

ANÁLISE DINÂMICA DE SISTEMAS NÃO LINEARES COM ACOPLAMENTO
DO TIPO SOLO-FLUIDO-ESTRUTURA POR INTERMÉDIO DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS E DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Delfim Soares Júnior

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. Webe João Mansur, Ph.D.

Prof. José Claudio de Faria Telles, Ph.D.

Prof. Fernando Alves Rochinha, D.Sc.

Prof. Álvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho, D.Sc.

Prof. José Antonio Marques Carrer, D.Sc.

Prof. Paulo Batista Gonçalves, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

NOVEMBRO DE 2004

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

SOARES JÚNIOR, DELFIM

Análise dinâmica de sistemas não lineares
com acoplamento do tipo solo-fluido-estrutura
por intermédio do método dos elementos finitos
e do método dos elementos de contorno [Rio de
Janeiro] 2004

XXIV, 235 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,
Engenharia Civil, 2004)

Tese – Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Análise transiente acoplada
2. Elementos de contorno
3. Elementos finitos
4. Análise não-linear
5. Meios porosos

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

À minha família.

Agradecimentos

O autor possui grande débito com o Prof. Webe João Mansur pela sua preciosa orientação. Os valorosos conselhos, discussões e contribuições fornecidos ao longo dos anos, bem como a destacável dedicação acadêmica do Prof. Webe João Mansur, merecem especiais agradecimentos por parte do autor.

De igual forma o autor está em débito com o Prof. Otto von Estorff por sua calorosa acolhida quando da estadia do autor na Alemanha, bem como por sua importante contribuição e colaboração para a presente pesquisa.

Agradecimentos são estendidos aos professores J.A.M. Carrer, J.C.F. Telles e M. Schanz pelo apoio e contribuição fornecidos. Especiais considerações também são prestadas aos colegas e amigos da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) e Technische Universität Hamburg-Harburg (TUHH) pelo incentivo e colaboração.

O autor agradece, por fim, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e Deutscher Akademischer Austauschdienst (DAAD) pelo apoio financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ANÁLISE DINÂMICA DE SISTEMAS NÃO LINEARES COM ACOPLAMENTO DO TIPO SOLO-FLUIDO-ESTRUTURA POR INTERMÉDIO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Delfim Soares Júnior

Novembro/2004

Orientador: Webe João Mansur

Programa: Engenharia Civil

No presente trabalho, sistemas acoplados são estudados com especial atenção focada a problemas de interação do tipo solo-fluido-estrutura. Diferentes abordagens numéricas baseadas no método de elementos de contorno (MEC) e no método de elementos finitos (MEF) são desenvolvidas, bem como procedimentos de acoplamento MEC-MEF. Eficiência e boa precisão são obtidas por intermédio das novas metodologias. Alguns exemplos relativos a análises transientes não-lineares são apresentados ao longo do texto, ilustrando a viabilidade dos procedimentos propostos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

DYNAMIC ANALYSIS OF NONLINEAR SOIL-FLUID-STRUCTURE
COUPLED SYSTEMS BY THE FINITE ELEMENT METHOD AND THE
BOUNDARY ELEMENT METHOD

Delfim Soares Júnior

November/2004

Advisor: Webe João Mansur

Department: Civil Engineering

In the present work, coupled systems are studied with special attention focused on soil-fluid-structure interaction problems. Different numerical approaches based on the boundary element method (BEM) and on the finite element method (FEM) are developed, as well as BEM-FEM coupling procedures. Efficiency and good accuracy are obtained with the new methodologies. Some examples concerning nonlinear transient analysis are presented along the text, illustrating the viability of the proposed procedures.

1. Introdução	1
1.1. Observações preliminares	2
1.2. Breve revisão bibliográfica	6
1.3. Objetivos e conteúdo do trabalho	13
2. Sistemas não acoplados	17
2.1. Introdução	18
2.2. Modelagem acústica	19
2.2.1. Equações governantes	19
2.2.2. Solução com elementos de contorno	21
2.2.3. Solução com elementos finitos	27
2.3. Modelagem dinâmica	30
2.3.1. Equações governantes	30
2.3.2. Solução com elementos de contorno	33
2.3.2.1. Análise baseada em soluções fundamentais dinâmicas	35
2.3.2.2. Análise baseada em soluções fundamentais estáticas	39
2.3.3. Solução com elementos finitos	44
2.3.3.1. Método de Newmark / Newton-Raphson	45
2.3.3.2. Método implícito de Green / pseudo-forças	49
2.4. Aplicações numéricas	60
2.4.1. Elementos de contorno	61
2.4.2. Elementos finitos	67
3. Sistemas com acoplamento de interface	72
3.1. Introdução	73
3.2. Acoplamento de sistemas fisicamente similares	74

3.2.1. Acoplamento MEC-MEF	74
3.2.1.1. Acoplamento padrão	75
3.2.1.2. Acoplamento iterativo	79
3.2.1.3. Acoplamento direto	84
3.2.2. Acoplamento MEC-MEC	87
3.3. Acoplamento de sistemas fisicamente distintos	88
3.3.1. Acoplamento MEC-MEF	89
3.3.1.1. Acoplamento padrão	90
3.3.1.2. Acoplamento iterativo	94
3.3.1.3. Acoplamento direto	98
3.3.2. Acoplamento MEC-MEC	102
3.4. Aplicações numéricas	105
3.4.1. Acoplamento acústico-acústico	106
3.4.1.1. Membrana de vibração	106
3.4.2. Acoplamento estrutura-estrutura	110
3.4.2.1. Barra engastada	111
3.4.2.2. Viga engastada	119
3.4.3. Acoplamento solo-solo	125
3.4.3.1. Meio semi-infinito	125
3.4.3.2. Cavidade circular	132
3.4.4. Acoplamento fluido-estrutura	139
3.4.4.2. Duto submerso	139
3.4.4.3. Represa de armazenamento	144
3.4.5. Acoplamento solo-fluido-estrutura	151
3.4.5.1. Canal de abastecimento	151

4. Sistemas com acoplamento de domínio	157
4.1. Introdução	158
4.2. Modelagem poro-dinâmica	158
4.2.1. Equações governantes	159
4.2.2. Solução com elementos de contorno	164
4.2.2.1. Análise baseada em soluções fundamentais dinâmicas	164
4.2.2.2. Análise baseada em soluções fundamentais estáticas	169
4.2.3. Solução com elementos finitos	175
4.2.3.1. Método de Newmark / Newton-Raphson	176
4.2.3.2. Método implícito de Green / pseudo-forças	179
4.2.4. Solução com algoritmos iterativos de acoplamento	186
4.3. Aplicações numéricas	188
4.3.1. Colunas de solo	188
4.3.2. Fundação tipo sapata	194
4.3.3. Solo estratificado	200
5. Conclusões	204
5.1. Considerações gerais	205
5.2. Sugestões para desenvolvimentos futuros	207
6. Referências bibliográficas	210

Figura 2.1 – Zonas de estabilidade e instabilidade para o método de Green-Newmark, como função dos parâmetros de Newmark (g e b) e do passo de tempo normalizado ($\Delta t/T$), para $x = 0$: superfície limite do raio espectral ($c(\mathbf{A}) = 1$).....	57
Figura 2.2 – Análise com elementos de contorno: (a) modelo esquemático; (b) malha de elementos de contorno; (c) malha de células de integração.....	62
Figura 2.3 – Deslocamentos, forças de superfície e tensões no modelo considerando análise por elementos de contorno: \square MEC com soluções fundamentais dinâmicas; \circ MEC com soluções fundamentais estáticas; — Solução analítica.....	62
Figura 2.4 – Erros resultantes do truncamento da convolução considerando-se diversos valores para os parâmetros Φ e κ : interpolação multi-linear (a) $\Theta = 0.0$; (b) $\Theta = 0.5$; (c) interpolação com polinômios de Chebyshev-Lagrange.....	63
Figura 2.5 – Deslocamentos no ponto A ($a/2, b$) levando-se em consideração truncamento do processo de convolução.....	66
Figura 2.6 – Análise com elementos finitos: (a) modelo esquemático; (b) malha de elementos finitos.....	69
Figura 2.7 – Deslocamentos no ponto A ($0, b/2$) considerando-se análise elástica e elastoplástica por elementos finitos: solução no tempo pelos métodos de Newmark e de Green-Newmark.....	69
Figura 2.8. Decaimento de amplitude (E_1) e alongamento de período (E_2) considerando-se algumas escolhas de b e g para os métodos de Newmark e Green-Newmark: (a) $b = 0.00$ e $g = 0.50$; (b) $b = 0.27563$ e $g = 0.55$; (c) $b = 0.3025$ e $g = 0.60$ (Regra trapezoidal: $b = 0.25$ e $g = 0.50$).....	70

Figura 3.1 – Procedimentos de interpolação no espaço: obtenção de valores \mathbf{v} a partir de interpolações de valores \mathbf{v}_k e \mathbf{d}_k na interface correspondente (interpolação linear: $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_i \mathbf{d}_j + \mathbf{v}_j \mathbf{d}_i) / (\mathbf{d}_j + \mathbf{d}_i)$).	80
Figura 3.2 – Procedimentos de interpolação-extrapolação no tempo: (a) extrapolação no tempo de \mathbf{U}^{F^t} para se obter \mathbf{U}^{C^t} ($\mathbf{U}^{C^t} = \mathbf{U}^{F^t} ({}_C \Delta t / {}_{CF} \Delta t) + \mathbf{U}^{C^t - c \Delta t} (1 - {}_C \Delta t / {}_{CF} \Delta t)$); (b) interpolação no tempo de \mathbf{T}^{C^t} para se obter \mathbf{T}^{F^t} ($\mathbf{T}^{F^t} = \mathbf{T}^{C^t}$).	82
Figura 3.3 – Procedimentos de interpolação-extrapolação no tempo: (a) extrapolação no tempo de $\mathbf{U}_N^{F^t}$ para se obter $\mathbf{U}_N^{C^t}$ ($\mathbf{U}_N^{C^t} = \mathbf{U}_N^{F^t}$); (b) interpolação no tempo de \mathbf{P}^{C^t} para se obter \mathbf{P}^{F^t} ($\mathbf{P}^{F^t} = \mathbf{P}^{C^t} ({}_{CF} \Delta t / {}_C \Delta t) + \mathbf{P}^{C^t - c \Delta t} (1 - {}_{CF} \Delta t / {}_C \Delta t)$).	96
Figura 3.4 – Modelo esquemático da membrana de vibração.	107
Figura 3.5 – Discretização espacial do modelo da membrana: (a) análise acoplada MEC-MEF (104 elementos de contorno; 72 elementos finitos); (b) análise com MEC (32 elementos de contorno; 4 células de integração); (c) análise com MEF (malha 1 com 800 elementos; malha 2 com 5000 elementos).	108
Figura 3.6 – Vibração no ponto A considerando soluções por elementos de contorno, elementos finitos e acoplamento de elementos de contorno com elementos finitos.	109
Figura 3.7 – Resultados ao longo da membrana (tempo $t = 1.5s$) considerando-se análise com elementos finitos (malha 2).	109
Figura 3.8 – Barra engastada: (a) modelo esquemático; (b) malha MEC-MEF.	111
Figura 3.9 – Resultados nos pontos A e B do modelo considerando-se acoplamento iterativo MEC-MEF e diferentes discretizações temporais: (a) deslocamentos; (b) forças de superfície.	112

Figura 3.10 – Resultados nos pontos A e B do modelo considerando-se acoplamento direto MEC-MEF e diferentes discretizações temporais: (a) deslocamentos; (b) forças de superfície.....	113
Figura 3.11 – Acoplamento iterativo MEC-MEF: número médio de iterações por passo de tempo em função do parâmetro de relaxamento α e de diferentes discretizações temporais.....	115
Figura 3.12 – Convergência do acoplamento iterativo MEC-MEF considerando-se parâmetro de relaxamento $\alpha = 0.5$ e diferentes discretizações temporais: (a) $r\Delta t = 0.25_c\Delta t$; (b) $r\Delta t = 0.50_c\Delta t$; (c) $r\Delta t = 1.00_c\Delta t$	117
Figura 3.13 – Forças de superfície no ponto B da interface, considerando-se acoplamento direto MEC-MEF e truncamento do processo de convolução: (a) $r\Delta t = 0.25_c\Delta t$; (b) $r\Delta t = 0.50_c\Delta t$	118
Figura 3.14 – Viga engastada: (a) modelo esquemático; (b) malhas acopladas MEC-MEF e MEC-MEC; (c) malhas não acopladas: elementos finitos, elementos de contorno e células de integração.....	120
Figura 3.15 – Resultados no ponto A do modelo para análise linear e não-linear: (a) acoplamento iterativo MEC-MEF; (b) acoplamento iterativo MEC-MEC.....	121
Figura 3.16 – Acoplamento iterativo MEC-MEF e MEC-MEC: número médio de iterações por passo de tempo em função do parâmetro de relaxamento α	122
Figura 3.17 – Convergência do acoplamento iterativo considerando-se parâmetro de relaxamento $\alpha = 0.5$: (a) acoplamento MEC-MEF; (b) acoplamento MEC-MEC.....	123
Figura 3.18 – Meio semi-infinito: (a) modelo esquemático; (b) malha MEC-MEF.....	126

Figura 3.19 – Deslocamentos considerando-se acoplamento padrão, iterativo e direto MEC-MEF: (a) $r\Delta t = c\Delta t = 0.01s$; (b) diferentes discretizações temporais.....	127
Figura 3.20 – Acoplamento iterativo MEC-MEF: número médio de iterações por passo de tempo em função do parâmetro de relaxamento α e de diferentes discretizações temporais.....	128
Figura 3.21 – Deslocamentos verticais no ponto C, considerando-se acoplamento direto MEC-MEF e truncamento do processo de convolução ($r\Delta t = 0.2c\Delta t$): (a) interpolação por polinômios de Chebyshev-Lagrange; (b) interpolação multi-linear.....	128
Figura 3.22 – Módulo dos deslocamentos ao longo da malha de elementos finitos, considerando-se acoplamento iterativo MEC-MEF ($r\Delta t = 0.2c\Delta t$): (a) $t=0.2s$; (b) $t=0.4s$; (c) $t=0.6s$; (d) $t=0.8s$; (e) $t=1.0s$	131
Figura 3.23 – Modelo esquemático da cavidade.....	133
Figura 3.24 – Malhas de elementos finitos, elementos de contorno e células de integração adotadas: (a) acoplamento MEC-MEF; (b) acoplamento MEC-MEC (uso de simetria).....	133
Figura 3.25 – Tensões lineares considerando-se acoplamento MEC-MEC.....	134
Figura 3.26 – Tensões não-lineares considerando-se acoplamento MEC-MEC.....	134
Figura 3.27 – Deslocamentos (a) lineares e (b) não-lineares considerando-se acoplamento MEC-MEC e MEC-MEF.....	134
Figura 3.28 – Estado de tensões nas malhas de MEF e MEC para o tempo $t = 20s$ considerando-se análise elástica: (a) σ_{xx} ; (b) σ_{xy} ; (c) σ_{yy}	135

Figura 3.29 – Estado de tensões nas malhas de MEF e MEC para o tempo $t = 20s$ considerando-se análise elastoplástica: (a) σ_{xx} ; (b) σ_{xy} ; (c) σ_{yy}	136
Figura 3.30 – Evolução do estado σ_{xy} de tensões, ao longo do tempo e do espaço, para análise elastoplástica: (a) $t = 4s$; (b) $t = 8s$; (c) $t = 12s$; (d) $t = 16s$	137
Figura 3.31 – Evolução dos deslocamentos (em módulo) ao longo do tempo e do espaço, para análise elastoplástica: (a) $t = 4s$; (b) $t = 8s$; (c) $t = 12s$; (d) $t = 16s$	137
Figura 3.32 – Modelo esquemático do duto submerso.....	140
Figura 3.33 – Evolução da amplitude da explosão $S(t)$, ao longo do tempo.....	141
Figura 3.34 – Deslocamentos para os pontos A, B e C do modelo considerando-se acoplamento MEC-MEF iterativo e direto.....	141
Figura 3.35 – Pressões hidrodinâmicas na superfície do duto considerando-se acoplamento MEC-MEF iterativo e direto: (a) ponto A; (b) ponto B; (c) ponto C.....	142
Figura 3.36 – Deslocamentos horizontais no ponto A do modelo considerando-se acoplamento iterativo MEC-MEF: análise com truncamento da convolução ($\Phi = 10\%$; $\kappa = 10$; $\Theta = 0.5$) e análise sem processo iterativo (limite máximo de 1 iteração por passo de tempo).....	143
Figura 3.37 – Modelo esquemático da barragem de contenção e do reservatório de nível d'água H: ponto A (30,60); ponto B (35,10).....	145
Figura 3.38 – Discretização da barragem: (a) malha de elementos finitos; (b) malha de elementos de contorno; (c) malha de células de integração.....	145

- Figura 3.39 – Resultados referentes aos acoplamentos MEC-MEF padrão, iterativo e direto ($c\Delta t = 0.0035s$) em função do nível d'água na represa ($H = 35m$ ou $H = 50m$): (a) deslocamentos verticais no ponto A; (b) pressões hidrodinâmicas no ponto B.....146
- Figura 3.40 – Resultados referentes aos acoplamentos iterativos MEC-MEF e MEC-MEC ($c\Delta t = 0.003s$) em função do nível d'água na represa ($H = 35m$ ou $H = 50m$): (a) deslocamentos verticais no ponto A; (b) pressões hidrodinâmicas no ponto B.....147
- Figura 3.41 – Acoplamento iterativo MEC-MEF e MEC-MEC: número médio de iterações por passo de tempo em função do parâmetro de relaxamento α ($H = 50m$)..148
- Figura 3.42 – Resultados relativos ao acoplamento MEC-MEC_D considerando-se diferentes relações na interface entre os deslocamentos de MEC_D e as acelerações normais de MEC: (a) deslocamentos verticais no ponto A; (b) pressões hidrodinâmicas no ponto B.....148
- Figura 3.43 – Estado de tensões σ_{yy} no instante de tempo $t = 0.6s$ para nível d'água $H = 50m$: (a) acoplamento iterativo MEC-MEF; (b) acoplamento iterativo MEC-MEC.....149
- Figura 3.44 – Estado de tensões σ_{yy} no instante de tempo $t = 0.6s$ para nível d'água $H = 35m$: (a) acoplamento iterativo MEC-MEF; (b) acoplamento iterativo MEC-MEC.....149
- Figura 3.45 – Modelo esquemático do canal.....153
- Figura 3.46 – Discretização do modelo: (a) fluido; (b) solo; (c) estrutura.....153
- Figura 3.47 – Modelagem do canal considerando-se diferentes tipos de interação: modelo 1 (estrutura); (b) modelo 2 (interação fluido-estrutura); (c) modelo 3 (interação solo-estrutura); (d) modelo 4 (interação solo-fluido-estrutura).....154

Figura 3.48 – Deslocamentos para o ponto A (análise elástica) considerando-se os modelos 1, 2, 3 e 4: (a) deslocamentos horizontais; (b) deslocamentos verticais.....	155
Figura 3.49 – Deslocamentos para o ponto A (análise elastoplástica) considerando-se os modelos 1, 2, 3 e 4: (a) deslocamentos horizontais; (b) deslocamentos verticais.....	156
Figura 4.1 – Coluna de solo: (a) modelo esquemático; (b) malhas adotadas (elementos finitos; elementos de contorno; células de integração).....	189
Figura 4.2 – Deslocamentos no ponto A do modelo 1 considerando-se análise com elementos de contorno e com elementos finitos.....	189
Figura 4.3 – Deslocamentos no ponto A do modelo 2: (a) análise com elementos de contorno; (b) análise com elementos finitos.....	192
Figura 4.4 – Poro-pressões no ponto B do modelo 2: (a) análise com elementos de contorno; (b) análise com elementos finitos.....	193
Figura 4.5 – Sapata: (a) modelo esquemático; (b) malhas adotadas (elementos finitos; elementos de contorno e células de integração).....	194
Figura 4.6 – Deslocamentos verticais no ponto A (análise linear e não-linear): (a) modelo 1; (b) modelo 2; (c) modelo 3.....	197
Figura 4.7 – Poro-pressões ao longo do tempo e da malha MEF2 para o modelo 1: (a) $t = 0.02s$; (b) $t = 0.40s$; (c) $t = 0.86s$	198
Figura 4.8 – Poro-pressões ao longo da malha MEF2 ($t = 0.40s$) para o modelo 2, considerando-se: (a) análise elástica; (b) análise elastoplástica.....	199

Figura 4.9 – Poro-pressões ao longo da malha MEC2 ($t = 0.40s$) para o modelo 3, considerando-se: (a) análise elástica; (b) análise elastoplástica.....	199
Figura 4.10 – Solo estratificado: (a) modelo esquemático; (b) malha adotada.....	200
Figura 4.11 – Deslocamentos no modelo considerando-se diferentes valores para altura da interface h ($h = 0$; $h = H/2$; $h = H$): (a) ponto A; (b) ponto B.....	202

Tabela 2.1 – Cálculo do vetor de truncamento Λ^n usando interpolação multi-linear e interpolação com polinômios de Chebyshev-Lagrange.....	24
Tabela 2.2 – Termos da matriz de amplificação e do vetor operador de carga para os métodos de Green-Newmark e Newmark.....	56
Tabela 2.3 – Custo da análise considerando truncamento da convolução.....	64
Tabela 3.1 – Algoritmo para acoplamento padrão MEC-MEF (sólido-sólido).....	78
Tabela 3.2 – Algoritmo para acoplamento iterativo MEC-MEF (sólido-sólido).....	83
Tabela 3.3 – Algoritmo para acoplamento direto MEC-MEF (sólido-sólido).....	87
Tabela 3.4 – Algoritmo para acoplamento MEC _D -MEC _E (sólido-sólido).....	88
Tabela 3.5 – Algoritmo para acoplamento padrão MEC-MEF (fluido-sólido).....	94
Tabela 3.6 – Algoritmo para acoplamento iterativo MEC-MEF (fluido-sólido).....	97
Tabela 3.7 – Algoritmo para acoplamento direto MEC-MEF (fluido-sólido).....	101
Tabela 3.8 – Algoritmo para acoplamento MEC-MEC _E (fluido-sólido).....	103
Tabela 3.9 – Algoritmo para acoplamento MEC-MEC _D (fluido-sólido).....	104
Tabela 3.10 – Barra engastada: ganho computacional no acoplamento direto	119
Tabela 3.11 – Meio semi-infinito: ganho computacional no acoplamento direto.....	130

Símbolos romanos:

- a* Forças de domínio.
- A** Matriz de influência de MEC; matriz efetiva de MEF; matriz de amplificação.
- b_i* Forças de domínio.
- B** Matriz de influência de MEC; vetor efetivo de MEF; matriz de deformação.
- c* Velocidade de propagação de onda; coeficiente geométrico; coeficiente de coesão.
- C** Matriz de influência geométrica; matriz de amortecimento.
- D** Matriz constitutiva.
- e* Função exponencial; número de Euler.
- E* Módulo de Young.
- E** Matriz de transformação.
- F** Vetor de forças nodais.
- G** Matriz de influência; matriz de Green.
- H* Função Heaviside.
- H** Matriz de influência; matriz de permeabilidade.
- k* Permeabilidade intrínseca do esqueleto sólido.
- K* Módulo de compressibilidade; função de Bessel.
- K** Matriz de rigidez.
- i* Identidade complexa; função de interpolação.
- I** Matriz identidade.
- ln Função logarítmica (logaritmo Neperiano).
- L** Vetor de termos de passos de tempo precedentes; vetor operador de carga.
- m** Matriz relativa ao delta de Kronecker.

-
- M** Matriz de massa; matriz de influência de domínio (matriz de inércia).
- n** Vetor normal.
- N** Matriz de interpolação.
- O** Vetor de tensões.
- p Pressão (hidro-dinâmica e poro-dinâmica).
- P** Vetor de pressões.
- q Fluxo (hidro-dinâmico e poro-dinâmico).
- Q Parâmetro de Biot.
- Q** Vetor de fluxos.
- r Distância entre ponto fonte e ponto campo.
- R** Vetor associado a: resíduos; pseudo-forças; forças de acoplamento.
- s Densidade de fonte; domínio de Laplace.
- S** Matriz de compressibilidade; Vetor de integrais de domínio.
- t Tempo.
- t** Vetor tangente.
- T** Vetor de forças de superfície.
- u_i Deslocamentos.
- U** Vetor de deslocamentos.
- v_i Velocidades.
- V** Vetor genérico (vetor auxiliar).
- w Funções de peso; frequência natural.
- w_i Deslocamentos médios relativos do fluido.
- W** Matriz de influência de domínio (matriz de tensões); matriz de acoplamento.

-
- X Espaço (coordenadas cartesianas); ponto campo.
- \mathbf{X} Vetor de variáveis incógnitas de elementos de contorno.
- \mathbf{Y} Vetor de variáveis prescritas de elementos de contorno.
- z Parâmetro auxiliar poro-dinâmico.

Símbolos gregos

- a Constante de proporcionalidade; parâmetro de relaxamento; parâmetro de Biot.
- b Parâmetro de discretização de elementos de contorno; parâmetro de Newmark.
- g Parâmetro de Newmark.
- Γ Contorno do corpo.
- d Função delta de Dirac.
- d_{ij} Delta de Kronecker.
- e_{ij} Deformações.
- z Parâmetro auxiliar poro-dinâmico.
- h Funções de interpolação no espaço.
- J Viscosidade dinâmica do fluido.
- q Variação do volume de fluido por unidade de volume; parâmetro de Newmark.
- Θ Parâmetro de controle para interpolação multi-linear.
- Θ Matriz de acoplamento (análise poro-dinâmica).
- k Parâmetro de controle de truncamento; coeficiente de permeabilidade.
- κ Matriz de coeficientes de permeabilidade.
- l Constante de Lamé.
- Λ Vetor do truncamento do processo de convolução.

-
- m Constante de Lamé.
- n Porosidade.
- x Ponto fonte; taxa de amortecimento.
- r Densidade de massa.
- V Coeficiente de amortecimento viscoso.
- S_{ij} Tensões.
- t_i Forças de superfície.
- u Coeficiente de Poisson.
- f Funções de interpolação no tempo; ângulo de atrito interno.
- j Função relacionada ao método de Lubich; parâmetro de ponderação.
- Φ Parâmetro de controle de truncamento.
- c Raio espectral.
- Ψ Vetor de resíduos.
- w_{ij} Rotações.
- Ω Domínio do corpo.

Abreviaturas:

- CPU Central Processing Unit.
- DFT Discrete Fourier Transform.
- FFT Fast Fourier Transform.
- MEC Método de Elementos de Contorno.
- MEF Método de Elementos Finitos.

Notações:

Y_i Termo i do vetor Y ($Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ em 3D e $Y = (Y_1, Y_2)$ em 2D).

Y_{ii} Notação cartesiana indicial ($Y_{ii} = Y_{11} + Y_{22} + Y_{33}$ em 3D e $Y_{ii} = Y_{11} + Y_{22}$ em 2D).

$Y_i Y_i$ Notação cartesiana indicial ($Y_i Y_i = Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2$ em 3D e $Y_i Y_i = Y_1^2 + Y_2^2$ em 2D).

\dot{Y} Derivada temporal de Y ($\dot{Y} = \partial Y / \partial t$).

$Y_{,i}$ Derivada espacial de Y ($Y_{,i} = \partial Y / \partial X_i$).

∇ Operador Nabla ($\nabla Y = Y_{,i}$ onde Y é um vetor).

∇^2 Operador de Laplace ($\nabla^2 Y = Y_{,ii}$ onde Y é um escalar).

\mathcal{D} Variável no domínio de Laplace.

Y^* Solução fundamental.

“Os loucos abrem caminhos que mais tarde percorrem os sábios”

Carlo Alberto Pisani Dossi (1849-1910)

Diplomata e escritor italiano.

1

Introdução

1.1. Observações preliminares

Freqüentemente dois ou mais sistemas físicos interagem entre si, tornando impossível a solução independente de qualquer um destes sistemas sem que as soluções dos demais sejam simultaneamente consideradas. Tais sistemas são denominados acoplados, sendo a intensidade do acoplamento função do grau de interação entre os sistemas componentes.

Segundo ZIENKIEWICZ & TAYLOR (2002), formulações e sistemas acoplados são aqueles aplicáveis a variáveis dependentes e domínios múltiplos, os quais usualmente (mas não necessariamente) descrevem diferentes fenômenos físicos e nos quais: (a) nenhum dos domínios pode ser resolvido de forma separada dos demais; (b) nenhum conjunto de variáveis pode ser explicitamente eliminado ao nível de equações diferenciais.

Ainda segundo ZIENKIEWICZ & TAYLOR (2002), os sistemas acoplados podem ser classificados segundo duas categorias:

(i) *Categoria 1*: Nesta categoria enquadram-se problemas nos quais o acoplamento ocorre nas interfaces dos domínios, via condições de contorno impostas em tais regiões. Geralmente os domínios em questão descrevem diferentes situações físicas, sendo, contudo, possível a consideração de acoplamento entre domínios que são fisicamente similares tendo sido os mesmos discretizados por diferentes processos;

(ii) *Categoria 2*: Nesta categoria enquadram-se problemas nos quais os vários domínios se sobrepõem (total ou parcialmente). Neste caso o acoplamento ocorre

através das equações diferenciais governantes descrevendo os diferentes fenômenos físicos envolvidos.

De forma mais extensa à acima apresentada, o artigo tutorial de FELIPPA *et al.* (2001) apresenta uma série de conceitos e definições relativos a análises de sistemas acoplados, bem como discussão relacionada à simulação computacional de tais sistemas.

O presente trabalho aborda sistemas acoplados que se enquadram nas categorias 1 e 2 acima descritas. Exemplos típicos de sistemas que compõem a categoria 1 (acoplamentos de interface) são os que consideram interação fluido-estrutura, solo-estrutura, estrutura-estrutura etc.. Neste escopo, pode-se mencionar as mais variadas aplicações: fluidos, tais como água, ar, ou lubrificantes, interagindo com elementos estruturais, tais como edifícios, barragens, estruturas offshore, componentes mecânicos, vasos de pressão etc.; solo interagindo com fundações de edifícios, vias férreas, maquinários de grande porte etc.; análise de sistemas modelados por diferentes métodos numéricos acoplados (diferenças finitas, elementos finitos, elementos de contorno, etc.) e/ou diferentes níveis de refinamentos.

A categoria 2 (acoplamentos de domínio) previamente descrita pode, por sua vez, ser exemplificada em específico por sistemas considerando interação sólido-poro fluido (modelagem de meios porosos). A teoria poro-elástica, conforme destacado por WANG (2000), é historicamente de grande aplicabilidade em áreas tais como geomecânica (adensamento de solos, resistência de estruturas de contenção e suporte etc.), hidrogeologia (armazenamento em aquíferos confinados, exploração de recursos hidrológicos subterrâneos etc.) e engenharia do petróleo (análise de escavação de poços

de petróleo, estimativas de reservatórios etc.). Outros campos de aplicação, tais como biomecânica (modelagem de estruturas ósseas embebidas em fluidos corpóreos etc.), têm apresentado significativo avanço nos últimos anos.

Na análise de sistemas acoplados é usual que um ou mais dos domínios considerados possuam comportamento não-linear, devendo a não linearidade do fenômeno ser considerada de forma apropriada. Assim sendo, significativa evolução teórico-computacional deve ser considerada quando da modelagem, a fim de se analisar com propriedade o(s) sistema(s) físico(s) não-linear(es) em questão. Vasta lista de referências bibliográficas, correlacionada a análises considerando não linearidades física e geométrica, pode ser atualmente encontrada na literatura especializada; com especial enfoque à modelagem numérica, inclusive. Outra ocorrência usual quando da análise de sistemas acoplados diz respeito ao fato de um ou mais dos subdomínios do modelo caracterizarem-se por possuir uma ou mais das suas dimensões consideradas como sendo “infinitas”. Como exemplo cita-se, em particular, a análise de sistemas com interação solo-estrutura, caracterizando-se o solo como sendo um meio semi-infinito típico.

Para análise estática do modelo supracitado, mesmo a alternativa mais simples que consiste na introdução de um contorno fictício a uma distância suficiente da estrutura, onde a resposta é esperada como sendo sem significância sob um ponto de vista prático, pode em muitos casos fornecer resultados satisfatórios. Tem-se assim um domínio finito para o solo em consideração, o qual pode ser facilmente modelado e análise acoplada realizada. Todavia, considerando-se análise dinâmica, o truncamento da malha através de um contorno fictício torna-se inapropriado (WOLF, 1985). Assim se considera já que o contorno fictício introduzido reflete as ondas originárias da

vibração da estrutura de volta para a região discretizada do solo ao invés de propagá-las ao infinito. Várias técnicas existem atualmente para se considerar contornos não reflexivos (GIVOLI, 1991-1992), sendo, todavia, este um problema de modelagem ainda em aberto. Pesquisas neste campo têm sido de grande interesse para indústria (indústria do petróleo, geofísica, engenharia civil, naval, aeroespacial etc.), uma vez que a modelagem de meios “infinitos” está relacionada a uma grande gama de casos usuais de análise.

O método dos elementos finitos (MEF) tem se destacado nas últimas décadas como sendo uma poderosa ferramenta de análise, sendo versátil e de boa precisão para os mais diversos tipos de modelagem. O método dos elementos de contorno (MEC) também se caracteriza como sendo uma preciosa técnica de modelagem, sendo algumas de suas aplicabilidades destacáveis. Desta forma, o acoplamento MEC-MEF tem grande valor, possibilitando que sistemas complexos sejam modelados tirando-se vantagem da interação destas duas técnicas, sendo as mesmas utilizadas em subdomínios onde modelagem mais apropriada seja proporcionada.

O MEC geralmente fornece melhores resultados, quando comparado ao MEF, em regiões de concentração de tensão ou fluxo. Pode-se, desta forma, definir-se elementos de contorno especiais para regiões com singularidades e combiná-los a elementos finitos. Outra destacável aplicabilidade do MEC diz respeito à análise de meios infinitos. Elementos de contorno (ou variantes do MEC) são freqüentemente aplicados a tal modelagem, uma vez que os mesmos satisfazem as condições de radiação, as quais são de difícil representação por intermédio de elementos finitos. O MEF, por sua vez, é mais apropriado a modelagens não lineares, bem como modelagens considerando meios mais genéricos (meios heterogêneos sujeitos a forças de volume genéricas etc.). Em

algumas categorias de problemas (intimamente associadas a sistemas acoplados), ambas metodologias são isoladamente inapropriadas, sendo natural, por consequência, esforços visando combinar-vantagens / reduzir-limitações, de forma a se criar um procedimento final mais versátil, flexível e genérico de análise.

A análise dinâmica de sistemas não lineares acoplados, considerando modelagem por intermédio de elementos finitos e elementos de contorno, mostra-se desta forma como sendo um estudo de alta relevância e de elevado grau de aplicabilidade, bem como de complexidade.

1.2. Breve revisão bibliográfica

A simulação numérica de sistemas mecânicos com acoplamento de interface teve seu início na década de 70, tendo por foco sistemas de interação do tipo sólido-sólido e fluido-sólido. As primeiras pesquisas relacionadas ao tratamento parcionado de sistemas acoplados foram realizadas considerando-se elementos finitos: BELYTSCHKO & MULLEN (1976, 1978) e BELYTSCHKO *et al.* (1979) estudaram técnicas de parcionamento nó-a-nó; Hughes e co-autores desenvolveram partições implícito-explicito elemento-a-elemento (HUGHES & LIU, 1978; HUGHES *et al.*, 1979; HUGHES & STEPHENSON, 1981). O trabalho de Park, Felippa, Farhat e co-autores também é de relevância na área (PARK & FELIPPA, 1983). Um acoplamento MEC-MEF foi realizado por este grupo de pesquisa (PARK *et al.*, 1977), tendo sido implementado o acoplamento de uma estrutura submersa, modelada por elementos finitos, utilizando-se a técnica de contorno de Geers (GEERS, 1971; GEERS & FELIPPA, 1980) para se modelar o fluido acústico exterior.

Entre as primeiras principais referências considerando acoplamento MEC-MEF podem-se citar os trabalhos de ZIENKIEWICZ *et al.* (1977b, 1979), os quais sugerem um “mariage à la mode” – o melhor de dois mundos. Desde então, um considerável número de pesquisadores tem voltado sua atenção para o tópico. BREBBIA & GEORGIU (1979), LI *et al.* (1986), DE PAULA *et al.* (1987), por exemplo, investigaram problemas estáticos genéricos, enquanto BEER & MEEK (1981), SWOBODA *et al.* (1987), BEER & SWOBODA (1987) analisaram com sucesso problemas estáticos relacionados a escavações, levando em consideração inclusive plasticidade localizada. Logo se percebeu que o acoplamento MEC-MEF seria extremamente vantajoso em análises relacionadas à engenharia de fundações. Desta forma, CHEN & QIAN (1986) adotaram a técnica acoplada para análise estática de tensões em estruturas (modeladas por MEF) em fundações infinitas (modeladas por MEC), enquanto VALLABHAN & SIVAKUMAR (1986) investigaram a resposta de estacas de concreto em solo elástico homogêneo. Uma visão ampla a cerca do acoplamento MEC-MEF considerando-se problemas estáticos, particularmente em aplicações geomecânicas, pode ser encontrada em VALLABHAN (1987).

O procedimento híbrido MEC-MEF também se mostrou promissor quando aplicado a problemas de mecânica da fratura. Significativa pesquisa nesse campo foi realizada, por exemplo, por SCHNACK (1987) e SCHNACK *et al.* (1988), tendo sido resolvidos problemas de fratura usando-se formulação variacional mista. TSAMASPHYROS (1987), por outro lado, investigou corpos fraturados com geometria complexa, utilizando diferentes abordagens de acoplamento, comparando os méritos e limitações relacionados.

Nas últimas décadas, o acoplamento MEC-MEF tem se destacado quando relacionado a problemas dinâmicos. Em particular, análises de sistemas com interação do tipo solo-estrutura e fluido-estrutura têm despertado interesse na comunidade científica. KOBAYASHI & KAWAKAMI (1985), KOBAYASHI & MORI (1986) e MITA & LUCO (1987) investiram esforços na análise de sistemas de interação do tipo solo-estrutura, considerando acoplamento MEC-MEF no domínio da frequência. Estudo relativo a acoplamento elastodinâmico MEC-MEF, no domínio do tempo, foi considerado por KARABALIS & BESKOS (1985), SPYRAKOS & BESKOS (1986), FUKUI (1987), VON ESTORFF & KAUSEL (1989), VON ESTORFF & PRABUCKI (1990), VON ESTORFF (1991), ARAUJO (1994), entre outros, tendo de igual forma, como foco, sistemas com interação do tipo solo-estrutura. Ainda sob o escopo de sistemas com interação solo-estrutura, MOHAMMADI & KARABALIS (1995) e ADAM *et al.* (2000) aplicaram o acoplamento MEC-MEF para análise de vias férreas, estudando-se o efeito do tráfego de trens. Considerando aplicações mais genéricas, os trabalhos de BELYTSCHKO & LU (1991, 1994) e YU *et al.* (2001) estão de igual forma relacionados a análises no domínio do tempo.

Nos últimos anos, acoplamento dinâmico MEC-MEF tem sido aplicado com sucesso em análises não-lineares. Neste sentido, os trabalhos pioneiros de PAVLATOS & BESKOS (1994), ABOUSEEDA & DAKOULAS (1998) e YAZDCHI *et al.* (1999) podem ser citados, estando a metodologia de acoplamento MEC-MEF aplicada à análise de sistemas de interação do tipo solo-barragens. Nos trabalhos supracitados modela-se a estrutura e o solo circundante de forma inelástica e por intermédio de elementos finitos, sendo a região remanescente de solo, suposta linear, modelada por elementos de contorno. Abordagem similar é considerada por ADAM (1997), VON ESTORFF &

FIRUZIAAN (2000) e FIRUZIAAN & VON ESTORFF (2002), tendo-se em consideração aplicações mais amplas.

Com relação a problemas dinâmicos de interação do tipo fluido-estrutura, é usual a adoção de elementos finitos para modelagem da estrutura e de elementos de contorno para modelagem do fluido acústico acoplado. Tendo-se em vista este campo de aplicação, pode-se citar os trabalhos de COYETTE *et al.* (1989), RAJAKUMAR *et al.* (1989), JEANS & MATHEWS (1990), EVERSTINE & HENDERSON (1990), AMINI *et al.* (1992), entre outros, considerando-se análise no domínio da frequência. Em análises no domínio do tempo, os trabalhos de VON ESTORFF & ANTES (1991), VON ESTORFF (1992), KOH *et al.* (1998), LIE *et al.* (2001) e YU *et al.* (2002) podem ser citados como referência. Recentemente, análises não lineares também têm sido implementadas com sucesso considerando-se acoplamento MEC-MEF e problemas de interação do tipo fluido-estrutura. Pesquisa nesta área pode ser encontrada nos trabalhos de CZYGAN & VON ESTORFF (2002) e CZYGAN (2003). É importante ressaltar que, conforme destacado por YU *et al.* (2002) e CZYGAN (2003), problemas de instabilidade são acentuados nestes tipos de análises acopladas. Ampla discussão sobre acoplamentos MEC-MEF pode ser encontrada nos trabalhos de BESKOS (1987, 1997, 2003).

Nos esquemas de acoplamento MEC-MEF acima considerados, um sistema global unificado de equações é gerado. O tratamento de tal sistema unificado é consideravelmente mais oneroso e complicado que o tratamento de forma independente dos sistemas relativos ao MEC e ao MEF. Tendo-se por objetivo superar esta desvantagem quando do acoplamento MEC-MEF, algoritmos iterativos de acoplamento têm sido desenvolvidos. Em algoritmos iterativos, os subdomínios de MEC e MEF são

tratados separadamente, sendo as variáveis na interface de acoplamento iterativamente atualizadas até que haja convergência. A fim de se tratar a renovação das incógnitas na interface, GERSTLE *et al.* (1992), PERERA *et al.* (1993) e KAMIYA & IWASE (1997) utilizaram o método dos gradientes conjugados, complemento de Schur e condensação. KAMIYA *et al.* (1996) empregaram o esquema de renovação Schwarz Neumann-Neumann e Schwarz Dirichlet-Neumann, tendo sido o método de Schwarz Dirichlet-Neumann empregado de forma sequencial por LIN *et al.* (1996) e FENG & OWEN (1996). ELLEITHY & AL-GAHTANI (2000) apresentaram um método iterativo de decomposição de domínio para acoplamento MEC-MEF, sendo mais tarde tal metodologia aplicada à análise elasto-estática (ELLEITHY *et al.*, 2001a), mecânica da fratura (ELLEITHY *et al.*, 2001b) e resolução da equação de Laplace (ELLEITHY & TANAKA, 2002). Esquema alternativo de acoplamento MEC-MEF, considerando tratamento independente dos sistemas de equações de MEC e de MEF e fazendo uso de troca de condições iniciais entre os subdomínios, é apresentado por RIZOS & WANG (2002) considerando-se análises dinâmicas lineares. Recentemente, SOARES JR *et al.* (2004a) e SOARES JR & VON ESTORFF (2004) empregaram acoplamento iterativo MEC-MEF para solução de problemas dinâmicos não-lineares.

Com relação à simulação numérica de problemas relativos a acoplamento de domínio, mais em específico análise de meios porosos, os primeiros trabalhos datam do final da década de 60, início da década de 70, tendo como foco elementos finitos. SANDHU & WILSON (1969), SCHIFFMAN *et al.* (1969), CHRISTIAN & BOEHMER (1970), HWANG *et al.* (1971) e YOKOO *et al.* (1971) aplicaram técnicas de elementos finitos para análise numérica de problemas de adensamento, seguindo a linha de pesquisa introduzida por Biot (BIOT, 1941, 1956a). Compressibilidade do fluido foi introduzida por GHABOUSSI & WILSON (1973). SMALL *et al.* (1976)

introduziram plasticidade à análise, adotando o modelo de Mohr-Coulomb, enquanto RUNESSON (1978) e DESAI & SIRIWARDANE (1979) adotaram o modelo de estado crítico. ZIENKIENWICZ *et al.* (1977a) também consideraram elastoplasticidade e introduziram compressibilidade à fase sólido. RUNESSON (1978) e PREVOST (1981) implementaram modelo numérico baseado na teoria de misturas. Formulação para adensamento considerando deformações finitas foi apresentada no trabalho de CARTER *et al.* (1979). NORRIS (1980) estudou modelos constitutivos introduzindo endurecimento cinemático. Todos os trabalhos supracitados fazem uso de deslocamentos e poro-pressões como variáveis básicas: modelagem com elementos finitos baseada em tensões totais e poro-pressões como variáveis básicas foi introduzida por CIVIDINI & GIODA (1982).

Análise dinâmica de solos saturados foi estudada por ZIENKIEWICZ (1982) tendo sido a extensão para análise com deformações finitas considerada em ZIENKIEWICZ & SHIOMI (1984). Análises dinâmicas saturadas, baseadas na teoria de misturas, foram apresentadas por PREVOST *et al.* (1985), EHLERS & KUBIK (1994) e DIEBELS & EHLERS (1996). Um modelo para análise quantitativa do comportamento isotérmico estático e dinâmico de solo total ou parcialmente saturado foi apresentado por Zienkiewicz e co-autores nos artigos clássicos: ZIENKIEWICZ *et al.* (1990a-b). O modelo em consideração era baseado na teoria estendida de Biot, onde na análise não saturada a pressão do ar foi considerada como em constância com a pressão atmosférica. O modelo em questão foi estendido posteriormente por MEROI *et al.* (1995) de forma a se considerar grandes deformações. Desde então a modelagem numérica tem evoluído de forma considerável, empregando-se elementos finitos em campos mais amplos de aplicação: escoamento multifásico, acoplamento térmico, análise reversa, fratura etc.. As obras de LEWIS & SCHREFLER (1998) e ZIENKIEWICZ *et al.* (1999), entre

muitas outras, são referência para algumas análises mais amplas, além do escopo do presente trabalho.

Com relação à modelagem por elementos de contorno, os primeiros trabalhos desenvolvidos com relação a problemas poroelásticos estavam voltados para análise quase-estática. Neste tema, os trabalhos de CLEARY (1977), BANERJEE & BUTTERFIELD (1981) e CHENG & LIGGETT (1984) podem ser citados como de relevância. Soluções somente por contorno, no domínio do tempo, foram apresentadas por NISHIMURA & KOBAYASHI (1989) e DARGUSH & BANERJEE (1989). Recentemente, soluções por contorno e domínio foram apresentadas por CAVALCANTI & TELLES (2003).

Considerando-se análises poro-elastodinâmicas, PREDELEANU (1984) e MANOLIS & BESKOS (1989) apresentaram formulações integrais de elementos de contorno baseadas em seis equações com seis incógnitas (deslocamentos do esqueleto sólido e deslocamentos relativos médios do fluido). As soluções fundamentais para as equações acima mencionadas foram obtidas por MANOLIS & BESKOS (1989), no domínio transformado de Laplace, e por NORRIS (1985) no domínio transformado da frequência. Tais formulações não se mostraram satisfatórias uma vez que BONNET (1987) e BOUTIN *et al.* (1987) mostraram que somente quatro variáveis (deslocamentos da fase sólido e poro-pressão da fase fluido) são independentes no problema poro-elástico. CHENG *et al.* (1991) e DOMINGUEZ (1992) desenvolveram métodos de elementos de contorno para análise poro-elastodinâmica, no domínio da frequência, em função das variáveis independentes. Em ambos trabalhos, implementação numérica e aplicações estavam limitados a análises bidimensionais e de problemas harmônicos.

As análises poro-dinâmicas até então mencionadas são relativas a domínios transformados. Formulação no domínio do tempo foi desenvolvida por WIEBE & ANTES (1991), mas com a restrição de não se considerar relação de amortecimento entre esqueleto sólido e fluido. Formulação tempo-dependente alternativa e genérica foi proposta por CHEN & DARGUSH (1995), baseando-se em transformação inversa analítica das soluções fundamentais no domínio de Laplace. Todavia, conforme o autor admite, tal formulação é muito onerosa computacionalmente. Baseado no método da quadratura de convolução desenvolvido por LUBICH (1988a-b), SCHANZ (2001a) apresentou solução tempo-dependente com elementos de contorno baseada em soluções fundamentais no domínio de Laplace.

Bibliografia relacionada à simulação computacional de sistemas acoplados é extensa e rica, sendo usual a consideração de diferentes abordagens numéricas. Uma grande gama de trabalhos relacionados à análise de sistemas acoplados em geral, realizada por grupos europeus de pesquisa nas décadas de 80-90, pode ser encontrada nas obras editadas por HINTON et al. (1981), LEWIS (1984), LEWIS (1987), EHLERS & BLUHM (1998) etc., proporcionando uma visão mais ampla à por este trabalho focada.

1.3. Objetivos e conteúdo do presente trabalho

O presente trabalho tem por objetivo o estudo de sistemas acoplados; mais em específico: sistemas com acoplamento de interface considerando-se interação MEC-MEF, e sistemas com acoplamento de domínio (meios porosos) considerando-se análise

por elementos finitos e por elementos de contorno. O estudo realizado tem como foco sistemas com interação do tipo solo-fluido-estrutura.

Uma série de abordagens originais é apresentada ao longo deste trabalho, tanto com relação aos acoplamentos de interface aqui enfocados, quanto com relação aos acoplamentos de domínio. Abordagens clássicas são de igual forma apresentadas, possibilitando ao leitor melhor comparação dos méritos e limitações correlacionados.

Com relação a acoplamentos MEC-MEF em análises dinâmicas, diversos problemas surgem em função destes dois métodos numéricos exigirem usualmente diferentes níveis de refinamento e discretização. A não consideração deste fato implica em procedimentos instáveis ou pouco acurados de solução. Conforme destacado pela literatura especializada, instabilidade relacionada a acoplamentos MEC-MEF é um problema significativo, tendo merecido o mesmo especial atenção da comunidade científica. O presente trabalho tem como um dos seus principais objetivos desenvolver algoritmos de acoplamento não só mais estáveis como também mais acurados, genéricos, flexíveis e eficientes.

Com relação à análise de sistemas com acoplamento de domínio, o presente trabalho foca exclusivamente meios porosos saturados. A modelagem dinâmica, no domínio do tempo, de solos saturados por intermédio de elementos de contorno ainda é um campo de pesquisa em aberto. Soluções fundamentais apropriadas para tal análise são desconhecidas, restando como alternativa procedimentos mistos, i.e., adoção de soluções fundamentais em domínios transformados. Tais procedimentos mistos possuem a limitação de serem computacionalmente onerosos. O presente trabalho apresenta um esquema alternativo para análise poro-dinâmica por intermédio de

elementos de contorno (considerando inclusive modelagem não-linear) sem fazer uso de formulações mistas. Todavia, a metodologia aqui apresentada possui outras limitações, uma vez que integrais de domínio se fazem necessárias.

A análise dinâmica de solos saturados por intermédio de elementos finitos, por outro lado, é bem estabelecida na literatura contemporânea. O presente trabalho apresenta neste caso um algoritmo alternativo de solução, sendo este atrativo a um considerável campo de aplicações, uma vez que o mesmo possui elevada eficiência computacional.

Análises bidimensionais são consideradas no presente texto, sendo trivial a expansão da maioria dos conceitos aqui apresentados para análises tridimensionais. É importante ressaltar que acoplamentos MEC-MEF são ainda mais indicados quando problemas tridimensionais são considerados. Assim o é uma vez que para este tipo de análise a extensão das malhas de elementos finitos (problemas de meios infinitos) é consideravelmente onerosa e, mais ainda, a formulação tridimensional de elementos de contorno é usualmente mais “leve” que a formulação bidimensional, uma vez que o processo de convolução relacionado a problemas 3D é naturalmente simplificado, não sendo o mesmo tão oneroso computacionalmente quanto em problemas 2D.

No segundo capítulo do presente trabalho, sistemas não acoplados são inicialmente considerados. Apresentam-se então as formulações básicas de elementos de contorno e de elementos finitos a serem adotadas para as análises considerando-se acoplamentos de interface. Modelagem acústica e modelagem dinâmica (linear e não-linear) são consideradas. Em ambos os casos, acústico e dinâmico, inicialmente as equações governantes do modelo são sucintamente apresentadas, sendo na seqüência discutida a

simulação numérica dos modelos por intermédio de elementos de contorno e de elementos finitos. Ao fim do capítulo algumas aplicações numéricas são consideradas, tendo por foco as contribuições originais do presente trabalho.

No terceiro capítulo, sistemas com acoplamentos de interface são considerados. Análises de interação do tipo sólido-sólido e fluido-sólido são enfocadas. Diferentes procedimentos de acoplamento MEC-MEF, bem como de acoplamento MEC-MEC, são apresentados e discutidos. Ao final do terceiro capítulo, uma série de exemplos numéricos é abordada, estendendo a discussão relacionada às diferentes metodologias apresentadas ao longo do capítulo.

Sistemas com acoplamento de domínio são considerados no quarto capítulo. Análise dinâmica de solos saturados é considerada, tendo-se em foco a modelagem por elementos finitos e de contorno. Assim como no segundo capítulo, inicialmente as equações governantes relativas à análise poro-dinâmica são sucintamente apresentadas, sendo discussão relacionada à simulação numérica considerada na seqüência. Mais uma vez, ao fim do capítulo, alguns exemplos numéricos são abordados, tendo-se por foco as contribuições originais do trabalho.

No quinto capítulo, por fim, conclusões relativas ao presente trabalho são apresentadas, bem como sugestões para futuras pesquisas correlacionadas.

2

Sistemas não acoplados

2.1. Introdução

O presente capítulo aborda a análise de sistemas não acoplados ou isolados. Aspectos teóricos e computacionais relativos à modelagem acústica e dinâmica (linear e não-linear) são aqui apresentados, tendo-se em consideração o método de elementos de contorno e o método de elementos finitos.

Inicialmente a modelagem acústica é enfocada. As equações básicas que regem o modelo são apresentadas, sendo em seguida a implementação numérica considerada: a solução do modelo por intermédio de elementos de contorno e de elementos finitos é descrita, de forma sucinta.

Na seqüência a análise dinâmica é considerada, tendo-se em vista abordagem linear e não-linear. De forma análoga à modelagem acústica, inicialmente as equações básicas que regem o modelo são destacadas. Para análise dinâmica duas formulações distintas, tanto considerando elementos de contorno, quanto considerando elementos finitos, são no presente capítulo apresentadas.

A primeira formulação de elementos de contorno aqui considerada faz uso de soluções fundamentais dinâmicas; a segunda faz uso de soluções fundamentais estáticas. As vantagens e limitações de ambas formulações são discutidas ao longo do texto. Com relação a elementos finitos, a primeira formulação que aqui se apresenta faz uso dos métodos de Newmark e de Newton-Raphson para tratamento do problema dinâmico não-linear. A segunda formulação, por sua vez, usa funções implícitas de Green associadas ao método de pseudo-forças para solução do problema.

Ao fim do capítulo alguns exemplos numéricos são apresentados. Os exemplos em questão focam as contribuições originais do presente trabalho, ampliando a discussão correlacionada, provinda dos itens precedentes.

Devido à grande extensão dos assuntos abordados neste trabalho, uma ampla gama de tópicos interessantes e pertinentes não é aqui explorada a fundo. Desta forma, procura-se indicar ao leitor referências apropriadas ao longo do presente texto, guiando-o para uma análise mais rica, relacionada aos diferentes temas aqui considerados.

2.2. Modelagem Acústica

No presente subitem, a propagação de ondas de pressão em fluidos será resumidamente abordada. Inicialmente se apresentam as equações básicas que regem o modelo, sendo em seguida a solução do problema por intermédio de elementos de contorno e de elementos finitos destacada.

2.2.1. Equações governantes

A equação de equilíbrio hidrodinâmica que rege o comportamento de um fluido compressível, desconsiderando-se a influência gravitacional, pode ser obtida a partir da equação de Navier-Stokes (BACHELOR, 1967), conforme indicado a seguir:

$$r \nabla \cdot v + p_{,i} = 0 \quad (2.1)$$

Na equação (2.1), a pressão hidrodinâmica é representada por p ; v é a velocidade das partículas do fluido; e r é a densidade do fluido em questão. Notação indicial para

eixos cartesianos é aqui adotada; vírgulas indicam derivada parcial espacial e pontos sobre-escritos indicam derivada parcial temporal.

Usando a equação de equilíbrio (2.1) e a equação de continuidade (2.2),

$$r(v_{i,i} - s) + \dot{p}/c^2 = 0 \quad (2.2)$$

pode-se deduzir facilmente a equação da onda:

$$p_{,ii} - \ddot{p}/c^2 + r \dot{s} = 0 \quad (2.3)$$

que descreve o movimento irrotacional e de pequena amplitude das partículas de fluido. Nas equações (2.2) e (2.3), c é a velocidade de onda acústica e s representa a distribuição espacial e temporal de possíveis densidades de fonte no fluido.

Para se finalizar a definição do problema acústico, além da equação da onda (equação (2.3)), faz-se necessário considerar as condições de contorno e condições iniciais atuantes. As condições de contorno e condições iniciais apropriadas para o problema em questão podem ser resumidas conforme se segue:

(i) Condições de contorno (tempo $t > 0$, ao longo do contorno $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$):

$$p(X,t) = \bar{p}(X,t) \quad \text{para } X \in \Gamma_1 \quad (2.4a)$$

$$q(X,t) = p_{,j}(X,t)n_j(X) = \bar{q}(X,t) \quad \text{para } X \in \Gamma_2 \quad (2.4b)$$

(ii) Condições iniciais (tempo $t = 0$, ao longo do contorno Γ e domínio Ω):

$$p(X,0) = \bar{p}_0(X) \quad (2.5a)$$

$$\dot{p}(X,0) = \dot{\bar{p}}_0(X) \quad (2.5b)$$

onde os valores prescritos estão indicados por barras sobrepostas e q representa o fluxo ao longo do contorno de normal representada pelo vetor n_j .

Para aprofundamento teórico relacionado às equações aqui apresentadas, as seguintes referências são indicadas: MORSE & FESHBACK, 1953; BACHELOR, 1967; MALVERN, 1969.

2.2.2. Solução com elementos de contorno

A equação integral que soluciona o problema descrito pelas equações (2.3-2.5) é dada por (MANSUR, 1983):

$$c(\mathbf{x})p(\mathbf{x},t) = \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} p^*(X,t;\mathbf{x},t)q(X,t)d\Gamma(X)dt + \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} q^*(X,t;\mathbf{x},t)p(X,t)d\Gamma(X)dt + \mathcal{I}(X,t;\mathbf{x},t) \quad (2.6)$$

onde \mathbf{x} representa o ponto fonte e X representa o ponto campo. $c(\mathbf{x})$ é função de parâmetros geométricos e $\mathcal{I}(X,t;\mathbf{x},t)$ representa possíveis integrais de domínio, relativas a condições iniciais e/ou fontes no domínio. As soluções fundamentais p^* e q^* presentes em (2.6) são dadas por:

$$p^*(X,t;\mathbf{x},t) = H[c(t-t) - r](c/2p)/(c^2(t-t)^2 - r^2)^{1/2} \quad (2.7)$$

$$q^*(X,t;\mathbf{x},t) = (\partial r/\partial n)\{H[c(t-t) - r](cr/2p)/(c^2(t-t)^2 - r^2)^{3/2} + (\partial H[c(t-t) - r]/\partial r)(c/2p)/(c^2(t-t)^2 - r^2)^{1/2}\} \quad (2.8)$$

onde $H[c(t-t)-r]$ representa a função Heaviside e $r = r(X;\mathbf{x})$ é a distância entre o ponto fonte e o ponto campo.

Para se resolver a equação integral (2.6) numericamente, faz-se necessária a introdução de aproximações ao longo do contorno e do tempo. Assim sendo, as seguintes aproximações são adotadas:

$$p(X, t) = \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M f_p^m(t) h_p^j(X) p_j^m \quad (2.9a)$$

$$q(X, t) = \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M f_q^m(t) h_q^j(X) q_j^m \quad (2.9b)$$

Nas equações (2.9), h_p^j e h_q^j são funções de interpolação espaciais relacionadas a p e q , respectivamente, correspondendo a um nó X_j do contorno; f_p^m e f_q^m são funções de interpolação temporais relacionadas a p e q , respectivamente, correspondendo a um tempo discreto t_m ; por fim, tem-se a seguinte correspondência relativa às equações (2.9): $p_j^m = p(X_j, t_m)$ e $q_j^m = q(X_j, t_m)$.

Em análises com elementos de contorno é usual a adoção de funções lineares de interpolação para f_p^m e funções constantes (por partes) para f_q^m (formulações alternativas podem ser encontradas, por exemplo, em MANSUR *et al.* (1998); YU *et al.* (1998b) etc.). Com relação às funções de interpolação espaciais h_p^j e h_q^j , é usual a adoção de diferentes níveis de aproximação.

Adotando-se notação matricial e levando-se em consideração as aproximações numéricas acima apresentadas, a equação (2.6) pode ser escrita, para cada nó do contorno e para um passo de tempo genérico n , conforme indica a equação (2.10):

$$\mathbf{C}\mathbf{P}^n = \mathbf{G}^1\mathbf{Q}^n - \mathbf{H}^1\mathbf{P}^n + \sum_{m=1}^{n-1} (\mathbf{G}^{n-m+1}\mathbf{Q}^m - \mathbf{H}^{n-m+1}\mathbf{P}^m) + \mathbf{S}^n \quad (2.10)$$

Na equação (2.10), \mathbf{P}^n e \mathbf{Q}^n são vetores de pressão e fluxo, respectivamente, no passo de tempo n ; \mathbf{S}^n é o vetor relacionado às integrais de domínio em (2.6); \mathbf{C} é a matriz relacionada ao parâmetro geométrico $c(\mathbf{x})$; e \mathbf{H}^n e \mathbf{G}^n são as matrizes de influência calculadas para o tempo n . Para maiores detalhes a cerca da dedução e implementação numérica relacionada à equação (2.10), as seguintes referências bibliográficas são recomendadas: MANSUR (1983); DOMINGUEZ (1993).

Introduzindo-se as condições de contorno (2.4) ao modelo, o sistema de equações (2.10) pode ser re-escrito como segue:

$$\mathbf{A}\mathbf{X}^n = \mathbf{B}\mathbf{Y}^n + \mathbf{L}^n + \mathbf{S}^n \quad (2.11)$$

onde os termos de \mathbf{X}^n representam os valores incógnitos de pressão ou fluxo no tempo discreto t_n , enquanto os termos de \mathbf{Y}^n representam valores correspondentes, prescritos no contorno. \mathbf{L}^n é o vetor relacionado ao processo de convolução presente em (2.10), representando a evolução da solução no tempo, até o passo de tempo atual de análise. O cálculo do vetor \mathbf{L}^n exige um processo de convolução ($m = 1, 2, \dots, n-1$) que deve ser considerado a cada passo de tempo, $n = 1, 2, \dots, N$, onde o tempo final de análise é dado por $t_N = N\Delta t$, sendo Δt o passo de tempo em consideração.

Tabela 2.1 – Cálculo do vetor de truncamento Λ^n usando interpolação multi-linear e interpolação com polinômios de Chebyshev-Lagrange

(a) Interpolação multi-linear

(1) Cálculo dos tempos base para interpolação

(1.1) para $k = 1, \mathbf{K}, k$

$$\left| \text{Calcular: } T_k = t_L + (t_N - t_L) \left(\frac{k-1}{K-1} \right)^{k^o} \right.$$

(2) Cálculo de Λ^n

(2.1) $\bar{\mathbf{P}}_k = \mathbf{0}$ e $\bar{\mathbf{Q}}_k = \mathbf{0}$ ($k = 1, \mathbf{K}, k$)

(2.2) para $m = 1, \mathbf{K}, n - L$

(2.2.1) Calcular: $t = (n - m + 1) \Delta t$

(2.2.2) Obter $k1$ e $k2$: $t \in [T_{k1}, T_{k2=k1+1}]$

(2.2.3) Calcular:

$$T1 = (T_{k2} - t) / (T_{k2} - T_{k1}); T2 = (t - T_{k1}) / (T_{k2} - T_{k1})$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{k1} = \mathbf{P}_{k1} + T1\mathbf{P}^n; \bar{\mathbf{P}}_{k2} = \mathbf{P}_{k2} + T2\mathbf{P}^n$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_{k1} = \mathbf{Q}_{k1} + T1\mathbf{Q}^n; \bar{\mathbf{Q}}_{k2} = \mathbf{Q}_{k2} + T2\mathbf{Q}^n$$

$$(2.3) \Lambda^n = \sum_{k=1}^k (\mathbf{G}_k \bar{\mathbf{Q}}_k - \mathbf{H}_k \bar{\mathbf{P}}_k)$$

(b) Interpolação Chebyshev-Lagrange

(1) Cálculo dos tempos base para interpolação

(1.1) para $k = 1, \mathbf{K}, k$

$$\left| \text{Calcular: } T_k = \frac{1}{2} \left[(t_N - t_L) \cos \left(\frac{2k-1}{2k} p \right) + (t_N + t_L) \right] \right.$$

(2) Cálculo de Λ^n

(2.1) $\Lambda^n = \mathbf{0}$

(2.2) para $k = 1, \mathbf{K}, k$

(2.2.1) $\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{0}; \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$

(2.2.2) para $m = 1, \mathbf{K}, n - L$

(2.2.2.1) Calcular: $t = (n - m + 1) \Delta t$

$$(2.2.2.2) \text{ Calcular: } T = \prod_{i=1; i \neq k}^k (t - T_i) / (T_k - T_i)$$

$$(2.2.2.3) \text{ Calcular: } \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}} + T\mathbf{P}^m; \bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{Q}} + T\mathbf{Q}^m$$

$$(2.2.3) \Lambda^n = \Lambda^n + \mathbf{G}_k \bar{\mathbf{Q}} - \mathbf{H}_k \bar{\mathbf{P}}$$

Conforme apresentado por SOARES JR & MANSUR (2004a), um eficiente truncamento do processo de convolução pode ser considerado, efetuando-se as operações matriciais associadas ao cálculo de \mathbf{L}^n tão somente em um intervalo de tempo limitado $n - L + 1 \leq m < n$ (tempo recente), sendo as operações relacionadas à contribuição de tempos distantes ($m < n - L$) aproximadas. A aproximação em questão consiste em se calcular as matrizes \mathbf{H}^{n-m+1} e \mathbf{G}^{n-m+1} como interpolação de algumas poucas matrizes \mathbf{H}_k e \mathbf{G}_k ($k = 1, 2, \dots, k$) calculadas em passos de tempo apropriados T_k ($t_L \leq T_k \leq t_N$). O cálculo de t_L , que é o tempo limite após o qual as aproximações são consideradas, pode ser estimado por $t_L = \Delta t N^{(1-\Phi k)} + (r_{med} / c)$, onde r_{med} representa a distância média entre os nós do contorno no modelo e Φ é um parâmetro de controle, relacionado ao nível de aproximação que se deseja associar à metodologia.

Considerando-se a discussão acima, o cálculo do vetor \mathbf{L}^n pode ser expresso por:

$$\mathbf{L}^n = \sum_{m=n-L+1}^{n-1} [\mathbf{G}^{n-m+1} \mathbf{Q}^m - \mathbf{H}^{n-m+1} \mathbf{P}^m] + \mathbf{\Lambda}^n \quad (2.12a)$$

$$\mathbf{\Lambda}^n = \sum_{k=1}^k \left[\mathbf{G}_k \sum_{m=1}^{n-L} I^{(n,m,k)} \mathbf{Q}^m - \mathbf{H}_k \sum_{m=1}^{n-L} I^{(n,m,k)} \mathbf{P}^m \right] \quad (2.12b)$$

onde $I^{(n,m,k)}$ é o parâmetro de interpolação que descreve as matrizes \mathbf{H}^{n-m+1} e \mathbf{G}^{n-m+1} como função de k matrizes \mathbf{H}_k e \mathbf{G}_k , respectivamente. Em (2.12), $\mathbf{\Lambda}^n$ é o vetor que representa o truncamento do processo de convolução.

