

MODELO HIDRODINÂMICO 1D MULTI-CALHA COM ALAGAMENTO LATERAL
ACOPLADO A MODELO 2DH

Jorge Augusto Pimentel Filho

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
OCEÂNICA.

Aprovada por:

Prof. Paulo Cesar Colonna Rosman, Ph.D.

Prof^a Thereza Christina de Almeida Rosso, D.Sc.

Prof. José Paulo Soares de Azevedo, Ph.D.

Prof. Benoit Le Geunec, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
AGOSTO DE 2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

PIMENTEL FILHO, JORGE AUGUSTO

Modelo Hidrodinâmico 1D Multi-calha
com Alagamento Lateral Acoplado a
Modelo 2DH [Rio de Janeiro] 2006

XI, 72 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,
Engenharia Oceânica, 2006)

Dissertação - Universidade Federal do Rio
de Janeiro, COPPE

1. Modelo Hidrodinâmico 1D Acoplado a
Modelo 2DH

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

AGRADECIMENTOS

Chegou a hora pela qual tenho esperado por tanto tempo!

Quando digo tanto tempo, me refiro aos últimos dez anos durante os quais tenho perseguido o objetivo de me tornar um engenheiro e cientista. Sei que ainda tenho um longo caminho pela frente, mas não há nada como olhar para trás e vislumbrar o tanto que já fiz.

Este tanto a que me refiro pode parecer pouco para quem está só de passagem, digo, para quem lê esse depoimento sem ter vivido comigo aquelas etapas. Para estes, vou tentar explicar um pouco do que foi necessário: basta citar quantas pessoas me ajudaram diretamente ou indiretamente nesta empreitada. Aproveito para ir agradecendo por tudo que fizeram por mim.

Difícil é ser estudante em um país como o nosso. Passar anos investindo em qualificação sem ter muitas perspectivas de empregar tanto conhecimento, sem ter perspectivas de estar empregado... Que bom que pude contar com o apoio e estímulo de meus pais. Eles sempre me empurraram na direção deste objetivo que acabo de cumprir. Muitas vezes tiveram também que me segurar quando quis voar muito alto: “meu filho, pense em seu futuro e dê um passo de cada vez...”

Se nunca me faltou segurança e apoio é por causa deles: minha mãe, Rosita, e meu pai, Jorge, são responsáveis por tudo isso. Espero que se sintam recompensados, pelo menos em parte, por termos conseguido.

Durante dois anos, de março de 2004 a março de 2006, este trabalho recebeu a colaboração financeira do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq. Agradeço por tal apoio, principalmente em um país onde muitos sequer têm chance de freqüentar uma escola.

Minha querida irmã, Bárbara, e meu grande (literalmente) cunhado, Marcelo, também fazem parte deste time. Não foram poucas as vezes em que eles tiveram compreensão com a minha insistente necessidade de silêncio.

Preciso incluir minha tia Dina, que sempre me tratou como um filho.

Ao Rosman, meu orientador, por ter sido paciente e companheiro. As coisas poderiam ter sido consideravelmente mais difíceis sem sua competência, objetividade e compreensão.

A Patrícia, esposa do Rosman, que me auxiliou com minhas deficiências em programação.

Aos companheiros da área costeira e oceanográfica, por terem me ensinado muita coisa e por terem percorrido os mesmos caminhos. Vocês serviram de inspiração!

Aos demais professores, sempre dispostos a auxiliar. Neste trabalho tem um pouco do que cada um de vocês me ensinou. Acho que não é a toa que tenho o sonho de um dia lecionar, seguir seus passos.

A minha querida sogra, Geane, que acompanhou boa parte de tudo e que me deu a principal razão para enfrentar tudo isso.

Por fim, quero agradecer à principal razão, aquela mesma que a dona Geane me deu. Minha querida namorada, que esteve mais envolvida com tudo isso do que eu em muitas horas. Conseguimos, meu grande amor!

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

MODELO HIDRODINÂMICO 1D MULTI-CALHA COM ALAGAMENTO LATERAL
ACOPLADO A MODELO 2DH

Jorge Augusto Pimentel Filho

Julho/2006

Orientador: Paulo Cesar Colonna Rosman

Programa: Engenharia Oceânica

A unidade de gestão de recursos hídricos no Brasil é a bacia hidrográfica. Isso dificulta a prática de uma gestão integrada com as regiões estuarinas, onde com frequência se têm várias bacias afluentes a um mesmo corpo d'água. Corpos hídricos costeiros e continentais podem possuir características hidrodinâmicas muito distintas, sendo improdutivo utilizarem-se as mesmas ferramentas de gestão em ambos.

Desenvolve-se neste texto um modelo hidrodinâmico computacional 1D para rede de canais com o objetivo de aplicá-lo acoplado ao modelo SisBAHIA 2DH da COPPE. Utiliza-se para a discretização temporal o método do fatoramento implícito e para a discretização espacial, o método do elemento móvel (MEM). As equações de Saint Venant discretizadas são resolvidas de forma iterativa e implícita. O modelo conta ainda com um esquema de simulação de cheias por alagamento lateral, por meio de taludes laterais de alagamento.

A robustez e a eficácia do modelo, do esquema de simulação de cheias e do esquema de acoplamento 1D-2DH são testados respectivamente no estuário do canal do Cunha (RJ), em um canal idealizado reto de calha trapezoidal com taludes de alagamento lateral e na enseada de Paraty. Os resultados são comentados, bem como os aspectos de calibração do modelo.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master Sciences (M.Sc.)

1D MULTI-CHANNEL HYDRODINAMIC MODEL WITH LATERAL OVERFLOW
COUPLED WITH 2DH MODEL

Jorge Augusto Pimentel Filho

Advisor: Paulo Cesar Colonna Rosman

Department: Oceanic Engineering

In Brazil, the management unit of water resources is the water basin. This choice brings difficulties for an integrated management in the estuarine regions, where there are frequently various water basins affluent to the same coastal water body. Continental and coastal water bodies may have quite different hydrodynamics characteristics, being unproductive to use the same tools of management for both.

A 1D computational model for channel networks is developed in this dissertation aiming to couple it with the horizontal 2D model SisBAHIA, developed at COPPE/UFRJ. For time discretization the model uses the implicit factorization and for spatial discretization it uses the Moving Element Method (MEM). The 1D continuity and momentum discretized equations are solved in an iterative and implicit way. The model includes a scheme to simulate lateral overflows, by means of lateral overflow slopes parameters.

The robustness and effectiveness of the model, the overflow simulation scheme and the 1D-2D coupled model are tested respectively in the Cunha channel Estuary (RJ), in a straight idealized channel with trapezoidal section and lateral overflow slopes and in Paraty cove (RJ). Both the results and the calibrations aspects of the model are presented.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	MODELO HIDRODINÂMICO MH1DMC	8
2.1	PARAMETRIZAÇÃO DA ÁREA HIDRÁULICA COM ALAGAMENTO LATERAL.....	8
2.2	EQUAÇÕES PARA O MODELO MH1DMC	11
3	MODELO NUMÉRICO	15
3.1	DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL	16
3.1.1	<i>Discretização Temporal da Equação da Continuidade</i>	<i>21</i>
3.1.2	<i>Discretização Temporal da Equação da Quantidade de Movimento</i>	<i>26</i>
3.2	DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL	29
3.2.1	<i>Discretização Espacial da Equação da Continuidade</i>	<i>34</i>
3.2.2	<i>Discretização Espacial da Equação da Quantidade de Movimento</i>	<i>38</i>
3.3	CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	39
3.3.1	<i>Elevação Prescrita</i>	<i>39</i>
3.3.2	<i>Fluxo Prescrito</i>	<i>40</i>
3.3.3	<i>Condições Impostas nos Entroncamentos</i>	<i>43</i>
4	ACOPLAMENTO ENTRE MODELOS 1D E 2DH	49
4.1	ESQUEMA NUMÉRICO DO ACOPLAMENTO	50
5	APLICAÇÕES.....	53
5.1	EXTRAVASAMENTO LATERAL EM UM CANAL.....	53
5.2	ESTUÁRIO DO CANAL DO CUNHA.....	60
5.3	TESTE DE ACOPLAMENTO NA ENSEADA DE PARATY – RJ	64
6	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	68

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1– Lagoa dos Patos, RS, Brasil: sistema lagunar com várias bacias hidrográficas contribuintes – Foto de satélite (MODES).....	5
Figura 2.1 – Seção transversal trapezoidal com alagamento lateral.....	8
Figura 3.1 - Perímetro hidráulico (P_H) considerado	28
Figura 3.2 – Domínio discretizado	30
Figura 3.3 - Funções de interpolação	31
Figura 3.4 – Esquema em perfil do trecho a montante da última seção.....	41
Figura 3.5 - Entroncamento do tipo 3-4-4	44
Figura 3.6 - Entroncamento do tipo 4-4-5	44
Figura 4.1– Região de acoplamento entre os modelos 1D e 2DH.....	50
Figura 4.2– Marcha de cálculo para acoplamento 1D – 2DH: Predição e correção.....	51
Figura 5.1 – Ilustração em planta do canal e da malha 2DH com 3 elementos de comprimento $L_i = 200\text{m}$ por seção.....	54
Figura 5.2 – Ilustração de uma vista em corte do canal: (t_1) e (t_2) são os taludes de inundação lateral; (H_1) e (H_2) são os tirantes de inundação lateral.....	54
Figura 5.3 – Elevações na seção central (101): MH1Dmc com rugosidades 2 e 4 cm e SisBAHIA com rugosidade 2 cm.....	56
Figura 5.4 – Módulos das velocidades na seção central (101): MH1Dmc com rugosidades 2 e 4 cm e SisBAHIA com rugosidade 2 cm.....	56
Figura 5.5 – elevações no modelo 2DH ao longo da seção 101 no tempo 50400(s).....	57
Figura 5.6 – velocidades transversais (seção 101) ao longo do tempo no modelo 2DH.....	57
Figura 5.7 – Perda de minúcias ao adotar-se uma seção trapezoidal	58
Figura 5.8 – Resultados de elevação e velocidade na seção 101: calibração pelo aumento dos taludes de inundação lateral (de 75 para 150 metros).....	59
Figura 5.9 – Domínio modelado no estuário do canal do Cunha: malha 2DH de quadriláteros e batimetria.....	60
Figura 5.10 – Estuário do canal do Cunha: Comparação 1D x 2DH de elevação (e) e de velocidade (v) no SI.....	61

Figura 5.11 – Detalhe da região entorno da seção 85: zona de recirculação demandando grandes acréscimos de rugosidade (0,03 para 0,2m)– gráficos no (SI).....	63
Figura 5.12 – Enseada de Paraty e o domínio de implementação dos modelos acoplados: Detalhes da malha 2DH e das regiões de acoplamento.	64
Figura 5.13 – Vazões (acoplamento x 2DH) na seção 20, canal do Jabaquara. Os valores estão nas unidades SI.....	65
Figura 5.14 – Vazões (acoplamento x 2DH) na seção 20, rio Perequê-Açu. Os valores estão nas unidades SI.	66
Figura 5.15 - Vazões (acoplamento x 2DH) na seção 20, rio Mateus Nunes. Os valores estão nas unidades SI.....	66
Figura 6.1 – Esquema de acoplamento modificado objetivando maior estabilidade	69
Figura 6.2 – Rio de seção retangular: variação de 1cm na elevação.....	70

LISTA DE SÍMBOLOS

$A = A_1 + A_2 + A_3$: área hidráulica;
 A_1 : parcela da área hidráulica abaixo do tirante menor de inundação;
 A_2 : parcela da área hidráulica entre os tirantes de inundação lateral;
 A_i : soma das áreas laterais de inundação;
 q_1 : vazão lateral por unidade de comprimento;
 A_{i_d} : área de alagamento lateral direita;
 A_{i_e} - área de alagamento lateral esquerda;
 $b_1(x)$: largura da base do leito principal;
 $b_2(x)$: largura do leito principal na cota de inundação menor;
 $b_3(x)$: largura do leito principal na cota de inundação maior;
 C_f^* : coeficiente de atrito na calha;
 C_h : coeficiente de Chézy;
 H : tirante hidráulico;
 $H_1(x)$: tirante hidráulico de alagamento menor;
 $H_2(x)$: tirante hidráulico de alagamento maior;
 $h(x)$: negativo da cota da base;
 $h_d(x)$: negativo da cota da margem de inundação direita;
 $h_e(x)$: negativo da cota da margem de inundação esquerda;
 $m(x)$: média dos taludes da calha principal;
 $m_d(x)$: talude direito da calha principal;
 $m_e(x)$: taludes esquerdo da calha principal;
 $mi_d(x)$: talude de inundação direito;
 $mi_e(x)$: talude de inundação esquerdo;
 $p_H(x)$: perímetro hidráulico da seção;
 x : localização da seção transversal ao longo do rio;
 z_1 : cota da margem menor de inundação;
 z_2 : cota da margem maior de inundação;
 ε : amplitude de rugosidade equivalente do fundo;

ζ : cota da superfície livre;

K_L : coeficiente que incorpora os efeitos de difusão turbulenta e dispersão longitudinal de quantidade de movimento que aparece devido à perda da advecção diferenciada ao longo da seção transversa;

Λ_x : largura espacial do filtro Guaussiano;

$\hat{\rho}$: densidade promediada na coluna d'água e na largura da seção;

ρ_0 : valor de referência constante da densidade introduzido pela aproximação de Boussinesq;

τ^F : tensor de atrito com a calha;

τ^L : tensor de tensão longitudinal média na seção transversal;

τ^S : tensor de tensões de atrito na superfície livre.

1 Introdução

A água é um recurso natural renovável, mas não inesgotável. Ela é essencial à existência da vida em nosso planeta. Estima-se que a cada 20 anos dobram os volumes de água consumida pela humanidade. Aumentam também as conseqüências da ação do homem sobre a quantidade e a qualidade da água disponível, exigindo, por esta razão, sua proteção.

Enquanto a demanda por bens comuns fluidos renováveis, como é o caso da água e do ar, for inferior ao seu suprimento, os problemas advindos de seu uso são controláveis e resolvíveis. Contudo, quando a demanda supera a oferta começam a surgir os conflitos de uso, havendo necessidade de se estabelecer a publicização destes bens por parte do poder público, para os quais deverão ser estabelecidos controles. Isto induz à necessidade de se estabelecer o processo de gestão.

O gerenciamento ou gestão de um recurso ambiental natural consiste na articulação do conjunto de ações dos diferentes agentes sociais, econômicos ou socioculturais interativos, objetivando compatibilizar o uso, o controle e a proteção deste recurso, disciplinando as respectivas ações antrópicas, de acordo com a política estabelecida para o mesmo, de modo a se atingir o desenvolvimento sustentável (FREITAS, A. J., 2005).

Um processo de gestão de recursos hídricos deve ser constituído por uma política, por um modelo de gerenciamento e por um sistema de gerenciamento. A política estabelece diretrizes gerais. O modelo de gerenciamento estabelece a organização (ou configuração) administrativa e funcional necessária para tal. Já o sistema de gerenciamento é constituído pelo conjunto de organismos agências e instalações governamentais e privadas, para a execução da política, por meio do modelo adotado e tendo por instrumento o planejamento de recursos hídricos.

No Brasil, a bacia hidrográfica é adotada como a unidade territorial para a implementação da Política Nacional de Recursos Hídricos (PNRH) e para a atuação do Sistema Nacional de Recursos Hídricos. Este é um dos fundamentos da (PNRH), segundo a Lei 9433 de

08/01/1997, que institui a referida Política. Sendo assim, a bacia hidrográfica é adotada com unidade de planejamento para a qual há necessidade de se estudar o gerenciamento do recurso natural como um todo, sem redução temática.

A adoção da bacia hidrográfica como unidade de planejamento tem um aspecto positivo, pois a maioria dos problemas de causa-efeito aí gerados correlaciona-se ao uso dos recursos hídricos, cuja rede de drenagem se conforma a estes problemas.

Um efeito negativo desta adoção reside no fato de que grande parte destas reações de causa-efeito tem caráter econômico e político que extrapola os limites da bacia hidrográfica. Além disso podem existir problemas ocorridos no âmbito da bacia que tenham como causa o mau uso dos recursos hídricos em regiões a jusante do exutório da bacia, ou vice-versa. Pode-se destacar ainda, como ponto negativo, o fato de que a rede de drenagem superficial e a subterrânea não coincidem em uma bacia hidrográfica.

Segundo o que foi acima exposto pode-se imaginar o tipo de dificuldades que ocorrem ao tentar-se implementar uma gestão integrada de recursos hídricos. Para muitos casos pode ser satisfatória a adoção de uma bacia hidrográfica (ou até mesmo de uma sub-bacia) como unidade de planejamento para a gestão. Mas, para tantos outros muitos casos, este enfoque pode não se mostrar satisfatório.

As regiões estuarinas têm papel indiscutível não só do ponto de vista da preservação de espécies e do equilíbrio ambiental. A grande disponibilidade de nutrientes, ocasionada pelo tempo de residência dos mesmos sob ação da maré, faz com que os estuários sejam verdadeiros berçários da vida. Junte-se a isto o fato de serem áreas geralmente dotadas de apreciável beleza natural. Têm-se então cenários extremamente aprazíveis e propícios à ocupação humana, que abrigam alguns dos maiores bolsões de densidade populacional do mundo.

Dissociar a gestão das águas de regiões tão importantes para o meio ambiente e para o homem da gestão das regiões de águas continentais pode constituir um erro. Mas este erro é

cometido com frequência ao adotarem-se as bacias hidrográficas como unidades de gestão. Como já exposto, os problemas gerados nas regiões estuarinas podem afetar as águas continentais e vice-versa.

Imaginemos, por exemplo, duas situações hipotéticas: Na primeira, uma administração de um porto decide dragar o canal de acesso para que embarcações de maior calado possam usá-lo. Será que as maiores profundidades ou as alterações hidrodinâmicas por conta da dragagem poderão levar a uma maior intrusão salina, prejudicando um sistema de abastecimento com captação a montante? Numa segunda situação hipotética imaginemos os danos que a falta de transpasse de sedimentos na operação de uma barragem em um rio, mesmo a muitos quilômetros de distância da região da foz, pode ocasionar a jusante.

Há de se priorizar a gestão de águas destinadas ao abastecimento público, mas não se pode fazê-lo de forma totalmente dissociada da gestão das regiões estuarinas. A lei 9433 é clara ao estabelecer como diretriz geral de ação, em seu artigo 3º, a integração da gestão de bacias hidrográficas com a das regiões estuarinas. Mas a aplicação da Política Nacional de Recursos Hídricos não tem se verificado de forma efetiva em tais regiões, não como tem sido feito nas regiões fora do alcance das marés.

Pode-se citar a lei 9984, de 17/07/2000, que dispõe sobre a criação da Agência Nacional de Águas (ANA). Segundo o artigo 4º, incisos IV e V dessa lei, cabe a ANA outorgar, por intermédio de autorização, o direito de uso de recursos hídricos em corpos d'água de domínio da União e fiscalizar o uso de tais recursos. Não se faz distinção na lei entre corpos d'água sob influência da maré (região estuarina) ou não, para efeito da competência citada. No entanto, tal competência da ANA não tem se desenvolvido no mesmo ritmo em regiões estuarinas e em regiões fora do alcance da maré. Da mesma forma podemos citar os corpos d'água que se incluem entre os bens dos Estados e cuja outorga de uso é de competência dos órgãos dos Poderes Executivos Estaduais.

Um dos pilares do modelo vigente de política é que o financiamento dos programas e intervenções contemplados nos planos de recursos hídricos é feito pela cobrança do uso de

recursos hídricos. As águas costeiras e oceânicas não são consideradas como recursos esgotáveis. Mas as águas costeiras estuarinas são, como já citado, responsáveis por propiciar condições únicas para certos nichos ambientais. Além de constituírem uma ligação entre as águas continentais e os oceanos, do ponto de vista dos transportes.

Talvez seja mais difícil cobrar pelo uso de uma água imprópria para o consumo humano, como frequentemente é o caso das águas estuarinas (salgadas). Mas isso é algo que precisa ser pensado, sob pena do comprometimento do meio ambiente e até mesmo das águas continentais, que podem sofrer influência de uma eventual má gestão de regiões estuarinas.

