aceleração lateral para o caso geral. ....	156
Figura 4.59	Aceleração longitudinal, caso geral. ....	157
Figura 4.60	Diagrama G-G do veículo, caso geral. ....	157
Figura 4.61	Velocidade em função da distancia, caso geral. ....	157
Figura 4.62	Raio de curvatura em função à distancia, caso geral. ....	158
Figura 4.63	Atitude do veículo ( <i>yaw</i> ) vs distancia, caso geral. ....	158
Figura 4.64	Comparação das trajetórias ótimas, caso geral. ....	159
Figura 4.65	Deslocamento espacial, caso final. ....	160
Figura 4.66	Aceleração lateral, caso final. ....	162
Figura 4.67	Aceleração longitudinal, caso geral. ....	162
Figura 4.68	Velocidade em função da distancia, caso geral. ....	162
Figura 4.69	Raio de curvatura em função à distancia, caso geral. ....	163
Figura 4.70	Atitude do veículo ( <i>yaw</i> ) vs distancia, caso final. ....	164
Figura 4.71	Diagrama G-G do veículo, caso final. ....	164

## Lista de Tabelas

Tabela 1 Parâmetros arbitrários construtivos de um veículo de passeio .....	43
Tabela 2 Ângulos de esterçamento e raio de curvatura, volante constante .....	43
Tabela 3 Parâmetros construtivos de um veículo de fórmula 1.....	83
Tabela 4 Relação de transmissão total de um veículo de fórmula 1.....	94
Tabela 5 Trocas de marcha de um veículo de fórmula 1.....	95
Tabela A.1. Comandos do programa Matlab, modelo dinâmico não linear.....	174

## Lista de Símbolos

### Símbolos Romanos

$t$	Tempo de percurso
$v$ $u$	Velocidade do veículo
$x$	Distancia percorrida pelo veículo
$m_{uf}$	Massa não suspensa dianteira
$m_{ur}$	Massa não suspensa traseira
$m_s$	Massa suspensa
$m_{tot}$	Massa total
$F_x$	Força longitudinal total
$F_y$	Força lateral total
$F_z$	Força vertical total
$F_{xi}$	Força em cada pneu no eixo “x” do sistema referencial
$F_{yi}$	Força em cada pneu no eixo “y” do sistema referencial
$a_x$	Aceleração longitudinal do veículo
$a_y$	Aceleração lateral do veículo
$h_{sp}$	Altura do centro de massa ao centro de giro do mov. <i>pitch</i>
$h_{sr}$	Altura do centro de massa ao centro de giro do mov. <i>roll</i>
$\ddot{x}$	Aceleração do veículo no eixo “x” do sistema referencial
$\ddot{y}$	Aceleração do veículo no eixo “y” do sistema referencial
$v_x$ $V_x$	Velocidade do veículo no eixo “x” do sistema referencial
$\dot{y}$ $V_y$	Velocidade do veículo no eixo “y” do sistema referencial
$\dot{x}$	Velocidade do veículo no eixo “x” do sistema referencial
$P$	Quantidade de movimento linear
$H$	Quantidade de movimento angular
$J$	Matriz inércia do veículo
$M_x$	Momento de <i>roll</i>

$M_y$	Momento de <i>pitch</i>
$M_z$	Momento de <i>yaw</i>
$a \quad l_d \quad b \quad l_t$	Distancia entre o CG e os eixos dianteiro e traseiro
$t_f \quad b_d$	A bitola do eixo dianteiro
$t_r \quad b_t$	A bitola do eixo traseiro
$I_{yaw}$	Momento de inércia do movimento <i>yaw</i>
$I_{roll}$	Momento de inércia de rolagem do veículo
$I_{pitch}$	Momento de inércia do movimento <i>pitch</i>
$B_f \quad B_r$	Coefficientes de amortecimento da suspensão dianteira e traseira
$K_f \quad K_r$	Coefficientes de rigidez da suspensão dianteira e traseira
$g$	A aceleração da gravidade
$R \quad \rho$	Raio de curvatura instantâneo
$k_d$	Relação de transmissão do sistema de direção
$f_d$	Relação de folga do sistema de direção
$l$	Distancia entre eixos das rodas
$l_d \quad l_t$	Distancias dos eixos das rodas dianteiras e traseiras ao CM
$L_{DD}$	Força lateral no pneu dianteiro direito
$F_{DE}$	Força lateral no pneu dianteiro esquerdo
$F_{TD}$	Força lateral no pneu traseiro direito
$F_{TE}$	Força lateral no traseiro esquerdo
$h_f$	Altura da massa suspensa dianteira
$h_r$	Altura da massa suspensa traseira
$h_{CG}$	Altura do centro de gravidade
$F_{Ni}$	Força normal do i-ésimo pneu
$C_{AD}$	Coefficiente de arrasto frontal
$A$	A projeção da área frontal do veículo
$F_{AD}$	Força aerodinâmica frontal
$F_{AC}$	Força aerodinâmica vertical
$C_{AC}$	Coefficiente de sustentação negativa

$A_L$	Projeção da área lateral superior do veículo
$u_x$	Velocidade (longitudinal) do veículo em função do tempo
$u_0$	Velocidade inicial do veículo
$dt$	Diferencial do tempo (variável de integração)
$U_x$	Velocidade na direção do eixo $x$ do referencial global
$V_x$	Velocidade na direção do eixo $y$ do referencial global
$X Y$	Posições no referencial global
$tx$	Distância que o veículo percorre no tempo $t$
$x_0$	Posição inicial do veículo
$x_f$	Posição final durante o processo de aceleração
$a_0$	Aceleração longitudinal inicial
$a_n$	Aceleração lateral (final)
$xt$	Posição no eixo $X$ do referencial global
$yt$	Posição no eixo $Y$ do referencial global
$y_{inf.}$	Limite inferior da pista
$y_{sup.}$	Limite superior da pista no eixo $Y$ do referencial global

## Símbolos Gregos

$\theta$	Medida angular do movimento <i>yaw</i> , ângulo <i>yaw</i> .
$\dot{\theta}$	Velocidade angular do ângulo <i>yaw</i>
$\ddot{\theta}$	Aceleração angular do ângulo <i>yaw</i>
$\varphi$	Medida angular do movimento <i>roll</i> , ângulo <i>roll</i> .
$\dot{\varphi}$	Velocidade angular do ângulo <i>roll</i>
$\ddot{\varphi}$	Aceleração angular do ângulo <i>roll</i>
$\rho$	Medida angular do movimento <i>pitch</i> , ângulo <i>pitch</i> .
$\dot{\rho}$	Velocidade angular do ângulo <i>pitch</i>
$\ddot{\rho}$	Aceleração angular do ângulo <i>pitch</i>
$\Delta i$	Variação da variável <i>i</i>
$\Omega$	Velocidade angular
$\beta_{roll}$	Amortecimento da rolagem
$\kappa_{roll}$	Rigidez da rolagem
$\beta_{pitch}$	Amortecimento associado ao movimento <i>pitch</i>
$\kappa_{pitch}$	Rigidez associada ao movimento <i>pitch</i>
$\delta$	Ângulo de esterçamento do volante
$\delta_D$	Ângulo de esterçamento da roda dianteira direita
$\delta_E$	Ângulo de esterçamento da roda dianteira esquerda
$\delta_r$	Ângulo de esterçamento dos pneus traseiros
$\delta_b$	Ângulo do pedal do freio
$\alpha_{DD}$	Ângulo de deriva do pneu dianteiro direito
$\alpha_{DE}$	Ângulo de deriva do pneu dianteiro esquerdo
$\alpha_{TD}$	Ângulo de deriva do pneu traseiro direito
$\alpha_{TE}$	Ângulo de deriva do traseiro esquerdo
$C_\alpha$ $C_f$ $C_r$	Rigidez lateral do pneumático
$\kappa_f$ $\kappa_r$	Parâmetros de rigidez de rolagem dianteira e traseira
$\rho_{ar}$	Massa específica do ar, densidade

# 1

## Introdução

Os veículos de competição desenvolvem a tecnologia automotiva de ponta. Trabalhando com velocidades e acelerações muito elevadas, para o estudo e compreensão do comportamento dinâmico deste tipo de sistema é necessária a união de diversas disciplinas, entre elas: dinâmica, controle e otimização. O presente trabalho pretende tratar com determinadas partes de todas essas matérias relacionadas à Dinâmica Veicular, abordando um problema multidisciplinar, empregando as ferramentas necessárias, visando estabelecer um procedimento para a avaliação do comportamento dinâmico de veículos de competição a alta velocidade em traçados pré-definidos.

### 1.1

#### Motivação para o estudo

“Apesar de gostar muito dos automóveis, e já ter dirigido muitos carros na minha vida, nunca entendi ou me preocupei profundamente com sua dinâmica. Acredito que só agora tenha os conceitos e as ferramentas necessárias para estudo desta “intrigante” matéria, e posso compreender exatamente o comportamento dos veículos durante seu movimento. Neste aspecto, o que mais chama a minha atenção é a dinâmica dos veículos a altas velocidades, como nos carros de competição, em especial os de Fórmula 1, que trabalham em condições extremas de estabilidade, onde os milésimos de segundos são unidades relevantes para atingir o objetivo.” – Danny Hernán Zambrano Carrera.

Os modelos matemáticos são desenvolvidos para prever o funcionamento dos sistemas reais em função de seus parâmetros característicos, informação obtida a partir da simulação – solução e análise dos modelos – em determinadas condições de operação. A primeira simulação de veículos de competição surgiu, pelo que se tem notícia, na Mercedes Benz, entre os períodos de 1937 e 1939. As simulações começaram a ser mais formalmente utilizadas na década de 50 [1]. Assim esta não é uma área inexplorada, mas um recurso que tem muitos anos de

pesquisa, na qual diversos especialistas têm aplicado toda sua experiência, a fim de se tratar de forma cada vez mais consistente a dinâmica destes sistemas. Em veículos de competição com velocidades elevadas, o principal objetivo é chegar em primeiro lugar, o que significa percorrer um determinado número de voltas em uma trajetória fechada realizando algumas manobras para cumprir o circuito no menor tempo possível. Esta situação pode ser vista como um típico problema de otimização, no qual se deve obter a trajetória para o tempo mínimo de percurso satisfazendo as restrições físicas do veículo e geométricas da pista.

Estudos no sentido de otimizar o desempenho dos veículos de corrida são realizados por empresas e instituições de pesquisa que participam das competições automobilísticas. As finalidades básicas destes estudos são, entre outras: segurança do motorista, a prevenção do desgaste do veículo, aumento do seu desempenho, e finalmente ganhar a competição.

## **1.2**

### **Revisão sobre o estado da arte**

“... E irá ser possível construir veículos que se movimentem sem serem puxados por animais, propelidos por uma força inimaginável ...” Esta profecia foi escrita pelo acadêmico e filósofo inglês *Roger Bacon* (1219 a 1292) cerca de 600 anos antes de Carl Benz receber a sua patente para um veículo com propulsão a gás, em 16 de Janeiro do ano 1886.

#### **1.2.1**

##### **Dinâmica veicular**

As áreas de conhecimento envolvidas na dinâmica veicular são: mecânica, física, sistemas de controle, eletrônica, instrumentação, otimização, entre outras. Este tema é bastante complexo, mas também é muito interessante, já que permite o estudo simultâneo de várias áreas, o qual leva a um trabalho multidisciplinar integrado, onde especialistas devem atuar em harmonia para obter um objetivo comum. O desenvolvimento de modelos matemáticos e as análises do comportamento dinâmico de um veículo são fundamentais para a compreensão dos mecanismos que caracterizam os seus movimentos.

Por uma questão de conveniência, em análises preliminares, costuma-se dividir os estudos da dinâmica veicular em função dos três grandes subsistemas de um veículo, a saber:

- Dinâmica longitudinal: que estuda o movimento longitudinal e rotações em torno do eixo lateral (*pitch*) em resposta a torques aplicados às rodas devido aos sistemas de transmissão e freios;
- Dinâmica vertical: que estuda o movimento vertical e as rotações em torno dos eixos longitudinal (*roll*) e lateral (*pitch*) em função de irregularidades da pista, transmitidas pelo sistema de suspensão;
- Dinâmica Lateral: que envolve o movimento lateral e as rotações em torno do eixo vertical (*yaw*) e longitudinal (*roll*) como resultado da atuação do sistema de direção.

O veículo e seus subsistemas empregados nos estudos da dinâmica veicular podem ser ilustrados pelo diagrama da Figura 1.1.

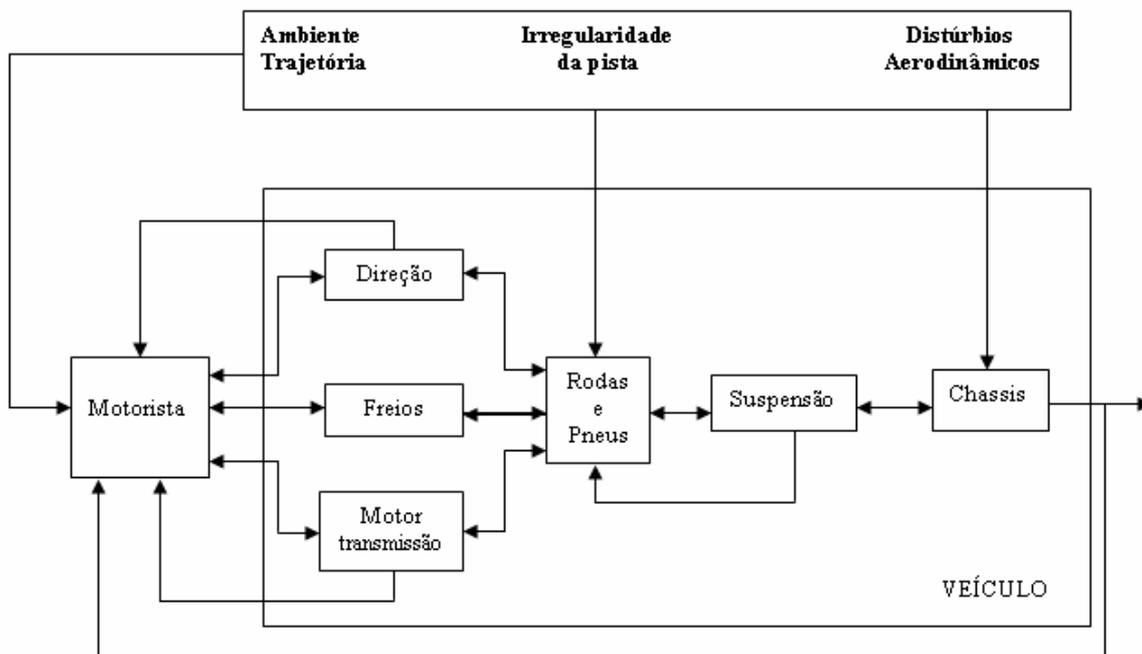


Figura 1.1 Diagrama de blocos representativo de um veículo terrestre.

Na Figura 1.1 pode-se ver com muita clareza que o veículo é um sistema complexo, onde o motorista tem que perceber, além do seu comportamento, no que diz respeito à resposta do sistema de direção, e àquela da transmissão da potência do motor, na geração da sua trajetória, também a influência do ambiente

onde o veículo se está movimentando, para poder dirigir da melhor forma e obter o desempenho adequado. Não se deve esquecer que os componentes internos do veículo estão interligados, isto é, a alteração de um componente pode afetar outro e vice-versa, e assim sucessivamente. O ambiente onde o veículo se movimenta gera esforços que afetam diretamente o seu comportamento. As forças externas presentes na dinâmica veicular são: gravitacionais, aerodinâmicas, e as geradas no contato pneumático/pavimento.

Existem diversas publicações na literatura nas quais se trata dos problemas da Dinâmica Veicular. Por exemplo, naquelas dos autores *Smith* e *Starkey* nos anos 1994 e 1995 [6] [7], se estuda a dinâmica lateral dos veículos terrestres. Nesses trabalhos se fez a avaliação de um modelo dinâmico com controle para a mudança de direção do veículo. Este mesmo modelo foi utilizado como base para o presente trabalho. Outra publicação onde se estuda a dinâmica lateral dos veículos terrestres, é a de *Will* e *Zak* no ano 1997 [8], na qual se tem o desenvolvimento mais detalhado do modelo empregado, que é similar àquele apresentado por *Smith* e *Starkey*.

### 1.2.2

#### Modelos do veículo

Em engenharia, a palavra modelo possui dois significados: modelo em escala, que é um arranjo similar à situação real (leis e escalas apropriadas); e modelo matemático, que se conhece como o estabelecimento de equações matemáticas correspondentes a princípios ou leis físicas ou ainda a relações empíricas. O uso de modelos matemáticos na dinâmica de veículos é um dos mais importantes recursos de desenvolvimento de produto para a indústria automobilística, em função de redução de custos e tempo de análise e desenvolvimento que proporciona. Em dinâmica de veículos encontram-se duas abordagens: modelos simples obtidos manualmente, através da aplicação de princípios físicos bastante simplificados ao comportamento do veículo; modelos complexos obtidos com o auxílio de computadores, baseados em descrição detalhada do veículo e seus subsistemas (motor/transmissão, suspensão, sistemas de freios, sistema de direção).

Para análise das trajetórias de veículos terrestres existem diversos modelos dinâmicos, de diferentes níveis de complexidade, que são empregados em função do tipo de problema que se pretende tratar. Um dos principais elementos destes modelos é a representação da capacidade de geração de força dos pneus, que resulta na aceleração do veículo como um todo, em qualquer direção (tração, frenagem e curvas), através do chamado “círculo de aderência”. O correto uso das informações contidas nesta “figura” possibilita obter o máximo desempenho do veículo em qualquer condição de operação. Para se percorrer um circuito fechado no menor tempo possível deve-se atender às restrições dinâmicas do veículo e conseqüentemente da sua capacidade de gerar aceleração nas diversas direções.

Para estudo particular apresentado neste trabalho foram criados três modelos matemáticos para o veículo: modelo massa pontual, onde apenas se considera o veículo como um ponto no espaço, sem geometria, sujeito a forças longitudinais e laterais; modelo cinemático, onde não se considera a ação das forças, mas apenas sua influência na variação do movimento do veículo, tratado com geometria, mas sem inércias, no qual o sistema se encontra em regime estacionário; modelo dinâmico, onde se levam em conta as forças que geram as acelerações, e conseqüentemente o movimento, e também as características físicas e geométricas do veículo.

Na bibliografia do presente trabalho, encontra-se uma publicação feita nos anos oitenta, onde se fez um estudo não dimensional das características dinâmicas dos pneus de um veículo terrestre [2]. Neste trabalho pode-se facilmente entender a relação entre as forças laterais nos pneus em função dos ângulos de esterçamento da roda, no qual se apresenta a natureza não linear do modelo das forças laterais. Nesta mesma década foram publicados dois artigos, [3] [4], nos quais se trabalha utilizando a teoria de controle ótimo para a simulação de um veículo terrestre se movimentando. Essas publicações empregam um modelo cinemático linearizado do veículo, e se estudou principalmente a mudança de direção do veículo, e as formas de controle a serem aplicadas na simulação deste tipo de caso. É bom ressaltar que nestas publicações, como forma de resolver o problema, emprega-se o controle ótimo. No presente trabalho pretende-se aplicar apenas a teoria de otimização, e um modelo veicular mais completo e detalhado. Em uma publicação muito interessante feita por *Maalej & Guenther & Ellis* [5], no ano 1989, é possível verificar as características das forças e momentos nos

pneumáticos. Neste artigo se faz a comparação de diferentes modelos para representar tais esforços, e dos resultados encontrados utilizando cada um deles com aqueles obtidos experimentalmente.

### 1.2.3 Métodos de Otimização

Dado que é possível descrever matematicamente o problema de um veículo percorrer uma determinada trajetória através de um modelo, assim como as restrições a ele impostas neste percurso, é viável empregar alguma metodologia para obter a solução ótima desse problema. Deste modo, técnicas de otimização conhecidas serão adotadas para determinar a trajetória de tempo mínimo, empregando uma função objetivo e restrições que definam tal problema, considerando as limitações associadas à geometria do traçado, características de potência do veículo, aderência dos pneus, limites no sistema de direção, e o próprio comportamento dinâmico do veículo, quando for o caso.

Neste trabalho será estudado como definir tal problema e analisar as soluções possíveis. Não será aqui implementado qualquer algoritmo de otimização, uma vez que serão empregadas as rotinas existentes na *Optimization Toolbox* do *MATLAB*, escolhendo o método mais adequado para os casos de interesse.

Deve-se observar que não foi aqui resolvido um problema de controle ótimo, pois o cerne deste trabalho não trata de controle, mas sim da obtenção de uma trajetória ideal, que posteriormente servirá de entrada para um problema de controle, que por sua vez será resolvido através de outras metodologias. Para solução do problema de otimização foi empregado um modelo do veículo no qual sua dinâmica foi tratada de uma forma simplificada, porém suficiente. Entretanto, quando o veículo for representado por um modelo dinâmico mais completo e detalhado, incluído como restrição do problema de otimização, poderá ser necessário adotar alguma estratégia de controle ótimo, pelo simples fato de se ter um sistema de equações diferenciais associados ao problema de otimização.

Geralmente este problema de trajetória ideal é tratado através de procedimentos de controle ótimo. Na pesquisa bibliográfica realizada foram encontrados muitos artigos com este enfoque. Por exemplo, em duas publicações

muito recentes de *Velenis* e *Tsiotras* [9] [10], se utiliza o modelo bicicleta com suspensão para estudar a transferência longitudinal de carga durante o movimento do veículo, tentando avaliar o seu estado limite de estabilidade, isto é quando os pneumáticos funcionam no limite de aderência. Nesses artigos o problema é resolvido através de controle ótimo, no qual são empregadas duas funções objetivo [9]: uma de tempo mínimo de percurso, e outra maximizando a velocidade de saída da curva do veículo. Cada caso é tratado com e sem suspensão para verificar os seus efeitos no comportamento do veículo. Pode-se observar que a influencia destes componentes não é significativa neste aspecto. O fato de destaque destas publicações é que as trajetórias ótimas obtidas para os objetivos de tempo mínimo e de velocidade na saída da curva máxima são diferentes [9]. Aquela do tempo mínimo tende para um arco de círculo, o que é muito compreensível já que se deseja a maior velocidade e a menor distancia percorrida possíveis. A trajetória obtida para o caso de velocidade máxima na saída da curva é de raio máximo nesse ponto do traçado, isso porque o veículo pode acelerar enquanto ainda está dentro da curva e assim maximizar sua velocidade de saída. Da leitura destes artigos, um fato relevante para as análises que se seguem foi observado e é aqui transcrito: na entrada de uma curva as rodas dianteiras são as mais importantes, já que é nelas que a força centrípeta é inicialmente aplicada e o momento de desvio (*yaw*) produzido; por sua vez na saída de uma curva as rodas traseiras têm maior importância, porque elas geram o movimento de *yaw*.

Em outra publicação [10], são gerados perfis de aceleração e desaceleração para um modelo bicicleta que percorre uma curva em alta velocidade. Para isso se baseia no diagrama G-G, e as variáveis do controle ótimo são as forças dianteiras e traseiras dos pneumáticos.

Uma das publicações analisadas, de *Casanova* e *Symond* no ano 2000 [1], trata das manobras de tempo mínimo, na qual é utilizado um modelo um pouco mais complexo do veículo, que considera a forças aerodinâmicas e também a influência das massas dos conjuntos roda-pneu, que se aproxima mais da realidade dos veículos de competição, já que neste caso estas variáveis e parâmetros são muito importantes para a estabilidade e dirigibilidade. Neste artigo se utiliza um algoritmo seqüencial de programação quadrática para determinação da trajetória ótima, resolvendo o problema por otimização sem considerar diretamente a teoria de controle ótimo, incluindo entretanto algumas variáveis de controle. Observa-se

que nesta publicação as soluções ótimas são encontradas para trechos abertos, e que posteriormente são unidos, fazendo coincidir as condições iniciais e finais de cada um deles, para se obter a trajetória ótima para uma pista fechada.

### **1.2.3.1 Problema do tempo mínimo**

Neste trabalho o que se pretende é obter o tempo de percurso mínimo para um veículo se movimentando entre pontos bem definidos. Então tem que se estabelecer uma função objetivo que determine o *tempo* a ser minimizado, isto é, deve-se criar uma função que represente o tempo de percurso em função de todas as variáveis e/ou parâmetros que nele influenciem. Mas como fazer isso se todo o movimento de um veículo, e as variáveis que o caracterizam, dependem do tempo? Uma proposta de solução que se apresenta é criar funções matemáticas que descrevam, dentro de aproximações razoáveis, o comportamento físico dos carros de corrida – principalmente – nas condições em questão, nas quais o tempo não aparece explicitamente, utilizando-as para resolver o problema de minimização do tempo. Mas apenas isso não é suficiente, uma vez que a otimização da trajetória possui restrições, tais como a velocidade máxima ou a aceleração máxima, que também dependem do tempo, mas não podem ser expressas explicitamente em função dele. Um tratamento adequado também foi dado para as restrições que envolviam o tempo.

### **1.2.4 Estratégias de controle**

Para poder observar o veículo se movimentando na pista é necessário fazer a simulação do seu movimento mediante uma malha de controle, procurando, por exemplo, analisar as manobras do motorista durante o percurso, e suas reações com relação ao que acontece com o veículo em cada instante do tempo. Os problemas de controle veicular vêm sendo estudados há algum tempo pelo Grupo de Pesquisa em Sistemas Veiculares do DEM-DEE/PUC-Rio, utilizando diversos modelos, estratégias e algoritmos, sendo que alguns desses já se encontram à disposição para uso nas mais variadas aplicações de interesse [11]. Entretanto o foco deste trabalho não foi nas estratégias de controle, uma vez que, para o caso

este será um aspecto secundário. No máximo será verificado como as restrições impostas estarão sendo satisfeitas ao longo do percurso do veículo, e como o controle deverá atuar para que isso ocorra. De acordo com os objetivos mencionados, conforme os resultados forem analisados, poderá ser estudado também como um motorista ou um piloto atua de modo a obter o máximo desempenho do veículo. Um outro problema nas estratégias de controle referente ao tipo de análise apresentado neste trabalho, mas não será aqui tratado, é o do controle do veículo em uma trajetória fechada. Neste caso em particular, existe uma dificuldade adicional na simulação computacional, devido a qual um algoritmo específico está sendo desenvolvido e implementado [12], permitindo tratar de relações matemáticas que definem uma curva na qual existem diferentes valores de uma das variáveis em função da outra, como ocorre quando se fecha uma trajetória em um referencial que não acompanha o veículo.

### 1.3

#### **Objetivo da dissertação**

Este trabalho é mais uma etapa no sentido de consolidar a área de Sistemas Veiculares na PUC-Rio. Já se possui uma relativa experiência nos modelos matemáticos empregados para representar a dinâmica veicular. Está se avançando no uso das estratégias sofisticadas de controle no problema de comando de trajetória e atitude dos veículos. Já se iniciou o estudo das características de resposta ao impacto de veículos tratados por modelos rígidos e flexíveis. Entretanto pouco se fez no sentido de estabelecer a influência do ser humano no comando dos veículos e a otimização das suas características de desempenho em condições extremas de uso. Esta dissertação pretende iniciar uma série de trabalhos visando dominar esse item.

O presente trabalho tem por objetivo adotar um modelo apropriado para um veículo terrestre, a fim de obter sua trajetória ótima em traçados pré-definidos, visando percorrê-lo no menor tempo possível, aplicando as teorias de dinâmica veicular, de otimização e de controle, implementadas em algoritmos através do *Simulink/MatLab*.

## 1.4 Descrição da Dissertação

O presente trabalho está formatado em seis capítulos, conforme a seguir:

*Capítulo I, Introdução*, no qual explicam-se alguns conceitos gerais de dinâmica veicular e otimização, realiza-se uma análise preliminar do problema, e também uma breve descrição dos trabalhos publicados na área, para finalmente, indicar os objetivos a serem alcançados.

*Capítulo II, Modelo do Veículo*, onde se detalham alguns conceitos relacionados às características dinâmicas de um veículo, mais voltados àqueles de competição, e trata-se de explicar sua representação matemática segundo um modelo suficiente para o problema que se deseja tratar.

*Capítulo III, O Problema de Otimização*, no qual explica-se a forma de abordar o problema para os veículos de competição, e também se mostra as considerações que devem ser feitas para obtenção do movimento ótimo do veículo em um percurso pré-determinado. Detalha-se a forma de obter a trajetória ótima para um veículo terrestre, o desenvolvimento do equacionamento correspondente a este problema e as soluções do mesmo, assim como a implementação no programa *Matlab*.

*Capítulo IV, Simulação da Trajetória Ótima*, onde se apresentam os resultados obtidos para casos diversos, unindo os conceitos e procedimentos tratados nos capítulos anteriores.

*Capítulo V, Conclusões e Recomendações*, no qual são apresentadas algumas conclusões e recomendações para futuros trabalhos.

## 2

### Modelo do Veículo

Dado o interesse da análise a ser realizada neste trabalho, é preciso determinar um modelo para simular o comportamento dinâmico de um veículo, considerando principalmente sua dinâmica lateral e longitudinal.

Nos veículos de competição a alta velocidade que percorrem pistas planas a dinâmica vertical não é muito evidente, por que a pista pode ser considerada perfeitamente plana e a sua dinâmica lateral apenas esta afetada pelas outras duas dinâmicas, neste tipo de veículo as mais relevantes são as dinâmicas lateral e longitudinal. Entretanto o estudo desse tipo de veículo pode se resumir a seu movimento no plano, onde os comandos que dirigem as suas dinâmicas lateral e longitudinal são os comandos de esterçamento (sistema de direção) e os sistemas de tração e frenagem na dinâmica lateral.

Neste caso, portanto, é suficiente, a princípio, que essa representação tenha 5 graus de liberdade no referencial local do veículo: dois de translação (longitudinal e lateral), relacionados às velocidades em  $x$  e  $y$ , e três de rotação (*yaw*, *roll* e *pitch*), sendo identificados pelos ângulos  $\theta$ ,  $\varphi$  e  $\rho$  respectivamente. Os movimentos de translação correspondem aos deslocamentos no plano  $XY$  do referencial global. A Figura 2.1 ilustra os sistemas de referencia e variáveis empregados para o tratamento da trajetória de um veículo no plano.

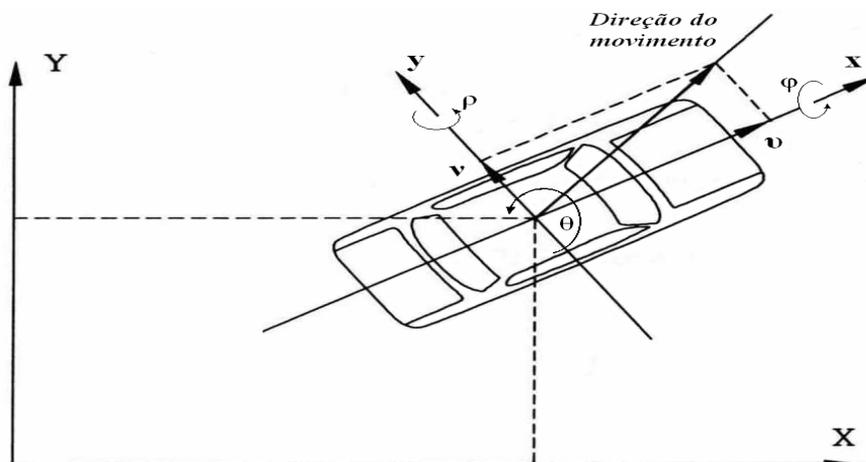


Figura 2.1. Sistemas de referência e variáveis para análise de trajetória no plano.

## 2.1 Equações de movimento

A dinâmica de um veículo em relação a um sistema de eixos que passa no seu centro de massa, é analisada através da teoria dos corpos rígidos, e pode ser representada desde um simples modelo de massa pontual até um modelo bastante complexo onde todas as principais características físicas e geométricas do veículo são consideradas. Neste capítulo será desenvolvido um modelo de acordo com a análise a ser realizada adiante, que poderá ser simplificado na medida do necessário. Por exemplo, o modelo de massa pontual, assim como o modelo dinâmico linear, podem ser obtidos impondo algumas hipóteses simplificadoras ou de linearização ao modelo não linear aqui descrito.

O primeiro passo para obter o modelo em questão corresponde a determinar as equações de movimento que descrevem a dinâmica lateral e a dinâmica longitudinal de um veículo em movimento. Para isso considera-se o veículo composto por três massas distintas: uma suspensão identificada como  $m_s$ , ou massa do chassi, e duas massas não-suspensas, à frente e à ré do veículo, identificadas como  $m_{uf}$  e  $m_{ur}$ , ou massas dos pneus/rodas, respectivamente. A massa total deste veículo é representada pela soma das três massas, e representada por  $m_{tot}$ ,

$$m_{tot} = m_s + m_{uf} + m_{ur} \quad (2.1)$$

As forças impostas ao veículo levam a

$$F_x = \sum_{i=1}^4 F_{xi} = m_{tot} a_x - m_s h_{sp} \ddot{\rho} \quad (2.2)$$

$$a_x = \ddot{x} - \dot{y}\dot{\theta} \quad (2.3)$$

$$F_y = \sum_{i=1}^4 F_{yi} = m_{tot} a_y + m_s h_{sr} \ddot{\phi} \quad (2.4)$$

$$a_y = \ddot{y} + \dot{x}\dot{\theta} \quad (2.5)$$

onde  $F_x$  representa o somatório das forças que atuam no eixo longitudinal, sendo  $F_{xi}$  cada uma das forças presentes nas rodas e  $a_x$  a aceleração longitudinal que é composta por duas parcelas:  $\ddot{x}$  e  $\dot{y}\dot{\theta}$ . Já  $F_y$  representa o somatório das forças laterais, sendo  $F_{yi}$  a força em cada uma das rodas. Assim como no eixo longitudinal,  $a_y$  representa a aceleração lateral que, por sua vez, é composta por duas parcelas:  $\ddot{y}$  e  $\dot{x}\dot{\theta}$ . Na Equação 2.2 aparece um termo de aceleração angular

de *pitch*  $\ddot{\theta}$ , que tem um efeito no movimento longitudinal, como está explícito. Algo similar acontece no movimento lateral, descrito na Equação 2.4, onde a aceleração angular de *roll*  $\ddot{\phi}$ , que relaciona a massa suspensa com a força lateral total.

A dedução das acelerações em x e y aparece por prova geométrica, para pequenas variações angulares [13], ao longo de uma trajetória curvilínea. Como pode ser observado na Figura 2.2, a variação em x pode ser descrita como

$$\Delta V_x = V_x \cos \Delta\theta + \Delta V_x \cos \Delta\theta - V_x - V_y \sin \Delta\theta - \Delta V_y \sin \Delta\theta \quad (2.6)$$

Considerando-se a variação angular pequena e negligenciando-se o termo de variação de velocidade em y, obtém-se o resultado,

$$\frac{\Delta V_x}{\Delta t} = V_x + \frac{\Delta V_x}{\Delta t} - V_x - V_y \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (2.7)$$

$$a_x = \ddot{x} - \dot{y}\dot{\theta} \quad (2.8)$$

como mostrado anteriormente.

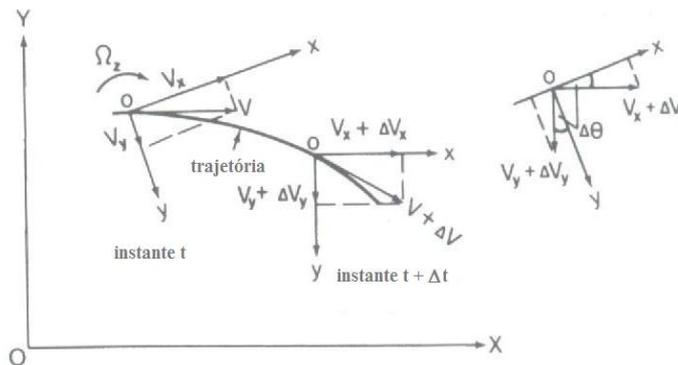


Figura 2.2. Determinando as acelerações em x e y.

De maneira similar, deduz-se a aceleração em y, através de

$$\Delta V_y = V_y \cos \Delta\theta + \Delta V_y \cos \Delta\theta - V_y + V_x \sin \Delta\theta + \Delta V_x \sin \Delta\theta \quad (2.9)$$

$$\frac{\Delta V_y}{\Delta t} = V_y + \frac{\Delta V_y}{\Delta t} - V_y + V_x \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (2.10)$$

$$a_y = \ddot{y} + \dot{x}\dot{\theta} \quad (2.11)$$

A dedução das acelerações em x e y também aparece como resultado das equações de corpo rígido, pela teoria de Newton-Euler, descrita em um referencial local que acompanha o veículo. As equações de Newton Euler para as forças, no sistema móvel são dadas por

$$\sum F = \dot{P} + \Omega x P \quad (2.12)$$

na qual

$$P = m \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad e \quad \Omega = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

são respectivamente a quantidade de movimento linear e a velocidade angular do corpo. Para se realizar o produto vetorial da velocidade angular emprega-se uma matriz, dada por

$$\tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & \dot{\rho} \\ \dot{\theta} & 0 & -\dot{\phi} \\ -\dot{\rho} & \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Então as Equações de Newton-Euler para forças no referencial local são reescritas por

$$\begin{bmatrix} \sum F_x \\ \sum F_y \\ \sum F_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & \dot{\rho} \\ \dot{\theta} & 0 & -\dot{\phi} \\ -\dot{\rho} & \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} m \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \sum F_x \\ \sum F_y \\ \sum F_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} \dot{z}\dot{\rho} - \dot{y}\dot{\theta} \\ \dot{x}\dot{\theta} - \dot{z}\dot{\phi} \\ \dot{y}\dot{\phi} - \dot{x}\dot{\rho} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

A Equação 2.16 mostra a interrelação que existe entre os movimentos nos três eixos do sistema local. Para modelo de interesse negligencia-se o movimento vertical, então as equações simplificadas são respectivamente dadas por

$$\sum F_x = m(\ddot{x} - \dot{y}\dot{\theta}) \quad (2.17)$$

$$\sum F_y = m(\ddot{y} + \dot{x}\dot{\theta}) \quad (2.18)$$

$$\sum F_z = m(\dot{y}\dot{\phi} - \dot{x}\dot{\rho}) \quad (2.19)$$

A dedução gráfica mostrada anteriormente leva aos mesmos resultados que as Equações 2.17, 2.18 e 2.19. Para melhor interpretar estas equações, considerando que apenas o movimento no plano  $xy$  interessa, elimina-se a Equação 2.19. A somatória de forças esta composta por todas as forças que atuam no sistema veicular, então ali estão incluídas as forças de tração e frenagem, as forças laterais geradas nos pneumáticos do veículo, e também está incluída a força aerodinâmica. Esta somatória é projetada nos eixos do sistema referencial

segundo os modelos dos pneumáticos. Nosso sistema veicular não está influenciado pela inclinação da pista ou aclave, desde que se considera uma pista completamente plana. Então todas as forças envolvidas no sistema são

$$\sum F = F_{Tração} + F_{Frenagem} + F_{Aerodinamicas} \quad (2.20)$$

As Equações de Newton Euler no sistema móvel para os momentos determinam que

$$\sum \vec{M} = \dot{\vec{H}} + \vec{\Omega} \times \vec{H} \quad (2.21)$$

na qual o vetor quantidade de movimento angular, obtido pelo produto da matriz de inércia e do vetor velocidade angular, é dado por

$$\vec{H} = J \cdot \vec{\Omega} \quad (2.22)$$

onde a matriz inércia do veículo  $J$ , que tem por componentes os momentos de inércia para cada eixo que passa pelo centro de massa e os produtos de inércia do veículo, levando a uma matriz simétrica, é dada por

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Como um veículo terrestre é simétrico em relação ao plano  $xz$ , podem-se considerar alguns produtos de inércia nulos, levando assim uma matriz inércia com alguns componentes nulos,

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & J_{xz} \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ J_{xz} & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Sendo o vetor aceleração angular, que contém as segundas derivadas no tempo dos ângulos *roll*, *pitch* e *yaw*, dado por

$$\vec{\ddot{\Omega}} = \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\rho} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

e o vetor velocidade angular, que contém as primeiras derivadas no tempo dos ângulos *roll*, *pitch* e *yaw*, respectivamente, dado pela Equação 2.13 e empregando a Equação 2.14 para representar o produto vetorial, finalmente se tem a equação de Newton-Euler para momentos aplicados ao veículo. A derivada do vetor quantidade de movimento angular é o produto da aceleração angular vezes a

matriz inércia do veículo, sendo a matriz inércia constante no tempo no referencial local. Portanto o somatório de momentos no sistema local móvel fica na forma

$$\begin{bmatrix} \sum M_X \\ \sum M_Y \\ \sum M_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & J_{xz} \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ J_{xz} & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\rho} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & \dot{\rho} \\ \dot{\theta} & 0 & -\dot{\phi} \\ -\dot{\rho} & \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & J_{xz} \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ J_{xz} & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Fazendo os respectivos cálculos da matriz momento total e separando os componentes em cada eixo principal se tem, o Momento de *Roll*

$$\sum M_X = J_{xx} \ddot{\phi} + J_{xz} \ddot{\theta} + J_{xz} \dot{\rho} \dot{\phi} - J_{yy} \dot{\rho} \dot{\theta} + J_{zz} \dot{\rho} \dot{\theta} \quad (2.27)$$

o Momento de *Pitch*

$$\sum M_Y = J_{yy} \ddot{\rho} + J_{xx} \dot{\theta} \dot{\phi} - J_{xz} \dot{\phi}^2 + J_{xz} \dot{\theta}^2 - J_{zz} \dot{\rho} \dot{\theta} \quad (2.28)$$

e o Momento de *Yaw*

$$\sum M_Z = J_{xz} \ddot{\phi} + J_{zz} \ddot{\theta} - J_{xx} \dot{\rho} \dot{\phi} + J_{yy} \dot{\rho} \dot{\phi} + J_{xz} \dot{\rho} \dot{\theta} \quad (2.29)$$

É preciso agora escrever as equações de somatório de momentos gerados por fatores externos ao veículo, tanto para o movimento de *yaw* (em torno do eixo vertical) quanto para o movimento de *roll* (em torno do eixo longitudinal) e o movimento *pitch* (em torno do eixo lateral). Analisa-se inicialmente o movimento *yaw*. Levando-se em consideração as forças atuantes nos pneus dianteiros e traseiros, esquerdos e direitos, respectivamente indicadas pelos índices 1, 2, 3 e 4, nos eixos x e y ( $F_{ij}$ ,  $F_{ij}$ ,  $i=x,y$  e  $j=1,2,3,4$ ), mais os braços de alavanca existentes, que descrevem as bitolas e as distancias do CG aos eixos das rodas, é possível escrever uma relação para o somatório de momentos referentes ao movimento de *yaw* do veículo ( $\theta$ ), dada por

$$\sum M_z = aF_{y1} + \frac{t_f}{2} F_{x1} + aF_{y2} - \frac{t_f}{2} F_{x2} - bF_{y3} + \frac{t_r}{2} F_{x3} - bF_{y4} - \frac{t_r}{2} F_{x4} \quad (2.30)$$

onde  $a$  representa a distancia entre o CG e o eixo dianteiro,  $t_f$  representa a bitola do eixo dianteiro,  $b$  representa a distancia entre o CG e o eixo traseiro,  $t_r$  representa a bitola do eixo traseiro e  $I_{yaw}$  representa o momento de inércia em torno do eixo z.

A Figura 2.3 representa o diagrama de corpo livre indicando todas as forças laterais e longitudinais que geram o movimento *yaw*, também se mostra as distancias que entram no calculo do momento total.

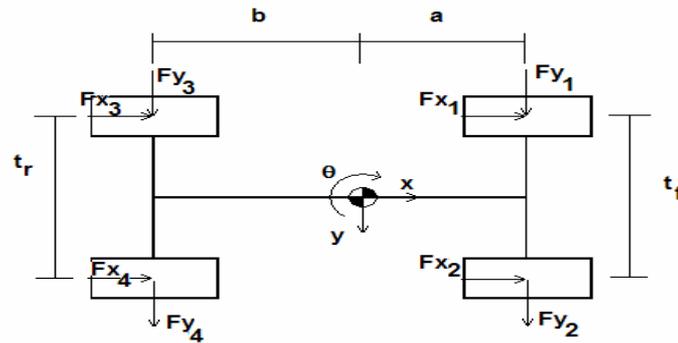


Figura 2.3. Diagrama de corpo livre para equilíbrio de momentos em relação ao eixo z.

Poder-se-ia considerar inicialmente que o problema envolve apenas o movimento de *yaw*, mas isso não é verdade, já que pelo desenvolvimento das equações de Neuton-Euler, Equação 2.26, quando a análise é realizada no sistema referencial móvel, nota-se que também os movimentos de *roll* e *pitch* estão presentes. Então na Equação 2.31 são acrescidos os termos da Equação 2.29, levando ao resultado da Equação 2.32,

$$\sum M_z = I_{yaw} \ddot{\theta} \quad (2.31)$$

$$\sum M_z = I_{yaw} \ddot{\theta} + I_{xz} (\ddot{\phi} - \dot{\rho} \dot{\theta}) - I_{roll} \dot{\rho} \dot{\phi} + I_{pitch} \dot{\phi} \dot{\rho} \quad (2.32)$$

As Equações 2.32 e 2.30 são igualadas gerado uma equação diferencial que descreve o movimento *yaw* do veículo. As forças no eixo *x* e *y* são desenvolvidas com o modelo do pneumático, explicado mais adiante.

Agora para o equacionamento de momentos no movimento de rolagem, é preciso considerar o amortecimento e a rigidez de rolagem ( $\beta_{roll}$ ,  $\kappa_{roll}$ ), que dependem dos coeficientes de rigidez e amortecimento das quatro suspensões ( $B_f$ ,  $B_r$ ,  $K_f$ ,  $K_r$ ) mais as bitolas traseira e dianteira. Assim

$$\beta_{roll} = \frac{1}{2} (B_f t_f^2 + B_r t_r^2) \quad (2.33)$$

$$\kappa_{roll} = \frac{1}{2} (K_f t_f^2 + K_r t_r^2) \quad (2.34)$$

Na Figura 2.4, são mostradas as acelerações geradas durante o movimento de rolagem do veículo, considerando o sistema em um referencial fixo, que levam a equação diferencial

$$I_{roll} \ddot{\phi} + \beta_{roll} \dot{\phi} + \kappa_{roll} \phi = m_s g h_{sr} \sin \phi + m_s a_y h_{sr} \cos \phi \quad (2.35)$$

onde  $I_{roll}$  representa o momento de inércia de rolagem do veículo,  $h_{sr}$  representa a altura entre o CG e o centro de rolagem,  $g$  a aceleração da gravidade, e  $\varphi$  o ângulo de rolagem (*roll*).

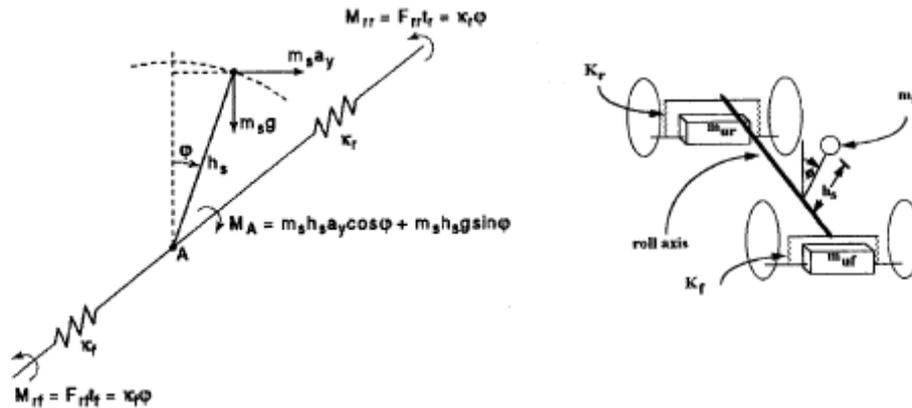


Figura 2.4. Diagrama de aceleração de rolagem.

Pela Equação 2.27, verifica-se que o movimento de rolagem em um referencial móvel não depende somente do movimento de *roll*, mas também dos movimentos de *yaw* e *pitch*. Então devem-se acrescentar na Equação 2.35 os termos da Equação 2.27, de acordo as leis de Newton-Euler, quando a análise é realizada no referencial local móvel, levando à Equação 2.36,

$$I_{roll} \ddot{\varphi} + I_{xz} (\ddot{\theta} + \dot{\rho} \dot{\varphi}) - I_{pitch} \ddot{\theta} + I_{yaw} \dot{\rho} \dot{\theta} + \beta_{roll} \dot{\varphi} + \kappa_{roll} \varphi = m_s g h_{sr} \sin \varphi + m_s a_y h_{sr} \cos \varphi \quad (2.36)$$

A rolagem do veículo é provocada pelas forças nos pneus, e estas forças já estão implicitamente incluídas na Equação 2.36 pela aceleração lateral  $a_y$ . Esta aceleração lateral é o resultado de uma força externa responsável pelo movimento lateral do veículo.

De forma muito semelhante ao desenvolvido para movimento de rolagem, se o mesmo para a determinação da equação diferencial que descreve o movimento *pitch*. Agora é preciso considerar o amortecimento e a rigidez associados a este movimento ( $\beta_{pitch}$ ,  $\kappa_{pitch}$ ), que dependem dos coeficientes de rigidez e amortecimento das quatro suspensões ( $B_f$ ,  $B_r$ ,  $K_f$ ,  $K_r$ ), e também da distancia entre o CG e os eixos das rodas, tanto dianteiros quanto traseiros. Estes valores são calculados segundo as Equações 2.37 e 2.38,

$$\beta_{pitch} = 2(B_f a^2 + B_r b^2) \quad (2.37)$$

$$\kappa_{pitch} = 2(K_f a^2 + K_r b^2) \quad (2.38)$$

Empregando o mesmo procedimento adotado para gerar a equação de movimento de rolagem, então, inicialmente, para maior compreensão do movimento *pitch*, define-se uma equação diferencial que apenas depende do ângulo de *pitch*, levando à Equação 2.39,

$$I_{pitch} \ddot{\rho} + \beta_{pitch} \dot{\rho} + \kappa_{pitch} \rho = m_s g h_{sp} \text{sen} \rho - m_s a_x h_{sp} \cos \rho \quad (2.39)$$

onde  $I_{pitch}$  representa o momento de inércia do movimento *pitch*,  $h_{sp}$  representa a altura entre o CG e o centro de giro do movimento *pitch*,  $g$  a aceleração da gravidade, e  $\rho$  o ângulo *pitch*.

Agora tomando a Equação 2.28, obtida segundo Newton-Euler, acrescentam-se os parâmetros que relacionam o movimento *pitch*, com os outros dois movimentos (*roll* e *yaw*), e se determina uma equação diferencial que descreve o movimento *pitch* no referencial local, Equação 39,

$$I_{pitch} \ddot{\rho} + I_{xz} (\dot{\theta}^2 - \dot{\varphi}^2) - I_{yaw} \dot{\theta} \dot{\varphi} + I_{roll} \dot{\varphi} \dot{\theta} + \beta_{pitch} \rho + \kappa_{pitch} \rho = m_s g h_{sp} \text{sen} \rho - m_s a_x h_{sp} \cos \rho \quad (2.40)$$

A arfagem do veículo é provocada pelas forças de tração e frenagem, e estas forças já estão implicitamente incluídas na Equação 2.40 pela aceleração longitudinal  $a_x$ , esta aceleração longitudinal é o resultado de uma força externa responsável pelo movimento longitudinal do veículo.

Uma vez escritas todas às equações de movimento do modelo não linear do veículo, em relação ao sistema referencial móvel, é possível agrupá-las, resultando um conjunto de equações diferenciais que modelam o comportamento dinâmico do veículo. As Equações 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.32, 2.36 e 2.40, juntas, compõem as equações de movimento do veículo, com 5 graus de liberdade,

$$\sum F_x = m_{tot} \ddot{x} - m_{tot} \dot{y} \dot{\theta} - m_s h_{sp} \ddot{\rho}$$

$$\sum F_y = m_{tot} \ddot{y} - m_s h_{sr} \ddot{\varphi} + m_{tot} \dot{x} \dot{\theta}$$

$$a_x = \ddot{x} - \dot{y} \dot{\theta}$$

$$a_y = \ddot{y} + \dot{x} \dot{\theta}$$

$$\sum M_z = I_{yaw} \ddot{\theta} + I_{xz} (\ddot{\varphi} - \dot{\rho} \dot{\theta}) - I_{roll} \dot{\rho} \dot{\varphi} + I_{pitch} \dot{\varphi} \dot{\rho}$$

$$I_{roll} \ddot{\varphi} + I_{xz} (\ddot{\theta} + \dot{\rho} \dot{\varphi}) - I_{pitch} \dot{\theta} \dot{\rho} + I_{yaw} \dot{\rho} \dot{\theta} + \beta_{roll} \varphi + \kappa_{roll} \varphi = m_s g h_{sr} \text{sen} \varphi + m_s (\ddot{y} + \dot{x} \dot{\theta}) h_{sr} \cos \varphi$$

$$I_{pitch} \ddot{\rho} + I_{xz} (\dot{\theta}^2 - \dot{\varphi}^2) - I_{yaw} \dot{\theta} \dot{\varphi} + I_{roll} \dot{\varphi} \dot{\theta} + \beta_{pitch} \rho + \kappa_{pitch} \rho = m_s g h_{sp} \text{sen} \rho - m_s (\ddot{x} - \dot{y} \dot{\theta}) h_{sp} \cos \rho$$

## 2.2

### Modelo dos componentes do veículo

Desenvolve-se a seguir o modelo de cada um dos componentes do veículo, com a finalidade de entender claramente sua contribuição para a representação que possibilita analisar o movimento no plano horizontal  $xy$  local ou  $XY$  global, associado à trajetória do veículo e a atitude de *yaw*, incluindo os efeitos de *roll* e *pitch*, como discutido no item anterior. A Figura 2.5 apresenta um esquema de todo o modelo, na qual a interrelação entre os componentes, e as respectivas variáveis de interesse, encontram-se explicitadas.

Cada componente na Figura 2.5 é representado por um bloco, uma forma conveniente para facilitar o desenvolvimento e compreensão de um modelo de grande porte, como é o caso aqui tratado. No procedimento empregado a seguir, o modelo de cada componente é desenvolvido e testado, e só então inserido na representação do sistema como um todo. Esta metodologia simplifica enormemente a modelagem de problemas complexos, envolvendo diversos elementos, e minimiza a possibilidade de erros.

A entrada do modelo mostrado na Figura 2.5 é o ângulo do volante, que a partir a Caixa de Direção do veículo, passando pela Geometria de Ackermann, gera como saída os ângulos de esterçamento para cada pneu dianteiro (direito e esquerdo). Estes por sua vez excitam o subsistema Ângulos de Deriva, juntamente com a velocidade lateral e longitudinal do veículo, gerando os sinais de entrada para os Pneus. O modelo dos pneumáticos irá levar às forças e aos momentos empregados para excitar a dinâmica do veículo no referencial local, dependendo da posição dos pontos de contato dos pneus em relação ao chassi, definida no elemento “Geometria do Veículo”.

A dinâmica do veículo em um referencial que passa no seu centro de massa foi apresentada no item anterior. Finalmente a “Transformação de Coordenadas” possibilita representar as variáveis no referencial global, para determinação da trajetória do veículo.

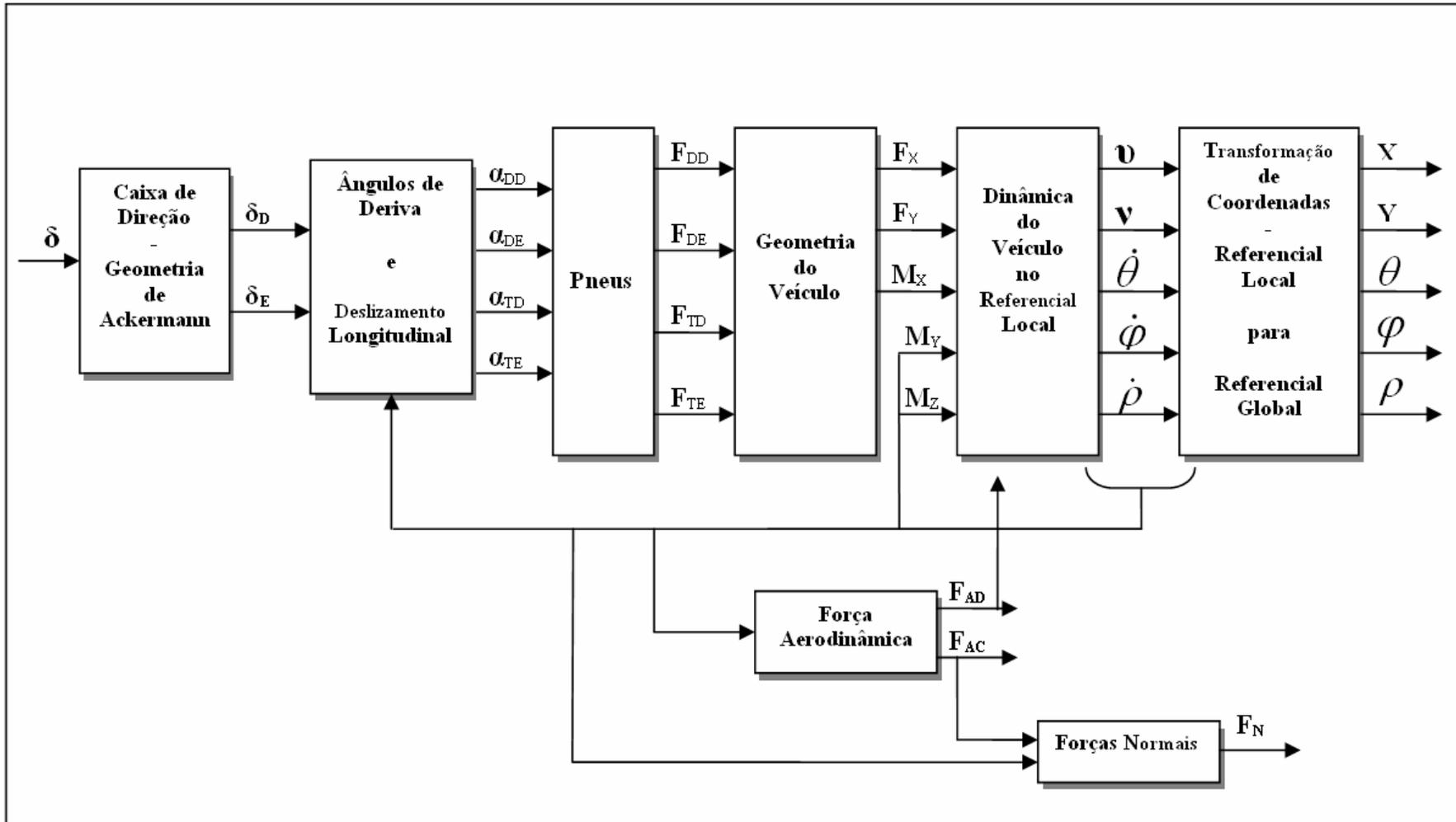


Figura 2.5. Esquema do modelo do veículo.