Vários procedimentos de interpolação $I^{(n,m,k)}$ podem ser adotados. No presente trabalho dois tipos de interpolação são considerados: (i) interpolação multi-linear (interpolação linear entre os k tempos discretos T_k); (ii) interpolação com polinômios de

Chebyshev-Lagrange. O cálculo do vetor Λ^n por intermédio destes dois procedimentos de interpolação é mostrado na Tabela 2.1. Como se observa na Tabela 2.1, os valores de T_k que são base para o procedimento multi-linear de interpolação, não necessariamente são igualmente espaçados. O esquema de espaçamento escalonado é aqui adotado, uma vez que melhores aproximações são obtidas caso se tenha mais pontos de interpolação na vizinhança de t_L . Os tempos discretos T_k tornam-se igualmente espaçados, caso se adote a variável Θ (Tabela 2.1) como sendo nula (a variável Θ é responsável pelo controle do espaçamento entre os tempos T_k , no método de interpolação multi-linear). Para maiores detalhes sobre o truncamento do processo de convolução em questão, a referência SOARES JR & MANSUR (2004a) é indicada ao leitor. Demais informações sobre truncamento podem ser encontradas em DEMIREL & WANG (1987) e MANSUR & DE LIMA SILVA (1992).

Por intermédio de (2.11) o modelo acústico pode ser solucionado a cada passo n de tempo usando-se o método dos elementos de contorno.

Caso o leitor possua interesse em um estudo mais aprofundado sobre a formulação de elementos de contorno aqui apresentada, o trabalho de MANSUR & CARRER (1993) é indicado para análise detalhada relacionada aos “kernels” do problema transiente. Para maiores detalhes sobre implementação computacional, o trabalho de GALLEGO & DOMINGUEZ (1994a) é sugerido como referência. Informações relativas ao cálculo de derivadas temporais e espaciais das variáveis do modelo podem ser encontradas em CARRER & MANSUR (1994) e SOARES JR *et al.* (2002). O tratamento de condições iniciais é detalhado em CARRER & MANSUR (1996). Para o estudo de algumas formulações no domínio do tempo, alternativas à apresentada no presente subitem, as seguintes referências podem ser indicadas, entre outras: YU *et al.*

(1998a e 2000); FRANGI (2000); CARRER & MANSUR (2002) etc. Abrangendo variados aspectos correlacionados, indica-se ainda VON ESTORFF (2000).

2.2.3. Solução com elementos finitos

A equação (2.3) pode ser reescrita, de forma a se adotar uma notação mais genérica e apropriada para análise com elementos finitos. Reescrevendo-se a equação da onda e introduzindo amortecimento na análise, tem-se (MANSUR *et al.*, 2004):

$$r \mathbf{u} + V \mathbf{u} - K \nabla^2 p - S = 0 \quad (2.13)$$

onde ∇^2 é o operador de Laplace; K é o coeficiente de compressibilidade; V é o coeficiente de amortecimento viscoso; e S representa o termo fonte atuante no domínio.

A velocidade de onda pode ser obtida por $c = (K/r)^{1/2}$.

Escrevendo-se a equação (2.13) utilizando-se o método dos resíduos ponderados, formulação fraca, a seguinte equação base para análise com elementos finitos é obtida (ZIENKIEWICZ & TAYLOR, 2002):

$$\int_{\Omega} K(\nabla w \cdot \nabla p) d\Omega + \int_{\Omega} V(w \mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Omega} r(w \mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} (w S) d\Omega + \int_{\Gamma_2} (w \bar{q}) d\Gamma_2 \quad (2.14)$$

onde w representa as funções de peso sendo utilizadas, iguais às funções de interpolação, uma vez que se adota a formulação de Galerkin. As funções de interpolação, por sua vez, são usadas para aproximar as variáveis de campo existentes ao longo dos elementos finitos. Desta forma, pode-se escrever:

$$p(X,t) = \sum_{j=1}^J h_p^j(X) p_j(t) \quad (2.15)$$

onde J são os números de nós do elemento finito em questão e h_p^j mais uma vez representa função de interpolação espacial.

Utilizando aproximações numéricas do tipo (2.15), a equação (2.14) pode ser trabalhada e re-escrita de forma matricial conforme se segue:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{P}}^n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{P}}^n + \mathbf{K}\mathbf{P}^n = \mathbf{F}^n \quad (2.16)$$

onde \mathbf{P}^n é o vetor de pressão no tempo t_n ; \mathbf{F}^n é o vetor de forças nodais atuantes; e \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente. As expressões para as matrizes de massa, amortecimento e rigidez são dadas por:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T r \mathbf{N} d\Omega \quad (2.17)$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T V \mathbf{N} d\Omega \quad (2.18)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (2.19)$$

onde \mathbf{N} é a matriz de interpolação; \mathbf{B} é a matriz de deformação; e \mathbf{D} é a matriz constitutiva. Para maiores detalhes sobre a dedução da equação (2.16), bem como sobre as matrizes acima apresentadas, o leitor é direcionado às seguintes referências, entre outras: BATHE (1996); HUGHES (2000); ZIENKIEWICZ & TAYLOR (2002).

Para se tratar a integração no tempo em (2.16), algum esquema baseado em diferenças finitas pode ser adotado. O presente trabalho faz uso do método de Newmark

para tal finalidade (NEWMARK, 1959). Levando-se em consideração o método de Newmark, as seguintes aproximações podem ser adotadas:

$$\mathbf{P}^n = (1/(b\Delta t^2))(\mathbf{P}^n - \mathbf{P}^{n-1}) - (1/(b\Delta t))\mathbf{P}^{n-1} - (1/(2b) - 1)\mathbf{P}^{n-1} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^{n-1} + \Delta t(1-g)\mathbf{P}^{n-1} + (g\Delta t)\mathbf{P}^n \quad (2.21)$$

onde g e b são parâmetros do método e Δt é o passo de tempo em consideração.

Utilizando as expressões (2.20) e (2.21), o sistema final (2.22) a seguir pode ser obtido, partindo-se de (2.16):

$$\mathbf{A} \mathbf{P}^n = \mathbf{B}^n \quad (2.22)$$

onde \mathbf{A} e \mathbf{B}^n representam a matriz e o vetor efetivos do sistema, respectivamente:

$$\mathbf{A} = \mathbf{K} + (1/(b\Delta t^2))\mathbf{M} + (g/(b\Delta t))\mathbf{C} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{B}^n = \mathbf{F}^n + \mathbf{M} \left\{ (1/(b\Delta t^2))\mathbf{P}^{n-1} + (1/(b\Delta t))\mathbf{P}^{n-1} + (1/(2b) - 1)\mathbf{P}^{n-1} \right\} + \mathbf{C} \left\{ (g/(b\Delta t))\mathbf{P}^{n-1} + (g/b - 1)\mathbf{P}^{n-1} + ((g\Delta t)/(2b) - \Delta t)\mathbf{P}^{n-1} \right\} \quad (2.24)$$

Por intermédio de (2.22) o modelo acústico pode ser solucionado a cada passo n de tempo usando-se o método dos elementos finitos.

Algoritmos de integração no tempo, baseados em esquemas de diferenças finitas alternativos às expressões (2.20)-(2.21), podem ser encontrados em HOUBOLT (1950); WILSON *et al.* (1973), HILBER *et al.* (1977) etc. Alguns pesquisadores investiram esforços na adoção de elementos finitos para integração no tempo (ARGYRIS & SCHARF, 1969; FRIED, 1969 etc.), mas tal tipo de formulação tem sido pouco

aplicado em função do seu elevado custo computacional. Formulações baseadas em elementos finitos do tipo Galerkin descontínuo têm se mostrado como alternativas interessantes ao uso de esquemas de diferenças finitas para integração no tempo (HUGHES & HULBERT, 1988; LI & WIBERG, 1996; CHIEN *et al.*, 2003 etc.). Caso o leitor se interesse por um estudo mais amplo relacionado ao tema, o trabalho de KANE *et al.* (2000) é indicado, abordando aspectos relativos à conservação de energia. É importante ressaltar que os trabalhos supracitados não necessariamente têm a modelagem acústica como foco da atenção, sendo, contudo, os temas abordados de importância nesta aplicação.

2.3. Modelagem dinâmica

O presente subitem aborda análise dinâmica (linear e não-linear). Assim como fora anteriormente realizado, quando da consideração de modelagem acústica, inicialmente se apresentam as equações básicas que regem o modelo. Em seguida, a solução do problema por intermédio de elementos de contorno e de elementos finitos é destacada.

Diferentes abordagens são consideradas, tanto para a análise com elementos de contorno (metodologias baseadas em uso de soluções fundamentais dinâmicas e estáticas) quanto para a análise com elementos finitos (método de Newmark / Newton-Raphson e método implícito de Green / pseudo-forças).

2.3.1. Equações governantes

A equação de equilíbrio de momento, tendo-se em consideração um volume unitário de um corpo contínuo, é dada por:

$$s_{ij,j} - r \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t} + r b_i = 0 \quad (2.25)$$

onde s_{ij} representa as tensões de Cauchy, usando-se a usual notação indicial para eixos cartesianos; u_i representa deslocamentos; b_i está associado a forças de domínio e r é a densidade de massa.

A equação constitutiva pode ser expressa, de forma incremental, por:

$$ds_{ij} = D_{ijkl} (de_{kl} - de_{kl}^0) + s_{ik} dw_{kj} + s_{jk} dw_{ki} \quad (2.26)$$

onde os dois últimos termos dizem respeito às variações de tensão rotacional de Zaremba-Jaumann (geralmente desprezíveis em casos de pequenas deformações). Em (2.26), D_{ijkl} é a matriz tangencial, definida por intermédio de variáveis de estado apropriadas e da direção do incremento; e_{ij}^0 é referente a possíveis deformações causadas por ações externas, tais como variações de temperatura, creep etc.; e os componentes incrementais de deformação (de_{ij}) e rotação (dw_{ij}) são definidos a partir dos deslocamentos, conforme se indica a seguir:

$$\begin{aligned} de_{ij} &= (1/2)(du_{i,j} + du_{j,i}) \\ dw_{ij} &= (1/2)(du_{j,i} - du_{i,j}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Considerando-se comportamento linear para o modelo, a equação (2.28) é obtida, relacionando o estado de tensão e deformação atuantes. A equação (2.28), conhecida como lei de Hooke, é uma simplificação da equação constitutiva (2.26).

$$s_{ij} = l d_{ij} e_{kk} + 2m e_{ij} \quad (2.28)$$

Em (2.28), d_{ij} representa o delta de Kronecker ($d_{ij} = 1$, para $i=j$ e $d_{ij} = 0$, para $i \neq j$). l e m são as constantes de Lamé, definidas em termos de módulo de Young E e do coeficiente de Poisson ν conforme se indica a seguir:

$$\begin{aligned} m &= E / [2(1 + \nu)] \\ l &= E\nu / [(1 + \nu)(1 - 2\nu)] \end{aligned} \quad (2.29)$$

A equação de movimento de Navier pode ser obtida a partir das equações de equilíbrio (2.25), relações cinemáticas (2.27) e lei de Hooke (2.28), resultando em:

$$(c_d^2 - c_s^2)u_{j,ji} + c_s^2 u_{i,jj} - \rho \ddot{u}_i + b_i = 0 \quad (2.30)$$

onde c_d é a velocidade de onda de dilatação e c_s é a velocidade de onda cisalhante:

$$\begin{aligned} c_d^2 &= (l + 2m) / \rho \\ c_s^2 &= m / \rho \end{aligned} \quad (2.31)$$

Para se finalizar a definição do problema dinâmico faz-se necessário considerar as condições de contorno e condições iniciais atuantes. Tais condições podem ser resumidas conforme se segue:

(i) Condições de contorno (tempo $t > 0$, ao longo do contorno $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$):

$$u_i(X, t) = \bar{u}_i(X, t) \quad \text{para } X \in \Gamma_1 \quad (2.32a)$$

$$t_i(X, t) = s_{ij}(X, t) n_j(X) = \bar{t}_i(X, t) \quad \text{para } X \in \Gamma_2 \quad (2.32b)$$

(ii) Condições iniciais (tempo $t = 0$, ao longo do contorno Γ e domínio Ω):

$$u_i(X, 0) = \bar{u}_{i0}(X) \quad (2.33a)$$

$$u_j(X,0) = \bar{u}_{j0}(X) \quad (2.33b)$$

onde os valores prescritos estão indicados por barras sobrepostas e t_i representa forças de superfície ao longo do contorno de normal representada pelo vetor n_j .

Para maiores detalhes relativos à teoria da elasticidade, as seguintes referências são indicadas: NOVOZHILOV (1961); DYM & SHAMES (1985); MARSDEN & HUGHES (1994). Aprofundamento teórico com relação à propagação de ondas em meios elásticos pode ser alcançado por intermédio das obras de ACHENBACH (1973) e ERIGEN & SUHUBI (1975), entre outras. Para uma abordagem mais ampla a cerca das relações cinemáticas e leis constitutivas aqui consideradas (com especial enfoque à teoria da plasticidade), recomenda-se os trabalhos de MALVERN (1969); MENDELSON (1983); CHEN & HAN (1988) e KHAN & HUANG (1995).

2.3.2. Solução com elementos de contorno

Aborda-se neste subitem duas metodologias de solução para o problema dinâmico usando-se elementos de contorno.

A primeira metodologia aqui tratada faz uso de soluções fundamentais dinâmicas (MANSUR, 1983). Esta formulação permite que o problema transiente seja considerado de forma natural, uma vez que as funções de Green empregadas são tempo-dependente e atendem a princípios dinâmicos básicos, tais como o princípio da causalidade. Desta forma, a solução do modelo pode ser realizada tão somente por integrais de contorno (forças de domínio e condições iniciais não sendo consideradas), tornando o método em

questão uma poderosa ferramenta, em especial quando da consideração de meios infinitos.

Todavia, a formulação de elementos de contorno baseada no uso de soluções fundamentais dinâmicas é consideravelmente elaborada e pode se tornar dispendiosa para alguns tipos de aplicação. A análise de alguns problemas não-lineares, por exemplo, torna-se proibitiva com este tipo de formulação, em virtude do elevado grau de complexidade associado ao apropriado tratamento das equações integrais relacionadas e do elevado custo computacional de tal procedimento (TELLES *et al.*, 1999).

A fim de se superar esta limitação, a utilização de formulações dinâmicas de elementos de contorno baseadas em soluções fundamentais estáticas surge como alternativa (TELLES & CARRER, 1994). Sendo a complexidade matemática relacionada ao tratamento das soluções fundamentais estáticas inferior à das soluções fundamentais dinâmicas, alguns problemas podem ser consideravelmente simplificados utilizando-se este tipo de formulação.

Uma vez que as soluções fundamentais estáticas não são tempo-dependente, a inércia relativa ao modelo dinâmico precisa ser introduzida “artificialmente” na formulação, fazendo-se uso de integrais de domínio para tal: introduz-se uma matriz de inércia (ou massa) à análise (NARDINI & BREBBIA, 1985). Para o tratamento destas integrais de domínio duas abordagens básicas podem ser adotadas: método da dupla reciprocidade ou uso de células de integração.

No caso do método da dupla reciprocidade (NARDINI & BREBBIA, 1982), as integrais de domínio relativas ao termo de inércia são substituídas por integrais de

contorno, adotando-se, para tal, transformações apropriadas e interpolação das variáveis de domínio. No presente trabalho, adotam-se células de integração para o tratamento dos termos de inércia (CARRER & TELLES, 1992). Esta abordagem se mostra mais apropriada aos objetivos do presente trabalho. Células de integração também são adotadas para o tratamento dos termos inelásticos existentes na formulação. No terceiro capítulo acoplam-se as formulações dinâmicas e estáticas aqui apresentadas, podendo-se então limitar a utilização de células de integração tão somente à zona plástica do modelo.

2.3.2.1. Análise baseada em soluções fundamentais dinâmicas

A equação integral que soluciona o problema descrito pelas equações (2.30-2.33) é dada por (MANSUR, 1983):

$$c_{ik}(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}, t) = \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} u_{ik}^*(X, t; \mathbf{x}, t) t_k(X, t) d\Gamma(X) dt + \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} t_{ik}^*(X, t; \mathbf{x}, t) u_k(X, t) d\Gamma(X) dt + \int s(X, t; \mathbf{x}, t) \quad (2.34)$$

onde $\int s(X, t; \mathbf{x}, t)$ representa possíveis integrais de domínio, relativas a condições iniciais e/ou forças no domínio. As soluções fundamentais u_{ik}^* e t_{ik}^* presentes em (2.34) e obtidas a partir de um impulso unitário aplicado no ponto fonte \mathbf{x} , na direção i e quando $t = t$, são dadas por:

$$2pr c_s u_{ik}^*(X, t; \mathbf{x}, t) = \left(E_{ik} L_s + F_{ik} L_s^{-1} + J_{ik} L_s N_s \right) H_s + - (c_s / c_d) \left(F_{ik} L_d^{-1} + J_{ik} L_d N_d \right) H_d \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned}
2prc_s t_{ik}^*(X, t; \mathbf{x}, \mathbf{t}) = & A_{ik} \left(rL_s^3 H_s + L_s [\partial H_s / \partial (c_s \tau)] \right) + \\
& + B_{ik} \left(N_s L_s H_s - N_d L_d H_d (c_s / c_d) \right) + \\
& + D_{ik} \left(r^3 L_s^3 H_s + N_s L_s [\partial H_s / \partial (c_s \tau)] \right) / r^2 + \\
& - D_{ik} \left(r^3 L_d^3 H_d + N_d L_d [\partial H_d / \partial (c_d \tau)] \right) (c_s / c_d) / r^2
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Nas equações (2.35) e (2.36) as seguintes abreviações são adotadas (os subscritos s e d referem-se a onda de cisalhamento e de dilatação, respectivamente. As equações relativas a H_d , L_d e N_d podem ser facilmente obtidas, bastando substituir c_s por c_d em (2.37)):

$$\begin{aligned}
H_s &= H[c_s(t_n - t) - r] \\
L_s &= (c_s^2(t_n - t)^2 - r^2)^{-1/2} \\
N_s &= 2c_s^2(t_n - t)^2 - r^2
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Os tensores A_{ik} , B_{ik} e D_{ik} na equação (2.36) e E_{ik} , F_{ik} e J_{ik} na equação (2.35) são definidos por:

$$A_{ik} = m(2y r_{,i} n_k + d_{ik} (\partial r / \partial n) + r_{,k} n_i) \tag{2.38}$$

$$B_{ik} = -2m(d_{ik} (\partial r / \partial n) + r_{,i} n_k + r_{,k} n_i - 4(\partial r / \partial n) r_{,i} r_{,k}) / r^3 \tag{2.39}$$

$$D_{ik} = -2m(y r_{,i} n_k + (\partial r / \partial n) r_{,k} r_{,i}) \tag{2.40}$$

$$E_{ik} = d_{ik} \tag{2.41}$$

$$F_{ik} = d_{ik} / r^2 \tag{2.42}$$

$$J_{ik} = -(r_{,i} r_{,k}) / r^2 \tag{2.43}$$

onde $r = r(X; \mathbf{x})$ é a distância entre o ponto fonte e o ponto campo e as funções ψ e $r_{,i}$ são dadas por: $y = (c_d^2 - 2c_s^2) / (2c_s^2)$ e $r_{,i} = r_i / r$, respectivamente.

Conforme fora realizado no subitem 2.2.2., a fim de se implementar um esquema numérico tempo dependente para a análise bi-dimensional com elementos de contorno, torna-se necessária a consideração de pontos discretos X_j , $j=1, 2, \dots, J$, ao longo do contorno Γ , e discretização temporal t_n , $n=1, 2, \dots, N$. As componentes de deslocamento $u_k(X, t)$ e forças de superfície $t_k(X, t)$ podem ser então aproximadas conforme se segue:

$$u_k(X, t) = \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M f_u^m(t) h_u^j(X) u_{kj}^m \quad (2.44a)$$

$$t_k(X, t) = \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M f_t^m(t) h_t^j(X) t_{kj}^m \quad (2.44b)$$

onde h_u^j e h_t^j são funções de interpolação espaciais relacionadas a u_k e t_k , respectivamente, correspondendo a um nó X_j do contorno; f_u^m e f_t^m são funções de interpolação temporais relacionadas a u_k e t_k , respectivamente, correspondendo a um tempo discreto t_m ; por fim, tem-se a seguinte correspondência relativa às equações (2.44): $u_{kj}^m = u_k(X_j, t_m)$ e $t_{kj}^m = t_k(X_j, t_m)$.

Adotando-se notação matricial e levando-se em consideração as aproximações numéricas acima apresentadas, a equação (2.34) pode ser escrita para cada nó do contorno e para um passo de tempo genérico n , conforme indica a equação (2.45):

$$\mathbf{C}\mathbf{U}^n = \mathbf{G}^1 \mathbf{T}^n - \mathbf{H}^1 \mathbf{U}^n + \sum_{m=1}^{n-1} (\mathbf{G}^{n-m+1} \mathbf{T}^m - \mathbf{H}^{n-m+1} \mathbf{U}^m) + \mathbf{S}^n \quad (2.45)$$

Na equação (2.45), \mathbf{U}^n e \mathbf{T}^n são vetores de deslocamento e de força de superfície, respectivamente, no passo de tempo n ; \mathbf{S}^n é o vetor relacionado às integrais de domínio em (2.34); \mathbf{C} é a matriz relacionada ao parâmetro geométrico $c_{ik}(\mathbf{x})$; e \mathbf{H}^n e \mathbf{G}^n são as matrizes de influência calculadas para o tempo n . Para maiores detalhes a cerca da dedução e implementação numérica relacionada à equação (2.45), as seguintes referências bibliográficas são recomendadas, entre outras: MANSUR (1983) e DOMINGUEZ (1993).

Introduzindo-se as condições de contorno (2.32) ao modelo, o sistema de equações (2.45) pode ser re-escrito como segue:

$$\mathbf{A} \mathbf{X}^n = \mathbf{B} \mathbf{Y}^n + \mathbf{L}^n + \mathbf{S}^n \quad (2.46)$$

onde os termos de \mathbf{X}^n representam os valores incógnitos de deslocamento ou força de superfície no tempo discreto t_n , enquanto os termos de \mathbf{Y}^n representam valores correspondentes, prescritos no contorno. \mathbf{L}^n é o vetor relacionado ao processo de convolução presente em (2.45), representando a evolução da solução no tempo, até o passo de tempo atual de análise. O cálculo do vetor \mathbf{L}^n pode ser realizado de forma mais eficiente adotando-se truncamento do processo de convolução, conforme brevemente discutido no subitem 2.2.2 e mais detalhadamente apresentado em SOARES JR & MANSUR (2004a).

Por intermédio de (2.46) o modelo elastodinâmico pode ser solucionado a cada passo n de tempo. Para tratamento de problemas dinâmicos elastoplásticos, com elementos de contorno, a formulação apresentada no subitem 2.3.2.2., que se segue, é aqui adotada.

Caso o leitor se interesse por mais detalhes a cerca da implementação numérica relacionada à metodologia apresentada neste subitem, o trabalho de GALLEGO & DOMINGUEZ (1994b) é indicado. Para o cálculo de grandezas derivadas, tais como tensões e velocidades, o leitor é direcionado às obras de CARRER & MANSUR (1999) e SOARES JR *et al.* (2002). Problemas de instabilidade são discutidos em SIEBRITS & PEIRCE (1995 e 1997).

2.3.2.2. Análise baseada em soluções fundamentais estáticas

As equações integrais que solucionam o problema dinâmico (deslocamentos e tensões), considerando soluções fundamentais estáticas e tensões iniciais, são dadas por (TELLES & CARRER, 1994):

$$\begin{aligned}
 c_{ik}(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}, t) = & \int_{\Gamma} u_{ik}^*(X; \mathbf{x}) t_k(X, t) d\Gamma(X) + \\
 & - \int_{\Gamma} t_{ik}^*(X; \mathbf{x}) u_k(X, t) d\Gamma(X) + \\
 & - \int_{\Omega} u_{ik}^*(X; \mathbf{x}) r \{ \mathbf{f}_k(X, t) - b_k(X, t) \} d\Omega(X) + \\
 & + \int_{\Omega} \mathbf{e}_{ikj}^*(X; \mathbf{x}) \mathbf{s}_{kj}^P(X, t) d\Omega(X)
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}_{ik}(\mathbf{x}, t) = & \int_{\Gamma} u_{ikj}^*(X; \mathbf{x}) t_j(X, t) d\Gamma(X) + \\
 & - \int_{\Gamma} t_{ikj}^*(X; \mathbf{x}) u_j(X, t) d\Gamma(X) + \\
 & - \int_{\Omega} u_{ikj}^*(X; \mathbf{x}) r \{ \mathbf{f}_j(X, t) - b_j(X, t) \} d\Omega(X) + \\
 & + \int_{\Omega} \mathbf{e}_{ikjl}^*(X; \mathbf{x}) \mathbf{s}_{jl}^P(X, t) d\Omega(X) + g_{ik}(\mathbf{s}_{jl}^P(X, t))
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

onde s_{jl}^P representa os componentes da tensão ‘inicial’ (plástica). As soluções fundamentais u_{ik}^*, t_{ik}^* e e_{ikj}^* presentes em (2.47) e u_{ikj}^*, t_{ikj}^* e e_{ikjl}^* presentes em (2.48) são dadas por:

$$u_{ik}^*(X; \mathbf{x}) = \frac{-1}{8p(1-u)m} [(3-4u)\ln(r)d_{ik} - r_{,i}r_{,k}] \quad (2.49)$$

$$t_{ik}^*(X; \mathbf{x}) = \frac{-1/r}{4p(1-u)} \{ [(1-2u)d_{ik} + 2r_{,i}r_{,k}]r_n - (1-2u)(r_{,i}n_k - r_{,k}n_i) \} \quad (2.50)$$

$$e_{ikj}^*(X; \mathbf{x}) = \frac{-1/r}{8p(1-u)m} [(1-2u)(r_{,j}d_{ik} - r_{,k}d_{ij}) - r_{,i}d_{kj} + 2r_{,i}r_{,k}r_{,j}] \quad (2.51)$$

$$u_{ikj}^*(X; \mathbf{x}) = \frac{1/r}{4p(1-2u)} [(1-2u)(r_{,k}d_{ij} + r_{,i}d_{kj} - r_{,j}d_{ik}) + 2r_{,i}r_{,k}r_{,j}] \quad (2.52)$$

$$t_{ikj}^*(X; \mathbf{x}) = \left\{ \frac{m}{2p(1-u)r^2} \right\} \left\{ 2r_n [(1-2u)r_{,j}d_{ik} + u(r_{,k}d_{ij} + r_{,i}d_{kj}) + 4r_{,i}r_{,k}r_{,j}] + \right. \\ \left. + 2u(r_{,k}r_{,j}n_i + r_{,i}r_{,j}n_k) - (1-4u)n_jd_{ik} + \right. \\ \left. + (1-2u)(2r_{,i}r_{,k}n_j + n_kd_{ij} + n_id_{kj}) \right\} \quad (2.53)$$

$$e_{ikjl}^*(X; \mathbf{x}) = \left\{ \frac{m}{4p(1-u)r^2} \right\} \left\{ (1-2u)(d_{ij}d_{ik} + d_{kj}d_{li} - d_{ik}d_{jl} + 2r_{,l}r_{,j}d_{lk}) + \right. \\ \left. + 2u(r_{,k}r_{,j}d_{li} + r_{,l}r_{,i}d_{kj} + r_{,l}r_{,k}d_{ij} + r_{,l}r_{,j}d_{kl}) + \right. \\ \left. + 2r_{,i}r_{,k}d_{jl} - 8r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,l} \right\} \quad (2.54)$$

onde $r_n = \partial r / \partial n$. O termo livre $g_{ik}(s_{jl}^P)$ em (2.48) é dado por (TELLES, 1983):

$$g_{ik} = -\left\{ 2s_{ik}^P + (1-4u)s_{jj}^P d_{ik} \right\} / \left\{ 8(1-u) \right\} \quad (2.55)$$

Para se resolver as equações (2.47) e (2.48), o contorno e o domínio do modelo são discretizados, empregando-se elementos de contorno e células de integração, respectivamente. Desta forma aproximações do tipo (2.56) são adotadas:

$$u_k(X, t) = \sum_{j=1}^J h_u^j(X) u_{kj}(t) \quad (2.56)$$

onde j representa a variação das funções de interpolação pelos nós dos elementos de contorno, no caso de resolução de integrais de contorno, ou pelos nós das células de integração, no caso de resolução de integrais de domínio.

Substituindo aproximações numéricas do tipo (2.56) em (2.47) e (2.48), os seguintes sistemas matriciais podem ser obtidos (sub-índice c representa contorno; sub-índice d representa domínio):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_c \mathbf{U}^n \\ {}_d \mathbf{U}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_{cc} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ {}_{dc} \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_c \mathbf{T}^n \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}_{cc} \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ {}_{dc} \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_c \mathbf{U}^n \\ {}_d \mathbf{U}^n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}_{cc} \mathbf{M} & {}_{cd} \mathbf{M} \\ {}_{dc} \mathbf{M} & {}_{dd} \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_c \mathbf{U}^n \\ {}_d \mathbf{U}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}_{cc} \mathbf{W} & {}_{cd} \mathbf{W} \\ {}_{dc} \mathbf{W} & {}_{dd} \mathbf{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_c \mathbf{O}_p^n \\ {}_d \mathbf{O}_p^n \end{bmatrix} + \mathbf{S}^n \quad (2.57)$$

$$\begin{bmatrix} {}_c \mathbf{O}^n \\ {}_d \mathbf{O}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_{cc} \mathbf{G}' & \mathbf{0} \\ {}_{dc} \mathbf{G}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_c \mathbf{T}^n \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}_{cc} \mathbf{H}' & \mathbf{0} \\ {}_{dc} \mathbf{H}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_c \mathbf{U}^n \\ {}_d \mathbf{U}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ {}_{dc} \mathbf{M}' & {}_{dd} \mathbf{M}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_c \mathbf{U}^n \\ {}_d \mathbf{U}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}_{cc} \mathbf{W}' & \mathbf{0} \\ {}_{dc} \mathbf{W}' & ({}_{dd} \mathbf{W}' + {}_{dd} \mathbf{W}') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_c \mathbf{O}_p^n \\ {}_d \mathbf{O}_p^n \end{bmatrix} + \mathbf{S}'^n \quad (2.58)$$

Escrevendo as equações (2.57) e (2.58) de forma mais concisa, obtém-se:

$$\mathbf{C} \mathbf{U}^n = \mathbf{G} \mathbf{T}^n - \mathbf{H} \mathbf{U}^n - \mathbf{M} \mathbf{U}^n + \mathbf{W} \mathbf{O}_p^n + \mathbf{S}^n \quad (2.59)$$

$$\mathbf{O}^n = \mathbf{G}' \mathbf{T}^n - \mathbf{H}' \mathbf{U}^n - \mathbf{M}' \mathbf{U}^n + \mathbf{W}' \mathbf{O}_p^n + \mathbf{S}'^n \quad (2.60)$$

onde \mathbf{H} , \mathbf{H}' , \mathbf{G} , \mathbf{G}' são matrizes de influência providas de integrais de contorno e \mathbf{M} , \mathbf{M}' , \mathbf{W} , \mathbf{W}' são matrizes de influência providas de integrais de domínio. \mathbf{C} é a matriz geométrica (\mathbf{I} é a matriz identidade), relativa aos parâmetros c_{ik} em (2.47). \mathbf{O} é o vetor de tensões e \mathbf{O}_p é o vetor de tensões plásticas. \mathbf{W}' diz respeito aos termos livres (2.55) e \mathbf{S}^n e \mathbf{S}'^n são referentes a forças de domínio. Para maiores detalhes sobre dedução e implementação numérica relacionada às equações (2.57)-(2.60), as seguintes referências bibliográficas são recomendadas: CARRER, 1991; CARRER & TELLES, 1993.

Para se tratar as integrações no tempo, restantes em (2.59) e (2.60), algum esquema baseado em diferenças finitas pode ser adotado. O presente trabalho faz uso do método de Houbolt para tal finalidade (HOUBOLT, 1950). Levando-se em consideração o método de Houbolt, tem-se:

$$\mathbf{U}^n = (2\mathbf{U}^n - 5\mathbf{U}^{n-1} + 4\mathbf{U}^{n-2} - \mathbf{U}^{n-3}) / \Delta t^2 \quad (2.61)$$

$$\mathbf{U}^n = (11\mathbf{U}^n - 18\mathbf{U}^{n-1} + 9\mathbf{U}^{n-2} - 2\mathbf{U}^{n-3}) / (6\Delta t) \quad (2.62)$$

Substituindo-se (2.61) em (2.59) e (2.60), obtém-se:

$$\bar{\mathbf{H}}\mathbf{U}^n - \mathbf{G}\mathbf{T}^n = \bar{\mathbf{L}}^n + \mathbf{W}\mathbf{O}_p^n + \mathbf{S}^n \quad (2.63)$$

$$\mathbf{O}^n = \mathbf{G}'\mathbf{T}^n - \bar{\mathbf{H}}'\mathbf{U}^n + \bar{\mathbf{L}}'^n + \mathbf{W}'\mathbf{O}_p^n + \mathbf{S}'^n \quad (2.64)$$

onde $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{C} + \mathbf{H} + \mathbf{M}(2/\Delta t^2)$ e $\bar{\mathbf{L}}^n = \mathbf{M}(5\mathbf{U}^{n-1} - 4\mathbf{U}^{n-2} + \mathbf{U}^{n-3})/\Delta t^2$ em (2.63). Em (2.64), tem-se: $\bar{\mathbf{H}}' = \mathbf{H}' + \mathbf{M}'(2/\Delta t^2)$ e $\bar{\mathbf{L}}'^n = \mathbf{M}'(5\mathbf{U}^{n-1} - 4\mathbf{U}^{n-2} + \mathbf{U}^{n-3})/\Delta t^2$.

Introduzindo-se as condições de contorno (2.32) ao modelo, os sistemas de equações (2.63) e (2.64) podem ser re-escritos como segue:

$$\bar{\mathbf{A}} \mathbf{X}^n = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{Y}^n + \bar{\mathbf{L}}^n + \mathbf{W} \mathbf{O}_p^n + \mathbf{S}^n \quad (2.65)$$

$$\mathbf{O}^n = \bar{\mathbf{B}}' \mathbf{Y}^n - \bar{\mathbf{A}}' \mathbf{X}^n + \bar{\mathbf{L}}'^n + \mathbf{W}' \mathbf{O}_p^n + \mathbf{S}'^n \quad (2.66)$$

Por fim, os sistemas (2.65) e (2.66) podem ser escritos de forma mais compacta, conforme indicado em (2.67) e (2.68), respectivamente:

$$\mathbf{X}^n = \bar{\mathbf{Y}}^n + \bar{\mathbf{W}} \mathbf{O}_p^n \quad (2.67)$$

$$\mathbf{O}^n = \bar{\mathbf{Y}}'^n + \bar{\mathbf{W}}' \mathbf{O}_p^n \quad (2.68)$$

onde os vetores efetivos $\bar{\mathbf{Y}}^n$ e $\bar{\mathbf{Y}}'^n$ e as matrizes efetivas $\bar{\mathbf{W}}$ e $\bar{\mathbf{W}}'$ são dados por:

$$\bar{\mathbf{Y}}^n = \bar{\mathbf{A}}^{-1} (\bar{\mathbf{B}} \mathbf{Y}^n + \bar{\mathbf{L}}^n + \mathbf{S}^n) \quad (2.69)$$

$$\bar{\mathbf{Y}}'^n = \bar{\mathbf{B}}' \mathbf{Y}^n - \bar{\mathbf{A}}' \bar{\mathbf{Y}}^n + \bar{\mathbf{L}}'^n + \mathbf{S}'^n \quad (2.70)$$

$$\bar{\mathbf{W}} = \bar{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{W} \quad (2.71)$$

$$\bar{\mathbf{W}}' = \mathbf{W} - \bar{\mathbf{A}}' \bar{\mathbf{W}} \quad (2.72)$$

Para se resolver o problema não-linear em questão (equações (2.67) e (2.68)), adota-se um esquema iterativo para o cálculo das tensões do modelo (resolução do problema (2.68)). Uma vez que se obtenha convergência no esquema iterativo do cálculo das tensões, resolve-se o sistema (2.67) e parte-se para o próximo passo de tempo, dando continuidade à análise.

A seguinte relação incremental entre as tensões plásticas e elásticas é aqui adotada para formulação do algoritmo iterativo de solução das tensões:

$$\Delta \mathbf{O}_p = \mathbf{D}_p \Delta \mathbf{O}_e = \Delta \mathbf{O}_e - \Delta \mathbf{O} \quad (2.73)$$

onde \mathbf{D}_p é a matriz constitutiva plástica e $\Delta \mathbf{O}$ é o incremento de tensões. Por intermédio de (2.68) e (2.73), o seguinte algoritmo iterativo implícito de solução pode ser obtido (CARRER & TELLES, 1994):

$$\mathbf{W}_p^{(k+1)} \Delta \mathbf{O}_e = {}^{(k)}\Psi \quad (2.74)$$

$${}^{(k)}\Psi = \bar{\mathbf{Y}}^{*n} + \mathbf{W}_I {}^{(k)}\mathbf{O}_p^n - {}^{(k)}\mathbf{O}_e^n \quad (2.75)$$

onde $\mathbf{W}_p = \mathbf{I} - \mathbf{W}_I \mathbf{D}_p$ e $\mathbf{W}_I = \mathbf{I} + \bar{\mathbf{W}}'$.

Por intermédio de (2.67)-(2.75) o modelo dinâmico não-linear em questão pode ser solucionado a cada passo n de tempo. Para maiores detalhes sobre o problema elastoplástico e sua solução por elementos de contorno, as seguintes referências são sugeridas ao leitor: TELLES (1983); TELLES & CARRER (1991). Para algumas abordagens elastoplásticas em análise dinâmica, com elementos de contorno, alternativas à apresentada neste subitem, os trabalhos de KONTONI & BESKOS (1993) e TELLES *et al.* (1999) podem ser indicados, entre outros. Para o estudo de alguns esquemas de integração no tempo, em problemas elastodinâmicos, alternativos ao método de Houbolt (equações (2.61)-(2.62)), as seguintes referências são apontadas ao leitor: CHIEN & WU (2001) e CARRER & MANSUR (2004).

2.3.3. Solução com elementos finitos

Neste subitem apresenta-se a solução do problema dinâmico não-linear por intermédio de elementos finitos. Duas abordagens cinemáticas semi-discretas são aqui

adotadas: método de Newmark / Newton-Raphson e método implícito de Green / pseudo-forças.

No método de Newmark / Newton-Raphson, para a solução no tempo do sistema de equações que se obtém pela discretização espacial usando elementos finitos, adotam-se relações entre deslocamentos e suas derivadas temporais baseadas em esquemas de diferenças finitas (método de Newmark); o método de Newton-Raphson é utilizado para o tratamento do problema não-linear, sendo base para o esquema iterativo (ZIENKIEWICZ & TAYLOR, 2002).

No método implícito de Green, a solução no tempo do sistema de equações se dá pela utilização de funções de Green, calculadas implicitamente (SOARES JR, 2002). Esta metodologia propicia, no passo de tempo corrente, o desacoplamento entre as incógnitas deslocamento e forças nodais atuantes. Desta forma, processos iterativos tornam-se desnecessários em várias aplicações, tornando a metodologia em questão bastante atrativa. O método implícito de Green é incondicionalmente estável e de segunda ordem, dependendo dos parâmetros que se adote para o cálculo das funções de Green, conforme será discutido. Associado ao método implícito de Green, o método das pseudo-forças é aqui utilizado para o tratamento do problema não-linear (STRICKLIN & HAISLER, 1977).

2.3.3.1. Método de Newmark / Newton-Raphson

As seguintes equações incremental-iterativas descrevem o modelo dinâmico não-linear, considerando-se discretização espacial por elementos finitos (JACOB & EBECKEN, 1994):

$$\mathbf{M}^{(k+1)} \ddot{\mathbf{U}}^n + \mathbf{C}^{(k+1)} \dot{\mathbf{U}}^n + \mathbf{K}_T^{(k+1)} \Delta \Delta \mathbf{U} = \mathbf{F}^n - {}^{(k)} \mathbf{R}^n \quad (2.76)$$

$${}^{(k+1)} \Delta \mathbf{U} = {}^{(k)} \Delta \mathbf{U} + {}^{(k+1)} \Delta \Delta \mathbf{U} \quad (2.77)$$

$${}^{(k+1)} \mathbf{U}^n = {}^{(k)} \mathbf{U}^n + {}^{(k+1)} \Delta \Delta \mathbf{U} \quad (2.78)$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K}_T são matrizes de massa, amortecimento e rigidez (matriz tangente), respectivamente; $\mathbf{F}^n - {}^{(k)} \mathbf{R}^n$ é o vetor resíduo; ${}^{(k+1)} \Delta \mathbf{U}$ é o vetor incremental de deslocamentos e ${}^{(k+1)} \Delta \Delta \mathbf{U}$ é a variação do vetor incremental de deslocamentos, calculados a cada passo iterativo ($k+1$). Considerando-se a matriz de amortecimento como sendo proporcional às matrizes de massa e rigidez, tem-se:

$$\mathbf{C} = a_m \mathbf{M} + a_k \mathbf{K}_T \quad (2.79)$$

onde a_m e a_k são coeficientes de proporcionalidade.

Adotando-se $\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1} = {}^{(k+1)} \Delta \mathbf{U}$ e levando-se em consideração a relação (2.77), o método de Newmark fornece:

$${}^{(k+1)} \ddot{\mathbf{U}}^n = \ddot{\mathbf{U}}^n + (1/(b \Delta t^2)) {}^{(k+1)} \Delta \mathbf{U} = \ddot{\mathbf{U}}^n + (1/(b \Delta t^2)) ({}^{(k)} \Delta \mathbf{U} + {}^{(k+1)} \Delta \Delta \mathbf{U}) \quad (2.80)$$

$${}^{(k+1)} \dot{\mathbf{U}}^n = \dot{\mathbf{U}}^n + (g/(b \Delta t)) {}^{(k+1)} \Delta \mathbf{U} = \dot{\mathbf{U}}^n + (g/(b \Delta t)) ({}^{(k)} \Delta \mathbf{U} + {}^{(k+1)} \Delta \Delta \mathbf{U}) \quad (2.81)$$

onde os preditores de aceleração $\ddot{\mathbf{U}}^n$ e velocidade $\dot{\mathbf{U}}^n$ são dados por:

$$\ddot{\mathbf{U}}^n = -(1/(b \Delta t)) \ddot{\mathbf{U}}^{n-1} + (1/(2b) - 1) \ddot{\mathbf{U}}^{n-1} \quad (2.82)$$

$$\dot{\mathbf{U}}^n = (1 - g/b) \dot{\mathbf{U}}^{n-1} + \Delta t (1 - g/(2b)) \ddot{\mathbf{U}}^{n-1} \quad (2.83)$$

Fazendo-se uso das equações (2.79) e (2.80)-(2.81), a equação (2.76) pode ser re-escrita como segue:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \left\{ \left[\mathfrak{E} + (1/(b \Delta t^2)) \left({}^{(k)}\Delta\mathbf{U} + {}^{(k+1)}\Delta\Delta\mathbf{U} \right) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[\mathfrak{E} + (g/(b \Delta t)) \left({}^{(k)}\Delta\mathbf{U} + {}^{(k+1)}\Delta\Delta\mathbf{U} \right) \right] \mathbf{a}_m \right\} + \\ & + \mathbf{K}_T \left\{ \left[\mathfrak{E} + (g/(b \Delta t)) \left({}^{(k)}\Delta\mathbf{U} + {}^{(k+1)}\Delta\Delta\mathbf{U} \right) \right] \mathbf{a}_k + {}^{(k+1)}\Delta\Delta\mathbf{U} \right\} = \mathbf{F}^n - {}^{(k)}\mathbf{R}^n \end{aligned} \quad (2.84)$$

Estando a equação (2.84) estabelecida, pode-se então transpor os termos conhecidos na iteração $(k+1)$ para o lado direito da equação de movimento, formando-se assim um vetor efetivo de resíduos. Contudo, tal procedimento resulta em diversas multiplicações pela matriz global \mathbf{K}_T , tornando desta forma o algoritmo computacionalmente oneroso. A fim de se ter um algoritmo mais eficiente, define-se o vetor ${}^{(k+1)}\Delta\Delta\bar{\mathbf{U}}$ como o termo entre parênteses que multiplica \mathbf{K}_T em (2.84), ou seja:

$${}^{(k+1)}\Delta\Delta\bar{\mathbf{U}} = \left\{ \mathfrak{E} + (g/(b \Delta t)) \left({}^{(k)}\Delta\mathbf{U} + {}^{(k+1)}\Delta\Delta\mathbf{U} \right) \right\} \mathbf{a}_k + {}^{(k+1)}\Delta\Delta\mathbf{U} \quad (2.85)$$

e de forma reversa, escreve-se ${}^{(k+1)}\Delta\Delta\mathbf{U}$ em função de ${}^{(k+1)}\Delta\Delta\bar{\mathbf{U}}$ como segue:

$${}^{(k+1)}\Delta\Delta\mathbf{U} = \left\{ {}^{(k+1)}\Delta\Delta\bar{\mathbf{U}} - \mathbf{a}_k \left(\mathfrak{E} + (g/(b \Delta t)) {}^{(k)}\Delta\mathbf{U} \right) \right\} / \left\{ (\mathbf{a}_k \mathbf{g}) / (b \Delta t) + 1 \right\} \quad (2.86)$$

Introduzindo-se em (2.84) a definição (2.85), e transferindo-se os termos já conhecidos na iteração $(k+1)$ para o lado direito da equação, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \left\{ 1/(b \Delta t^2) + (\mathbf{a}_m \mathbf{g}) / (b \Delta t) \right\} {}^{(k+1)}\Delta\Delta\mathbf{U} + \mathbf{K}_T {}^{(k+1)}\Delta\Delta\bar{\mathbf{U}} = \\ & = \mathbf{F}^n - {}^{(k)}\mathbf{R}^n - \mathbf{M} \left\{ \left[\mathfrak{E} + (1/(b \Delta t^2)) {}^{(k)}\Delta\mathbf{U} \right] + \mathbf{a}_m \left[\mathfrak{E} + (g/(b \Delta t)) {}^{(k)}\Delta\mathbf{U} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.87)$$

Substituindo (2.86) em (2.87) e mais uma vez transferindo-se os termos já conhecidos na iteração $(k+1)$ para o lado direito da equação de movimento, o seguinte sistema final efetivo pode ser obtido:

$$\mathbf{A}^{(k+1)} \Delta \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{B}^{(k)n} \quad (2.88)$$

onde a matriz efetiva \mathbf{A} , bem como o vetor efetivo $\mathbf{B}^{(k)n}$, são definidos por:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{M} \mathbf{a}_0 + \mathbf{K}_T) \quad (2.89)$$

$$\mathbf{B}^{(k)n} = \mathbf{F}^{(k)n} - \mathbf{R}^{(k)n} + \mathbf{M} \left\{ \mathbf{g} + (1/(b \Delta t^2))^{(k)} \Delta \mathbf{U} + (\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_k) \left(\mathbf{g} + (g/(b \Delta t))^{(k)} \Delta \mathbf{U} \right) \right\} \quad (2.90)$$

sendo a constante \mathbf{a}_0 dada por:

$$\mathbf{a}_0 = \left\{ 1/(b \Delta t^2) + (\mathbf{a}_m \mathbf{g})/(b \Delta t) \right\} / \left\{ (\mathbf{a}_k \mathbf{g})/(b \Delta t) + 1 \right\} \quad (2.91)$$

Por intermédio de (2.88) o modelo dinâmico não-linear pode ser solucionado usando-se o método dos elementos finitos com formulação de Newmark / Newton-Raphson.

Para uma abordagem mais detalhada sobre a formulação aqui apresentada, o trabalho de JACOB e EBECKEN (1994) é indicado. As seguintes referências de igual forma são indicadas para aprofundamento no tópico: CRISFIELD (1991); BATHE (1996); BELYTSCHKO *et al.* (2000); ZIENKIEWICZ & TAYLOR (2002). Para enfoque considerando-se análises elastoplásticas com elementos finitos, as obras de HINTON & OWEN (1980) e SIMO & HUGHES (1998) são aqui sugeridas, entre muitas outras.

2.3.3.2. Método implícito de Green / pseudo-forças

As expressões analíticas para deslocamentos e velocidades, respectivamente, que resolvem a versão linear das equações de movimento (2.76) são dadas por (SOARES JR & MANSUR, 2004b):

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^n &= \mathbf{G}^n \mathbf{C} \mathbf{U}^0 + \mathbf{G}^n \mathbf{M} \mathbf{U}^0 + \mathbf{G}^n \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}^0 + \mathbf{G}^n \bullet \mathbf{F}^n \\ \dot{\mathbf{U}}^n &= \dot{\mathbf{G}}^n \mathbf{C} \mathbf{U}^0 + \dot{\mathbf{G}}^n \mathbf{M} \mathbf{U}^0 + \dot{\mathbf{G}}^n \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}^0 + \dot{\mathbf{G}}^n \bullet \mathbf{F}^n \end{aligned} \quad (2.92)$$

onde \mathbf{U}^0 e $\dot{\mathbf{U}}^0$ são os vetores condições iniciais do problema; \mathbf{G}^n representa as matrizes funções de Green do modelo; e o símbolo \bullet indica convolução. As matrizes \mathbf{G}^n podem ser obtidas pela solução do modelo usando elementos finitos e supondo forças nodais atuantes do tipo impulsivas.

Desta forma, o carregamento ao longo do tempo, para o cálculo das matrizes \mathbf{G}^n , é dado conforme se indica a seguir:

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{I} d(t) \quad (2.93)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade e d representa a função delta de Dirac. O presente trabalho, todavia, faz uso da relação física “impulso = variação de movimento” (equação (2.94)), e as funções de Green são obtidas pela solução de um problema de condição inicial de velocidade.

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}^0 = \mathbf{I} \int_{-\infty}^{+\infty} d(t) dt \quad (2.94)$$

Desta forma, para o cálculo das funções de Green do modelo, o seguinte problema de condições iniciais é aqui considerado (a equação (2.95) é obtida a partir de (2.94)):

$$\mathfrak{G}^0 = \mathbf{M}^{-1} \quad (2.95)$$

$$\mathbf{G}^0 = \mathbf{0} \quad (2.96)$$

No presente trabalho, nenhuma expressão analítica é adotada para o cálculo das matrizes de Green \mathbf{G}^n e de suas derivadas. Métodos numéricos são aqui empregados para tal finalidade, em especial o método de Newmark.

Considerando-se um passo de tempo Δt suficientemente pequeno, as integrais de convolução existentes em (2.92) podem ser aproximadas como se segue:

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{G}(\Delta t - t) \mathbf{F}(t) dt \approx \mathbf{G}(0) \mathbf{F}(\Delta t) \Delta t \quad (2.97)$$

$$\int_0^{\Delta t} \mathfrak{G}(\Delta t - t) \mathbf{F}(t) dt \approx \mathfrak{G}(0) \mathbf{F}(\Delta t) \Delta t$$

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{G}(\Delta t - t) \mathbf{F}(t) dt \approx [\mathbf{G}(0) \mathbf{F}(\Delta t) + \mathbf{G}(\Delta t) \mathbf{F}(0)] \Delta t / 2 \quad (2.98)$$

$$\int_0^{\Delta t} \mathfrak{G}(\Delta t - t) \mathbf{F}(t) dt \approx [\mathfrak{G}(0) \mathbf{F}(\Delta t) + \mathfrak{G}(\Delta t) \mathbf{F}(0)] \Delta t / 2$$

onde nas expressões (2.98), quadratura de Newton-Cotes de dois pontos é adotada. As aproximações (2.97), em contra-partida, são equivalentes ao resultado que se obteria usando-se análise discreta (algoritmos DFT/FFT) no domínio da frequência (SOARES JR & MANSUR, 2003).

As aproximações (2.97) podem parecer demasiado simplificadas em relação às aproximações (2.98) (ou muitas outras possíveis aproximações); contudo, conforme se irá demonstrar matematicamente, as aproximações (2.97) fornecem os mesmos resultados que as aproximações (2.98) para a maior parte dos problemas usuais de engenharia. No presente texto, as aproximações (2.97) são consideradas nas deduções que se seguem; substituição pelas aproximações (2.98) na formulação é trivial.

Considerando-se as aproximações (2.97), relações recursivas podem ser obtidas a partir das equações (2.92), no passo de tempo n , supondo-se que a análise se inicia no passo de tempo antecedente (condições iniciais relacionadas ao passo de tempo $n-1$). Desta forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^n &= (\mathbf{G}^1 \mathbf{C} + \mathfrak{G}^1 \mathbf{M}) \mathbf{U}^{n-1} + \mathbf{G}^1 \mathbf{M} \mathfrak{G}^{n-1} + \mathbf{G}^0 \mathbf{F}^n \Delta t \\ \mathfrak{U}^n &= (\mathfrak{G}^1 \mathbf{C} + \mathfrak{G}^1 \mathbf{M}) \mathbf{U}^{n-1} + \mathfrak{G}^1 \mathbf{M} \mathfrak{G}^{n-1} + \mathfrak{G}^0 \mathbf{F}^n \Delta t \end{aligned} \quad (2.99)$$

Nas equações (2.99), as matrizes iniciais de Green \mathbf{G}^0 são dadas pelas expressões (2.95-2.96), e as matrizes de Green relativas ao primeiro passo de tempo, \mathbf{G}^1 , são aqui calculadas pelo método de Newmark. Resolvendo-se o problema de condições iniciais (2.95-2.96) pelo método de Newmark, as seguintes expressões (baseadas na formulação de elementos finitos) são obtidas para as matrizes de Green no primeiro passo de tempo:

$$\mathbf{G}^1 = \hat{\mathbf{A}}^{-1} \left\{ (1/(b\Delta t)) \mathbf{I} + (g/b - 1/(2b)) \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1} + \Delta t (1 - g/(2b)) \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1} \right\} \quad (2.100)$$

$$\mathfrak{G}^1 = \mathbf{G}^1 (g/(b\Delta t)) - (1 - g/b) \mathbf{M}^{-1} + \Delta t (g/(2b) - 1) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1} \quad (2.101)$$

$$\mathfrak{G}^2 = \mathbf{G}^1 (1/(b\Delta t^2)) - (1/(b\Delta t)) \mathbf{M}^{-1} + (1/(2b) - 1) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1} \quad (2.102)$$

onde a matriz efetiva $\hat{\mathbf{A}}$ é dada por:

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{K} + (1/(b\Delta t^2))\mathbf{M} + (g/(b\Delta t))\mathbf{C} \quad (2.103)$$

Estando as expressões para as matrizes de Green \mathbf{G}^1 descritas em (2.100)-(2.102), basta então substituí-las nas relações de recorrência (2.99), obtendo-se assim o algoritmo implícito de Green para o cálculo dos deslocamentos e velocidades. Todavia, conforme se mostra em SOARES JR & MANSUR (2004b), tal procedimento gera um algoritmo computacionalmente oneroso.

A fim de se obter um algoritmo eficiente, algumas simplificações devem ser consideradas na formulação. As simplificações aqui adotadas são: (i) considera-se a matriz de amortecimento proporcional à matriz de massa ($\mathbf{C} = a_m \mathbf{M}$); (ii) considera-se $g^2 = b$ no método de Newmark (o que é atendido pela regra trapezoidal, por exemplo).

Considerando-se as aproximações acima discutidas e as expressões (2.100)-(2.102), bem como as expressões (2.95-2.96), o seguinte algoritmo implícito de Green pode ser obtido a partir das equações (2.99):

$$\dot{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{M} (c_2 \mathbf{U}^{n-1} + c_1 \mathfrak{U}^{n-1}) \quad (2.104)$$

$$\mathbf{U}^n = \bar{\mathbf{U}} + c_3 \mathbf{U}^{n-1} \quad (2.105)$$

$$\mathfrak{U}^n = c_5 \bar{\mathbf{U}} + c_4 \mathbf{U}^{n-1} + c_3 \mathfrak{U}^{n-1} + \dot{\mathbf{B}}^n \quad (2.106)$$

onde a matriz efetiva $\dot{\mathbf{A}}$ é dada por (2.103) e o vetor efetivo $\dot{\mathbf{B}}^n$ é dado por (2.107).

$$\dot{\mathbf{B}}^n = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}^n \Delta t \quad (2.107)$$

As constantes c_i presentes em (2.104)-(2.106) são definidas como:

$$\begin{aligned}
c_0 &= (1/(2b) - 1) a_m - 1/(b\Delta t) \\
c_1 &= (g/b - 1) a_m - (\Delta t/2)(g/b - 2) a_m^2 - c_0 \\
c_2 &= (a_m + c_5) c_1 \\
c_3 &= 1 - \Delta t(1 - g) a_m + g \Delta t c \\
c_4 &= a_m c_3 + c \\
c_5 &= g/(b\Delta t)
\end{aligned} \tag{2.108}$$

O algoritmo de solução definido pelas equações (2.104)-(2.106) permite o desacoplamento entre os deslocamentos relativos ao passo de tempo atual n e as forças nodais atuantes neste mesmo passo de tempo. Conforme indica a equação (2.106), as forças nodais atuantes no passo de tempo n só influenciam o cálculo das velocidades no tempo n ; os deslocamentos são função tão somente de variáveis relativas a passos de tempo precedentes (equação (2.105)). Este fato permite que na análise do problema não-linear elastoplástico o processo iterativo de solução possa ser eliminado. No presente subitem, faz-se uso do método das pseudo-forças (STRICKILIN & HAISLER, 1977; COUTINHO *et al.*, 1988) para o tratamento elastoplástico do modelo.

A equação não-linear de movimento pode ser escrita, de forma alternativa a equação (2.76), como segue:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^n + \mathbf{f}(\mathbf{U}^n) = \mathbf{F}^n \tag{2.109}$$

onde $\mathbf{f}(\mathbf{U}^n)$ é um vetor de forças elásticas ou elastoplásticas que depende das incógnitas deslocamento nodal; $\mathbf{f}(\mathbf{U}^n)$ representa o vetor de forças nodais equivalente ao estado atual de tensões. Considerando pequenas deformações, as deformações totais podem ser definidas como combinação de duas componentes: uma linear e outra não-linear. Assim sendo, o vetor $\mathbf{f}(\mathbf{U}^n)$ pode ser expresso como a soma de contribuições lineares e não-lineares, como segue:

$$f(\mathbf{U}^n) = \{\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{U}^n)\}\mathbf{U}^n \quad (2.110)$$

onde \mathbf{K}_L é a matriz de rigidez linear e \mathbf{K}_{NL} é a matriz responsável por possíveis contribuições não lineares e cujos elementos dependem dos deslocamentos nodais.

Tendo-se em vista as equações (2.109) e (2.110), o algoritmo (2.104)-(2.106) pode ser facilmente adaptado a fim de se considerar as contribuições não-lineares acima discutidas, bastando para isso se redefinir o vetor efetivo $\hat{\mathbf{B}}^n$ como segue:

$$\hat{\mathbf{B}}^n = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}^n + \hat{\mathbf{R}}^n)\Delta t \quad (2.111)$$

onde o vetor pseudo-forças $\hat{\mathbf{R}}^n$ é dado por:

$$\hat{\mathbf{R}}^n = -\{\mathbf{K}_{NL}(\mathbf{U}^n)\}\mathbf{U}^n \quad (2.112)$$

Para uma maior eficiência na metodologia de solução proposta, deve-se adotar matriz de massa diagonal, o que torna o cálculo do vetor efetivo $\hat{\mathbf{B}}^n$ trivial.

As simplificações aqui adotadas para o desenvolvimento do algoritmo (2.104)-(2.106) são usuais em muitas metodologias numéricas, comumente utilizadas em engenharia. O algoritmo (2.104)-(2.106) pode ser redefinido de forma iterativa, contudo, caso as simplificações em questão tornem-se inapropriadas. Escrevendo-se a matriz de massa como a soma de duas matrizes, $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_D$, onde \mathbf{M}_D é diagonal, e adotando-se a matriz de amortecimento como definida em (2.79), o seguinte sistema iterativo de equações pode ser obtido (a exigência $\mathbf{g}^2 = \mathbf{b}$ permanece):

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_D^{(k+1)} \mathbf{U}^n + a_m \mathbf{M}_D^{(k+1)} \mathbf{U}^n + \mathbf{K}^{(k+1)} \mathbf{U}^n = \\ & = \mathbf{F}^n + \mathbf{R}^n - \mathbf{M}_0 \left(\mathbf{U}^n + a_m \mathbf{U}^n \right) - a_k \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{U}^n \end{aligned} \quad (2.113)$$

Desta forma, a base do algoritmo (2.104)-(2.106) pode ser mantida (substitui-se \mathbf{M} por \mathbf{M}_D em (2.104)) e o novo vetor efetivo relacionado ao algoritmo iterativo que se obtém é dado por:

$${}^{(k)} \mathbf{B}^n = \mathbf{M}_D^{-1} \left\{ \mathbf{F}^n + \mathbf{R}^n - \mathbf{M}_0 \left(\mathbf{U}^n + a_m \mathbf{U}^n \right) - a_k \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{U}^n \right\} \Delta t \quad (2.114)$$

Caso a matriz de massa seja diagonal dominante e $a_m \mathbf{M}$ seja a contribuição mais significativa às forças de amortecimento o algoritmo iterativo proposto deve convergir rapidamente.

A fim de se estudar a estabilidade e precisão do algoritmo (2.104)-(2.106), considera-se o problema de um grau de liberdade. A equação (linear) de movimento relativa a este modelo é dada por:

$$\mathbf{U}^n + 2xw\mathbf{U}^n + w^2\mathbf{U}^n = \mathbf{F}^n \quad (2.115)$$

onde x é a taxa de amortecimento e w é a frequência natural do modelo. A solução da equação (2.115) pode ser escrita, de forma recursiva, a partir de:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}^n \\ \mathbf{U}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{n-1} \\ \mathbf{U}^{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{n-1} \\ \mathbf{U}^{n-1} \end{bmatrix} + \mathbf{L} \quad (2.116)$$

Tabela 2.2 – Termos da matriz de amplificação e do vetor operador de carga para os métodos de Green-Newmark e Newmark

	Matriz de amplificação	Vetor operador de carga
Green-Newmark	$A_{11} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta t^3 w^3 (x^3 (8b - 4g) + x(g - 2b)) + \\ + \Delta t^2 w^2 (x^2 (4g - 2) + (b - g)) + \Delta t w x (2g + 1) \end{array} \right\} / A_0$ $A_{12} = \Delta t \left\{ \Delta t^2 w^2 x^2 (4b - 2g) + \Delta t w x (2g - 1) + 1 \right\} / A_0$ $A_{21} = -\Delta t w^2 \left\{ \Delta t^2 w^2 x^2 (4b - 2g) + \Delta t w x (2g - 1) + 1 \right\} / A_0$ $A_{22} = \left\{ \Delta t^3 w^3 x (g - 2b) + \Delta t^2 w^2 (b - g) + \Delta t w x (2g - 2) + 1 \right\} / A_0$	$L_1 = 0; L_2 = \Delta t F^n$ <p>(equação (2.97))</p> <p>ou</p> $L_1 = 0.5 \Delta t A_{12} F^{n-1}; L_2 = 0.5 \Delta t \left\{ A_{22} F^{n-1} + F^n \right\}$ <p>(equação (2.98))</p>
Newmark	$A_{11} = \left\{ \Delta t^3 w^3 x (2b - g) + \Delta t^2 w^2 (b - 0.5) + \Delta t w x (2g + 1) \right\} / A_0$ $A_{12} = \Delta t \left\{ \Delta t^2 w^2 x^2 (4b - 2g) + \Delta t w x (2g - 1) + 1 \right\} / A_0$ $A_{21} = -\Delta t w^2 \left\{ \Delta t^2 w^2 (b - 0.5g) + 1 \right\} / A_0$ $A_{22} = \left\{ \Delta t^3 w^3 x (g - 2b) + \Delta t^2 w^2 (b - g) + \Delta t w x (2g - 2) + 1 \right\} / A_0$	$L_1 = \left\{ \begin{array}{l} (0.5 + \Delta t w x g) \Delta t^2 ((1 - 2b) F^{n-1} + 2b F^n) + \\ - 2 \Delta t^3 w x b ((1 - g) F^{n-1} + g F^n) \end{array} \right\} / A_0$ $L_2 = \left\{ \begin{array}{l} - 0.5 \Delta t^3 w^2 g ((1 - 2b) F^{n-1} + 2b F^n) + \\ + (1 + \Delta t^2 w^2 b) \Delta t ((1 - g) F^{n-1} + g F^n) \end{array} \right\} / A_0$

onde $A_0 = \Delta t^2 w^2 b + 2 \Delta t w x g + 1$

onde os termos da matriz \mathbf{A} (matriz de amplificação) e do vetor \mathbf{L} (operador de carga), levando-se em consideração o método de Green-Newmark (matrizes de Green calculadas pelo método de Newmark) e o método de Newmark, são apresentados na Tabela 2.2. Apresenta-se a seguir uma breve discussão a cerca da matriz de amplificação \mathbf{A} e do vetor operador de carga \mathbf{L} :

(i) *Matriz de amplificação*

Comparando-se as expressões apresentadas na Tabela 2.2, pode-se perceber que os termos A_{12} e A_{22} são sempre os mesmos, tanto para o método de Green-Newmark, quanto para o método de Newmark. A diferença entre as duas metodologias está então focada na forma como deslocamentos iniciais e forças aplicadas são tratados; velocidades iniciais são igualmente consideradas por ambas metodologias.

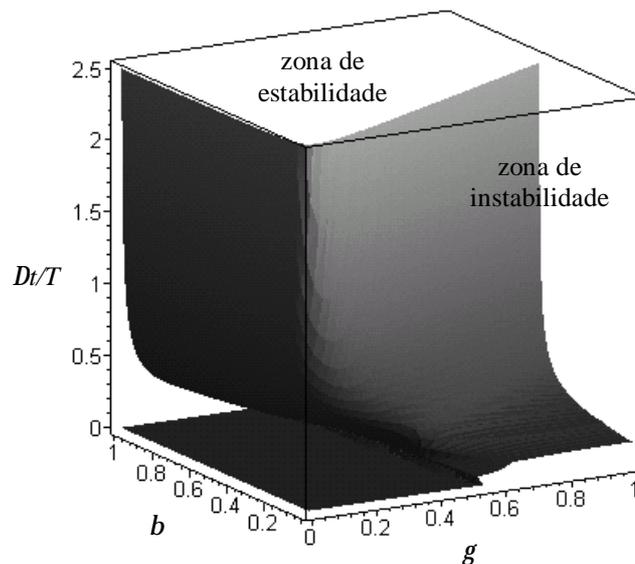


Figura 2.1 – Zonas de estabilidade e instabilidade para o método de Green-Newmark, como função dos parâmetros de Newmark (g e b) e do passo de tempo normalizado ($\Delta t/T$), para $x = 0$: superfície limite do raio espectral ($c(\mathbf{A}) = 1$).

Considerando-se a regra trapezoidal ($g = 0.50$ e $b = 0.25$) e supondo modelo não amortecido ($x = 0.0$), pode-se perceber que ambas matrizes de amplificação tornam-se por completo idênticas. Neste caso ambos os métodos são incondicionalmente estáveis e de segunda ordem. De forma geral, a ordem de precisão dos dois procedimentos é basicamente a mesma, de acordo com os parâmetros de Newmark adotados. A estabilidade do método de Green-Newmark pode ser determinada em função do raio espectral da matriz de amplificação. Na Figura 2.1, as regiões de estabilidade e instabilidade do método de Green-Newmark são mostradas como função dos parâmetros de Newmark (g e b) e do passo de tempo normalizado (Dt/T , T é o período natural), para $x = 0.0$. A superfície mostrada na Figura 2.1, que é a fronteira entre as regiões estável e instável, é obtida considerando-se o raio espectral da matriz de amplificação como sendo unitário ($c(\mathbf{A}) = 1$). Para $c(\mathbf{A}) \leq 1$ o método é considerado estável. Para uma discussão mais ampla a cerca da matriz de amplificação \mathbf{A} , considerando inclusive resultados relativos ao uso de outras metodologias numéricas (que não Newmark) para o cálculo das funções de Green do modelo, a seguinte referência é indicada: SOARES JR & MANSUR (2004b). A adoção do método implícito de Green gera normalmente propriedades numéricas distintas das dos métodos com os quais o cálculo das funções de Green está associado. Estas novas propriedades numéricas podem ser utilizadas para o desenvolvimento de abordagens mais apropriadas a alguns problemas específicos (dissipação de modos de frequências elevadas etc.).