Nesse cenário está inclusa a noção de aplicabilidade do modelo desenvolvido neste trabalho. Uma ferramenta capaz de propiciar a visão integrada de vastos domínios de interesse, que podem focar tanto águas costeiras e estuarinas como águas continentais, de forma computacionalmente e funcionalmente econômica.

Uma situação desse tipo constantemente recai em casos onde existe grande variabilidade de características hidrodinâmicas e morfológicas dos corpos d'água envolvidos. Imaginemos, por exemplo, o cenário comum de vários braços de um mesmo rio ou mesmo de várias bacias hidrográficas desaguando em um sistema lagunar. Veja a Figura 1.1.

Quanto mais numerosas e extensas as regiões fluviais (bacias hidrográficas e braços de rios), mais se justifica a implementação de um modelo especializado para este tipo de morfodinâmica: São corpos d'água que podem ser modelados em uma dimensão, sem significativa perda de informação. Utilizar um modelo hidrodinâmico 2DH ou 3D pode nos fornecer uma riqueza de detalhes maior em alguns casos, mas nem sempre isso é requerido.

Portanto seria interessante um esquema no qual as regiões das bacias e braços de rios que deságuam nos sistemas lagunares tivessem sua hidrodinâmica resolvida por um modelo 1D, quando o nível de detalhe requerido assim o permitisse. Isso porque modelos 1D são muito robustos, rápidos e de fácil implementação, além de necessitarem de custos menores com coletas de dados de campo. Por outro lado, os subdomínios das lagoas ou dos lagos

continuarão demandando, na maioria dos casos, um nível de detalhamento que exige modelos mais elaborados. A idéia aqui apresentada é a utilização acoplada de modelos 1D e 2DH para tais situações.



Figura 1.1– Lagoa Mirim e Lagoa dos Patos, RS, Brasil: sistema lagunar com várias bacias hidrográficas contribuintes – Foto de satélite (MODES).

Reis Junior (1998) desenvolveu um modelo 1D para rede de canais. O modelo de Reis Junior utiliza o método do fatoramento implícito para a discretização temporal em conjunto com o método das substituições sucessivas, fazendo um desacoplamento do cálculo das variáveis mediante explicitação da velocidade na equação da quantidade de movimento e posterior substituição na equação da continuidade, que passa a ter somente a elevação como incógnita. A velocidade é calculada por substituições sucessivas dos valores de elevação na equação da quantidade de movimento.

Para a discretização espacial, o modelo de Reis Junior utiliza o método do elemento móvel (MEM).

O modelo aqui desenvolvido assemelha-se ao modelo de Reis Júnior, por utilizar o método do fatoramento implícito para a discretização temporal e o MEM para a discretização espacial. Mas não é feito o desacoplamento das variáveis. Sendo assim, elevação e velocidade são resolvidas simultaneamente, utilizando-se uma rotina iterativa. Maiores detalhes são apresentados no capítulo 3.

Existem modificações no que concerne à configuração de calha adotada. Novos parâmetros de calha foram introduzidos, para permitir a simulação de cheias por alagamento lateral através da utilização de taludes de inundação lateral. Essa é uma situação comum em regiões estuarinas e que não era contemplada no modelo de Reis Junior. A nova configuração de calha e as equações governantes são apresentadas no capítulo 2, Modelo Hidrodinâmico MH1Dmc.

O desenvolvimento numérico do acoplamento entre os modelos 1D e 2DH será exposto no capítulo 4, com a apresentação do método preditor-corretor utilizado para permitir a troca de informações entre os modelos a serem acoplados. Pretende-se a utilização conjunta do modelo 1D com o SisBAHIA, um modelo desenvolvido na COPPE e de uso amplamente difundido para a modelagem de corpos d'água rasos.

A robustez do modelo é testada no estuário do canal do Cunha, no qual se situa a Ilha do Fundão. Os resultados são comparados com os do Modelo 2DH do SisBAHIA e apresentados na seção 2 do capítulo 5. A seção 1 do mesmo capítulo traz a aplicação de um caso hipotético do alagamento lateral em um canal de seção trapezoidal e reto. Os resultados são também comparados aos do SisBAHIA.

A seção 5.3 traz um exemplo de utilização acoplada entre o modelo 1D e o SisBAHIA na enseada de Paraty, no estado do Rio de Janeiro. Os comentários a respeito da economia

computacional obtida e a validação dos resultados são também apresentados na mesma seção.

Finalmente, no capítulo 6 são apresentadas as conclusões e recomendações para futuros trabalhos.

2 Modelo hidrodinâmico MH1Dmc

Neste capítulo é apresentada a formulação matemática do modelo unidimensional multicalha MH1Dmc, aplicável a redes de canais com área de alagamento lateral. As equações do modelo 1D podem ser deduzidas por integração lateral das equações 2DH que, por sua vez, podem ser deduzidas pela integração das equações 3D ao longo da coluna d'água. Mas antes de apresentar as equações 1D, será definida uma parametrização que inclua as planícies de alagamento lateral para a área hidráulica.

2.1 Parametrização da Área Hidráulica com Alagamento Lateral

Em sistemas estuarinos afeitos à modelagem 1D, em geral é suficiente modelar-se a área hidráulica como um trapézio, acrescido de áreas de alagamento lateral com base em taludes, como indicado na Figura 2.1

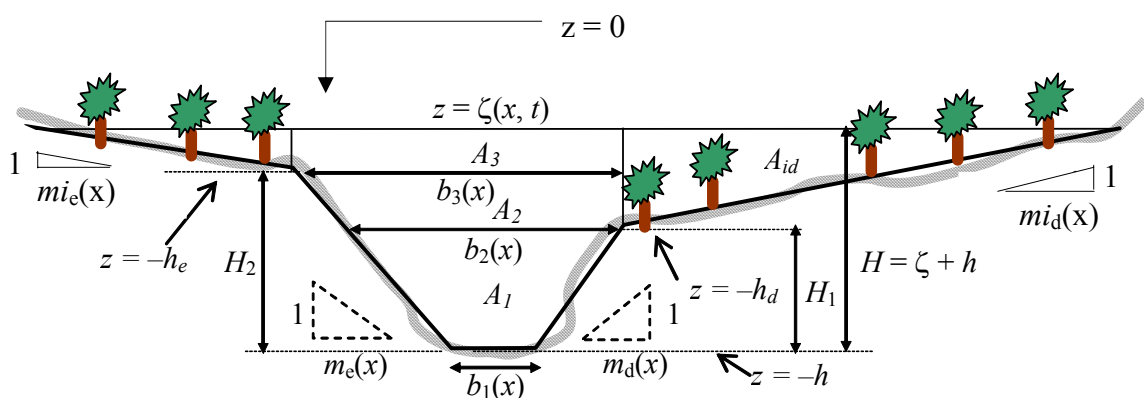


Figura 2.1 – Seção transversal trapezoidal com alagamento lateral

Tem-se, na Figura 2.1:

- x – localização da seção transversal ao longo do rio;
- $h(x)$ - Negativo da cota da base;
- $b_1(x)$ - Largura da base do leito principal;
- $b_2(x)$ - Largura do leito principal na cota de inundação menor;
- $b_3(x)$ - Largura do leito principal na cota de inundação maior;
- $m_d(x)$ e $m_e(x)$ - Taludes direito e esquerdo da calha principal;

- $mi_d(x)$ e $mi_e(x)$ - Taludes de inundação direito e esquerdo;
- $H = h + \zeta$ - Tirante hidráulico;
- $H_1(x)$ e $H_2(x)$ - Tirantes hidráulicos de alagamento;
- $A = A_1 + A_2 + A_3$ - Área hidráulica;
- Ai_d e Ai_e - Áreas de alagamento lateral.

Tal hipótese traduz bem a configuração real, na medida em que se tenham áreas laterais de alagamentos relativamente planas e com vegetação, o que é comum em regiões estuarinas que sofrem alagamento. A região de alagamento lateral, indicada na Figura 2.1 pelas áreas Ai_d e Ai_e , não possui velocidades longitudinais significativas. A presença de vegetação promove um atrito grande o bastante para que se desconsiderem tais velocidades.

Na aplicação da equação da continuidade a sistemas estuarinos é recomendável definirem-se os parâmetros geométricos, principalmente a largura e a cota negativa da base, de modo que a área hidráulica natural e a área trapezoidal do modelo tenham o mesmo raio hidráulico em relação ao nível médio da água. Se as seções transversais de um estuário são complexas a ponto de não se conseguir bons resultados com a representação mostrada na Figura 2.1, recomenda-se usar um modelo 2DH com malha ajustada ao domínio. Com a capacidade dos computadores atuais, não há uma boa justificativa para se considerar seções transversais multipoligonais, comuns em modelos 1D de décadas passadas.

A seguir apresenta-se a formulação da área hidráulica com alagamento lateral, baseando-se no esquema apresentado na Figura 2.1. Para tanto, é conveniente a introdução de dois parâmetros extras:

$$z_1 = \text{mín} (-h_d, -h_e)$$

$$z_2 = \text{máx} (-h_d, -h_e)$$

Sendo assim, obtém-se:

a) Sem inundação lateral: $\zeta \leq z_1$

$$A = (b_1 + mH)H \quad (1)$$

$$Ai = 0 \quad (2)$$

$$m = \frac{m_e + m_d}{2} \quad (3)$$

Sendo Ai a área total de inundação, e m o talude médio da calha principal do corpo d'água.

b) Com inundação lateral em uma margem: $z_1 < \zeta \leq z_2$

Nesse caso, a formulação do problema deve levar em conta qual das margens da calha menor é a mais baixa, h_d ou h_e :

Se inundar primeiro na margem direita: $h_d > h_e \rightarrow z_1 = -h_d; m_1 = m_d; mi_1 = mi_d$
 $z_2 = -h_e; m_2 = m_e; mi_2 = mi_e$
 Se inundar primeiro na margem esquerda: $h_e \geq h_d \rightarrow z_1 = -h_e; m_1 = m_e; mi_1 = mi_e$
 $z_2 = -h_d; m_2 = m_d; mi_2 = mi_d$

$$b_2 = b_1 + (m_1 + m_2)(z_1 + h) \quad (4)$$

$$A = A_1 + \left[b_2 + \frac{m_2}{2}(\zeta - z_1) \right] (\zeta - z_1) \quad (5)$$

$$Ai = \frac{mi_1}{2}(\zeta - z_1)^2 \quad (6)$$

Sendo b_2 a largura do espelho d'água sobre a calha principal quando $\zeta = z_1$.

c) Com inundação lateral nas duas margens: $z_2 < \zeta$

Novamente, a formulação do problema deve levar em conta qual das margens da calha menor é a mais baixa, h_d ou h_e :

Se inundar primeiro na margem direita: $h_d > h_e \rightarrow z_1 = -h_d; m_1 = m_d; mi_1 = mi_d$
 $z_2 = -h_e; m_2 = m_e; mi_2 = mi_e$
 Se inundar primeiro na margem esquerda: $h_e \geq h_d \rightarrow z_1 = -h_e; m_1 = m_e; mi_1 = mi_e$
 $z_2 = -h_d; m_2 = m_d; mi_2 = mi_d$

$$b_3 = b_2 + m_2(z_2 - z_1) \quad (7)$$

$$A = A_1 + A_2 + (\zeta - z_2)b_3 \quad (8)$$

$$Ai = \frac{mi_1}{2}(\zeta - z_1)^2 + \frac{mi_2}{2}(\zeta - z_2)^2 + \quad (9)$$

Sendo b_3 a largura do espelho d'água sobre a calha principal quando $\zeta = z_2$.

2.2 Equações para o Modelo MH1Dmc

Partindo-se da equação da continuidade 3D (condição de escoamento incompressível) e da equação da quantidade de movimento 3D e fazendo-se a integração ao longo da coluna d'água e, em seguida, integrando-se as equações 2DH obtidas ao longo da largura, chega-se as seguintes equações para o modelo hidrodinâmico:

- Equação da continuidade ou condição de escoamento incompressível 1D:

$$\frac{\partial A_T}{\partial t} + \frac{\partial u A_T}{\partial x} = q_l \quad (10)$$

$$A_T = A + Ai \quad (11)$$

sendo $A(x, t)$ a área hidráulica função do nível de água instantâneo $\zeta(x, t)$ da seção transversal na posição x . Similarmente, $A_i(x, t)$ é a área de inundação em planícies laterais, e $q_l(x, t)$ é a vazão lateral por unidade de comprimento. Desprezando-se as velocidades longitudinais na região de alagamento, tem-se:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Au}{\partial x} = -\frac{\partial A_i}{\partial t} + q_l \quad (12)$$

- Equação de quantidade de movimento 1D:

Integrando-se a equação de momentum 2DH ao longo da largura obtém-se:

$$\frac{\partial(uA)}{\partial t} + \frac{\partial(uuA)}{\partial x} = -gA \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \underbrace{gA \frac{H_h}{2} \frac{\partial(\hat{\rho}/\rho_0)}{\partial x_i}}_{(2)} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} (A\tau_L^T) + b_\zeta \tau^S - p_H \tau^F \right) \quad (13)$$

que é a chamada forma conservativa da equação de quantidade de movimento 1D, onde b_ζ é a largura da seção na linha d'água, p_H é o perímetro hidráulico da seção, $\hat{\rho}$ é a densidade promediada na coluna d'água e na largura e ρ_0 é o valor de referência constante da densidade introduzido pela aproximação de Boussinesq, vide ROSMAN (1997). A forma não conservativa resulta da aplicação da equação da continuidade 1D na expansão das derivadas no lado esquerdo de (13), chegando-se a:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \underbrace{g \frac{H_h}{2} \frac{\partial(\hat{\rho}/\rho_0)}{\partial x_i}}_{(1)} + \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{A} \left(\frac{\partial}{\partial x} (A\tau_L^T) + b_\zeta \tau^S - p_H \tau^F \right) - \frac{u}{A} \left(\frac{\partial A_i}{\partial t} - q_l \right) \quad (14)$$

onde, em ambas as equações, o termo (1) é o gradiente de pressão devido a variações longitudinais na densidade média na seção transversal ($\hat{\rho}/\rho_0$), sendo H_h a profundidade

hidráulica da seção¹. Em geral não se inclui o termo (1) na modelagem da hidrodinâmica 1D de sistemas estuarinos. Os termos τ^S e τ^F são as tensões de atrito na superfície livre e na calha (perímetro hidráulico), que resultam das condições de contorno dinâmicas nessas fronteiras, quando se integra os termos de tensão turbulenta. Em geral, em modelos 1D não é relevante a inclusão da tensão na superfície livre, que se incluída, pode ser definida de forma semelhante a tensão de atrito na calha, equação (15)

No modelo 1D, a tensão de atrito na calha é calculada da seguinte forma:

$$\tau^F = \rho_0 C_f^* |U|U \quad (15)$$

sendo C_f^* o coeficiente de atrito, obtido da mesma forma que nos modelos 2DH e 2DV, ou seja, via coeficiente de Chézy:

$$C_f^* = \frac{g}{C_h^2} \therefore C_h = 18 \log \left(\frac{6R_H}{\varepsilon} \right) \quad (16)$$

onde $R_H = (A / p_H)$ é o raio hidráulico da seção. Como no caso anterior ε é a amplitude da rugosidade equivalente do fundo.

Nas deduções de modelos hidrodinâmicos 1D apresentados em livros de hidráulica de canais, (equações de Saint Venant), não aparece um termo dispersivo de tensão longitudinal média na seção transversal, τ^L . Entretanto se a equação for deduzida a partir do modelo tridimensional geral, como sugerido neste capítulo, a tensão longitudinal existe. Em geral seu valor é pequeno se o escoamento for pouco variado, mas pode ser significativo em escoamentos muito variados. É comum a não inclusão de tal termo, sendo seus efeitos incorporados no termo de tensão na calha, τ^C . Entretanto, a inclusão do termo pode trazer benefícios na modelagem numérica, já que é um termo dissipativo. Como nos casos 2DH e 2DV, também se pode modelar τ^L através do emprego de filtros Gaussianos. Conforme

¹ Em seções naturais geralmente a largura b_c é muito maior que a profundidade e portanto, aproximadamente igual ao perímetro hidráulico p_H . E neste caso, pela mesma razão, a profundidade hidráulica é aproximadamente igual ao raio hidráulico, R_H , da seção.

constatado por vários autores, parece inquestionável que os filtros Gaussianos têm muitas vantagens teóricas e práticas. Veja, por exemplo, ALDAMA (1985) e ROSMAN (1987). Sendo assim, tem-se:

$$\frac{\tau^L}{\rho_0} = K_L \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\Lambda_x^2}{12} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \frac{\partial U}{\partial x} \quad (17)$$

K_L é um coeficiente que incorpora os efeitos de difusão turbulenta e dispersão longitudinal de quantidade de movimento que aparece devido à perda da advecção diferenciada ao longo da seção transversal, e Λ_x é a largura espacial do filtro.

No caso em apreço o interesse está em modelos hidrodinâmicos sem termos baroclínicos, i.e, sem gradientes de pressão devido a variações de densidade. Sendo assim, não se incluirá o termo (2) da equação (13). O termo dispersivo de tensão longitudinal média na seção transversal τ^L também não aparecerá na equação da quantidade de movimento utilizada, sendo seus efeitos reproduzidos em parte no termo de tensão na calha τ^C . Também é desconsiderada a tensão de atrito na superfície livre τ^F . A equação do momentum 1D para o modelo em questão fica, em sua forma conservativa:

$$\frac{\partial Au}{\partial t} + \frac{\partial Auu}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} A - \frac{\tau^F}{\rho} p_H \quad (18)$$

3 Modelo Numérico

Neste capítulo apresenta-se a modelagem numérica do problema proposto. Modelos numéricos são traduções dos modelos matemáticos, adaptadas para diversos métodos de cálculo. Vale lembrar que na modelagem, o sucesso de uma etapa de tradução nunca supera o da etapa anterior, vide ROSMAN (1997) em Subsídios para Modelagem de Sistemas Estuarinos.

O escoamento unidimensional possui um modelo matemático composto por duas equações diferenciais parciais hiperbólicas não lineares. São as equações (12) e (18) apresentadas no capítulo anterior. Tais equações não possuem solução analítica, exceto mediante algumas simplificações que acabam limitando sua aplicabilidade em problemas práticos de engenharia.

O objetivo da aplicação dos métodos de cálculo numéricos apresentados nesse capítulo é a transformação das equações diferenciais sem solução analítica, que traduzem o problema contínuo em equações algébricas simples através da discretização do meio (espaço e tempo). No entanto, a perda de informação gerada durante essa tradução não deve comprometer os resultados esperados.

Os métodos numéricos mais utilizados na mecânica dos fluidos computacional são o Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Elementos Finitos (MEF), Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método dos Volumes Finitos (MVF). O modelo numérico apresentado a seguir, desenvolvido para modelar o escoamento unidimensional em uma rede de canais com alagamento lateral, utiliza o Método do Fatoramento Implícito para a discretização temporal e o Método do Elemento Móvel (MEM) para a discretização espacial.

O sistema de equações resultante da discretização espacial e temporal da continuidade e da quantidade de movimento possui como incógnitas a elevação e a velocidade. Tal sistema é resolvido sem desacoplamento de variáveis. Ou seja, elevação e velocidade são calculadas

simultaneamente, utilizando-se uma rotina iterativa, fornecendo maior eficiência computacional em relação às rotinas de solução diretas, sem perda de acurácia.

3.1 Discretização Temporal

Para obtenção do modelo numérico, é necessária a discretização temporal das equações do problema. Para tanto, será usado o Método do Fatoramento Implícito, primeiramente proposto por Beam e Warming (1978), modificado por Aldama (1985) e generalizado por ROSMAN (1987).