### 2.2.1 Geometria de Ackermann

Analisa-se a seguir a geometria de Ackermann, que possibilita determinar, em função do ângulo de esterçamento do volante ( $\delta$ ), os ângulos de esterçamento das rodas dianteira direita e esquerda ( $\delta_D$  e  $\delta_E$ ) e o raio de curvatura instantâneo ( $R$ ), de acordo com o esquema da Figura 2.6.

O modelo da geometria de Ackermann relaciona o ângulo do volante do motorista e os ângulos de esterçamento, mediante algumas condições ideais dos veículos, que geralmente, na realidade, não são cumpridas. Nos mecanismos de direção reais dos veículos não se têm componentes (braços) suficientes para garantir que a Geometria de Ackermann possa ser completamente satisfeita. Entretanto, como ponto de partida para os projetos, sempre se leva em consideração tal condição ideal, como apresentado a seguir. A Figura 2.6 mostra a relação entre as variáveis envolvidas neste problema.

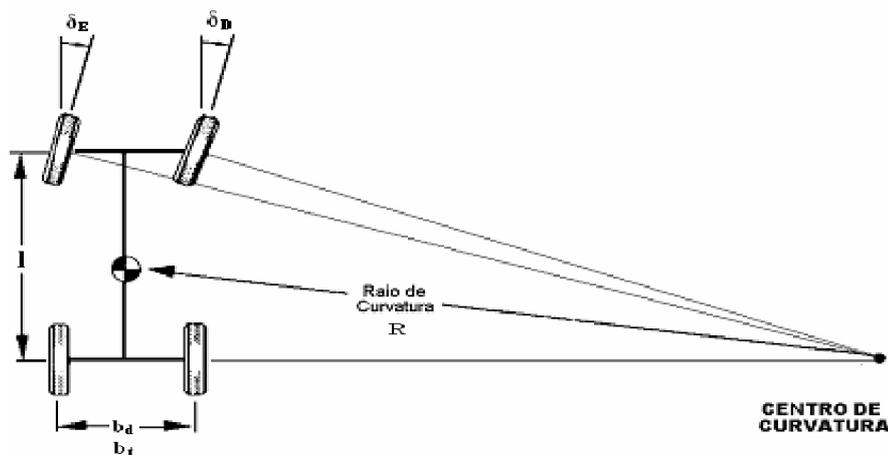


Figura 2.6. Ângulo de esterçamento das rodas dianteiras e raio de curvatura segundo a Geometria de Ackermann.

Empregando a Geometria de Ackermann tem-se que os ângulos de esterçamento são diferentes  $\delta_D \neq \delta_E$ . Quando se gira o volante para um determinado sentido, o ângulo esterçamento da roda interna sempre é maior do que aquele da roda externa à curva que se deseja percorrer. Tal condição permite definir duas funções como mostrado na Equação 2.41,

$$\begin{cases}
\text{Para } \delta < -f_d \left\{ \begin{array}{l} \delta_D = k_d \cdot \delta \\ R = \frac{l}{\text{tg}(\delta_D)} - \frac{b_d}{2} \\ \delta_E = \text{tg}^{-1}\left(\frac{l}{R - b_d/2}\right) \end{array} \right. \\
\text{Para } \delta > f_d \left\{ \begin{array}{l} \delta_E = k_d \cdot \delta \\ R = \frac{l}{\text{tg}(\delta_E)} + \frac{b_d}{2} \\ \delta_D = \text{tg}^{-1}\left(\frac{l}{R + b_d/2}\right) \end{array} \right.
\end{cases} \quad (2.41)$$

sendo  $\delta$  positivo para curvas à esquerda e negativo para curvas à direita (medido em relação ao eixo  $x$  negativo). Na Equação 2.41,  $k_d$  e  $f_d$  são, respectivamente, a relação de transmissão e a folga do sistema de direção,  $b_d$  e  $b_t$  são, respectivamente, as bitolas dianteira e traseira,  $l = l_d + l_t$  é distancia entre eixos das rodas,  $l_d$  e  $l_t$  são as distancias dos eixos das rodas dianteiras e traseiras ao centro de massa CM,  $R$  é o raio de curvatura instantâneo durante o movimento do veículo [11].

Para avaliar e validar esta função simula-se o comportamento para valores arbitrários de ângulos do volante, a partir de dados genéricos de veículos de passeio, Tabela 1 [11]. Para analisar a variação dos ângulos de esterçamento foram feitos movimentos triviais no volante, que possibilitaram a determinação analítica dos ângulos das rodas. Os resultados obtidos analiticamente para avaliar o modelo são mostrados na Tabela 2, correspondem a estados estacionários, para os quais se tem alguns valores fixos da função ângulo do volante.

São realizadas simulações para os valores da Tabela 2, empregando a implementação em *Simulink/Matlab* da Equação 2.41. A Figura 2.7 mostra a entrada, ângulos do volante constantes em determinados intervalos de tempo. As Figuras 2.8 e 2.9 mostram os resultados obtidos para os ângulos de esterçamento direito e esquerdos respectivamente. Estes ângulos são muito próximos, mas não são iguais. É bom ressaltar que com ângulos menores do volante, os ângulos de esterçamento se aproximam mais em seus valores, e com ângulos maiores da volante os ângulos de esterçamento se afastam mais. Os valores encontrados são idênticos aos da Tabela 2, como não poderia deixar de ser.

Tabela 1. Parâmetros arbitrários construtivos de um veículo de passeio genérico.

<b>Parâmetro</b>	<b>Símbolo</b> <b>Unidade</b>	<b>Valor</b>
Distancia entre eixos	$l$ [m]	2,59
Distancia do eixo dianteiro ao CG	$l_d$ [m]	1,43
Distancia do eixo traseiro ao CG	$l_t$ [m]	1,16
Bitola dianteira	$b_d$ [m]	1,49
Bitola traseira	$b_t$ [m]	1,45
Raio de curva mínimo	$R_{\text{mín}}$ [m]	2,0
Esterçamento máximo roda interna	$\delta_{\text{máx}}$ [°]	50,19
Esterçamento máximo roda externa	$\delta_{\text{Emáx}}$ [°]	28,61
Esterçamento máximo volante	$\delta_{\text{máx}}$ [°]	90
Relação de transmissão da direção	$k_d$	0,318
Folga do sistema de direção	$f_d$ [°]	1,0
Velocidade longitudinal constante	$u$ [km/h]	20

Tabela 2. Ângulos de esterçamento e raio de curvatura para valores constantes do ângulo do volante.

Ângulo da Volante $\delta$	Ângulo de esterçamento Direito $\delta_D$	Ângulo de esterçamento Esquerdo $\delta_E$	Raio de curvatura instantâneo R
+ 90 °	+ 22.5531 °	+ 28.6200 °	+ 5.4914 m
- 90 °	- 28.6200 °	- 22.5531 °	- 5.4914 m
+ 45 °	+ 12.5407 °	+ 14.3100 °	+ 10.8985 m
- 45 °	- 14.3100 °	- 12.5407 °	- 10.8985 m

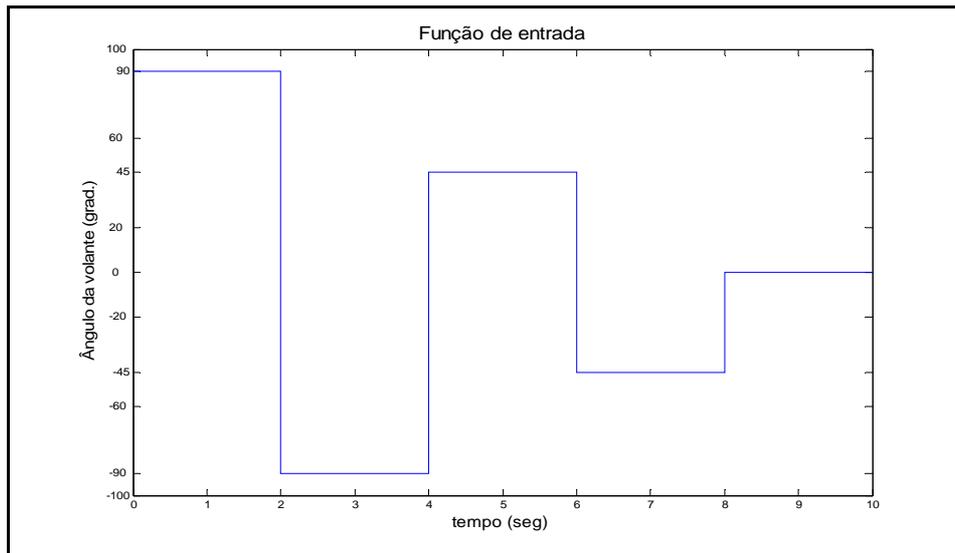


Figura 2.7. Função entrada da volante, ângulos estacionários.

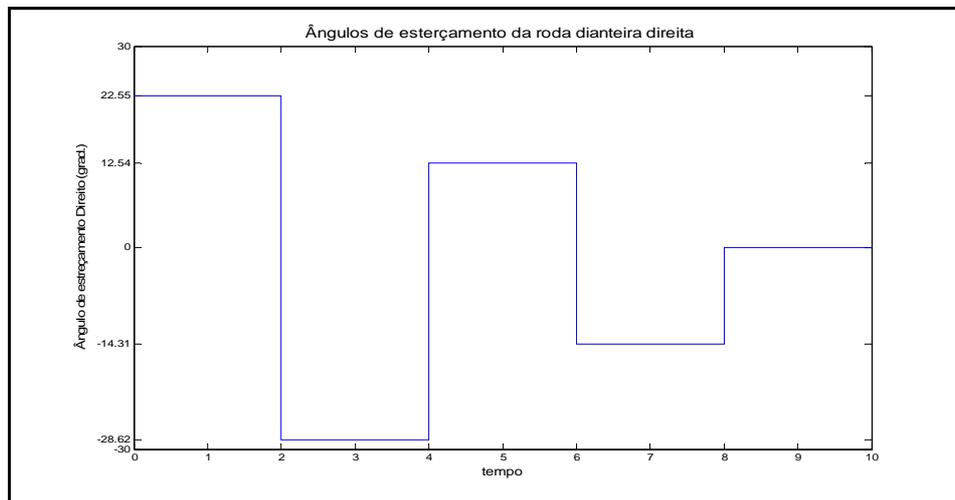


Figura 2.8. Ângulo de esterçamento da roda dianteira direita, ângulos estacionários.

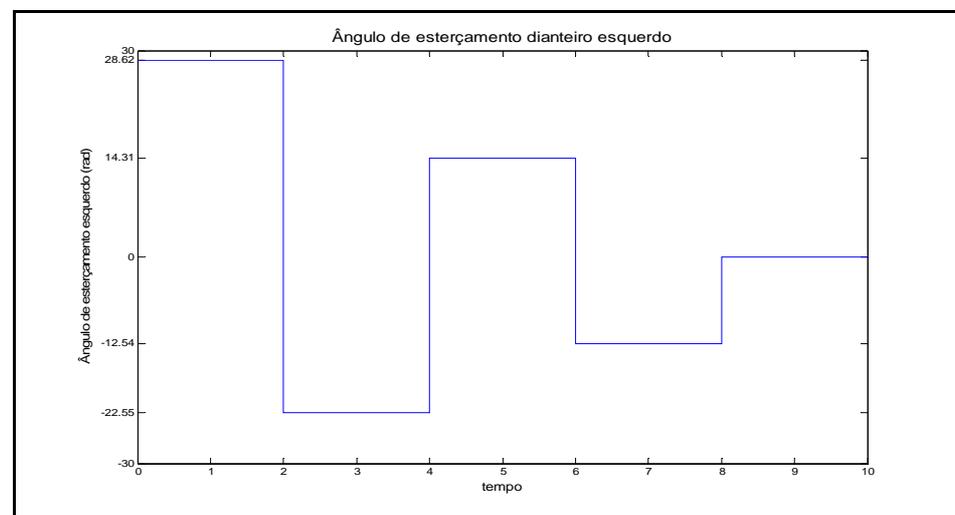


Figura 2.9. Ângulo de esterçamento da roda dianteira esquerda, ângulos estacionários.

Na Figura 2.10 apresenta-se uma função de entrada para o ângulo de esterçamento do volante com variação no tempo, desde  $0^\circ$  até  $90^\circ$  e  $-90^\circ$ , voltando ao  $0^\circ$ . As Figuras 2.11 e 2.12 mostram os resultados da simulação em *Simulink/Matlab*, os ângulos de esterçamento da roda direita e esquerda, respectivamente. Na Figura 2.13 apresenta-se a variação dos ângulos de esterçamento em relação ao ângulo do volante e na Figura 2.14 uma comparação direta entre estas variáveis. Nota-se nestes casos mais claramente a diferença entre os ângulos quando o esterçamento é feito em um sentido ou no outro.

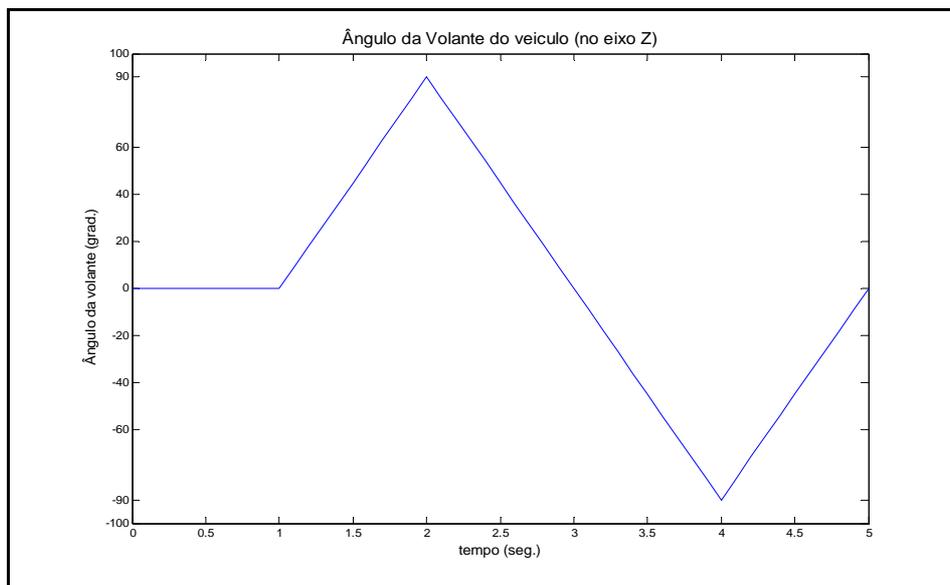


Figura 2.10. Função de entrada para o ângulo da volante.

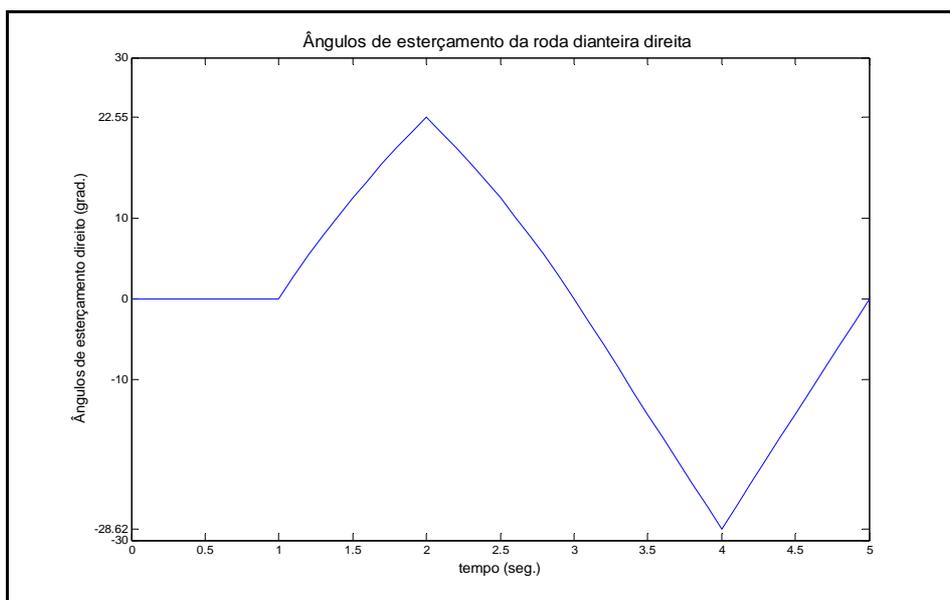


Figura 2.11. Ângulo de esterçamento da roda dianteira direita.

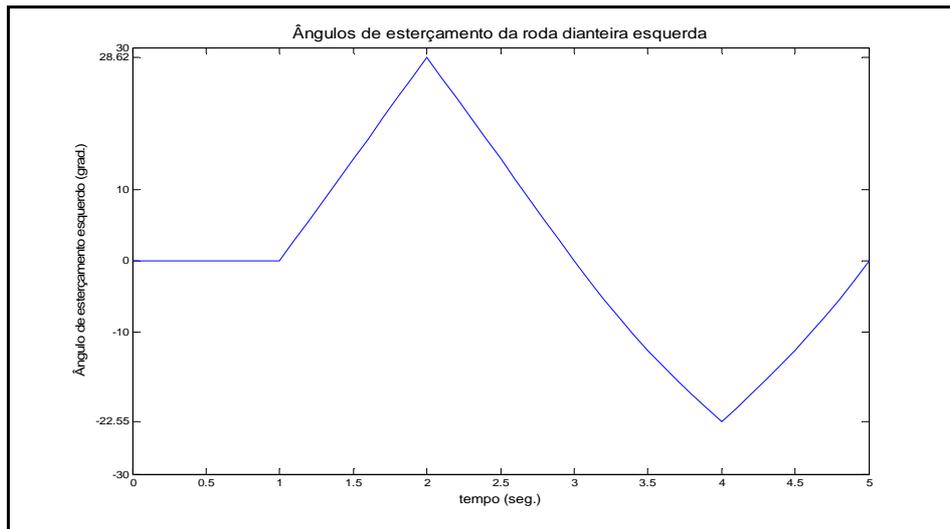


Figura 2.12. Ângulo de esterçamento da roda dianteira esquerda.

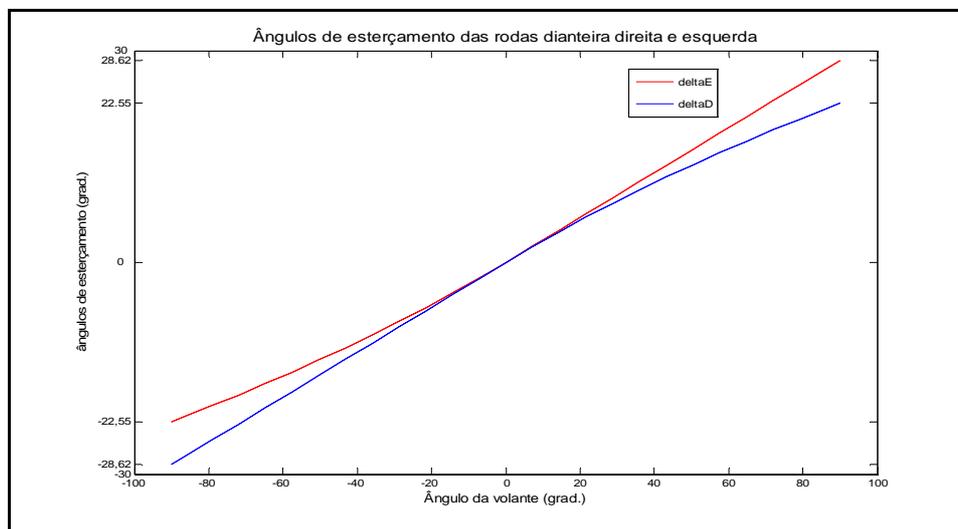


Figura 2.13. Ângulos de esterçamento em função ao ângulo da volante.

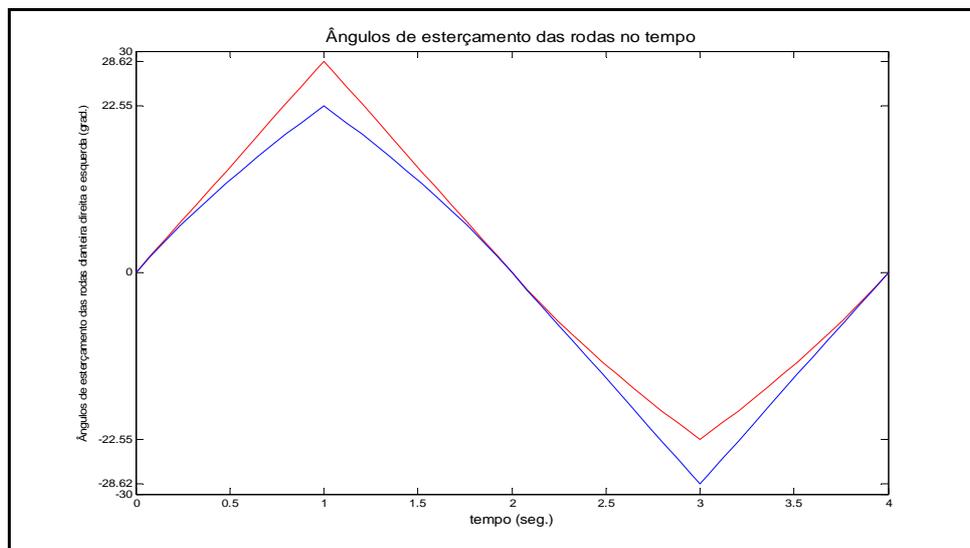


Figura 2.14. Comparação entre os ângulos de esterçamento das rodas.

### 2.2.2 Ângulos de deriva

O ângulo de deriva corresponde à diferença entre a trajetória pretendida pelo motorista, que atua sobre o carro ao alterar os ângulos de esterçamento, e a trajetória realmente cumprida. Na Figura 2.15 se mostra como este ângulo é gerado [13] para o modelo bicicleta, e na Figura 2.16 apresenta-se a semelhança desta variável com aquela associada ao movimento de caminhar de um ser humano: quando o veículo se desloca lateralmente, gera-se uma força lateral que provoca uma deformação do pneumático, e esta por sua vez irá propiciar a modificação na direção do movimento do veículo.

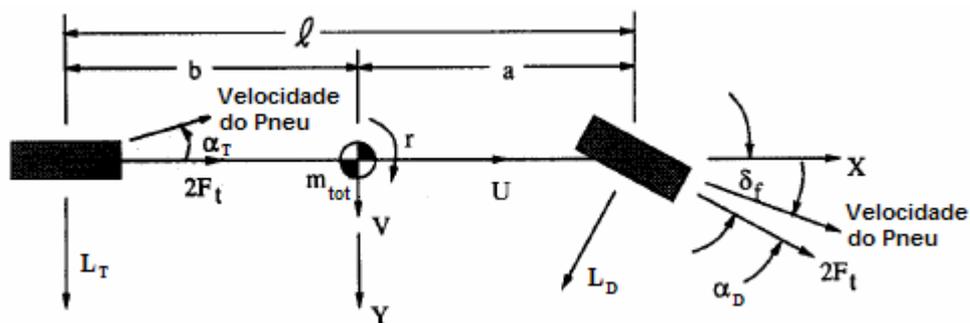


Figura 2.15. Identificação dos ângulos de deriva.

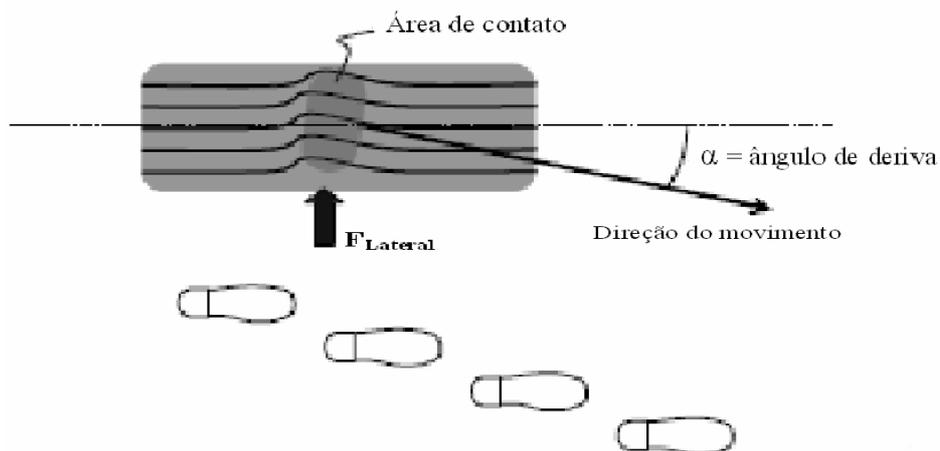


Figura 2.16. Comportamento do ângulo de deriva.

As Equações 2.42, 2.43, 2.44 e 2.45, definem os ângulos de deriva em cada pneu: dianteiro direito (DD), dianteiro esquerdo (DE), traseiro direito (TD) e traseiro esquerdo (TE) respectivamente, em função do ângulo de esterçamento e

das velocidades longitudinal, lateral e angular de *yaw* do veículo e da posição dos pneus em relação ao centro de massa no referencial local, de acordo com

$$\alpha_{DD} = \delta_D - \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\dot{y} + a\dot{\theta}}{\dot{x} + \frac{t_f}{2}\dot{\theta}} \right) \quad (2.42)$$

$$\alpha_{DE} = \delta_E - \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\dot{y} + a\dot{\theta}}{\dot{x} - \frac{t_f}{2}\dot{\theta}} \right) \quad (2.43)$$

$$\alpha_{TD} = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{-\dot{y} + b\dot{\theta}}{\dot{x} + \frac{t_r}{2}\dot{\theta}} \right) \quad (2.44)$$

$$\alpha_{TE} = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{-\dot{y} + b\dot{\theta}}{\dot{x} - \frac{t_r}{2}\dot{\theta}} \right) \quad (2.45)$$

Para avaliar o modelo do ângulo de deriva, supõe-se um ângulo do volante de  $45^\circ$ , o que gera, segundo a geometria de Ackermann, ângulos de esterçamento direito e esquerdo nas rodas de

$$\delta_{DD} = 12,54^\circ$$

$$\delta_{DE} = 14,31^\circ$$

Para testar o modelo em um estado não estacionário, supõe-se as velocidades de *yaw* desde 0 até 0,2 rad/s e lateral de 0 até 2 m/s variando linearmente, como mostrado nas Figura 2.17 e 2.18, mas mantendo a velocidade longitudinal constante em 20 m/s. As Equações 2.42 a 2.45 foram implementadas em *Simulink/Matlab*, e os resultados obtidos são mostrados na Figura 2.19, na qual os ângulos de deriva apresentam o comportamento esperado. Por exemplo, o ângulo de deriva dianteiro inicial é igual ao ângulo de esterçamento, e vai diminuindo. Já os ângulos de deriva traseiros iniciam em zero e vão crescendo negativamente.

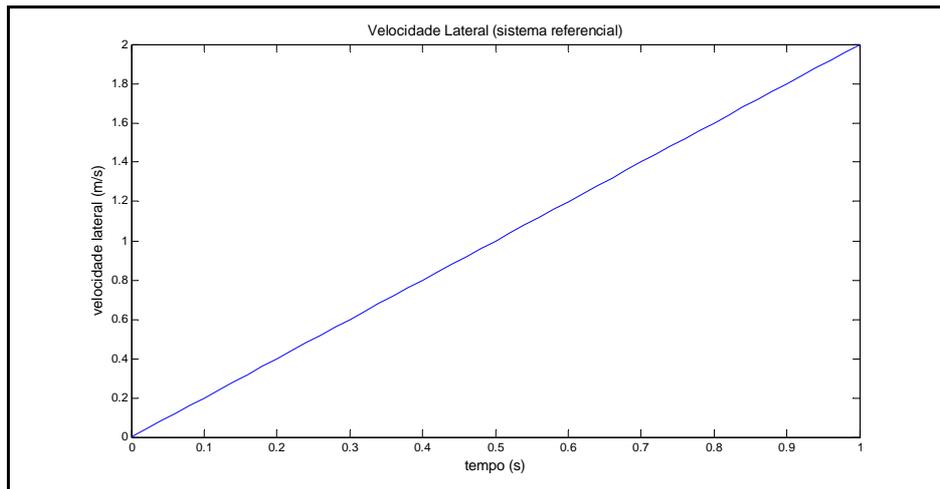


Figura 2.17. Função entrada da velocidade lateral para avaliar os ângulos de deriva.

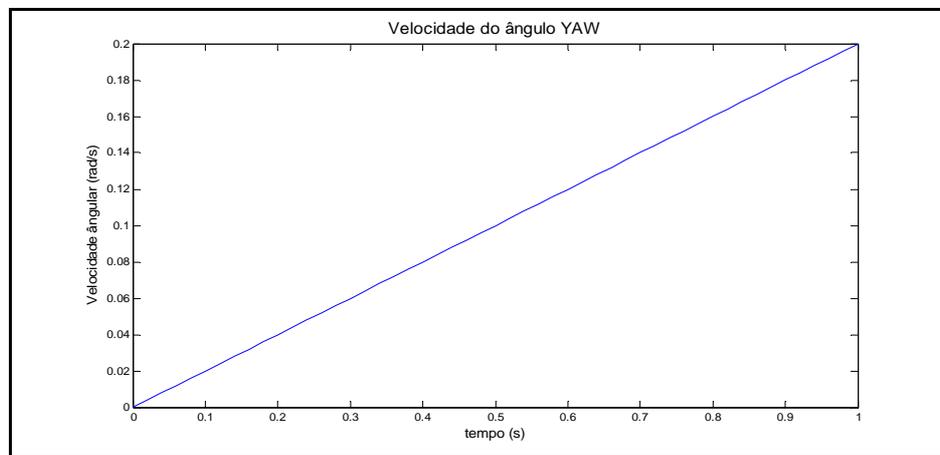


Figura 2.18. Função entrada da velocidade do yaw para avaliar os ângulos de deriva.

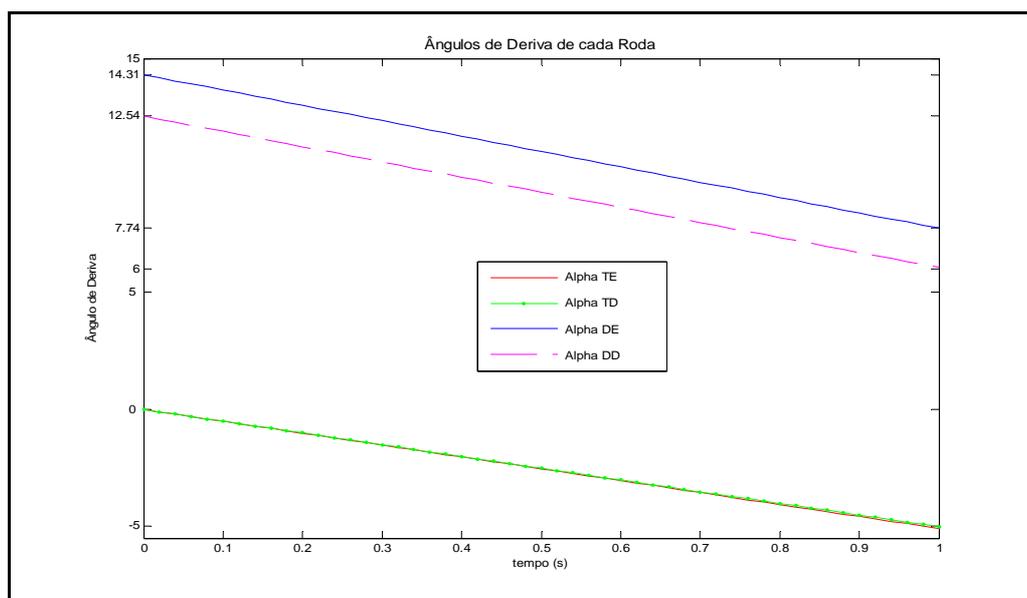


Figura 2.19. Ângulo de deriva de cada pneumático para uma função de entrada conhecida.

### 2.2.3

#### Forças laterais nos pneus

Apresenta-se agora o modelo adotado para as forças laterais ( $L_i$ ), que dependem dos ângulos de deriva e da rigidez lateral dos pneus. Não se pretendeu desenvolver todo o equacionamento para forças laterais, mas sim interpretar um modelo já consagrado, encontrado na documentação especializada [13]. As forças laterais podem ser expressas por

$$L_i = \frac{C_\alpha \operatorname{tg} \alpha_i}{1 - \lambda_s} f(S) \quad \therefore \quad i = DE, DD, TE, TD \quad (2.46)$$

onde  $f(S)$  é a relação de aderência característica do pneu, descrita por

$$f(S) = \begin{cases} S(2-S) & \text{se } S \leq 1 \\ 1 & \text{se } S > 1 \end{cases} \quad (2.47)$$

$$S = \frac{\mu F_{Ni} \left(1 - \varepsilon_r U \sqrt{\lambda_s^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha_i}\right)}{2 \sqrt{C_x^2 \lambda_s^2 + C_\alpha^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_i}} (1 - \lambda_s) \quad (2.48)$$

na qual as constantes são definidas como

$\mu$  - Coeficiente de Aderência à Pista

$F_{Ni}$  - Força Normal do  $i$ -ésimo pneu

$\varepsilon_r$  - Fator de Redução da Aderência da Pista

$U$  - Velocidade Longitudinal

$\lambda_s$  - Deriva Longitudinal

$C_\alpha$  - Rigidez Lateral

$\alpha_i$  - Ângulo de Deriva do  $i$ -ésimo Pneu

As Equações 2.46, 2.47 e 2.48 descrevem um modelo muito complexo, dependente de muitas variáveis, que pode ser simplificado por uma função linear para ângulos de deriva pequenos (Figuras 2.20 e 2.21), e como uma constante para ângulos acima de determinados valores. Então pode-se empregar uma representação para as forças laterais  $L_i$ , onde se considera a aproximação para pequenos deslocamentos angulares (menores a  $8^\circ$ ), e adotar as Equações 2.49, 2.50, 2.51 e 2.52,

$$L_{DD} = C_{DD} \cdot \alpha_{DD} \quad (2.49)$$

$$L_{DE} = C_{DE} \cdot \alpha_{DE} \quad (2.50)$$

$$L_{TD} = C_{TD} \cdot \alpha_{TD} \quad (2.51)$$

$$L_{TE} = C_{TE} \cdot \alpha_{TE} \quad (2.52)$$

nas quais  $C_{DE}$ ,  $C_{DD}$  e  $C_{TE}$ ,  $C_{TD}$  correspondem aos coeficientes de rigidez lateral dos pneus dianteiro esquerdo, dianteiro direito, traseiro esquerdo e traseiro direito, respectivamente, que podem ser reduzidos a  $C_f$  e  $C_r$ , considerando que os pneus são iguais nos dois lados da dianteira e nos dois da traseira.

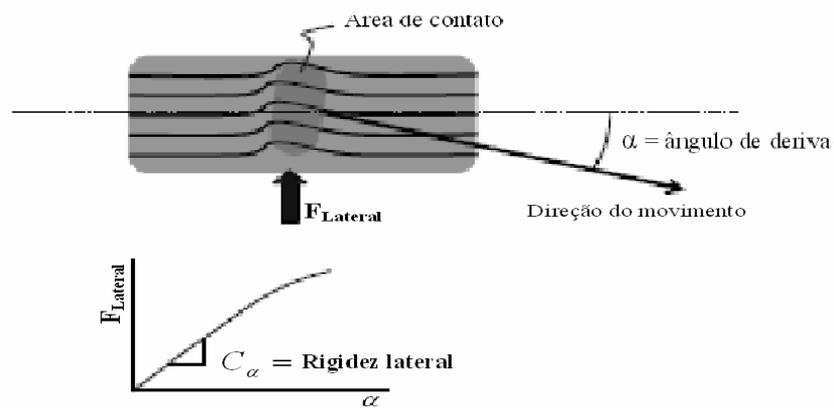


Figura 2.20. Curva característica dos ângulos de deriva.

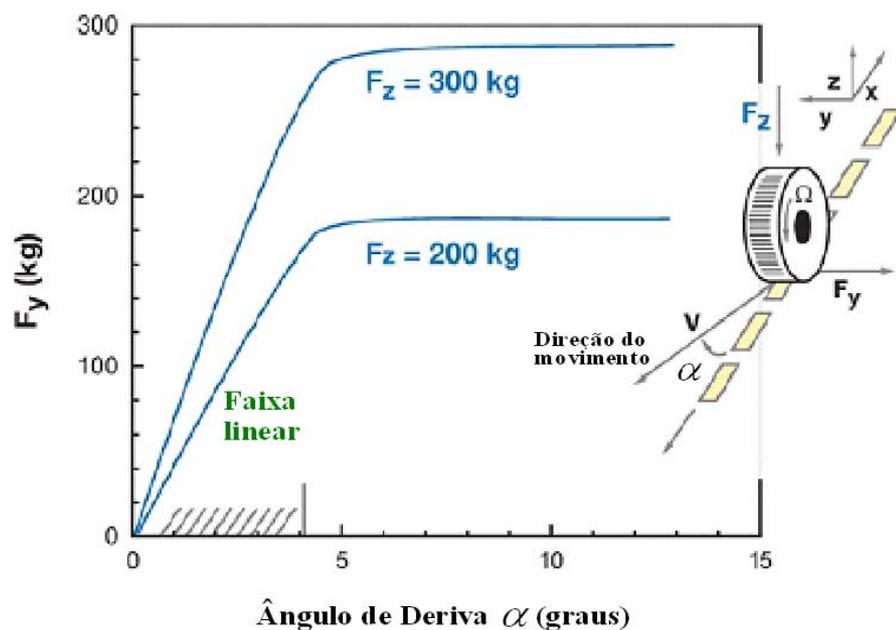


Figura 2.21. Força lateral em função ao ângulo de deriva. [17]

Como se pode ver na Figura 2.21, quando o ângulo de deriva é grande a força lateral tende a ser constante [17]. Uma vez que se pretende trabalhar com veículos de competição em altas velocidades, que percorrem pistas lisas [9], nestas condições, os ângulos de deriva são pequenos, o que é uma característica inerente aos carros de corrida, portanto a consideração de adotar o modelo linear é bastante aceitável. Emprega-se coeficientes de rigidez dos pneus,  $C_f = C_r = 60000$  N/rad, com variação linear para a força com ângulos de deriva entre  $\langle -8,8 \rangle$ ; para ângulos maiores a força será constante, dada pelo produto correspondente [14].

## 2.2.4

### Geometria do veículo

Descrevem-se agora as forças externas que atuam sobre o veículo e as formas como elas afetam o modelo matemático. Como se conhecem as relações que estabelecem as forças nos pneus, pode-se escrever as forças resultantes em  $x$ ,  $y$  e os momentos correspondentes.

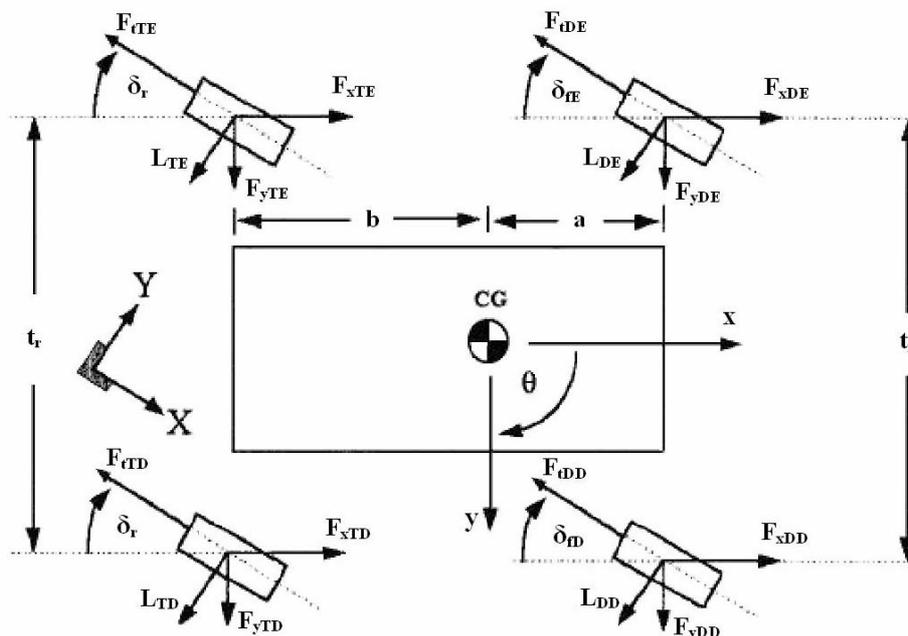


Figura 2.22. Orientação dos componentes das forças nos pneus.

Na Figura 2.22 se mostra cada componente das forças nos eixos  $x$  e  $y$ . A distribuição destas forças gera um momento que provoca o movimento de *yaw*.

Tais forças em cada um dos pneus são geradas pelos ângulos de esterçamento, como também as de frenagem, e dadas por

$$F_{xDE} = -C_{DE} \delta_b \cos \delta_{fE} - L_{DE} \text{sen} \delta_{fE} \quad (2.53)$$

$$F_{xDD} = -C_{DD} \delta_b \cos \delta_{fD} - L_{DD} \text{sen} \delta_{fD} \quad (2.54)$$

$$F_{xTE} = -C_{TE} \delta_b \cos \delta_r - L_{TE} \text{sen} \delta_r \quad (2.55)$$

$$F_{xTD} = -C_{TD} \delta_b \cos \delta_r - L_{TD} \text{sen} \delta_r \quad (2.56)$$

nas quais  $\delta_{fE}$  é o ângulo de esterçamento do pneu dianteiro esquerdo,  $\delta_{fD}$  é o ângulo de esterçamento do pneu dianteiro direito,  $\delta_r$  é o ângulo de esterçamento dos pneus traseiros esquerdo e direito,  $L_{DE}$  é a força lateral do pneu dianteiro esquerdo,  $L_{DD}$  é a força lateral do pneu dianteiro direito,  $L_{TE}$  é a força lateral do pneu traseiro esquerdo,  $L_{TD}$  é a força lateral do pneu traseiro direito,  $\delta_b$  é ângulo do pedal do freio,  $C_{DE}$ ,  $C_{DD}$  e  $C_{TE}$ ,  $C_{TD}$  correspondem aos coeficientes de rigidez dos pneus, respectivamente.

Nestas equações tem-se as forças produzidas pela frenagem do veículo, forças longitudinais de cada pneumático, são descritas por:  $F_{iDE} = C_{DE} \delta_b$ ,  $F_{iDD} = C_{DD} \delta_b$ ,  $F_{iTE} = C_{TE} \delta_b$ ,  $F_{iTD} = C_{TD} \delta_b$ , como o modelo final desta dissertação se quer para velocidade constante, não se calculará as forças longitudinais, por quanto não se explica muito da modelagem das forças de frenagem e apenas se apresentam nas equações já simplificadas; para mais informação sobre este tema são mostradas na referência bibliográfica artigos que podem explicar mais amplamente o desenvolvimentos destas forças, em especial a referência [13].

A força total no eixo  $x$  corresponde ao somatório das relações descritas anteriormente, isto é a soma das Equações 2.53, 2.54, 2.55 e 2.56, dando como resultado a Equação 2.57,

$$F_x = -(C_{DE} \delta_b \cos \delta_{fE} + C_{DD} \delta_b \cos \delta_{fD}) - (C_{TE} + C_{TD}) \delta_b \cos \delta_r - (L_{DE} \text{sen} \delta_{fE} + L_{DD} \text{sen} \delta_{fD}) - (L_{TE} + L_{TD}) \text{sen} \delta_r \quad (2.57)$$

Para o eixo  $y$ , a análise em cada pneu é muito similar, levando à

$$F_{yDE} = -C_{DE} \delta_b \text{sen} \delta_{fE} + L_{DE} \cos \delta_{fE} \quad (2.58)$$

$$F_{yDD} = -C_{DD} \delta_b \text{sen} \delta_{fD} + L_{DD} \cos \delta_{fD} \quad (2.59)$$

$$F_{yTE} = -C_{TE} \delta_b \text{sen} \delta_r + L_{TE} \cos \delta_r \quad (2.60)$$

$$F_{yTD} = -C_{TD} \delta_b \text{sen} \delta_r + L_{TD} \cos \delta_r \quad (2.61)$$

Sendo a força total no eixo  $y$  simplesmente a soma das Equações 2.58, 2.59, 2.60 e 2.61,

$$F_y = -(C_{DE} \delta_b \text{sen} \delta_{fE} + C_{DD} \delta_b \text{sen} \delta_{fD}) - (C_{TE} + C_{TD}) \delta_b \text{sen} \delta_r + (L_{DE} \cos \delta_{fE} + L_{DD} \cos \delta_{fD}) + (L_{TE} + L_{TD}) \cos \delta_r \quad (2.62)$$

Do mesmo modo que para as forças também o momento de *yaw* é analisado para cada pneu em particular, levando às Equações 2.63, 2.64, 2.65 e 2.66, e ao momento total em torno do CG, obtido pelo somatório da Equação 2.67, dadas por

$$M_{DE} = -\delta_b C_{DE} a \text{sen} \delta_{fE} - \delta_b C_{DE} \frac{t_f}{2} \cos \delta_{fE} + a L_{DE} \cos \delta_{fE} - \frac{t_f}{2} L_{DE} \text{sen} \delta_{fE} \quad (2.63)$$

$$M_{DD} = -\delta_b C_{DD} a \text{sen} \delta_{fD} + \delta_b C_{DD} \frac{t_f}{2} \cos \delta_{fD} + a L_{DD} \cos \delta_{fD} + \frac{t_f}{2} L_{DD} \text{sen} \delta_{fD} \quad (2.64)$$

$$M_{TE} = \delta_b C_{TE} b \text{sen} \delta_r - \delta_b C_{TE} \frac{t_r}{2} \cos \delta_r - b L_{TE} \cos \delta_r - \frac{t_r}{2} L_{TE} \text{sen} \delta_r \quad (2.65)$$

$$M_{TD} = \delta_b C_{TD} b \text{sen} \delta_r + \delta_b C_{TD} \frac{t_r}{2} \cos \delta_r - b L_{TD} \cos \delta_r - \frac{t_r}{2} L_{TD} \text{sen} \delta_r \quad (2.66)$$

$$M_z = M_{DE} + M_{DD} + M_{TE} + M_{TD} \quad (2.67)$$

Considerando a velocidade constante, para avaliar o equacionamento realizado, tem-se  $\delta_b = 0$  (ângulo do pedal do freio, para velocidade constante), faz-se uma simulação para a velocidade angular de *yaw* variando 0 até 0,2 rad/s, a velocidade lateral de 0 até 2 m/s, com velocidade longitudinal (constante) igual a 20 m/s, e os ângulos de esterçamento constantes  $\delta_{DD} = 12,54$ ,  $\delta_{DE} = 14,31$ . O comportamento para os ângulos de deriva fica o mesmo da Figura 2.19, já que as condições são iguais àquelas empregadas para a avaliação dessas variáveis. As Figuras 2.23 a 2.24 mostram os resultados encontrados através do *Simulink/Matlab* para as forças nos eixos  $x$  e  $y$  e o momento de *yaw*. Os resultados expressam o que acontece com o modelo quando se faz uma manobra instantânea: o veículo inicialmente está se movimentando longitudinalmente a uma velocidade constante dada, quando instantaneamente se geram ângulos de estercimentos  $\delta_{DD} = 12,54$  e  $\delta_{DE} = 14,31$

mantidos constantes no tempo. Nestas condições a força lateral inicialmente é muito grande e ao longo do tempo diminui. Já que os ângulos de deriva diminuem, e também se espera que o momento que gera o movimento de *yaw* seja inicialmente muito grande e depois diminua. Este comportamento é assim por que se faz uma manobra instantânea, com isto se leva o sistema veicular de um estado estável a um com variáveis continuamente crescentes ou decrescentes.

A Figura 2.23 mostra a variação da força longitudinal, devida apenas à projeção da força lateral gerada pelo ângulo de deriva. Na verdade a força longitudinal deveria ser nula, uma vez que supõe-se o modelo com velocidade constante, mas há o efeito da projeção da força lateral. Os resultados mostrados nas figuras 2.24 e 2.25 são os esperados, expressando um comportamento lógico do veículo, o que permite dizer que o modelo foi considerado de acordo com os objetivos a que se propõe.

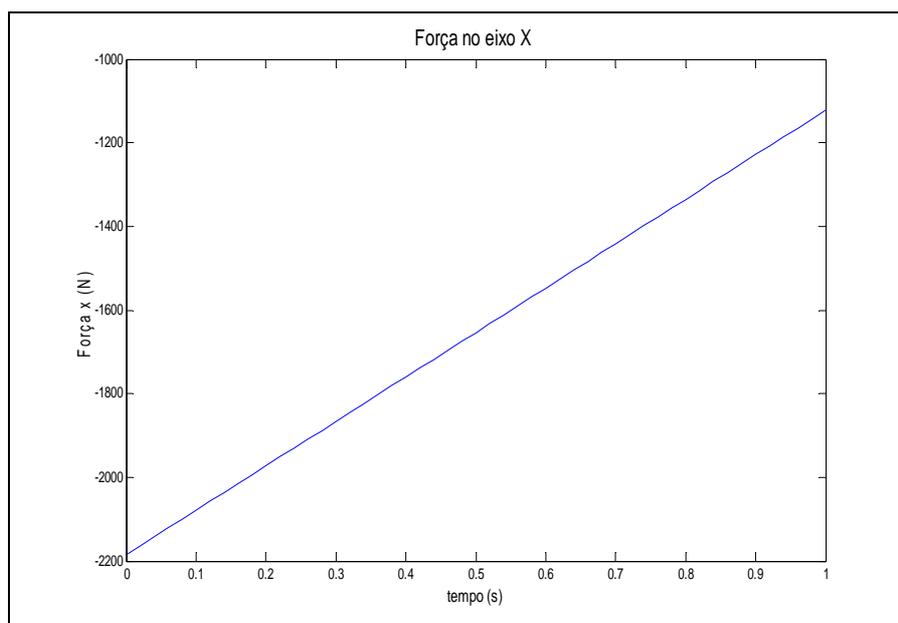


Figura 2.23. Força no eixo  $x$ , teste de modelo das forças no plano  $xy$ .

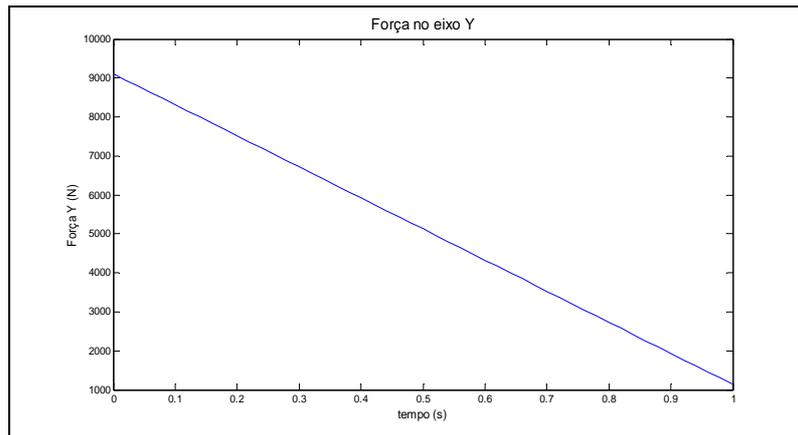


Figura 2.24. Força no eixo  $y$ , teste de modelo das forças no plano  $xy$ .

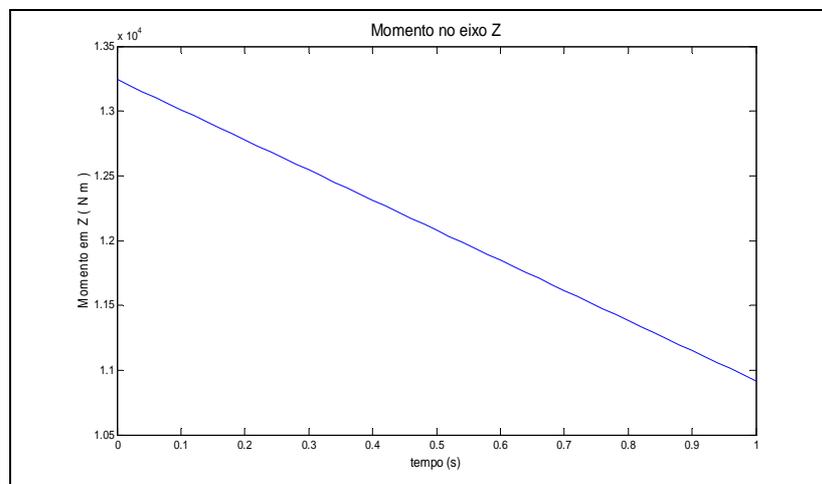


Figura 2.25. Momento no eixo  $z$ , teste de modelo das forças no plano  $xy$ .

## 2.2.5 Forças normais nos pneus

As forças normais no modelo tratado até este item são compostas pelas transferências de cargas devidas aos movimentos laterais, identificadas como carga devida à rolagem do corpo do veículo ( $F_{rf}$ ,  $F_{rr}$ ), dadas pelas Equações 2.68 e 2.69, carga devida à altura do centro de rolagem ( $F_{hf}$ ,  $F_{hr}$ ), mostradas nas Equações 2.70 e 2.71, e carga devida à massa não-suspensa ( $F_{uf}$ ,  $F_{ur}$ ), dadas nas Equações 2.72 e 2.73, de acordo com [13],

$$F_{rf} = \frac{\kappa_f h_s m_s a_y}{\kappa_{roll} t_f} \quad (2.68)$$

$$F_{rr} = \frac{\kappa_r h_s m_s a_y}{\kappa_{roll} t_r} \quad (2.69)$$

$$F_{hf} = \frac{m_s b h_f a_y}{t_f (a + b)} \quad (2.70)$$

$$F_{hr} = \frac{m_s a h_r a_y}{t_r (a + b)} \quad (2.71)$$

$$F_{uf} = m_{uf} a_y \frac{h_f}{t_f} \quad (2.72)$$

$$F_{ur} = m_{ur} a_y \frac{h_r}{t_r} \quad (2.73)$$

nas quais  $h_f$  representa a altura da massa suspensa dianteira,  $h_{CG}$  representa a altura do CG,  $h_r$  representa a altura da massa suspensa traseira,  $\kappa_{roll}$  representa a rigidez de rolagem dada por

$$\kappa_{roll} = \kappa_f + \kappa_r \quad (2.74)$$

onde  $\kappa_f$  e  $\kappa_r$  representam os parâmetros de rigidez de rolagem dianteira e traseira respectivamente, e os termos  $K_f$  e  $K_r$  dados

$$\kappa_f = \frac{1}{2} K_f t_f^2 \quad (2.75)$$

$$\kappa_r = \frac{1}{2} K_r t_r^2 \quad (2.76)$$

caracterizam respectivamente a rigidez das suspensões dianteira e traseira.

Devem ser ainda consideradas outras duas componentes nas forças definidas anteriormente. A primeira é a carga normal devida à ação de frenagem ( $F_{bf}$ ,  $F_{br}$ ), mostrada nas Equações 2.77 e 2.78, e a segunda proveniente das cargas estáticas que agem sobre os pneus ( $F_{Nsf}$ ,  $F_{Nsr}$ ), dadas nas Equações 2.79 e 2.80, levando às cargas devido à frenagem estática, como tratado em [13],

$$F_{bf} = (m_{uf} h_f + m_s h_{cg} + m_{ur} h_r) \frac{a_x}{a + b} \quad (2.77)$$

$$F_{br} = -(m_{uf} h_f + m_s h_{cg} + m_{ur} h_r) \frac{a_x}{a + b} = -F_{bf} \quad (2.78)$$

$$F_{Nsf} = \frac{b m_{tot} g}{a + b} \quad (2.79)$$

$$F_{Nsr} = \frac{a m_{tot} g}{a + b} \quad (2.80)$$

Finalmente escrevem-se as equações das forças normais em cada pneu, baseado em suas componentes determinadas anteriormente, levando a

$$F_{NDD} = F_{rf} + F_{hf} + F_{uf} - \frac{1}{2}F_{bf} + \frac{1}{2}F_{Nsf} \quad (2.81)$$

$$F_{NDE} = -F_{rf} - F_{hf} - F_{uf} - \frac{1}{2}F_{bf} + \frac{1}{2}F_{Nsf} \quad (2.82)$$

$$F_{NTD} = F_{rr} + F_{hr} + F_{ur} - \frac{1}{2}F_{br} + \frac{1}{2}F_{Nsr} \quad (2.83)$$

$$F_{NTE} = -F_{rr} - F_{hr} - F_{ur} - \frac{1}{2}F_{br} + \frac{1}{2}F_{Nsr} \quad (2.84)$$

Para avaliar este modelo, consideram-se os dados da Tabela 1, para os parâmetros geométricos e físicos de um veículo de passeio, realizam-se duas simulações:

Inicialmente, considerou-se a aceleração longitudinal nula ( $a_x = 0$ ) e a aceleração lateral  $a_y$  variável segundo uma senoide de amplitude 0,5 ( $m/s^2$ ), como mostrado na Figura 2.26, que, quando é positiva, faz o veículo se movimentar para esquerda, e conseqüentemente rolar para a direita, fazendo com que as forças sejam maiores nesse lado. Na Figura 2.27 se encontram os resultados obtidos em *Simulink/Matlab*. Nota-se o comportamento esperado: quando o veículo se movimenta para a esquerda, se inclina pela direita, e as forças normais nas rodas que estão na direita aumentam, e as das rodas esquerdas diminuem, o ocorrendo o contrário para o sentido inverso.