(ii) *Vetor operador de carga*

No método implícito de Green, o vetor operador de carga, apresentado na Tabela 2.2, está baseado nas aproximações (2.97) ou (2.98). É importante se notar que as aproximações indicadas em (2.97) para o processo de convolução são complementares:

na solução de deslocamentos e velocidades, a influência das forças atuantes é subestimada e superestimada, respectivamente, pelas expressões (2.97). Resolvendo-se os deslocamentos e velocidades complementarmente, conforme indicado no algoritmo (2.104)-(2.106), os erros relacionados às aproximações (2.97) são desta forma minimizados. Em verdade, as aproximações (2.97) e (2.98) fornecem o mesmo resultado para a variável deslocamento, conforme se mostra a seguir. Supondo $\mathbf{F}^0 = \mathbf{0}$, tem-se para os primeiros 3 passos de tempo a partir das expressões (2.99) (a seguinte notação é adotada $\Phi_1 = \mathbf{G}^1 \mathbf{C} + \mathfrak{G}^1 \mathbf{M}$; $\Phi_2 = \mathbf{G}^1 \mathbf{M}$; $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}^1 \mathbf{C} + \mathfrak{G}^1 \mathbf{M}$; $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}^1 \mathbf{M}$):

Adotando-se as aproximações (2.97):

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^1 &= \Phi_1 \mathbf{U}^0 + \Phi_2 \mathfrak{G}^0 \\ \mathfrak{G}^1 &= \mathfrak{G}_1 \mathbf{U}^0 + \mathfrak{G}_2 \mathfrak{G}^0 + (\mathbf{M}^{-1}) \mathbf{F}^1 \Delta t = \mathbf{V}^1 + (\mathbf{M}^{-1}) \mathbf{F}^1 \Delta t \\ \mathbf{U}^2 &= \Phi_1 \mathbf{U}^1 + \Phi_2 \mathbf{V}^1 + \mathbf{G}^1 \mathbf{F}^1 \Delta t \\ \mathfrak{G}^2 &= \mathfrak{G}_1 \mathbf{U}^1 + \mathfrak{G}_2 \mathbf{V}^1 + \mathfrak{G}^1 \mathbf{F}^1 \Delta t + (\mathbf{M}^{-1}) \mathbf{F}^2 \Delta t = \mathbf{V}^2 + (\mathbf{M}^{-1}) \mathbf{F}^2 \Delta t \\ \mathbf{U}^3 &= \Phi_1 \mathbf{U}^2 + \Phi_2 \mathbf{V}^2 + \mathbf{G}^1 \mathbf{F}^2 \Delta t \\ \mathfrak{G}^3 &= \mathfrak{G}_1 \mathbf{U}^2 + \mathfrak{G}_2 \mathbf{V}^2 + \mathfrak{G}^1 \mathbf{F}^2 \Delta t + (\mathbf{M}^{-1}) \mathbf{F}^3 \Delta t = \mathbf{V}^3 + (\mathbf{M}^{-1}) \mathbf{F}^3 \Delta t \end{aligned}$$

Adotando-se as aproximações (2.98):

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^1 &= \Phi_1 \mathbf{U}^0 + \Phi_2 \mathfrak{G}^0 \\ \mathfrak{G}^1 &= \mathfrak{G}_1 \mathbf{U}^0 + \mathfrak{G}_2 \mathfrak{G}^0 + (\mathbf{M}^{-1}) \mathbf{F}^1 \Delta t / 2 = \mathbf{V}^1 + (\mathbf{M}^{-1}) \mathbf{F}^1 \Delta t / 2 \\ \mathbf{U}^2 &= \Phi_1 \mathbf{U}^1 + \Phi_2 \mathbf{V}^1 + \mathbf{G}^1 \mathbf{F}^1 \Delta t / 2 + (\mathbf{G}^1 \mathbf{F}^1) \Delta t / 2 \\ \mathfrak{G}^2 &= \mathfrak{G}_1 \mathbf{U}^1 + \mathfrak{G}_2 \mathbf{V}^1 + \mathfrak{G}^1 \mathbf{F}^1 \Delta t / 2 + (\mathfrak{G}^1 \mathbf{F}^1 + (\mathbf{M}^{-1}) \mathbf{F}^2) \Delta t / 2 = \mathbf{V}^2 + (\mathbf{M}^{-1}) \mathbf{F}^2 \Delta t / 2 \\ \mathbf{U}^3 &= \Phi_1 \mathbf{U}^2 + \Phi_2 \mathbf{V}^2 + \mathbf{G}^1 \mathbf{F}^2 \Delta t / 2 + (\mathbf{G}^1 \mathbf{F}^2) \Delta t / 2 \\ \mathfrak{G}^3 &= \mathfrak{G}_1 \mathbf{U}^2 + \mathfrak{G}_2 \mathbf{V}^2 + \mathfrak{G}^1 \mathbf{F}^2 \Delta t / 2 + (\mathbf{G}^1 \mathbf{F}^2 + (\mathbf{M}^{-1}) \mathbf{F}^3) \Delta t / 2 = \mathbf{V}^3 + (\mathbf{M}^{-1}) \mathbf{F}^3 \Delta t / 2 \end{aligned}$$

Conforme se pode notar, os deslocamentos são os mesmos, a cada passo de tempo, para as duas formulações. O mesmo não ocorre com as velocidades, entretanto. Analisando-se a Tabela 2.2, pode-se notar que se os parâmetros de Newmark $g = 0.5$ e $b = 0.0$ são considerados (diferença central), bem como $x = 0.0$, os termos dos operadores de carga são os mesmos para o método de Green-Newmark (aproximações (2.98)) e método de Newmark. Demais comparações podem ser realizadas entre as duas metodologias, em função dos parâmetros de Newmark adotados.

De acordo com a experiência do autor, aproximações do tipo (2.97) ou (2.98) fornecem bons resultados, adotando-se passos de tempo usualmente considerados para se evitar erros substanciais em relação à matriz de amplificação. Desta forma, na escolha do passo de tempo de análise, as restrições relativas aos operadores de carga geralmente não são consideravelmente mais significativas do que as restrições relativas à matriz de amplificação.

Para uma abordagem mais ampla a cerca do método implícito de Green / pseudo-forças, as seguintes referências são indicadas: SOARES JR & MANSUR (2003, 2004b, 2004c). Como literatura correlacionada, o trabalho de FUNG (1997) é mencionado.

2.4. Aplicações numéricas

Neste subitem, alguns resultados relativos ao método de elementos de contorno e ao método de elementos finitos são apresentados (problema dinâmico). As abordagens aqui consideradas focam as contribuições originais do presente trabalho na literatura (e.g., truncamento do processo de convolução, método implícito de Green etc.).

2.4.1. Elementos de contorno

O primeiro exemplo de aplicação é referente à análise de uma coluna retangular (estado plano de deformação), sujeita a um carregamento do tipo Heaviside (MANSUR, 1983). Um modelo esquemático da coluna em questão é apresentado na Figura 2.2(a).

Para o tratamento numérico do modelo proposto, adota-se o método dos elementos de contorno com formulações baseadas em soluções fundamentais dinâmicas e estáticas. A malha de elementos de contorno adotada é composta de 48 elementos lineares (Figura 2.2(b)). Para o caso da solução por elementos de contorno com soluções fundamentais estáticas, adotam-se 256 células triangulares lineares de integração ao longo do domínio (Figura 2.2(c)).

As propriedades físicas da coluna são: $\nu = 0.25$ (Poisson); $m = 40MPa$ (Módulo de cisalhamento); $c_d = 346.41m/s$ (velocidade da onda de dilatação); $c_s = 200m/s$ (velocidade da onda de cisalhamento). Geometricamente a coluna é definida por: $a = 2m$; $b = 4m$. O carregamento aplicado é uniformemente distribuído na extremidade superior da coluna, sendo este, ao longo do tempo, do tipo Heaviside com amplitude unitária.

Para análise com elementos de contorno baseada em soluções fundamentais dinâmicas, o passo de tempo adotado é: $\Delta t = 7.5 \cdot 10^{-4}s$ ($b \approx 1$, onde $b = c_d \Delta t / l$, sendo l o comprimento do elemento de contorno); usando-se formulação baseada em soluções fundamentais estáticas, o passo de tempo considerado é: $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-4}s$ ($b \approx 1/3$). De acordo com a literatura especializada, estas discretizações temporais são indicadas para o modelo e os métodos numéricos em análise (MANSUR, 1983; CARRER, 1991).

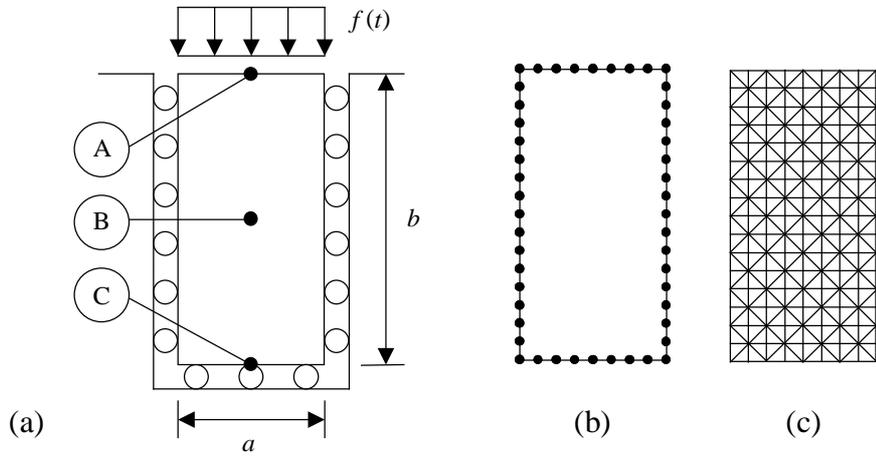


Figura 2.2 – Análise com elementos de contorno: (a) modelo esquemático; (b) malha de elementos de contorno; (c) malha de células de integração.

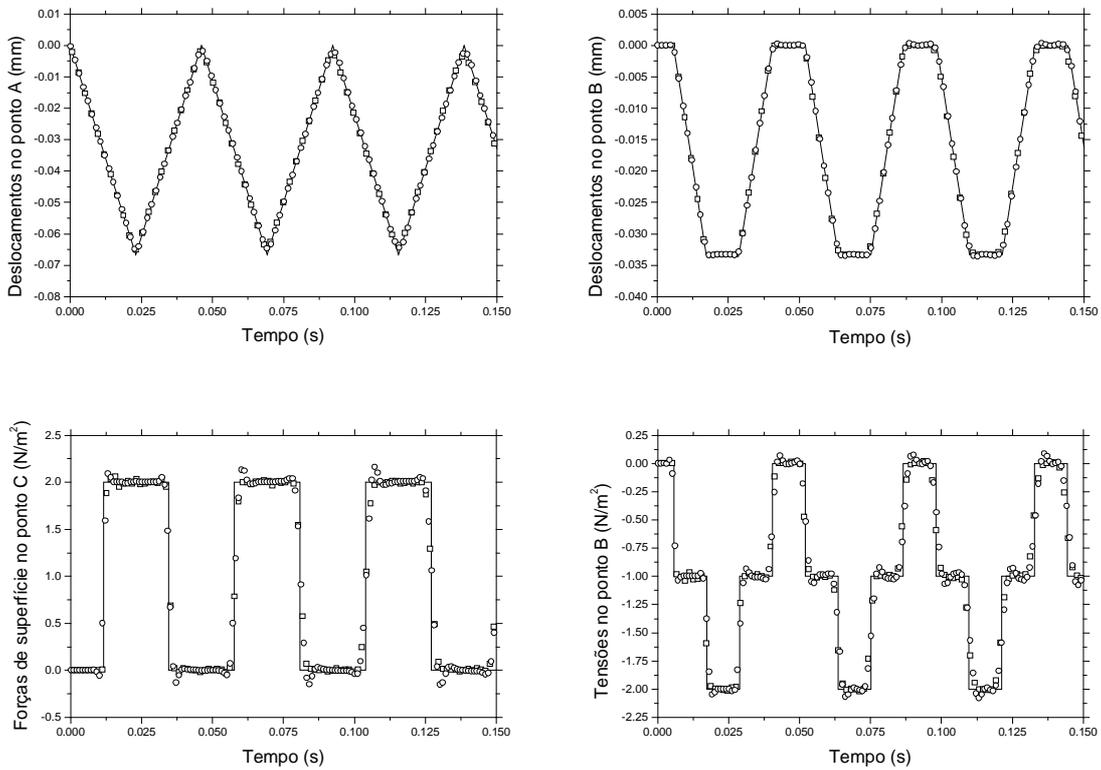


Figura 2.3 – Deslocamentos, forças de superfície e tensões no modelo considerando análise por elementos de contorno: \square MEC com soluções fundamentais dinâmicas; \circ MEC com soluções fundamentais estáticas; — Solução analítica.

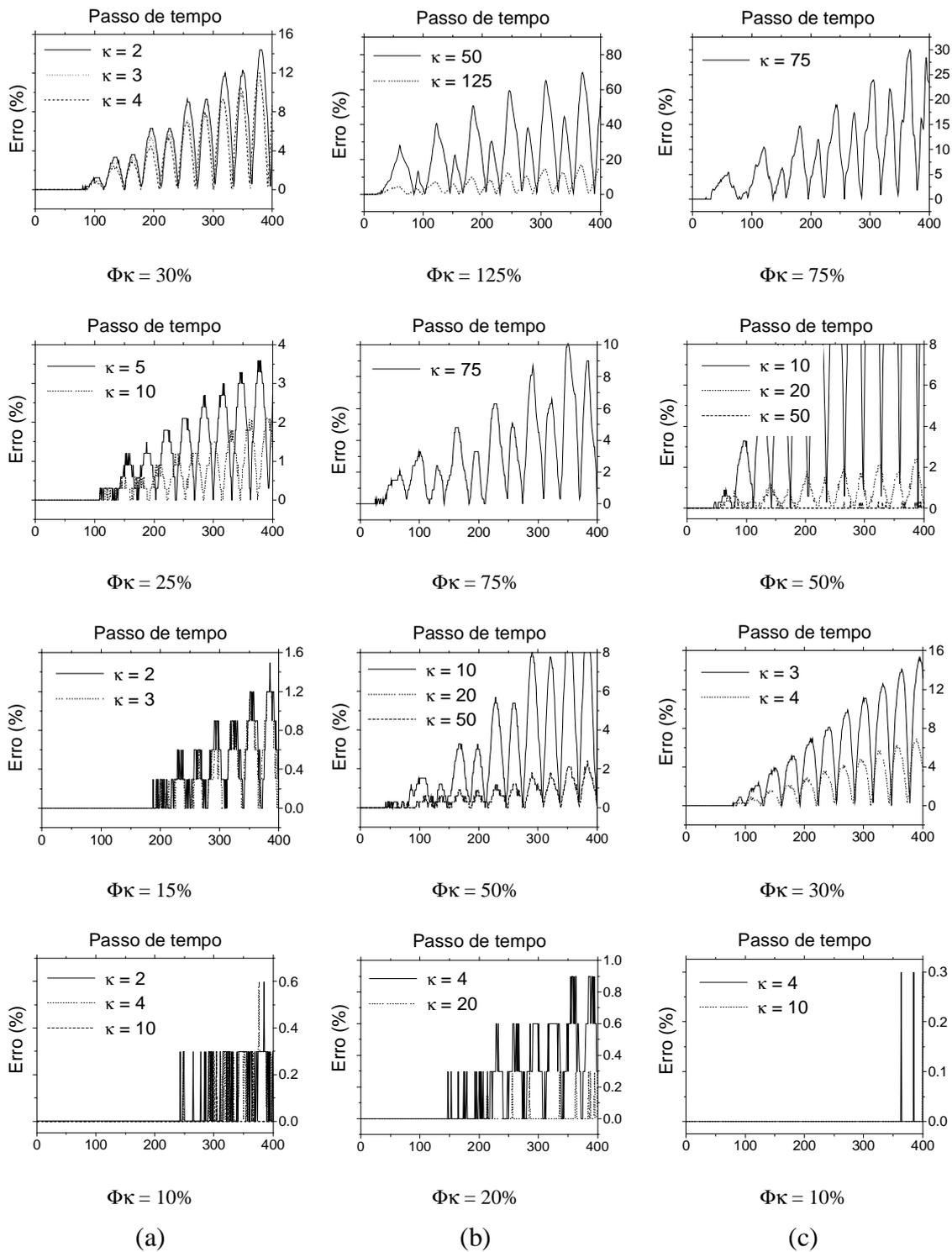


Figura 2.4 – Erros resultantes do truncamento da convolução considerando-se diversos valores para os parâmetros Φ e κ : interpolação multi-linear (a) $\Theta = 0.0$; (b) $\Theta = 0.5$; (c) interpolação com polinômios de Chebyshev-Lagrange

Tabela 2.3 – Custo da análise considerando truncamento da convolução

<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td style="text-align: center;">Φ</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">κ</td> </tr> </table>	Φ	κ	Tempo de CPU* (%)						Memória* (%)										
	Φ																		
κ																			
	15	10	7.5	5	2.5	1	15	10	7.5	5	2.5	1	15	10	7.5	5	2.5	1	%
2	30	51	59	73	-	-	30	51	59	73	-	-	20	33	44	58	-	-	
3	-	30	43	60	-	-	-	30	43	60	-	-	-	20	29	44	-	-	
4	-	-	31	48	74	-	-	-	32	48	74	-	-	-	20	34	59	-	
5	-	-	-	39	67	-	-	-	-	39	67	-	-	-	-	26	51	-	
10	-	-	-	16	40	75	-	-	-	18	41	75	-	-	-	10	28	60	
20	-	-	-	-	20	52	-	-	-	-	25	54	-	-	-	-	13	38	
50	-	-	-	-	24	32	-	-	-	-	32	38	-	-	-	-	15	20	
75	-	-	-	-	-	35	-	-	-	-	-	49	-	-	-	-	-	23	

Multi-linear

Chebyshev-Lagrange

(*) 100% quando $\Phi = 0\%$

Apresenta-se na Figura 2.3 resultados de deslocamentos, forças de superfície e tensões, para alguns pontos da coluna (pontos A, B e C, ver Figura 2.2(a)). Resultados analíticos (MILES, 1961) também são apresentados na Figura 2.3. Conforme se pode notar, ambas metodologias de elementos de contorno fornecem bons resultados em termos de precisão. Os resultados para tensões no ponto B (MEC com soluções fundamentais dinâmicas), apresentados na Figura (2.3), são obtidos pelo método da derivada complexa, de acordo com SOARES JR *et al.* (2002).

Embora a precisão dos resultados baseados em soluções fundamentais dinâmicas seja boa, seu custo computacional é elevado: o processo de convolução desta formulação é computacionalmente muito oneroso. Para se obter uma formulação mais eficiente, adota-se na presente aplicação os procedimentos de truncamento do processo de convolução previamente discutidos (Tabela 2.1). Considerando-se diversos valores para os parâmetros de truncamento k , Φ e Θ , gráficos de erro (soluções truncadas em relação a soluções sem truncamento) ao longo dos passos de tempo são apresentados na Figura 2.4. Os ganhos computacionais obtidos com a adoção do truncamento do processo de convolução (em relação a análises não truncadas) são apresentados na Tabela 2.3. Conforme se pode notar, grande economia no processamento computacional pode ser obtida por intermédio do truncamento proposto, sem grande perda de precisão nos resultados.

Resultados para deslocamentos no ponto A, considerando-se alguns procedimentos de truncamento, são apresentados na Figura 2.5. Soluções fundamentais dinâmicas apresentam contínuo decaimento de amplitude com o tempo, semelhante a funções do tipo $f(t) = t^{-1}$. Desta forma, interpolações lineares das mesmas são sempre superestimadas. Uma vez que para $b \approx 1$ soluções com elementos de contorno

geralmente introduzem pequeno amortecimento numérico, os resultados relacionados ao truncamento do tipo multi-linear, presentes na Figura 2.5, estão mais próximos da solução analítica que os resultados não truncados (a solução fundamental é superestimada).

Os procedimentos de truncamento da convolução são especialmente úteis quando da análise de meios infinitos (SOARES JR & MANSUR, 2004a). Para estes tipos de aplicação, os erros associados são consideravelmente menores, o que possibilita a adoção de parâmetros de truncamento que impliquem em maior ganho computacional. Desta forma, acoplando-se elementos de contorno com elementos finitos, o método de elementos de contorno torna-se uma poderosa ferramenta para modelagem de contornos não reflexivos.

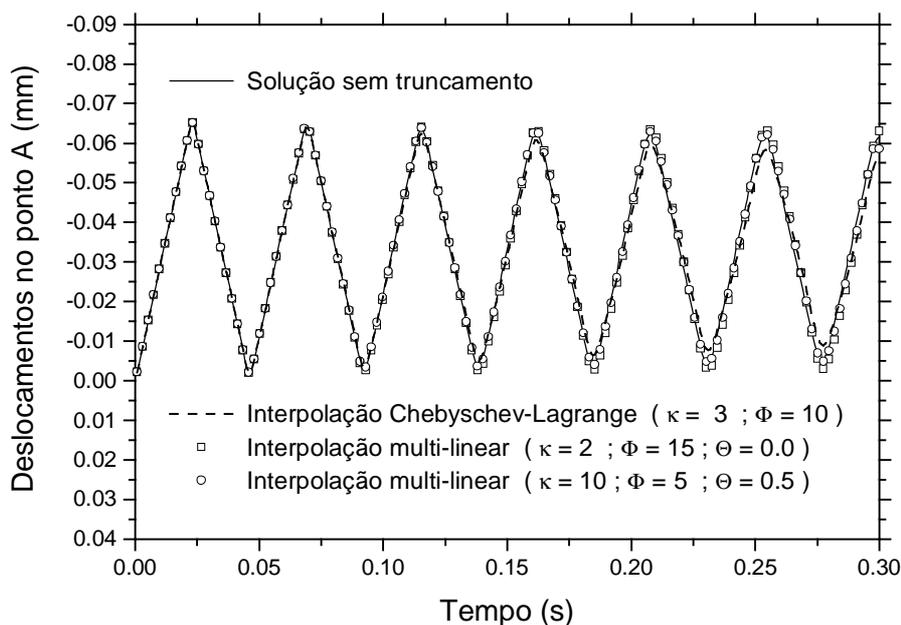


Figura 2.5 – Deslocamentos no ponto A ($a/2, b$) levando-se em consideração truncamento do processo de convolução.

2.4.2. Elementos finitos

Analisa-se aqui uma laje em balanço, conforme esquematizado pela Figura 2.6(a) (SOARES JR & MANSUR, 2004b). O presente modelo é sujeito a um carregamento uniformemente distribuído, aplicado sobre a superfície superior da laje. O carregamento em questão é do tipo Heaviside no tempo. 800 elementos finitos (triangulares lineares) são adotados na discretização do modelo, conforme mostra a Figura 2.6(b).

As propriedades físicas do sistema em questão são: $\nu = 1/3$ (Poisson); $E = 100N/m^2$ (Módulo de Young); $\rho = 1.5Ns^2/m^4$ (massa específica). Critério de escoamento de von Mises é considerado, sendo a tensão de escoamento $\sigma_0 = 0.16N/m^2$. Geometricamente a laje é definida por: $a = 1.00m$; $b = 0.25m$. O passo de tempo adotado é dado por: $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-2}s$.

Resultados para os deslocamentos verticais no ponto A (Figura 2.6(a)) são apresentados na Figura 2.7. Nas análises aqui realizadas com o método de Green-Newmark e Newmark, adota-se a regra trapezoidal para definição dos parâmetros de Newmark. No caso da solução elástica do modelo, os resultados com os métodos de Green-Newmark e de Newmark são praticamente coincidentes, sendo traçados apenas uma vez na Figura 2.7.

Para o caso elastoplástico, duas análises são realizadas considerando-se o método de Newmark / Newton-Raphson: a primeira adota uma tolerância bem apertada para a convergência do processo iterativo a fim de ser ter boa precisão (tolerância 10^{-5} na checagem de resíduos e deslocamentos); a segunda não faz uso do processo iterativo quando da solução (análise passo a passo no tempo). Conforme se pode notar por

intermédio da Figura 2.7, o método implícito de Green, associado a pseudo-forças, fornece bons resultados sem fazer uso de nenhum processo iterativo para o tratamento não-linear. O mesmo não acontece em relação ao método de Newmark / Newton-Raphson.

Resultados relativos ao método de Newmark com pseudo-forças também são apresentados na Figura 2.7. Adotando-se uma boa tolerância para a convergência do processo iterativo, os resultados de Newmark / pseudo-forças convergem para os resultados de Newmark / Newton-Raphson apresentados na Figura 2.7 (com processo iterativo). Limitando-se a análise a 2 iterações por passo de tempo, a precisão do método de Newmark / pseudo-forças também é afetada, como se mostra na Figura 2.7.

Comparando-se o tempo de CPU, o método implícito de Green / pseudo-forças tem um custo de aproximadamente 43% do método de Newmark / Newton-Raphson (tolerância 10^{-3}), para a presente aplicação.

Conforme se pode perceber pelo presente exemplo, o método implícito de Green mostra-se uma poderosa e eficiente ferramenta de análise. A fim de se avaliar sua precisão para variadas escolhas dos parâmetros de Newmark (b e g), resolve-se a seguir o problema massa-mola (sistema com um grau de liberdade, não amortecido) sujeito à condição inicial de deslocamento unitário. Gráficos de erros (decaimento de amplitude e alongamento do período) em relação à solução analítica (função co-seno) são apresentados na Figura 2.8, considerando-se os métodos de Newmark e Green-Newmark. Os gráficos relativos à regra trapezoidal ($b = 0.25$ e $g = 0.50$) também são traçados para comparação (na regra trapezoidal, as matrizes de amplificação dos métodos de Newmark e Green-Newmark são iguais).

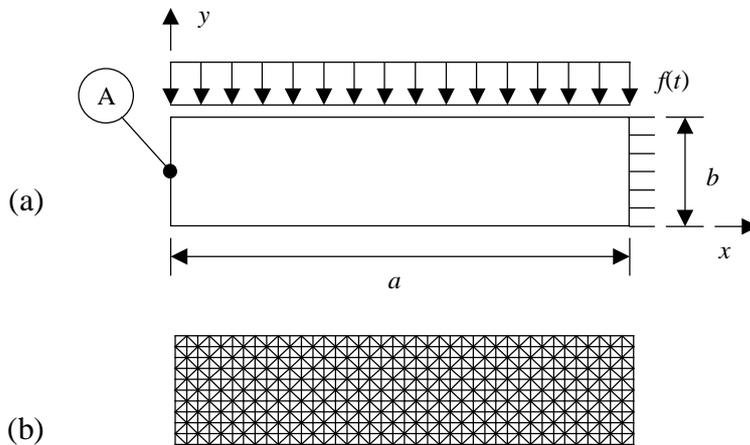


Figura 2.6 – Análise com elementos finitos: (a) modelo esquemático; (b) malha de elementos finitos.

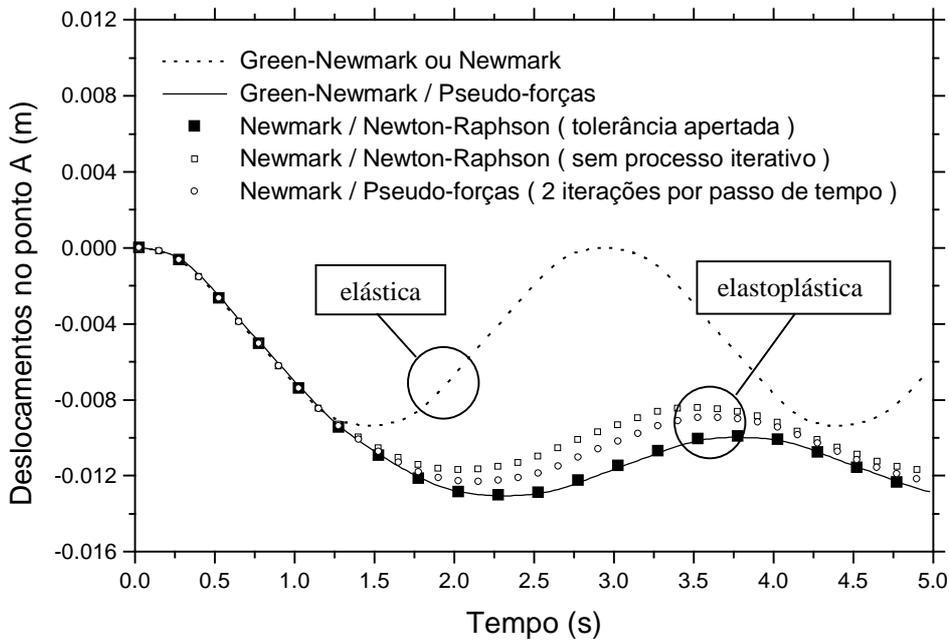


Figura 2.7 – Deslocamentos no ponto A ($0, b/2$) considerando-se análise elástica e elastoplástica por elementos finitos: solução no tempo pelos métodos de Newmark e de Green-Newmark.

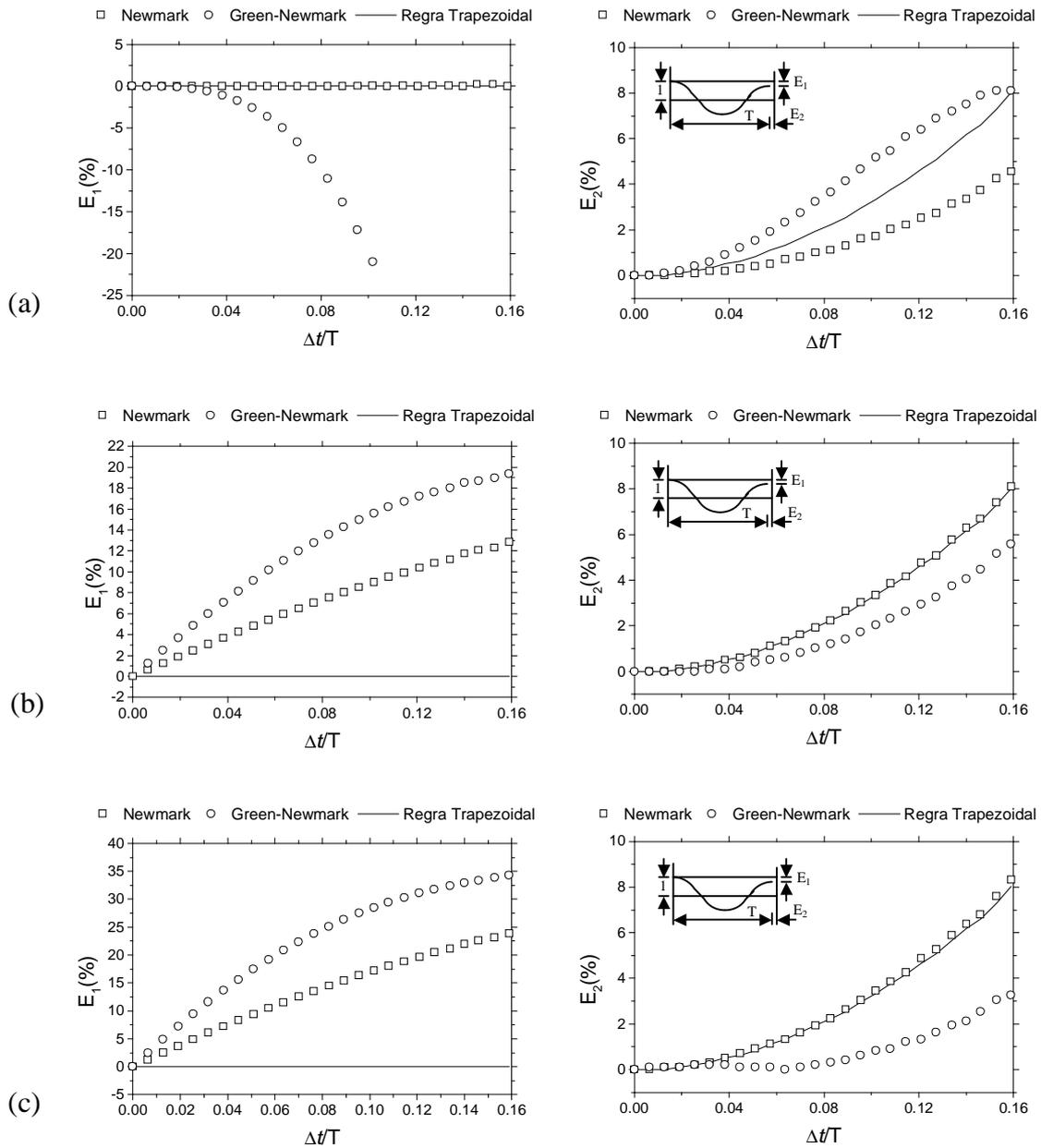


Figura 2.8. Decaimento de amplitude (E_1) e alongamento de período (E_2) considerando-se algumas escolhas de b e g para os métodos de Newmark e Green-Newmark:
 (a) $b = 0.00$ e $g = 0.50$; (b) $b = 0.27563$ e $g = 0.55$; (c) $b = 0.3025$ e $g = 0.60$
 (Regra trapezoidal: $b = 0.25$ e $g = 0.50$).

Quando da escolha de parâmetros b e g que proporcionam amortecimento numérico, tal amortecimento geralmente é mais acentuado, considerando-se pequenos passos de tempo, no método de Green-Newmark (para passos de tempos maiores a situação se inverte). Desta forma, os decaimentos de amplitude, apresentados na Figura 2.8, são mais elevados quando se considera o método de Green. O alongamento do período, em contrapartida, é maior para o método de Newmark. Para valores $b = 0.0$ e $g = 0.5$ (diferenças centrais) o método de Newmark é condicionalmente estável; o método de Green-Newmark, por outro lado, é instável, a menos que amortecimento seja considerado.

3

**Sistemas com
acoplamento de interface**

3.1. Introdução

No presente capítulo se inicia a análise de sistemas acoplados. Sistemas com acoplamento de interface são aqui considerados, estando a análise de sistemas com acoplamento de domínio a cargo do próximo capítulo.

Considera-se neste capítulo acoplamento entre sistemas fisicamente similares bem como entre sistemas fisicamente distintos. Em ambos os casos, acoplamentos entre diferentes técnicas de discretização são aqui enfocados; mais em específico, acoplamentos entre diferentes metodologias de elementos de contorno e de elementos finitos.

Variadas técnicas de acoplamento são apresentadas ao longo do texto, sendo boa parte das mesmas contribuições originais do presente trabalho. As diferentes técnicas aqui apresentadas são discutidas e comparadas entre si, destacando-se as vantagens e limitações relacionadas. Ao fim do presente capítulo uma ampla gama de exemplos numéricos, ricamente ilustrados, são apresentados. A análise dos resultados obtidos ao longo dos exemplos estende a discussão relativa às diferentes técnicas de acoplamento neste trabalho consideradas. Problemas de interação do tipo solo-fluido-estrutura são aqui enfocados, sendo esta uma aplicação típica em engenharia, relacionada a acoplamentos de interface.

Ao longo do presente capítulo uma série de tabelas são apresentadas, resumindo os passos básicos referentes a cada algoritmo de acoplamento abordado. Procura-se, desta forma, facilitar a compreensão e implementação computacional dos mesmos.

3.2. Acoplamento entre sistemas fisicamente similares

O presente subitem aborda o acoplamento de interface entre sistemas que descrevem fenômenos físicos similares. Problemas de interação do tipo estrutura-estrutura, fluido-fluido etc., se enquadram nesta categoria de acoplamento. O enfoque do presente subitem está no acoplamento entre diferentes processos de discretização, em específico: acoplamentos tipo MEC-MEF e MEC-MEC.

No texto que se segue, discute-se tão somente acoplamento de sistemas do tipo sólido-sólido. Outros tipos de acoplamento, cabíveis a este subitem (fluido-fluido etc.), apresentam formulação semelhante, podendo ser facilmente deduzidos a partir da metodologia aqui apresentada.

3.2.1. Acoplamento MEC-MEF

Estando o modelo dividido em sub-regiões modeladas por elementos de contorno (sub-índice C) e por elementos finitos (sub-índice F), a interface (Γ_I) entre estas sub-regiões deve atender às seguintes condições, a cada passo de tempo, considerando-se acoplamento do tipo sólido-sólido (SOARES JR & VON ESTORFF, 2004):

(i) Condições de interface (ao longo da interface de acoplamento Γ_I):

$${}_F \mathbf{F}^n + {}_C \tilde{\mathbf{T}}^n = \mathbf{0} \quad (3.1a)$$

$${}_F \mathbf{U}^n - {}_C \mathbf{U}^n = \mathbf{0} \quad (3.1b)$$

onde as equações (3.1a) e (3.1b) representam as condições de equilíbrio e continuidade na interface de acoplamento, respectivamente. Para se obter consistência entre a

formulação de elementos de contorno e a de elementos finitos, adota-se $\tilde{\mathbf{T}}$ para simbolizar forças nodais equivalentes, obtidas a partir da distribuição de forças de superfície \mathbf{T} .

Três formulações distintas são aqui apresentadas para o acoplamento MEC-MEF, sendo estas: acoplamento padrão; acoplamento iterativo; e acoplamento direto. Discute-se a seguir cada uma destas formulações e apresentam-se tabelas com algoritmos básicos de solução para cada tipo de acoplamento.

3.2.1.1. Acoplamento padrão

No acoplamento padrão aqui considerado, as matrizes de elementos de contorno e de elementos finitos são acopladas, formando um sistema final único de equações. Desta forma, considerando-se acoplamentos do tipo sólido-sólido, o sistema final de equações que se obtém é algo do tipo (VON ESTORFF, 1992):

$$\begin{bmatrix} \boxed{F \mathbf{M}} & \mathbf{0} \\ \boxed{\phantom{F \mathbf{M}}} & \boxed{} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \mathbf{U}^n \\ I \mathbf{U}^n \\ C \mathbf{U}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boxed{F \mathbf{C}} & \mathbf{0} \\ \boxed{\phantom{F \mathbf{C}}} & \boxed{} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \mathbf{U}^n \\ I \mathbf{U}^n \\ C \mathbf{U}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boxed{F \mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \boxed{\phantom{F \mathbf{K}}} & \boxed{} \\ \mathbf{0} & \boxed{C \mathbf{K}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \mathbf{U}^n \\ I \mathbf{U}^n \\ C \mathbf{U}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \mathbf{F}^n \\ I \mathbf{F}^n \\ C \mathbf{F}^n \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

onde os sub-índices C e F dizem respeito à formulação por elementos de contorno e por elementos finitos, respectivamente, e o sub-índice I é relativo a grandezas na interface de acoplamento.

Para se deduzir o sistema acoplado do tipo (3.2) partindo-se da formulação de elementos de contorno baseada em soluções fundamentais dinâmicas (equação (3.3)) e da formulação linear de elementos finitos (equação (3.4)),

$$\mathbf{A}\mathbf{X}^n = \mathbf{B}\mathbf{Y}^n + \mathbf{L}^n + \mathbf{S}^n \quad (3.3)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^n + \mathbf{K}\mathbf{U}^n = \mathbf{F}^n \quad (3.4)$$

inicialmente reescreve-se as equações de MEC conforme indicado a seguir:

$$\begin{bmatrix} {}_I \mathbf{T}^n \\ {}_0 \mathbf{T}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_{II} \bar{\mathbf{A}} & {}_{I0} \bar{\mathbf{A}} \\ {}_{0I} \bar{\mathbf{A}} & {}_{00} \bar{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_I \mathbf{U}^n \\ {}_0 \mathbf{U}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}_I \bar{\mathbf{L}}^n \\ {}_0 \bar{\mathbf{L}}^n \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} {}_I \mathbf{U}^n \\ {}_0 \mathbf{U}^n \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{L}}^n \quad (3.5)$$

onde a matriz $\bar{\mathbf{A}}$ e o vetor $\bar{\mathbf{L}}^n$ são dados por:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \quad (3.6)$$

$$\bar{\mathbf{L}}^n = -\mathbf{B}^{-1} (\mathbf{L}^n + \mathbf{S}^n) \quad (3.7)$$

e os vetores ${}_0 \mathbf{T}^n$ e ${}_0 \mathbf{U}^n$ são especificados em (3.8) sendo os sub-índices 1 e 2 relativos às grandezas nos contornos Γ_1 e Γ_2 , respectivamente.

$${}_0 \mathbf{T}^n = [{}_1 \mathbf{U}^n \quad {}_2 \mathbf{T}^n]^T \quad (3.8a)$$

$${}_0 \mathbf{U}^n = [{}_1 \mathbf{T}^n \quad {}_2 \mathbf{U}^n]^T \quad (3.8b)$$

Isolando-se ${}_0 \mathbf{U}^n$ a partir da parte inferior da equação (3.5), tem-se:

$${}_0 \mathbf{U}^n = {}_0 \mathbf{K} {}_I \mathbf{U}^n - {}_0 \mathbf{F}^n \quad (3.9)$$

sendo ${}_0\mathbf{K}$ e ${}_0\mathbf{F}^n$ dados por (adota-se $\hat{\mathbf{K}} = {}_{00}\bar{\mathbf{A}}^{-1}$):

$${}_0\mathbf{K} = -\hat{\mathbf{K}} {}_{0I}\bar{\mathbf{A}} \quad (3.10)$$

$${}_0\mathbf{F}^n = \hat{\mathbf{K}} ({}_0\bar{\mathbf{L}}^n - {}_0\mathbf{T}^n) \quad (3.11)$$

Substituindo-se ${}_0\mathbf{U}^n$ na parte superior da equação (3.5) e adotando-se ${}_I\tilde{\mathbf{T}}^n = \mathbf{E} {}_I\mathbf{T}^n$ (a transformação das forças de superfície em forças nodais equivalentes é aqui representada pela matriz \mathbf{E}), pode-se escrever a equação de elementos de contorno de forma apropriada para o acoplamento com elementos finitos, conforme se indica a seguir, em (3.12):

$${}_I\tilde{\mathbf{T}}^n = {}_c\mathbf{K} {}_I\mathbf{U}^n - {}_c\mathbf{F}^n \quad (3.12)$$

onde ${}_c\mathbf{K}$ e ${}_c\mathbf{F}^n$ são dados por (adota-se $\bar{\mathbf{K}} = {}_{I0}\bar{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{K}}$):

$${}_c\mathbf{K} = \mathbf{E} \{ {}_{II}\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{K}} {}_{0I}\bar{\mathbf{A}} \} \quad (3.13)$$

$${}_c\mathbf{F}^n = \mathbf{E} \{ \bar{\mathbf{K}} ({}_0\bar{\mathbf{L}}^n - {}_0\mathbf{T}^n) - {}_I\bar{\mathbf{L}}^n \} \quad (3.14)$$

e a matriz \mathbf{E} é definida como função das funções de interpolação espaciais em uso:

$$\mathbf{E}_{ij} = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j d\Gamma \quad (3.15)$$

Por fim, fazendo uso das equações (3.4) e (3.12), e levando-se em consideração as condições de interface (3.1), o seguinte sistema acoplado de equações pode ser obtido, tendo-se por base o método de elementos finitos:

$$\begin{bmatrix} {}_{00}\mathbf{M} & {}_{0I}\mathbf{M} \\ {}_{I0}\mathbf{M} & {}_{II}\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_0\mathbf{U}^n \\ {}_I\mathbf{U}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}_{00}\mathbf{C} & {}_{0I}\mathbf{C} \\ {}_{I0}\mathbf{C} & {}_{II}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_0\mathbf{U}^n \\ {}_I\mathbf{U}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}_{00}\mathbf{K} & {}_{0I}\mathbf{K} \\ {}_{I0}\mathbf{K} & {}_{II}\mathbf{K} + {}_C\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_0\mathbf{U}^n \\ {}_I\mathbf{U}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_0\mathbf{F}^n \\ {}_C\mathbf{F}^n \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

O sistema de equações (3.16), por sua vez, pode ser re-escrito de forma mais compacta, conforme segue:

$$\mathbf{M}\mathbf{U}^n + \mathbf{C}\mathbf{U}^n + {}_{CF}\mathbf{K}\mathbf{U}^n = {}_{CF}\mathbf{F}^n \quad (3.17)$$

Estando a equação (3.17) estabelecida, analogias com a solução por elementos finitos podem ser adotadas para solução do sistema acoplado. Desta forma, o tratamento do problema (3.17) – solução no tempo e consideração de possíveis não linearidades – é realizado de forma análoga a problemas não acoplados, considerando-se o método dos elementos finitos.

Tabela 3.1 – Algoritmo para acoplamento padrão MEC-MEF (sólido-sólido)

(1) *Cálculos iniciais:*

(1.1) Cálculos básicos relativos ao MEC e ao MEF (matrizes ${}_C\mathbf{K}$, ${}_0\mathbf{K}$, \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} etc.);

(1.2) Cálculo do sistema acoplado: obter ${}_{CF}\mathbf{K}$;

(2) *Loop no tempo:*

(2.1) Início dos cálculos a cada passo de tempo ($t = t + \Delta t$): obter ${}_{CF}\mathbf{F}^t$ etc.;

(2.2) Resolver MEC-MEF: $\mathbf{M}\mathbf{U}^t + \mathbf{C}\mathbf{U}^t + {}_{CF}\mathbf{K}\mathbf{U}^t = {}_{CF}\mathbf{F}^t$

Resolver o sistema acoplado obtendo resultados para os subdomínios de MEC e MEF, inclusive interface (considerar possíveis loops iterativos para tratamento de não-linearidades associadas);

(2.3) Atualização (e impressão) dos resultados de MEC e de MEF.

Um algoritmo básico de solução, considerando-se o acoplamento padrão MEC-MEF, é apresentado na Tabela 3.1. Para maiores detalhes sobre o acoplamento padrão discutido neste subitem, as seguintes referências são indicadas ao leitor: VON ESTORFF & PRABUCKI (1990); VON ESTORFF & FIRUZIAAN (2000).

3.2.1.2. Acoplamento iterativo

A idéia básica do acoplamento iterativo aqui em consideração consiste em, estando o domínio relativo ao problema original dividido em sub-regiões modeladas pelo MEC e pelo MEF, resolver-se independentemente cada sub-região do modelo, prescrevendo iterativamente condições transientes de contorno nas interfaces de acoplamento até que convergência seja alcançada (SOARES JR *et al.*, 2004a).

Esta metodologia mostra-se bastante atrativa, uma vez que permite que sistemas de equações relativos ao MEC e ao MEF possam ser resolvidos de forma independente e desacoplada. O presente trabalho busca uma ampla independência entre a modelagem por elementos finitos e por elementos de contorno quando do acoplamento MEC-MEF. Assim sendo, procedimentos especiais de interpolação e extrapolação são adotados, de forma que diferentes passos de tempo possam ser considerados em cada subdomínio, bem como diferentes discretizações espaciais (por diferentes discretizações espaciais entenda-se ausência de direta correspondência de nós na interface de acoplamento).

O acoplamento aqui em consideração é relativo às formulações de elementos de contorno e elementos finitos apresentadas nos subitens 2.3.2.1 e 2.3.3.1, respectivamente. Inicialmente, como parte da metodologia de solução empregando acoplamento iterativo, o problema de elementos finitos é isoladamente resolvido

(sistema de equações desacoplado), calculando-se os deslocamentos ${}^{(k+a)}_F \mathbf{U}_{F^t}$ ao longo de todo subdomínio modelado por MEF, inclusive nas interfaces de acoplamento. Uma vez calculado ${}^{(k+a)}_F \mathbf{U}_{F^t}$ nas interfaces, adota-se um parâmetro de relaxamento a , conforme indicado em (3.18) para se garantir e/ou acelerar a convergência do processo iterativo.

$${}^{(k+1)}_F \mathbf{U}_{F^t} = a {}^{(k+a)}_F \mathbf{U}_{F^t} + (1-a) {}^{(k)}_F \mathbf{U}_{F^t} \quad (3.18)$$

Para um estudo relativo ao parâmetro a , considerando-se problemas lineares estáticos, o trabalho de ELLEITHY *et al.* (2001a) é indicado como referência. A escolha ótima do parâmetro a é caso dependente, sendo função das condições de contorno prescritas, propriedades físicas e geométricas dos subdomínios, densidade de malhas etc.. Para problemas dinâmicos não-lineares, a experiência do autor mostra que, de forma genérica, $a = 0.5$ fornece bons resultados em termos de estabilidade (valores extremos para o parâmetro a , i.e., $a \gg 1$, podem resultar em não convergência).

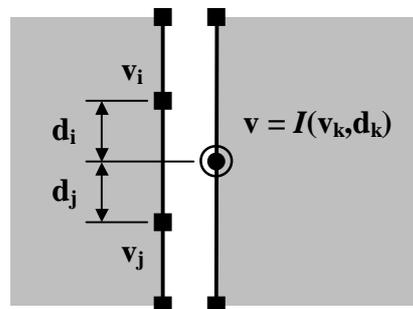


Figura 3.1 – Procedimentos de interpolação no espaço: obtenção de valores v a partir de interpolações de valores v_k e d_k na interface correspondente (interpolação linear: $v = (v_i d_j + v_j d_i) / (d_j + d_i)$).

Estando os deslocamentos ${}^{(k+1)}_F \mathbf{U}^{Ft}$ calculados na interface de elementos finitos, estes podem ser usados para obtenção dos deslocamentos ${}^{(k+1)}_C \mathbf{U}^{ct}$ na interface de elementos de contorno. Assim sendo, caso seja necessário, os valores ${}^{(k+1)}_F \mathbf{U}^{Ft}$ podem ser interpolados espacialmente, conforme esquematizado na Figura 3.1, a fim de se obter ${}^{(k+1)}_C \mathbf{U}^{Ft}$. Os valores ${}^{(k+1)}_C \mathbf{U}^{Ft}$, por sua vez, podem ser extrapolados no tempo, conforme esquematizado na Figura 3.2(a), a fim de se obter ${}^{(k+1)}_C \mathbf{U}^{ct}$. Uma vez que as funções de interpolação de elementos de contorno $f_u(t)$ são geralmente adotadas como sendo lineares, tem-se para a extrapolação no tempo em questão:

$${}^{(k+1)}_C \mathbf{U}^{ct} = {}^{(k+1)}_C \mathbf{U}^{Ft} ({}_C \Delta t / {}_{CF} \Delta t) + {}_C \mathbf{U}^{ct-c\Delta t} (1 - {}_C \Delta t / {}_{CF} \Delta t) \quad (3.19)$$

O problema de elementos de contorno pode então ser resolvido, tendo-se deslocamentos ${}^{(k+1)}_C \mathbf{U}^{ct}$ como condição de contorno prescrita nas interfaces de acoplamento. Resolvendo-se o problema de elementos de contorno, obtém-se ${}^{(k+1)}_C \mathbf{T}^{ct}$ nas interfaces de acoplamento.

Estando as forças de superfície ${}^{(k+1)}_C \mathbf{T}^{ct}$ calculadas na interface de elementos de contorno, estas podem ser usadas para o cálculo de ${}^{(k+1)}_F \mathbf{T}^{Ft}$ na interface de elementos finitos. Assim sendo, caso seja necessário, os valores ${}^{(k+1)}_C \mathbf{T}^{ct}$ podem ser interpolados espacialmente, conforme esquematizado na Figura 3.1, a fim de se obter ${}^{(k+1)}_F \mathbf{T}^{ct}$. Os valores ${}^{(k+1)}_F \mathbf{T}^{ct}$, por sua vez, podem ser interpolados no tempo, conforme esquematizado na Figura 3.2(b), a fim de se obter ${}^{(k+1)}_F \mathbf{T}^{Ft}$. Uma vez que as funções de

interpolação de elementos de contorno $f_t(t)$ são geralmente adotadas como sendo constantes (constantes por partes), tem-se para a interpolação no tempo em questão:

$${}^{(k+1)}\mathbf{T}_F{}^{F^t} = {}^{(k+1)}\mathbf{T}_F{}^{C^t} \quad (3.20)$$

Estando as forças de superfície ${}^{(k+1)}\mathbf{T}_F{}^{F^t}$ calculadas, estas são transformadas em forças nodais equivalentes ${}^{(k+1)}\mathbf{F}_F{}^{F^t}$ e faz-se a checagem de convergência associada ao processo iterativo (procedimentos de checagem relativos a algoritmos iterativos de MEF para tratamento não-linear podem ser aqui mantidos, e.g., análise de normas de energia, resíduos e/ou deslocamentos). Caso haja convergência, atualizam-se grandezas e parte-se para o próximo passo de tempo; caso não haja convergência, parte-se para o próximo passo iterativo.

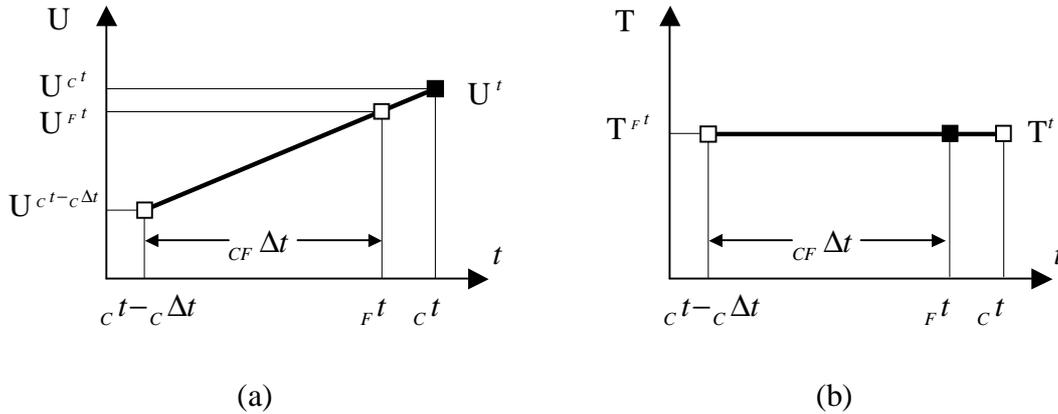


Figura 3.2 – Procedimentos de interpolação-extrapolação no tempo: (a) extrapolação no tempo de \mathbf{U}^{F^t} para se obter \mathbf{U}^{C^t} ($\mathbf{U}^{C^t} = \mathbf{U}^{F^t} (C \Delta t / C_F \Delta t) + \mathbf{U}^{C^t - C \Delta t} (1 - C \Delta t / C_F \Delta t)$);

(b) interpolação no tempo de \mathbf{T}^{C^t} para se obter \mathbf{T}^{F^t} ($\mathbf{T}^{F^t} = \mathbf{T}^{C^t}$).

Tabela 3.2 – Algoritmo para acoplamento iterativo MEC-MEF (sólido-sólido)

(1) *Cálculos iniciais:*

- (1.1) Seleção de passos de tempo para cada subdomínio (${}_C \Delta t$ e ${}_F \Delta t$). As seguintes atribuições iniciais são consideradas: ${}_C t = {}_C \Delta t$ e ${}_F t = 0$;
- (1.2) Cálculos básicos relativos ao MEC e ao MEF (matrizes **A**, **B** etc.);
- (1.3) Atribuição de valores iniciais para as forças nodais de MEF nas interfaces de acoplamento, e.g., ${}^{(0)}_F \mathbf{F} = \mathbf{0}$;

(2) *Loop no tempo:*

(2.1) Início dos cálculos a cada passo de tempo:

${}_F t = {}_F t + {}_F \Delta t$ (caso ${}_F t > {}_C t$: adotar ${}_C t = {}_C t + {}_C \Delta t$ e calcular os vetores \mathbf{L}^{c^t} e \mathbf{S}^{c^t});

(2.2) *Loop iterativo:*

(2.2.1) Resolver MEF: obter os deslocamentos, inclusive na interface ${}^{(k+a)}_F \mathbf{U}^{F^t}$;

(2.2.2) Adoção do parâmetro a : ${}^{(k+1)}_F \mathbf{U}^{F^t} = a {}^{(k+a)}_F \mathbf{U}^{F^t} + (1-a) {}^{(k)}_F \mathbf{U}^{F^t}$;

(2.2.3) Obter ${}^{(k+1)}_C \mathbf{U}^{c^t}$ de ${}^{(k+1)}_F \mathbf{U}^{F^t}$

(interpolação espacial e/ou extrapolação temporal);

(2.2.4) Resolver MEC: obter as forças de superfície na interface ${}^{(k+1)}_C \mathbf{T}^{c^t}$;

(2.2.5) Obter ${}^{(k+1)}_F \mathbf{T}^{F^t}$ de ${}^{(k+1)}_C \mathbf{T}^{c^t}$

(interpolação espacial e/ou interpolação temporal);

(2.2.6) Obter forças nodais equivalentes ${}^{(k+1)}_F \mathbf{F}^{F^t}$ a partir de ${}^{(k+1)}_F \mathbf{T}^{F^t}$;

(2.2.7) Checagem de convergência;

(2.3) Atualização (e impressão) dos resultados de MEF;

Caso ${}_F t + {}_F \Delta t > {}_C t$: atualização (e impressão) dos resultados de MEC.

Um algoritmo básico de solução, considerando-se o acoplamento iterativo MEC-MEF, é apresentado na Tabela 3.2. É importante notar que o custo computacional do acoplamento iterativo é reduzido, uma vez que a convergência geralmente é rápida e as iterações relativas ao acoplamento podem ser realizadas junto com as iterações relativas à análise não-linear. Conforme fora mencionado, o algoritmo em questão resolve os sub-sistemas de MEC e MEF separadamente. Desta forma, diferentes rotinas de solução

de sistemas de equações podem ser utilizadas, fazendo uso da esparsidade e simetria das matrizes de elementos finitos. Mais ainda, resolvendo-se os sistemas de MEC e MEF separadamente, obtém-se sistemas de equações mais bem condicionados, o que é importante para a precisão e eficiência da análise.

A adoção de procedimentos que permitem escolha de diferentes passos de tempo nos subdomínios modelados por MEC e por MEF é de extrema importância para se ter uma metodologia amplamente aplicável e de solução eficiente. Geralmente o passo de tempo ótimo para solução com MEC é bem maior que o passo de tempo ótimo para solução com MEF, e a não consideração deste fato pode gerar algoritmos instáveis de acoplamento.

Para maiores detalhes sobre o acoplamento iterativo discutido neste subitem, as seguintes referências são indicadas ao leitor: SOARES JR *et al.* (2004a); SOARES JR & VON ESTORFF (2004).

3.2.1.3. Acoplamento direto

No presente subitem, discute-se o acoplamento direto MEC-MEF. Neste tipo de acoplamento, procedimentos similares aos adotados pelo acoplamento iterativo são considerados, sendo, todavia, o processo iterativo de solução eliminado (acoplamento direto). A eliminação do processo iterativo se faz possível pela adoção do método implícito de Green (subitem 2.3.3.2) quando da solução dos subdomínios modelados por MEF. Os procedimentos de interpolação/extrapolação no tempo e no espaço apresentados no subitem precedente são aqui mais uma vez adotados.

Inicialmente, no algoritmo de acoplamento direto, o problema de elementos finitos é isoladamente resolvido (sistema de equações desacoplado), calculando-se os deslocamentos ${}_F \mathbf{U}^{F^t}$ ao longo de todo subdomínio modelado por MEF, inclusive nas interfaces de acoplamento. Pelo método de Green-Newmark, tem-se:

$$\dot{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{M} \left(c_{2F} \mathbf{U}^{F^t-F\Delta t} + c_{1F} \dot{\mathbf{U}}^{F^t-F\Delta t} \right) \quad (3.21)$$

$${}_F \mathbf{U}^{F^t} = \bar{\mathbf{U}} + c_{3F} \mathbf{U}^{F^t-F\Delta t} \quad (3.22)$$

onde $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{K} + (1/(b\Delta t^2))\mathbf{M} + (g/(b\Delta t))\mathbf{C}$ (equação (2.103)) e as constantes c_i são definidas em (2.108). A partir de ${}_F \mathbf{U}^{F^t}$ (equação (3.22)), possíveis pseudo-forças ${}_F \dot{\mathbf{R}}^{F^t}$ (tratamento não-linear) podem ser calculadas, conforme discutido no subitem 2.3.3.2.

Estando os deslocamentos ${}_F \mathbf{U}^{F^t}$ calculados na interface de elementos finitos, estes podem ser usados para obtenção dos deslocamentos ${}_C \mathbf{U}^{C^t}$ na interface de elementos de contorno, sendo os procedimentos de interpolação/extrapolação no tempo e espaço, apresentados no subitem precedente, utilizados para tal. O problema de elementos de contorno pode então ser resolvido, tendo-se deslocamentos ${}_C \mathbf{U}^{C^t}$ como condição de contorno prescrita nas interfaces de acoplamento. Resolvendo-se o problema de elementos de contorno, obtém-se ${}_C \mathbf{T}^{C^t}$ nas interfaces de acoplamento. Da mesma forma como fora considerado quando do algoritmo iterativo, a partir de ${}_C \mathbf{T}^{C^t}$ pode-se obter ${}_F \mathbf{T}^{F^t}$, e na seqüência ${}_F \mathbf{F}^{F^t}$.

Estando ${}_F \mathbf{F}^{F^t}$ e ${}_F \dot{\mathbf{R}}^{F^t}$ estabelecidos, calcula-se o vetor efetivo ${}_F \dot{\mathbf{B}}^{F^t}$ (equação (3.23)) e obtém-se as velocidades relativas ao MEF (equação (3.24)) no passo de tempo corrente.

$${}_F \dot{\mathbf{B}}^{F^t} = \mathbf{M}^{-1} ({}_F \mathbf{F}^{F^t} + {}_F \dot{\mathbf{R}}^{F^t}) {}_F \Delta t \quad (3.23)$$

$${}_F \mathfrak{E}^{F^t} = c_5 \bar{\mathbf{U}} + c_{4F} \mathbf{U}^{F^t-F\Delta t} + c_{3F} \mathfrak{E}^{F^t-F\Delta t} + {}_F \dot{\mathbf{B}}^{F^t} \quad (3.24)$$

Após atualização (e impressão) de resultados, parte-se para o próximo passo de tempo, dando seqüência à análise. O algoritmo básico de solução, considerando-se o acoplamento direto MEC-MEF, é apresentado na Tabela 3.3.

A presente formulação de acoplamento é extremamente eficiente. Além das vantagens apresentadas no subitem anterior, relacionadas ao desacoplamento dos sistemas de equações de MEC e MEF, nenhum processo iterativo faz-se aqui necessário para o tratamento do acoplamento MEC-MEF na interface. O custo computacional relativo à presente metodologia é equivalente ao custo relacionado ao acoplamento iterativo quando somente uma iteração por passo de tempo é considerada.

Ressalta-se ainda o fato do algoritmo direto de acoplamento ser conceitualmente mais coerente: soluções por elementos de contorno são fortemente baseadas em soluções fundamentais (ou soluções de Green) e a adoção do conceito de soluções fundamentais quando da solução por elementos finitos (método implícito de Green) confere maior uniformidade ao acoplamento MEC-MEF.

Tabela 3.3 – Algoritmo para acoplamento direto MEC-MEF (sólido-sólido)

(1) *Cálculos iniciais:*

(1.1) Seleção de passos de tempo para cada subdomínio (${}_C \Delta t$ e ${}_F \Delta t$). As seguintes atribuições iniciais são consideradas: ${}_C t = {}_C \Delta t$ e ${}_F t = 0$;

(1.2) Cálculos básicos relativos ao MEC e ao MEF (matrizes **A**, **B** etc.);

(2) *Loop no tempo:*

(2.1) Início dos cálculos a cada passo de tempo:

${}_F t = {}_F t + {}_F \Delta t$ (caso ${}_F t > {}_C t$: adotar ${}_C t = {}_C t + {}_C \Delta t$ e calcular os vetores \mathbf{L}^{c^t} e \mathbf{S}^{c^t});

(2.2) Resolver MEF: obter os deslocamentos, inclusive na interface ${}_F \mathbf{U}^{F^t}$;

(2.3) Obter ${}_C \mathbf{U}^{c^t}$ de ${}_F \mathbf{U}^{F^t}$ (interpolação espacial e/ou extrapolação temporal);

(2.4) Resolver MEC: obter as forças de superfície na interface ${}_C \mathbf{T}^{c^t}$;

(2.5) Obter ${}_F \mathbf{T}^{F^t}$ de ${}_C \mathbf{T}^{c^t}$ (interpolação espacial e/ou interpolação temporal);

(2.6) Obter forças nodais equivalentes ${}_F \mathbf{F}^{F^t}$ a partir de ${}_F \mathbf{T}^{F^t}$;

(2.7) Calcular o vetor efetivo ${}_F \dot{\mathbf{B}}^{F^t}$ considerando ${}_F \mathbf{F}^{F^t}$ e pseudo-forças ${}_F \dot{\mathbf{R}}^{F^t}$;

(2.8) Resolver MEF: obter as velocidades ${}_F \dot{\mathbf{U}}^{F^t}$;

(2.9) Atualização (e impressão) dos resultados de MEF;

Caso ${}_F t + {}_F \Delta t > {}_C t$: atualização (e impressão) dos resultados de MEC.

3.2.2. Acoplamento MEC-MEC

O acoplamento MEC-MEC, aqui considerado, diz respeito ao acoplamento das formulações de elementos de contorno baseadas em soluções fundamentais dinâmicas (MEC_D) e em soluções fundamentais estáticas (MEC_E). O esquema de acoplamento adotado é análogo ao acoplamento iterativo MEC-MEF apresentado no subitem 3.2.1.2, bastando substituir a modelagem relativa a elementos finitos por modelagem de elementos de contorno baseada em soluções fundamentais estáticas. O algoritmo básico de solução, considerando-se o acoplamento iterativo MEC_D - MEC_E , é apresentado na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 – Algoritmo para acoplamento MEC_D-MEC_E (sólido-sólido)

-
- (1) *Cálculos iniciais:*
- (1.1) Seleção de passos de tempo para cada subdomínio (${}_D \Delta t$ e ${}_E \Delta t$). As seguintes atribuições iniciais são consideradas: ${}_D t = {}_D \Delta t$ e ${}_E t = 0$;
- (1.2) Cálculos básicos relativos ao MEC_D e ao MEC_E (matrizes **A**, **B** etc.);
- (1.3) Atribuição de valores iniciais para as forças de superfície de MEC_E nas interfaces de acoplamento, e.g., ${}^{(0)}_E \mathbf{T} = \mathbf{0}$;
- (2) *Loop no tempo:*
- (2.1) Início dos cálculos a cada passo de tempo:
 ${}_E t = {}_E t + {}_E \Delta t$ (caso ${}_E t > {}_D t$: adotar ${}_D t = {}_D t + {}_D \Delta t$ e calcular os vetores \mathbf{L}^{D^t} e \mathbf{S}^{D^t});
- (2.2) *Loop iterativo:*
- (2.2.1) Resolver MEC_E: obter os deslocamentos, inclusive na interface ${}^{(k+a)}_E \mathbf{U}^{E^t}$;
- (2.2.2) Adoção do parâmetro a : ${}^{(k+1)}_E \mathbf{U}^{E^t} = a {}^{(k+a)}_E \mathbf{U}^{E^t} + (1-a) {}^{(k)}_E \mathbf{U}^{E^t}$;
- (2.2.3) Obter ${}^{(k+1)}_D \mathbf{U}^{D^t}$ de ${}^{(k+1)}_E \mathbf{U}^{E^t}$
 (interpolação espacial e/ou extrapolação temporal);
- (2.2.4) Resolver MEC_D: obter as forças de superfície na interface ${}^{(k+1)}_D \mathbf{T}^{D^t}$;
- (2.2.5) Obter ${}^{(k+1)}_E \mathbf{T}^{E^t}$ de ${}^{(k+1)}_D \mathbf{T}^{D^t}$
 (interpolação espacial e/ou interpolação temporal);
- (2.2.6) Checagem de convergência;
- (2.3) Atualização (e impressão) dos resultados de MEC_E;
 Caso ${}_E t + {}_E \Delta t > {}_D t$: atualização (e impressão) dos resultados de MEC_D.
-

3.3. Acoplamento entre sistemas fisicamente distintos

O presente subitem aborda o acoplamento de interface entre sistemas que descrevem fenômenos físicos diferentes. Problemas de interação do tipo fluido-estrutura, fluido-solo etc., se enquadram nesta categoria de acoplamento. No texto que se segue, a discussão é focada no acoplamento de sistemas do tipo fluido-sólido, considerando-se acoplamento entre diferentes processos de discretização, em específico, acoplamentos MEC-MEF e MEC-MEC.

3.3.1. Acoplamento MEC-MEF

O presente subitem trata do acoplamento de interface entre fluidos acústicos, modelados por elementos de contorno, e corpos sólidos, modelados por elementos finitos. Estando o modelo dividido em sub-regiões modeladas pelo MEC (sub-índice C) e pelo MEF (sub-índice F), a interface (Γ_I) entre estas sub-regiões deve atender às seguintes condições, a cada passo de tempo (SOARES JR & VON ESTORFF, 2004):

(i) Condições de interface (ao longo da interface de acoplamento Γ_I):

$${}_F \mathbf{F}_T^n = \mathbf{0} \quad (3.25a)$$

$${}_F \mathbf{F}_N^n + {}_C \tilde{\mathbf{P}}^n = \mathbf{0} \quad (3.25b)$$

$${}_F \mathbf{G}_N^n - (1/r)_C \mathbf{Q}^n = \mathbf{0} \quad (3.25c)$$

onde r é a massa específica do fluido. Os sub-índices T e N são aqui adotados para indicar componentes tangencial e normal, respectivamente, das grandezas nas interfaces de acoplamento. Para se obter consistência entre a formulação de elementos de contorno e a de elementos finitos, adota-se $\tilde{\mathbf{P}}$ para simbolizar forças nodais equivalentes, obtidas a partir da distribuição de pressões \mathbf{P} .