A seguir é mostrado um procedimento usado para linearização de funções não-lineares que podem ser escritas como um produto de funções lineares. Considere a equação diferencial parcial não-linear:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = L_1(v)L_2(v)L_3(v) \quad (19)$$

onde $v(x,t)$ é uma função escalar do espaço e do tempo e $L_1(v)$, $L_2(v)$ e $L_3(v)$ são operadores lineares contendo diferenciais espaciais. O esquema de grau dois mais geral implícito no tempo que se pode aplicar a (19) é:

$$\begin{aligned} \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = & a_0 L_1(v^n)L_2(v^n)L_3(v^n) + a_1 L_1(v^{n+1})L_2(v^n)L_3(v^n) + \\ & a_2 L_1(v^n)L_2(v^{n+1})L_3(v^n) + a_3 L_1(v^n)L_2(v^n)L_3(v^{n+1}) + \\ & a_4 L_1(v^{n+1})L_2(v^{n+1})L_3(v^n) + a_5 L_1(v^n)L_2(v^{n+1})L_3(v^{n+1}) + \\ & a_6 L_1(v^{n+1})L_2(v^n)L_3(v^{n+1}) + a_7 L_1(v^{n+1})L_2(v^{n+1})L_3(v^{n+1}) \end{aligned} \quad (20)$$

onde $a_0, a_1, \dots, a_6, a_7$ são constantes a serem determinadas mais tarde, e a notação $v^n(x,t) = v(x, n\Delta t)$ foi usada.

Se pretende-se evitar iterações na equação (20) entre termos no tempo $(n+1)$, deve-se obrigar que:

$$a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = 0 \quad (21)$$

Então, resulta o seguinte esquema linear em v^{n+1} implícito no tempo:

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = a_0 L_1(v^n) L_2(v^n) L_3(v^n) + a_1 L_1(v^{n+1}) L_2(v^n) L_3(v^n) + a_2 L_1(v^n) L_2(v^{n+1}) L_3(v^n) + a_3 L_1(v^n) L_2(v^n) L_3(v^{n+1}) \quad (22)$$

Considere agora a expansão em serie de Taylor de v^{n+1} em torno de $t = n \Delta t$

$$v^{n+1} = v^n + \Delta t \frac{\partial v^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 v^n}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 v^n}{\partial t^3} + \dots \quad (23)$$

Substituindo (23) em (22), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^n}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2!} \frac{\partial^2 v^n}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 v^n}{\partial t^3} &= (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) L_1(v^n) L_2(v^n) L_3(v^n) + \\ &\Delta t \left[a_1 \frac{\partial L_1(v^n)}{\partial t} L_2(v^n) L_3(v^n) + a_2 L_1(v^n) \frac{\partial L_2(v^n)}{\partial t} L_3(v^n) + \right. \\ &a_3 L_1(v^n) L_2(v^n) \frac{\partial L_3(v^n)}{\partial t} \left. \right] + \frac{\Delta t^2}{2} \left[a_1 \frac{\partial^2 L_1(v^n)}{\partial t^2} L_2(v^n) L_3(v^n) + \right. \\ &a_2 L_1(v^n) \frac{\partial^2 L_2(v^n)}{\partial t^2} L_3(v^n) + a_3 L_1(v^n) L_2(v^n) \frac{\partial^2 L_3(v^n)}{\partial t^2} \left. \right] + o(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (24)$$

Se obrigar-se tal esquema a ser de $o(\Delta t^2)$ para um passo arbitrário de tempo Δt , segue, de (24) e de (19)

$$\left. \begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\ a_1 = a_2 = a_3 &= 1/2 \end{aligned} \right\} \rightarrow a_0 = -1/2 \quad (25)$$

A forma final para o esquema de fatoramento implícito para 3 operadores lineares fica:

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} [L_1(v^{n+1}) L_2(v^n) L_3(v^n) + L_1(v^n) L_2(v^{n+1}) L_3(v^n) + L_1(v^n) L_2(v^n) L_3(v^{n+1}) - L_1(v^n) L_2(v^n) L_3(v^n)] \quad (26)$$

É fácil estender essa dedução para qualquer numero de operadores lineares:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = L_1(v)L_2(v)\cdots L_M(v) \quad (27)$$

Seguindo o mesmo procedimento apresentado, pode-se obter:

$$\left. \begin{array}{l} a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 1 \\ a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 1/2 \end{array} \right\} \rightarrow a_0 = 1 - \frac{M}{2} \quad (28)$$

Exemplo:

M = 3 →	equação (26).
M = 2 →	esquema de fatoramento implícito de Aldama (1985).
M = 1 →	esquema padrão de Crank-Nicholson.

Caso a variável $u(x,t)$ seja uma função não-linear que não possa ser escrita como um produto de operadores lineares, o esquema apresentado acima não é válido. Esse tipo de termo, entretanto, pode ser escrito como um produto de uma função linear e uma não-linear. Considere a equação diferencial não-linear:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = N(u)L(u) \quad (29)$$

onde $u(x,t)$ é uma função escalar do espaço e do tempo. $N(u)$ é uma função não-linear de (u) , e $L(u)$ é uma linear. Uma forma de evitar iterações ao resolver a aproximação discretizada completa da equação (29) é escrever um esquema de passo no tempo explícito em $N(u)$, mas implícito em $L(u)$:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = a_0 N^{n-1} L^n + a_1 N^n L^n + a_2 N^{n-1} L^{n+1} + a_3 N^n L^{n+1} \quad (30)$$

onde u^n , N^n , L^n (e similares) são os valores daquelas funções no tempo $t = n\Delta t$. Note que qualquer outra combinação envolveria instantes de tempo adicionais ou implicaria em iterações. Considere as seguintes expansões em série de Taylor em torno de $t = n \Delta t$:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \frac{\partial u^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u^n}{\partial t^2} + \dots o(\Delta t^3) \quad (31)$$

$$N^{n+1} = N^n + \Delta t \frac{\partial N^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 N^n}{\partial t^2} + \dots o(\Delta t^3) \quad (1) \quad (32)$$

$$L^{n+1} = L^n + \Delta t \frac{\partial L^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 L^n}{\partial t^2} + \dots o(\Delta t^3) \quad (33)$$

Substituindo tais expansões em serie de Taylor na equação (30), chega-se a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^n}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u^n}{\partial t^2} + o(\Delta t^2) &= (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)N^n L^n + \\ \Delta t \left[(a_2 + a_3)N^n \frac{\partial L^n}{\partial t} - (a_0 + a_2)L^n \frac{\partial N^n}{\partial t} \right] &+ o(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (34)$$

Obrigando-se esse esquema a ser de $O(\Delta t^2)$ para um Δt arbitrário, segue, aplicando-se a equação acima em (29):

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\ a_2 + a_3 &= 1/2 \\ a_0 + a_2 &= -1/2 \end{aligned} \quad (35)$$

(1) – Supõe-se que $N(u)$ seja suave o bastante para que (32) seja válida.

Que é, obviamente, um problema indeterminado. Entretanto, um resultado interessante é obtido fazendo $a_0 = 0$, o que é desejável, porque este é o coeficiente do termo no instante de tempo anterior ($n-1$) em (30):

$$\begin{aligned} a_1 &= +1/2 \\ a_2 &= -1/2 \\ a_3 &= +1 \end{aligned} \quad (36)$$

Tem-se, então:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[N^n(u)L^n(u) - N^{n-1}(u)L^{n+1}(u) \right] + N^n(u)L^{n+1}(u) \quad (37)$$

Deve-se observar que se $N(u)$ for uma constante, recai-se no esquema de Crank-Nicholson, e se $L(u)$ for constante, obtém-se o esquema de Adam-Bashfort de segunda ordem para $N(u)$.

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (L^{n+1} + L^n) \rightarrow \text{Crank - Nicholson} \quad (38)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (3N^n - N^{n-1}) \rightarrow \text{Adam - Bashfort} \quad (39)$$

Uma outra maneira de fazer a discretização temporal na presença do operador não linear é mostrada a seguir. Esta maneira apresenta praticamente os mesmos resultados da discretização apresentada anteriormente.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = N^{+1/2} \frac{(L^+ + L)}{2} \quad (40)$$

Para fazer a discretização temporal das equações governantes, há necessidade de inserir algumas interpolações e extrapolações para determinados termos no tempo $t + \Delta t$ e $t + \frac{1}{2} \Delta t$. A seguir é apresentada uma tabela com a notação usada no desenvolvimento das equações:

Notação:

Tabela 3.1 – Notação indicando passo tempo.

$(...)^+$	indica variável no instante $t + \Delta t$
$(...)^{\#}$	indica variável extrapolada no tempo $t + \Delta t$
$(...)$	sem superescrito indica variável no tempo t
$(...)^-$	indica variável no tempo $t - \Delta t$
$(...)^{\otimes}$	Indica variável extrapolada ou interpolada no tempo $t + \frac{1}{2} \Delta t$.

3.1.1 Discretização Temporal da Equação da Continuidade

Para a configuração de calha adotada, a equação da continuidade fica:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Au}{\partial x} = -\frac{\partial Ai}{\partial t} + q_l$$

Ela é originada aplicando-se, na equação da continuidade, a hipótese do escoamento nas áreas de alagamento lateral ocorrer apenas como contribuição lateral para a calha principal, conforme descrito no capítulo anterior.

Tem-se, na equação (12)

- A : A parcela de área correspondente à região onde há escoamento longitudinal significativo;
- Ai : A parcela da área correspondente à região de alagamento, onde o escoamento longitudinal será desprezado;
- q_l : A vazão lateral no trecho considerado;

u : A velocidade longitudinal na seção.

As áreas (A) e (A_i) serão descritas de acordo com a cota da superfície livre (ζ). Para tal descrição, é necessário comparar (ζ) com z_1 e com z_2 , que são respectivamente as cotas da margem mais baixa e mais alta da calha menor, conforme ilustra a Figura 2.1. Sendo assim:

a) Sem inundação lateral: $\zeta \leq z_1$

Nessa situação, o escoamento está totalmente confinado à calha menor do corpo d'água, não havendo inundação lateral. Aplicando-se (3.2), (3.3) e (3.4) ao primeiro termo de (12), tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\partial(b_1 + mH)H}{\partial t} = \frac{\partial b_1 H}{\partial t} + \frac{\partial mH^2}{\partial t} \therefore \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= b_1 \frac{\partial H}{\partial t} + H \frac{\partial mH}{\partial t} + mH \frac{\partial H}{\partial t}\end{aligned}$$

Como $H = \zeta + h$, e considerando o fundo fixo, pode-se escrever:

$$\frac{\partial(b_1 + mH)H}{\partial t} = b_1 \frac{\partial \zeta}{\partial t} + 2mH \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

Substituindo na equação (12) obtém-se:

$$(b_1 + 2mH) \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial Au}{\partial x} = q_i \quad (41)$$

Aplicando o método do fatoramento implícito em (41), chega-se a:

$$\begin{aligned}
(b_1 + 2m(h + \zeta)) \frac{\partial \zeta}{\partial t} &\rightarrow (b_1 + 2m(h + \zeta^\otimes)) \frac{\zeta^+ - \zeta}{\Delta t} \\
\frac{\partial Au}{\partial x} \frac{\frac{1}{2}(L_1^+ L_2 + L_1 L_2^+)}{2} &\rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial(u^+ A + u A^+)}{\partial x} \\
q_l &\rightarrow \frac{1}{2}(q_l^+ + q_l)
\end{aligned}$$

Sendo (ζ^\otimes) uma extrapolação linear da cota da superfície livre (ζ) no tempo $(n + \frac{1}{2} \Delta t)$:

$$\zeta^\otimes = \frac{15}{8}\zeta^+ - \frac{5}{4}\zeta + \frac{3}{8}\zeta^- \quad (42)$$

A fim de evitar termos não lineares, é feita uma extrapolação temporal linear da elevação na expressão de (A^+) para o tempo $(n + 1\Delta t)$:

$$\begin{aligned}
A &= (b_1 + m(h + \zeta))(h + \zeta) \therefore \\
A^+ &= (b_1 + m(h + \zeta^+))(h + \zeta^+) \therefore \\
A^+ &= b_1 h + b_1 \zeta^+ + m h^2 + 2m h \zeta^+ + m \zeta^+ \zeta^{\#}
\end{aligned} \quad (43)$$

A equação da continuidade discretizada no tempo fica:

$$(b_1 + 2m(h + \zeta^\otimes)) \frac{\zeta^+ - \zeta}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(u^+ A + u A^+)}{\partial x} = \frac{1}{2}(q_l^+ + q_l) \quad (44)$$

b) Com inundação lateral em uma margem: $z_1 < \zeta \leq z_2$

Agora, como a cota do nível d'água é maior que z_1 (cota de inundação menor), haverá inundação lateral em uma das margens. A formulação do problema deve levar em conta qual das margens da calha menor é a mais baixa:

Se inundar primeiro na margem direita: $h_d > h_e \rightarrow z_1 = -h_d; m_1 = m_d; mi_1 = mi_d$
 $z_2 = -h_e; m_2 = m_e; mi_2 = mi_e$

Se inundar primeiro na margem esquerda: $h_e \geq h_d \rightarrow z_1 = -h_e; m_1 = m_e; mi_1 = mi_e$
 $z_2 = -h_d; m_2 = m_d; mi_2 = mi_d$

De (4) e (5), tem-se:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial A_1}{\partial t}}_{=0} + \frac{\partial b_2(\zeta - z_1)}{\partial t} + \frac{m_2}{2} \frac{\partial(\zeta - z_1)^2}{\partial t} \therefore$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = b_2 \frac{\partial \zeta}{\partial t} + m_2(\zeta - z_1) \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

De (6), tem-se:

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = \frac{mi_1}{2} \frac{\partial(\zeta - z_1)^2}{\partial t} = mi_1(\zeta - z_1) \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

A equação da continuidade fica:

$$\left[b_2 + (m_2 + mi_1)(\zeta - z_1) \right] \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial Au}{\partial x} = q_l \quad (45)$$

Aplicando o método do fatoramento implícito na equação (45), tem-se:

$$\left[b_2 + (m_2 + mi_1)(\zeta - z_1) \right] \frac{\partial \zeta}{\partial t} \rightarrow \left[b_2 + (m_2 + mi_1)(\zeta^\circ - z_1) \right] \frac{\zeta^+ - \zeta}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial Au}{\partial x} \xrightarrow{\frac{1}{2}(l_1^+ L_2 + L_1 l_2^+)} \frac{1}{2} \frac{\partial (A^+ u + Au^+)}{\partial x}$$

$$q_l \rightarrow \frac{1}{2} (q_l^+ + q_l)$$

A equação da continuidade discretizada no tempo fica:

$$\left[b_2 + (m_2 + mi_1)(\zeta^\circ - z_1) \right] \frac{\zeta^+ - \zeta}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial (A^+ u + Au^+)}{\partial x} = \frac{1}{2} (q_l^+ + q_l) \quad (46)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} A^+ &= A_1 + \left[b_2 + \frac{m_2}{2} (\zeta^+ - z_1) \right] (\zeta^+ - z_1) \therefore \\ A^+ &= A_1 + \left[b_2 + \frac{m_2}{2} (\zeta^\# - z_1) \right] \zeta^+ - b_2 z_1 - \frac{m_2}{2} \zeta^+ z_1 + \frac{m_2}{2} z_1^2 \end{aligned} \quad (47)$$

c) Com inundação lateral nas duas margens: $z_2 < \zeta$

Com a cota do nível d'água maior que a cota da margem mais alta da calha menor (z_2), o escoamento freqüenta as duas áreas laterais de inundação. Novamente, a formulação do problema deve levar em conta qual das margens da calha menor é a mais baixa:

Se inundar primeiro na margem direita:	$h_d > h_e \rightarrow z_1 = -h_d; m_1 = m_d; mi_1 = mi_d$
	$z_2 = -h_e; m_2 = m_e; mi_2 = mi_e$
Se inundar primeiro na margem esquerda:	$h_e \geq h_d \rightarrow z_1 = -h_e; m_1 = m_e; mi_1 = mi_e$
	$z_2 = -h_d; m_2 = m_d; mi_2 = mi_d$

Derivando a área A dada por (8) em relação ao tempo, obtém-se:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = b_3 \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

Derivando a área de inundação lateral (9) em relação ao tempo, tem-se:

$$\frac{\partial Ai}{\partial t} = [mi_1(\zeta - z_1) + mi_2(\zeta - z_2)] \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

A equação da continuidade fica:

$$[b_3 + mi_1(\zeta - z_1) + mi_2(\zeta - z_2)] \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial Au}{\partial x} = q_l \quad (48)$$

Aplicando o fatoramento implícito, obtém-se:

$$\begin{aligned} [b_3 + mi_1(\zeta - z_1) + mi_2(\zeta - z_2)] \frac{\partial \zeta}{\partial t} &\rightarrow [b_3 + mi_1(\zeta^\otimes - z_1) + mi_2(\zeta^\otimes - z_2)] \frac{\zeta^+ - \zeta}{\partial t} \\ \frac{\partial Au}{\partial x} &\xrightarrow{\frac{1}{2}(l_1^+ L_2 + L_1 l_2^+)} \frac{1}{2} \frac{\partial (A^+ u + Au^+)}{\partial x} \\ q_l &\rightarrow \frac{1}{2} (q_l^+ + q_l) \end{aligned}$$

A equação da continuidade discretizada no tempo fica:

$$[b_3 + mi_1(\zeta^\otimes - z_1) + mi_2(\zeta^\otimes - z_2)] \frac{\zeta^+ - \zeta}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial (A^+ u + Au^+)}{\partial x} = \frac{1}{2} (q_l^+ + q_l) \quad (49)$$

Sendo:

$$A^+ = A_1 + A_2 + (\zeta^+ - z_2)b_3 \quad (50)$$

3.1.2 Discretização Temporal da Equação da Quantidade de Movimento

A equação da quantidade de movimento é descrita da seguinte forma:

$$\underbrace{\frac{\partial Au}{\partial t} + \frac{\partial Auu}{\partial x}}_{(*)} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} A - \frac{\tau^F}{\rho} p_H \quad (51)$$

$$(*) \quad \frac{\partial Au}{\partial t} + \frac{\partial Auu}{\partial x} = A \frac{\partial u}{\partial t} + Au \frac{\partial u}{\partial x} + u \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Au}{\partial x} \right) \quad (52)$$

Sendo:

p_H : o perímetro hidráulico da seção;

τ^F : a tensão de atrito no fundo;

Mas de (12), sabe-se que:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Au}{\partial x} = -\frac{\partial Ai}{\partial t} + q_l$$

Substituindo em (51), tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\tau^F}{\rho} \frac{1}{R_H} + \frac{u}{A} \left(\frac{\partial Ai}{\partial t} - q_l \right) \quad (53)$$

Sendo R_H o raio hidráulico da seção calculado a partir de um perímetro hidráulico da parte da seção onde há fluxo longitudinal significativo. A Figura 3.1 ilustra o perímetro hidráulico, para um caso no qual $P_H = AB + BC + CD + DE + EF$.

