MICHAELA COSTA SCHÖN

NÚMERO:
REFLEXÕES SOBRE AS CONCEITUAÇÕES DE RUSSELL E PEANO

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2006

MICHAELA COSTA SCHÖN

NÚMERO:

REFLEXÕES SOBRE AS CONCEITUAÇÕES DE RUSSELL E PEANO

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori.***

PUC/SP

São Paulo

2006

Banca Examinadora

A minha mãe Leila, pelos exemplos de amor e dedicação, que me guiaram nesta jornada. E, especialmente, por nunca desistir de mim. Sem a senhora tudo teria sido muito mais difícil...

A meu marido Marcelo, por acreditar e apostar nesse sonho

AGRADECIMENTOS

A minha orientadora Professora e **Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori***, pelo apoio no desenvolvimento desta pesquisa;*

Ao Professor e **Doutor Michael Otte***, pelos conhecimentos compartilhados e sugestões que enriqueceram minha trajetória acadêmica;*

Ao Professor e **Doutor Edélcio Gonçalves***, pelas valiosas contribuições sugeridas no Exame de Qualificação;*

À **CAPES***, que possibilitou financeiramente a concretização deste sonho;*

Aos **Professores do Programa do Mestrado Acadêmico em Educação Matemática***, pelas valiosas contribuições durante o curso;*

A meu pai, **Bernhard***, que, com certeza, de alguma maneira torceu por mim;*

A **Eliana, Michael** *e* **Molly***, pela paciência, admiração e carinho que sempre me dedicaram;*

A **Maria do Carmo** *e* **Liane***, pelo incentivo, carinho e amizade;*

A **todas as pessoas** *que contribuíram de alguma maneira para a realização deste sonho.*

A Autora

RESUMO

Este trabalho objetivou realizar um estudo sobre a epistemologia filosófica do conceito de número, na qual ainda faz sentido o questionamento: O que é número? Nesta perspectiva, assumiu-se como problemática a dualidade filosófica das conceituações de número, sustentadas pela Axiomática (proposta por Peano) e pela Teoria dos Conjuntos e Lógica (proposta por Russell), sendo o problema de pesquisa a Conceituação de Número frente a essa dualidade e à possibilidade de ser apresentada uma definição em definitivo ao conceito de número.

O foco da presente pesquisa está na polêmica existente entre a concepção de número apresentada por Russell (1872-1970) contraposta à de Peano (1858-1932), tomando-se por base as críticas de Otte, apresentadas no artigo: *B. Russell* "Introduction to Mathematical Philosophy", de 2001. A pesquisa desenvolveu-se tendo por referência a noção de Complementaridade, tendo sido utilizados procedimentos metodológicos adequados às pesquisas qualitativas.

Como conclusão pode-se afirmar que os números são: por um lado, características de certas classes e, por outro, conceitos operativos. Deste modo, a existência da polêmica entre filósofos como Frege e Russell, que favoreceram os aspectos predicativos, isto é, definem os números em termos de cardinalidade e, outros como Grassmann, Dedekind e Peano que destacam os números ordinais, justifica a proposição de Otte da complementaridade entre as abordagens.

A possibilidade de existirem conseqüências cognitivas e didáticas na utilização no ensino de uma ou outra abordagem da conceituação de número ou de ambas como pretende Otte torna, este estudo, uma contribuição para a Educação Matemática.

Palavras-Chave: Epistemologia, axiomática, teoria dos conjuntos, número.

ABSTRACT

This paper aimed the realization of a study concerning the philosophical epistemology of the concept of number, in which it still makes sense to ask: What is number? In this perspective, we have assumed as problematic the philosophical duality of the conceptualizations of numbers, according to Axiomatic (proposed by Peano) e by the Set Theory and Logics (proposed by Russell), being the Conceptualization of Number the problem of this research, concerning the possibility of introducing an ultimate definition to this concept.

The focus of this research is in the polemics that exists about the number introduced by Russell (1872-1970) contrary to Piano's (1858-1932), taking as a basis Otte's criticism, introduced in the article: B. Russell "Introduction to Mathematical Philosophy", 2001. The research was developed using, as a reference, the sense of Complementarity, as well as using proper qualitative methodological research procedures.