Conforme fora feito no item 3.2, três formulações distintas são aqui apresentadas para o acoplamento MEC-MEF, sendo estas mais uma vez: acoplamento padrão; acoplamento iterativo; e acoplamento direto. Discute-se a seguir cada uma destas formulações e apresentam-se tabelas com algoritmos básicos de solução para cada tipo de acoplamento.

3.3.1.1. Acoplamento padrão

No acoplamento padrão, as matrizes de elementos de contorno e de elementos finitos são acopladas, formando um sistema final único de equações. Desta forma, considerando-se acoplamentos do tipo fluido-sólido, o sistema final de equações que se obtém, é algo do tipo (VON ESTORFF, 1992):

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \mathbf{M} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{F} \mathbf{U}^n \\ \mathbf{I} \mathbf{U}^n \\ \mathbf{C} \mathbf{U}^n \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{F} \mathbf{U}^n \\ \mathbf{I} \mathbf{U}^n \\ \mathbf{C} \mathbf{U}^n \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{F} \mathbf{U}^n \\ \mathbf{I} \mathbf{U}^n \\ \mathbf{C} \mathbf{U}^n \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \mathbf{F}^n \\ \mathbf{I} \mathbf{F}^n \\ \mathbf{C} \mathbf{F}^n \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

onde os sub-índices C e F dizem respeito à formulação por elementos de contorno e por elementos finitos, respectivamente, e o sub-índice I é relativo a grandezas na interface de acoplamento.

Para se deduzir o sistema acoplado do tipo (3.26) partindo-se da formulação acústica de elementos de contorno (equação (3.27)) e da formulação linear de elementos finitos (equação (3.28)),

$$\mathbf{A} \mathbf{X}^n = \mathbf{B} \mathbf{Y}^n + \mathbf{L}^n + \mathbf{S}^n \quad (3.27)$$

$$\mathbf{M} \mathbf{U}^n + \mathbf{C} \mathbf{U}^n + \mathbf{K} \mathbf{U}^n = \mathbf{F}^n \quad (3.28)$$

inicialmente reescreve-se as equações de MEC conforme indicado a seguir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \mathbf{P}^n \\ \mathbf{0} \mathbf{U}_N^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{II} \overline{\mathbf{A}} & \mathbf{I0} \overline{\mathbf{A}} \\ \mathbf{0I} \overline{\mathbf{A}} & \mathbf{00} \overline{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \mathbf{U}_N^n \\ \mathbf{0} \mathbf{P}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \overline{\mathbf{L}}^n \\ \mathbf{0} \overline{\mathbf{L}}^n \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \mathbf{U}_N^n \\ \mathbf{0} \mathbf{P}^n \end{bmatrix} + \overline{\mathbf{L}}^n \quad (3.29)$$

onde a matriz $\bar{\mathbf{A}}$ e o vetor $\bar{\mathbf{L}}^n$ são dados por:

$$\bar{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{B}}^{-1} \hat{\mathbf{A}} \quad (3.30)$$

$$\bar{\mathbf{L}}^n = -\hat{\mathbf{B}}^{-1} (\mathbf{L}^n + \mathbf{S}^n) \quad (3.31)$$

sendo as matrizes $\hat{\mathbf{A}}$ e $\hat{\mathbf{B}}$ obtidas a partir de \mathbf{A} e \mathbf{B} , levando-se em consideração a massa específica do fluido, de forma a se ter, nos subdomínios de MEC:

$\mathfrak{G}_N^n = -(1/r)\mathbf{Q}^n$. Em (3.29), os vetores ${}_0\mathbf{P}^n$ e ${}_0\mathfrak{G}_N^n$ são especificados conforme indicado em (3.32), sendo os sub-índices 1 e 2 relativos às grandezas nos contornos Γ_1 e Γ_2 , respectivamente.

$${}_0\mathbf{P}^n = [{}_1\mathfrak{G}_N^n \quad {}_2\mathbf{P}^n]^T \quad (3.32a)$$

$${}_0\mathfrak{G}_N^n = [{}_1\mathbf{P}^n \quad {}_2\mathfrak{G}_N^n]^T \quad (3.32b)$$

Isolando-se ${}_0\mathbf{P}^n$ a partir da parte inferior da equação (3.29), tem-se:

$${}_0\mathbf{P}^n = {}_0\mathbf{M} \quad {}_I\mathfrak{G}_N^n - {}_0\mathbf{F}^n \quad (3.33)$$

sendo ${}_0\mathbf{M}$ e ${}_0\mathbf{F}^n$ dados por (adota-se $\hat{\mathbf{M}} = {}_{00}\bar{\mathbf{A}}^{-1}$):

$${}_0\mathbf{M} = -\hat{\mathbf{M}} \quad {}_{0I}\bar{\mathbf{A}} \quad (3.34)$$

$${}_0\mathbf{F}^n = \hat{\mathbf{M}} ({}_0\bar{\mathbf{L}}^n - {}_0\mathfrak{G}_N^n) \quad (3.35)$$

Substituindo-se ${}_0\mathbf{P}^n$ na parte superior da equação (3.29) e adotando-se ${}_I\tilde{\mathbf{P}}^n = \mathbf{E} \quad {}_I\mathbf{P}^n$ (a transformação das pressões em forças nodais equivalentes é aqui

representada pela matriz \mathbf{E}), pode-se escrever a equação de elementos de contorno de forma apropriada para o acoplamento com elementos finitos, conforme se indica a seguir, em (3.36):

$${}_I \tilde{\mathbf{P}}^n = {}_C \mathbf{M} {}_I \mathfrak{G}_N^n - {}_C \mathbf{F}^n \quad (3.36)$$

onde ${}_C \mathbf{M}$ e ${}_C \mathbf{F}^n$ são dados por (adota-se $\bar{\mathbf{M}} = {}_{I0} \bar{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{M}}$):

$${}_C \mathbf{M} = \mathbf{E} \left\{ {}_{II} \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{M}} {}_{0I} \bar{\mathbf{A}} \right\} \quad (3.37)$$

$${}_C \mathbf{F}^n = \mathbf{E} \left\{ \bar{\mathbf{M}} ({}_{0I} \bar{\mathbf{L}}^n - {}_{0I} \mathfrak{G}_N^n) - {}_{II} \bar{\mathbf{L}}^n \right\} \quad (3.38)$$

A equação (3.28) de elementos finitos pode, por sua vez, ser re-escrita de forma a considerar como variáveis na interface de acoplamento as componentes tangenciais e normais das grandezas associadas.

Desta forma, representando-se os vetores tangentes e normais à interface por \mathbf{t} e \mathbf{n} , respectivamente, tem-se o sistema de equações (3.28) re-escrito conforme se segue:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} {}_{00} \mathbf{M} & {}_{0I} \mathbf{M} \cdot \mathbf{t} & {}_{0I} \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{t} \cdot {}_{I0} \mathbf{M} & \mathbf{t} \cdot {}_{II} \mathbf{M} \cdot \mathbf{t} & \mathbf{t} \cdot {}_{II} \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \cdot {}_{I0} \mathbf{M} & \mathbf{n} \cdot {}_{II} \mathbf{M} \cdot \mathbf{t} & \mathbf{n} \cdot {}_{II} \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_0 \mathfrak{G}^n \\ {}_I \mathfrak{G}_T^n \\ {}_I \mathfrak{G}_N^n \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} {}_{00} \mathbf{C} & {}_{0I} \mathbf{C} \cdot \mathbf{t} & {}_{0I} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{t} \cdot {}_{I0} \mathbf{C} & \mathbf{t} \cdot {}_{II} \mathbf{C} \cdot \mathbf{t} & \mathbf{t} \cdot {}_{II} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \cdot {}_{I0} \mathbf{C} & \mathbf{n} \cdot {}_{II} \mathbf{C} \cdot \mathbf{t} & \mathbf{n} \cdot {}_{II} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_0 \mathfrak{G}^n \\ {}_I \mathfrak{G}_T^n \\ {}_I \mathfrak{G}_N^n \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} {}_{00} \mathbf{K} & {}_{0I} \mathbf{K} \cdot \mathbf{t} & {}_{0I} \mathbf{K} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{t} \cdot {}_{I0} \mathbf{K} & \mathbf{t} \cdot {}_{II} \mathbf{K} \cdot \mathbf{t} & \mathbf{t} \cdot {}_{II} \mathbf{K} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \cdot {}_{I0} \mathbf{K} & \mathbf{n} \cdot {}_{II} \mathbf{K} \cdot \mathbf{t} & \mathbf{n} \cdot {}_{II} \mathbf{K} \cdot \mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_0 \mathbf{U}^n \\ {}_I \mathbf{U}_T^n \\ {}_I \mathbf{U}_N^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_0 \mathbf{F}^n \\ {}_I \mathbf{F}_T^n \\ {}_I \mathbf{F}_N^n \end{bmatrix} \quad (3.39) \end{aligned}$$

Por fim, fazendo uso das equações (3.36) e (3.39), e levando-se em consideração as condições de interface (3.25), o sistema acoplado de equações (3.40) pode ser obtido, tendo-se por base o método de elementos finitos:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} {}_{00}\mathbf{M} & {}_{0I}\mathbf{M}\cdot\mathbf{t} & {}_{0I}\mathbf{M}\cdot\mathbf{n} \\ \mathbf{t}\cdot{}_{I0}\mathbf{M} & \mathbf{t}\cdot{}_{II}\mathbf{M}\cdot\mathbf{t} & \mathbf{t}\cdot{}_{II}\mathbf{M}\cdot\mathbf{n} \\ \mathbf{n}\cdot{}_{I0}\mathbf{M} & \mathbf{n}\cdot{}_{II}\mathbf{M}\cdot\mathbf{t} & \mathbf{n}\cdot{}_{II}\mathbf{M}\cdot\mathbf{n} - {}_C\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_0\mathfrak{U}^n \\ {}_I\mathfrak{U}_T^n \\ {}_I\mathfrak{U}_N^n \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} {}_{00}\mathbf{C} & {}_{0I}\mathbf{C}\cdot\mathbf{t} & {}_{0I}\mathbf{C}\cdot\mathbf{n} \\ \mathbf{t}\cdot{}_{I0}\mathbf{C} & \mathbf{t}\cdot{}_{II}\mathbf{C}\cdot\mathbf{t} & \mathbf{t}\cdot{}_{II}\mathbf{C}\cdot\mathbf{n} \\ \mathbf{n}\cdot{}_{I0}\mathbf{C} & \mathbf{n}\cdot{}_{II}\mathbf{C}\cdot\mathbf{t} & \mathbf{n}\cdot{}_{II}\mathbf{C}\cdot\mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_0\mathfrak{U}^n \\ {}_I\mathfrak{U}_T^n \\ {}_I\mathfrak{U}_N^n \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} {}_{00}\mathbf{K} & {}_{0I}\mathbf{K}\cdot\mathbf{t} & {}_{0I}\mathbf{K}\cdot\mathbf{n} \\ \mathbf{t}\cdot{}_{I0}\mathbf{K} & \mathbf{t}\cdot{}_{II}\mathbf{K}\cdot\mathbf{t} & \mathbf{t}\cdot{}_{II}\mathbf{K}\cdot\mathbf{n} \\ \mathbf{n}\cdot{}_{I0}\mathbf{K} & \mathbf{n}\cdot{}_{II}\mathbf{K}\cdot\mathbf{t} & \mathbf{n}\cdot{}_{II}\mathbf{K}\cdot\mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_0\mathbf{U}^n \\ {}_I\mathbf{U}_T^n \\ {}_I\mathbf{U}_N^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_0\mathbf{F}^n \\ \mathbf{0} \\ {}_C\mathbf{F}^n \end{bmatrix} \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

O sistema de equações (3.40) pode ser re-escrito de forma mais compacta, i.e:

$${}_{CF}\mathbf{M}\mathfrak{U}^n + {}_C\mathbf{C}\mathfrak{U}^n + \mathbf{K}\mathbf{U}^n = {}_{CF}\mathbf{F}^n \quad (3.41)$$

Estando a equação (3.41) estabelecida, analogias com a solução por elementos finitos podem ser mais uma vez adotadas para solução do sistema acoplado. Desta forma, o tratamento do problema (3.41) – solução no tempo e consideração de possíveis não linearidades – é realizado de forma análoga a problemas não acoplados considerando o método dos elementos finitos.

Um algoritmo básico de solução, considerando-se o acoplamento padrão MEC-MEF, é apresentado na Tabela 3.5. Para maiores detalhes sobre o acoplamento padrão discutido neste subitem, as seguintes referências são indicadas ao leitor: VON ESTORFF & ANTES (1991); CZYGAN & VON ESTORFF (2002).

Tabela 3.5 – Algoritmo para acoplamento padrão MEC-MEF (fluido-sólido)

(1) *Cálculos iniciais:*

(1.1) Cálculos básicos relativos ao MEC e ao MEF (matrizes ${}_c\mathbf{M}$, ${}_o\mathbf{M}$, \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} etc.);

(1.2) Cálculo do sistema acoplado: obter ${}_{CF}\mathbf{M}$;

(2) *Loop no tempo:*

(2.1) Início dos cálculos a cada passo de tempo ($t = t + \Delta t$): obter ${}_{CF}\mathbf{F}^t$ etc.;

(2.2) Resolver MEC-MEF: ${}_{CF}\mathbf{M}\mathbf{U}^t + \mathbf{C}\mathbf{U}^t + \mathbf{K}\mathbf{U}^t = {}_{CF}\mathbf{F}^t$

Resolver o sistema acoplado obtendo resultados para os subdomínios de MEC e MEF, inclusive interface (considerar possíveis loops iterativos para tratamento de não-linearidades associadas);

(2.3) Atualização (e impressão) dos resultados de MEC e de MEF.

3.3.1.2. Acoplamento iterativo

O acoplamento aqui em consideração é relativo às formulações de elementos de contorno e de elementos finitos apresentadas nos subitens 2.2.2 e 2.3.3.1, respectivamente. As idéias básicas (solução iterativa na interface, adoção de diferentes passos de tempo em cada subdomínio etc.) relativas ao algoritmo discutido no subitem 3.2.1.2 são aqui de igual forma adotadas.

Inicialmente, como parte da metodologia de solução empregando acoplamento iterativo, o problema de elementos finitos é isoladamente resolvido (sistema de equações desacoplado), calculando-se as acelerações ${}^{(k+a)}_F\mathbf{U}^t$ ao longo de todo subdomínio modelado por MEF, inclusive nas interfaces de acoplamento. Uma vez calculada ${}^{(k+a)}_F\mathbf{U}^t$ nas interfaces, adota-se um parâmetro de relaxamento a , conforme indicado em (3.42) para se garantir e/ou acelerar a convergência do processo iterativo.

$${}^{(k+1)}_{F}\mathbf{U}^t = a {}^{(k+a)}_{F}\mathbf{U}^t + (1-a) {}^{(k)}_{F}\mathbf{U}^t \quad (3.42)$$

Em relação à escolha do parâmetro de relaxamento para a presente aplicação (interação fluido-sólido), a experiência do autor mostra que, de forma genérica, $a = 0.5$ fornece bons resultados. Estando as acelerações ${}^{(k+1)}_{F}\mathbf{U}^t$ calculadas na interface de elementos finitos, estas podem ser usadas para obtenção das acelerações normais ${}^{(k+1)}_{C}\mathbf{U}_N^t$ na interface de elementos de contorno. Assim sendo, caso seja necessário, as componentes normais ${}^{(k+1)}_{F}\mathbf{U}_N^t$ podem ser interpoladas espacialmente, conforme esquematizado na Figura 3.1, a fim de se obter ${}^{(k+1)}_{C}\mathbf{U}_N^t$. Os valores ${}^{(k+1)}_{C}\mathbf{U}_N^t$, por sua vez, podem ser extrapolados no tempo, conforme esquematizado na Figura 3.3(a), a fim de se obter ${}^{(k+1)}_{C}\mathbf{U}_N^t$. Uma vez que as funções de interpolação de elementos de contorno $f_q(t)$ são geralmente adotadas como sendo constantes (constantes por partes), tem-se para a extrapolação no tempo em questão:

$${}^{(k+1)}_{C}\mathbf{U}_N^t = {}^{(k+1)}_{C}\mathbf{U}_N^t \quad (3.43)$$

O problema de elementos de contorno pode então ser resolvido, tendo-se ${}^{(k+1)}_{C}\mathbf{U}_N^t$ como condição de contorno prescrita nas interfaces de acoplamento (ou seja, condição de contorno de fluxo prescrito, uma vez que $\mathbf{U}_N = -(1/r)\mathbf{Q}$). Resolvendo-se o problema de elementos de contorno, obtém-se ${}^{(k+1)}_{C}\mathbf{P}^{ct}$ nas interfaces de acoplamento.

Estando as pressões ${}^{(k+1)}_{C}\mathbf{P}^{ct}$ calculadas na interface de elementos de contorno, estas podem ser usadas para o cálculo de ${}^{(k+1)}_{F}\mathbf{P}^{ft}$ na interface de elementos finitos. Assim sendo, caso seja necessário, os valores ${}^{(k+1)}_{C}\mathbf{P}^{ct}$ podem ser interpolados

especialmente, conforme esquematizado na Figura 3.1, a fim de se obter ${}^{(k+1)}\mathbf{P}_F^{c^t}$. Os valores ${}^{(k+1)}\mathbf{P}_F^{c^t}$, por sua vez, podem ser interpolados no tempo, conforme esquematizado na Figura 3.3(b), a fim de se obter ${}^{(k+1)}\mathbf{P}_F^{F^t}$. Uma vez que as funções de interpolação de elementos de contorno $f_p(t)$ são geralmente adotadas como sendo lineares, tem-se para a interpolação no tempo em questão:

$${}^{(k+1)}\mathbf{P}_F^{F^t} = {}^{(k+1)}\mathbf{P}_F^{c^t} (C_F \Delta t / C \Delta t) + {}^{(k+1)}\mathbf{P}_F^{c^{t-c\Delta t}} (1 - C_F \Delta t / C \Delta t) \quad (3.44)$$

Estando a grandeza normal ${}^{(k+1)}\mathbf{P}_F^{F^t}$ calculada, estas são transformadas em forças nodais equivalentes ${}^{(k+1)}\mathbf{F}_F^{F^t}$ e faz-se a checagem de convergência associada ao processo iterativo. Caso haja convergência, atualizam-se valores e parte-se para o próximo passo de tempo; caso não haja convergência, parte-se para o próximo passo iterativo.

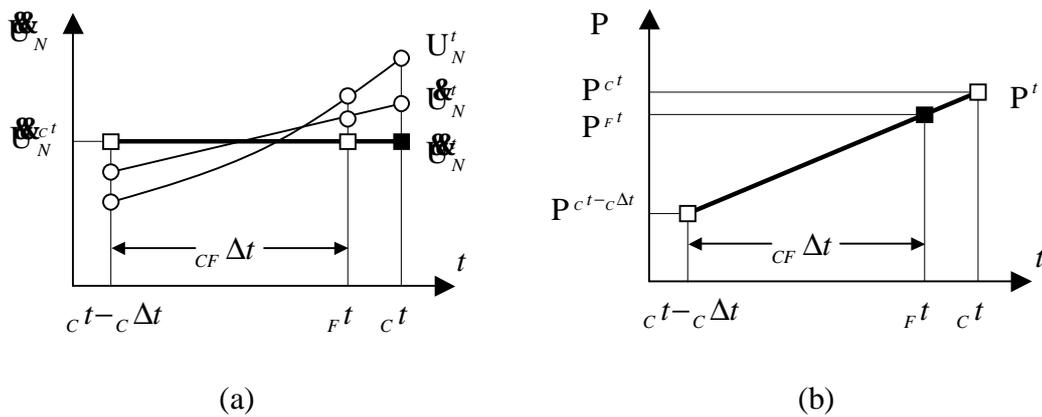


Figura 3.3 – Procedimentos de interpolação-extrapolação no tempo: (a) extrapolação no tempo de $\mathbf{U}_N^{c^t}$ para se obter $\mathbf{U}_N^{F^t}$ ($\mathbf{U}_N^{c^t} = \mathbf{U}_N^{F^t}$); (b) interpolação no tempo de \mathbf{P}^{c^t} para se obter \mathbf{P}^{F^t} ($\mathbf{P}^{F^t} = \mathbf{P}^{c^t} (C_F \Delta t / C \Delta t) + \mathbf{P}^{c^{t-c\Delta t}} (1 - C_F \Delta t / C \Delta t)$).

Tabela 3.6 – Algoritmo para acoplamento iterativo MEC-MEF (fluido-sólido)

(1) *Cálculos iniciais:*

- (1.1) Seleção de passos de tempo para cada subdomínio (${}_C \Delta t$ e ${}_F \Delta t$). As seguintes atribuições iniciais são consideradas: ${}_C t = {}_C \Delta t$ e ${}_F t = 0$;
- (1.2) Cálculos básicos relativos ao MEC e ao MEF (matrizes **A**, **B** etc.);
- (1.3) Atribuição de valores iniciais para as forças nodais de MEF nas interfaces de acoplamento, e.g., ${}^{(0)}_F \mathbf{F} = \mathbf{0}$;

(2) *Loop no tempo:*

(2.1) Início dos cálculos a cada passo de tempo:

${}_F t = {}_F t + {}_F \Delta t$ (caso ${}_F t > {}_C t$: adotar ${}_C t = {}_C t + {}_C \Delta t$ e calcular os vetores \mathbf{L}^{c^t} e \mathbf{S}^{c^t});

(2.2) *Loop iterativo:*

(2.2.1) Resolver MEF: obter as acelerações, inclusive na interface ${}^{(k+a)}_F \mathbf{U}_F^t$;

(2.2.2) Adoção do parâmetro a : ${}^{(k+1)}_F \mathbf{U}_F^t = a {}^{(k+a)}_F \mathbf{U}_F^t + (1-a) {}^{(k)}_F \mathbf{U}_F^t$;

(2.2.3) Obter a componente normal ${}^{(k+1)}_C \mathbf{U}_N^t$ de ${}^{(k+1)}_F \mathbf{U}_F^t$ (interpolação espacial);

(2.2.4) Obter ${}^{(k+1)}_C \mathbf{U}_N^{c^t}$ de ${}^{(k+1)}_C \mathbf{U}_N^t$ (extrapolação temporal);

(2.2.5) Resolver MEC: obter as pressões na interface ${}^{(k+1)}_C \mathbf{P}^{c^t}$;

(2.2.6) Obter ${}^{(k+1)}_F \mathbf{P}^{F^t}$ de ${}^{(k+1)}_C \mathbf{P}^{c^t}$

(interpolação espacial e/ou interpolação temporal);

(2.2.7) Obter forças nodais ${}^{(k+1)}_F \mathbf{F}^{F^t}$ a partir da grandeza normal ${}^{(k+1)}_F \mathbf{P}^{F^t}$;

(2.2.8) Checagem de convergência;

(2.3) Atualização (e impressão) dos resultados de MEF;

Caso ${}_F t + {}_F \Delta t > {}_C t$: atualização (e impressão) dos resultados de MEC.

Um algoritmo básico de solução, considerando-se o acoplamento iterativo MEC-MEF, é apresentado na Tabela 3.6. Mais uma vez, é importante notar que o custo computacional do acoplamento iterativo fluido-sólido é reduzido, uma vez que a convergência geralmente é rápida e as iterações relativas ao acoplamento podem ser realizadas junto com as iterações relativas à análise não-linear.

As vantagens referentes ao tratamento dos sistemas de equações de MEC e de MEF de forma independente e desacoplada, conforme discutido no subitem 3.2, são aqui mais uma vez aplicáveis. Ressalta-se que no caso do acoplamento fluido-sólido (bem como em muitos outros), sistemas com propriedades geralmente muito distintas são considerados e procedimentos especiais necessariamente precisam ser adotados a fim de se evitar sistemas mal condicionados e, principalmente, instabilidade no acoplamento. As metodologias aqui apresentadas mostram-se bastante eficientes neste sentido (ver subitem 3.4).

Para maiores detalhes sobre o acoplamento iterativo discutido neste subitem, as seguintes referências são indicadas ao leitor: SOARES JR *et al.* (2004b); SOARES JR & VON ESTORFF (2004).

3.3.1.3. Acoplamento direto

O acoplamento aqui em consideração é relativo às formulações de elementos de contorno e de elementos finitos apresentadas nos subitens 2.2.2 e 2.3.3.2, respectivamente. As idéias básicas relativas ao algoritmo de acoplamento direto, discutido no subitem 3.2.1.3, são aqui de igual forma aplicáveis.

Conforme se pode observar nos subitens precedentes, a variável básica relativa ao MEF para o acoplamento fluido-sólido é a aceleração. Na formulação apresentada no subitem 2.3.3.2, o cálculo das acelerações do modelo não é apresentado, pois o mesmo não é de importância para a metodologia. Deduzindo-se o cálculo das acelerações por intermédio do método implícito de Green, diferentemente do que ocorre com os deslocamentos, não se obtém o desacoplamento, no passo de tempo corrente, entre as

acelerações e as forças aplicadas (assim como a velocidade, a aceleração no passo de tempo n também é função da força atuante em n). Desta forma, usando-se as acelerações resultantes do método implícito de Green, o processo iterativo de acoplamento não pode ser eliminado.

A fim de se eliminar o processo iterativo de acoplamento, a presente formulação mantém o uso dos deslocamentos de MEF como variável básica para o acoplamento e desenvolve no subdomínio de MEC um esquema apropriado de derivação temporal. Esta nova abordagem tem também importância para acoplamentos MEC-MEC, uma vez que, modelando-se o subdomínio sólido por intermédio de elementos de contorno baseados em soluções fundamentais dinâmicas, as acelerações do modelo não são calculadas (usualmente somente calculam-se os deslocamentos e as forças de superfície).

A fim de se relacionar os deslocamentos e as acelerações nas interfaces de acoplamento de MEC, a relação (3.45) é adotada. O presente trabalho, conforme fora antes mencionado, adota as funções de interpolação $f_q(t)$ como sendo constantes por partes. Desta forma, as acelerações normais de MEC, ${}_c \ddot{\mathbf{U}}_N$, são consideradas como tendo comportamento constante ao longo de cada intervalo de tempo (${}_c \ddot{\mathbf{U}}_N = -(1/r)\mathbf{Q}$). Os deslocamentos normais ${}_c \mathbf{U}_N^t$ podem então ser obtidos por integração, como segue:

$${}_c \mathbf{U}_N^t = {}_c \mathbf{U}_N^{t_o} + {}_c \dot{\mathbf{U}}_N^{t_o} (t - t_o) + {}_c \ddot{\mathbf{U}}_N (t - t_o)^2 / 2, \quad \forall t \in (t_o ; t_o + {}_c \Delta t] \quad (3.45)$$

De acordo com a equação (3.45), ao longo do passo de tempo ${}_c \Delta t$, os deslocamentos, velocidades e acelerações normais associados ao MEC possuem comportamento parabólico, linear e constante, respectivamente (Figura 3.3(a)). A

equação (3.45) é equivalente ao método de Newmark adotando-se parâmetros $g = 1.00$ e $b = 0.50$.

É importante notar que o esquema de integração (3.45) é coerente com a formulação de elementos de contorno em uso. Outros esquemas de integração (regra trapezoidal de Newmark, Houbolt etc.), que não o indicado em (3.45), geram instabilidade no algoritmo de acoplamento. Uma vez estabelecida a relação (3.45), pode-se obter facilmente ${}_C \ddot{\mathbf{U}}_N^t$ a partir de ${}_C \mathbf{U}_N^t$.

No algoritmo de acoplamento direto fluido-sólido, inicialmente o problema de elementos finitos é resolvido (sistema de equações desacoplado), calculando-se os deslocamentos ${}_F \mathbf{U}^{Ft}$ ao longo de todo subdomínio modelado por MEF, inclusive nas interfaces de acoplamento (equações (3.21)-(3.22)).

Estando os deslocamentos ${}_F \mathbf{U}^{Ft}$ calculados na interface de elementos finitos, estes podem ser usados para obtenção da componente normal dos deslocamentos na interface de elementos de contorno ${}_C \mathbf{U}_N^{Ft}$ (procedimentos de interpolação espacial devem ser utilizados, caso necessário). A partir dos deslocamentos ${}_C \mathbf{U}_N^{Ft}$, com base em (3.45), calculam-se as acelerações ${}_C \ddot{\mathbf{U}}_N^{Ft}$ conforme indicado a seguir:

$${}_C \ddot{\mathbf{U}}_N^{Ft} = (2/{}_C \Delta t^2)({}_C \mathbf{U}_N^{Ft} - {}_C \mathbf{U}_N^{ct-c\Delta t}) - (2/{}_C \Delta t) {}_C \dot{\mathbf{U}}_N^{ct-c\Delta t} \quad (3.46)$$

Extrapolando-se ${}_C \ddot{\mathbf{U}}_N^{Ft}$ no tempo (Figura 3.3(a)), obtém-se ${}_C \ddot{\mathbf{U}}_N^{ct}$. O problema de elementos de contorno pode então ser resolvido, obtendo-se ${}_C \mathbf{P}^{ct}$ nas interfaces de acoplamento.

Tabela 3.7 – Algoritmo para acoplamento direto MEC-MEF (fluido-sólido)

(1) *Cálculos iniciais:*

(1.1) Seleção de passos de tempo para cada subdomínio (${}_C \Delta t$ e ${}_F \Delta t$). As seguintes atribuições iniciais são consideradas: ${}_C t = {}_C \Delta t$ e ${}_F t = 0$;

(1.2) Cálculos básicos relativos ao MEC e ao MEF (matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} etc.);

(2) *Loop no tempo:*

(2.1) Início dos cálculos a cada passo de tempo:

${}_F t = {}_F t + {}_F \Delta t$ (caso ${}_F t > {}_C t$: adotar ${}_C t = {}_C t + {}_C \Delta t$ e calcular os vetores \mathbf{L}^{c^t} e \mathbf{S}^{c^t});

(2.2) Resolver MEF: obter os deslocamentos, inclusive na interface ${}_F \mathbf{U}^{F^t}$;

(2.3) Obter a componente normal ${}_C \mathbf{U}_N^{F^t}$ de ${}_F \mathbf{U}^{F^t}$ (interpolação espacial);

(2.4) Obter ${}_C \mathbf{U}_N^{c^t} = (2/{}_C \Delta t)({}_C \mathbf{U}_N^{F^t} - {}_C \mathbf{U}_N^{c^{t-C\Delta t}}) - (2/{}_C \Delta t) {}_C \mathbf{U}_N^{c^{t-C\Delta t}}$;

(2.5) Obter ${}_C \mathbf{U}_N^{c^t}$ de ${}_C \mathbf{U}_N^{F^t}$ (extrapolação temporal);

(2.6) Resolver MEC: obter as pressões na interface ${}_C \mathbf{P}^{c^t}$;

(2.7) Obter ${}_F \mathbf{P}^{F^t}$ de ${}_C \mathbf{P}^{c^t}$ (interpolação espacial e/ou interpolação temporal);

(2.8) Obter forças nodais equivalentes ${}_F \mathbf{F}^{F^t}$ a partir da grandeza normal ${}_F \mathbf{P}^{F^t}$;

(2.9) Calcular o vetor efetivo ${}_F \mathbf{B}^{F^t}$ considerando ${}_F \mathbf{F}^{F^t}$ e pseudo-forças ${}_F \mathbf{R}^{F^t}$;

(2.10) Resolver MEF: obter as velocidades ${}_F \mathbf{U}^{F^t}$;

(2.11) Atualização (e impressão) dos resultados de MEF;

Caso ${}_F t + {}_F \Delta t > {}_C t$: atualização (e impressão) dos resultados de MEC:

$${}_C \mathbf{U}_N^{c^t} = {}_C \mathbf{U}_N^{c^{t-C\Delta t}} + ({}_C \Delta t) {}_C \mathbf{U}_N^{c^{t-C\Delta t}} + ({}_C \Delta t^2 / 2) {}_C \mathbf{U}_N^{c^t}$$

$${}_C \mathbf{U}_N^{c^t} = {}_C \mathbf{U}_N^{c^{t-C\Delta t}} + ({}_C \Delta t) {}_C \mathbf{U}_N^{c^t}.$$

Da mesma forma como fora considerado quando do algoritmo iterativo, a partir de ${}_C \mathbf{P}^{c^t}$ pode-se obter ${}_F \mathbf{P}^{F^t}$, e na seqüência ${}_F \mathbf{F}^{F^t}$. Calcula-se então o vetor efetivo ${}_F \mathbf{B}^{F^t}$ (equação (3.23)) e obtém-se as velocidades relativas ao MEF (equação (3.24)) no passo de tempo corrente. Estando os resultados de MEF e MEC estabelecidos para o tempo corrente, atualizam-se as variáveis de ambos os métodos e parte-se para o próximo

passo de tempo. As seguintes atualizações extras são necessárias para a interface de MEC, em função da formulação (3.45):

$${}_c \mathbf{U}_N^{c^t} = {}_c \mathbf{U}_N^{c^t - c\Delta t} + ({}_c \Delta t)_C \mathbf{U}_N^{c^t - c\Delta t} + ({}_c \Delta t^2 / 2)_C \mathbf{U}_N^{c^t} \quad (3.47a)$$

$${}_c \mathbf{U}_N^{c^t} = {}_c \mathbf{U}_N^{c^t - c\Delta t} + ({}_c \Delta t)_C \mathbf{U}_N^{c^t}. \quad (3.47b)$$

O algoritmo básico de solução, considerando-se o acoplamento direto MEC-MEF, é apresentado na Tabela 3.7.

3.3.2. Acoplamento MEC-MEC

Dois tipos de acoplamento MEC-MEC, ambos iterativos, são aqui considerados para o tratamento do problema de interação fluido-sólido. O primeiro tipo de acoplamento em questão, diz respeito às formulações de elementos de contorno apresentadas nos subitens 2.2.2 e 2.3.2.2 (acoplamento MEC-MEC_E); o segundo é relativo às formulações 2.2.2 e 2.3.2.1 (acoplamento MEC-MEC_D). A presente notação é aqui empregada: o sub-índice *C* é relativo ao modelo acústico (fluido); o sub-índice *E* é relativo ao modelo dinâmico baseado em soluções fundamentais estáticas; e o sub-índice *D* é relativo ao modelo dinâmico baseado em soluções fundamentais dinâmicas.

O acoplamento MEC-MEC_E aqui considerado é análogo ao acoplamento iterativo MEC-MEF apresentado no subitem 3.3.1.2, bastando substituir a modelagem relativa a elementos finitos por modelagem de elementos de contorno baseada em soluções fundamentais estáticas. O algoritmo básico de solução, considerando-se o acoplamento iterativo MEC-MEC_E, é apresentado na Tabela 3.8.

Tabela 3.8 – Algoritmo para acoplamento MEC-MEC_E (fluido-sólido)

(1) *Cálculos iniciais:*

- (1.1) Seleção de passos de tempo para cada subdomínio (${}_C \Delta t$ e ${}_E \Delta t$). As seguintes atribuições iniciais são consideradas: ${}_C t = {}_C \Delta t$ e ${}_E t = 0$;
- (1.2) Cálculos básicos relativos ao MEC e ao MEC_E (matrizes **A**, **B** etc.);
- (1.3) Atribuição de valores iniciais para as forças de superfície de MEC_E nas interfaces de acoplamento, e.g., ${}^{(0)}_E \mathbf{T} = \mathbf{0}$;

(2) *Loop no tempo:*

(2.1) Início dos cálculos a cada passo de tempo:

${}_E t = {}_E t + {}_E \Delta t$ (caso ${}_E t > {}_C t$: adotar ${}_C t = {}_C t + {}_C \Delta t$ e calcular os vetores \mathbf{L}^{Ct} e \mathbf{S}^{Ct});

(2.2) *Loop iterativo:*

(2.2.1) Resolver MEC_E: obter as acelerações, inclusive na interface ${}^{(k+a)}_E \mathbf{U}_{E^t}$;

(2.2.2) Adoção do parâmetro a : ${}^{(k+1)}_E \mathbf{U}_{E^t} = a {}^{(k+a)}_E \mathbf{U}_{E^t} + (1-a) {}^{(k)}_E \mathbf{U}_{E^t}$;

(2.2.3) Obter a componente normal ${}^{(k+1)}_C \mathbf{U}_{N^t}$ de ${}^{(k+1)}_E \mathbf{U}_{E^t}$ (interpolação espacial);

(2.2.4) Obter ${}^{(k+1)}_C \mathbf{U}_{N^t}$ de ${}^{(k+1)}_C \mathbf{U}_{N^t}$ (extrapolação temporal);

(2.2.5) Resolver MEC: obter as pressões na interface ${}^{(k+1)}_C \mathbf{P}^{Ct}$;

(2.2.6) Obter ${}^{(k+1)}_E \mathbf{P}^{Et}$ de ${}^{(k+1)}_C \mathbf{P}^{Ct}$

(interpolação espacial e/ou interpolação temporal);

(2.2.7) Obter forças de superfície ${}^{(k+1)}_E \mathbf{T}^{Et}$ a partir da grandeza normal ${}^{(k+1)}_E \mathbf{P}^{Et}$;

(2.2.8) Checagem de convergência;

(2.3) Atualização (e impressão) dos resultados de MEC_E;

Caso ${}_E t + {}_E \Delta t > {}_C t$: atualização (e impressão) dos resultados de MEC.

O acoplamento MEC-MEC_D adota procedimentos que são análogos tanto ao acoplamento iterativo quanto ao acoplamento direto apresentados no subitem 3.3.1. O esquema iterativo de tratamento do acoplamento, abordado no subitem 3.3.1.2 é aqui considerado, mas como a formulação de MEC_D não faz uso do cálculo de acelerações, a obtenção das acelerações normais no fluido se faz através dos deslocamentos normais no sólido, conforme discutido no subitem 3.3.1.3.

Tabela 3.9 – Algoritmo para acoplamento MEC-MEC_D (fluido-sólido)

(1) *Cálculos iniciais:*

- (1.1) Seleção de passos de tempo para cada subdomínio (${}_C \Delta t$ e ${}_D \Delta t$) e seleção de passo de tempo de referência ${}_0 \Delta t$ (${}_0 \Delta t \leq {}_C \Delta t$ e ${}_0 \Delta t \leq {}_D \Delta t$). As seguintes atribuições iniciais são consideradas: ${}_C t = {}_C \Delta t$; ${}_D t = {}_D \Delta t$ e ${}_0 t = 0$;
- (1.2) Cálculos básicos relativos ao MEC e ao MEC_D (matrizes **A**, **B** etc.);
- (1.3) Atribuição de valores iniciais para as forças de superfície de MEC_D nas interfaces de acoplamento, e.g., ${}^{(0)}_D \mathbf{T} = \mathbf{0}$;

(2) *Loop no tempo:*

- (2.1) Início dos cálculos a cada passo de tempo: ${}_0 t = {}_0 t + {}_0 \Delta t$

(caso ${}_D t > {}_0 t$: adotar ${}_D t = {}_D t + {}_D \Delta t$ e calcular os vetores \mathbf{L}^{D^t} e \mathbf{S}^{D^t});

(caso ${}_C t > {}_0 t$: adotar ${}_C t = {}_C t + {}_C \Delta t$ e calcular os vetores \mathbf{L}^{C^t} e \mathbf{S}^{C^t});

(2.2) *Loop iterativo:*

(2.2.1) Resolver MEC_D: obter os deslocamentos na interface ${}^{(k+a)}_D \mathbf{U}^{D^t}$;

(2.2.2) Adoção do parâmetro a : ${}^{(k+1)}_D \mathbf{U}^{D^t} = a {}^{(k+a)}_D \mathbf{U}^{D^t} + (1-a) {}^{(k)}_D \mathbf{U}^{D^t}$;

(2.2.3) Obter a componente normal ${}^{(k+1)}_C \mathbf{U}_N^{D^t}$ de ${}^{(k+1)}_D \mathbf{U}^{D^t}$ (interpolação espacial);

(2.2.4) Obter ${}^{(k+1)}_C \mathbf{U}_N^{0^t}$ de ${}^{(k+1)}_C \mathbf{U}_N^{D^t}$ (interpolação temporal);

(2.2.5) Obter ${}^{(k+1)}_C \mathbf{U}_N^{0^t} = (2/{}_{CD} \Delta t^2) ({}^{(k+1)}_C \mathbf{U}_N^{0^t} - {}_C \mathbf{U}_N^{C^t-c\Delta t}) - (2/{}_{CD} \Delta t) {}_C \mathbf{U}_N^{C^t-c\Delta t}$;

(2.2.6) Obter ${}^{(k+1)}_C \mathbf{U}_N^{C^t}$ de ${}^{(k+1)}_C \mathbf{U}_N^{0^t}$ (extrapolação temporal);

(2.2.7) Resolver MEC: obter as pressões na interface ${}^{(k+1)}_C \mathbf{P}^{C^t}$;

(2.2.8) Obter ${}^{(k+1)}_C \mathbf{P}^{0^t}$ de ${}^{(k+1)}_C \mathbf{P}^{C^t}$ (interpolação temporal);

(2.2.9) Obter forças de superfície ${}^{(k+1)}_C \mathbf{T}^{0^t}$ a partir da grandeza normal ${}^{(k+1)}_C \mathbf{P}^{0^t}$;

(2.2.10) Obter ${}^{(k+1)}_C \mathbf{T}^{D^t}$ de ${}^{(k+1)}_C \mathbf{T}^{0^t}$ (extrapolação temporal);

(2.2.11) Obter ${}^{(k+1)}_D \mathbf{T}^{D^t}$ de ${}^{(k+1)}_C \mathbf{T}^{D^t}$ (interpolação espacial);

(2.2.12) Checagem de convergência;

- (2.3) Caso ${}_0 t + {}_0 \Delta t > {}_D t$: Atualização (e impressão) dos resultados de MEC_D;

Caso ${}_0 t + {}_0 \Delta t > {}_C t$: atualização (e impressão) dos resultados de MEC.

$${}_C \mathbf{U}_N^{C^t} = {}_C \mathbf{U}_N^{C^t-c\Delta t} + ({}_C \Delta t) {}_C \mathbf{U}_N^{C^t-c\Delta t} + ({}_C \Delta t^2 / 2) {}_C \mathbf{U}_N^{C^t}$$

$${}_C \mathbf{U}_N^{C^t} = {}_C \mathbf{U}_N^{C^t-c\Delta t} + ({}_C \Delta t) {}_C \mathbf{U}_N^{C^t}$$

O algoritmo básico de solução, considerando-se o acoplamento iterativo MEC-MEC_D, é apresentado na Tabela 3.9. Em relação aos procedimentos de interpolação-extrapolação no tempo, o algoritmo da Tabela 3.9 é mais genérico: introduz-se no algoritmo um passo de tempo de referência ${}_0\Delta t$. Com a introdução de ${}_0\Delta t$ a formulação torna-se independente das relações entre os diferentes passos de tempo adotados em cada subdomínio (ou seja, para o acoplamento MEC-MEC_D, torna-se indiferente se ${}_c\Delta t > {}_D\Delta t$ ou ${}_D\Delta t > {}_c\Delta t$), estando todos os processos de interpolação-extrapolação no tempo referenciados ao passo de tempo ${}_0\Delta t$.

A introdução de passos de tempo de referência pode ser estendida para os algoritmos anteriores. Na presente aplicação (acoplamento MEC-MEC_D) pode-se adotar ${}_0\Delta t$ como sendo o menor dos valores de ${}_c\Delta t$ ou ${}_D\Delta t$; em acoplamentos do tipo MEC-MEC_E-MEC_D (ou MEC-MEF-MEC_D) pode-se adotar ${}_0\Delta t$ como sendo ${}_E\Delta t$ (ou ${}_F\Delta t$), por exemplo (ver subitem 3.4.5.1).

3.4. Aplicações numéricas

Analisa-se nesta seção alguns problemas de engenharia relativos a acoplamentos de interface entre sistemas fisicamente similares e/ou distintos. Diversas aplicações são aqui consideradas (análise de sistemas com interação tipo estrutura-estrutura, fluido-estrutura, solo-fluido-estrutura etc.) utilizando as diferentes técnicas de modelagem previamente apresentadas. Os resultados obtidos são comparados entre si, com soluções analíticas e/ou com resultados de outros autores. Nas aplicações que se seguem, as contribuições originais do presente trabalho são enfocadas.

3.4.1. Acoplamento acústico-acústico

Embora este tipo de acoplamento não tenha sido detalhado nos itens precedentes, ele segue as diretrizes básicas apresentadas quando da análise de acoplamento entre sistemas fisicamente similares (ver MANSUR *et al.* (2000)). Assim sendo, o acoplamento acústico-acústico pode ser obtido por correlação direta das grandezas existentes na interface de acoplamento (pressão e fluxo correlacionados com pressão e fluxo, respectivamente).

Analisa-se a seguir uma membrana de vibração modelada pela teoria acústica. A fim de se ter uma interpretação física mais apropriada, interpreta-se a equação da onda que rege o modelo como descrevendo deslocamentos transversais à membrana.

3.4.1.1. Membrana de vibração

Neste exemplo estuda-se uma membrana quadrada, engastada em seu contorno, e sujeita a velocidades iniciais (de distribuição espacial uniforme) aplicadas na sua região central (MANSUR, 1983). Um esquema da membrana em questão é apresentado na Figura 3.4.

Geometricamente, a membrana é definida por: $a = 1.0m$ e $b = 0.2m$. A velocidade inicial aplicada na área central da membrana tem amplitude: $\dot{w}_0 = 1.0m/s$. A velocidade de propagação de onda no meio é dada por $c = 1.0m/s$.

Diferentes procedimentos numéricos são empregados para a solução do modelo proposto: elementos de contorno; elementos finitos; e acoplamento entre elementos de contorno e elementos finitos. Na Figura 3.5 apresentam-se as discretizações espaciais

utilizadas pelos procedimentos numéricos considerados. Na solução considerando-se elementos de contorno acoplados com elementos finitos, a região central da membrana, onde a condição inicial de velocidade é aplicada, é modelada por intermédio de elementos finitos, sendo o restante da membrana modelado por elementos de contorno. O esquema das malhas de elementos de contorno e elementos finitos, na análise acoplada, pode ser visto na Figura 3.5(a). 104 elementos lineares de contorno e 72 elementos finitos triangulares lineares são adotados para a modelagem acoplada. No caso de análise usando unicamente o método de elementos de contorno, adotam-se 32 elementos lineares de contorno para discretização da membrana e 4 células de integração, triangulares lineares, para tratamento das integrais de domínio relativas às condições iniciais do problema (Figura 3.5(b)). No caso de análise usando unicamente o método de elementos finitos, duas malhas são consideradas: a primeira (malha 1) composta por 800 elementos triangulares lineares; e a segunda (malha 2), mais refinada, composta por 5000 elementos triangulares lineares (Figura 3.5(c)).

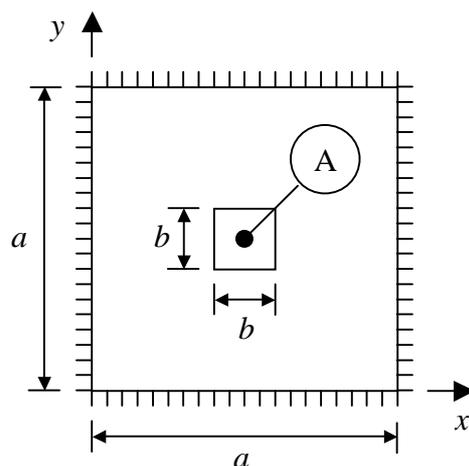


Figura 3.4 – Modelo esquemático da membrana de vibração.

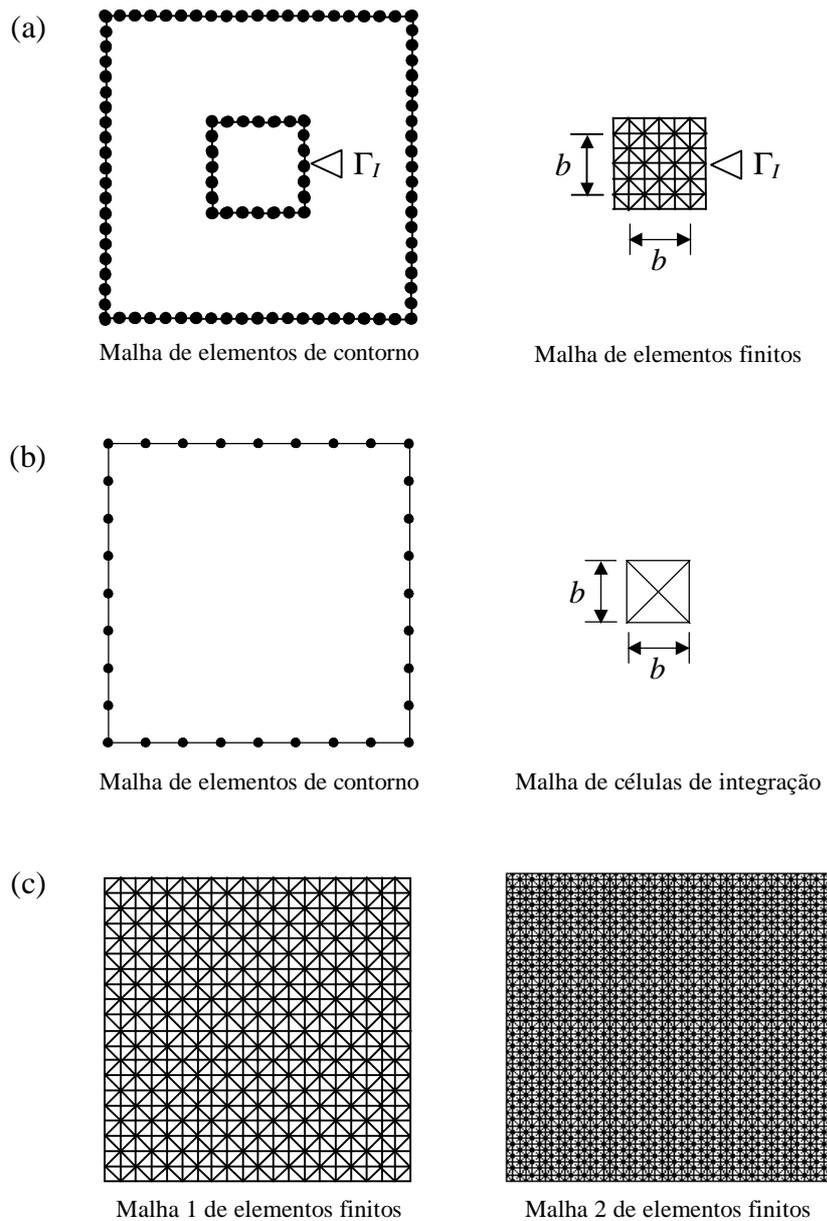


Figura 3.5 – Discretização espacial do modelo da membrana: (a) análise acoplada MEC-MEF (104 elementos de contorno; 72 elementos finitos); (b) análise com MEC (32 elementos de contorno; 4 células de integração); (c) análise com MEF (malha 1 com 800 elementos; malha 2 com 5000 elementos).

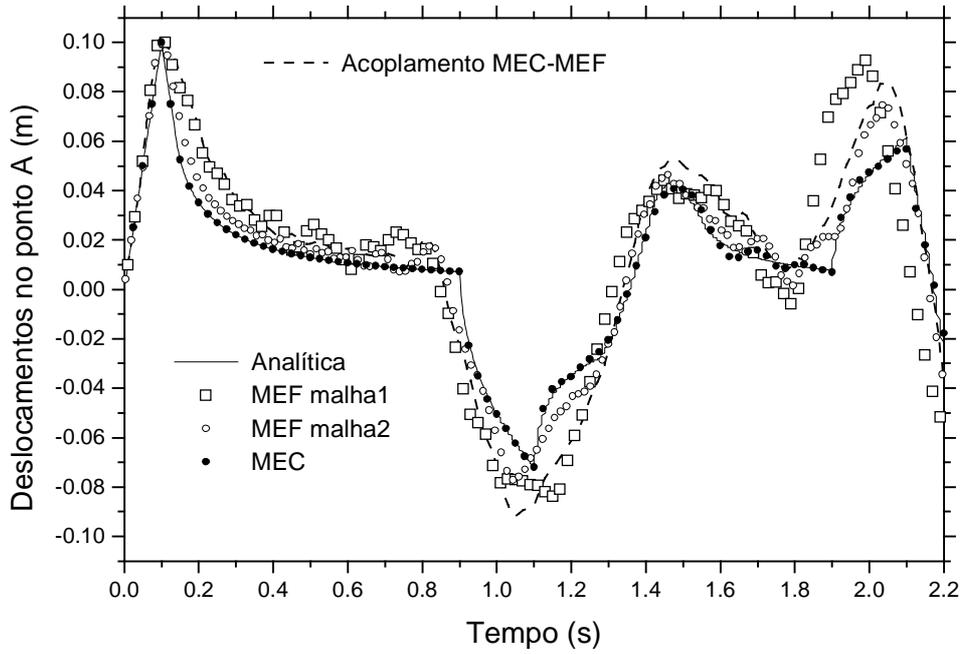


Figura 3.6 – Vibração no ponto A considerando soluções por elementos de contorno, elementos finitos e acoplamento de elementos de contorno com elementos finitos.

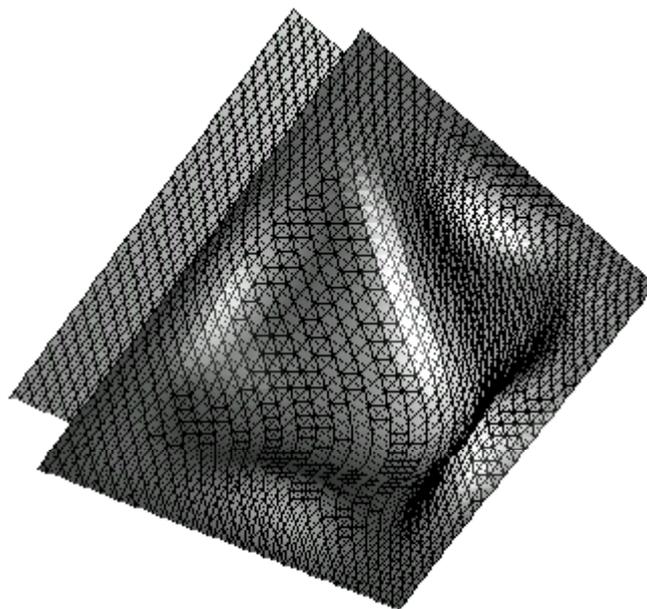


Figura 3.7 – Resultados ao longo da membrana (tempo $t = 1.5s$) considerando-se análise com elementos finitos (malha 2).

Resultados para a vibração no ponto A, no centro da membrana (Figura 3.4), são apresentados na Figura 3.6. Na análise com elementos de contorno o passo de tempo adotado é $\Delta t = 0.025s$ ($b = 0.2$). Na análise com elementos finitos os seguintes passos de tempo são considerados: $\Delta t = 0.01s$ (malha 1); e $\Delta t = 0.004s$ (malha 2). Para análise acoplada, o mesmo passo de tempo é adotado em ambos subdomínios, sendo este: $\Delta t = 0.01s$ ($b = 0.2$). O acoplamento em questão é realizado considerando-se o algoritmo de acoplamento iterativo MEC-MEF.

Conforme se pode notar pelos resultados na Figura 3.6, o método dos elementos de contorno é mais preciso que o método dos elementos finitos para o tratamento do problema em questão. Acoplando-se elementos de contorno com elementos finitos, consegue-se aprimorar um pouco a precisão relativa aos resultados de elementos finitos: conforme se pode notar no gráfico da Figura 3.6, a partir do intervalo de tempo $t = 1.9s$, que é aproximadamente quando a segunda frente de onda refletida pelas bordas do modelo atinge o ponto A, a curva relativa à modelagem acoplada se aproxima da curva relativa à modelagem usando malha refinada de elementos finitos.

Apresenta-se na Figura 3.7 o estado de vibração da membrana acústica em $t = 1.5s$, considerando-se modelagem por elementos finitos (malha 2).

3.4.2. Acoplamento estrutura-estrutura

Considera-se nesta seção dois exemplos de acoplamento do tipo estrutura-estrutura: no primeiro exemplo estuda-se uma barra engastada (modelo linear); no segundo exemplo considera-se a análise de uma viga engastada (modelo não-linear). Os modelos

em questão descrevem tratamento de corpos de domínio finito. No próximo subitem considera-se a análise de meios infinitos.

O presente trabalho foca os métodos direto e iterativo (MEC-MEF e MEC-MEC) de acoplamento, sendo estas contribuições do autor para a literatura. O acoplamento padrão aqui apresentado, por exigir igual discretização (tanto temporal, quanto espacial) para os subdomínios modelados por MEC e por MEF, fornece resultados instáveis em muitas aplicações, podendo ser considerado como de uso restrito em virtude do seu elevado custo computacional e instabilidade numérica.

3.4.2.1. Barra engastada

Neste exemplo considera-se uma barra engastada em uma de suas extremidades, estando a extremidade oposta uniformemente tracionada (carregamento do tipo Heaviside no tempo) (SOARES JR *et al.*, 2004a). Um esquema do modelo em questão é apresentado na Figura 3.8(a). Geometricamente, a barra é definida por: $a = 2.0m$ e $b = 1.0m$. As propriedades físicas do modelo são: $E = 100N/m^2$ (módulo de Young); $\nu = 0.0$ (Poisson); $\rho = 1.5Ns^2/m^4$ (densidade de massa).

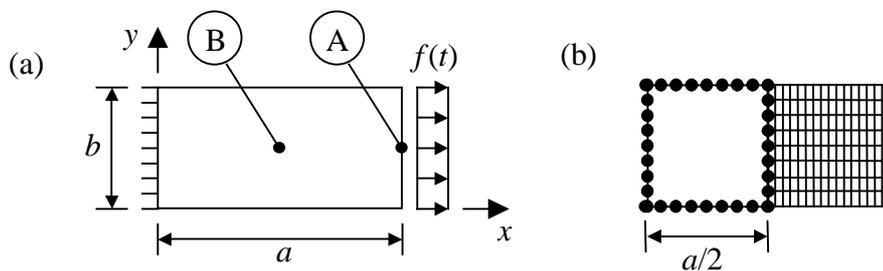


Figura 3.8 – Barra engastada: (a) modelo esquemático; (b) malha MEC-MEF.

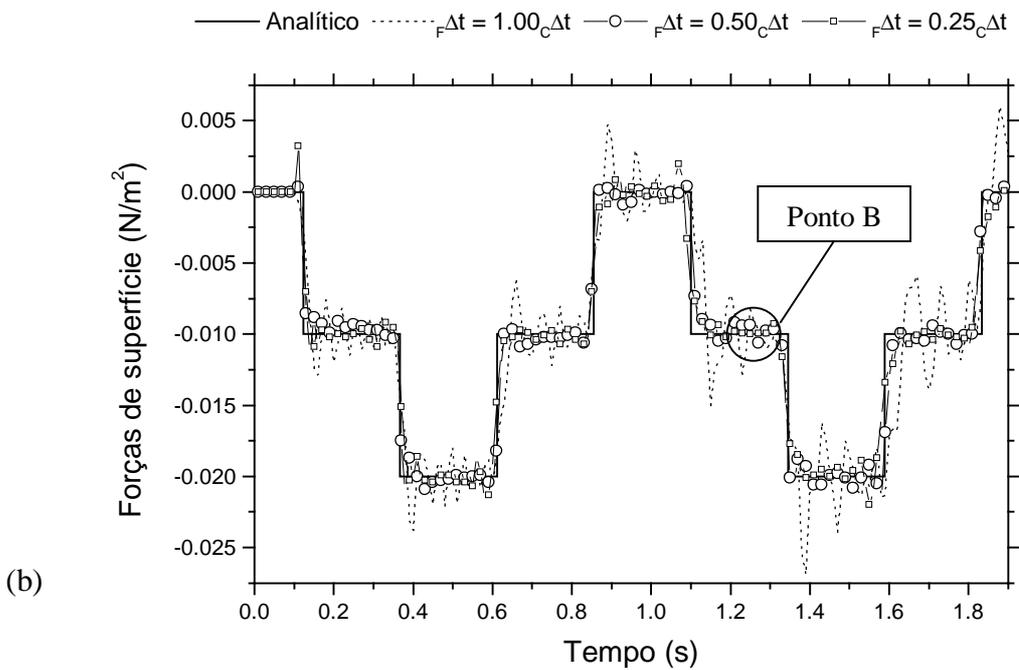
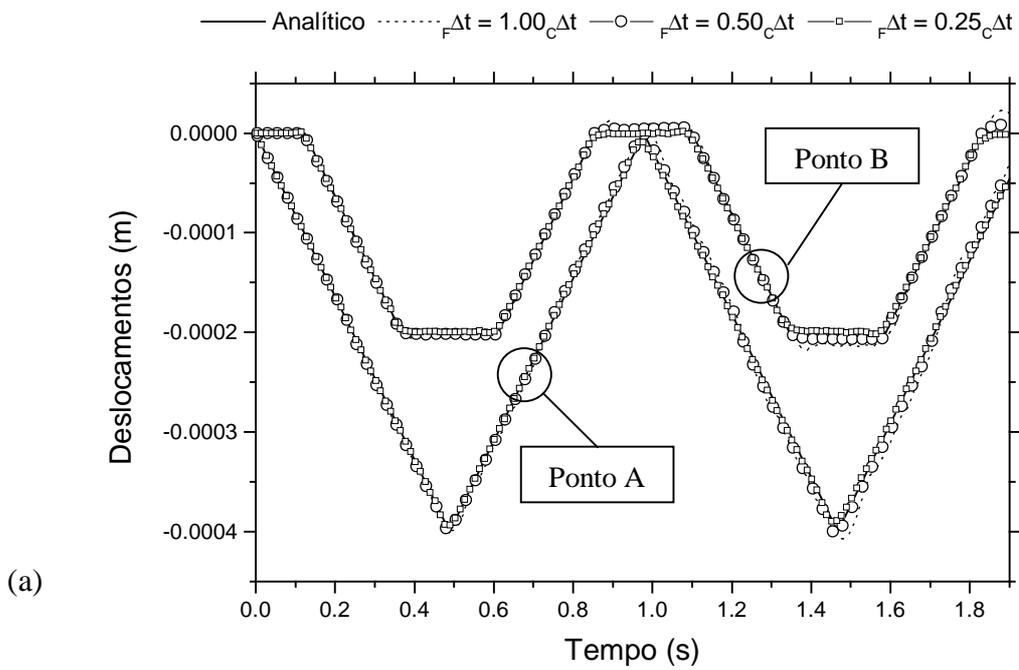


Figura 3.9 – Resultados nos pontos A e B do modelo considerando-se acoplamento iterativo MEC-MEF e diferentes discretizações temporais:

(a) deslocamentos; (b) forças de superfície.

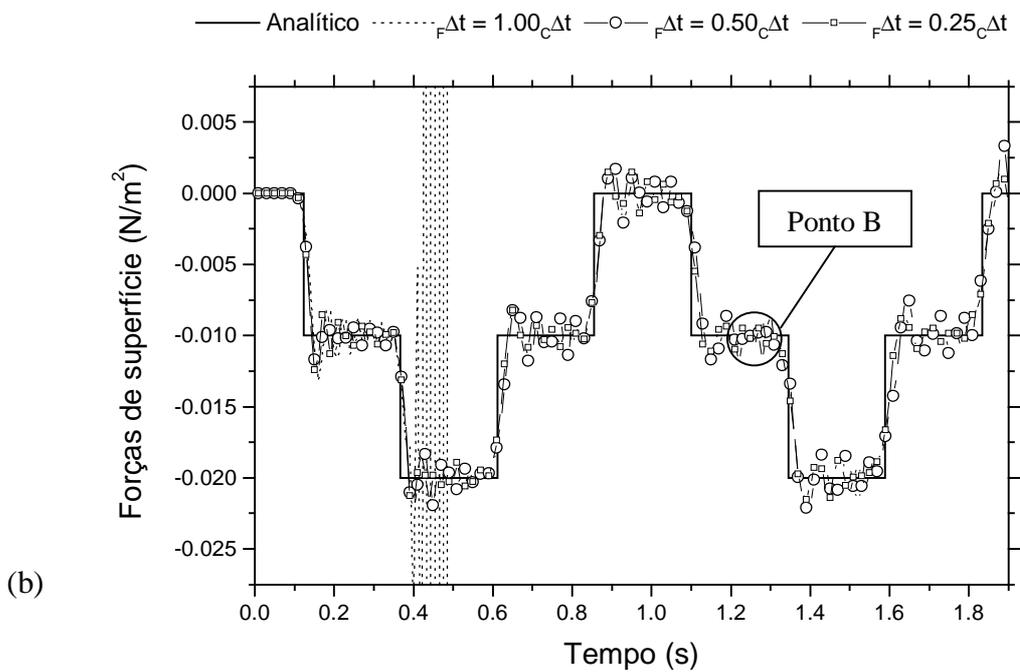
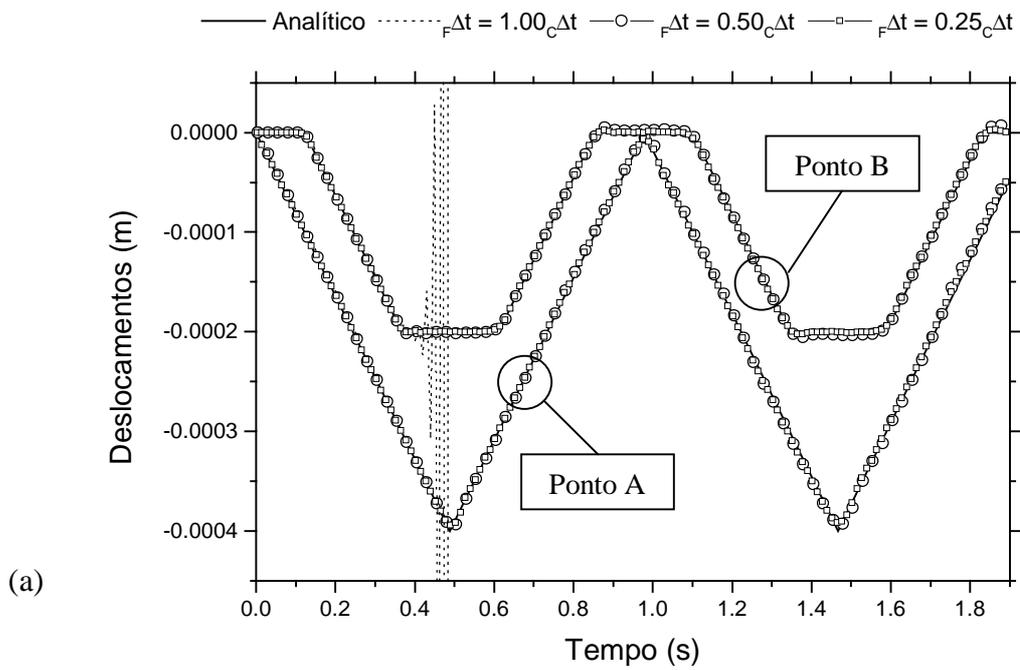


Figura 3.10 – Resultados nos pontos A e B do modelo considerando-se acoplamento direto MEC-MEF e diferentes discretizações temporais:

(a) deslocamentos; (b) forças de superfície.

A malha adotada para análise acoplada é indicada na Figura 3.8(b). 32 elementos lineares de contorno e 128 elementos finitos quadrangulares lineares são empregados. O passo de tempo adotado para o subdomínio de elementos de contorno é: $c\Delta t = 0.01s$ ($b \approx 0.65$). No subdomínio de elementos finitos, diferentes passos de tempo são considerados, mais especificamente: $r\Delta t = 1.00c\Delta t$; $r\Delta t = 0.50c\Delta t$; e $r\Delta t = 0.25c\Delta t$.

Os resultados obtidos para os deslocamentos no ponto A e forças de superfície no ponto B (Figura 3.8(a)) do modelo são apresentados nas Figuras 3.9 e 3.10. Na Figura 3.9 considera-se acoplamento iterativo MEC-MEF; na Figura 3.10 acoplamento direto MEC-MEF é considerado. Soluções analíticas também são apresentadas nas Figuras 3.9 e 3.10.