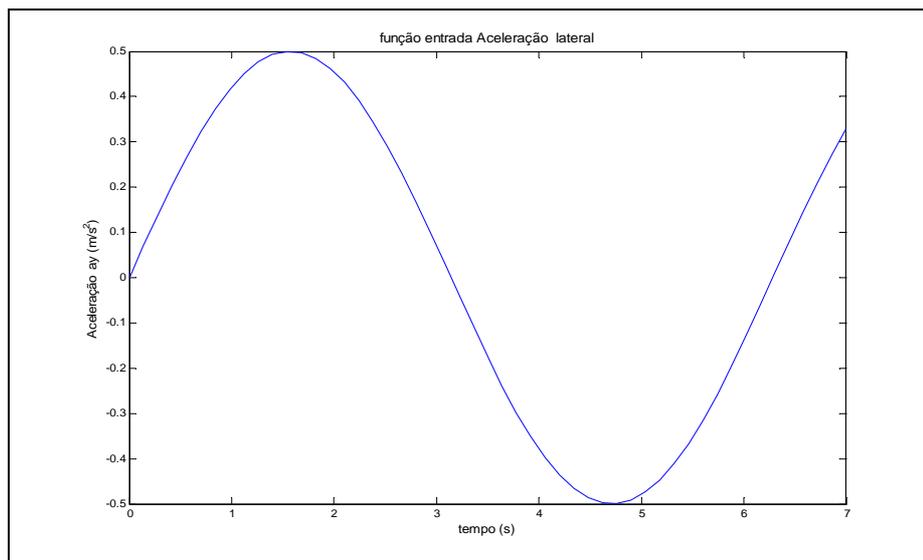


Figura 2.26. Função da aceleração lateral variável.

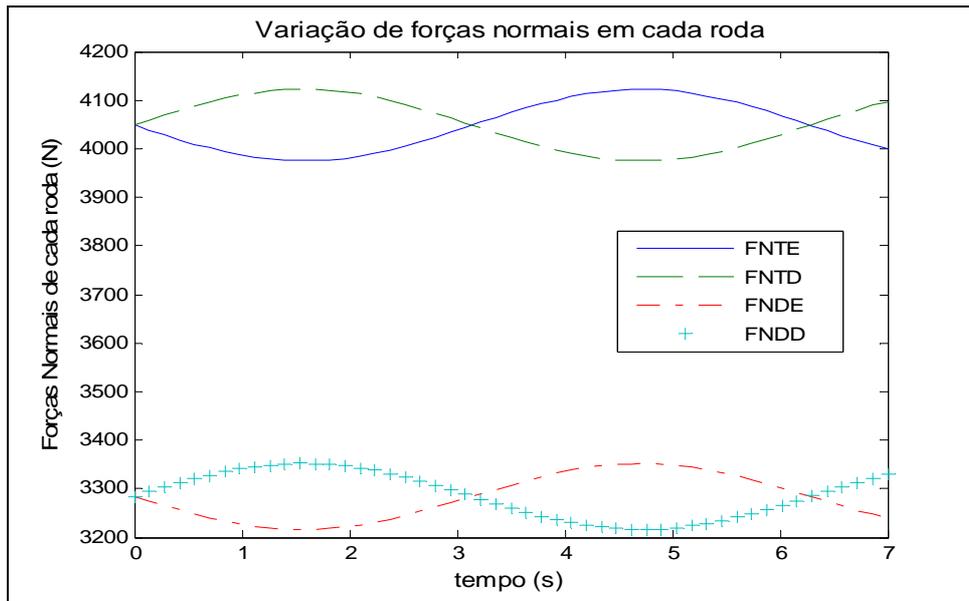


Figura 2.27. Forças normais em cada pneumático, com aceleração lateral variável.

Um outro teste é feito com aceleração lateral nula ( $a_y = 0$ ) e aceleração longitudinal variável, segundo uma função senoidal de amplitude  $0,5 \text{ (m/s}^2\text{)}$ , como mostrado na Figura 2.28. Neste caso, o veículo inicialmente acelera, fazendo o peso se deslocar para as rodas traseiras, ocorrendo o oposto em seguida, como mostrado na Figura 2.29.

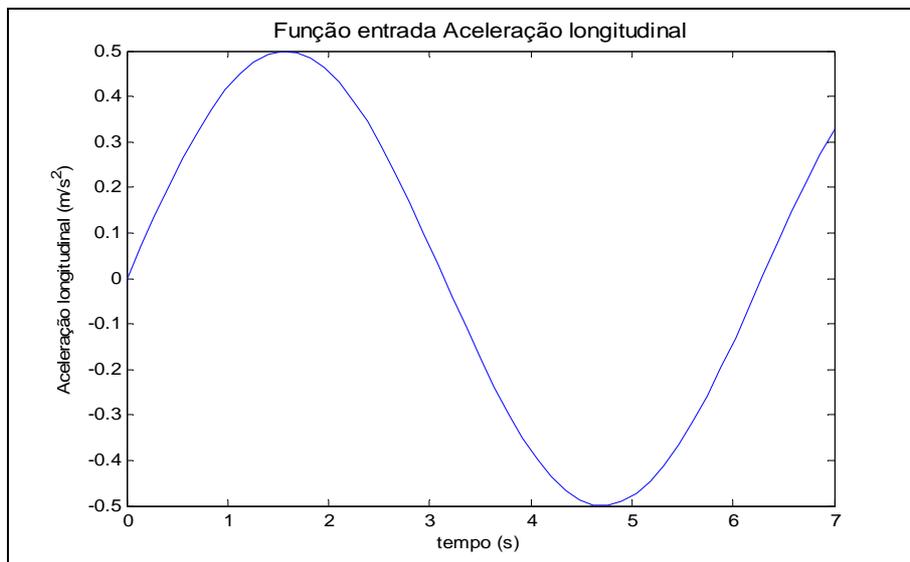


Figura 2.28. Função da aceleração longitudinal variável.

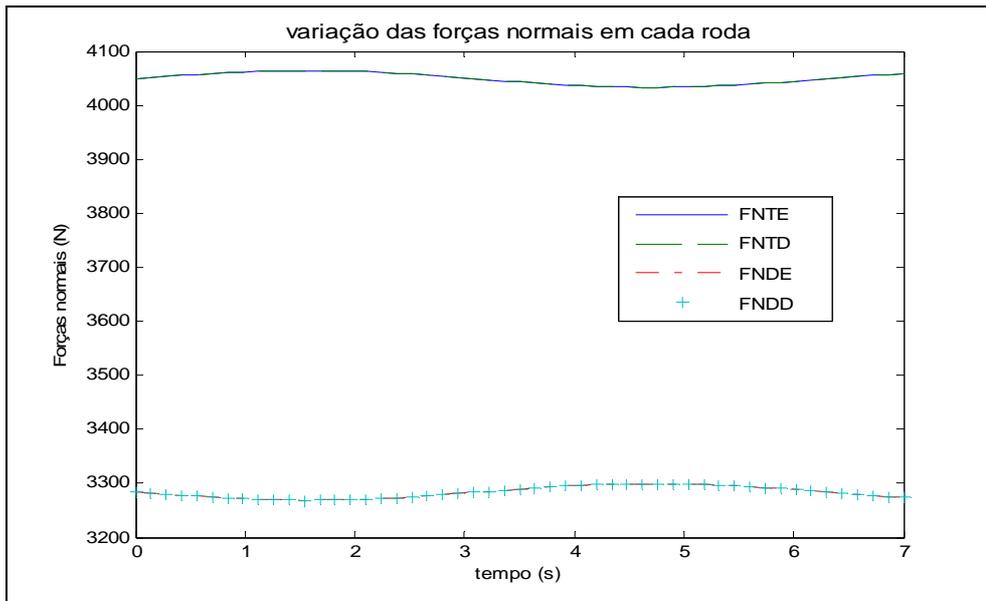


Figura 2.29. Forças normais em cada pneumático, com aceleração longitudinal variável.

## 2.2.6

### Forças aerodinâmicas

Este tipo de força é muito importante nos veículos de competição, pois devido a elas manobras com maiores acelerações podem ser realizadas. Apresenta-se a seguir um modelo aerodinâmico, de modo a definir as equações matemáticas que descrevem como este fenômeno influencia o comportamento do veículo.

Inicialmente considera-se a força frontal ou força de arrasto, que se opõe ao movimento, e depende da geometria do veículo, das condições atmosféricas no local, e da velocidade, de acordo com

$$F_{AD} = C_{AD} \cdot A \cdot \frac{\rho_{ar}}{2} \cdot v^2 \quad (2.85)$$

na qual  $C_{AD}$  é o coeficiente de arrasto frontal,  $A$  é a projeção da área frontal do veículo,  $\rho_{ar}$  é massa específica do ar,  $v$  é a velocidade relativa frontal do veículo em relação ao ar. Considerando que o ar tem velocidade nula, então  $v$  é a velocidade longitudinal do veículo.

O coeficiente de arrasto é normalmente medido experimentalmente. Para o modelo em questão emprega-se um valor médio encontrado em publicações [18], e aplicado aos veículos de competição, tipo Formula 1, tal que  $C_{AD} = 0,25$ . A área frontal projetada para um veículo de Formula 1, é aproximadamente  $A = 1,2$

m<sup>2</sup>. A massa específica do ar nas condições atmosféricas padrão (15° de temperatura e 101,325 kPa de pressão) é  $\rho_{ar} = 1,226$  (kg/m<sup>3</sup>). Deste modo tem-se

$$F_{AD} = 0,1839 \cdot v^2 \quad (2.86)$$

No caso da força vertical, o cálculo é bastante semelhante. Esta força, que nos veículos de competição é gerada intencionalmente pelos perfis aerodinâmicos, de modo que eles fiquem mais “grudados” na pista, levando a maiores forças nos pneus e conseqüentemente maior estabilidade, é dada por,

$$F_{AC} = C_{AC} \cdot A_L \cdot \frac{\rho_{ar}}{2} \cdot v^2 \quad (2.87)$$

onde  $C_{AC}$  é o coeficiente de sustentação negativa, para veículos de competição,  $A_L$  representa a projeção da área lateral superior do veículo, com um valor médio para veículos tipo Fórmula 1, de  $A_L = 4,1$  m<sup>2</sup>.

A obtenção de coeficiente  $C_{AC}$  se realiza mediante testes experimentais. Na Figura 2.30 se mostra uma curva característica para um veículo de competição, na qual tem-se a dependência dos valores do coeficiente  $C_{AC}$  em função da altura da abertura do rodapé do chassis. O seu valor médio está entre 1 e 1,4, segundo a documentação especializada sobre o tema [17]. Emprega-se aqui uma média, então  $C_{AC} = 1,2$ .

Deve-se lembrar que no sistema de referência local, o eixo  $z$  positivo tem direção vertical para cima, então o valor da força aerodinâmica sempre é negativo, dado por

$$F_{AC} = -3,016 \cdot v^2 \quad (2.88)$$

Estas forças serão acrescentadas à força normal em cada pneu em igual proporção. Na realidade ela atua no centro de pressão do veículo, que se localiza, geralmente, a alguns milímetros atrás do centro de massa, mas que varia durante o funcionamento do sistema. Neste caso será apenas considerado que a força é igualmente distribuída em cada pneu.

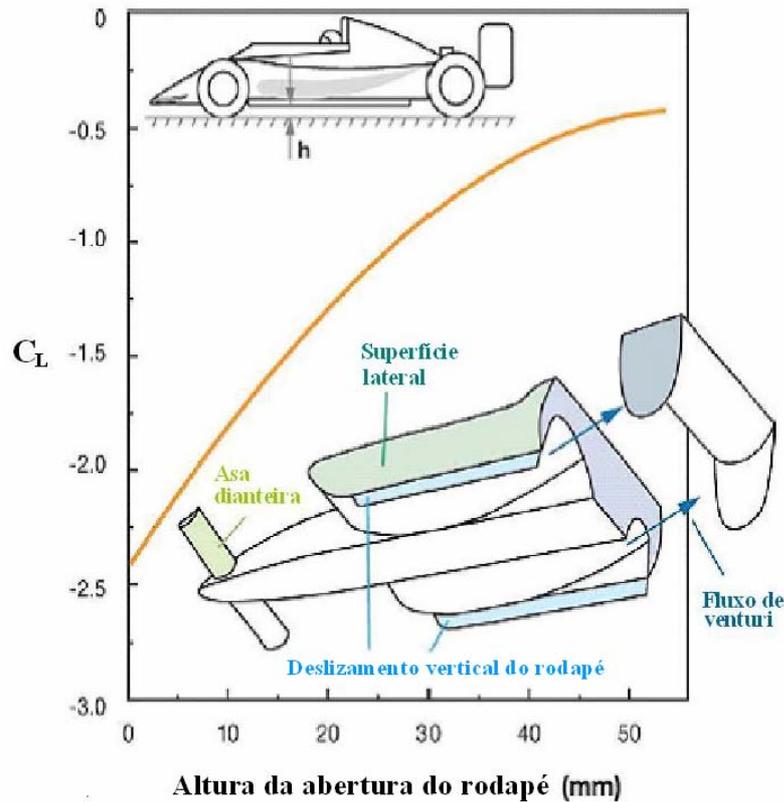


Figura 2.30. Valor médio do coeficiente de sustentação negativa. [17]

### 2.2.7 Transformação de Coordenadas

Todas as equações anteriores representam o modelo do veículo em um referencial local móvel, situado no próprio veículo, com origem no seu centro de massa, que a cada instante de tempo acompanha o veículo. Para determinar a trajetória é necessário transformar as coordenadas do modelo para um referencial global, fixo no espaço. A Figura 2.31 mostra os referenciais e variáveis envolvidos para obtenção da trajetória do veículo. A transformação de coordenadas é feita tomando as velocidades longitudinal e lateral do referencial local, e determinando as correspondentes velocidades no referencial global, dadas por

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{x} \cos \theta - \dot{y} \sin \theta \\ \dot{Y} = \dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta \end{cases} \quad (2.89)$$

onde  $\theta$  é obtido pela integração da velocidade de yaw. A partir das velocidades no referencial global é trivial obter a posição instantânea do centro de massa, por

integração destas variáveis. Os ângulos de *roll*, *pitch*, e *yaw* são os mesmos nos dois referenciais.

A avaliação deste modelo é bastante simples. As Figuras 2.32 a 2.34 apresentam os resultados encontrados no teste realizado no *Simulink/Matlab* empregando velocidades longitudinal, lateral e angular constantes.

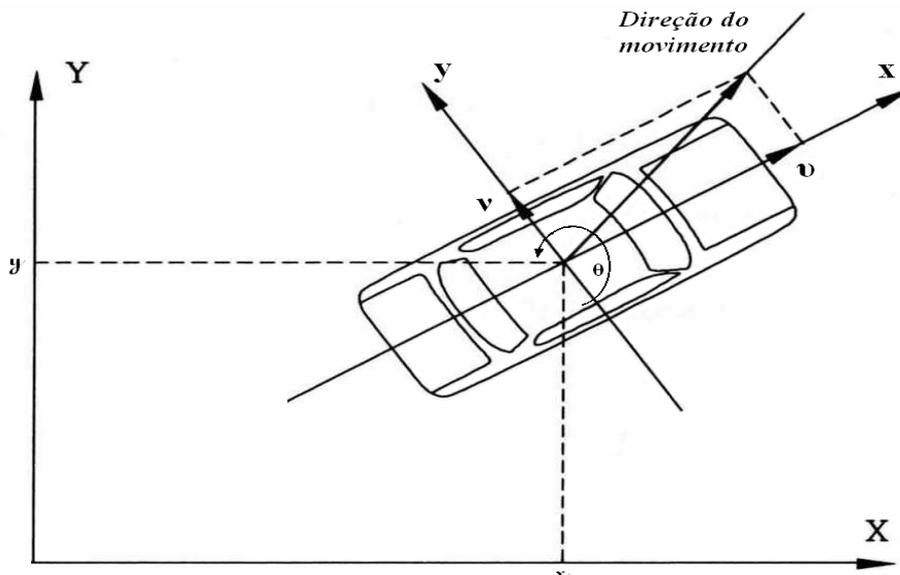


Figura 2.31. Sistemas de coordenadas local e global.

Se tanto a velocidade angular quanto a velocidade lateral são constantes, então o raio de curvatura também é constante, pelo qual se espera que a trajetória no sistema global seja uma circunferência.

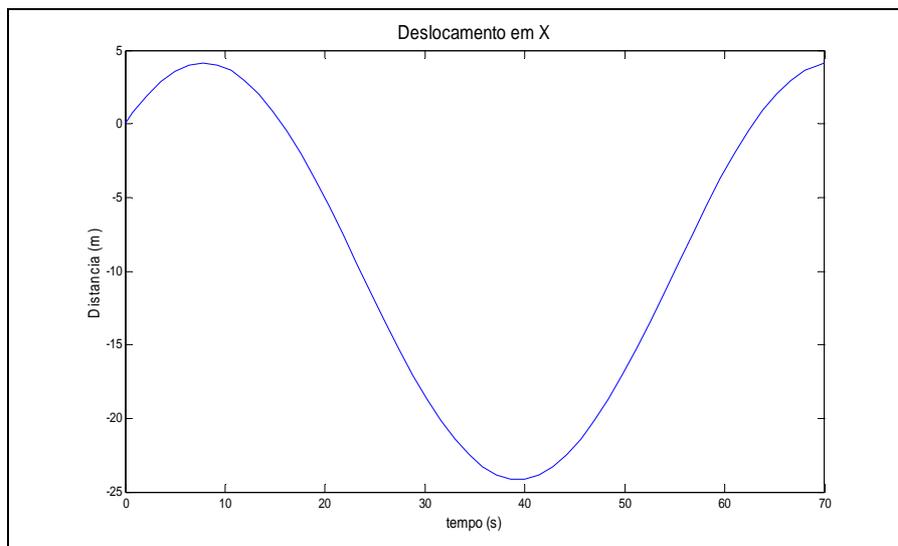


Figura 2.32. Deslocamento em  $x$ , teste da transformação de coordenadas.

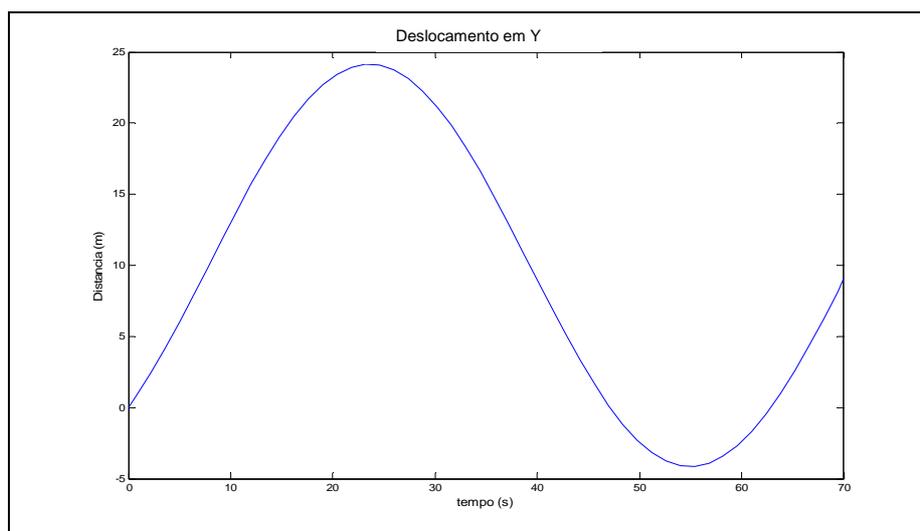


Figura 2.33. Deslocamento em y, teste da transformação de coordenadas.

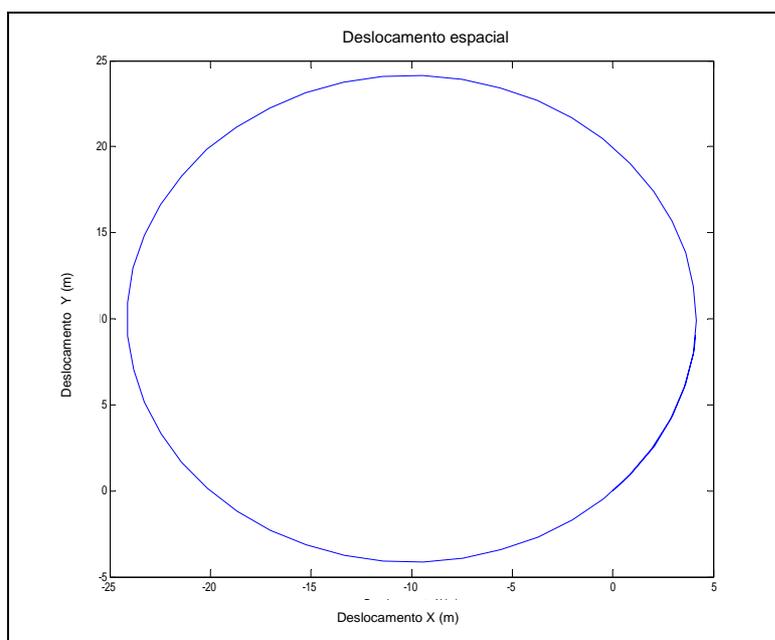


Figura 2.34. Deslocamento espacial, teste da transformação de coordenadas.

## 2.3

### Considerações sobre o modelo

Neste item discute-se a respeito dos limites do modelo desenvolvido e sobre as considerações que foram feitas para a simplificação do problema. Inicialmente pretendeu-se estabelecer um modelo que descrevesse o comportamento dinâmico do veículo de forma mais real possível, mas este é um problema muito complexo, no qual encontram-se envolvidas muitas equações de difícil estabelecimento e

resolução, envolvendo a interação de diversos subsistemas. Estas relações são normalmente não lineares, como é próprio da dinâmica veicular. Porém, em função da necessidade de aplicação do modelo se fez algumas considerações para diminuir a complexidade do tratamento matemático, resultando na representação apresentada anteriormente, e sobre a qual discute-se a seguir.

### 2.3.1 Equações de movimento

No caso aqui tratado, o modelo considera apenas a dinâmica longitudinal e a dinâmica lateral do veículo, negligenciando-se a dinâmica vertical. Esta representação é suficiente para simular um veículo de competição, percorrendo pistas planas, sem buracos ou desníveis, onde o movimento vertical é apenas afetado pela sua interação com as dinâmicas lateral e longitudinal, que é muito pequena, se comparada com os efeitos de outras fontes, tais como excitação de base, inexistentes por hipótese. Isto é, devido às dinâmicas lateral e longitudinal, quando o veículo freia ou acelera, ou faz manobras para variar a direção de seu movimento, gera-se uma aceleração vertical que é compensada pela reação dos amortecedores e molas, que são incluídos no modelo desenvolvido de forma global, mas não se tem uma representação detalhada da suspensão. Assume-se que o efeito de tais esforços no veículo é quase nulo, e portanto não é considerada no modelo a aceleração vertical do centro de gravidade, nem o movimento vertical é um grau de liberdade do sistema. Deve-se esclarecer que não está se supondo que  $\ddot{z} = 0$  e  $\dot{z} = 0$ . Sabe-se que essas variáveis não são nulas, mas assume-se que seus efeitos no movimento vertical são compensados pelos elementos da suspensão do veículo, e para os movimentos longitudinal e lateral tais efeitos são incluídos de forma global, por serem de ordem inferior aos demais.

Para a matriz de inércia do veículo se considera que esse é simétrico no plano  $xz$ , e portanto são eliminados dois produtos de inércia. Além disso, aquele em relação à  $xz$  ( $J_{xz}$ ) é muito pequeno, se comparado aos momentos de inércia. Fazendo um cálculo geométrico, pode-se chegar a um valor de 10% do menor momento de inércia do veículo, o que levaria a também desprezar este parâmetro em determinadas condições, tornando o modelo desacoplado em relação às variáveis de atitude, simplificando bastante o problema.

Os movimentos relacionados aos ângulos de *roll* e *pitch* estão descritos por um comportamento global do sistema mola-amortecedor das suspensões, empregando coeficientes de rigidez e amortecimento equivalentes. Por exemplo, para o movimento de *roll* tem-se os coeficientes equivalentes  $\beta_{roll}$  e  $\kappa_{roll}$ , em função dos coeficientes de rigidez e amortecimento das quatro suspensões e da geometria do veículo, representada pela bitola dianteira. O mesmo tratamento é dado para o movimento de *pitch*.

### 2.3.2 Geometria de Ackermann

Nesta parte de modelo se estabeleceu uma relação entre o ângulo do volante e os ângulos de esterçamentos dianteiros das rodas. Alguns veículos têm ângulos de esterçamento traseiro, mas estes são casos especiais. Os veículos de competição não empregam sistemas de esterçamento traseiros, utilizando apenas mecanismos que controlam os movimentos das rodas dianteiras, e portanto os ângulos de esterçamento traseiros, para o modelo veicular aqui empregado serão sempre são nulos. O projeto, e a própria construção dos sistemas de direção dos veículos em geral, normalmente se baseiam na geometria de Ackermann, e por isso a representação matemática desenvolvida adotou o mesmo princípio.

Para tratar matematicamente a geometria de Ackermann empregam-se duas funções, uma para manobras com ângulos do volante positivos e outra para negativos. Estas funções são definidas na referência [11]. Para aproximar ao máximo possível o modelo matemático da realidade, para ângulos do volante próximos a zero, existe uma folga do sistema de direção, na qual os ângulos de esterçamento das rodas são nulos, representada por um espaço morto, e também se considera nestas funções que existe um valor máximo para esses ângulos.

### 2.3.3 Ângulos de deriva

Neste modelo não se têm simplificações em particular, apenas lembra-se que a velocidade longitudinal não pode ser nula, porque caso ocorra tal condição, tem-se um denominador nulo na expressão que descreve estas variáveis, e haveria um problema na sua solução. Entretanto, também não faz qualquer sentido

analisar o comportamento direcional de um veículo para velocidades longitudinais nulas, mesmo que se esteja querendo verificar como ele acelera desde a imobilidade ou freia até parar.

#### 2.3.4

##### **Forças no plano horizontal $xy$**

As forças totais nos eixos locais  $x$  e  $y$ , respectivamente, longitudinal e lateral do veículo, são obtidas a partir da decomposição das forças laterais nos eixos longitudinal e lateral do veículo segundo os ângulos de esterçamento. O mesmo se faz com as forças de frenagem ou tração em cada pneu. A soma de todas as forças nos pneus, assim como momento total em relação ao sistema de eixos que passa pelo centro de gravidade do veículo, geram os esforços que serão aplicados, e que irão caracterizar o carregamento e conseqüentemente a dinâmica deste sistema no plano horizontal.

Deve-se entretanto levar em conta que a força máxima lateral total não pode fazer o veículo atingir uma aceleração lateral maior que  $5g$ , já que esta é a aceleração máxima que atingem os veículos de competição, do tipo Fórmula 1. Igualmente, para a força de frenagem tem-se como máximo uma desaceleração de  $5g$ , e para as forças de tração, uma aceleração máxima de cerca de  $1,5g$ . Além de estarem limitadas a estes valores, as acelerações estão vinculadas pelas características físicas dos pneumáticos e dos próprios veículos [13], [16] e [10]. As informações de aceleração lateral e longitudinal máximas são resultados de testes experimentais obtidos, por exemplo, através da telemetria, a partir da qual se mede a velocidade e aceleração do veículo em cada instante de tempo.

A vinculação entre as acelerações longitudinais e laterais é descrita de forma compacta e completa pelo Círculo de Aderência, diagrama em acelerações máximas longitudinal e lateral, positiva e negativa, na escala  $g$  (aceleração da gravidade). Para representar o comportamento das acelerações durante o percurso de um traçado utiliza-se o Diagrama GG, também na escala  $g$ , cujo limite é o Círculo de Aderência do veículo, que depende daquele de cada pneu e da sua geometria. Tais figuras, muito empregadas na dinâmica veicular, são descritas adiante.

### 2.3.5

#### Forças laterais nos pneus

A equação que representa as forças laterais nos pneus é muito complexa, dependendo de diversos fatores, tanto estáticos quanto dinâmicos. Mas seu comportamento pode ser simplificado para ângulos de deriva pequenos, sendo considerado como linear até cerca de  $8^\circ$  ou  $15^\circ$  no máximo. Entretanto os ângulos de deriva variam segundo as manobras específicas do motorista. Para os veículos de competição, tais comandos normalmente geram ângulos de deriva pequenos, devido também às suas altas velocidades, e ao fato de sempre, a princípio, haver o controle do carro por parte do piloto. Caso o veículo deslize lateralmente, gerando elevados ângulos de deriva, se configura uma condição de perda de controle ou instabilidade, que invalida o modelo aqui desenvolvido. Tal condição será o limite das análises de interesse.

No modelo em questão as análises válidas serão realizadas para ângulos de deriva menores de  $15^\circ$ , faixa na qual se considera uma relação linear entre os ângulos de deriva e a força lateral, dada pelo coeficiente de rigidez lateral  $C_\alpha$  obtido de dados experimentais publicados por empresas que realizam pesquisa nesta área da engenharia ou pelos fabricantes de pneumáticos.

### 2.3.6

#### Forças normais nos pneus e força aerodinâmica

A determinação das forças normais em cada pneu pode ser dividida em três partes: 1) força estática influenciada pela distribuição do peso do veículo segundo as distancias do centro de gravidade a cada roda; 2) a força devida à transferência de carga pelos movimentos de *roll* e *pitch*, resultado, respectivamente, das manobras de variação da trajetória, e da aceleração ou frenagem do veículo; 3) a força vertical resultado da sustentação aerodinâmica negativa (ou positiva). Para obtenção da força aerodinâmica foram empregados os dados encontrados na literatura para os veículos de competição, tipo Formula 1, que indicam uma aceleração vertical de  $5g$ , com igual distribuição em cada roda, suposta para simplificar o modelo matemático. Na realidade existe um centro de pressão, onde por hipótese se concentra a força aerodinâmica vertical sobre o veículo. Esse se localiza um pouco atrás do centro de gravidade, em relação à dianteira do veículo.

Mas considerando que ambos os pontos não são fixos, variando em função de diversas condições, utilizou-se a hipótese mais adequada possível, dentro dos objetivos da análise que se desejava realizar, ou seja a força aerodinâmica vertical se distribui de igual forma para cada roda. Observa-se que essa força depende de uma área característica do veículo e do coeficiente médio de sustentação, obtidos a partir de dados publicados na literatura [17]. Novamente lembra-se que aqui também o modelo foi calibrado para que se atinja um valor máximo de aceleração vertical de 5g, definindo valores apropriados para os parâmetros.

### 2.3.7

#### **Círculo de Aderência e Diagrama GG**

Deve-se inicialmente chamar a atenção de que o Círculo de Aderência e o Diagrama GG são dois gráficos que possibilitam avaliar o comportamento dinâmico de um veículo, que se complementam, porém são conceitualmente diferentes. O Círculo de Aderência caracteriza o limite de aderência do veículo, ou dos pneus, em determinadas condições (carga vertical ...). O Diagrama GG é uma representação das acelerações longitudinal e lateral durante o percurso de um determinado traçado em uma ou diversas voltas por um certo condutor. O limite do Diagrama GG é o Círculo de Aderência do veículo como um todo.

O Círculo de Aderência, mostrado na Figura 2.35 define o limite do desempenho de um veículo em qualquer condição de operação, fazendo manobras ou se deslocando em linha reta, no percurso de uma determinada trajetória. Geralmente se trata inicialmente do círculo de aderência dos pneus, ou de um pneu. Dada a geometria do veículo, considerando a posição dos pneus em relação ao centro de massa, todos os fatores que influenciam as forças normais sobre os pneus, a potência que chega à eles, obtém-se o gráfico correspondente para o veículo como um todo. A idéia por trás desta figura é expressar a capacidade máxima das combinações de manobras tanto para mudança da direção do veículo quanto para movimento de aceleração e frenagem. Note que o círculo de aderência na verdade não é exatamente circular. Devido à potência limitada do motor, a aceleração longitudinal positiva é, normalmente, menor que as acelerações laterais e longitudinal negativa, principalmente para veículos de competição.

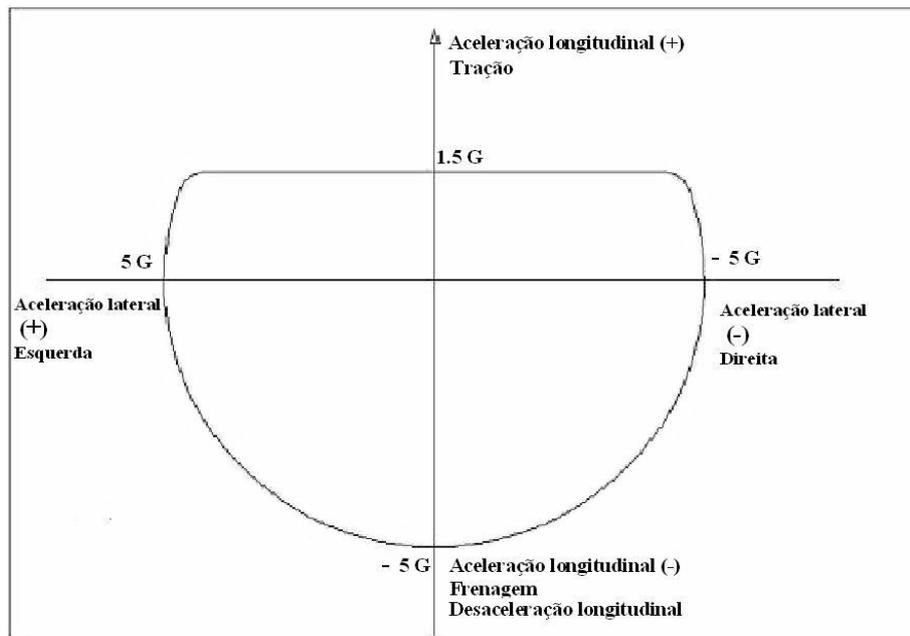


Figura 2.35. Círculo de aderência de um veículo de competição, tipo Formula 1.

Como se pode ver, tem-se neste gráfico as acelerações longitudinal e lateral máximas, determinadas basicamente pelo coeficiente de aderência na interface pneu-pista, que possui características não lineares, e depende de diversos parâmetros. Também há a influência da capacidade de transmissão de potência do motor, que por sua vez está associada a diferentes parâmetros, assim como a interferência da aerodinâmica sobre o veículo. Alguns fatores que determinam o círculo de aderência do veículo são:

- *Limite de tração*: todos os veículos têm motores de potência limitada, ou velocidade máxima de operação, o que implica na produção de forças longitudinais positivas menores que a capacidade máxima dos pneus;
- *Efeitos da transferência de carga*, ao fazer manobras de variação de direção (movimento lateral) ou de velocidade (movimento longitudinal) existem transferências de carga consideráveis, então, as forças que atuam em cada pneu se alteram, modificando as características de aderência dos pneus;
- *Efeitos da suspensão*: devido à geometria das suspensões e à vibração destes componentes, junto a outros efeitos mecânicos, por exemplo a deformação dos pneus, as direções das forças nos pneus são alteradas, e isto modifica a distribuição das cargas em cada roda;
- *Cargas Aerodinâmicas*: as forças de sustentação e arrasto têm uma significativa parcela de influência nos carregamentos vertical e longitudinal

sobre o veículo, estando associadas às acelerações que por sua vez afetam a sua capacidade máxima de variar a velocidade e direção de movimento.

Entretanto existe um limite superior, ou uma curva envoltória para todos os círculos de aderência possíveis de serem criados, em função dos diferentes fatores, que caracteriza a capacidade máxima do veículo em qualquer situação de operação. Este é o gráfico empregado e de interesse para as análises. No Diagrama GG ficam mais evidentes, como mostrado adiante, as características particulares, relativas a diferentes ajustes do veículo, ou condições específicas de uso.

Os estudos do Círculo de Aderência e do Diagrama GG tiveram início na década dos anos 50. Desde essa época se via a necessidade de relacionar, de forma concreta, as ações do condutor e a capacidade de operação do veículo, incluindo os efeitos das condições da superfície da pista sobre o sistema veicular. Tais estudos foram incrementados rapidamente até os anos 70, época na qual já se conhecia profundamente a utilização das informações contidas nestas figuras. Hoje em dia seu emprego é fundamental, principalmente para os veículos de competição, com os quais se está sempre procurando atingir o limite da sua capacidade.

A principal informação contida no Círculo de Aderência do veículo é aquela referente às limitações de estabilidade e controle direcional durante sua operação. Esta é uma importante forma de quantificar a capacidade do veículo de realizar manobras, o que deve ser bem entendido e utilizado pelo seu condutor [20]. Pode-se, deste modo, considerar algumas aplicações fundamentais: estabelecer a possibilidade de realizar uma trajetória específica, ou determinar as possíveis manobras utilizadas pelo condutor para alcançar uma trajetória considerando os limites de estabilidade, ou ainda identificar formas de melhor ajustar um veículo. Estas informações são muito usadas em veículos de competição. Lembra-se que existe uma íntima relação entre o *limite de estabilidade e o equilíbrio entre frenagem, aceleração e curvas*: durante as manobras de frenagem e aceleração limita-se o uso das forças dos pneus nas direções lateral e longitudinal simultaneamente; para a estabilidade do veículo é preciso entender e bem empregar as condições de operação das quatro rodas para obter o melhor rendimento, e conseqüentemente realizar uma manobra utilizando a capacidade máxima do veículo, sem atingir a instabilidade ou perda de controle.

O Diagrama GG por sua vez é obtido a partir dos dados experimentais (ou de resultados de simulação) de aceleração lateral e longitudinal do veículo ao percorrer uma determinada trajetória, durante uma ou mais voltas em um traçado ou pista. A Figura 2.36 mostra este gráfico, no qual se têm representadas, basicamente, as características de emprego de um veículo por um determinado piloto em uma certa condição específica de uso. Nota-se que o Diagrama GG depende muito do ser humano que comanda o veículo, e o seu limite é o Círculo de Aderência, devendo estar sendo dentro da região estabelecida pelas características limítrofes da capacidade do veículo. Na Figura 2.36 o condutor em questão ultrapassou algumas vezes este limite, o que certamente levou o veículo a uma condição de deslizamento, pelo menos momentânea, que poderia implicar em perda de estabilidade e conseqüentemente controle direcional, caso ele não reduzisse a velocidade nestes instantes ou realizasse alguma manobra adequada, fazendo o veículo retornar à região admissível. O emprego das informações contidas no Diagrama GG possibilita melhorar as condições de uso do veículo, comparar diferentes condutores e formas de condução, entre outras.

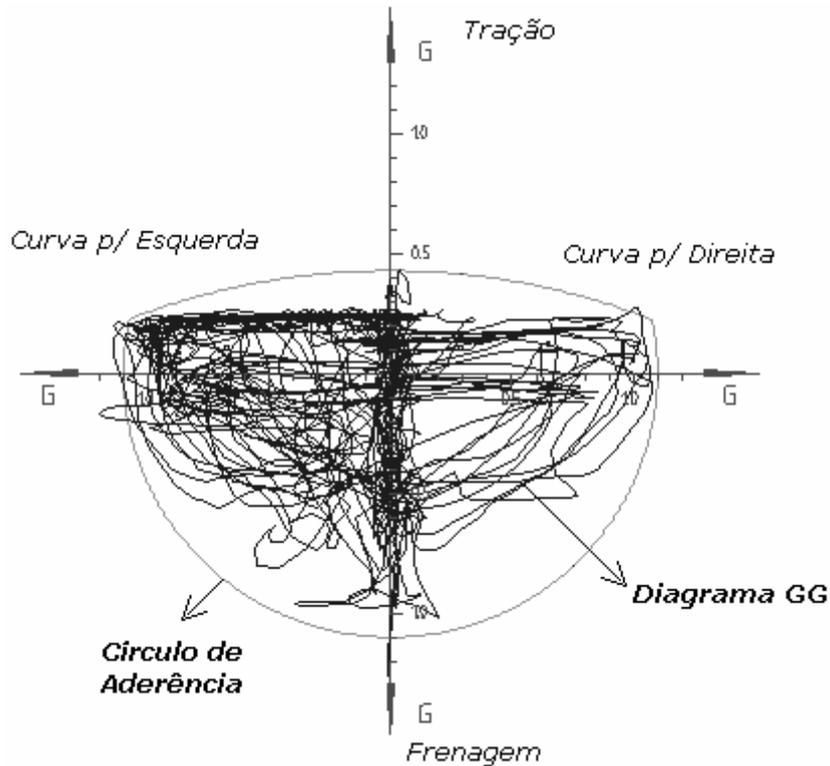


Figura 2.36. Diagrama GG de um veículo percorrendo uma trajetória.

## 2.4

Modelo completo e implementação em *Simulink/Matlab*

Reapresentam-se a seguir todas as expressões desenvolvidas para o modelo do veículo, e a organização dada em termos dos blocos representativos de cada componente e as conexões entre eles, como inicialmente mostrado na Figura 2.5, incluindo a implementação em *Simulink/Matlab*.

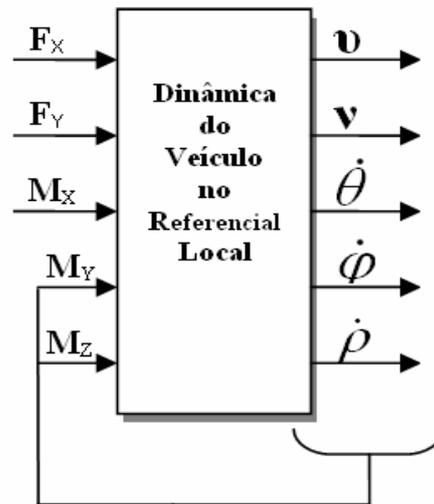


Figura 2.37. Relação entrada-saída para a dinâmica do veículo no referencial local.

A dinâmica do veículo, representada pela relação entrada-saída da Figura 2.37, é descrita pelas equações de movimento, dadas pelas Equações 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.32, 2.36 e 2.40,

$$\sum F_x = m_{tot} \ddot{x} - m_{tot} \dot{y} \dot{\theta} - m_s h_{sp} \ddot{\rho}$$

$$\sum F_y = m_{tot} \ddot{y} - m_s h_{sr} \ddot{\phi} + m_{tot} \dot{x} \dot{\theta}$$

$$a_x = \ddot{x} - \dot{y} \dot{\theta}$$

$$a_y = \ddot{y} + \dot{x} \dot{\theta}$$

$$\sum M_z = I_{yaw} \ddot{\theta} + I_{xz} (\ddot{\phi} - \dot{\rho} \dot{\theta}) - I_{roll} \dot{\rho} \dot{\phi} + I_{pitch} \dot{\phi} \dot{\rho}$$

$$I_{roll} \ddot{\phi} + I_{xz} (\ddot{\theta} + \dot{\rho} \dot{\phi}) - I_{pitch} \dot{\theta} \dot{\rho} + I_{yaw} \dot{\rho} \dot{\theta} + \beta_{roll} \dot{\phi} + \kappa_{roll} \phi = m_s g h_{sr} \text{sen} \phi + m_s (\ddot{y} + \dot{x} \dot{\theta}) h_{sr} \cos \phi$$

$$I_{pitch} \ddot{\rho} + I_{xz} (\dot{\theta}^2 - \dot{\phi}^2) - I_{yaw} \dot{\theta} \dot{\phi} + I_{roll} \dot{\phi} \dot{\theta} + \beta_{pitch} \dot{\rho} + \kappa_{pitch} \rho = m_s g h_{sp} \text{sen} \rho - m_s (\ddot{x} - \dot{y} \dot{\theta}) h_{sp} \cos \rho$$

que organizadas em termos do diagrama de blocos *Simulink/Matlab* levam ao

esquema da Figura 2.38.

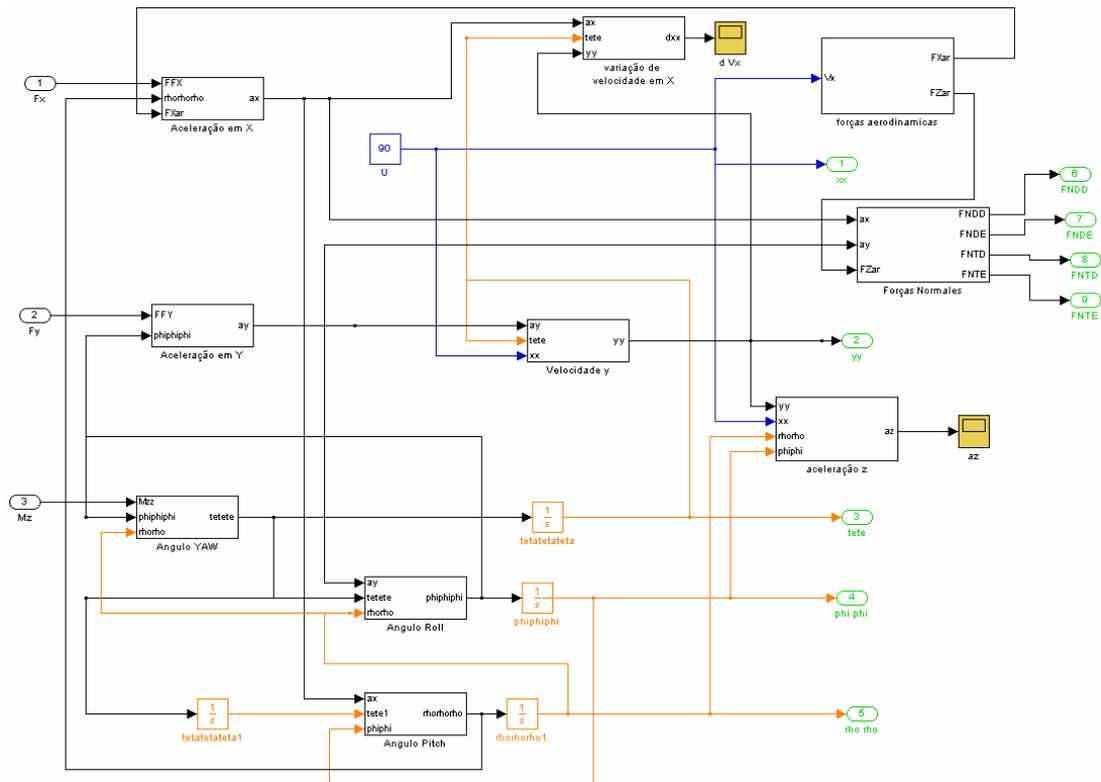


Figura 2.38. Dinâmica do veículo representada em *Simulink/Matlab*.

A caixa de direção e a geometria de Ackermann, representadas pela relação entrada-saída da Figura 2.39, é descrita pela Equação 2.41,

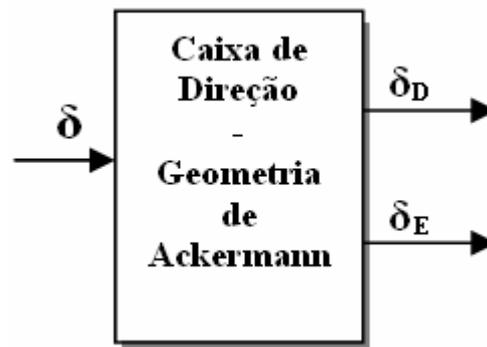


Figura 2.39. Relação entrada-saída para a caixa de direção e geometria de Ackermann.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para } \delta < -f_d \\ \delta_D = k_d \cdot \delta \\ R = \frac{l}{\text{tg}(\delta_D)} - \frac{b_d}{2} \\ \delta_E = \text{tg}^{-1}\left(\frac{l}{R - b_d/2}\right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para } \delta > f_d \\ \delta_E = k_d \cdot \delta \\ R = \frac{l}{\text{tg}(\delta_E)} + \frac{b_d}{2} \\ \delta_D = \text{tg}^{-1}\left(\frac{l}{R + b_d/2}\right) \end{array} \right.$$

que organizadas em termos do diagrama de blocos *Simulink/Matlab* levam ao esquema da Figura 2.40.

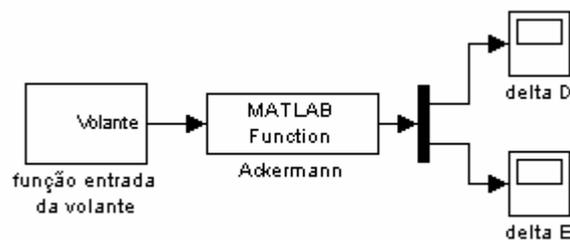


Figura 2.40. Caixa de direção e geometria de Ackermann representadas em *Simulink/Matlab*.

Os ângulos de deriva, representados pela relação entrada-saída da Figura 2.41, são definidos para cada roda pelas Equações 2.42, 2.43, 2.44 e 2.45,

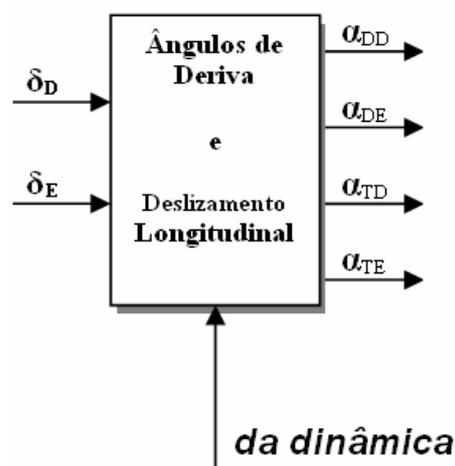


Figura 2.41. Relação entrada-saída para os ângulos de deriva.

$$\alpha_{DD} = \delta_D - tg^{-1} \left( \frac{\dot{y} + a\dot{\theta}}{\dot{x} + \frac{t_f}{2}\dot{\theta}} \right)$$

$$\alpha_{DE} = \delta_E - tg^{-1} \left( \frac{\dot{y} + a\dot{\theta}}{\dot{x} - \frac{t_f}{2}\dot{\theta}} \right)$$

$$\alpha_{TD} = tg^{-1} \left( \frac{-\dot{y} + b\dot{\theta}}{\dot{x} + \frac{t_r}{2}\dot{\theta}} \right)$$

$$\alpha_{TE} = tg^{-1} \left( \frac{-\dot{y} + b\dot{\theta}}{\dot{x} - \frac{t_r}{2}\dot{\theta}} \right)$$

que organizadas em termos do diagrama de blocos *Simulink/Matlab* levam ao esquema da Figura 2.42.

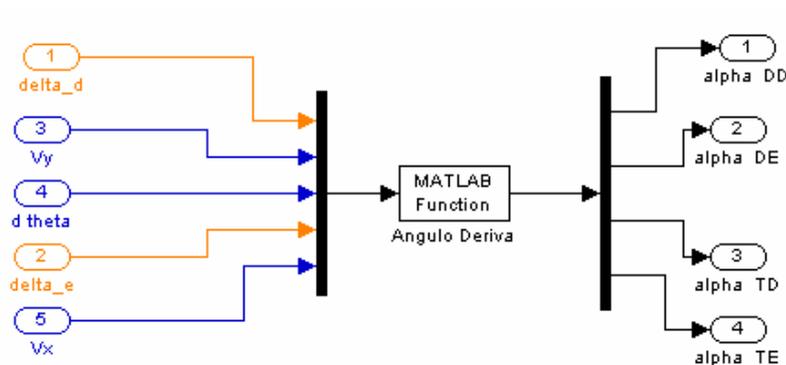


Figura 2.42: Ângulos de deriva representados em *Simulink/Matlab*.

As forças laterais nos pneus, representadas pela relação entrada-saída da Figura 2.43, na forma linearizada para ângulos de deriva até  $8^\circ$ , são dadas pelas Equações 2.49, 2.50, 2.51 e 2.52,

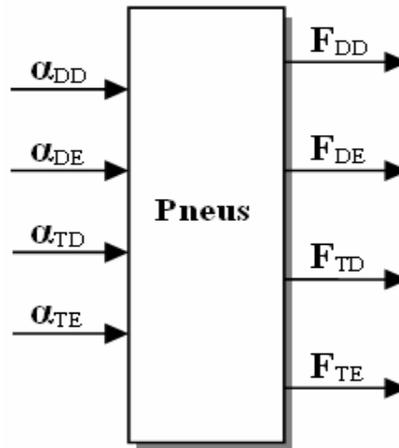


Figura 2.43: Relação entrada-saida para as forças laterais.

$$L_{DD} = C_{DD} \cdot \alpha_{DD}$$

$$L_{DE} = C_{DE} \cdot \alpha_{DE}$$

$$L_{TD} = C_{TD} \cdot \alpha_{TD}$$

$$L_{TE} = C_{TE} \cdot \alpha_{TE}$$

que organizadas em termos do diagrama de blocos *Simulink/Matlab* levam ao esquema da Figura 2.44.

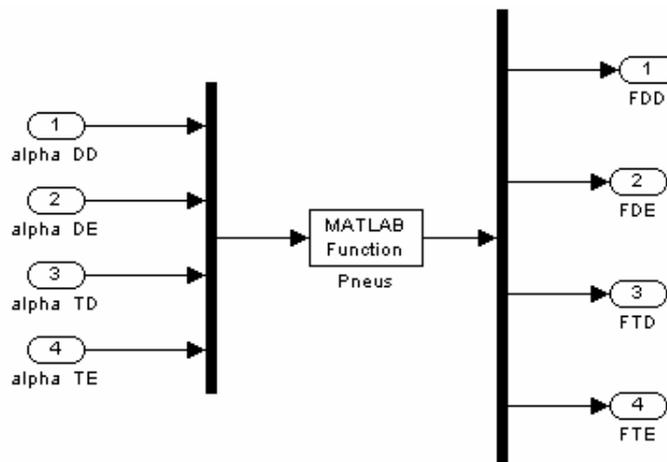


Figura 2.44. Forças laterais representadas em *Simulink/Matlab*.

Os esforços externos aplicados ao veículo em função da sua geometria, a partir dos pneumáticos, representados pela relação entrada-saída da Figura 2.45, não considerando as forças longitudinais – tração e frenagem, ou seja para

velocidade constante, são descritos pelas Equações 2.90, 2.91, 2.92, 2.93, 2.94, 2.95 e 2.96,

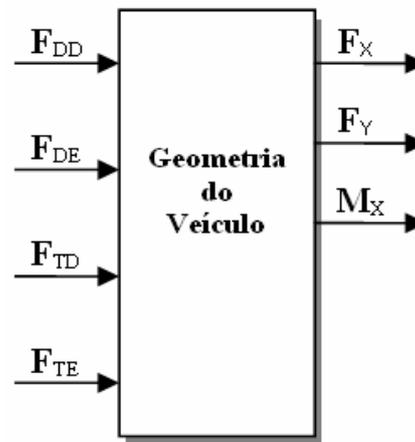


Figura 2.45. Relação entrada-saída para as forças e momentos aplicados ao veículo.

$$F_x = -(L_{DE} \text{sen} \delta_{jE} + L_{DD} \text{sen} \delta_{jD}) \quad (2.90)$$

$$F_y = L_{DE} \cos \delta_{jE} + L_{DD} \cos \delta_{jD} + L_{TE} + L_{TD} \quad (2.91)$$

$$M_{DD} = +aL_{DD} \cos \delta_{jD} - \frac{t_f}{2} L_{DD} \text{sen} \delta_{jD} \quad (2.92)$$

$$M_{DE} = +aL_{DE} \cos \delta_{jE} + \frac{t_f}{2} L_{DE} \text{sen} \delta_{jE} \quad (2.93)$$

$$M_{TE} = -bL_{TE} \quad (2.94)$$

$$M_{TD} = -bL_{TD} \quad (2.95)$$

$$M_z = M_{DE} + M_{DD} + M_{TE} + M_{TD} \quad (2.96)$$

que organizadas em termos do diagrama de blocos *Simulink/Matlab* levam ao esquema da Figura 2.46.

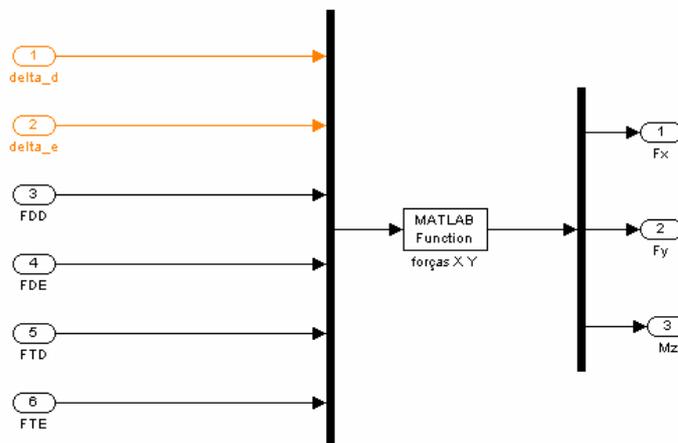


Figura 2.46. Esforços aplicados ao veículo representados em *Simulink/Matlab*.

As forças normais, representadas pela relação entrada-saída da Figura 2.47, já considerando as forças de sustentação aerodinâmica acrescidas às Equações 2.97, 2.98, 2.99 e 2.100, são dadas por



Figura 2.47. Relação entrada-saída para as forças normais.

$$F_{NDD} = F_{rf} + F_{hf} + F_{uf} - \frac{1}{2}F_{bf} + \frac{1}{2}F_{Nsf} + \frac{1}{4}F_{AC} \quad (2.97)$$

$$F_{NDE} = -F_{rf} - F_{hf} - F_{uf} - \frac{1}{2}F_{bf} + \frac{1}{2}F_{Nsf} + \frac{1}{4}F_{AC} \quad (2.98)$$

$$F_{NTD} = F_{rr} + F_{hr} + F_{ur} - \frac{1}{2}F_{br} + \frac{1}{2}F_{Nsr} + \frac{1}{4}F_{AC} \quad (2.99)$$

$$F_{NTE} = -F_{rr} - F_{hr} - F_{ur} - \frac{1}{2}F_{br} + \frac{1}{2}F_{Nsr} + \frac{1}{4}F_{AC} \quad (2.100)$$

que organizadas em termos do diagrama de blocos *Simulink/Matlab* levam ao esquema da Figura 2.48.

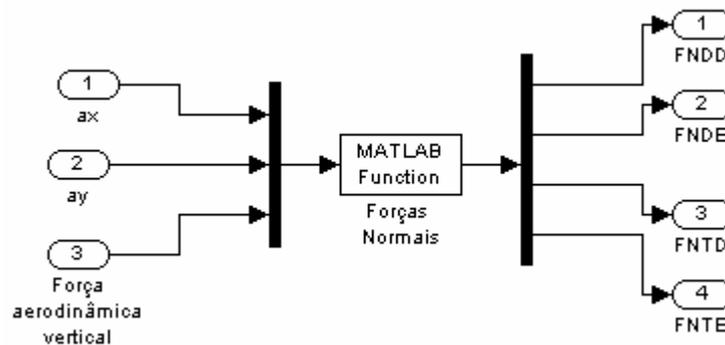


Figura 2.48. Forças normais aplicadas aos pneus representadas em *Simulink/Matlab*.

