

**Priscilla Oliveira de Almeida**

**Dinâmica de estruturas flexíveis  
unidimensionais**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Programa de Pós-graduação em  
Engenharia Mecânica

Rio de Janeiro  
Agosto de 2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
DO RIO DE JANEIRO



**Priscilla Oliveira de Almeida**

**Dinâmica de estruturas flexíveis  
unidimensionais**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC–Rio

Orientador: Prof. Rubens Sampaio

Rio de Janeiro  
Agosto de 2006



**Priscilla Oliveira de Almeida**

**Dinâmica de estruturas flexíveis  
unidimensionais**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Rubens Sampaio, Dr.-Ing.**

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

**Prof. Fernando Alves Rochinha**

Departamento de Engenharia Mecânica – UFRJ

**Prof. Lavinia Maria Sanabio Alves Borges**

Departamento de Engenharia Mecânica – UFRJ

**Prof. Marco Antonio Meggiolaro**

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 01 de Agosto de 2006

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Priscilla Oliveira de Almeida**

Graduou-se em Engenharia Mecânica e Produção Mecânica pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Atualmente, dedica-se ao curso de Doutorado em Engenharia Mecânica na PUC-Rio.

Ficha Catalográfica

Almeida, Priscilla Oliveira

Dinâmica de estruturas flexíveis unidimensionais / Priscilla Oliveira de Almeida; orientador: Rubens Sampaio . — Rio de Janeiro : PUC, Departamento de Engenharia Mecânica, 2006.

176 f. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Mecânica – Teses. 2. Sistemas Contínuos. 3. Formulação Fraca. 4. Discretização. 5. Método Elementos Finitos. I. Sampaio, Rubens. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD: 621

Aos meus pais, Nair e Carlos.

## Agradecimentos

Aos meus pais, Nair e Carlos Almeida, pela confiança, paciência e carinho fundamentais para a realização deste trabalho.

Ao professor Rubens, pelo estímulo e dedicação demonstrados por todo esse tempo.

Ao suporte financeiro da CAPES e CNPq.

Aos meus amigos, que muito me apoiaram.

## Resumo

Almeida, Priscilla Oliveira; Sampaio, Rubens. **Dinâmica de estruturas flexíveis unidimensionais**. Rio de Janeiro, 2006. 176p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Nesse trabalho, calcula-se a dinâmica de sistemas contínuos unidimensionais. Problemas de barras e vigas com diferentes condições de contorno e condições intermediárias são tratados no contexto da formulação fraca para que seja aplicado o *Método de Elementos Finitos*; e então seja possível calcular as aproximações das frequências naturais e dos modos de vibração do sistema. Uma vez conhecidos os modos (exata ou aproximadamente), constrói-se um modelo reduzido de equações diferenciais ordinárias e, então, calcula-se a dinâmica do sistema. Essa dissertação propõe um material didático a ser utilizado no curso de Vibrações, com o intuito de auxiliar os alunos de graduação no estudo de sistemas contínuos, através do desenvolvimento da formulação fraca e aplicação do MEF.

## Palavras-chave

sistemas contínuos; formulação fraca; discretização; método elementos finitos.



## Abstract

Almeida, Priscilla Oliveira; Sampaio, Rubens. **Dynamic of one-dimensional flexible structures**. Rio de Janeiro, 2006. 176p. MSc. Dissertation — Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this work, the dynamic of one-dimensional continuum systems is calculated. Problems of bars and beams with different boundary and intermediate conditions are treated in the context of weak formulation, so the *Finite Element Method (FEM)* can be applied; and it is possible to calculate the approximation of natural frequencies and vibration modes of the system. Once the modes are known (exactly or approximately), a reduced-model of ordinary differential equations is constructed and the dynamic of the system is calculated. This essay proposes a didactic material to be used at the Vibration course, with the purpose to help undergraduate students in the studies of continuum systems, through the development of the weak formulation and the application of the FEM.

## Keywords

continuum systems; weak formulation; discretization; finite elements method

## Conteúdo

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Objetivo do Trabalho	17
1.2	Organização do Trabalho	19
2	MODELAGEM DE PROBLEMAS DE BARRAS	21
2.1	Dinâmica de Barras	21
2.2	Problema Modelo: resolução por separação de variáveis	24
3	FORMULAÇÃO FRACA	32
3.1	Vantagens da Formulação Fraca	33
3.2	Formulação Fraca e Método Variacional de Aproximação	34
3.3	Formulação Fraca: problemas de barras	38
3.4	Problema de uma Barra Fixa-Livre	48
3.5	Problema de Barra Fixa-Massa	51
4	MODELAGEM DE PROBLEMAS DE VIGAS	55
4.1	Dinâmica de Vigas	55
4.2	Problema Modelo: resolução por separação de variáveis	57
5	FORMULAÇÃO FRACA PARA PROBLEMAS DE VIGAS	62
5.1	Problema de uma Viga Livre-Livre	62
5.2	Problema de uma Viga Engastada-Livre	67
5.3	Problema de uma Viga Engastada-Mola	69
6	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS - MEF	75
6.1	Aproximação do domínio	81
6.2	Aproximação da solução no domínio aproximado	81
6.3	Escolha do número de elementos iniciais (N)	92
6.4	Análise do erro	92
7	APLICAÇÃO DO MEF PROBLEMAS DE BARRAS E VIGAS	94
7.1	Problema de uma barra fixa-livre	94
7.2	Viga engastada com massa concentrada na extremidade	99
7.3	Viga engastada com mola vertical na extremidade livre	103
8	VIGAS COM CONDIÇÕES INTERMEDIÁRIAS	107
8.1	Problemas de vigas com um apoio intermediário	107
8.2	Problema de viga engastada-livre com dois apoios intermediários	114
8.3	Viga bi-engastada com uma mola vertical em coordenada intermediária	116
8.4	Viga bi-apoiada com massa concentrada em coordenada intermediária	118
8.5	Problema de viga apoiada-livre com uma mola torcional	120
8.6	Aproximação da dinâmica de um problema de viga com apoio intermediário	121

9 CONCLUSÃO	127
Bibliografia	128
A MANUAL DE PROGRAMAS DO MATLAB	130
A.1 Simulações de problemas de barras	133
A.2 Simulações de Vigas	148

## Lista de Figuras

1.1	Fluxograma representativo do MEF	16
1.2	Principais aspectos da MSA e do MEF	17
1.3	Processo de solução	19
2.1	Barra fixa-livre	21
2.2	Seção $[x_1x_2]$ do domínio	21
2.3	Condições de contorno e configurações associadas a cada tipo de barra	23
2.4	Barra livre-livre	24
3.1	Solução de problemas para diferentes formulações	34
3.2	Barra fixa-livre com área variável	38
3.3	Barra fixa-livre	48
3.4	Barra fixa com acoplamento elástico	49
3.5	Barra fixa-massa	51
3.6	Formulação Fraca de diferentes problemas de barras	54
4.1	Viga bi-engastada	55
4.2	Forças cortantes e momentos, em uma seção da viga	56
5.1	Problemas de vigas e suas configurações	62
5.2	Viga livre-livre	62
5.3	Viga engastada-livre	67
5.4	Viga engastada-mola	69
5.5	Viga engastada-massa	71
5.6	Formulação Fraca de diferentes problemas de Vigas	74
6.1	Procedimento completo do Método de Elementos Finitos [1]	77
6.2	Círculo de raio $R$	78
6.3	Círculo discretizado em 4 e 5 triângulos	79
6.4	Círculo discretizado em 6 e 7 triângulos	79
6.5	Círculo discretizado em 8 e 9 triângulos	79
6.6	Elemento típico de dois nós	81
6.7	Graus de liberdade relacionados ao elemento	82
6.8	Funções de interpolação local e global de um elementos linear	84
6.9	Elemento típico de três nós	85
6.10	Graus de liberdade associados ao elemento de três nós	85
6.11	Funções de interpolação locais e globais do elemento quadrático	87
6.12	Elemento típico de quatro nós	88
6.13	Graus de liberdade associados a um elemento de quatro nós	88
6.14	Funções de interpolação de um elemento de quatro nós	89
6.15	Graus de liberdade associados a um elemento de Hermite	90
6.16	Funções de interpolação de um elemento de Hermite	90
7.1	Barra fixa-livre dividida em elementos	94

7.2	Viga engastada-massa dividida em elementos	99
7.3	Viga engastada-mola dividida em elementos	104
8.1	Viga bi-engastada com apoio intermediário	109
8.2	Viga engastada-apoiada com apoio intermediário	110
8.3	Viga bi-apoiada com apoio intermediário	111
8.4	Viga apoiada-livre com apoio intermediário	112
8.5	Viga livre-livre com apoio intermediário	113
8.6	Viga engastada-livre com dois apoios intermediários	114
8.7	Viga bi-engastada com mola vertical em $x = a$	116
8.8	Viga bi-apoiada com massa concentrada em $x = a$	118
8.9	Viga apoiada-livre com uma mola torcional na extremidade do apoio	120
8.10	Viga engastada-apoiada-engastada com força aplicada	121
8.11	Modos de Vibração de uma viga bi-engastada com apoio intermediário	124
8.12	Dinâmica aproximada no ponto $x = x_0$	125
8.13	Procedimento adotado para aproximar dinâmica de sistemas contínuos	126
A.1	Barra fixa-livre discretizada em 10 elementos	134
A.2	Modos de vibração do problema de barra fixa-livre (10 elem)	137
A.3	Modos de vibração do problema de barra fixa-livre (30 elem - aprox. linear)	138
A.4	Barra fixa-livre	139
A.5	Modos de vibração do problema de barra fixa-livre (solução analítica)	139
A.6	Modos de vibração do problema de barra fixa-livre (30 elem - aprox. quadrática)	140
A.7	Barra fixa-fixa	141
A.8	Modos de vibração do problema de barra fixa-fixa (solução analítica)	141
A.9	Modos de vibração do problema de barra fixa-fixa (30 elem - aprox. linear)	142
A.10	Barra fixa-livre com duas áreas	143
A.11	Modos de vibração do problema de barra fixa-livre com duas áreas (30 elem)	143
A.12	Barra fixa-livre com dois materiais	144
A.13	Modos de vibração do problema de barra fixa-livre com dois materiais (30 elem)	144
A.14	Barra fixa-massa	145
A.15	Modos de vibração do problema de barra fixa-massa (30 elem)	145
A.16	Barra fixa-mola	146
A.17	Modos de vibração do problema de barra fixa-mola (30 elem)	146
A.18	Barra livre-livre	147
A.19	Modos de vibração do problema de barra livre-livre (solução analítica)	147
A.20	Viga bi-engastada discretizada em 10 elementos	148
A.21	Modos de vibração do problema de viga bi-engastada (10 elem)	152

A.22 Modos de vibração do problema de viga bi-engastada (30 elem)	153
A.23 Modos de vibração do problema de viga bi-engastada (solução analítica)	154
A.24 Viga engastada-livre	155
A.25 Modos de vibração do problema de viga engastada-livre (solução analítica)	155
A.26 Modos de vibração do problema de viga engastada-livre (30 elem)	156
A.27 Viga engastada-mola	157
A.28 Modos de vibração do problema de viga engastada-mola (30 elem)	157
A.29 Viga engastada-massa	158
A.30 Modos de vibração do problema de viga engastada-massa (30 elem)	158
A.31 Viga bi-apoiada	159
A.32 Modos de vibração do problema de viga bi-apoiada (solução analítica)	159
A.33 Modos de vibração do problema de viga bi-apoiada (30 elem)	160
A.34 Viga livre-apoiada	161
A.35 Modos de vibração do problema de viga livre-apoiada (solução analítica)	161
A.36 Modos de vibração do problema de viga livre-apoiada (30 elem)	162
A.37 Viga livre-livre	163
A.38 Modos de vibração do problema de viga livre-livre (solução analítica)	163
A.39 Modos de vibração do problema de viga livre-livre (30 elem)	164
A.40 Viga bi-apoiada com apoio intermediário	165
A.41 Tabela de frequências naturais de viga bi-apoiada com apoio intermediário (Blevins)	165
A.42 Modos de vibração do problema de viga bi-apoiada com apoio intermediário (30 elem)	166
A.43 Viga apoiada-livre com apoio intermediário	167
A.44 Modos de vibração do problema de viga apoiada-livre com apoio intermediário (30 elem)	167
A.45 Viga engastada-apoiada com apoio intermediário	168
A.46 Modos de vibração do problema de viga engastada-apoiada com apoio intermediário (30 elem)	168
A.47 Viga bi-engastada com apoio intermediário	169
A.48 Tabela de frequências naturais de viga bi-engastada com apoio intermediário (Blevins)	169
A.49 Modos de vibração do problema de viga bi-engastada com apoio intermediário (30 elem)	170
A.50 Viga engastada-livre com apoio intermediário	171
A.51 Tabela de frequências naturais de viga engastada-livre com apoios intermediários (Blevins)	171
A.52 Modos de vibração do problema de viga engastada-livre com apoio intermediário (30 elem)	172
A.53 Viga livre-livre com apoio intermediário	173
A.54 Modos de vibração do problema de viga livre-livre com apoio intermediário (30 elem)	173

A.55 Viga bi engastada com mola intermediária	174
A.56 Modos de vibração do problema de viga bi-engastada com mola intermediária (30 elem)	174
A.57 Viga bi-apoiada com massa intermediária	175
A.58 Modos de vibração do problema de viga bi-engastada com massa intermediária (30 elem)	175

## Lista de Tabelas

6.1	Comparação entre aproximações e solução	80
A.1	Graus de liberdade associados a cada elemento de barra ( <i>Edof</i> )	134
A.2	Coordenadas de cada nó de um problema de barra ( <i>Coord</i> )	135
A.3	Graus de liberdade associados a cada nó ( <i>Dof</i> )	135
A.4	Graus de liberdade associados a cada elemento de viga ( <i>Edof</i> )	148
A.5	Coordenadas de cada nó de um problema de viga ( <i>Coord</i> )	149
A.6	Graus de liberdade associados a cada nó ( <i>Dof</i> )	149



## Lista de símbolos

$\sin$	Seno.
$\cos$	Cosseno.
$L$	Comprimento.
$x$	Posição.
$u$	Deslocamento axial para barras.
$A$	Área da seção reta.
$t$	Tempo.
$f$	Força externa.
$P$	Força interna.
$E$	Módulo de elasticidade.
$\varepsilon$	Deformação.
$\partial$	Derivada parcial.
$k_e$	Rigidez de mola na extremidade.
$m_e$	Massa concentrada na extremidade.
$\omega$	Frequência natural de uma barra.
$I$	Inércia.
$\rho$	Densidade.
$\phi$	Modo de vibração.
$u^N$	Aproximação da solução.
$\varepsilon^N$	Erro de aproximação da solução.
$N$	N úmero de modos.
$a$	Coordenada de condição intermediária.
$\psi$	Função-teste.
$I$	Inércia.
$\tilde{E}$	Espaço da solução.
$E$	Espaço das funções-teste.
$Adm$	Espaço das funções admissíveis.
$Adm^N$	Sub-espaço de $Adm$ .
$u_0$	Posição inicial.
$v_0$	Velocidade inicial.
$\mathcal{K}$	Operador de rigidez.
$\mathcal{M}$	Operador de massa.
$\mathcal{F}$	Operador de carregamento.
$F$	Vetor de carregamento.
$m$	Massa.
$k$	Rigidez da mola.
$V$	Esforço cortante.
$M$	Momento fletor.
$u$	Deslocamento transversal para vigas.
$\lambda$	Frequência natural de uma viga.
$\phi_j$	Função de interpolação.
$p$	Precisão desejada.
$e$	Erro.

# 1

## INTRODUÇÃO

O Método de Elementos Finitos (MEF) pode ser definido como uma ferramenta numérica para obtenção da aproximação de um problema [14]; e consiste na discretização de um meio contínuo, dividindo-o em elementos. Esses elementos são descritos por equações diferenciais e resolvidos por modelos matemáticos para que sejam obtidos os resultados desejados [3].

O desenvolvimento do MEF originou-se no final do século XVIII, quando Gauss propôs a utilização de funções de aproximação para a solução de problemas matemáticos. Durante mais de um século, diversos matemáticos desenvolveram teorias e técnicas analíticas para a solução de problemas, entretanto, pouco se evoluiu devido à dificuldade no processamento de equações algébricas. O desenvolvimento prático desta análise ocorreu mais tarde, em consequência dos avanços tecnológicos, por volta de 1950. Isto permitiu a elaboração e a resolução de sistemas de equações complexas [5]. Em 1960, Turner, Clough, Martins e Topp, propuseram um método de análise estrutural, o MEF, e descreveram-no.

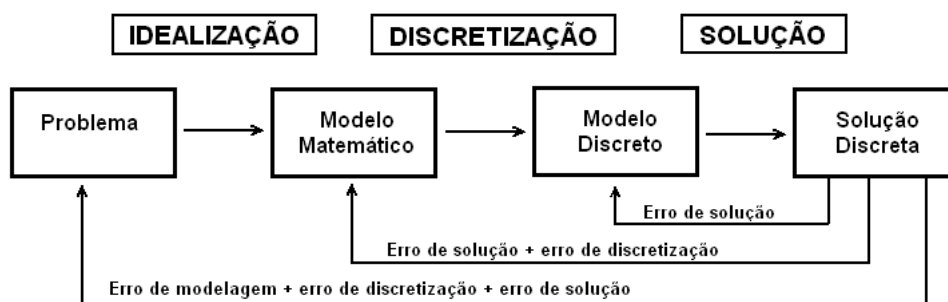


Figura 1.1: Fluxograma representativo do MEF

O fluxograma de (1.1) representa, esquematicamente, o funcionamento de um modelo baseado em simulações. Historicamente, os métodos matriciais para análise estrutural (Matrix Structural Analysis - MSA), que eram utilizados antes de 1950, antecedem o MEF.

A MSA e o MEF são baseados em três aspectos principais:

- Modelagem matemática;
- Formulação matricial de equações discretas lineares;
- Ferramentas computacionais.

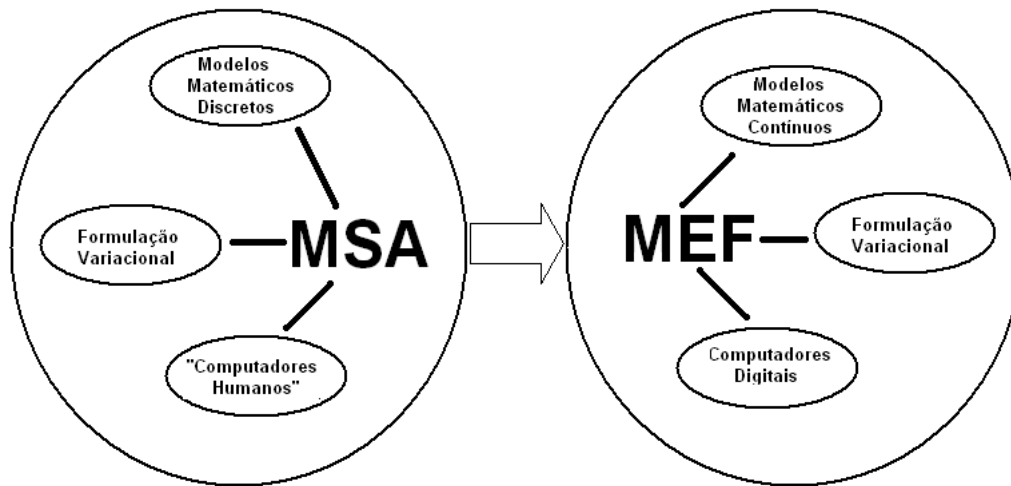


Figura 1.2: Principais aspectos da MSA e do MEF

A partir da década de 70, o MEF passou a ser aplicado também em problemas de mecânica dos fluidos.

## 1.1

### Objetivo do Trabalho

Em geral, a dinâmica de uma estrutura é descrita por um sistema de equações diferenciais parciais em conjunto com condições de contorno, condições intermediárias e condições iniciais. Uma vez conhecidas as frequências naturais e os modos normais de vibração do sistema (exatamente ou aproximadamente), pode-se controlar sua dinâmica. O MEF pode ser utilizado para aproximar, numericamente, as frequências e os modos da estrutura; e, para isso, uma formulação fraca do problema é preferível.

Este trabalho tem por objetivo formar um material didático que será destinado aos alunos de graduação, introduzindo conceitos básicos sobre o estudo de sistemas contínuos e sua discretização pelo método de elementos finitos. Pretende-se explicar o que é esse método de aproximação, como

funciona e qual deve ser o procedimento para calcular aproximações de sistemas contínuos.

Uma idéia é não usar pacotes de programação, mas sim desenvolver programas usando o Matlab e estimular alunos de graduação a programarem. Além disso, deseja-se incentivar os alunos a se preocuparem com noções de aproximação, erro de aproximação e convergência.

Deseja-se construir aproximações para a dinâmica de problemas formados por estruturas simples unidimensionais (barras ou combinação de barras, vigas ou combinação de vigas). Isso será feito nas seguintes etapas:

- Modelagem do problema na Formulação Fraca: parte-se da formulação forte do problema, porém a modelagem pode ser feita diretamente usando o princípio de Hamilton;
- Construção de uma base de aproximação: de forma a representar a solução como  $u^N(x, t) = \sum_1^N a_i(t)\phi_i(x)$

Caso os modos de vibração do problema em estudo não sejam conhecidos, o que acontece na maioria dos casos, constrói-se uma aproximação para eles, através do Método de Elementos Finitos (resolvendo o problema de valor característico associado); e, em seguida, constrói-se um modelo reduzido com a aproximação dos modos. A maior dificuldade concentra-se na construção da aproximação, que deve satisfazer um critério de erro pré-fixado (por exemplo, construir os modos com um critério de erro controlável).

Com a aproximação  $u(x, t) = \sum a_i(t)\phi_i(x)$ , deseja-se aproximar a dinâmica do problema; e isso pode ser dividido em dois problemas:

1. Achar uma base de aproximação (aproximar  $\phi_i$ );
2. Aproximar a dinâmica do sistema (aproximar  $a_i$ ).

O processo de solução pode ser visualizado pela figura (1.3) e será exemplificado no decorrer do trabalho.:

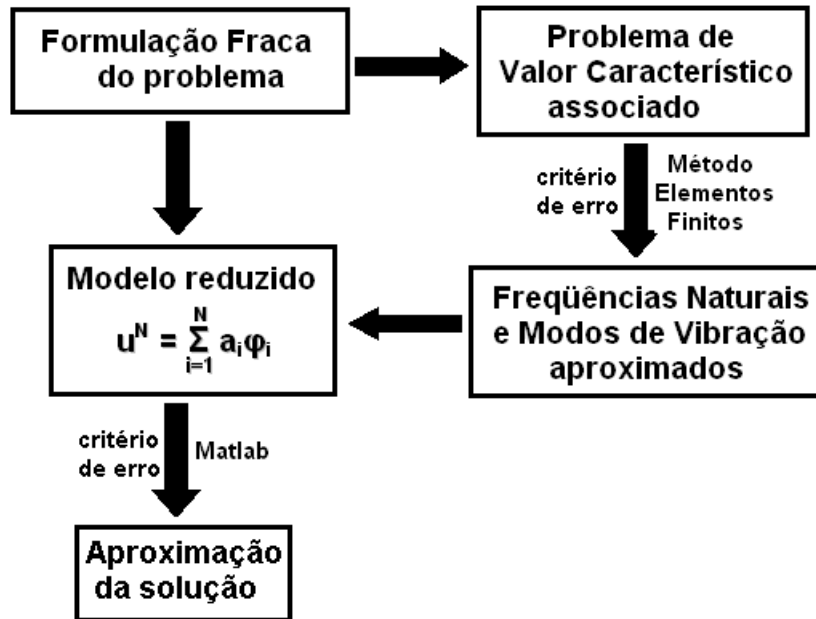


Figura 1.3: Processo de solução

## 1.2 Organização do Trabalho

No capítulo 2 será apresentada a modelagem de um problema de barra, de forma que será desenvolvida a equação representativa da dinâmica de movimento desse sistema e, em seguida, será calculada a solução analítica de um problema específico (barra livre-livre), apresentando as frequências naturais e os modos de vibração correspondentes.

O capítulo 3 apresentará todo o procedimento necessário para calcular a formulação fraca de um sistema contínuo, mostrando as considerações necessárias, as vantagens desta técnica e as características do método variacional adotado. Em seguida, será desenvolvida a formulação fraca de um problema de barra, considerando diferentes condições de contorno.

Os assuntos abordados para problemas de barras, nos capítulos 2 e 3, serão apresentados para problemas de vigas nos capítulos 4 e 5, respectivamente. No capítulo 4, será modelado um problema de viga para calcular a dinâmica de movimento do sistema e será desenvolvida a solução analítica de um problema de viga bi-engastada; enquanto, no capítulo 5, será desenvolvida a formulação fraca de diferentes problemas de vigas, com diferentes condições de contorno.

O capítulo 6 introduzirá conceitos básicos do Método de Elementos Finitos, mostrando o funcionamento do método e todas as etapas necessárias

para a sua aplicação. Serão apresentados diferentes tipos de elementos, que definem o tipo de aproximação; além da construção de equações elementares que, acopladas, formam as equações globais do sistema.

O capítulo 7 mostrará a aplicação do MEF a problemas específicos de barras e vigas. Nele serão apresentadas as matrizes de massa e rigidez elementares bem como as matrizes globais correspondentes.

Já no capítulo 8, serão apresentados problemas de estruturas que apresentam condições intermediárias, sejam apoios, molas ou massas concentradas. Para esses problemas, serão desenvolvidas as formulações fracas correspondentes e serão aproximadas as frequências naturais, os modos de vibração e a dinâmica do sistema.

Em anexo, será apresentado um Manual dos Programas desenvolvidos no Matlab, mostrando todos os passos necessários. Esses programas aproximam frequências naturais e modos de vibração de diversos problemas, através do método de Elementos Finitos; e depois aproximam a dinâmica do sistema.

## 2

### MODELAGEM DE PROBLEMAS DE BARRAS

A barra é uma estrutura mecânica que, num dado instante, pode ser descrita por um único parâmetro, o deslocamento longitudinal; portanto é um objeto unidimensional [17]. Este capítulo apresentará a dinâmica de movimento e a solução de problemas envolvendo barras.

#### 2.1

##### Dinâmica de Barras

Considere um corpo unidimensional, representado pelo intervalo  $[0,L]$ , com densidade  $\rho$ , área de seção transversal  $A$  e módulo de elasticidade  $E$ . Seja  $u(x,t)$  a posição do ponto  $x$  no instante  $t$  e  $f(x,t)$  a força externa ao sistema.  $u(\bullet,t)$  é a configuração do corpo no instante  $t$  e  $u(x,\bullet)$  é a trajetória do ponto  $x$ . Um exemplo de barra (fixa em uma extremidade e livre na outra) está apresentado na figura (2.1):

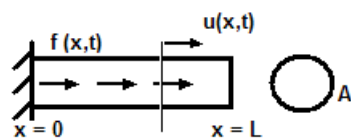


Figura 2.1: Barra fixa-livre

Tomando uma parte finita do domínio  $[\overline{x_1x_2}]$  e adotando as leis de conservação de quantidade de movimento [15], deseja-se calcular a dinâmica do corpo:

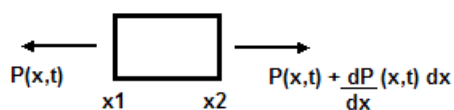


Figura 2.2: Seção  $[\overline{x_1x_2}]$  do domínio

A seção  $[\overline{x_1x_2}]$  está submetida a forças internas  $P(x, t)$  que dependem da deformação local:

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{u(x_2, t) - u(x_1, t)}{x_2 - x_1} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_1} \quad (2-1)$$

Dessa forma, pode-se escrever a dinâmica em  $[\overline{x_1x_2}]$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) A(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx = P(x_2, t) - P(x_1, t) + \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx \quad (2-2)$$

Define-se  $\Delta x = x_2 - x_1$  e, se  $x_2 \rightarrow x_1$ , então  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Usando a equação constitutiva que relaciona  $P(x, t)$  com a deformação  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ , e caracteriza materiais elásticos, lineares (lei de Hooke), definida por:

$$\frac{P(x, t)}{A(x)} = E(x) \varepsilon(x, t) = E(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad (2-3)$$

$$P(x, t) = E(x) A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$$

$E(x)$  é o módulo de elasticidade do material, no ponto  $x$ ; e  $\varepsilon(x, t)$  é a deformação.

Aproxima-se a integral  $\int_a^b g(x) dx \sim g(a)(b - a)$ , e substitui-se a equação (2-3) em (2-2):

$$\rho(x_1) A(x_1) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Bigg|_{x_1}^{x_2} \Delta x = E(x_2) A(x_2) \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t) - E(x_1) A(x_1) \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) + f(x_1) \Delta x \quad (2-4)$$

Divide-se toda a equação (2-4) por  $\Delta x$  e faz-se  $\lim(\Delta x \rightarrow 0)$

$$\rho(x) A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} (E(x) A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)) = f(x, t) \quad (2-5)$$

Considerando constantes a seção transversal da barra e as propriedades do material, a equação (2-5) reduz-se a:



$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) \quad (2-6)$$

Para  $f = 0$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2-7)$$

A equação (2-5) fornece parte da informação sobre a dinâmica do corpo, porque faltam as informações referentes às extremidades 0 e  $L$ , que são denominadas condições de contorno. São necessárias, também, as condições iniciais, que informam a posição e a velocidade de todos os pontos; ou seja, as condições da dinâmica no início do processo.

A equação (2-5), juntamente com as condições de contorno e as condições iniciais constituem um problema que pode-se mostrar ter solução única. Alguns exemplos de problemas de barras com diferentes condições de contorno [8], estão apresentados na figura (2.3):


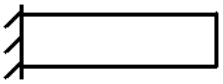
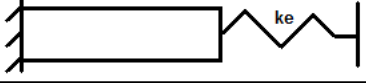
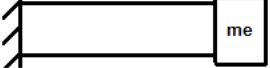
TIPO DE BARRA	CONFIGURAÇÃO	Cond. Contorno $x = 0$	Cond. Contorno $x = L$
Barra Livre-Livre		$EA \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$	$EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$
Barra Fixa-Livre		$u(0, t) = 0$	$EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$
Barra Fixa-Mola		$u(0, t) = 0$	$EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -k_e u(L, t)$
Barra Fixa-Massa		$u(0, t) = 0$	$EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = m_e \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial t^2}$

Figura 2.3: Condições de contorno e configurações associadas a cada tipo de barra

Definição das condições de contorno:

- Extremidade fixa:  $u(x, t) = 0$ ;
- Extremidade livre:  $P(x, t) = EA \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0$ ;

- Extremidade com mola ( $k_e$ ):  $P(x, t) = EA \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -k_e u(x, t)$ ;
- Extremidade com massa ( $m_e$ ):  $P(x, t) = EA \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = m_e \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$ .

## 2.2

### Problema Modelo: resolução por separação de variáveis

Escolheu-se o problema de uma barra livre-livre como modelo a ser apresentado. Como esse problema tem configuração muito simples, a solução de frequências naturais e modos de vibração correspondentes encontram-se na literatura. O cálculo da solução analítica do problema pode dividido em três etapas, que serão explicadas a seguir.

Através desse problema-modelo (problema de barra livre-livre), deseja-se introduzir os conceitos de frequência natural e modo de vibração; além de mostrar que a aproximação da forma  $\sum_1^N a_i(t)\phi_i(x)$  é realista [8].

Considere uma barra homogênea (mesmo material) e uniforme (mesma geometria); de comprimento  $L$ , livre nas duas extremidades e com força externa nula,  $f = 0$ .

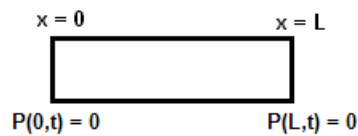


Figura 2.4: Barra livre-livre

Conforme foi apresentado na figura (2.3), quando a extremidade da barra é livre,  $P(x, t) = 0$ . Com isso, pode-se especificar o problema da barra livre-livre através da equação de movimento, das condições de contorno e das condições iniciais; que são, respectivamente:

$$\text{Problema}(P) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad \therefore \quad c^2 = \frac{E}{\rho}, \quad em (0, L) \\ EA \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \quad \quad EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \quad \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \end{array} \right. \quad (2-8)$$

Para cada ponto no intervalo  $[0, L]$ , tem-se uma condição: nos pontos internos  $(0, L)$  a condição é prescrita por uma equação diferencial parcial e nos extremos,  $(x = 0$  e  $x = L)$ , a condição de a barra estar "livre", faz com que a força exercida seja nula. As condições iniciais do problema informam a posição e a velocidade de cada ponto, no início do processo.

Deseja-se encontrar a solução  $u$  da equação diferencial da barra, que satisfaça as condições de contorno e as condições iniciais (2-8). Para isso, devem ser realizadas três etapas [8]: Aplicação do *Método de Separação de Variáveis*, a partir do qual serão obtidas duas Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Uma vez determinadas as *Soluções das duas EDOs*, que satisfaçam as condições de contorno do problema; será feita a *Superposição das Soluções* de forma a satisfazer as condições iniciais.

#### – Primeira etapa: Método de Separação de Variáveis

Parte-se da equação diferencial e das condições de contorno, apresentadas em (2-8); e procura-se uma solução  $u(x, t)$  que seja o produto de duas funções, uma dependente apenas da posição  $x$  e outra dependente somente do instante  $t$ :

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (2-9)$$

Nessa primeira etapa, não utiliza-se as condições iniciais do problema. Define-se diferentes nomenclaturas adotadas para diferenciação em relação à coordenada  $x$  e em relação à  $t$ , quando trata-se de funções de uma variável:

$$\frac{\partial}{\partial x} = ' \quad \frac{\partial}{\partial t} = \cdot$$

Substitui-se (2-9) na equação diferencial de (2-8):

$$X\ddot{T} = c^2 X''T \quad (2-10)$$

a equação (2-10) pode ser reescrita por:

$$\frac{X''}{X}(x) = \frac{\ddot{T}}{c^2 T}(t) \quad (2-11)$$

Como o lado esquerdo da equação (2-11) depende apenas da variável  $x$  e o lado esquerdo depende apenas de  $t$ , conclui-se que os dois lados devem ser iguais a uma constante que, por conveniência, será chamada de  $-\lambda^2$ .

(2-11) pode ser separada em duas equações diferenciais ordinárias:

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad (2-12)$$

$$\ddot{T} + c^2 \lambda^2 T = 0 \quad (2-13)$$

– **Segunda etapa: Determinação das soluções das duas EDOs**

A mesma separação de variáveis realizada na equação (2-9) deve ser aplicada nas condições de contorno de (2-8):

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \implies X'(0)T(t) = 0 \quad (2-14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \implies X'(L)T(t) = 0$$

Para  $T(t) \equiv 0$ , tem-se que  $u(x, t) = 0$ , o que não satisfaz condições iniciais não-nulas. Por isso, exige-se que:

$$X'(0) = 0 \quad e \quad X'(L) = 0 \quad (2-15)$$

Encontra-se, então o seguinte problema de valor de contorno, conhecido como um problema de Sturm-Liouville:

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad (2-16)$$

$$X'(0) = 0 \quad X'(L) = 0$$

Deseja-se encontrar o par  $(\lambda, X)$  tal que  $X \neq 0$  e que satisfaça o problema de valor característico apresentado pela equação (2-12), satisfazendo as condições de contorno (2-15).

$\lambda$  são os autovalores e  $X$  as autofunções correspondentes.

Para o caso de  $\lambda^2 = 0$ , tem-se que  $X'' = 0$  e a solução  $X(x) = A_1x + A_2$ . Quando são impostas as condições de contorno de (2-15), verifica-se que  $X(x) = 0$ ; por isso a condição de  $\frac{X''}{X} = 0$  é descartada.

Tem-se que a solução geral da equação (2-12) é:

$$X(x) = B_1 \cos \lambda x + B_2 \sin \lambda x \quad (2-17)$$

e a respectiva derivada é:

$$X'(x) = -B_1 \lambda \sin \lambda x + B_2 \lambda \cos \lambda x \quad (2-18)$$

A primeira condição de contorno  $X'(0) = 0$  é substituída em (2-18). Sendo  $\sin(0) = 0$  e  $\cos(0) = 1$ , a equação (2-18) reduz-se a:

$$B_2 \lambda = 0 \implies B_2 = 0 \quad (2-19)$$

A possível solução  $X(x)$  reduz-se a:

$$X(x) = B_1 \cos \lambda x \quad (2-20)$$

Pela segunda condição de contorno,  $X'(L) = 0$ :

$$-B_1 \lambda \sin \lambda L = 0 \implies \sin \lambda L = 0 \quad (2-21)$$

Da equação (2-21), existiriam três opções:  $B_1 = 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\sin \lambda L = 0$ . Conforme foi explicado anteriormente,  $\lambda \neq 0$ ; e se  $B_1 = 0$ , pela equação (2-20),  $X(x)$  também seria nulo; portanto, necessariamente,

$\sin \lambda L = 0$ . Essa condição impõe restrições à constante  $\lambda$ . Por motivos que serão explicados posteriormente, é necessário achar todas as soluções do problema, de forma a satisfazerem as condições iniciais do mesmo (terceira etapa).

Existem infinitas possibilidades que satisfazem a condição  $\sin(\lambda L) = 0$  e, para representar cada uma delas utiliza-se um índice  $n$  diferente; ou seja  $\lambda_n L = n\pi$ , tal que  $n = 1, 2 \dots \infty$ . Então:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, \dots \quad (2-22)$$

Para cada  $\lambda_n$ , existirá uma solução  $X_n(x)$  a ele associada:

$$X_n(x) = B_{1n} \cos \lambda_n x \quad n = 1, 2, \dots \quad (2-23)$$

Conforme foi visto pela equação (2-23), existem infinitas soluções para a primeira função  $X_n(x)$ . O mesmo acontece com  $T(t)$  que, a partir de (2-13), tem-se  $\ddot{T}_n + \lambda_n^2 c^2 T_n = 0$ ; tal que, uma solução para  $T_n(t)$  é:

$$T_n(t) = C_{1n} \cos(\lambda_n ct) + C_{2n} \sin(\lambda_n ct) \quad (2-24)$$

Partindo-se de (2-9) tem-se que a solução candidata do sistema é:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) \quad \therefore \quad n = 1, 2, \dots \quad (2-25)$$

que, juntamente com (2-23) e (2-24) pode ser reescrita por:

$$u_n(x, t) = \cos(\lambda_n x)(D_{1n} \cos(\lambda_n ct) + D_{2n} \sin(\lambda_n ct)) \quad (2-26)$$

sendo  $D_{1n} = B_{1n}C_{1n}$  e  $D_{2n} = B_{1n}C_{2n}$

– **Terceira etapa: Superposição de soluções**

As infinitas soluções do problema não necessariamente satisfazem as condições iniciais do problema (2-8). Para garantir que essas condições sejam satisfeitas, faz-se a superposição das soluções candidatas ( $u_n$ ); o que resulta em:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\lambda_n x) (D_{1n} \cos(\lambda_n ct) + D_{2n} \sin(\lambda_n ct)) \quad (2-27)$$

sendo  $\lambda_n c$  a frequência natural do sistema.