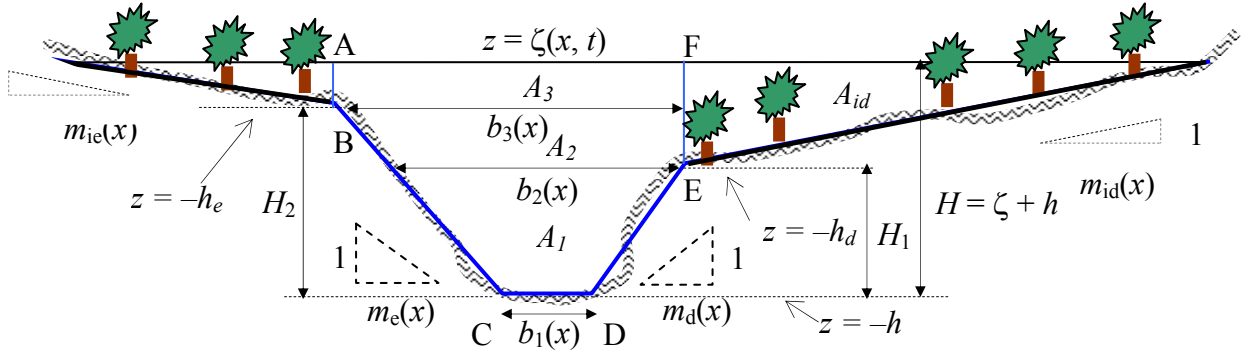


Figura 3.1 - Perímetro hidráulico (P_H) considerado

$$R_H = \frac{A}{P_H}; \quad (54)$$

Fazendo $\tau^F = \rho \frac{g}{C_h^2} |u| u$, a discretização temporal de (53) centrada em $t = (n+1/2)\Delta t$, fica:

$$\begin{aligned} \frac{u^+ - u}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left(u^+ \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u^+}{\partial x} \right) = & -\frac{1}{2} g \frac{\partial (\zeta^+ + \zeta)}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{g|u|}{C_h^2 R_H} \right)^\otimes (u^+ + u) \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A} \left(\frac{\partial A_i}{\partial t} - q_l \right) \right]^\otimes (u^+ + u) \end{aligned} \quad (55)$$

Na equação (55), os termos que contém operadores não lineares foram discretizados no tempo explicitamente da seguinte forma:

- Termo que inclui o atrito na calha - C_f :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{g|u|}{C_h^2 R_H} \right)^\otimes &= C_f^\otimes \\
R_H^\otimes &= \frac{A^\otimes}{p_H^\otimes} \\
A^\otimes &= A(\zeta^\otimes) \\
p_H^\otimes &= p_H(\zeta^\otimes) \\
C_h^\otimes &= 18 \log \left(\frac{6R_H^\otimes}{\varepsilon} \right)
\end{aligned} \tag{56}$$

Sendo ζ^\otimes dada pela equação (42);

- Inundação e vazão lateral – I_l :

$$\left[\frac{1}{A} \left(\frac{\partial A_i}{\partial t} - q_l \right) \right]^\otimes = I_l^\otimes = \left[\frac{1}{A^\otimes} \left(\frac{\partial A_i^\otimes}{\partial t} - q_l^\otimes \right) \right] \tag{57}$$

Sendo:

$$\frac{\partial A_i^\otimes}{\partial t} = \frac{A_i^\# - A_i}{\Delta t} \therefore A_i^\# = A_i(\zeta_i^\#)$$

$$q_l^\otimes = \frac{1}{2} (q_l^+ + q_l)$$

3.2 Discretização Espacial

A discretização espacial do modelo foi feita utilizando-se o método do elemento móvel (MEM), proposto por ROSMAN (1994) e desenvolvido por Scudelari (1997) para um modelo de circulação promediado na vertical (2DH), para corpos d'água rasos.

O MEM, descrito a seguir, pode ser considerado como uma generalização do método das diferenças finitas. Com ele podem-se utilizar malhas com espaçamento irregular, como com

o método dos elementos finitos, mas com a eficiência computacional do método das diferenças finitas.

O problema tem seu domínio discretizado por uma malha de nós que não precisam estar igualmente espaçados. Cada nó possui seu próprio elemento do domínio, sendo o elemento constituído por três nós. Para nós no interior do domínio, o elemento é composto pelo próprio nó e pelos dois nós que estão a sua volta. Para nós localizados nos contornos do domínio, além do próprio nó, o elemento é composto pelos dois nós adjacentes.

Como cada um dos nós possui um elemento, o processo do cálculo de nó em nó ocorre como se um elemento fosse caminhando ao longo do domínio, com coordenadas locais relativas ao elemento. Daí a origem do nome de método do elemento móvel.

A Figura 3.2 mostra um domínio discretizado por seis nós e a Tabela 3.2 mostra como estariam definidos os elementos, onde *nó1*, *nó2* e *nó3* são os nós componentes destes elementos. É importante observar que em elementos do interior do domínio o *nó2* central possui numeração igual a do elemento. Para elementos nos extremos dos trechos, são os nós extremos respectivos que têm numeração coincidente a dos elementos. No domínio abaixo, por exemplo, o elemento 1 possui como nó central o nó número 2. Já o elemento 2 possui o nó número 2 como central.

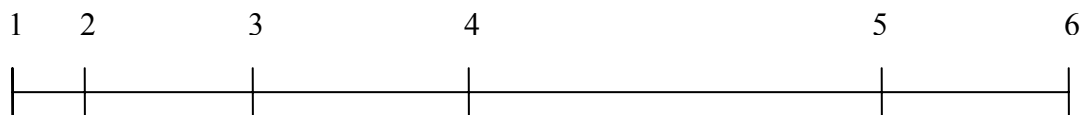


Figura 3.2 – Domínio discretizado

Tabela 3.2 - Nós componentes de cada elemento

Elemento do Nó	Nós do Elemento		
	<i>nó1</i>	<i>nó2</i>	<i>nó3</i>
1	1	2	3
2	1	2	3
3	2	3	4
4	3	4	5
5	4	5	6
6	4	5	6

Para cada nó são definidas três funções de interpolação locais, uma para cada nó constituinte do elemento, que serão utilizadas posteriormente na substituição dos termos de derivadas espaciais encontradas nas equações diferenciais discretizadas no tempo.

Estas funções de interpolação devem atender a duas condições, serem contínuas e possuírem derivadas contínuas ao longo do domínio do elemento, e possuírem valor unitário no nó correspondente e zero nos demais nós do elemento. A Figura 3.3 ilustra o elemento com as três funções de interpolação, uma para cada nó do elemento.

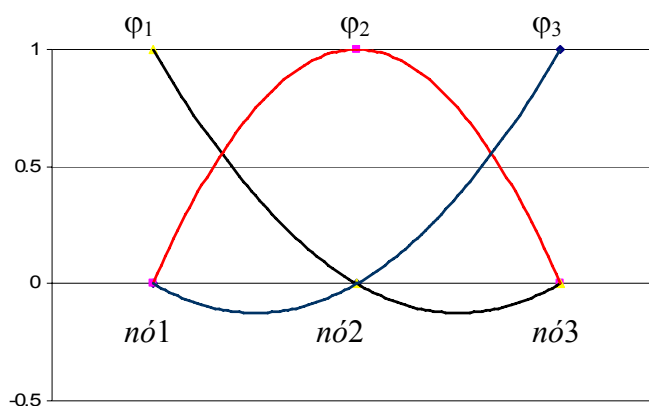


Figura 3.3 - Funções de interpolação

As funções de interpolação utilizadas no modelo são quadráticas, portanto possuem três coeficientes a serem definidos para cada nó. Podem ser expressas da seguinte maneira:

$$\varphi_i = a_i x^2 + b_i x + c_i \quad (58)$$

A fim de diminuir os erros relativos à determinação dos coeficientes, utilizou-se coordenadas locais, e por convenção, a origem do eixo x no domínio do elemento é considerada a coordenada do nó2. Portanto a coordenada do nó1, chamada de x1, será sempre negativa, enquanto a do nó3, chamada de x3, será sempre positiva.

Dentro de um mesmo elemento é necessário determinar nove coeficientes, três para cada função de interpolação. Chamaremos de φ_1 , φ_2 e φ_3 as funções de interpolação referentes aos nós nó1, nó2 e nó3 respectivamente. Para determinar os coeficientes é preciso resolver três sistema de equações, um para cada função de interpolação.

- φ_1

$$\begin{cases} a_1(-x_1)^2 + b_1(-x_1) + c_1 = 1 \\ a_1(0) + b_1(0) + c_1 = 0 \\ a_1(x_3)^2 + b_1(x_3) + c_1 = 0 \end{cases}$$

- φ_2

$$\begin{cases} a_2(-x_1)^2 + b_2(-x_1) + c_2 = 0 \\ a_2(0) + b_2(0) + c_2 = 1 \\ a_2(x_3)^2 + b_2(x_3) + c_2 = 0 \end{cases}$$

- φ_3

$$\begin{cases} a_3(-x_1)^2 + b_3(-x_1) + c_3 = 0 \\ a_3(0) + b_3(0) + c_3 = 0 \\ a_3(x_3)^2 + b_3(x_3) + c_3 = 1 \end{cases}$$

A Tabela 3.3 mostra os valores dos coeficientes das três funções:

Tabela 3.3 - Coeficientes das funções de interpolação

Coeficientes	φ_1	φ_2	φ_3
a	$\frac{1}{x_1(x_1 + x_3)}$	$\frac{-1}{x_1x_3}$	$\frac{1}{x_3(x_1 + x_3)}$
b	$\frac{-x_3}{x_1(x_1 + x_3)}$	$\frac{x_3 - x_1}{x_1x_3}$	$\frac{x_1}{x_3(x_1 + x_3)}$
c	0	1	0

Depois de apresentadas as características das funções de interpolação utilizadas, será mostrado como se faz a aproximação de uma função qualquer e de suas derivadas dentro do domínio:

O valor de uma função qualquer $f(x)$ situada em uma posição x_p dentro do elemento, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$f(x_p) = \sum_{j=1}^3 f(x_j) \varphi_j(x_p) \quad (59)$$

onde φ_j é a função de interpolação do nó j .

As derivadas da função $f(x)$ podem ser expressas da seguinte forma:

$$\frac{\partial f(x_p)}{\partial x} = \sum_{j=1}^3 f(x_j) \frac{\partial \varphi_j(x_p)}{\partial x} \quad (60)$$

$$\frac{\partial^2 f(x_p)}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^3 f(x_j) \frac{\partial^2 \varphi_j(x_p)}{\partial x^2} \quad (61)$$

sendo, de acordo com (58) :

$$\frac{\partial \varphi_j(x_p)}{\partial x} = 2a_j * (x_p) + b_j \quad (62)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_j(x_p)}{\partial^2 x} = 2a_j \quad (63)$$

3.2.1 Discretização Espacial da Equação da Continuidade

A equação da continuidade é discretizada no espaço da seguinte forma:

a) Sem inundação lateral: $\zeta \leq z_1$

Nesse caso, a área A é dada pela equação (1). Discretizando a equação (44) no espaço, tem-se:

$$\begin{aligned} & 2(b_{1i} + 2m_i(h_i + \zeta_i^\otimes)) \frac{\zeta_i^+ - \zeta_i}{\Delta t} + \sum_{j=1}^3 \zeta_j^+ [u_j(b_{1j} + 2m_j h_j + m_j \zeta_j^\#)] \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(i) + \\ & + \sum_{j=1}^3 [u_j(b_{1j} h_j + m_j h_j^2)] \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(i) + \sum_{j=1}^3 u_j^+ A_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(i) = (q_{li}^+ + q_{li}) \end{aligned} \quad (64)$$

Nessa equação, o nó (i) é sempre o nó principal do elemento. Se o elemento for de interior de trecho, a equação (64) pode ser escrita, para o i -ésimo ponto de calculo, como:

$$\begin{aligned}
& \zeta_{j1}^+ \left[M_{j1} \frac{\partial \varphi_{j1}}{\partial x}(i) \right] + \zeta_{j2}^+ \left[L_{j2} + M_{j2} \frac{\partial \varphi_{j2}}{\partial x}(i) \right] + \zeta_{j3}^+ \left[M_{j3} \frac{\partial \varphi_{j3}}{\partial x}(i) \right] + \\
& u_{j1}^+ \left[N_{j1} \frac{\partial \varphi_{j1}}{\partial x}(i) \right] + u_{j2}^+ \left[N_{j2} \frac{\partial \varphi_{j2}}{\partial x}(i) \right] + u_{j3}^+ \left[N_{j3} \frac{\partial \varphi_{j3}}{\partial x}(i) \right] = D
\end{aligned} \tag{65}$$

Sendo:

$$\begin{aligned}
L_i &= 2 \frac{b_{li} + 2m_i(h_i + \zeta_i^\otimes)}{\Delta t} \\
M_j &= \left[u_j(b_{lj} + 2m_j h_j + m_j \zeta_j^\#) \right] \\
N_j &= A_j = (b_{lj} + m_j H_j) H_j \\
D &= 2 \frac{b_{li} + 2m_i(h_i + \zeta_i^\otimes)}{\Delta t} \zeta_i - \sum_{j=1}^3 \left[u_j h_j (b_{lj} + m_j h_j) \right] \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(i) + (q_{li}^+ + q_{li})
\end{aligned}$$

Para nós localizados nas extremidades de jusante de trechos modelados, o nó (i) de cálculo será sempre o nó 1 do elemento. A equação (64) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& \zeta_{j1}^+ \left[L_{j1} + M_{j1} \frac{\partial \varphi_{j1}}{\partial x}(i) \right] + \zeta_{j2}^+ \left[M_{j2} \frac{\partial \varphi_{j2}}{\partial x}(i) \right] + \zeta_{j3}^+ \left[M_{j3} \frac{\partial \varphi_{j3}}{\partial x}(i) \right] + \\
& u_{j1}^+ \left[N_{j1} \frac{\partial \varphi_{j1}}{\partial x}(i) \right] + u_{j2}^+ \left[N_{j2} \frac{\partial \varphi_{j2}}{\partial x}(i) \right] + u_{j3}^+ \left[N_{j3} \frac{\partial \varphi_{j3}}{\partial x}(i) \right] = D
\end{aligned} \tag{66}$$

Em nós de extremidade de montante de trecho, o nó (i) de cálculo é o nó 3 do elemento.

Reescrevendo (64), tem-se:

$$\begin{aligned}
& \zeta_{j1}^+ \left[M_{j1} \frac{\partial \varphi_{j1}}{\partial x}(i) \right] + \zeta_{j2}^+ \left[M_{j2} \frac{\partial \varphi_{j2}}{\partial x}(i) \right] + \zeta_{j3}^+ \left[L_{j3} + M_{j3} \frac{\partial \varphi_{j3}}{\partial x}(i) \right] + \\
& u_{j1}^+ \left[N_{j1} \frac{\partial \varphi_{j1}}{\partial x}(i) \right] + u_{j2}^+ \left[N_{j2} \frac{\partial \varphi_{j2}}{\partial x}(i) \right] + u_{j3}^+ \left[N_{j3} \frac{\partial \varphi_{j3}}{\partial x}(i) \right] = D
\end{aligned} \tag{67}$$

As formas apresentadas nas equações (65), (66) e (67) auxiliam na montagem dos sistemas de equações para a solução numérica. Os coeficientes M e N aparecem nos três nós do elemento multiplicando as derivadas espaciais das funções φ de interpolação e as incógnitas ζ e u , respectivamente. O coeficiente L aparece multiplicando ζ do nó principal do

elemento. Do lado direito do sistema de equações aparecem os termos independentes, condensados no coeficiente D .

b) Com inundação lateral em uma margem: $z_1 < \zeta \leq z_2$

Nesse caso as áreas A e A_i dependem de h_d e de h_e .

Se inundar primeiro na margem direita: $h_d > h_e \rightarrow z_1 = -h_d; m_1 = m_d; mi_1 = mi_d$

$$z_2 = -h_e; m_2 = m_e; mi_2 = mi_e$$

Se inundar primeiro na margem esquerda: $h_e \geq h_d \rightarrow z_1 = -h_e; m_1 = m_e; mi_1 = mi_e$

$$z_2 = -h_d; m_2 = m_d; mi_2 = mi_d$$

Sendo A e A_i dadas pelas equações (5) e (6), respectivamente. Discretizando a equação (46) no espaço, tem-se:

$$2 \left[\frac{b_{2i} + (m_{2i} + mi_{1i})(\zeta_i^\otimes - z_{1i})}{\Delta t} \right] (\zeta_i^+ - \zeta_i) + \sum_{j=1}^3 \left[u_j^+ A_j + u_j \left(A_{1j} - b_{2j} z_{1j} + \frac{m_{2j}}{2} z_{1j}^2 \right) \right] \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(i) + \sum_{j=1}^3 u_j \zeta_j^+ \left[b_{2j} + \frac{m_{2j}}{2} (\zeta_j^\# - 2z_{1j}) \right] \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(i) = (q_{ij}^+ + q_{ij}) \quad (68)$$

A equação (68) pode ser escrita, para o i -ésimo ponto (seção) do interior do domínio, como a equação (65), sendo:

$$L_i = 2 \left[\frac{b_{2i} + (m_{2i} + mi_{1i})(\zeta_i^\otimes - z_{1i})}{\Delta t} \right]$$

$$M_j = u_j \left[b_{2j} + \frac{m_{2j}}{2} (\zeta_j^\# - 2z_{1j}) \right]$$

$$N_j = A_j$$

$$D = 2 \left[\frac{b_{2i} + (m_{2i} + mi_{1i})(\zeta_i^\otimes - z_{1i})}{\Delta t} \right] \zeta_i - \sum_{j=1}^3 \left[u_j \left(A_{1j} - b_{2j} z_{1j} + \frac{m_{2j}}{2} z_{1j}^2 \right) \right] \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(i) + (q_{ij}^+ + q_{ij})$$

Para nós de extremidade de jusante e de montante de trechos modelados, a equação (68) deve ser escrita como em (66) e (67), respectivamente.

c) Com inundação lateral nas duas margens: $z_2 < \zeta$

Novamente a área A_i depende de h_d e de h_e , sendo dada pela equação (9). A área A é sempre dada pela equação (8).

Se inundar primeiro na margem direita: $h_d > h_e \rightarrow z_1 = -h_d; m_1 = m_d; mi_1 = mi_d$

$$z_2 = -h_e; m_2 = m_e; mi_2 = mi_e$$

Se inundar primeiro na margem esquerda: $h_e \geq h_d \rightarrow z_1 = -h_e; m_1 = m_e; mi_1 = mi_e$

$$z_2 = -h_d; m_2 = m_d; mi_2 = mi_d$$

Discretizando a equação (49) no espaço, tem se:

$$2 \frac{[b_{3i} + mi_{1i}(\zeta_i^\otimes - z_{1i}) + mi_{2i}(\zeta_i^\otimes - z_{2i})]}{\Delta t} \frac{\zeta_i^+ - \zeta_i}{\Delta t} + \sum_{j=1}^3 [u_j^+ A_j + u_j (A_{1j} + A_{2j})] \frac{\partial \varphi}{\partial x}(i) + \sum_{j=1}^3 u_j b_{3j} (\zeta_j^+ - z_{2j}) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(i) = (q_{li}^+ + q_{li}) \quad (69)$$

A equação (69) pode ser escrita, para o i -ésimo ponto (seção) do interior do domínio, como a equação (65), sendo:

$$L_i = 2 \frac{[b_{3i} + mi_{1i}(\zeta_i^\otimes - z_{1i}) + mi_{2i}(\zeta_i^\otimes - z_{2i})]}{\Delta t}$$

$$M_j = u_j b_{3j}$$

$$N_j = A_j$$

$$D = 2 \frac{[b_{3i} + mi_{1i}(\zeta_i^\otimes - z_{1i}) + mi_{2i}(\zeta_i^\otimes - z_{2i})]}{\Delta t} \zeta_i - \sum_{j=1}^3 u_j [(A_{1j} + A_{2j}) - b_{3j} z_{2j}] \frac{\partial \varphi}{\partial x}(i) + (q_{li}^+ + q_{li})$$

Para nós de extremidade de jusante e de montante de trechos modelados, a equação (69) deve ser escrita como em (66) e (67), respectivamente.