Conforme se pode notar, melhores resultados são obtidos adotando-se diferentes discretizações temporais em cada subdomínio. Para $r\Delta t = 1.00c\Delta t$ a distância percorrida pela frente de onda, considerando-se um passo de tempo de elementos finitos, é maior que a dimensão efetiva (menor dimensão do retângulo) dos elementos finitos em uso. Para $r\Delta t = 0.25c\Delta t$, são necessários cerca de 3 passos de tempo de elementos finitos, para que a frente de onda percorra cada elemento finito. Desta forma, a discretização $r\Delta t = 0.25c\Delta t$ é mais apropriada que $r\Delta t = 1.00c\Delta t$ para o tratamento dos subdomínios em consideração, fato que se reflete quando do tratamento do sistema acoplado.

Observa-se na Figura 3.10 que para $r\Delta t = 1.00c\Delta t$ o acoplamento direto MEC-MEF fornece resultados instáveis. A instabilidade em questão se inicia quando a frente de onda refletida pelo engaste alcança a interface de acoplamento. Uma vez que as forças de superfície resultantes da solução por intermédio de elementos de contorno apresentam oscilações, estas oscilações dos resultados de MEC não conseguem ser

apropriadamente tratadas pelo método implícito de Green, quando grandes passos de tempo são considerados. Desta forma, as oscilações são amplificadas e o acoplamento torna-se instável. No caso do acoplamento iterativo essas oscilações são “relaxadas” por intermédio do processo iterativo, principalmente quando se adota valores menores que a unidade para o parâmetro de relaxamento α (ver Figura 3.11). Deste modo, apesar do acoplamento direto ser mais eficiente, pode-se considerar o acoplamento iterativo como sendo mais estável.

A convergência do processo iterativo de acoplamento pode ser aqui analisada nas Figuras 3.11 e 3.12. A Figura 3.11 indica o número médio de iterações realizado, por passo de tempo, em função do parâmetro de relaxamento α e das diferentes discretizações temporais adotadas.

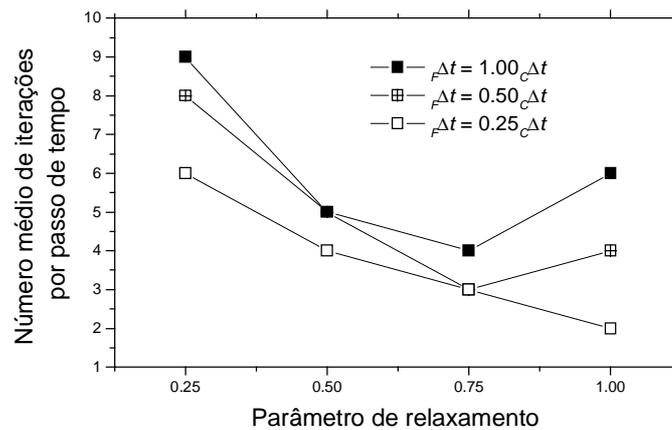


Figura 3.11 – Acoplamento iterativo MEC-MEF: número médio de iterações por passo de tempo em função do parâmetro de relaxamento α e de diferentes discretizações temporais.

Conforme se pode notar, para problemas apropriadamente modelados ($r\Delta t = 0.25_c\Delta t$, por exemplo), valores de α próximos à unidade tendem a ser mais eficientes para a formulação. Todavia, para problemas mal condicionados, é importante a adoção de menores valores de α para se garantir e/ou acelerar a convergência. Na Figura 3.12 apresenta-se a evolução da convergência dos resultados, considerando-se $\alpha = 0.5$. As curvas apresentadas na Figura 3.12, simbolizadas por marcação quadrilátera, são obtidas impondo-se um número fixo de iterações (no caso 1, 2, 3 e 4 iterações) por passo de tempo. Desta forma pode-se observar a evolução dos resultados como função do número de iterações de acoplamento.

Na Figura 3.13 apresentam-se resultados relativos ao acoplamento direto MEC-MEF considerando-se truncamento do processo de convolução de elementos de contorno. O ganho computacional devido ao truncamento é destacado na Tabela 3.10. O método de interpolação multi-linear foi considerado para o truncamento em questão, adotando-se $k = 10$ e $\Theta = 0.5$. Conforme se pode notar, grande ganho computacional pode ser obtido pela adoção da análise truncada, sem grande perda de precisão ($\Phi = 2\%$ e 5%).

A relação aqui obtida entre os tempos totais de processamento do acoplamento direto e do acoplamento iterativo é de 85% (sem se considerar truncamento em ambas formulações). Este número é elevado uma vez que, para o problema em questão, grande parte do processamento está relacionada ao tratamento do processo de convolução de elementos de contorno, igualmente considerado, por passo de tempo, em ambas formulações de acoplamento.

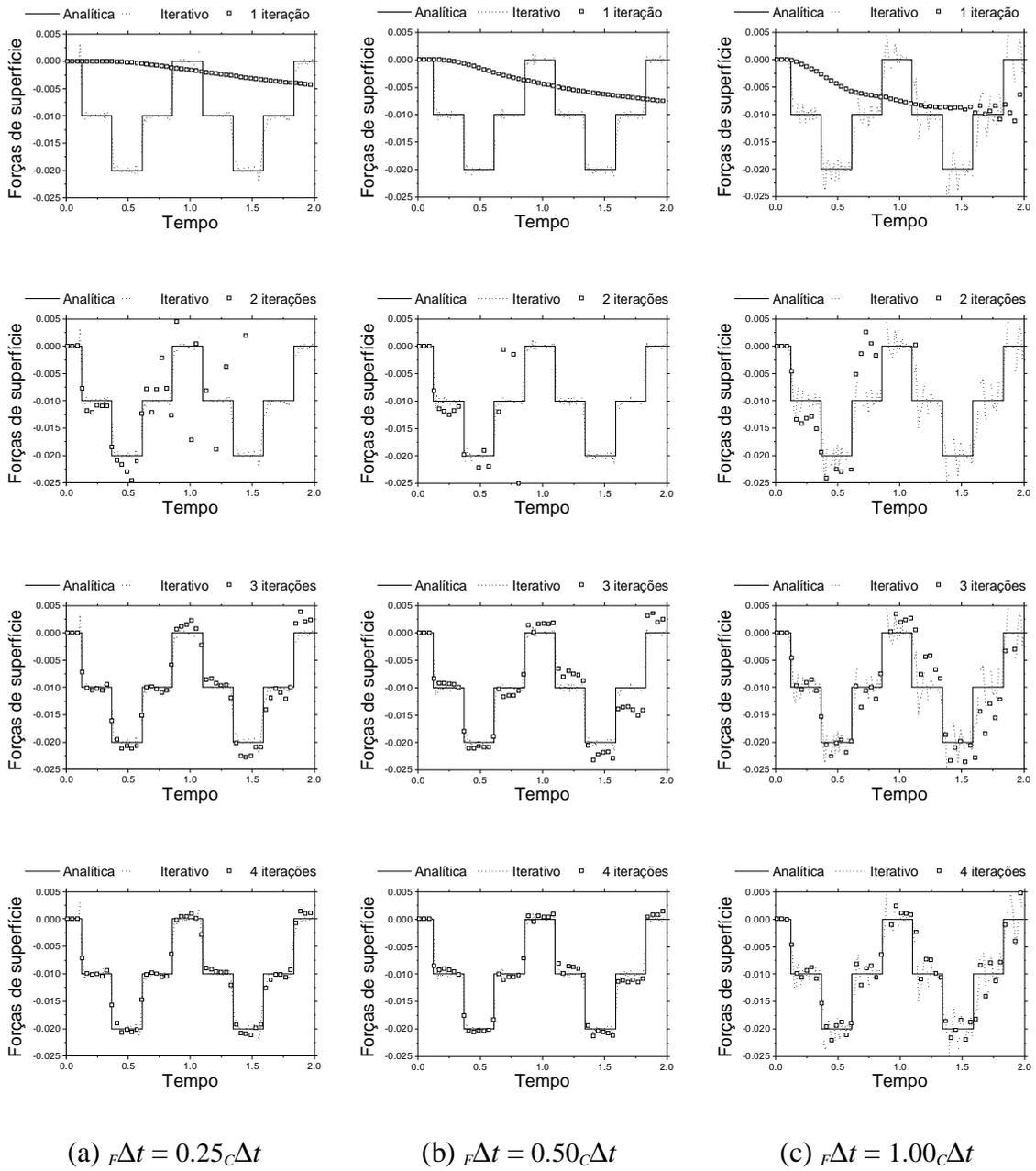
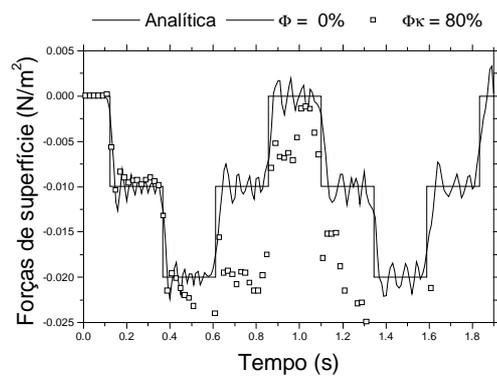
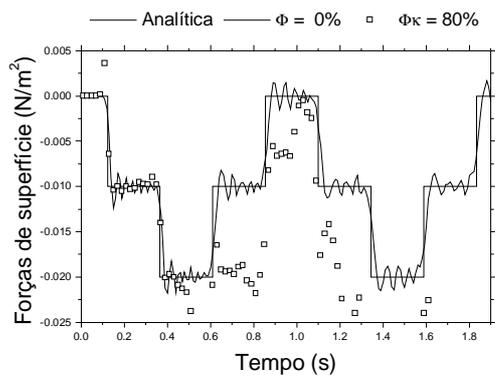
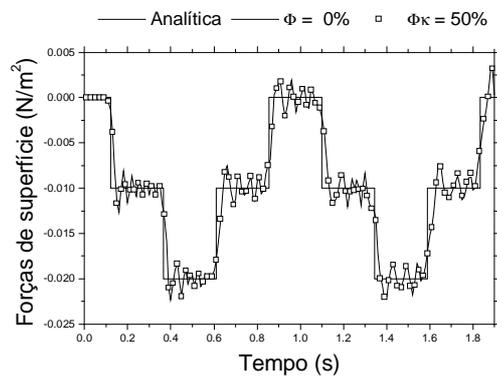
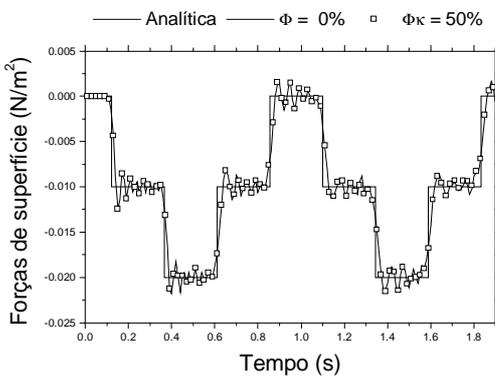
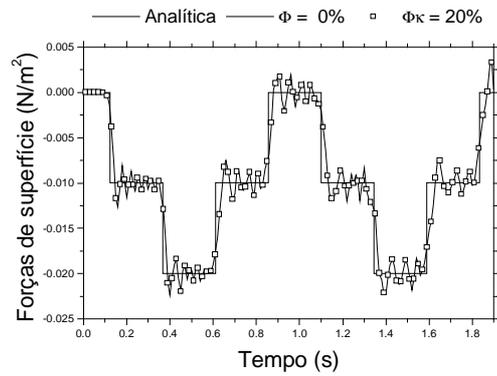
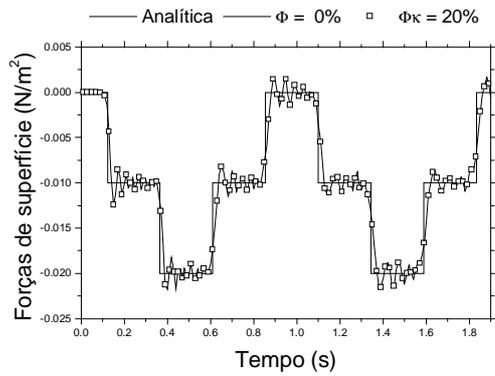


Figura 3.12 – Convergência do acoplamento iterativo MEC-MEF considerando-se parâmetro de relaxamento $\alpha = 0.5$ e diferentes discretizações temporais:

(a) $F\Delta t = 0.25_C\Delta t$; (b) $F\Delta t = 0.50_C\Delta t$; (c) $F\Delta t = 1.00_C\Delta t$.



(a) $F\Delta t = 0.25_C\Delta t$

(b) $F\Delta t = 0.50_C\Delta t$

Figura 3.13 – Forças de superfície no ponto B da interface, considerando-se acoplamento direto MEC-MEF e truncamento do processo de convolução:

(a) $F\Delta t = 0.25_C\Delta t$; (b) $F\Delta t = 0.50_C\Delta t$.

Tabela 3.10 – Barra engastada: ganho computacional no acoplamento direto

$\Phi(\%)$	Memória (%)	Tempo de CPU (%)
0	100	100
2	45	58
5	18	24
8	12	20
Acoplamento direto / iterativo:		85

3.4.2.2. Viga engastada

Neste exemplo considera-se uma viga engastada (SOARES JR *et al.*, 2004a), conforme esquematizado na Figura 3.14(a). Os dados físicos e geométricos do modelo da viga são os mesmos do modelo da barra previamente considerado, ou seja, tem-se: $a = 2.0m$ e $b = 1.0m$ (dimensões do modelo); $E = 100N/m^2$ (módulo de Young); $\nu = 0.0$ (Poisson); $\rho = 1.5Ns^2/m^4$ (densidade de massa). O carregamento vertical aplicado na extremidade da viga (Figura 3.14(a)) é uniformemente distribuído e do tipo Heaviside.

O modelo em questão é aqui tratado considerando-se análise acoplada (acoplamento iterativo MEC-MEF e MEC-MEC) e não acoplada (solução por MEF e por MEC). As malhas adotadas considerando-se análise acoplada são indicadas na Figura 3.14(b). No caso de acoplamento MEC-MEF, 64 elementos finitos, quadrangulares lineares, e 32 elementos lineares de contorno são empregados na malha acoplada. No caso de acoplamento MEC-MEC, 64 elementos lineares de contorno são empregados (32 referentes à formulação MEC_E e 32 referentes à formulação MEC_D), bem como 128 células de integração triangulares lineares (formulação MEC_E).

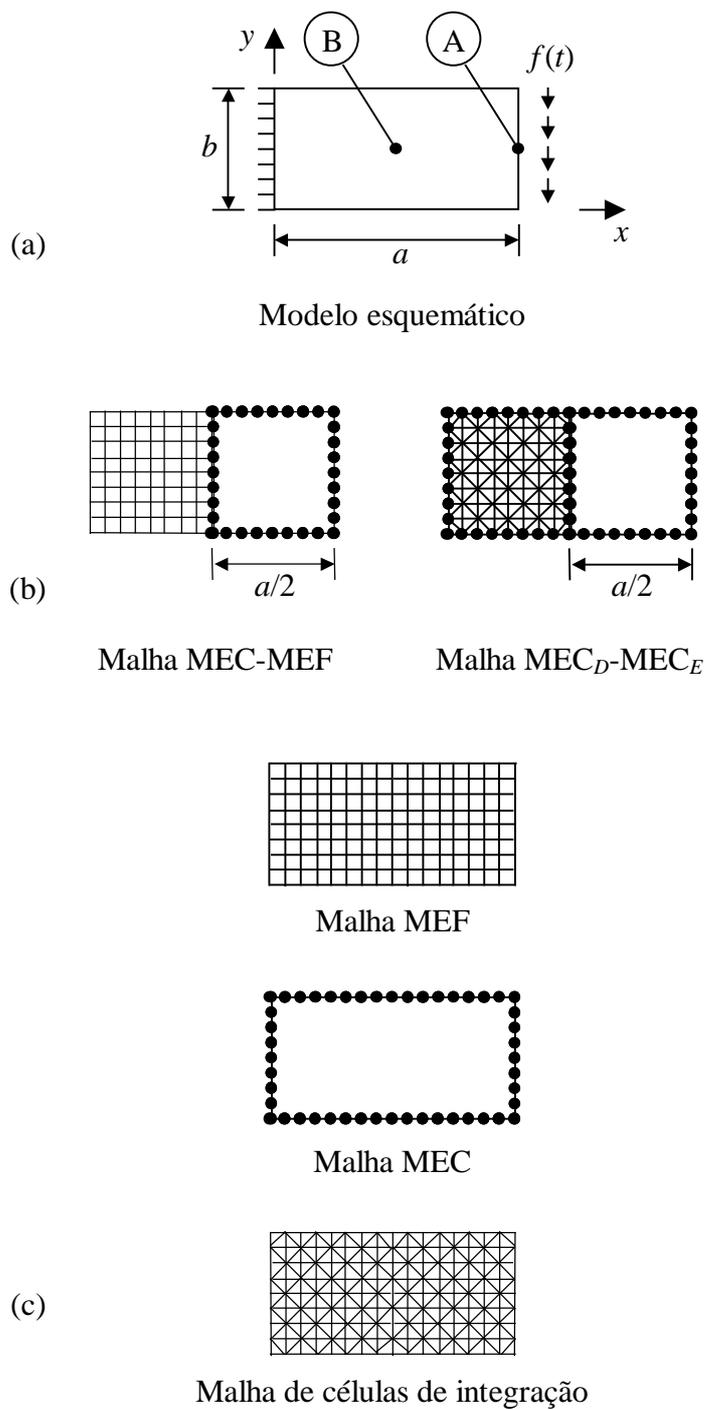


Figura 3.14 – Viga engastada: (a) modelo esquemático; (b) malhas acopladas MEC-MEF e MEC-MEC; (c) malhas não acopladas: elementos finitos, elementos de contorno e células de integração.

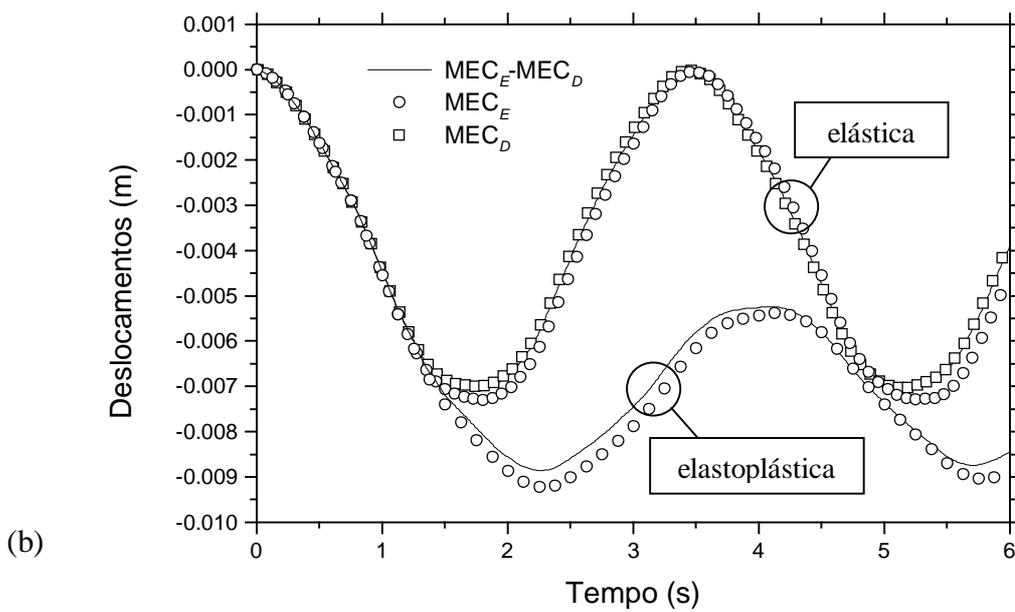
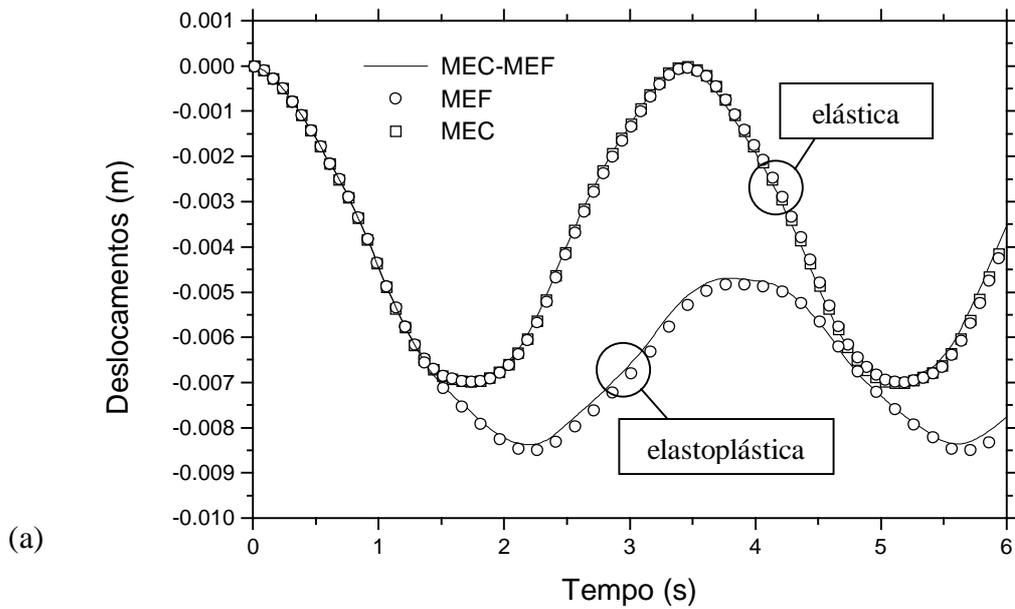


Figura 3.15 – Resultados no ponto A do modelo para análise linear e não-linear:
 (a) acoplamento iterativo MEC-MEF; (b) acoplamento iterativo MEC-MEC.

As malhas relativas às análises não acopladas são apresentadas na Figura 3.14(c): 128 elementos finitos quadrangulares lineares; 48 elementos lineares de contorno; e 256 células de integração triangulares lineares são adotadas.

Resultados lineares e não-lineares obtidos para o ponto A do modelo são apresentados na Figura 3.15. Os passos de tempo adotados são: $c\Delta t = 0.015s$ ($b \approx 1.0$) e $f\Delta t = 0.005s$. No caso de acoplamento MEC-MEC tem-se, de forma análoga: $d\Delta t = 0.015s$ e $e\Delta t = 0.005s$. Na análise não-linear em questão considera-se o modelo como sendo elastoplástico, seguindo o critério de escoamento de von Mises. A tensão de escoamento considerada para o modelo é $\sigma_0 = 0.10N/m^2$. Conforme se pode perceber por intermédio da Figura 3.15, boa concordância é obtida entre os resultados provenientes dos diferentes métodos de análise empregados.

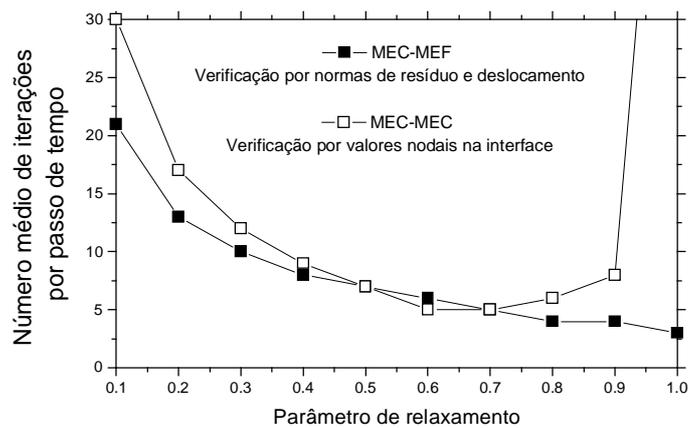
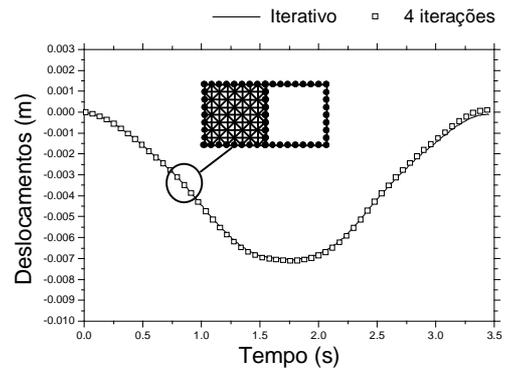
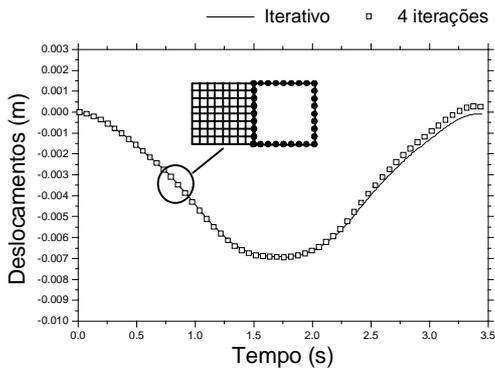
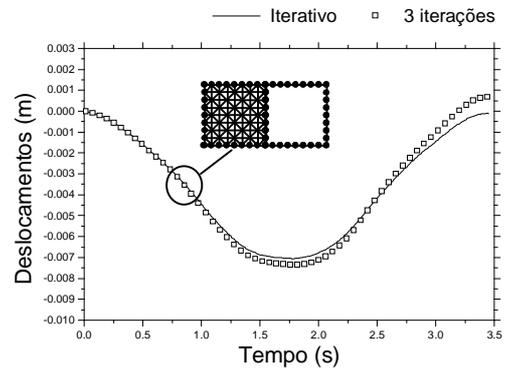
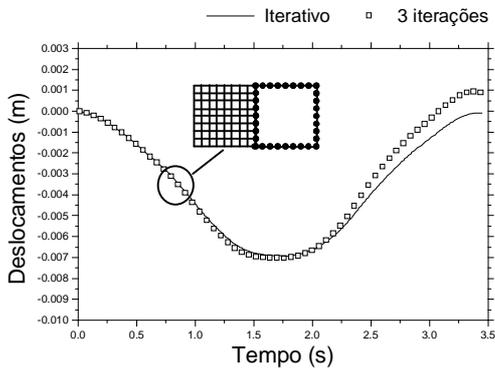
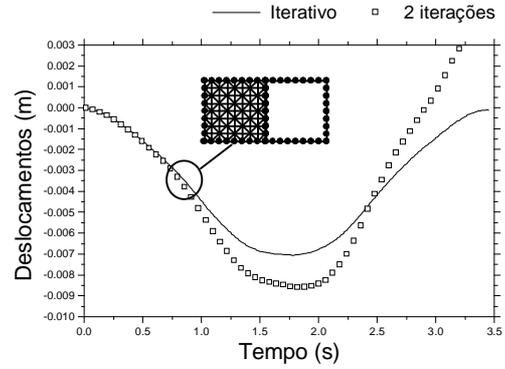
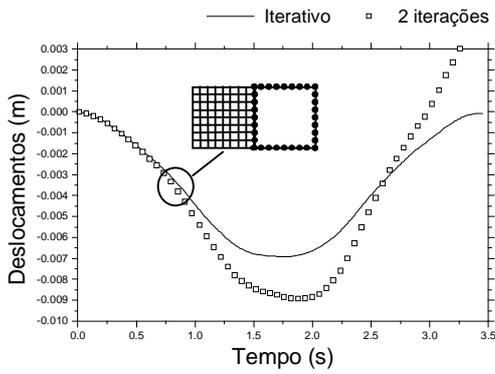


Figura 3.16 – Acoplamento iterativo MEC-MEF e MEC-MEC: número médio de iterações por passo de tempo em função do parâmetro de relaxamento α .



(a) MEC-MEF

(b) MEC_D-MEC_E

Figura 3.17 – Convergência do acoplamento iterativo considerando-se parâmetro de relaxamento $\alpha = 0.5$: (a) acoplamento MEC-MEF; (b) acoplamento MEC-MEC.

A convergência dos processos iterativos de acoplamento pode ser aqui analisada nas Figuras 3.16 e 3.17. A Figura 3.16 indica o número médio de iterações realizado, por passo de tempo, em função do parâmetro de relaxamento α , considerando-se acoplamento MEC-MEF e MEC-MEC. É importante ressaltar que os critérios de convergência empregados pelas duas metodologias de acoplamento são diferentes: enquanto no acoplamento MEC-MEF a verificação de convergência é aqui feita por intermédio das normas dos vetores de resíduo e de incrementos de deslocamento, no acoplamento MEC-MEC faz-se a verificação de convergência por intermédio de valores nodais na interface de acoplamento. Estes diferentes critérios foram adotados quando da programação, a fim de se poder considerar as iterações de acoplamento junto com as iterações relativas a procedimentos não-lineares (é usual a adoção destes tipos de critérios nas metodologias para análises não-lineares de MEC e de MEF).

Na Figura 3.17 apresenta-se a evolução da convergência dos resultados, considerando-se $\alpha = 0.5$. Adota-se $\alpha = 0.5$ na Figura 3.17, pois, para esse valor, o mesmo número médio de iterações é necessário para o acoplamento MEC-MEF e MEC-MEC (Figura 3.16). Pode-se, desta forma, avaliar-se melhor a informação gráfica da Figura 3.16, uma vez que o critério de convergência adotado para o acoplamento MEC-MEC é mais rigoroso que o adotado para o acoplamento MEC-MEF (tolerância de 10^{-3} é considerada em ambas metodologias).

Para a modelagem em questão, obtém-se melhores resultados por intermédio de elementos finitos que pela metodologia de elementos de contorno baseada em soluções fundamentais estáticas (MEC_E). Pode-se notar, por exemplo, conforme apresentado na análise elástica da Figura 3.15, que os resultados de MEF são bastante similares aos resultados de MEC_D , o mesmo não acontecendo com os resultados de MEC_E

(provavelmente o passo de tempo adotado ${}_E\Delta t$ não é o ótimo para o modelo em questão, uma vez que a formulação de MEC_E é mais sensível à escolha do passo de tempo que a formulação de MEF). Tal discrepância de resultados tem efeitos na análise acoplada: o acoplamento iterativo MEC-MEC não converge caso se adote $\alpha = 1.0$ (Figura 3.16). Mais uma vez percebe-se a importância do parâmetro α na estabilização de modelos mal condicionados.

3.4.3. Acoplamento solo-solo

Considera-se, nesta seção, dois exemplos de aplicação, um linear e outro não-linear, ambos relacionados a acoplamentos do tipo solo-solo. Modelos de domínio infinito são aqui considerados: neste tipo de aplicação tornam-se especialmente úteis acoplamentos do tipo MEC-MEF (ou MEC-MEC).

3.4.3.1. Meio semi-infinito

Considera-se aqui a análise de um meio semi-infinito sob carregamento (VON ESTORFF & FIRUZIAAN, 2000), conforme esquematizado na Figura 3.18(a). As propriedades físicas do modelo são: $E = 1.77 \cdot 10^{10} N/m^2$ (módulo de Young); $c_d = 8.21 \cdot 10^2 m/s$ e $c_s = 4.74 \cdot 10^2 m/s$ (velocidades de onda). Geometricamente, tem-se: $a = 152.4m$; $b = 152.4m$; $c = 304.8m$. A malha acoplada MEC-MEF adotada para a análise é apresentada na Figura 3.18(b). 60 elementos finitos quadrangulares lineares e 46 elementos lineares de contorno são adotados ($d = 38.1m$).

Os resultados obtidos para os deslocamentos nos pontos A, B e C (Figura 3.18(a)), adotando-se discretização temporal ${}_F\Delta t = {}_C\Delta t = 0.01s$ ($b \approx 0.2$), são apresentados na

Figura 3.19(a), considerando-se acoplamento MEC-MEF do tipo padrão, iterativo e direto. Conforme se pode notar, os resultados apresentam boa concordância entre si (bem como com os resultados apresentados por VON ESTORFF & FIRUZIAAN (2000)).

Uma vez que os acoplamentos iterativo e direto permitem a adoção de diferentes discretizações temporais para os diferentes subdomínios, na Figura 3.19(b) apresentam-se resultados considerando: $f\Delta t = 0.01s$ e $c\Delta t = 0.01s$; $f\Delta t = 0.01s$ e $c\Delta t = 0.05s$; $f\Delta t = 0.05s$ e $c\Delta t = 0.05s$. Para $f\Delta t = 0.05s$ e $c\Delta t = 0.05s$ o acoplamento padrão torna-se instável e o acoplamento iterativo não converge para $\alpha = 1.0$ (ver Figura 3.20; os gráficos traçados na Figura 3.19 adotam $\alpha = 0.5$). Para $f\Delta t = 0.01s$ e $c\Delta t = 0.05s$, obtém-se resultados (acoplamento iterativo e direto) da mesma ordem de precisão dos resultados obtidos quando da adoção $f\Delta t = c\Delta t = 0.01s$.

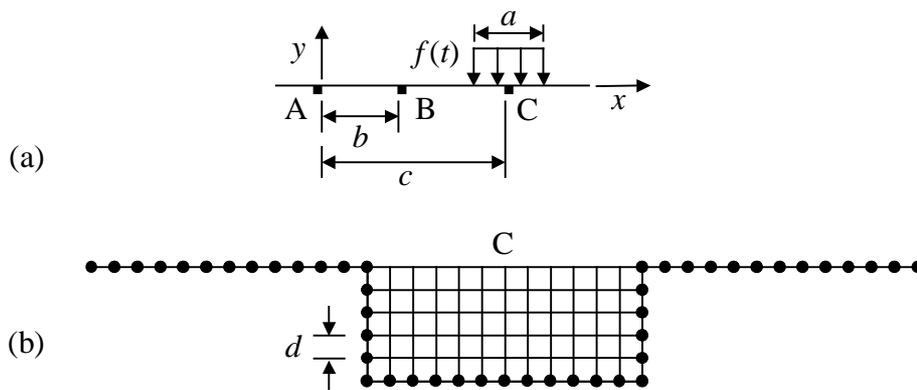


Figura 3.18 – Meio semi-infinito: (a) modelo esquemático; (b) malha MEC-MEF.

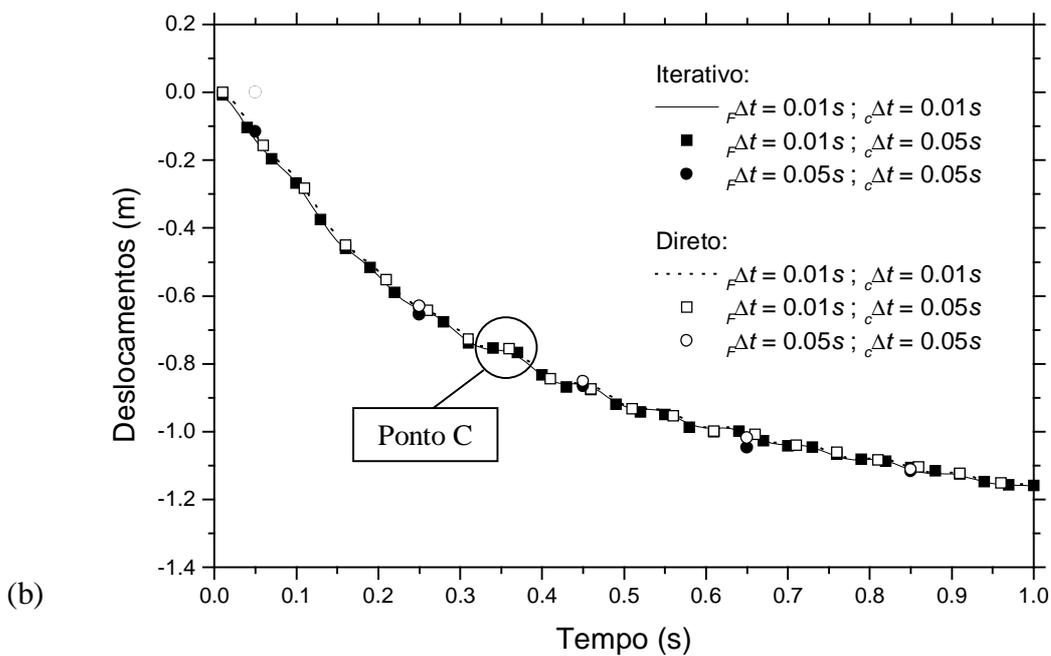
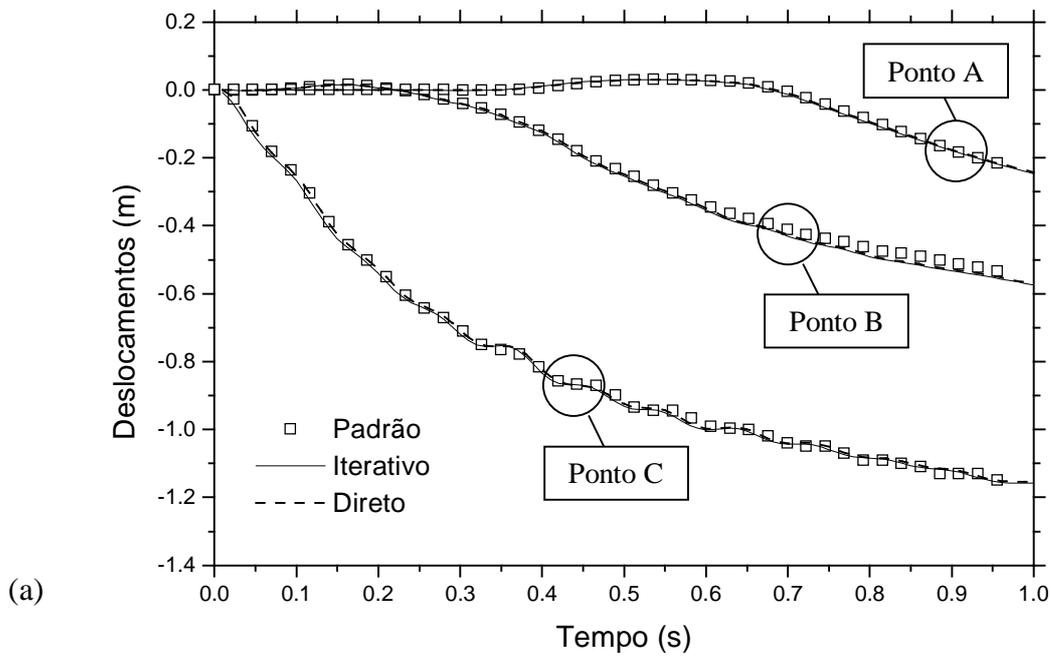


Figura 3.19 – Deslocamentos considerando-se acoplamento padrão, iterativo e direto

MEC-MEF: (a) $r\Delta t = c\Delta t = 0.01\text{ s}$; (b) diferentes discretizações temporais.

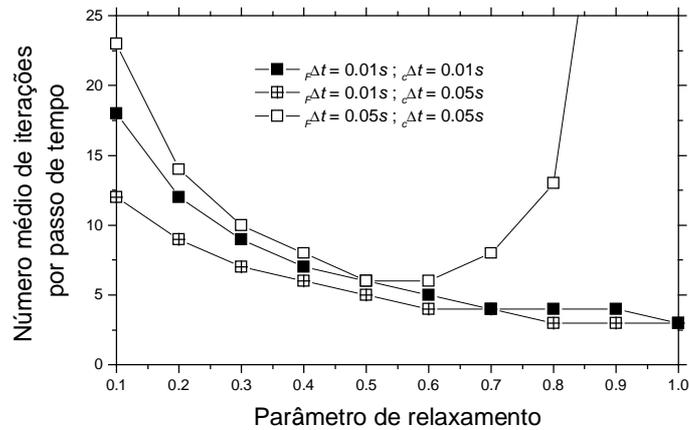


Figura 3.20 – Acoplamento iterativo MEC-MEF: número médio de iterações por passo de tempo em função do parâmetro de relaxamento α e de diferentes discretizações temporais.

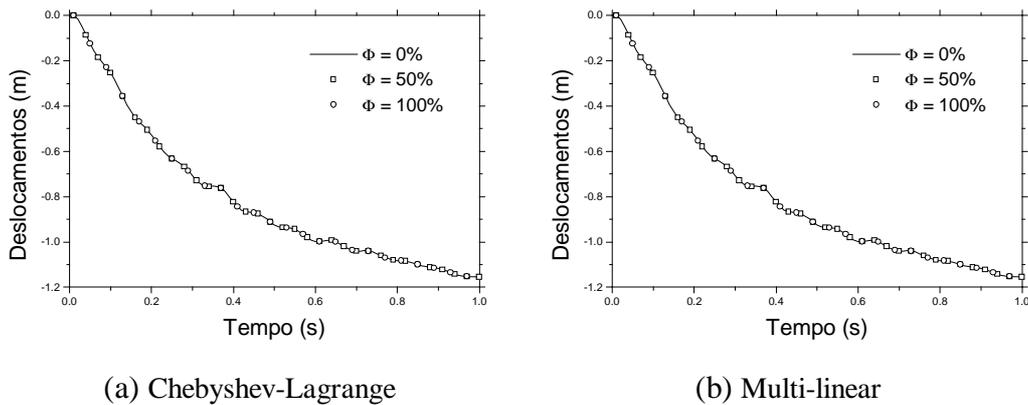


Figura 3.21 – Deslocamentos verticais no ponto C, considerando-se acoplamento direto MEC-MEF e truncamento do processo de convolução ($r\Delta t = 0.2c\Delta t$): (a) interpolação por polinômios de Chebyshev-Lagrange; (b) interpolação multi-linear.

É interessante notar que para ${}_F\Delta t = 0.01s$ e ${}_C\Delta t = 0.05s$ a análise não só é mais eficiente em relação a ${}_F\Delta t = {}_C\Delta t = 0.01s$, pois permite a solução do modelo considerando-se poucos passos de tempo relacionados ao MEC (acoplamento iterativo e direto), mas também porque se obtém convergência (acoplamento iterativo) mais rapidamente (ver Figura 3.20).

O presente exemplo, bem como os anteriores, mostra a importância da metodologia aqui proposta para se considerar diferentes discretizações temporais nos diferentes subdomínios. Por intermédio desta, pode-se obter modelagens mais estáveis, precisas e eficientes.

Na Figura 3.20 indica-se o número médio de iterações realizado, por passo de tempo, em função do parâmetro de relaxamento α e das diferentes discretizações temporais adotadas (acoplamento iterativo). Na Figura 3.21 apresentam-se resultados relativos ao acoplamento direto (${}_F\Delta t = 0.01s$ e ${}_C\Delta t = 0.05s$), considerando-se truncamento do processo de convolução de elementos de contorno.

O ganho computacional devido ao truncamento é destacado na Tabela 3.11. O método de interpolação multi-linear ($k = 2$ e $\Theta = 0.5$) e por polinômios de Chebyshev-Lagrange ($k = 2$) foram aqui considerados para o truncamento. Conforme se pode mais uma vez notar, considerável ganho computacional é obtido pela adoção da análise truncada, sem grande perda de precisão.

Análise truncada do processo de convolução se faz especialmente útil em problemas de domínio infinito (SOARES JR & MANSUR, 2004a). Nestes tipos de aplicação, a história da solução (informação correspondente a passos de tempos

precedentes) não influencia tão significativamente os resultados. Desta forma, adoção de maiores aproximações (elevados valores de Φ , por exemplo) pode ser considerada quando do processamento da convolução, sem proporcionar grandes perdas para a precisão da análise. Uma vez que o acoplamento MEC-MEF é especialmente atrativo para análise de modelos complexos e de domínio infinito, é extremamente apropriado que se disponha de algum mecanismo de truncamento da convolução de MEC associado a programas de acoplamento MEC-MEF.

A relação obtida entre os tempos totais de processamento do acoplamento direto e do acoplamento iterativo é de 60% na presente aplicação (sem se considerar truncamento em ambas formulações).

Apresenta-se, na Figura 3.22, a evolução dos deslocamentos (em módulo) ao longo da malha de elementos finitos do modelo acoplado. É importante notar que reflexões de ondas, provindas da interface de acoplamento, não são visíveis.

Tabela 3.11 – Meio semi-infinito: ganho computacional no acoplamento direto

Φ (%)	Memória (%)	Tempo de CPU (%)	Método
0	100	100	Chebyshev-Lagrange
50	85	80	
100	80	75	
50	85	80	Multi-linear
100	80	75	
Acoplamento direto / iterativo:		60	

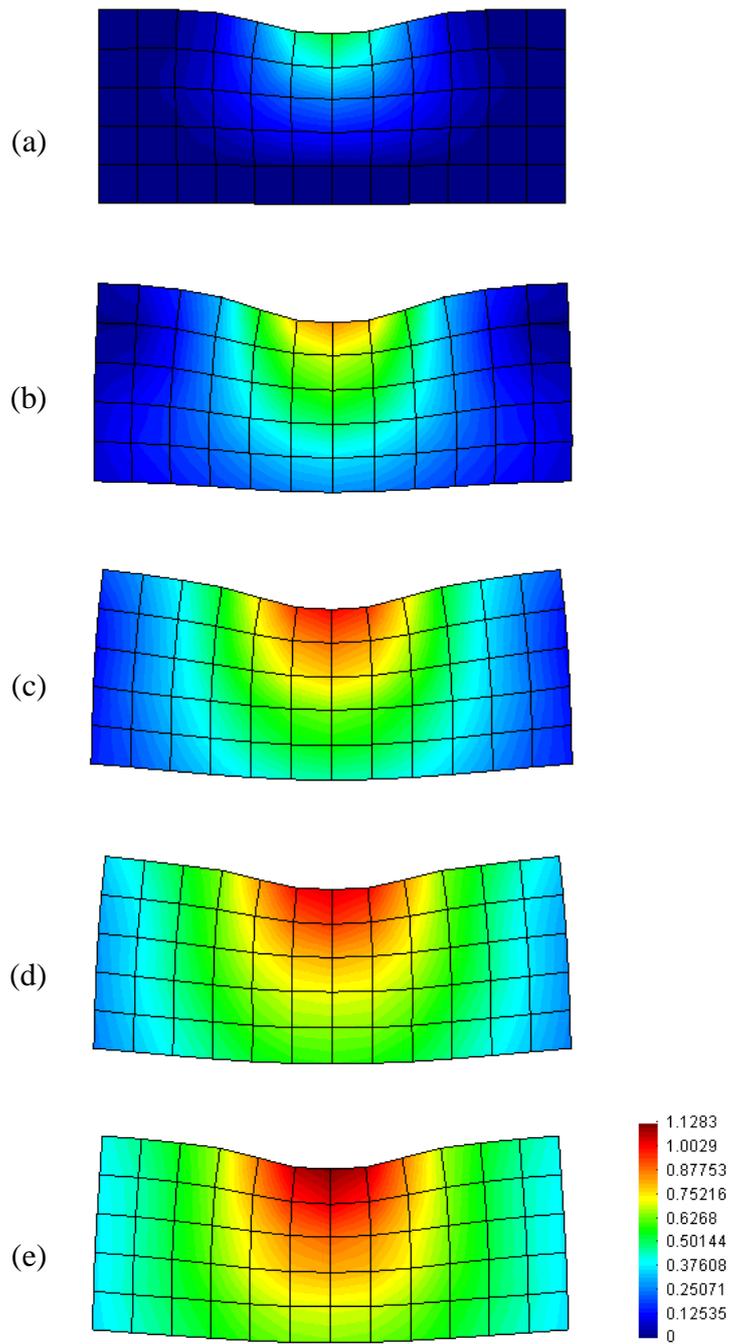


Figura 3.22 – Módulo dos deslocamentos ao longo da malha de elementos finitos, considerando-se acoplamento iterativo MEC-MEF ($r_c \Delta t = 0.2_c \Delta t$):
 (a) $t=0.2s$; (b) $t=0.4s$; (c) $t=0.6s$; (d) $t=0.8s$; (e) $t=1.0s$.

3.4.3.2. Cavidade circular

No presente subitem estuda-se uma cavidade circular, sujeita a carregamento uniformemente distribuído do tipo Heaviside (CARRER & TELLES, 1993), conforme esquematizado na Figura 3.23. As propriedades físicas do modelo são: $E = 94.6769ksi$ (módulo de Young); $\nu = 0.2308$ (Poisson); $\rho = 3.5slug/ft^3$ (densidade de massa). O critério de escoamento de Mohr-Coulomb é adotado, sendo: $c = 0.70ksi$ (coesão) e $\phi = 30^\circ$ (ângulo de atrito interno). O raio da cavidade em questão é dado por $R = 10ft$ (adota-se ainda $d = 12ft$).

Para análise do presente modelo consideram-se acoplamentos MEC-MEC e MEC-MEF (iterativo e direto). As malhas referentes às análises acopladas são apresentadas na Figura 3.24. No acoplamento MEC-MEF adotam-se 80 elementos lineares de contorno e 1944 elementos finitos triangulares lineares (Figura 3.24(a)).

No acoplamento MEC-MEC faz-se uso da simetria do modelo. O método de elementos de contorno possui a interessante vantagem de poder considerar modelos simétricos sem fazer uso de discretização dos eixos de simetria (BREBBIA *et al.*, 1984). Para tal considera-se um processo automático de condensação, onde se integra ao longo dos elementos considerando-se pontos fontes refletidos, agregando-se os valores nas matrizes já em suas formas reduzidas. As malhas relativas ao acoplamento MEC-MEC são apresentadas na Figura 3.24(b). 46 elementos de contorno são adotados (26 referentes à formulação MEC_E e 20 referentes à formulação MEC_D), bem como 270 células de integração triangulares lineares (formulação MEC_E).

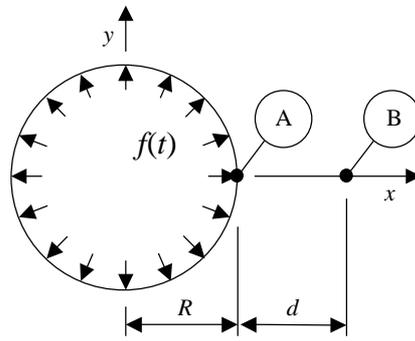


Figura 3.23 – Modelo esquemático da cavidade.

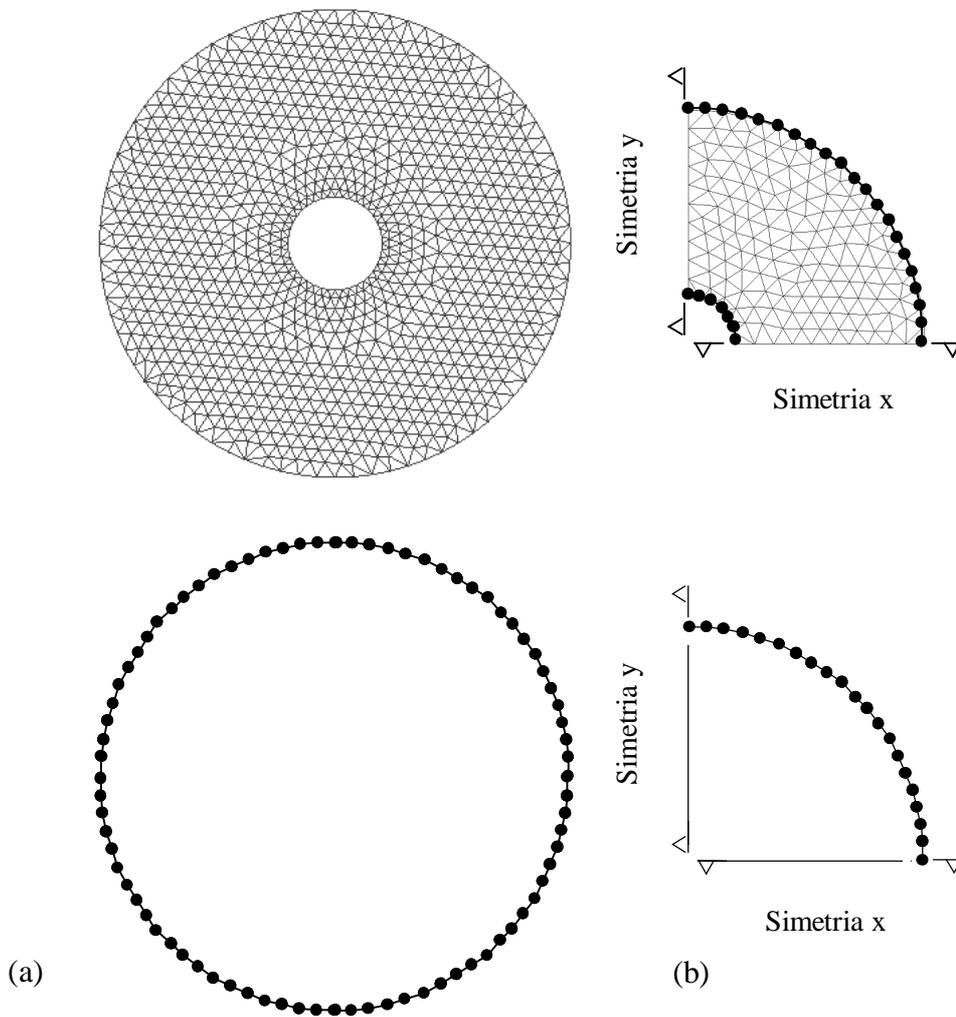


Figura 3.24 – Malhas de elementos finitos, elementos de contorno e células de integração adotadas: (a) acoplamento MEC-MEF; (b) acoplamento MEC-MEC (uso de simetria).

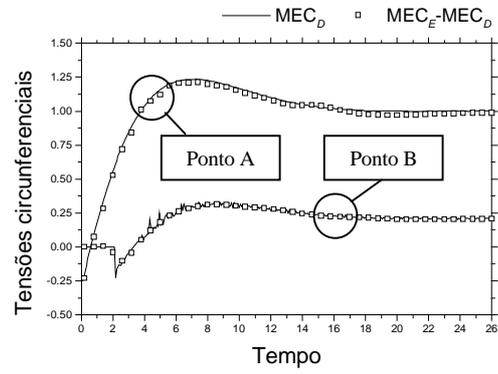
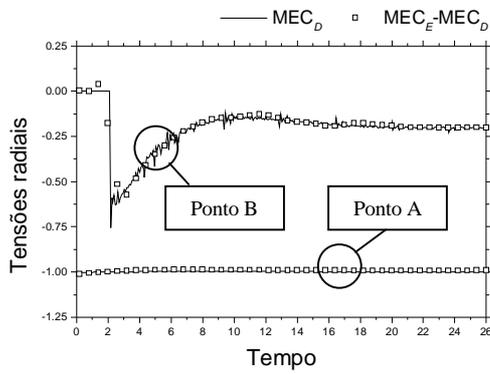


Figura 3.25 – Tensões lineares considerando-se acoplamento MEC-MEC.

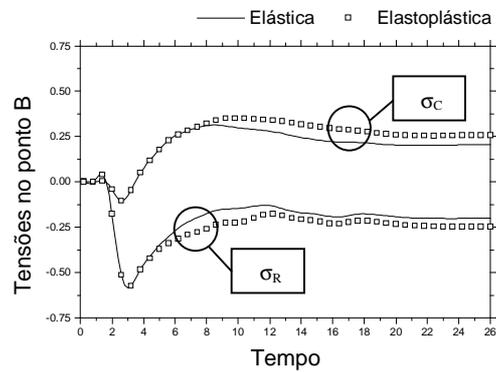
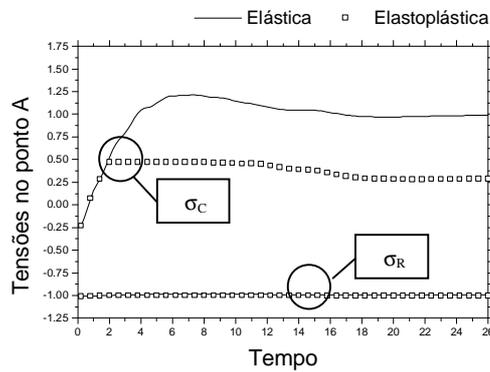
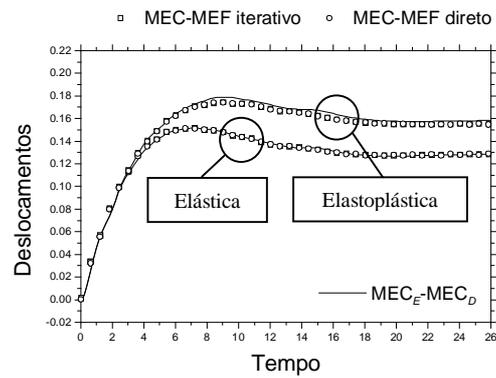
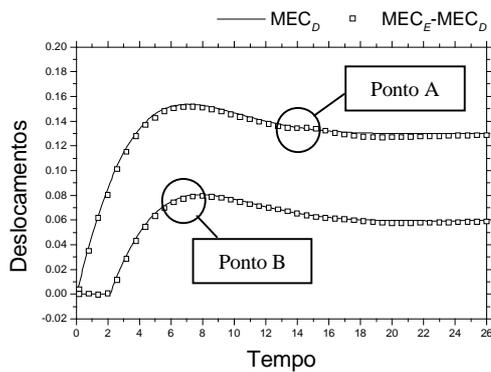


Figura 3.26 – Tensões não-lineares considerando-se acoplamento MEC-MEC.



(a)

(b)

Figura 3.27 – Deslocamentos (a) lineares e (b) não-lineares considerando-se acoplamento MEC-MEC e MEC-MEF.

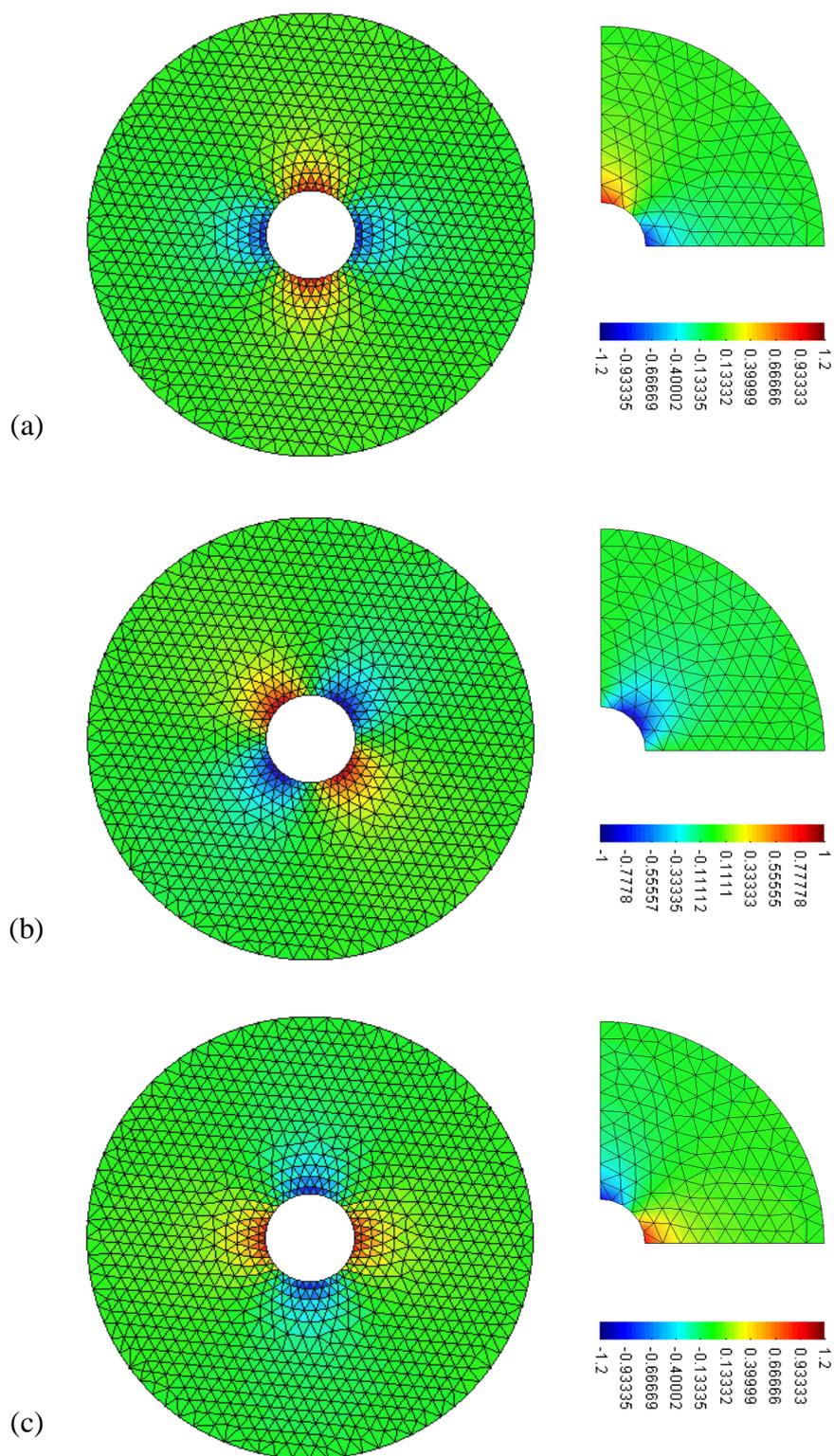


Figura 3.28 – Estado de tensões nas malhas de MEF e MEC para o tempo $t = 20s$ considerando-se análise elástica: (a) σ_{xx} ; (b) σ_{xy} ; (c) σ_{yy} .

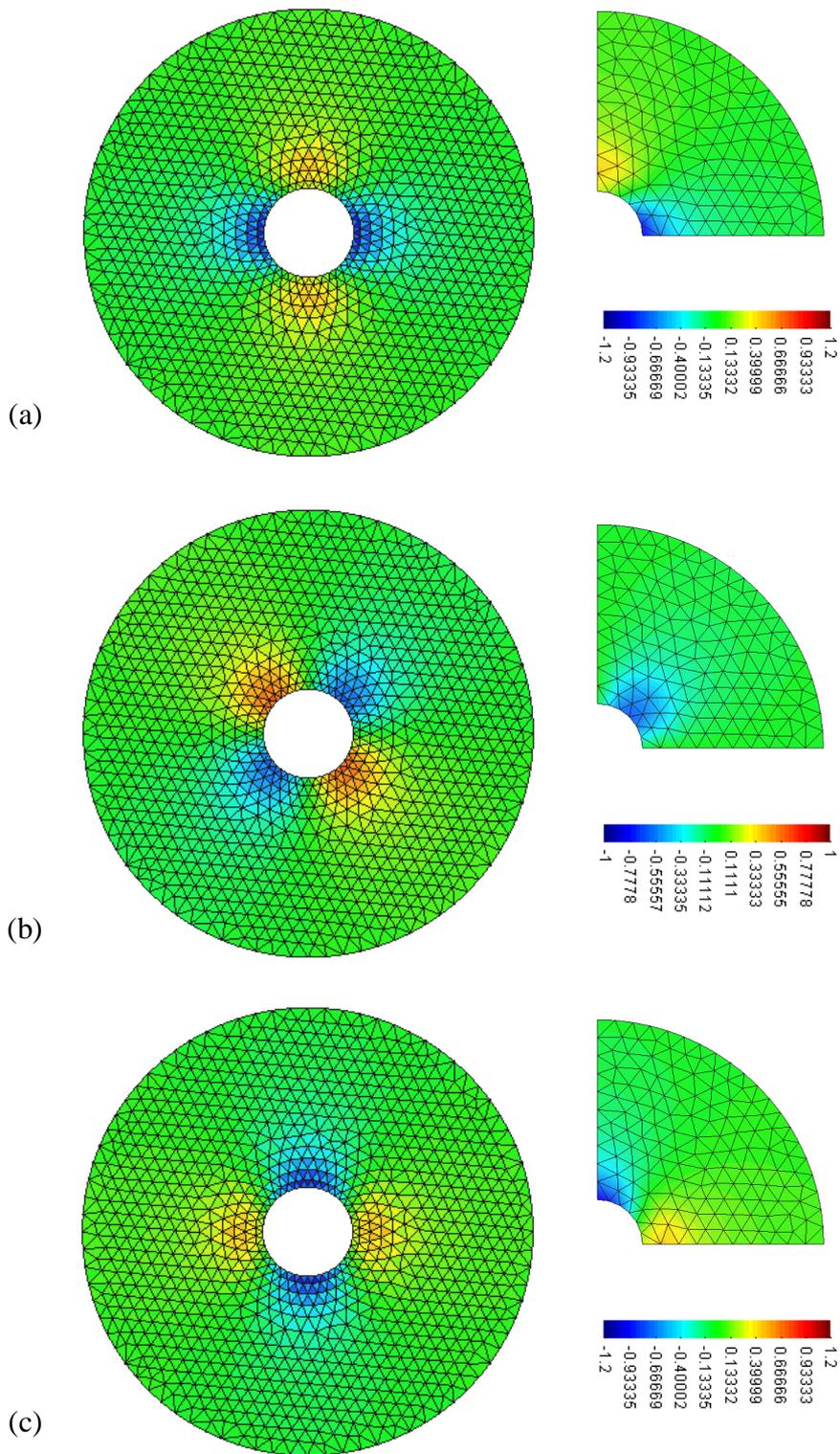


Figura 3.29 – Estado de tensões nas malhas de MEF e MEC para o tempo $t = 20s$ considerando-se análise elastoplástica: (a) σ_{xx} ; (b) σ_{xy} ; (c) σ_{yy} .

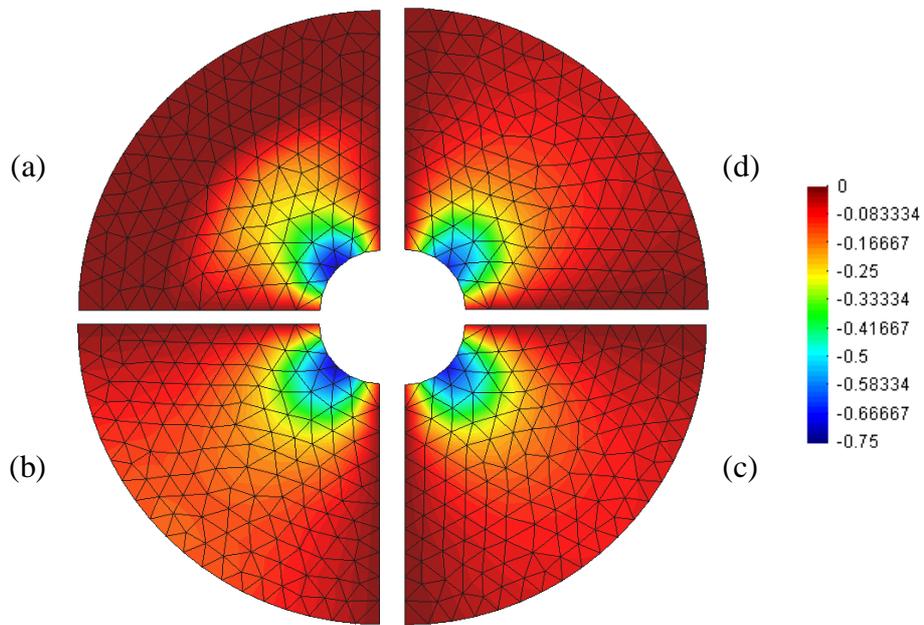


Figura 3.30 – Evolução do estado σ_{xy} de tensões, ao longo do tempo e do espaço, para análise elastoplástica: (a) $t = 4s$; (b) $t = 8s$; (c) $t = 12s$; (d) $t = 16s$.

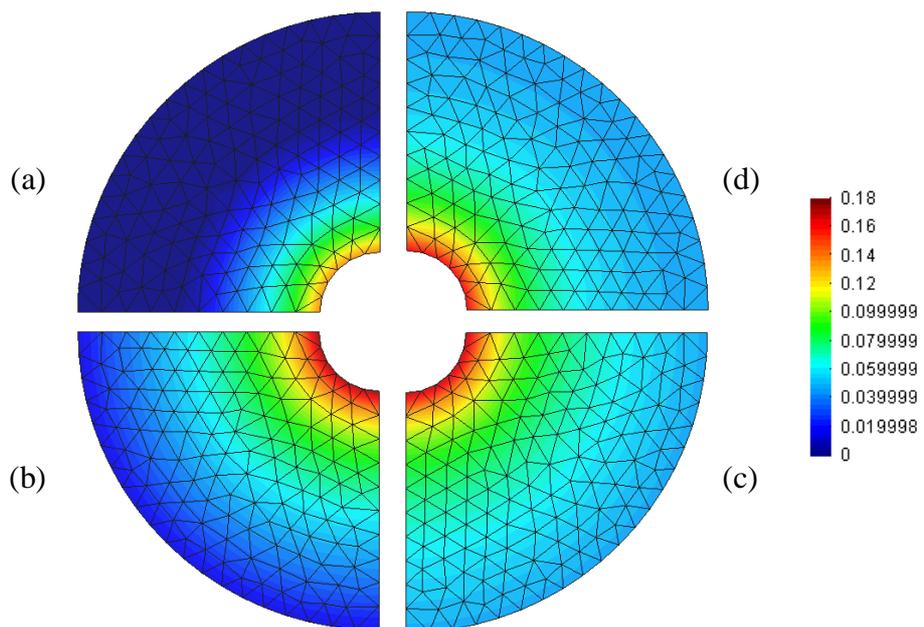


Figura 3.31 – Evolução dos deslocamentos (em módulo) ao longo do tempo e do espaço, para análise elastoplástica: (a) $t = 4s$; (b) $t = 8s$; (c) $t = 12s$; (d) $t = 16s$.