As a conclusion, we are able to claim that numbers are: on one hand, characteristics of certain classes and, on the other hand, operative concepts. This way, the existence of polemics between philosophers like Frege and Russell, who have favored predicative aspects, that is, they define number in terms of cardinality and, others like Grassmann, Dedekind and Peano who have highlighted the ordinal numbers, justify Otto's proposition of complementarity between the approaches.

The possibility of having cognitive and didactical consequences on the teaching in the use of one or another approach of conceptualization of the number or both, as Otte intends, makes this study a contribution to Mathematical Education.

Keywords: Epistemology, axiomatic, set theory, number.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este estudo é parte do projeto de pesquisa intitulado: “Os números e a aritmetização do pensamento matemático”; cujos autores são Michael F. Otte e Sonia Barbosa Camargo Igliori, apresentado no âmbito do projeto Universal, aprovado pelo CNPq em 2004. A seguir citamos parte da introdução do referido projeto, por acharmos que, o que lá consta, é esclarecedor para contextualizar melhor esta pesquisa:

“O projeto tem como problemática a possibilidade de existirem conseqüências cognitivas e didáticas em decorrência das três grandes mudanças ocorridas na Matemática no decorrer dos últimos 200 anos: a aritmetização da matemática; a mudança na noção de axioma e a nova noção de objeto matemático. A revolução da Matemática transformou-a, de uma ciência de formas e fórmulas, como se percebeu na, Álgebra e Análise Algébrica, de Leibniz, Euler e Lagrange, em uma ciência de pensamento conceitual. Nessa perspectiva, a Aritmética e os números fornecem os conceitos mais precisos e nitidamente delimitados. Em seu famoso “Zahlbericht” de 1897, Hilbert (1862-1943) afirma que: a teoria dos números tem sido elogiada desde os tempos antigos devido à simplicidade de seus fundamentos, precisão de seus conceitos e da pureza de suas verdades. No entanto, o autor também destacou, na mesma obra que a Aritmética e a Teoria dos Números tiveram de ser desenvolvidas e aprofundadas, além dos limites elementares, já conhecidos há muito tempo, para servirem como base para todo pensamento matemático. Finalmente mostrou-se claro que o caminho construtivo tradicional não era suficiente para incluir todos os números. A continuidade dos números reais, por exemplo, teve de ser introduzida por meio de um postulado, com a constatação dessa problemática, na segunda metade do século XIX começou-se a pensar em fundamentos axiomáticos da Aritmética e dos números. Desse modo, caberia aqui a pergunta: por que a axiomatização da Aritmética começa somente no século XIX? Isto é, por que isso ocorre mais de dois mil anos depois que a Geometria é apresentada na forma axiomática nos Elementos de Euclides? A causa reforça o que é citado acima, que o conceito de número foi considerado uma criação do próprio homem, enquanto a Geometria e a Física têm de tratar de aspectos objetivos e "externos" ao pensamento humano. Duas mudanças foram necessárias, antes que matemáticos como Grassmann, Dedekind, Hilbert ou Peano, pudessem pensar no assunto da axiomatização dos números. A primeira trata-se do caráter e da compreensão dos axiomas, que deviam transformar-se de verdades objetivas e intuitivamente claras que nem precisam, nem podem ser provadas, para, premissas hipotéticas do pensamento ou em postulados, para representar uma perspectiva sobre o objeto da pesquisa em igualdade com outras possíveis e expressar-se em termos de relações e equações. À mudança exigida sobre o caráter dos axiomas, acrescenta-se à do raciocínio lógico. Na ciência aristotélica, a lógica estava sempre ligada ou relacionada à Geometria. Assim, até o início do século XIX, acreditava-se que a Aritmética não podia ter axiomas, por que estes não tinham lugar nas ciências formais ".

Esta pesquisa se desenvolve, neste contexto mais amplo, abordando mais especificamente um artigo de Otte (2001), no qual ele discute as idéias de Russell sobre o conceito de número, criticando a forma axiomática apresentada por Peano. Russell apóia-se na Teoria dos Conjuntos, e Otte destaca certas contradições apresentadas pelo autor nas críticas que ele teceu sobre Peano e, tem por objetivo mostrar que, em uma perspectiva da complementaridade as conceituações de Russel e Peano precisam ser consideradas, se quisermos explorar a dualidade intensional e extensional do conceito de número. Esta pesquisa está organizada em quatro capítulos, nos quais são abordados: história e biografias; método axiomático e complementaridade; concepção de Russell sobre o conceito de número; reflexões de Michael F. Otte e as considerações finais.