3.2.2 Discretização Espacial da Equação da Quantidade de Movimento

Discretizando a equação (55) no espaço, tem-se:

$$2 \frac{u_i^+ - u_i}{\Delta t} + \left[u_i^+ \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(i) + u_i \sum_{j=1}^3 u_j^+ \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(i) \right] = -g \sum_{j=1}^3 (\zeta_j^+ + \zeta_j) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(i) + (I_i^\otimes - C_{f_i}^\otimes)(u_i^+ + u_i) \quad (70)$$

Nessa equação, o nó (i) é sempre o nó principal do elemento. Quando o elemento for de interior de trecho o nó (i) de cálculo será sempre igual ao nó 2 do elemento. Nesse caso, a equação (70) pode ser escrita, para o i -ésimo ponto de calculo, como:

$$u_{j1}^+ \left[Q_{j1} \frac{\partial \varphi_{j1}}{\partial x}(i) \right] + u_{j2}^+ \left[P_{j2} + Q_{j2} \frac{\partial \varphi_{j2}}{\partial x}(i) \right] + u_{j3}^+ \left[Q_{j3} \frac{\partial \varphi_{j3}}{\partial x}(i) \right] + \zeta_{j1}^+ \left[R_{j1} \frac{\partial \varphi_{j1}}{\partial x}(i) \right] + \zeta_{j2}^+ \left[R_{j2} \frac{\partial \varphi_{j2}}{\partial x}(i) \right] + \zeta_{j3}^+ \left[R_{j3} \frac{\partial \varphi_{j3}}{\partial x}(i) \right] = D \quad (71)$$

Sendo:

$$P_i = \frac{2}{\Delta t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(i) - (I_i^\otimes - C_{f_i}^\otimes)$$

$$Q_j = u_i$$

$$R_j = g$$

$$D = (I_i^\otimes - C_{f_i}^\otimes + \frac{2}{\Delta t})u_i - g \sum_{j=1}^3 \zeta_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(i)$$

Para nós de extremidade de jusante de trechos modelados, a equação (70) deve ser escrita fazendo-se o nó (i) de cálculo igual ao nó 1 do elemento:

$$u_{j1}^+ \left[P_{j1} + Q_{j1} \frac{\partial \varphi_{j1}}{\partial x}(i) \right] + u_{j2}^+ \left[Q_{j2} \frac{\partial \varphi_{j2}}{\partial x}(i) \right] + u_{j3}^+ \left[Q_{j3} \frac{\partial \varphi_{j3}}{\partial x}(i) \right] + \zeta_{j1}^+ \left[R_{j1} \frac{\partial \varphi_{j1}}{\partial x}(i) \right] + \zeta_{j2}^+ \left[R_{j2} \frac{\partial \varphi_{j2}}{\partial x}(i) \right] + \zeta_{j3}^+ \left[R_{j3} \frac{\partial \varphi_{j3}}{\partial x}(i) \right] = D \quad (72)$$

Em nós de extremidade de montante de trechos modelados, o nó (i) de cálculo é o nó 3 do elemento. A equação (70) fica:

$$\begin{aligned} & u_{j1}^+ \left[Q_{j1} \frac{\partial \varphi_{j1}}{\partial x}(i) \right] + u_{j2}^+ \left[Q_{j2} \frac{\partial \varphi_{j2}}{\partial x}(i) \right] + u_{j3}^+ \left[P_{j3} + Q_{j3} \frac{\partial \varphi_{j3}}{\partial x}(i) \right] + \\ & \zeta_{j1}^+ \left[R_{j1} \frac{\partial \varphi_{j1}}{\partial x}(i) \right] + \zeta_{j2}^+ \left[R_{j2} \frac{\partial \varphi_{j2}}{\partial x}(i) \right] + \zeta_{j3}^+ \left[R_{j3} \frac{\partial \varphi_{j3}}{\partial x}(i) \right] = D \end{aligned} \quad (73)$$

3.3 Condições de Contorno

Neste item descreve-se o tratamento numérico dado às condições de contorno impostas ao problema.

O modelo possui condições de contorno nas fronteiras marítimas e nas fronteiras de continente. Na fronteiras marítimas, as elevações são prescritas e nas fronteiras continentais as vazões são prescritas. A prescrição de uma condição de nível (a jusante) e uma de vazão (a montante) torna o modelo mais robusto, possibilitando aplicação em casos de escoamento supercríticos, quando o número de Froude é maior que a unidade.

Existem ainda as condições impostas aos nós de entroncamentos. Os entroncamentos são conexões entre dois trechos de canais em calhas distintas, formando um terceiro trecho.

3.3.1 Elevação Prescrita

As condições de contorno nas fronteiras marítimas são dadas pela prescrição das elevações. São as chamadas condições de contorno essenciais.

$$\zeta_i^+ = \zeta_i^{*+} \quad (74)$$

Essas condições de contorno podem ser fornecidas ao modelo de duas formas distintas. A primeira seria calculando as elevações via constantes harmônicas, como na equação (3.27).

$$\zeta_i^+ = \sum_{i=1}^{nch} \zeta_{0i} \text{sen}(w_i t + \phi_i) \quad (75)$$

Sendo:

ζ_0 : A amplitude de maré;

w : A frequência;

ϕ : A fase;

nch : O numero de constantes harmônicas.

A segunda forma seria o fornecimento dos valores discretos de elevação via arquivo de dados.

3.3.2 Fluxo Prescrito

As condições de fluxo prescrito são impostas aos nós localizados nos contornos do continente, ou seja, nos limites de montante do modelo. Nestes nós são fornecidos os hidrogramas afluentes ao sistema. Porém, neste modelo não se considera apenas a vazão afluente para se determinar a elevação e a velocidade destes nós. Leva-se em conta também a variação de volume que ocorre a montante deste ultimo nó, causada pela influência da maré, quando existe tal influência.

A Figura 3.4 mostra em perfil a região do limite continental da modelagem, podendo-se observar o volume acumulado a montante.

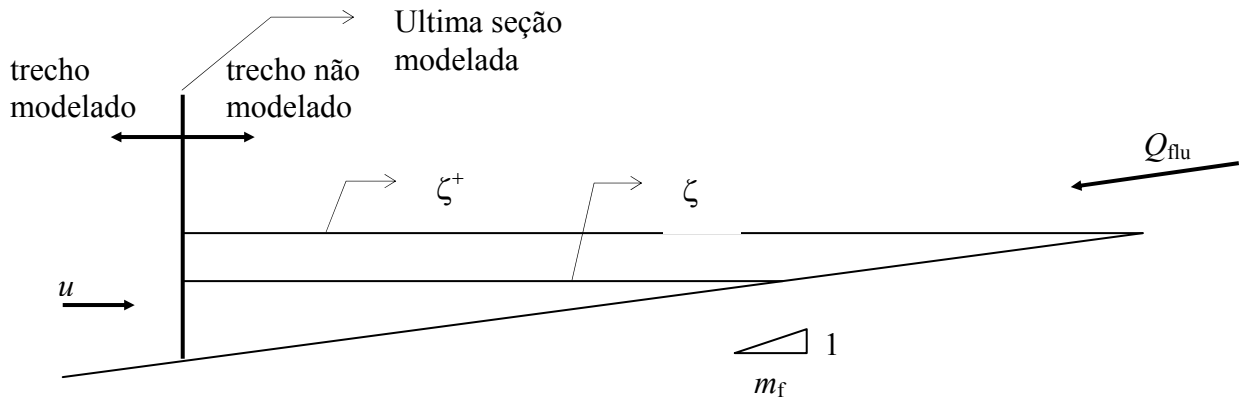


Figura 3.4 – Esquema em perfil do trecho a montante da última seção.

Fazendo o balanço de massa no trecho do rio a montante da última seção, e considerando a massa específica constante, ou seja, que a variação temporal de volume a montante é igual à vazão que passa pela seção menos a vazão fluvial, tem-se:

$$\frac{\partial Vol}{\partial t} = uA - Q_{flu} \quad (76)$$

Aplicando-se o método do fatoramento implícito, chega-se a:

$$2 \frac{\Delta Vol}{\Delta t} = u^+ A + uA^+ - (Q_{flu}^+ + Q_{flu}) \quad (77)$$

A variação de volume no trecho de montante pode ser expressa da seguinte forma:

$$\Delta Vol = T(\zeta^+ - \zeta)m_f \bar{H} \quad (78)$$

Sendo:

T : Largura média no tempo da superfície livre do trecho a montante;

m_f : Declividade do fundo no trecho a montante;

\bar{H} : Tirante hidráulico médio no tempo do trecho a montante.

O tirante hidráulico \bar{H} é calculado de acordo com a seguinte expressão:

$$\bar{H} = h + \frac{(\zeta^{\#} + \zeta)}{2} \quad (79)$$

A Largura média no tempo da superfície livre do trecho a montante (T) é dada por:

$$T = b_1 + 2m\bar{H} \quad (80)$$

Nesta representação, considera-se a seção transversal do corpo d'água à montante da fronteira continental de maneira simplificada, como um trapézio, sendo (b_1) a largura da base menor e (m) um talude médio das margens.

Aplicando (78) em (77), obtém-se:

$$2 \frac{T(\zeta^+ - \zeta)m_f \bar{H}}{\Delta t} = u^+ A + uA^+ - (Q_{flu}^+ + Q_{flu}) \quad (81)$$

Nessa equação A^+ depende do tirante hidráulico H , segundo a configuração de calha adotada. Mas, para efeito de simplificação e sem perda significativa de informação, pode-se admitir que a seção de montante que recebe fluxo, não sofra alagamento, possuindo portanto uma calha trapezoidal.

Sendo assim:

$$\begin{aligned} A &= (b_1 + m(h + \zeta))(h + \zeta) \therefore \\ A^+ &= (b_1 + m(h + \zeta^+))(h + \zeta^+) \therefore \\ A^+ &\cong b_1 h + b_1 \zeta^+ + m h^2 + 2m h \zeta^+ + m \zeta^+ \zeta^{\#} \end{aligned}$$

Então, a equação (81) discretizada no espaço fica:

$$\left[2 \frac{T_i m_{fi} \overline{H}_i}{\Delta t} - u_i (b_i + 2m_i h_i + m_i \zeta_i^\#) \right] \zeta_i^+ - u_i^+ [A_i] = 2 \frac{T_i m_{fi} \overline{H}_i}{\Delta t} \zeta_i - (Q_{flu_i}^+ + Q_{flu_i}) + u_i (b_i h_i + m_i h_i^2) \quad (82)$$

Sendo i o nó de cálculo e j o nó componente do elemento referente a i .

3.3.3 Condições Impostas nos Entroncamentos

O modelo considera a rede de canais como um conjunto de trechos simples que estão conectados entre si por entroncamentos. Os entroncamentos são sempre compostos pela confluência de três trechos. Nos nós localizados nesses entroncamentos são impostas condições internas específicas para a montagem da matriz de coeficientes no momento do cálculo das elevações e velocidades.

A preservação do balanço do fluxo de massa para entroncamento qualquer implica na imposição de que o somatório das vazões de seus nós seja nulo. Tal imposição substitui a equação da continuidade para um dos nós. Os outros dois nós do entroncamento têm suas elevações igualadas à do primeiro. Tal igualdade também substitui a equação da continuidade.

A questão é: Qual dos nós recebe a equação de preservação de balanço de fluxo e quais recebem a igualdade de elevações? Existe uma forma de imposição de tais condições de entroncamento que mostrou ser mais apropriada, por conferir mais estabilidade ao modelo.

Torna-se conveniente a introdução de uma numeração padronizada dos tipos de nós de entroncamento. Sendo assim, existem duas situações que exemplificam bem todas as possibilidades de arranjos dos entroncamentos. Veja as figuras a seguir:

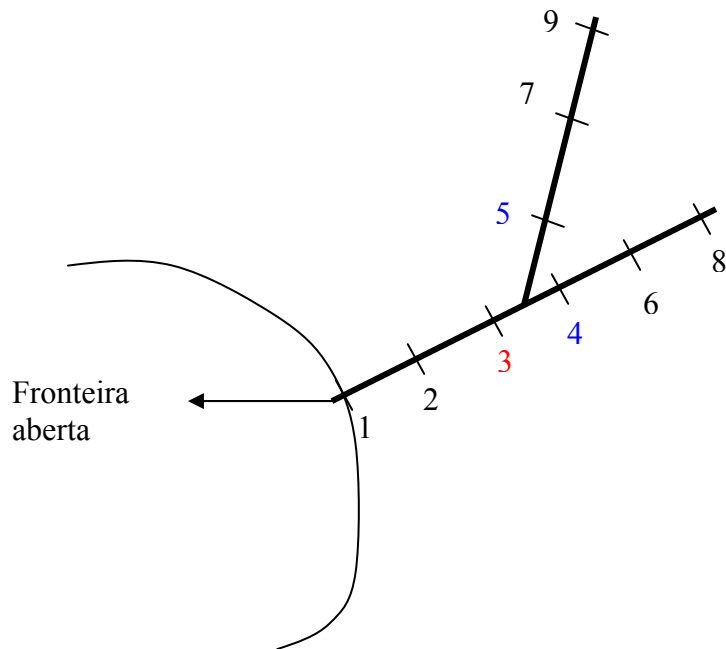


Figura 3.5 - Entroncamento do tipo 3-4-4

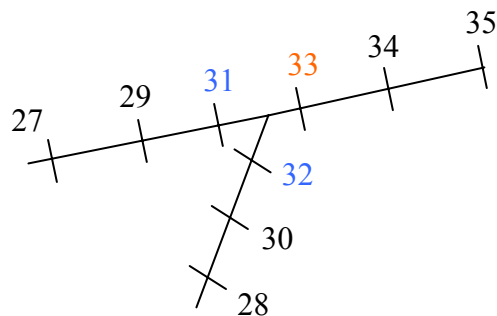


Figura 3.6 - Entroncamento do tipo 4-4-5

Na Figura 3.5 tem-se um entroncamento do tipo 3-4-4. Nesse tipo de entroncamento tem-se um trecho afluente (nós 1, 2 e 3). Os outros dois trechos são efluentes. Daí a denominação de entroncamento 3-4-4, pois o nó afluente é chamado nó tipo (3) e os efluentes são chamados tipo (4). A caracterização de um trecho como afluente ou efluente

diz respeito ao sinal do eixo (x) em relação ao entroncamento, e não à direção do escoamento no trecho em questão. Isso quer dizer que, em um determinado instante, um trecho denominado afluente pode ter escoamento direcionado para fora do entroncamento e vice-versa para nós efluentes.

Da mesma forma, denomina-se entroncamento do tipo 4-4-5, Figura 3.6, aqueles que possuem um trecho efluente, no caso formado pelos nós 33, 34 e 35. Os outros dois trechos são afluentes. Neste caso os dois nós de entroncamento afluentes são ditos do tipo (4) e o nó efluente é do tipo (5).

Cabe ressaltar que não há qualquer diferença, do ponto de vista hidrodinâmico, entre esses dois tipos de entroncamentos. O esquema de nomenclatura supracitado serve apenas para tornar o modelo numérico mais estável quando da atribuição das condições de entroncamento.

Os nós de entroncamento seguem a numeração adotada para os tipos de nós do modelo numérico, conforme descrito na tabela Tabela 3.4:

Tabela 3.4 – Tipos de nós do modelo numérico

Tipo	Descrição
1	Fronteira aberta: recebe condição de contorno de elevação;
2	Nós do interior do domínio;
3	Nós dos trechos afluentes dos entroncamentos 3-4-4;
4	Nós dos trechos efluentes dos entroncamentos 3-4-4 e dos trechos afluentes dos entroncamentos 4-4-5;
5	Nós dos trechos efluentes dos entroncamentos 4-4-5;
6	Nós de fronteiras de montante: recebem condições de contorno de fluxo.

As tabelas a seguir descrevem o fornecimento de condições de contorno aos nós de entroncamento:

Tabela 3.5– Equações impostas aos nós de um entroncamento tipo 3-4-4

Nó	Equações
3	$Q_3 = Q_4 + Q_5$ Equação da quantidade de movimento envolvendo os nós do trecho
4	$\zeta_4 = \zeta_3$ Equação da quantidade de movimento envolvendo os nós do trecho
5	$\zeta_5 = \zeta_4$ Equação da quantidade de movimento envolvendo os nós do trecho

Tabela 3.6 – Equações impostas aos nós de um entroncamento tipo 4-4-5.

Nó	Equações
31	$\zeta_{31} = \zeta_{33}$ Equação da quantidade de movimento envolvendo os nós do trecho
32	$\zeta_{32} = \zeta_{31}$ Equação da quantidade de movimento envolvendo os nós do trecho
33	$Q_{33} = Q_{31} + Q_{32}$ Equação da quantidade de movimento envolvendo os nós do trecho

A seguir apresenta-se o desenvolvimento da discretização temporal e espacial para as equações de condição de entroncamento tipo 3-4-4. Para um entroncamento tipo 4-4-5, o desenvolvimento seria análogo.

A discretização temporal da equação da conservação do balanço do fluxo de massa, imposta ao nó de jusante do entroncamento 3-4-4 da Figura 3.5 origina:

$$K_3 (u_3^+ A_3 + u_3 A_3^+) + K_4 (u_4^+ A_4 + u_4 A_4^+) + K_5 (u_5^+ A_5 + u_5 A_5^+) = 0 \quad (83)$$

O multiplicador (K) é manipulado de forma que, em entroncamentos 3-4-4, os nós tipo (3) tenham $K_i = 1$ e os nós tipo (4) tenham $K_i = -1$. Nos entroncamentos 4-4-5, o nó tipo (5) receberá $K_i = -1$ e os nós tipo (4) receberão $K_i = 1$.

Mais uma vez, tem-se uma equação em que a área A^+ depende do tirante hidráulico H , e conseqüentemente da cota da superfície livre ζ . Explicitando as incógnitas no tempo $t + \Delta t$ e fazendo a discretização espacial, tem-se:

a) Se $\zeta \leq z_1$

A equação (83) fica:

$$\begin{aligned}
 & K_3 \left[u_3^+ A_3 + u_3 (b_{13} + 2m_3 h_3 + m_3 \zeta_3^\#) \zeta_3^+ \right] + K_4 \left[u_4^+ A_4 + u_4 (b_{14} + 2m_4 h_4 + m_4 \zeta_4^\#) \zeta_4^+ \right] + \\
 & K_5 \left[u_5^+ A_5 + u_5 (b_{15} + 2m_5 h_5 + m_5 \zeta_5^\#) \zeta_5^+ \right] = -K_3 \left[u_3 (b_{13} h_3 + m_3 h_3^2) \right] \\
 & -K_4 \left[u_4 (b_{14} h_4 + m_4 h_4^2) \right] - K_5 \left[u_5 (b_{15} h_5 + m_5 h_5^2) \right]
 \end{aligned} \tag{84}$$

b) Se $z_1 < \zeta \leq z_2$

Nesse caso, a formulação da condição de contorno depende de h_d e h_e .

Se inundar primeiro na margem direita: $h_d > h_e \rightarrow z_1 = -h_d; m_1 = m_d; mi_1 = mi_d$
 $z_2 = -h_e; m_2 = m_e; mi_2 = mi_e$
 Se inundar primeiro na margem esquerda: $h_e \geq h_d \rightarrow z_1 = -h_e; m_1 = m_e; mi_1 = mi_e$
 $z_2 = -h_d; m_2 = m_d; mi_2 = mi_d$

Se $h_d < h_e$, então A é dada pela equação (5). A equação (83) discretizada no espaço fica:

$$\begin{aligned}
& K_3 \left[u_3^+ A_3 + u_3 \left(b_{23} + \frac{m_{23}}{2} (\zeta_3^\# - 2z_{13}) \right) \zeta_3^+ \right] + K_4 \left[u_4^+ A_4 + u_4 \left(b_{24} + \frac{m_{24}}{2} (\zeta_4^\# - 2z_{14}) \right) \zeta_4^+ \right] + \\
& K_5 \left[u_5^+ A_5 + u_5 \left(b_{25} + \frac{m_{25}}{2} (\zeta_5^\# - 2z_{15}) \right) \zeta_5^+ \right] = -K_3 u_3 \left[A_{13} - b_{23} z_{13} + \frac{m_{23}}{2} z_{13}^2 \right] \\
& -K_4 u_4 \left[A_{14} - b_{24} z_{14} + \frac{m_{24}}{2} z_{14}^2 \right] - K_5 u_5 \left[A_{15} - b_{25} z_{15} + \frac{m_{25}}{2} z_{15}^2 \right]
\end{aligned} \tag{85}$$

c) Se $z_2 < \zeta$

Nesse caso A é dada pela equação (8), sendo b_3 dada pela equação (7). Aplicando a (83) e discretizando no espaço, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& K_3 \left[u_3^+ A_3 + u_3 b_{33} \zeta_3^+ \right] + K_4 \left[u_4^+ A_4 + u_4 b_{34} \zeta_4^+ \right] + K_5 \left[u_5^+ A_5 + u_5 b_{35} \zeta_5^+ \right] = \\
& -K_3 \left[u_3 (A_{13} + A_{23} - z_{23} b_{33}) \right] - K_4 \left[u_4 (A_{14} + A_{24} - z_{24} b_{34}) \right] \\
& -K_5 \left[u_5 (A_{15} + A_{25} - z_{25} b_{35}) \right]
\end{aligned} \tag{86}$$

4 Acoplamento entre Modelos 1D e 2DH

O modelo hidrodinâmico desenvolvido e apresentado nos capítulos anteriores é uma ferramenta eficiente para resolução de corpos d'água que tenham características hidrodinâmicas unidimensionais (1D). Ou seja: rios, bacias hidrográficas, canais ou redes de canais nos quais o escoamento se dê preferencialmente na direção longitudinal.