$D_{1n}$  e  $D_{2n}$  são calculadas a partir das condições iniciais, apresentadas em (2-8). Substituindo-se a primeira delas na equação (2-27), tem-se:

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} D_{1n} \cos(\lambda_n x) = u_0(x) \quad (2-28)$$

multiplica-se os dois lados da equação por  $\cos(\lambda_m x)$  e integra-os no domínio  $[0 \quad L]$ :

$$\int_0^L \sum_{n=0}^{\infty} D_{1n} \cos(\lambda_n x) \cos(\lambda_m x) dx = \int_0^L u_0(x) \cos(\lambda_m x) dx \quad (2-29)$$

o resultado da integral do somatório acima é  $L/2$  para  $n = m$  e 0 para  $n \neq m$ , então:

$$D_{1n} = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \cos(\lambda_n x) dx \quad (2-30)$$

Aplica-se a segunda condição inicial do sistema (2-8) e tem-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_{2n} c \lambda_n \cos(\lambda_n x) = v_0(x) \quad (2-31)$$

A mesma técnica de multiplicar toda a equação por  $\cos(\lambda_m x)$ , para então integrá-la no domínio  $[0 \quad L]$  é adotada:

$$\int_0^L \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n} c \lambda_n \cos(\lambda_n x) \cos(\lambda_m x) dx = \int_0^L v_0(x) \cos(\lambda_m x) dx \quad (2-32)$$

$$D_{2n} = \frac{2}{L \lambda_n c} \int_0^L v_0(x) \cos(\lambda_n x) dx \quad (2-33)$$

A solução geral da dinâmica de uma barra livre-livre, com as respectivas condições de contorno e condições iniciais, consiste na substituição de  $D_{1n}$  e  $D_{2n}$  (2-30 e 2-33) na expressão de  $u$ , de (2-27).

A solução  $u$  pode ser expressa de forma simplificada:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) a_n(t) \quad (2-34)$$

sendo:

$$\phi_n(x) = \cos(\lambda_n x)$$

$$a_n(t) = D_{1n} \cos(\lambda_n c t) + D_{2n} \sin(\lambda_n c t)$$

Associado a cada frequência natural, existe um Modo de Vibração, que é uma configuração do sistema quando todos os seus pontos vibram sincronicamente, ou seja, na mesma frequência.

As frequências naturais e os modos de vibração deste sistema são, respectivamente:

$$\text{Frequências Naturais: } \omega_n = c \lambda_n = c \frac{n\pi}{L} \quad (2-35)$$

$$\text{Modos de Vibração: } \phi_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (2-36)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$u$  pode ser aproximada por  $N$  modos de vibração, sendo representada por  $u^N(x, t)$  e essa aproximação gera uma parcela de erro a ela associada, que é  $\varepsilon^N(x, t)$ :

$$u(x, t) = u^N(x, t) + \varepsilon^N(x, t) \quad (2-37)$$



$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) a_n(t)}_{u(x,t)} = \underbrace{\sum_{n=1}^N \phi_n(x) a_n(t)}_{u^N(x,t)} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} \phi_n(x) a_n(t)}_{\varepsilon^N(x,t)} \quad (2-38)$$

aproximação: 
$$u^N(x,t) = \sum_{n=1}^N \phi_n(x) a_n(t) \quad (2-39)$$

erro de aprox: 
$$\varepsilon^N(x,t) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \phi_n(x) a_n(t) \quad (2-40)$$

sendo  $N$  o número de modos usados na aproximação de  $u^N$ .

### 3

## FORMULAÇÃO FRACA

Um problema pode ser representado pela sua **Formulação Forte**, que corresponde às equações diferenciais parciais, uma para cada ponto interno do domínio, em conjunto com as condições de contorno, as condições intermediárias e as condições iniciais. Por exemplo, a equação (2-8) é a formulação forte do problema de uma barra livre-livre. A **Formulação Fraca** é uma forma alternativa de representar problemas e consta de uma equação variacional e um espaço de funções admissíveis.

A equação variacional incorpora as equações diferenciais e parte das condições de contorno e intermediárias (condições naturais), e o espaço das funções admissíveis define a regularidade do problema e incorpora parte das condições de contorno e intermediárias (condições essenciais).

O Método de Elementos Finitos (MEF) é um método de discretização que se aplica naturalmente à Formulação Fraca do problema [4]. Este capítulo apresentará todo o procedimento necessário para calcular a formulação fraca de um problema contínuo e será desenvolvido para quatro problemas de barras com diferentes condições de contorno:

- Barra Livre-Livre;
- Barra Fixa-Livre;
- Barra Fixa-Mola;
- Barra Fixa-Massa.

#### **Formulação Forte:**

equação diferencial  $(0 < x < L, t > 0)$

+

condições de contorno  $(x = 0 \text{ e } x = L)$

+

condições intermediárias  $(x = a)$

+

condições iniciais ( $t = 0$ )

### 3.1

#### Vantagens da Formulação Fraca

Considere o problema de equação diferencial e condições de contorno da equação (3-1) [3]:

$$\begin{aligned} \frac{-d^2u}{dx^2} + u &= \delta\left(x - \frac{1}{2}\right) & 0 < x < L \\ u(0) &= 0 & u(L) = 0 \end{aligned} \quad (3-1)$$

sendo  $\delta\left(x - \frac{1}{2}\right)$ , o impulso em  $x = \frac{1}{2}$ ; que é definido da seguinte forma:

$$\int_0^L \delta\left(x - \frac{1}{2}\right) \phi(x) dx = \phi\left(\frac{1}{2}\right) \quad (3-2)$$

para qualquer função  $\phi$  que satisfaça as condições de contorno. De acordo com a equação (3-1), a função  $u$ , em  $x = \frac{1}{2}$ , deve ter sua primeira derivada descontínua e a segunda derivada não deve existir. Com isso, percebe-se que alguma coisa está errada: como a função  $u$  pode satisfazer à equação diferencial (3-1) em todo o intervalo  $0 < x < L$  se a sua segunda derivada não existe em  $x = \frac{1}{2}$ , de acordo com os dados do problema?

A imposição de que a solução  $u$  satisfaça a equação diferencial do problema em *todos os pontos* da coordenada  $x$  é forte demais. Para superar isso, deve-se reformular o problema de forma a admitir condições *mais fracas* para a solução do problema e suas derivadas. Essa nova formulação é chamada de *formulação fraca* ou *formulação variacional* e serve para adaptar dados e funções irregulares, tais como o exemplo apresentado em (3-1).

A função  $\delta$  não é uma função no sentido clássico, é uma distribuição. Em Mecânica, é um conceito importante, pois serve para modelar impactos (que são esforços instantâneos, de duração nula) e cargas concentradas, isto é aplicadas em um único ponto de uma estrutura contínua.

Conclui-se, então, que uma grande vantagem da formulação fraca é tornar possível a consideração de problemas cuja solução, a princípio,

era irregular; ou seja, abrange-se maior número de problemas, conforme apresenta a figura (3.1).

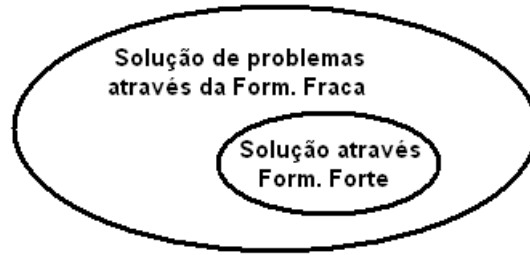


Figura 3.1: Solução de problemas para diferentes formulações

O procedimento necessário para encontrar a formulação fraca será explicado na próxima seção.

### 3.2

#### Formulação Fraca e Método Variacional de Aproximação

Nesta seção, será apresentada a metodologia necessária para construir a Formulação Fraca de um problema, a partir da equação diferencial; e classificar as condições de contorno a ela associadas.

Considere a formulação clássica de um problema, composta pela equação diferencial e condições de contorno [3]:

$$\frac{-d^2u}{dx^2} + u = x \quad 0 < x < L \quad (3-3)$$

$$u(0) = 0 \quad u(L) = 0$$

Deseja-se determinar a função  $u$  que satisfaça a equação (3-3). Duas etapas são necessárias para o desenvolvimento da Formulação Fraca de um problema [3]:

1. **Primeira etapa:** coloca-se todos os termos da equação diferencial de um único lado, multiplica-se toda a equação por uma função-teste  $\psi$  e integra-se no domínio  $(0, L)$  do problema:

$$\int_0^L \left[ \frac{-d^2u}{dx^2} + u - x \right] \psi dx \quad (3-4)$$

Existem dois tipos de condições de contorno: essenciais e naturais, associados à equação diferencial. Se a equação diferencial considerada é de ordem  $2n$ , a formulação fraca, tem que a ordem da sua maior derivada é  $n$ . As condições de contorno essenciais (CCE) são aquelas cujas derivadas são de ordem até  $n - 1$ ; e as condições de contorno naturais (CCN) têm derivadas de ordem, pelo menos,  $n$  [1].

Define-se por  $\tilde{E}$  o espaço da solução  $u$  ( $u \in \tilde{E}$ ); e  $E$  o espaço das funções-teste  $\psi$  ( $\psi \in E$ ), que satisfazem as condições de contorno essenciais de forma homogênea. A equação (3-18) pode ser reescrita por:

$$\int_0^L \left[ \frac{-d^2u}{dx^2} \psi + u\psi - x\psi \right] dx, \quad \forall \psi \in E \quad (3-5)$$

$$u(0) = 0 \quad u(L) = 0$$

2. **Segunda etapa:** faz-se a integral por partes do primeiro termo da equação (3-32), de forma a distribuir a diferenciação entre a variável dependente ( $u$ ) e a função-teste ( $\psi$ ):

$$\int_0^L \frac{-d^2u}{dx^2} \psi = \int_0^L \frac{du}{dx} \frac{d\psi}{dx} dx - \left[ \frac{du}{dx} \psi \right], \quad \forall \psi \in E \quad (3-6)$$

Considere que  $E = \tilde{E} = Adm$ , sendo  $Adm$  o espaço de funções admissíveis, deseja-se calcular  $u \in Adm$  de forma que:

$$\int_0^L \left[ \frac{du}{dx} \frac{d\psi}{dx} + u\psi - x\psi \right] dx = 0, \quad \forall \psi \in Adm \quad (3-7)$$

de forma que a função  $\psi$  pertence ao espaço  $Adm$  se:

$$Adm = \{ \psi : (0, L) \longrightarrow \Re \mid \psi(0) = 0, \psi(L) = 0, \int_0^L |\psi|^2 dx < \infty \} \quad (3-8)$$

Deseja-se obter uma aproximação para a solução do problema. Existem diferentes Métodos Variacionais de Aproximação, que diferem-se pela

escolha da função-teste  $\psi$ : Rayleigh-Ritz, Galerkin, Petrov-Galerkin, Mínimos Quadrados. O método de aproximação a ser estudado será o Método de Galerkin [14].

### Método de Galerkin:

De acordo com a seção anterior, o problema da equação (3-1) pode ser descrito por: ache a solução  $u \in Adm$ , para a seguinte formulação variacional:

$$\int_0^L \left[ \frac{du}{dx} \frac{d\psi}{dx} + u\psi \right] dx = \int_0^L x\psi dx, \quad \forall \psi \in Adm \quad (3-9)$$

Deseja-se calcular a aproximação de (3-9) (e conseqüentemente de (3-1)) [3]. Existem duas propriedades básicas do espaço  $Adm$ , além daquelas apresentadas em (3-8): é linear e de dimensão infinita.

*Espaço linear:* as combinações lineares de funções pertencentes a  $Adm$ , também pertencem a  $Adm$ . Em outras palavras, se  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são duas funções-teste pertencentes a  $Adm$ , e  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são constantes arbitrárias,  $\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2$  também é uma função-teste (pertence a  $Adm$ ).

*Espaço de dimensão infinita:* não existe base finita.

O método de Galerkin consiste na busca de uma aproximação para (3-9), que pertença ao subespaço de dimensão finita  $Adm^N$ , de forma que  $Adm^N \subset Adm$  [14]. Ou seja,  $Adm^N$  é um subespaço do espaço de funções admissíveis  $Adm$ , e a aproximação desejada,  $u^N$ , pertence a  $Adm^N$  ( $u^N \in Adm^N$ ) e é da forma:

$$u^N(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x) \quad (3-10)$$

o mesmo acontece com a aproximação da função-teste  $\psi^N$  que pertence a  $Adm^N$  ( $\psi^N \in Adm^N$ ):

$$\psi^N(x) = \sum_{j=1}^N b_j \phi_j(x) \quad (3-11)$$

tal que (3-10) e (3-11) satisfaçam a equação (3-9) com  $Adm$  substituído por  $Adm^N$  [3]. Em outras palavras, deseja-se encontrar a aproximação  $u^N \in Adm^N$ , de forma que:

$$\int_0^L \left[ \frac{du^N}{dx} \frac{d\psi^N}{dx} + u^N \psi^N \right] dx = \int_0^L x\psi^N dx, \quad \forall \psi^N \in Adm^N \quad (3-12)$$

sendo  $\phi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) o conjunto de funções independentes que define o subespaço finito de dimensão  $N$ ,  $Adm^N$ .

Os coeficientes  $a_j$  são definidos com a substituição da expressão de (3-10) na formulação variacional de (3-12), e resolvendo o sistema de expressões algébricas resultante.

As condições de contorno essenciais, que aparecem na construção do espaço das funções-teste, são impostas ao problema; enquanto as condições de contorno naturais, aparecem naturalmente na formulação variacional (no processo de integração por partes).

### 3.3

#### Formulação Fraca: problemas de barras

Considere uma barra  $[0, L]$ , como a da figura (3.2). O material, no ponto  $x$ , tem densidade  $\rho(x)$  e módulo de elasticidade  $E(x)$ ; e a área da seção transversal é  $A(x)$ . A dinâmica de movimento é descrita pela equação (2-5).

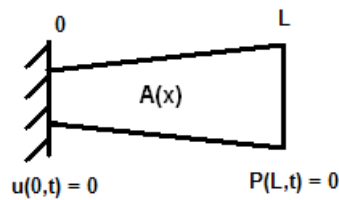


Figura 3.2: Barra fixa-livre com área variável

Condições de contorno:

$$u(0, t) = 0 \quad EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (3-13)$$

Para calcular a Formulação Fraca do problema, faz-se o produto da equação da equação diferencial por uma função-teste  $\psi$  e integra-se no domínio  $[0, L]$ :

$$\int_0^L \left[ \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} (E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)) = f(x, t) \right] \psi(x) dx \quad (3-14)$$



$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} (E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)) \psi(x) dx \\ = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_0 \end{aligned} \quad (3-15)$$

Faz-se a integração por partes ( $\int u dv = uv - \int v du$ ) da equação (3-15), resultando em:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx - E(L)A(L) \psi(L) \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) + E(0)A(0) \psi(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \\ + \int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_0 \end{aligned} \quad (3-16)$$

que pode ser reescrita por:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx - E(L)A(L) \psi(L) \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(L, t)}_{=0} + E(0)A(0) \underbrace{\psi(0)}_{=0} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \\ + \int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_0 \end{aligned} \quad (3-17)$$

Nos problemas de barras, as condições de contorno essenciais referem-se aos deslocamentos  $u(x, t)$  do sistema. Na equação (3-17) devem ser incorporadas as condições de contorno naturais e a função-teste  $\psi$  deve satisfazer as condições de contorno essenciais. Com isso, a equação variacional desse problema de barra é:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx = \\ \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_0 \end{aligned} \quad (3-18)$$

$Adm_0$  deve satisfazer as condições de contorno essenciais, ou seja:

$$Adm_0 = \{\psi : (0, L) \longrightarrow \Re \mid \psi(0) = 0, \int_0^L |\psi|^2 dx < \infty\} \quad (3-19)$$

A Formulação Fraca do problema consiste no par formado pela equação variacional do problema e o espaço das funções-teste.

### Problema de Valor Característico: problemas de barras

Para achar o Problema de Valor Característico (PVC) associado a um problema de barra, deve-se fazer duas considerações:

- forçamento externo é nulo:  $f(x, t) = 0$
- propõe-se solução:  $u(x, t) = e^{i\omega t}v(x)$

Essas duas considerações, aplicadas em (3-18), resultam em:

$$-\omega^2 \int_0^L \rho(x)A(x)v(x)\psi(x)dx + \int_0^L E(x)A(x)\frac{dv}{dx}(x)\frac{d\psi}{dx}(x)dx = 0, \quad \forall \psi \in Adm_0 \quad (3-20)$$

pode-se simplificar a equação (3-20) e calcular as freqüências naturais ( $\omega_i$ ) e os modos de vibração ( $v_i$ ) associados:

$$\omega^2 \int_0^L \rho(x)A(x)v(x)\psi(x)dx = \int_0^L E(x)A(x)\frac{dv}{dx}(x)\frac{d\psi}{dx}(x)dx, \quad \forall \psi \in Adm_0 \quad (3-21)$$

$$\omega^2 = \frac{\int_0^L E(x)A(x)\frac{dv}{dx}(x)\frac{d\psi}{dx}(x)dx}{\int_0^L \rho(x)A(x)v(x)\psi(x)dx}, \quad \forall \psi \in Adm_0 \quad (3-22)$$

### Modelo Reduzido: problemas de barras

A equação variacional (3-18) pode ser aproximada e então representada na forma matricial, sendo as matrizes de massa e de rigidez:  $\mathbf{M}_{(N \times N)}$  e  $\mathbf{K}_{(N \times N)}$ ; e o vetor de forçamento  $\mathbf{F}_{(N \times 1)}$ ; respectivamente definidos por:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \phi dx &\implies \phi^T M U \\ \int_0^L E(x) A(x) \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{d\phi}{dx} dx &\implies \phi^T K U \\ \int_0^L f \phi dx &\implies \phi^T F \end{aligned} \quad (3-23)$$

resultando em:

$$\begin{aligned} \phi^T \mathbf{M} \ddot{U} + \phi^T \mathbf{K} U &= \phi^T \mathbf{F}, \quad \forall \phi \in Adm_1^N \\ \Downarrow & \\ \mathbf{M} \ddot{U} + \mathbf{K} U &= \mathbf{F} \end{aligned} \quad (3-24)$$

Uma aproximação de (3-24) pode ser obtida pela projeção dessas equações no subespaço  $Adm_0^N$  formado por  $N$  vetores linearmente independentes  $U_\alpha$ .

$$U = \sum_{\alpha=1}^N q_\alpha U_\alpha \implies U = H q \quad (3-25)$$

Substitui-se  $U = H q$  em (3-24) e obtém-se a equação variacional do problema reduzido:

$$(H^T \mathbf{K} H) q + (H^T \mathbf{M} H) \ddot{q} = H^T \mathbf{F} \quad (3-26)$$

$$\{\mathbf{K}, \mathbf{M}, \mathbf{F}\} \implies \{(H^T \mathbf{K} H), (H^T \mathbf{M} H), (H^T \mathbf{F})\} \quad (3-27)$$

A seguir, serão desenvolvidas as formulações fracas para problemas de barras com diferentes condições de contorno, conforme foi citado anteriormente (2.3) e isso será possível simplesmente com a incorporação dessas condições na equação variacional de problemas de barras.

### 3.3.1

#### Problema de uma Barra Livre-Livre

O mesmo procedimento para o cálculo da Formulação Fraca de problemas de barras será adotado para o caso de uma barra livre-livre.

Considere uma barra livre-livre, como a da figura (2.4), de comprimento  $L$ , densidade  $\rho$ , área transversal constante  $A$  e módulo de elasticidade  $E$ . Esse problema apresenta as seguintes condições de contorno e condições iniciais, respectivamente:

$$EA \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (3-28)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \quad (3-29)$$

As propriedades do material e geométrica são dadas por campos:

$\rho : [0, L] \longrightarrow \Re$  é o campo de densidade;

$E : [0, L] \longrightarrow \Re$  é o campo de módulo de elasticidade;

$A : [0, L] \longrightarrow \Re$  é o campo de geometria;

Define-se por  $Adm_1$  o espaço das funções-teste  $\psi$  do problema de uma barra livre-livre, que deve satisfazer as condições de contorno essenciais do problema. De acordo com a equação (3-28), só existem condições de contorno naturais,  $Adm_1$  é um espaço sem restrições.

As condições de contorno são incorporadas à equação variacional de problemas de barras

$$\int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx - EA \underbrace{\psi(L) \frac{\partial u}{\partial x}(L, t)}_{=0} + EA \underbrace{\psi(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t)}_{=0} \quad (3-30)$$

$$+ \int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_1$$

Esse problema apresenta a seguinte formulação fraca:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx \\ = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_1 \end{aligned} \quad (3-31)$$

$$Adm_1 = \{ \psi : (0, L) \longrightarrow \Re \mid \int_0^L |\psi|^2 dx < \infty \} \quad (3-32)$$

A expressão (3-31) pode ser reescrita sob a forma:

$$\mathcal{M}(u, \psi) + \mathcal{K}(u, \psi) - \mathcal{F}(\psi) = 0, \quad \forall \psi \in Adm_1 \quad (3-33)$$

tal que:

$$\mathcal{M}(u, \psi) = \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx \implies \text{operador de massa} \quad (3-34)$$

$$\mathcal{K}(u, \psi) = \int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx \implies \text{operador de rigidez} \quad (3-35)$$

$$\mathcal{F}(\psi) = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx \implies \text{carregamento} \quad (3-36)$$

Substitui-se a expressão (2-37) em (3-33):

$$\mathcal{M}(u^N + \varepsilon^N, \psi) + \mathcal{K}(u^N + \varepsilon^N, \psi) - \mathcal{F}(\psi) = 0, \quad \forall \psi \in Adm_1 \quad (3-37)$$

$$\mathcal{M}(u^N, \psi) + \mathcal{K}(u^N, \psi) - \mathcal{F}(\psi) = \underbrace{-\mathcal{M}(\varepsilon^N, \psi) - \mathcal{K}(\varepsilon^N, \psi)}_{\text{erro}(\psi)} \quad (3-38)$$

De acordo com o método de Galerkin, o espaço das funções-teste é idêntico ao das funções aproximantes ( $\psi_i = \phi_i$ ) e a função erro é ortogonal ao subespaço formado pelas funções-teste  $Adm_1^N$ ; ou seja,  $\varepsilon^N \perp \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ . Com isso, a equação (3-38) reduz-se a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}(u^N, \phi_1) + \mathcal{M}(u^N, \phi_1) + \mathcal{K}(u^N, \phi_1) - \mathcal{F}(\phi_1) = 0 \\ \mathcal{M}(u^N, \phi_2) + \mathcal{K}(u^N, \phi_2) - \mathcal{F}(\phi_2) = 0 \\ \vdots \\ \mathcal{M}(u^N, \phi_N) + \mathcal{K}(u^N, \phi_N) - \mathcal{F}(\phi_N) = 0 \end{array} \right. \quad (3-39)$$

Deseja-se calcular  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ , ...  $a_\infty(t)$  que satisfaçam as condições iniciais do problema (3-29) e que, aplicadas na solução (2-34), tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} a_i(0)\phi_i(x) &= u_0(x) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \dot{a}_i(0)\phi_i(x) &= v_0(x) \end{aligned}$$

multiplica-se os dois lados da equação acima pela função-teste  $\psi_i = \phi_j$  e integra-os no domínio  $[0 \quad L]$ :

$$\int_0^L \sum_{i=1}^{\infty} a_i(0)\phi_i(x)\phi_j(x)dx = \int_0^L u_0(x)\phi_j(x)dx \quad (3-40)$$

$$m_{ij}a_i = \int_0^L u_0(x)\phi_j(x)dx \quad (3-41)$$

$$a_i(0) = \frac{\int_0^L u_0(x)\phi_j(x)dx}{m_{ij}}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3-42)$$

A expressão da aproximação (2-39) deve ser substituída nos operadores de massa, rigidez e carregamento da formulação:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_0^L \rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}(x, t)\phi_j(x)dx}_{op. \text{ massa}} + \underbrace{\int_0^L E(x)A(x)\frac{\partial u^N}{\partial x}(x, t)\frac{d\phi_j}{dx}(x)dx}_{op. \text{ rigidez}} \\ & = \underbrace{\int_0^L f(x, t)\phi_j(x)dx}_{carregamento}, \quad \forall \phi \in Adm_1^N \end{aligned} \quad (3-43)$$

feitas as substituições e calculadas as derivadas, tem-se:

$$\int_0^L \rho(x)A(x)\phi_i\phi_j dx \ddot{a}_i + \int_0^L E(x)A(x)\frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}dx a_i = \int_0^L f\phi_j dx, \quad \forall \phi \in Adm_1^N \quad (3-44)$$

$$\mathcal{M}(\phi_i, \phi_j) \ddot{a}_i + \mathcal{K}(\phi_i, \phi_j) a_i = \mathcal{F}(\phi_j), \quad \forall \phi \in Adm_1^N \quad (3-45)$$

$$\mathcal{M}(\phi_i, \phi_j) = \int_0^L \rho(x)A(x)\phi_i\phi_j dx$$

$$\mathcal{K}(\phi_i, \phi_j) = \int_0^L E(x)A(x)\frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx} dx$$

$$\mathcal{F}(\phi_j) = \int_0^L f\phi_j dx$$

tal que  $i = 1, 2, \dots, N$ .

A equação variacional (3-43) pode ser aproximada e escrita na forma matricial, sendo as matrizes de massa e de rigidez:  $\mathbf{M}_{(N \times N)}$  e  $\mathbf{K}_{(N \times N)}$ ; e o vetor de forçamento  $\mathbf{F}_{(N \times 1)}$ ; respectivamente definidos por:

$$\int_0^L \rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \phi dx \quad \Longrightarrow \quad \phi^T M U$$

$$\int_0^L E(x)A(x)\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{d\phi}{dx} dx \quad \Longrightarrow \quad \phi^T K U \quad (3-46)$$

$$\int_0^L f\phi dx \quad \Longrightarrow \quad \phi^T F$$

A equação (3-43) pode ser reescrita por:

$$\phi^T \mathbf{M} \ddot{U} + \phi^T \mathbf{K} U = \phi^T \mathbf{F}, \quad \forall \phi \in Adm_1^N \quad (3-47)$$

↓

$$\mathbf{M} \ddot{U} + \mathbf{K} U = \mathbf{F} \quad (3-48)$$

Propõe-se uma solução para  $U$ :

$$U = e^{i\omega t} v \quad (3-49)$$

substitui-se (3-49) nas fórmulas variacional e discreta; e obtém-se, respectivamente:

$$\int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{d\phi}{dx} dx - \omega^2 \int_0^L \rho(x)A(x)u\phi dx = \int_0^L f\phi dx, \quad \forall \phi \in Adm_1^N \quad (3-50)$$

$$\mathbf{K}U - \omega^2 \mathbf{M}U = \mathbf{F} \quad (3-51)$$

### ***PVC: Barra livre-livre***

Para  $F = 0$ , a equação (3-52) reduz-se a:

$$\mathbf{K}U - \omega^2 \mathbf{M}U = 0 \quad (3-52)$$

e pode ser reescrita por:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})U = 0 \quad (3-53)$$

$$U \neq 0$$

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \text{ não existe} \quad \implies \quad \det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$$

A equação (3-53) corresponde a um problema de auto-valor, a partir do qual pode-se calcular as frequências naturais  $\omega_i$  e os modos de vibração,  $v_i$ , a cada uma delas associado.



**Exemplo: Aproximação para dois modos de vibração (N = 2)**

Para facilitar o entendimento, a seguir será calculada a aproximação para dois modos de vibração:  $\mathbf{N} = \mathbf{2}$ .

$$\begin{aligned} \rho A \int_0^L \phi_1 \phi_1 dx \ddot{a}_1 + \rho A \int_0^L \phi_2 \phi_1 dx \ddot{a}_2 + EA \int_0^L \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx a_1 \\ + EA \int_0^L \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx a_2 = \int_0^L f \phi_1 dx \end{aligned} \quad (3-54)$$

$$\begin{aligned} \rho A \int_0^L \phi_1 \phi_2 dx \ddot{a}_1 + \rho A \int_0^L \phi_2 \phi_2 dx \ddot{a}_2 + EA \int_0^L \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx a_1 \\ + EA \int_0^L \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx a_2 = \int_0^L f \phi_2 dx \end{aligned}$$

**Operadores:**

$$\mathcal{M}(\phi_1, \phi_1) \ddot{a}_1 + \mathcal{M}(\phi_2, \phi_1) \ddot{a}_2 + \mathcal{K}(\phi_1, \phi_1) a_1 + \mathcal{K}(\phi_2, \phi_1) a_2 = \mathcal{F}(\phi_1) \quad (3-55)$$

$$\mathcal{M}(\phi_1, \phi_2) \ddot{a}_1 + \mathcal{M}(\phi_2, \phi_2) \ddot{a}_2 + \mathcal{K}(\phi_1, \phi_2) a_1 + \mathcal{K}(\phi_2, \phi_2) a_2 = \mathcal{F}(\phi_2)$$

**Fórmula indicial:**

$$\mathbf{M}_{ij} \ddot{a}_j + \mathbf{K}_{ij} a_j = \mathbf{F}_i \quad (3-56)$$

**Fórmula matricial:**

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (3-57)$$

$$\mathbf{M}_{11} \ddot{a}_1 + \mathbf{M}_{12} \ddot{a}_2 + \mathbf{K}_{11} a_1 + \mathbf{K}_{12} a_2 = \mathbf{F}_1 \quad (3-58)$$

$$\mathbf{M}_{21} \ddot{a}_1 + \mathbf{M}_{22} \ddot{a}_2 + \mathbf{K}_{21} a_1 + \mathbf{K}_{22} a_2 = \mathbf{F}_2$$

tal que:

$$\mathbf{M} = \rho A \begin{pmatrix} \int_0^L \phi_1 \phi_1 dx & \int_0^L \phi_2 \phi_1 dx \\ \int_0^L \phi_1 \phi_2 dx & \int_0^L \phi_2 \phi_2 dx \end{pmatrix} \quad (3-59)$$

$$\mathbf{K} = EA \begin{pmatrix} \int_0^L \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx & \int_0^L \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx \\ \int_0^L \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx & \int_0^L \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx \end{pmatrix} \quad (3-60)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \int_0^L f \phi_1 dx \\ \int_0^L f \phi_2 dx \end{pmatrix} \quad (3-61)$$

### 3.4

#### Problema de uma Barra Fixa-Livre

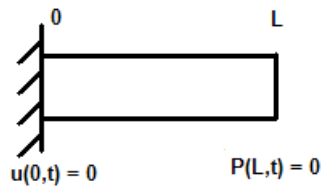


Figura 3.3: Barra fixa-livre

Considere o problema de uma barra fixa em uma extremidade e livre na outra, com área constante e material uniforme, como na figura (3.3). As condições de contorno do problema são dadas pela equação (3-13) e a função-teste deve pertencer ao espaço  $Adm_0$ , definido em (3-32), que satisfaz as condições de contorno essenciais do problema:

O problema de uma barra fixa-livre apresenta a mesma equação variacional que o problema de uma barra livre-livre, apresentada na equação (3-31), porém a diferença entre eles está no espaço da função-teste  $\psi$ .

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \psi(x) dx + \int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx \\ = \int_0^L f(x,t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_0 \end{aligned} \quad (3-62)$$

Todas as etapas desenvolvidas para uma barra livre-livre podem ser reproduzidas para uma barra fixa-livre: separação da formulação fraca em operadores de massa, rigidez e carregamento; aplicação do método de Galerkin; substituição da solução e cálculo das frequências naturais e modos de vibração

### 3.4.1

#### Problema de uma Barra Fixa-Acoplamento Elástico

Considere uma barra fixa em uma extremidade e com um acoplamento elástico na outra (3.4). Esse acoplamento elástico será descrito por:  $P(L, t) = -k_e u(L, t)$ , ou seja, a força na extremidade  $L$  da barra é equivalente à força aplicada por uma mola. Deseja-se calcular a formulação fraca desse problema.

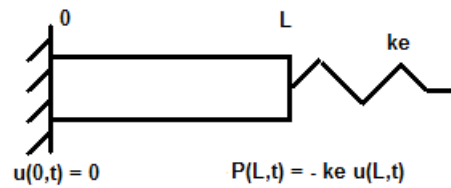


Figura 3.4: Barra fixa com acoplamento elástico

O sistema barra fixa-mola apresenta as seguintes condições de contorno:

$$u(0, t) = 0 \quad EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -k_e u(L, t) \quad (3-63)$$

A condição de contorno essencial de (3-63) é  $u(0, t) = 0$ , então a função-teste  $\psi$  deve pertencer a um espaço que satisfaça  $\psi(0) = 0$ , ou seja,  $\psi \in Adm_0$ ; tal que  $Adm_0$  é definido pela equação (3-32).

As condições de contorno de (3-63) devem ser incorporadas à equação variacional de um problema de barra, resultando em:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + k_e u(L, t) \psi(L) + \int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx \\ = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_0 \end{aligned} \quad (3-64)$$

que, em conjunto com o espaço da função-teste, corresponde à formulação fraca do problema.

Aplica-se o método de Galerkin na equação variacional. De acordo com as condições iniciais do problema (eq.3-29), tem-se a expressão de  $a_i$  (3-42). Substitui-se a expressão da aproximação (2-39) nos operadores de massa, rigidez e carregamento, que resulta em:

$$\underbrace{\int_0^L \rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}(x,t)\phi(x)dx + k_e u^N(L,t)\phi(L)}_{op. \text{ massa}} + \underbrace{\int_0^L E(x)A(x)\frac{\partial u^N}{\partial x}(x,t)\frac{d\phi}{dx}(x)dx}_{op. \text{ rigidez}} = \underbrace{\int_0^L f(x,t)\phi(x)dx}_{\text{carregamento}}, \quad \forall \phi \in Adm_0^N \quad (3-65)$$

tal que  $Adm_0^N$  é um subespaço de  $Adm_0$  ( $Adm_0^N \subset Adm_0$ ). A equação (3-65) pode ser reescrita por:

$$\int_0^L \rho(x)A(x)\phi_i\phi_j dx \ddot{a}_i + k_e\phi_i\phi_j a_i + \int_0^L E(x)A(x)\frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx} dx a_i = \int_0^L f\phi_j dx, \quad \forall \phi \in Adm_0^N \quad (3-66)$$

$$\mathcal{M}(\phi_i, \phi_j) \ddot{a}_i + k_e\phi_i\phi_j a_i + \mathcal{K}(\phi_i, \phi_j) a_i = \mathcal{F}(\phi_j) \implies i = 1, 2, \dots, N \quad (3-67)$$

A equação variacional (eq. 3-66) pode ser reescrita por:

$$\phi^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \underbrace{\phi_N^T k_e U_N}_{\mathbf{K}_{NN}} + \phi^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \phi^T \mathbf{F}, \quad \forall \phi \in Adm_0^N \quad (3-68)$$

↓

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}^* \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3-69)$$

de forma que a matriz  $\mathbf{K}^*$  consiste na matriz de rigidez do sistema  $\mathbf{K}$ , já com o termo  $\phi_N^T k_e U_N$  a ela incorporado.

Substitui-se a solução proposta em (3-49), na equação (3-66):

$$\int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{d\phi}{dx} dx + k_e U_N \phi_N - \omega^2 \int_0^L \rho(x)A(x)u\phi dx$$

$$= \int_0^L f\phi dx, \quad \forall \phi \in Adm_0^N \quad (3-70)$$

$$\mathbf{K}^*U - \omega^2\mathbf{M}U = \mathbf{F} \quad (3-71)$$

### *PVC: Barra fixa-mola*

Para  $\mathbf{F} = 0$ , tem-se:

$$(\mathbf{K}^* - \omega^2\mathbf{M})U = 0 \quad (3-72)$$

$$\det(\mathbf{K}^* - \omega^2\mathbf{M}) = 0 \quad (3-73)$$

e calcula-se as freqüências naturais ( $\omega_i$ ) e os modos de vibração ( $u_i$ ) do sistema.

## 3.5

### Problema de Barra Fixa-Massa

Considere o problema de uma barra fixa com massa concentrada na sua extremidade livre. Deseja-se calcular a formulação fraca correspondente.

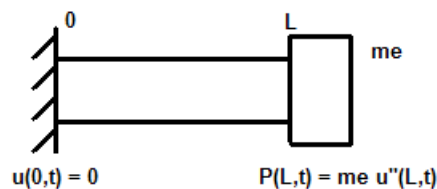


Figura 3.5: Barra fixa-massa

As condições de contorno da barra fixa-massa são:

$$u(0, t) = 0 \quad EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = m_e \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial t^2} \quad (3-74)$$

Da equação (3-74), tem-se que a condição de contorno essencial é  $u(0, t) = 0$ , portanto o espaço das funções-teste  $\psi$  desse problema também deve ser  $Adm_0$ , definido em (3-32).

A equação variacional desse problema é dada por:

$$\int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + m_e \psi(L) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t) + \int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx \quad (3-75)$$

$$= \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_0$$

Aplica-se o método de Galerkin na equação variacional e substitui-se a expressão da solução (2-39) nos operadores de massa, rigidez e carregamento:

$$\underbrace{\int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}(x, t) \phi(x) dx + m_e \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}(L, t) \phi(L)}_{op. \text{ massa}} + \underbrace{\int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u^N}{\partial x}(x, t) \frac{d\phi}{dx}(x) dx}_{op. \text{ rigidez}} \quad (3-76)$$

$$= \underbrace{\int_0^L f(x, t) \phi(x) dx}_{\text{carregamento}}, \quad \forall \phi \in Adm_0^N$$

$$\int_0^L \rho(x)A(x) \phi_i \phi_j dx \ddot{u}_i + m_e \phi_i \phi_j \ddot{u}_i + \int_0^L E(x)A(x) \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx a_i \quad (3-77)$$

$$= \int_0^L f \phi_j dx, \quad \forall \phi \in Adm_0^N$$

$$\mathcal{M}(\phi_i, \phi_j) \ddot{u}_i + m_e \phi_i \phi_j \ddot{u}_i + \mathcal{K}(\phi_i, \phi_j) a_i = \mathcal{F}(\phi_j) \implies i = 1, 2, \dots, N \quad (3-78)$$

A equação (3-77) pode ser reescrita por:

$$\phi^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \underbrace{\phi_N^T m_e U_N}_{M_{NN}} + \phi^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \phi^T \mathbf{F}, \quad \forall \phi \in Adm_0^N \quad (3-79)$$

↓

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3-80)$$

substitui-se a solução de (3-49) na equação (3-77):

$$\begin{aligned} \int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{d\phi}{dx} dx + m_e U_N \phi_N - \omega^2 \int_0^L \rho(x)A(x)u\phi dx \\ = \int_0^L f\phi dx, \quad \forall \phi \in Adm_0^N \end{aligned} \quad (3-81)$$

$$\mathbf{K}U - \omega^2 \mathbf{M}^*U = \mathbf{F} \quad (3-82)$$

### ***PVC: Barra fixa-massa***

Para  $\mathbf{F} = 0$ , tem-se:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}^*)U = 0 \quad (3-83)$$

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}^*) = 0 \quad (3-84)$$

A tabela (3.6) apresenta a formulação fraca para problemas de barras com diferentes condições de contorno. Conforme pode-se observar, a formulação variacional do problema de barra livre-livre é igual à do problema de barra fixa-livre; porém a diferença entre esses dois casos encontra-se na definição do espaço da função-teste ( $\psi \in Adm$ ), que representa as condições de contorno essenciais. O espaço das funções-teste admissíveis dos casos de barra fixa-livre, fixa-mola e fixa-massa é o mesmo porque representa a condição de contorno essencial  $u(0, t) = 0$ , devido à extremidade fixa em  $x = 0$ . O que diferencia esses três problemas é a formulação variacional que, no caso de barra fixa-mola, há um termo adicional representativo da mola ( $k_e u(L, t)\psi(L)$ ); e, para o problema da barra fixa-massa, existe um termo que representa a massa na extremidade ( $k_e \psi(L) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t)$ ).