No primeiro capítulo, são apresentados os agentes principais da pesquisa, o conceito de número e as personagens que discutem esse conceito. O segundo é dedicado a alguns elementos relativos ao método axiomático e à noção de complementaridade. No terceiro, o tema é a concepção de Russell sobre número. E no quarto, encontra-se o estudo do artigo do Otte, cerne da pesquisa, o qual tem por objetivo indicar a necessidade de se considerar a dualidade intensional e extensional de um conceito matemático como o número, assumindo-as de forma complementar. Apresentamos também considerações finais e em um anexo a tradução, do inglês para o português, do artigo: B. Russel "Introduction to Mathematical Philosophy" de Michael Otte, publicado em 2001, na revista: Educação Matemática em Pesquisa, revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP.

CAPÍTULO I

HISTÓRIA E BIOGRAFIAS

Neste capítulo, apresentamos as "personagens" que compõem esta pesquisa: o conceito de número e três filósofos e matemáticos que o discutem. Por meio de alguns elementos da evolução histórica introduzimos o conceito; os filósofos, por uma síntese de suas biografias. É o ponto de partida do presente estudo.

I.1 O conceito de número: evolução histórica

O número é um conceito constituído pelo pensamento do homem, frente às necessidades que foram sendo impostas no embate com a subsistência. Apesar de ter sido assim estabelecido, a atribuição ao número, de um estatuto de objeto matemático, muito trabalho causou e continua causando ao homem. Vários trabalhos foram realizados também na busca de uma conceituação em definitivo para o conceito de número.

O número é um conceito fundamental a todas as ciências e, em particular, à Matemática. Não é sem motivo que, segundo opinião tradicional, a Matemática é a Ciência dos números e das figuras. Para Dedekind (1831-1916) "Os números são a livre criação do espírito humano; servem para apreender mais facilmente e com mais precisão a diversidade das coisas"[1] (apud MAINZER, 1887, p. 1).

A partir do século XIX, construíram-se habitualmente os sistemas de números baseados nos números inteiros. Pelas construções sucessivas, obtinham-se os inteiros, os números racionais, os números reais e depois os números complexos. De fato o plano complexo ou plano de Gauss foi criado antes do estabelecimento das bases para os fundamentos dos números reais por Cantor, Dedekind e outros, pois os problemas da continuidade, assunto complicado, interferiam na constituição dos reais enquanto a questão dos imaginários estava mais relacionada à álgebra.

Voltando às construções sucessivas dos números, não foi, no entanto, assim que eles se desenvolveram historicamente.

Na Antiguidade, independente dos inteiros naturais, conhecia-se já os números racionais e certos números reais (tais como o π, razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo, ou as raízes quadradas também representadas como razões entre segmentos geométricos).

O sistema dos números racionais e reais, estritamente positivos, foram descritos de maneira teórica pelos filósofos e matemáticos gregos, no quadro das teorias das proporções comensuráveis ou incomensuráveis. Esses dois sistemas não eram percebidos como extensões dos inteiros naturais.

Só após séculos de práticas numéricas com as proporções que no século XVII, foi conceituado que um número é um objeto que, em comparação à unidade, tem o mesmo tipo de relação que um segmento de reta comparado a um segmento de comprimento unitário.

No século VI, os números negativos já eram utilizados na Índia; os números complexos foram introduzidos por Cardan em 1545, como soluções de equações de segundo grau.

[1] Les nombres sont la libre création de l´esprit humain: ils servent à appréhender plus facilement et avec plus de précision la diversité des choses.

Decorrido muito tempo depois destas descobertas esses dois tipos de números foram considerados como duvidosos. Assim, foi no decorrer do século XIX que a apresentação moderna de números foi sendo, progressivamente desembaraçada.

A apresentação da evolução histórica do conceito de número pode possibilitar melhor compreensão de sua conceituação moderna.