A transformação de coordenadas do referencial local para o global, representadas pela relação entrada-saída da Figura 2.49, é descrita pela Equação 2.89,

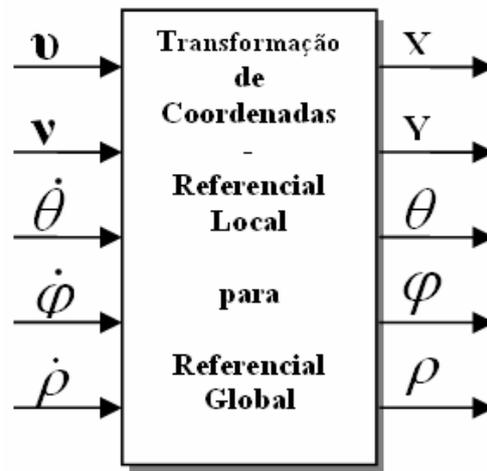


Figura 2.49. Relação entrada-saída para a transformação de coordenadas.

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{x} \cos \theta - \dot{y} \sin \theta \\ \dot{Y} = \dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta \end{cases}$$

que organizadas em termos do diagrama de blocos *Simulink/Matlab* levam ao esquema da Figura 2.50.

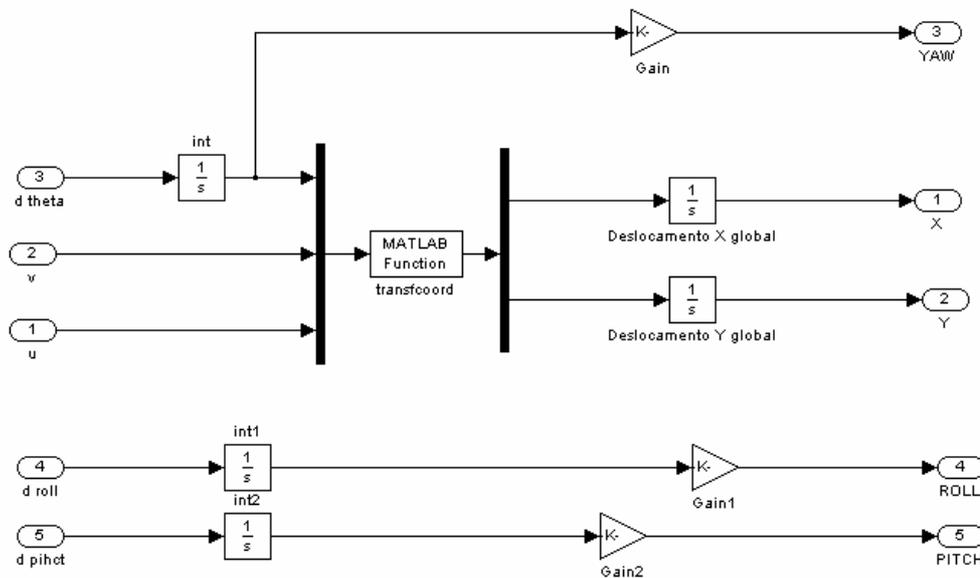


Figura 2.50. Transformação de coordenadas representada em *Simulink/Matlab*

A Figura 2.51 mostra o modelo completo do veículo para análise da dinâmica longitudinal e lateral no ambiente *Simulink/Matlab*, definido pelos blocos anteriormente descritos, segundo os diversos componentes ou elementos fundamentais.

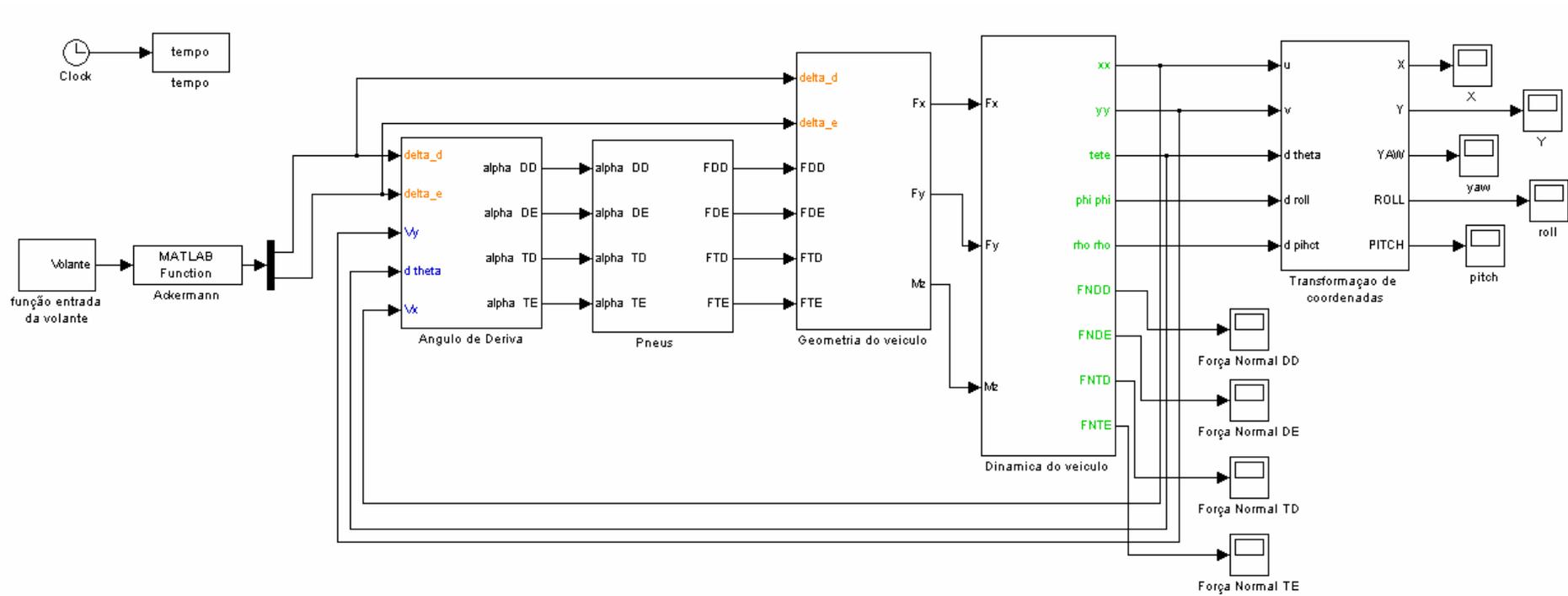


Figura 2.51. Diagrama de blocos feito no *Simulink/Matlab*.

O primeiro bloco na Figura 2.51 fornece a função de entrada, o ângulo da volante do veículo, no tempo. As duas variáveis de entrada do modelo são o ângulo do volante e a velocidade longitudinal do veículo, apenas suposta constante. Para alterar a velocidade basta mudar uma constante chamada como  $u$ , que se encontra dentro do bloco da aceleração. As saídas do modelo são os três ângulos de rotação *yaw*, *roll* e *pitch*, e as duas posições  $x$  e  $y$  no tempo.

## 2.5 Simulação e avaliação do modelo completo

Para a avaliação do modelo foram realizadas três simulações ou manobras do veículo, uma das quais já utilizada em [13], que servirá para comparação de resultados; outra para analisar o desempenho do veículo em uma situação mais realista; e uma terceira para verificar as suas características de comportamento em condições menos severas.

Realizando uma pesquisa na literatura técnica e científica da área veicular foi possível obter os principais parâmetros geométricos e físicos genéricos de um carro de competição, tipo Fórmula 1, que são apresentados na Tabela 3 [14], [15], [16]. Todas as simulações de aqui em diante serão feitas tomando em conta os parâmetros da tabela 3, é dizer, para um carro de corridas.

A comparação do comportamento do modelo veicular será apenas para manobras iguais do motorista, então, para funções do volante do veículo iguais nos modelos: modelo linear em [13] e o modelo não linear desenvolvido nesta dissertação, desde que os parâmetros geométricos e físicos sejam diferentes.

Em [13] foi utilizado um modelo linear para o veículo, com velocidade constante, e uma entrada que é a soma de funções degrau unitário, um tanto drástica e não muito real, mas suficiente para avaliação do modelo. A outra entrada será um movimento mais suave do volante, utilizando uma função *seno* para representar o comando dado. De modo a poder comparar os resultados emprega-se a mesma velocidade de 18,3 m/s (66 km/h) adotada em [13]. A Figura 2.52 mostra os ângulos do volante e de esterçamento das rodas para o teste comparativo. Note a pequena diferença que existe entre essas variáveis para os lados: direito e esquerdo.

Tabela 3. Parâmetros construtivos de um veículo de Fórmula 1.

Parâmetro	Símbolo Unidade	Valor
Distancia entre eixos	$l$ [m]	3,10
Distancia do eixo dianteiro ao CG	$l_d$ [m]	1,64
Distancia do eixo traseiro ao CG	$l_t$ [m]	1,46
Bitola dianteira	$t_f, b_d$ [m]	1,4
Bitola traseira	$t_r, b_t$ [m]	1,4
Massa total	$m_{tot}$ [kg]	605
Massa suspensa	$m_s$ [kg]	520
Massa não suspensa dianteira	$m_{uf}$ [kg]	40
Massa não suspensa traseira	$m_{ur}$ [kg]	45
Momento de inércia <i>YAW</i>	$I_{yaw}$ [kg-m <sup>2</sup> ]	558
Momento de inércia <i>PITCH</i>	$I_{pitch}$ [kg-m <sup>2</sup> ]	333
Momento de inércia <i>ROLL</i>	$I_{roll}$ [kg-m <sup>2</sup> ]	47
Produto de inércia <i>xz</i>	$I_{xz}$ [kg-m <sup>2</sup> ]	4
Altura entre o CG e o centro de rolagem	$h_{sr}$ [m]	0.22
Altura entre o CG e o centro mov. pitch	$h_{sp}$ [m]	0.22
Coeficiente de rigidez das 4 suspensões	$K_f, K_r$ [KN/m]	225
Coef. de amortecimento 4 suspensões	$B_f, B_r$ [N/m/s]	7300

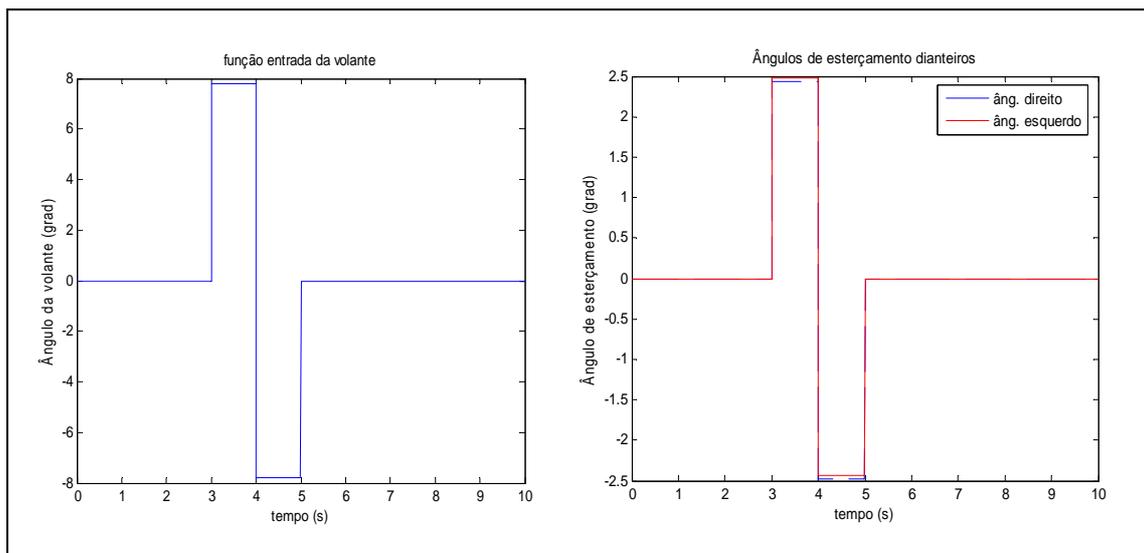


Figura 2.52. Função entrada da volante e os valores dos ângulos de esterçamento.

Das diversas variáveis associadas ao modelo empregado, escolheu-se apenas algumas de maior relevância para a análise comparativa com os resultados encontrados em [13]. As Figuras 2.52 a 2.56 apresentam estas variáveis. Os ângulos de deriva (Figura 2.53) se mantêm na faixa linear, suposta até  $8^\circ$ , o que comparativamente, em relação a [13], mostra a validade da hipótese assumida naquele trabalho, uma vez que o modelo linear foi adotado.

A velocidade lateral do veículo (Figura 2.54) apresenta a mesma tendência daquela mostrada em [13], mas os valores máximos são muito diferentes. Para o modelo não linear aqui desenvolvido o valor máximo é 0,2 m/s, com uma função que quase reproduz o comportamento da entrada, com patamares constante, e em [13] esse valor é de 1 m/s, com uma função crescente e decrescente, tipo rampa, com elevado coeficiente angular. Esta diferença pode ser atribuída ao modelo aqui adotado para representar a dinâmica do veículo, mais detalhado e realista em comparação ao modelo mais simples e limitado.

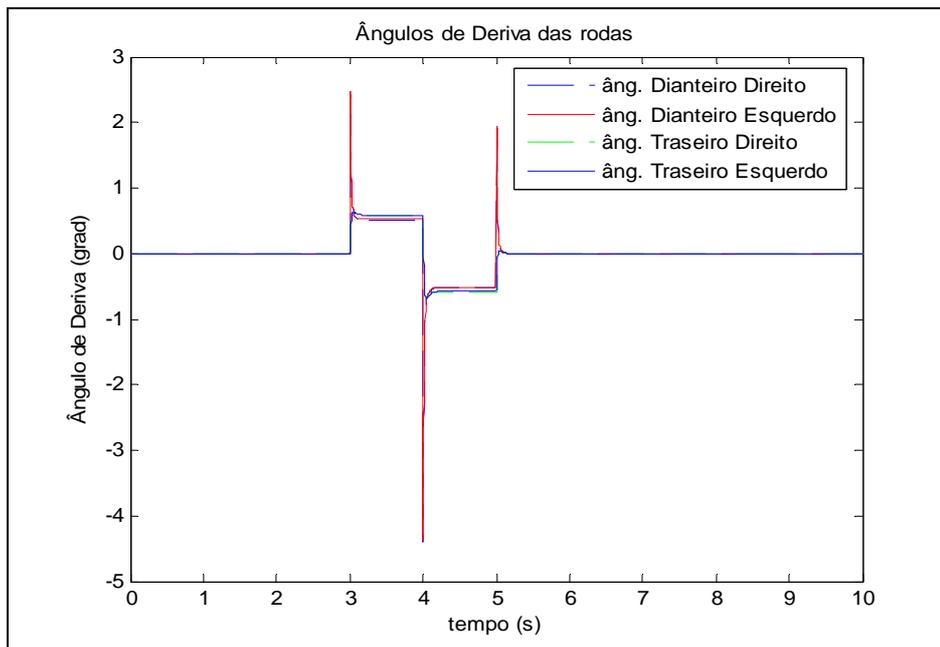


Figura 2.53. Ângulos de deriva no tempo.

O comportamento do ângulo *yaw* (Figura 2.55) é muito similar ao obtido em [13], com valor máximo, tanto para o modelo aqui descrito quanto para o empregado no trabalho anterior e o mesmo de 0,24 rad. Os comportamentos dos ângulos de *roll* e *pitch* (Figura 2.55) são aqueles esperados: quando o veículo gira para a esquerda, se inclina para a direita, levando inicialmente a um ângulo de *roll*

positivo, e depois vice-versa; e como o veículo está com velocidade constante, o ângulo de *pitch* é quase constante, mas devido aos acoplamentos típicos da dinâmica no referencial local, há uma pequena alteração nesta variável. Não se comparam estes resultados com aqueles obtidos em [13], pois o modelo então empregado não incluía tais variáveis. Elas estão aqui mostradas visando ilustrar a consistência da representação desenvolvida.

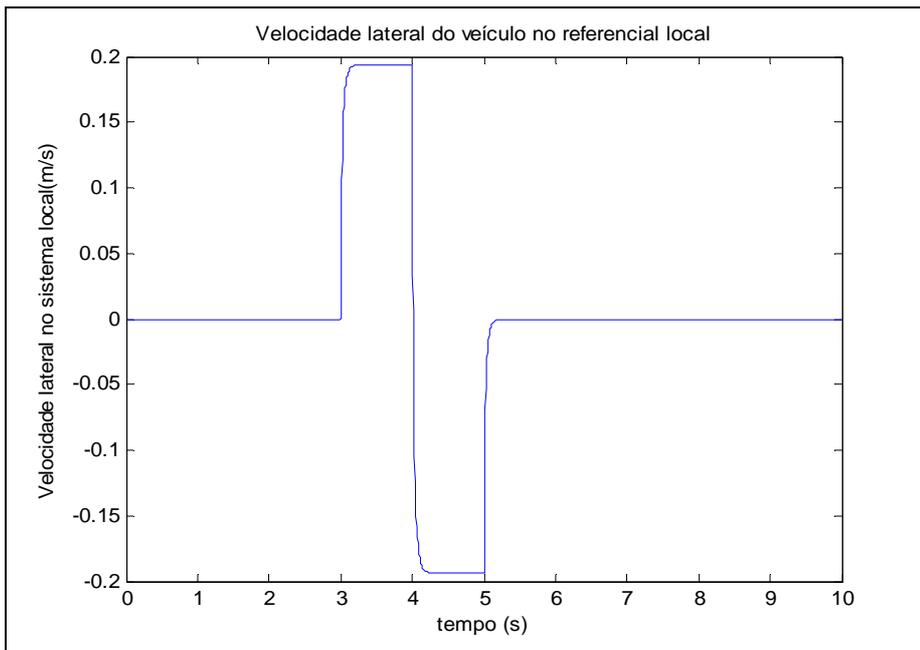


Figura 2.54. Velocidade lateral no referencial local no tempo.

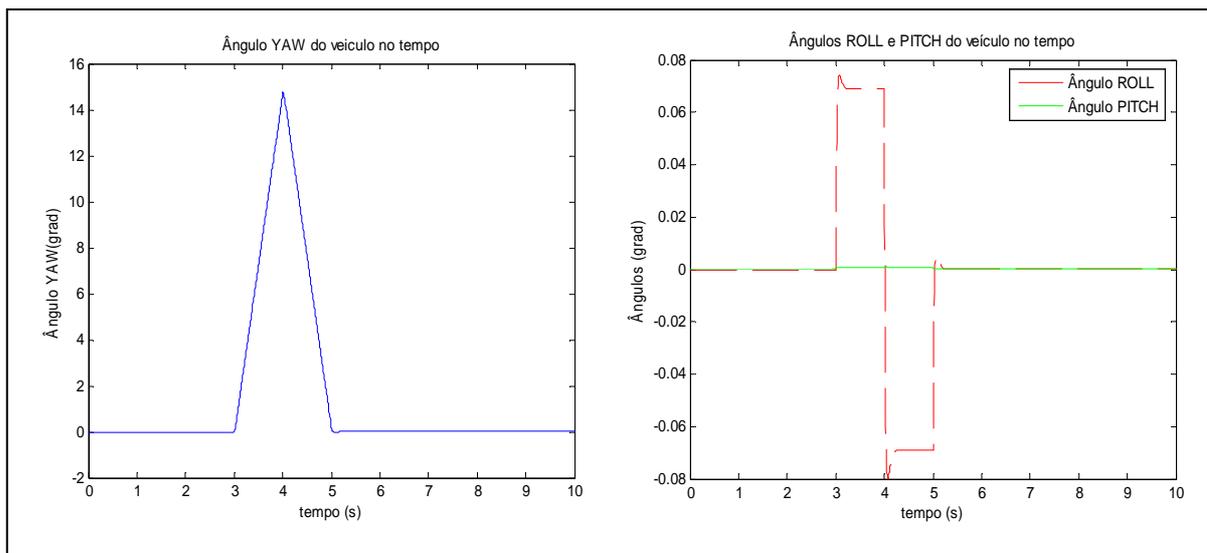


Figura 2.55. Ângulo yaw e ângulos roll e pitch no tempo.

O deslocamento lateral do veículo (Figura 2.56) é muito similar (5,8 m) ao obtido em [13], com uma diferença de um metro aproximadamente. Novamente credita-se essa diferença ao modelo dinâmico aqui desenvolvido que possui muitas características que no modelo linear são desprezadas, quando são assumidas hipóteses simplificadoras. Entretanto, em termos gerais, tem-se o mesmo comportamento que o apresentado em [13], considerando portanto que os resultados encontrados são satisfatórios e que o modelo desenvolvido é confiável e está correto.

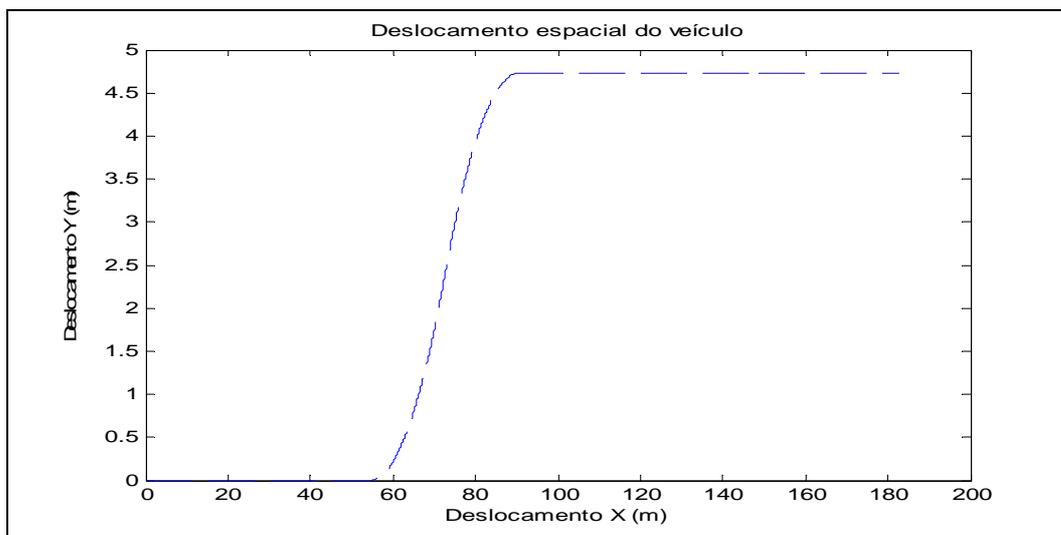


Figura 2.56. Deslocamento do veículo.

Agora realiza-se basicamente a mesma manobra, mas com uma função mais suave, utilizando um seno para descrever o comando no volante, com o dobro do tempo para o movimento, como apresentado na Figura 2.57, juntamente com os ângulos de esterçamento das rodas. Note, novamente, a pequena diferença entre essas variáveis para o lado esquerdo e direito.

Na Figura 2.59 tem-se a velocidade lateral do veículo, a qual possui uma tendência próxima a mostrada em [13], mais ainda com diferença na velocidade máxima. De mesmo modo tem-se um comportamento de forma e amplitudes semelhantes para os ângulos de atitude de veículo (Figura 2.60), diferindo apenas no tempo, uma vez que a manobra agora é feita mais lentamente. O deslocamento do veículo (trajetória do centro de massa) no plano  $XY$  (Figura 2.61) é similar àquele encontrado anteriormente.

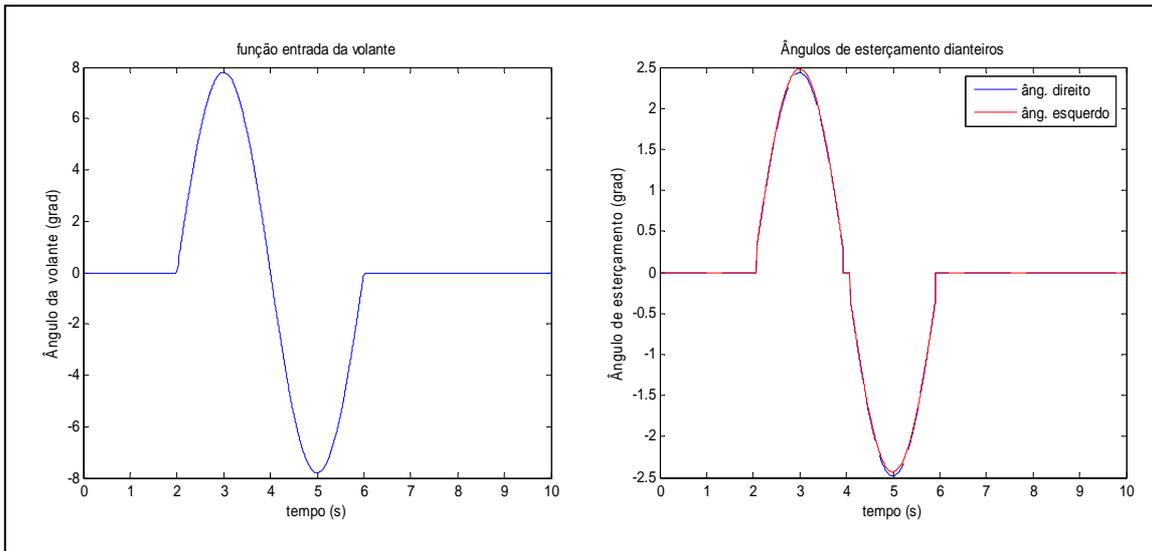


Figura 2.57. Função entrada da volante e os valores dos ângulos de esterçamento.

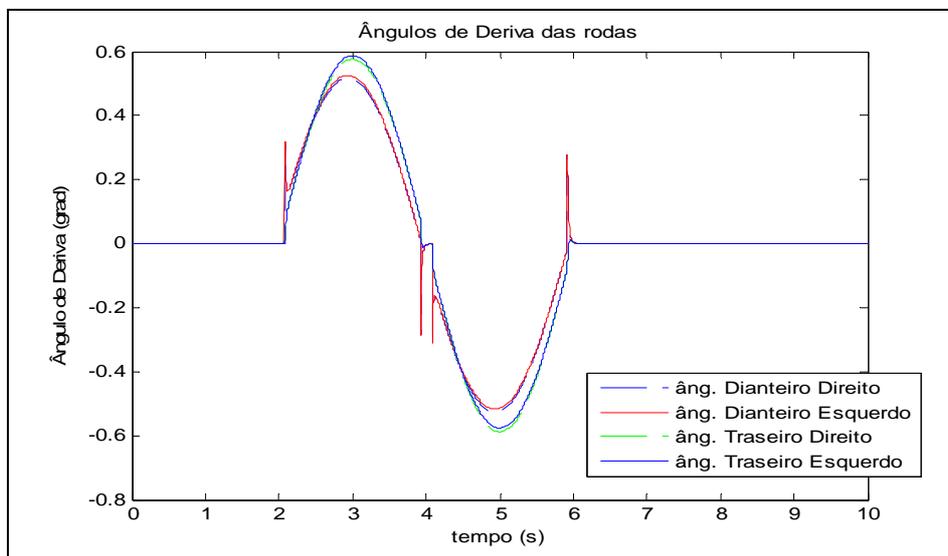


Figura 2.58. Ângulos de deriva no tempo.

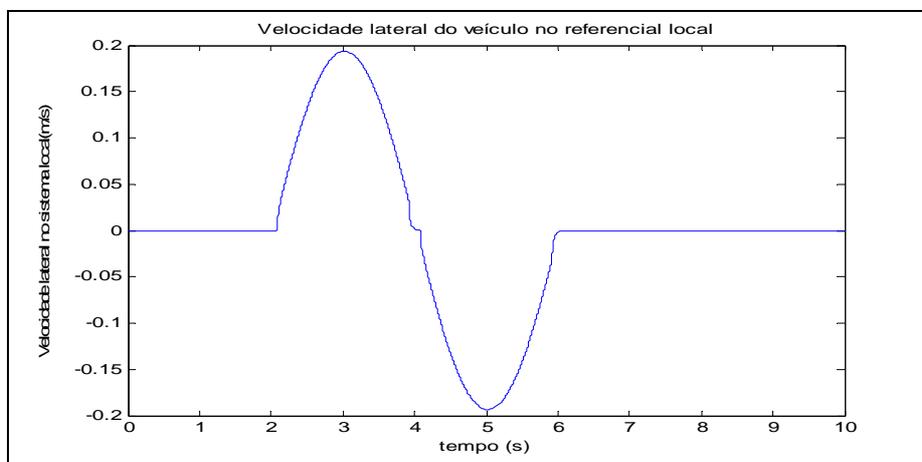


Figura 2.59. Velocidade lateral no referencial local no tempo.

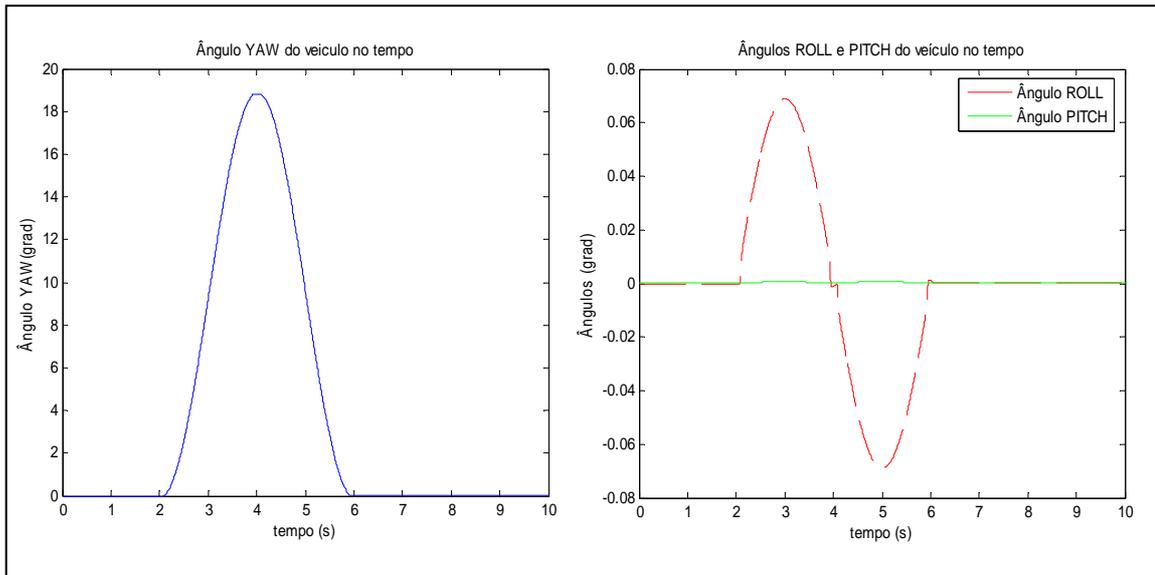


Figura 2.60. Ângulo yaw e ângulos roll e pitch no tempo.

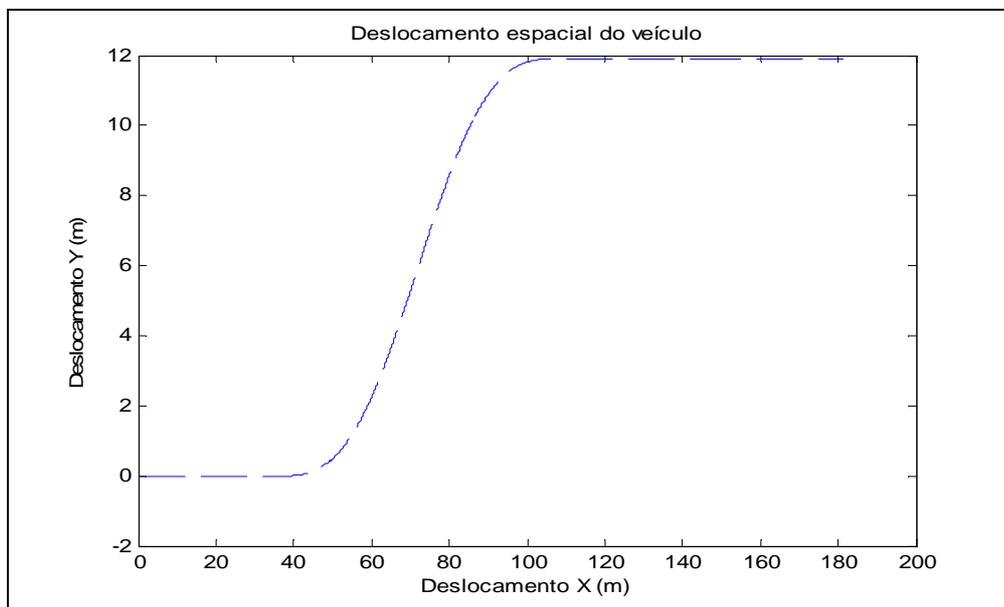


Figura 2.61. Deslocamento do veículo.

Agora realiza-se uma simulação para avaliar o modelo do veículo em uma condição menos severa, a velocidade de 90 km/h, com uma manobra lenta de transição, com duração de 4 segundos, para passar de um ângulo do volante de  $0^\circ$  a outro final de  $15,6^\circ$  que é mantido constante, levando o veículo a percorrer uma trajetória circular fechada em regime permanente. A Figura 2.62 mostra o sinal de entrada no volante e os ângulos de esterçamento das rodas. O movimento é para a esquerda, então o ângulo de esterçamento dianteiro esquerdo é maior. À medida

que o ângulo do volante aumenta, a diferença dos ângulos de esterçamento se torna maior.

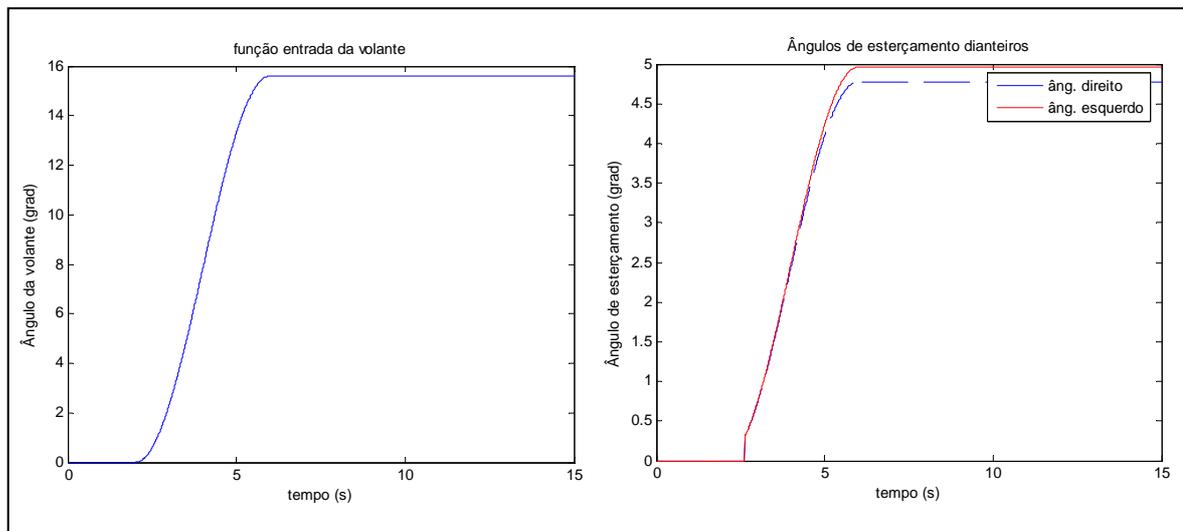


Figura 2.62. Função entrada da volante e os valores dos ângulos de esterçamento.

Na Figura 2.63 são mostrados os ângulos de deriva dos quatro pneus. Pode se ver que os ângulos traseiros são maiores que os dianteiros, indicando uma característica SUB OU SOBRE-esterçante [16], [20]. Isso pode variar de acordo com parâmetros estabelecidos, como velocidade por exemplo. O fato de haver diferença entre os ângulos de deriva de cada pneu, o que está relacionado também a diferentes forças laterais, e conseqüentemente com diferenças entres os momentos por elas produzidos, pelo menos durante o transiente do sistema, está associado à estabilidade do veículo.

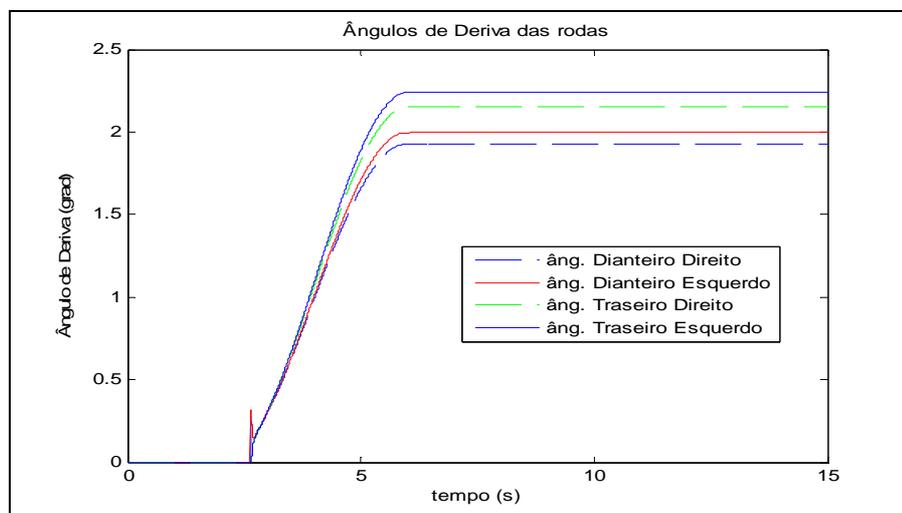


Figura 2.63. Ângulos de deriva no tempo.

A velocidade lateral no referencial local (Figura 2.64) é positiva já que o veículo faz uma manobra para a esquerda - eixo  $y$  positivo. Os três ângulos de atitude do veículo nestas condições são apresentados na Figura 2.65. O resultado foi o esperado: o ângulo *yaw* sempre tende a crescer, uma vez que o veículo passa a se deslocar em uma circunferência. O ângulo de *roll* é positivo, já que o veículo se inclina para a direita, pela força lateral aplicada aos pneus. E o ângulo de *pitch* tende a crescer um pouco, indicando que o veículo tem alguma inclinação para frente.

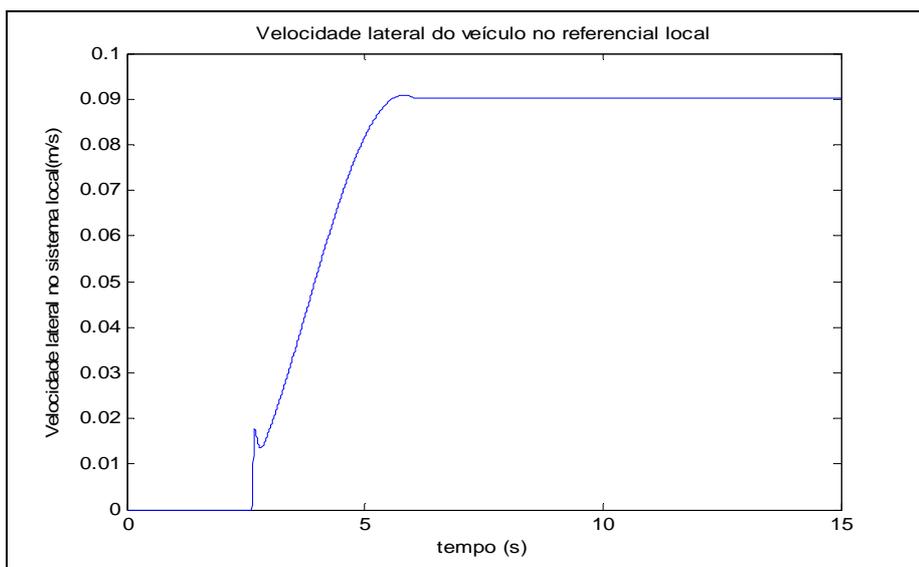


Figura 2.64. Velocidade lateral no referencial local no tempo.

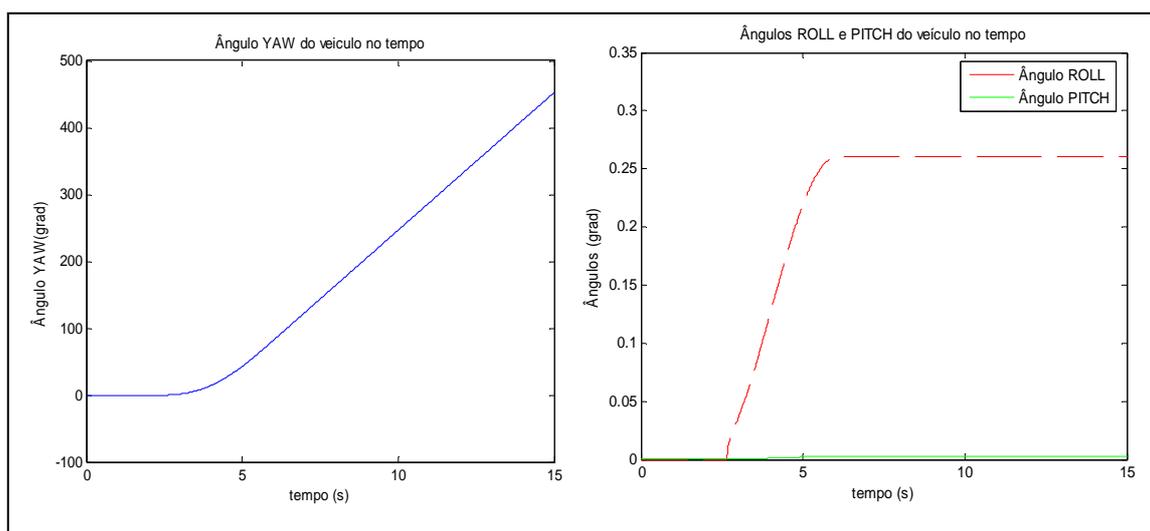


Figura 2.65. Ângulo *yaw* e ângulos *roll* e *pitch* no tempo.

Na Figura 2.66 tem-se o deslocamento do veículo, que apresenta um comportamento completamente lógico: ao se manter o ângulo do volante

constante, a trajetória é uma circunferência de raio constante, que irá variar para velocidades diferentes. Com este resultado considerou-se o modelo para velocidades constantes validado.

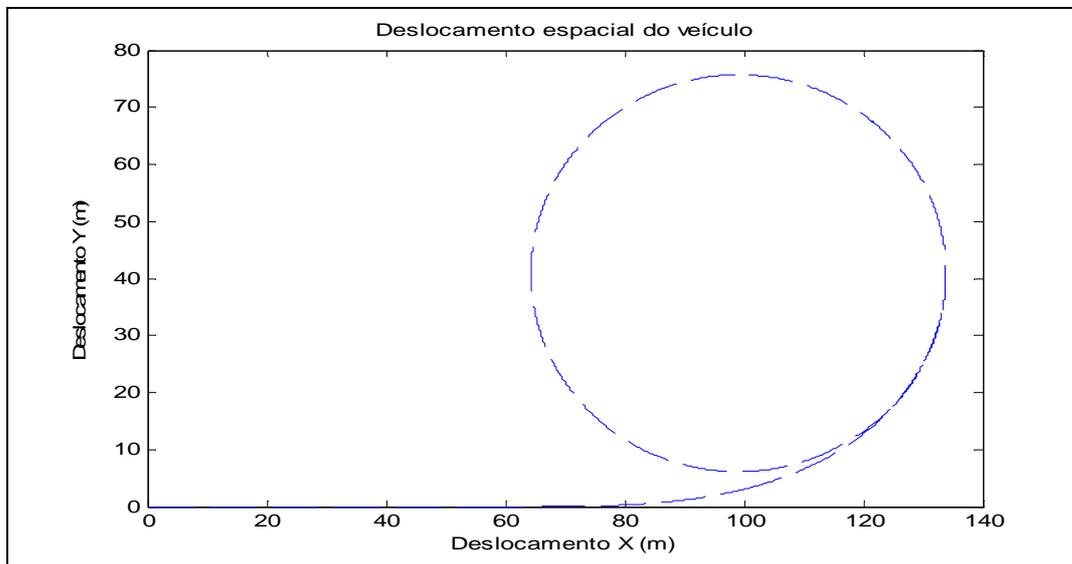


Figura 2.66. Deslocamento do veículo.

## 2.6 Proposta de modelagem da força de tração

Neste último item mostra-se uma proposta do tratamento da modelagem dos veículos de competição, isto é apenas um guia para futuros trabalhos que pretendam seguir estudando a dinâmica dos veículos de competição; aqui se faz uma caracterização da dinâmica longitudinal desde tipo de veículo, e também suas componentes, como o motor.

A força de tração sempre está na direção longitudinal do veículo, e é resultado do torque gerado pelo motor e transferido pelo sistema de transmissão às rodas. O torque do motor por sua vez é função do ângulo do pedal do acelerador. Nos futuros modelos desenvolvidos, pode-se considerar que a força de tração é aplicada diretamente no centro de massa do veículo, para simplificar a representação matemática da transmissão. Deste modo a força de tração não modifica a força lateral, nem o momento de *yaw*, apenas interfere no movimento longitudinal do veículo. Deve-se ter em conta, entretanto, que a força de tração, juntamente com a força de resistência aerodinâmica, pode gerar como máximo

uma aceleração longitudinal de aproximadamente de 1,5g em um veículo de competição do tipo Fórmula 1.

### 2.6.1

#### Forças de aceleração e frenagem.

As forças responsáveis pelo movimento longitudinal do veículo são aquelas de frenagem, devido ao torque aplicado nas rodas pelo sistema de freios; e a força de tração, gerada nas rodas motrizes, pelo torque do motor transferido através dos diversos elementos do sistema de transmissão.

Para representar matematicamente tais esforços, inicia-se com um modelo do motor a gasolina, descrito através das curvas características obtidas na literatura especializada tal como [19]; então apresenta-se uma equação empírica que foi criada com a intenção de gerar curvas características muito próximas às da literatura [19], as constantes desta equação podem ser calibradas para se ter uma velocidade angular máxima e também modificar a potência máxima que o motor pode gerar, é importante ressaltar que as curvas características para os motores Diesel e os motores a gasolina são distintos, já que nos motores a gasolina a curva do torque do motor está mais inclinada há um lado quando se acrescenta a carga do motor ( $\% \delta_{pa}$ ), com este fim faz-se intervir esta variável dentro do polinômio de segundo grau (além de ser um fator que multiplica ao polinômio); na Equação 105 mostra-se o torque fornecido é função da velocidade angular,

$$T_{motor} = [\% \delta_{pa}] \cdot \left( c_2 \cdot \left( \frac{\omega_{motor}}{2600} \right)^2 + c_1 \cdot (\% \delta_{pa})^{[\% \delta_{pa}]} \cdot \left( \frac{\omega_{motor}}{2600} \right) + c_0 \right) \quad (2.101)$$

na qual  $\% \delta_{pa}$  é o percentagem do pedal do acelerador, que pode variar de 5% até 105%, onde o valor 5% inicial é aquele que determina o torque para o motor em marcha lenta;  $\omega_{Motor}$  é a velocidade angular do motor, que pode atingir, para um carro de corrida tipo Fórmula 1, 19000 rpm, no qual a potência máxima é de 750 hp [14]; e os coeficientes  $c_0$ ,  $c_1$ , e  $c_2$  são empregados para calibrar a curva em função do tipo de motor. Por exemplo, esta calibração para o motor típico da Fórmula 1 determina  $c_0=64$ ;  $c_1=110$ ;  $c_2=-11$ . A Figura 2.67 mostra as curvas de torque deste motor típico para diferentes valores do percentual do pedal do

acelerador, onde se pode notar que valor máximo ocorre a 13000 rpm, quando o motor se encontra a toda carga. Para calcular a potência fornecida pelo motor se utiliza a Equação 109,

$$P_{motor} = T_{motor} \cdot \omega_{motor} \quad (2.102)$$

e a Figura 2.68 ilustra a potência para um motor típico de carros de corrida Fórmula 1. Pode-se ver que a potência máxima ocorre a 18000 rpm. Os comportamentos vistos nas Figuras 2.67 e 2.68 estão próximos da realidade [19].

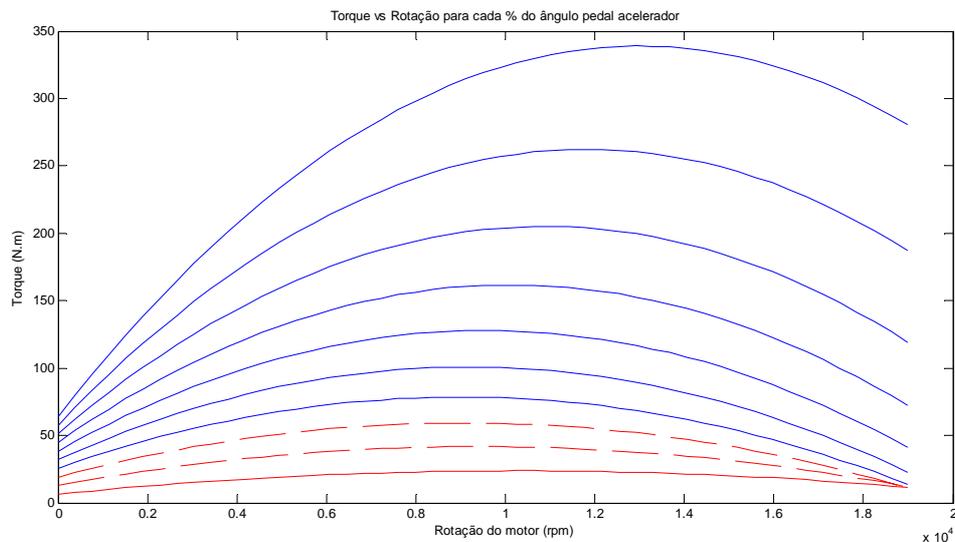


Figura 2.67. Curva característica do torque do motor versus a velocidade angular, para diversos percentuais do pedal do acelerador.

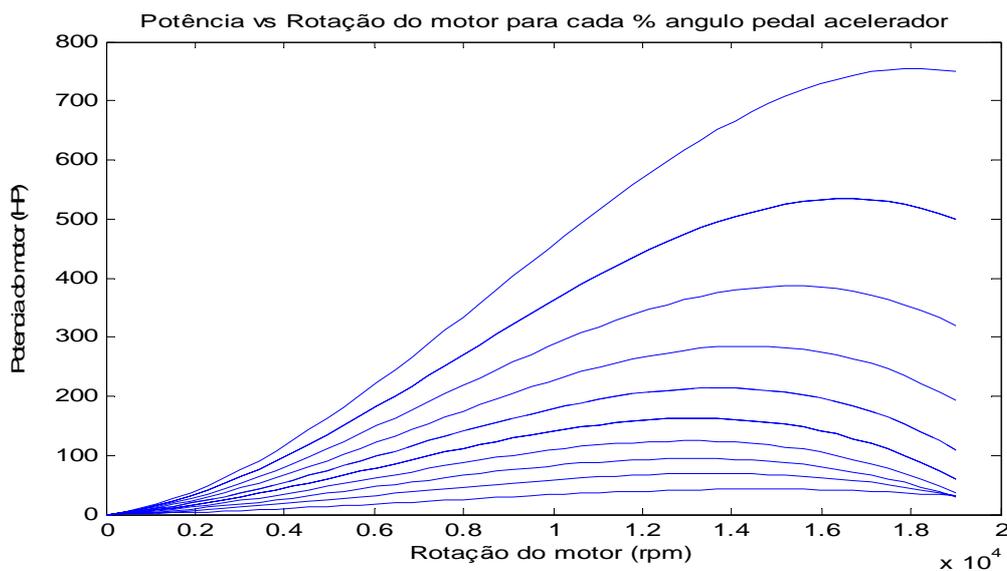


Figura 2.68. Curva característica da potência do motor versus a velocidade angular, para diversos percentuais do pedal do acelerador.

Assume-se que nestas curvas já foi considerada a perda de potência devida à dissipação interna do motor. De fato, para o tratamento do sistema de transmissão como um todo, considera-se que a potência entregue pelo motor às rodas já é a potência efetiva, adotando um coeficiente de rendimento global. Para determinar a velocidade angular do motor, emprega-se a relação dinâmica,

$$\dot{\omega}_{motor} = \frac{(T_{motor})}{J_{motor}} \quad (2.103)$$

no qual  $T_{motor}$  é o torque do motor,  $J_{motor}$  é o momento de inércia do motor, pode-se tomar como aproximadamente igual a 0,136 kg.m<sup>2</sup> [19].

O modelo da caixa de marchas juntamente com toda a transmissão pode chegar-se a reduzir de modo de fazer dela bastante simples. Não se considera qualquer tipo de perda localizada, a não ser a global acima mencionada, e também não há efeitos de flexibilidade nos eixos. Deste modo se supõe que a potência é constante em cada marcha, significando que se o torque transmitido aumenta a velocidade angular diminui e vice-versa, isto é o produto dessas variáveis, a potência, tem que ser constante. Então se a velocidade é multiplicada pela relação de transmissão, logo o torque é dividido pela mesma razão. A transmissão é modelada para 5 marchas distintas, cujas relações totais (da caixa de mudanças, do diferencial, etc) para cada marcha são apresentadas na Tabela 4. A troca de marchas será feita de forma automática em função da velocidade, de acordo com o apresentado na Tabela 5, na qual representa-se  $Wt$  como a rotação que sai da transmissão,  $We$  a rotação efetiva que sai do motor e entra na transmissão,  $Tt$  o torque que sai da transmissão e  $Te$  é o torque efetivo que sai do motor e entra na transmissão.

Tabela 4. Relação de transmissão total de um veículo de Fórmula 1.

Posição da marcha	Relação de transmissão
em primeira	0.021
em segunda	0.030
em terceira	0.050
em quarta	0.080
em quinta	0.150

Tabela 5. Trocas de marcha de um veículo de Fórmula 1.

Posição da marcha	Velocidade do veículo (km/h)	Rotação que sai da transmissão	Torque que sai da transmissão
em primeira	$u < 55$	$Wt = 0.021 We$	$Tt = Te / 0.021$
em segunda	$55 < u < 80$	$Wt = 0.030 We$	$Tt = Te / 0.030$
em terceira	$80 < u < 135$	$Wt = 0.050 We$	$Tt = Te / 0.050$
em quarta	$135 < u < 230$	$Wt = 0.080 We$	$Tt = Te / 0.080$
em quinta	$230 < u$	$Wt = 0.150 We$	$Tt = Te / 0.150$

Nas Figuras 2.69 e 2.70 pode-se ver como varia a força motriz, ou de tração, quando o pedal do acelerador encontra-se na posição máxima ou em uma intermediária, para as relações de transmissão consideradas na Tabelas 4 e 5, empregando a curva de torque versus velocidade angular da Equação 2.103 (Figura 2.67).

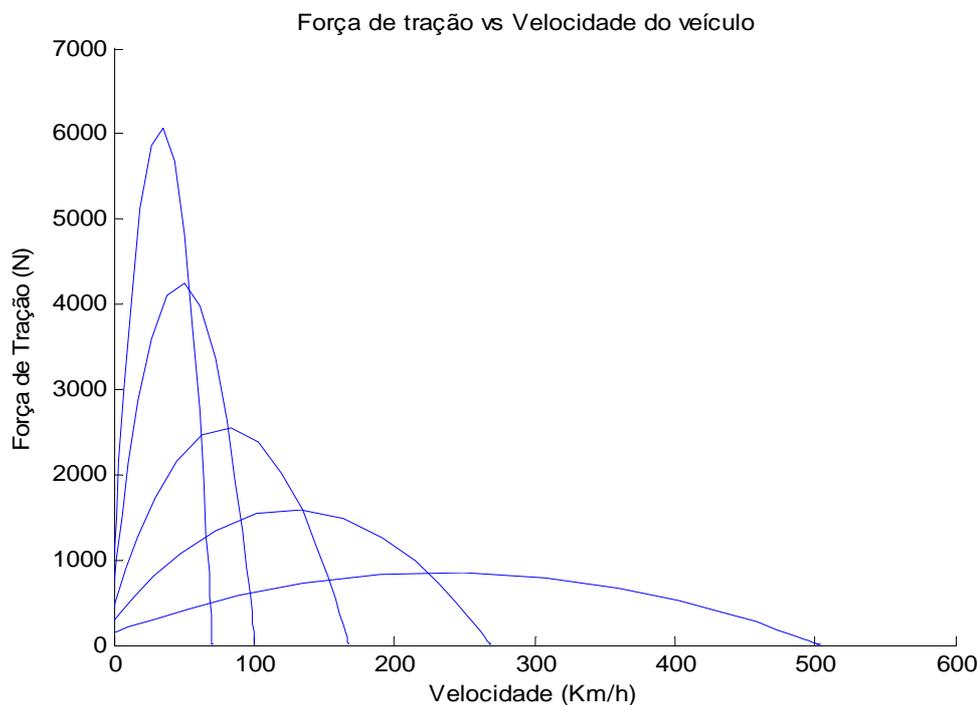


Figura 2.69. Curva característica de força de tração versus velocidade, para a potência máxima do motor.

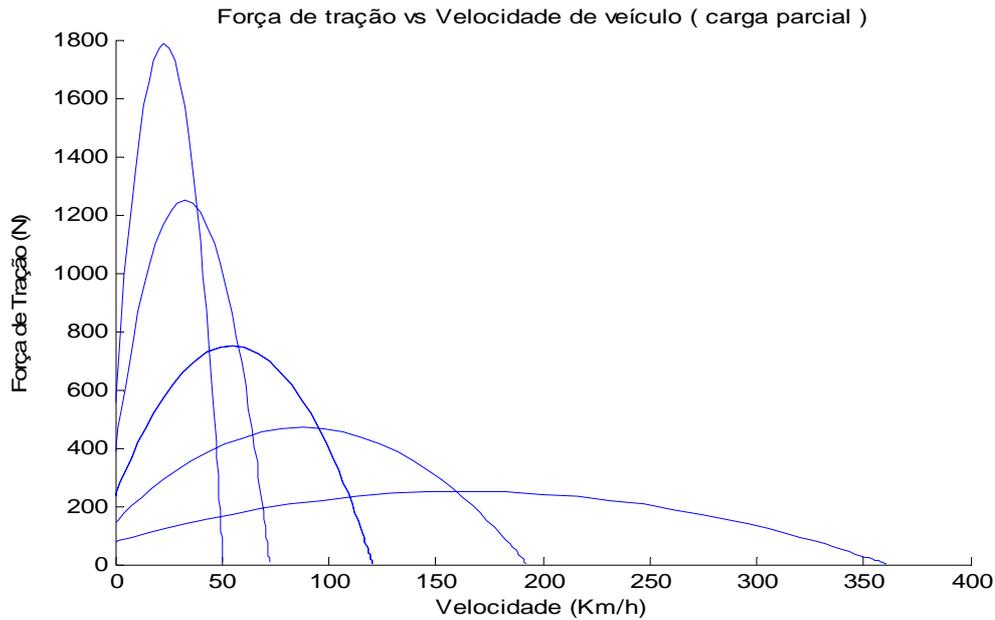


Figura 2.70. Curva característica de força de tração versus velocidade, para a potência parcial do motor (50% do ângulo máximo do pedal acelerador).