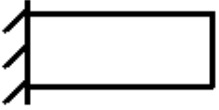
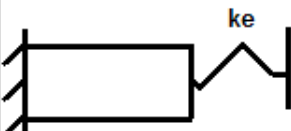
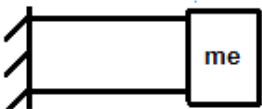
Barra	Configuração	Formulação Variacional	Adm
Livre-Livre		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EA \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx$ $= \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	—
Fixa-Livre		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EA \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx$ $= \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	$\psi(0) = 0$
Fixa-Mola		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EA \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx$ $+ k_e u(L, t) \psi(L) = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	$\psi(0) = 0$
Fixa-Massa		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EA \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx$ $+ m_e \psi(L) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t) = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	$\psi(0) = 0$

Figura 3.6: Formulação Fraca de diferentes problemas de barras



## 4

### MODELAGEM DE PROBLEMAS DE VIGAS

Neste capítulo serão estudados problemas de vigas. Existem dois modelos principais de vigas, Euler-Bernoulli e Timoshenko. O modelo de Euler-Bernoulli considera que o cisalhamento e a inércia de rotação são desprezados, ou seja, Supõe-se que as seções transversais planas permanecem planas e perpendiculares ao eixo longitudinal da viga mesmo após a deflexão. Já o modelo de Timoshenko, considera que as seções transversais planas permanecem planas, mas não necessariamente perpendiculares ao eixo longitudinal da viga, porque o cisalhamento causa um giro da seção em relação a essa perpendicular [1]. Na teoria de vigas, utiliza-se a hipótese de pequenas deformações, por isso as variações de geometria podem ser desprezadas.

#### 4.1

##### Dinâmica de Vigas

Deseja-se equacionar, de forma sistemática, um problema de viga usando o modelo Euler-Bernoulli. Considere uma viga bi-engastada [8], de comprimento  $L$ , densidade  $\rho(x)$ , área de seção transversal  $A(x)$ , módulo de elasticidade  $E(x)$  e momento de inércia da área da seção  $I(x)$ .  $u(x, t)$  é a posição do ponto  $x$  no instante  $t$  e  $f(x, t)$ , a força externa ao sistema.

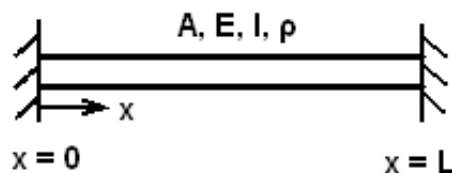


Figura 4.1: Viga bi-engastada

Engastamento em uma extremidade significa que não há deslocamento da extremidade e que a inclinação da seção nessa posição é fixada.

Considere a seção da viga  $[\overline{x_1x_2}]$ . No ponto  $x_i$  da viga, considera-se uma força cortante  $V(x_i, t)$  e um momento fletor, denominado  $\mathbb{M}(x_i, t)$  para a configuração no instante  $t$ ; conforme mostra a figura (4.2).

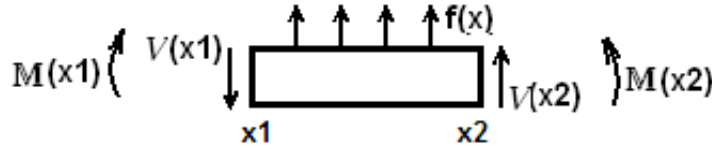


Figura 4.2: Forças cortantes e momentos, em uma seção da viga

Para achar as equações que representam a dinâmica de uma viga, será feito o balanço de quantidade de movimento nesta seção  $[\overline{x_1x_2}]$ :

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) dx = V(x_2, t) - V(x_1, t) + \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx \quad (4-1)$$

Sendo  $V(x_2, t) - V(x_1, t) = \frac{\partial V}{\partial x}(x, t)(x_2 - x_1)$  e fazendo  $(x_2 - x_1) \rightarrow 0$ , tem-se:

$$\rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial V}{\partial x}(x, t) + f(x, t) \quad (4-2)$$

Pelo modelo Euler-Bernoulli, tem-se a relação entre  $\mathbb{M}$  e  $V$ :  $V = -\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial x}$ . Adota-se a hipótese constitutiva de que o momento é proporcional à curvatura linearizada, o que significa que  $\mathbb{M} = E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . Substitui-se essas considerações em (4-2), então:

$$\rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right) = f(x, t) \quad (4-3)$$

sendo:

$u(x, t)$  - deslocamento transversal;

$A(x)$  - área da seção transversal;

$I(x)$  - momento de inércia da seção transversal;

$E(x)$  - módulo de elasticidade do material;

$\rho(x)$  - massa por unidade de comprimento;

$f(x, t)$  - força transversal por unidade de comprimento.

Considerando constantes as propriedades  $A(x)$ ,  $I(x)$ ,  $E(x)$  e  $\rho(x)$ ; a equação (4-3) reduz-se a:

$$\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + E(x)I(x)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) = f(x, t) \quad (4-4)$$

## 4.2

### Problema Modelo: resolução por separação de variáveis

A equação de movimento de um problema clássico de viga, de comprimento  $L$  é dada pela equação (4-3) na qual precisa-se incorporar quatro condições de contorno, duas em cada extremidade ( $x = 0$  e  $x = L$ ); porque existem derivadas de até quarta ordem de  $u(x, t)$  em relação a  $x$ . Além disso, a equação é de segunda ordem em relação ao tempo, então são necessárias duas condições iniciais, que correspondem à configuração inicial e à velocidade inicial da viga [8].

Condições iniciais ( $t = 0$ ):

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= v_0(x) \end{aligned} \quad (4-5)$$

sendo  $u_0$  e  $v_0$  funções conhecidas.

As condições de contorno são características do problema e podem representar deflexão, inclinação da seção, momento ou o esforço cortante, que são, respectivamente:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= v_0(x) \\ M(x, t) &= E(x)I(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \\ V(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ E(x)I(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right] \end{aligned}$$

Considere um problema de viga engastada nas duas extremidades (bi-engastada). Isso significa que os deslocamentos e as rotações em  $x = 0$  e em  $x = L$  são nulos. As condições de contorno correspondentes são:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0 & \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0 \\ u(L, t) &= 0 & \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4-6)$$

A solução da equação (4-3), submetida às quatro condições de contorno e às duas condições iniciais, deve seguir os mesmos passos adotados para barras. Aplica-se o *Método de Separação de Variáveis* [8], ou seja, procura-se soluções da forma:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (4-7)$$

sendo  $X(x)$  uma função de posição e  $T(t)$  uma função do tempo. Substitui-se (4-7) na equação (4-3), considerando  $f(x, t) = 0$ :

$$-\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{\rho A} \frac{1}{X} \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 X}{dx^2} \right) = \lambda^2 \quad (4-8)$$

tal que  $\lambda$  é uma constante a ser determinada.

A equação (4-8) pode ser separada em duas EDO's de forma que  $X$  e  $T$  devem satisfazer:

$$\frac{1}{\rho A} (EI X'')'' = \lambda^2 X \quad (4-9)$$

$$\ddot{T}(t) + \lambda^2 T(t) = 0 \quad (4-10)$$

de forma que  $\frac{\partial}{\partial x} = '$  e  $\frac{\partial}{\partial t} = \dot{}$ .

Considerando constantes as propriedades do material e as variáveis geométricas ( $\rho$ ,  $E$ ,  $I$  e  $A$ ), a equação (4-9) pode ser reescrita por:

$$\frac{EI}{\rho A} \frac{d^4 X}{dx^4} = \lambda^2 X \quad (4-11)$$

Denota-se por:

$$\lambda^2 = \omega^2 \quad \left( \frac{\omega}{\sqrt{EI/\rho A}} \right)^2 = \beta^4 \quad (4-12)$$

Então a solução das equações (4-9) e (4-10), são:

$$X(x) = a_1 \sin(\beta x) + a_2 \cos(\beta x) + a_3 \sinh(\beta x) + a_4 \cosh(\beta x) \quad (4-13)$$

$$T(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (4-14)$$

A função  $X$  deve satisfazer as condições de contorno do problema e, quando elas são impostas, obtém-se infinitas soluções para  $\beta$ , que são diferenciadas com a introdução de um parâmetro  $n$ ; fornecendo, então,  $\beta_n$ . Para cada  $\beta_n$  determina-se as constantes não-nulas  $a_{1n}$ ,  $a_{2n}$ ,  $a_{3n}$  e  $a_{4n}$  que, juntas, definem uma função  $X_n(x)$ :

$$X_n(x) = a_{1n} \sin(\beta_n x) + a_{2n} \cos(\beta_n x) + a_{3n} \sinh(\beta_n x) + a_{4n} \cosh(\beta_n x) \quad (4-15)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Para cada  $\beta_n$  existe um autovalor  $\lambda_n^2 = \beta_n^4$  correspondente e, conseqüentemente, um  $T_n$ :

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \quad (4-16)$$

Finalmente, para cada  $n \geq 1$ , tem-se uma solução da equação (4-3), na forma do produto:

$$u_n(x, t) = (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t))X_n(x) \quad (4-17)$$

que deve satisfazer as condições iniciais do problema. Para garantir que essas condições sejam satisfeitas, faz-se a superposição das soluções  $u_n(x, t)$ :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \lambda_n t + B_n \sin \lambda_n t) [a_{1n} \sin(\beta_n x) + a_{2n} \cos(\beta_n x) + a_{3n} \sinh(\beta_n x) + a_{4n} \cosh(\beta_n x)] \quad (4-18)$$

Sendo  $A_n$  e  $B_n$  determinadas a partir das condições iniciais do problema.

Para  $n \geq 1$ , a função  $X_n(x)$  de (4-15) corresponde ao  $n$ -ésimo modo de vibração, associado à  $n$ -ésima frequência natural  $\omega_n$  do problema:

$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (4-19)$$

Para calcular as frequências naturais e os modos de vibração do problema de uma viga bi-engastada, deve-se resolver a equação:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (4-20)$$

e a equação característica é  $\cos \beta \cosh \beta = 1$ , então, para  $n \geq 1$ , o  $n$ -ésimo modo de vibração desse problema para  $\lambda_n^2 = \beta_n^4$  é:

$$X_n(x) = \cosh \beta_n x - \cos \beta_n x - \sigma_n (\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x) \quad (4-21)$$

sendo  $\sigma_1 = 0.9825$ ,  $\sigma_2 = 1.0008$  e  $\sigma_n = \frac{\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x}{\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x}$  para  $n > 2$

As frequências naturais são:

$$\omega_n = \beta_n^2 \quad (4-22)$$

A solução do problema (4-7) pode ser reescrita de forma simplificada:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) a_n(t) \quad (4-23)$$

A aproximação por  $N$  modos de vibração, é representada por  $u^N(x, t)$  e o erro associado a essa aproximação é  $\varepsilon^N(x, t)$ :

$$u(x, t) = u^N(x, t) + \varepsilon^N(x, t) \quad (4-24)$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) a_n(t)}_{u(x,t)} = \underbrace{\sum_{n=1}^N \phi_n(x) a_n(t)}_{u^N(x,t)} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} \phi_n(x) a_n(t)}_{\varepsilon^N(x,t)} \quad (4-25)$$

aproximação: 
$$u^N(x, t) = \sum_{n=1}^N \phi_n(x) a_n(t) \quad (4-26)$$

erro de aproximação: 
$$\varepsilon^N(x, t) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \phi_n(x) a_n(t) \quad (4-27)$$

tal que  $N$  é o número de modos usados na aproximação de  $u^N$ .

## 5

### FORMULAÇÃO FRACA PARA PROBLEMAS DE VIGAS


Os problemas de vigas podem ter condições de contorno relacionadas a posição, inclinação, força ou momento. Dentre todas as combinações possíveis, foram selecionados quatro problemas de vigas que serão estudados nesse capítulo. Deseja-se desenvolver a formulação fraca [3] para cada caso apresentado abaixo:

TIPO DE VIGA	CONFIGURAÇÃO
Viga Livre-Livre	
Viga Engastada-Livre	
Viga Engastada-Mola	
Viga Engastada-Massa	

Figura 5.1: Problemas de vigas e suas configurações

#### 5.1

##### Problema de uma Viga Livre-Livre



$$\begin{array}{ll}
 V(0,t) = 0 & V(L,t) = 0 \\
 M(0,t) = 0 & M(L,t) = 0
 \end{array}$$

Figura 5.2: Viga livre-livre



Uma viga livre nas duas extremidades (figura (A.37)) apresenta as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(0, t) = 0 &\implies \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{x=0} = 0; \quad \mathbb{M}(L, t) = 0 \implies \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{x=L} = 0 \\ V(0, t) = 0 &\implies \left[ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_{x=0} = 0; \quad V(L, t) = 0 \implies \left[ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_{x=L} = 0 \end{aligned} \quad (5-1)$$

O espaço das funções-teste do problema de uma viga livre-livre deve satisfazer as condições de contorno essenciais [14]. Pela equação (5-1), sabe-se que todas as condições de contorno são naturais, então  $\psi$  pertence a um espaço sem restrições, que será chamado de  $Adm_3$ .

### Formulação Forte de um problema de viga:

Equação Diferencial (4-4) + Condições de Contorno + Condições Iniciais

Inicialmente, faz-se o produto da equação diferencial (4-4) por uma função-teste  $\psi$  e calcula-se a integral no domínio  $[0 \quad L]$ :

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) \psi(x) dx \\ = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_3 \end{aligned} \quad (5-2)$$

Faz-se a integração por partes ( $\int u dv = uv - \int v du$ ) duas vezes, resultando em:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + EI \psi \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) - EI \psi \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, t) - EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{d\psi}{dx}(L) \\ + EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{d\psi}{dx}(0) + \int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_3 \end{aligned} \quad (5-3)$$

As condições de contorno (5-1), incorporadas à equação (5-3), resultam em:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + EI \underbrace{\psi \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t)}_{=0} - EI \underbrace{\psi \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, t)}_{=0} - EI \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{d\psi}{dx}}_{=0}(L) \\
& + EI \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{d\psi}{dx}}_{=0}(0) + \int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_3
\end{aligned} \tag{5-4}$$

A formulação fraca desse problema é:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx \\
& = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_3
\end{aligned} \tag{5-5}$$

A expressão (5-5) pode ser reescrita por:

$$\mathcal{M}(u, \psi) + \mathcal{K}(u, \psi) - \mathcal{F}(\psi) = 0, \quad \forall \psi \in Adm_3 \tag{5-6}$$

tal que:

$$\mathcal{M}(u, \psi) = \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx \implies \text{operador massa} \tag{5-7}$$

$$\mathcal{K}(u, \psi) = \int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx \implies \text{operador rigidez} \tag{5-8}$$

$$\mathcal{F}(\psi) = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx \implies \text{carregamento} \tag{5-9}$$

A solução para o deslocamento transversal da viga (4-24), substituído em (5-6), resulta em:

$$\mathcal{M}(u^N + \varepsilon^N, \psi) + \mathcal{K}(u^N + \varepsilon^N, \psi) - \mathcal{F}(\psi) = 0, \quad \forall \psi \in H \tag{5-10}$$

$$\mathcal{M}(u^N, \psi) + \mathcal{K}(u^N, \psi) - \mathcal{F}(\psi) = \underbrace{-\mathcal{M}(\varepsilon^N, \psi) - \mathcal{K}(\varepsilon^N, \psi)}_{\text{erro}(\psi)} \tag{5-11}$$

Pelo Método de Galerkin:  $\psi_i = \phi_i$  e  $\varepsilon^N \perp \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ ; a equação (5-11) reduz-se a:

$$\begin{cases} \mathcal{M}(u^N, \phi_1) + \mathcal{K}(u^N, \phi_1) - \mathcal{F}(\phi_1) = 0 \\ \mathcal{M}(u^N, \phi_2) + \mathcal{K}(u^N, \phi_2) - \mathcal{F}(\phi_2) = 0 \\ \vdots \\ \mathcal{M}(u^N, \phi_N) + \mathcal{K}(u^N, \phi_N) - \mathcal{F}(\phi_N) = 0 \end{cases} \quad (5-12)$$

Para  $N$  modos a serem analisados, a parcela  $\varepsilon^N$  é nula.

A solução do problema foi apresentada pela equação (4-23) que, aplicada nas condições iniciais do problema (4-5), tem-se:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i(0)\phi_i(x) = u_0(x) \quad (5-13)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \dot{a}_i(0)\phi_i(x) = V_0(x)$$

e deseja-se calcular  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ , ...  $a_{\infty}(t)$ . Multiplica-se os dois lados da equação acima pela função-teste  $\psi_i = \phi_j$  e integra-os no domínio  $[0 \quad L]$ :

$$\int_0^L \sum_{i=1}^{\infty} a_i(0)\phi_i(x)\phi_j(x)dx = \int_0^L u_0(x)\phi_j(x)dx \quad (5-14)$$

$$m_{ij}a_i = \int_0^L u_0(x)\phi_j(x)dx \quad (5-15)$$

$$a_i = \frac{\int_0^L u_0(x)\phi_j(x)dx}{m_{ij}}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5-16)$$

A expressão da aproximação (4-26) é substituída nos operadores de massa, rigidez e carregamento da formulação:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}(x, t)\phi_j(x)dx + \int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} dx \\ = \int_0^L f(x, t)\phi_j(x)dx, \quad \forall \phi \in Adm_3^N \end{aligned} \quad (5-17)$$

feitas as substituições e calculadas as derivadas, tem-se

$$\int_0^L \rho(x)A(x)\phi_i\phi_j dx \ddot{a}_i + \int_0^L E(x)I(x)\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\frac{d^2\phi_j}{dx^2} dx a_i = \int_0^L f\phi_j dx, \quad \forall \phi \in Adm_3^N \quad (5-18)$$

$$\mathcal{M}(\phi_i, \phi_j)\ddot{a}_i + \mathcal{K}(\phi_i, \phi_j)a_i = \mathcal{F}(\phi_j), \quad \forall \phi \in Adm_3^N \quad (5-19)$$

$$\mathcal{M}(\phi_i, \phi_j) = \int_0^L \rho(x)A(x)\phi_i\phi_j dx$$

$$\mathcal{K}(\phi_i, \phi_j) = \int_0^L E(x)I(x)\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\frac{d^2\phi_j}{dx^2} dx$$

$$\mathcal{F}(\phi_j) = \int_0^L f\phi_j dx$$

para  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Pela fórmula variacional (eq. (5-17)), tem-se as matrizes de massa e de rigidez:  $\mathbf{M}_{(N \times N)}$  e  $\mathbf{K}_{(N \times N)}$ , além do vetor de forçamento  $\mathbf{F}_{(N \times 1)}$ :

$$\int_0^L \rho(x)A(x)u^N \cdot \phi dx \implies \phi^T M U$$

$$\int_0^L E(x)A(x)\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} \cdot \frac{d^2 \phi}{dx^2} dx \implies \phi^T K U \quad (5-20)$$

$$\int_0^L f\phi dx \implies \phi^T F$$

A equação (5-17) pode ser reescrita por:

$$\phi^T \mathbf{M}\ddot{U} + \phi^T \mathbf{K}U = \phi^T \mathbf{F}, \quad \forall \phi \in Adm_3^N \quad (5-21)$$

↓

$$\mathbf{M}\ddot{U} + \mathbf{K}U = \mathbf{F} \quad (5-22)$$

Propõe-se uma solução para  $U$ :

$$U = e^{i\omega t} v \quad (5-23)$$

substitui-se (5-23) em (5-17) e em (5-22), respectivamente:

$$\int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{d^2 \phi}{dx^2} dx - \omega^2 \int_0^L \rho(x)A(x)u\phi dx = \int_0^L f\phi dx, \quad \forall \phi \in Adm_3^N \quad (5-24)$$

$$\mathbf{K}v - \omega^2 \mathbf{M}v = \mathbf{F} \quad (5-25)$$

### ***PVC: Viga livre-livre***

Para  $\mathbf{F} = 0$ , a equação (5-25) reduz-se a:

$$\mathbf{K}v - \omega^2 \mathbf{M}v = 0 \quad (5-26)$$

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})v = 0 \quad (5-27)$$

$U \neq 0$

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \text{ não existe} \quad \implies \quad \det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$$

## **5.2**

### **Problema de uma Viga Engastada-Livre**

O mesmo procedimento foi adotado para encontrar a Formulação Fraca desse problema de viga.

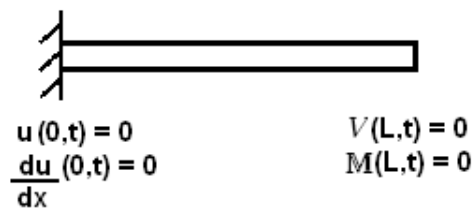


Figura 5.3: Viga engastada-livre

A viga engastada em uma extremidade e livre na outra apresenta as seguintes condições de contorno:

$$u(0, t) = 0 \quad V(L, t) = 0 \implies \left[ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_{x=L} = 0 \quad (5-28)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad M(L, t) = 0 \implies \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{x=L} = 0$$

Define-se por  $Adm_4$  o espaço das funções-teste do problema de uma viga engastada-livre que deve satisfazer as condições de contorno essenciais de (5-28). Com isso, conclui-se que  $\psi(0) = 0$  e  $\frac{d\psi}{dx}(0) = 0$ . O espaço  $Adm_4$  pode ser definido por (5-29):

$$Adm_4 = \left\{ \psi : (0, L) \longrightarrow \Re \mid \psi(0) = 0, \frac{d\psi}{dx}(0) = 0 \right. \\ \left. \int_0^L |\psi|^2 dx < \infty, \int_0^L \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx < \infty \right\} \quad (5-29)$$

As condições de contorno de (5-28) são impostas na equação (5-3) e resultam na formulação variacional do problema:

$$\int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx \\ = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_4 \quad (5-30)$$

A formulação variacional da viga engastada-livre é igual à da viga livre-livre, dada pela equação (5-5), porém com a função-teste  $\psi$  pertencente ao espaço  $Adm_4$ , ao invés de  $Adm_3$ .

Todo o procedimento realizado para viga livre-livre pode ser repetido para a viga engastada-livre: divisão da formulação fraca do sistema em operadores de massa, rigidez e carregamento, aplicação do método de Galerkin para aproximar a solução, aplicação de solução proposta.

### 5.3

#### Problema de uma Viga Engastada-Mola

Nesta seção será desenvolvida a formulação fraca de uma viga engastada com mola vertical na sua extremidade livre (A.27), além da formulação variacional desse sistema.

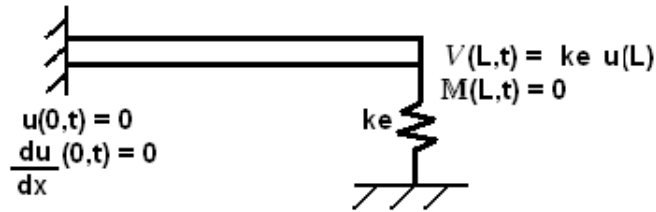


Figura 5.4: Viga engastada-mola

A viga engastada-mola apresenta as seguintes condições de contorno:

$$u(0, t) = 0 \quad V(L, t) = k_e u(L, t) \implies \left[ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_{x=L} = \frac{k_e u}{EI}(L, t) \quad (5-31)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad M(L, t) = 0 \implies \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{x=L} = 0$$

As condições de contorno essenciais de (5-31) são  $u(0, t) = 0$  e  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ , então o espaço das funções-teste deve satisfazer as condições  $\psi(0) = 0$  e  $\frac{d\psi}{dx}(0) = 0$  e é chamado de  $Adm_4$ , definido em (5-29).

As condições de contorno de (5-31) são aplicadas na equação (5-3), o que resulta na formulação variacional do problema:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + k_e u(L, t) \psi(L) + \int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx \\ = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_4 \end{aligned} \quad (5-32)$$

Aplica-se o método de Galerkin na formulação variacional e substitui-se a expressão da solução (4-24) nos operadores de massa, rigidez e carregamento.

Dada a solução (4-23), deseja-se calcular  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ , ...  $a_\infty(t)$  que satisfaçam as condições iniciais (4-5). Com isso, calcula-se  $a_i$ , apresentada na equação

(5-16); e, substituída a expressão da aproximação (4-26) nos operadores de massa, rigidez e carregamento do sistema, tem-se:

$$\underbrace{\int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}(x, t) \phi_j(x) dx + k_e u^N(L, t) \phi(L)}_{op. \text{ massa}} + \underbrace{\int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} dx}_{op. \text{ rigidez}} = \underbrace{\int_0^L f(x, t) \phi_j(x) dx}_{carregamento}, \quad \forall \phi \in Adm_4^N \quad (5-33)$$

sendo  $Adm_4^N$  é subespaço de  $Adm_4$  e (5-33) pode ser reescrita por:

$$\int_0^L \rho(x)A(x) \phi_i \phi_j dx \ddot{a}_i + k_e \phi_i \phi_j a_i + \int_0^L E(x)I(x) \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx a_i = \int_0^L f \phi_j dx, \quad \forall \phi \in Adm_4^N \quad (5-34)$$

$$\mathcal{M}(\phi_i, \phi_j) \ddot{a}_i + k_e \phi_i \phi_j a_i + \mathcal{K}(\phi_i, \phi_j) a_i = \mathcal{F}(\phi_j), \quad \forall \phi \in Adm_4^N \quad (5-35)$$

Pela formulação variacional de (5-33) tem-se a matriz de massa, a matriz de rigidez e o vetor de forçamento.

A equação (5-33) pode ser reescrita por:

$$\phi^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \underbrace{\phi_N^T k_e U_N}_{\mathbf{K}_{NN}} + \phi^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \phi^T \mathbf{F}, \quad \forall \phi \in Adm_4^N \quad (5-36)$$

↓

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}^* \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (5-37)$$

de forma que a matriz  $\mathbf{K}^*$  consiste na matriz de rigidez do sistema  $\mathbf{K}$ , já com o termo  $\phi_N^T k_e U_N$  a ela incorporado.

Propõe-se a solução de (5-23) que, substituída em (5-33) e (5-36) tem-se, respectivamente:



$$\int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{d^2 \phi}{dx^2} dx + k_e U_N \phi_N - \omega^2 \int_0^L \rho(x)A(x)u\phi dx = \int_0^L f\phi dx \quad (5-38)$$

$$\mathbf{K}^* v - \omega^2 \mathbf{M} v = \mathbf{F} \quad (5-39)$$

### *PVC: Viga engastada-mola*

Para  $\mathbf{F} = 0$ :

$$\mathbf{K}^* v - \omega^2 \mathbf{M} v = 0 \quad (5-40)$$

$$(\mathbf{K}^* - \omega^2 \mathbf{M})v = 0 \quad (5-41)$$

$v \neq 0$

#### 5.3.1

#### Problema de Viga Engastada-Massa

Esta seção apresentará a formulação fraca e o PVC do problema de uma viga engastada com uma massa concentrada na sua extremidade livre (A.29), juntamente com a sua formulação variacional.

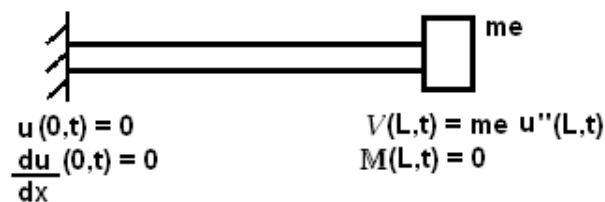


Figura 5.5: Viga engastada-massa

Esse sistema apresenta as condições de contorno:

$$\begin{aligned}
 u(0, t) = 0 \quad V(L, t) = m_e \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t) &\implies \left[ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_{x=L} = \frac{m_e}{EI} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t) \\
 \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \mathbb{M}(L, t) = 0 &\implies \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{x=L} = 0
 \end{aligned}
 \tag{5-42}$$

O espaço das funções-teste deve satisfazer as condições de contorno essenciais de (5-42), que são  $u(0, t) = 0$  e  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ ; portanto  $\psi \in Adm_4$ , tal que  $Adm_4$  está definido em (5-29).

As condições de contorno de (5-42) são aplicadas em (5-3) e resultam na formulação variacional do problema:

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + m_e \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t) \psi(L) + \int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx \\
 = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_4
 \end{aligned}
 \tag{5-43}$$

Aplica-se o método de Galerkin na formulação variacional e substitui-se a expressão da solução (4-24) nos operadores de massa, rigidez e carregamento.

A solução do problema é dada por (4-23), e deseja-se calcular  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ , ...  $a_\infty(t)$  que satisfaçam as condições iniciais (4-5). Após os cálculos, encontra-se (5-16), e substitui-se a expressão da aproximação (4-26) nos operadores de massa, rigidez e carregamento do sistema:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\rho(x)A(x) \int_0^L \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}(x, t) \phi_j(x) dx}_{op. \text{ massa}} + m_e \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}(L, t) \phi(L) + \underbrace{E(x)I(x) \int_0^L \frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \phi_j}{dx^2}(x) dx}_{op. \text{ rigidez}} \\
 = \underbrace{\int_0^L f(x, t) \phi_j(x) dx}_{carregamento}, \quad \forall \phi \in Adm_4^N
 \end{aligned}
 \tag{5-44}$$

que pode ser reescrita por:

$$\int_0^L \rho(x)A(x)\phi_i\phi_j dx \ddot{u}_i + m_e\phi_i\phi_j \ddot{u}_i + \int_0^L E(x)I(x)\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\frac{d^2\phi_j}{dx^2}dx a_i \quad (5-45)$$

$$= \int_0^L f\phi_j dx, \quad \forall \phi \in Adm_4^N$$

$$\mathcal{M}(\phi_i, \phi_j)\ddot{u}_i + m_e\phi_i\phi_j \ddot{u}_i + \mathcal{K}(\phi_i, \phi_j)a_i = \mathcal{F}(\phi_j), \quad \forall \phi \in H^N \quad (5-46)$$

A formulação variacional, equação (5-44), representa as matrizes de massa e rigidez e o vetor carregamento.

A equação (5-44) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\phi^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \underbrace{\phi_N^T m_e U_N}_{\mathbf{M}_{NN}} + \phi^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \phi^T \mathbf{F}, \quad \forall \phi \in Adm_4^N \quad (5-47)$$

↓

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (5-48)$$

A matriz  $\mathbf{M}^*$  é a matriz de massa do sistema, já com o efeito do termo  $\phi_N^T m_e U_N$  adicionado.

Substitui-se a solução (5-23) nas equações (5-44 e (5-48):

$$\int_0^L E(x)I(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{d^2\phi}{dx^2}dx + m_e U_N \phi_N - \omega^2 \int_0^L \rho(x)A(x)u\phi dx \quad (5-49)$$

$$= \int_0^L f\phi dx, \quad \forall \phi \in Adm_4^N$$

$$\mathbf{K}v - \omega^2 \mathbf{M}^*v = \mathbf{F} \quad (5-50)$$

### ***PVC: Viga engastada-massa***

Para  $\mathbf{F} = 0$ :

$$\mathbf{K}v - \omega^2 \mathbf{M}^*v = 0 \quad (5-51)$$

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}^*)v = 0 \tag{5-52}$$

A tabela (5.6) apresenta a formulação fraca para problemas de vigas com diferentes condições de contorno. Pode-se observar que a formulação variacional dos problemas de viga livre-livre e viga engastada-livre são iguais e a diferença entre eles encontra-se na definição do espaço de funções-teste. Os problemas de viga engastada-livre, engastada-mola e engastada-massa apresentam o mesmo espaço de funções admissíveis  $Adm$ , porém pode-se diferenciá-los pelas formulações variacionais que, no caso da viga engastada-mola, tem um termo que representa a mola da extremidade e no caso da viga engastada-massa há um termo representativo da massa concentrada em  $x = L$ .


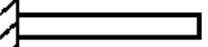
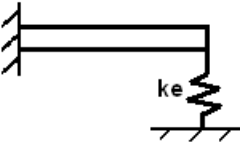
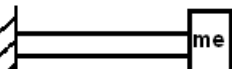
Viga	Configuração	Formulação Variacional	Adm
Livre-Livre		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx$ $= \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	—
Engastada-Livre		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx$ $= \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	$\psi(0) = 0$ $\frac{d\psi}{dx}(0) = 0$
Engastada-Mola		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx$ $+ k_e u(L, t) \psi(L) = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	$\psi(0) = 0$ $\frac{d\psi}{dx}(0) = 0$
Engastada-Massa		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx$ $+ m_e \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t) \psi(L) = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	$\psi(0) = 0$ $\frac{d\psi}{dx}(0) = 0$

Figura 5.6: Formulação Fraca de diferentes problemas de Vigas

## 6

### MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS - MEF

O Método de Elementos Finitos é uma técnica de discretização de um problema descrito na Formulação Fraca, na qual o domínio é aproximado por um conjunto de subdomínios (elementos); e constrói-se, sistematicamente, as funções de aproximação para cada um desses elementos [7].

Os parâmetros das funções de aproximação representam os valores da solução para um número de pontos selecionados, chamados nós; que podem estar nos contornos ou no interior dos elementos. As funções de aproximação são, então, chamadas de funções de interpolação [17] e o grau dessas funções depende do número de nós no elemento e da ordem da equação diferencial a ser aproximada.

O MEF consiste nas seguintes etapas [14]:

1. Aproximação do domínio:
  - construção da malha de elementos finitos;
  - numeração dos nós e elementos;
2. Aproximação da solução (descrita pela formulação fraca) no domínio aproximado:
  - construção da formulação variacional para um elemento genérico;
  - suposição de que a variável dependente  $u$  é da forma

$$u = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i;$$

que, substituída na formulação variacional, resulta nas equações locais (elementares), da forma:

$$[M^e] \ddot{u}^e + [K^e] u^e = F^e;$$

- dedução ou seleção (caso existam na literatura) das funções de interpolação  $\phi_i$  e montagem das matrizes elementares;
3. Acoplamento das equações elementares, para obtenção das equações globais do sistema:
- identificação das condições de continuidade entre os elementos, relacionando os graus de liberdade locais com os graus de liberdade globais (do sistema);
  - obtenção das equações globais do sistema, sob a forma:

$$[M^G]\ddot{u}^G + [K^G]u^G = F^G;$$

4. Imposição das Condições de Contorno:

- quando as equações do sistema estiverem prontas para serem resolvidas, elas devem ser modificadas para considerar as condições de contorno do problema. Nesse momento, impõe-se os valores nodais conhecidos;

5. Solução do Sistema de Equações:

- cálculos das variáveis dependentes desconhecidas.

A discretização por Elementos Finitos requer três escolhas: do número de elementos iniciais, no qual o sistema será subdividido inicialmente; escolha do tipo de elemento (define o tipo de aproximação); e definição da precisão da aproximação desejada [14].

Todo esse processo, desde a modelagem de um problema até a discretização por elementos finitos pode ser visualizado pelo esquema da figura (6.1):

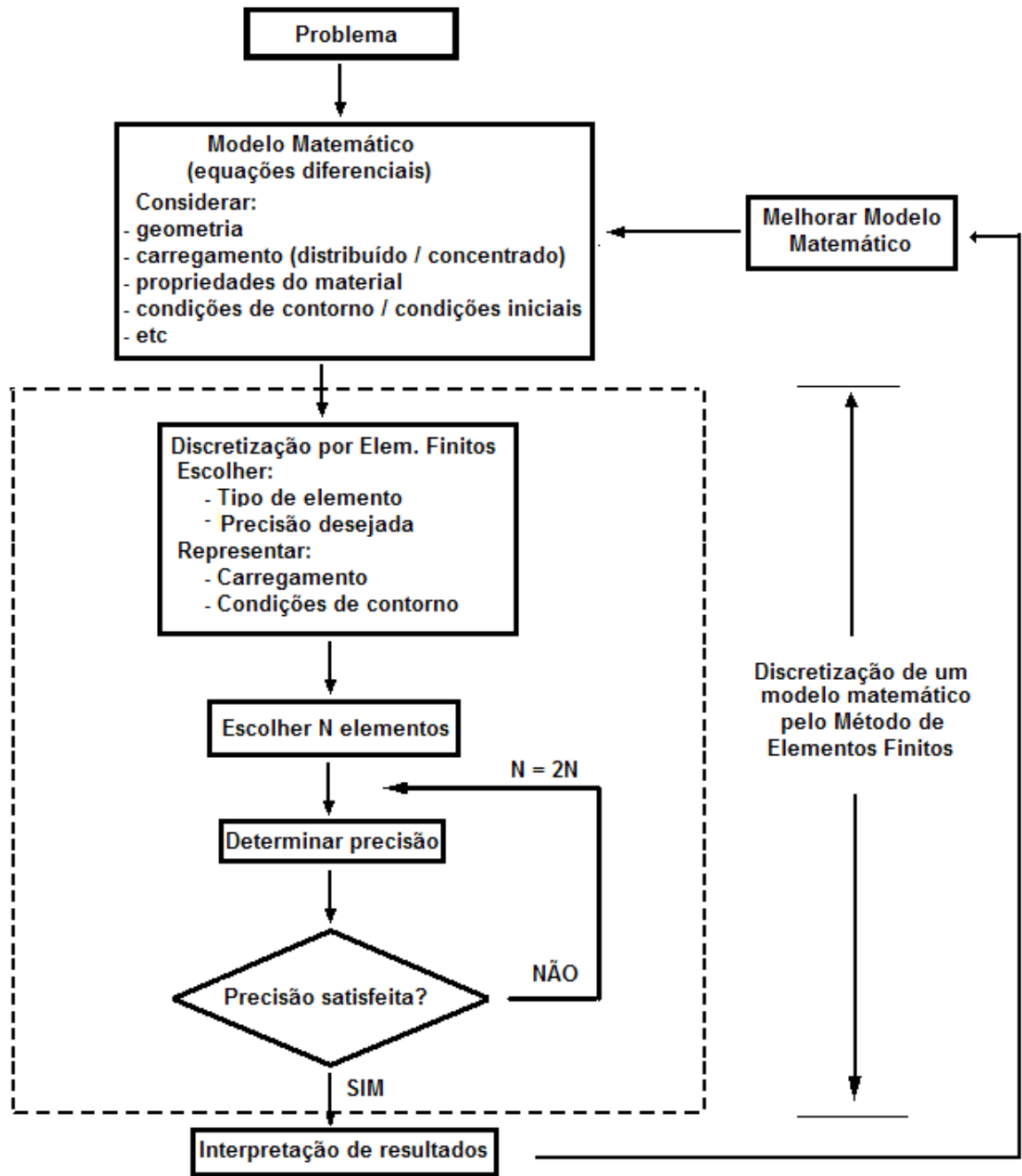


Figura 6.1: Procedimento completo do Método de Elementos Finitos [1]

Deseja-se apresentar um exemplo que realize os passos descritos no diagrama (6.1). Considere um círculo de raio  $R$  [5], como o da figura (6.2):

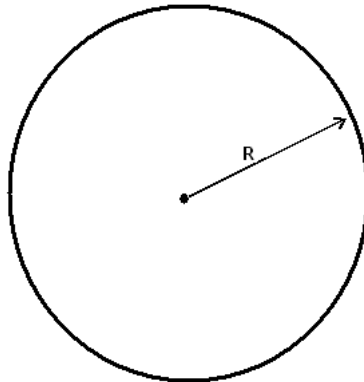


Figura 6.2: Círculo de raio  $R$

**Objetivo:** Calcular a área  $A$  do círculo

**Aproximação:** a área do círculo é aproximada pelo somatório das áreas de triângulos inscritos iguais inscritos. Para obter esses triângulos, escolhe-se pontos equidistantes ao longo da circunferência. O número de pontos escolhidos define o número de triângulos inscritos no círculo. Uma vez definidos os triângulos, pode-se calcular a área de cada um deles e o respectivo somatório, que corresponde à aproximação desejada.