I.1.1 A respeito dos símbolos de representação

Os símbolos, representando números, foram verificados nos mais antigos escritos humanos. Já no início da Idade da Pedra, encontram-se sob a forma de entalhe em ossos ou em marcas nas paredes das grutas. Nesta época, o homem era um caçador, e só podemos conjecturar que o símbolo ||||, por exemplo, servia para indicar o número de animais mortos. Os sistemas numéricos marcaram o nascimento da Aritmética. Os documentos mais antigos remontam às primeiras civilizações dos vales do Nilo, do Tigre e do Eufrate. Foram encontrados hieróglifos representando os números 10.000, 100.000 e 1.000.000 na tumba do rei Narmer, da primeira dinastia egípcia, datando de 3000 anos a.C.

1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
	𓎆	𓍢	𓆼	𓂭	𓆐	𓁨

Os desenhos utilizados podem ser relacionados a acontecimentos ligados aos próprios números: por exemplo, 𓍢 pode ser um símbolo representando um galão de 100 unidades.

Os símbolos podiam também representar objetos cujos nomes começassem pela mesma letra que o número correspondente. De novo, obtinham-se números justapondo-se de maneira aditiva os símbolos iniciais. Por exemplo, 𓆐𓆐𓂭𓂭𓂭 = 221.000, 𓂭𓎆 = 10.010. Assim, a adição e a subtração eram feitas sem dificuldade. Por exemplo, 𓎆II = 12 adicionado a 𓎆I = 11 dá 𓎆𓎆III = 23.

A multiplicação e a divisão reduzem as seqüências de operações de duplicação ou de redução à metade. As frações obtidas são expressas como frações unitárias, isto é, frações com numerador 1. O sinal ⬭ colocado sobre o número indica que se trata de uma fração unitária cujo número é o denominador. Assim, representamos $\overline{\cap II}$ 1/12. Para representar 5/12, parte-se de 1/12. Dobrando-se 1/12 obtém-se 2/12 = 1/6; dobrando-se de novo obtém-se 4/12 = 1/3. A decomposição 5/12= 4/12 + 1/12 = 1/3+ 1/12 dá a escrita $\overline{III}$ $\overline{\cap II}$.

Os babilônios utilizavam sinais cuneiformes gravados em placas de argila, cujo sistema de numeração era misto. Tratava-se de um sistema de posição, misturando símbolos decimais e sexagenais. ▼ que eram usados para 1, $60^1, 60^2, \ldots$, enquanto < representavam 10, 10.60, 10. 60^2,....

O zero nunca foi utilizado pelos babilônios, e eles não tinham nenhum símbolo que correspondesse à nossa vírgula. Numa notação de posição, o papel do zero era assinalado por um "buraco". Um sinal desse tipo, dois pequenos triângulos superpostos ◀◀, encontra-se em um antigo texto babilônico de Susa, mas só é usado em determinadas ocasiões.

Na ausência de um tal signo, devia-se determinar em função do contexto o valor posicional de um signo. Por exemplo, <<▼< pode-se representar $21 \cdot 60 + 10$ ou 21. 60^2+ 10. 60^1, ou 21. $\cap$ + 10, etc. <<< que é um primeiro exemplo de fração sexagenal, que representa $0{,}30 = 30/60 = 1/2$. Um outro exemplo é ▼▼▼<< ▼▼▼<< para $0{,}64 = 6 \cdot 1/60 + 40 \cdot 1/60^2 = 1/9$.

Os babilônios mostraram-se talentosos em Aritmética e Álgebra; desenvolveram tabelas sofisticadas, permitindo efetuar multiplicações e divisões e resolver equações de segundo e terceiro graus. Eles forneceram regras para resolver equações do segundo grau, "completando o quadrado", e mesmo certas equações do terceiro grau, graças às tabelas $x^2(x+1)$. Em razão de seus métodos astuciosos de cálculo, é indubitável que esse povo exerceu grande influência no desenvolvimento da Aritmética e da Álgebra.

I.1.2 Os povos e os números

Os gregos utilizavam um sistema de numeração em base dez e não posicional. No sistema mais antigo, os números, em base dez, eram representados pelas iniciais dos termos correspondentes. Combinando o símbolo representando o 5 com os outros símbolos, poder-se-ia imediatamente representar 50, 500 etc.

I	Γ	Δ	ΓΔ	H	ΓH	X	ΓX	M	ΓM
1	5	10	50	100	500	1000	5000	10000	50000

Mais tarde outro sistema foi acrescentado aos textos matemáticos. Os números eram representados por letras. As 24 letras do alfabeto eram utilizadas, assim como três letras de origem oriental.