As seguintes discretizações temporais são consideradas: ${}_E\Delta t = 0.2s$ e ${}_D\Delta t = 0.2s$ ($b = 0.285$) para o acoplamento MEC-MEC; e ${}_F\Delta t = 0.04s$ e ${}_C\Delta t = 0.2s$ para o acoplamento MEC-MEF. Resultados para as tensões nos pontos A e B do modelo (Figura 3.23) são apresentados nas Figuras 3.25 e 3.26; resultados para deslocamentos são apresentados na Figura 3.27.

Os resultados lineares relativos ao acoplamento MEC-MEC são comparados com resultados de elementos de contorno (MEC_D) considerando-se modelagem com 12 elementos lineares de contorno e uso de simetria (o cálculo de tensões em pontos internos é realizado pelo método da derivada complexa, de acordo com SOARES JR *et al.* (2002)). Conforme se pode notar pelas Figuras 3.25 e 3.27(a), boa concordância entre os resultados de MEC e de MEC-MEC é obtida (bem como com os resultados apresentados por CHOW & KOENIG (1966) e CARRER & TELLES (1993)). Resultados para as tensões radiais (σ_R) e circunferenciais (σ_C) nos pontos A e B do modelo, considerando-se análise elastoplástica, são apresentados na Figura 3.26.

Na Figura 3.27 apresentam-se os deslocamentos nos pontos A e B do modelo considerando-se análise linear e não-linear. Os resultados relativos aos acoplamentos MEC-MEF (iterativo e direto) e MEC-MEC estão em boa concordância entre si, tanto para análise elástica, quanto para análise elastoplástica, conforme se pode observar na Figura 3.27(b).

Resultados relativos ao estado de tensões do modelo, para o instante de tempo $t = 20s$, ao longo das malhas acopladas, são apresentados nas Figuras 3.28 (análise elástica) e 3.29 (análise elastoplástica). Mais uma vez pode-se notar que os resultados relativos aos acoplamentos MEC-MEC e MEC-MEF apresentam boa concordância entre si.

Resultados ao longo do tempo e do espaço, para o estado de tensões e deslocamentos, são apresentados nas Figuras 3.30 e 3.31, respectivamente, considerando-se acoplamento MEC-MEC.

3.4.4. Acoplamento fluido-estrutura

Considera-se, nesta seção, duas aplicações relativas a acoplamentos do tipo fluido-estrutura. Inicialmente, analisa-se um duto submerso sujeito aos efeitos de uma explosão em sua vizinhança; a seguir, estuda-se a barragem de um reservatório d'água, carregada em sua crista, em função de diferentes níveis d'água no reservatório.

3.4.4.1. Duto submerso

A análise de dutos submersos é de grande interesse para a indústria e extensa literatura pode ser encontrada referente à modelagem e análise de tais tipos de problemas (HUANG, 1986; LIE *et al.*, 2001; LOMBARD & PIRAUX, 2004; LIMA 2004 etc.). O presente exemplo considera o modelo de um duto cilíndrico, de seção circular, sujeito aos efeitos de uma explosão acústica em sua vizinhança. Um esquema do modelo é apresentado na Figura 3.32. Para a solução do problema em questão, é aqui considerado o acoplamento iterativo e direto MEC-MEF. As malhas de elementos finitos e de elementos de contorno consideradas na análise são apresentadas na Figura 3.32: 48 elementos finitos quadrangulares lineares e 48 elementos lineares de contorno são adotados.

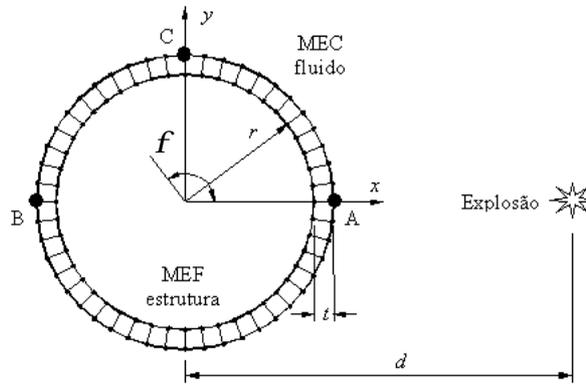


Figura 3.32 – Modelo esquemático do duto submerso.

As propriedades físicas do duto são especificadas por: $E = 2.1 \cdot 10^{11} N/m^2$ (módulo de Young); $\nu = 0.3$ (Poisson); $\rho = 7800 kg/m^3$ (massa específica). A velocidade de propagação de onda no fluido é $c = 1524 m/s$; a densidade de massa do fluido é $\rho = 1000 kg/m^3$. Geometricamente o duto é definido por: $r = 0.18 m$ e $t = 0.0259 m$.

A explosão acústica que ocorre na vizinhança do duto ($d = 1.0 m$) é dada por: $s(X,t) = d(X-x)S(t)$, onde d é a função delta de Dirac e o ponto de explosão é definido por $x = (d,0)$. A evolução da amplitude $S(t)$ da explosão, ao longo do tempo, pode ser vista na Figura 3.33.

Resultados para os deslocamentos e pressões hidrodinâmicas são apresentados nas Figuras 3.34 e 3.35, respectivamente, considerando-se os pontos A, B e C do modelo (Figura 3.32). As curvas relativas às análises considerando acoplamento iterativo e direto MEC-MEF, apresentadas nas Figuras 3.34 e 3.35, estão em boa concordância. A discretização temporal adotada para cada subdomínio é dada por: $r\Delta t = 0.001 ms$ e $c\Delta t = 0.005 ms$.

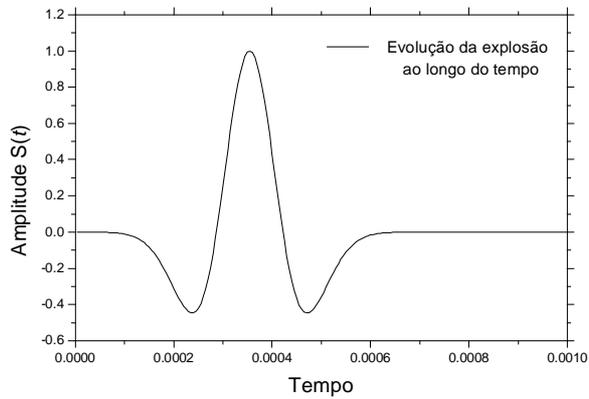
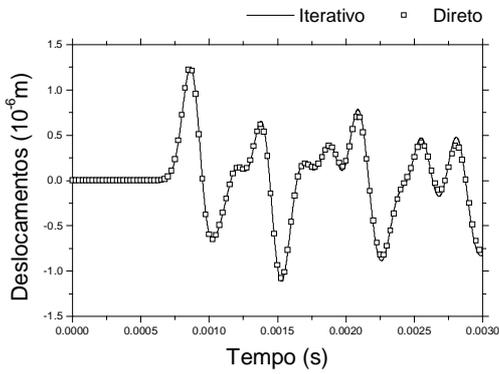
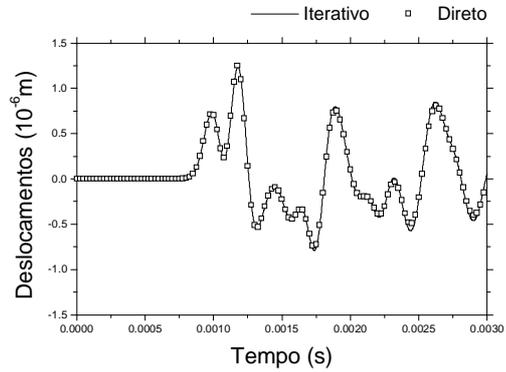


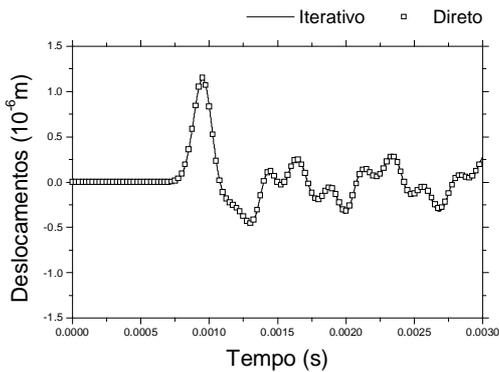
Figura 3.33 – Evolução da amplitude da explosão $S(t)$, ao longo do tempo.



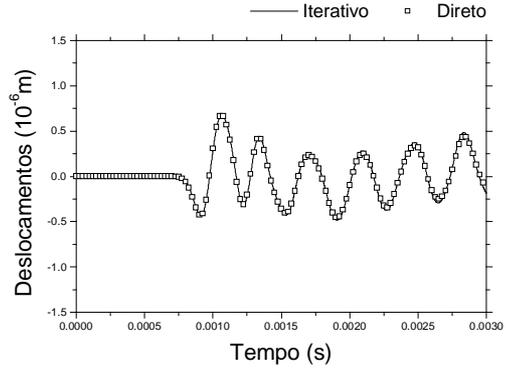
(a) Deslocamentos horizontais no ponto A



(b) Deslocamentos horizontais no ponto B

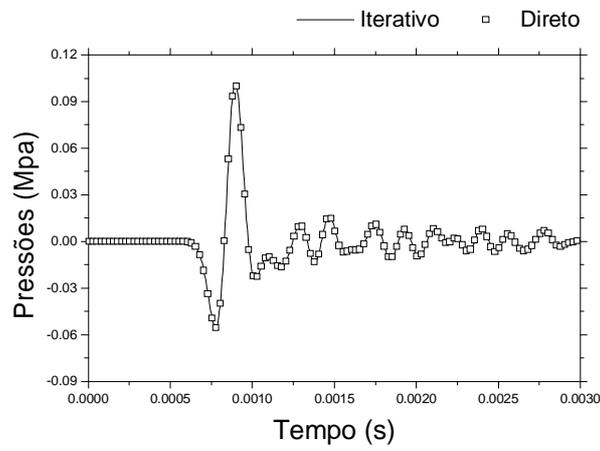


(c) Deslocamentos horizontais no ponto C

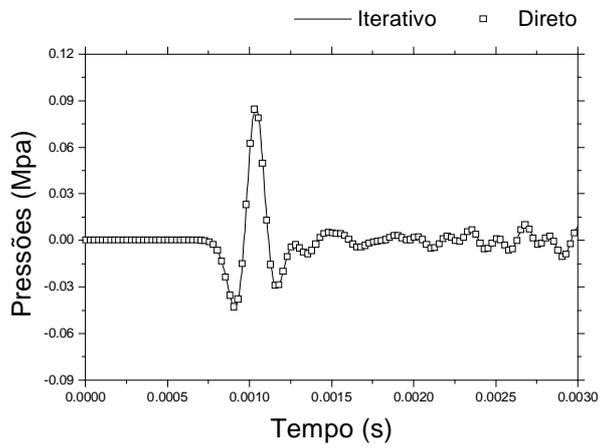


(d) Deslocamentos verticais no ponto C

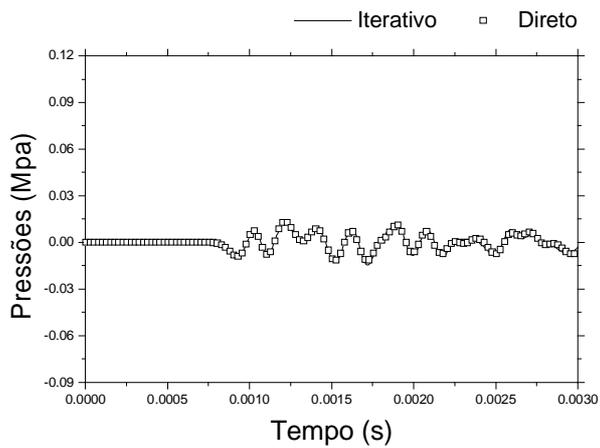
Figura 3.34 – Deslocamentos para os pontos A, B e C do modelo considerando-se acoplamento MEC-MEF iterativo e direto.



(a) Ponto A



(b) Ponto B



(c) Ponto C

Figura 3.35 – Pressões hidrodinâmicas na superfície do duto considerando-se acoplamento MEC-MEF iterativo e direto: (a) ponto A; (b) ponto B; (c) ponto C.

Na Figura 3.36 apresentam-se resultados relativos ao acoplamento iterativo MEC-MEF, considerando-se truncamento da convolução e análise com número limitado de iterações por passo de tempo. Para o truncamento considerado ($\Phi = 10\%$; $k = 10$; $\Theta = 0.5$, interpolação multi-linear), o tempo de CPU se reduz para cerca de 36% do tempo de CPU relativo à análise sem truncamento e o armazenamento de memória se reduz para cerca de 14%.

O tempo de CPU relativo ao acoplamento direto é cerca de 90% do tempo de CPU relativo ao acoplamento iterativo (ambos sem truncamento). No acoplamento iterativo em questão, 3 iterações por passo de tempo são necessárias, em média, para convergência, considerando-se valores de α entre 0.25 e 1.00 (a média de 3 iterações por passo de tempo permanece inalterada variando-se α entre 0.25 e 1.00).

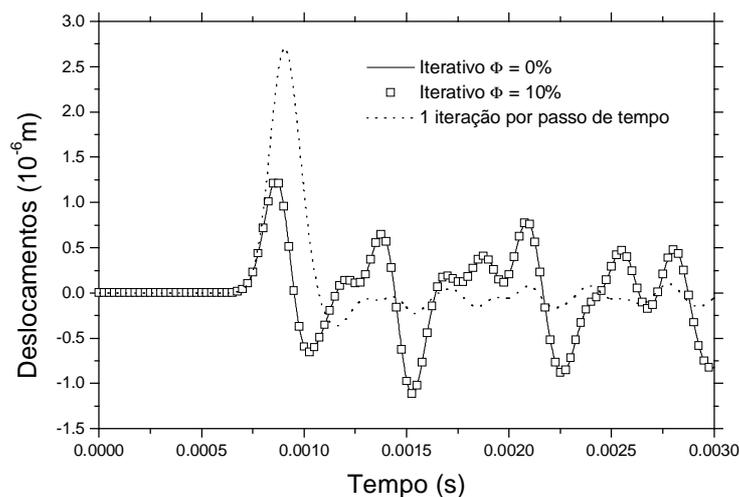


Figura 3.36 – Deslocamentos horizontais no ponto A do modelo considerando-se acoplamento iterativo MEC-MEF: análise com truncamento da convolução ($\Phi = 10\%$; $\kappa = 10$; $\Theta = 0.5$) e análise sem processo iterativo (limite máximo de 1 iteração por passo de tempo).

3.4.4.2. Represa de armazenamento

Estuda-se, no presente exemplo, um sistema do tipo reservatório – barragem de contenção (VON ESTORFF & ANTES, 1991). Um esquema do modelo em questão é apresentado na Figura 3.37. Todos os métodos de acoplamento neste trabalho apresentados, i.e., acoplamento MEC-MEF padrão, iterativo e direto e acoplamentos iterativos MEC-MEC_E e MEC-MEC_D, são considerados para a análise do problema.

A discretização da barragem pelo método de elementos finitos e pelo método de elementos de contorno é apresentada na Figura 3.38: (a) 93 elementos finitos quadrangulares lineares; (b) 34 elementos lineares de contorno; (c) 102 células de integração triangulares lineares. A modelagem do fluido é implementada por intermédio de elementos lineares de contorno. O número de elementos acústicos de contorno empregado é função da altura H do nível d'água no reservatório; em todas as análises se adotam elementos de contorno de mesmo comprimento $\mathbf{l} = 5m$.

As propriedades físicas da barragem são dadas por: $E = 3.437 \cdot 10^9 N/m^2$ (módulo de Young); $\nu = 0.25$ (Poisson); $\rho = 2000 kg/m^3$ (massa específica). A velocidade de propagação de onda no fluido é $c = 1436 m/s$; a densidade de massa do fluido é $\rho = 1000 kg/m^3$. O carregamento aplicado verticalmente na crista da barragem é senoidal, do tipo $f(t) = A \cdot \sin(\omega t)$. O nível d'água na represa é variável, sendo aqui considerado duas possibilidades: $H = 50m$ e $H = 35m$.

Resultados para o modelo, considerando-se acoplamento MEC-MEF do tipo padrão, iterativo e direto, são apresentados na Figura 3.39.

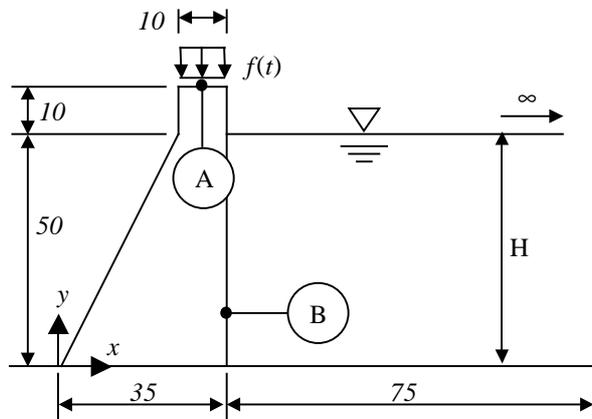


Figura 3.37 – Modelo esquemático da barragem de contenção e do reservatório de nível d'água H : ponto A (30,60); ponto B (35,10).

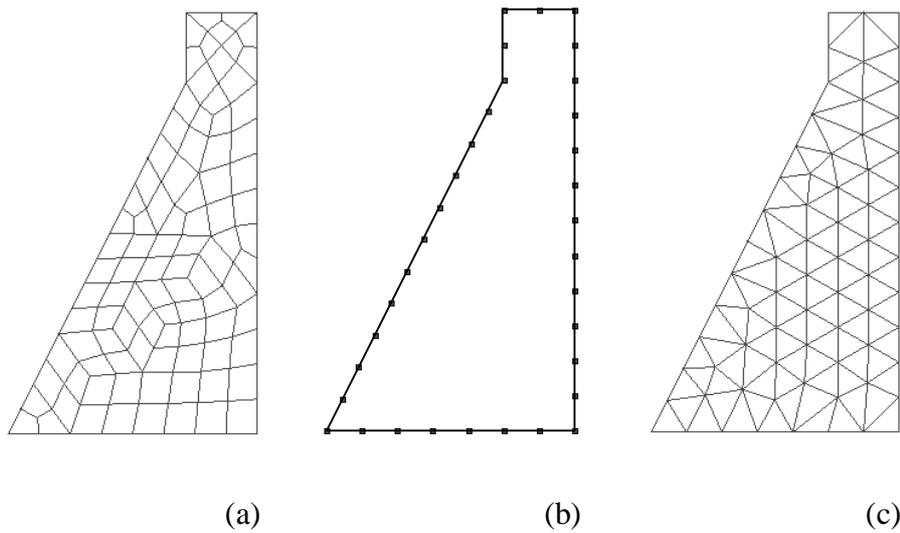


Figura 3.38 – Discretização da barragem: (a) malha de elementos finitos; (b) malha de elementos de contorno; (c) malha de células de integração.

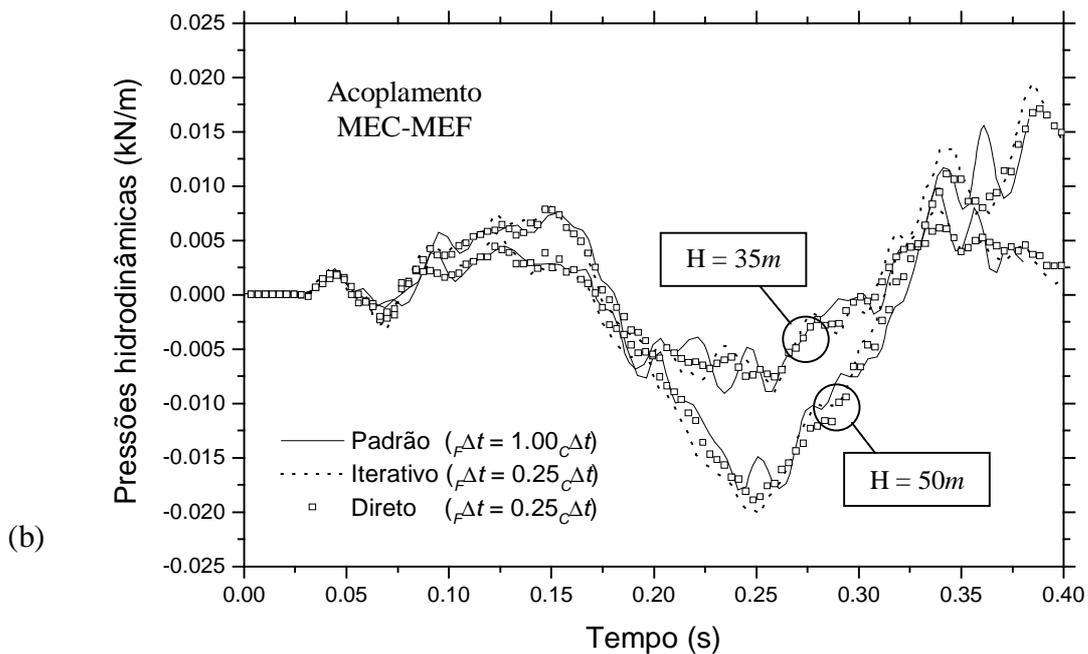
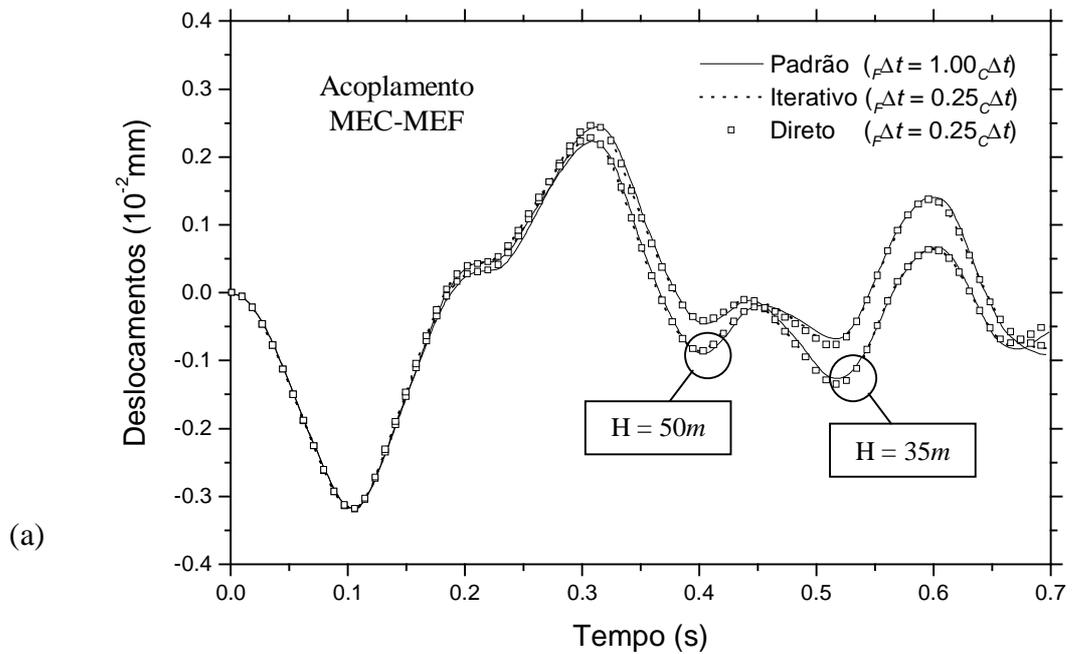


Figura 3.39 – Resultados referentes aos acoplamentos MEC-MEF padrão, iterativo e direto ($c\Delta t = 0.0035s$) em função do nível d'água na represa ($H = 35m$ ou $H = 50m$):
 (a) deslocamentos verticais no ponto A; (b) pressões hidrodinâmicas no ponto B.

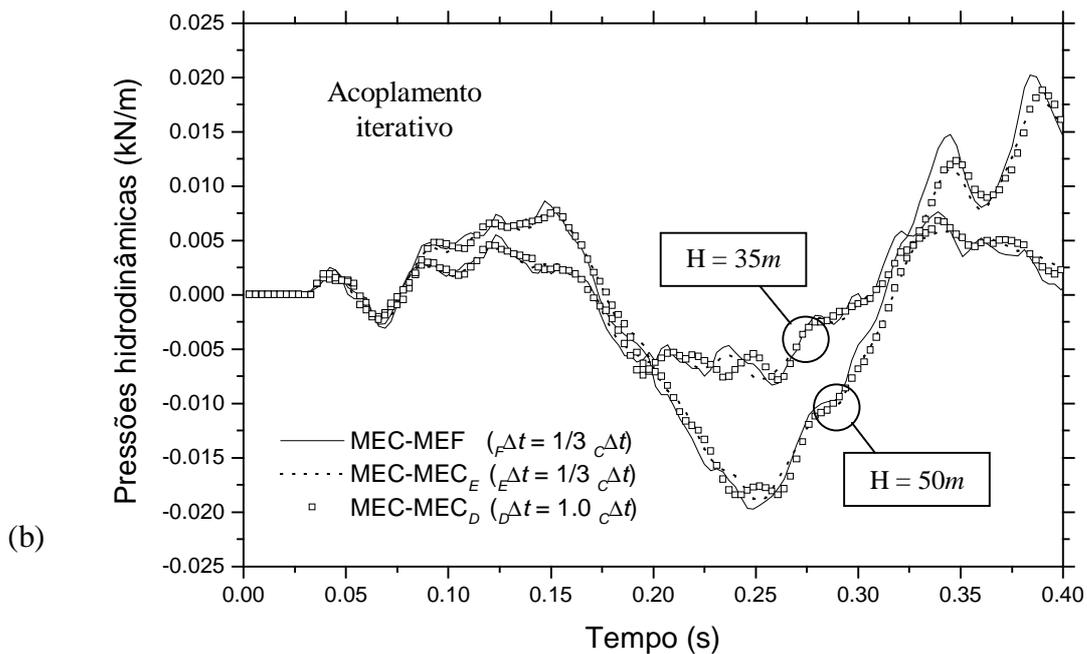
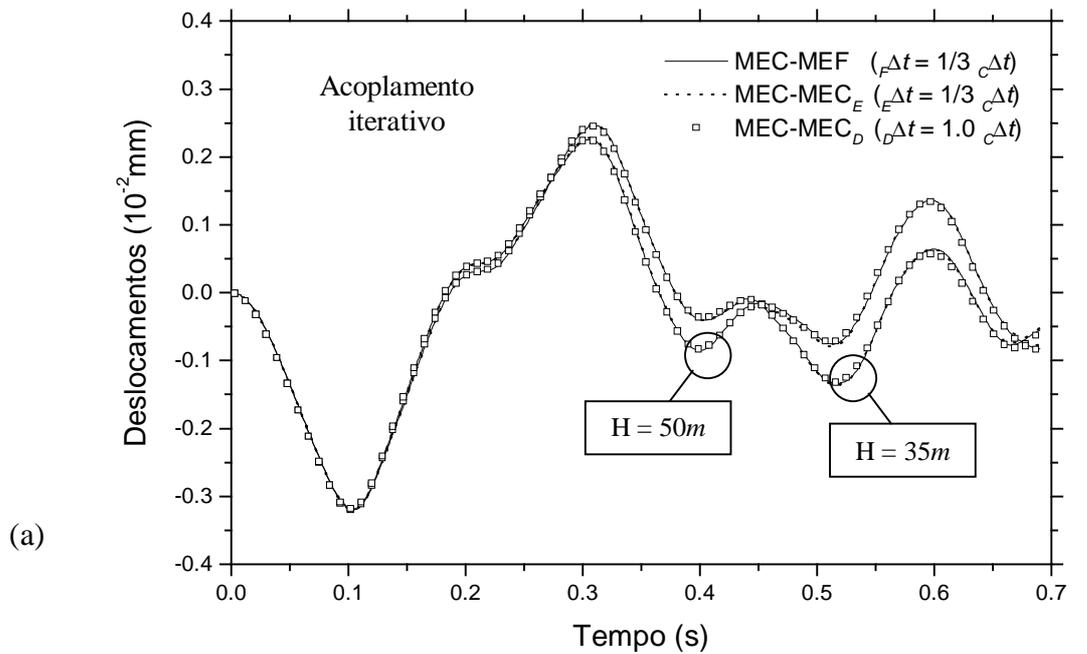


Figura 3.40 – Resultados referentes aos acoplamentos iterativos MEC-MEF e MEC-MEC ($c_d \Delta t = 0.003s$) em função do nível d'água na represa ($H = 35m$ ou $H = 50m$):
 (a) deslocamentos verticais no ponto A; (b) pressões hidrodinâmicas no ponto B.

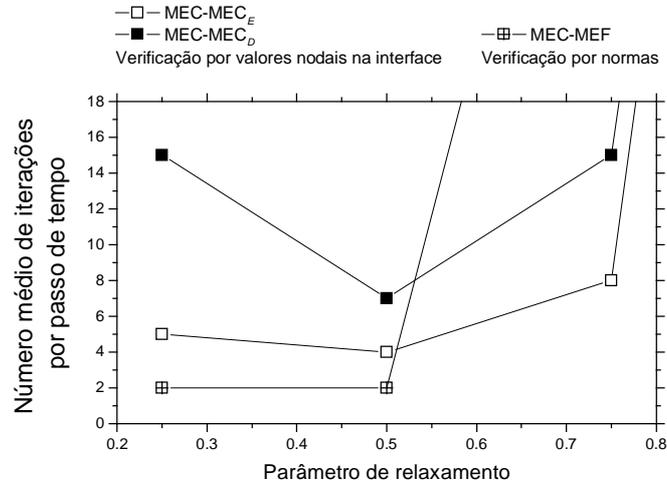


Figura 3.41 – Acoplamento iterativo MEC-MEF e MEC-MEC: número médio de iterações por passo de tempo em função do parâmetro de relaxamento α ($H = 50m$).

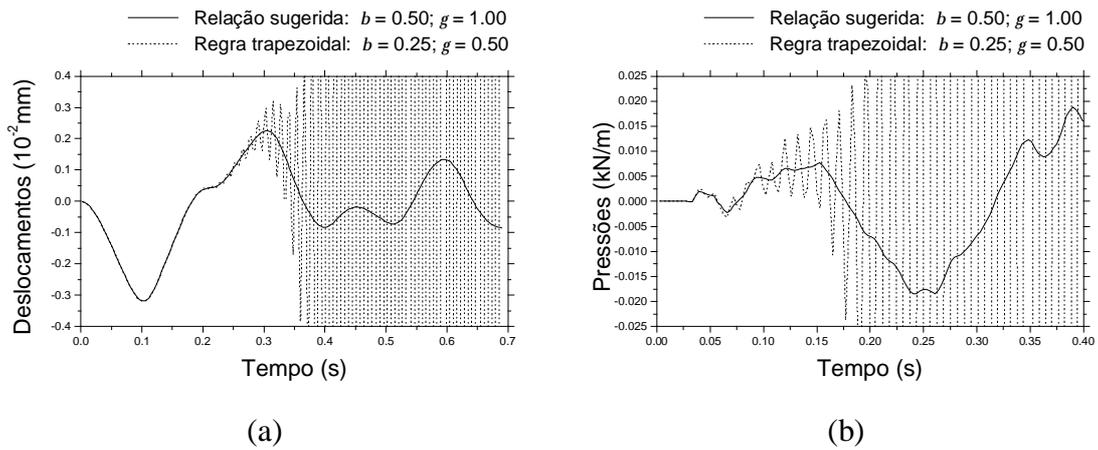


Figura 3.42 – Resultados relativos ao acoplamento MEC-MEC_D considerando-se diferentes relações na interface entre os deslocamentos de MEC_D e as acelerações normais de MEC: (a) deslocamentos verticais no ponto A; (b) pressões hidrodinâmicas no ponto B.

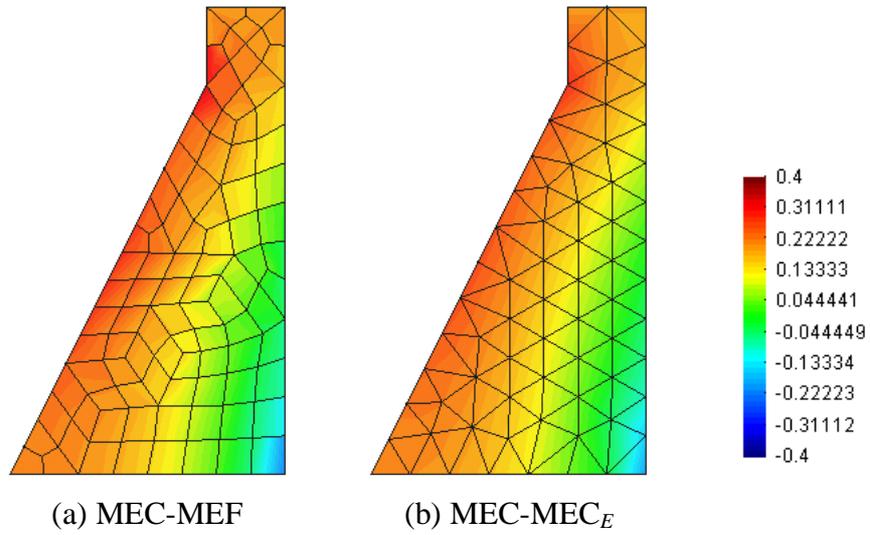


Figura 3.43 – Estado de tensões σ_{yy} no instante de tempo $t = 0.6s$ para nível d'água $H = 50m$: (a) acoplamento iterativo MEC-MEF; (b) acoplamento iterativo MEC-MEC.

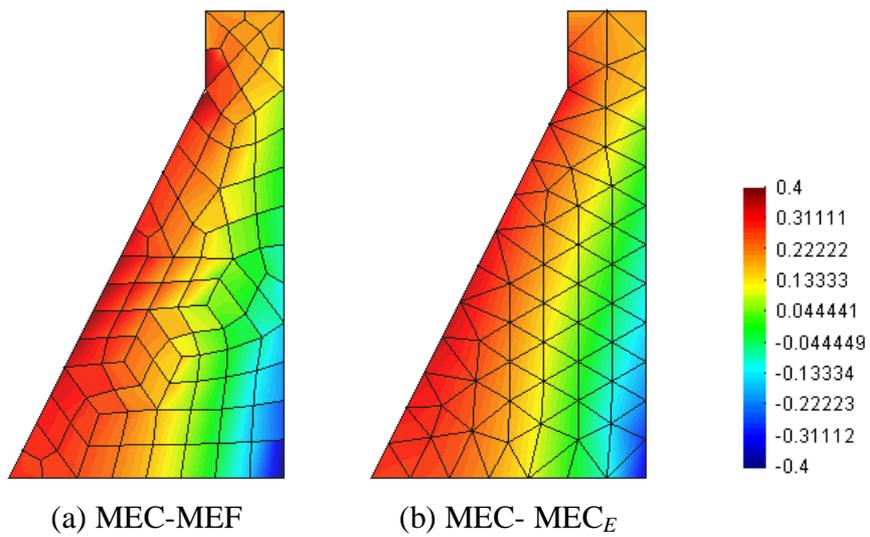


Figura 3.44 – Estado de tensões σ_{yy} no instante de tempo $t = 0.6s$ para nível d'água $H = 35m$: (a) acoplamento iterativo MEC-MEF; (b) acoplamento iterativo MEC-MEC.

Na Figura 3.39(a), os deslocamentos verticais no ponto A (Figura 3.37) são apresentados, considerando-se diferentes discretizações temporais e alturas de nível d'água. Os resultados apresentados na Figura 3.39(b) são análogos, sendo relativos às pressões hidrodinâmicas no ponto B do modelo (Figura 3.37).

Na Figura 3.40 apresentam-se resultados para o modelo considerando-se acoplamentos iterativos MEC-MEF e MEC-MEC. Assim como fora considerado na Figura 3.39, na Figura 3.40(a), os deslocamentos verticais no ponto A são apresentados, considerando-se diferentes discretizações temporais e alturas de nível d'água. Os resultados apresentados na Figura 3.40(b) são análogos, sendo relativos às pressões hidrodinâmicas no ponto B do modelo.

Conforme se pode perceber pelas Figuras 3.39 e 3.40, todos os resultados apresentam boa concordância entre si (bem como com os resultados apresentados por VON ESTORFF & ANTES (1991)).

Na Figura 3.41 apresentam-se os números médios de iterações por passo de tempo, necessários aos acoplamentos iterativos MEC-MEF e MEC-MEC, em função do parâmetro de relaxamento α . Para $\alpha = 1.00$, os acoplamentos iterativos considerados não convergem. Para $\alpha = 0.75$ o acoplamento iterativo MEC-MEF não converge. Pela experiência do autor, a adoção de $\alpha = 0.50$ é segura, gerando convergência (tanto para acoplamentos entre sistemas fisicamente similares quanto fisicamente distintos), mas não necessariamente, conforme tem sido apresentado ao longo deste trabalho, tal atribuição gera o processo mais eficiente de convergência.

Os resultados apresentados na Figura 3.42 visam ilustrar a importância de uma formulação coerente quando do tratamento das condições de interface. O presente

trabalho sugere a equação (3.45) para relação dos deslocamentos na interface com as acelerações normais correlacionadas, estando esta equação em conformidade com a formulação de elementos de contorno em consideração. O uso de outras relações, alternativas à equação (3.45), geralmente resultam em instabilidade: a Figura 3.42 mostra resultados relativos à consideração da regra trapezoidal para correlação dos deslocamentos e acelerações normais na interface de acoplamento (resultados instáveis) e resultados relativos à relação proposta, i.e., equação (3.45) (resultados estáveis). Resultados análogos aos apresentados na Figura 3.42 são obtidos quando da consideração do acoplamento direto MEC-MEF.

Nas Figuras 3.43 e 3.44 são apresentados os estados de tensões σ_{yy} , ao longo da barragem, no instante de tempo $t = 0.6s$, para nível d'água $H = 50m$ e $H = 35m$, respectivamente. Os resultados em questão são relativos aos acoplamentos iterativos MEC-MEF e MEC-MEC.

3.4.5. Acoplamento solo-fluido-estrutura

Considera-se, a seguir, a modelagem de um canal de abastecimento. Diferentes modelos para o problema de interação solo-fluido-estrutura são abordados, considerando-se diferentes tipos de interação e níveis de complexidade.

3.4.5.1. Canal de abastecimento

Apresenta-se na Figura 3.45 o modelo esquemático do canal a ser aqui considerado. O problema em questão é resolvido unicamente pelo método de elementos de contorno (acoplamento MEC-MEC_D-MEC_E). As malhas adotadas na discretização do modelo são

apresentadas na Figura 3.46: 36 elementos lineares de contorno são adotados para modelagem do fluido (MEC); 118 elementos lineares de contorno são adotados para modelagem do solo (MEC_D); 74 elementos lineares de contorno e 196 células de integração triangulares lineares são adotadas para modelagem da estrutura (MEC_E).

As propriedades físicas do modelo são dadas por: (i) solo: $E = 2.66 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ (módulo de Young); $\nu = 0.3$ (Poisson); $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ (massa específica); (ii) fluido: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ (massa específica); $c = 1436 \text{ m/s}$ (velocidade de propagação de onda); (iii) estrutura: $E = 8.87 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$ (módulo de Young); $\nu = 0.25$ (Poisson); $\rho = 1500 \text{ kg/m}^3$ (massa específica). A estrutura é considerada como tendo comportamento elastoplástico, seguindo o critério de escoamento de von Mises com tensão de escoamento $\sigma_0 = 6.0 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$. Os passos de tempo adotados em cada subdomínio são dados por: $\Delta t = 12 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ ($b \approx 0.69$); ${}_D\Delta t = 12 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ ($b \approx 0.87$); ${}_E\Delta t = 3 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ ($b \approx 0.32$). Na análise em questão, o passo de tempo de referência (subitem 3.3.2) para o algoritmo de acoplamento é considerado como sendo: ${}_0\Delta t = {}_E\Delta t$.

Quatro modelos são considerados para a solução do problema em questão, considerando-se diferentes níveis de interação. Na Figura 3.47 especificam-se os modelos adotados. Resultados para os deslocamentos do ponto A do canal (Figura 3.45) são apresentados nas Figuras 3.48 e 3.49, considerando-se análise elástica e elastoplástica, respectivamente. Os resultados apresentados levam em consideração os diferentes modelos especificados na Figura 3.47. Como se pode notar, apesar da simplicidade da presente aplicação, significativa diferença pode ser obtida entre os resultados adotando-se modelos muito simplificados. Neste sentido, justifica-se o emprego de técnicas refinadas de modelagem quando da análise de problemas acoplados complexos.

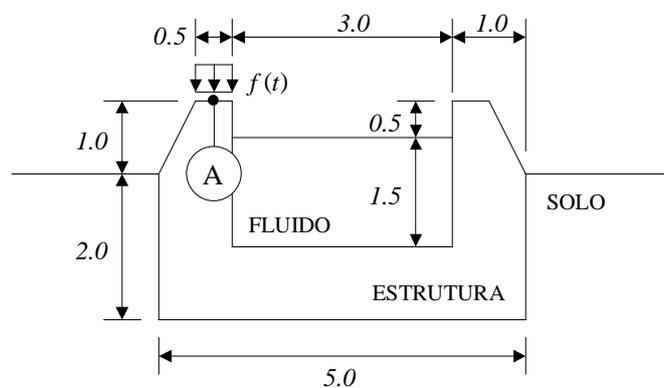


Figura 3.45 – Modelo esquemático do canal.

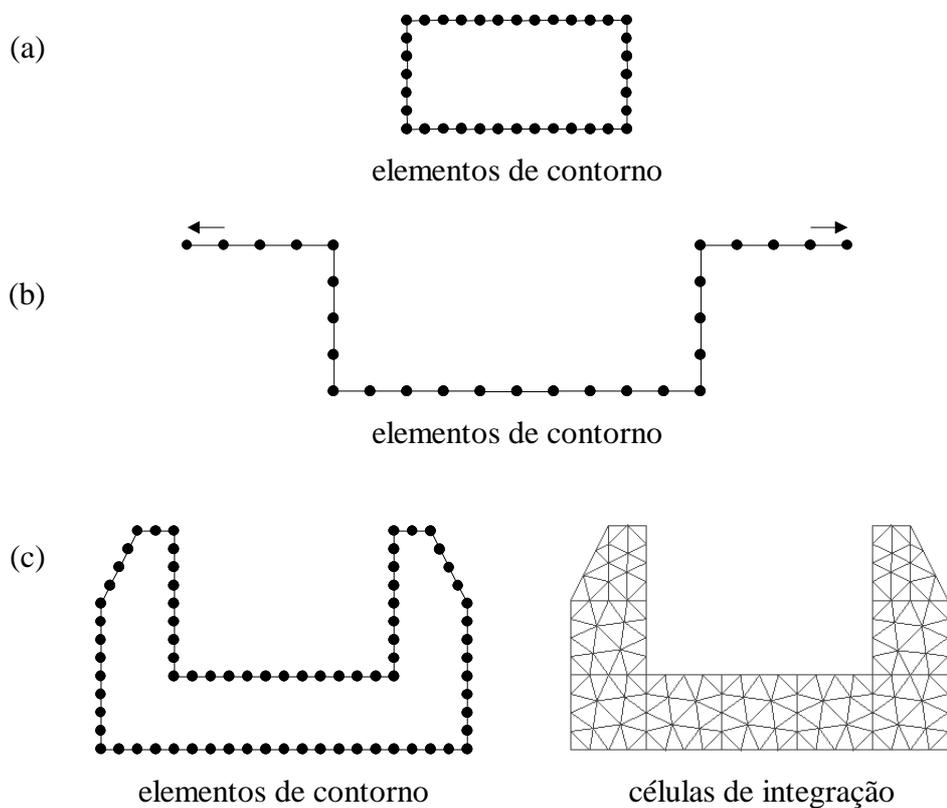
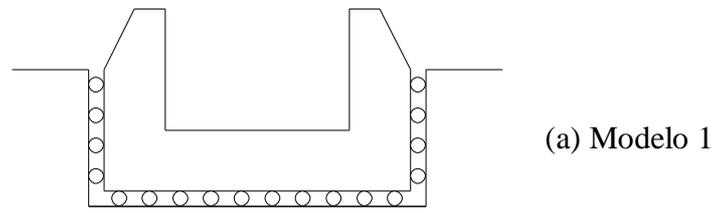
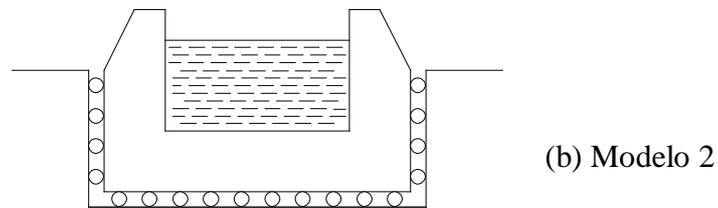


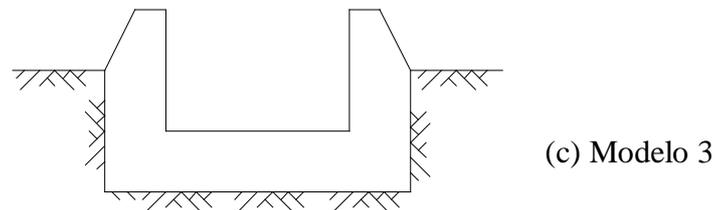
Figura 3.46 – Discretização do modelo: (a) fluido; (b) solo; (c) estrutura.



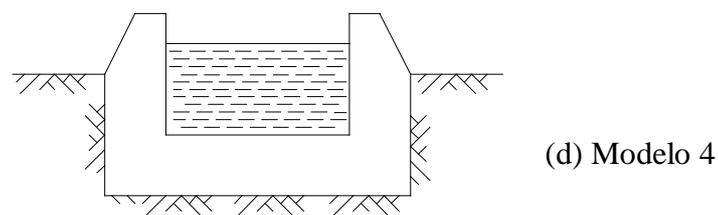
Estrutura



Fluido-Estrutura



Solo-Estrutura



Solo-Fluido-Estrutura

Figura 3.47 – Modelagem do canal considerando-se diferentes tipos de interação: modelo 1 (estrutura); (b) modelo 2 (interação fluido-estrutura); (c) modelo 3 (interação solo-estrutura); (d) modelo 4 (interação solo-fluido-estrutura).

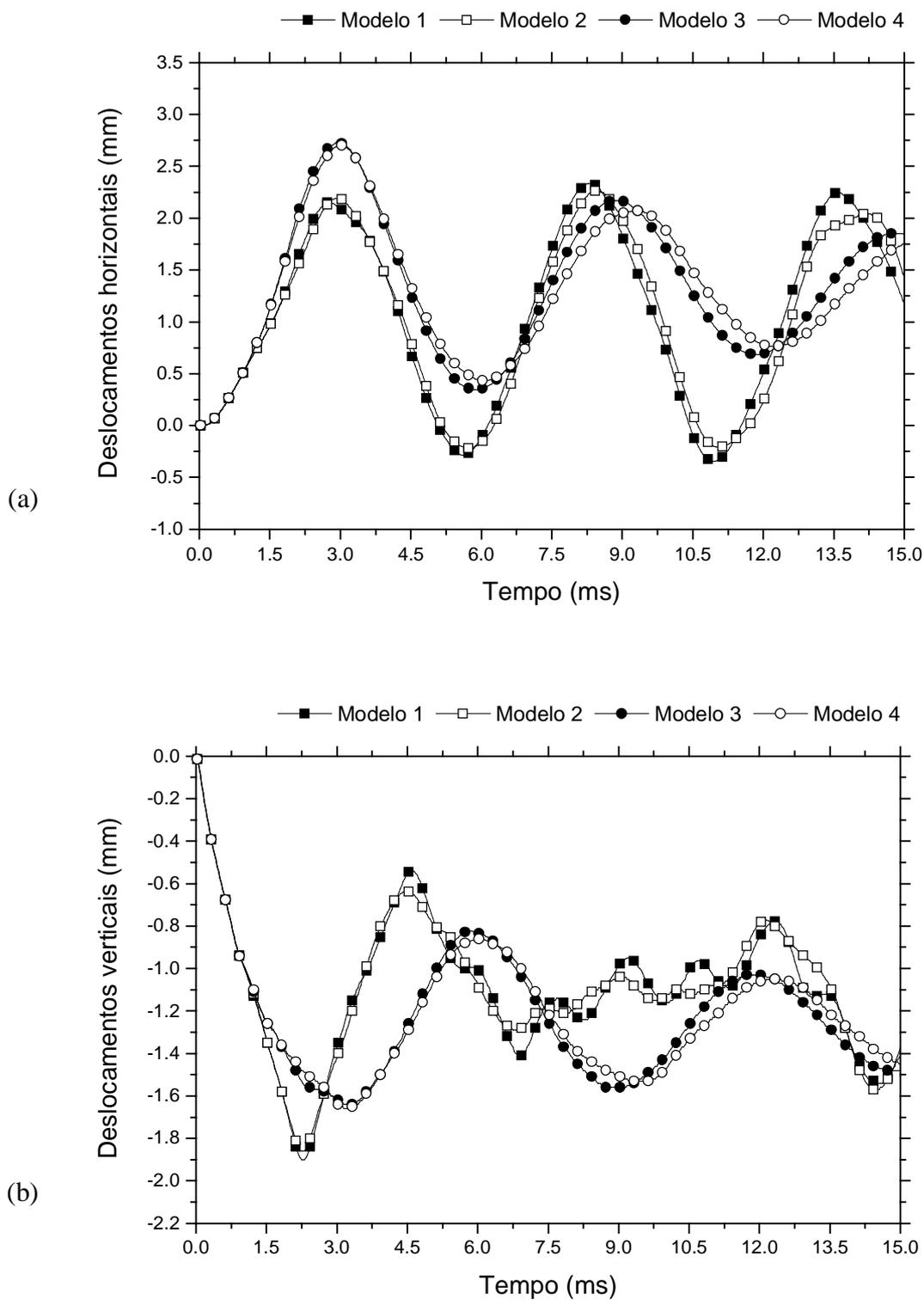


Figura 3.48 – Deslocamentos para o ponto A (análise elástica) considerando-se os modelos 1, 2, 3 e 4: (a) deslocamentos horizontais; (b) deslocamentos verticais.

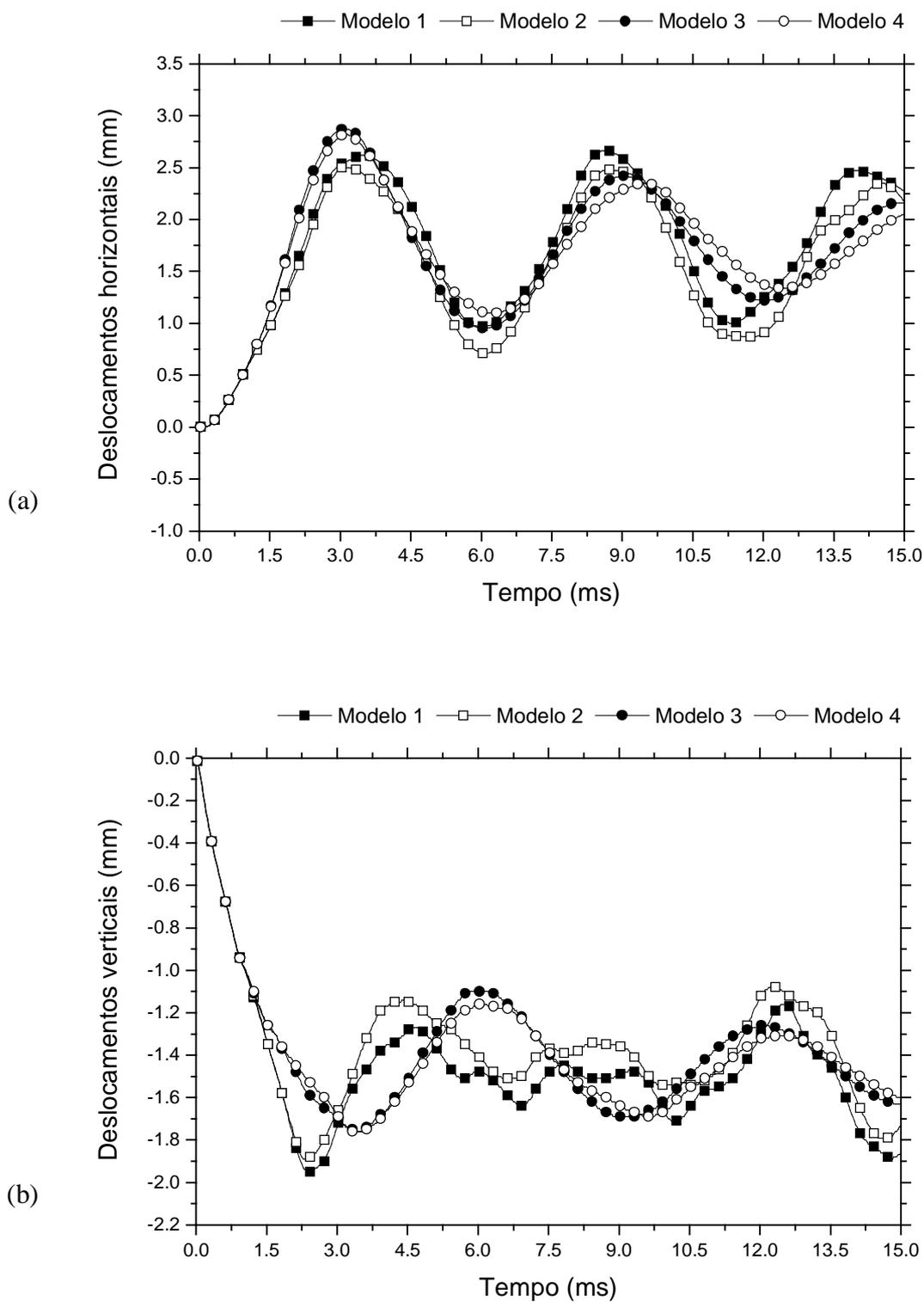


Figura 3.49 – Deslocamentos para o ponto A (análise elastoplástica) considerando-se os modelos 1, 2, 3 e 4: (a) deslocamentos horizontais; (b) deslocamentos verticais.

4

Sistemas com acoplamento de domínio

4.1. Introdução

No presente capítulo, um exemplo típico de problema relativo a acoplamento de domínios é considerado: aborda-se, aqui, a análise dinâmica de solos saturados.

Ao longo dos subitens que se seguem, as equações governantes do modelo são apresentadas, bem como os correspondentes tratamentos numéricos, sendo diferentes formulações consideradas. Algumas das formulações aqui destacadas são contribuições originais do presente trabalho.

Ao fim do presente capítulo alguns exemplos numéricos são apresentados, ilustrando-se a aplicabilidade e performance das diferentes metodologias consideradas. Breve discussão a cerca de acoplamentos de domínio-interface é apresentada no último exemplo deste capítulo.

4.2. Modelagem poro-dinâmica

O presente subitem aborda análise poro-dinâmica (linear e não-linear). Assim como fora anteriormente realizado, quando da consideração de modelagem acústica e dinâmica, inicialmente se apresentam as equações básicas que regem o modelo. Em seguida, a solução do problema por intermédio de elementos de contorno e de elementos finitos é destacada.

Diferentes abordagens são aqui consideradas, tanto para a análise com elementos de contorno (metodologias baseadas em uso de soluções fundamentais dinâmicas e estáticas) quanto para a análise com elementos finitos (método de Newmark / Newton-Raphson e método implícito de Green / pseudo-forças).

4.2.1. Equações governantes

A formulação estendida das equações governantes do problema poro-dinâmico, inicialmente estabelecidas por Biot (BIOT, 1956b-c; BIOT, 1962), é apresentada por ZIENKIEWICZ *et al.* (1980) e ZIENKIENWICZ & SHIOMI (1984), sendo esta última abordagem seguida pelo presente trabalho.

A partir da definição de tensões totais, a equação de equilíbrio para um volume unitário de um meio poroso (conjunto sólido-fluido) pode ser escrita como:

$$s_{ij,j} + r_m b_i = r_m \ddot{u}_i + r_f \ddot{w}_i \quad (4.1)$$

onde s_{ij} representa as tensões totais de Cauchy, com a usual notação indicial para eixos cartesianos; u_i representa os deslocamentos do esqueleto sólido; w_i representa os deslocamentos médios do fluido em relação ao sólido, i.e., $w_i = n(U_i - u_i)$, onde U_i é o deslocamento médio do fluido e n é a porosidade do meio; b_i está associado a forças de domínio. Em (4.1), r_m é a densidade de massa da mistura, sendo definida por:

$$r_m = n r_f + (1-n) r_s \quad (4.2)$$

onde r_f e r_s são as densidades da fase fluido e sólido, respectivamente. As tensões totais presentes em (4.1) são definidas em função das tensões efetivas, conforme se indica a seguir:

$$s_{ij} = s'_{ij} - \alpha d_{ij} p \quad (4.3)$$

onde a é um parâmetro adimensional que considera compressibilidade no material bifásico e p é a poro-pressão. Escrevendo-se a equação constitutiva (fase sólido) de forma incremental, tem-se para as tensões efetivas:

$$d\mathbf{s}'_{ij} = D_{ijkl} (de_{kl} - de_{kl}^0) + \mathbf{s}'_{ik} dw_{kj} + \mathbf{s}'_{jk} dw_{ki} \quad (4.4)$$

onde os dois últimos termos dizem respeito às variações de tensão rotacional de Zaremba-Jaumann (geralmente desprezíveis em casos de pequenas deformações) e D_{ijkl} é a matriz tangencial, definida por intermédio de variáveis de estado apropriadas e da direção do incremento. e_{ij}^0 é referente a possíveis deformações causadas por ações externas, tais como variações de temperatura, creep etc.. Os componentes incrementais da deformação (de_{ij}) e rotação (dw_{ij}) são definidos a partir dos deslocamentos, conforme se indica a seguir:

$$\begin{aligned} e_{ij} &= (1/2)(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ w_{ij} &= (1/2)(u_{j,i} - u_{i,j}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Levando-se em consideração comportamento linear do modelo, as tensões totais podem ser expressas como segue, tendo-se em consideração a lei de Hooke:

$$\mathbf{s}_{ij} = l d_{ij} e_{kk} + 2m e_{ij} - a d_{ij} p \quad (4.6)$$

onde l e m são as constantes de Lamé. A equação (4.6) representa a relação constitutiva linear para as tensões totais. Como segunda equação constitutiva para o modelo, descreve-se a variação do volume de fluido por unidade de volume, conforme se segue:

$$q = a u_{i,i} + (1/Q)p \quad (4.7)$$

onde Q , assim como a , é um parâmetro adimensional que considera a compressibilidade relativa entre os constituintes. Os parâmetros de Biot a e Q podem ser definidos por:

$$\begin{aligned} a &= 1 - K_d / K_s \\ 1/Q &= n / K_f + (a - n) / K_s \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde K_f e K_s são os módulos de compressibilidade do fluido e do esqueleto sólido drenado, respectivamente, e K_d relaciona a poro-pressão do fluido com a deformação volumétrica do esqueleto sólido.

Em contra-partida à equação (4.1), o equilíbrio da fase fluido pode ser especificado pela lei de Darcy generalizada, conforme se indica a seguir:

$$\mathbf{v}_f = -k (p_{,i} + r_f \mathbf{v}_f + \bar{r} \mathbf{v}_s) \quad (4.9)$$

onde $k = k/J$ é o coeficiente de permeabilidade, sendo J a viscosidade dinâmica do fluido e k a permeabilidade intrínseca do esqueleto sólido. Na expressão (4.9), \bar{r} representa uma densidade efetiva, definida por ZIENKIEWICZ *et al.* (1980) como $\bar{r} = r_f / n$; ou por BIOT (1956b) como $\bar{r} = r_a / n^2 + r_f / n$, onde r_a é a densidade de massa aparente, correspondendo ao trabalho realizado pela fase sólido na fase fluido em função do movimento relativo entre essas fases.

Fazendo uso da equação (4.7), a equação de continuidade que rege o modelo pode ser descrita por (a representa forças de domínio):

$$u_{i,i} = a - a u_{i,i} - (1/Q) p \quad (4.10)$$

Para se finalizar a definição do problema poro-dinâmico faz-se necessário considerar as condições de contorno e condições iniciais atuantes. Tais condições podem ser resumidas conforme se segue:

(i) Condições de contorno ($t > 0$, ao longo do contorno $\Gamma = \Gamma_1^s \cup \Gamma_2^s = \Gamma_1^f \cup \Gamma_2^f$):

$$u_i(X, t) = \bar{u}_i(X, t) \quad \text{para } X \in \Gamma_1^s \quad (4.11a)$$

$$p(X, t) = \bar{p}(X, t) \quad \text{para } X \in \Gamma_1^f \quad (4.11b)$$

$$t_i(X, t) = s_{ij}(X, t) n_j(X) = \bar{t}_i(X, t) \quad \text{para } X \in \Gamma_2^s \quad (4.11c)$$

$$q(X, t) = p_{,j}(X, t) n_j(X) = \bar{q}(X, t) \quad \text{para } X \in \Gamma_2^f \quad (4.11d)$$

(ii) Condições iniciais ($t = 0$, ao longo do contorno Γ e domínio Ω):

$$u_i(X, 0) = \bar{u}_{i0}(X) \quad (4.12a)$$

$$u_{i,i}(X, 0) = \bar{u}_{i0,i}(X) \quad (4.12b)$$

$$p(X, 0) = \bar{p}_0(X) \quad (4.12c)$$

onde os valores prescritos estão indicados por barras sobrepostas e t_i e q representam forças de superfície e fluxos, respectivamente, ao longo do contorno de normal representada pelo vetor n_j .

Estando apresentadas as equações governantes do problema poro-dinâmico, duas abordagens são consideradas no presente trabalho: a primeira descreve o problema de forma completa (modelo linear) por intermédio de técnicas de transformação de

domínio (transformada de Laplace); a segunda descreve o modelo não linear, no domínio do tempo, considerando-se algumas simplificações na formulação acoplada.

Tendo-se em vista a primeira abordagem acima mencionada, tomando-se a transformada de Laplace das equações (4.1), (4.6), (4.9) e (4.10), considerando-se condições iniciais nulas, e efetuando-se substituições apropriadas, as equações (4.13) a seguir podem ser obtidas:

$$(I + m) \dot{u}_{i,jj} + m \dot{u}_{i,jj} - a_0 \dot{p}_{,i} - r_0 s^2 \dot{u}_i + r_m \dot{b}_i = 0 \quad (4.13a)$$

$$z \dot{p}_{,ii} - (s/Q) \dot{p} - a_0 s \dot{u}_{i,i} + \dot{d} = 0 \quad (4.13b)$$

onde $a_0 = a - r_f s z$, $r_0 = r_m - r_f^2 s z$ e $z = (1/k + \bar{r} s)^{-1}$. De acordo com as equações (4.13), o problema fica definido como função dos deslocamentos do esqueleto sólido \dot{u}_i e das poro-pressões \dot{p} , ambos relativos ao domínio transformado s de Laplace.

A segunda abordagem adotada neste trabalho também tem como objetivo uma formulação final do tipo $u-p$, ou seja, deslocamentos da fase sólido e poro-pressões da fase fluido como variáveis independentes. Todavia, tal formulação não é possível no domínio do tempo, a menos que algumas simplificações sejam consideradas. Quando se consideram problemas de baixa frequência, termos relacionados à aceleração do fluido são de pouca importância e podem ser omitidos com segurança (ZIENKIEWICZ & SHIOMI, 1984). Omitindo-se os termos em questão, pode-se eliminar a variável w_i do sistema de equações, restando tão somente u_i e p como variáveis primárias. Desta forma, o seguinte sistema final de equações pode ser obtido:

$$s_{ij,j} + r_m b_i - r_m \dot{x}_i = 0 \quad (4.14a)$$

$$a \dot{x}_i + (1/Q) \dot{x}_i - k p_{,ii} - a = 0 \quad (4.14b)$$

A solução do sistema de equações (4.13) é abordada no subitem 4.2.2.1 do presente trabalho. Nos subitens 4.2.2.2, 4.2.3.1 e 4.2.3.2 considera-se o tratamento numérico do sistema de equações (4.14).

4.2.2. Solução com elementos de contorno

Aborda-se neste subitem duas metodologias de solução para o problema poro-dinâmico usando-se elementos de contorno.

A primeira metodologia aqui abordada resolve o problema descrito pelas equações (4.13). A análise em questão é realizada passo a passo no tempo, usando soluções fundamentais no domínio de Laplace, por intermédio do método da quadratura de convolução (SCHANZ, 2001b). Na segunda metodologia de solução abordada por este trabalho, o sistema de equações (4.14) é considerado. Assim como fora realizado no subitem 2.3.2.2, empregam-se soluções fundamentais estáticas para solução do problema poro-dinâmico, fazendo-se uso de integração de domínio e de técnicas de integração no tempo baseadas em esquemas de diferenças finitas.

4.2.2.1. Análise baseada em soluções fundamentais dinâmicas

A equação integral que soluciona o problema descrito pelas equações (4.13) no domínio transformado de Laplace, desconsiderando-se a presença de forças de domínio, é expressa por (CHEN, 1994; SCHANZ, 2001a):

$$\begin{bmatrix} c_{ij} & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \dot{u}_{ij}^* & \dot{p}_j^* \\ \dot{u}_i^* & \dot{p}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{t}_i \\ \dot{q} \end{bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \dot{t}_{ij}^* & \dot{q}_j^* \\ \dot{t}_i^* & \dot{q}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{p} \end{bmatrix} d\Gamma \quad (4.15)$$

As soluções fundamentais \dot{u}_{ij}^* , \dot{u}_i^* , \dot{p}_j^* , \dot{p}^* , \dot{t}_{ij}^* , \dot{t}_i^* , \dot{q}_j^* e \dot{q}^* , presentes em (4.15), são dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{ij}^* = & -(A_{ij}I_1K_1(I_1r) + B_{ij}I_1^2K_0(I_1r))((I_4^2 - I_2^2)/(I_2^2 - I_1^2))/(r_0s^2) + \\ & + (A_{ij}I_2K_1(I_2r) + B_{ij}I_2^2K_0(I_2r))((I_4^2 - I_1^2)/(I_2^2 - I_1^2))/(r_0s^2) + \\ & - (A_{ij}I_3K_1(I_3r) + B_{ij}I_3^2K_0(I_3r))/(r_0s^2) + C_{ij}K_0(I_3r) \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\dot{u}_i^* = ((a_0s^2r_{,i})/(2p(1+2m)z))(I_1K_1(I_1r) - I_2K_1(I_2r))/(I_1^2 - I_2^2) \quad (4.17)$$

$$\dot{p}_j^* = ((a_0sr_{,j})/(2p(1+2m)z))(I_1K_1(I_1r) - I_2K_1(I_2r))/(I_1^2 - I_2^2) \quad (4.18)$$

$$\dot{p}^* = (1/(2pz))((I_2^2 - I_4^2)K_0(I_2r) - (I_1^2 - I_4^2)K_0(I_1r))/(I_1^2 - I_2^2) \quad (4.19)$$

$$\dot{t}_{ij}^* = ((I \dot{u}_{kj,k}^* - a s \dot{p}_j^*) d_{il} + m(\dot{u}_{ij,l}^* + \dot{u}_{lj,i}^*)) n_l \quad (4.20)$$

$$\dot{t}_i^* = ((I \dot{u}_{k,k}^* - a s \dot{p}^*) d_{il} + m(\dot{u}_{i,l}^* + \dot{u}_{l,i}^*)) n_l \quad (4.21)$$

$$\dot{q}_j^* = -z(\dot{p}_{j,i}^* + r_f s \dot{u}_{ji}^*) n_i \quad (4.22)$$

$$\dot{q}^* = -z(\dot{p}_{,i}^* + r_f s \dot{u}_i^*) n_i \quad (4.23)$$

onde $K_0(I_i r)$ e $K_1(I_i r)$ são funções de Bessel de segundo tipo e de zero e primeira ordem, respectivamente. Os termos A_{ij} , B_{ij} e C_{ij} , presentes em (4.16), são definidos como:

$$A_{ij} = (2r_{,i} r_{,j} - d_{ij})/(2pr) \quad (4.24)$$

$$B_{ij} = (r_{,i} r_{,j})/(2p) \quad (4.25)$$

$$C_{ij} = (d_{ij})/(2pm) \quad (4.26)$$

Os valores de I_i presentes em (4.16)-(4.19) são dados pelas expressões (4.27)-(4.29): I_4 e I_3 são especificados nas equações (4.27) e (4.28), respectivamente, e I_1 e I_2 são obtidos pela resolução da equação de segundo grau (4.29).

$$I_4^2 = (r_0 s^2) / (I + 2m) \quad (4.27)$$

$$I_3^2 = (r_0 s^2) / m \quad (4.28)$$

$$(I_i^2)^2 - (I_4^2 + (s/(Qz))(1 + (Qa_0^2)/(I + 2m)))(I_i^2) + I_4^2 (s/(Qz)) = 0 \quad (4.29)$$

Transformando-se a equação (4.15) para o domínio do tempo, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} c_{ij}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & c(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(\mathbf{x}, t) \\ p(\mathbf{x}, t) \end{bmatrix} = \\ & = \int_0^t \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} u_{ij}^*(X, t; \mathbf{x}, t) & p_j^*(X, t; \mathbf{x}, t) \\ u_i^*(X, t; \mathbf{x}, t) & p^*(X, t; \mathbf{x}, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_i(X, t) \\ q(X, t) \end{bmatrix} d\Gamma(X) dt + \\ & - \int_0^t \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} t_{ij}^*(X, t; \mathbf{x}, t) & q_j^*(X, t; \mathbf{x}, t) \\ t_i^*(X, t; \mathbf{x}, t) & q^*(X, t; \mathbf{x}, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(X, t) \\ p(X, t) \end{bmatrix} d\Gamma(X) dt \end{aligned} \quad (4.30)$$

Uma vez que expressões para as soluções fundamentais no domínio do tempo não são conhecidas, o sistema de equações do tipo (4.30) é aqui obtido a partir de (4.15) por intermédio do método da quadratura de convolução de Lubich (LUBICH, 1988a-b).