A solução do problema, a área do círculo, e é dada pela fórmula  $A = \pi R^2$ . Suponha um círculo de raio  $R = 10\text{cm}$  e aproxima-se o valor de  $\pi$  por 3.1415. Com isso, a solução do problema é  $A = 314.15\text{cm}^2$ .

Foram feitas diversas aproximações e calculadas as áreas correspondentes ( $A_p$ ). Inicialmente, escolheu-se 4 pontos ao longo da circunferência e calculou-se o somatório das áreas dos quatro triângulos inscritos. O mesmo procedimento foi realizado para 5, 6, 7, 8 e 9 triângulos, conforme apresentam as figuras (6.3), (6.4) e (6.5)



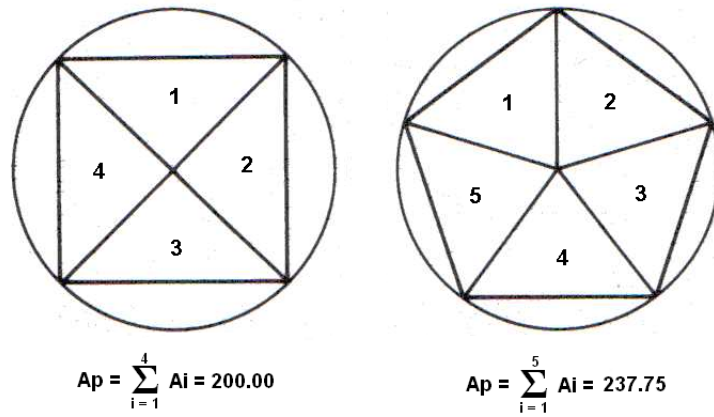


Figura 6.3: Círculo discretizado em 4 e 5 triângulos

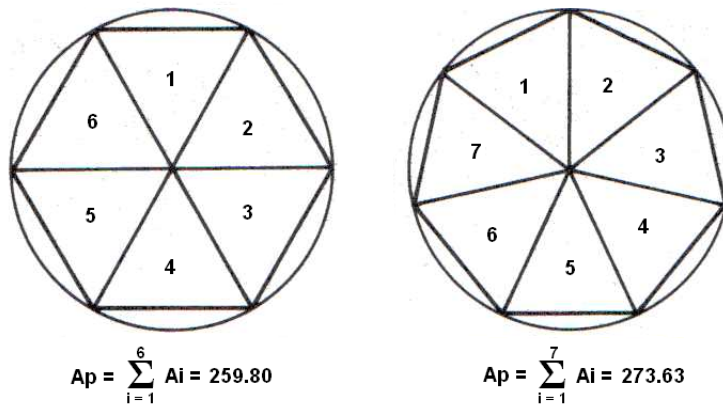


Figura 6.4: Círculo discretizado em 6 e 7 triângulos

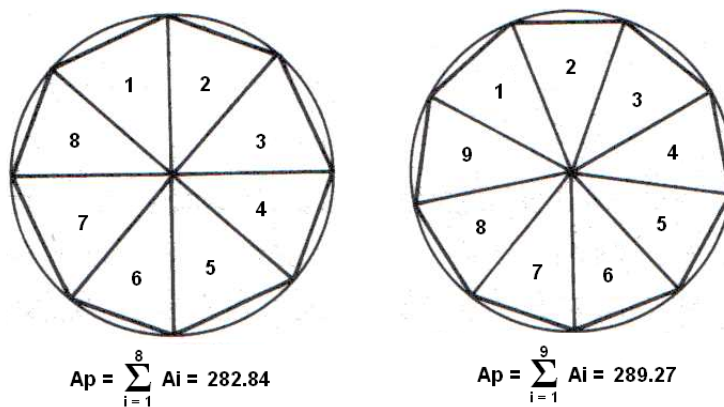


Figura 6.5: Círculo discretizado em 8 e 9 triângulos

A rotina de divisão do círculo em mais triângulos deve ser repetida quantas vezes forem necessárias, até que a precisão estabelecida inicialmente

seja satisfeita. Uma vez satisfeita a precisão, deve-se, simplesmente interpretar os resultados obtidos.

Supondo que a precisão  $e$  do problema seja definida por  $2e^{-1}$ , deseja-se calcular o número de pontos necessários para obter uma aproximação válida. A área exata do círculo,  $A_e$ , é dada por:

$$A_e = \pi R^2 = 314.1593 \quad (6-1)$$

A tabela (6.1) apresenta a comparação entre as aproximações calculadas e a solução.

Discretização (n pontos)	Aproximação ( $A_p = (b_i * h_i/2) * n$ )	Erro $E = A_e - A_p$
4 pontos	200.0000 $cm^2$	114.1593
5 pontos	237.7569 $cm^2$	76.4024
6 pontos	259.8076 $cm^2$	54.3516
7 pontos	273.6395 $cm^2$	40.5197
8 pontos	282.8408 $cm^2$	31.3184
9 pontos	289.2786 $cm^2$	24.8806
10 pontos	293.8357 $cm^2$	20.3236
11 pontos	297.3494 $cm^2$	16.8099
12 pontos	299.9966 $cm^2$	14.1627
20 pontos	309.0496 $cm^2$	5.1097
25 pontos	310.9426 $cm^2$	3.2166
30 pontos	311.7980 $cm^2$	2.3612
40 pontos	312.6960 $cm^2$	1.4632
50 pontos	313.1562 $cm^2$	1.0031
60 pontos	313.8035 $cm^2$	0.3558
70 pontos	313.8524 $cm^2$	0.3069
80 pontos	314.0474 $cm^2$	0.1119

Tabela 6.1: Comparação entre aproximações e solução

Através da tabela (6.1) pode-se perceber que, quanto maior número de pontos escolhidos ao longo da circunferência e, conseqüentemente, maior o número de triângulos inscritos, melhor será a aproximação. Para 80 pontos distribuídos ao longo do domínio, a aproximação satisfaz a precisão desejada, porque o erro  $E$  é menor do que  $e$  ( $E < e$ ).

Com isso, pode-se concluir que a aproximação  $A_p$  converge para a solução  $A_e$  à medida que  $n \rightarrow \infty$ .

## 6.1

### Aproximação do domínio

Uma vez definido o número de elementos em que o domínio será inicialmente discretizado, pode-se construir a malha de elementos finitos. Escolhe-se o tipo de elemento que será utilizado, e numera-se os nós dos elementos [14].

## 6.2

### Aproximação da solução no domínio aproximado

#### 6.2.1

##### Aproximação Linear

Considere um intervalo dividido em subintervalos, que são elementos de dois nós. O elemento típico é representado por  $\Omega^e = (x_1, x_2)$ :

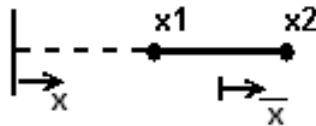


Figura 6.6: Elemento típico de dois nós

sendo  $x$  a coordenada global do problema e  $\bar{x}$ , a coordenada local do elemento, com origem no centro do elemento; tal que  $-1 < \bar{x} < 1$ .

Um polinômio linear completo é da forma:

$$U^e = a + bx \quad (6-2)$$

sendo  $a$  e  $b$  constantes. Calcula-se os valores nos nós:

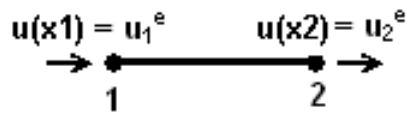


Figura 6.7: Graus de liberdade relacionados ao elemento

$$U^e(x_1) = u_1^e \quad U^e(x_2) = u_2^e \quad (6-3)$$

substituindo a equação (6-3) em (6-2), tem-se:

$$\begin{aligned} u_1^e &= a + bx_1 \\ u_2^e &= a + bx_2 \end{aligned} \quad (6-4)$$

que pode ser escrita em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (6-5)$$

Deseja-se calcular as expressões para os coeficientes  $a$  e  $b$ , da expressão (6-2). Para isso, inverte-se a equação (6-5), aplicando a regra de Cramer e obtém-se:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} u_1^e & x_1 \\ u_2^e & x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{h_e} (u_1^e x_2 - u_2^e x_1) \equiv \frac{1}{h_e} (\alpha_1^e u_1^e + \alpha_2^e u_2^e) \quad (6-6)$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_1^e \\ 1 & u_2^e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{h_e} (u_2^e - u_1^e) \equiv \frac{1}{h_e} (\beta_1^e u_1^e + \beta_2^e u_2^e)$$

sendo  $h_e = x_2 - x_1$  e:

$$\begin{aligned} \alpha_1^e &= (-1)^j x_j^e & x_1^e &= x_1 \\ \beta_1^e &= (-1)^i & x_2^e &= x_2 \end{aligned} \quad (6-7)$$

na equação (6-7):

$$\begin{aligned} \text{se } i = 1 &\implies j = 2 \\ \text{se } i = 2 &\implies j = 1 \end{aligned}$$

As variáveis  $\alpha_i^e$  e  $\beta_i^e$  foram introduzidas para mostrar a forma típica das funções de interpolação. Substituindo (6-6) em (6-2):

$$\begin{aligned} U^e(x) &= \frac{1}{h_e} [(\alpha_1^e u_1^e + \alpha_2^e u_2^e) + (\beta_1^e u_1^e + \beta_2^e u_2^e)x] \\ &= \frac{1}{h_e} (\alpha_1^e + \beta_1^e x) u_1^e + \frac{1}{h_e} (\alpha_2^e + \beta_2^e x) u_2^e \end{aligned} \quad (6-8)$$

Isso pode ser reescrito na forma:

$$U^e(x) = \phi_1^e(x) u_1^e + \phi_2^e(x) u_2^e = \sum_{j=1}^2 \phi_j^e(x) u_j^e \quad (6-9)$$

sendo:

$$\phi_1^e(x) = \frac{1}{h_e} (\alpha_1^e + \beta_1^e x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad (6-10)$$

$$\phi_2^e(x) = \frac{1}{h_e} (\alpha_2^e + \beta_2^e x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

que são chamadas de funções lineares de aproximação. Pode-se reescrever as funções de (6-10), em termos da coordenada  $\bar{x}$  [14]:

$$\phi_1^e(\bar{x}) = \frac{1}{2}(1 - \bar{x}) \quad \phi_2^e(\bar{x}) = \frac{1}{2}(1 + \bar{x}) \quad (6-11)$$

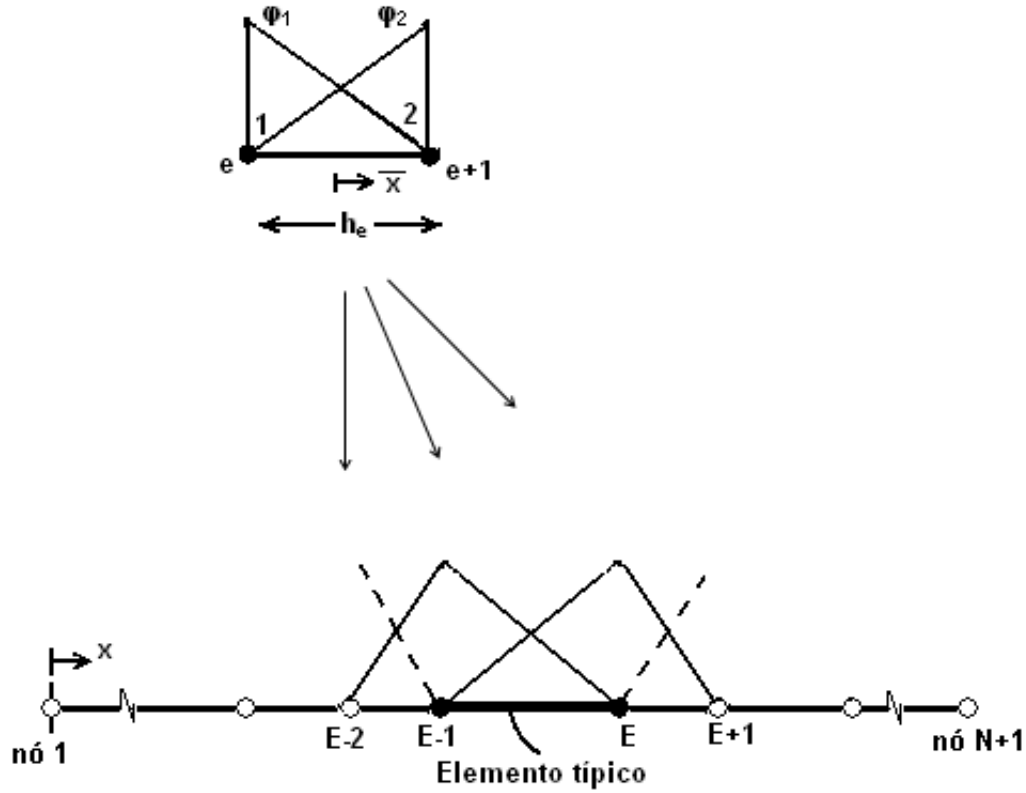


Figura 6.8: Funções de interpolação local e global de um elementos linear

A partir das funções de interpolação pode-se calcular as matrizes de massa e de rigidez elementares, apenas substituindo as expressões de (6-11).

$$M^{(e)} = \frac{\rho A h_e}{2} \begin{pmatrix} \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_1 dr & \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_2 dr \\ \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_1 dr & \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_2 dr \end{pmatrix} \quad (6-12)$$

$$K^{(e)} = \frac{2EA}{h_e} \begin{pmatrix} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{d\phi_1}{dr}\right) \left(\frac{d\phi_1}{dr}\right) dr & \int_{-1}^{+1} \left(\frac{d\phi_1}{dr}\right) \left(\frac{d\phi_2}{dr}\right) dr \\ \int_{-1}^{+1} \left(\frac{d\phi_2}{dr}\right) \left(\frac{d\phi_1}{dr}\right) dr & \int_{-1}^{+1} \left(\frac{d\phi_2}{dr}\right) \left(\frac{d\phi_2}{dr}\right) dr \end{pmatrix} \quad (6-13)$$

## 6.2.2 Aproximação Quadrática

No caso da aproximação quadrática, são necessários três nós por elemento, conforme a figura (6.9):

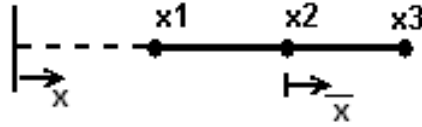


Figura 6.9: Elemento típico de três nós

Nesse caso, utiliza-se o polinômio completo de segundo grau que é dado por:

$$U^e(x) = a + bx + cx^2 \quad (6-14)$$

sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  constantes. Calcula-se os valores em cada nó:

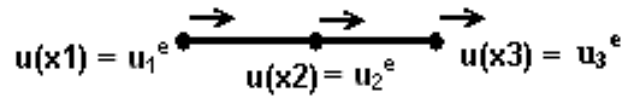


Figura 6.10: Graus de liberdade associados ao elemento de três nós

Cada nó possui o seu próprio deslocamento que, substituído na expressão (6-14) tem-se:

$$\begin{aligned} u_1^e &= U^e(x_1) = a + bx_1^e + c(x_1^e)^2 \\ u_2^e &= U^e(x_2) = a + bx_2^e + c(x_2^e)^2 \\ u_3^e &= U^e(x_3) = a + bx_3^e + c(x_3^e)^2 \end{aligned} \quad (6-15)$$

que pode ser reescrita em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^e & (x_1^e)^2 \\ 1 & x_2^e & (x_2^e)^2 \\ 1 & x_3^e & (x_3^e)^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (6-16)$$

sendo  $x_i^e$  a coordenada global do  $i$ -ésimo nó, do elemento  $\Omega^e$ . Invertendo-se a equação (6-16), tem-se:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{D^e} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^e u_i^e, \quad \alpha_i^e = x_j^e (x_k^e)^2 - x_k^e (x_j^e)^2 \\
 b &= \frac{1}{D^e} \sum_{i=1}^3 \beta_i^e u_i^e, \quad \beta_i^e = (x_j^e)^2 - (x_k^e)^2 \\
 c &= \frac{1}{D^e} \sum_{i=1}^3 \gamma_i^e u_i^e, \quad \gamma_i^e = -(x_j^e - x_k^e), \quad D^e = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^e
 \end{aligned} \tag{6-17}$$

da equação (6-14):

$$U^e(x) = \phi_1^e(x)u_1^e + \phi_2^e(x)u_2^e + \phi_3^e(x)u_3^e = \sum_{j=1}^3 \phi_j^e(x)u_j^e \tag{6-18}$$

onde  $\phi_j^e$  são as funções quadráticas de interpolação.

$D^e$  corresponde ao determinante da matriz apresentada em (6-16), e  $\alpha_i^e$ ,  $\beta_i^e$  e  $\gamma_i^e$  são definidas por(6-17), de forma que:

$$\begin{aligned}
 \text{se } i = 1 &\implies j = 2, \quad k = 3 \\
 \text{se } i = 2 &\implies j = 3, \quad k = 1 \\
 \text{se } i = 3 &\implies j = 1, \quad k = 2
 \end{aligned}$$

As funções de interpolação quadrática podem ser expressas nas coordenadas locais de cada elemento ( $\bar{x}$ ), com origem no centro do elemento e variando entre  $-1$  e  $+1$ . A coordenada global  $x$  relaciona-se com a coordenada local  $\bar{x}$  da seguinte forma:

$$x = x_2^e + \bar{x} \tag{6-19}$$

onde  $x_2^e = x_B$  é a coordenada global do segundo nó do elemento  $\Omega^e$ , localizado no centro do elemento. Para esse caso, as funções de interpolação são dadas por [14]:

$$\begin{aligned}
 \phi_1^e(\bar{x}) &= \frac{1}{2}(1 - \bar{x}) - \frac{1}{2}(1 - \bar{x}^2) \\
 \phi_2^e(\bar{x}) &= (1 - \bar{x}^2) \\
 \phi_3^e(\bar{x}) &= \frac{1}{2}(1 + \bar{x}) - \frac{1}{2}(1 - \bar{x}^2)
 \end{aligned} \tag{6-20}$$



As funções de interpolação podem ser visualizadas pela figura (6.11), sendo que  $\phi_i^e$  tem valor *um* no nó *i* e *zero* nos demais, variando quadraticamente entre os nós.

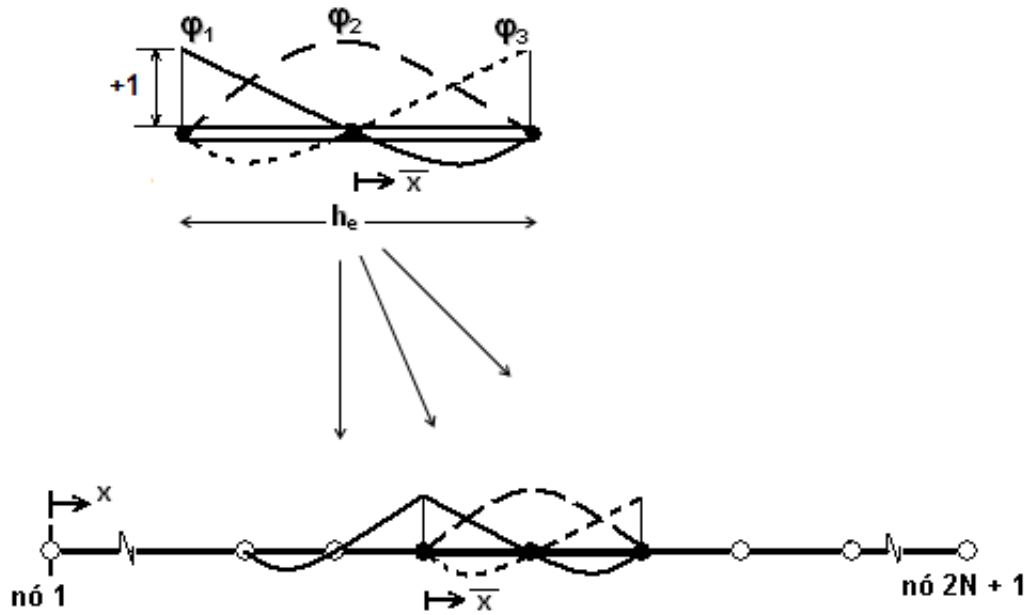


Figura 6.11: Funções de interpolação locais e globais do elemento quadrático

Uma vez conhecidas as funções de interpolação de um elemento de três nós, pode-se montar as respectivas matrizes de massa e de rigidez:

$$M^{(e)} = \frac{\rho A h_e}{30} \begin{pmatrix} \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_1 dr & \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_2 dr & \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_3 dr \\ \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_1 dr & \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_2 dr & \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_3 dr \\ \int_{-1}^{+1} \phi_3 \phi_1 dr & \int_{-1}^{+1} \phi_3 \phi_2 dr & \int_{-1}^{+1} \phi_3 \phi_3 dr \end{pmatrix} \quad (6-21)$$

$$K^{(e)} = \frac{2EA}{h_e} \begin{pmatrix} \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} d\bar{x} \end{pmatrix} \quad (6-22)$$

### 6.2.3 Aproximação Cúbica

O mesmo procedimento pode ser repetido para elementos de quatro nós (aproximações cúbicas):

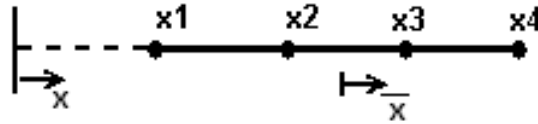


Figura 6.12: Elemento típico de quatro nós

Um polinômio cúbico completo é da forma:

$$U^e = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad (6-23)$$

sendo  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  constantes.

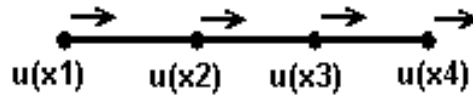


Figura 6.13: Graus de liberdade associados a um elemento de quatro nós

Realizados os cálculos necessários, obtém-se as funções de interpolação correspondentes aos elementos de aproximação cúbica:

$$\phi_1(\bar{x}) = \frac{(1-\bar{x})}{2} - \frac{(1-\bar{x}^2)}{2} + \frac{(-9\bar{x}^3 + \bar{x}^2 + 9\bar{x} - 1)}{16}$$

$$\phi_2(\bar{x}) = (1 - \bar{x}^2) + \frac{(27\bar{x}^3 + 7\bar{x}^2 - 27\bar{x} - 7)}{16}$$

$$\phi_3(\bar{x}) = \frac{(-27\bar{x}^3 - 9\bar{x}^2 + 27\bar{x} + 9)}{16}$$

$$\phi_4(\bar{x}) = \frac{(1+\bar{x})}{2} - \frac{(1-\bar{x}^2)}{2} + \frac{(9\bar{x}^3 + \bar{x}^2 - 9\bar{x} - 1)}{16}$$

(6-24)

As funções de interpolação desse elemento (aproximação cúbica) podem ser visualizadas no gráfico a seguir:

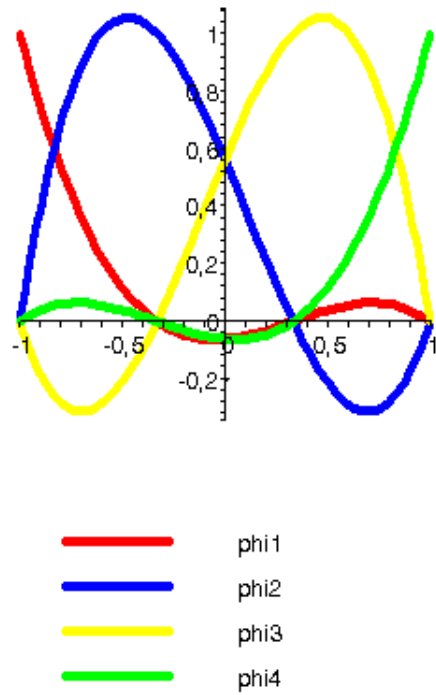


Figura 6.14: Funções de interpolação de um elemento de quatro nós

As matrizes elementares são representadas por:

$$M^{(e)} = \frac{\rho A h_e}{2} \begin{pmatrix} \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_1 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_2 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_3 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_4 d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_1 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_2 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_3 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_4 d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \phi_3 \phi_1 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_3 \phi_2 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_3 \phi_3 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_3 \phi_4 d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \phi_4 \phi_1 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_4 \phi_2 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_4 \phi_3 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_4 \phi_4 d\bar{x} \end{pmatrix}$$

$$K^{(e)} = \frac{2EA}{h_e} \begin{pmatrix} \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} d\bar{x} \end{pmatrix}$$

### 6.2.4 Aproximação Hermitiana

Os elementos de Hermite são de dois nós, porém cada nó possui dois graus de liberdade, um referente ao deslocamento e outro referente à rotação [12]:

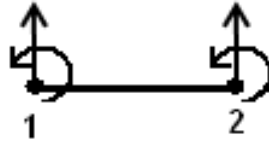


Figura 6.15: Graus de liberdade associados a um elemento de Hermite

Suas funções de interpolação estão apresentadas na equação (6-25) e na figura (6.16):

$$\phi_1(\bar{x}) = 1 - 3(\bar{x})^2 + 2(\bar{x})^3, \quad \phi_2(\bar{x}) = \bar{x}(1 - \bar{x})^2 \quad (6-25)$$

$$\phi_3(\bar{x}) = 3(\bar{x})^2 - 2(\bar{x})^3, \quad \phi_4(\bar{x}) = \bar{x}^2(\bar{x} - 1)$$

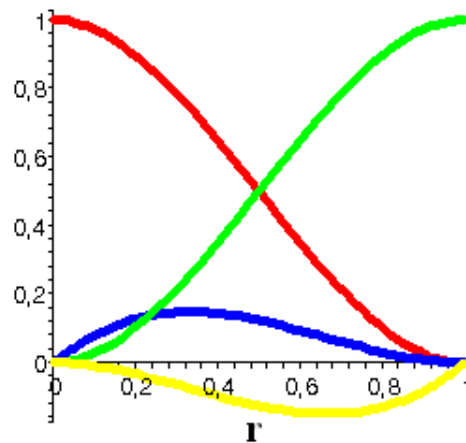


Figura 6.16: Funções de interpolação de um elemento de Hermite

As matrizes elementares são de um elemento Hermitiano são:

$$M^{(e)} = \frac{\rho A h_e}{2} \begin{pmatrix} \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_1 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_2 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_3 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_4 d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_1 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_2 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_3 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_4 d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \phi_3 \phi_1 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_3 \phi_2 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_3 \phi_3 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_3 \phi_4 d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \phi_4 \phi_1 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_4 \phi_2 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_4 \phi_3 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_4 \phi_4 d\bar{x} \end{pmatrix}$$

$$K^{(e)} = \frac{2EA}{h_e} \begin{pmatrix} \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} d\bar{x} \end{pmatrix}$$

### 6.2.5

#### Aproximação de ordem n

Todas as funções de interpolação satisfazem as seguintes propriedades, conhecidas como propriedades de interpolação [14]:

$$\phi_i^e(x_j^e) = \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (6-26)$$

$$\sum_{j=1}^n \phi_j^e(x) = 1 \quad \therefore \quad \sum_{j=1}^n \frac{d\phi_j^e}{dx} = 0$$

sendo  $n - 1$  o grau dos polinômios de interpolação; e  $x_j^e$  a coordenada global do nó  $j$ , do elemento  $\Omega^e$ . Pode-se verificar que as funções de interpolação linear (6-11) e quadrática (6-20) satisfazem as propriedades de (6-26).

### 6.3

#### Escolha do número de elementos iniciais (N)

Escolhido o número de elementos iniciais, divide-se o domínio em  $N$  partes e, para cada elemento, pode-se aplicar as funções de interpolação e construir as matrizes elementares.

Em seguida, acopla-se as matrizes elementares, e tem-se as equações globais do sistema. Calculados os resultados, verifica-se se a precisão desejada foi atingida. Se não foi, refaz-se os cálculos para um número maior de elementos, ou seja, uma malha ainda mais refinada

### 6.4

#### Análise do erro

Os erros introduzidos a uma aproximação por elementos finitos de uma equação diferencial podem ser atribuídos, a três causas [14]:

1. Erro na aproximação do domínio;
2. Erro de computação numérica;
3. Erro na aproximação da solução

Problemas unidimensionais têm seus domínios representados por linhas, por isso não é necessário aproximá-los. Porém, em problemas bi-dimensionais, envolvendo domínios não-retangulares (tais como o círculo da figura (6.2)), os erros de aproximação do domínio são introduzidos à aproximação por elementos finitos. Conforme a malha é refinada, o domínio passa a ser melhor representado e os erros de aproximação do domínio tendem a zero.

Quando os cálculos por elementos finitos são executados em computadores, introduz-se à aproximação, erros devido aos cálculos numéricos de integrais.

Além disso, há o erro devido a aproximação da variável dependente do problema  $u$ , que também deve ser introduzido à solução por elementos finitos:  $u \equiv u^N$ . Existem diversas maneiras de medir a diferença entre a solução  $u$  e a aproximação  $u^N$ ; porém, neste trabalho, será adotado o erro norma  $L_2$ , definido por:

$$\| u^{2N} - u^N \|_0 = \left( \int_a^b | u^{2N} - u^N |^2 dx \right)^{1/2} \quad (6-27)$$

sendo  $u^N$  e  $u^{2N}$  as aproximações definidas por:

$$u^N = u - \varepsilon^N$$

$$u^{2N} = u - \varepsilon^{2N}$$

## 7

## APLICAÇÃO DO MEF PROBLEMAS DE BARRAS E VIGAS

Este capítulo tem, por objetivo, mostrar a aplicação do Método de Elementos Finitos em problemas de barras e de vigas apresentando as matrizes elementares e globais do sistema.

### 7.1

#### Problema de uma barra fixa-livre

A formulação fraca da barra fixa-livre é dada pela equação (3-31).

#### 7.1.1

##### Escolha do número de elementos e do tipo de elemento

A fim de facilitar o entendimento, escolheu-se dividir o domínio em 3 elementos ( $N = 3$ ) lineares (de dois nós):

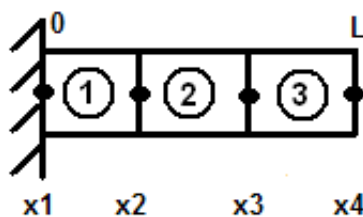


Figura 7.1: Barra fixa-livre dividida em elementos

A formulação fraca deverá ser escrita para cada um dos elementos, aplicando as funções de interpolação correspondentes ao elemento linear e respeitando as coordenadas globais de cada elemento:

$$\rho A \int_0^L \phi_i \phi_j dx \ddot{a}_i + EA \int_0^L \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx a_i = \int_0^L f \phi_j dx \quad (7-1)$$



– Elemento 1:  $x_1 < x < x_2$

$$\rho A \int_{x_1}^{x_2} \phi_i \phi_j dx \ddot{a}_i + EA \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx a_i = \int_{x_1}^{x_2} f \phi_j dx \quad (7-2)$$

e as matrizes elementares são dadas por:

$$M^{(1)} = \rho A \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} \phi_1 \phi_1 dx & \int_{x_1}^{x_2} \phi_1 \phi_2 dx \\ \int_{x_1}^{x_2} \phi_2 \phi_1 dx & \int_{x_1}^{x_2} \phi_2 \phi_2 dx \end{pmatrix} \quad (7-3)$$

$$K^{(1)} = EA \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx & \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx & \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx \end{pmatrix} \quad (7-4)$$

$$F^{(1)} = \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} f \phi_1 dx \\ \int_{x_1}^{x_2} f \phi_2 dx \end{pmatrix} \quad (7-5)$$

Para o elemento 1, tem-se a equação:

$$M^{(1)} \ddot{X}^{(1)} + K^{(1)} X^{(1)} = F^{(1)} \quad (7-6)$$

sendo:

$$\ddot{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{pmatrix}; \quad X^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \quad (7-7)$$

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} \end{pmatrix}; \quad K^{(1)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{pmatrix}; \quad F^{(1)} = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

– Elemento 2:  $x_2 < x < x_3$

$$\rho A \int_{x_2}^{x_3} \phi_i \phi_j dx \ddot{a}_i + EA \int_{x_2}^{x_3} \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx a_i = \int_{x_2}^{x_3} f \phi_j dx \quad (7-8)$$

tal que as matrizes elementares são:

$$M^{(2)} = \rho A \begin{pmatrix} \int_{x_2}^{x_3} \phi_2 \phi_2 dx & \int_{x_2}^{x_3} \phi_2 \phi_3 dx \\ \int_{x_2}^{x_3} \phi_3 \phi_2 dx & \int_{x_2}^{x_3} \phi_3 \phi_3 dx \end{pmatrix} \quad (7-9)$$

$$K^{(2)} = EA \begin{pmatrix} \int_{x_2}^{x_3} \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx & \int_{x_2}^{x_3} \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_3}{dx} dx \\ \int_{x_2}^{x_3} \frac{d\phi_3}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx & \int_{x_2}^{x_3} \frac{d\phi_3}{dx} \frac{d\phi_3}{dx} dx \end{pmatrix} \quad (7-10)$$

$$F^{(2)} = \begin{pmatrix} \int_{x_2}^{x_3} f \phi_2 dx \\ \int_{x_2}^{x_3} f \phi_3 dx \end{pmatrix} \quad (7-11)$$

Para o elemento 2, tem-se a equação:

$$M^{(2)} \ddot{X}^{(2)} + K^{(2)} X^{(2)} = F^{(2)} \quad (7-12)$$

sendo:

$$\ddot{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} \ddot{X}_2 \\ \ddot{X}_3 \end{pmatrix}; \quad X^{(2)} = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad (7-13)$$

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} M_{11}^{(2)} & M_{12}^{(2)} \\ M_{21}^{(2)} & M_{22}^{(2)} \end{pmatrix}; \quad K^{(2)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{pmatrix}; \quad F^{(2)} = \begin{pmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

– Elemento 3:  $x_3 < x < x_4$

$$\rho A \int_{x_3}^{x_4} \phi_i \phi_j dx \ddot{u}_i + EA \int_{x_3}^{x_4} \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx a_i = \int_{x_3}^{x_4} f \phi_j dx \quad (7-14)$$

onde as matrizes do elemento são:

$$M^{(3)} = \rho A \begin{pmatrix} \int_{x_3}^{x_4} \phi_3 \phi_3 dx & \int_{x_3}^{x_4} \phi_3 \phi_4 dx \\ \int_{x_3}^{x_4} \phi_4 \phi_3 dx & \int_{x_3}^{x_4} \phi_4 \phi_4 dx \end{pmatrix} \quad (7-15)$$

$$K^{(3)} = EA \begin{pmatrix} \int_{x_3}^{x_4} \frac{d\phi_3}{dx} \frac{d\phi_3}{dx} dx & \int_{x_3}^{x_4} \frac{d\phi_3}{dx} \frac{d\phi_4}{dx} dx \\ \int_{x_3}^{x_4} \frac{d\phi_4}{dx} \frac{d\phi_3}{dx} dx & \int_{x_3}^{x_4} \frac{d\phi_4}{dx} \frac{d\phi_4}{dx} dx \end{pmatrix} \quad (7-16)$$

$$F^{(3)} = \begin{pmatrix} \int_{x_3}^{x_4} f \phi_3 dx \\ \int_{x_3}^{x_4} f \phi_4 dx \end{pmatrix} \quad (7-17)$$

Para o elemento 3, tem-se a equação:

$$M^{(3)} \ddot{X}^{(3)} + K^{(3)} X^{(3)} = F^{(3)} \quad (7-18)$$

sendo:

$$\ddot{X}^{(3)} = \begin{pmatrix} \ddot{X}_3 \\ \ddot{X}_4 \end{pmatrix}; \quad X^{(3)} = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \quad (7-19)$$

$$M^{(3)} = \begin{pmatrix} M_{11}^{(3)} & M_{12}^{(3)} \\ M_{21}^{(3)} & M_{22}^{(3)} \end{pmatrix}; \quad K^{(3)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} \end{pmatrix}; \quad F^{(2)} = \begin{pmatrix} F_1^{(3)} \\ F_2^{(3)} \end{pmatrix}$$

As matrizes de massa e de rigidez globais do sistema são montadas a partir das matrizes elementares, respeitando os deslocamentos correspondentes a cada elemento. A equação global do sistema corresponde a:

$$M^{(G)} \ddot{X}^{(G)} + K^{(G)} X^{(G)} = F^{(G)} \quad (7-20)$$

sendo:

$$\ddot{X}^{(G)} = \begin{pmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \\ \ddot{X}_3 \\ \ddot{X}_4 \end{pmatrix}; \quad X^{(G)} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \quad (7-21)$$

$$M^{(G)} = \begin{pmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} + M_{11}^{(2)} & M_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & M_{21}^{(2)} & M_{22}^{(2)} + M_{11}^{(3)} & M_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & M_{21}^{(3)} & M_{22}^{(3)} \end{pmatrix} \quad (7-22)$$

$$K^{(G)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} \end{pmatrix} \quad (7-23)$$

$$F^{(G)} = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} + F_1^{(3)} \\ F_2^{(3)} \end{pmatrix} \quad (7-24)$$

$$M^{(G)} = \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} \phi_1 \phi_1 dx & \int_{x_1}^{x_2} \phi_1 \phi_2 dx & 0 & 0 \\ \int_{x_1}^{x_2} \phi_2 \phi_1 dx & \int_{x_1}^{x_2} \phi_2 \phi_2 dx + \int_{x_2}^{x_3} \phi_2 \phi_2 dx & \int_{x_2}^{x_3} \phi_2 \phi_3 dx & 0 \\ 0 & \int_{x_2}^{x_3} \phi_3 \phi_2 dx & \int_{x_2}^{x_3} \phi_3 \phi_3 dx + \int_{x_3}^{x_4} \phi_3 \phi_3 dx & \int_{x_3}^{x_4} \phi_3 \phi_4 dx \\ 0 & 0 & \int_{x_3}^{x_4} \phi_4 \phi_3 dx & \int_{x_3}^{x_4} \phi_4 \phi_4 dx \end{pmatrix} \quad (7-25)$$

$$K^{(G)} = \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx & \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx & 0 & 0 \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx & \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx + \int_{x_2}^{x_3} \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx & \int_{x_2}^{x_3} \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_3}{dx} dx & 0 \\ 0 & \int_{x_2}^{x_3} \frac{d\phi_3}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx & \int_{x_2}^{x_3} \frac{d\phi_3}{dx} \frac{d\phi_3}{dx} dx + \int_{x_3}^{x_4} \frac{d\phi_3}{dx} \frac{d\phi_3}{dx} dx & \int_{x_3}^{x_4} \frac{d\phi_3}{dx} \frac{d\phi_4}{dx} dx \\ 0 & 0 & \int_{x_3}^{x_4} \frac{d\phi_4}{dx} \frac{d\phi_3}{dx} dx & \int_{x_3}^{x_4} \frac{d\phi_4}{dx} \frac{d\phi_4}{dx} dx \end{pmatrix} \quad (7-26)$$

$$F^{(G)} = \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} f \phi_1 \\ \int_{x_1}^{x_2} f \phi_2 + \int_{x_2}^{x_3} f \phi_1 \\ \int_{x_2}^{x_3} f \phi_2 + \int_{x_3}^{x_4} f \phi_1 \\ \int_{x_3}^{x_4} f \phi_2 \end{pmatrix} \quad (7-27)$$

## 7.2

### Viga engastada com massa concentrada na extremidade

A viga engastada-massa apresenta-se na figura (A.29) e a sua formulação fraca é dada pela equação (5-43) que, com algumas substituições, pode ser representada por (5-45).