1 – 9	α, β, γ, δ, ε, ς, ζ, η, θ	(ς = 6)
10 – 90	ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο, π, ρ	(ο = 90)
100 – 900	ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω, ϡ	(ϡ = 900)
1000 – 9000	͵α ͵β	(com um acento em baixo à esquerda)
10 000	M	(M = Μυριάς)

A adição de números era indicada pela justaposição de símbolos correspondentes; por exemplo,

$$\iota\beta = 10 + 2 = 12,\ \ \sigma\kappa\beta = 200 + 20 + 2 = 222,\ \ \alpha\tau\varepsilon = 1000 + 300 + 5 = 1305 .$$

As frações unitárias, geralmente, eram indicadas por um acento colocado à direita da letra, designando o denominador da fração. Frações mais gerais eram escritas de diversas maneiras, por exemplo, escrevendo o numerador sobre o denominador. Assim, à diferença de nosso sistema atual, o sistema grego não era simplesmente posicional e isto tornava os cálculos penosos.

Paralelamente a uma Aritmética de números representados por símbolos, desenvolvia-se uma outra em que a representação de números era feita por contadores, como os seixos ou peças dos ábacos. Estas novas ferramentas de contagem contribuíram para a descoberta dos teoremas da Aritmética.

Enquanto os egípcios e babilônios contentavam-se em desenvolver técnicas numéricas complexas, os pitagóricos interessavam-se, essencialmente, pelo significado filosófico dos números. Em suas filosofias, o universo inteiro era caracterizado pelos números e suas relações e um problema fundamental era, portanto, definir de maneira geral o que era um número.

Em seus Elementos (VII, 2), Euclides define primeiro as "unidades" como sendo "o que tem a virtude de toda coisa que é dita una". Em seguida, define um número como "uma multiplicidade formada de suas unidades". Como uma unidade é indivisível, nem Euclides nem Aristóteles consideram uma unidade como um número, mas antes como "uma base de contagem, ou como a origem dos números"[2] (MAINZER, 1887, p. 5)

Independente da definição do número orientada pela idéia de contagem encontra-se em Aristóteles a seguinte asserção: o que é divisível em partes é discretamente chamado de multidão, enquanto a multiplicidade limitada (finita) era um número. Assim em termos modernos, os gregos chamavam números os inteiros naturais diferentes de 1 e 0. As frações eram as relações de número, e os números irracionais eram relações entre grandezas geométricas incomensuráveis.

Nosso sistema de numeração decimal posicional com o zero e os algarismos 1, ..., 9 foi desenvolvido na Índia, entre 300 anos a.C. e 600 anos d.C, sem dúvida, sob a influência da Babilônia. Assim, por exemplo, as formas primitivas, -, = deram nascimento aos símbolos $\neg$ $>$ que conduzem a 1 e 2. A notação indiana foi adotada pelos árabes e não somente por seus astrônomos.

---

[2] Dans ses *Elements* (VII,2), EUCLIDE définit d´abord les 'unités" comme étant 'ce qui a la vertu de toute chose qui est dite une"; il définit ensuite um nombre comme "une multitude formée de ses unités". Comme une unité est indivisible, ni EUCLIDE ni ARISTOTE ne considérent une unité comme un nombre, mais plutôt comme "une base de comptage, ou comme l´origine des nombres".

Os indianos tinham signos para os números positivos e negativos: “dhana” ou “sva” indicando a propriedade e “rina” ou “ksaya”, a diminuição, o débito. Nos trabalhos de Brahmagupta, (nascido em 598), encontram-se as regras de manipulação dos números positivos e negativos.

Nada indica que os números negativos pudessem ser considerados como soluções de equações. Em um problema, para determinar o número de macacos em um bando, as soluções negativas eram consideradas como sem sentido. Todavia, encontramos em um problema de distância um exemplo de solução negativa interpretada como uma distância medida na direção oposta, tendo por referência o ponto de partida.

O matemático indiano Sridhara (que viveu em torno de 850-950) fixa as regras de utilização do zero, que apareceu em diversos momentos e em várias representações.