Muitas vezes tem-se na natureza a situação em que corpos d'água com características hidrodinâmicas unidimensionais desembocam em lagos ou lagoas, que possuem geralmente características hidrodinâmicas bidimensionais horizontais (2DH) predominantes. Não é incomum ocorrerem sistemas lagunares com uma ou mais bacias hidrográficas afluentes.

Na modelagem de corpos d'água 2DH, normalmente aplicada a lagos e lagoas, utiliza-se um esforço computacional muito maior que na modelagem 1D. Também é muito maior a quantidade de dados a serem coletados para a confecção, calibração e operação do modelo. A mão de obra envolvida precisa ser apta a trabalhar e a gerenciar uma quantidade maior de dados e de resultados. Tudo isso torna a confecção, calibração e operação de um modelo 2DH mais cara e demorada do que a modelagem 1D.

Portanto, para resolver situações em que se tenham redes de canais ou bacias hidrográficas desembocando em sistemas lagunares ou lagos, torna-se interessante uma repartição do domínio a ser modelado em subdomínios 1D e 2DH. Fica claro que a modelagem pode ser otimizada ao utilizar-se um modelo hidrodinâmico 1D em conjunto com um 2DH, cada qual aplicado a seu respectivo subdomínio. Para tanto deve-se desenvolver um esquema numérico que permita que os dois modelos trabalhem simultaneamente, cada qual em seu subdomínio.

Cabe ressaltar que os dois modelos numéricos só atuarão juntos efetivamente mediante implementação de um esquema computacional capaz de promover o fluxo de informações entre os mesmos. Isso pode ser feito adaptando-se o modelo 1D apresentado neste texto, de forma que o mesmo funcione como uma sub-rotina de cálculo do modelo 2DH. Também

são necessárias algumas modificações no modelo computacional 2DH, de forma que o mesmo seja capaz de chamar a nova sub-rotina de cálculos, fornecendo para a mesma e retirando dela as informações necessárias a cada passo de tempo.

4.1 Esquema Numérico do Acoplamento

A seção de acoplamento é uma região limítrofe entre os domínios 1D e 2DH. É, portanto, uma região de fornecimento de condições de contorno para ambos os modelos. Do ponto de vista da estabilidade numérica convém que sejam fornecidas condições de contorno de elevação para o modelo de montante (1D) e condições de contorno de vazão para o modelo de jusante (2DH). Isso deve-se ao fato de ser natural que em um sistema lagunar sejam fornecidas condições de contorno de elevação (fronteira aberta) a jusante. A Figura 4.1 ilustra a região de acoplamento:

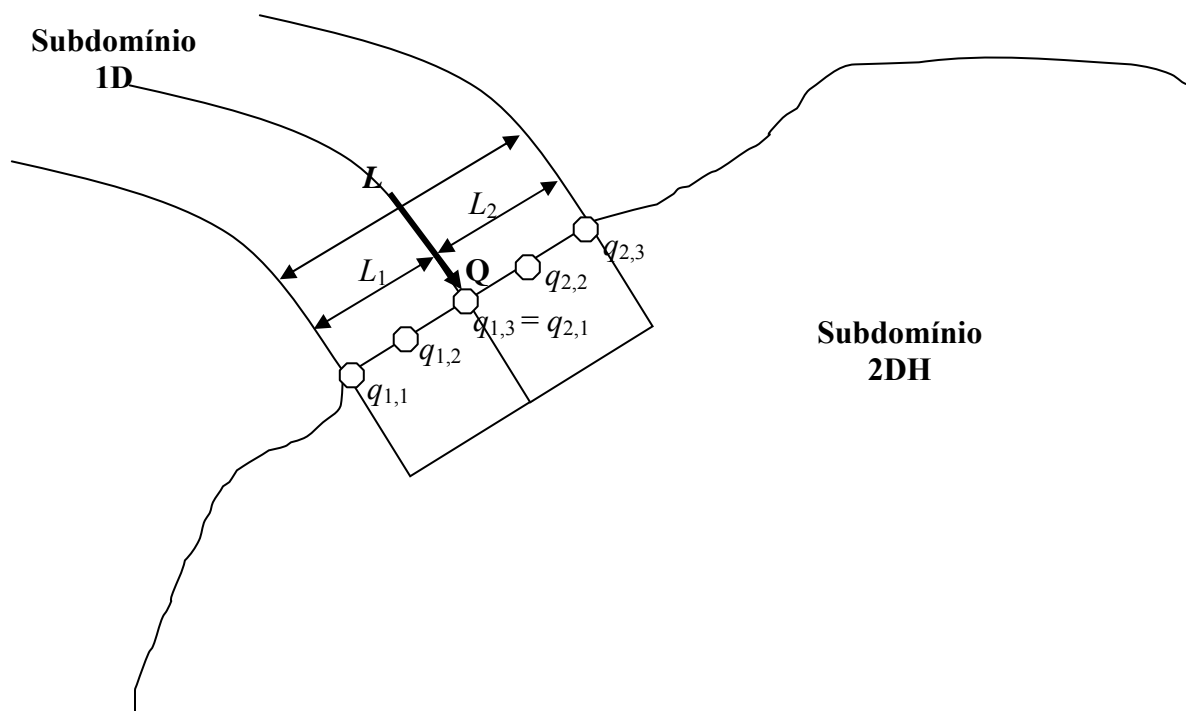


Figura 4.1– Região de acoplamento entre os modelos 1D e 2DH

A marcha de cálculos para um instante genérico Δt começa com a extrapolação (predição) da elevação (ζ^+) nos nós do modelo 2DH localizados na seção de acoplamento. Na figura acima o que se tem é uma interface composta por dois elementos do modelo 2DH. Ter-se-ia então cinco valores de (ζ^+). O modelo 1D utilizaria o valor médio na seção de (ζ^+) como condição de contorno para resolver o instante ($n+1$), devolvendo um valor de vazão média na seção (Q^+) ao modelo 2DH. O modelo 2DH associaria uma vazão linear (q_{ij}^+) a cada um dos seus nós da interface a partir de (Q^+) e corrigiria as velocidades nesses nós. A Figura 5.2 ilustra um esquema da marcha de cálculo:

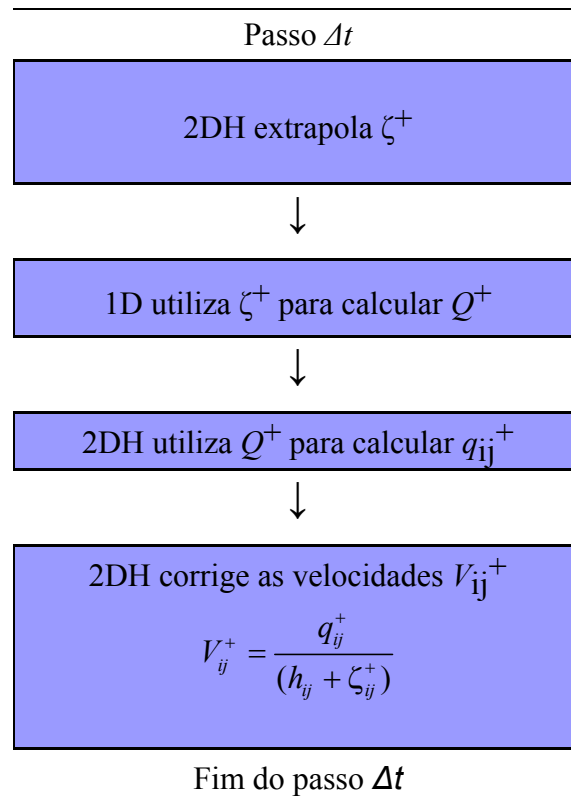


Figura 4.2– Marcha de cálculo para acoplamento 1D – 2DH: Predição e correção.

Para realizar a correção de V_{ij}^+ o modelo 2DH precisa calcular q_{ij}^+ a partir de Q^+ ponderando com a profundidade local, de forma que $Q^+ = \int_L q \cdot dl$.

O esquema preditor-corretor exposto acima será implementado no Sistema Base de Hidrodinâmica Ambiental (SisBAHIA), desenvolvido pela COPPE e largamente utilizado em situações que demandem o acoplamento, conforme descrito no início deste capítulo. Uma outra vantagem do SisBAHIA é que seu uso é muito disseminado entre profissionais que lidam com modelagem hidrodinâmica no Brasil. Os resultados serão expostos no capítulo 5.

5 Aplicações

Neste capítulo são apresentados testes feitos com intuito de avaliar a robustez e a estabilidade do modelo numérico desenvolvido. A forma escolhida para avaliar a consistência dos resultados foi comparando-os a valores encontrados com outros modelos, apreciando-se a acurácia das soluções. Também são apresentados alguns aspectos da calibração do modelo 1D, através da rugosidade do fundo.

O primeiro teste consistiu na modelagem de um canal reto com taludes laterais de alagamento. O objetivo foi testar o esquema de extravasamento de calha. Para tanto utilizou-se o SisBAHIA para realizar a comparação dos resultados.

No segundo teste, a robustez e a estabilidade do modelo foram avaliadas ao resolver-se o estuário do canal do Cunha, localizado ao redor da Ilha do Fundão. Os resultados foram confrontados com os valores obtidos com o modelo 2DH do SisBAHIA.

Por último, apresenta-se uma aplicação a um caso que ilustra bem a praticidade e conveniência de utilização do modelo desenvolvido de forma acoplada a um modelo 2DH, no caso o SisBAHIA. São tecidos alguns comentários sobre os ganhos práticos e de eficiência computacional decorrentes desta utilização acoplada.

5.1 Extravasamento Lateral em um Canal

Com o objetivo de avaliar-se o esquema de extravasamento lateral de calha foi realizado um teste simples em um canal reto e de seção transversal trapezoidal constante. O objetivo é gerar um padrão hidrodinâmico no qual a superfície livre esteja sempre acima das margens de inundação, permitindo a utilização do SisBAHIA para testar a acurácia do modelo. As cotas das margens de inundação são iguais (nível zero). Os taludes laterais de inundação são de 75 metros, ou seja, para cada metro de coluna d'água acima da cota de inundação, tem-se um avanço de setenta e cinco metros da região alagada em cada margem. As figuras a seguir ilustram a situação descrita acima:

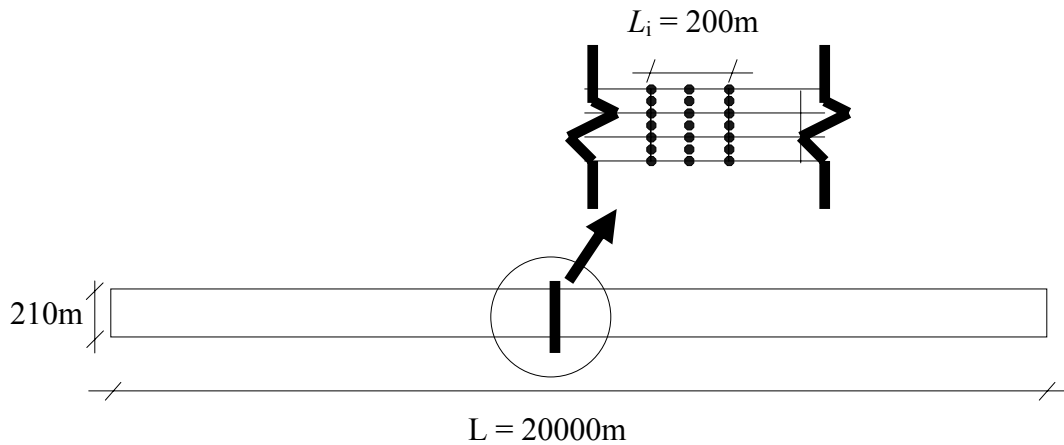


Figura 5.1 – Ilustração em planta do canal e da malha 2DH com 3 elementos de comprimento $L_i = 200\text{m}$ por seção.

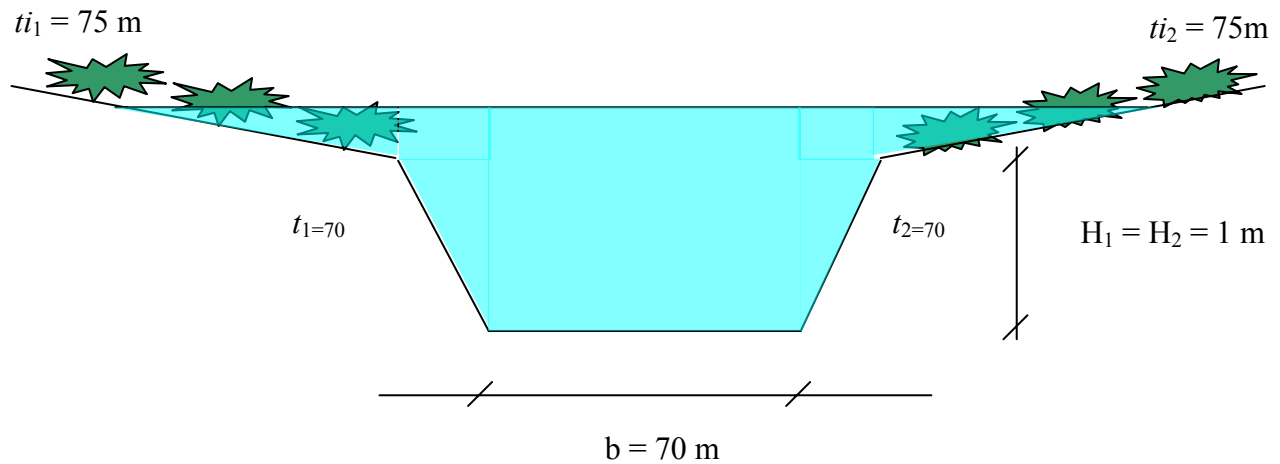


Figura 5.2 – Ilustração de uma vista em corte do canal: (t_1) e (t_2) são os taludes de inundação lateral; (H_1) e (H_2) são os tirantes de inundação lateral.

Figura 5.1 Como Figura 5.2 ilustra e como já havia sido citado ao descrever-se a configuração de calha para o modelo, as regiões de inundação lateral são geralmente cobertas por vegetação e o fluxo longitudinal pode ser desprezado sobre elas.

O domínio 1D foi dividido em seções igualmente espaçadas, ou seja, o Δx é de 100 m com duzentas e uma seções transversais. Na fronteira de jusante (fronteira aberta) a condição de contorno de nível é uma onda de maré de 0,5 m de amplitude e de período de 43200 s. Na

seção limite de montante foi fornecido um valor constante de vazão como condição de contorno de fluxo. A vazão fornecida na seção 201 é de 25 m³/s.

O modelo 1D forneceu resultados estáveis e sem apresentar oscilações numéricas mesmo com números de Courant (Cr) maiores que cinco, chegando quase a sete, para valores de Δt maiores que 800s. O número de Courant 1D é calculado segundo a equação seguinte:

$$Cr = \frac{|\bar{u}| + \sqrt{gH}}{\Delta x} \Delta t \quad (87)$$

Sendo $|\bar{u}|$ o modulo da velocidade longitudinal média e H o tirante hidráulico. Repare que $|\bar{u}|$ pode ser desprezado na maioria dos casos diante da magnitude da celeridade da onda de maré \sqrt{gH} .

As condições acima descritas foram reproduzidas para a aplicação do modelo 2DH (SisBAHIA), usando-se para tanto uma malha de quadriláteros com três elementos na largura do canal, cada um com 200m de comprimento e rugosidade de 2cm, conforme mostrado na Figura 5.1.

As figuras a seguir (Figura 5.3 e Figura 5.4) mostram a comparação entre os resultados ao longo do tempo do modelo 1D e do modelo 2DH na seção central do canal (seção 101, para a discretização 1D). Foi feita uma calibração no modelo 1D através do parâmetro de rugosidade do fundo. Alterando-se a rugosidade de 2cm para 4cm no modelo 1D foram obtidos resultados mais próximos daqueles obtidos com o modelo 2DH.

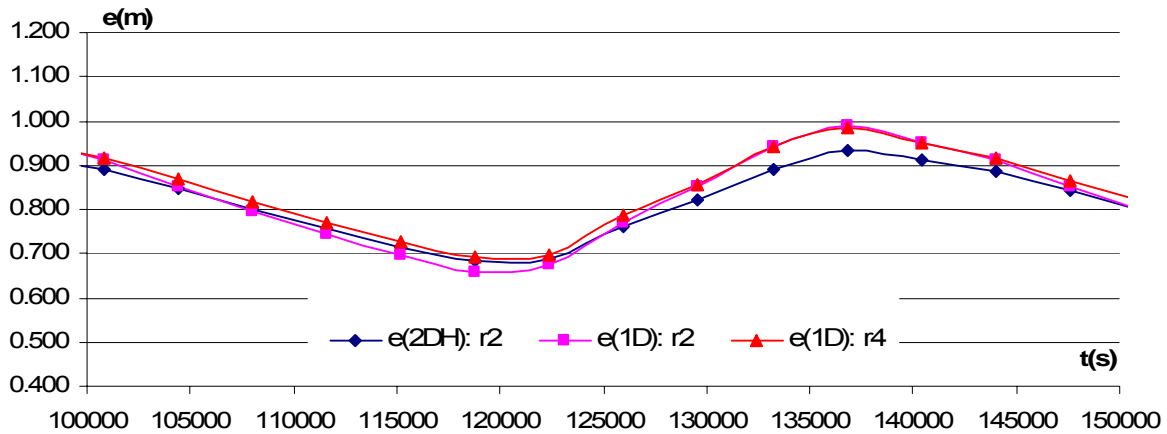


Figura 5.3 – Elevações na seção central (101): MH1Dmc com rugosidades 2 e 4 cm e SisBAHIA com rugosidade 2 cm.

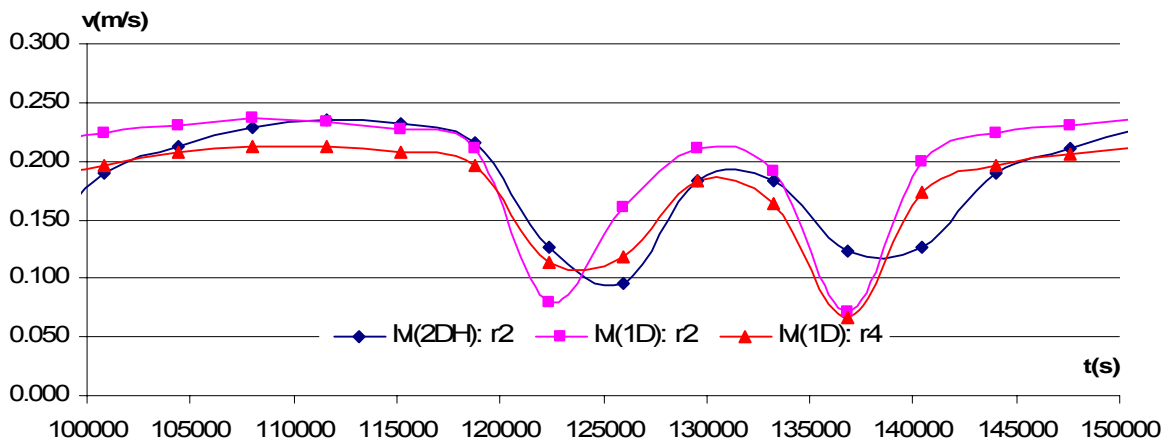


Figura 5.4 – Módulos das velocidades na seção central (101): MH1Dmc com rugosidades 2 e 4 cm e SisBAHIA com rugosidade 2 cm.

A calibração através do aumento da rugosidade é necessária para que se reproduza a dissipação de energia relacionada com fluxos transversais. A difusão de quantidade de movimento seria maior se tais fluxos fossem reproduzidos pelo modelo 1D. No caso do alagamento lateral, o escoamento transversal originado pela fuga de água para as planícies de inundação ou pelo retorno dessa água a calha principal imprime um efeito de difusão de quantidade de movimento que não é captado pelo MH1Dmc.