#### 7.2.1

##### Aplicação do MEF à viga engastada-massa

Aleatoriamente, escolheu-se o número de elementos no qual o sistema será discretizado,  $N = 4$ ; e o tipo de elemento a ser utilizado: linear, de dois nós.

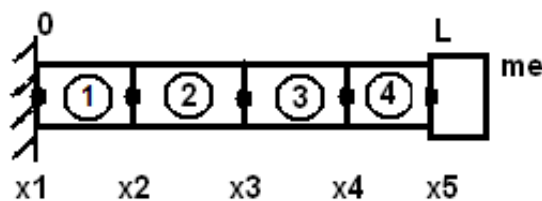


Figura 7.2: Viga engastada-massa dividida em elementos

A formulação fraca deverá ser escrita para cada um dos elementos, aplicando as funções de interpolação correspondentes e considerando as coordenadas de cada elemento. Cada nó possui três graus de liberdade: deslocamento longitudinal (efeito de barras), deslocamento vertical e rotação (efeito de vigas).

Considere um elemento genérico, limitado por dois nós ( $k$  e  $k + 1$ ); e a sua coordenada  $x$  varia da seguinte forma:  $x_k < x < x_{k+1}$

$$\begin{aligned} \rho A \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_i \phi_j dx \ddot{a}_i + m_e \phi_i \phi_j \ddot{a}_i + EI \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx a_i \\ = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \phi_j dx \end{aligned} \quad (7-28)$$

As matrizes elementares são dadas por:

$$M^{(e)} = \rho A \begin{pmatrix} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_1 \phi_1 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_1 \phi_2 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_1 \phi_3 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_1 \phi_4 dx \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_2 \phi_1 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_2 \phi_2 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_2 \phi_3 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_2 \phi_4 dx \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_3 \phi_1 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_3 \phi_2 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_3 \phi_3 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_3 \phi_4 dx \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_4 \phi_1 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_4 \phi_2 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_4 \phi_3 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_4 \phi_4 dx \end{pmatrix} \quad (7-29)$$

$$K^{(e)} = \rho A \begin{pmatrix} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} \frac{d^2 \phi_3}{dx^2} dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} \frac{d^2 \phi_4}{dx^2} dx \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} \frac{d^2 \phi_3}{dx^2} dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} \frac{d^2 \phi_4}{dx^2} dx \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d^2 \phi_3}{dx^2} \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d^2 \phi_3}{dx^2} \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d^2 \phi_3}{dx^2} \frac{d^2 \phi_3}{dx^2} dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d^2 \phi_3}{dx^2} \frac{d^2 \phi_4}{dx^2} dx \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d^2 \phi_4}{dx^2} \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d^2 \phi_4}{dx^2} \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d^2 \phi_4}{dx^2} \frac{d^2 \phi_3}{dx^2} dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d^2 \phi_4}{dx^2} \frac{d^2 \phi_4}{dx^2} dx \end{pmatrix} \quad (7-30)$$

$$F^{(e)} = \begin{pmatrix} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \phi_1 dx \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \phi_2 dx \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \phi_3 dx \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \phi_4 dx \end{pmatrix} \quad (7-31)$$

Cada elemento do sistema pode ser representado pela equação massa-mola:

$$M^{(e)} \ddot{X}^{(e)} + K^{(e)} X^{(e)} = F^{(e)} \tag{7-32}$$

tal que:

$$\ddot{X}^{(e)} = \begin{pmatrix} \ddot{Y}_k \\ \ddot{\gamma}_k \\ \ddot{Y}_{k+1} \\ \ddot{\gamma}_{k+1} \end{pmatrix} \quad X^{(e)} = \begin{pmatrix} Y_k \\ \gamma_k \\ Y_{k+1} \\ \gamma_{k+1} \end{pmatrix} \tag{7-33}$$

de forma que  $Y_k$  representa o deslocamento transversal do nó  $k$  e  $\gamma_k$ , a rotação. Da mesma forma,  $Y_{k+1}$  é o deslocamento transversal do nó  $k + 1$  e  $\gamma_{k+1}$ , a sua rotação.

Para todos os elementos do sistema, as matrizes de massa, matrizes de rigidez e os vetores de carregamento serão montados da forma apresentada acima.

As matrizes globais devem ser montadas respeitando as variáveis  $Y_k$  e  $\gamma_k$  de cada elemento:

$$M^{(G)} = \begin{pmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} & M_{13}^{(1)} & M_{14}^{(1)} & & \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} & M_{23}^{(1)} & M_{24}^{(1)} & & \\ M_{31}^{(1)} & M_{32}^{(1)} & M_{33}^{(1)} + M_{11}^{(2)} & M_{34}^{(1)} + M_{12}^{(2)} & \dots & \\ M_{41}^{(1)} & M_{42}^{(1)} & M_{43}^{(1)} + M_{21}^{(2)} & M_{44}^{(1)} + M_{22}^{(2)} & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & & & & M_{44}^{(4)} \end{pmatrix} \tag{7-34}$$

A massa concentrada na extremidade da viga será representada por um termo adicional,  $m_e \phi_N \phi_N$ , que afeta a matriz de massa do sistema, no seu

último grau de liberdade (rotação do último nó). Com o efeito adicional da massa concentrada, a matriz global de massa é:

$$M^{(G)} = \begin{pmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} & M_{13}^{(1)} & M_{14}^{(1)} & & & \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} & M_{23}^{(1)} & M_{24}^{(1)} & & & \\ M_{31}^{(1)} & M_{32}^{(1)} & M_{33}^{(1)} + M_{11}^{(2)} & M_{34}^{(1)} + M_{12}^{(2)} & \dots & & \\ M_{41}^{(1)} & M_{42}^{(1)} & M_{43}^{(1)} + M_{21}^{(2)} & M_{44}^{(1)} + M_{22}^{(2)} & & & \\ & & \vdots & & \ddots & & \\ & & & & & & M_{44}^{(4)} + m_e \end{pmatrix} \quad (7-35)$$

a matriz de rigidez e o vetor carregamento globais do sistema são, respectivamente:

$$K^{(G)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & & & \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & & & \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{34}^{(1)} + K_{12}^{(2)} & \dots & & \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} + K_{21}^{(2)} & K_{44}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & & & \\ & & \vdots & & \ddots & & \\ & & & & & & K_{44}^{(4)} \end{pmatrix} \quad (7-36)$$



$$F^{(G)} = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_4^{(1)} + F_2^{(2)} \\ \vdots \\ F_4^{(4)} \end{pmatrix} \quad (7-37)$$

### 7.3

#### Viga engastada com mola vertical na extremidade livre

A viga engastada-mola, apresentada na figura (A.27), tem a sua formulação fraca na equação (5-32) que também pode ser representada por (5-34).

#### 7.3.1

##### Aplicação do MEF à viga engastada-mola

Deseja-se apresentar, a partir da formulação fraca do sistema, como deve ser representada a mola vertical localizada na extremidade livre da viga para uma aproximação por Elementos Finitos.

O sistema deve ser discretizado e definiu-se que ele será dividido em 4 elementos ( $NE = 4$ ), cujas aproximações sejam lineares (elementos de dois nós).

A formulação fraca estava descrita para todo o domínio do sistema, mas deverá ser subdividida para cada elemento, de acordo com as suas coordenadas.

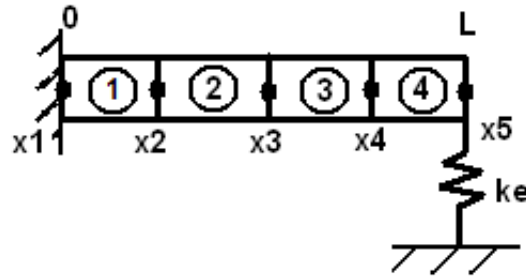


Figura 7.3: Viga engastada-mola dividida em elementos

Para um elemento genérico, de nós  $k$  e  $k + 1$ ; sua coordenada  $x$  varia da seguinte forma:  $x_k < x < x_{k+1}$

$$\rho A \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_i \phi_j dx \ddot{a}_i + EI \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx a_i + k_e \phi_i \phi_j a_i = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \phi_j dx \tag{7-38}$$

As matrizes elementares de massa e de rigidez são as mesmas apresentadas no exemplo anterior, bem como o vetor carregamento; e cada elemento também pode ser representado pela equação massa-mola (7-32).

A partir das matrizes elementares, pode-se montar as matrizes de massa e de rigidez globais:

$$M^{(G)} = \begin{pmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} & M_{13}^{(1)} & M_{14}^{(1)} & & & \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} & M_{23}^{(1)} & M_{24}^{(1)} & & & \\ M_{31}^{(1)} & M_{32}^{(1)} & M_{33}^{(1)} + M_{11}^{(2)} & M_{34}^{(1)} + M_{12}^{(2)} & \dots & & \\ M_{41}^{(1)} & M_{42}^{(1)} & M_{43}^{(1)} + M_{21}^{(2)} & M_{44}^{(1)} + M_{22}^{(2)} & & & \\ & & \vdots & & \ddots & & \\ & & & & & & M_{44}^{(4)} \end{pmatrix} \tag{7-39}$$

$$K^{(G)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & & \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & & \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{34}^{(1)} + K_{12}^{(2)} & \dots & \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} + K_{21}^{(2)} & K_{44}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & & & & K_{44}^{(4)} \end{pmatrix} \quad (7-40)$$

A mola vertical na extremidade livre da viga deve ser representada por um termo adicional  $k_e \phi_{N-1} \phi_{N-1}$ , que a afeta a matriz de rigidez do sistema, no penúltimo grau de liberdade (deslocamento vertical do último nó). Com o efeito da mola vertical, a matriz de rigidez global passa a ser:

$$K^{(G)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & & \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & & \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{34}^{(1)} + K_{12}^{(2)} & \dots & \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} + K_{21}^{(2)} & K_{44}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & & & & K_{33}^{(4)} + k_e \\ & & & & & & K_{44}^{(4)} \end{pmatrix} \quad (7-41)$$

o vetor carregamento global do sistema é:

$$F^{(G)} = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_4^{(1)} + F_2^{(2)} \\ \vdots \\ F_4^{(4)} \end{pmatrix} \quad (7-42)$$

## 8

### VIGAS COM CONDIÇÕES INTERMEDIÁRIAS

Neste capítulo serão estudados alguns problemas de vigas que apresentam condições intermediárias [2]; seja de apoio, massa concentrada ou mola vertical. Esses problemas não apresentam solução analítica, então é necessário usar o método de elementos finitos para construir uma base de aproximação [3]. Nesses casos, é conveniente dividir o domínio do sistema de forma que cada sub-domínio não apresente qualquer restrição intermediária.

Para esses problemas, foram desenvolvidas diversas simulações, com o auxílio do Matlab, com o objetivo de aproximar frequências naturais, modos de vibração e, conseqüentemente, a dinâmica do sistema. Os resultados estão detalhadamente apresentados no apêndice deste trabalho.

#### 8.1

##### Problemas de vigas com um apoio intermediário

Deseja-se apresentar a formulação fraca de problemas de vigas que apresentam um apoio intermediário e quaisquer condições de contorno. As vigas têm domínio  $[0 \quad L]$  e o apoio intermediário encontra-se na coordenada  $x = a$ .

A formulação forte desse tipo de problema é composta pela equação diferencial de deslocamento da viga, em conjunto com as condições de contorno, as condições intermediárias e as condições iniciais. As condições representativas do apoio intermediário, em  $x = a$ , são:

$$u(a, t) = 0 \quad (8-1)$$

O mesmo procedimento apresentado anteriormente para a obtenção da formulação fraca de vigas deve ser adotado nos problemas de viga com apoio intermediário: multiplica-se a equação diferencial por uma função-teste  $\psi(x)$

e integra-se todos os termos no domínio  $[0 \text{ a } L]$ ; o que resulta na equação abaixo:

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) \psi(x) dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx \quad (8-2)$$

A fim de facilitar os cálculos, a integral do domínio deve ser dividida na coordenada referente ao apoio intermediário:

$$\int_0^L = \int_0^a + \int_a^L \quad (8-3)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^a \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_a^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^a EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) \psi(x) dx \\ & + \int_a^L EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) \psi(x) dx = \int_0^a f(x, t) \psi(x) dx + \int_a^L f(x, t) \psi(x) dx \end{aligned} \quad (8-4)$$

Calcula-se a integral por partes ( $\int u dv = uv - \int v du$ ) duas vezes, resultando em:

$$\begin{aligned} & \int_0^a \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(a, t) \psi(a) - EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, t) \psi(0) - EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a, t) \frac{d\psi}{dx}(a) \\ & + EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) \frac{d\psi}{dx}(0) + \int_0^a EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx + \int_a^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx \\ & + EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) \psi(L) - EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(a, t) \psi(a) - EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) \frac{d\psi}{dx}(L) + EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a, t) \frac{d\psi}{dx}(a) \\ & + \int_a^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx = \int_0^a f(x, t) \psi(x) dx + \int_a^L f(x, t) \psi(x) dx \end{aligned} \quad (8-5)$$

À equação (8-5), aplica-se as condições de contorno do problema e condições intermediárias, o que resulta na formulação variacional do problema. A seguir, serão apresentados exemplos de problemas de vigas com diferentes condições de contorno, além do apoio intermediário e tem-se por objetivo:

- desenvolver formulação fraca do sistema;

- desenvolver o PVC associado (aproximar frequências e modos).

A escolha dos problemas estudados foi inspirada no livro de Robert Blevins, que apresenta tabelas de frequências naturais de vigas com diferentes condições de contorno além dos apoios intermediários. Através da aplicação do método de Elementos Finitos, pôde-se calcular o número de elementos necessários para reproduzir algumas dessas tabelas de acordo com uma precisão desejada. Além disso, aproximou-se os modos de vibração de cada caso.

### 8.1.1

#### Problema de viga bi-engastada com apoio intermediário

O problema de viga bi-engastada com apoio intermediário (A.47), apresenta as seguintes condições de contorno:

$$u(0, t) = 0 \quad u(L, t) = 0 \quad (8-6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$

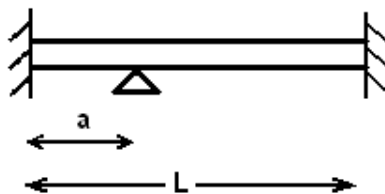


Figura 8.1: Viga bi-engastada com apoio intermediário

E a condição do apoio intermediário é descrita pela equação (8-1).

Essas condições devem ser aplicadas à equação e resultam na formulação variacional desse problema:

$$\int_0^a \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^a EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx + \int_a^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx \quad (8-7)$$

$$+ \int_a^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx = \int_0^a f(x, t) \psi(x) dx + \int_a^L f(x, t) \psi(x) dx$$

A função-teste  $\psi$  pertence a um espaço de funções  $Adm_5$  que satisfaça as condições de contorno essenciais e condições intermediárias essenciais do problema; além das condições de regularidade da função:

$$Adm_5 = \left\{ \psi : (0, L) \longrightarrow \Re \mid \psi(0) = 0, \frac{d\psi}{dx}(0) = 0, \psi(L) = 0, \frac{d\psi}{dx}(L) = 0, \right. \\ \left. \psi(a) = 0, \int_0^L |\psi|^2 dx < \infty, \int_0^L \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx < \infty \right\} \quad (8-8)$$

### 8.1.2

#### Problema de viga engastada-apoiada com apoio intermediário

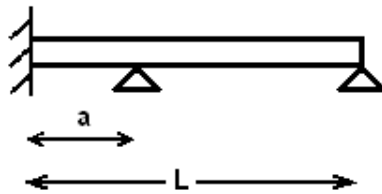


Figura 8.2: Viga engastada-apoiada com apoio intermediário

Condições de contorno:

$$u(0, t) = 0 \qquad u(L, t) = 0 \quad (8-9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \qquad M(L, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0$$

A condição do apoio intermediário é dada pela equação (8-1). Incorpora-se as condições de contorno e a condição intermediária a (8-5) e tem-se, como resultado, a formulação variacional do problema:

$$\int_0^a \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^a EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx + \int_a^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx \\ + \int_a^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx = \int_0^a f(x, t) \psi(x) dx + \int_a^L f(x, t) \psi(x) dx \quad (8-10)$$

A formulação fraca é formada pela formulação variacional em conjunto com o espaço de funções admissíveis,  $Adm_6$ , tal que:



$$Adm_6 = \left\{ \psi : (0, L) \longrightarrow \Re \mid \psi(0) = 0, \frac{d\psi}{dx}(0) = 0, \psi(L) = 0, \right. \\ \left. \psi(a) = 0, \int_0^L |\psi|^2 dx < \infty, \int_0^L \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx < \infty \right\} \quad (8-11)$$

### 8.1.3

#### Problema de viga bi-apoiada com apoio intermediário

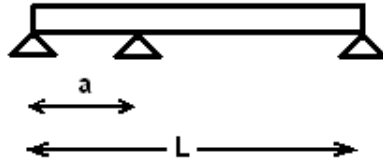


Figura 8.3: Viga bi-apoiada com apoio intermediário

Condições de contorno:

$$u(0, t) = 0 \qquad u(L, t) = 0 \quad (8-12)$$

$$\mathbb{M}(0, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = 0 \qquad \mathbb{M}(L, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0$$

A restrição do intermediário é descrita por (8-1) e, juntamente com as condições de contorno, deve ser acrescentada a (8-5) para obter a formulação variacional do sistema:

$$\int_0^a \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^a EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx + \int_a^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx \\ + \int_a^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx = \int_0^a f(x, t) \psi(x) dx + \int_a^L f(x, t) \psi(x) dx \quad (8-13)$$

No problema da viga bi-apoiada com apoio intermediário, a função-teste  $\psi$  pertence ao espaço  $Adm_7$ :

$$Adm_7 = \{\psi : (0, L) \longrightarrow \Re | \psi(0) = 0, \psi(L) = 0, \psi(a) = 0 \quad (8-14)$$

$$\int_0^L |\psi|^2 dx < \infty, \int_0^L \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx < \infty \}$$

### 8.1.4

#### Problema de viga apoiada-livre com apoio intermediário

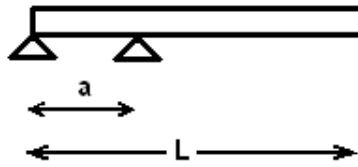


Figura 8.4: Viga apoiada-livre com apoio intermediário

Condições de contorno:

$$u(0, t) = 0 \quad V(L, t) = 0; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) = 0 \quad (8-15)$$

$$\mathbb{M}(0, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = 0 \quad \mathbb{M}(L, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0$$

A condição intermediária é dada por (8-1) que, em conjunto com as condições de contorno, é substituída na equação (8-5) e resulta na formulação variacional:

$$\int_0^a \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^a EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx + \int_a^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx \quad (8-16)$$

$$+ \int_a^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx = \int_0^a f(x, t) \psi(x) dx + \int_a^L f(x, t) \psi(x) dx$$

A função-teste do problema de viga apoiada-livre com apoio intermediário pertence ao espaço  $Adm_8$ , definido por:

$$Adm_8 = \{\psi : (0, L) \longrightarrow \Re | \psi(0) = 0, \psi(a) = 0 \quad (8-17)$$

$$\int_0^L |\psi|^2 dx < \infty, \int_0^L \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx < \infty \}$$

### 8.1.5

#### Problema de viga livre-livre com apoio intermediário

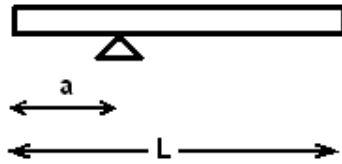


Figura 8.5: Viga livre-livre com apoio intermediário

Condições de contorno:

$$V(0, t) = 0; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, t) = 0 \quad V(L, t) = 0; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) = 0 \quad (8-18)$$

$$M(0, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = 0 \quad M(L, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0$$

A condição intermediária está apresentada na equação (8-1) e, uma vez substituída em (8-5), junto com as condições de contorno, tem-se a formulação variacional:

$$\int_0^a \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^a EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx + \int_a^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx \quad (8-19)$$

$$+ \int_a^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx = \int_0^a f(x, t) \psi(x) dx + \int_a^L f(x, t) \psi(x) dx$$

Para o problema de viga livre-livre com apoio intermediário, a função  $\psi$  pertence ao espaço  $Adm_9$ , tal que:

$$Adm_9 = \left\{ \psi : (0, L) \longrightarrow \Re \mid \psi(a) = 0, \int_0^L |\psi|^2 dx < \infty, \right. \\ \left. \int_0^L \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx < \infty \right\} \quad (8-20)$$

## 8.2

### Problema de viga engastada-livre com dois apoios intermediários

O mesmo procedimento adotado para vigas com um apoio intermediário deve ser empregado para vigas com  $n$  apoios intermediários. Isso pode ser entendido pelo exemplo a seguir, que é um problema de viga engastada-livre com dois apoios intermediários:

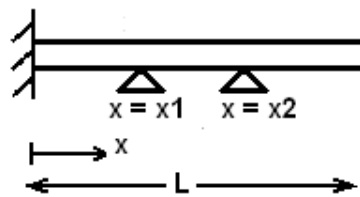


Figura 8.6: Viga engastada-livre com dois apoios intermediários

A equação de movimento da viga e as suas condições de contorno são, respectivamente:

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) - f(x, t) = 0 \quad (8-21)$$

$$u(0, t) = 0 \quad V(L, t) = 0; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) = 0 \quad (8-22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad M(L, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0$$

As condições dos apoios intermediários são:

$$u(x_1, t) = 0 \quad u(x_2, t) = 0 \quad (8-23)$$

Multiplica-se a equação de movimento da viga por  $\psi(x)$  e integra-se todos os termos no domínio  $[0 \quad L]$ . Nesse problema, os apoios intermediários encontram-se nas posições  $x = x_1$  e  $x = x_2$ , então é conveniente dividir o domínio do sistema em três subdomínios:

$$\int_0^L dx = \int_0^{x_1} dx + \int_{x_1}^{x_2} dx + \int_{x_2}^L dx \quad (8-24)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_1} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^{x_1} EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) \psi(x) dx - \int_0^{x_1} f(x, t) \psi(x) dx \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) \psi(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) \psi(x) dx \\ & + \int_{x_2}^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_{x_2}^L EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) \psi(x) dx - \int_{x_2}^L f(x, t) \psi(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (8-25)$$

Faz-se a integração por partes ( $\int u dv = uv - \int v du$ ) duas vezes, resultando na formulação em que deverão ser incorporadas as condições de contorno naturais, a função-teste satisfazendo as condições de contorno essenciais e as condições intermediárias do problema:

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_1} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_1, t) \underbrace{\psi(x_1)}_{=0} - EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1, t) \frac{d\psi(x_1)}{dx} - EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, t) \underbrace{\psi(0)}_{=0} \\ & + EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) \underbrace{\frac{d\psi(0)}{dx}}_{=0} + \int_0^{x_1} EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} dx - \int_0^{x_1} f(x, t) \psi(x) dx \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_2, t) \underbrace{\psi(x_2)}_{=0} - EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_2, t) \frac{d\psi(x_2)}{dx} - EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_1, t) \underbrace{\psi(x_1)}_{=0} \\ & + EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1, t) \frac{d\psi(x_1)}{dx} + \int_{x_1}^{x_2} EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) \psi(x) dx \\ & + \int_{x_2}^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) \underbrace{\psi(L)}_{=0} - EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) \frac{d\psi(L)}{dx} - EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_2, t) \underbrace{\psi(x_2)}_{=0} \\ & + EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_2, t) \frac{d\psi(x_2)}{dx} + \int_{x_2}^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} dx - \int_{x_2}^L f(x, t) \psi(x) dx = 0 \end{aligned}$$

A formulação variacional do problema de uma viga engastada-livre com dois apoios intermediários é:

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_1} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^{x_1} EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx - \int_0^{x_1} f(x, t) \psi(x) dx \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) \psi(x) dx \\ & + \int_{x_2}^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_{x_2}^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx - \int_{x_2}^L f(x, t) \psi(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (8-26)$$

Nesse problema de viga engastada-livre com dois apoios intermediários, a função-teste  $\psi$  pertence ao espaço  $Adm_{10}$  que apresenta as seguintes características:

$$Adm_{10} = \{ \psi : (0, L) \longrightarrow \Re \mid \psi(0) = 0, \frac{d\psi}{dx}(0) = 0, \psi(x_1) = 0, \quad (8-27)$$

$$\psi(x_2) = 0, \int_0^L |\psi|^2 dx < \infty, \int_0^L \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx < \infty \}$$

### 8.3

#### Viga bi-engastada com uma mola vertical em coordenada intermediária

Considere o problema de uma viga bi-engastada, com mola vertical intermediária, localizada na coordenada  $x = a$ , conforme mostra a figura (A.55):

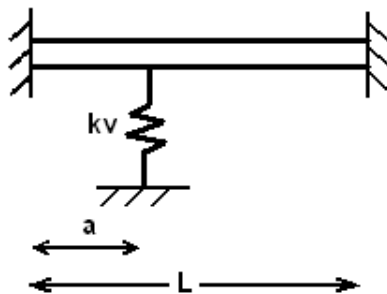


Figura 8.7: Viga bi-engastada com mole vertical em  $x = a$

As condições de contorno da viga bi-engastada estão apresentadas na equação (4-6) e as condições intermediárias devido a mola vertical, em  $x = a$ , são:

$$M(a, t) = 0 \implies \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a, t) = 0 \quad (8-28)$$

$$V(a, t) = k_v u(a, t) \implies \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(a, t) = \frac{k_v}{EI} u(a, t)$$

A mola vertical no meio do domínio  $[0, L]$  é representada por um termo extra que aparece na formulação variacional do problema de uma viga bi-engastada. Para calcular a formulação fraca, parte-se da equação diferencial do problema, que é multiplicada pela função-teste  $\psi$  e integrada em todo o domínio:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + EI \psi(L) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) - EI \psi(0) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, t) + k_v u \psi(a) \\ & - EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) \frac{d\psi(L)}{dx} + EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) \frac{d\psi(0)}{dx} + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx \end{aligned} \quad (8-29)$$

Na equação (8-29), incorpora-se as condições de contorno do problema, resultando na equação:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + EI \underbrace{\psi(L)}_{=0} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) - EI \underbrace{\psi(0)}_{=0} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, t) + k_v u \psi(a) \\ & - EI \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t)}_{=0} \frac{d\psi(L)}{dx} + EI \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t)}_{=0} \frac{d\psi(0)}{dx} + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx \end{aligned} \quad (8-30)$$

E a formulação variacional desse problema é:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + k_v u \psi(a) + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx \\ & = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx \end{aligned} \quad (8-31)$$

A função-teste  $\psi$  deve satisfazer às condições de contorno essenciais:

$u(0, t) = 0, u(L, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$ ; ou seja,  $\psi$  deve pertencer a um espaço  $Adm_{11}$  tal que:

$$Adm_{11} = \left\{ \psi : (0, L) \longrightarrow \Re \mid \psi(0) = 0, \frac{d\psi}{dx}(0) = 0, \psi(L) = 0, \right. \\ \left. \frac{d\psi}{dx}(L) = 0, \int_0^L |\psi|^2 dx < \infty, \int_0^L \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx < \infty \right\} \quad (8-32)$$

## 8.4

### Viga bi-apoiada com massa concentrada em coordenada intermediária

Considere o problema de uma viga bi-apoiada com uma massa concentrada ( $m_c$ ) localizada na coordenada  $x = a$ , de acordo com a figura (A.57):

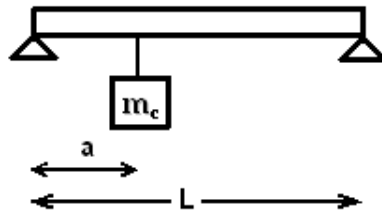


Figura 8.8: Viga bi-apoiada com massa concentrada em  $x = a$

Esse problema de viga apresenta as condições de contorno da equação (8-12) e as seguintes condições intermediárias:

$$M(a, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a, t) = 0 \quad (8-33)$$

$$V(a, t) = m_c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(a, t); \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) = \frac{m_c}{EI} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(a, t)$$

Esse problema é similar ao da viga bi-engastada com mola em coordenada intermediária. A massa concentrada ( $m_c$ ) em  $x = a$  será representada por um termo adicional na formulação variacional da viga. E a formulação fraca é obtida através do mesmo procedimento:



$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + EI \psi(L) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) - EI \psi(0) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, t) + m_c \ddot{u}(a) \quad (8-34)$$

$$- EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) \frac{d\psi(L)}{dx} + EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) \frac{d\psi(0)}{dx} + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$$

À equação (8-34), incorpora-se as condições de contorno do problema, resultando na formulação fraca:

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + EI \underbrace{\psi(L)}_{=0} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) - EI \underbrace{\psi(0)}_{=0} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, t) + k_v u \psi(a) \quad (8-35)$$

$$- EI \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t)}_{=0} \frac{d\psi(L)}{dx} + EI \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t)}_{=0} \frac{d\psi(0)}{dx} + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$$

A formulação do problema é:

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + k_v u \psi(a) + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx \quad (8-36)$$

$$= \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$$

A função-teste desse problema pertence a um espaço de funções  $Adm_{12}$  definido por:

$$Adm_{12} = \{ \psi : (0, L) \longrightarrow \Re \mid \psi(0) = 0, \psi(L) = 0 \} \quad (8-37)$$

$$\int_0^L |\psi|^2 dx < \infty, \int_0^L \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx < \infty \}$$

## 8.5

### Problema de viga apoiada-livre com uma mola torcional

Deseja-se encontrar a formulação fraca de uma viga apoiada-livre, que contém uma mola torcional ( $k_t$ ) na extremidade do apoio:



Figura 8.9: Viga apoiada-livre com uma mola torcional na extremidade do apoio

Esse problema possui as seguintes condições de contorno:

$$u(0, t) = 0 \quad V(L, t) = 0; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) = 0 \quad (8-38)$$

$$EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = k_t \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \quad M(L, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0$$

Parte-se da formulação forte do problema e, após as devidas integrações, chega-se à equação (5-3) onde devem ser incorporadas as condições de contorno do problema:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + EI \psi(L) \underbrace{\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t)}_{=0} - EI \underbrace{\psi(0)}_{=0} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, t) - EI \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t)}_{=0} \frac{d\psi(L)}{dx} \\ + EI \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t)}_{= \frac{k_t}{EI} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t)} \frac{d\psi(0)}{dx} + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx \end{aligned} \quad (8-39)$$

A formulação variacional do problema de viga apoiada-livre com mola torcional é:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + k_t \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \frac{d\psi(0)}{dx} + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx \\ = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx \end{aligned} \quad (8-40)$$

de forma que a função-teste  $\psi$  pertença ao espaço  $Adm_{13}$  que satisfaz as condições de contorno essenciais:

$$Adm_{13} = \left\{ \psi : (0, L) \longrightarrow \Re \mid \psi(0) = 0, \int_0^L |\psi|^2 dx < \infty, \right. \quad (8-41)$$

$$\left. \int_0^L \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx < \infty \right\} \text{ nonumber} \quad (8-42)$$

## 8.6

### Aproximação da dinâmica de um problema de viga com apoio intermediário

Nesta seção serão apresentados todos os passos necessários para aproximar a dinâmica de um problema [2]. Nesses casos, as frequências naturais e os modos de vibração não são conhecidos e, por isso, precisam ser aproximados pelo método de Elementos Finitos.

Considere o problema de uma viga bi-engastada, com um apoio intermediário e uma força  $F$  aplicada; conforme indica a figura (8.10). A viga apresenta comprimento  $L$ , área da seção transversal  $A$  e momento de inércia da seção transversal  $I$ ; o material tem densidade  $\rho$  e módulo de elasticidade  $E$ . O apoio intermediário encontra-se na coordenada  $x = a$  e a força é aplicada em  $x = b$ .

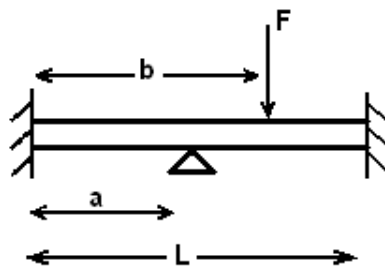


Figura 8.10: Viga engastada-apoiada-engastada com força aplicada

Sendo:

$L = 3m \implies$  comprimento da viga

$h = 0.05m \implies$  altura da viga

$b = 0.1m \implies$  largura da viga

$E = 2 \cdot 10^{11} \implies$  módulo de elasticidade

$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3 \implies$  densidade

Deseja-se aproximar a dinâmica do sistema. O problema pode ser dividido em duas partes: aproximação dos modos (pelo MEF) e aproximação da dinâmica. Deseja-se encontrar a solução tal que o erro ( $e$ ) da aproximação dos modos seja menor do que a precisão estabelecida  $p$ , por exemplo,  $10^{-2}$ ; ou seja  $e < 0.01$ . Além disso, o erro da aproximação da dinâmica também deve ser menor do que a precisão desejada. Como não existe solução analítica para este problema, o erro será baseado na comparação entre duas simulações. Faz-se os cálculos para um número qualquer de elementos e armazena-se os resultados. Em seguida, repete-se os cálculos para uma malha mais refinada e a diferença encontrada entre os dois casos, será o erro. Se esse erro estiver dentro da precisão estabelecida inicialmente, conclui-se que o número de elementos da primeira simulação é suficiente; caso contrário, faz-se novos cálculos, para um número de elementos ainda maior. Esse procedimento deverá ser repetido até que a precisão desejada seja atingida.

O erro nas frequências e modos é obtido pela comparação de frequências naturais e de funções dos modos de vibração do sistema. São calculadas as primeiras cinco frequências naturais para 10 elementos e, em seguida, para 20 elementos. Calcula-se o somatório das diferenças absolutas entre as frequências; comparando a primeira frequência da primeira simulação ( $f_1(s_1)$ ) com a primeira frequência da segunda simulação ( $f_1(s_2)$ ), a segunda frequência da primeira simulação ( $f_2(s_1)$ ) com a segunda frequência da segunda simulação ( $f_2(s_2)$ ) e assim por diante. A diferença entre as funções dos modos é calculada pelo erro norma  $L_2$ , conforme apresenta a equação (6-27); sendo o erro nos modos o somatório das diferenças entre os valores dos modos, nos nós do sistema. O erro total em frequências e modos é dado pela soma do erro nas frequências com o erro nos modos.

Erro nas frequências naturais:

$$\| \omega^N - \omega^{2N} \| = \sum | \omega_i^N - \omega_i^{2N} |$$

Erro nos modos de vibração:

$$\| \phi^N - \phi^{2N} \| = \left( \int_a^b | \phi^N - \phi^{2N} |^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\text{Erro total} = \|\omega^N - \omega^{2N}\| + \|\phi^N - \phi^{2N}\|$$

### ***Primeira Parte: Aproximação dos modos***

Essa etapa consiste na construção de uma aproximação dos modos, através do método de Elementos Finitos. Para isso, considera-se nulo o forçamento externo e resolve-se um *problema de valor característico*. A formulação fraca pode ser descrita pela equação (8-7).

Inicialmente, define-se os parâmetros geométricos, as propriedades do material, o número de elementos e o tipo de aproximação (número de nós por elemento). Suponha que o sistema seja discretizado em 10 elementos lineares, de dois nós, resultando em 11 nós. O apêndice deste trabalho explica detalhadamente os programas do Matlab, que seguem a seguinte estrutura:

- Lista dos graus de liberdade associados a cada elemento;
- Lista de coordenadas dos nós;
- Lista de graus de liberdade por nó;
- Construção das matrizes de massa  $RMat\_M^e$  e de rigidez  $RMat\_K^e$  elementares;
- Montagem das matrizes globais do sistema ( $RMat\_M^G$  e  $RMat\_K^G$ );
- Eliminação de linhas e colunas das matrizes globais referentes a graus de liberdade restritos;
- Resolução do problema de auto-valor.

Ao concluir essas etapas, tem-se por resultado as frequências naturais e os modos de vibração do sistema. Para esse problema de uma viga bi-engastada com um apoio intermediário, obteve-se:

**Frequências Naturais:**(aproximação com 10 elementos)

0.143059 · 10<sup>3</sup> Hz

0.207652 · 10<sup>3</sup> Hz

0.464707 · 10<sup>3</sup> Hz

0.574372 · 10<sup>3</sup> Hz

0.977378 · 10<sup>3</sup> Hz

**Frequências Naturais:**(aproximação com 20 elementos)

0.143024 · 10<sup>3</sup> Hz

0.207546 · 10<sup>3</sup> Hz

0.463562 · 10<sup>3</sup> Hz

$$0.572238 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$0.967732 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

**Frequências Naturais:**(aproximação com 40 elementos)

$$0.143022 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$0.207539 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$0.463488 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$0.572098 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$0.967066 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

De acordo com os resultados encontrados, verificou-se que o erro encontrado entre as aproximações de 10 e 20 elementos era maior do que a precisão desejada; tornando-se necessário refazer os cálculos para a aproximação com 40 elementos. O erro entre as simulações de 20 e 40 elementos satisfaz a precisão  $p$  do problema. Com isso, conclui-se que 20 elementos são necessários para calcular a dinâmica desse problema; ou seja, numa próxima simulação não será necessário um número maior de elementos.