O método da quadratura de convolução aproxima numericamente uma integral de convolução, conforme indicado a seguir, para $n = 0, 1, \mathbf{K}, N$:

$$\int_0^{n\Delta t} f(n\Delta t - t)g(t)dt \approx \sum_{k=0}^n w_{n-k}(f)g(k\Delta t) \quad (4.31)$$

onde os pesos w são obtidos em função da transformada de Laplace da função f .

Desta forma, adotando-se aproximações do tipo (4.32) para as variáveis de contorno,

$$u_i(X, t) = \sum_{j=1}^J h_u^j(X) u_{ij}(t) \quad (4.32a)$$

$$t_i(X, t) = \sum_{j=1}^J h_t^j(X) t_{ij}(t) \quad (4.32b)$$

$$p(X, t) = \sum_{j=1}^J h_p^j(X) p_j(t) \quad (4.32c)$$

$$q(X, t) = \sum_{j=1}^J h_q^j(X) q_j(t) \quad (4.32d)$$

onde h_y^j são funções de interpolação espaciais correspondendo a um nó X_j do contorno e relacionadas à variável genérica y . Empregando-se a definição (4.31), o sistema de equações (4.30) pode ser escrito conforme expresso em (4.33):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_{ij}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & c(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ p(\mathbf{x}, n\Delta t) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^J \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} w_{n-k}^t(\mathbf{u}_{ij}^*) & w_{n-k}^q(\mathbf{p}_j^*) \\ w_{n-k}^t(\mathbf{u}_i^*) & w_{n-k}^q(\mathbf{p}^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{ij}(k\Delta t) \\ q_j(k\Delta t) \end{bmatrix} + \\ - \sum_{j=1}^J \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} w_{n-k}^u(\mathbf{t}_{ij}^*) & w_{n-k}^p(\mathbf{q}_j^*) \\ w_{n-k}^u(\mathbf{t}_i^*) & w_{n-k}^p(\mathbf{q}^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ij}(k\Delta t) \\ p_j(k\Delta t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.33)$$

As funções de peso $w_m^y(\mathbf{g}^*)$, presentes em (4.33), podem ser definidas, de acordo com o método da quadratura da convolução, como segue:

$$w_m^y(\mathbf{g}^*) = (\mathfrak{R}^{-m} / L) \sum_{l=0}^{L-1} \int_{\Gamma} \mathbf{g}^* (\mathbf{j} (e^{2pi\mathfrak{R}l/L} / \Delta t) h_y^j(X) d\Gamma e^{-2piml/L} \quad (4.34)$$

onde \mathfrak{R} é o raio de um círculo no domínio de análise de $\hat{g}^*(s)$ e $j(z)$ é a função cociente dos polinômios característicos relacionados à metodologia de Lubich. No presente trabalho os seguintes parâmetros são adotados: $j(z) = 1.5 - 2z + 0.5z^2$; $L=N$; $\mathfrak{R}^N = 10^{-5}$. O somatório presente em (4.34) é tratado por intermédio de algoritmos FFT, para se ter maior eficiência.

Para maiores detalhes sobre o emprego do método de Lubich em problemas de elementos de contorno, as seguintes referências são indicadas: SCHANZ & ANTES (1997); SCHANZ (1999, 2001a); ABREU *et al.* (2003).

Estando a equação (4.33) estabelecida, esta pode ser re-escrita como segue:

$$w_0(\mathbf{A})\mathbf{X}^n = w_0(\mathbf{B})\mathbf{Y}^n + \sum_{m=1}^n \left(w_m(\mathbf{G}) \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{n-m} \\ \mathbf{Q}^{n-m} \end{bmatrix} - w_m(\mathbf{H}) \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{n-m} \\ \mathbf{P}^{n-m} \end{bmatrix} \right) \quad (4.35)$$

onde os termos de \mathbf{X}^n representam os valores incógnitos no contorno, no tempo discreto t_n , enquanto os termos de \mathbf{Y}^n representam os valores prescritos correspondentes.

A equação (4.35) possui estrutura análoga à das equações (2.11) e (2.46), sendo as matrizes de influência, todavia, aqui calculadas com auxílio de domínio transformado. Por intermédio de (4.35) o modelo poro-elastodinâmico pode ser solucionado a cada passo n de tempo.

Para maiores detalhes sobre a formulação considerada neste subitem, o trabalho de SCHANZ (2001b) é recomendado.

4.2.2.2. Análise baseada em soluções fundamentais estáticas

Como referência à formulação que a seguir se considera, a metodologia apresentada no subitem 2.3.2.2 (solução dinâmica não-linear), associada ao trabalho de CAVALCANTI & TELLES (2003) (análise quase-estática poro-elástica), é indicada.

As equações integrais que solucionam o problema poro-dinâmico (deslocamentos, tensões e pressões) descrito pelas equações (4.14), considerando-se soluções fundamentais estáticas e tensões iniciais, são dadas por:

$$\begin{aligned}
 c_{ik}(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}, t) = & \int_{\Gamma} u_{ik}^*(X; \mathbf{x}) t_k(X, t) d\Gamma(X) + \\
 & - \int_{\Gamma} t_{ik}^*(X; \mathbf{x}) u_k(X, t) d\Gamma(X) + \\
 & - \int_{\Omega} u_{ik}^*(X; \mathbf{x}) r_m \{ \mathbf{f}_k(X, t) - b_k(X, t) \} d\Omega(X) + \\
 & + \int_{\Omega} \mathbf{e}_{ikj}^*(X; \mathbf{x}) \{ \mathbf{s}_{kj}^p(X, t) + \mathbf{ad}_{kj} p \} d\Omega(X)
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}_{ik}(\mathbf{x}, t) = & \int_{\Gamma} u_{ikj}^*(X; \mathbf{x}) t_j(X, t) d\Gamma(X) + \\
 & - \int_{\Gamma} t_{ikj}^*(X; \mathbf{x}) u_j(X, t) d\Gamma(X) + \\
 & - \int_{\Omega} u_{ikj}^*(X; \mathbf{x}) r_m \{ \mathbf{f}_j(X, t) - b_j(X, t) \} d\Omega(X) + \\
 & + \int_{\Omega} \mathbf{e}_{ikjl}^*(X; \mathbf{x}) \{ \mathbf{s}_{jl}^p(X, t) + \mathbf{ad}_{jl} p \} d\Omega(X) + \\
 & + g_{ik} \left(\mathbf{s}_{jl}^p(X, t) + \mathbf{ad}_{jl} p \right)
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}
 c(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}, t) = & \int_{\Gamma} p^*(X; \mathbf{x}) q(X, t) d\Gamma(X) + \\
 & - \int_{\Gamma} q^*(X; \mathbf{x}) p(X, t) d\Gamma(X) + \\
 & - \int_{\Omega} p^*(X; \mathbf{x}) \{ \nabla^2 p(X, t) + a(X, t) \} d\Omega(X)
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

onde S_{ji}^P representa os componentes da tensão 'inicial' (plástica). As soluções fundamentais u_{ik}^*, t_{ik}^* e e_{ikj}^* presentes em (4.36) e u_{ikj}^*, t_{ikj}^* e e_{ikji}^* presentes em (4.37) são dadas por (2.49)-(2.54). As soluções fundamentais p^* e q^* são dadas por:

$$p^*(X; \mathbf{x}) = \ln(r)/(2p) \quad (4.39)$$

$$q^*(X; \mathbf{x}) = (\partial r / \partial n)/(2p r) \quad (4.40)$$

Por intermédio de (4.6)-(4.10) e das simplificações consideradas quando da dedução das equações (4.14), a seguinte equação pode ser obtida, relacionando tensões efetivas elásticas e pressões:

$$\nabla^2 p = z_1 \mathbf{e} + z_2 \mathbf{e}_e^{vol} \quad (4.41)$$

onde o termo \mathbf{e}_e^{vol} é relativo a tensões volumétricas elásticas. As constantes z_1 e z_2 presentes em (4.41) são dadas por: $z_1 = (1/Q)/k$ e $z_2 = (a K_{nD})/k$, sendo, para o caso elástico 2D, $K_{2D} = (1 - 2u)/m$.

Introduzindo a equação (4.41) em (4.38), obtém-se:

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}, t) = & \int_{\Gamma} p^*(X; \mathbf{x}) q(X, t) d\Gamma(X) + \\ & - \int_{\Gamma} q^*(X; \mathbf{x}) p(X, t) d\Gamma(X) + \\ & - \int_{\Omega} p^*(X; \mathbf{x}) z_1 \mathbf{e}(X, t) d\Omega(X) + \\ & - \int_{\Omega} p^*(X; \mathbf{x}) z_2 \mathbf{e}_e^{vol}(X, t) d\Omega(X) + \\ & - \int_{\Omega} p^*(X; \mathbf{x}) a(X, t) d\Omega(X) \end{aligned} \quad (4.42)$$

As equações (4.36)-(4.37) e (4.42) definem as equações integrais a serem resolvidas. Para se resolver o problema (4.36)-(4.37) e (4.42), o contorno e o domínio do modelo são discretizados, empregando-se elementos de contorno e células de integração, respectivamente. Desta forma aproximações do tipo (4.43) são adotadas:

$$u_k(X,t) = \sum_{j=1}^J h_u^j(X) u_{kj}(t) \quad (4.43)$$

onde j representa a variação das funções de interpolação pelos nós dos elementos de contorno, no caso de resolução de integrais de contorno, ou pelos nós das células de integração, no caso de resolução de integrais de domínio.

Substituindo aproximações numéricas do tipo (4.43) em (4.36)-(4.37) e (4.42), os seguintes sistemas matriciais podem ser obtidos, tendo-se em consideração que $s'_{ij} = s_{ij} + ad_{ij}p$ (ver subitem 2.3.2.2, para maiores detalhes):

$$\mathbf{C}\mathbf{U}^n = \mathbf{G}\mathbf{T}^n - \mathbf{H}\mathbf{U}^n - \mathbf{M}\mathbf{O}_e^n + \mathbf{W}(\mathbf{O}_p^n + \mathbf{m}_0\mathbf{P}^n) + \mathbf{S}^n \quad (4.44)$$

$$\mathbf{O}^n = \mathbf{G}'\mathbf{T}^n - \mathbf{H}'\mathbf{U}^n - \mathbf{M}'\mathbf{O}_e^n + \mathbf{W}'(\mathbf{O}_p^n + \mathbf{m}_0\mathbf{P}^n) + \mathbf{m}_0\mathbf{P}^n + \mathbf{S}'^n \quad (4.45)$$

$$\mathbf{C}''\mathbf{P}^n = \mathbf{G}''\mathbf{Q}^n - \mathbf{H}''\mathbf{P}^n - \mathbf{M}''\mathbf{P}^n + \mathbf{W}''\mathbf{O}_e^n + \mathbf{S}''^n \quad (4.46)$$

onde \mathbf{H} , \mathbf{H}' , \mathbf{H}'' , \mathbf{G} , \mathbf{G}' , \mathbf{G}'' são matrizes de influência provindas de integrais de contorno e \mathbf{M} , \mathbf{M}' , \mathbf{M}'' , \mathbf{W} , \mathbf{W}' , \mathbf{W}'' são matrizes de influência provindas de integrais de domínio. \mathbf{C} e \mathbf{C}'' são matrizes geométricas, relativas aos parâmetros c_{ik} (em (4.36)) e c (em (4.42)), respectivamente. \mathbf{m}_0 é relativo ao delta de Kronecker d_{ij} associado ao parâmetro a de Biot (ad_{ij}). \mathbf{O}_e é o vetor de tensões elásticas e \mathbf{O}_p é o vetor de tensões plásticas (efetivas). \mathbf{S} , \mathbf{S}' e \mathbf{S}'' são relativas às forças de domínio. Para maiores detalhes

a cerca da dedução e implementação numérica relacionada às equações (4.44)-(4.46), em especial para tratamento das integrais de domínio, as seguintes referências bibliográficas são recomendadas: CARRER (1991); CAVALCANTI (2002).

Para se tratar as integrações no tempo presentes em (4.44)-(4.46), o presente trabalho faz uso do método de Houbolt:

$$\mathbf{V}^n = (2\mathbf{V}^n - 5\mathbf{V}^{n-1} + 4\mathbf{V}^{n-2} - \mathbf{V}^{n-3}) / \Delta t^2 \quad (4.47)$$

$$\mathbf{V}'^n = (11\mathbf{V}^n - 18\mathbf{V}^{n-1} + 9\mathbf{V}^{n-2} - 2\mathbf{V}^{n-3}) / (6\Delta t) \quad (4.48)$$

Substituindo-se as relações (4.47)-(4.48) em (4.44)-(4.46), obtém-se:

$$\bar{\mathbf{H}}\mathbf{U}^n - \mathbf{G}\mathbf{T}^n = \bar{\mathbf{L}}^n + \mathbf{W}(\mathbf{O}_p^n + \mathbf{m}_0\mathbf{P}^n) + \mathbf{S}^n \quad (4.49)$$

$$\mathbf{O}^n = \mathbf{G}'\mathbf{T}^n - \bar{\mathbf{H}}'\mathbf{U}^n + \bar{\mathbf{L}}'^n + \mathbf{W}'(\mathbf{O}_p^n + \mathbf{m}_0\mathbf{P}^n) + \mathbf{m}_0\mathbf{P}^n + \mathbf{S}'^n \quad (4.50)$$

$$\bar{\mathbf{H}}''\mathbf{P}^n - \mathbf{G}''\mathbf{Q}^n = \bar{\mathbf{L}}''^n + \mathbf{W}''\mathbf{O}_e^n (11/6\Delta t) + \mathbf{S}''^n \quad (4.51)$$

onde as matrizes $\bar{\mathbf{H}}$, $\bar{\mathbf{H}}'$ e $\bar{\mathbf{H}}''$, bem como os vetores $\bar{\mathbf{L}}^n$, $\bar{\mathbf{L}}'^n$ e $\bar{\mathbf{L}}''^n$, são dados por:

$$\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{C} + \mathbf{H} + \mathbf{M}(2/\Delta t^2) \quad (4.52)$$

$$\bar{\mathbf{H}}' = \mathbf{H}' + \mathbf{M}'(2/\Delta t^2) \quad (4.53)$$

$$\bar{\mathbf{H}}'' = \mathbf{C}'' + \mathbf{H}'' + \mathbf{M}''(11/6\Delta t) \quad (4.54)$$

$$\bar{\mathbf{L}}^n = \mathbf{M}(5\mathbf{U}^{n-1} - 4\mathbf{U}^{n-2} + \mathbf{U}^{n-3}) / \Delta t^2 \quad (4.55)$$

$$\bar{\mathbf{L}}'^n = \mathbf{M}'(5\mathbf{U}^{n-1} - 4\mathbf{U}^{n-2} + \mathbf{U}^{n-3}) / \Delta t^2 \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{L}}''^n = & (\mathbf{M}''(18\mathbf{P}^{n-1} - 9\mathbf{P}^{n-2} + 2\mathbf{P}^{n-3}) + \\ & - \mathbf{W}''(18\mathbf{O}_e^{n-1} - 9\mathbf{O}_e^{n-2} + 2\mathbf{O}_e^{n-3})) / (6\Delta t) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Introduzindo-se as condições de contorno (4.11) ao modelo, os sistemas de equações (4.49)-(4.51) podem ser re-escritos como segue:

$$\bar{\mathbf{A}} \mathbf{X}^n = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{Y}^n + \bar{\mathbf{L}}^n + \mathbf{W}(\mathbf{O}_p^n + \mathbf{m}_0 \mathbf{P}^n) + \mathbf{S}^n \quad (4.58)$$

$$\mathbf{O}^n = \bar{\mathbf{B}}' \mathbf{Y}^n - \bar{\mathbf{A}}' \mathbf{X}^n + \bar{\mathbf{L}}'^n + \mathbf{W}'(\mathbf{O}_p^n + \mathbf{m}_0 \mathbf{P}^n) + \mathbf{m}_0 \mathbf{P}^n + \mathbf{S}'^n \quad (4.59)$$

$$\bar{\mathbf{A}}'' \mathbf{X}''^n = \bar{\mathbf{B}}'' \mathbf{Y}''^n + \bar{\mathbf{L}}''^n + \mathbf{W}'' \mathbf{O}_e^n (11/6\Delta t) + \mathbf{S}''^n \quad (4.60)$$

Por fim, os sistemas (4.58)-(4.60) podem ser expressos de forma mais compacta, conforme se indica a seguir:

$$\mathbf{X}^n = \bar{\mathbf{Y}}^n + \bar{\mathbf{W}}(\mathbf{O}_p^n + \mathbf{m}_0 \mathbf{P}^n) \quad (4.61)$$

$$\mathbf{O}^n = \bar{\mathbf{Y}}'^n + \bar{\mathbf{W}}'(\mathbf{O}_p^n + \mathbf{m}_0 \mathbf{P}^n) + \mathbf{m}_0 \mathbf{P}^n \quad (4.62)$$

$$\mathbf{X}''^n = \bar{\mathbf{Y}}''^n + \bar{\mathbf{W}}'' \mathbf{O}_e^n \quad (4.63)$$

onde os vetores efetivos $\bar{\mathbf{Y}}^n$, $\bar{\mathbf{Y}}'^n$ e $\bar{\mathbf{Y}}''^n$ são dados por:

$$\bar{\mathbf{Y}}^n = \bar{\mathbf{A}}^{-1} (\bar{\mathbf{B}} \mathbf{Y}^n + \bar{\mathbf{L}}^n + \mathbf{S}^n) \quad (4.64)$$

$$\bar{\mathbf{Y}}'^n = \bar{\mathbf{B}}' \mathbf{Y}^n - \bar{\mathbf{A}}' \bar{\mathbf{Y}}^n + \bar{\mathbf{L}}'^n + \mathbf{S}'^n \quad (4.65)$$

$$\bar{\mathbf{Y}}''^n = \bar{\mathbf{A}}''^{-1} (\bar{\mathbf{B}}'' \mathbf{Y}''^n + \bar{\mathbf{L}}''^n + \mathbf{S}''^n) \quad (4.66)$$

sendo as matrizes efetivas $\bar{\mathbf{W}}$, $\bar{\mathbf{W}}'$ e $\bar{\mathbf{W}}''$ dadas por:

$$\bar{\mathbf{W}} = \bar{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{W} \quad (4.67)$$

$$\bar{\mathbf{W}}' = \mathbf{W} - \bar{\mathbf{A}}' \bar{\mathbf{W}} \quad (4.68)$$

$$\bar{\mathbf{W}}'' = \bar{\mathbf{A}}''^{-1} \mathbf{W}'' (11/6\Delta t) \quad (4.69)$$

Partindo-se da equação (4.63), i.e., levando-se em consideração as condições de contorno do problema, o vetor de poro-pressões pode ser expresso conforme indicado em (4.70). Isolando-se o vetor de poro-pressões em (4.62) obtém-se a equação (4.71) apresentada na seqüência, para as tensões efetivas, onde $\overline{\mathbf{W}}'_0 = (\overline{\mathbf{W}}' + \mathbf{I}) \mathbf{m}_0$.

$$\mathbf{P}^n = \overline{\mathbf{Y}}''_0{}^n + \overline{\mathbf{W}}''_0 \mathbf{O}_e^n \quad (4.70)$$

$$\mathbf{O}^n = \overline{\mathbf{Y}}'^n + \overline{\mathbf{W}}' \mathbf{O}_p^n + \overline{\mathbf{W}}'_0 \mathbf{P}^n \quad (4.71)$$

Substituindo-se a equação (4.70) em (4.71), pode-se obter o sistema final para o cálculo das tensões efetivas, conforme se apresenta a seguir:

$$\mathbf{O}^n = \overline{\overline{\mathbf{Y}}}'^n + \overline{\overline{\mathbf{W}}}' \mathbf{O}_p^n \quad (4.72)$$

onde o vetor $\overline{\overline{\mathbf{Y}}}'^n$ e a matriz $\overline{\overline{\mathbf{W}}}'$ são dados por:

$$\overline{\overline{\mathbf{Y}}}'^n = (\mathbf{I} - \overline{\mathbf{W}}'_0 \overline{\mathbf{W}}''_0)^{-1} (\overline{\mathbf{Y}}'^n + \overline{\mathbf{W}}'_0 \overline{\mathbf{Y}}''_0{}^n) \quad (4.73)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{W}}}' = (\mathbf{I} - \overline{\mathbf{W}}'_0 \overline{\mathbf{W}}''_0)^{-1} (\overline{\mathbf{W}}' + \overline{\mathbf{W}}'_0 \overline{\mathbf{W}}''_0) \quad (4.74)$$

Para se resolver o problema não-linear em questão, adota-se um esquema iterativo para o cálculo das tensões do modelo (resolução do problema (4.72)). Uma vez que se obtenha convergência no esquema iterativo do cálculo das tensões, resolvem-se os sistemas (4.61) e (4.63) (cálculo de deslocamentos, poro-pressões etc.), e parte-se para o próximo passo de tempo, dando continuidade à análise.

Assim como fora considerado no segundo capítulo, o seguinte algoritmo iterativo implícito de solução de tensões pode ser aqui adotado:

$$\mathbf{W}_p^{(k+1)} \Delta \mathbf{O}_e = {}^{(k)} \boldsymbol{\Psi} \quad (4.75)$$

$${}^{(k)} \boldsymbol{\Psi} = \overline{\overline{\mathbf{Y}}}^n + \mathbf{W}_I {}^{(k)} \mathbf{O}_p^n - {}^{(k)} \mathbf{O}_e^n \quad (4.76)$$

onde $\mathbf{W}_p = \mathbf{I} - \mathbf{W}_I \mathbf{D}_p$ e $\mathbf{W}_I = \mathbf{I} + \overline{\overline{\mathbf{W}}}$.

Por intermédio de (4.61)-(4.76) o modelo poro-dinâmico não-linear em questão pode ser solucionado a cada passo n de tempo.

4.2.3. Solução com elementos finitos

Neste subitem apresenta-se a solução do problema poro-dinâmico não-linear por intermédio de elementos finitos. Assim como fora considerado no segundo capítulo, duas abordagens cinemáticas semi-discretas são aqui adotadas: método de Newmark / Newton-Raphson e método implícito de Green / pseudo-forças.

No método de Newmark / Newton-Raphson empregam-se relações de diferenças finitas para se integrar no tempo as equações de movimento (método de Newmark aplicado a deslocamentos e poro-pressões); o tratamento do problema não-linear é realizado por intermédio de esquema implícito de iterações (método de Newton-Raphson).

No método implícito de Green, a solução no tempo do sistema de equações se dá pela utilização de funções de Green, implicitamente calculadas. Esta metodologia propicia o desacoplamento entre as incógnitas deslocamento e forças nodais atuantes,

tornando processos iterativos desnecessários em várias aplicações. Em problemas poro-dinâmicos o método implícito de Green proporciona, de forma computacionalmente eficiente, o desacoplamento das fases sólido e fluido do sistema acoplado. Obtém-se, desta forma, um algoritmo final de solução bastante atrativo. Associado ao método implícito de Green, o método das pseudo-forças é utilizado para o tratamento do problema não-linear.

4.2.3.1. Método de Newmark / Newton-Raphson

Adotando-se aproximações do tipo (4.77) ao longo dos elementos finitos do modelo, para as variáveis de deslocamento e de poro-pressão (J representa os números de nós do elemento finito em questão e h^j são funções de interpolação espacial):

$$u_k(X, t) = \sum_{j=1}^J h_u^j(X) u_{kj}(t) \quad (4.77a)$$

$$p(X, t) = \sum_{j=1}^J h_p^j(X) p_j(t) \quad (4.77b)$$

pode-se obter o seguinte sistema de equações matriciais, a partir das equações (4.14):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^n + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{O}^n d\Omega - \mathbf{\Theta}\mathbf{P}^n = \mathbf{F}_u^n \quad (4.78)$$

$$\mathbf{\Theta}^T \ddot{\mathbf{U}}^n + \mathbf{S}\dot{\mathbf{P}}^n + \mathbf{H}\mathbf{P}^n = \mathbf{F}_p^n \quad (4.79)$$

onde \mathbf{B} é a matriz de deformação e \mathbf{O}^n é vetor de tensões efetivas. As matrizes de massa (\mathbf{M}), compressibilidade (\mathbf{S}), permeabilidade (\mathbf{H}) e acoplamento ($\mathbf{\Theta}$), presentes em (4.78) e (4.79), são dadas por:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \mathbf{r}_m \mathbf{N}_u d\Omega \quad (4.80)$$

$$\mathbf{S} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{Q} \mathbf{N}_p d\Omega \quad (4.81)$$

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}_p^T \boldsymbol{\kappa} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \quad (4.82)$$

$$\boldsymbol{\Theta} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{a} \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega \quad (4.83)$$

onde $\boldsymbol{\kappa}$ é a matriz formada pelos coeficientes de permeabilidade (anisotropia é aqui possível, ou seja, pode-se ter $k_x \neq k_y$); \mathbf{N}_u e \mathbf{N}_p são matrizes de interpolação relativas a h_u e h_p , respectivamente, e \mathbf{m} é equivalente ao delta de Kronecker d_{ij} .

Os vetores de forças nodais \mathbf{F}_u^n e \mathbf{F}_p^n expressos em (4.78) e (4.79), respectivamente, são definidos como:

$$\mathbf{F}_u^n = \int_{\Gamma_2^i} \mathbf{N}_u^T \bar{\mathbf{T}}^n d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \mathbf{r}_m \mathbf{b}^n d\Omega \quad (4.84)$$

$$\mathbf{F}_p^n = \int_{\Gamma_2^f} \mathbf{N}_p^T \boldsymbol{\kappa} \bar{\mathbf{Q}}^n d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \mathbf{a}^n d\Omega \quad (4.85)$$

onde as integrais de contorno presentes em (4.84) e (4.85) dizem respeito às condições naturais de contorno do modelo.

Adotando-se expressões de diferenças finitas para solução do problema no tempo, de acordo com o método de Newmark tem-se:

$$\mathbf{U}^n = \mathbf{U}^{n-1} + \Delta t (1-g) \dot{\mathbf{U}}^{n-1} + (g \Delta t) \ddot{\mathbf{U}}^n \quad (4.86)$$

$$\mathbf{U}^n = \mathbf{U}^{n-1} + \Delta t \dot{\mathbf{U}}^n + \Delta t^2 (1/2 - b) \ddot{\mathbf{U}}^{n-1} + (b \Delta t^2) \ddot{\mathbf{U}}^n \quad (4.87)$$

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^{n-1} + \Delta t(1-q)\mathbf{P}^{n-1} + (q\Delta t)\mathbf{P}^n \quad (4.88)$$

Usando-se as expressões (4.86)-(4.88) acima destacadas, e adotando-se um procedimento iterativo do tipo:

$${}^{(k+1)}\Delta\mathbf{V} = {}^{(k)}\Delta\mathbf{V} + {}^{(k+1)}\Delta\Delta\mathbf{V} \quad (4.89)$$

$${}^{(k+1)}\mathbf{V}^n = {}^{(k)}\mathbf{V}^n + {}^{(k+1)}\Delta\Delta\mathbf{V} \quad (4.90)$$

pode-se obter o sistema final de equações indicado a seguir:

$$\hat{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} {}^{(k+1)}\Delta\Delta\mathbf{U} \\ {}^{(k+1)}\Delta\Delta\mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{(k)}\hat{\mathbf{B}}_u^n \\ {}^{(k)}\hat{\mathbf{B}}_p^n \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

onde a matriz efetiva $\hat{\mathbf{A}}$, bem como o vetor efetivo ${}^{(k)}\hat{\mathbf{B}}^n$, são definidos por:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} (1/(b\Delta t^2))\mathbf{M} + \mathbf{K}_T & -\mathbf{\Theta} \\ -\mathbf{\Theta}^T & -(b\Delta t/g)\mathbf{H} - (b/(gq))\mathbf{S} \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

$${}^{(k)}\hat{\mathbf{B}}_u^n = \mathbf{F}_u^n + {}^{(k)}\mathbf{\Theta} \left\{ {}^{(k)}\Delta\mathbf{P} + \mathbf{P}^{n-1} \right\} - \int_{\Omega} {}^{(k)}(\mathbf{B}^T \mathbf{O}^n) d\Omega + \\ - {}^{(k)}\mathbf{M} \left\{ (1/(b\Delta t^2)) {}^{(k)}\Delta\mathbf{U} - (1/(b\Delta t))\mathbf{U}^{n-1} - (1/(2b) - 1)\mathbf{U}^{n-1} \right\} \quad (4.93)$$

$${}^{(k)}\hat{\mathbf{B}}_p^n = -(b\Delta t/g)\mathbf{F}_u^n + (b\Delta t/g) {}^{(k)}\mathbf{H} \left\{ {}^{(k)}\Delta\mathbf{P} + \mathbf{P}^{n-1} \right\} + \\ + {}^{(k)}\mathbf{S} \left\{ (b/(gq)) {}^{(k)}\Delta\mathbf{P} - ((q-1)b\Delta t/(gq))\mathbf{P}^{n-1} \right\} + \\ - {}^{(k)}\mathbf{\Theta}^T \left\{ {}^{(k)}\Delta\mathbf{U} - (1-b/g)\Delta t\mathbf{U}^{n-1} - (1/2 - b/g)\Delta t^2\mathbf{U}^{n-1} \right\} \quad (4.94)$$

Em (4.92), \mathbf{K}_T é a matriz de rigidez tangente (não-linear). A matriz efetiva $\hat{\mathbf{A}}$ apresentada em (4.92) é simétrica para \mathbf{K}_T simétrica (a simetria em (4.92) é obtida por conveniente multiplicação de algumas linhas da matriz por constantes apropriadas).

Por intermédio de (4.91) o modelo poro-dinâmico não-linear pode ser solucionado usando-se o método dos elementos finitos com formulação de Newmark / Newton-Raphson. Para abordagem mais detalhada sobre alguns aspectos do desenvolvimento aqui apresentado, as seguintes referências são indicadas: ZIENKIEWICZ & SHIOMI (1984); ZIENKIEWICZ *et al.* (1990a); LEWIS & SCHREFLER (1998); ZIENKIEWICZ *et al.* (1999).

4.2.3.2. Método implícito de Green / pseudo-forças

As equações (4.78)-(4.79) podem ser re-escritas, conforme se indica a seguir:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}^n + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{O}^n d\Omega = \mathbf{R}_u^n \quad (4.95)$$

$$\mathbf{S}\mathbf{P}^n + \mathbf{H}\mathbf{P}^n = \mathbf{R}_p^n \quad (4.96)$$

onde as forças nodais \mathbf{R}_u^n e \mathbf{R}_p^n , presentes em (4.95)-(4.96), descrevem implicitamente a análise acoplada. As forças nodais de acoplamento \mathbf{R}_u^n e \mathbf{R}_p^n são dadas por:

$$\mathbf{R}_u^n = \mathbf{F}_u^n + \mathbf{\Theta}\mathbf{P}^n \quad (4.97)$$

$$\mathbf{R}_p^n = \mathbf{F}_p^n - \mathbf{\Theta}^T \dot{\mathbf{U}}^n \quad (4.98)$$

Conforme fora considerado no segundo capítulo, expressões analíticas para deslocamentos e velocidades, associadas à versão linear da equação (4.95), podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^n &= \mathfrak{G}^n \mathbf{M} \mathbf{U}^0 + \mathbf{G}^n \mathbf{M} \mathfrak{U}^0 + \mathbf{G}^n \bullet \mathbf{R}_u^n \\ \mathfrak{U}^n &= \mathfrak{G}^n \mathbf{M} \mathbf{U}^0 + \mathfrak{G}^n \mathbf{M} \mathfrak{U}^0 + \mathfrak{G}^n \bullet \mathbf{R}_u^n \end{aligned} \quad (4.99)$$

onde \mathbf{U}^0 e \mathfrak{U}^0 são os vetores condições iniciais do problema; \mathbf{G}^n representa as matrizes funções de Green do modelo ($\mathbf{G}^0 = \mathbf{0}$ e $\mathfrak{G}^0 = \mathbf{M}^{-1}$); e o símbolo \bullet indica convolução. Considerando-se que o passo de tempo Δt seja suficientemente pequeno, as seguintes aproximações, análogas às adotadas em (2.97), podem substituir as integrais de convolução presentes em (4.99):

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta t} \mathbf{G}(\Delta t - t) \mathbf{R}(t) dt &\approx \mathbf{G}(0) \mathbf{R}(\Delta t) \Delta t \\ \int_0^{\Delta t} \mathfrak{G}(\Delta t - t) \mathbf{R}(t) dt &\approx \mathfrak{G}(0) \mathbf{R}(\Delta t) \Delta t \end{aligned} \quad (4.100)$$

Tendo-se em mente as aproximações (4.100), relações recursivas podem ser obtidas considerando-se as equações (4.99) no passo de tempo t_n e supondo que a análise se inicia no passo de tempo t_{n-1} . Adotando-se o método de Newmark (equações (4.86)-(4.87)) para se calcular numericamente as matrizes de Green do modelo (assim como fora feito no segundo capítulo) e substituindo estas matrizes nas relações recursivas que são fruto das equações (4.99), o seguinte algoritmo de solução para deslocamentos e velocidades pode ser obtido:

$$\mathbf{U}^n = \bar{\mathbf{U}} + (1 - g/b) \mathbf{U}^{n-1} \quad (4.101)$$

$$\mathfrak{U}^n = (g/(b\Delta t)) \bar{\mathbf{U}} - (1/(b\Delta t)) \mathbf{U}^{n-1} + (1 - g/b) \mathfrak{U}^{n-1} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{R}_u^n \Delta t \quad (4.102)$$

onde o vetor auxiliar $\bar{\mathbf{U}}$ é obtido pela resolução do sistema de equações (4.103) e a relação $g^2 = b$ é adotada:

$$\bar{\mathbf{U}} = \left\{ \mathbf{K} + \mathbf{M} (1/(b\Delta t^2)) \right\}^{-1} \mathbf{M} \left\{ (g/(b^2 \Delta t^2)) \mathbf{U}^{n-1} + (1/(b\Delta t)) \mathbf{U}^{n-1} \right\} \quad (4.103)$$

A solução da equação (4.96) pode ser obtida, por sua vez, pelo emprego direto da relação de Newmark (4.88), conforme se indica a seguir:

$$\mathbf{P}^n = \left\{ \mathbf{H} + \mathbf{S} (1/(q\Delta t)) \right\}^{-1} \left\{ \mathbf{S} \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{R}_p^n \right\} \quad (4.104)$$

onde o vetor predictor $\bar{\mathbf{P}}$ é dado por:

$$\bar{\mathbf{P}} = (1/(q\Delta t)) \mathbf{P}^{n-1} - ((q-1)/q) \mathbf{P}^{n-1} \quad (4.105)$$

Estando o vetor velocidade expresso pela equação (4.102), o mesmo poderia ser empregue na equação (4.104), por intermédio do vetor de força nodal acoplada \mathbf{R}_p^n , resolvendo-se o cálculo das poro-pressões do modelo. Todavia, tal procedimento seria incompatível com as aproximações numéricas (4.100) em consideração.

As expressões (4.100), apesar de simples, são ferramentas apropriadas para a aproximação das integrais de convolução do tipo (4.99), conforme se tem mostrado ao longo deste trabalho. Isto acontece uma vez que as aproximações (4.100) trabalham juntas e de forma complementar: erros associados a uma das aproximações são “corrigidos” por erros associados à outra aproximação e vice-versa (ver discussão apresentada no segundo capítulo). De forma mais específica, as aproximações (4.100) sub e super estimam as integrais de convolução de deslocamento e velocidade, respectivamente, sendo, desta forma, os erros associados compensados. Empregando-se a equação (4.102) diretamente em (4.104), ignora-se a relação de compensação existente nas aproximações (4.100), quando do cálculo das poro-pressões.

A fim de se criar uma metodologia onde as aproximações (4.100) para deslocamentos e velocidades trabalhem juntas quando do cálculo das poro-pressões, introduz-se aqui um vetor auxiliar de velocidades $\bar{\mathbf{U}}$, obtido com base nas aproximações de diferenças finitas (4.88):

$$\bar{\mathbf{U}} = (1/(q\Delta t))\{\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1}\} + ((q-1)/q)\mathbf{U}^{n-1} \quad (4.106)$$

Estando o cálculo de $\bar{\mathbf{U}}$, por intermédio de \mathbf{U}^n , baseado nas aproximações de deslocamento (4.100), e estando o cálculo de \mathbf{U}^n baseado nas aproximações de velocidade (4.100), estes dois vetores podem ser combinados de forma a se obter a expressão final de velocidade a ser introduzida em (4.104). Esta combinação é feita por intermédio do parâmetro de ponderação j , conforme se segue:

$$\mathbf{U}' = (j)\mathbf{U}^n + (1-j)\bar{\mathbf{U}} \quad (4.107)$$

Introduzindo-se o vetor \mathbf{U}' estabelecido em (4.107) na expressão (4.102) por intermédio de \mathbf{R}_p^n , obtém-se para as poro-pressões:

$$\mathbf{P}^n = \{\mathbf{H} + \mathbf{S}(1/(q\Delta t)) + \mathbf{W}(j\Delta t)\}^{-1}\{\mathbf{S}\bar{\mathbf{P}} + \mathbf{F}_p^n - \mathbf{\Theta}^T((j)\bar{\mathbf{U}} + (1-j)\bar{\mathbf{U}})\} \quad (4.108)$$

onde $\mathbf{W} = \mathbf{\Theta}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Theta}$ e o vetor auxiliar $\bar{\mathbf{U}}$ é dado por:

$$\bar{\mathbf{U}} = (g/(b\Delta t))\bar{\mathbf{U}} - (1/(b\Delta t))\mathbf{U}^{n-1} + (1-g/b)\mathbf{U}^{n-1} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_u^n\Delta t \quad (4.109)$$

Após o cálculo do vetor de poro-pressões (equação (4.108)), este pode ser introduzido na equação (4.102), por intermédio de \mathbf{R}_u^n , obtendo-se as velocidades do modelo para o passo de tempo t_n . Estando calculados os deslocamentos, poro-pressões e velocidades, segue-se a análise para o próximo passo de tempo.

O algoritmo de solução aqui apresentado (equações (4.101)-(4.102) e (4.108)) é deduzido a partir das equações discretizadas por elementos finitos (4.95)-(4.96). Todavia, parte da dedução poderia ser realizada tendo-se por base as equações de movimento (4.14). Adotando-se esta abordagem (assim como é considerado, e.g., por LI *et al.* (2003), quando da dedução do esquema iterativo de solução denominado “iterative stabilized fractional step algorithm”) pode-se obter uma expressão mais apropriada para a matriz de acoplamento modificada $\mathbf{W} = \mathbf{\Theta}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{\Theta}$. Desta forma, \mathbf{W} pode ser re-definida por:

$$\mathbf{W} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}_p^T \frac{\mathbf{a}^2}{r_m} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \quad (4.110)$$

As equações (4.101)-(4.102) e (4.108) resolvem o problema poro-dinâmico linear. A solução do problema não linear pode ser obtida por intermédio de pseudo-forças, assim como fora abordado no segundo capítulo.

O algoritmo final de solução do problema poro-dinâmico não-linear por intermédio do método implícito de Green / pseudo-forças pode ser resumido na seqüência de passos (passos 1 a 10) apresentada a seguir.

Para cada passo de tempo, executar a seqüência:

$$(1) \text{ Resolver: } \hat{\mathbf{A}}_u \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{M} \left\{ (g / (b^2 \Delta t^2)) \mathbf{U}^{n-1} + (1 / (b \Delta t)) \mathfrak{U}^{n-1} \right\};$$

$$(2) \text{ Calcular: } \mathbf{U}^n = \bar{\mathbf{U}} + (1 - g / b) \mathbf{U}^{n-1};$$

$$(3) \text{ Calcular: } \hat{\mathbf{B}}_u^n = \mathbf{M}^{-1} \left\{ \mathbf{F}_u^n + \hat{\mathbf{R}}^n \right\} \Delta t;$$

$$(4) \text{ Calcular: } \bar{\bar{\mathbf{U}}} = (g / (b \Delta t)) \bar{\mathbf{U}} - (1 / (b \Delta t)) \mathbf{U}^{n-1} + (1 - g / b) \mathfrak{U}^{n-1} + \hat{\mathbf{B}}_u^n;$$

$$(5) \text{ Calcular: } \bar{\mathfrak{U}} = (1 / (q \Delta t)) \left\{ \mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1} \right\} + ((q - 1) / q) \mathfrak{U}^{n-1};$$

$$(6) \text{ Calcular: } \bar{\mathbf{P}} = (1 / (q \Delta t)) \mathbf{P}^{n-1} - ((q - 1) / q) \mathfrak{P}^{n-1};$$

$$(7) \text{ Resolver: } \hat{\mathbf{A}}_p \mathbf{P}^n = \mathbf{S} \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{F}_p^n - \Theta^T \left\{ (j) \bar{\bar{\mathbf{U}}} + (1 - j) \bar{\mathfrak{U}} \right\};$$

$$(8) \text{ Calcular: } \hat{\mathbf{B}}_p^n = \mathbf{M}^{-1} \left\{ \Theta \mathbf{P}^n \right\} \Delta t;$$

$$(9) \text{ Calcular: } \mathfrak{U}^n = \bar{\bar{\mathbf{U}}} + \hat{\mathbf{B}}_p^n;$$

$$(10) \text{ Calcular: } \mathfrak{P}^n = (1 / (q \Delta t)) \mathbf{P}^n - \bar{\mathbf{P}}.$$

onde $\hat{\mathbf{R}}^n$ é o vetor de pseudo-forças e as matrizes efetivas $\hat{\mathbf{A}}_u$ e $\hat{\mathbf{A}}_p$ são dadas por:

$$\hat{\mathbf{A}}_u = \mathbf{K} + \mathbf{M} (1 / (b \Delta t^2)) \quad (4.111)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_p = \mathbf{H} + \mathbf{S} (1 / (q \Delta t)) + \mathbf{W} (j \Delta t) \quad (4.112)$$

Na solução do modelo poro-dinâmico por intermédio do método de Newmark / Newton-Raphson (equação (4.91)), um sistema acoplado de equações necessita ser resolvido a cada passo iterativo de análise. Conforme fora mencionado, o sistema de equações (4.91) é originalmente não-simétrico. Simetria, todavia, pode ser facilmente introduzida multiplicando-se algumas linhas do sistema de equações por constantes apropriadas. Contudo, assim o fazendo, o sistema de equações não mais permanece

positivo definido e alguns métodos clássicos de solução de sistemas de equações (e.g., método dos gradientes conjugados) não mais podem ser empregados para solução do sistema. Desta forma, para problemas de grande porte, o sistema de equações (4.91) pode ser computacionalmente muito oneroso. Mais ainda, quando as partículas sólidas e o fluido são incompressíveis e a permeabilidade do modelo é nula, procedimentos especiais devem ser considerados para se atender às condições de Babuska-Brezzi (BABUSKA, 1973; BREZZI, 1974) ou, de forma mais simples, o “patch test” de Zienkiewicz-Taylor (ZIENKIEWICZ *et al.*, 1986; ZIENKIEWICZ *et al.*, 1988), garantindo-se, desta forma, convergência e unicidade na solução.

O algoritmo de solução apresentado no presente subitem, por outro lado, resolve dois sistemas de equações (ambos simétricos e positivo definidos) separadamente a cada passo de tempo (considera-se que a matriz de massa possa ser considerada diagonal, tornando-se, desta forma, trivial o cálculo dos vetores efetivos \mathbf{B}^n nos passos 3 e 8 do algoritmo). Um dos sistemas em questão está relacionado à fase sólido (passo 1 do algoritmo proposto) e outro está relacionado à fase fluido (passo 7 do algoritmo proposto). Uma vez que estes dois sistemas de equações são menores e mais simples de se resolver, a presente formulação mostra-se bastante eficiente. Mais ainda, a análise de meios incompressíveis e impermeáveis pode ser diretamente considerada, sem nenhum tipo especial de adaptação.

A precisão da presente formulação também é boa, conforme se poderá notar nos exemplos que se apresentam ao final do capítulo. Para passos de tempo usuais em análises com elementos finitos, o nível de precisão das metodologias relativas aos subitens 4.2.3.1 e 4.2.3.2 é basicamente o mesmo, sendo a metodologia 4.2.3.2 mais sensível ao aumento do passo de tempo (em algumas aplicações, entretanto, conforme

se apresenta no próximo subitem, os resultados relativos à análise 4.2.3.2 podem ser considerados como sendo mais precisos). Para problemas mal condicionados, a presente formulação pode se tornar instável. Em relação ao parâmetro de ponderação j , o autor recomenda a seguinte atribuição: $j = 0.5$.

4.2.4. Solução com algoritmos iterativos de acoplamento

Nos subitens anteriores foram apresentadas diferentes metodologias para solução do problema poro-dinâmico por intermédio de elementos de contorno e de elementos finitos. Nenhuma das metodologias consideradas, todavia, faz uso de algum esquema iterativo de acoplamento da fase fluido com a fase sólido, para a solução do problema. O acoplamento iterativo em problemas poro-dinâmicos é usualmente instável não sendo usual a sua implementação.

Em elementos finitos, a menos que o problema seja muito bem condicionado, raramente se obtém convergência quando da adoção de esquemas iterativos de acoplamento. Pesquisas recentes têm desenvolvido algoritmos iterativos mais estáveis, podendo-se obter convergência para uma significativa gama de aplicações. O trabalho de LI *et al.* (2003), por exemplo, permite que se obtenha convergência sem que se adote discretização extremamente refinada ao modelo; a metodologia em questão, todavia, assume algumas relações ao longo da dedução do algoritmo que a tornam inapropriada para análises não-lineares.

Em elementos de contorno, pouca pesquisa há na área. Não é de conhecimento do autor nenhum trabalho no tópico considerando-se análise baseada em soluções fundamentais dinâmicas. Esquema iterativo de solução considerando-se análise baseada

em soluções fundamentais estáticas é implementado por CAVALCANTI & TELLES (2003), obtendo-se bons resultados. Todavia, a análise citada é linear e quase-estática.

Para análises poro-dinâmicas, como a apresentada no presente trabalho, o autor testou dois esquemas iterativos de solução considerando-se formulação de elementos de contorno baseada em soluções fundamentais estáticas. No primeiro esquema iterativo considerado, trabalha-se com tensões totais (diferentemente do que é apresentado no subitem 4.2.2.2, onde se trabalha com tensões efetivas), iterando-se em cada ponto nodal e a cada passo de tempo os valores das tensões totais e poro-pressões, até que se obtenha convergência (iteração entre equações análogas às (4.70)-(4.71), considerando-se tensões totais). Para problemas elásticos esta alternativa é viável, uma vez que as relações constitutivas são lineares, sendo indiferente a adoção de tensões totais ou efetivas como variável incógnita básica, quando da solução do problema. No segundo esquema iterativo considerado, adotam-se procedimentos de iteração entre tensões e poro-pressões análogos aos adotados pelo primeiro esquema iterativo discutido, sendo, contudo, tensões efetivas as variáveis incógnitas básicas (assim como apresentado no subitem 4.2.2.2).

Para o esquema iterativo baseado em tensões totais, o autor obteve convergência em todas as aplicações nas quais a metodologia foi testada. Contudo, a convergência é extremamente lenta, sendo necessária, em algumas aplicações, uma média de centenas de iterações por passo de tempo. Considerando-se o segundo esquema iterativo em questão (tensões efetivas), a convergência é rápida; todavia, assim como ocorre com elementos finitos, consegue-se obtê-la em poucas aplicações. Ressalta-se que o esquema iterativo adotado por CAVALCANTI & TELLES (2003) é baseado em tensões totais.

Desta forma, em função dos inúmeros problemas relacionados a algoritmos iterativos de acoplamento em problemas poro-dinâmicos, este tipo de abordagem não recebe aqui destacada atenção.

4.3. Aplicações numéricas

Considera-se, no presente subitem, alguns exemplos de aplicação das metodologias de elementos de contorno e de elementos finitos apresentadas neste capítulo. Para se facilitar a nomenclatura nos exemplos que se seguem, as seguintes abreviações são aqui consideradas:

MEC1: análise relativa à metodologia apresentada no subitem 4.2.2.1;

MEC2: análise relativa à metodologia apresentada no subitem 4.2.2.2;

MEF1: análise relativa à metodologia apresentada no subitem 4.2.3.1;

MEF2: análise relativa à metodologia apresentada no subitem 4.2.3.2.

Nas aplicações apresentadas a seguir, as metodologias MEC2 e MEF2 são enfocadas, sendo estas contribuições originais do presente trabalho.

4.3.1. Colunas de solo

Neste exemplo estuda-se uma coluna de solo, conforme esquematizado na Figura 4.1(a). Todas as metodologias de solução consideradas neste capítulo são empregadas para a análise do modelo proposto. As malhas de elementos finitos, elementos de contorno e células de integração adotadas são apresentadas na Figura 4.1(b).

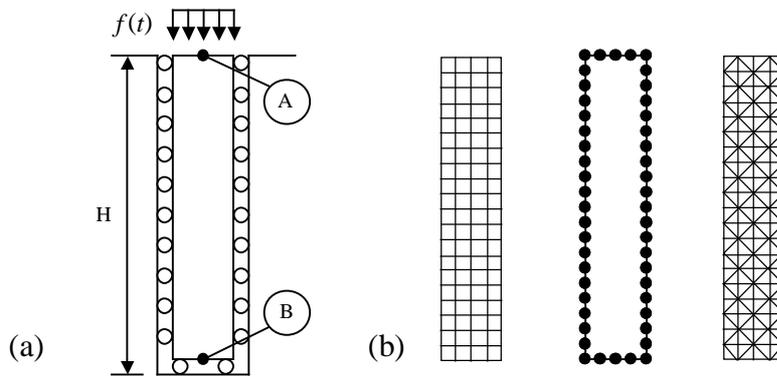


Figura 4.1 – Coluna de solo: (a) modelo esquemático; (b) malhas adotadas (elementos finitos; elementos de contorno; células de integração).

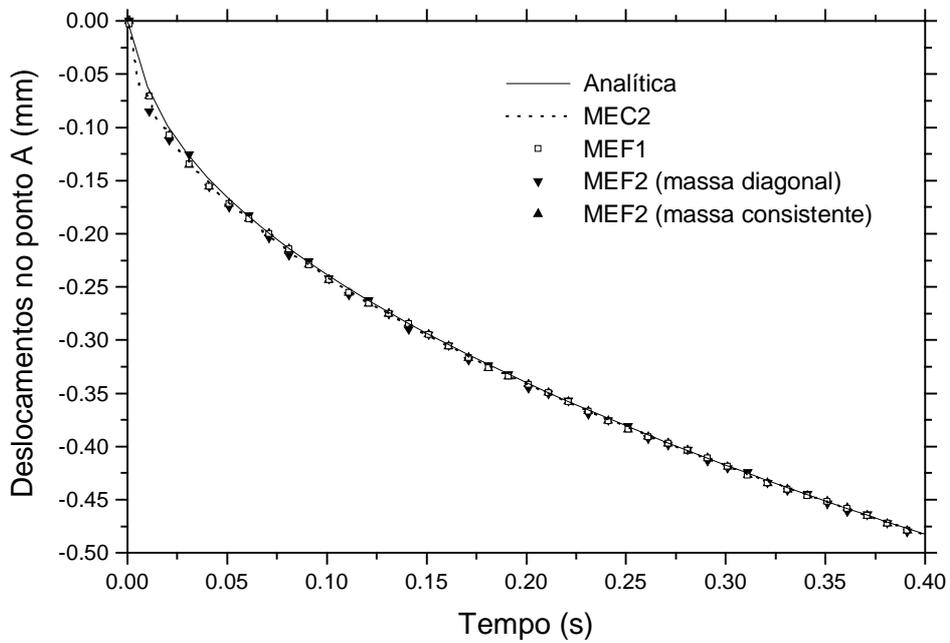


Figura 4.2 – Deslocamentos no ponto A do modelo 1 considerando-se análise com elementos de contorno e com elementos finitos.

Considera-se a superfície superior da coluna em questão como sendo drenada e sujeita a condição de contorno nula de poro-pressão. As demais superfícies do modelo são consideradas não drenadas. Carregamento do tipo Heaviside no tempo é uniformemente aplicado ao longo da borda superior da coluna, conforme indicado na Figura 4.1(a).

Dois tipos de solo e amplitudes de carregamento são aqui considerados, conforme se especifica a seguir:

(i) *Modelo 1* (DE BOER *et al.*, 1993): Neste modelo o carregamento tem amplitude $3kN/m^2$. As propriedades do solo são: $\nu = 0.3$ (Poisson); $E = 14515880N/m^2$ (Módulo de Young); $\rho_s = 2000kg/m^3$ (massa específica - fase sólido); $\rho_f = 1000kg/m^3$ (massa específica - fase fluido); $n = 0.33$ (porosidade); $k = 10^{-6} m^4/Ns$ (permeabilidade). O solo é considerado incompressível;

(ii) *Modelo 2* (SCHANZ & CHENG, 2000): Neste modelo o carregamento tem amplitude $1kN/m^2$. As propriedades do solo são: $\nu = 0.2981$ (Poisson); $E = 254423077N/m^2$ (Módulo de Young); $\rho_s = 2700kg/m^3$ (massa específica - fase sólido); $\rho_f = 1000kg/m^3$ (massa específica - fase fluido); $n = 0.48$ (porosidade); $k = 3.55 \cdot 10^{-9} m^4/Ns$ (permeabilidade). O solo é considerado compressível, sendo os módulos de compressibilidade dados por: $K_s = 1.1 \cdot 10^{10}N/m^2$ (fase sólido); $K_f = 3.3 \cdot 10^9N/m^2$ (fase fluido).

Resultados relativos ao Modelo 1 são apresentados na Figura 4.2. Nas Figuras 4.3 e 4.4 apresentam-se resultados relativos ao Modelo 2. Os deslocamentos verticais no ponto A do modelo, apresentados na Figura 4.2, são obtidos adotando-se passo de

tempo $\Delta t = 10^{-3} s$ ($b \approx 0.2$) em todas as análises consideradas. Para o caso MEF2, duas análises são realizadas, uma considerando matriz de massa diagonal e outra considerando matriz de massa consistente. Conforme se pode notar, os resultados apresentados mostram boa concordância entre si, bem como com a solução analítica para o modelo em questão (DE BOER *et al.*, 1993; DE BOER, 1998) e com resultados numéricos obtidos por outros autores (e.g., DIEBELS & EHLERS (1996)).

Para a análise do Modelo 2 o passo de tempo considerado é $\Delta t = 10^{-4} s$ (a malha de elementos de contorno e de células de integração relativa a MEC2 é refinada, de forma a se manter a relação $b \approx 0.2$). Os resultados para os deslocamentos no ponto A do modelo são apresentados na Figura 4.3, tanto para solução com elementos de contorno (Figura 4.3(a)), quanto para solução com elementos finitos (Figura 4.3(b)). Na Figura 4.4 são apresentados resultados relativos à poro-pressão no ponto B do modelo ($H = 10m$). Mais uma vez, conforme se nota nas Figuras 4.3 e 4.4, os resultados relativos às diferentes metodologias de análise apresentam boa concordância entre si, bem como com a solução analítica para o modelo em questão (as respostas relativas ao método semi-analítico de DUBNER & ABATE (1968), são aqui consideradas como a solução analítica do modelo) e com resultados numéricos obtidos por outros autores (e.g., SCHANZ & CHENG (2000)). Na Figura 4.4(a) pode-se observar oscilações típicas do método de elementos de contorno, quando do cálculo das poro-pressões do modelo. Tais oscilações também estão presentes nas soluções com elementos finitos (Figura 4.4(b)), sendo, contudo, amortecidas ao longo do tempo. O resultado de poro-pressão que mais se aproxima da solução analítica é aqui obtido com a metodologia MEF2.

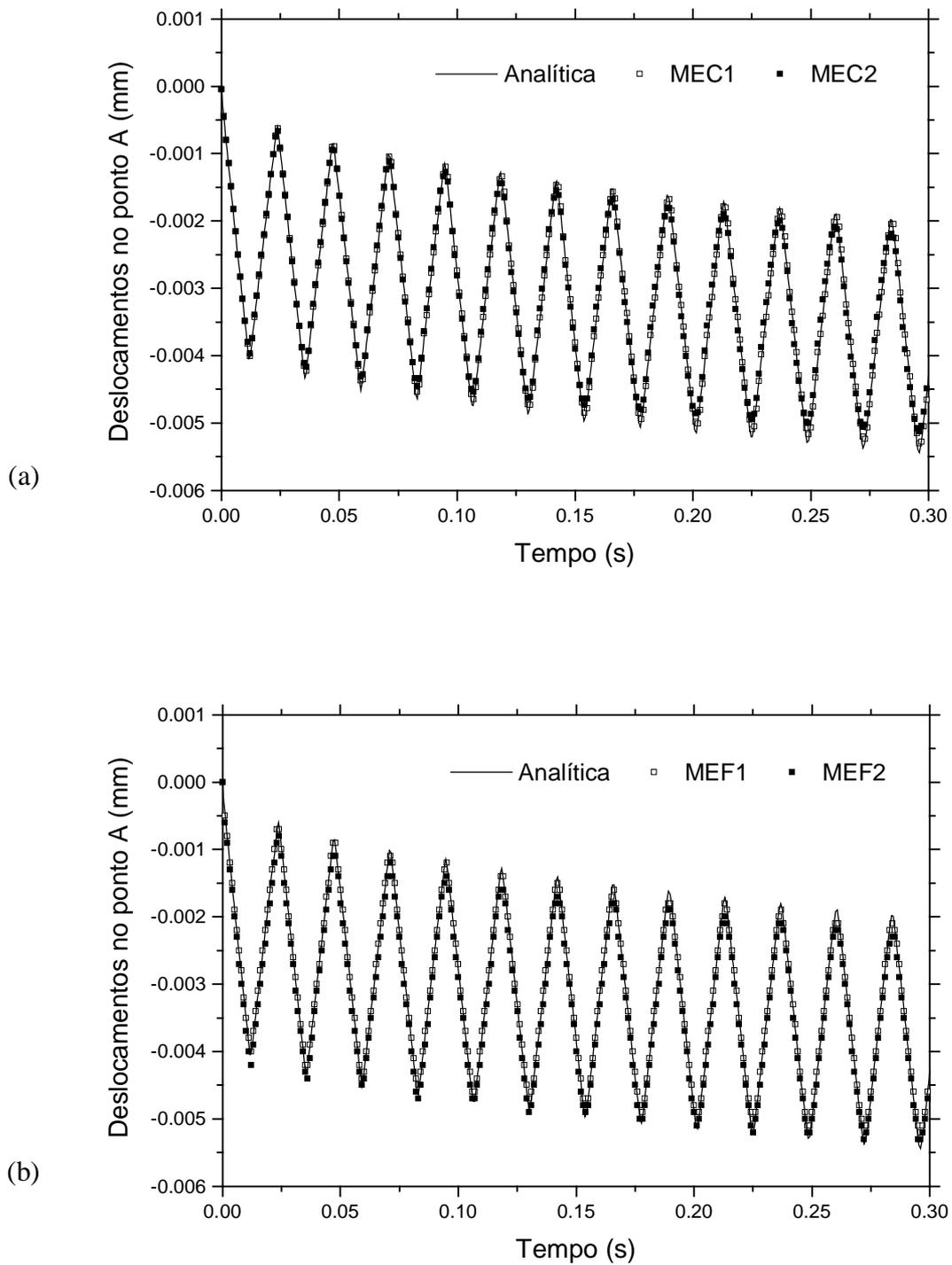


Figura 4.3 – Deslocamentos no ponto A do modelo 2: (a) análise com elementos de contorno; (b) análise com elementos finitos.

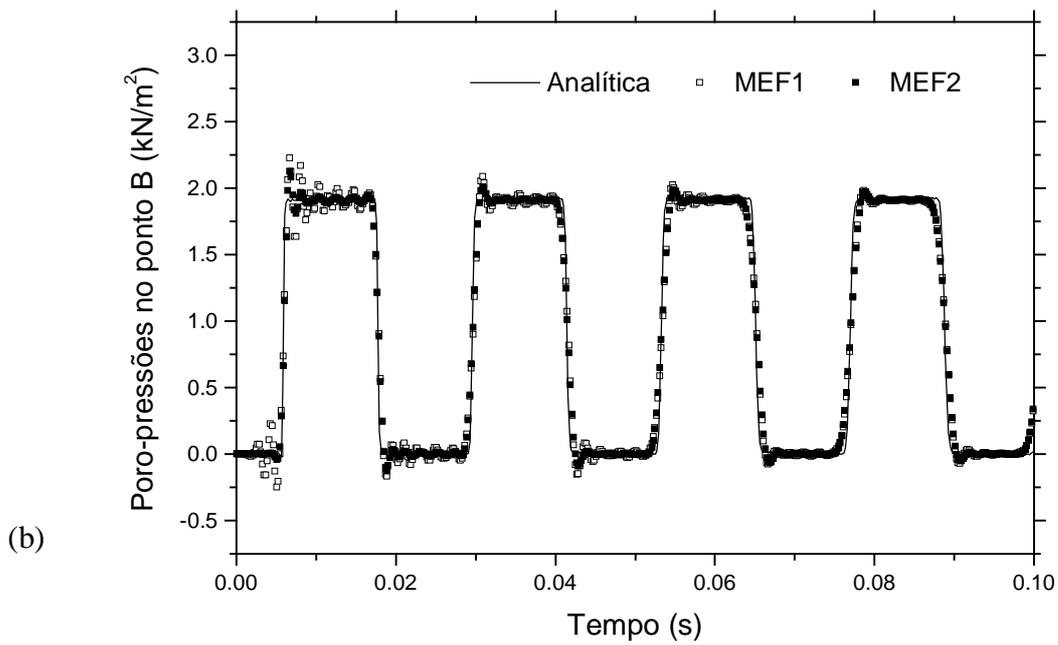
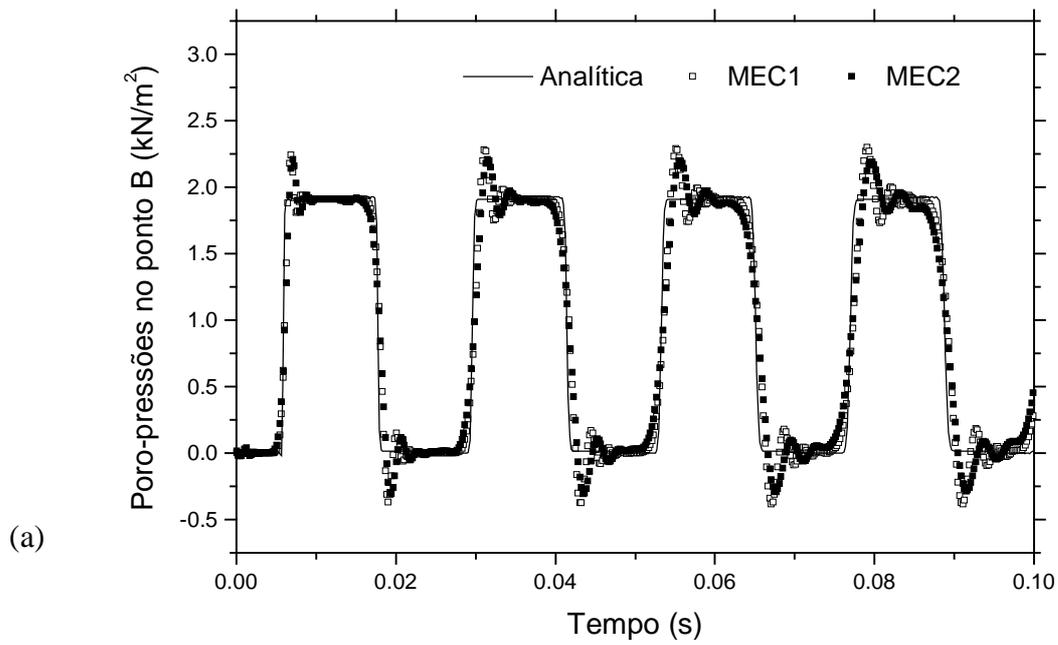


Figura 4.4 – Poropressões no ponto B do modelo 2: (a) análise com elementos de contorno; (b) análise com elementos finitos.

4.3.2. Fundação tipo sapata

Neste exemplo estuda-se a influência de uma fundação superficial (sapata) no solo circundante. Um modelo esquemático do problema em consideração é apresentado na Figura 4.5(a). Três diferentes modelos são aqui abordados para a análise em questão. As malhas (elementos finitos, elementos de contorno, células de integração) adotadas para a solução dos diferentes modelos considerados são apresentadas na Figura 4.5(b) (faz-se uso da simetria do modelo quando da análise numérica). 100 elementos finitos quadrangulares lineares; 40 elementos lineares de contorno e 200 células de integração, triangulares lineares, são adotados, tanto para a modelagem da fase sólido, quanto para a modelagem da fase fluido.

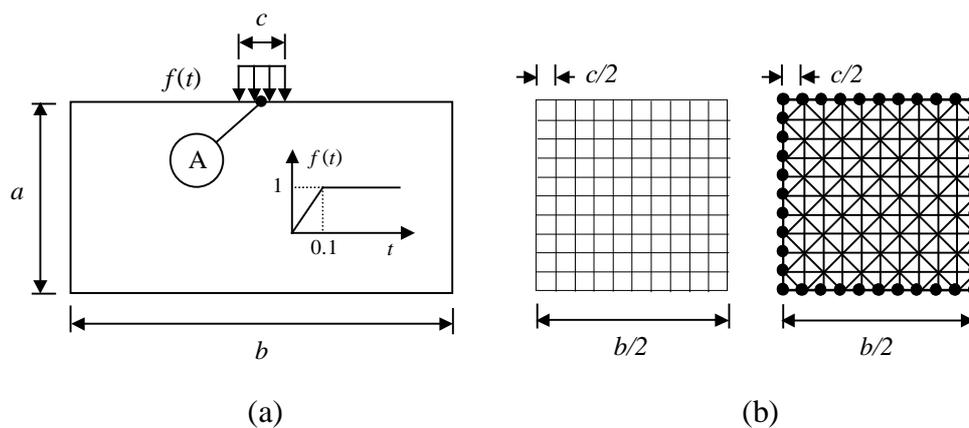


Figura 4.5 – Sapata: (a) modelo esquemático; (b) malhas adotadas (elementos finitos; elementos de contorno e células de integração).