A força de frenagem pode ser simplificada por uma função linearmente variável em função do ângulo do pedal de freio, definido entre  $0^\circ$  até  $60^\circ$ . Sabe-se que para veículos de competição, tipo Fórmula 1, a desaceleração em frenagem é de aproximadamente  $5g$ . Uma vez conhecida a massa do veículo pode-se calcular a força máxima de frenagem, assumindo que ela será igual e constante nos 4 pneumáticos, como mostrado na Figura 2.71.

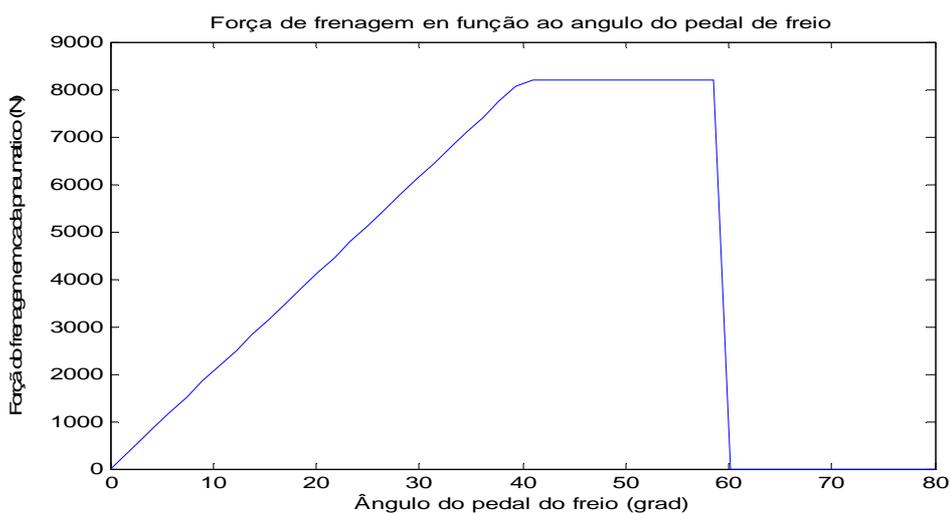


Figura 2.71. Força de frenagem do veículo suposta como a mesma para cada roda.

### 3

## Determinação da Trajetória Ótima

Tal como acontece em muitos domínios da ciência moderna, é possível encontrar os primeiros passos da otimização em culturas de povos antigos. Citando, a título de exemplo, o conhecido episódio narrado por *Virgílio*, segundo o qual a rainha *Dido*, ao fundar a cidade de “Cartago”, determinou que essa fosse planejada segundo a figura geométrica para qual seria maximizada a área por ela delimitada com um dado perímetro constante [22]. Outro exemplo muito conhecido é o problema da braquistócrona, que foi proposto por *John Bernoulli* em 1696 como desafio à comunidade matemática da época. O problema consiste em encontrar uma curva que una dois pontos  $A$  e  $B$  situados num mesmo plano vertical, com a propriedade de que uma partícula inicialmente em repouso que deslize sobre essa curva leve o menor tempo possível para ir, sob a ação da gravidade, de  $A$  até  $B$ . O ponto  $A$  é suposto estar acima do ponto  $B$  mas não na mesma vertical. A solução deste problema foi publicada pouco menos de um ano após a sua colocação.

Todavia, o desenvolvimento dos métodos de otimização inicia-se, praticamente, só no século XVIII. Na verdade, é a partir dos anos quarenta que os desafios lançados por mais complexos problemas decisoriais visando a melhor utilização dos recursos disponíveis, as surpreendentes potencialidades do recém-descoberto cálculo automático e um maior esforço de matematização de problemas reais, permitem desenvolver a maioria dos potentes métodos de otimização que atualmente existem e que podem ser utilizados como preciosos instrumentos de apoio ao processo da tomada de decisões.

### 3.1

#### Definição da Otimização aplicada aos veículos

O problema de otimização é muito utilizado em diversas áreas da ciência, e seu objetivo é diferente em cada uma delas, porém o tratamento quase sempre é o mesmo. A otimização de alguma função em relação a alguma variável é abordada

segundo um procedimento matemático, e portanto, sempre é necessário trabalhar com modelos que expressem o comportamento físico do sistema que se quer otimizar. Neste trabalho deseja-se obter a trajetória ótima para o percurso de um veículo de competição, cujo principal objetivo é percorrer o traçado de um circuito no mínimo tempo possível. Este é um problema que pode ser resolvido segundo técnicas de otimização. Para tanto deve-se trabalhar com um modelo matemático que represente o veículo e as condições às quais está sujeito. No capítulo anterior desenvolveu-se um modelo matemático não linear do veículo, relativamente complexo que, após algumas avaliações e tentativas iniciais, foi considerado inadequado para o tratamento de interesse, e provavelmente será empregado apenas quando forem aplicadas técnicas de controle ótimo que não é a intenção deste trabalho. Então, para resolver o problema de otimização, se propõe um outro modelo matemático, muito mais simples, mas suficiente para descrever os fenômenos físicos envolvidos na dinâmica veicular, necessários para a determinação da trajetória ótima, com um tempo mínimo de percurso. O modelo veicular do Capítulo 2 é empregado para avaliar os resultados encontrados a partir da representação mais simples, como será visto adiante no Capítulo 4.

Em [21] tem-se a abordagem do problema da trajetória ótima através das ferramentas de otimização, na qual o modelo matemático do veículo é mais limitado e menos representativo do que o desenvolvido neste trabalho. Deste modo, considerou-se suficiente a escolha feita, como, inclusive, comprovam os resultados encontrados, como discutido a seguir.

A Figura 3.1 apresenta uma curva com duas trajetórias possíveis: uma pelo centro da pista, e outra empregando a tangência em um determinado ponto. Pode-se provar, por conceitos triviais de movimento de uma partícula, que, quando há limitação na aceleração lateral (centrípeta) máxima, no primeiro caso a velocidade limite de percurso é menor que no segundo caso. Considerando que as distâncias a serem percorridas são praticamente iguais, o tempo de percurso da primeira trajetória será maior que o da segunda, fornecendo uma vantagem competitiva àquele que escolher o segundo traçado. A segunda seria uma “trajetória ótima”.

O exemplo da Figura 3.1 diz muito do trabalho que se pretende fazer. Aqui, aparentemente, se tem dois tipos de análises independentes, relacionadas aos movimentos longitudinal e lateral do veículo. Uma possibilita determinar o valor da velocidade que o veículo tem em cada instante de tempo, e a outra a mudança

de direção da velocidade. Porém ambas as análises estão fortemente ligadas. Partindo deste exemplo é possível ver que o modelo mais simples deve ter duas variáveis independentes, mas interrelacionadas, uma para cada um dos movimentos (lateral e longitudinal), como se explica de forma detalhada no item a seguir.

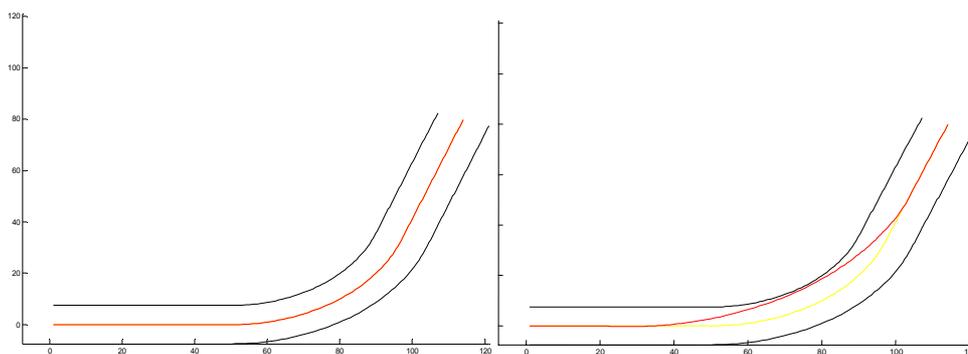


Figura 3.1. Duas trajetórias possíveis em uma curva, à esquerda se apresenta a trajetória pelo meio da pista, à direita a trajetória tangente à curva.

### 3.2 Modelo massa pontual

O modelo de massa pontual é uma representação bastante simples para um veículo terrestre, que não permite observar completamente a sua dinâmica, porém é suficiente para a determinação do traçado da trajetória ótima, levando à resultados muito próximos do real, como será visto. Uma vez obtida a trajetória ótima empregando este modelo simples, utiliza-se o modelo dinâmico não linear do veículo para percorrer o traçado estabelecido, mediante estratégias de controle, e verifica-se as diferenças encontradas.

Para determinação do modelo de massa pontual, parte-se da análise das equações de movimento, como no capítulo anterior, considerando-se o veículo como uma partícula no espaço, com sua massa concentrada no Centro de Massa. A análise é realizada supondo também um referencial local embarcado no veículo e a transformação de coordenadas para o referencial global, de modo a assim obter a trajetória do veículo, como no modelo mais complexo visto anteriormente. O modelo massa pontual pode ser obtido ao se fazer simplificações de linearidade e considerações físicas naquele modelo dinâmico não linear.

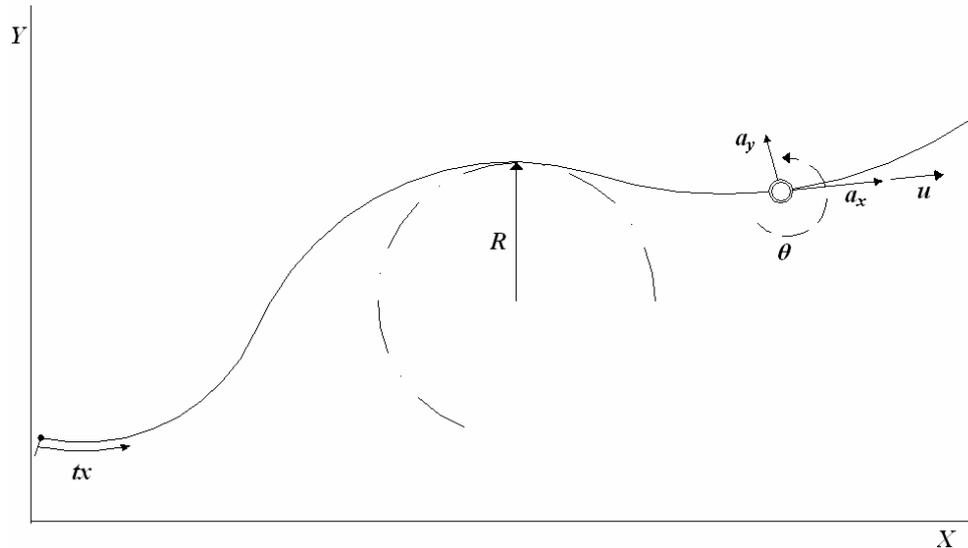


Figura 3.2. Variáveis do modelo massa pontual.

O modelo massa pontual descreve o movimento longitudinal, através da equação da aceleração do veículo em relação ao seu eixo  $x$ , dada por

$$u_x = u_0 + \int a_x dt \quad (3.1)$$

na qual,  $u_x$  é a velocidade (longitudinal) em função do tempo;  $u_0$  é a velocidade inicial;  $a_x$  é a função aceleração (aceleração longitudinal) em função do tempo e  $dt$  é diferencial do tempo (variável de integração).

Deve-se ter em conta que para o modelo massa pontual do veículo não existe qualquer movimento lateral no referencial local. Mas então o que significa a aceleração lateral? Isto caracteriza apenas a força que torna possível mudar a direção do vetor velocidade (longitudinal). Não é feita qualquer integração da aceleração lateral, mas emprega-se esta variável para determinar a velocidade angular, associada à mudança de direção do vetor velocidade, segundo

$$a_y = \frac{u_x^2}{R} \quad (3.2)$$

$$u_x = R \dot{\theta} \quad (3.3)$$

nas quais,  $a_y$  é a função aceleração lateral (ou aceleração normal) em função do tempo,  $R$  é o raio de curvatura em função do tempo,  $\dot{\theta}$  é a velocidade angular em função do tempo.

Deste modo, a função das equações associadas ao movimento lateral é apenas caracterizar o movimento de rotação, que pode representar, dentro de

certas considerações, a atitude do veículo. A aceleração lateral gera um raio de curvatura e também uma velocidade angular para cada instante de tempo, que estão relacionadas como mostrado. Vê-se claramente que o movimento lateral está muito relacionado ao movimento longitudinal.

Arruma-se as Equações 3.2 e 3.3 que relacionam a aceleração lateral, a velocidade longitudinal e a velocidade angular, levando às Equações 3.5, 3.6 e 3.7,

$$a_y = \frac{u_x^2}{R} = \frac{u_x^2}{\left(\frac{u_x}{\dot{\theta}}\right)} = u_x \cdot \dot{\theta} \quad (3.4)$$

ou

$$\dot{\theta} = \frac{a_y}{u_x} \quad (3.5)$$

e

$$\theta = \int \dot{\theta} dt \quad (3.6)$$

$$R = \frac{u_x}{\dot{\theta}} \quad (3.7)$$

nas quais  $\theta$  representa a atitude do veículo (ângulo *yaw* do veículo).

Agora, com as Equações 3.1, 3.5, 3.6 e 3.7 é possível fazer uma transformação de coordenadas e expressar a velocidade do veículo em coordenadas globais para, depois, mediante uma integração no tempo, obter a sua posição, ou seja a trajetória, de acordo com

$$U_x = u_x \cdot \cos(\theta) \quad (3.8)$$

$$V_y = u_x \cdot \text{sen}(\theta) \quad (3.9)$$

$$X = \int U_x dt \quad (3.10)$$

$$Y = \int V_y dt \quad (3.11)$$

nas quais,  $U_x$  é a velocidade do veículo na direção do eixo **x** do referencial global,  $V_x$  é a velocidade na direção do eixo **y** do referencial global, **X** e **Y** são as posições no referencial global.

Assim o modelo massa pontual está completamente descrito nas equações anteriores, que podem ser facilmente resolvidas no *Simulink/Matlab*, onde as variáveis de entrada são as duas acelerações, longitudinal e lateral, a massa do

veículo é constante no tempo, e as funções de saída são a posição nos eixos  $X$  e  $Y$  no referencial global, que geram a trajetória do veículo.

### 3.3 Algoritmos de Otimização

Existem vários modos de classificar os métodos de otimização. Entre os principais têm-se os métodos diretos e indiretos. São denominados métodos indiretos aqueles que não dependem da comparação direta dos valores numéricos assumidos em dois ou mais pontos. Os métodos indiretos fazem uso de condições necessárias para que um ponto seja de mínimo ou de máximo, condições essas expressas através de relações matemáticas, que são, por sua própria natureza, indiretas. Os métodos diretos pressupõem a determinação e comparação dos valores da função a otimizar em diversos pontos situados dentro da faixa de definição das variáveis independentes [23]. O problema a ser aqui resolvido por suas características deverá ser tratado por um método indireto.

Uma outra possibilidade para a solução do problema em questão é a aplicação dos algoritmos genéticos, que formam uma família de procedimentos computacionais inspirados na evolução. Normalmente os algoritmos genéticos são vistos como otimizadores de funções, embora a quantidade de problemas para os quais se aplicam seja bastante abrangente [24].

Os procedimentos evolucionários não serão adotados neste trabalho, mas poderão ser investigados em futuras pesquisas nesta área, por se considerar que ainda é preciso conhecer melhor os resultados do problema tratado através de metodologias clássicas de otimização.

Como em quase todo problema de otimização é preciso ter uma função objetivo e uma ou mais restrições, identifica-se estes no problema específico. Analisa-se a seguir especificamente o uso do modelo massa pontual no procedimento de otimização, e define-se o algoritmo a utilizar em forma geral para que seja entendido o que se pretende fazer, sem entrar ainda na programação no *Simulink/Matlab*. No modelo massa pontual, descrito no item anterior, as variáveis de entrada são as acelerações e as funções de saída são a posição nas coordenadas globais. O objetivo é que o veículo percorra, dentro de uma pista pré-determinada, um traçado no menor tempo possível.

Deste modo, as variáveis do problema de otimização são as acelerações (lateral e longitudinal), que no caso de um veículo de competição, percorrendo uma determinada pista, possuem perfis com características conhecidas. Assim não se pretende obter como resultado qualquer função aceleração, mas sim formas de onda no tempo que caracterizem as acelerações que são aproximadas ao comportamento físico que ocorre em um veículo de competição, como é explicado mais detalhadamente adiante.

As restrições do problema de otimização neste caso são três: o veículo deve ficar em todo tempo dentro da pista, as acelerações não podem ultrapassar o limite estabelecido pelo círculo de aderência do veículo, e a velocidade não pode ser maior que a máxima admissível (limitação física devida potência do motor).

Na Figura 3.3 mostra-se, em forma esquemática muito simplificada, o que se pretende conseguir da otimização. Neste diagrama apresenta-se as variáveis de otimização e as restrições que a otimização vai considerar aplicados no modelo massa pontual, incluído no processo de otimização.

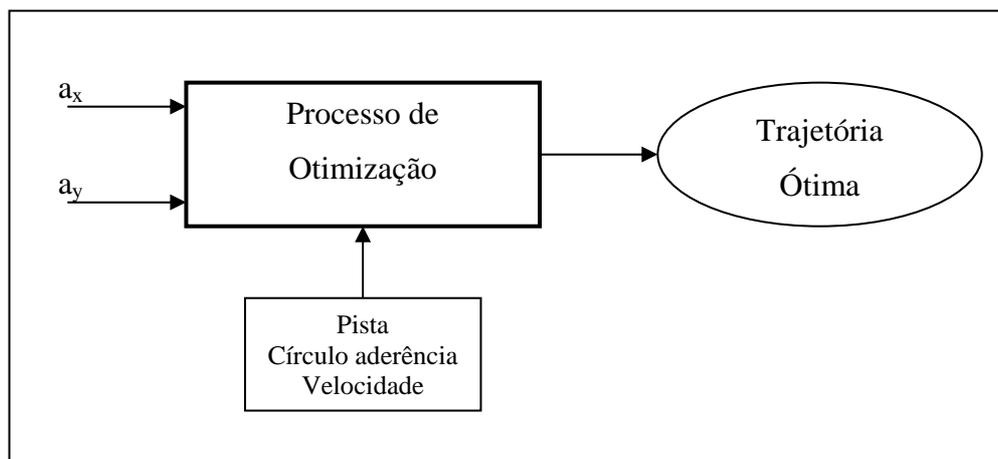


Figura 3.3. Diagrama do algoritmo de Otimização.

A seguir explica-se cada parte do algoritmo de otimização que vai se utilizar, tratando das variáveis e das restrições, da função objetivo, e dos critérios considerados para trabalhar dentro dos limites da realidade física do problema em questão.

### 3.4

#### Definição das variáveis e restrições

Descreve-se agora as variáveis associadas ao modelo matemático empregado na otimização. Pode-se chamar as variáveis do modelo massa pontual como variáveis dinâmicas, que são definidas pela equação de movimento. Estas variáveis que descrevem o movimento do veículo e sua localização são: a velocidade angular do veículo  $\dot{\theta}$ , a velocidade longitudinal  $u_x$ , posição no eixo  $x$  do referencial global ( $X$ ), posição no eixo  $y$  do referencial global ( $Y$ ), a atitude do veículo que é o ângulo  $\theta$ .

#### 3.4.1

##### Variáveis de entrada

As variáveis de entrada do problema de otimização, as mesmas do modelo veicular, são as acelerações lateral e longitudinal, que podem ser positivas ou negativas, variáveis no tempo ou constantes. Agora como obter funções matemáticas que descrevam tais acelerações? Felizmente, como se quer otimizar a trajetória seguindo o comportamento dos veículos de competição, tem-se o apoio da tecnologia de última geração utilizada nestes veículos. A telemetria é um sistema de aquisição de dados que faz uso de transdutores embarcados, através da qual as informações são transmitidas e processadas para análise em tempo real ou posterior. As acelerações do veículo podem ser obtidas por este processo, no qual os dados normalmente não estão em função do tempo, pelo menos não em forma explícita, mas sim em função da distância percorrida pelo veículo. Tais dados podem ser utilizados para definir os perfis de aceleração no procedimento de otimização da trajetória. A Figura 3.3 apresenta um exemplo da forma como se obtém os dados a partir da telemetria e os perfis típicos das acelerações longitudinal e lateral. Existe um certo “padrão” para as funções aceleração, que pode ser adotado no tratamento do problema, simplificando muito a análise a ser realizada. Pode-se considerar que o comportamento das acelerações, pelo menos no que diz respeito à sua forma, é conhecido, não se alterando significativamente de pista para pista, ou mesmo de veículo para veículo, ou ainda de piloto para piloto.

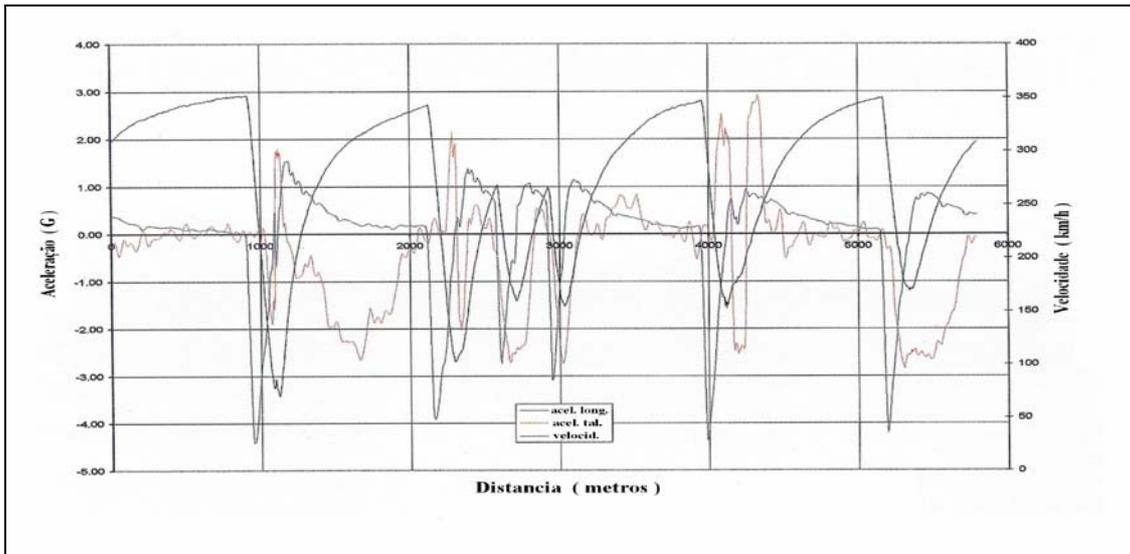


Figura 3.4 Exemplo dos dados obtidos da telemetria.

Uma vez que o objetivo é minimizar o tempo de percurso, o que se quer é ter o tempo como resultado e não como variável de alguma função. Assim o ponto de partida é conseguir expressões que representem os fenômenos físicos durante o percurso de retas e curvas, que não contenham o tempo de forma explícita. A seguir apresentam-se as funções que serão adotadas para as acelerações, para cada situação em qualquer trajetória, dependentes da distância percorrida pelo veículo

A distância  $tx$  que o veículo percorre no tempo  $t$  é dada pela equação

$$tx = \int u_x dt \quad (3.12)$$

na qual  $u_x$  é a velocidade do veículo.

Para a caracterização da **aceleração longitudinal positiva (tração)**, considera-se que ao se acionar o pedal do acelerador, o veículo atinge inicialmente uma elevada aceleração, e, conforme a velocidade aumenta, sua derivada diminui até chegar à velocidade máxima, na qual a aceleração é nula. Para representar de melhor forma possível este comportamento define-se uma função exponencial,

$$a_x = a_0 \cdot e^{\left(\frac{tx-x_0}{x_f-x_0}\right) \left[\ln\left(\frac{a_f}{a_0}\right)\right]} \quad (3.13)$$

que deve satisfazer os seguintes valores iniciais e finais:  $tx = x_0 \Rightarrow a_x = a_0$  e  $tx = x_f \Rightarrow a_x = a_f$ , na qual  $a_0 > a_f$ , são as acelerações, inicial e final respectivamente,  $tx$  é a distância percorrida,  $x_0$  é a posição inicial do veículo,

e  $x_f$  é a posição final durante o processo de aceleração. A Figura 3.4 mostra o perfil estimado para a aceleração longitudinal positiva tendo como variável independente a posição do veículo na pista.

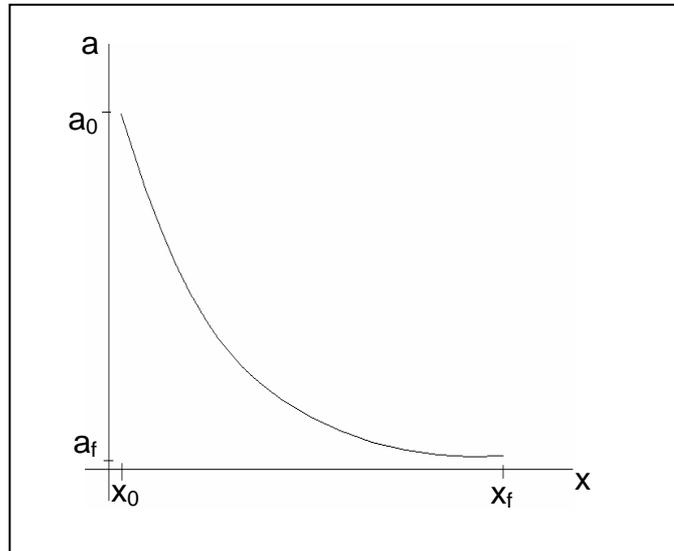


Figura 3.5. Função para a aceleração longitudinal do veículo.

Já para a **aceleração longitudinal negativa (frenagem)**, ao se acionar o pedal do freio, considera-se que, inicialmente, o veículo atinge uma alta desaceleração, e, de acordo com a diminuição da velocidade, a desaceleração também diminui até chegar a uma velocidade mínima (pode ser nula, ou quando o piloto alivia o pedal de freio), na qual a desaceleração é nula. Para representar de melhor forma possível este comportamento define-se uma outra função exponencial, semelhante à anterior, mas com valores sempre negativos, dada por

$$a_x = -a_0 \cdot e^{\left(\frac{tx-x_0}{x_f-x_0}\right) \left[\ln\left(\frac{a_f}{a_0}\right)\right]} \quad (3.14)$$

que deve satisfazer os valores iniciais e finais:  $tx = x_0 \Rightarrow a_x = a_0$  e  $tx = x_f \Rightarrow a_x = a_f$ , na qual  $a_0 > a_f$ , são as desacelerações, inicial e final respectivamente,  $tx$  é a distância percorrida,  $x_0$  é a posição inicial do veículo na pista, e  $x_f$  é a posição final durante a etapa de desaceleração. A Figura 3.6 mostra o perfil suposto para as acelerações longitudinal positiva (tração) e negativa (frenagem) tendo como variável independente a posição do veículo na pista.

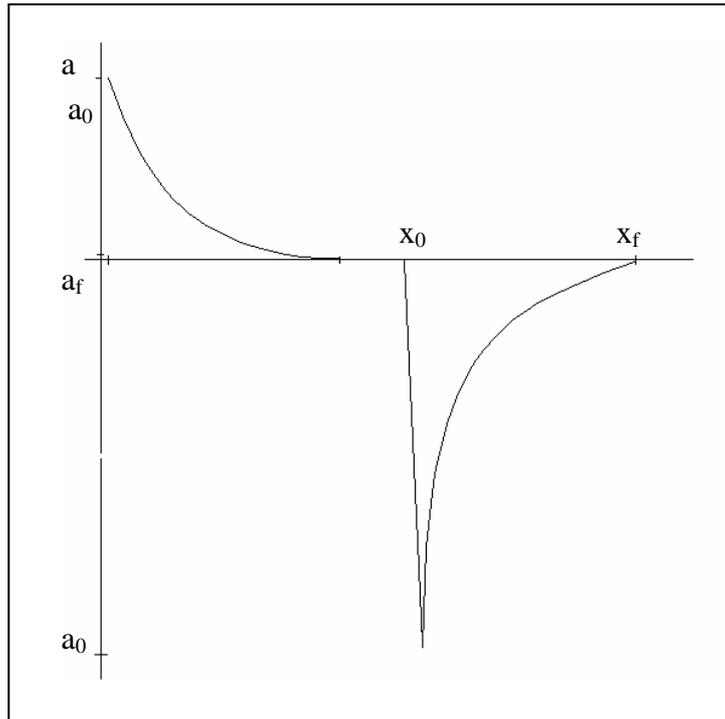


Figura 3.6. Função para aceleração e desaceleração longitudinal do veículo.

Para a *aceleração lateral positiva (entrada da curva)*, quando o piloto faz manobras com o volante do veículo, ao mudar de direção as rodas dianteiras, são geradas as forças laterais, que a sua vez levam às acelerações laterais. Este movimento transitório pode ser aproximado mediante alguma expressão matemática, que deve ser semelhante ao comportamento mostrado nos gráficos obtidos pela telemetria. Para representar de melhor forma possível este comportamento define-se novamente uma função exponencial

$$a_y = a_n \left[ 1 - e^{\left( \frac{tx - x_0}{x_f - x_0} \right) [-4]} \right] \quad (3.15)$$

que deve satisfazer os valores iniciais e finais:  $tx = x_0 \Rightarrow a_n = 0$  e  $tx = x_f \Rightarrow a_n = a_y$ , na qual  $a_n$  é a aceleração lateral final,  $tx$  é a distância percorrida,  $x_0$  é a posição inicial do veículo, e  $x_f$  é a posição final na entrada da curva. Nota-se que se considerou que o sistema atinge uma condição final em aproximadamente 4 vezes o tempo de decaimento da exponencial decrescente, prática comum na análise de sistemas dinâmicos lineares, daí o fator (-4) no expoente da Equação 3.15.

A representação da *aceleração lateral negativa (saída da curva)*, é muito semelhante à anterior, mas agora se quer chegar de uma aceleração inicial (diferente de zero) até a aceleração final nula. Para representar da melhor forma possível este comportamento define-se a função exponencial:

$$a_y = a_n \cdot e^{\left(\frac{tx-x_0}{x_f-x_0}\right)[-4]} \quad (3.16)$$

que satisfazer os valores iniciais e finais:  $tx = x_0 \Rightarrow a_n = a_0$  e  $tx = x_f \Rightarrow a_n = 0$ , na qual  $a_n$  é a aceleração centrípeta inicial,  $tx$  é a distância percorrida,  $x_0$  é a posição inicial do veículo,  $x_f$  é a posição final na saída da curva. Na Figura 3.6 mostra-se o comportamento das funções empregadas para representação da aceleração lateral do modelo veicular massa pontual. Poderia-se ter considerado ainda uma fase na qual a aceleração lateral é constante durante o percurso da curva, entretanto acredita-se que o próprio problema de otimização possa convergir para tal situação, caso ela realmente ocorra. Pela análise dos dados da telemetria entretanto observou-se que raramente se atinge uma condição permanente, estando o veículo sempre sujeito aos transientes descritos pelas Equações 3.15 e 3.16.

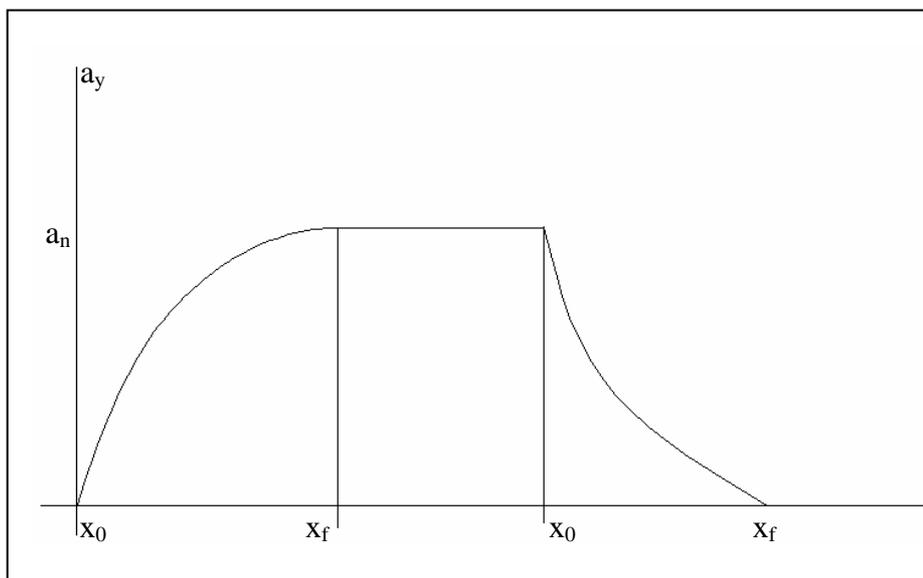


Figura 3.7 Função para aceleração lateral do veículo.

Assim ficam definidas as variáveis de entrada, que são um conjunto de funções que descrevem o comportamento físico das acelerações dos veículos de

competição, dependentes de 4 parâmetros em cada uma das quatro situações consideradas: as acelerações e as posições inicial e final nos trechos do circuito.

A dependência das acelerações com respeito à distância percorrida é fácil e lógica de assimilar e trabalhar, uma vez que a variável que o piloto está vendo e processando em seu cérebro é sua posição na pista (ou caminho), e ele realiza manobras de modo a acompanhar o traçado da pista, segundo as características dinâmicas do veículo.

### 3.4.2

#### Variáveis de saída

As variáveis de saída são duas: as posições do veículo nos eixos  $X$  e  $Y$  do referencial global, obtidas pela solução das equações diferenciais do modelo massa pontual, que descrevem o movimento do veículo, realizada através do *Simulink/Matlab*. Os valores dessas posições dependem dos valores instantâneos de velocidade angular e velocidade longitudinal do veículo, que por sua vez são obtidos pela integração das acelerações longitudinal e lateral, como mostrado anteriormente. Os resultados deste modelo serão avaliados empregando uma pista pré-definida, analisando o comportamento de tais variáveis em função da distância percorrida ou do tempo, de modo a verificar se as restrições impostas são satisfeitas e se tal comportamento é aceitável, comparativamente àquele obtido por uma representação mais detalhada e realista.

### 3.4.3

#### Restrições de otimização

Adota-se neste modelo de massa pontual basicamente três restrições, a primeira das quais é muito simples: a velocidade do veículo não pode ser maior que um máximo estabelecido em 325 km/h (comum em veículos de competição) Essa velocidade é limitada pela capacidade do motor, uma vez que ele não pode produzir mais potência. Assim

$$u_x \leq 325 \text{ km/h} \quad (3.17)$$

A segunda restrição também não é muito complexa, e representa as limitações das acelerações. Sabe-se pelo círculo de aderência de um veículo de competição que

$$\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \leq 5g \quad (3.18)$$

$$-5g \leq a_y \leq 5g \quad (3.19)$$

$$-5g \leq a_x \leq 2g \quad (3.20)$$

sendo  $g$  a aceleração da gravidade. A intersecção das três desigualdades fornece a restrição nas acelerações (e desacelerações), tanto longitudinal quanto lateral, assegurando que estas variáveis permaneçam dentro do círculo de aderência.

A terceira restrição é a mais complexa, e relativamente difícil de se avaliar e descrever matematicamente, pois representa as condições que estabelecem que o veículo deve permanecer dentro da pista, com uma certa tolerância admissível, considerando que podem existir em alguns casos áreas de escape ou trechos fora da pista que são usados como parte do traçado. Como seria muito ineficiente fazer a avaliação para cada ponto da trajetória, dentro da largura da pista, realizou-se esta comparação em função apenas dos valores limites superior e inferior da pista no eixo lateral  $Y$  do sistema referencial global, a partir do posicionamento longitudinal (eixo  $X$ ), empregando diretamente os resultados encontrados pelo *Simulink/Matlab*. Deste modo, para cada ponto de deslocamento longitudinal  $xt$ , qualquer coordenada  $yt$  associada deve estar entre  $y_{inf.}$  e  $y_{sup.}$  da pista, como mostrado na Figura 3.7. Matematicamente deve-se ter para cada  $xt$  um valor de  $yt$  de acordo com

$$y_{inf.} \leq yt \leq y_{sup.} \quad (3.21)$$

na  $xt$  é a posição no eixo  $X$  do referencial global,  $yt$  é a posição no eixo  $Y$  do referencial global,  $y_{inf.}$  é o limite inferior da pista e  $y_{sup.}$  é o limite superior da pista no eixo  $Y$  do referencial global para a posição  $xt$ .

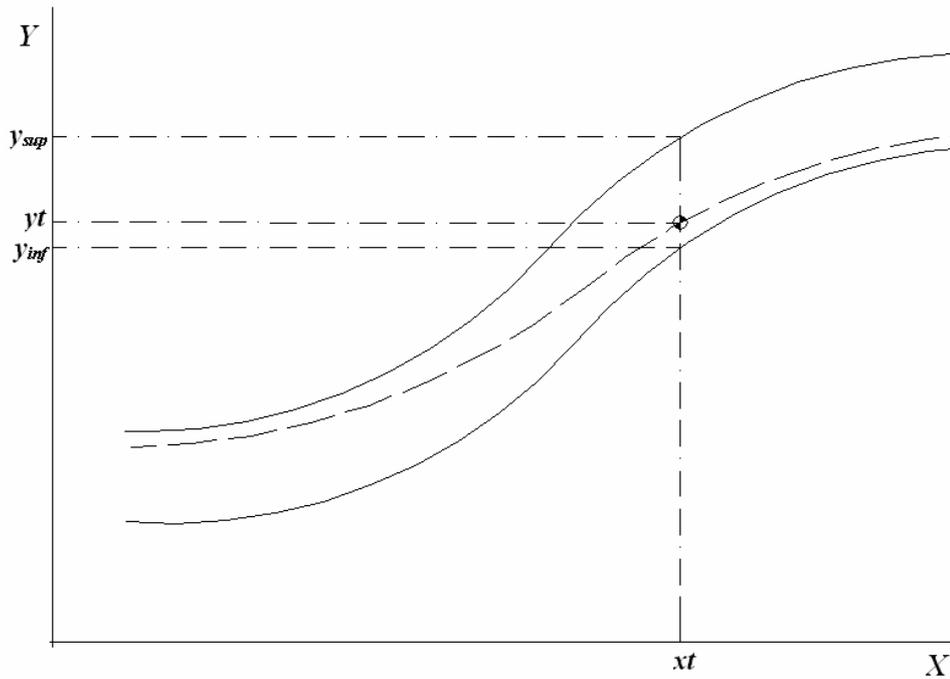


Figura 3.8. Restrição da pista.

### 3.4.4

#### Função objetivo

A função objetivo do problema de otimização é o tempo, uma vez que se pretende obter mínimo tempo para o percurso considerado. O *tempo* deverá ser representado por uma função da distância percorrida pelo veículo. Esta função *tempo* será minimizada variando os parâmetros das acelerações. Deve-se lembrar que o tempo total de percurso será a soma dos tempos encontrados para cada situação particular, ou seja existe um tempo associado a um trecho reto, subdividido em uma faixa na qual se tem uma aceleração positiva e em seguida uma desaceleração; e aqueles correspondentes a um trecho curvo, que normalmente também estão subdivididos em dois ou três condições de aceleração distintas.

De maneira geral, entretanto, considerando que

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (3.22)$$

então chega-se a

$$dt = \frac{dx}{v} \quad (3.23)$$

e finalmente tem-se

$$t = \int \frac{1}{v} dx \quad (3.24)$$

que será a expressão empregada analiticamente para determinar o tempo associado a uma determinada solução do problema de otimização, que deverá ser minimizado a cada passo do procedimento correspondente.

A seguir serão apresentadas as equações utilizadas para a análise e obtenção da trajetória ótima e sua implementação em *Matlab*. Como se quer otimizar a trajetória para o tempo mínimo de percurso, é preciso “eliminar” a variável tempo em todas as expressões das acelerações definidas ao início deste capítulo. Lembra-se que foram estabelecidos dois trechos longitudinais independentes: um de aceleração (de  $x_0$  até  $x_f$ ) e outro trecho de desaceleração (de  $x_1$  até  $x_2$ ); e dois trechos de aceleração lateral: um de entrada na curva com aceleração lateral “positiva” (de  $x_3$  até  $x_4$ ) e outro trecho de saída da curva com aceleração lateral “negativa” (de  $x_5$  até  $x_6$ ); considera-se  $x_i$  um ponto qualquer ao longo da distância percorrida pelo veículo. A Figura 3.9 apresenta os diversos trechos considerados, para os quais serão desenvolvidas, a seguir, expressões analíticas convenientes que serão utilizadas no problema de otimização, incluindo a função objetivo.

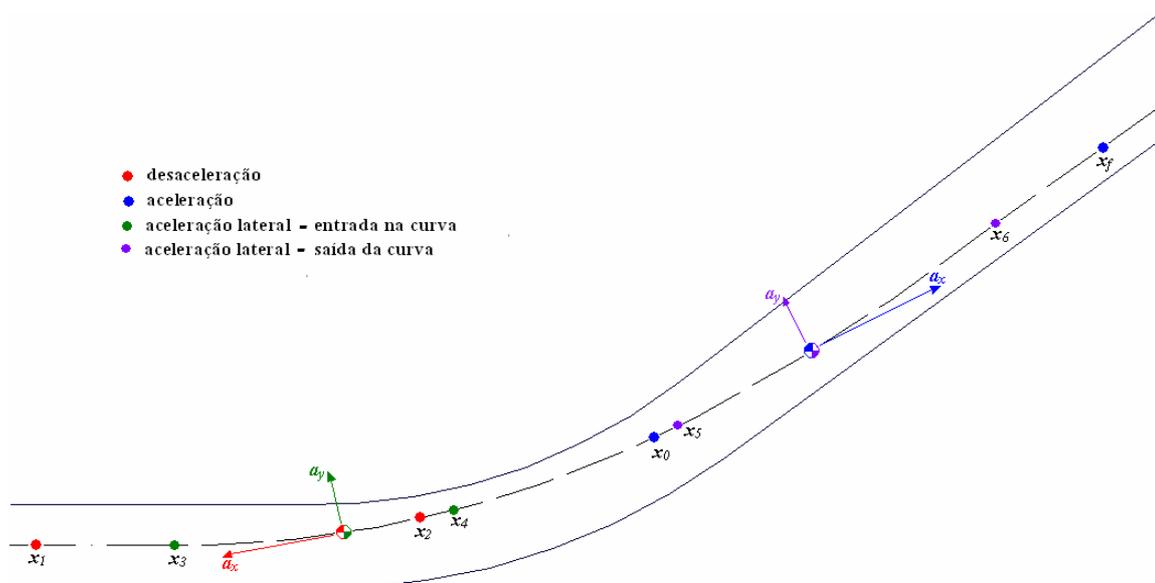


Figura 3.9. Trechos de uma pista com diferentes acelerações.

### 3.5 Apresentação da Função Objetivo

Para determinação do **tempo** ( $t$ ) de percurso se empregam as funções aceleração do item anterior e aplica-se a teoria infinitesimal para resolver as equações diferenciais. O tempo pode ser calculado de duas formas distintas, utilizando como variável de integração a distância percorrida ( $dx$ ) ou a velocidade ( $dv$ ). Assim,

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{então:} \quad dt = \frac{dx}{v} \quad \text{portanto:} \quad t = \int \frac{1}{v} \cdot dx \quad (3.25)$$

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{então:} \quad dt = \frac{dv}{a} \quad \text{portanto:} \quad t = \int \frac{1}{a} \cdot dv \quad (3.26)$$

na qual  $a$  é a aceleração longitudinal. Sendo a aceleração longitudinal função da distância percorrida é mais conveniente utilizar a Equação 3.25. Para tanto deve-se antes calcular a velocidade em função da distância percorrida; e como essa variável é diferente para cada trecho de aceleração ou desaceleração, ou naqueles em que a velocidade é constante, apresenta-se a seguir a solução em cada caso, de acordo com o tipo de movimento.

#### 3.5.1 Movimento longitudinal acelerado

Este movimento acontece no trecho de  $x_0$  ate  $x_f$ , com a aceleração longitudinal dada por

$$a_x = a_0 \cdot e^{\left(\frac{x-x_0}{x_f-x_0}\right) \cdot \left[\ln\left(\frac{a_f}{a_0}\right)\right]} \quad (3.27)$$

na qual  $a_0$  é a aceleração longitudinal inicial,  $a_f$  aceleração longitudinal final,  $x$  é um ponto ao longo da distância percorrida pelo veículo,  $a_x$  é a aceleração no ponto  $x$ . Para obter a velocidade tem-se que resolver a seguinte equação diferencial

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{\left(\frac{dx}{v}\right)} \quad \text{portanto:} \quad a \cdot dx = v \cdot dv \quad (3.28)$$

o que leva a velocidade em função a distância percorrida dada por

$$v_{(x)} = \frac{\sqrt{\ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \left[ 2 \left( a_0 - a_0 \cdot \left( \frac{a_f}{a_0} \right)^{\left( \frac{x_0-x}{x_0-x_f} \right)} \right) (x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \right]}{\ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right)} \quad (3.29)$$

onde  $v_0$  é a velocidade inicial (no ponto  $x_0$ ),  $v_{(x)}$  é a velocidade no ponto  $x$ . Como este é um movimento acelerado durante todo intervalo de tempo, então a velocidade máxima será encontrada na posição final deste trecho ( $x_f$ ), dada por

$$v_{\max} = v(x_f) = \frac{\sqrt{\ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \left[ 2(a_0 - a_f)(x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \right]}{\ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right)} \quad (3.30)$$

Agora, resolvendo a Equação 3.25, lembrando que na condição inicial para  $x = x_0$  o **tempo** é nulo, obtém-se a Equação 3.31, que representa o **tempo** em função da distância percorrida durante um movimento acelerado, dado por

$$T_{(x)} = \frac{2 \operatorname{tgh}^{-1} \left( \frac{\sqrt{2(x_f - x_0) \cdot a_0 \left( 1 - \left( \frac{a_f}{a_0} \right)^{\left( \frac{x_0-x}{x_0-x_f} \right)} \right) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right)}}{\left[ 2 \cdot a_0 \cdot (x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \right]} \right) (x_f - x_0)}{\sqrt{\ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \left[ 2 \cdot a_0 \cdot (x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \right]}} - \frac{2 \operatorname{tgh}^{-1} \left( \frac{\sqrt{v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right)}}{\left[ 2 \cdot a_0 \cdot (x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \right]} \right) (x_f - x_0)}{\sqrt{\ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \left[ 2 \cdot a_0 \cdot (x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \right]}} \quad (3.31)$$

Esta função está diretamente relacionada com a distância percorrida, mas também com a velocidade inicial do veículo, aceleração longitudinal inicial e a

relação das acelerações inicial e final. Mas como o que se precisa é uma expressão matemática do tempo de percurso durante todo o trecho, apenas interessa o instante de tempo no ponto final do trecho, isto é, o **tempo** no ponto final  $x = x_f$ , dado por

$$T_{(x_f)} = \frac{2 \operatorname{tgh}^{-1} \left( \frac{2(x_f - x_0)(a_0 - a_f) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right)}{\left[2 \cdot a_0 \cdot (x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right)\right]} \right) (x_f - x_0)}{\sqrt{\ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \left[2 \cdot a_0 \cdot (x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right)\right]}} - \frac{2 \operatorname{tgh}^{-1} \left( \frac{v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right)}{\left[2 \cdot a_0 \cdot (x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right)\right]} \right) (x_f - x_0)}{\sqrt{\ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \left[2 \cdot a_0 \cdot (x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right)\right]}} \quad (3.32)$$

e esta é a parcela da função objetivo no trecho de um movimento acelerado.

### 3.5.2 Movimento longitudinal desacelerado

Este movimento acontece no trecho de  $x_1$  ate  $x_2$ , sendo a desaceleração longitudinal dada por

$$a_x = -a_1 \cdot e^{\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right) \cdot \ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)} \quad (3.33)$$

na qual  $a_1$  é a desaceleração longitudinal inicial,  $a_2$  é a desaceleração longitudinal final,  $x$  é um ponto ao longo da distância percorrida pelo veículo,  $a_x$  é a desaceleração no ponto  $x$ . A velocidade em função a distância percorrida é dada por

$$v_{(x)} = \frac{\sqrt{\ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \left[ v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2 \left( a_1 - a_1 \cdot \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^{\left( \frac{x_1-x}{x_1-x_2} \right)} \right) (x_2 - x_1) \right]}{\ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right)} \quad (3.34)$$

na qual  $v_I$  é a velocidade inicial (no ponto  $x_I$ ), e  $v_{(x)}$  é a velocidade no ponto  $x$ . Existe uma análise interessante que pode ser realizada através desta equação que é verificar a relação entre as variáveis de modo que o movimento seja lógico e os valores fiquem de acordo com um comportamento realista para o veículo. Assim, para que a velocidade final seja nula se tem que percorrer a distância

$$(x_2 - x_1) = \frac{v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right)}{2(a_1 - a_2)} \quad (3.35)$$

e a velocidade será zero ao final do trecho para uma velocidade inicial dada por

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(a_1 - a_2)(x_2 - x_1)}{\ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right)}} \quad (3.36)$$

Da mesma forma que no item anterior é possível resolver a Equação 3.25 e obter o tempo em função da distância percorrida pelo veículo, dado por

$$T_{(x)} = \frac{2 \operatorname{tgh}^{-1} \left( \frac{\sqrt{v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2(x_2 - x_1) \cdot a_1 \left( 1 - \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^{\left( \frac{x_1-x}{x_1-x_2} \right)} \right)}}{\left[ v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2 \cdot a_1 \cdot (x_2 - x_1) \right]} \right) (x_2 - x_1)}{\sqrt{\ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \left[ v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2 \cdot a_1 \cdot (x_2 - x_1) \right]}} \\ - \frac{2 \operatorname{tgh}^{-1} \left( \frac{\sqrt{v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right)}}{\left[ v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2 \cdot a_1 \cdot (x_2 - x_1) \right]} \right) (x_2 - x_1)}{\sqrt{\ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \left[ v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2 \cdot a_1 \cdot (x_2 - x_1) \right]}} \quad (3.37)$$

O tempo que o veículo leva para percorrer todo o trecho é obtido pela Equação 3.37 no ponto final  $x = x_2$ , e assim tem-se a parcela da função objetivo no trecho de um movimento desacelerado dada por,

$$T_{(x_2)} = \frac{2 \operatorname{tgh}^{-1} \left( \frac{\sqrt{v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2(x_2 - x_1)(a_1 - a_2)}}{\sqrt{v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2 \cdot a_1 \cdot (x_2 - x_1)}} \right) (x_2 - x_1)}{\sqrt{\ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \left[ v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2 \cdot a_1 \cdot (x_2 - x_1) \right]}} - \frac{2 \operatorname{tgh}^{-1} \left( \frac{\sqrt{v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right)}}{\sqrt{v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2 \cdot a_1 \cdot (x_2 - x_1)}} \right) (x_2 - x_1)}{\sqrt{\ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \left[ v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2 \cdot a_1 \cdot (x_2 - x_1) \right]}} \quad (3.38)$$

Entretanto deve-se ter especial atenção neste caso, pois na Equação 3.38 existe um ponto singular, uma vez que seu denominador não pode se tornar nulo, também deve ser maior que zero, de modo que a raiz quadrada seja um número real. Assim as seguintes condições devem ser impostas

$$\left[ v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2 \cdot a_1 \cdot (x_2 - x_1) \right] \neq 0 \quad (3.39)$$

$$\frac{v_1^2}{2 \cdot a_1} \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) > (x_2 - x_1) \quad (3.40)$$

levando ao problema associado à distância máxima para a qual a velocidade final será nula, dado pela Equação 3.35, e então

$$\frac{v_1^2}{2 \cdot a_1} \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) < \frac{v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right)}{2(a_1 - a_2)} \quad (3.41)$$

mostrando, finalmente, que as acelerações são positivas sempre nestas condições. Deste modo se utilizam apenas seus módulos, e então conclui-se que a aceleração final ( $a_2$ ) não pode ser zero, mas pode ser muito próxima de zero.

No movimento com velocidade constante, que também pode acontecer em veículos de competição, o **tempo** é muito fácil de se calcular, e é dado por

$$T_{(x_f)} = \int \frac{1}{v} \cdot dx = \frac{x_f - x_0}{v} \quad (3.42)$$

na  $v$  é a velocidade constante,  $x_f$  é a distância final,  $x_0$  é a distância inicial e  $T$  é o tempo de percurso do veículo.

Finalmente está completamente definida a função objetivo para os movimentos existentes. Como se pode ver esta função depende da velocidade e aceleração longitudinal, e também da distância percorrida, que implicitamente contém a influência da aceleração lateral, uma vez que essa variável está associada às restrições geométricas da pista, sendo a responsável pela mudança de direção do veículo.

### 3.6

#### Movimento em curvas

Ao início deste capítulo foram apresentadas, nas Equações 3.18, 3.19 e 3.20, as restrições de aceleração, tanto longitudinal quanto lateral, que estão limitadas pelo círculo de aderência do veículo. Também se apresentou a restrição de velocidade, Equação 3.17, onde para os veículos de competição o máximo aqui considerado é de 325 km/h. Essa velocidade máxima será comparada com a velocidade final do trecho de aceleração longitudinal, já que apenas nesta condição encontra-se a velocidade máxima do movimento.

Serão desenvolvidas agora as equações que modelam a mudança de direção do veículo devido à aceleração lateral, tanto na entrada da curva, durante o percurso da curva, e na saída da curva. A aceleração lateral define a direção do movimento, na ausência da aceleração lateral tem-se apenas um movimento retilíneo, isto é, o veículo trafega em uma linha reta, sem curvas. A influência da aceleração lateral no estudo aqui proposto é muito importante e fundamental.

#### 3.6.1

##### Movimento na entrada na curva

O movimento de entrada na curva acontece em um trecho que é definido pelos pontos de  $x_3$  até  $x_4$ , no qual a aceleração lateral inicial é nula, e que termina,

por hipótese, com aceleração lateral máxima. Para determinar a velocidade angular ( $\dot{\theta}$ ) precisa-se da função velocidade do veículo ( $v_x$ ) durante a entrada da curva, Equação 3.43, dada por

$$\dot{\theta} = \frac{a_y}{v_x} \quad (3.43)$$

Como considera-se que existe desaceleração longitudinal durante a entrada na curva, por que se precisa transferir energia longitudinal para lateral, deve-se reduzir a velocidade a medida que a aceleração lateral ( $a_y$ ) aumenta. Como resultado pode-se até ter o caso de velocidade constante, mas com toda certeza esta não vai ser incrementada durante o movimento de entrada na curva.

Tomando a expressão da aceleração lateral apresentada antes e fazendo uma divisão simples para o caso de velocidade variável (desaceleração), tem-se

$$\dot{\theta}_{(x)} = \frac{a_n \left[ 1 - e^{\left( \frac{x-x_3}{x_4-x_3} \right)^{[-4]}} \right] \cdot \ln \left( \frac{a_1}{a_2} \right)}{\sqrt{\ln \left( \frac{a_1}{a_2} \right) \left[ v_1^2 \cdot \ln \left( \frac{a_2}{a_1} \right) - 2 \left( a_1 - a_1 \cdot \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^{\left( \frac{x_1-x}{x_1-x_2} \right)} \right) (x_2 - x_1) \right]}} \quad (3.44)$$

na qual  $a_n$  é a aceleração lateral máxima, que acontece, ao final do movimento de entrada à curva,  $x$  é um ponto ao longo da distância percorrida pelo veículo,  $a_1$  é a desaceleração longitudinal inicial,  $a_2$  é a desaceleração longitudinal final, e  $x_2 = x_4$  é a posição final do veículo,  $x_1 = x_3$  é a posição inicial,  $\dot{\theta}_{(x)}$  é a velocidade angular para a distância  $x$ .

Para o caso de velocidade constante (apenas em modulo),  $v$ , tem-se

$$\dot{\theta}_{(x)} = \frac{a_n \left[ 1 - e^{\left( \frac{x-x_3}{x_4-x_3} \right)^{[-4]}} \right]}{v} \quad (3.45)$$

Pode-se também determinar uma expressão que indique o raio instantâneo de curvatura ( $\rho$ ), dado por

$$a_y = \frac{v_x^2}{\rho} \quad (3.46)$$

ou

$$\rho_{(x)} = \frac{\left[ v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right) - 2 \left( a_1 - a_1 \cdot \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\left(\frac{x_1-x}{x_1-x_2}\right)} \right) (x_2 - x_1) \right]}{a_n \left[ 1 - e^{\left(\frac{x-x_3}{x_4-x_3}\right)^{[-4]}} \right] \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right)} \quad (3.47)$$

Da Equação 3.47 pode se observar que quando o veículo se movimenta em linha reta o raio de curvatura é infinito. Também nota-se que a velocidade inicial limitará a mudança de direção, por que em maior velocidade inicial o veículo tende a percorrer uma linha reta. Para o caso de velocidade constante, se apresenta a Equação 3.48,

$$\rho_{(x)} = \frac{v^2}{a_n \left[ 1 - e^{\left(\frac{x-x_3}{x_4-x_3}\right)^{[-4]}} \right]} \quad (3.48)$$

De forma similar pode-se conseguir uma expressão matemática que aproxime o ângulo de atitude do veículo em função da distância percorrida, dado por

$$\theta_{(x)} = \frac{a_n \left[ 1 - e^{\left(\frac{x-x_3}{x_4-x_3}\right)^{[-4]}} \right] \ln\left(\frac{v_{(x)}}{v_1} \cdot \frac{a_3}{a_{(x)}}\right)}{\left( a_1 - \frac{(a_1 - a_2)v_1}{v_1 - v_2} \right)} \quad (3.49)$$

Pode-se ver na Equação 3.49 que a aceleração lateral é a principal responsável da direção do veículo (ou atitude do veículo). Sem a força lateral o veículo trafegaria simplesmente em linha reta. A velocidade e aceleração do veículo em um movimento desacelerado também afetam sua atitude. A Equação 3.49 é resultado de um movimento desacelerado. Caso se queria considerar outro tipo de movimento, como aquele com velocidade constante ou aceleração constante, precisa-se fazer outro desenvolvimento das equações.