**Modos de Vibração**(aproximação com 40 elementos)

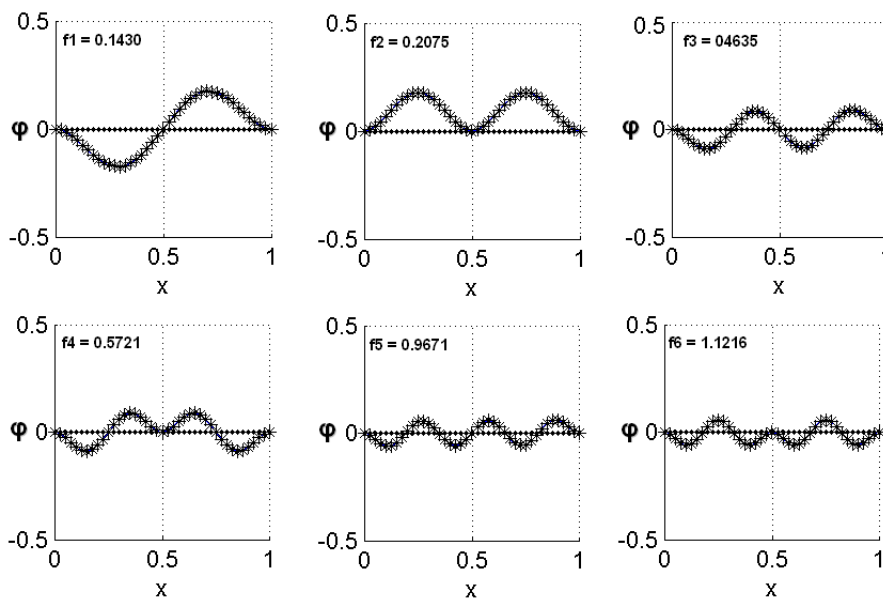


Figura 8.11: Modos de Vibração de uma viga bi-engastada com apoio intermediário

### *Segunda Parte: Aproximação da dinâmica do sistema*

Uma vez aproximados os modos de vibração, pode-se aproximar a dinâmica do sistema. Quanto maior o número de elementos em que o sistema é discretizado, melhor a aproximação dos modos, calculada por Elementos Finitos; porém maior será o sistema de equações diferenciais ordinárias (edo's). Para diminuir o esforço computacional necessário para solucionar o sistema completo de edo's, constrói-se um modelo reduzido de equações diferenciais e faz-se a discretização no tempo desse modelo reduzido. Concluiu-se que cinco modos de vibração são suficientes para aproximar a dinâmica desse sistema.

Foi aplicada uma força harmônica  $F$ , na coordenada  $x = 0.9L$ ; e a dinâmica foi aproximada no ponto de observação  $x = x_0$ . O integrador do Matlab utilizado foi o *ode45* que tem como entradas a função, o tempo de integração e as condições iniciais do problema.

Fez-se uma comparação da aproximação da dinâmica do problema pelo Método de Elementos Finitos e pelo modelo reduzido 5 modos), que pode ser visualizada pelo gráfico (8.12)

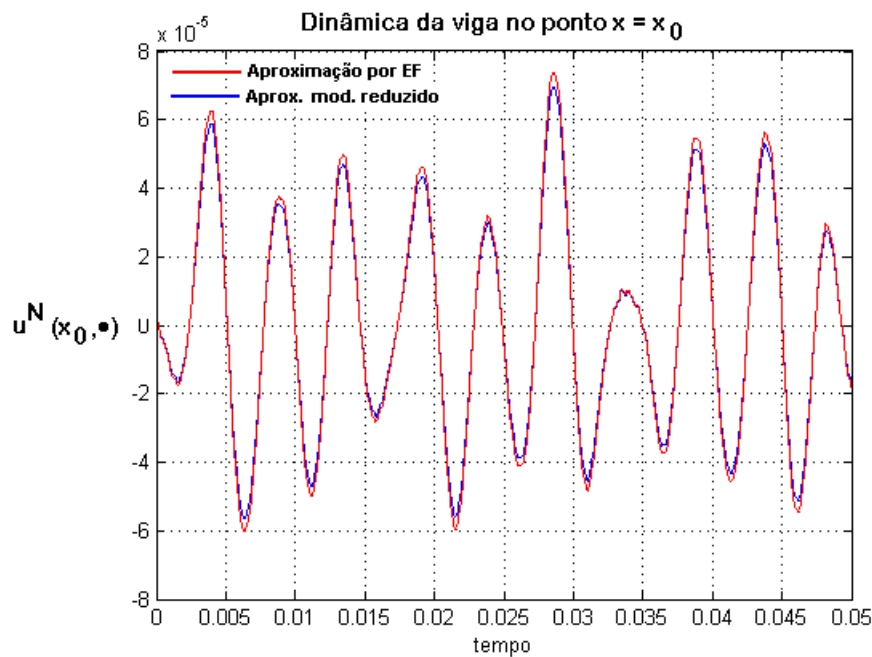


Figura 8.12: Dinâmica aproximada no ponto  $x = x_0$

O procedimento para aproximar a dinâmica de sistemas contínuos pode ser visualizado pela figura (8.13):

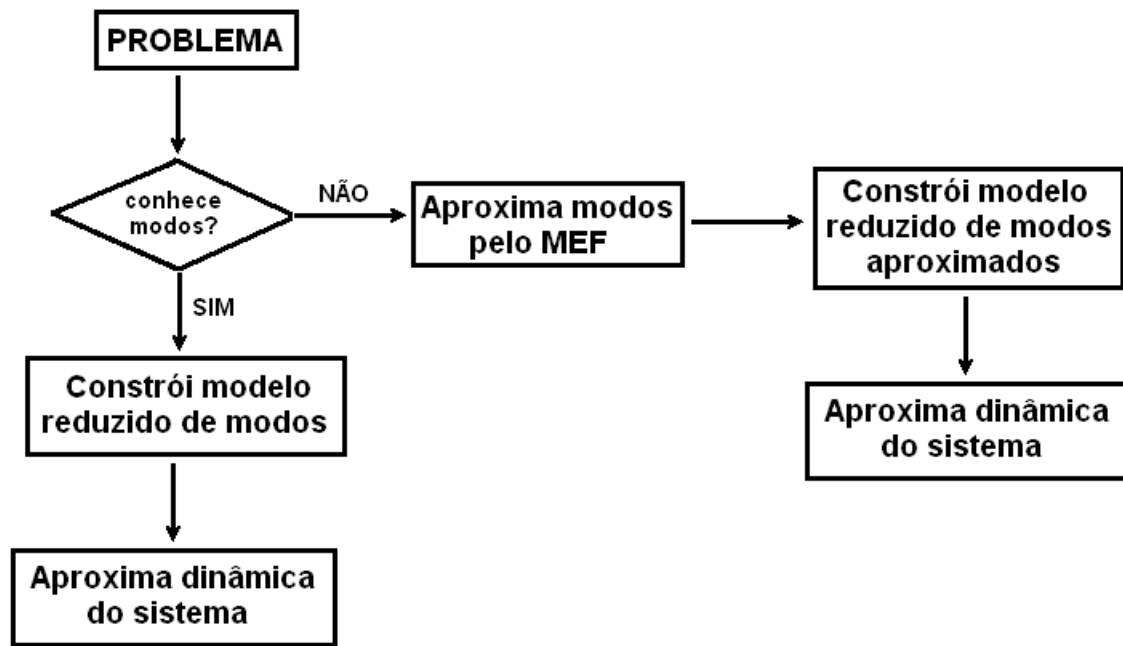


Figura 8.13: Procedimento adotado para aproximar dinâmica de sistemas contínuos



## 9

# CONCLUSÃO

Este trabalho teve, como principal objetivo, formar uma apostila didática para alunos de graduação tornando-os capazes de aproximar a dinâmica de um sistema contínuo unidimensional com a aplicação do método de Elementos Finitos.

Foram apresentadas as soluções analíticas de um problema de barra e um problema de viga e foi mostrado como podem ser calculados, analiticamente, as frequências naturais e os modos de vibração correspondentes (capítulos 2 e 4).

Para sistemas cujos modos de vibração eram desconhecidos, pôde-se aproximá-los, numericamente, pelo método de Elementos Finitos. Para a aplicação desse método, foi necessário desenvolver a formulação fraca dos problemas e, através da solução de um problema de valor característico, pôde-se aproximar os modos de vibração (capítulos 3 e 5).

Apresentou-se os princípios básicos do Método de Elementos Finitos, mostrando como o método funciona e as etapas necessárias para a sua aplicação. Foram mostrados diferentes tipos de elementos, como são construídas as equações elementares e como elas devem ser acopladas formando as equações globais do sistema.

Foram desenvolvidas as formulações fracas de problemas que apresentavam condições intermediárias (apoio, acoplamento elástico e massa concentrada). Além disso, para um problema complexo, foi desenvolvido todo o procedimento apresentado para calcular a dinâmica do sistema: desenvolvimento da formulação fraca, aplicação do método de elementos finitos, cálculos aproximado dos modos de vibração e cálculo da dinâmica do sistema.

Para todos os problemas apresentados, foram desenvolvidos os programas no Matlab, que aproxima as frequências naturais e os modos de vibração (quando desconhecidos), além da dinâmica do sistema. O apêndice deste trabalho apresenta passo-a-passo o que é desenvolvido nos programas de Matlab.

## **Bibliografia**

- [1] BATHE, K.-J.. **Finite Element Procedures**. Prentice Hall, INC, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- [2] BLEVINS, R. D.. **Formulas for natural frequency and mode shape**. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1993.
- [3] G. F. CAREY, J. T. O.; BECKER, E. B.. **Finite Elements: An Introduction**. Prentice Hall, INC, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.
- [4] CAREY, G. F.; ODEN, J. T.. **Finite Elements: A Second Course**. Prentice Hall, INC, New Jersey, 1983.
- [5] DESAI, C. S.. **Elementary Finite Element Method**. Prentice Hall, INC, New Jersey, 1979.
- [6] GUO-PING CAI, J.-Z. H.; YANG, S. X.. **Dynamic analysis of a flexible hub-beam system with tip mass**. Mechanics Research Communications 32, p. pgs 173 to 190, 2005.
- [7] HUGHES, T. J. R.. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. Prentice Hall, INC, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- [8] INMAN, D. J.. **Engineering Vibration**. Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1996.
- [9] HE, J.. **Modal Analysis**. Oxford, Butterworth-Heinemann, 2001.
- [10] F. MA, C. N.. **The orthogonality of natural modes of vibration**. Mechanics Research Communications 31, p. pgs 295 to 299, 2004.
- [11] MITCHELL, A. R.. **The finite element method in partial differential equations**. John Wiley and Sons, Ltd, USA, 1977.
- [12] PAZ, M.. **Structural Dynamics**. International Thomson Publishing, USA, 1997.

- [13] RAO, S. S.. **Mechanical Vibrations**. Pearson Education, Inc, Upper Saddle River, New Jersey, 2004.
- [14] REDDY, J. N.. **An Introduction to the Finite Element Method**. McGraw-Hill, Inc, 1993.
- [15] STRANG, G.. **An analysis of Finite Elements Method**. Prentice Hall, INC, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
- [16] J.B. YANG, L. J.; CHEN, D.. **Dynamic modelling and control of a rotating euler-bernoulli beam**. Journal of sound and vibration 274, p. pgs 863 to 875, 2004.
- [17] ZIENKIEWICZ, O. C.. **The Finite Element Method**. McGraw-Hill, Inc.

## A MANUAL DE PROGRAMAS DO MATLAB

Este manual tem por objetivo explicar, detalhadamente, os programas referentes a simulações numéricas de sistemas contínuos, discretizados por Elementos Finitos com o auxílio do *software* MATLAB.

As variáveis seguem um padrão de nomenclatura definido por:

$RMat\_M \implies$  matriz  $M$ ;

$R\_x \implies$  vetor  $x$ ;

$E \implies$  escalar  $E$ ;

Todos os programas utilizam uma ferramenta numérica chamada Calfem, que consiste num conjunto de funções já definidas para calcular a dinâmica de sistemas pelo Método de Elementos Finitos. As funções do Calfem possuem uma nomenclatura própria, então é necessário colocar todos os parâmetros do programa de forma que sejam reconhecidos e aceitos pelas funções que serão utilizadas futuramente.

Os programas apresentam a seguinte estrutura:

### 1. **Objetivo:**

Calcular as frequências naturais e os modos de vibração do sistema.

### 2. **Dados de Entrada:**

- Variáveis Geométricas ( $L, h, b, A, I$ );
- Propriedades do Material ( $E, \rho$ );
- Número de modos a serem calculados ( $N$ );
- Precisão desejada ( $e$ );
- Número de elementos iniciais ( $NE_{ini}$ );
- Definição do tipo de elemento;

### 3. Desenvolvimento

Essa etapa consiste na definição de diversas variáveis, seguindo a nomenclatura exigida pelos programas do Calfem que serão utilizados.

Uma vez definido o número de elementos em que o sistema será discretizado e o tipo de elemento, sabe-se o número de nós existentes.

- **Topologia**  $\implies$  informa quais graus de liberdade estão associados a cada elemento. As barras apresentam apenas deslocamento longitudinal, por isso, um grau de liberdade por nó é suficiente para representar esse sistema; enquanto as vigas, que apresentam deslocamento vertical e rotação, necessitam de 2 graus de liberdade por nó. Caso seja escolhido, por exemplo, o elemento linear (de dois nós), cada elemento de barra possui dois graus de liberdade (um por nó); enquanto os elementos de viga, terão quatro graus de liberdade (dois por nó).

$Edof = [Edof\ 1\ Edof\ 2]$   $\therefore$  tal que  $Edof\ 1$  representa os elementos do sistema e  $Edof\ 2$  os graus de liberdade a eles associados.

- **Lista de coordenadas**  $\implies$  apresenta as coordenadas  $x$  e  $y$  de cada nó

$$Coord = [X\ Y]$$

no caso de sistemas tridimensionais, a variável Coord apresenta três coordenadas  $[X\ Y\ Z]$ .

- **Graus de liberdade por nó**  $\implies$  informa os graus de liberdade (GL) que estão associados a cada nó do sistema.

$$Dof = [GL]$$

- **Montagem de matrizes de massa e rigidez para cada elemento**

Utiliza-se um programa do Calfem que monta as matrizes de massa e de rigidez elementares (calfem bar2d, para barras; e calfem

beam2d, para vigas)

– **Montagem das matrizes globais do sistema**

O programa "calfem assem" reúne todas as matrizes elementares, formando as matrizes globais do sistema.

– **Graus de liberdade restritos**

Uma vez que as matrizes globais do sistema estiverem montadas, deve-se eliminar as linhas e colunas correspondentes aos graus de liberdade restritos.

– **Problema de auto-valor**

Existe um programa do Calfem que fornece as frequências naturais e os modos de vibração do sistema (calfem eigen).

#### 4. Resultados

Através das simulações, descobre-se o número de elementos finitos necessários para aproximar as frequências naturais, os modos de vibração e a dinâmica do sistema dentro de uma precisão inicialmente estabelecida. Os resultados adquiridos são: as cinco primeiras frequências naturais aproximadas junto com os respectivos gráficos dos cinco primeiros modos de vibração. Além disso, os programas geram o gráfico da dinâmica do sistema no ponto de observação  $x = x_0$ .

Os sistemas contínuos estudados correspondem a barras e vigas. Existem diversas diferenças entre eles, por isso os programas serão explicados separadamente.

## A.1

### Simulações de problemas de barras

Foram desenvolvidos diversos programas para calcular freqüências naturais, modos de vibração e dinâmica de barras, envolvendo diferentes condições de contorno, barras com área variável e com variação de material:

**barra fixa livre** Calcula freqüências naturais e modos de vibração de uma barra fixa-livre, pela solução analítica;

**barra fixa livre ef2** Calcula freqüências naturais e modos de vibração de uma barra fixa-livre, pelo MEF (elementos de dois nós);

**barra fixa livre ef3** Calcula freqüências naturais e modos de vibração de uma barra fixa-livre, pelo MEF (elementos de 3 nós);

**barra fixa fixa** Calcula freqüências naturais e modos de vibração de uma barra fixa-fixa, pela solução analítica;

**barra fixa fixa ef** Calcula freqüências naturais e modos de vibração de uma barra fixa-fixa, pelo MEF;

**barra fixa livre 2areas** Calcula freqüências naturais e modos de vibração de uma barra fixa-livre com área variável, pelo MEF;

**barra fixa livre 2mat** Calcula freqüências naturais e modos de vibração de uma barra fixa-livre com dois materiais diferentes, pelo MEF;

**barra fixa massa ef** Calcula freqüências naturais e modos de vibração de uma barra fixa-livre com massa concentrada na extremidade livre, pelo MEF;

**barra fixa mola ef** Calcula freqüências naturais e modos de vibração de uma barra fixa-livre com mola horizontal na extremidade livre, pelo MEF;

**barra livre livre** Calcula freqüências naturais e modos de vibração de uma barra livre-livre, pela solução analítica;

**barra livre livre ef** Calcula freqüências naturais e modos de vibração de uma barra livre-livre, pelo MEF;

### A.1.1

#### Simulação de um problema de barra fixa-livre (aprox. linear)

A seguir, será apresentado todo o programa em MATLAB de um problema de barra fixa-livre, com o objetivo de mostrar os parâmetros da simulação, apresentando os graus de liberdade do sistema, as coordenadas dos nós, as matrizes elementares e globais etc.

Inicialmente, definiu-se todos os parâmetros geométricos (comprimento ( $L$ ), altura ( $h$ ) e espessura ( $b$ ) da barra, área da seção reta ( $A$ )) e as propriedades do material (módulo de elasticidade ( $E$ ) e densidade ( $\rho$ )). Deseja-se calcular os cinco primeiros modos de vibração do sistema ( $N = 5$ ), para uma barra dividida em 10 elementos ( $NE = 10$ ) e cada elemento é linear, de dois nós.

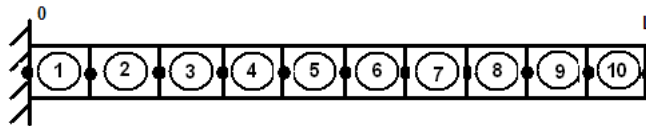


Figura A.1: Barra fixa-livre discretizada em 10 elementos

A barra foi então discretizada em 10 elementos e, como cada um deles tem dois nós, o sistema contém um total de 11 nós.

- **Topologia**  $\implies$  mostra os graus de liberdade associados a cada elemento:

<i>Elemento</i>	$GL_1$	$GL_2$
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	5	6
6	6	7
7	7	8
8	8	9
9	9	10
10	10	11

Tabela A.1: Graus de liberdade associados a cada elemento de barra (*Edof*)



- **Lista de coordenadas**  $\implies$  apresenta as coordenadas X e Y de cada nó:

X	Y
0.0	0.0
0.1	0.0
0.2	0.0
0.3	0.0
0.4	0.0
0.5	0.0
0.6	0.0
0.7	0.0
0.8	0.0
0.9	0.0
1.0	0.0

Tabela A.2: Coordenadas de cada nó de um problema de barra (*Coord*)

- **Lista de graus de liberdade por nó**  $\implies$  cada nó apresenta apenas um grau de liberdade, correspondente ao movimento longitudinal da barra:

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

Tabela A.3: Graus de liberdade associados a cada nó (*Dof*)

- **Construção das matrizes de massa e de rigidez elementares**  $\implies$  cada elemento terá uma matriz de massa e uma matriz de rigidez, de dimensão  $2 \times 2$ , relacionando os deslocamentos  $X_i$  e  $X_{i+1}$  de cada elemento:

$$RMat\_M^e = \begin{pmatrix} M_{11}^e & M_{12}^e \\ M_{21}^e & M_{22}^e \end{pmatrix} \quad RMat\_K^e = \begin{pmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{pmatrix}$$

- **Montagem das matrizes globais do sistema**  $\implies$  essas matrizes são montadas respeitando os deslocamentos que caracterizam cada elemento e, nesse caso, elas têm dimensão 11 X 11 (referenciando cada grau de liberdade):

$$RMat\_M^G = \begin{pmatrix} M_{11}^1 & M_{12}^1 & 0 & \dots & 0 \\ M_{21}^1 & M_{22}^1 + M_{11}^2 & M_{12}^2 & \dots & 0 \\ 0 & M_{21}^2 & M_{22}^2 + M_{11}^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_{22}^{10} \end{pmatrix}$$

o mesmo acontece com a matriz de rigidez.

- **Graus de liberdade restritos**  $\implies$  como a barra está fixa em  $x = 0$ , deve-se eliminar a primeira linha e primeira coluna (a restrição é no primeiro grau de liberdade) das matrizes de massa e de rigidez globais; e então elas passam a ter dimensão 10 X 10 e são chamadas de  $RMat\_K^{\tilde{}}$  e  $RMat\_M^{\tilde{}}$ :

$$RMat\_M^{\tilde{}} = \begin{pmatrix} M_{22}^1 + M_{11}^2 & M_{12}^2 & \dots & 0 \\ M_{21}^2 & M_{22}^2 + M_{11}^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_{22}^{10} \end{pmatrix}$$

o mesmo acontece com a matriz de rigidez.

- **Problema de auto-valor**  $\implies$  com o problema discretizado, pode-se calcular as frequências naturais e os modos de vibração do sistema:

### Frequências Naturais:

$$0.7937 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

$$2.4007 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

$$4.0668 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

$$5.8320 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

$$7.7330 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

### Modos de Vibração (6 primeiros modos)

Modos de Vibração calculados por EF: barra fixa-livre

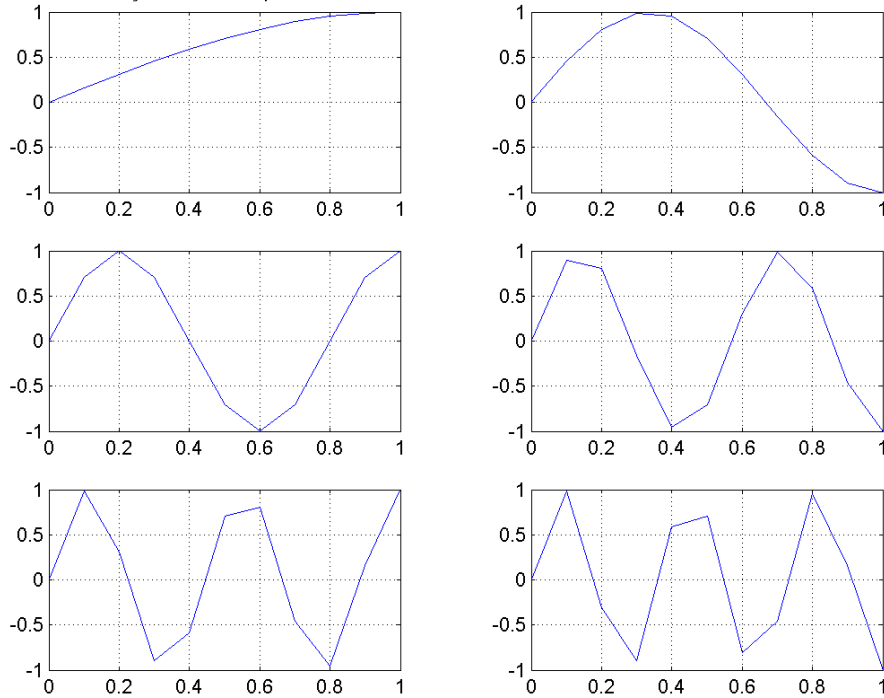


Figura A.2: Modos de vibração do problema de barra fixa-livre (10 elem)

A simulação com a barra fixa-livre foi repetida, porém dividiu-se o sistema em 30 elementos e os resultados encontrados foram:

**Frequências Naturais:**

$$0.7930 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

$$2.3810 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

$$3.9757 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

$$5.5812 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

$$7.2020 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

**Modos de Vibração**

Modos de Vibração calculados por EF: barra fixa-livre

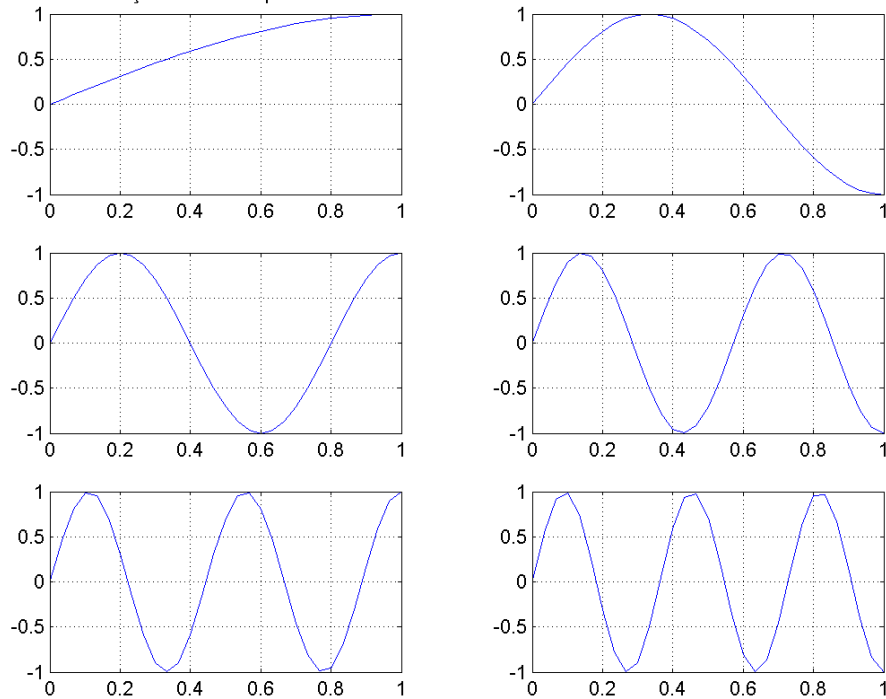


Figura A.3: Modos de vibração do problema de barra fixa-livre (30 elem - aprox. linear)

Como era de se esperar, a simulação feita com 30 elementos apresenta resultados mais precisos, o que pode ser observado pelos valores das frequências naturais (que, no caso da malha mais refinada, estão mais próximos da solução analítica (exemplo A.1.2)) e pelo formato dos modos de vibração, especialmente para o quarto e quinto modo [8].

## A.1.2

## Simulação de um problema de barra fixa-livre (sol. analítica)

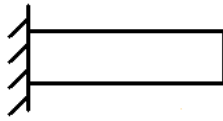


Figura A.4: Barra fixa-livre

**Frequências Naturais:**  $\omega_n = \frac{(2n-1)\pi c}{L}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

0.7929 · 10<sup>4</sup> Hz

2.3786 · 10<sup>4</sup> Hz

3.9643 · 10<sup>4</sup> Hz

5.5501 · 10<sup>4</sup> Hz

7.1358 · 10<sup>4</sup> Hz

**Modos de Vibração:**  $\sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L}$

Modos de Vibração calculados analiticamente: barra fixa-livre

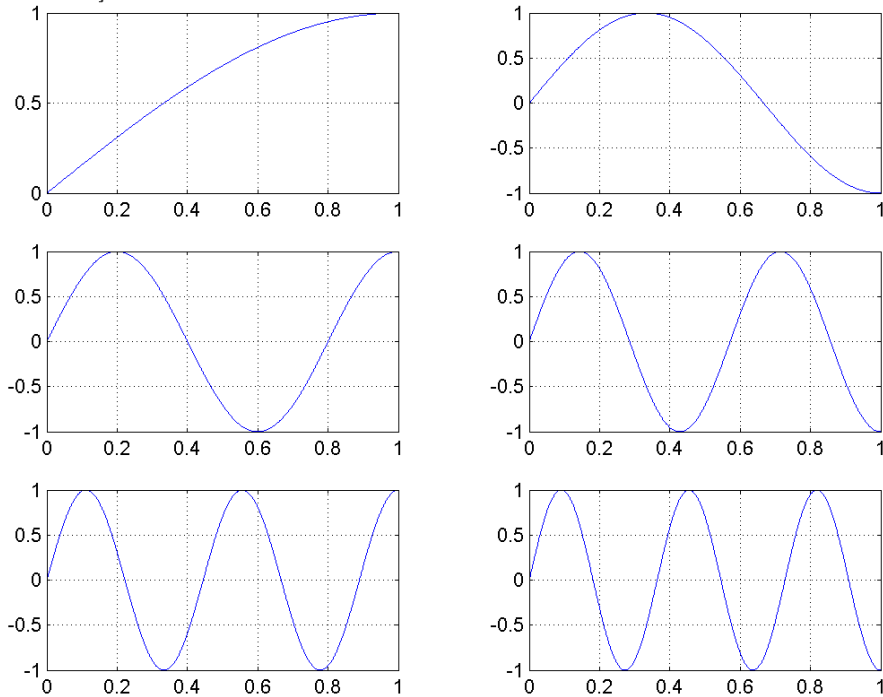


Figura A.5: Modos de vibração do problema de barra fixa-livre (solução analítica)

### A.1.3

#### Simulação de um problema de barra fixa-livre (aprox. quadrática)

##### Frequências Naturais:

0.7929 · 10<sup>4</sup> Hz

2.3786 · 10<sup>4</sup> Hz

3.9643 · 10<sup>4</sup> Hz

5.5501 · 10<sup>4</sup> Hz

7.1360 · 10<sup>4</sup> Hz

##### Modos de Vibração

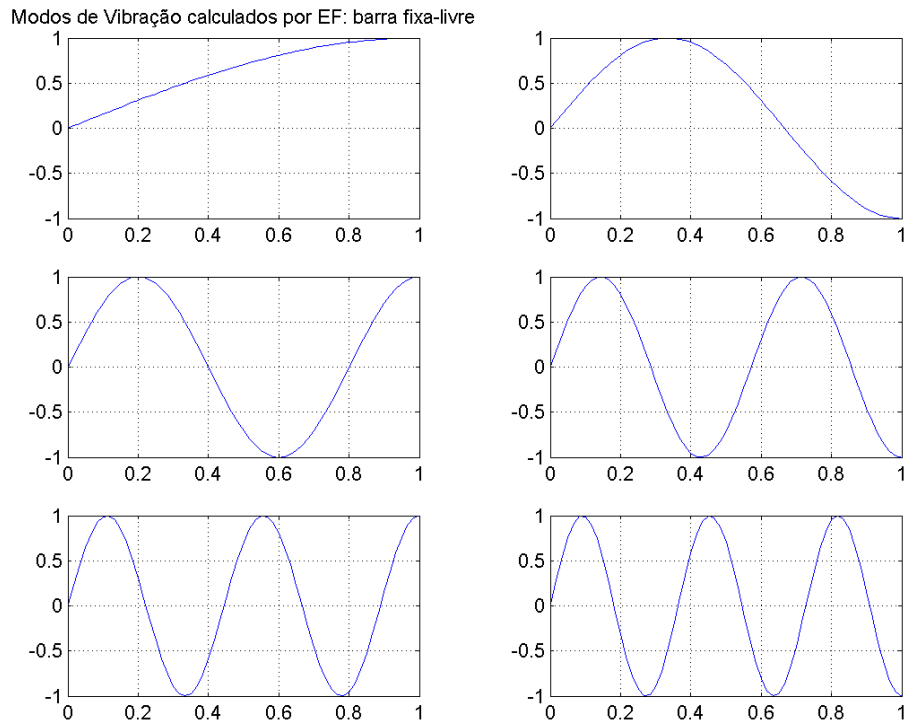


Figura A.6: Modos de vibração do problema de barra fixa-livre (30 elem - aprox. quadrática)

Pode-se comparar os resultados das aproximações de frequências e modos de elementos de dois nós (A.1.1) e elementos de três nós (A.1.3) com a solução analítica do problema de uma barra fixa-livre (A.1.2). Pode-se perceber facilmente que a aproximação quadrática é mais eficiente do que a aproximação linear.

## A.1.4

## Simulação de um problema de barra fixa-fixa (sol. analítica)

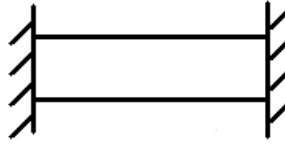


Figura A.7: Barra fixa-fixa

**Freqüências Naturais:**  $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}, n = 1, 2, \dots$

1.5857 · 10<sup>4</sup> Hz

3.1715 · 10<sup>4</sup> Hz

4.7572 · 10<sup>4</sup> Hz

6.3429 · 10<sup>4</sup> Hz

7.9287 · 10<sup>4</sup> Hz

**Modos de Vibração:**  $\sin \frac{n\pi x}{L}$

Modos de Vibração calculados analiticamente: barra fixa-fixa

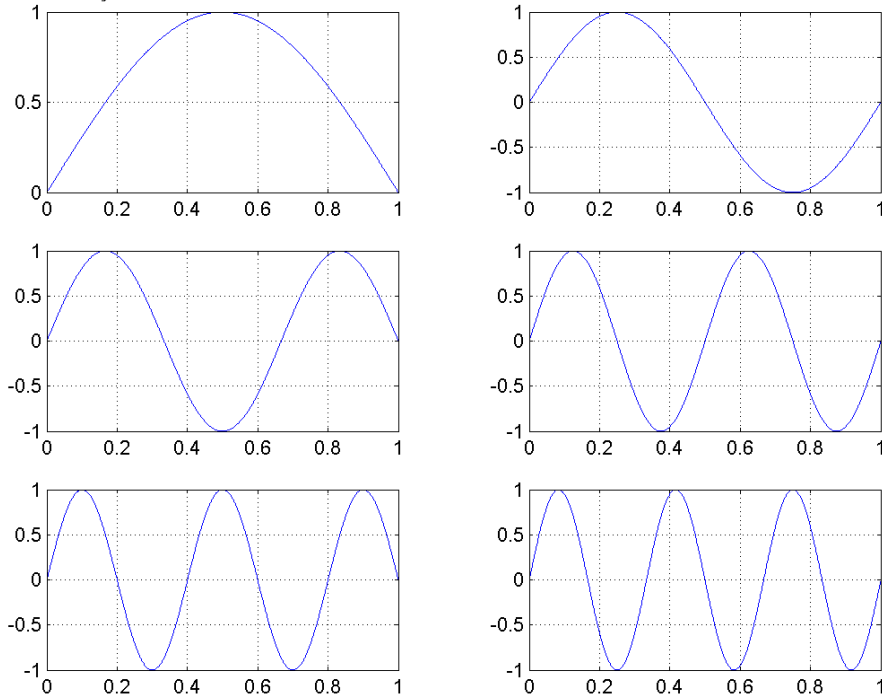


Figura A.8: Modos de vibração do problema de barra fixa-fixa (solução analítica)

**A.1.5****Simulação de um problema de barra fixa-fixa (aprox. linear)****Freqüências Naturais:**

$$1.5865 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

$$3.1773 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

$$4.7768 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

$$6.3894 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

$$8.0195 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

**Modos de Vibração**

Modos de Vibração calculados por EF: barra fixa-fixa

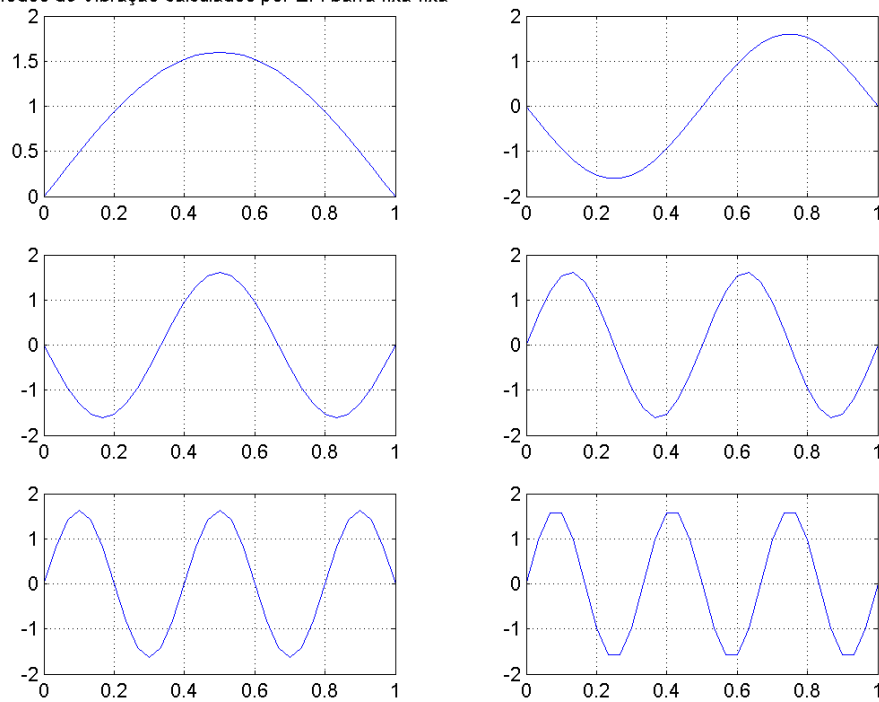


Figura A.9: Modos de vibração do problema de barra fixa-fixa (30 elem - aprox. linear)



**A.1.6**

**Simulação de um problema de barra fixa-livre com duas áreas (aprox. linear)**

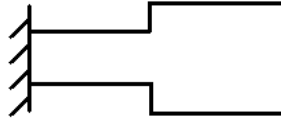


Figura A.10: Barra fixa-livre com duas áreas

**Frequências Naturais:**

0.4681 · 10<sup>4</sup> Hz

2.7070 · 10<sup>4</sup> Hz

3.6483 · 10<sup>4</sup> Hz

5.9118 · 10<sup>4</sup> Hz

6.8685 · 10<sup>4</sup> Hz

**Modos de Vibração**

Modos de Vibração calculados por EF: barra fixa-livre de area variavel

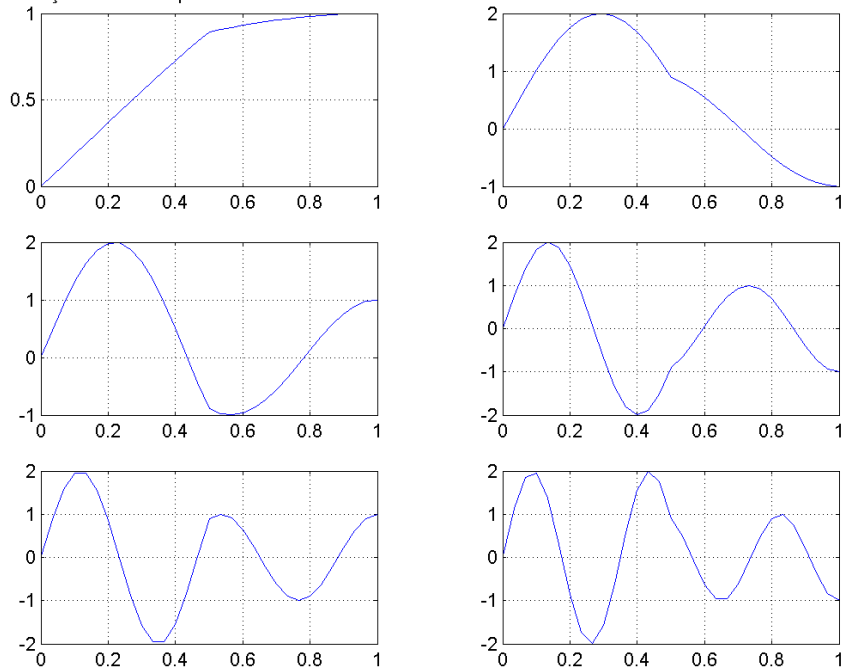


Figura A.11: Modos de vibração do problema de barra fixa-livre com duas áreas (30 elem)