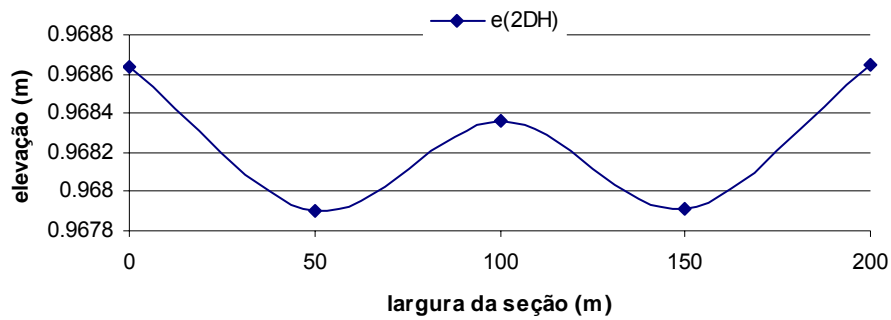


Figura 5.5 – elevações no modelo 2DH ao longo da seção 101 no tempo 50400(s)

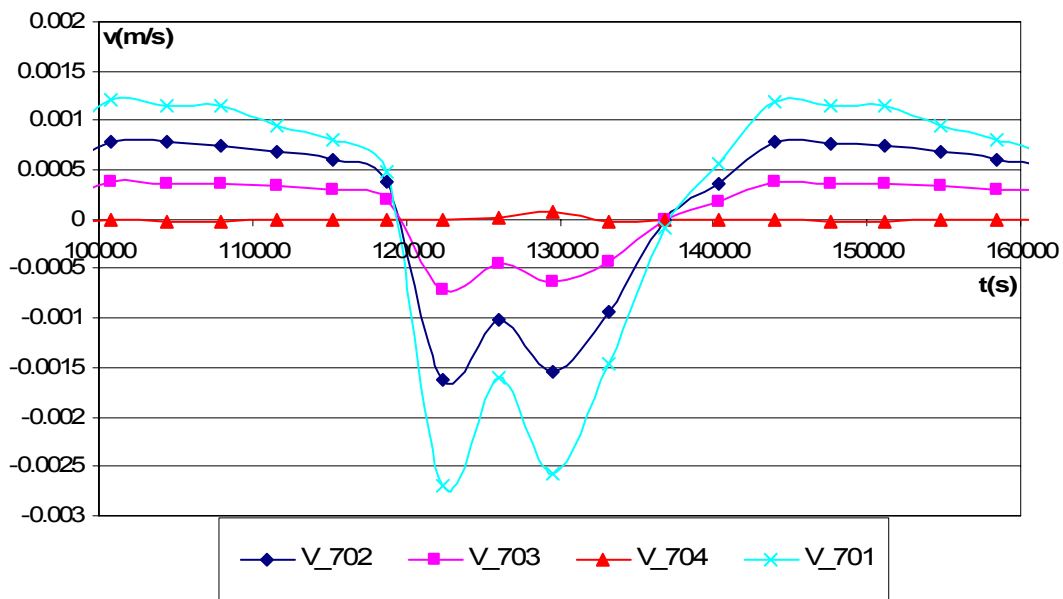


Figura 5.6 – velocidades transversais (seção 101) ao longo do tempo no modelo 2DH

A Figura 5.5 mostra um perfil transversal de elevações fornecido pelo modelo 2DH em um dado instante de tempo (50400 s). Na Figura 5.6 tem-se as velocidades transversais ao longo do tempo em três nós da seção 101 do modelo 2DH. Os nós 701, 702, 703 e 704 estão respectivamente a zero, 35, 70 e 105 metros da margem do canal, lembrando que há simetria hidrodinâmica em relação ao eixo longitudinal do mesmo. Essas variações de elevação e de velocidade ao longo da seção transversal, apesar de pequenas, evidenciam os efeitos de variação de quantidade de movimento transversal que não são resolvidos pelo modelo 1D e que precisam ser modelados.

Um outro aspecto a ser destacado é que o modelo MH1Dmc possui uma configuração de calha simplificada, fato comum entre modelos 1D. Isso facilita sua implementação, mas pode exigir em alguns casos um maior trabalho de calibração. Ao tentar-se reproduzir a calha de um canal através de um trapézio, pode-se estar perdendo minúcias do escoamento. Veja a Figura 5.7:

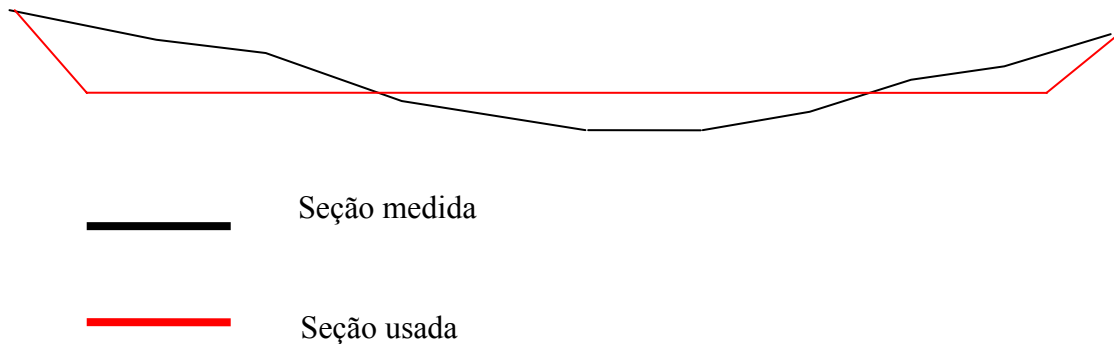


Figura 5.7 – Perda de minúcias ao adotar-se uma seção trapezoidal

Um procedimento alternativo ou auxiliar à calibração pela rugosidade seria a adoção de ajustes nos parâmetros das seções transversais. Como exposto acima, variações transversais de elevação e velocidade, bem como minúcias da calha não captadas pela configuração trapezoidal do modelo 1D, podem acarretar discrepâncias nos resultados.

Optou-se então pela alteração do valor dos taludes de alagamento lateral, como forma de calibrar o modelo 1D. Aumentando-se sucessivamente os taludes laterais, obtiveram-se, para um valor de 150 m nos taludes laterais, os resultados mostrados a seguir:

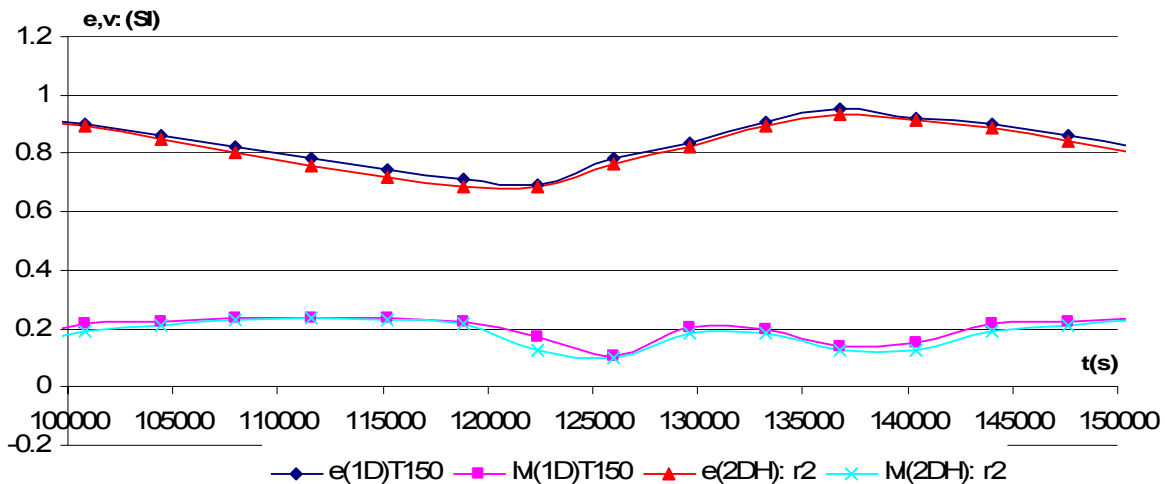


Figura 5.8 – Resultados de elevação e velocidade na seção 101: calibração pelo aumento dos taludes de inundação lateral (de 75 para 150 metros)

Como visto na Figura 5.8, os resultados 1D para a calibração por aumento dos taludes laterais possuem acurácia maior do que aqueles obtidos alterando-se os valores de rugosidade. Tal incremento nos taludes acarreta em um aumento das vazões laterais de inundação, compensando a fração do fluxo transversal de quantidade de movimento dirigida às planícies laterais de inundação e que não é reproduzida em 1D. No modelo 1D, a vazão de inundação é devida apenas ao galgamento das cotas laterais de inundação, já que não existem velocidades transversais.

5.2 Estuário do canal do Cunha

Para testar a robustez e a versatilidade do modelo 1D, realizou-se um teste na região do estuário do canal do Cunha, no entorno da Ilha do Fundão. Trata-se de uma situação muito adversa para a utilização de um modelo 1D, na medida em que o domínio de interesse possui bifurcações com fluxos conflitantes em alguns intervalos de tempo, sendo ao mesmo tempo um tipo de situação comum em regiões estuarinas.

A Figura 5.9 mostra o domínio modelado no estuário do canal do Cunha. A malha de quadriláteros ilustrada foi implementada no modelo hidrodinâmico 2DH do SisBAHIA. As isolinhas ilustram a batimetria no domínio. Essa discretização 2DH serviu como base para a implementação da discretização 1D. As seções perpendiculares 1D seguiram a direção e os intervalos delineados pelos elementos da malha 2DH.

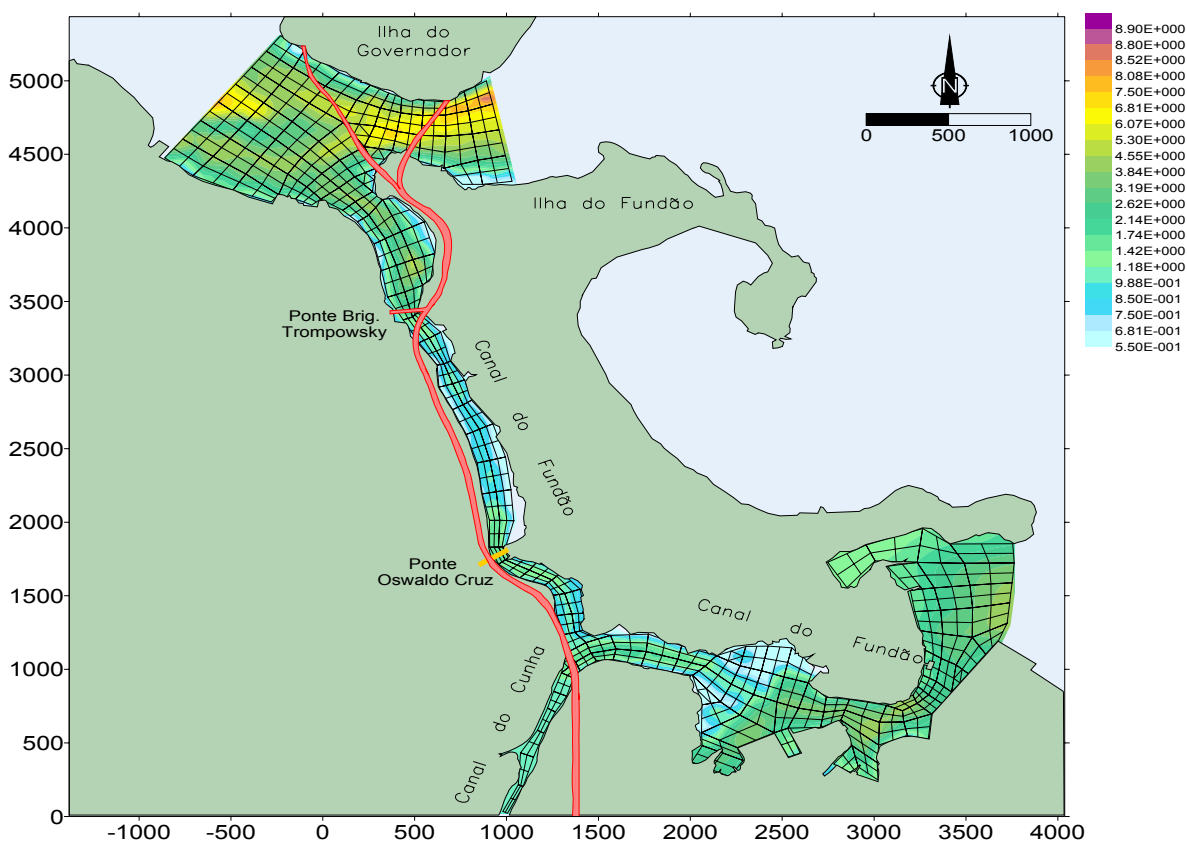


Figura 5.9 – Domínio modelado no estuário do canal do Cunha: malha 2DH de quadriláteros e batimetria.

A discretização 1D é ilustrada na Figura 5.10. Apenas as seções de contorno, as de entroncamento e as de comparação 1D x 2DH estão destacadas. Os elementos componentes de cada trecho são mostrados na Tabela 5.1. O sentido da numeração crescente em cada trecho coincide com o do eixo longitudinal. Sendo assim, os entroncamentos formados pelos nós (4,5 e 6), (24, 25 e 26) e (47, 48 e 48) são do tipo 3-4-4. Já o entroncamento formado pelos nós (92, 93 e 94) é do tipo 4-4-5.

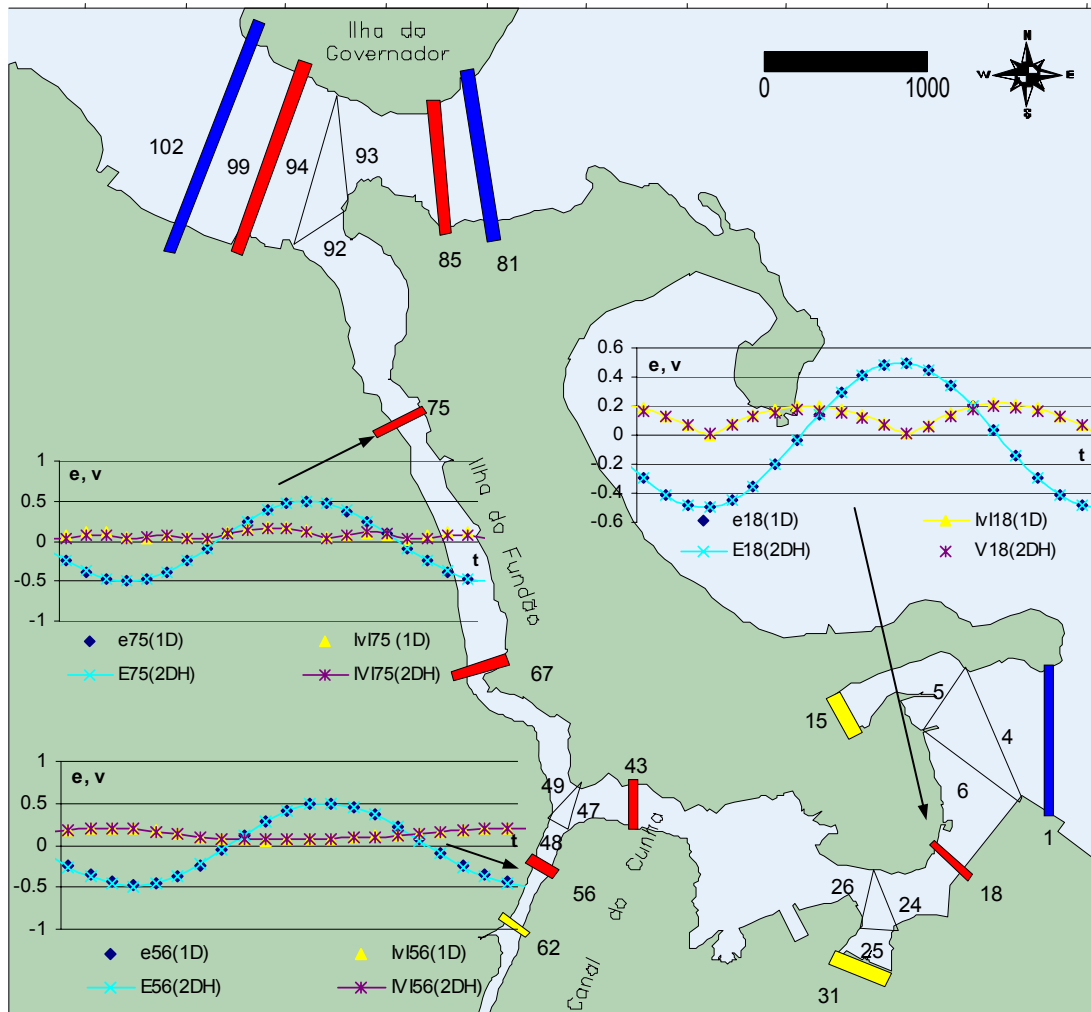


Figura 5.10 – Estuário do canal do Cunha: Comparação 1D x 2DH de elevação (e) e de velocidade (v) no SI.

Tabela 5.1 – Elementos por trecho da discretização 1D e valores de rugosidade (ϵ) para a calibração

Trecho	Elementos	ϵ 1D (cm)	ϵ 2DH (cm)
1	1 a 4;	7	3
2	5, 7, 9, 11, 13 e 15;	7	3
3	6, 8, 10, 12, 14, 16 a 24;	7	3
4	25, 27, 29 e 31;	7	3
5	26, 28, 30, 32 a 47;	7	3
6	48, 50, 52, 54, 56, 58, 60 e 62;	3	3
7	49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63 a 80, 82, 84, 86, 88, 90 e 92;	0,5	3
8	81, 83, 85, 87, 89, 91 e 93;	20	3
9	94 a 102.	20	3

As seções (1, 81 e 102) em azul na Figura 5.10 são contornos abertos e receberam uma maré sintética (S2) com período de 12h, amplitude de 0,5m e defasagem de 790s, 190s e zero, respectivamente. As seções (15, 31 e 62) em amarelo são seções de montante e recebem condições de contorno de fluxo (vazões) de, respectivamente, zero, zero e -5,0 m³/s. O sinal negativo indica afluxo. Tais condições de contorno não derivam de medições, mas foram impostas apenas para criar uma condição de equilíbrio dinâmico que possibilitasse a comparação 1D x 2DH.

As seções em vermelho na Figura 5.10 foram usadas para comparação de resultados entre o MH1Dmc e o SisBAHIA. A simulação feita compreendeu 54 horas, ou seja, 2,25 ciclos de maré. Os gráficos de elevação e velocidade apresentados na referida figura estão sincronizados no intervalo de 100 mil a 150 mil segundos.

Os resultados atingiram acurácia satisfatória após calibração via alteração da rugosidade. Os valores de rugosidade que forneceram os resultados mostrados na Figura 5.10 não são os mesmos para todo o domínio. Os trechos com maior vorticidade observada nos resultados 2DH receberam maiores incrementos de rugosidade. A tabela Tabela 5.1 mostra as alterações de rugosidade feitas no modelo 1D para a calibração.

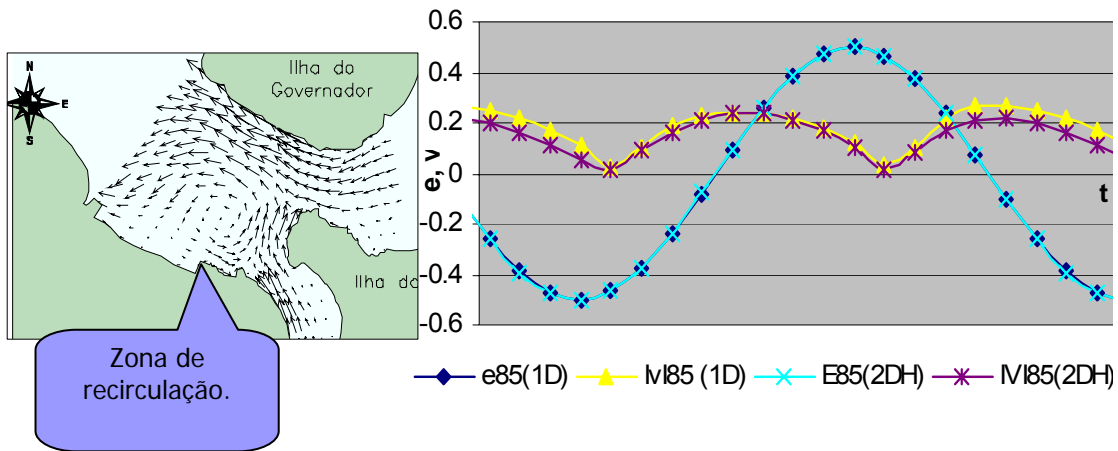


Figura 5.11 – Detalhe da região entorno da seção 85: zona de recirculação demandando grandes acréscimos de rugosidade (0,03 para 0,2m)– gráficos no (SI).