Procurou-se estabelecer ainda uma expressão que considerasse as posições do veículo no sistema global, mas o equacionamento neste caso é demasiado complexo. Estes valores serão obtidos a partir dos resultados da simulação no *Simulink/Matlab*.

### 3.6.2

#### Movimento na saída da curva

Este movimento acontece em um trecho definido pelos pontos de  $x_5$  até  $x_6$ , no qual a aceleração inicial é máxima  $a_n$ , e que termina na saída da curva com aceleração lateral nula. Da mesma forma que o movimento de entrada na curva, considera-se uma aceleração longitudinal, por que se quer transferir energia lateral para longitudinal. Para tanto deve-se aumentar a velocidade na medida em que a aceleração lateral ( $a_n$ ) diminui, ou o seu efeito caso a velocidade seja constante. Tomando a aceleração lateral apresentada anteriormente e fazendo uma divisão simples para o caso de velocidade variável (movimento acelerado), têm-se os seguintes resultados

$$\dot{\theta}_{(x)} = \frac{a_n \cdot e^{\left(\frac{x-x_5}{x_6-x_5}\right) \cdot [-4]} \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right)}{\sqrt{\ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \left[ 2 \left( a_0 - a_0 \cdot \left(\frac{a_f}{a_0}\right)^{\left(\frac{x_0-x}{x_0-x_f}\right)} \right) (x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \right]}} \quad (3.50)$$

na qual  $x_f = x_5$  é a posição final do veículo,  $x_0 = x_4$  é a posição inicial. Pode-se também determinar o raio de curvatura, dado por

$$\rho_{(x)} = \frac{\left[ 2 \left( a_0 - a_0 \cdot \left(\frac{a_f}{a_0}\right)^{\left(\frac{x_0-x}{x_0-x_f}\right)} \right) (x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \right]}{a_n \cdot e^{\left(\frac{x-x_5}{x_6-x_5}\right) \cdot [-4]} \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right)} \quad (3.51)$$

Para o caso de velocidade constante as expressões anteriores se reduzem a

$$\dot{\theta}_{(x)} = \frac{a_n \cdot e^{\left(\frac{x-x_5}{x_6-x_5}\right) \cdot [-4]}}{v} \quad (3.52)$$

$$\rho_{(x)} = \frac{v^2}{a_n \cdot e^{\left(\frac{x-x_5}{x_6-x_5}\right) \cdot [-4]}} \quad (3.53)$$

De forma similar pode-se conseguir uma expressão que aproxime o ângulo de atitude do veículo em função da distância percorrida, no movimento acelerado, dado por

$$\theta_{(x)} = \frac{a_n \cdot e^{\left(\frac{x-x_5}{x_6-x_5}\right)^{[-4]} \ln\left(\frac{v_0 \cdot a_5}{v_{(x)} \cdot a_{(x)}}\right)}{\left(a_0 - \frac{(a_0 - a_f)v_f}{v_0 - v_f}\right)} \quad (3.54)$$

Finalmente, tem-se todas as equações que caracterizam o movimento do veículo, segundo o modelo empregado. As equações que representam a função objetivo, a velocidade do veículo e a aceleração longitudinal serão todas utilizadas no processo de otimização da trajetória, de acordo com a análise que se deseja realizar.

### 3.7

#### Procedimento de otimização

Neste item explica-se o procedimento para a obtenção da trajetória ótima em um caso geral, apresentado na Figura 3.9, indicando-se em forma clara tanto as variáveis de otimização quanto a função objetivo a minimizar, e também as restrições do problema de otimização. Para diminuir o número de variáveis iguala-se os trechos de entrada na curva e desaceleração, também se igualam os trechos de saída da curva e aceleração. Para finalizar o capítulo apresenta-se um fluxograma que resume o procedimento de otimização.

1. Inicialmente identifica-se todas as variáveis de otimização, em caso geral de uma curva simples (Figura 3.9), tem-se: um trecho de desaceleração ou entrada na curva, outro trecho com velocidade constante, e um terceiro trecho com aceleração ou saída da curva. As variáveis de otimização são:

Os valores máximos das acelerações:  $a_x$  e  $a_y$  do veículo; isto leva os valores iniciais das acelerações longitudinais  $a_1$  (trecho de desaceleração) e  $a_0$  (trecho de aceleração), e nas acelerações laterais  $a_n$  (trechos de entrada e saída da curva).

Os pontos de aplicação das acelerações:  $x_1 = x_3$  e  $x_2 = x_4$  para o trecho de desaceleração e entrada na curva,  $x_0 = x_5$  e  $x_f = x_6$  para o trecho de aceleração e saída na curva. O trecho que fica entre a entrada e saída da curva é a velocidade constante, a aceleração longitudinal é nula, a aceleração lateral é constante. Então tem-se 7 variáveis de otimização:  $a_1, a_0, a_n, x_f, x_2, x_0, x_1$ .

2. A função objetivo é definida pela soma dos tempos em cada trecho. Então tem-se três funções *tempo*: no trecho de desaceleração, no de velocidade constante e no de aceleração. Estas funções estão definidas nas Equações 3.32, 3.38 e 3.42 respectivamente. A função objetivo fica então:

$$T = T_{\text{desaceleração}} + T_{\text{constante}} + T_{\text{aceleração}}$$

3. As restrições aplicadas ao problema de otimização são:

- Restrições relacionadas às acelerações  $a_x$  e  $a_y$ , descritas por desigualdades matemáticas, como é mostrado nas Equações 3.18, 3.19, 3.20, de modo que a aceleração total fique sempre dentro do Círculo de Aderência;
- Restrição dada pela velocidade do veículo  $v$ . Pode-se considerar esta restrição para todos os pontos do movimento, ou para os pontos críticos nos quais se tenha certeza que neles existirão as maiores velocidades de todo o movimento. Para isto as relações relativas às velocidades são dadas nas Equações 3.29, 3.30 e 3.34; a restrição associada foi mostrada na Equação 3.17.
- Restrição que delimita a trajetória do veículo dentro dos limites da pista (de maior complexidade que as outras). Para definir tais limites existem duas funções matemáticas: uma para cada lado da pista, os chamados limite inferior e limite superior. Estas funções devem ser avaliadas durante a simulação em cada passo do processo de otimização. Após do levantamento de resultados da trajetória e limites da pista, estes são comparados e se dividem em grupos de desigualdades, de acordo com a Equação 3.21.
- Restrição de igualdade para estabelecer que o ponto final ( $x_f$ ) da trajetória percorrida pelo veículo coincida com o ponto final da função objetivo. Este ponto final é obtido da simulação, e deve ser igual à distância total, igual também ao valor final da distância na função aceleração. Para isto no simulador se define uma função de parada, onde se especifica que quando o veículo chegar ao final da pista a simulação pára.

Outras restrições de igualdade são definidas para estabelecer a continuidade entre os diferentes tipos de movimento que existem em

cada trecho da trajetória total do veículo. Para conectar estes movimentos é preciso igualar as condições iniciais de um com as condições finais do outro. Algumas condições iniciais e finais já são igualadas pela continuidade das funções ou mesmo pelo programa de simulação. Apenas os pontos inicial  $x_I$  e final  $x_f$  da pista estão especificados no problema, os outros pontos da distância percorrida são variáveis resultantes do problema de otimização e seguem uma seqüência lógica crescente, isto é, não podem ser maiores que o ponto final, nem menores que o ponto inicial da pista.

4. Deve-se contar com valores iniciais das variáveis de otimização  $a_1, a_0, a_n, x_f, x_2, x_0, x_I$ , por que o otimizador necessita para iniciar as iterações, estes valores, ou podem ser triviais, como aqueles para gerar a trajetória do centro da pista, mas convém que sejam aqueles que levariam por trajetórias próximas às ótimas, de modo que a convergência aos valores ótimos seja mais rápida.
5. A partir das restrições impostas, o programa pode obter os valores ótimos do problema, fornecendo como resposta o valor da função objetivo, o tempo mínimo, e os valores ótimos das variáveis de otimização.

Para facilitar a compreensão do processo de otimização apresenta-se na Figura 3.10 um fluxograma do procedimento.

Os resultados obtidos pelo procedimento apresentado, em cada tipo de movimento descrito anteriormente e para outros casos, são mostrados no Capítulo 4 a seguir, empregando o *Simulink* para reprodução do movimento através do modelo de massa pontual e do modelo dinâmico não linear do veículo, para fins de comparação. No Apêndice B descreve-se o programa *Matlab* empregado no procedimento aqui apresentado.

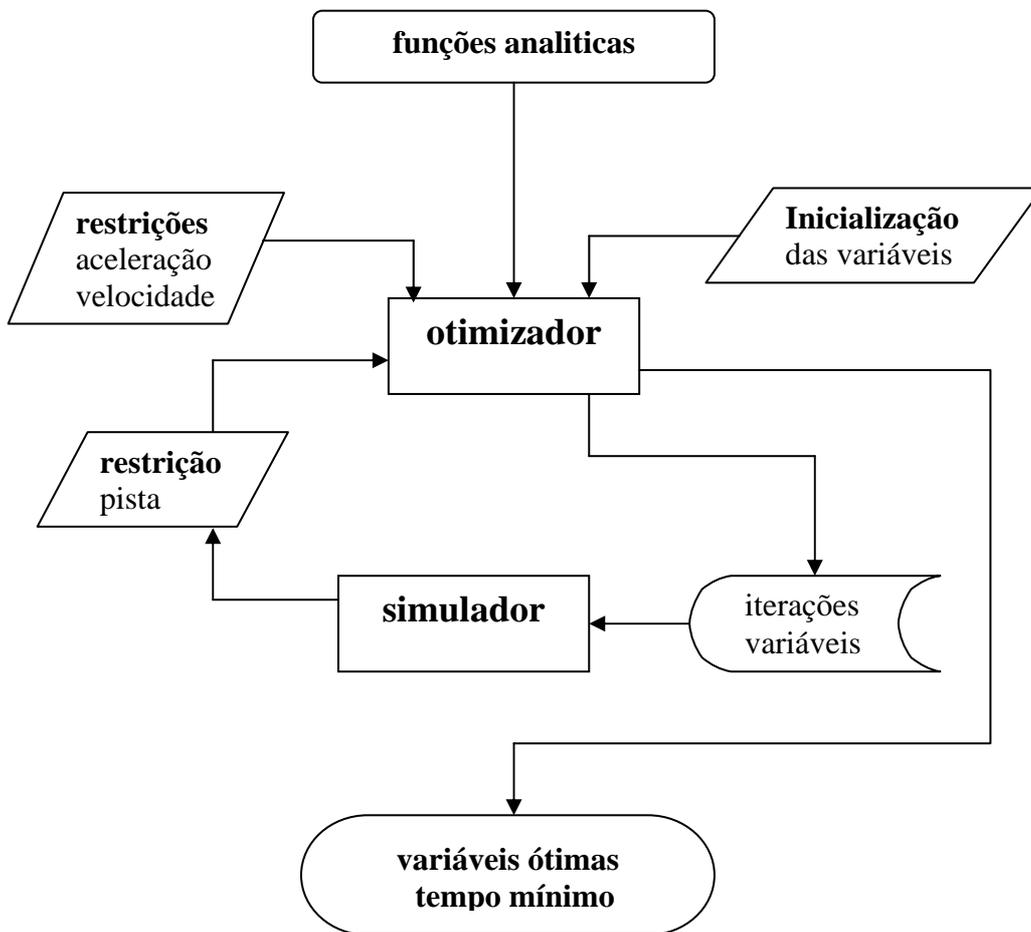


Figura 3.10. Fluxograma do procedimento de otimização do modelo massa pontual.

## 4 Simulação da Trajetória Ótima

Neste Capítulo apresentam-se todos os resultados encontrados para a otimização de trajetória, empregando simulações através do programa *Simulink-Matlab* para ilustrar o comportamento do veículo, utilizando, quando possível, o modelo dinâmico não linear desenvolvido no Capítulo 2, para comparação com o modelo de massa pontual, base do problema de otimização.

### 4.1 Casos de simulação

Primeiramente classificam-se os casos nos quais será aplicado o procedimento de otimização da trajetória do veículo. Os tipos de movimento caracterizam situações básicas para as quais o tratamento do problema através de otimização faz sentido, mas existem combinações destes movimentos que são também de interesse. Os casos tratados consistem em uma mistura de pistas retas e curvas, nas quais diferentes níveis de aceleração devem ser impostos no veículo de modo a se obter o mínimo tempo de percurso. As situações típicas a serem abordadas são:

- Aceleração em linha reta.
- Aceleração e velocidade constante em linha reta.
- Desaceleração em reta e entrada de uma curva.
- Aceleração e saída de uma curva.
- Velocidade constante em curva.
- Caso geral: combinação de retas e curvas.
- Caso completo em trajetória aberta.

Lembra-se que as variáveis de otimização são: o valor das acelerações e a posição na pista da aplicação dessas acelerações durante o movimento do veículo ao percorrer um traçado específico. Nos itens seguintes apresentam-se os resultados obtidos para os diferentes casos de interesse. Os casos geral e final

(casos 6 e 7) estão formados por trechos de aceleração, de desaceleração e trechos com velocidade constante.

## 4.2

### Caso 1: Aceleração em linha reta.

Neste caso, tem-se uma pista reta de 1000 metros de comprimento, e o veículo acelera a partir de uma velocidade inicial de 15 m/s (54 km/h), iniciando seu movimento no centro da pista. Devido ao grande comprimento da pista, se atinge a aceleração máxima de 1,5g (gravidade igual a 10 m/s<sup>2</sup>) e o veículo chega até uma velocidade final de 78,56 m/s (282,8 km/h), não conseguindo chegar à velocidade máxima possível (325 km/h). O tempo mínimo obtido pela otimização é de 15,3073 segundos, e a distância percorrida é de 1000 metros. As Figuras 4.1 até 4.3 ilustram os resultados encontrados através da simulação do modelo massa pontual.

Dos resultados é relevante o fato do veículo acelerar em todo tempo, isto por que a velocidade inicial é relativamente baixa, mas ainda acelerando com o valor máximo (1,5g) em todo o trecho não chega à velocidade máxima possível do veículo, para chegar até esta velocidade é preciso ter maior distância longitudinal da pista.

A aceleração mínima do veículo (acontece ao final do trecho) é dada pelo procedimento de otimização cujo valor é 0,1 m/s<sup>2</sup>, não é conveniente diminuir mais este valor já que nas equações trabalham-se relações logarítmicas, pelo qual, ao diminuir o valor da aceleração final o perfil das acelerações ficaria mais próximo ao eixo vertical e a área “baixo o perfil de acelerações” (integral) ficaria menor e conseqüentemente a variação da velocidade seria menor. Assim em todos os casos de desaceleração as acelerações mínimas terão o valor de 0,1 m/s<sup>2</sup>. O valor foi calibrado para o modelo se aproximar ao comportamento dos veículos de competição.

A Figura 4.3 de velocidade mostra em forma pratica a dinâmica simples do veículo quando este acelera, inicialmente o incremento da velocidade é mais pronunciado já que a força de tração é maior as forças de resistência ao movimento do veículo, e depois de uns instantes, quando as forças de tração e as de resistência ao movimento se equilibram, a velocidade fica constante e com valor máximo.

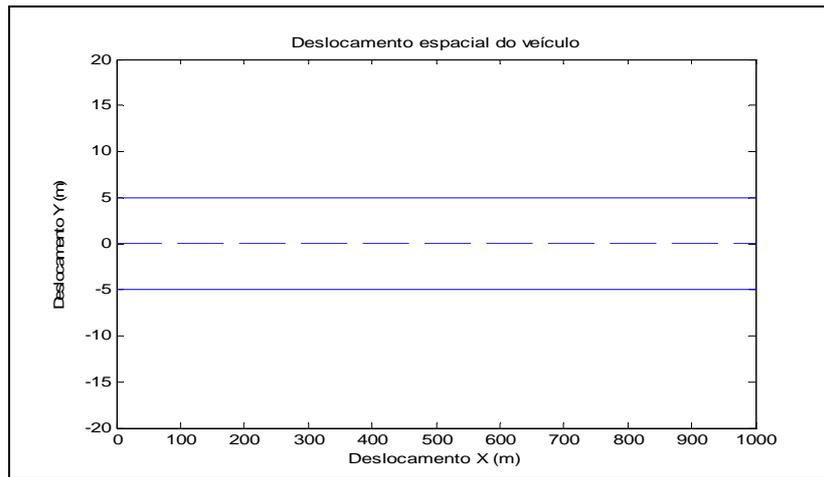


Figura 4.1. Deslocamento do veículo. Caso 1.

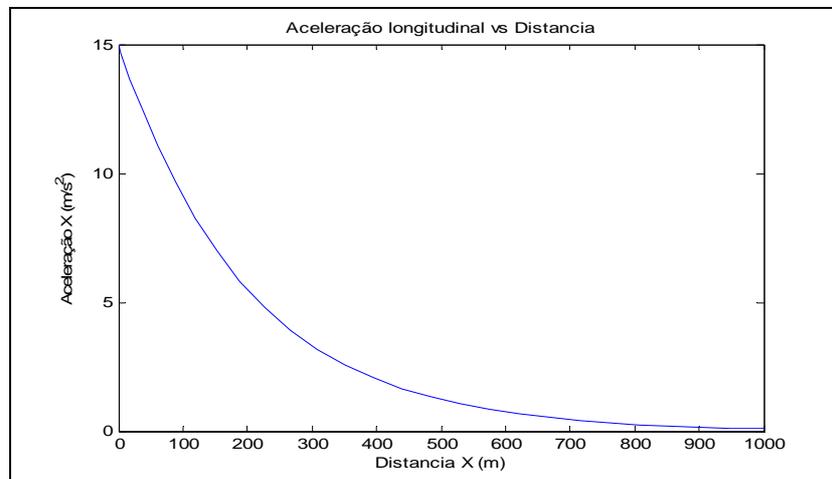


Figura 4.2. Aceleração para o caso 1.

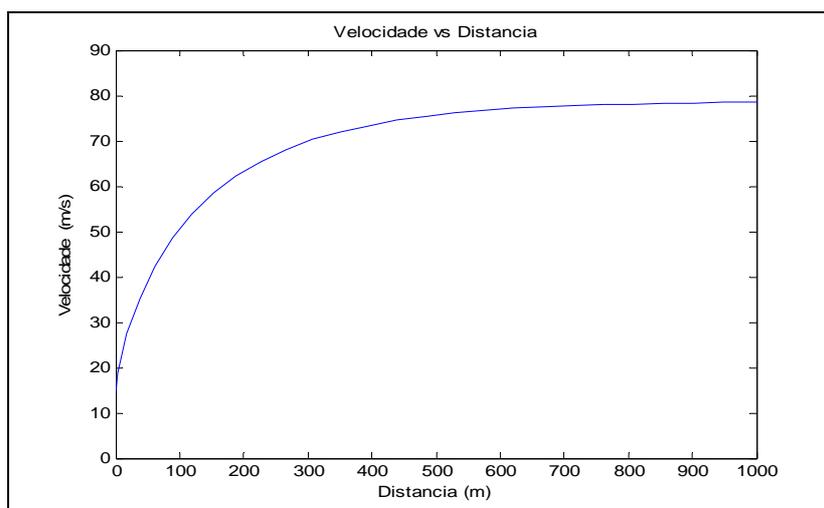


Figura 4.3. Velocidade para o caso 1.

Considera-se agora uma nova situação, chamada de caso 1 modificado, com uma nova condição inicial da velocidade, de 60 m/s (216 km/h), na mesma pista. Aqui o veículo atinge a sua velocidade máxima, e o programa de otimização gera como resposta a aceleração inicial para a qual o veículo sempre permanece acelerando durante todo o percurso na pista. A velocidade final do veículo ao percorrer o trecho é 90 m/s (325 km/h) e a aceleração inicial é de 10,5908 m/s<sup>2</sup> (1,06g). O tempo resultado da otimização é 11,9472 segundos e a distância percorrida é de 1000 metros. As Figuras 4.4 até 4.6 ilustram os resultados da simulação.

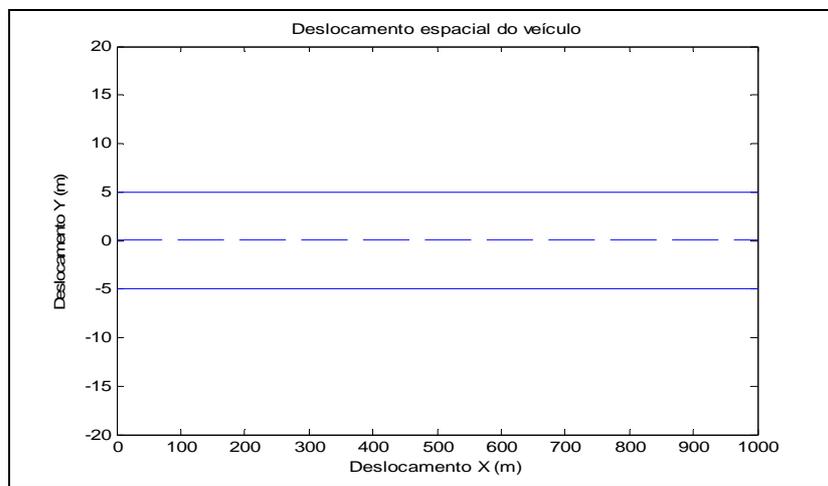


Figura 4.4. Deslocamento do veículo, caso 1 modificado.

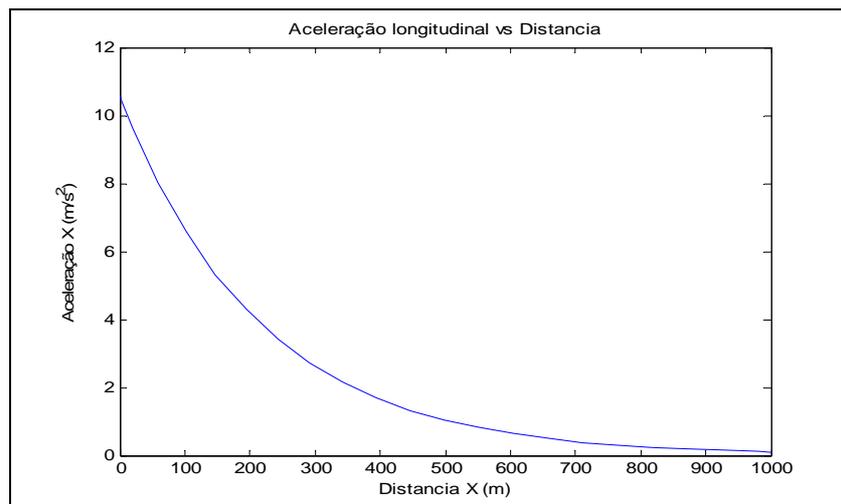


Figura 4.5. Aceleração para o caso 1 modificado.

A otimização entende que aqui acontece um movimento acelerado por tanto ele gera uma aceleração inicial máxima para que o veículo consiga sua máxima velocidade possível ao final do trecho. O caso foi feito principalmente para avaliar a reposta do procedimento de otimização às restrições de velocidade, os resultados são totalmente satisfatórios.

Ainda não utilizando a aceleração máxima, como no caso 1, o veículo percorre a mesma distância no menor tempo no caso 1 modificado, isto já que a velocidade inicial é maior nesta condição.

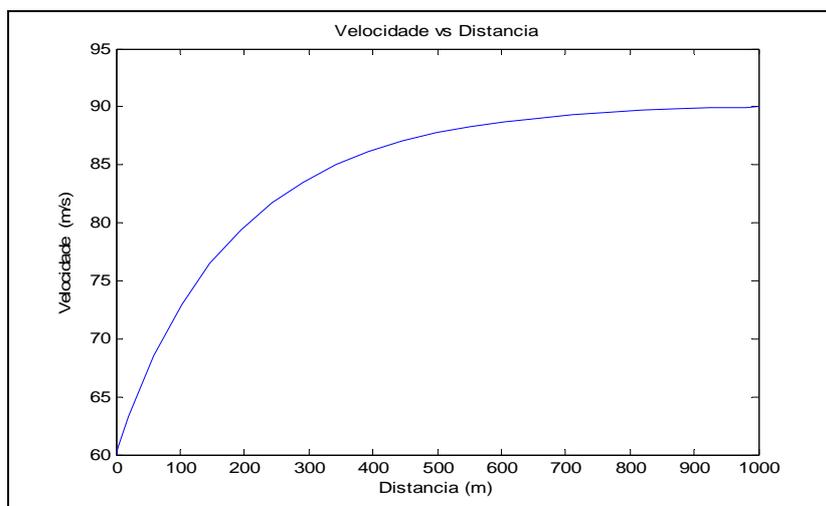


Figura 4.6. Velocidade para o caso 1 modificado.

### 4.3

#### Caso 2: Aceleração e velocidade constante em linha reta.

Neste caso, têm-se as mesmas condições do Caso 1 modificado, mas aqui acrescenta-se uma variável a mais no problema de otimização: um ponto onde se consegue atingir a velocidade máxima, a partir do qual ele irá se deslocar com velocidade constante. Para estas condições se espera que o veículo sempre tenha sua aceleração inicial máxima, e se conseguir chegar na velocidade máxima possível, deverá permanecer com ela até o final do trecho.

Com velocidade inicial de 60 m/s (216 km/h), o tempo mínimo de percurso é 11,7055 segundos, a aceleração máxima no início é  $15 \text{ m/s}^2$  (1,5g), e o ponto onde termina a aceleração longitudinal do veículo está a 756,6396 m do ponto inicial, ou seja a 75,7 % da distância total percorrida de 1000 metros. As Figuras 5.7 até 5.9 ilustram os resultados da simulação.

No caso 2 consegue-se menor tempo de percurso em comparação ao caso 1 modificado, isto por que no caso 2 pode-se ter a liberdade de chegar até a aceleração inicial máxima (1,5g) e também até a velocidade máxima possível (325 km/h).

Os resultados obtidos mostram que não apenas o valor da aceleração é importante para otimizar da trajetória do veículo, também são muito importantes os pontos (na distância) onde as acelerações foram aplicadas, chegando a simular comportamento dinâmico do modelo massa pontual pela união destas variáveis. Por exemplo, nada adianta ter acelerações máximas em trechos de aplicação muito pequenos, já que a velocidade do veículo não aumenta muito além de não ser um comportamento real dos veículos terrestres; portanto não se deve perder de vista a faixa de resultados que fazem do comportamento do modelo consistente e possível de ser aplicado nos casos reais.

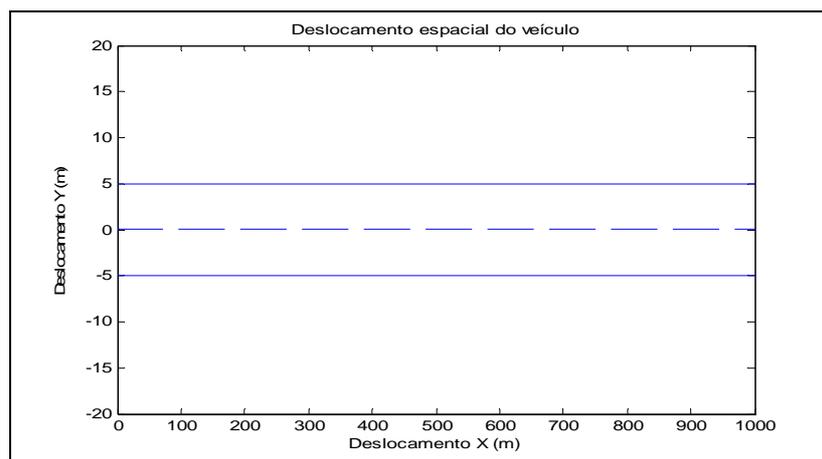


Figura 4.7. Deslocamento do veículo, caso 2.

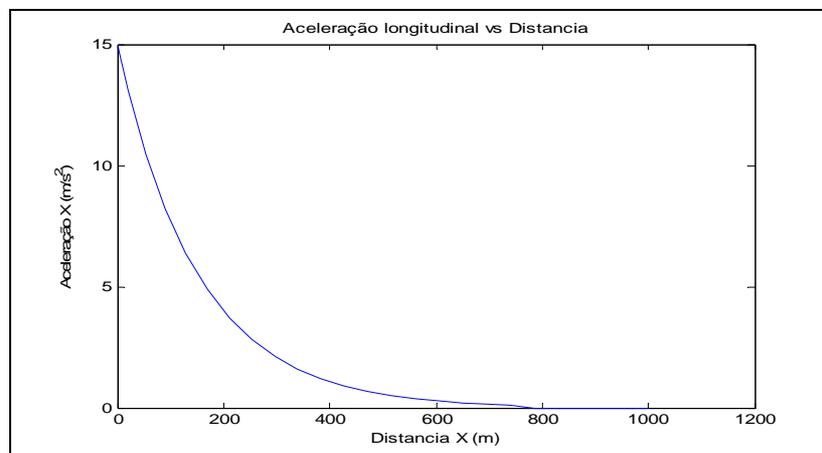


Figura 4.8. Aceleração para o caso 2.

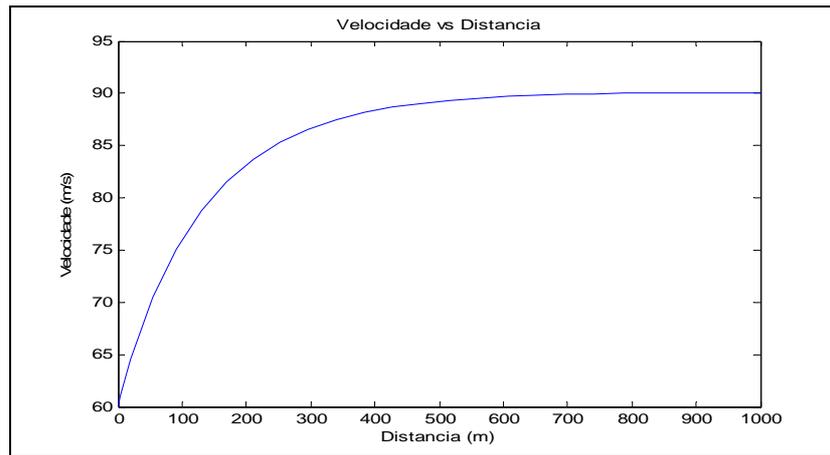


Figura 4.9. Velocidade em função da distância percorrida, caso 2.

#### 4.4

##### Caso 3: Desaceleração e entrada de uma curva.

Neste caso o veículo entra a uma curva, então inicialmente deve desacelerar para diminuir a velocidade e assim conseguir realizar a manobra lateral. A velocidade inicial é de 70 m/s (252 km/h). O propósito principal desta situação é verificar como o veículo varia sua direção com maior sucesso. Considera-se um comando de parada na simulação quando o veículo atinge 15 m na posição lateral (eixo  $Y$ ). Para simplificar a análise, define-se uma curva como a união de duas pistas retas, Adiante as curvas serão construídas pela conexão em seqüência de circunferências e retas.

Neste caso as variáveis de otimização são as acelerações longitudinal e lateral, independentes entre si, e as respostas encontradas pela otimização foram: o tempo mínimo é 0,9937 segundos, a desaceleração inicial é  $12,0360 \text{ m/s}^2$  ( $1,2g$ ), a distância total percorrida pelo veículo é 67,6126 m, e a aceleração lateral final do veículo é  $50 \text{ m/s}^2$  ( $5g$ ). As Figuras 4.10 até 4.13 ilustram os resultados da simulação. Nota-se na Figura 4.13 que a velocidade diminui de 70 m/s (252 km/h) até 67,55 m/s (243,18 km/h). Na Figura 4.14 tem-se o Diagrama GG em azul representado juntamente com o Circulo de Aderência do veículo, onde se verifica comportamento das duas acelerações, que estão dentro do esperado, não ultrapassando os limites físicos estabelecidos.

Aqui no trecho estão superpostas duas condições, uma de desaceleração longitudinal e outra de aceleração lateral (entrada na curva), então, o veículo tenta fazer a trajetória ótima tentando conservar a maior velocidade possível para

permitir fazer as manobras do movimento lateral. Pode se ver mais claramente no diagrama GG que o veículo utiliza toda a capacidade de aceleração lateral e apenas um pouco de desaceleração longitudinal, gerando assim uma curva suave.

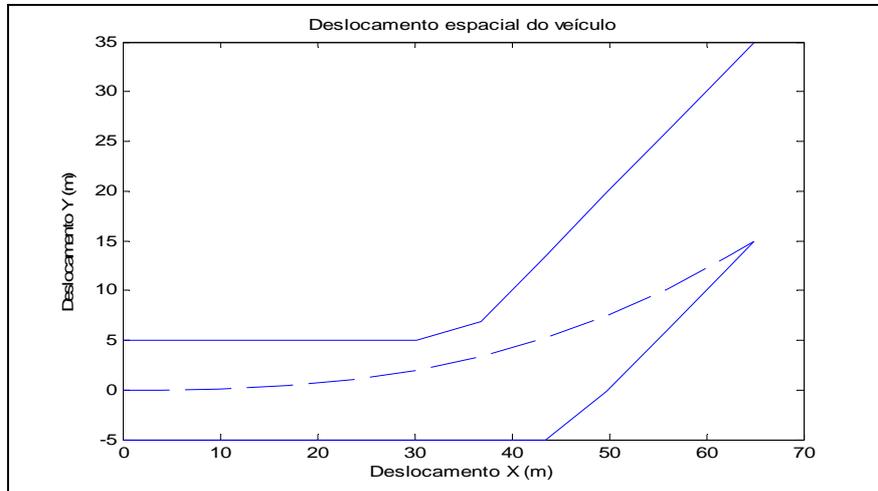


Figura 4.10. Deslocamento do veículo, caso 3.

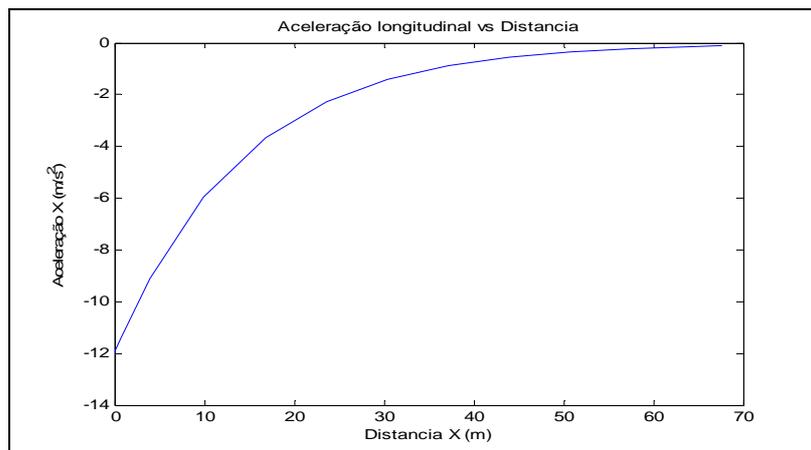


Figura 4.11. Aceleração para o caso 3.

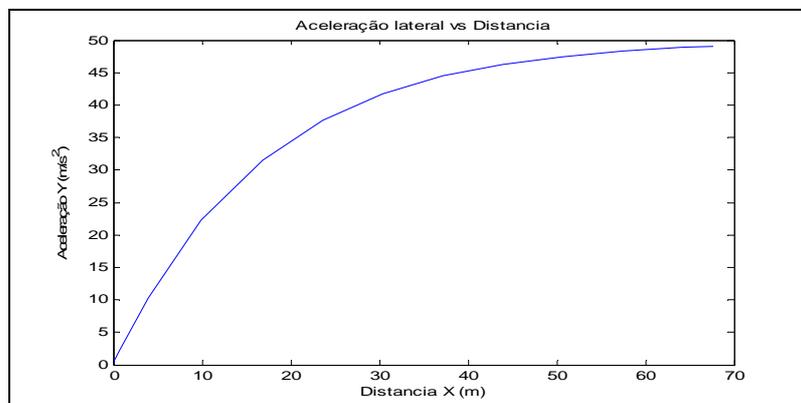


Figura 4.12. Aceleração lateral para o caso 3.

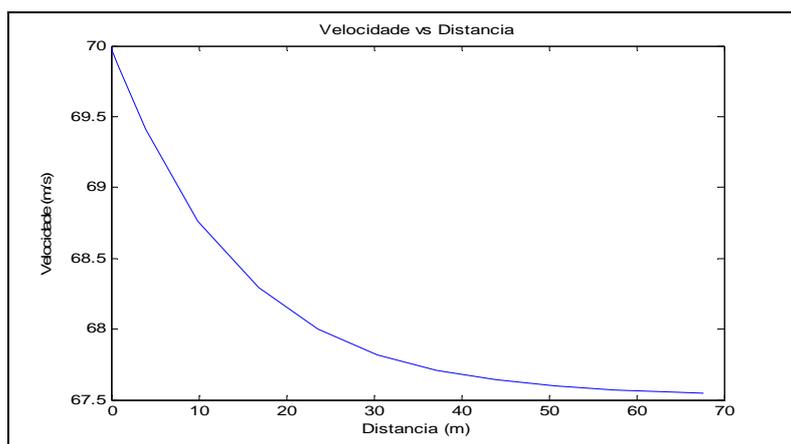


Figura 4.13. Velocidade em função da distância percorrida, caso 3.

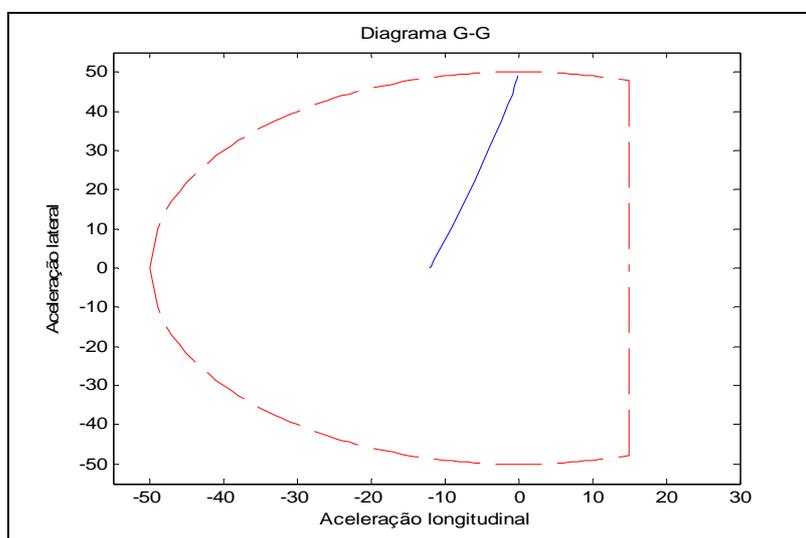


Figura 4.14. Diagrama GG (azul) sobre o Circulo de Aderência (vermelho), caso 3.

Agora, analisa-se uma situação muito parecida, mas numa pista com maior comprimento, denominado de Caso 3 modificado, no qual são adotadas as mesmas condições iniciais anteriores. O tempo mínimo conseguido é 1,3963 segundos, a desaceleração longitudinal inicial é  $0,1420 \text{ m/s}^2$  ( $0,01\text{g}$ ), a distância total percorrida no trecho é 97,6168 m, e a aceleração lateral máxima obtida é  $33,6394 \text{ m/s}^2$  ( $3,36\text{g}$ ). As Figuras 4.15 até 4.21 ilustram os resultados da simulação.

Aqui o veículo faz uma trajetória ótima com a mesma tendência que no caso anterior, mas devido a seu maior comprimento da pista o veículo não precisa utilizar toda sua capacidade de aceleração lateral e a desaceleração longitudinal é muito pequena já que não é preciso diminuir a velocidade para fazer as manobras

da trajetória ótima, então o veículo está se movimentando quase a velocidade constante como pode se ver na Figura 4.19 onde a velocidade não varia muito.

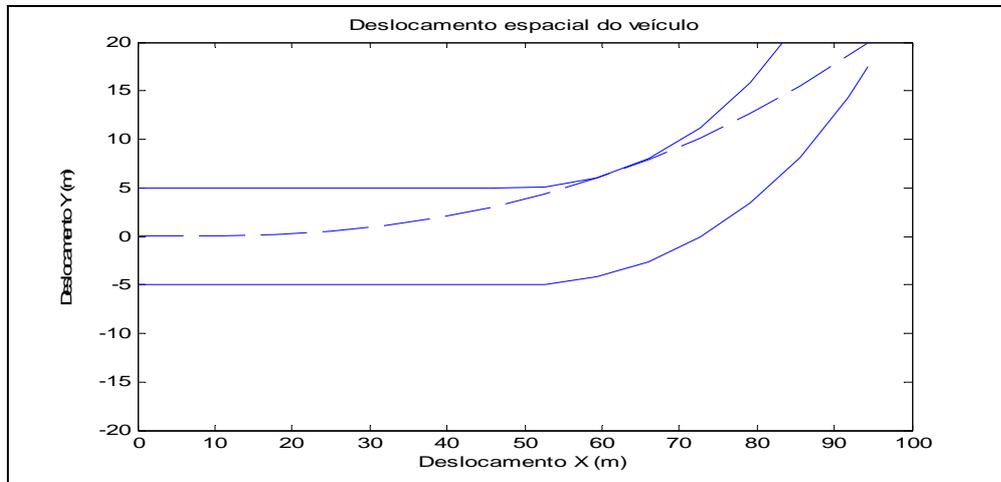


Figura 4.15. Deslocamento do veículo, caso 3 modificado.

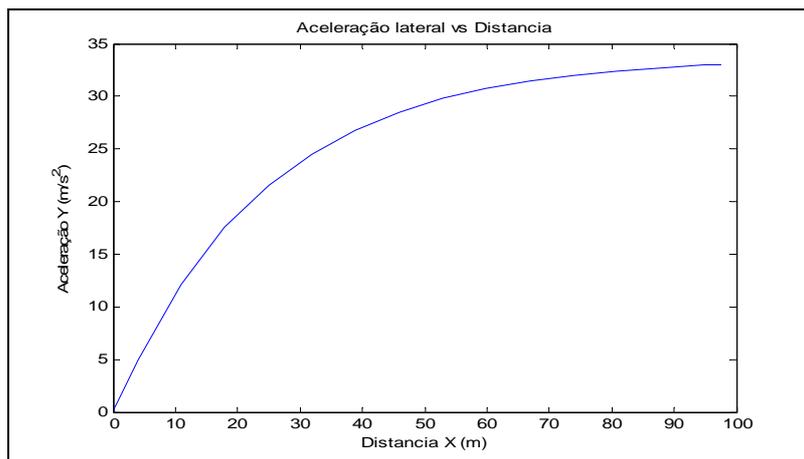


Figura 4.16. Aceleração lateral para o caso 3 modificado.

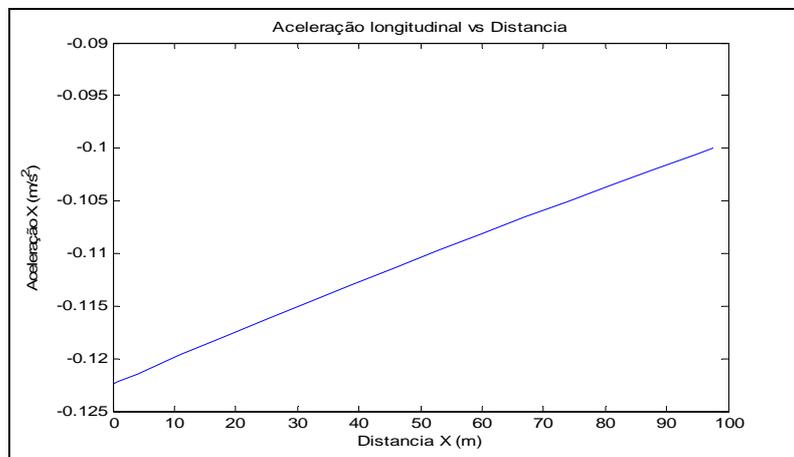


Figura 4.17. Desaceleração para o caso 3 modificado.

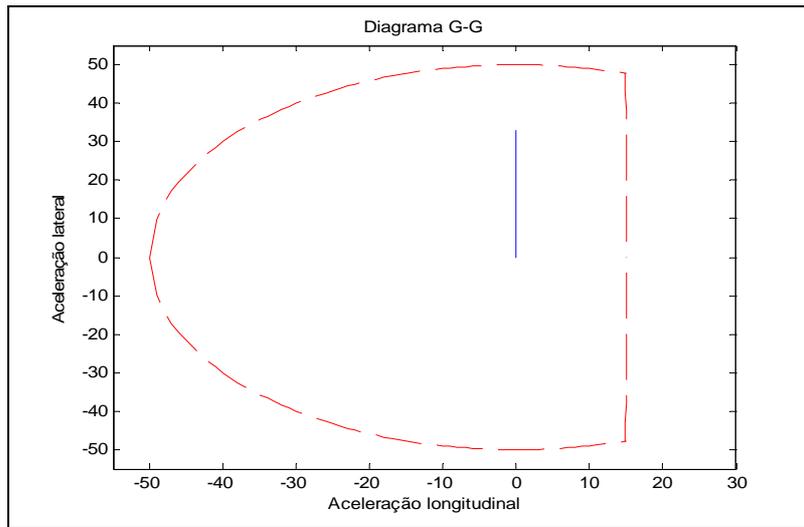


Figura 4.18. Diagrama GG (azul) sobre o Circulo de Aderência (vermelho), caso 3.

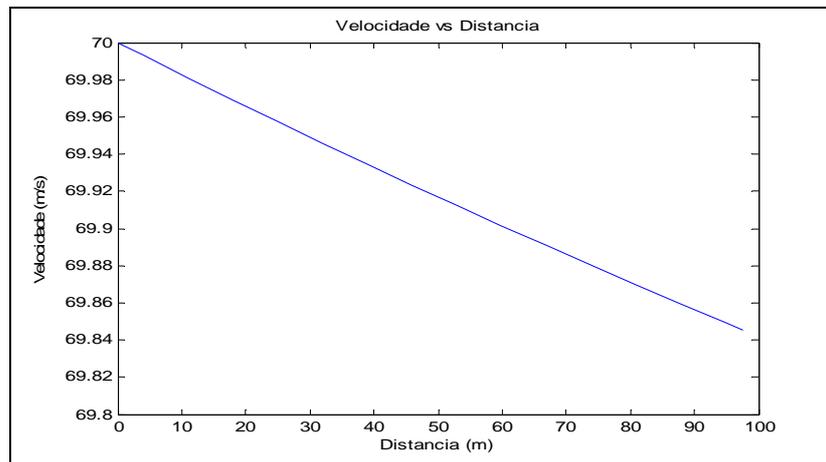


Figura 4.19. Velocidade em função da distância percorrida, caso 3 modificado.

No diagrama GG do veículo pode-se ver que para fazer a trajetória ótima o veículo apenas precisa parte da capacidade de aceleração lateral, isto significa que o veículo pode fazer curvas menores com muita facilidade já que além de utilizar a capacidade máxima de aceleração lateral (5g) pode também utilizar sua desaceleração para ajudar a percorrer uma curva de raio menor. Finalmente pode-se dizer que é muito favorável juntar a desaceleração longitudinal e a aceleração lateral no movimento de entrada na curva, esta união amplia uma maior faixa de possibilidades para percorrer ainda mais tipos ou tamanhos de curvas.

Neste caso também apresenta-se os gráficos do raio de curvatura e da atitude do veículo, dos quais pode se concluir que o comportamento do modelo

massa pontual esta respondendo satisfatoriamente pois é próximo aos veículos de competição.

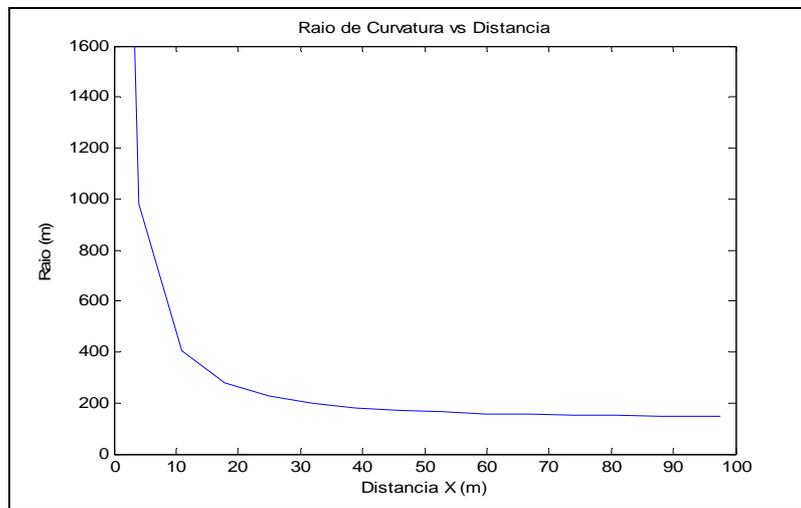


Figura 4.20. Raio de curvatura instantâneo em função da distância, caso 3 modificado.

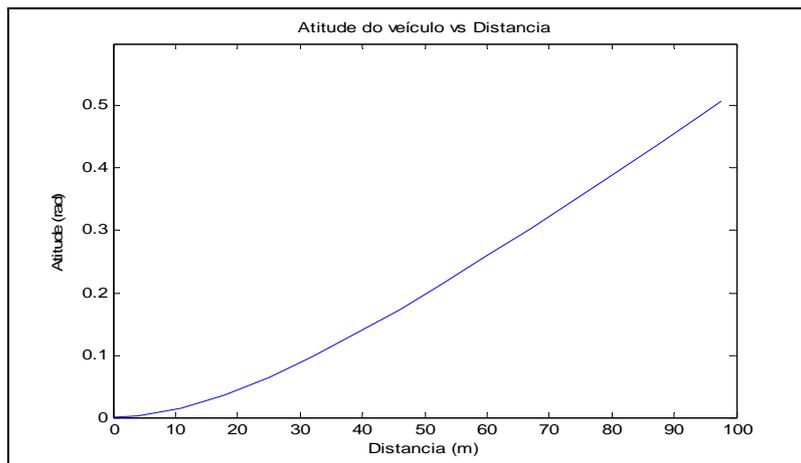


Figura 4.21. Atitude do veículo (ângulo de yaw) em função da distância, caso 3 modificado.

## 4.5

### Caso 4: Aceleração e saída de uma curva.

Neste caso, analisa-se as condições na saída de uma curva de modo a avaliar o que ocorre quando se inicia a transferência da aceleração lateral em longitudinal. Para tratar este problema deve-se incluir uma nova condição inicial além da velocidade, suposta como inicialmente de 70 m/s (252 km/h), que é a atitude do veículo, indicando a sua direção ao iniciar a saída da curva, considerada com 25° (0,436 rad) em relação ao referencial inercial.

O tempo mínimo obtido é 0,6050 segundos, a aceleração longitudinal inicial é  $5,0022 \text{ m/s}^2$  (0,5g), a distância total percorrida no trecho é 42,6995 m, a aceleração lateral inicial é de  $48,9933 \text{ m/s}^2$  (4,89g). As Figuras 4.22 até 4.28 ilustram os resultados da simulação.

O comportamento do veículo é segundo esperado, pois ele vai tentar acelerar o máximo possível para ganhar velocidade mas respeitando as restrições impostas na otimização, e também pegar a aceleração lateral necessária para fazer a manobra da curva. As acelerações ficam dentro do círculo de aderência do veículo, na Figura 4.25 pode-se ver que o veículo apenas pode utilizar um pouco da capacidade de acelerar longitudinalmente, isto devido às restrições impostas, e utiliza quase toda a sua capacidade de acelerar lateralmente.

Discute-se a seguir uma conclusão interessante obtida da análise deste caso. A aceleração total inicial de  $49,248 \text{ m/s}^2$  (4,92g), é menor que aceleração limite, como se pode ver na Figura 4.25 através do Diagrama GG. A combinação das acelerações é que torna possível o veículo obter a trajetória ótima em um determinado percurso, e com certeza pode-se aumentar alguma das duas acelerações e não conseguir a trajetória ótima para o tempo mínimo. Por exemplo, se a aceleração longitudinal é aumentada, o veículo sai fora da pista, e se aumenta-se a aceleração lateral a distância percorrida é maior, isto é, nem sempre o veículo vai se movimentar com as acelerações máximas (forças máximas) para se obter o tempo mínimo.

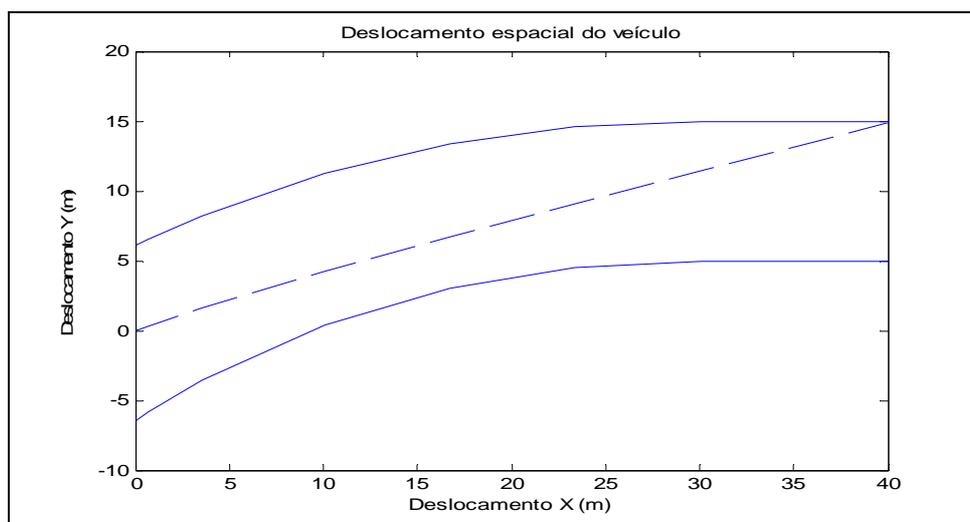


Figura 4.22. Deslocamento do veículo, caso 4.

Na Figura 4.22, apresenta-se o deslocamento espacial do veículo, a trajetória ótima aparentemente tira fora da pista ao veículo ao final da pista, tem-se a certeza que dentro dos limites impostos no problema de otimização o veículo satisfaz todas as restrições, somente que em nenhum momento se restringe à atitude final do veículo, é por isso que o veículo pode ter ao final da pista qualquer atitude, o que acontece fora da pista utilizada no processo de otimização não está considerado no problema, agora para ter certeza que o veículo vai ficar dentro da pista depois do trecho considerado no problema de otimização, como se desejaria neste caso, simplesmente faz-se uma pista de maior comprimento na saída da curva, com longitude suficiente para fazer que a atitude final do veículo seja aproximadamente paralelo à direção final da pista.

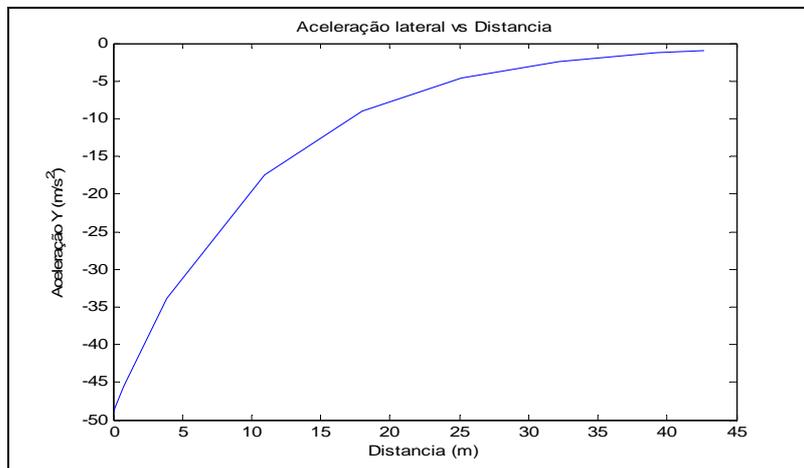


Figura 4.23. Aceleração lateral para o caso 4.

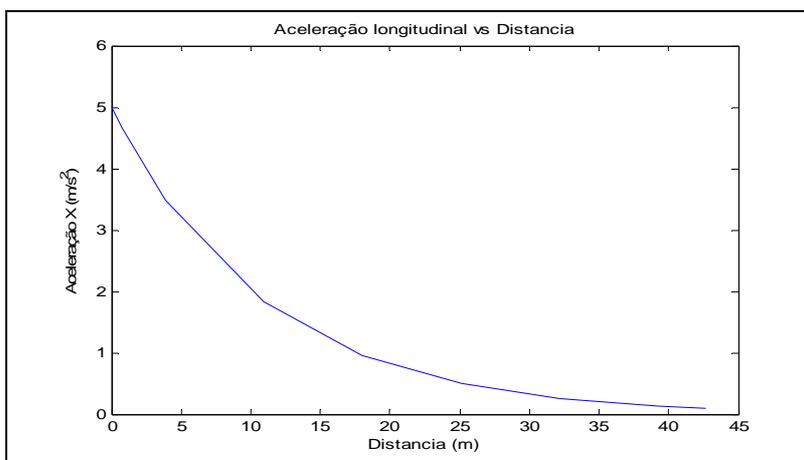


Figura 4.24. Aceleração para o caso 4.

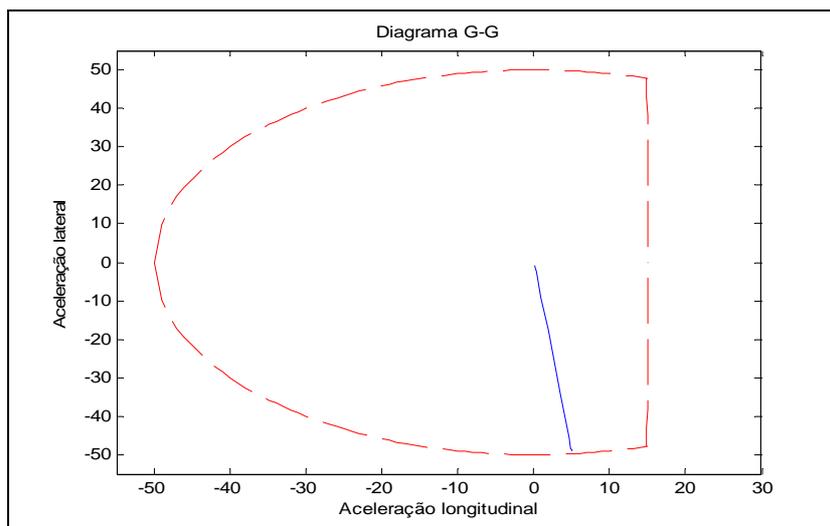


Figura 4.25. Diagrama GG (azul) sobre o Circulo de Aderência (vermelho), caso 4.