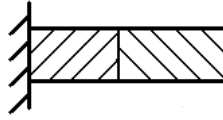
**A.1.7****Simulação de um problema de barra fixa-livre com dois materiais (aprox. linear)**

Figura A.12: Barra fixa-livre com dois materiais

**Frequências Naturais:**1.0552 · 10<sup>4</sup> Hz2.1434 · 10<sup>4</sup> Hz4.2647 · 10<sup>4</sup> Hz5.3663 · 10<sup>4</sup> Hz7.5203 · 10<sup>4</sup> Hz**Modos de Vibração**

Modos de Vibração calculados por EF: barra fixa-livre

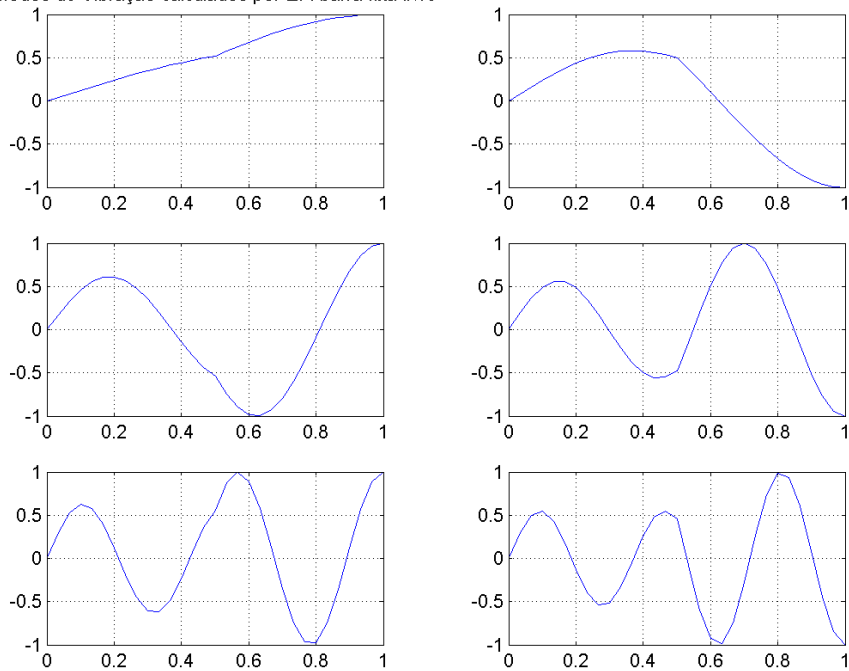


Figura A.13: Modos de vibração do problema de barra fixa-livre com dois materiais (30 elem)

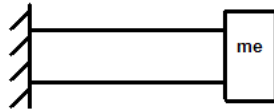
**A.1.8****Simulação de um problema de barra fixa-massa (aprox. linear)**

Figura A.14: Barra fixa-massa

**Frequências Naturais:**0.5060 · 10<sup>4</sup> Hz1.7964 · 10<sup>4</sup> Hz3.2968 · 10<sup>4</sup> Hz4.8591 · 10<sup>4</sup> Hz6.4520 · 10<sup>4</sup> Hz**Modos de Vibração**

Modos de Vibração calculados por EF: barra fixa-massa

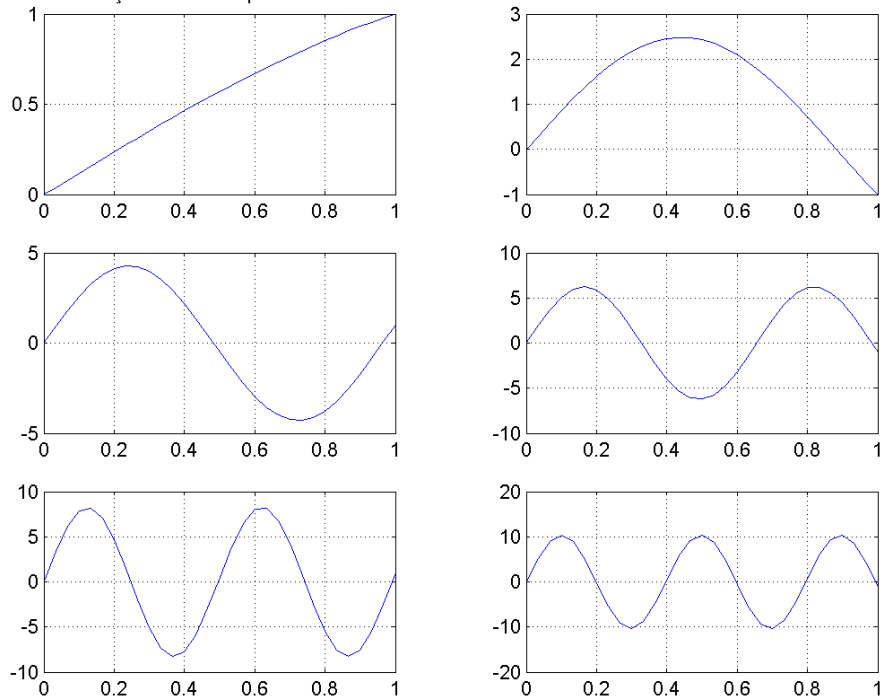


Figura A.15: Modos de vibração do problema de barra fixa-massa (30 elem)

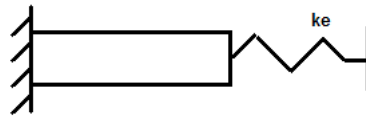
**A.1.9****Simulação de um problema de barra fixa-mola (aprox. linear)**

Figura A.16: Barra fixa-mola

**Frequências Naturais:**

$0.9272 \cdot 10^4$  Hz  
 $2.4334 \cdot 10^4$  Hz  
 $4.0078 \cdot 10^4$  Hz  
 $5.6044 \cdot 10^4$  Hz  
 $7.2203 \cdot 10^4$  Hz

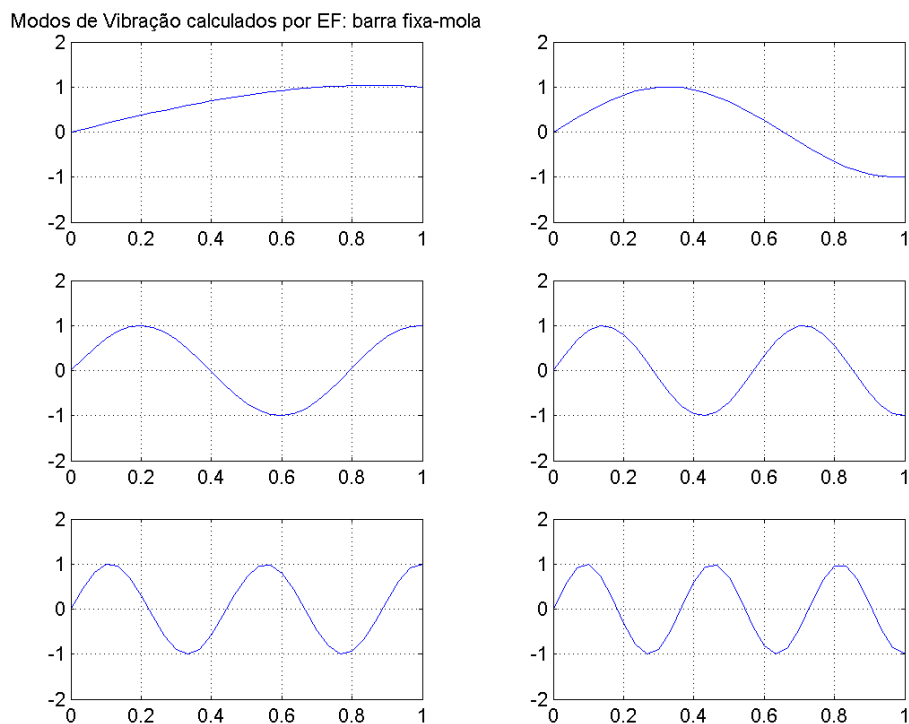
**Modos de Vibração**

Figura A.17: Modos de vibração do problema de barra fixa-mola (30 elem)

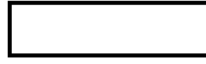
**A.1.10****Simulação de um problema de barra livre-livre (sol. analítica)**

Figura A.18: Barra livre-livre

**Frequências Naturais:**  $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}, n = 0, 1, 2, \dots$

1.5857 · 10<sup>4</sup> Hz

3.1715 · 10<sup>4</sup> Hz

4.7572 · 10<sup>4</sup> Hz

6.3429 · 10<sup>4</sup> Hz

7.9287 · 10<sup>4</sup> Hz

**Modos de Vibração:**  $\cos \frac{n\pi x}{L}$

Modos de Vibração calculados analiticamente: barra livre-livre

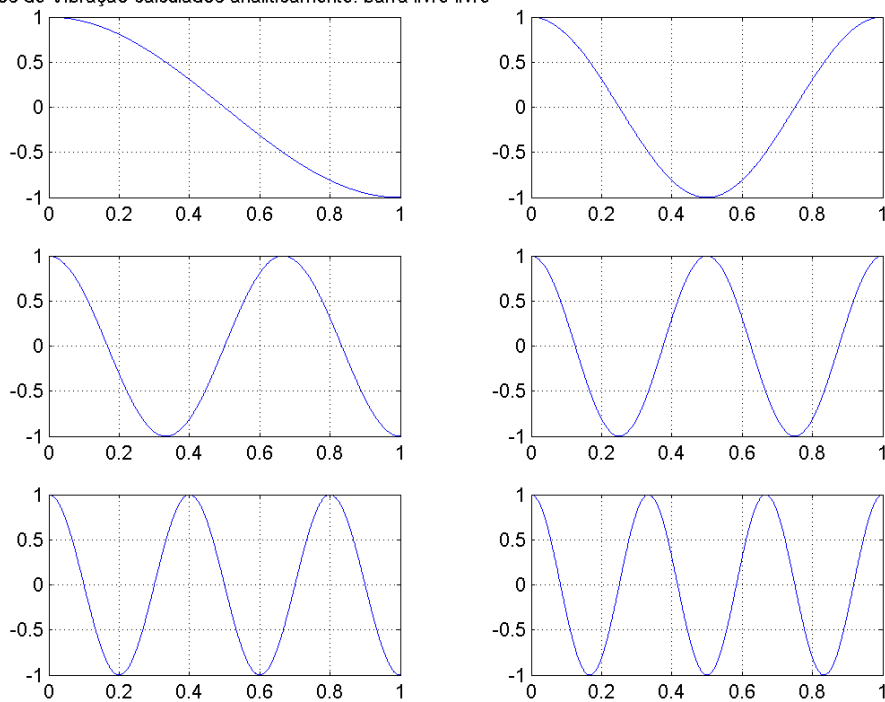


Figura A.19: Modos de vibração do problema de barra livre-livre (solução analítica)

## A.2

### Simulações de Vigas

Foram desenvolvidos, também, programas para calcular frequências naturais, modos de vibração e dinâmica de vigas, envolvendo diferentes condições de contorno, condições intermediárias e diversos tipos de elementos.

#### A.2.1

##### Simulação de um problema de viga bi-engastada

A seguir, será apresentado todo o programa de um problema de viga bi-engastada. Define-se os parâmetros geométricos ( $L, h, b, A$ ), as propriedades do material ( $E, \rho$ ). Deseja-se calcular os quatro primeiros modos de vibração ( $N = 4$ ), para uma viga discretizada em dez elementos ( $NE = 10$ ), sendo que os elementos são lineares, de dois nós.

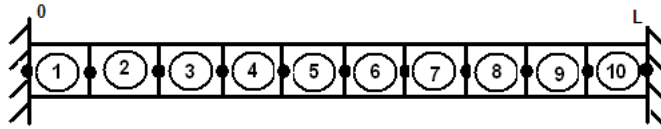


Figura A.20: Viga bi-engastada discretizada em 10 elementos

O sistema foi dividido em 10 elementos e tem, no total, 11 nós. Cada nó da viga necessita de dois graus de liberdade: um representa o deslocamento transversal e o outro, a rotação.

- **Topologia**  $\implies$  mostra os graus de liberdade associados a cada elemento:

<i>Elemento</i>	$GL_1$	$GL_2$	$GL_3$	$GL_4$
1	1	2	3	4
2	3	4	5	6
3	5	6	7	8
4	7	8	9	10
5	9	10	11	12
6	11	12	13	14
7	13	14	15	16
8	15	16	17	18
9	17	18	19	20
10	19	20	21	22

Tabela A.4: Graus de liberdade associados a cada elemento de viga (*Edof*)

- **Lista de coordenadas**  $\implies$  apresenta as coordenadas X e Y de cada nó:

X	Y
0	0
0.1	0
0.2	0
0.3	0
0.4	0
0.5	0
0.6	0
0.7	0
0.8	0
0.9	0
1.0	0

Tabela A.5: Coordenadas de cada nó de um problema de viga (*Coord*)

- **Lista de graus de liberdade por nó**  $\implies$  cada nó apresenta três graus de liberdade:

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22

Tabela A.6: Graus de liberdade associados a cada nó (*Dof*)

- **Construção das matrizes de massa e de rigidez elementares**  $\implies$  cada elemento terá uma matriz de massa e uma matriz de rigidez, de dimensão 4 X 4, relacionando os deslocamentos  $X_i$  e  $X_{i+1}$  de cada elemento:

$$RMat\_M^e = \begin{pmatrix} M_{11}^e & M_{12}^e & M_{13}^e & M_{14}^e \\ M_{21}^e & M_{22}^e & M_{23}^e & M_{24}^e \\ M_{31}^e & M_{32}^e & M_{33}^e & M_{34}^e \\ M_{41}^e & M_{42}^e & M_{43}^e & M_{44}^e \end{pmatrix}$$

$$RMat\_K^e = \begin{pmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e & K_{14}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e & K_{24}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e & K_{34}^e \\ K_{41}^e & K_{42}^e & K_{43}^e & K_{44}^e \end{pmatrix}$$

- **Montagem das matrizes globais do sistema**  $\implies$  essas matrizes são montadas respeitando os deslocamentos que caracterizam cada elemento e, nesse caso, elas têm dimensão 22 X 22 (porque existem 22 graus de liberdade no sistema):

$$RMat\_M^G = \begin{pmatrix} M_{11}^1 & M_{12}^1 & M_{13}^1 & M_{14}^1 & \dots \\ M_{21}^1 & M_{22}^1 & M_{23}^1 & M_{24}^1 & \\ M_{31}^1 & M_{32}^1 & M_{33}^1 + M_{11}^2 & M_{34}^1 + M_{12}^2 & \\ M_{41}^1 & M_{42}^1 & M_{43}^1 + M_{21}^2 & M_{44}^1 + M_{22}^2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & M_{44}^{10} \end{pmatrix}$$



o mesmo acontece com a matriz de rigidez.

- **Graus de liberdade restritos**  $\implies$  como a viga está engastada nas duas extremidades, significa que os nós 1 e 11 são restritos. E isso significa que as linhas e colunas referentes aos graus 1,2,11,22 devem ser eliminadas das matrizes globais do sistema. Essas matrizes passam a ter dimensão 18 X 18 e são chamadas de  $RMat_{\tilde{K}}$  e  $RMat_{\tilde{M}}$ :

$$RMat_{\tilde{M}} = \begin{pmatrix} M_{33}^1 + M_{11}^2 & M_{34}^1 + M_{12}^2 & \dots & & & \\ M_{43}^1 + M_{21}^2 & M_{44}^1 + M_{22}^2 & & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \vdots & \\ & & & & & M_{22}^{10} \end{pmatrix}$$

o mesmo acontece com a matriz de rigidez.

- **Problema de auto-valor**  $\implies$  com o problema discretizado, basta calcular as frequências naturais e os modos de vibração do sistema:

**Frequências Naturais:**

- 0.051886 · 10<sup>3</sup> Hz
- 0.143059 · 10<sup>3</sup> Hz
- 0.280657 · 10<sup>3</sup> Hz
- 0.464707 · 10<sup>3</sup> Hz
- 0.696325 · 10<sup>3</sup> Hz

**Modos de Vibração**

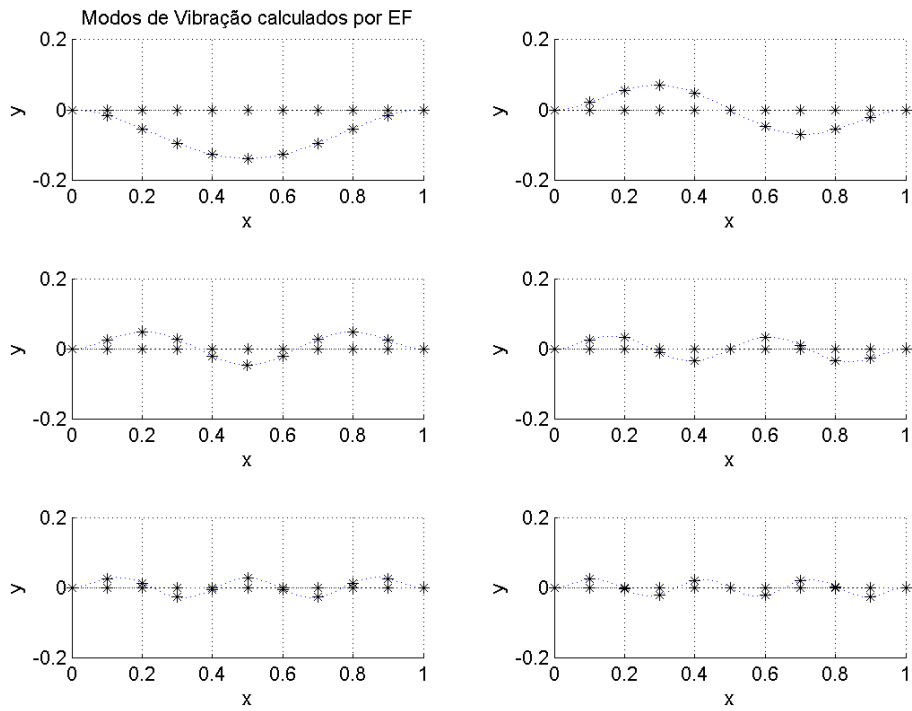


Figura A.21: Modos de vibração do problema de viga bi-engastada (10 elem)

A mesma simulação foi feita utilizando-se 30 elementos e os resultados encontrados foram:

Freqüências Naturais:

$$0.051884 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$0.143022 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$0.280384 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$0.463499 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$0.692416 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

Modos de Vibração

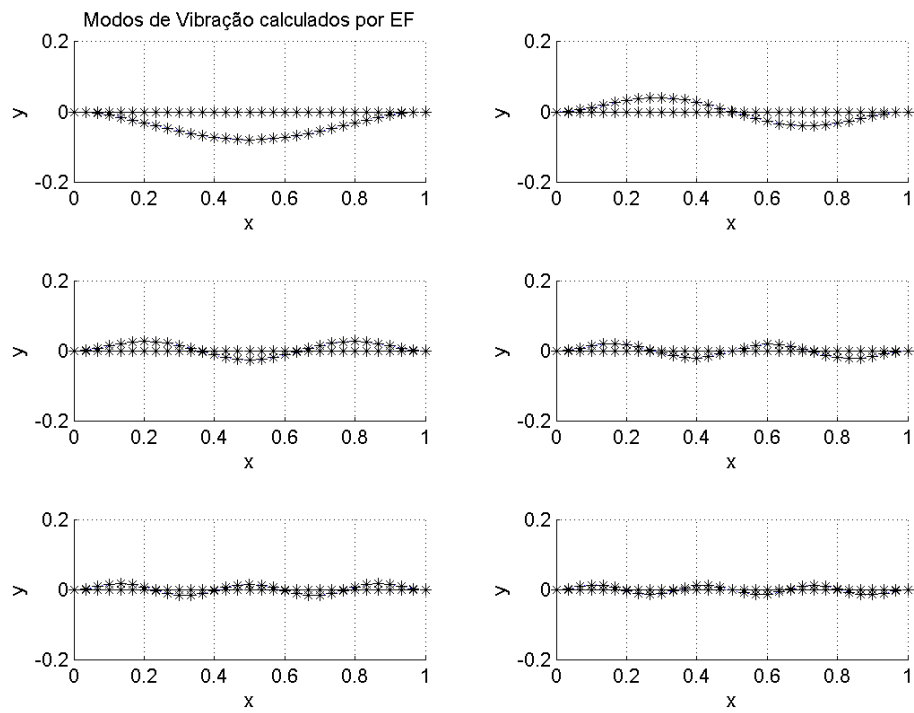


Figura A.22: Modos de vibração do problema de viga bi-engastada (30 elem)

## A.2.2

### Simulação de um problema de viga bi-engastada (sol. analítica)

#### Frequências Naturais:

$0.518847 \cdot 10^2$  Hz

$1.430222 \cdot 10^2$  Hz

$2.803807 \cdot 10^2$  Hz

$4.634835 \cdot 10^2$  Hz

$6.923645 \cdot 10^2$  Hz

#### Modos de Vibração

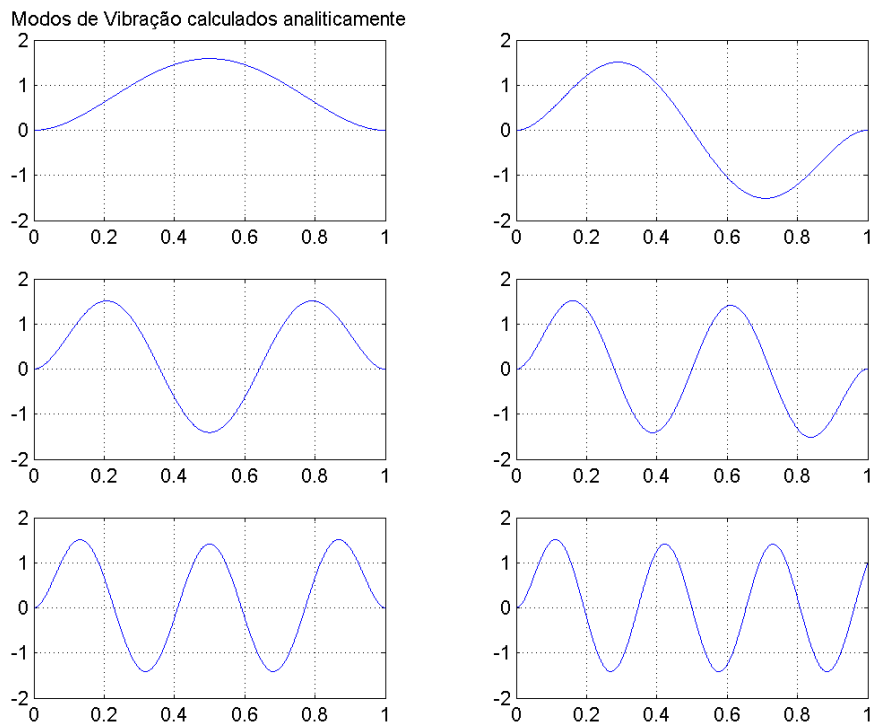


Figura A.23: Modos de vibração do problema de viga bi-engastada (solução analítica)

### A.2.3

#### Simulação de um problema de viga engastada-livre (sol. analítica)

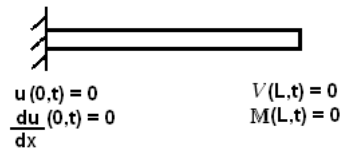


Figura A.24: Viga engastada-livre

#### Frequências Naturais:

$$0.081538 \cdot 10^2 \text{ Hz}$$

$$0.510990 \cdot 10^2 \text{ Hz}$$

$$1.430787 \cdot 10^2 \text{ Hz}$$

$$2.803773 \cdot 10^2 \text{ Hz}$$

$$4.634837 \cdot 10^2 \text{ Hz}$$

#### Modos de Vibração

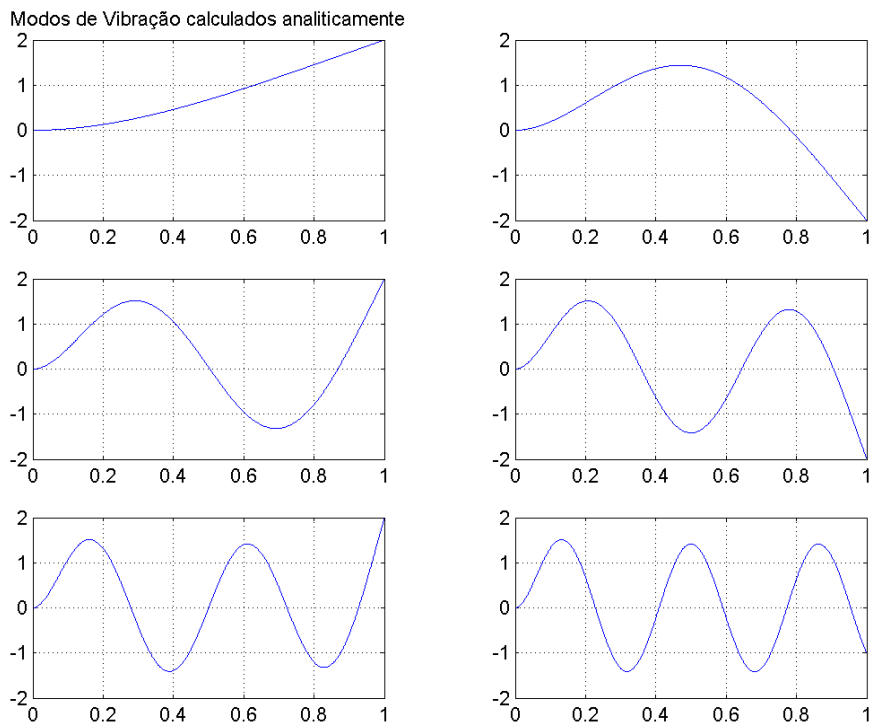


Figura A.25: Modos de vibração do problema de viga engastada-livre (solução analítica)

### A.2.4

#### Simulação de um problema de viga engastada-livre (aprox. linear)

##### Freqüências Naturais:

0.081538 · 10<sup>2</sup> Hz

0.510990 · 10<sup>2</sup> Hz

1.430787 · 10<sup>2</sup> Hz

2.803773 · 10<sup>2</sup> Hz

4.634837 · 10<sup>2</sup> Hz

##### Modos de Vibração

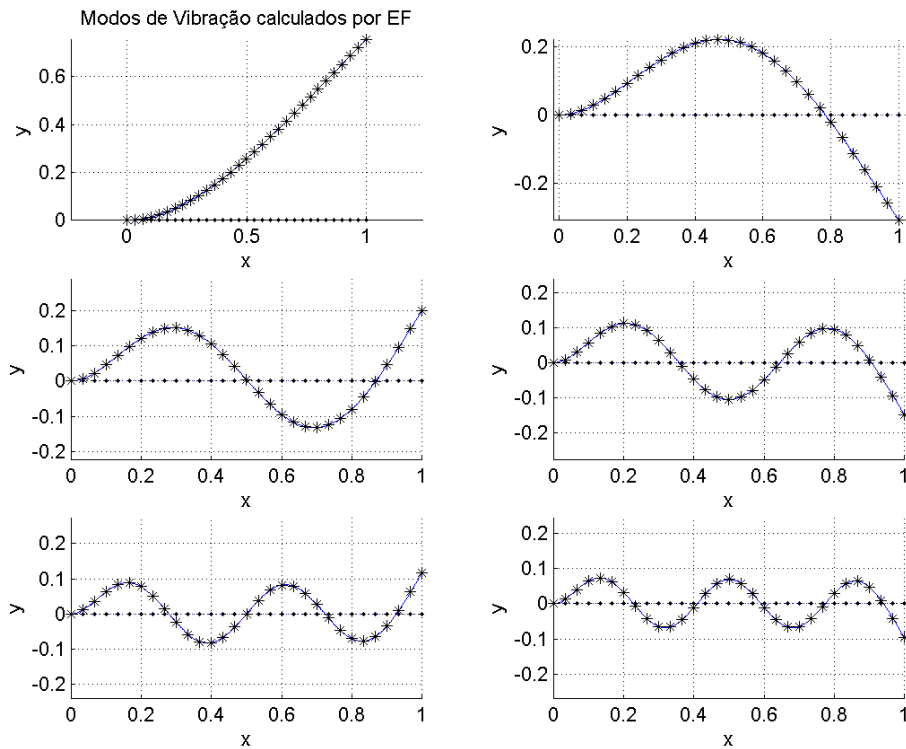


Figura A.26: Modos de vibração do problema de viga engastada-livre (30 elem)

### A.2.5

#### Simulação de um problema de viga engastada-mola (aprox. linear)

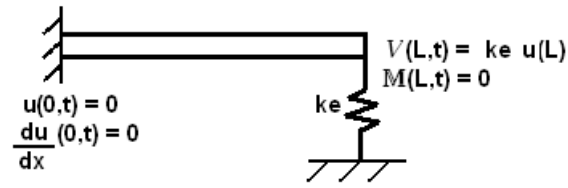


Figura A.27: Viga engastada-mola

#### Frequências Naturais:

8.9059 Hz

51.2257 Hz

143.1244 Hz

280.4038 Hz

463.5134 Hz

#### Modos de Vibração

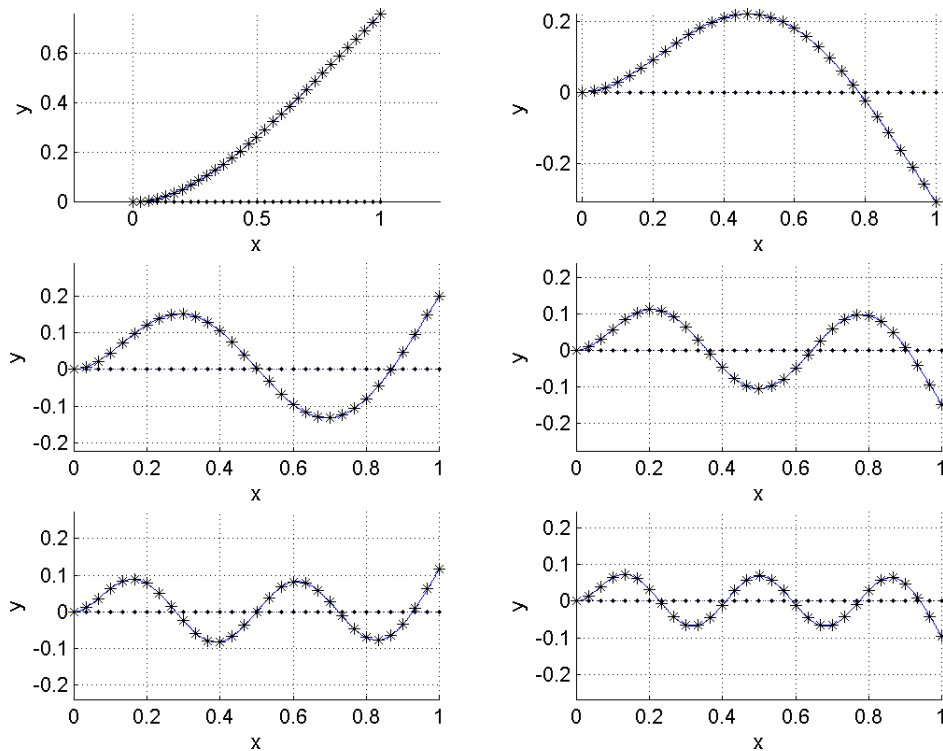


Figura A.28: Modos de vibração do problema de viga engastada-mola (30 elem)

**A.2.6**

**Simulação de um problema de viga engastada-massa (aprox. linear)**

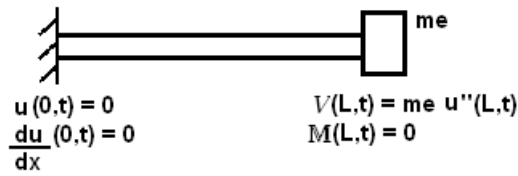


Figura A.29: Viga engastada-massa

**Frequências Naturais:**

0.007766 · 10<sup>3</sup> Hz

0.030643 · 10<sup>3</sup> Hz

0.076779 · 10<sup>3</sup> Hz

0.175634 · 10<sup>3</sup> Hz

0.323205 · 10<sup>3</sup> Hz

**Modos de Vibração**

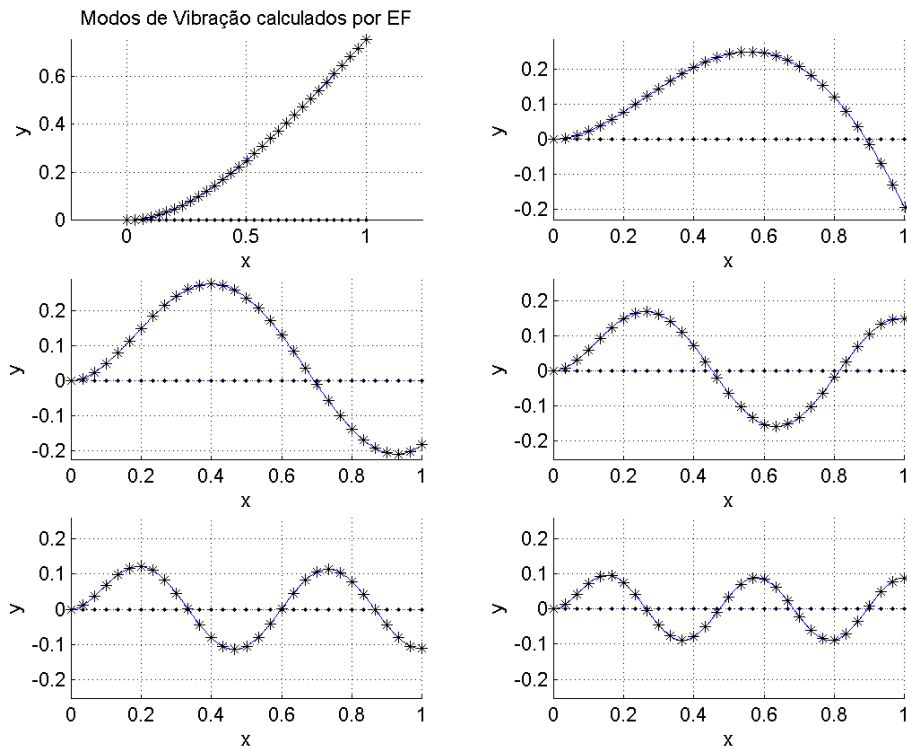


Figura A.30: Modos de vibração do problema de viga engastada-massa (30 elem)



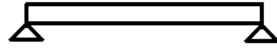
**A.2.7****Simulação de um problema de viga bi-apoiada (sol. analítica)**

Figura A.31: Viga bi-apoiada

**Frequências Naturais:**0.228880 · 10<sup>2</sup> Hz0.915523 · 10<sup>2</sup> Hz2.059927 · 10<sup>2</sup> Hz3.662093 · 10<sup>2</sup> Hz5.722020 · 10<sup>2</sup> Hz**Modos de Vibração**

Modos de Vibração calculados analiticamente

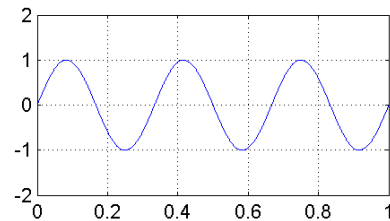
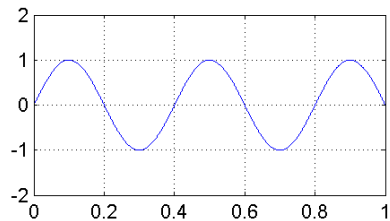
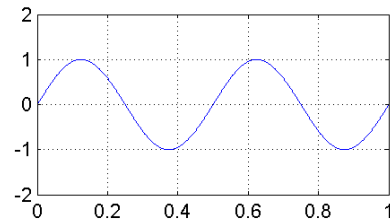
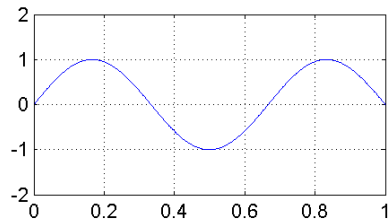
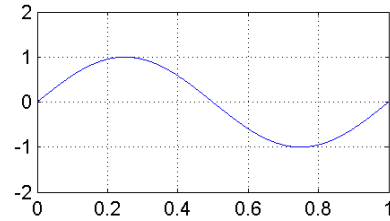
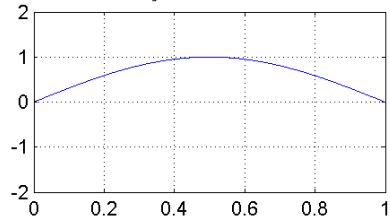


Figura A.32: Modos de vibração do problema de viga bi-apoiada (solução analítica)

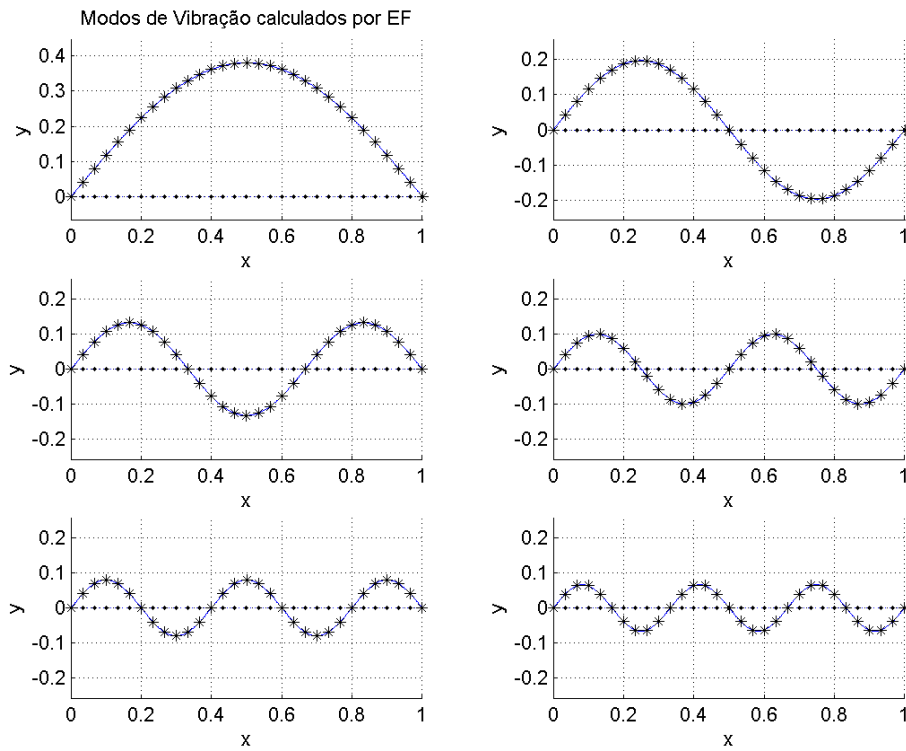
**A.2.8****Simulação de um problema de viga bi-apoiada (aprox. linear)****Freqüências Naturais:**0.228880 · 10<sup>2</sup> Hz0.915524 · 10<sup>2</sup> Hz2.059941 · 10<sup>2</sup> Hz3.662171 · 10<sup>2</sup> Hz5.722317 · 10<sup>2</sup> Hz**Modos de Vibração**