Os modelos aqui analisados são especificados a seguir:

(i) *Modelo 1* (LI *et al.*, 2003): A superfície superior do modelo é considerada drenada, com condição de contorno nula de poro-pressão; as demais superfícies do modelo são consideradas não drenadas. As propriedades do solo são: $\nu = 0.2$ (Poisson); $E = 10^7 N/m^2$ (Módulo de Young); $\rho_s = 2538.5 kg/m^3$ (massa específica - fase sólido); $\rho_f = 1000 kg/m^3$ (massa específica - fase fluido); $n = 0.35$ (porosidade). O solo é considerado impermeável e incompressível;

(ii) *Modelo 2*: Semelhante ao modelo 1, sendo o solo considerado permeável e compressível. O coeficiente de permeabilidade é dado por: $k = 3.55 \cdot 10^{-9} m^4/Ns$, sendo os módulos de compressibilidade dados por: $K_s = \infty$ (fase sólido) e $K_f = 3.3 \cdot 10^9 N/m^2$ (fase fluido). Análise elastoplástica é considerada, sendo o critério de Mohr-Coulomb adotado, onde: $c = 2.0 \cdot 10^2 N/m^2$ (coesão) e $f = 10^\circ$ (ângulo de atrito interno);

(iii) *Modelo 3*: Semelhante ao Modelo 2, sendo a superfície abaixo do carregamento aplicado considerada como não drenada.

Resultados para o ponto A do modelo são apresentados na Figura 4.6. Na Figura 4.6(a) apresentam-se os deslocamentos verticais obtidos com MEF2, considerando-se o Modelo 1. Como o problema em questão é incompressível e impermeável, a formulação poro-dinâmica tradicional de elementos finitos (MEF1) apresenta dificuldades de solução a menos que procedimentos especiais sejam considerados (e.g., utilização de malhas mais ricas na modelagem da fase sólido em relação às malhas adotadas para modelagem da fase fluido). Desta forma, os resultados obtidos com MEF2 são aqui comparados com resultados relativos ao método de análise proposto por LI *et al.* (2003):

“iterative stabilized fractional step algorithm”. O passo de tempo considerado para análise em questão é dado por: $\Delta t = 10^{-3}s$ ($\Delta t = 10^{-3}s$ é adotado para todos os tipos de modelos considerando-se MEF; considerando-se MEC, $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}s$ é adotado). É importante ressaltar que muitos algoritmos de solução são instáveis quando da solução do modelo com a discretização adotada, e.g., PASTOR *et al.* (2000).

Na Figura 4.6(b) o Modelo 2 é considerado. Resultados obtidos por MEF1 e MEF2 são apresentados, tanto para análise linear, quanto para análise não-linear. Na Figura 4.6(c) apresentam-se os resultados relativos ao Modelo 3, considerando-se MEF1 e MEC2. Conforme se nota na Figura 4.6, os resultados relativos às diferentes metodologias apresentam boa concordância entre si, tendo-se em consideração todos os modelos abordados.

Na Figura 4.7 apresenta-se a evolução das poro-pressões do Modelo 1 ao longo do tempo e da malha MEF2. Na Figura 4.8 as poro-pressões relativas ao Modelo 2 para o passo de tempo $t = 0.4s$ são apresentadas ao longo da malha MEF2, considerando-se análise elástica e elastoplástica. Analogamente, na Figura 4.9 as poro-pressões relativas ao Modelo 3 para o passo de tempo $t = 0.4s$ são apresentadas ao longo da malha MEC2, também considerando análise elástica e elastoplástica. Conforme se pode notar, uma vez que a permeabilidade do Modelo 1 é nula, as poro-pressões que se obtém são bem maiores que as dos demais modelos, já que não há dissipação do fluido. As poro-pressões relativas ao Modelo 3 também são maiores do que as relativas ao Modelo 2, uma vez que no terceiro modelo o fluxo do fluido é impedido na superfície de contato da sapata com o solo.

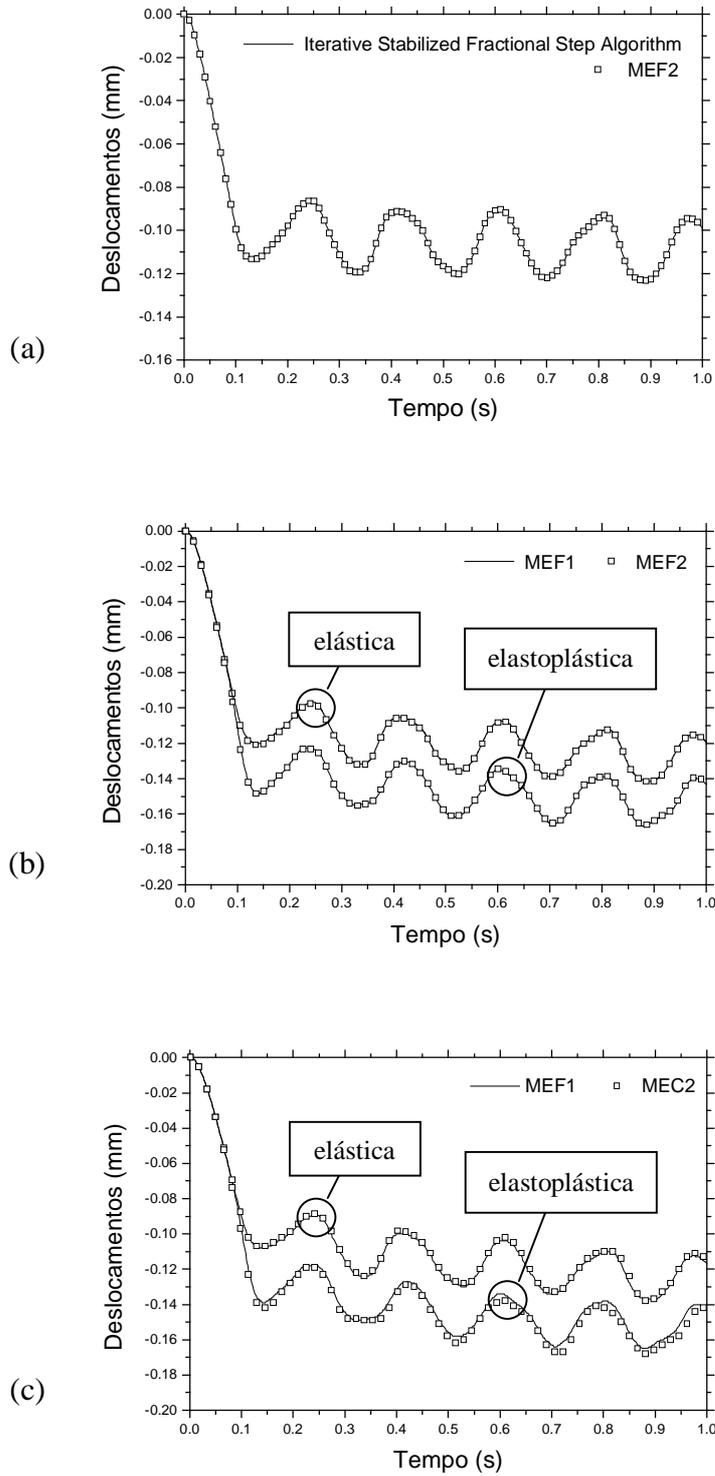


Figura 4.6 – Deslocamentos verticais no ponto A (análise linear e não-linear):

(a) modelo 1; (b) modelo 2; (c) modelo 3.

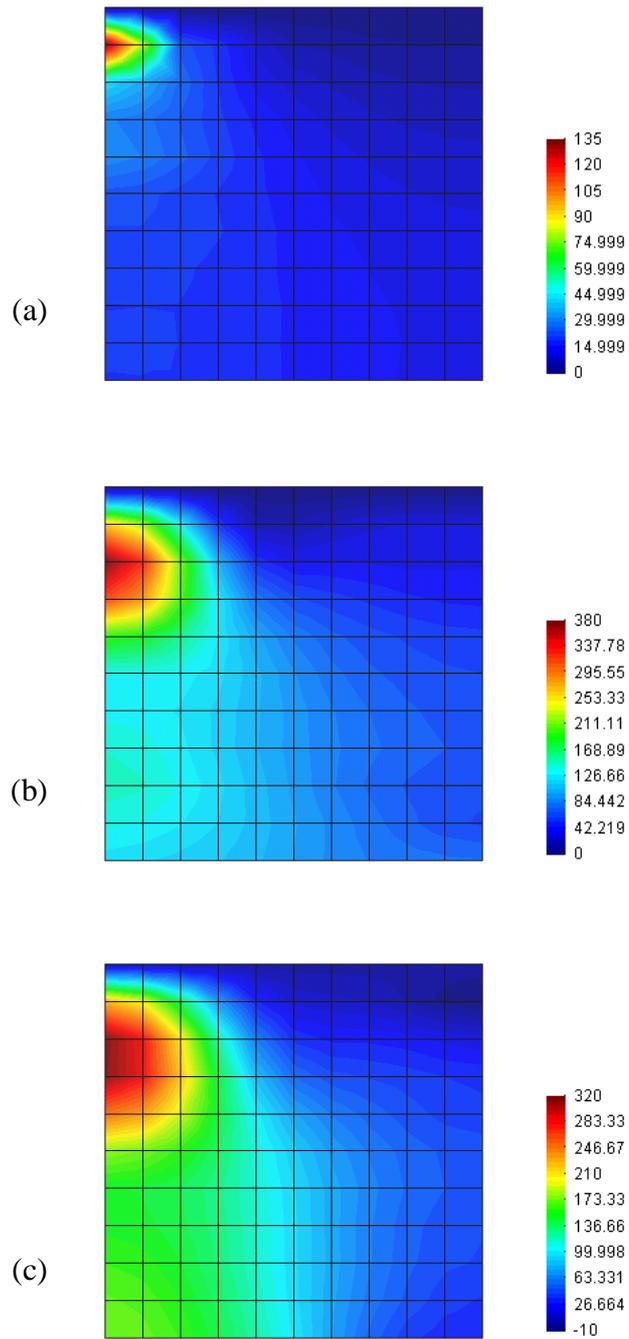


Figura 4.7 – Poro-pressões ao longo do tempo e da malha MEF2 para o modelo 1:
 (a) $t = 0.02s$; (b) $t = 0.40s$; (c) $t = 0.86s$.

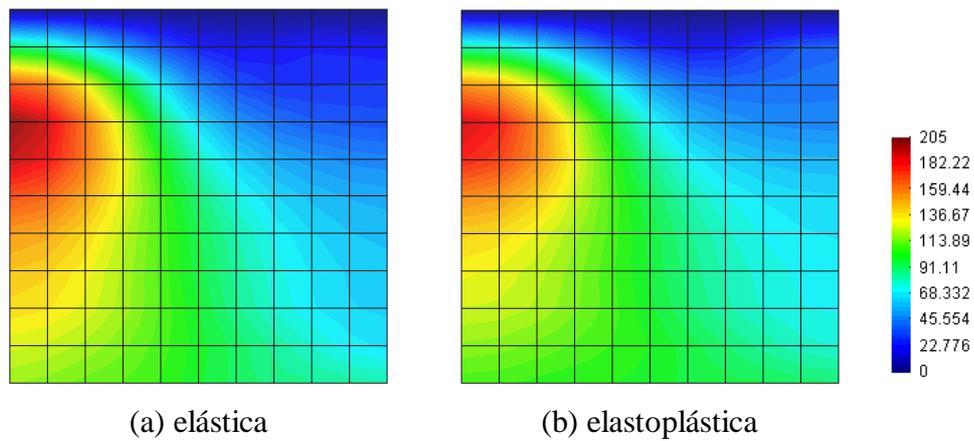


Figura 4.8 – Poro-pressões ao longo da malha MEF2 ($t = 0.40s$) para o modelo 2, considerando-se: (a) análise elástica; (b) análise elastoplástica.

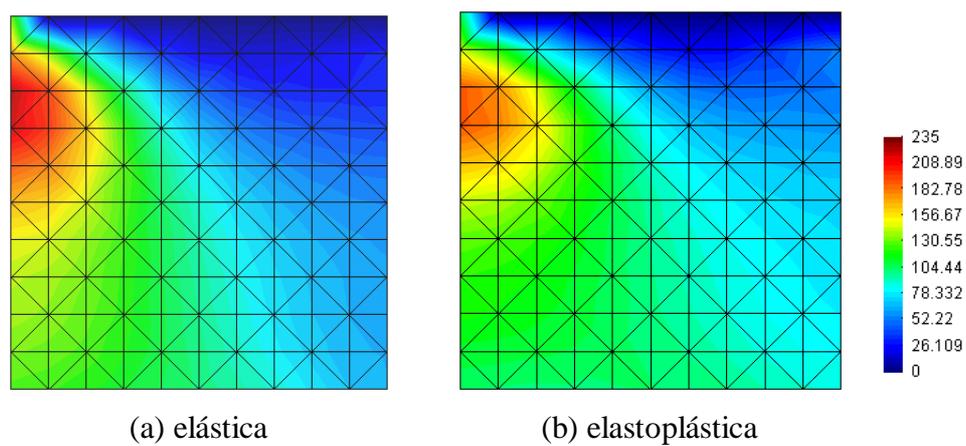


Figura 4.9 – Poro-pressões ao longo da malha MEC2 ($t = 0.40s$) para o modelo 3, considerando-se: (a) análise elástica; (b) análise elastoplástica.

4.3.3. Solo estratificado

Considera-se aqui uma coluna de solo composta por dois estratos com propriedades físicas distintas. Enquanto um dos estratos é poroso e impregnado por fluido (meio poro-elastodinâmico saturado), o segundo estrato pode ser considerado vedado e solidamente maciço (meio elastodinâmico). Estuda-se, desta forma, um problema de acoplamento de domínio-interface. O primeiro estrato aqui especificado (meio poroso) é modelado por elementos finitos, seguindo a formulação apresentada no subitem 4.2.3.1. O segundo estrato (meio sólido) é modelado por elementos de contorno, seguindo a formulação apresentada no subitem 2.3.2.1. O acoplamento MEC-MEF em consideração é realizado por intermédio de técnicas iterativas de acoplamento, conforme discutido no subitem 3.2.1.2, sendo as condições de interface, aqui adotadas, dadas por: condições de equilíbrio e continuidade, conforme especificado pelas equações (3.1), associadas a fluxo nulo (fase fluido) entre as duas camadas de solo. Um modelo esquemático do problema em consideração é apresentado na Figura 4.10, bem como as malhas adotadas para a análise acoplada MEC-MEF.

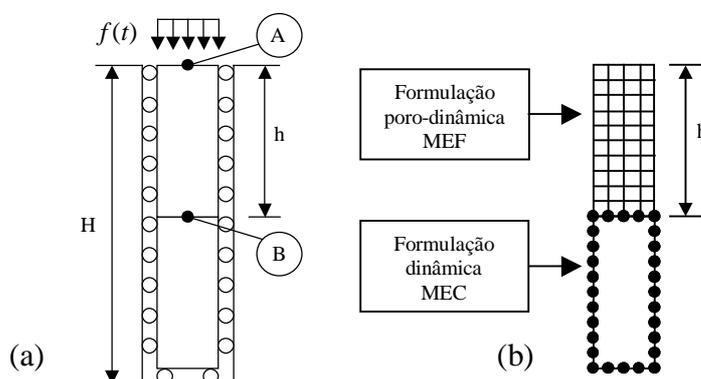


Figura 4.10 – Solo estratificado: (a) modelo esquemático; (b) malha adotada.

As propriedades relativas ao solo em questão são dadas por: para a camada de solo no topo da coluna tem-se $u = 0$ (Poisson); $E = 2 \cdot 10^7 N/m^2$ (Módulo de Young); $r_s = 1340 kg/m^3$ (massa específica - fase sólido); $r_f = 330 kg/m^3$ (massa específica - fase fluido); $n = 0.33$ (porosidade); $k = 10^{-6} m^4/Ns$ (permeabilidade). Para a camada de solo na base da coluna, as mesmas propriedades adotadas para a fase sólido, acima descritas, são consideradas. O carregamento em questão é do tipo Heaviside no tempo, uniformemente distribuído ao longo da superfície superior da coluna (superfície drenada).

Resultados para os deslocamentos verticais nos pontos A e B do modelo são apresentados na Figura 4.11 em função da altura h , altura esta que especifica a posição da interface de acoplamento ($H = 10m$). Para o subdomínio modelado por elementos de contorno o passo de tempo adotado é ${}_c\Delta t = 4 \cdot 10^{-3} s$ ($b \approx 1$). Para o subdomínio de modelagem associada a elementos finitos o passo de tempo empregado é ${}_f\Delta t = 10^{-3} s$.

Conforme se nota na Figura 4.11, os resultados relativos a $h = H/2$ são, em muitos aspectos, intermediários aos resultados relativos a $h = 0$ e $h = H$. Analisando-se a Figura 4.11(b), percebe-se que, ao contrário do que ocorre quando $h = 0$ ou $h = H/2$, já nos primeiros passos de tempo pode-se observar deslocamentos no ponto B da interface. Esse fato é esperado, uma vez que conforme é especificado pela teoria de Terzaghi (TERZAGHI, 1923), inicialmente todo o carregamento aplicado é absorvido pelo fluido (poro-pressões na camada de solo do topo), sendo transmitido ao esqueleto sólido (tensões efetivas) ao longo do tempo, com o escoamento da fase fluido. Desta forma, a camada de solo da base da coluna está sob direta influência de pressões desde os primeiros passos de tempo de análise. Assim sendo, o ponto B do modelo acoplado ($h = H/2$) possui algumas características análogas às do ponto A do modelo quando $h = 0$.

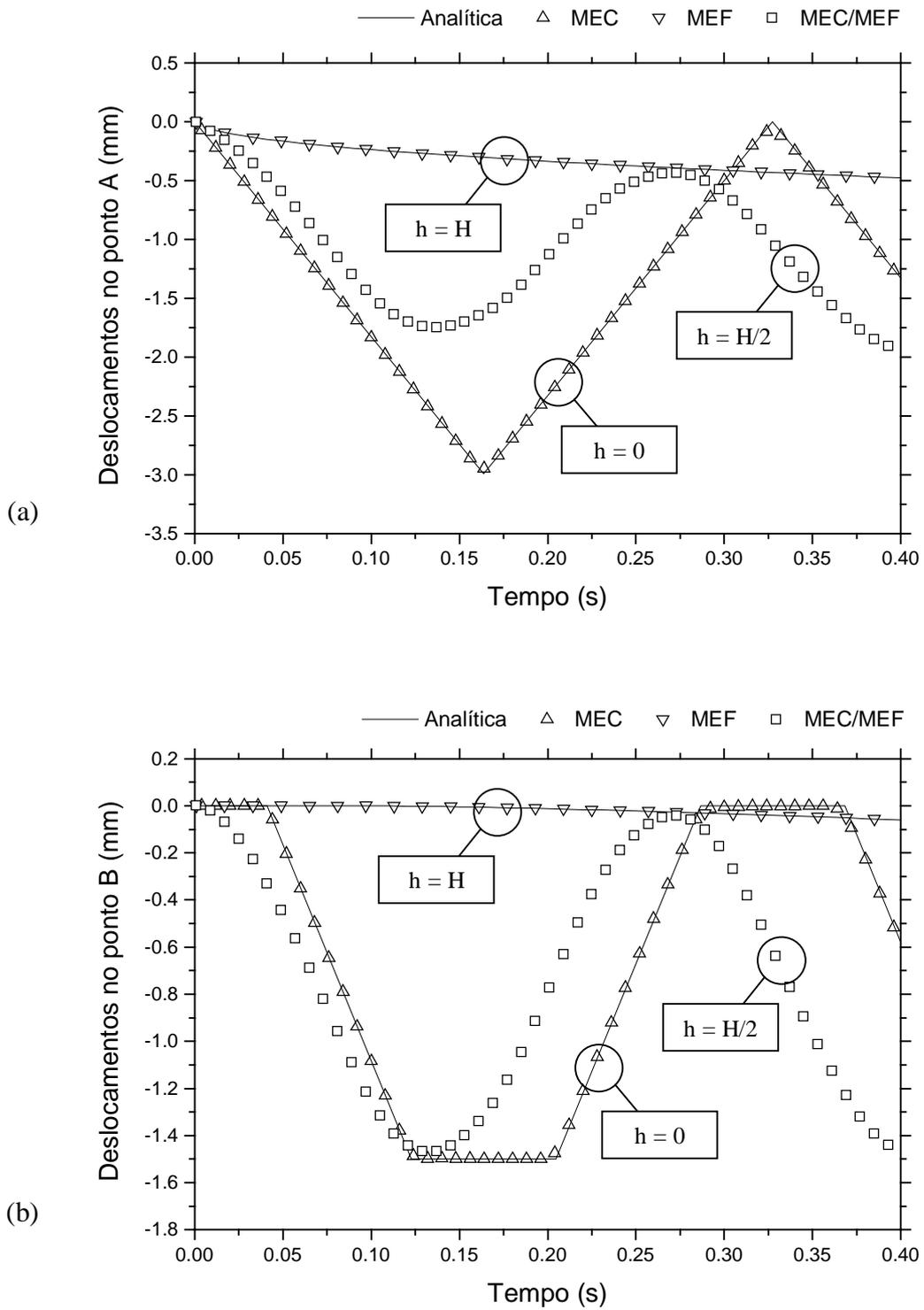


Figura 4.11 – Deslocamentos no modelo considerando-se diferentes valores para altura da interface h ($h = 0$; $h = H/2$; $h = H$): (a) ponto A; (b) ponto B.

O presente exemplo aborda um amplo campo de aplicações: análises acopladas de domínio-interface. As formulações apresentadas no segundo capítulo podem ser acopladas com as formulações abordadas neste capítulo, sob diferentes enfoques de acoplamento (assim como fora discutido no terceiro capítulo), dando margem a variadas metodologias e obtendo-se poderosas ferramentas para análise de problemas de interação do tipo solo-fluido-estrutura. Ainda sob o enfoque de acoplamentos de domínio-interface, as metodologias apresentadas no presente capítulo considerando-se elementos de contorno e elementos finitos podem ser acopladas, permitindo análises mais apropriadas de modelos complexos (e.g., análise de meios “infinitos” com não-linearidades associadas, muito usuais quando se considera o estudo de solos). O campo de estudo em questão é muito vasto e rico: o avanço da pesquisa na área é sugestão para futuros trabalhos.

5

Conclusões

5.1. Considerações gerais

O presente trabalho teve como tema de estudo a simulação computacional de sistemas acoplados, considerando-se modelagem numérica por intermédio de elementos finitos e de contorno. Especial enfoque foi dedicado a acoplamentos de interface do tipo solo-fluido-estrutura, considerando-se interação MEC-MEF (bem como MEC-MEC) e a acoplamentos de domínio do tipo sólido-poro fluido (solos saturados). Diversos algoritmos originais de solução foram apresentados ao longo do texto e uma grande gama de exemplos numéricos foi considerada, ilustrando a viabilidade dos algoritmos propostos. Boa precisão foi obtida em todos os exemplos abordados, tendo sido a eficiência computacional relativa a algumas das novas metodologias propostas destacada.

Com relação aos novos procedimentos de acoplamento MEC-MEF (bem como MEC-MEC) considerados, i.e., acoplamento iterativo e acoplamento direto, os resultados que se obtém são bastante promissores. A formulação iterativa de acoplamento MEC-MEF aqui apresentada se mostra eficiente, genérica, versátil, estável e precisa. O autor é de opinião que esta formulação é superior à formulação clássica (acoplamento padrão) em todos os sentidos, sendo inclusive mais fácil de se implementar computacionalmente. O acoplamento iterativo MEC-MEF é destacado como uma importante contribuição da presente pesquisa à literatura.

O acoplamento direto MEC-MEF tem aplicabilidade mais restrita, quando comparado ao acoplamento iterativo; todavia, o ganho computacional proporcionado pelo mesmo é ainda mais acentuado. Para modelos bem condicionados, o acoplamento direto se mostra estável e com boa precisão. Uma vez que com as técnicas de

modelagem aqui consideradas (e.g., interpolações/extrapolações no tempo e espaço), bom condicionamento pode ser facilmente alcançado, o acoplamento direto, por este trabalho proposto, possui ampla gama de aplicação, sendo também mais versátil que a forma clássica de acoplamento MEC-MEF (acoplamento padrão).

Em acoplamentos MEC-MEF, resultados mais eficientes são obtidos considerando-se esquemas apropriados para truncamento do processo de convolução de elementos de contorno. A formulação de truncamento aqui apresentada se mostrou eficaz neste sentido, proporcionando considerável ganho computacional sem introduzir significativa perda de precisão às análises realizadas (o nível de erro que se introduz é controlável por parâmetros de entrada).

Com relação à análise poro-dinâmica saturada, discutida no quarto capítulo, duas metodologias originais foram apresentadas: uma relativa à modelagem por intermédio de elementos de contorno; outra relativa à modelagem por elementos finitos.

Adotando-se o método implícito de Green para solução no tempo das equações de movimento discretizadas por elementos finitos, pôde-se desacoplar de forma eficiente a fase fluido da fase sólido no modelo poro-dinâmico. Desta forma, um algoritmo atraente de solução pôde ser obtido. Embora tal algoritmo seja de aplicabilidade mais restrita, quando comparado ao algoritmo clássico de solução, o mesmo se faz de relevância em virtude da elevada eficiência computacional e da boa precisão correlacionada.

No caso da análise poro-dinâmica por elementos de contorno, o uso de formulação mista (formulação no domínio do tempo e em domínio transformado) pôde ser aqui evitado, uma vez que se adotou soluções fundamentais não-transientes na análise. A formulação desenvolvida, embora eficiente quando da solução passo a passo no tempo,

possui a limitação de necessitar que integrais de domínio sejam consideradas, não estando desta forma o problema exclusivamente definido por variáveis de contorno. Tal limitação, contudo, pode ser contornada acoplando-se os procedimentos de solução baseados em soluções fundamentais estáticas e dinâmicas, apresentados no quarto capítulo, empregando-se as técnicas de acoplamento discutidas ao longo do terceiro capítulo. Assim sendo, a análise de problemas complexos (e.g., modelos não lineares e com dimensões “infinitas”) torna-se viável, limitando-se o uso de integrais de domínio às regiões não lineares do modelo (de forma análoga, acoplamento MEC-MEF pode evidentemente ser considerado).

Na verdade, a discussão acima é relativa a toda uma nova série de possíveis implementações e aplicações, onde modelos dinâmicos não lineares relativos a problemas de interação do tipo solo-fluido-estrutura são considerados, sendo o solo em questão modelado à luz da teoria poro-dinâmica.

Problemas de acoplamento de domínio-interface, como o acima descrito, representam um rico e amplo campo de pesquisa. No presente trabalho, tal campo de análise é modestamente abordado na solução do último exemplo do quarto capítulo. O autor deixa a cargo de futuras realizações o avanço de pesquisas na área.

5.2. Sugestões para desenvolvimentos futuros

Além do amplo campo de análise relativo ao estudo de sistemas com acoplamento de domínio-interface, os seguintes tópicos, mais específicos, são aqui propostos como sugestão para desenvolvimentos futuros:

(1) Consideração de diferentes procedimentos de interpolação relacionados à evolução no tempo das matrizes de influência, quando da consideração do truncamento do processo de convolução de elementos de contorno;

(2) Extensão dos procedimentos de truncamento da convolução ao método de Lubich, proporcionando maior eficiência a tal metodologia;

(3) Adoção de técnicas “multi-step” para o cálculo das matrizes de Green, quando da análise por elementos finitos empregando-se o método implícito de Green, conferindo à metodologia melhor precisão;

(4) Estudo relativo ao uso de diferentes metodologias numéricas, além do método de Newmark, para o cálculo implícito das matrizes de Green, bem como de diferentes técnicas numéricas para a aproximação das integrais de convolução da formulação;

(5) Extrapolação dos conceitos abordados, relativos a análises acopladas, para problemas tridimensionais, bem como para análises adotando funções de interpolação (tanto com relação ao MEF como com relação ao MEC) diferentes das aqui consideradas;

(6) Consideração de diferentes procedimentos de integração no tempo, quando da análise dinâmica e/ou poro-dinâmica não-linear, por intermédio de formulação de elementos de contorno baseada em soluções fundamentais estáticas;

(7) Substituição de procedimentos baseados em células de integração por procedimentos relativos a dupla-reciprocidade quando de análises acopladas com MEC (tanto em acoplamentos de interface, quanto em acoplamentos de domínio);

(8) Consideração de acoplamento térmico quando da análise poro-dinâmica com elementos de contorno, bem como de uma série de outras possíveis variantes, relativas a modelos mais complexos; etc.

Uma ampla gama de atividades e de possíveis desenvolvimentos futuros pode ser enumerada, tendo-se como base alguns dos aspectos iniciais aqui apresentados. O tópico de estudo abordado é amplo e extenso, dando margem a inúmeros e contínuos aprimoramentos.

6

Referências bibliográficas

- ABOUSEEDA, H., DAKOULAS, P., 1998, "Non-linear dynamic earth dam-foundation interaction using BE-FE method". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 27, pp. 917-936.
- ABREU, A.I., CARRER, J.A.M., MANSUR, W.J., 2003, "Scalar wave propagation in 2D: a BEM formulation based on the operational quadrature method". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27, pp. 101-105.
- ACHENBACH, J.D., 1973, *Wave propagation in elastic solids*. Amsterdam and London, North-Holland Publishing Company.
- ADAM, M., 1997, *Nonlinear seismic analysis of irregular sites and underground structures by coupling BEM to FEM*. Ph.D. Thesis, Okayama University, Japan.
- ADAM, M., PFLANZ, G., SCHMID, G., 2000, "Two- and Three-dimensional modelling of half-space and train-track embankment under dynamic loading". *Soil Dyn. Earthqu. Engng.*, 19, pp. 559-573.
- AMINI, S., HARRIS, P.J., WILTON, D.T., 1992, *Coupled boundary and finite element methods for the solution of the dynamic fluid-structure interaction problem*. Berlin, Springer-Verlag.
- ARAUJO, F.C., 1994, *Zeitbereichslösung linearer dreidimensionaler probleme der elastodynamik mit einer gekoppelten BE/FE-Methode*. Ph.D Thesis, Technische Universität Braunschweig, Braunschweig, German.
- ARGYRIS, J., SCHARPF, D.W., 1969, "Finite elements in time and space". *Nuclear Engineering Design*, 10, pp. 456-464.
- BABUSKA, I., 1973, "The finite element method with Lagrange multiplier". *Numer. Math.*, 20, pp. 179-192.
- BACHELOR, G.K., 1967, *An introduction to fluid mechanics*. Cambridge, Cambridge Univ. Press.

BANERJEE, P.K., BUTTERFIELD, R., 1981, *Boundary element methods in engineering science*. London, McGraw-Hill.

BATHE, K.J., 1996, *Finite element procedures*. New Jersey, Prentice-Hall.

BEER, G., MEEK, J.L., 1981, "The coupling of boundary and finite element methods for infinite domain problems in elasto-plasticity. In: *Proceedings of the International Conference on Boundary Element Methods III*, Irvine, CA., pp. 575-591.

BEER, G, SWOBODA, G., 1987, "Application of advanced boundary element and coupled methods in geomechanics". In: *Proceedings of the Symposium on Advanced BEM*, San Antonio, TX.

BELYTSCHKO, T., LIU, W.K., MORAN, B., 2000, *Nonlinear finite elements for continua & structures*. New York, J. Wiley & Sons.

BELYTSCHKO, T., LU, Y.Y., 1991, "Singular integration in variationally coupled FE-BE method". *Journal of Engineering Mechanics*, 117, pp. 820-835.

BELYTSCHKO, T., LU, Y.Y., 1994, "A variational coupled FE-BE method for transient problems". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, pp. 91-105.

BELYTSCHKO, T., MULLEN, R., 1976, "Mesh partitions of explicit-implicit time integration". In: *Formulation and computational algorithms in finite element analysis*, eds. Bathe, K.J., Oden, J.T., Wunderlich W., Cambridge, MIT Press, pp. 673-690.

BELYTSCHKO, T., MULLEN, R., 1978, "Stability of explicit-implicit mesh partitions in time integration". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12, pp. 1575-1586.

- BELYTSCHKO, T., YEN, T., MULLEN, R., 1979, "Mixed methods for time integration". *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17/18, pp. 259-275.
- BESKOS, D.E., 1987, "Boundary element methods in dynamic analysis". *App. Mech. Rev.*, 40, pp. 1-23.
- BESKOS, D.E., 1997, "Boundary element methods in dynamic analysis. Part II (1986-1996)". *App. Mech. Rev.*, 50, pp. 149-197.
- BESKOS, D.E., 2003, "Dynamic analysis of structures and structural systems". In: *Boundary Element Advances in Solid Mechanics*, Wien, New York, Springer-Verlag, pp. 1-53.
- BIOT, M.A., 1941, "General theory of three-dimensional consolidation". *Journal of Applied Physics*, 12, pp. 155-164.
- BIOT, M.A., 1956a, "General solution of the equations of elasticity and consolidation for a porous material". *Journal of Applied Mechanics*, 23, pp. 91-96.
- BIOT, M.A., 1956b, "The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, I. Low frequency range". *J. Acoust. Soc. Am.*, 28, pp. 167-178.
- BIOT, M.A., 1956c, "The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, II. Higher frequency range". *J. Acoust. Soc. Am.*, 28, pp. 179-191.
- BIOT, M.A., 1962, "Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media". *Journal of Applied Physics*, 33, pp. 1482-1498.
- BONNET, G., 1987, "Basic singular solution for a poroelastic medium in the dynamic range". *J. Acoust. Soc. Am.*, 82, 1758-1762.

- BOUTIN, C., BONNET, G., BARD, P.Y., 1987, "Green functions and associated sources in infinite and stratified poroelastic media". *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 90, 521-550.
- BREBBIA, C.A., GEORGIU, P., 1979, "Combination of boundary and finite elements in elastostatics". *Appl. Math. Modelling*, 3, 212-220.
- BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F, WROBEL, L.C., 1984, *Boundary element techniques*. Berlin, Springer-Verlag.
- BREZZI, F., 1974, "On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrangian multipliers". *RAIRO* 8-R2, pp. 129-151.
- CARRER, J.A.M, 1991, *Técnicas implícitas para análise elastoplástica estática e dinâmica com o método de elementos de contorno*. Tese de D.Sc., COPPE-UFRJ, Brasil.
- CARRER, J.A.M., MANSUR, W.J., 1993, "Two-dimensional transient BEM analysis for the scalar wave equation: kernels". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 12, pp. 283-288.
- CARRER, J.A.M., MANSUR, W.J., 1994, "Space derivatives in the time domain BEM analysis for the scalar wave equation". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 13, pp. 67-74.
- CARRER, J.A.M., MANSUR, W.J., 1999, "Stress and velocity in 2D transient elastodynamic analysis by the boundary element method". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 23, pp. 233-245.
- CARRER, J.A.M., MANSUR, W.J., 2002, "Time-dependent fundamental solution generated by a not impulsive source in the boundary element method analysis of the 2D scalar wave equation". *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 18, pp. 277-285.

- CARRER, J.A.M., MANSUR, W.J., 2004, "Alternative time-marching schemes for elastodynamic analysis with the domain boundary element formulation". *Computational Mechanics*, in press.
- CARRER, J.A.M., TELLES, J.C.F., 1992, "A boundary element formulation to solve transient dynamic elastoplastic problems". *Computers & Structures*, 13, pp. 707-713.
- CARRER, J.A.M., TELLES, J.C.F., 1993, "Static and Dynamic Nonlinear Stress Analysis". In: *Boundary element techniques in geomechanics*, eds. Manolis, G.D., Davies, T.G., London, Elsevier Applied Science.
- CARTER, J.P., BOOKER, J.R., SMALL, J.C., 1979, "The analysis of finite elastoplastic consolidation". *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 2, pp. 107-129.
- CAVALCANTI, M.C., 2002, "Análise por elementos de contorno de meios poro-elásticos saturados pela teoria de Biot". Tese de D.Sc., COPPE-UFRJ, Brasil.
- CAVALCANTI, M.C., TELLES, J.C.F., 2003, "Biot's consolidation theory – application of BEM with time independent fundamental solutions for poro-elastic saturated media". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27, pp. 145-157.
- CHEN, G.R., QIAN, J., 1986, "The coupling of BEM and FEM used in stress analysis of structures on the half infinite foundation". In: *Proceedings of the International Conference on Boundary Element Methods*, Beijing, China, pp. 689-696.
- CHEN, J., 1994, "Time domain fundamental solution to Biot's complete equations of dynamic poroelasticity. Part I: two-dimensional solution". *International Journal of Solids and Structures*, 31, pp. 1447-1490.
- CHEN, J., DARGUSH, G.F., "Boundary element method for dynamic poroelastic and thermoelastic analysis". *International Journal of Solids and Structures*, 32, pp. 2257-2278.

- CHEN, W.F., HAN, D.J., 1988, *Plasticity for structural engineers*. New York, Springer-Verlag.
- CHENG, A.H.D., BADMUS, T., BESKOS, D.E., 1991, "Integral equations for dynamic poroelasticity frequency domain with BEM solution". *J. Engng. Mec. ASCE*, 117, pp. 1136-1157.
- CHENG, A.H.D., LIGGETT, J.A., 1984, "Boundary integral equation method for linear porous elasticity with applications to soil consolidation". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20, pp. 255-278.
- CHIEN, C.C., WU, T.Y., 2001, "A particular integral BEM/time-discontinuous FEM methodology for solving 2-D elastodynamics problems". *International Journal of Solid and Structures*, 38, pp. 289-306.
- CHIEN, C.C., YANG, C.S., TANG, J.H., 2003, "Three-dimensional transient elastodynamic analysis by a space and time-discontinuous Galerkin finite element method". *Finite Elements in Analysis and Design*, 39, pp. 561-580.
- CHOW, P.C., KOENIG, H.A., 1966, "An unified approach to cylindrical and spherical elastic waves by method of characteristics". *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Series E, 33, pp. 159-167.
- CHRISTIAN, J.T., BOEHMER, J.W., 1970, "Plane strain consolidation by finite elements". *J. Soil Mech. Found. Div. ASCE*, 96, pp. 1435-1457.
- CIVIDINI, A., GIODA, G., 1982, "Compatible and equilibrium FE for soil consolidation: a preliminary comparison". In: *Numerical methods in geomechanics*, ed.: Eisenstein, Z., Rotterdam, Balkema, pp. 297-306.
- CLEARY, M.P., 1997, "Fundamental solutions for a fluid-saturated porous solid". *International Journal of Solid and Structures*, 13, pp. 785-806.

- COUTINHO, A.L.G.A., LANDAU, L., EBECKEN, N.F.F., LIMA, E.C.P., VENANCIO FILHO, F., 1988, "Nonlinear dynamic analysis using pseudo-force method and lanczos algorithm". *Computer & Structures*, 30, pp. 979-983.
- COYETTE, J.P., DEJEHET, E., GUISSSET, P., FYFE, K., 1989, "Numerical analysis of acoustic and elasto-acoustic problems using combined finite element and boundary element methods. In: *Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference*, Las Vegas, NV.
- CRISFIELD, M.A., 1991, *Non-linear finite element analysis of solids and structures – vol. 1 and 2*. New York, John Wiley & Sons.
- CZYGAN, O., 2003, *Fluid/Struktur-Kopplung bei ebenen und rotationssymmetrischen Systemen unter Berücksichtigung nichtlinearen Strukturverhaltens*. Ph.D Thesis, Technische Universität Hamburg-Harburg, Hamburg, German.
- CZYGAN, O., VON ESTORFF, O., 2002, "Fluid-structure interaction by coupling BEM and nonlinear FEM". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26, pp. 773-779.
- DARGUSH, G.F., BANERJEE, P.K., 1989, "A time domain boundary element method for poroelasticity". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28, pp. 2423-2449.
- DE BOER, R., 1998, *Theory of porous media – highlights in the historical development and current state*. Berlin, Springer.
- DE BOER, R., EHLERS, W., LIU, Z., 1993, "One-dimensional transient wave propagation in fluid saturated incompressible porous media". *Arch. Appl. Mech.*, 63, pp. 59-72.
- DEMIREL, V., WANG, S., 1987, "An efficient boundary element method for two-dimensional transient wave propagation problems". *Applied Mathematical Modelling*, 11, pp. 411-416.

- DE PAULA, F.A., TELLES, J.C.F., MANSUR, W.J., 1987, "Combination of boundary elements and finite elements to solve two-dimensional elasticity problems". In: *Proceedings of the 3rd boundary element technology conference*, BETECH 87, Rio de Janeiro, Brazil, pp. 162-176.
- DESAI, C.S., SIRIWARDANE, T.H.J., 1979, "Subsidence due to consolidation including nonlinear behavior". In: *Evaluation and prediction of subsidence*, eds.: Saxena, S.K., New York, ASCE, pp. 500-515.
- DIEBELS, S., EHLERS, W., 1996, "Dynamic analysis of fully saturated porous medium accounting for geometrical and material non-linearities". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49, pp. 833-848.
- DOMINGUEZ, J., 1992, "Boundary element approach for dynamic poroelastic problems". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35, pp. 307-324.
- DOMINGUEZ, J., 1993, *Boundary elements in dynamics*. Southampton and Boston, Computational Mechanics Publications.
- DUBNER, H., ABATE, J., 1968, "Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite Fourier cosine transform". *Journal of the Association for Computing Machinery*, 15, pp. 115-123.
- DYM, C.L., SHAMES, I.H., 1985, *Solid mechanics of materials*. New York, Macmillan.
- EHLERS, W., BLUHM, J., 1998, *Porous media – theory, experiments and numerical applications*. Berlin, Springer.
- EHLERS, W., KUBIK, J., 1994, "On finite dynamic equations for fluid-saturated soils". *Acta Meccanica*, 105, pp. 101-117.

- ELLEITHY, W.M., AL-GAHTANI, H.J., 2000, "An overlapping domain decomposition approach for coupling the finite and boundary element methods". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24, pp. 391-398.
- ELLEITHY, W.M., AL-GAHTANI, H.J., EL-GEBEILY, M., 2001a, "Iterative coupling of BE and FE methods in elastostatics". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 25, pp. 685-695.
- ELLEITHY, W.M., AL-GAHTANI, H.J., TANAKA, M., 2001b, "Iterative coupling of BEM and FEM for the solution of elasto-plastic fracture mechanics problems". *Transactions of JASCOME*, Paper No.01101913.
- ELLEITHY, W.M., TANAKA, M., 2002, "Domain decomposition coupling of FEM and BEM". *Transactions of JSCEs*, Paper No.20010050.
- ERIGEN, A.C., SUHUBI, E.S., 1975, *Elastodynamics – vols. I and II*. New York, San Francisco and London, Academic Press.
- EVERSTINE, G.C., HENDERSON, F.M., 1990, "Coupled finite element/boundary element approach for fluid-structure interaction". *J. Acoust. Soc. Am.*, 87, pp. 1938-1947.
- FELIPPA, C.A., PARK, K.C., FARHAT, C., 2001, "Partitioned analysis of coupled mechanical systems". *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, pp. 3247-3270.
- FENG, Y.T., OWEN, D.R.J., 1996, "Iterative plane solution of coupled FE/BE discretization for plate-foundation interaction problems". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, pp. 1889-1901.
- FIRUZIAAN, M., VON ESTORFF, O., 2002, "Transient 3D soil/structure interaction analysis including nonlinear effects". In: *Structural Dynamics*, eds.: Grundmann, H., Schuëller, G.I., EUROODYN2002, Lisse, pp. 1291-1302.

- FRANGI, A., 2000, "Causal shape functions in the time domain boundary element method". *Computational Mechanics*, 25, pp. 533-541.
- FRIED, I., 1969, "Finite element analysis of time-dependent phenomena". *AIAA J.*, 7, pp. 1170-1173.
- FUKUI, T., 1987, "Time marching BE-FE method in 2-D elastodynamic problems". *International Conference on BEM IX*, Stuttgart, F.R.G.
- FUNG, T.C., 1997, "A precise time-step integration method by step-response and impulsive-response matrices for dynamic problems". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, pp. 4501-4527.
- GALLEGO, R., DOMINGUEZ J., 1994a, "A two-dimensional boundary element code for time domain formulations using quadratic elements. I: potential problems". *Boundary Elements Communications*, v.5, n.3, pp. 117-125.
- GALLEGO, R., DOMINGUEZ J., 1994b, "A two-dimensional boundary element code for time domain formulations using quadratic elements. I: transient elastodynamic problems". *Boundary Elements Communications*, v.5, n.4, pp. 171-180.
- GERSTLE, W.H., PRASAD, N.N.V., XIE, M., 1992, "Solution method for coupled elastostatic BEM and FEM domains". In: *7th International Conference on Boundary Element Technology*, Southampton, Computational Mechanics Publications, pp. 213-226.
- GHABOUSSI, J., WILSON, E.L., 1973, "Flow of compressible fluid in porous elastic media". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 5, pp. 419-442.
- GIVOLI, D., 1991, "Non-reflecting boundary conditions: a review", *J. Comput. Phys.*, 94, 1-29.

- GIVOLI, D., 1992, *Numerical methods for problems in infinite domains*. Amsterdam, Elsevier Science Publishers.
- GEERS, T.L., 1971, "Residual potential and approximate methods for three-dimensional fluid-structure interaction". *J. Acoust. Soc. Am.*, 45, 1505-1510.
- GEERS, T.L., FELIPPA, C.A., 1980, "Doubly asymptotic approximations for vibration analysis of submerged structures". *J. Acoust. Soc. Am.*, 73, 1152-1159.
- HILBER, H.M., HUGHES, T.J.R., TAYLOR, R.L., 1977, "Improved numerical dissipation for the time integration algorithms in structural dynamics". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 5, pp. 283-292.
- HINTON, E., BETTES, P., LEWIS, R.W., 1981, *Numerical methods in coupled problems*. Swansea, Pineridge Press.
- HINTON, E., OWEN, D.R.J., 1980, *Finite elements in plasticity*. Swansea, Pineridge Press.
- HOUBOLT, J.C., 1950, "A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft". *Journal of the Aeronautical Sciences*, 17, pp. 540-550.
- HUANG, H., 1986, "Numerical analyses of the linear interaction of pressure pulses with submerged structures". In: *Proceeding of the International Conference on Advances in Marine Structures*, Admiralty Research Establishment, London, Elsevier Applied Science Publisher.
- HUGHES, T.J.R., 2000, *The finite element method – linear static and dynamic finite element analysis*. Mineola, New York, Dover Publications.
- HUGHES, T.J.R., HULBERT, G., 1988, "Space-time finite element methods for elastodynamics: formulation and error estimates". *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 113, pp. 1-9.

- HUGHES, T.J.R., LIU, W.K., 1978, "Implicit-explicit finite elements in transient analysis: I. Stability theory; II. Implementation and numerical examples", *J. Appl. Mech.*, 45, 371-378.
- HUGHES, T.J.R., PISTER, K.S., TAYLOR, R.L., 1979, "Implicit-explicit finite elements in nonlinear transient analysis". *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17/18, pp. 159-182.
- HUGHES, T.J.R., STEPHENSON, R.S., 1981, "Stability of implicit-explicit finite elements in nonlinear transient analysis", *Int. J. Engrg. Sci.*, 19, 295-302.
- HWANG, C.T., MORGENSTERN, N.R., MURRAY, D.W., 1971, "On solution of plane strain consolidation problems by finite element methods". *Can. Geotech. J.*, 8, pp. 109-118.
- JACOB, B.P., EBECKEN, N.F.F., 1994, "An optimized implementation of the Newmark/Newton-Raphson algorithm for the time integration of non-linear problems". *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 10, pp. 983-992.
- JEANS, R.A., MATHEWS, I.C., 1990, "Solution of fluid-structure interaction problems using a coupled finite element and variational boundary element technique". *J. Acoust. Soc. Am.*, 88, pp. 2459-2466.
- KAMIYA, N., IWASE, H., 1997, "BEM and FEM combination parallel analysis using conjugate gradient and condensation". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 20, pp. 319-326.
- KAMIYA, N., IWASE, H., KITA, E., 1996, "Parallel computing for the combination method of BEM and FEM". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 18, pp. 221-229.

- KANE C., MARSDEN, J.E., ORTIZ, M., WEST, M., 2000, “Variational integrators and the Newmark algorithm for conservative and dissipative mechanical systems”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49, pp. 1295-1325.
- KARABALIS, D.L., BESKOS, D.E., 1985, “Dynamic response of 3-D flexible foundations by time domain BEM and FEM”. *Soil Dyn. Earthqu. Engng.*, 4, pp. 91-101.
- KHAN, A.S., HUANG, S., 1995, *Continuum theory of plasticity*. New York, John Wiley & Sons.
- KOBAYASHI, S., KAWAKAMI, T., 1985, “Application of BE-FE combined method to analysis of dynamic interactions between structures and viscoelastic soil”. In: *Proceedings of the International Conference on Boundary Elements VII*, Como, Italy, pp. 6.3-6.12.
- KOBAYASHI, S., MORI, K., 1986, “Three-dimensional dynamic analysis of soil-structure interactions by boundary integral equation – finite element combined method”. In: *Innovative numerical methods in engineering*, eds.: Shaw, R.P. *et al.*, Berlin, Springer.
- KOH, H.M., KIM, J.K., PARK, J.H., 1998, “Fluid-structure interaction analysis of 3-D rectangular tanks by a variationally coupled BEM-FEM and comparison with test results”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 27, pp. 109-124.
- KONTONI, D.P.N., BESKOS, D.E., 1993, “Transient dynamic elastoplastic analysis by the dual reciprocity BEM”. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 12, pp. 1-16.
- LEWIS, R.W., 1984, *Numerical methods in coupled problems*. London, Wiley.
- LEWIS, R.W., 1987, *Numerical methods for transient and coupled problems*. London, Wiley.

- LEWIS, R.W., SCHREFLER, B.A., 1998, *The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media*. Chichester, John Wiley & Sons.
- LI, H.B., HAN, G.M., MANG, H.A., TORZICKY, P., 1986, “A new method for the coupling of finite element and boundary element discretized subdomains of elastic bodies”. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 54, pp. 161-185.
- LI, X.D., WIBERG, N.E., 1996, “Structural dynamic analysis by a time-discontinuous Galerkin finite element method”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, pp. 2131-2152.
- LI, X., HAN, X., PASTOR, M., 2003, “An iterative stabilized fractional sep algorithm for finite element analysis in saturated soil dynamics”. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, pp. 3845-3859.
- LIE, S.T., YU, G., ZHAO, Z., 2001, “Coupling of BEM/FEM for time domain structural-acoustic interaction problems”. *Computer Modeling in Engineering Sciences*, 2, pp. 171-181.
- LIMA, D.L., 2004, *Transmissão de sinais acústicos de controle através de dutos submarinos rígidos*. Tese de M.Sc., COPPE-UFRJ, Brasil.
- LIN, C.C., LAWTON, E.C., CALIENDO, J.A., ANDERSON, L.R., 1996, “An iterative finite element-boundary element algorithm”, *Computers & Structures*, 39, pp. 899-909.
- LOMBARD, B., PIRAUX, J., 2004, “Numerical treatment of two-dimensional interfaces for acoustic and elastic waves”. *Journal of Computational Physics*, 195, 90-116.
- LUBICH, C., 1988a, “Convolution quadrature and discretized operational calculus I”. *Numerische Mathematik*, 52, pp. 129-145.

- LUBICH, C., 1988b, "Convolution quadrature and discretized operational calculus II". *Numerische Mathematik*, 52, pp. 413-425.
- MALVERN, L.E., 1969, *Introduction to the mechanics of continuous medium*. New Jersey, Englewood Cliffs.
- MANOLIS, G., BESKOS, D.E., 1989, "Integral formulation and fundamental solutions of dynamic poro-elasticity and thermolasticity". *Acta Mechanica*, 76, pp. 89-104.
- MANSUR, W.J., 1983, *A time-stepping technique to solve wave propagation problems using the boundary element method*. Ph.D Thesis, University of Southampton, England.
- MANSUR, W.J., DE LIMA SILVA W., 1992, "Efficient time truncation in two-dimensional BEM analysis of transient wave propagation problems". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 21, pp. 51-63.
- MANSUR, W.J., SOARES JR, D., FERRO, M.A.C., 2004, "Initial conditions in frequency-domain analysis: the FEM applied to the scalar wave equation". *Journal of Sound and Vibration*, 270, pp. 767-780.
- MANSUR, W.J., YU, G., CARRER, J.A.M., LIE, S.T., SIQUEIRA, E.F.N., 2000, "The θ scheme for time domain BEM/FEM coupling applied to 2-D scalar wave equation". *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 16, pp. 439-448.
- MARSDEN, J.E., HUGHES, T.J.R., 1994, *The mathematical foundations of elasticity*. Mineola, New York, Dover Publications.
- MENDELSON, A., 1983, *Plasticity: theory and application*. New York, Krieger.

- MEROI, E., SCHREFLER, B.A., ZIENKIEWICZ, O.C., 1995, "Large strain static and dynamic semi-saturated soil behavior". *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 19, pp. 81-106.
- MILES, J.W., 1961, *Modern mathematics for the engineer*. London, McGraw-Hill.
- MITA, A., LUCO, J.E., 1987, "Dynamic response of embedded foundations: a hybrid approach". *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 63, pp. 233-259.
- MOHAMMADI M., KARABALIS, D.L., 1995, "Dynamic 3-D soil-railway track interaction by BEM-FEM". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 24, pp. 1177-1193.
- MORSE, P.M., FESHBACH, H., 1953, *Methods of theoretical physics*. New York, Toronto, London, McGraw-Hill.
- NARDINI, D., BREBBIA, C.A., 1982, "A new approach to free vibration analysis using boundary elements". In: *Boundary Element Methods in Engineering*, ed. Brebbia, C.A., Berlin, Springer-Verlag.
- NARDINI, D., BREBBIA, C.A., 1985, "Boundary integral formulation of mass matrices for dynamic analysis". In: *Topics in boundary element research*, v2, ed. Brebbia, C.A., Berlin, Springer-Verlag.
- NEWMARK, N.M., 1959, "A method of computation for structural dynamics". *ASCE Journal of Engineering Mechanics Division*, 85, 67-94.
- NISHIMURA, N., KOBAYASHI, S., 1989, "A boundary integral equation method for consolidation problems". *International Journal of Solid and Structures*, 25, pp. 1-21.
- NORRIS, V.A., 1980, *The elasto-plastic analysis of soil consolidation with special reference to kinematic hardening*. Ph.D. Thesis, University College of Swansea.

- NORRIS, A.N., 1985, "Radiation from a point source and scattering theory in a fluid-saturated porous solid". *J. Acoust. Soc. Am.*, 77, pp. 2012-2023.
- NOVOZHILOV, V.V., 1961, *Theory of elasticity*. London, Pergamon Press.
- PARK, K.C., FELIPPA, C.A., 1983, "Partitioned analysis of coupled systems". In: *Computational methods for transient analysis*, eds.: Belytschko, T., Hughes T.J.R., Amsterdam, North-Holland, pp. 157-219.
- PARK, K.C., FELIPPA, C.A., DERUNTZ, J.A., 1977, "Stabilization of staggered solution procedures for fluid-structure interaction analysis". In: *Computational methods for fluid-structure interaction problems*, eds.: Belytschko, T., Geers T.L., New York, American Society of Mechanical Engineers, AMD, 26, pp. 95-124.
- PASTOR, M., LI, T., LIU, X., ZIENKIEWICZ, O.C., QUECEDO, M., 2000, "A fractional step algorithm allowing equal order of interpolation for coupled analysis of saturated soil problems". *Mech. Cohes. Frict. Mater.*, 5, pp. 511-534.
- PAVLATOS, G.D., BESKOS, D.E., 1994, "Dynamic elastoplastic analysis by BEM/FEM". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 14, pp. 51-63.
- PERERA, R., RUIZ, A., ALARCON, E., 1993, "FEM-BEM coupling procedure through the Stelkov-Poincare operator". *Boundary Element XV*, Southampton, Computational Mechanics Publications, pp. 621-632.
- PREDELEANU, M., 1984, "Development of boundary element method to dynamic problems for porous media". *Appl. Math. Modeling*, 8, pp. 378-382.
- PREVOST, J.H., 1981, "Consolidation of anelastic porous media", *J. Engng. Mech. Div. ASCE*, 107, pp. 169-186.
- PREVOST, J.H., ABDEL-GHAFFAR, A.M., LACY, S.J., 1985, "Nonlinear dynamic analyses of an earth dam", *J. Geotech. Engng. ASCE*, 111, pp. 882-897.

- RAJAKUMAR, C., ALI, A., YUNUS, S.M., 1989, "A BE-FE coupled acoustic element for fluid-structure interaction problems". In: *Proceedings of the ISBEM Conference*, Hartford, CN.
- RIZOS, D.C., WANG, Z., 2002, "Coupled BEM-FEM solutions for direct time domain soil-structure interaction analysis". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26, pp. 877-888.
- RUNESSON, K., 1978, *On nonlinear consolidation of soft clay*. Ph.D. Thesis, Chalmers University of Technology, Gothenburg.
- SANDHU, R.S., WILSON, E.L., 1969, "Finite element analysis of flow in saturated porous media". *J. Engng. Mech. Div. ASCE*, 95, pp. 641-652.
- SCHANZ, M., 1999, "A boundary element formulation in time domain for viscoelastic solids". *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 15, pp. 799-809.
- SCHANZ, M., 2001a, "Application of 3D time domain boundary element formulation to wave propagation in poroelastic solids". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 25, pp. 363-376.
- SCHANZ, M., 2001b, *Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua: a boundary element approach*. Berlin, New York, Springer.
- SCHANZ, M., ANTES, H., 1997, "Application of operational quadrature methods in time domain boundary element methods". *Meccanica*, 32, 179-86.
- SCHANZ, M., CHENG, A.H.D., 2000, "Transient wave propagation in a one-dimensional poroelastic column". *ACTA Mechanica*, 145, pp. 1-18.
- SCHIFFMAN, R.L., CHEN, A.T.F., JORDAN, J.C., 1969, "An analysis of consolidation theories". *J. Soil Mech. Found Div. ASCE*, 95, 285-312.

- SCHNACK, E., 1987, "A hybrid BEM model". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24, pp. 1015-1025.
- SCHNACK, E., BECKER, I., KARAOSMANOGLU, N., 1988, "Modern coupling of FEM and BEM with mixed variational formulations". In: *Proceeding of the 10th International Conference on Boundary Element Methods in Engineering*, Southampton, U.K..
- SIEBRITS, E., PEIRCE, A.P., 1995, "The stability properties of time domain elastodynamic boundary element methods". In: *Boundary Elements XVII*, eds.: Brebbia, C.A., Kim, S., Osswald, T.A., Power, H., Computational Mechanics Publications.
- SIEBRITS, E., PEIRCE, A.P., 1997, "Implementation and application of elastodynamic boundary element discretizations with improved stability properties". *Engng. Comput.*, pp. 669-691.
- SIMO, J.C., HUGHES, T.J.R., 1998, *Computational inelasticity*. New York, Springer.
- SMALL, J.C., BOOKER, J.R., DAVIS, E.H., 1976, "Elastoplastic consolidation of soil". *International Journal of Solids and Structures*, 12, pp. 431-448.
- SOARES JR, D., 2002, *Análise dinâmica nos domínios do tempo e da frequência de modelos não-lineares discretizados por elementos finitos*. Tese de M.Sc., COPPE-UFRJ, Brasil.
- SOARES JR, D., CARRER, J.A.M., TELLES, J.C.F., MANSUR, W.J., 2002, "Numerical computation of internal stress and velocity in time-domain BEM formulation for elastodynamics". *Computational Mechanics*, 30, pp. 38-47.
- SOARES JR, D., MANSUR, W.J., 2003, "An efficient time/frequency domain algorithm for modal analysis of non-linear models discretized by the FEM". *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, pp. 3731-3745.

- SOARES JR, D., MANSUR, W.J., 2004a, "Compression of time generated matrices in two-dimensional time-domain elastodynamic BEM analysis". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61, pp. 1209-1218.
- SOARES JR, D., MANSUR, W.J., 2004b, "A time domain FEM approach based on implicit Green's functions for nonlinear dynamic analysis". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, in press.
- SOARES JR, D., VON ESTROFF, O., 2004, "Combination of FEM and BEM by an iterative coupling procedure". *ECCOMAS 2004*, Jyväskylä, Finland.
- SOARES JR, D., VON ESTROFF, O., MANSUR, W.J., 2004a, "Iterative coupling of BEM and FEM for nonlinear dynamic analyses". *Computational Mechanics*, 34, pp. 67-73.
- SOARES JR, D., VON ESTROFF, O., MANSUR, W.J., 2004b, "Efficient nonlinear solid-fluid interaction analysis by an iterative BEM/FEM coupling". *To be published*.
- SPYRAKOS, C.C., BESKOS, D.E., 1986, "Dynamic response of flexible strip-foundations by boundary and finite elements". *Soil Dyn. Earthqu. Engng.*, 5, pp. 84-96.
- STRICKILIN, J.A., HAISLER, W.E., 1977, "Formulations and solution procedures for nonlinear structural analysis". *Computers & Structures*, 7, pp. 125-136.
- SWOBODA, G., MERTZ, W., BEER, G., 1987, "Rheological analysis of tunnel excavations by means of coupled finite element (FEM) – boundary element (BEM) analysis". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11, 115-129.
- TELLES, J.C.F., 1983, *The boundary element method applied to inelastic problems*. Berlin, Springer-Verlag.

- TELLES, J.C.F.; CARRER, J.A.M, 1991, "Implicit procedures for the solution of elastoplastic problems by the boundary element method". *Mathematical Computational Modelling*, 15, pp. 303-311.
- TELLES, J.C.F., CARRER, J.A.M., 1994, "Static and transient dynamic nonlinear stress analysis by the boundary element method with implicit techniques". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 14, pp. 65-74.
- TELLES, J.C.F., CARRER, J.A.M, MANSUR, W.J., 1999, "Transient dynamic elastoplastic analysis by the time-domain BEM formulation". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 23, pp. 479-486.
- TERZAGHI, K., 1923, "Die Berechnung der Durchlässigkeit des Tones aus dem Verlauf der hydromechanischen Spannungserscheinungen". *Sitzungsber. Akad. Wiss. (Wien), Math.-Naturwiss. Kl., Abt. IIa*, 132, pp. 125-138.
- TSAMASPHYROS, G., 1987, "Methods for combination of finite element and singular integral equation methods". *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 60, pp. 45-56.
- VALLABHAN, C.V.G., 1987, "Coupling of BEM/FEM technology: an overview". In: *Proceedings of the 3rd Boundary Element Technology Conference*, BETECH 87, Rio de Janeiro, Brazil, pp. 15-30.
- VALLABHAN, C.V.G., SIVAKUMAR, J., 1986, "Coupling of BEM and FEM for 3D problems in geotechnical engineering. In: *Proceedings of the 2nd Boundary Element Technology Conference*, BETECH 86, Cambridge, MA, pp. 675-686.
- VON ESTORFF, O., 1991, "Dynamic response of elastic blocks by time domain BEM and FEM. *Computers & Structures*, 38, pp. 289-300.

- VON ESTORFF, O., 1992, "Coupling of BEM and FEM in the time domain: some remarks on its applicability and efficiency". *Computers & Structures*, 44, pp. 325-337.
- VON ESTORFF, O., 2000, *Boundary elements in acoustics*. Southampton, WIT Press.
- VON ESTORFF, O., ANTES, H., 1991, "On FEM-BEM coupling for fluid-structure interaction analysis in the time domain". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31, pp. 1151-1168.
- VON ESTORFF, O., FIRUZIAAN, M., 2000, "Coupled BEM/FEM approach for nonlinear soil/structure interaction". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24, pp. 715-725.
- VON ESTORFF, O., KAUSEL, 1989, "Coupling of boundary and finite elements for soil-structure interaction problems". *Earthqu. Engng. Struct. Dyn.*, 8, pp. 1065-1075.
- VON ESTORFF, O., PRABUCKI, M.J., 1990, "Dynamic response in time domain by coupled boundary and finite elements". *Computational Mechanics*, 6, 35-46.
- WANG, H.F., 2000, *Theory of Linear Poroelasticity with Applications to Geomechanics and Hydrogeology*. Princeton, New Jersey, Princeton University Press.
- WIEBE, T., ANTES, H., 1991, "A time domain integral formulation of dynamic poroelasticity". *Acta Mec.*, 90, pp. 125-137.
- WILSON, E.L., FARHOOMAND, I., BATHE, K.J., 1973, "Nonlinear dynamic analysis of complex structures". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1, pp. 241-252.
- WOLF, J.P., 1985, *Dynamic Soil-Structure Interaction*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall.

- YAZDCHI, M., KHALILI, N., VALLIAPPAN, S., 1999, "Non-linear seismic behavior of concrete gravity dams using coupled finite element-boundary element technique". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44, pp. 101-130.
- YOKOO, Y., YAMAGATA, K., NAGAOKA, H., 1971, "Finite element method applied to Biot's consolidation theory". *Soils and Foundation, Japanese Soc. Soil Mech. Found. Engng.*, 11, pp. 29-46.
- YU, G., MANSUR, W.J., CARRER, J.A.M., GONG, L., 1998a, "Time weighting in time domain BEM". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 22, pp. 175-181.
- YU, G., MANSUR, W.J., CARRER, J.A.M., GONG, L., 2000, "Stability of Galerkin and collocation time domain boundary element methods as applied to the scalar wave equation". *Computers & Structures*, 74, pp. 495-506.
- YU, G., MANSUR, W.J., CARRER, J.A.M., LEI, G., 1998b, "A linear θ method applied to 2D time domain BEM analysis". *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 14, pp. 1171-1179.
- YU, G., MANSUR, W.J., CARRER, J.A.M., LIE, S.T., 2001, "A more stable scheme for BEM/FEM coupling applied to two-dimensional elastodynamics". *Computers & Structures*, 79, pp. 811-823.
- YU, G.Y., LIE, S.T., FAN, S.C., 2002, "Stable boundary element method/finite element method procedure for dynamic fluid structure interactions". *Journal of Engineering Mechanics*, v.128, n.9, pp. 909-915.
- ZIENKIEWICZ, O.C., 1982, "Basic formulation of static and dynamic behavior of soil and other porous material". In: *Numerical methods in geomechanics*, ed.: Martins, J.B., Dordrecht, pp. 39-57.

- ZIENKIEWICZ, O.C., CHAN, A.H.C., PASTOR, M., PAUL, D.K., SHIOMI, T., 1990a, "Static and dynamic behavior of soils: a rational approach to quantitative solutions, I. Fully saturated problems". *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 429, pp. 285-309.
- ZIENKIEWICZ, O.C., XIE, Y.M., SCHREFLER, B.A., LEDESMA, A., BICANIC, N., 1990b, "Static and dynamic behavior of soils: a rational approach to quantitative solutions, II. Semi-saturated problems". *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 429, pp. 311-321.
- ZIENKIEWICZ, O.C., CHAN, A.H.C., PASTOR, M., SCHREFLER, B.A., SHIOMI, T., 1999, *Computational geomechanics with special reference to earthquake engineering*. Chichester, John Wiley & Sons.
- ZIENKIEWICZ, O.C., CHANG, C.T., BETTESS, P., 1980, "Drained, undrained, consolidating and dynamic behaviour assumptions in soil". *Geotechnique*, 30, pp. 385-395.
- ZIENKIEWICZ, O.C., HUMPHESON, C., LEWIS, R.W., 1977a, "A unified approach to soil mechanics problems including plasticity and visco-plasticity". In: *Finite elements in geomechanics*, eds.: Gudehus, G., London, Wiley.
- ZIENKIEWICZ, O.C., KELLY, D.M., BETTESS, P., 1977b, "The coupling of the finite element method and boundary solution procedures". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11, pp. 355-376.
- ZIENKIEWICZ, O.C., KELLY, D.M., BETTESS, P., 1979, "Marriage a la mode – the best of both worlds (finite elements and boundary integrals)". In: *Energy methods in finite element analysis*, eds.: Glowinski, R., Rodin, E.Y., Zienkiewicz, O.C., London, J. Wiley and Son, 5, pp. 81-106.
- ZIENKIEWICZ, O.C., PAUL, D.K., CHAN, A.H.C., 1988, "Unconditionally stable staggered solution procedure for soil-pore fluid interaction problems". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26, pp. 1039-1055.

ZIENKIEWICZ, O.C., QU, S., TAYLOR, R.L., NAKZAWA, S., 1986, “The patch test for mixed formulation”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23, pp. 1871-1883.

ZIENKIEWICZ, O.C., SHIOMI, T., 1984, “Dynamic behavior of saturated porous media: the generalized Biot formulation and its numerical solution”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8, pp. 71-96.

ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L., 2002, *The finite element method – vol.1 and vol.2*. 5 ed., reprinted. Oxford, Butterworth-Heinemann.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)