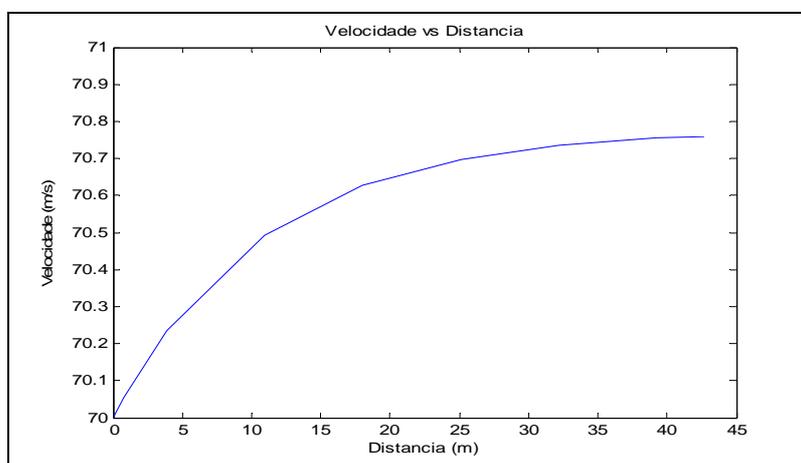


Figura 4.26. Velocidade em função da distância percorrida, caso 4.

A velocidade do veículo não aumenta muito ainda o veículo tenha aceleração inicial, isto devido à pequena distância percorrida.

O raio de curvatura do veículo se aumenta rapidamente na pequena distância percorrida, isto devido a que a aceleração lateral diminui e a velocidade do veículo aumenta; a atitude do veículo fica quase constante ao final do movimento, já que a aceleração lateral responsável pela mudança de direção do veículo vai diminuindo até ser nulo. Finalmente pode-se concluir que durante a saída da curva o veículo fará poucas manobras enquanto à mudança de direção pois a dinâmica não permite muita coisa na dinâmica lateral, mais sim na dinâmica longitudinal, que é o objetivo da saída, acrescentado a velocidade. Pelo tanto o ponto onde se inicia a saída da curva tende a ser quase ao final da curva mesmo.

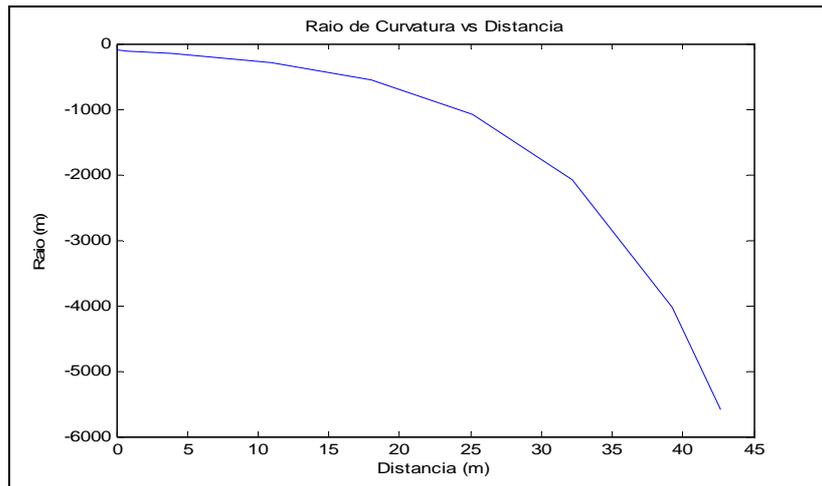


Figura 4.27. Raio de curvatura instantâneo em função da distância, caso 4.

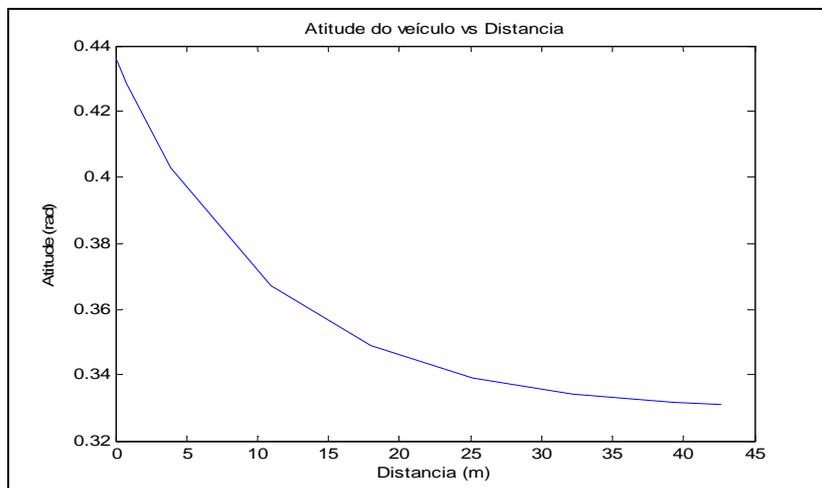


Figura 4.28. Atitude do veículo (ângulo de yaw) em função da distância, caso 4.

Agora, analisa-se o que acontece se o veículo está se movimentando com uma velocidade inicial muito menor, de 10 m/s (36 km/h), e ângulo inicial de 25° (0,436 rad), na mesma pista. Este caso se denomina Caso 4 modificado.

Os resultados obtidos são: tempo mínimo de 2,4190 segundos, a aceleração longitudinal inicial é 15 m/s<sup>2</sup> (1,5g), a distância total percorrida é 40,5854 metros, e a aceleração lateral inicial é 7,1547 m/s<sup>2</sup> (0,72g). As Figuras 4.29 até 4.35 ilustram os resultados da simulação.

Neste caso o veículo utiliza toda sua capacidade de aceleração longitudinal e apenas um pouca da aceleração lateral, Figura 4.32, com pouca aceleração lateral é possível mudar a direção do veículo já que este inicia seu movimento com velocidade “pequena”. Aqui o tempo de percurso é maior que no caso anterior, devido à velocidade menor, mas a distância percorrida é menor em comparação ao

caso anterior, mas esta distância percorrida menor apenas foi possível obtê-la a uma velocidade relativamente pequena; isto indica que o processo de otimização deve de chegar a equilibrar o valor da velocidade e a distância percorrida, conseguindo assim a maior velocidade e a menor distância percorrida com o fim de obter a trajetória ótima minimizando o tempo.

A aceleração total máxima do movimento acontece no início,  $16,62 \text{ m/s}^2$  ( $1,66g$ ), e no final do movimento, o veículo esta sem aceleração; no final do trecho a atitude do veículo é aproximadamente paralelo à direção da pista, é diferente que no caso anterior mas trata-se do mesmo problema apenas com a variação da velocidade inicial, isto mostra quanto é que pode alterar a velocidade no traçado da trajetória ótima para um mesmo problema de otimização.

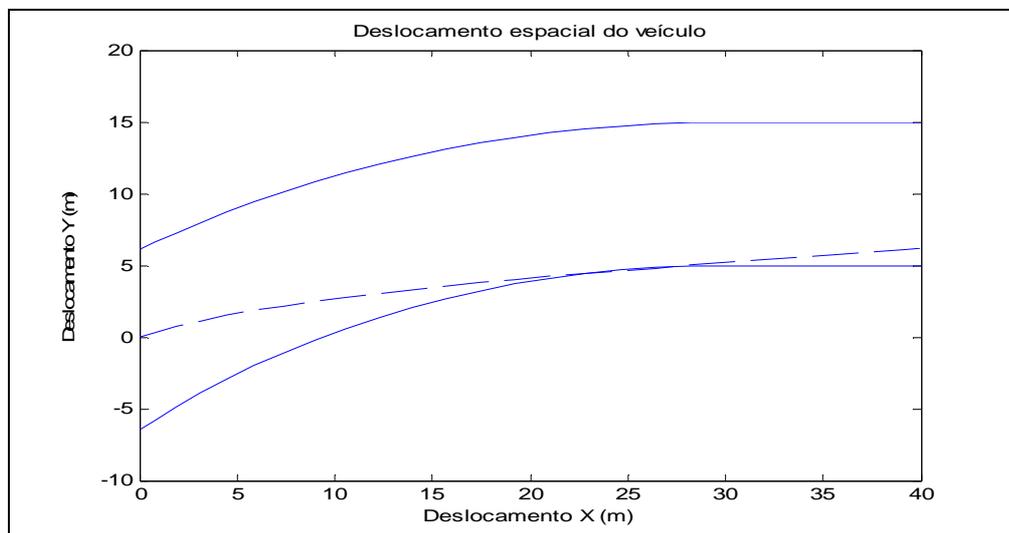


Figura 4.29. Deslocamento do veículo, caso 4 modificado.

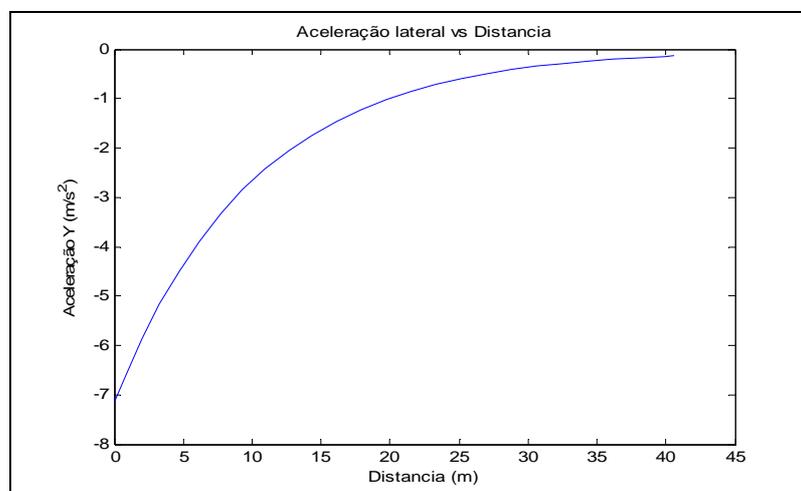


Figura 4.30. Aceleração lateral para o caso 4 modificado.

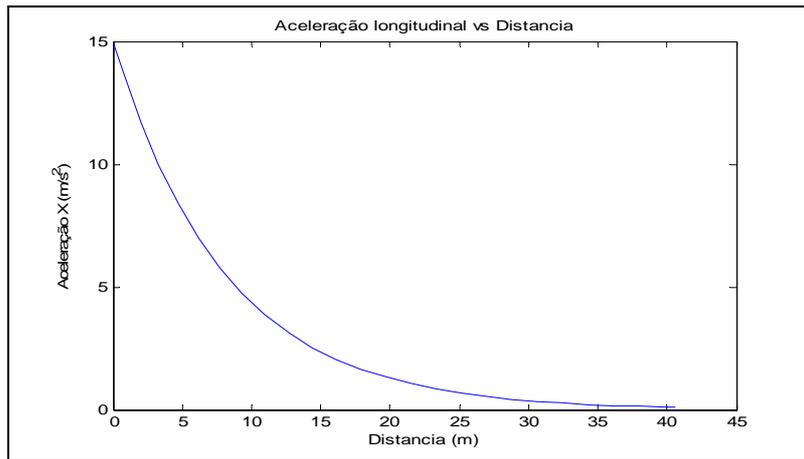


Figura 4.31. Aceleração para o caso 4 modificado.

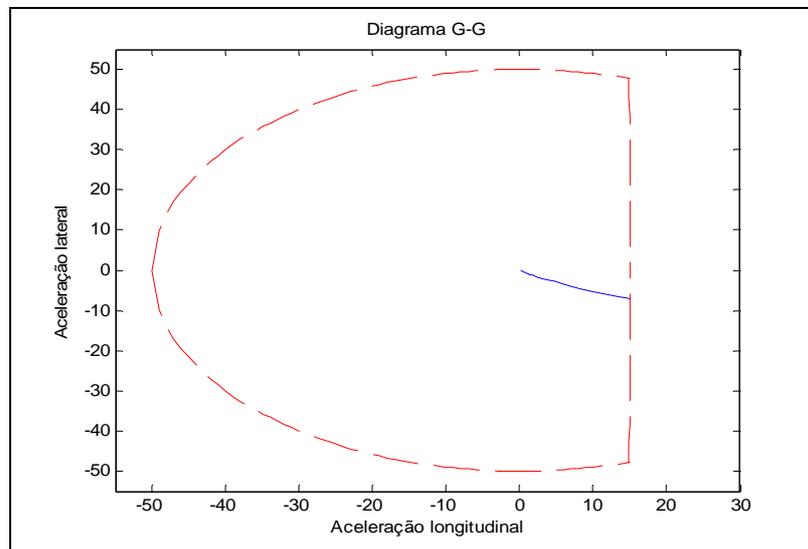


Figura 4.32. Diagrama GG (azul) sobre o Circulo de Aderência (vermelho), caso 4 modificado.

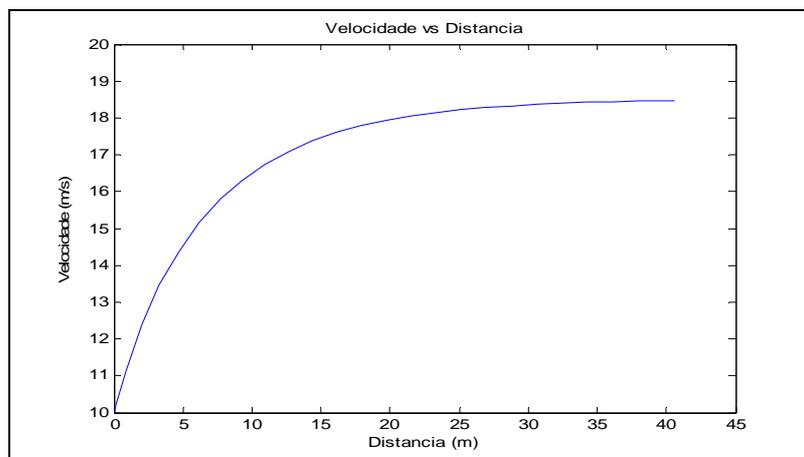


Figura 4.33. Velocidade em função da distância percorrida, caso 4 modificado.

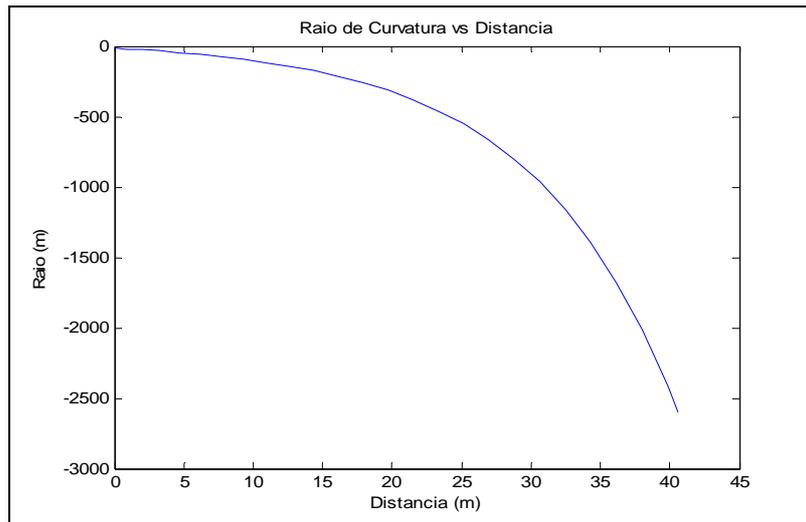


Figura 4.34. Raio de curvatura instantâneo em função da distância, caso 4 modificado.

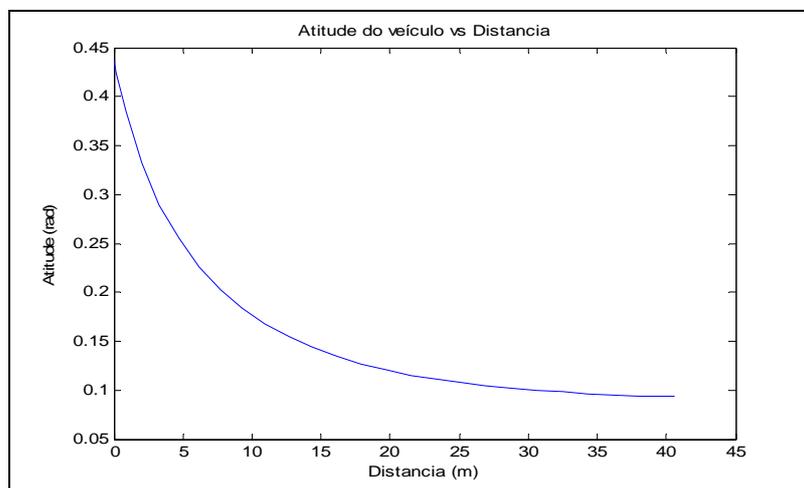


Figura 4.35. Atitude do veículo (ângulo de yaw) em função da distância, caso 4 modificado.

## 4.6

### Caso 5: Velocidade constante em curva.

Neste caso a velocidade é constante durante todo tempo de percurso, suposta em 50 m/s (180 km/h), e o veículo vai percorrer uma curva muito maior, de raio 50 metros. As variáveis do problema de otimização são a aceleração lateral e os pontos onde se aplicam as acelerações dentro da distância percorrida pelo veículo.

Vai ser empregado agora nas simulações o modelo dinâmico desenvolvido no Capítulo 2 com intenção de avaliar as características do comportamento do veículo ao percorrer uma determinada trajetória, obtida por uma representação

mais simples, modelo massa pontual, comparando os resultados encontrados para ambos os modelos.

Os resultados da otimização são: o tempo mínimo é 4,0692 segundos, a aceleração lateral máxima utilizada para fazer a trajetória ótima é  $37,1669 \text{ m/s}^2$  ( $3,72g$ ), o ponto de início da aceleração lateral está a 29,5759 m do ponto de partida, o local aonde se chega a aceleração máxima está a 60,6949 m da partida, o ponto de saída da curva (início da desaceleração lateral) está a 95,4724 m do ponto inicial, o local aonde a aceleração lateral é completamente nula está a 124,2326 m da partida, e finalmente a distância total percorrida pelo veículo é 203,4598 metros. As Figuras 4.36 até 4.42 ilustram os resultados da simulação.

Nota-se que para trajetórias retas o raio de curvatura tende ao infinito, e neste caso, o raio mínimo obtido é 67,26 metros (acontece durante a aceleração lateral máxima). Segundo o Diagrama GG o veículo não precisa de toda a aceleração lateral que pode dar, desde que faça mudar de direção ao veículo para obter a trajetória ótima sem sair da pista. O trecho de entrada á curva é mais curta comparada com o trecho de saída da curva, mesmo assim na entrada da curva se consegue mudar mais a direção do veículo.

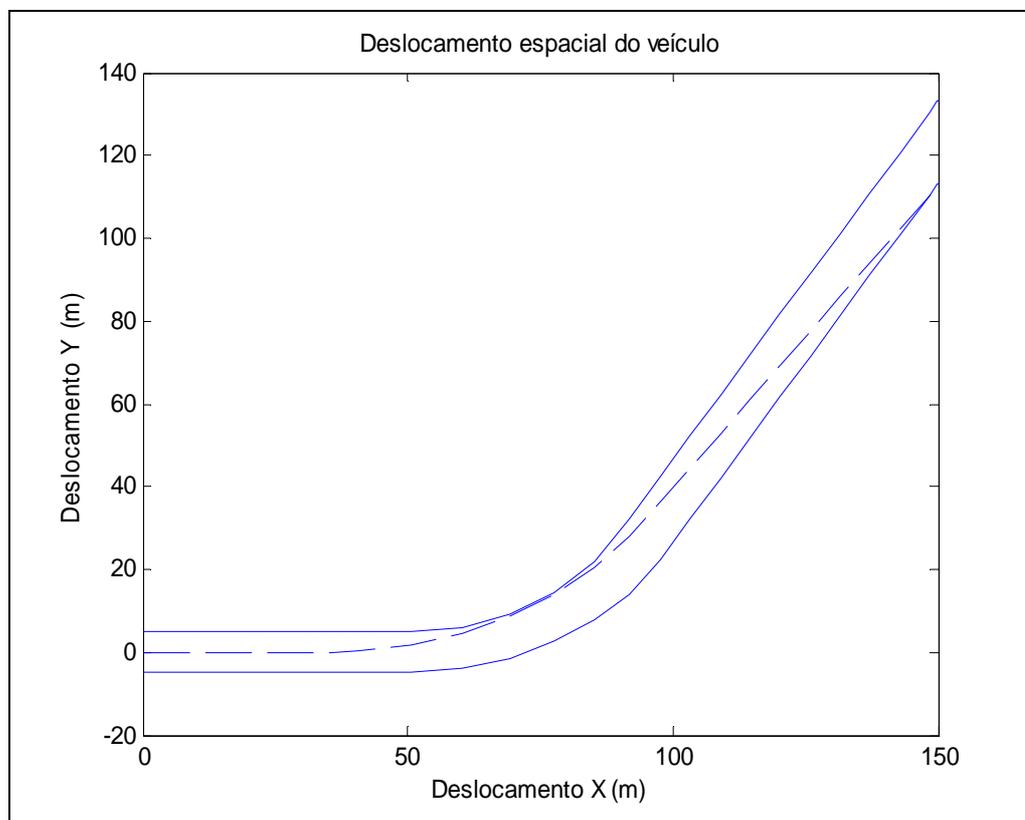


Figura 4.36. Deslocamento do veículo, caso 5.

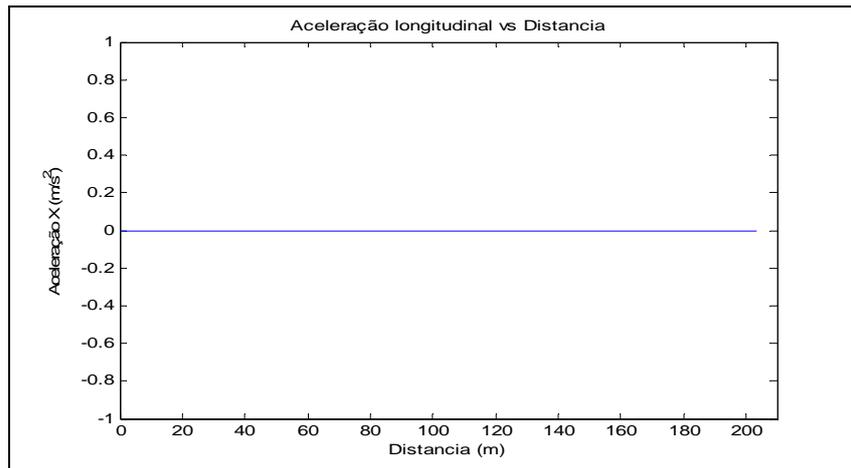


Figura 4.37. Aceleração longitudinal, caso 5.

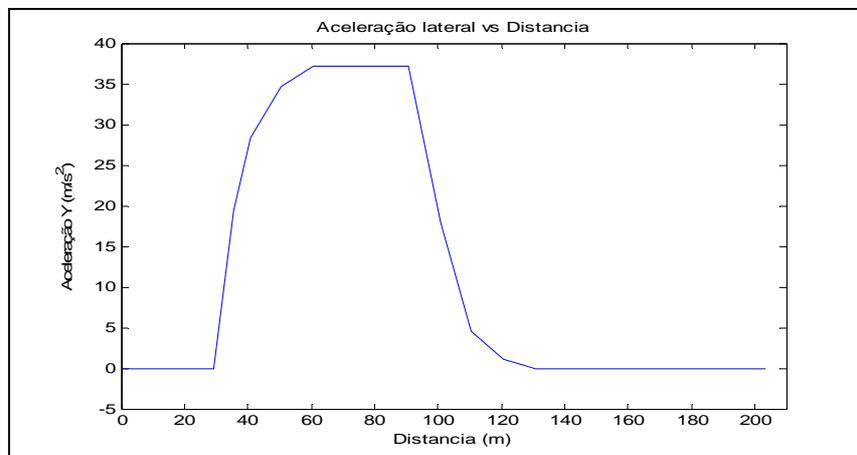


Figura 4.38. Aceleração lateral, caso 5.

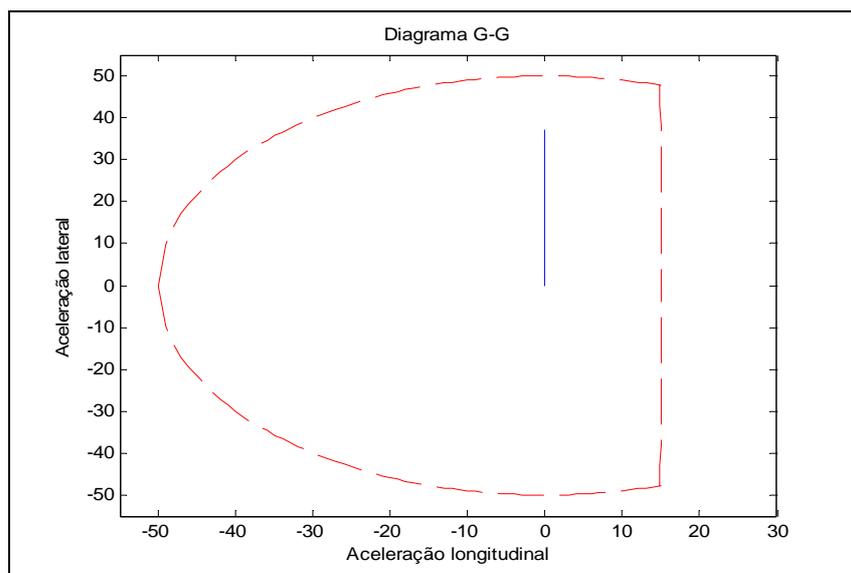


Figura 4.39. Diagrama GG (azul) sobre o Circulo de Aderência (vermelho), caso 5.

Tanto no Diagrama GG quanto na figura da aceleração lateral o comportamento do veículo é segundo esperado, neste caso de velocidade constante apenas se busca os pontos ótimos de aplicação da aceleração lateral; da figura onde se apresenta o raio de curvatura pode se ver que o trecho de entrada na curva é menor que na saída da curva, aqui também é relevante que o trecho onde a aceleração lateral é constante (no médio da curva) tem maior longitude que nos extremos, isto mesmo pode se ver na Figura 4.42 onde dá para diferenciar três comportamentos diferentes ao percorrer a curva, um comportamento transiente onde a atitude do veículo sai de ser constante para uma variação quase linear (comportamento permanente), que acontece no médio da curva, e depois outro comportamento transiente à saída da curva onde a atitude passa a ser constante novamente já que a aceleração lateral vai se anular.

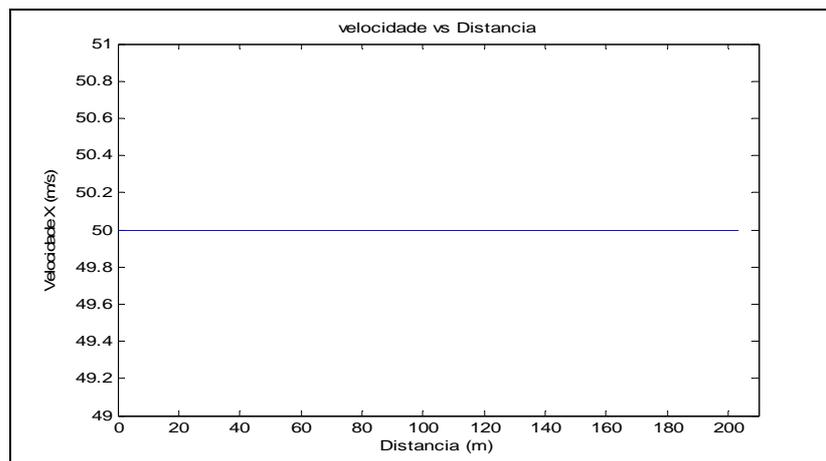


Figura 4.40. Velocidade em função da distância percorrida, caso 5.

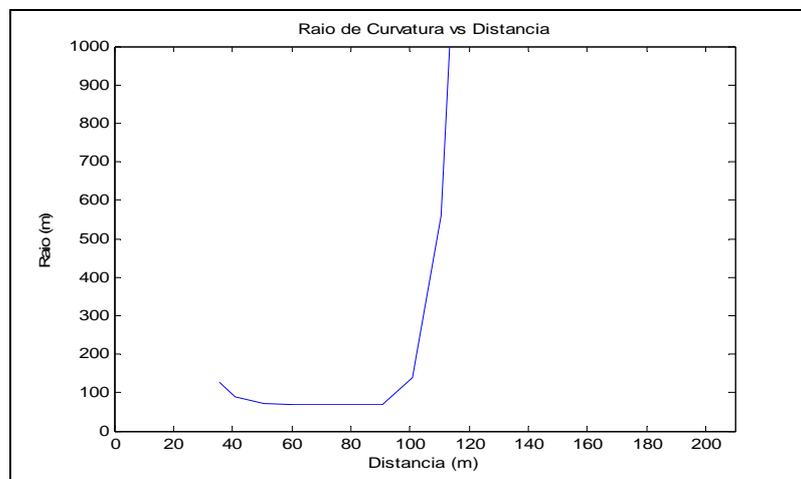


Figura 4.41. Raio de curvatura instantâneo em função da distância, caso 5.

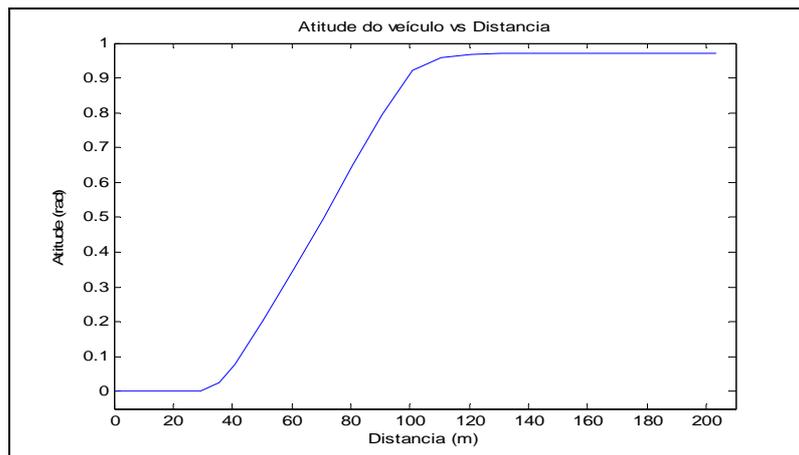


Figura 4.42. Atitude do veículo (ângulo de yaw) em função da distância, caso 5.

Apresenta-se a seguir o comportamento do veículo, representado pelo modelo dinâmico não linear do Capítulo 2, na trajetória ótima obtida para o veículo com velocidade constante, determinada pelo modelo massa pontual. Os resultados encontrados são mostrados nas Figura 4.43 até 4.56.

Nota-se na Figura 4.43 que o veículo tenta seguir a trajetória ótima, através de uma malha de controle que foi desenvolvida em [11]. O controle que aqui se utiliza para a avaliação foi criado para um Modelo Veicular Cinemático onde ainda não se considera o comportamento dinâmico do veículo, pelo qual se espera que nos resultados exista uma diferença significativa nas trajetórias definidas pelo modelo massa pontual e o modelo dinâmico do veículo, isto pode se ver na Figura 4.43 (trajetória de cor vermelha), mais ainda existe uma diferença nas trajetórias elas, delas terem a mesma tendência.

Na Figura 4.44 vê-se que o ângulo máximo do volante é  $90^\circ$ , mas neste caso somente precisa-se de  $14^\circ$  para realizar a curva. A flutuação do comportamento do volante é devida ao controle empregado. Na Figura 4.45 nota-se que os ângulos de esterçamento das rodas dianteiras têm um valor máximo de aproximadamente  $4,5^\circ$ ; e pode-se notar que a roda esquerda tem maior ângulo quando o veículo gira para a esquerda, o comportamento é totalmente lógico.

Os ângulos de deriva (Figura 4.46) dependem dos parâmetros do movimento, como a velocidade longitudinal e a velocidade angular de yaw do veículo. Os resultados obtidos mostram que os ângulos de deriva traseiro aumentam mais durante uma curva. Como modelo matemático das forças laterais

foi desenvolvido para ângulos de deriva menores a  $10^\circ$  aproximadamente, verifica-se que os resultados estão dentro da faixa.

Na Figura 4.50 nota-se que as forças nos pneus no lado direito no veículo são maiores, indicando que o veículo se inclina pela direita ao fazer a curva, existindo “transferência de massa” para a direita do veículo. Na Figura 4.51 pode-se ver a resposta ao tempo da aceleração lateral, que se assemelha bastante daquela obtida pelo modelo massa pontual, incluindo apenas algumas flutuações devido às manobras de controle. Nota-se que a aceleração lateral atinge a pouco mais dos  $50 \text{ m/s}^2$ , limite superior imposto no problema de otimização.

As acelerações angulares do ângulo de *yaw* são muito mais relevantes que as outras duas acelerações angulares (Figuras 4.52). O ângulo de *yaw* final (Figura 4.55) é muito próximo à direção da pista ( $60^\circ$ ), por alguns instantes ele é maior, indicando um comportamento sobre-esterçante, mas depois atinge um valor menor, levando à conclusão que o sistema de controle consegue estabilizá-lo adequadamente. Os valores dos ângulos de *roll* e *pitch* (Figura 4.56) estão dentro do esperado, sendo praticamente desprezíveis nas condições consideradas.

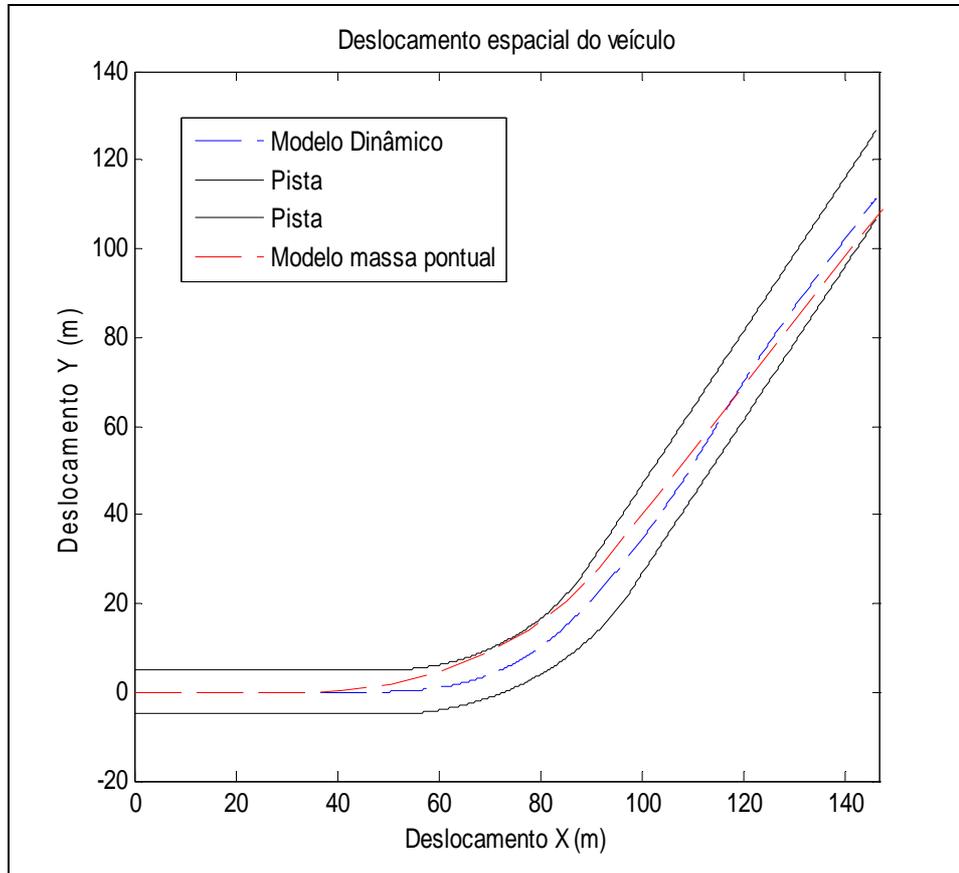


Figura 4.43. Trajetória percorrida pelo modelo dinâmico (azul).

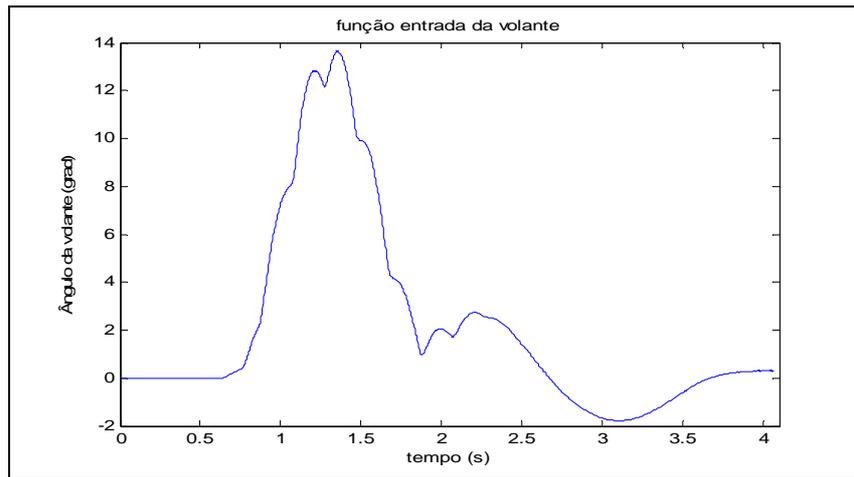


Figura 4.44. Volante do veículo no tempo, modelo dinâmico.

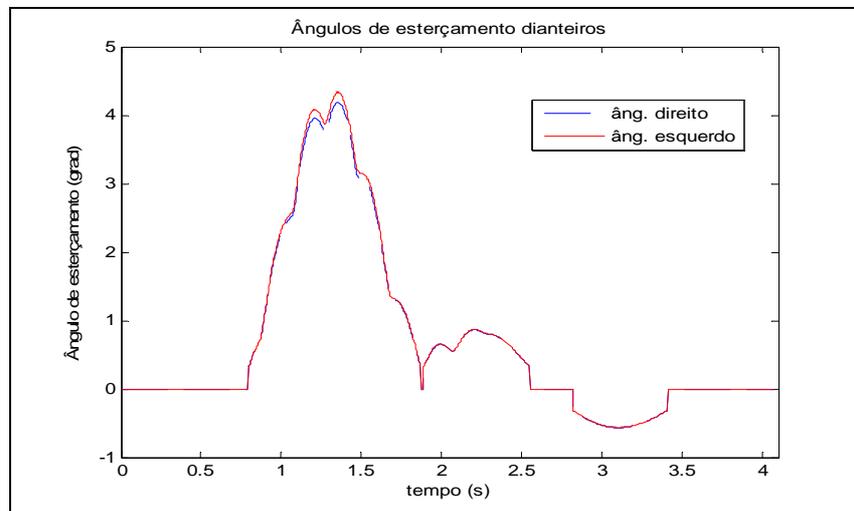


Figura 4.45. Ângulos de esterçamento dianteiros, modelo dinâmico.

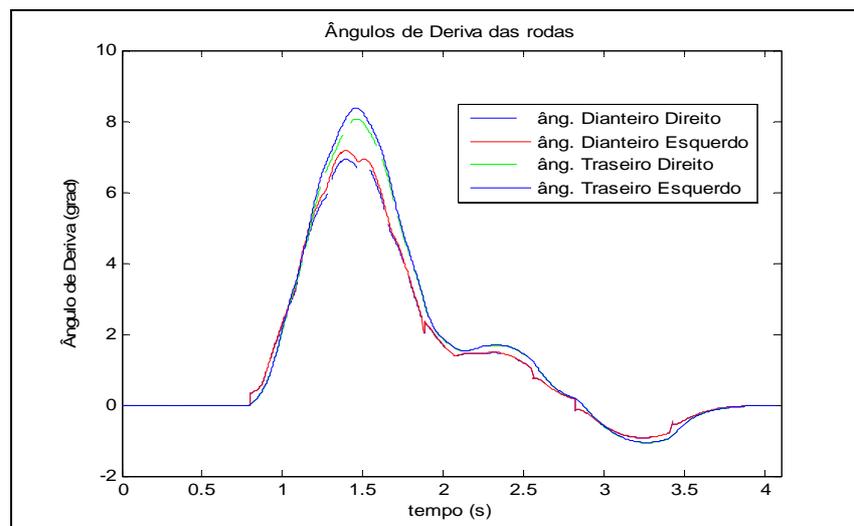


Figura 4.46. Ângulos de deriva no tempo, modelo dinâmico.

Comparando as trajetórias descritas pelos modelos dinâmico não linear e massa pontual, o modelo dinâmico tem um atraso na resposta ao controle, mas o modelo dinâmico utiliza sua máxima força lateral para tentar seguir a trajetória ótima, a força lateral máxima acontece quando os ângulos de deriva chegam até  $8^\circ$ , na Figura 4.47 dá para ver que a força lateral chega até seu valor máximo por um instante de tempo. Da mesma forma se gera um perfil de aceleração lateral, na Figura 4.51, onde o modelo dinâmico utiliza a máxima aceleração lateral possível por um instante de tempo, isto tem a mesma tendência que o perfil da aceleração para o modelo massa pontual. O comportamento oscilante dos momentos, forças e os ângulos são totalmente aceitáveis pela dinâmica do veículo, então pode-se dizer que os resultados são consistentes.

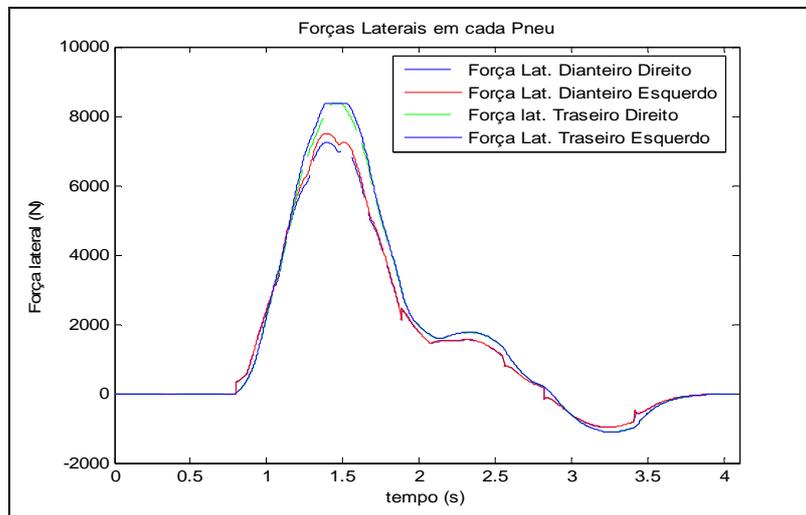


Figura 4.47. Forças laterais no tempo, modelo dinâmico.

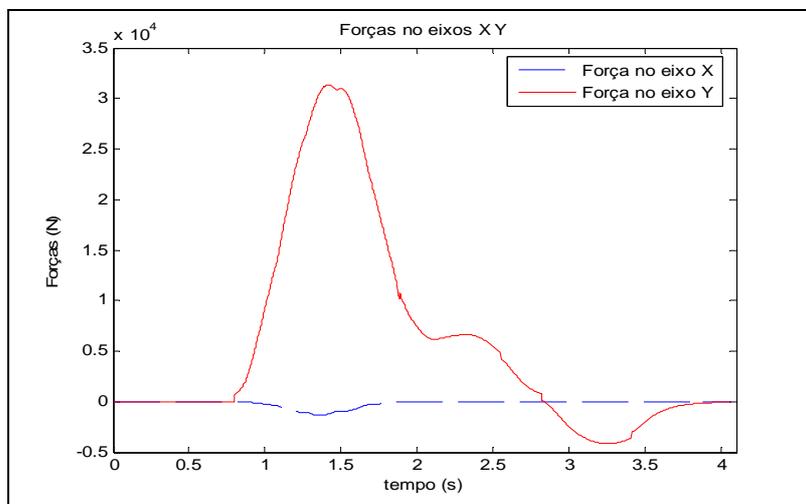


Figura 4.48. Forças totais nos eixos  $x$  e  $y$ , modelo dinâmico.

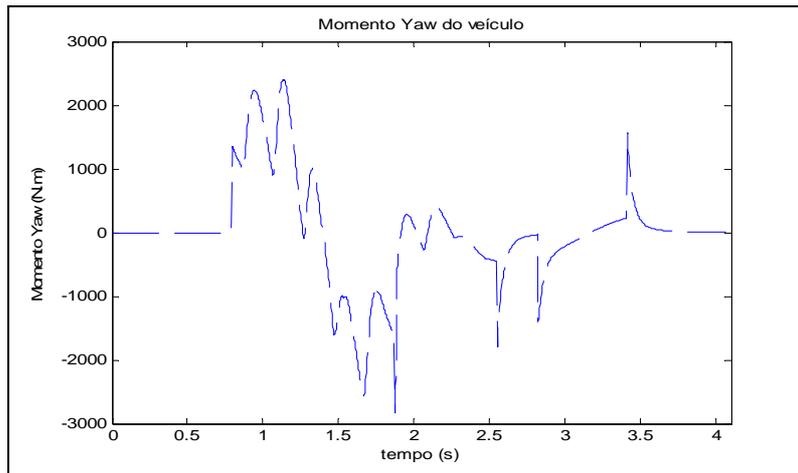


Figura 4.49. Momento no eixo z, modelo dinâmico.

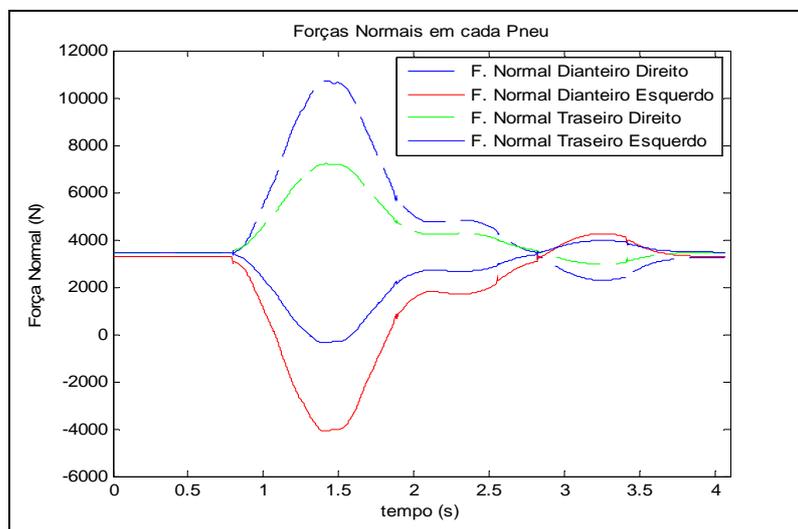


Figura 4.50. Forças normais em cada pneumático, modelo dinâmico.

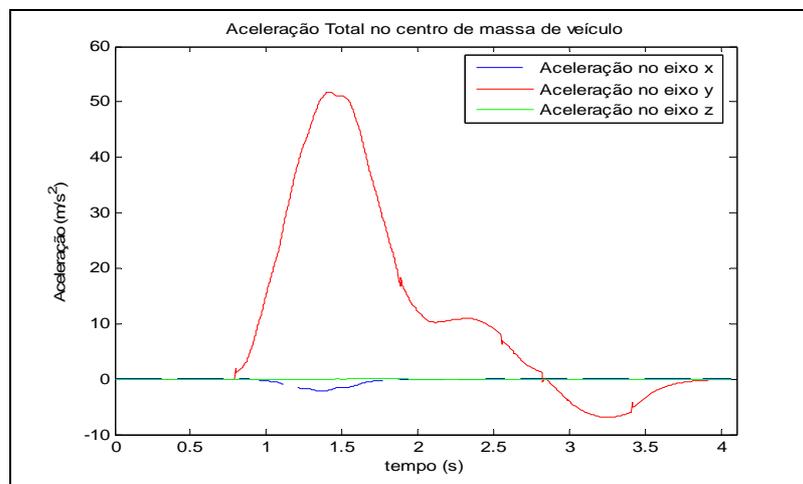


Figura 4.51. Aceleração do veículo, modelo dinâmico.

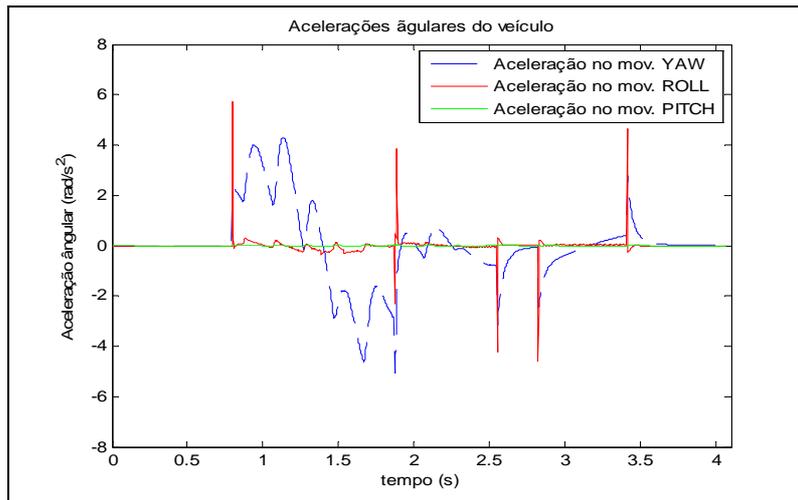


Figura 4.52. Aceleração angular do veículo, modelo dinâmico.

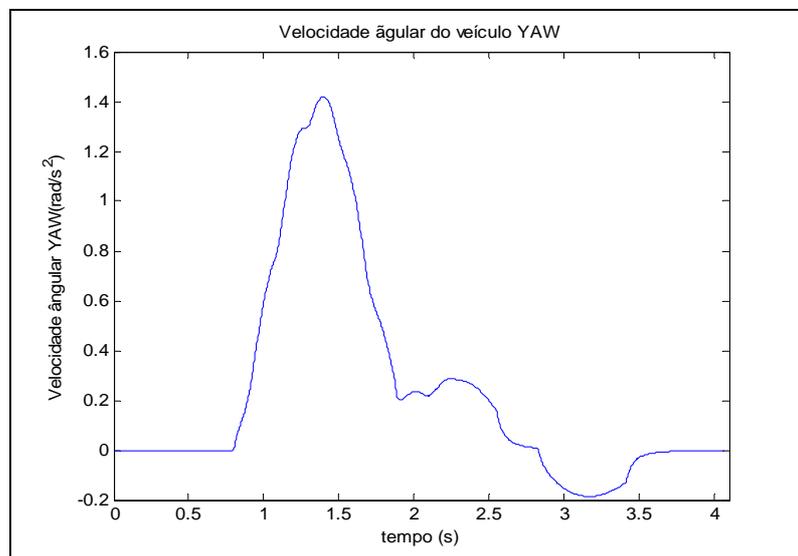


Figura 4.53. Velocidade de yaw, modelo dinâmico.

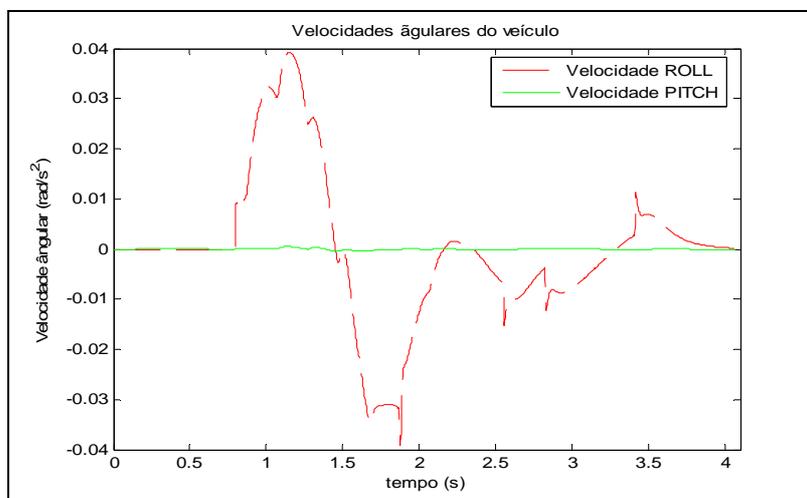


Figura 4.54. Velocidades angulares de *roll* e *pitch*, modelo dinâmico.

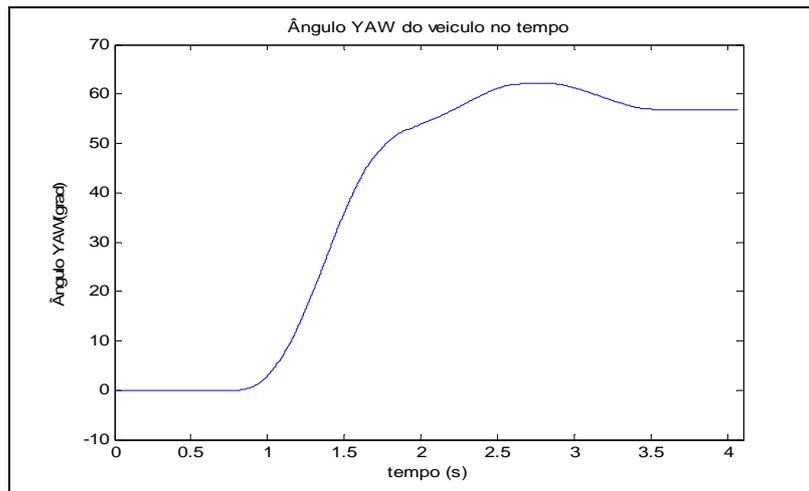


Figura 4.55. O ângulo de yaw no tempo, modelo dinâmico.

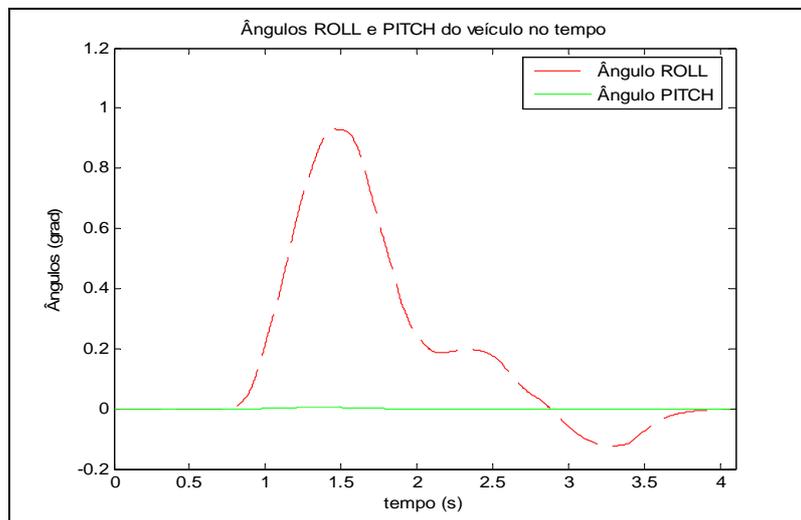


Figura 4.56. Os ângulos de *roll* e *pitch* no tempo, modelo dinâmico.

## 4.7

### Caso 6: Movimento geral.

Neste caso vão ser conectados harmoniosamente todos os movimentos analisados anteriormente, de modo a assim gerar uma trajetória geral. Para auxiliar na interpretação vai se trabalhar com a mesma pista adotada para velocidade constante, e assim poder comparar os resultados encontrados. Espera-se ter um melhor resultado neste último caso. A velocidade inicial é de 50 m/s (180 km/h). O objetivo é o veículo chegar no tempo mínimo ao final da pista, definido por uma linha vertical que fica a 150 m no eixo longitudinal do referencial global. A atitude inicial é zero. Considera-se que veículo inicia percorrendo uma linha

horizontal e pelo meio da pista. Provavelmente vão ser obtidos outros valores para os resultados da otimização, se o veículo inicia sua trajetória no extremo inferior da pista ou no extremo superior. Lembra-se que agora a velocidade é variável e o veículo irá desacelerar para poder realizar a manobra lateral.

O tempo mínimo obtido pela otimização é 3,8376 segundos, muito menor que no caso de velocidade constante. A aceleração máxima é  $35 \text{ m/s}^2$ , menor que no caso anterior. O ponto de início da aceleração lateral é 30,3462 m, indicando que nesta situação a aceleração lateral se inicia mais tarde, mais perto da curva. O ponto onde a aceleração lateral atinge a seu máximo valor é 50,1346 m, que comparado ao caso anterior indica que consegue-se chegar antes ao máximo valor, então a distância aonde a aceleração lateral é transiente na entrada da curva é menor. O ponto onde a aceleração lateral começa a diminuir é 82,7 m, então a saída da curva inicia antes que para velocidade constante. O ponto onde a aceleração lateral é nula é 203,3533 m, então o trecho aonde a aceleração lateral diminui é mais longo que no caso anterior. A distância total percorrida pelo veículo é 2003,3533 m, menor quando comprado com o caso de velocidade constante, indicando que se faz uma curva mais suave, e a aceleração longitudinal é máxima  $15 \text{ m/s}^2$ , ocorrendo durante toda a saída da curva. As Figuras 4.57 até 4.63 ilustram os resultados da simulação.

Nota-se que a desaceleração na entrada da curva é mínima,  $0,11 \text{ m/s}^2$ , isto ocorre por que a velocidade é relativamente pequena e não se precisa diminuí-la para fazer a curva. Apenas se diminui a velocidade para realizar uma curva mais suave, e então a distância percorrida é menor. Existe uma pequena desaceleração do veículo na entrada da curva, fazendo a velocidade variar. A velocidade inicial foi  $50 \text{ m/s}$  ( $180 \text{ km/h}$ ), a velocidade mínima ao fazer a curva de  $49,964 \text{ m/s}$  ( $179,87 \text{ km/h}$ ), esta variação de velocidade é muito pequena quase imperceptível. O raio de curvatura mínimo é de  $71,3258 \text{ m}$ , que é maior do que aquele encontrado no caso de velocidade constante, por isso a curva é mais suave. A velocidade máxima que do veículo ao percorrer o trecho (depois da aceleração longitudinal) é  $57,0444 \text{ m/s}$  ( $205,36 \text{ km/h}$ ), e a sua atitude varia de zero até  $1,0254 \text{ rad}$  ( $58,75^\circ$ ).