Figura A.33: Modos de vibração do problema de viga bi-apoiada (30 elem)

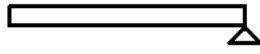
**A.2.9****Simulação de um problema de viga livre-apoiada (sol. analítica)**

Figura A.34: Viga livre-apoiada

**Frequências Naturais:**0.357555 · 10<sup>2</sup> Hz1.158708 · 10<sup>2</sup> Hz2.417553 · 10<sup>2</sup> Hz4.134160 · 10<sup>2</sup> Hz6.308527 · 10<sup>2</sup> Hz**Modos de Vibração**

Modos de Vibração calculados analiticamente

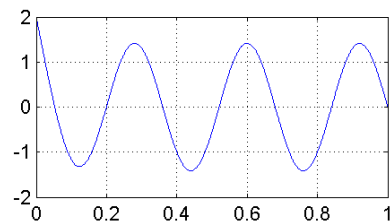
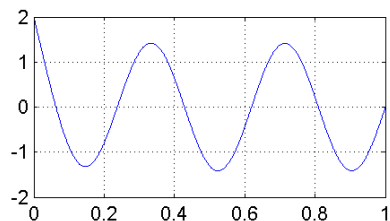
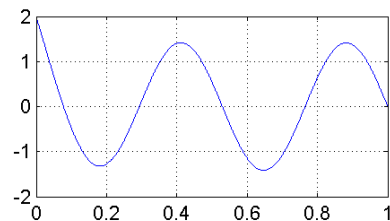
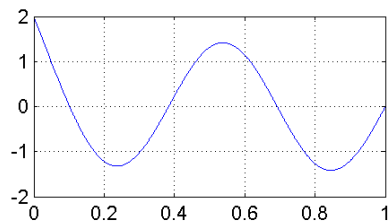
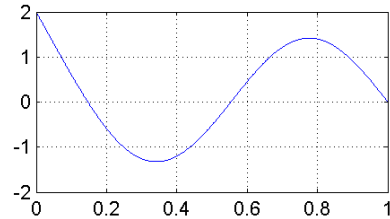
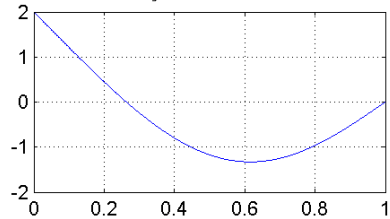


Figura A.35: Modos de vibração do problema de viga livre-apoiada (solução analítica)

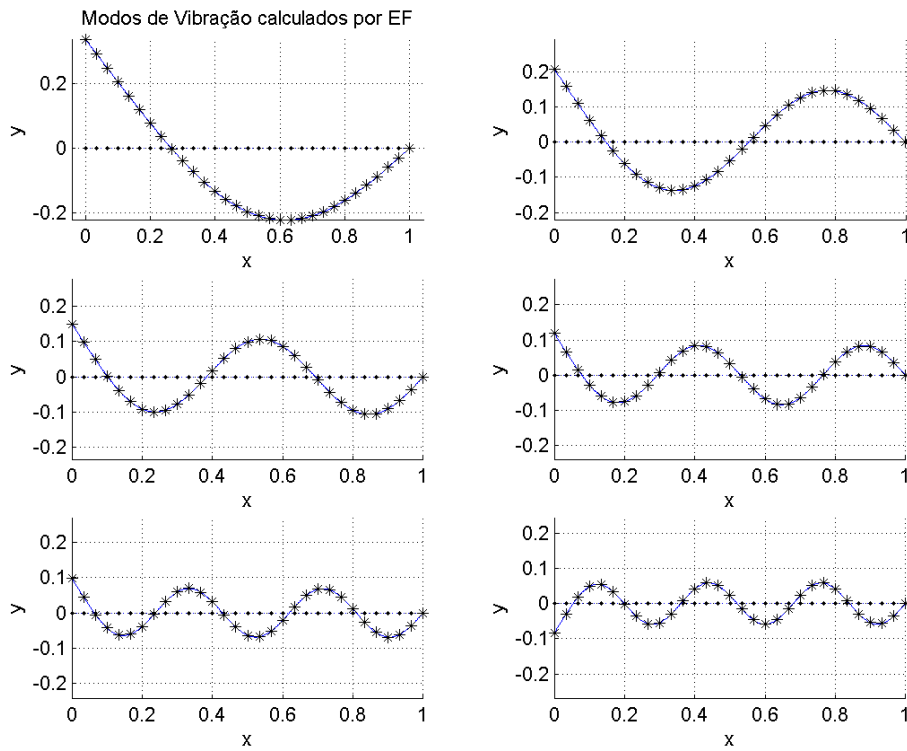
**A.2.10****Simulação de um problema de viga livre-apoiada (aprox. linear)****Freqüências Naturais:**0.357555 · 10<sup>2</sup> Hz1.158711 · 10<sup>2</sup> Hz2.417576 · 10<sup>2</sup> Hz4.134271 · 10<sup>2</sup> Hz6.308922 · 10<sup>2</sup> Hz**Modos de Vibração**

Figura A.36: Modos de vibração do problema de viga livre-apoiada (30 elem)

**A.2.11**

**Simulação de um problema de viga livre-livre (sol. analítica)**

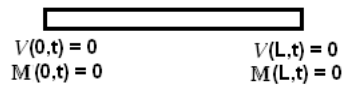


Figura A.37: Viga livre-livre

**Freqüências Naturais:**

- 0.518847 · 10<sup>2</sup> Hz
- 1.430222 · 10<sup>2</sup> Hz
- 2.803807 · 10<sup>2</sup> Hz
- 4.634835 · 10<sup>2</sup> Hz
- 6.923645 · 10<sup>2</sup> Hz

**Modos de Vibração**

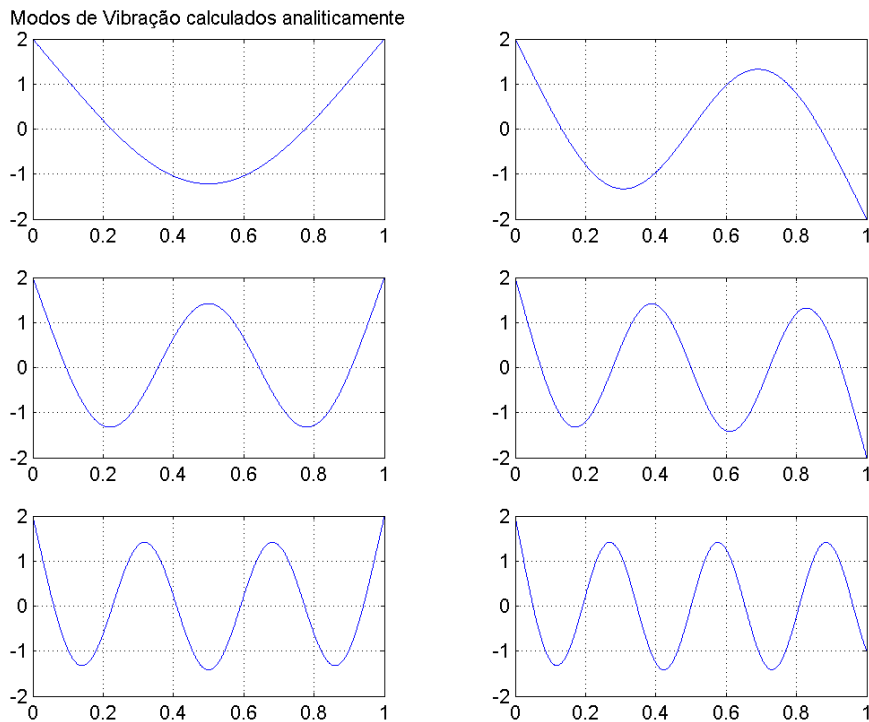


Figura A.38: Modos de vibração do problema de viga livre-livre (solução analítica)

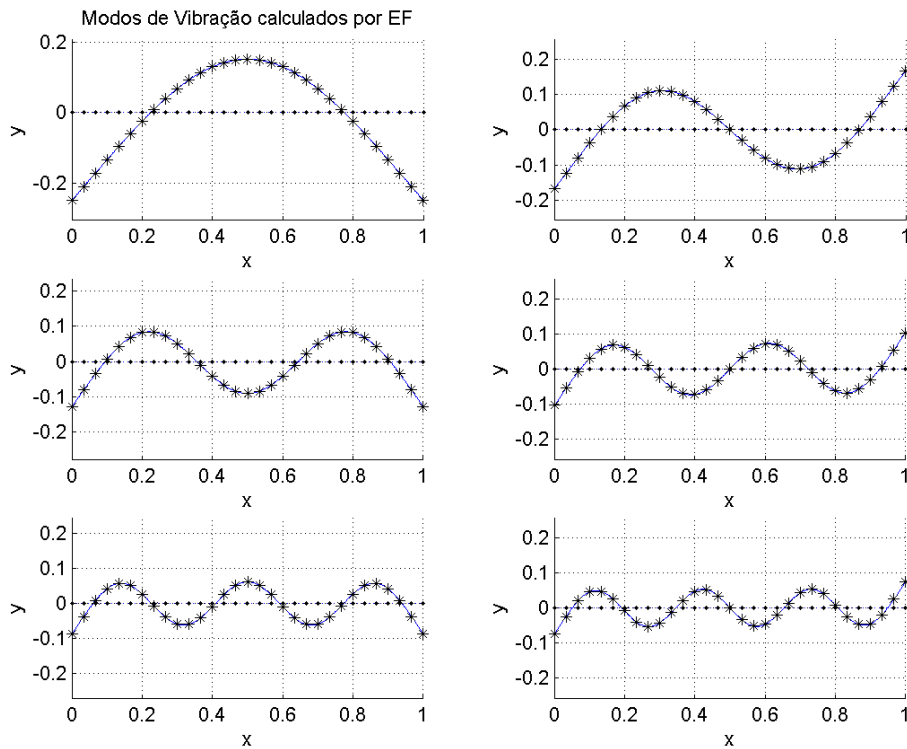
**A.2.12****Simulação de um problema de viga livre-livre (aprox. linear)****Freqüências Naturais:**0.051884 · 10<sup>3</sup> Hz0.143022 · 10<sup>3</sup> Hz0.280384 · 10<sup>3</sup> Hz0.463499 · 10<sup>3</sup> Hz0.692416 · 10<sup>3</sup> Hz**Modos de Vibração**

Figura A.39: Modos de vibração do problema de viga livre-livre (30 elem)

**A.2.13**

**Simulação de um problema de viga bi-apoiada com apoio intermediário**

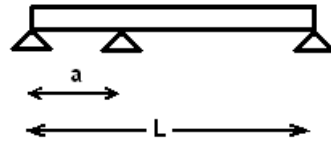


Figura A.40: Viga bi-apoiada com apoio intermediário

**Freqüências Naturais (Blevins):**

		$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \left( \frac{EI}{m} \right)^{1/2}$				
$\lambda_i = \lambda_i$ (Number of Spans)						
Number of Spans (a)	Mode Number (i)					
	1	2	3	4	5	6
1	3.142	6.283	9.425	12.57	15.71	18.85
2	3.142	3.927	6.283	7.068	9.424	10.21
3	3.142	3.557	4.297	4.713	6.707	7.430
4	3.142	3.393	3.928	4.463	6.283	6.545
5	3.142	3.310	3.700	4.152	4.550	6.284
6	3.142	3.260	3.557	3.927	4.293	4.602
7	3.142	3.230	3.460	3.764	4.089	4.394
8	3.142	3.210	3.394	3.645	3.926	4.208
9	3.142	3.196	3.344	3.557	3.800	4.053
10	3.142	3.186	3.309	3.488	3.700	3.927
11	3.142	3.178	3.282	3.436	3.621	3.823
12	3.142	3.173	3.261	3.393	3.557	3.738
13	3.142	3.168	3.244	3.359	3.504	3.666
14	3.141	3.164	3.230	3.332	3.460	3.607
15	3.141	3.161	3.219	3.309	3.424	3.557

Figura A.41: Tabela de freqüências naturais de viga bi-apoiada com apoio intermediário (Blevins)

Essa tabela apresenta as seis primeiras freqüências naturais de problemas de viga bi-apoiada que podem ter de um a quinze apoios intermediários.

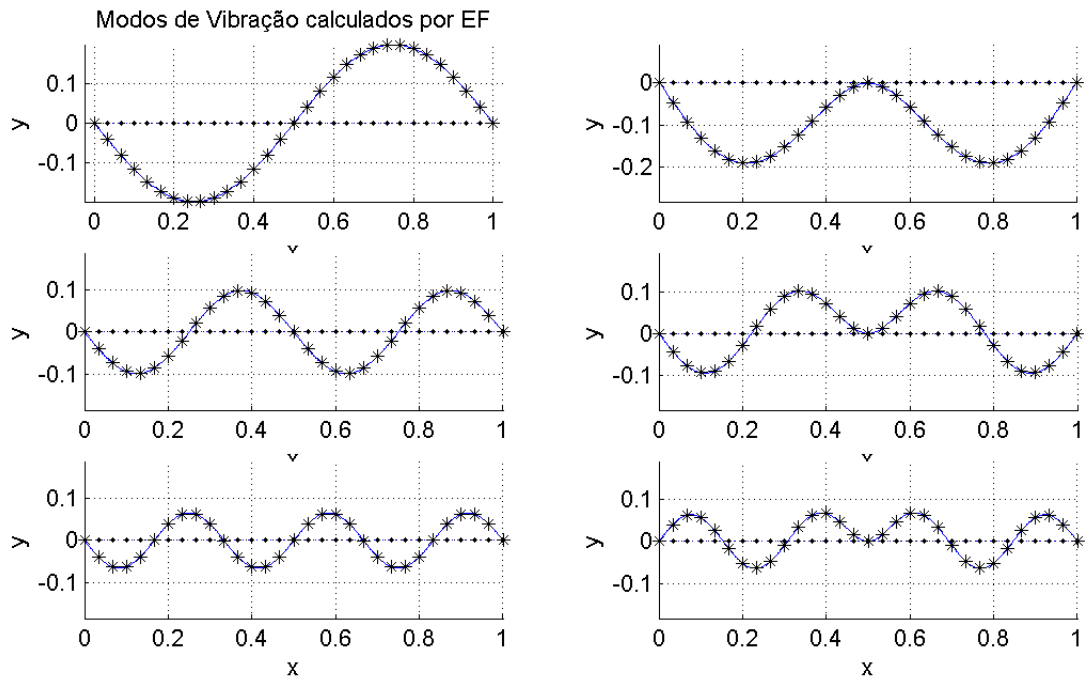
**Freqüências Naturais (aprox. linear):**0.915524 · 10<sup>2</sup> Hz1.430226 · 10<sup>2</sup> Hz3.662171 · 10<sup>2</sup> Hz4.634993 · 10<sup>2</sup> Hz8.240591 · 10<sup>2</sup> Hz**Modos de Vibração (aprox. linear)**

Figura A.42: Modos de vibração do problema de viga bi-apoiada com apoio intermediário (30 elem)



**A.2.14**

**Simulação de um problema de viga apoiada-livre com apoio intermediário (aprox. linear)**

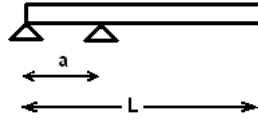


Figura A.43: Viga apoiada-livre com apoio intermediário

**Frequências Naturais:**

- 0.210363 · 10<sup>2</sup> Hz
- 1.080609 · 10<sup>2</sup> Hz
- 1.826436 · 10<sup>2</sup> Hz
- 3.973202 · 10<sup>2</sup> Hz
- 5.347942 · 10<sup>2</sup> Hz

**Modos de Vibração**

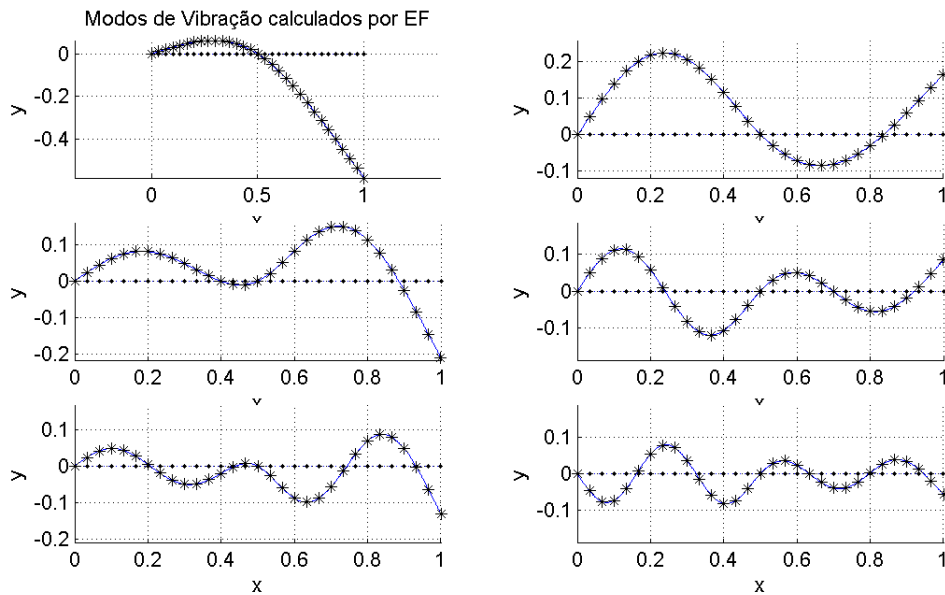


Figura A.44: Modos de vibração do problema de viga apoiada-livre com apoio intermediário (30 elem)

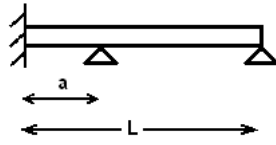
**A.2.15****Simulação de um problema de viga engastada-apoiada com apoio intermediário (aprox. linear)**

Figura A.45: Viga engastada-apoiada com apoio intermediário

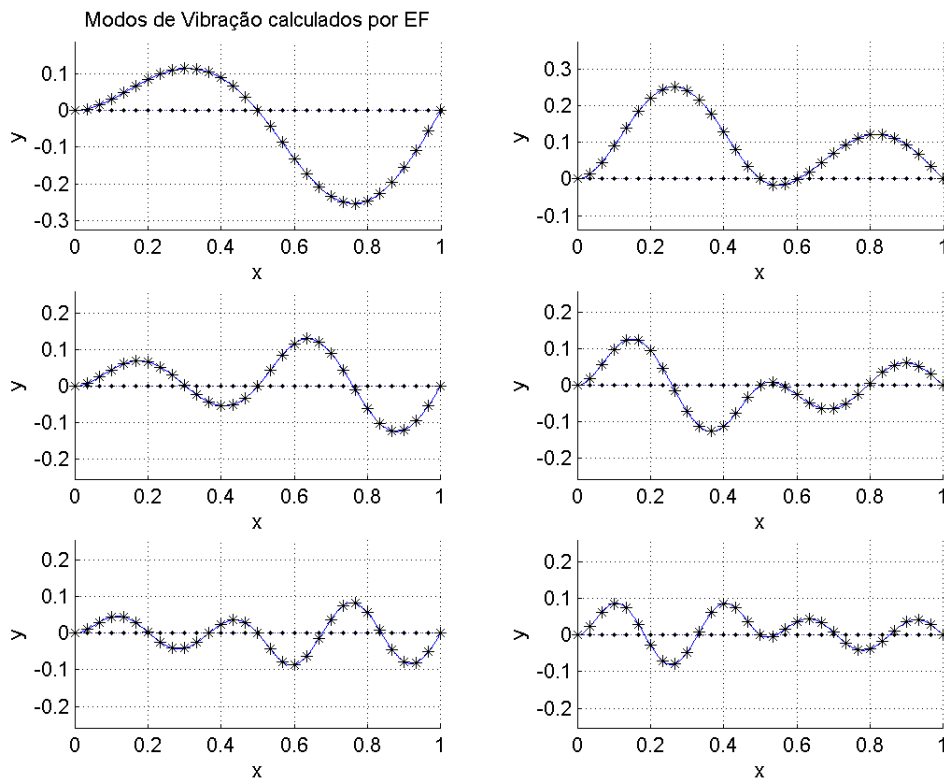
**Frequências Naturais:**0.106806 ·  $10^4$  Hz0.184794 ·  $10^4$  Hz0.397424 ·  $10^4$  Hz0.534635 ·  $10^4$  Hz0.870483 ·  $10^4$  Hz**Modos de Vibração**

Figura A.46: Modos de vibração do problema de viga engastada-apoiada com apoio intermediário (30 elem)

**A.2.16**

**Simulação de um problema de viga bi-engastada com apoio intermediário**

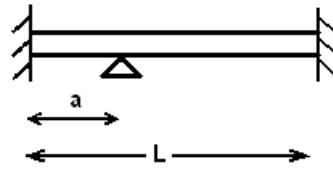


Figura A.47: Viga bi-engastada com apoio intermediário

**Freqüências Naturais (Blevins):**

		$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \left( \frac{EI}{m} \right)^{1/2}$					
$\lambda_i = \lambda_i$ (Number of Spans)							
Number of Spans (a)	Mode Number (i)						
	1	2	3	4	5	6	
1	4.730	7.853	11.007	14.14	17.28	20.42	
2	3.927	4.730	7.068	7.853	10.21	11.00	
3	3.557	4.297	4.730	6.707	7.430	7.853	
4	3.393	3.928	4.463	4.730	6.545	7.068	
5	3.310	3.700	4.152	4.550	4.730	6.460	
6	3.260	3.557	3.927	4.298	4.602	4.730	
7	3.230	3.460	3.764	4.089	4.394	4.634	
8	3.210	3.394	3.645	3.926	4.208	4.464	
9	3.196	3.344	3.557	3.800	4.053	4.298	
10	3.186	3.309	3.488	3.700	3.927	4.153	
11	3.178	3.282	3.435	3.621	3.823	4.030	
12	3.173	3.261	3.393	3.557	3.738	3.927	
13	3.168	3.244	3.359	3.504	3.666	3.839	
14	3.164	3.230	3.332	3.460	3.607	3.764	
15	3.161	3.219	3.309	3.424	3.557	3.701	

Figura A.48: Tabela de freqüências naturais de viga bi-engastada com apoio intermediário (Blevins)

A tabela acima apresenta as seis primeiras freqüências naturais de problemas de viga bi-engastada que tenham de um a quinze apoios intermediários.

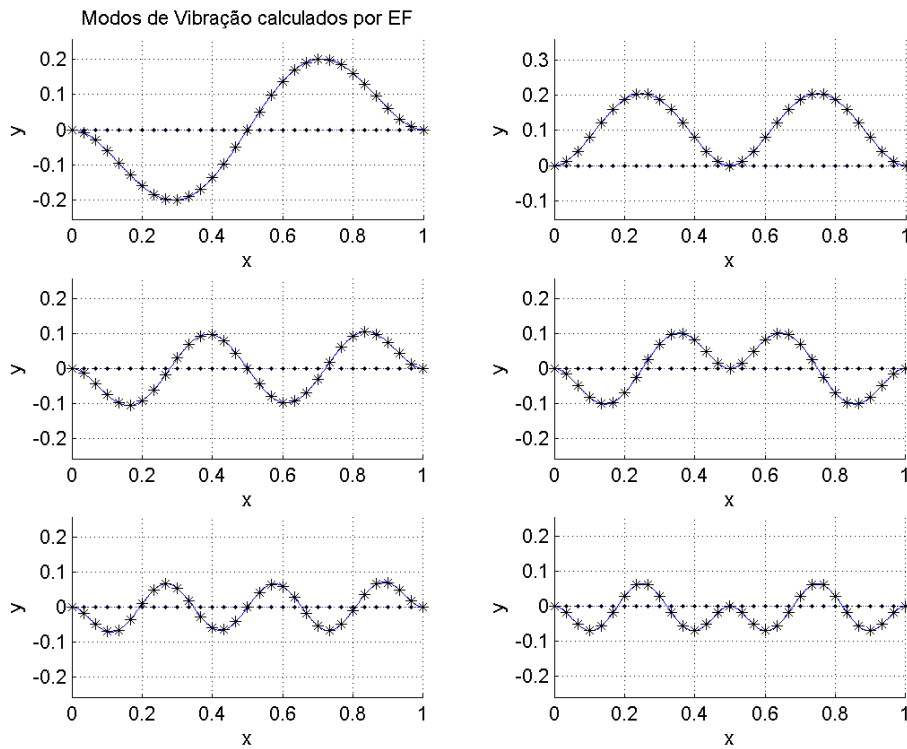
**Freqüências Naturais (aprox. linear):**0.1430 · 10<sup>3</sup> Hz0.2075 · 10<sup>3</sup> Hz0.4635 · 10<sup>3</sup> Hz0.5721 · 10<sup>3</sup> Hz0.9672 · 10<sup>3</sup> Hz**Modos de Vibração (aprox. linear)**

Figura A.49: Modos de vibração do problema de viga bi-engastada com apoio intermediário (30 elem)

**A.2.17**

**Simulação de um problema de viga engastada-livre com apoio intermediário (aprox. linear)**

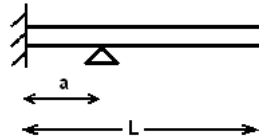


Figura A.50: Viga engastada-livre com apoio intermediário

**Freqüências Naturais (Blevins):**

		$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \left( \frac{EI}{m} \right)^{1/2}$				
$\lambda_i = \lambda_i$ (Number of Spans)						
Number of Spans (a)	Mode Number (i)					
	1	2	3	4	5	6
1	1.875	4.694	7.855	11.00	14.14	17.28
2	1.570	3.923	4.707	7.058	7.842	10.19
3	1.541	3.570	4.283	4.720	6.707	7.430
4	1.539	3.403	3.928	4.450	4.723	6.545
5	1.539	3.316	3.706	4.148	4.538	4.724
6	1.539	3.265	3.563	3.927	4.292	4.592
7	1.539	3.233	3.466	3.767	4.086	4.389
8	1.539	3.213	3.399	3.649	3.926	4.204
9	1.539	3.198	3.349	3.560	3.802	4.051
10	1.539	3.187	3.312	3.492	3.703	3.927
11	1.539	3.179	3.285	3.439	3.624	3.624
12	1.539	3.173	3.263	3.397	3.559	3.739
13	1.539	3.168	3.245	3.362	3.507	3.669
14	1.539	3.165	3.232	3.334	3.463	3.609
15	1.539	3.162	3.221	3.311	3.427	3.559

Figura A.51: Tabela de freqüências naturais de viga engastada-livre com apoios intermediários (Blevins)

A tabela apresenta as seis primeiras freqüências naturais de problemas de viga engastada-livre que tenham de um a quinze apoios intermediários.

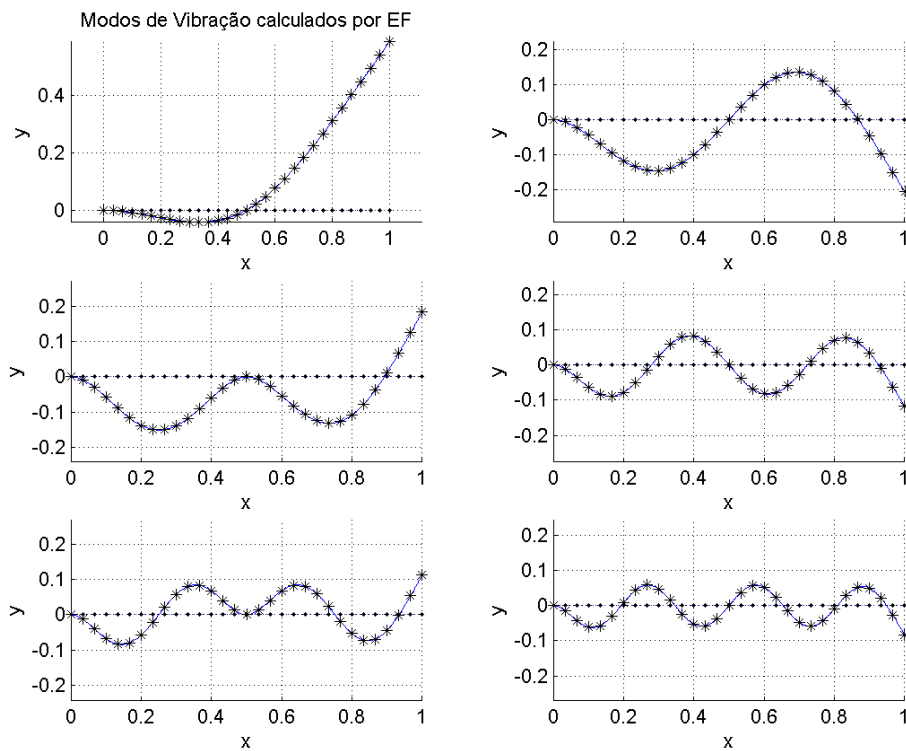
**Frequências Naturais:**0.228880 · 10<sup>2</sup> Hz1.430226 · 10<sup>2</sup> Hz2.059941 · 10<sup>2</sup> Hz4.634993 · 10<sup>2</sup> Hz5.722316 · 10<sup>2</sup> Hz**Modos de Vibração**

Figura A.52: Modos de vibração do problema de viga engastada-livre com apoio intermediário (30 elem)

**A.2.18**

**Simulação de um problema de viga livre-livre com apoio intermediário (aprox. linear)**

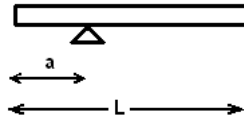


Figura A.53: Viga livre-livre com apoio intermediário

**Frequências Naturais:**

- 0.326152 · 10<sup>2</sup> Hz
- 1.430226 · 10<sup>2</sup> Hz
- 2.043974 · 10<sup>2</sup> Hz
- 4.634992 · 10<sup>2</sup> Hz
- 5.723445 · 10<sup>2</sup> Hz

**Modos de Vibração**

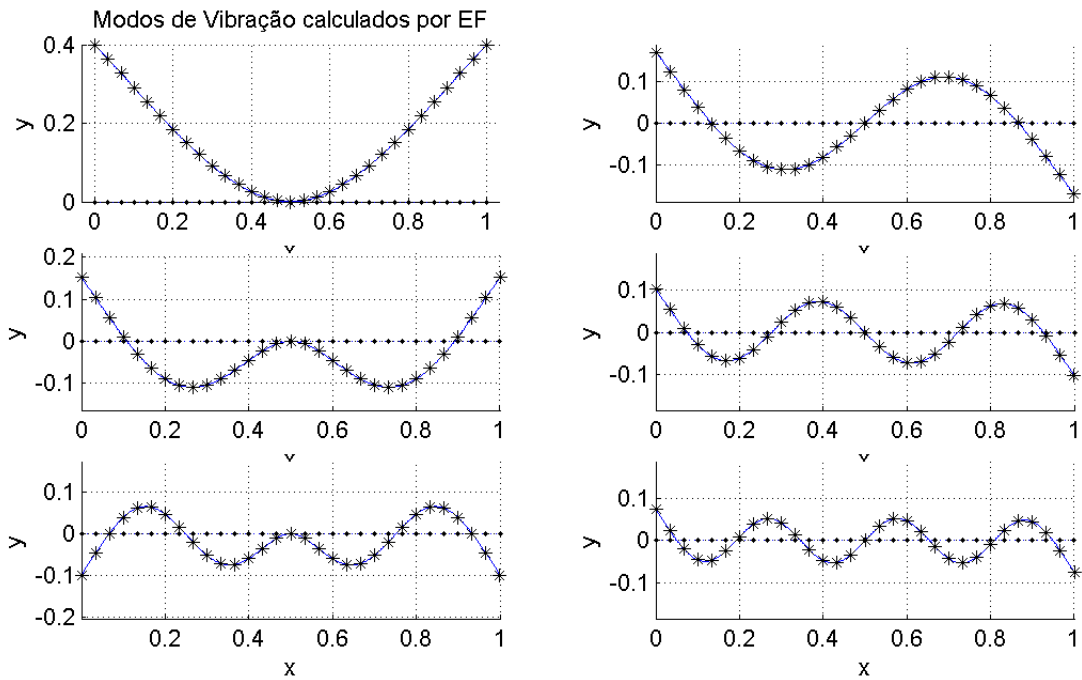


Figura A.54: Modos de vibração do problema de viga livre-livre com apoio intermediário (30 elem)

**A.2.19**

**Simulação de um problema de viga bi-engastada com mola intermediária (aprox. linear)**

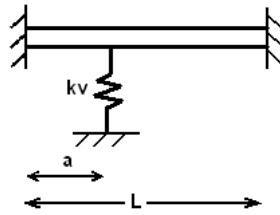


Figura A.55: Viga bi engastada com mola intermediária

**Freqüências Naturais:**

$0.051963 \cdot 10^3$  Hz

$0.143022 \cdot 10^3$  Hz

$0.280395 \cdot 10^3$  Hz

$0.463499 \cdot 10^3$  Hz

$0.692421 \cdot 10^3$  Hz

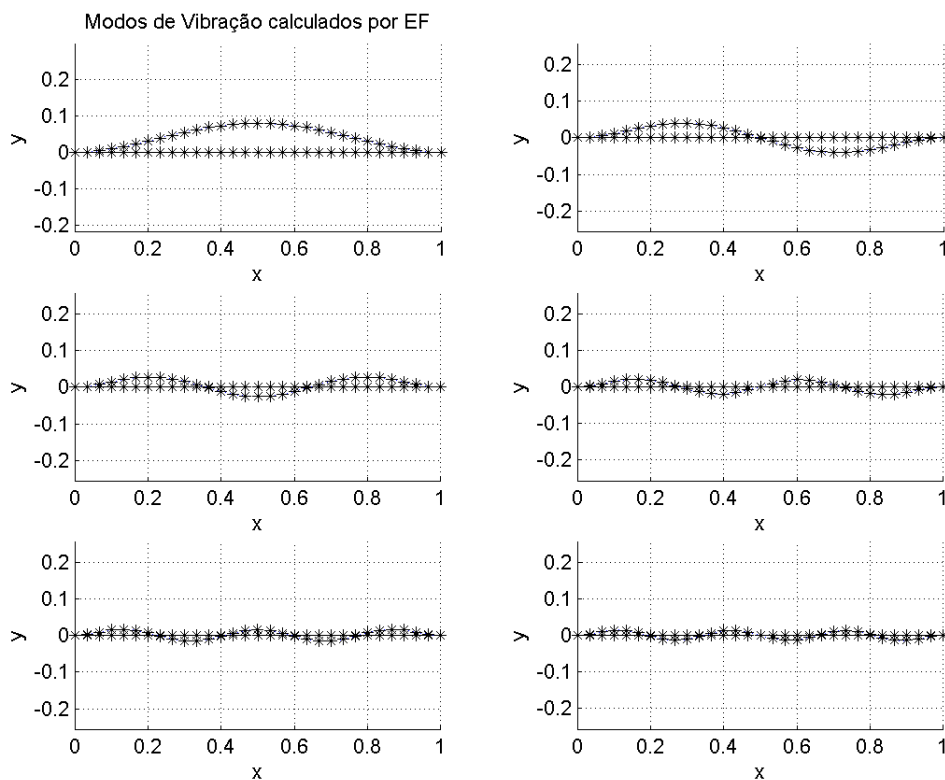
**Modos de Vibração**

Figura A.56: Modos de vibração do problema de viga bi-engastada com mola intermediária (30 elem)



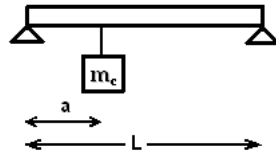
**A.2.20****Simulação de um problema de viga bi-apoiada com massa intermediária (aprox. linear)**

Figura A.57: Viga bi-apoiada com massa intermediária

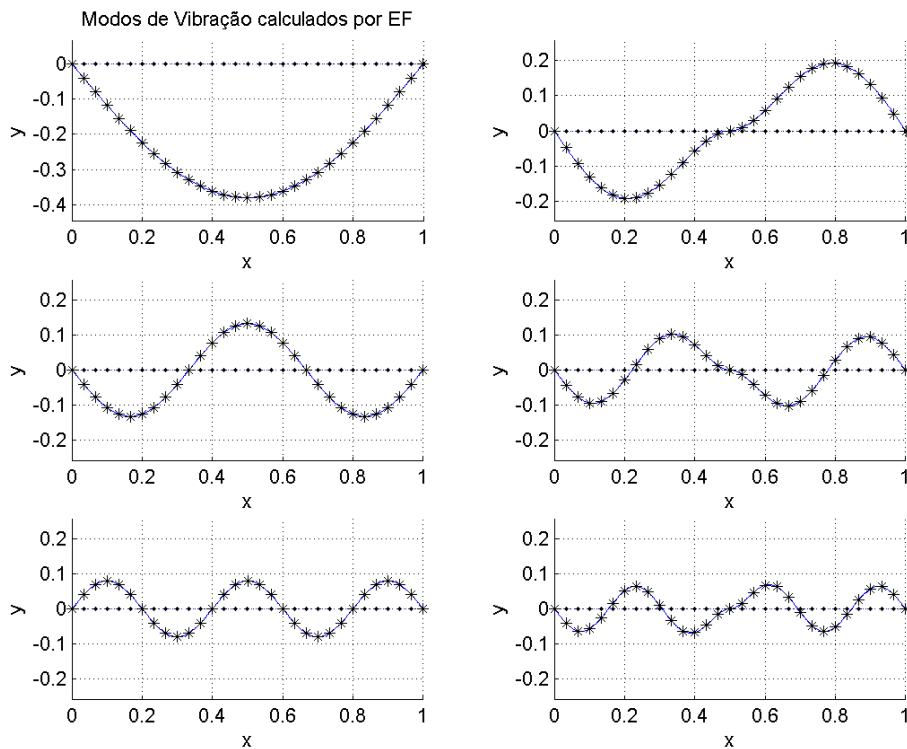
**Freqüências Naturais:**0.228880 · 10<sup>2</sup> Hz1.430699 · 10<sup>2</sup> Hz2.059941 · 10<sup>2</sup> Hz4.635139 · 10<sup>2</sup> Hz5.722317 · 10<sup>2</sup> Hz**Modos de Vibração**

Figura A.58: Modos de vibração do problema de viga bi-engastada com massa intermediária (30 elem)

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)