A Figura 5.11 ilustra um instante no qual há grande dissipação de energia por vórtices que não são reproduzidos pelo modelo 1D. A seção 85 e suas vizinhas receberam grande acréscimo de rugosidade para modelar tais perdas.

5.3 Teste de Acoplamento na enseada de Paraty – RJ

Os modelos 1D e 2DH (MH1Dmc e SisBAHIA) foram implementados em um domínio ilustrado na Figura 5.12, que compreende a enseada de Paraty, os rios Mateus Nunes e Perequê-Açu e o canal do Jabaquara. Este teste objetiva avaliar a acurácia do esquema de acoplamento. O domínio foi repartido em dois subdomínios, sendo o primeiro discretizado pela malha quadrangular de elementos finitos do modelo 2DH do SisBAHIA e aplicado a enseada e ao rio Mateus Nunes. O segundo subdomínio, correspondendo ao rio Perequê – Açu e ao canal do Jabaquara, foi discretizado pelo método dos elementos móveis.

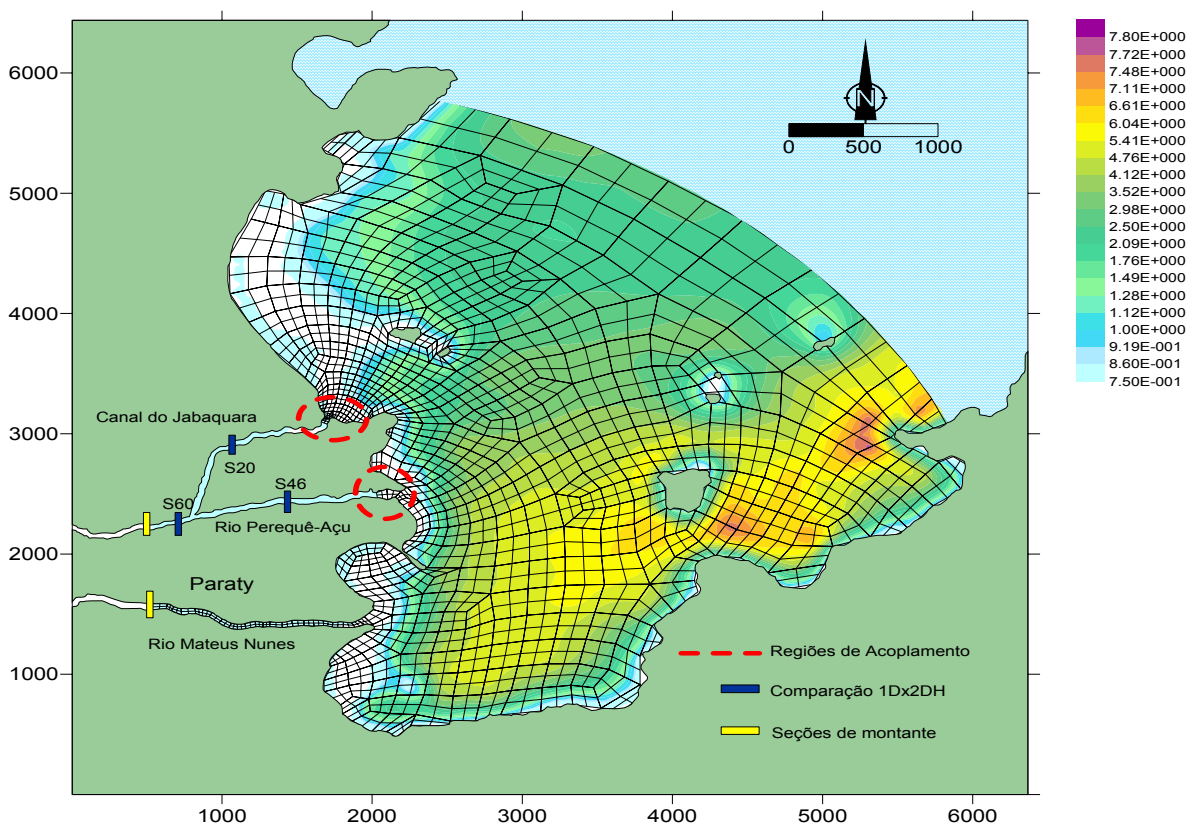


Figura 5.12 – Enseada de Paraty e o domínio de implementação dos modelos acoplados: Detalhes da malha 2DH e das regiões de acoplamento.

Buscou-se uma situação hipotética simplificada de equilíbrio dinâmico para possibilitar a comparação entre os resultados da utilização conjunta dos modelos com aqueles obtidos somente com o SisBAHIA. Para tanto, uma maré sintética de amplitude 0,5m e período de

12h foi imposta na fronteira aberta. Os rios Perequê-Açu e Mateus Nunes receberam um hidrograma uniforme com vazão afluente de $5,0 \text{ m}^3/\text{s}$.

As comparações dos valores de vazão e elevação foram feitas nas seções em azul na Figura 5.12. A numeração destas seções corresponde àquela usada para o subdomínio 1D. As seções em amarelo são contornos de montante e receberam hidrogramas uniformes. Em vermelho, têm-se as regiões de acoplamento. Os limites da malha 2DH contidos nestas regiões correspondem às seções de acoplamentos, nas quais é processado o fluxo de informações entre os modelos pelo método preditor-corretor já descrito.

A comparação entre os resultados do acoplamento, identificados com a sigla (1D) e do SisBAHIA, identificados com a sigla (2DH), está exposta nas figuras a seguir:

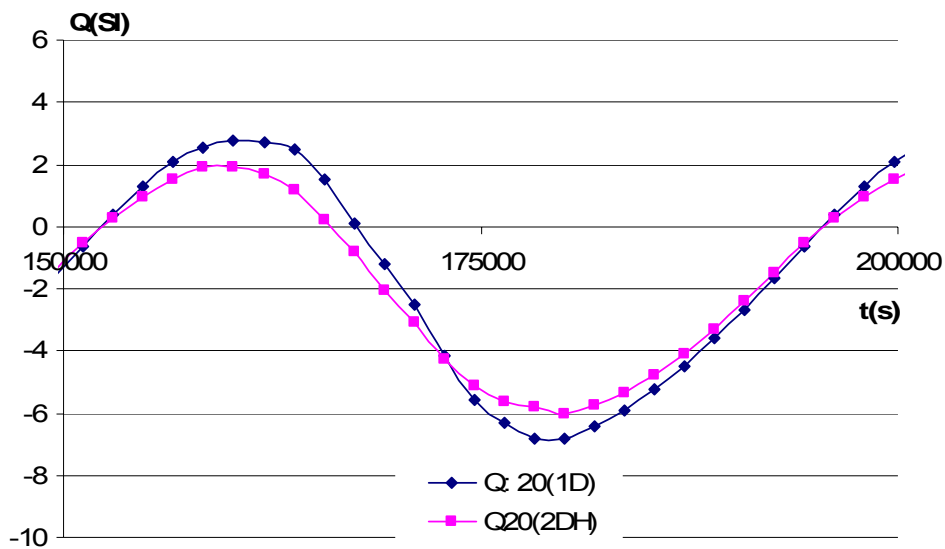


Figura 5.13 – Vazões (acoplamento x 2DH) na seção 20, canal do Jabaquara. Os valores estão nas unidades SI.

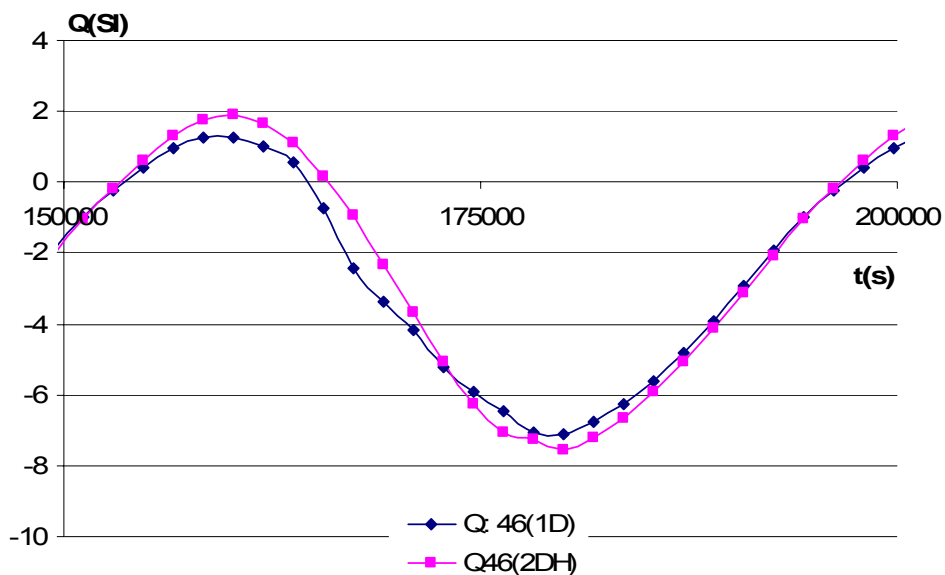


Figura 5.14 – Vazões (acoplamento x 2DH) na seção 46, rio Perequê-Açu. Os valores estão nas unidades SI.

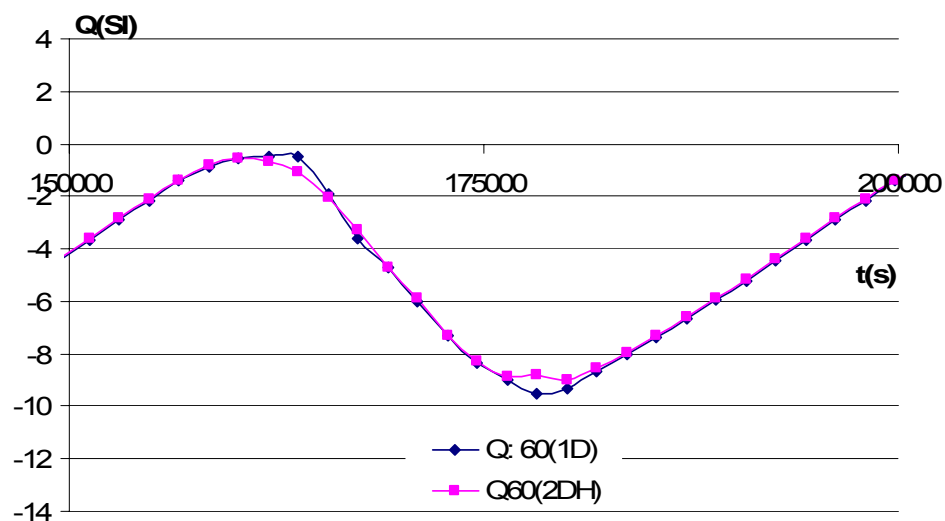


Figura 5.15 - Vazões (acoplamento x 2DH) na seção 60, rio Mateus Nunes. Os valores estão nas unidades SI.

As figuras acima ilustram a boa acurácia dos resultados do modelo acoplado. Os valores de elevação não foram grafados, pois apresentaram excelente acurácia, sendo impossível detectar graficamente os desvios. Desta forma foi dada maior ênfase aos valores de vazão.

Com ajustes de rugosidade no subdomínio 1D é possível aumentar a acurácia dos valores de vazão.

O esquema numérico de acoplamento mostrou-se pouco estável. Os limites de Courant médio e máximo ficaram por volta de 0,6 e 2, respectivamente.

6 Conclusões e Recomendações

Desde o início da implementação da Política Nacional de recursos Hídricos atualmente vigente, tem-se observado dificuldades para realização de uma gestão integrada entre águas continentais e águas costeiras e estuarinas. Isso se deve ao fato de não haver, em muitos casos, a figura da unidade de gestão da política (a bacia hidrográfica) bem definida na região estuarina. A ocorrência de sistemas lagunares nos quais varias bacias deságuam é comum.

A modelagem integrada de tais bacias e sistemas lagunares pode facilitar significativamente a gestão, propiciando a realização de estudos de usos múltiplos de recursos hídricos, quantificação de valores a serem cobrados por seus usos, etc.

O modelo MH1Dmc mostrou-se uma ferramenta versátil e apta a trabalhar de forma integrada com modelos 2DH. Isso possibilita significativa redução nas tarefas de coleta e pós-processamento de dados, simplificando a modelagem e permitindo a resolução acoplada de sistemas estuarinos e dos rios afluentes.

Um dos intuitos da implementação do modelo acoplado (1D, 2DH) foi a redução do tempo necessário para o processamento de dados. Adaptações futuras no esquema de acoplamento podem propiciar a efetivação de tal meta. O esquema de acoplamento, mesmo tendo apresentado limitações de estabilidade, pode ser econômico, na medida em que se pretenda modelar extensas áreas fluviais conjugadas com sistemas lagunares. Nesses casos, a utilização de um modelo 2DH sem acoplamento 1D, devido a grande quantidade de elementos de tamanho reduzido necessários nas regiões fluviais, acarretaria no uso de passos de tempo pequenos.

Um novo esquema de acoplamento está sendo desenvolvido. Testes preliminares mostraram ser possível o aumento da estabilidade numérica do acoplamento com as alterações mostradas na Figura 6.1.

Nesse novo esquema, a elevação média na seção de acoplamento, condição de contorno essencial para o modelo 1D, não é mais extrapolada. O que se faz é uma predição da vazão Q^+ pelo modelo 1D. Então, o modelo 2DH utiliza tal predição para calcular os valores de q_{ij}^+ e para resolver em todo subdomínio 2DH para t^+ . As elevações calculadas pelo modelo 2DH são usadas para calcular a elevação média na seção. Só então, utilizando tal valor de elevação como condição de contorno é que o subdomínio 1D é resolvido pelo MH1Dmc.

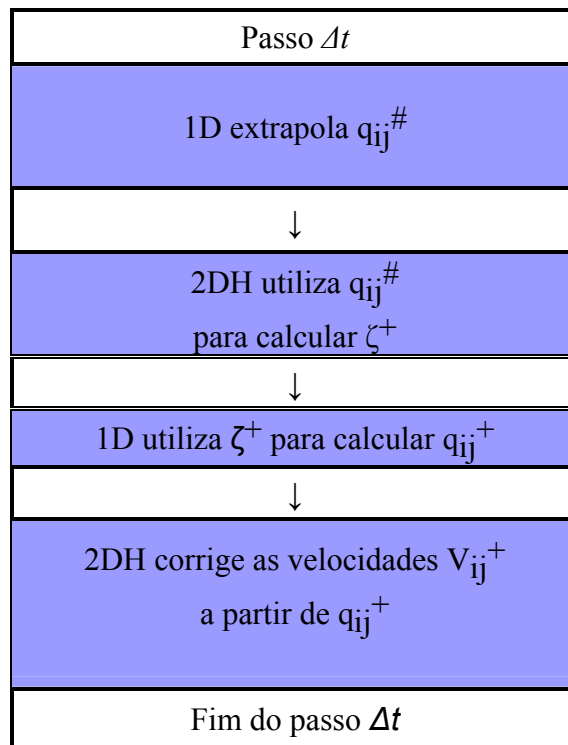


Figura 6.1 – Esquema de acoplamento modificado objetivando maior estabilidade

Parece ser melhor utilizar um valor extrapolado de vazão em um dos muitos nós de fronteira do modelo 2DH do que utilizar uma predição para a elevação como contorno no modelo 1D. Isso porque, além da elevação ser uma condição essencial para o subdomínio 1D, mudanças em seus valores parecem alterar fortemente os resultados.

Imaginemos, por exemplo, um rio de seção retangular de largura $b = 100\text{m}$, com um tirante hidráulico H de 1m e com velocidade longitudinal de $0,5\text{m/s}$, conforme ilustrado na Figura 6.2. Um aumento de 1cm na elevação causaria um acréscimo de $0,5\text{m}^3/\text{s}$ na vazão, que

passaria de 50 para 55m³/s. Caso uma alteração da mesma magnitude fosse imposta na vazão, ou seja, um aumento na casa das centenas (1cm/s), estaríamos lidando com um acréscimo cinco vezes menor em Q .

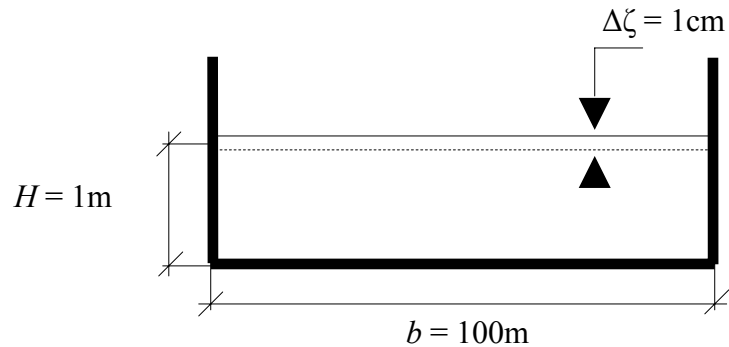


Figura 6.2 – Rio de seção retangular: variação de 1cm na elevação.

As aplicações demonstraram a utilidade do MH1Dmc também quando implementado desacoplado do modelo 2DH. Os esquemas de entroncamentos e de alagamento lateral por taludes de inundação geraram resultados satisfatórios. A calibração do modelo feita pelo parâmetro de rugosidade do fundo mostrou-se prática e efetiva.

Tais características demonstram ser este um modelo bem adaptado às peculiaridades da região estuarina, freqüentemente constituída de planícies de alagamento e de entroncamentos e confluências de rios. As condições de contorno de montante permitem que se forneçam hidrogramas típicos e ainda que sejam considerados os efeitos de maré a montante da última seção. Nas fronteiras abertas, podem-se fornecer marés medidas ou sintéticas, com quantas componentes forem desejadas. As vazões laterais em cada nó podem também ser fornecidas por hidrogramas, possibilitando a captação do efeito das sub-bacias componentes do sistema.

Referências Bibliográficas

ABBOTT, M. B. E BASCO, D. R., 1989, *Computational Fluid Dynamics – An Introduction for Engineers*. 1 ed. New York, Longman Scientific and Technical.

ALDAMA, A. A., 1985, *Theory and applications of two and three-scale filtering approaches for turbulent flow simulations*. Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Florida, USA.

DEAN, R.G. & DALRYMPLE, R.A, 1978, *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*.1 ed. New Jersey, Perntice Hall, Englewood Cliffs.

FREITAS, A. J., 2005, "Gestão de Recursos Hídricos". In: *Gestão de Recursos Hídricos*, 2 ed., chapter 1, Brasília, Demetrius David da Silva, Fernando Falco Pruski.

REIS JUNIOR, D. S., 1998, *Desenvolvimento de um Modelo 1D para Rede de Canais Via Método do Elemento Móvel com Substituições Sucessivas*. Tese de M.Sc, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

KUNDU, P. K. ,1977, *Fluid Mechanics*. 1ed. Dania, Florida, Academic Press, Inc.

ROSMAN, P. C. C. , 1987, *Modeling Shallow Water Bodies Via Filtering Technics*. PhD Thesis, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Florida, USA.

ROSMAN, P. C. C., 1989, Modelos de Circulação em Corpos D'água Rasos. In: *Métodos Numéricos em Recursos Hídricos* 1, 1 ed., chapter 3, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, ABRH.

ROSMAN, P. C. C., 1997). Subsídios para Modelagem de Sistemas Estuarinos. In: *Métodos Numéricos em Recursos Hídricos* 3, 1 ed., chapter 3, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, ABRH.

LE GUENNEC, B. et al (2005). A 1D Hydrodynamic Model for River and Irrigation Canal Modeling and Regulation. In: *Métodos Numéricos em Recursos Hídricos 7*, 1 ed., chapter 1, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, ABRH.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)