Os resultados da otimização neste caso são muito próximos aos obtidos no caso de velocidade constante, por exemplo no perfil de velocidades obtidas da otimização são muito similares; mas existe uma diferença maior no diagrama GG

já que ali aparece a aceleração longitudinal que o veículo precisa para obter a trajetória ótima, aqui o veículo utiliza toda a aceleração disponível na saída da curva, e a velocidade se incrementa rapidamente (Figura 4.61) na saída da curva.

Em modo geral o comportamento do veículo para gerar a trajetória ótima se resume na aceleração do veículo à saída da curva, para acrescentar a velocidade e diminuir o tempo.

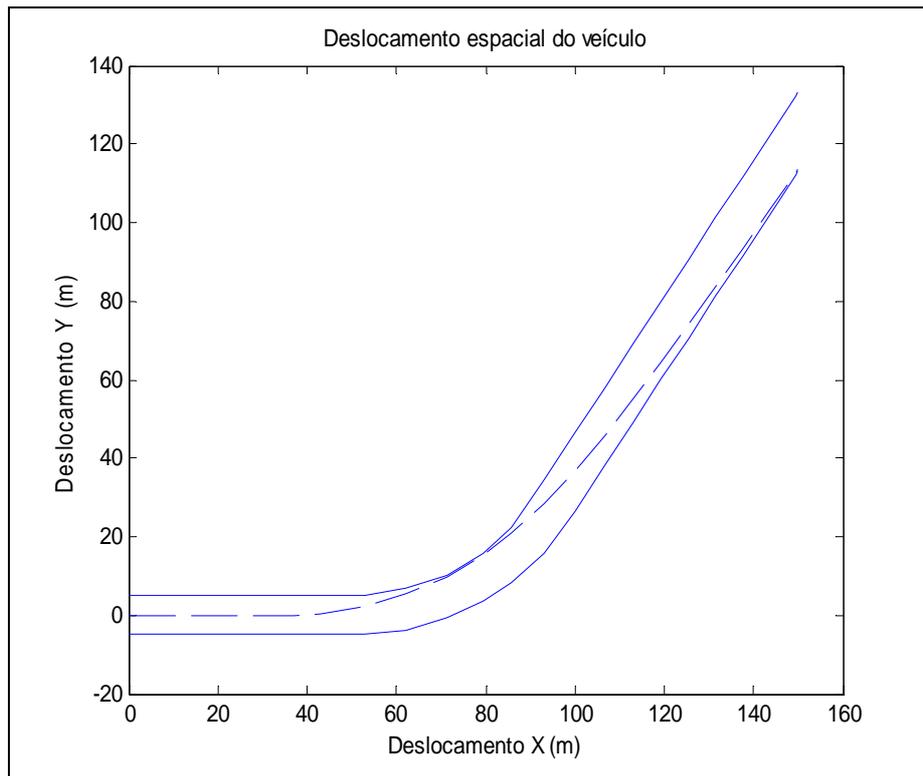


Figura 4.57. Deslocamento do veículo, caso geral.

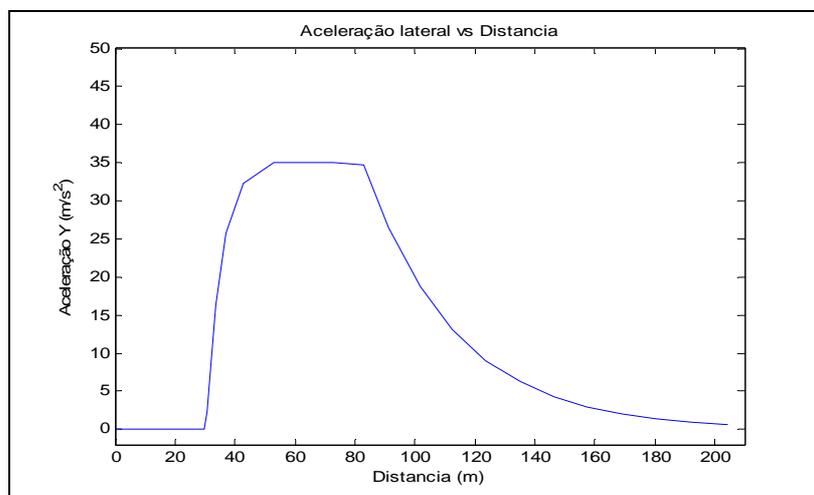


Figura 4.58. Aceleração lateral para o caso geral.

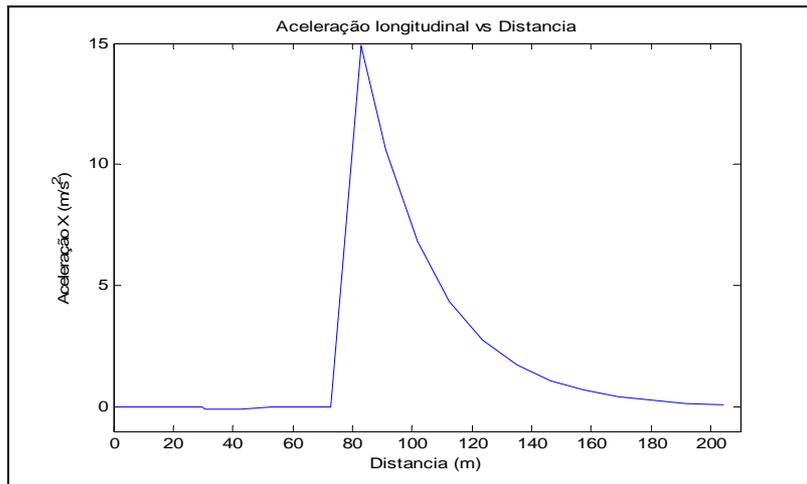


Figura 4.59. Aceleração longitudinal, caso geral.

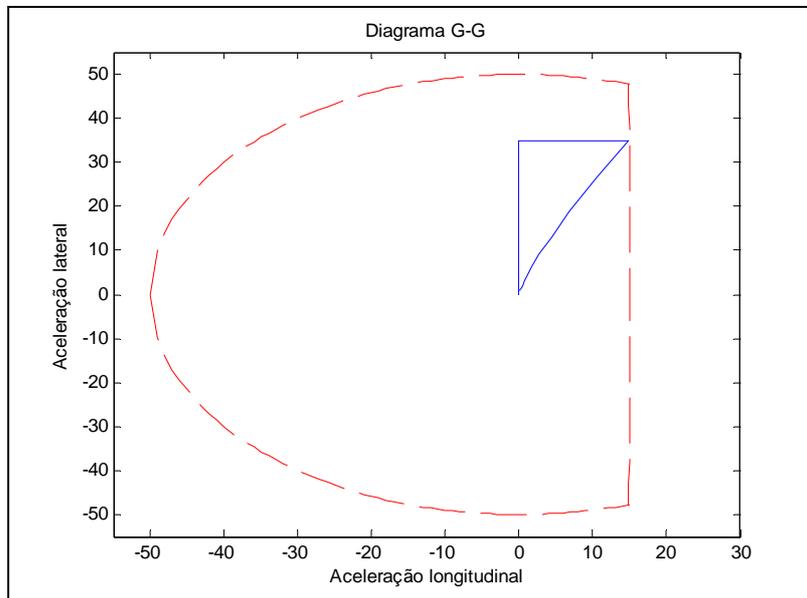


Figura 4.60. Diagrama GG (azul) sobre o Círculo de Aderência (vermelho), caso geral.

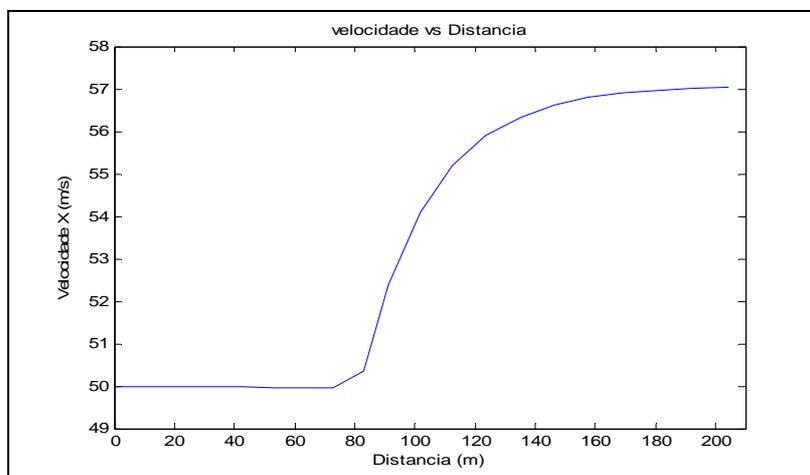


Figura 4.61. Velocidade em função da distância percorrida, caso geral.

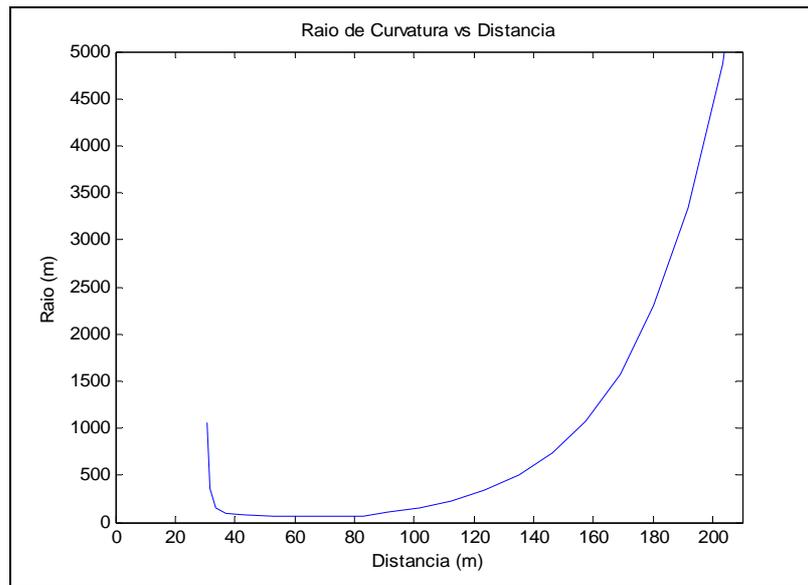


Figura 4.62. Raio de curvatura instantâneo em função da distância, caso geral.

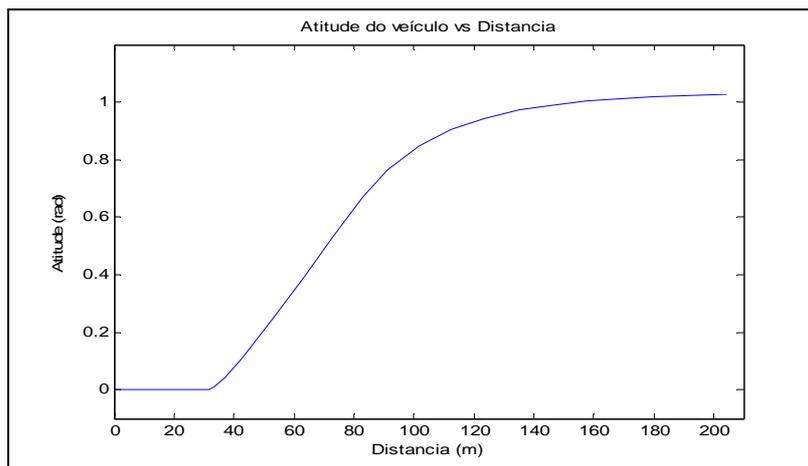


Figura 4.63. Atitude do veículo (ângulo de yaw) em função da distância, caso geral.

Na Figura 4.64, apresentam-se as duas trajetórias obtidas do problema de otimização, estas são próximas, mas a trajetória para a velocidade variável é mais suave, quer dizer, o raio de curvatura instantâneo do veículo aparece numa distância maior que no caso a velocidade constante.

A atitude do veículo ao final da pista fica melhor no caso de velocidade variável, isto por que a velocidade do veículo ao início da saída da curva é menor que no caso de velocidade constante e então facilita a dinâmica lateral, gerando assim maior mudança na direção do veículo.

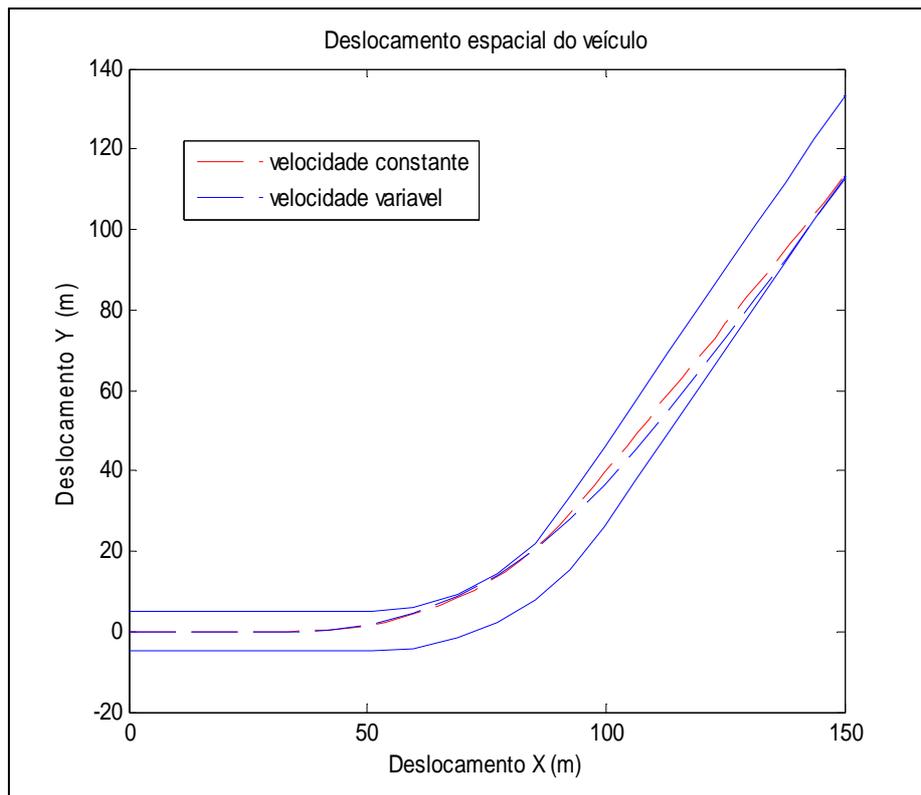


Figura 4.64. Comparação das trajetórias ótimas, caso geral.

#### 4.8

##### Caso 7: Movimento em duas curvas consecutivas.

Para completar as análises dos resultados de otimização, faz-se um caso final no qual vai-se considerar também todos movimentos antes analisados. Agora o veículo se deslocará em uma pista com seguintes características: inicialmente uma reta de 100 metros, depois uma curva de 100 metros de raio e arco  $60^\circ$ , em seguida outra reta de 100 metros de comprimento, depois outra curva de 100 metros de raio e arco  $120^\circ$ , e finalmente outra reta de aproximadamente 100 metros. O veículo inicia seu movimento no ponto central da pista, com velocidade inicial de 80 m/s (288 km/h). O tempo mínimo é 7,6742 segundos.

Os resultados encontrados neste caso final são descritos a seguir. A aceleração lateral máxima na primeira curva é  $49,1903 \text{ m/s}^2$  e a aceleração lateral máxima na segunda curva é  $48,5650 \text{ m/s}^2$ . O ponto onde se inicia a entrada da curva acontece a 77,0780 metros do ponto de partida; o local onde a aceleração lateral chega a ser máxima é 128,2216 metros de distância percorrida; o ponto onde se inicia a saída da primeira curva acontece a 179,9789 da distância percorrida, então tem-se quase 52 metros desde o local onde a velocidade é

constante e aquele em que aceleração lateral é máxima. O ponto onde o veículo passa de uma curva para outra acontece em 253,4937 metros da distância percorrida; neste local o veículo termina de sair da primeira curva e entra imediatamente na segunda, indicando que ele desacelera longitudinalmente e a aceleração lateral vai ser aumentada até seu valor máximo. O local onde acontece a aceleração lateral máxima na segunda curva está a 346,8754 metros da distância percorrida. A saída da segunda curva acontece a 425,5081 metros. A partir deste ponto o veículo vai acelerar longitudinalmente e sua aceleração lateral diminui até se anular. Na segunda curva tem-se quase 79 metros com velocidade constante e aceleração lateral máxima. O ponto final do movimento, que também é uma variável de otimização, está a 547,2026 metros do ponto de partida, e esta é a distância total percorrida para que veículo chegue a seu objetivo. As Figuras 4.65 até 4.71 ilustram os resultados da simulação.

Na Figura 4.68, verifica-se que a velocidade mínima durante a entrada na primeira curva é 74,8426 m/s, depois o veículo acelera durante a saída da primeira curva até 75,7454 m/s, em seguida desacelera para entrar na segunda curva e a velocidade diminui até 65,3180 m/s. Finalmente ao sair da segunda curva o veículo acelera e a velocidade final é aproximadamente 69,72 m/s.

Já na Figura 4.69, nota-se que veículo inicia o movimento com um raio de curvatura instantâneo infinito, já que se desloca em linha reta. Quando faz a curva o raio diminui até atingir a um mínimo para cada curva. O raio mínimo na primeira curva é +113,8724 metros, e o sinal positivo indica que a curva é para esquerda; e na segunda curva o raio instantâneo mínimo é -87.8501 metros, e o sinal negativo indica que a curva é à direita.

Pela Figura 4.70, vê-se como a atitude do veículo varia segundo o tempo transcorrido. O veículo inicia com atitude zero (ângulo de *yaw*), e a atitude máxima durante o movimento é + 0,9459 rad (54,2 °). Ao final do movimento o veículo fica com atitude de valor -1,0479 rad (60,04 °), e o sinal negativo indica que o sentido é negativo em relação ao sistema de referência, ou seja, o veículo está girando para a direita. O ângulo de atitude de saída é muito próximo da direção da pista, então pode-se considerar que o veículo sai dos trechos de curva na direção da pista e segue em frente em uma reta.

No Diagrama GG mostrado na Figura 4.71, pode-se notar dois polígonos diferentes: aquele que fica no lado positivo da aceleração lateral, correspondente

ao movimento na primeira curva; e o outro polígono, correspondente à segunda curva. Segundo esta figura vê-se que na primeira curva o veículo tem menor aceleração longitudinal que na segunda curva, mas se aplica maior desaceleração longitudinal na primeira curva do que na segunda. Nota-se que na entrada da primeira curva o veículo desacelera com  $47,2964 \text{ m/s}^2$ , e durante todo o movimento as acelerações estão dentro da faixa do admissível do Círculo de Aderência, como mostrado pelo Diagrama GG. Na saída da primeira curva o veículo acelera com  $3,8178 \text{ m/s}^2$ , e neste movimento de aceleração longitudinal e aceleração lateral tem-se uma aceleração máxima de  $49,34 \text{ m/s}^2$ , que se encontra dentro do Círculo de Aderência. Na entrada da segunda curva o veículo desacelera com  $44,1679 \text{ m/s}^2$ , e na saída da segunda curva acelera com  $11,6745 \text{ m/s}^2$ . Neste movimento tem-se uma aceleração máxima de  $49,95 \text{ m/s}^2$ , indicando que neste caso utiliza-se a aceleração máxima que o veículo pode suportar.

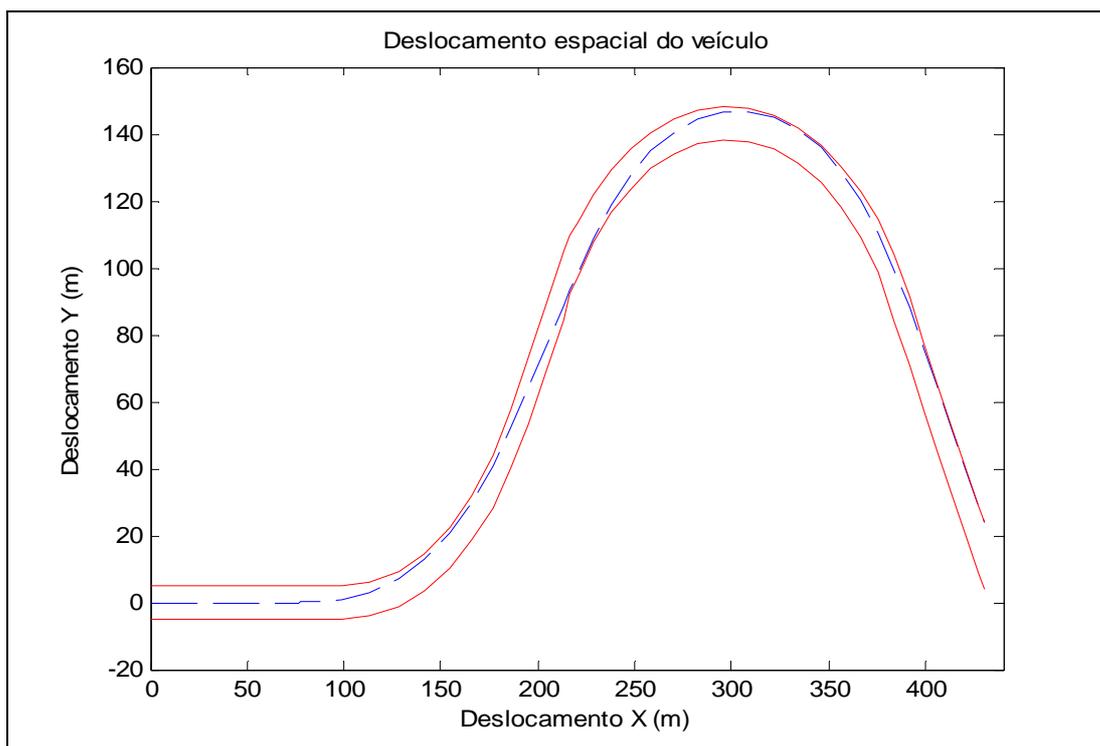


Figura 4.65. Deslocamento do veículo, caso final.

Os estudos feitos na otimização da trajetória para o tempo mínimo mostram que numa curva a trajetória ótima tem a tendência de um arco de circunferência, então nesta curva complexa é de esperar que o resultado tenda a ser de dois arcos de circunferência, isto se pode ver na figura do deslocamento espacial do veículo.

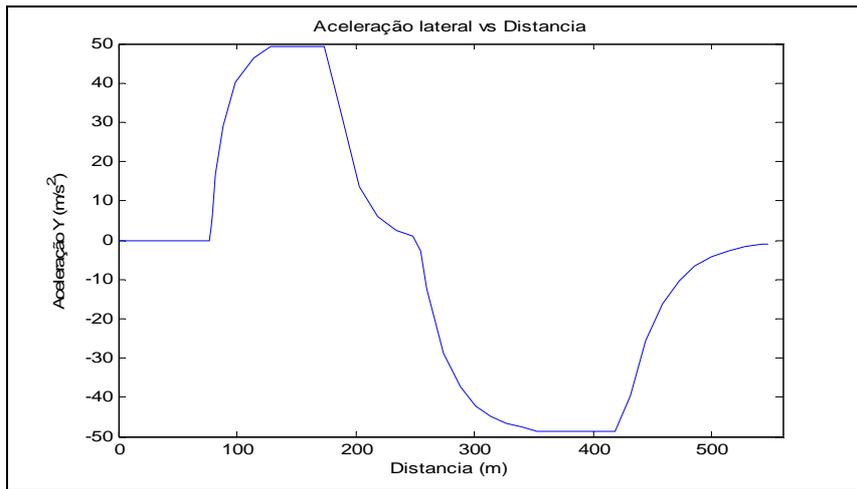


Figura 4.66. Aceleração lateral, caso final.

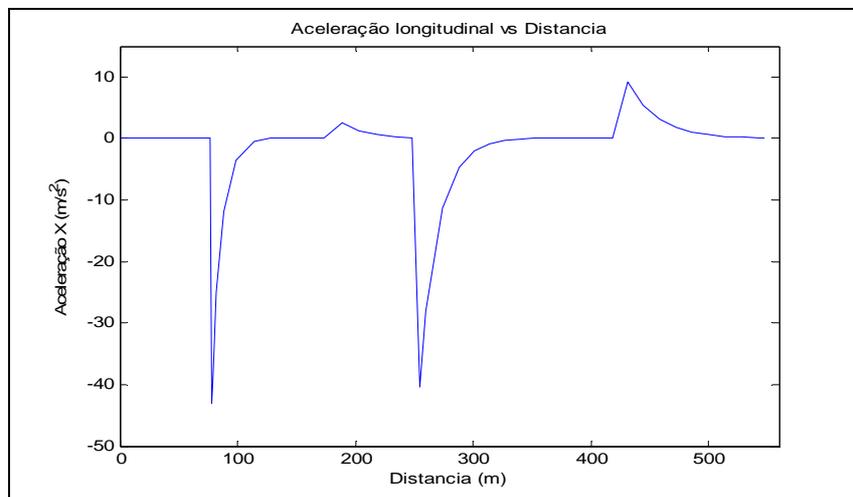


Figura 4.67. Aceleração longitudinal, caso geral.

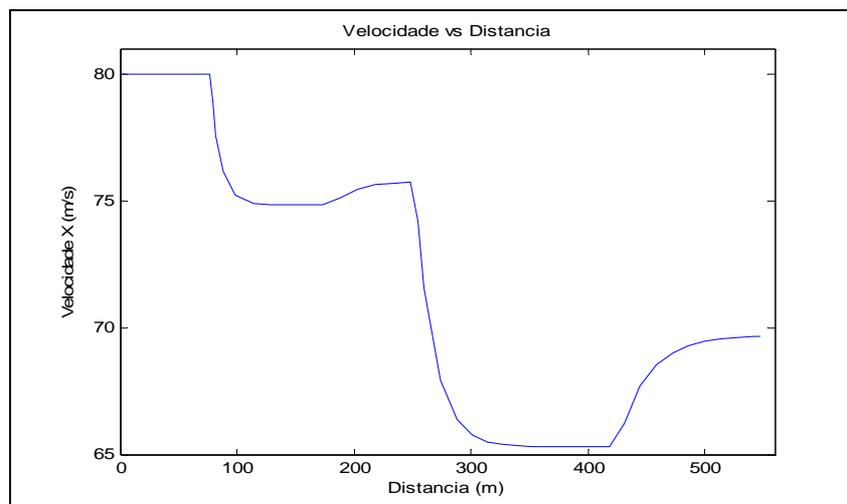


Figura 4.68. Velocidade em função da distância percorrida, caso geral.

Já neste último caso, onde se tem um comportamento mais complexo e completo do veículo, pode ser comparado aos resultados da telemetria; tanto perfil das acelerações quanto o perfil da velocidade são muito próximas às obtidas da telemetria, num veículo de competição. Se apenas considerarmos o diagrama GG do modelo massa pontual obtido já dá uma ideia da confiabilidade dos resultados, pois a figura gerada dentro do círculo de aderência tem a tendência dos diagramas GG obtidos experimentalmente.

Na figura onde se apresenta o raio de curvatura instantâneo, podem-se ver três movimentos diferentes, primeiro de entrada na curva aonde o raio de curvatura vem do infinito e vai até um raio mínimo (constante), um trecho onde o raio de curvatura é constante, depois a saída da curva onde o raio de curvatura sai de ser constante (mínimo) e vai até o infinito; assim pode-se identificar três tipos de movimento existentes em toda curva, dois transientes e um permanente referido à aceleração lateral do veículo, os movimentos transientes ficam aos extremos da curva (entrada e saída da curva).

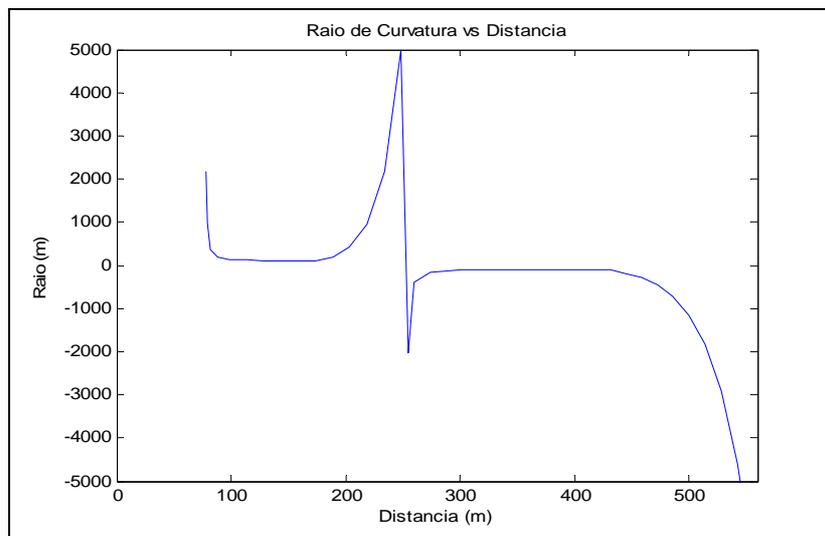


Figura 4.69. Raio de curvatura instantâneo em função da distância, caso geral.

O comportamento dinâmico do veículo se explica da seguinte forma:

Na entrada de qualquer curva vai-se priorizar a aceleração lateral fixando assim a direção do veículo, para gerar no possível uma trajetória que se assemelha a um arco de círculo “suave”, que satisfaça as restrições impostas inicialmente, submetendo assim a desaceleração, já que esta será utilizada quando se precisa fazer uma manobra mais radical (pagando o custo de diminuir a velocidade).

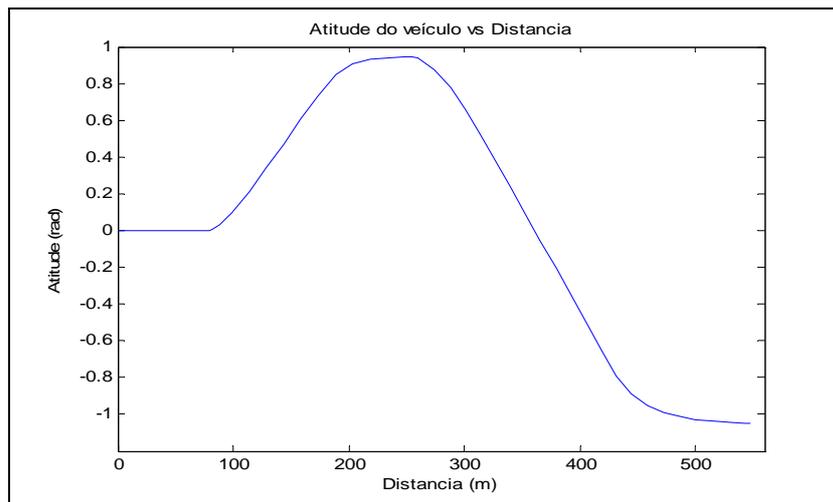


Figura 4.70. Atitude do veículo (ângulo de yaw) em função da distância, caso final.

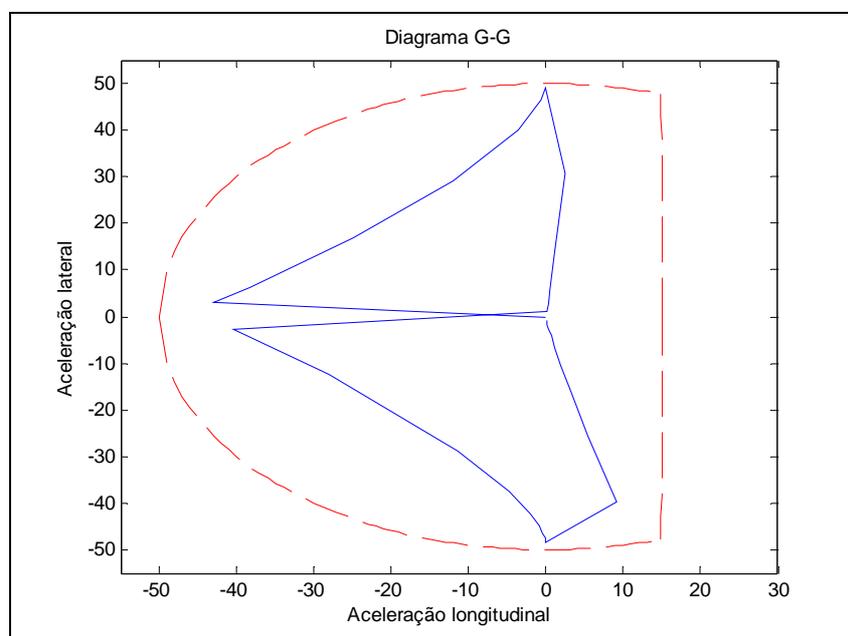


Figura 4.71. Diagrama GG (azul) sobre o Circulo de Aderência (vermelho), caso final.

Na saída da curva vai-se priorizar a aceleração longitudinal, já que ela acrescenta diretamente a velocidade e minimiza o tempo, submetendo à aceleração lateral pois seu valor máximo já foi definido na entrada da curva. No centro da curva onde a velocidade e a aceleração angular são constantes, útil para conservar esta variação da atitude do veículo até se aplicar a saída da curva; o tamanho deste movimento permanente depende da envergadura da curva, mas nas pistas dos veículos de competição onde se têm curvas rápidas este tipo de movimento é mínimo e até pode ser nulo.

Finalmente, explicou-se o comportamento dinâmico dos veículos de corridas, e como resumo do capítulo faça-se os seguintes comentários:

Os resultados obtidos nos casos 1 e 2 são totalmente coerentes com processo de otimização, dando uma maior confiabilidade no tratamento do problema, facilitando a compreensão do comportamento do veículo, apesar de considerar apenas a aceleração longitudinal.

Nos casos 3 e 4 podem-se ver os efeitos de acrescentar a dinâmica lateral no modelo matemático e como isto incrementa o nível de complexidade da otimização. Para mudar a atitude do veículo o movimento mais relevante é a entrada na curva, já que nela se estabelece uma maior mudança na direção do veículo, o que pode ser visto através da variação do raio instantâneo de curvatura, que é mais pronunciada na entrada da curva do que na saída. Durante a saída da curva o veículo tende a manter a direção final e a variação da atitude é pequena em relação à entrada. Isto leva a uma conclusão muito importante que o piloto deve levar em consideração: para fazer uma trajetória ótima a entrada da curva requer sua maior concentração, já que durante este movimento se define completamente a atitude do veículo durante toda a curva.

No caso 5 apenas a aceleração lateral é tratada, uma vez que o veículo se movimenta com velocidade constante, mostrando apenas o comportamento da dinâmica lateral dos veículos. Este caso foi utilizado para simular o modelo dinâmico não linear dentro de um malha de controle e comparar com o comportamento do modelo de massa pontual empregado para a solução do problema de otimização. Os resultados da simulação do modelo dinâmico ao tentar percorrer a trajetória ótima definida pelo modelo massa pontual, ambos “dirigidos” por uma malha de controle, possibilita entender as diferenças que existem nos comportamentos das diferentes representações. Utilizando os mesmos ajustes para a malha de controle, o modelo massa pontual consegue seguir a trajetória ótima, mas o modelo dinâmico, que é mais complexo e mais realista, não acompanha de forma tão adequada. Isto não indica uma deficiência do modelo dinâmico, mas provavelmente do ajuste dado à malha de controle, que não permite “controlar” a dinâmica do veículo. Nota-se que os ângulos de deriva

permanecem dentro da faixa válida dos  $15^\circ$ , e a aceleração lateral máxima fica próxima aos  $5g$ . O processo de otimização gera resultados aceitáveis, e o controle utilizado mostra a diferença entre os comportamentos dos modelos do veículo. A dinâmica veicular está muito bem representada pelo modelo desenvolvido no Capítulo 2.

O caso 6 utiliza a mesma pista do caso de velocidade constante, só que em uma situação geral na qual está se considerando tanto a dinâmica longitudinal quanto a dinâmica lateral. Os resultados obtidos, em termos de tempo de percurso, foram melhores do que no caso da velocidade constante, mostrando que ao se empregar as duas dinâmicas, o comportamento do veículo é caracterizado de forma mais adequada, e obtêm-se resultados mais favoráveis.

No caso 7 os resultados não são fáceis de prever, já que o problema é mais complexo do que nos anteriores, mas todos os resultados satisfazem os limites e as considerações impostas, como pode ser visto diretamente no Diagrama GG. Além disso os perfis de aceleração e velocidade são muito próximos àqueles obtidos da telemetria dos veículos de competição reais.

## 5 Conclusões

Para o estudo dos veículos de competição é necessário adotar um modelo dinâmico não linear representativo desse sistema, levando em conta suas características em função, principalmente, da variação da sua velocidade longitudinal, de modo a determinar a trajetória a ser percorrida e analisar as possíveis estratégias de controle a serem empregadas para a obtenção do menor tempo de percurso.

Um modelo para velocidades constantes foi apresentado, e foram tratados os principais tópicos relacionados ao problema com velocidades variáveis, entretanto não se chegou a concluir uma representação detalhada para os veículos de competição, incluindo tais características.

No desenvolvimento do modelo dinâmico procurou-se não simplificar, dentro do possível, o comportamento complexo dos veículos de competição, mas foram adotadas algumas hipóteses relevantes. Por exemplo, no que diz respeito à deformação lateral dos pneumáticos, foi considerado que os ângulos de deriva são relativamente pequenos, indicando então que o modelo produz resultados confiáveis apenas nestas condições, e por isso, se recomenda trabalhar para ângulos de deriva menores a  $15^\circ$ . Entretanto, tal hipótese é aceitável para os veículos de competição, já que durante seu movimento tal variável é realmente pequena (menores a  $15^\circ$ ), por construção, e apenas em determinadas curvas, percorridas com velocidade elevada, os pneus ultrapassam o limite imposto.

O procedimento da resolução do problema de otimização é a principal inovação apresentada nesta dissertação. O objetivo inicial deste trabalho de desenvolver uma metodologia para determinação da trajetória ótima, utilizando as ferramentas de otimização encontradas no *Matlab*, foi alcançado satisfatoriamente. Para tanto foi preciso empregar um modelo veicular muito simplificado, considerando apenas uma massa pontual, de modo a possibilitar o tratamento através de metodologias clássicas de otimização, sem a necessidade de adotar técnicas de controle ótimo. Entretanto as principais características físicas

dos veículos de competição, influenciadas pelas acelerações longitudinal e lateral, estão representadas nesse modelo. Foram considerados comportamentos para essas variáveis a partir dados reais obtidos pela telemetria, aproximando tais acelerações por funções com perfil que as reproduzem, dentro de uma faixa de erro aceitável.

Os resultados obtidos nos diversos casos tratados mostram a validade do tratamento do problema através de técnicas de otimização, dando uma perspectiva positiva no que diz respeito à retomada deste tema em futuros trabalhos. Ainda há muito que fazer, entretanto a base para novas investigações nesta área está apresentada e comprovada.

O emprego de um modelo dinâmico mais detalhado para obtenção da trajetória ótima foi a maior dificuldade encontrada neste trabalho. A solução dada através da adoção do modelo massa pontual foi bastante criativa e oportuna, merecendo ser mais explorada e melhorada, incluindo determinados efeitos (dinâmicos) encontrados no real comportamento dos veículos de competição, sem entretanto aumentar demasiadamente a complexidade da representação. O modelo dinâmico não linear deve continuar sendo empregado como elemento de comparação, mas o problema de otimização pode ser perfeitamente resolvido com base em representações mais simples.

De forma geral, os resultados encontrados foram bastante satisfatório, e pode-se afirmar que os objetivos iniciais da dissertação foram cumpridos. Mostrou-se que a dinâmica veicular e a otimização podem ser tratadas em conjunto visando obter resultados que permitam estabelecer como melhorar o desempenho de veículos de competição em diferentes situações e condições de dirigibilidade.

## 5.1 Recomendações

Um próximo passo imediato no tratamento do problema de otimização é a utilização de um modelo simplificado do veículo, que mantenha as características únicas do modelo massa pontual adotado, no que diz respeito à simplicidade, mas que inclua os efeitos das velocidades angular de *yaw* e lateral, associada ao deslocamento lateral (*side slip*), de modo a torná-lo mais próximo da realidade, mas sem aumentar sua complexidade.

Para futuros trabalhos, sugere-se entretanto que o modelo detalhado do veículo continue a ser desenvolvido, acrescentando sua aceleração e desaceleração como consequência das forças de tração e de frenagem, como discutido no final do Capítulo 2. A representação da dinâmica longitudinal deve ser mais elaborada, incluindo, além dessas forças, componentes como a caixa de mudança das marchas, entre outros, considerando também a deriva longitudinal dos pneus, expressando mais detalhadamente o comportamento dos pneus.

Um outro item a melhorar é a implementação do problema de otimização da trajetória aqui apresentada. Deve-se organizar o procedimento visando simplificar a entrada dos dados e a apresentação dos resultados. Um outro desafio é possibilitar a geração de casos genéricos, criando um “procedimento automático” para a definição de qualquer tipo de curva, ou pista, obtendo as soluções da otimização de forma simples e direta.

Um item que não foi explorado nesta dissertação é o relativo ao controle do modelo dinâmico. A abordagem deste tema ajudará muito na simulação do veículo dentro da pista, ou traçado pré-determinado, possibilitando estabelecer as manobras que o motorista deve fazer para seguir a trajetória ótima.

Nesta dissertação, para o caso geral tratado, considera-se a aplicação da aceleração lateral com algum nível de aceleração longitudinal. Em trabalhos futuros seria interessante analisar a aplicação destas variáveis de forma independente, isto é, o trecho de aceleração longitudinal seria independente daquele da aceleração lateral, podendo haver interceptação entre eles, mas naturalmente determinada pelo procedimento de otimização.

Para melhor representar os reais perfis de aceleração, poder-se-ia determinar, a partir dos dados de telemetria, expressões para curvas que

interpolassem tais variáveis, e empregá-las no procedimento de otimização desenvolvido. Também seria interessante comparar os resultados encontrados pelo tratamento dado nesta dissertação àqueles reais, obtidos do comportamento medido dos veículos de competição, de modo a verificar se a trajetória ótima está sendo seguida pelos pilotos, ou corretamente determinada pelo procedimento apresentado.

Finalmente, seria muito interessante obter parâmetros construtivos e físicos de um veículo de competição específico, e trabalhar com base nesses valores, sem aproximações ou médias, e com isto validar os resultados do modelo empregado e melhorar o desempenho do veículo em questão.

## 6

### Referências Bibliográficas

- 1 D. Casanova, R. S. Sharp and P. Symonds, Minimum Time Manoeuvring: The Significance of Yaw Inertia, *Vehicle System Dynamic*, vol. 34, pp. 77-115, 2000.
- 2 H. S. Radt, W. F. Milliken, *Non-dimensionalizing tyre data for vehicle simulation*, Milliken Research Associates, Inc, New York, USA, 1983.
- 3 Charles C. MacAdam, Application of an optimal preview control for simulation of closed loop automobile driving, *IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics*, vol. SMC-11, N° 6, June 1981.
- 4 H. Hatwal, E.C. Mikulcik, *Na optimal control approach to the path tracking problem for an automobile*, the University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada, 1986.
- 5 A. Y. Maalej, D. A. guenther and J.R. Ellis, Experimental development of tyre force and moment models, Ohio State University, Columbus, USA, of *Vehicle Design* vol. 10, N° 1, 1998.
- 6 Dirk E. Smith and John M. Starkey, Effects of model complexity on the performance of automated vehicle steering controllers: controller development and evaluation, *Vehicle System Dynamics*, N° 23, 1994.
- 7 Dirk E. Smith and John M. Starkey, Effects of model complexity on the performance of automated vehicle steering controllers: model development and evaluation, *Vehicle System Dynamics*, N° 24, 1995.
- 8 Anthony B. Will and Stanislaw H. Zak, Modelling and control of an automated vehicle, *Vehicle System Dynamics*, N° 27, 1997.
- 9 E. Velenis and P. Tsiotras, Minimum Time vs Maximum Exit Velocity Path Optimization During Cornering, Georgia Institute of Technology School of aerospace Engineering, Atlanta, GA, USA, 2004.
- 10 E. Velenis and P. Tsiotras, Optimal velocity profile generation for given acceleration limits; the half-car model case, Georgia Institute of Technology School of aerospace Engineering, Atlanta, GA, USA, 2004.
- 11 Speranza Neto, M.; Spinola, A. L., “Análise do comportamento dinâmico de um veículo em uma trajetória pré-definida através de um modelo cinemático em malha fechada”, XIV Congresso e Exposição Internacionais de Tecnologia da Mobilidade (SAE Brasil), Society of Automotive Engineers, São Paulo, SP, 2005.
- 12 Speranza Neto, M., Spinola, A. L., Hey, F., “Análise do Comportamento de um Veículo em uma Trajetória Fechada Pré-Definida Através de um Modelo Dinâmico Linear em uma Malha de Controle”, submetido ao XV Congresso e

- Exposição Internacionais de Tecnologia da Mobilidade (SAE Brasil), Society of Automotive Engineers, São Paulo, SP, 2006.
- 13 Spinola, A. L., “Modelagem e Controle Não Linear da Direção de um Veículo Terrestre” Dissertação de Mestrado, DEE/PUC-Rio, Rio de Janeiro, Dezembro de 2003.
  - 14 <http://servicios.hoy.es/datos/motor/michelin.html>
  - 15 <http://www.renaultf1.com/en/car/chassis/>
  - 16 Georg Rill, Vehicle Dynamics, university of applied sciences, October 2004.
  - 17 Joseph Kart, Aerodynamics of Race Cars, Department of Aerospace Engineering, San Diego State University, San Diego, 2006
  - 18 Blanco, Ruy, Dinâmica dos veículos sobre rodas, curso automotivo para engenheiros, APAD & fundação CEFETBAHIA.
  - 19 Jóvaj, M. S., Motores de Automovil, Editorial MIR Moscú, 1982.
  - 20 William F. Milliken and Douglas L. Milliken, Race car vehicle dynamics, SAE international, USA 1995.
  - 21 Ramanata Peeronon, Optimal Vehicle Path Generator using Optimization Methods, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg - Virginia, April 1998
  - 22 L. Valadares Tavares, F. Nunes Correia, Otimização linear e não linear, 2º edição, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa 1999.
  - 23 Antonio Galvão Novaes, Métodos de Otimização aplicados aos transportes, editoria Edgard Blücher Ltda., Brazil 1978.
  - 24 <http://www.gta.ufrj.br/~marcio/genetic.html>
  - 25 The MathWorks, Otimization Toolbox for user with Matlab, version 3, 2005.

## Apêndice

**Apêndice A.-** Tratamento no programa *Matlab/Simulink* para a obtenção dos resultados do modelo dinâmico não linear.

Existem muitas variáveis que podem ser obtidas como resultado da simulação deste modelo, e para facilitar a observação, os gráficos são separados em grupos. A Tabela A.1 a seguir indica os comandos a serem executados para obtenção de gráficos com os resultados depois da simulação.

Tabela A.1. Comandos do programa Matlab para visualizar todos os resultados do modelo dinâmico não linear do veículo.

Comando	Descrição
plotEnt	Mostrará a função entrada da volante (no tempo), e os ângulos de esterçamento das rodas dianteiras.
plotDeriva	Mostrará os ângulos de Deriva.
plotFlat	Mostrará as forças laterais em cada pneu.
plotFnormal	Mostrará as forças normais em cada pneu.
plotAerodinamica	Mostrará as forças aerodinâmicas, longitudinal e vertical.
plotFxyz	Mostrará as forças no plano $xy$ , a forças total no eixo $x$ e no eixo $y$ , o momento total no eixo $z$ .
plotAcelera	Mostrará as acelerações em cada eixo do referencial local do veículo.
plotVelocidade	Mostrará as velocidades, tanto velocidades angulares quanto velocidade longitudinal e lateral.
plotSaida	Mostrará os resultados finais do modelo, os três ângulos de rotação <i>yaw</i> , <i>roll</i> e <i>pitch</i> , e as duas posições $x$ e $y$ no tempo, e também mostrará o deslocamento espacial do veículo.
plotTodo	Mostrará todos os resultados dos comandos anteriores.

**Apêndice B.-** Obtenção da trajetória ótima no Toolbox de Matlab.

Descreve-se a seguir o emprego da ferramenta computacional adotada para a solução do problema de otimização descrito no Capítulo 3. O programa *Matlab* possui rotinas pré-programadas para otimizar funções com restrições. Este pacote de otimização tem diversos algoritmos apropriados para diferentes casos. Apresenta-se aqui apenas aqueles de interesse do problema a seguir resolvido.

A rotina empregada para minimizar uma função escalar de muitas variáveis com restrições não lineares [26] é a “*fmincon*”. Para iniciar a procura do resultado

ótimo esta *function* precisa de uma estimativa inicial que deve ser estimada pelo usuário. A “*fmincon*” utiliza um método de programação não linear, que não será aqui tratado. A função objetivo adotada pode ser de muitas variáveis, representada por um vetor, mas que gera um escalar como resposta. As restrições podem ser lineares ou não lineares. A escolha recaiu sobre esta *function* pois o problema de trajetória ótima é tipicamente não linear, tanto no que diz respeito a função objetivo quanto às restrições.

Para utilizar a *function* “*fmincon*” deve-se definir uma outra *function* em *Matlab* que contém a função objetivo: “*myfun.m*”; assim com uma que contém as restrições do problema de otimização: “*confuneq.m*”. As restrições são divididas em dois tipos: restrições de igualdade, representada através de uma matriz  $C_{eq}(A)$  onde  $A$  é o vetor que tem por componentes todas as variáveis de otimização; e as restrições de desigualdade, representada por uma matriz  $C(A)$ . Para tratar do problema de otimização considerado, criou-se um programa *Matlab* dedicado “*Otimizar.m*”, no qual define-se a função objetivo e também as restrições utilizadas na rotina “*fmincon*”, e determina-se a trajetória ótima considerando o tempo mínimo.

Neste item explica-se o procedimento para a obtenção da trajetória ótima em um caso geral utilizando o programa *Matlab*. Os passos a seguir são:

1. A sintaxe com que o programa trabalha que tem a seguinte forma:

$$[x,fval] = \text{fmincon} (@\text{myfun},A0,[],[],[],[],[], @\text{confuneq})$$

onde *myfun* é uma função definida em *Matlab* que contém a função objetivo, *confuneq* é uma função definida em *Matlab* que contém as restrições, e  $A0$  é o vetor que contém os valores iniciais das variáveis de otimização. Esta *function* devolve o vetor  $X$  com os valores de todas as variáveis que são resultados do problema de otimização, e o valor da função objetivo *fval*.

2. A função objetivo deve ser definida em *myfun*. Neste caso se quer minimizar o *tempo*, que depende do tipo de movimento do veículo, conforme analisado anteriormente. Em aceleração ou desaceleração ou velocidade constante, estas funções estão definidas no Capítulo 3. Caso se tenha um problema mais complexo, no qual existem os três tipos de movimento, simplesmente se trabalha por trechos e se faz a soma dos tempos de cada trecho, ou seja,

$$T = T_{\text{aceleração}} + T_{\text{desaceleração}} + T_{\text{constante}}$$

Deve-se lembrar que, ao se passar de um trecho a outro, se iguala as condições finais as condições iniciais do outro.

3. Os valores iniciais que o programa precisa para fazer as iterações encontram-se na função *Otimizar*, definidos da seguinte forma

$$A0 = [A0_{(1)}, A0_{(2)}, A0_{(3)}, \dots ]$$

Lembra-se que na função *Otimizar* chama a *function* “*fmincon*”

4. As restrições são definidas em *confuneq*. O número de restrições depende da complexidade da função objetivo, assim como o número de valores iniciais, que estão associados ao tipo de movimento que se quer analisar. Em um caso geral, no qual estão presentes todos os tipos de movimentos antes mencionados, tem que se considerar também o tipo de pista que o veículo vai percorrer. Isto é, se o veículo faz uma curva simples ou uma curva dupla, ou simplesmente uma reta. Se o veículo faz alguma curva, deve-se levar em conta a aceleração lateral e os seus efeitos. Deve-se ter atenção para não ultrapassar o número máximo de restrições admitidas pelo programa.

Uma das restrições está relacionada com as acelerações, que são descritas por desigualdades matemáticas, como mostrado no Capítulo 3, de modo que a aceleração total fique sempre dentro do Círculo de Aderência. Estas desigualdades devem ser inseridas no programa na forma de um vetor, onde cada componente está associada a uma restrição, que por definição, devem sempre ser negativos. Assim tem-se

$$C = [C_{(1)}, C_{(2)}, C_{(3)}, \dots ]$$

e as restrições de aceleração ficam

$$C_{(i)} = \text{Aceleração Total} - \text{Aceleração Máxima}$$

onde a Aceleração Total é dada para todos os pontos do movimento, ou nos pontos críticos onde se tenha certeza que as acelerações totais sejam a maiores do movimento; e a Aceleração Máxima é aquela obtida do Circulo de Aderência. O número de restrições de desigualdade para a aceleração depende do tipo de movimento.

5. Outra restrição de desigualdade é dada pela velocidade do veículo. Pode-se considerara esta restrição para todos os pontos do movimento, ou para os pontos críticos nos quais se tenha certeza que neles existirão as maiores velocidades de todo o movimento. As relações relativas às velocidades e as restrições associadas forma mostradas no Capítulo 3, levando a

$$C_{(i)} = \text{Velocidade} - \text{Velocidade Máxima}$$

6. A restrição de maior complexidade é aquela que delimita a trajetória do veículo dentro dos limites da pista. Para definir tais limites existem duas funções matemáticas: uma para cada lado da pista, os chamados limite inferior e limite superior. Estas funções devem ser avaliadas no programa *Simulink*. Depois de se realizar a simulação da trajetória, são obtidos os dois vetores posição vertical (no eixo “Y” do referencial global), um para cada limite da pista, que dependem da posição horizontal (no eixo “X” do referencial global). Da mesma forma se obtém da simulação todos os pontos da trajetória percorrida pelo veículo (no eixo “Y”), as acelerações empregadas e velocidades alcançadas. Após este levantamento, tais vetores são comparados e se dividem em dois grupos de desigualdades, de acordo com as equações seguintes. Este mesmo procedimento é empregado para a determinação das restrições associadas ao traçado, levando a

$$C_{(i)} = \text{Trajetória} - \text{Limite Superior}$$

$$C_{(i)} = \text{Limite Inferior} - \text{Trajetória}$$

Estas desigualdades devem ser obtidas em cada ponto “i” da posição horizontal (eixo “X” no referencial global). Deve-se observar que o número de pontos empregados para descrever a trajetória depende da complexidade da

forma da pista. A discretização será feita para cada tipo de traçado em particular.

7. Uma restrição de igualdade é adotada para estabelecer que o ponto final da trajetória percorrida pelo veículo coincida com o ponto final da função objetivo. Este ponto final é obtido da simulação, e deve ser igual à distância total, estando associado ao valor final da função aceleração. Assim,

$$Ceq_{(i)} = \text{Dist. final Aceleração e Tempo} - \text{Dist. final da Trajetória}$$

No programa *Simulink* se define uma função **Stop** de parada, onde se especifica que quando o veículo chegar ao final da pista a simulação pára. Este ponto final da pista deve estar muito bem definido pela geometria da pista.

8. Outras restrições de igualdade são definidas para estabelecer a continuidade entre os diferentes tipos de movimento que existem em cada trecho da trajetória total do veículo. Os casos de movimento independentes uns dos outros são:

- Velocidade constante em linha reta.
- Velocidade constante em curva.
- Velocidade variável em linha reta, aceleração.
- Velocidade variável em linha reta, desaceleração.
- Velocidade variável em curva, entrada à curva.
- Velocidade variável em curva, saída da curva.

Para conectar estes movimentos é preciso igualar as condições iniciais de um com as condições finais do outro. O número de restrições de igualdade depende da quantidade de trechos e/ou dos tipos de movimentos diferentes a serem concatenados. Para um trecho  $n$  qualquer se tem

$$Ceq_{(i)} = \text{Condição inicial}_{(n+1)} - \text{Condição final}_{(n)}$$

Algumas condições iniciais e finais já são igualadas pela continuidade das funções ou mesmo pelo programa de simulação, mas pode ser preciso especificar, através de restrições de igualdade, por exemplo, os pontos de aplicação de um tipo de aceleração (final e inicial) dentro da distância percorrida total.

9. Apenas os pontos inicial e final da pista estão especificadas no problema (pela pista), os outros pontos da distância percorrida são variáveis resultantes do problema de otimização e seguem uma seqüência lógica crescente, isto é, não podem ser maiores que o ponto final, nem menores que o ponto inicial da pista. Quando o movimento está se desenvolvendo, os pontos associados à distância sempre estão crescendo, estando já conectados quando as condições iniciais e finais de cada trecho ou movimento foram igualadas. Não se pode permitir trechos “soltos”, pois todos estão conectados. Pode ser necessário, entretanto, dentro de um mesmo trecho, deixar pontos flutuantes, e o programa de otimização irá estabelecer o ponto ótimo de aplicação de uma determinada condição. Por exemplo, na entrada da curva, antes que o veículo inicie a aceleração lateral, ele já está desacelerando, e, portanto, o ponto de aplicação da aceleração lateral está flutuando dentro de uma faixa. Outro caso parecido acontece na saída da curva, e ainda outro ocorre na aceleração em linha reta, quando o veículo chega a sua velocidade máxima e se movimenta, a partir daí, com velocidade constante. Assim, deve-se especificar como uma restrição de desigualdade, as seguintes condições

$$C_{(i)} = \text{Inicio do trecho} - \text{Aplicação da condição}$$

$$C_{(i)} = \text{Aplicação da condição} - \text{Final do trecho}$$

10. A partir das restrições impostas, o programa pode obter os valores ótimos do problema, fornecendo como resposta o valor da função objetivo, o tempo mínimo, e os valores de todas as variáveis de otimização, as características de aceleração em cada trecho, ou seja

$$f_{\text{val}} = T = T_{\text{aceleração}} + T_{\text{desaceleração}} + T_{\text{constante}}$$

$$x = [A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)}, \dots ]$$

Os resultados obtidos pelo procedimento apresentado, em cada tipo de movimento, são mostrados no Capítulo 4 da dissertação, empregando o *Simulink* para reprodução do movimento através do modelo de massa pontual e do modelo dinâmico não linear do veículo, para fins de comparação.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)