Entre os egípcios, o símbolo encontra-se em uma inscrição do templo de Edfu no século X a.C; e com os gregos o uso da letra o, inicial de ó$\upsilon\delta\varepsilon\nu =$ nada. Os indianos, desde o século V d.C, utilizavam o termo “sunya” para indicar vazio.

Os árabes empregavam a palavra “al-sifr” para indicar o zero, esta gerou “cifra” que era ainda utilizada por Gauss com o sentido de zero. Também derivado, o termo inglês “cypher” cujo um dos sentidos é zero. A partir do século VII d.C, os indianos passam a representar o zero com a ajuda de um ponto ou um círculo.

As técnicas aritméticas indo-arábicas expandiram-se no mundo ocidental entre os séculos XIII e XVI, graças aos movimentos como os de Leonardo de Pizza, de Riese ou de Stifel. Isso favoreceu o sucesso dos matemáticos italianos da Renascença na resolução das equações algébricas. (Del Ferro, Cardan, Ferrari). Ao se referir aos números negativos, Stifel citou que se tratava de “futilidades desprovidas de sentido”, mas, que “não é inútil” inventar números abaixo de zero, quer dizer fabricar números fictícios que são menos que nada.

Na Renascença, apareceu a álgebra e o zero, e os números negativos adquirem um novo *status*, ligado à possibilidade que oferecem de compor um quadro unificado para o estudo das equações. A partir de Descartes (1596-1650), as equações são escritas sob sua forma contemporânea.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 = 0$$

Com os coeficientes a_i positivos, negativos ou nulos (no tempo de Descartes os coeficientes não eram munidos de índices nem de expoentes).

Mesmo que os matemáticos tenham sempre manipulado números e estabelecido teoremas sobre eles, só no decorrer do século XIX que realizaram uma definição utilizável do conceito de número. Inicialmente, a motivação deles foi estabelecer fundamentos seguros para a Análise, em particular, dos números reais.

Após Cantor (1845-1918) e Dedekind terem definido os números reais baseados nos números racionais, é que se definem os inteiros em termos de Conjunto e de Lógica. Não se pode dissociar a introdução das idéias algébricas à base das teorias dos anéis e dos corpos, da percepção segundo a qual, as passagens dos inteiros naturais aos inteiros relativos, depois aos números racionais, são construções algébricas.

I.1.3 O inteiro natural

A contagem realizada com a ajuda dos símbolos de representação dos números marca o início da Aritmética. Os cálculos pressupõem a contagem. Até o século XIX, muitos esforços foram despendidos para estabelecer a gênese da idéia de número no processo psicológico de contagem. Os argumentos psicológicos e filosóficos empregados para defender esta tese, foram muito criticados depois que a lógica de Frege (1848-1925), e que a teoria dos conjuntos de Cantor forneceram as bases lógicas e matemáticas do conceito de número. Em "*Was sind und was sollen die Zahlen*?" escrito entre 1872 e 1878, e publicado em 1888, Dedekind propôs uma definição em termos dos números ordinais, diferentemente de Cantor e Frege que usaram os aspectos de cardinalidade e Peano que utilizou a axiomática. Decorre do teorema de recorrência de Dedekind que, a menos de isomorfismo, os inteiros naturais são definidos de maneira única.

I.1.4 Os números naturais

Conforme a definição apresentada por Dedekind: os inteiros naturais constituem o conjunto N, que contém um elemento particular chamado zero, indicado por 0 que é munido de uma aplicação S: $N \rightarrow N$, chamada sucessor ou função de sucessão que satisfaz aos axiomas seguintes:

(S1) S é injetiva,

(S2) 0 $\notin$ S (N),

(S3) N é a única parte de N contendo o 0 e estável por S (isto é, uma parte M contendo 0 e tal que S(M) $\subset$ M é igual à N).

Na linguagem da teoria dos conjuntos, a função de sucessão S descreve o processo de contagem. A idéia é que S associa a cada inteiro natural n seu sucessor imediato S(n). Assim, 1: = S (0), 2: = S(1), 3: = S(2) e, assim por diante.

O primeiro axioma significa que, pelo ato de contar não se recai jamais duas vezes sobre o mesmo número. O segundo axioma significa que, 0 é o ponto de partida da contagem ou, que o 0 não é o sucessor de nenhum número. Muitos matemáticos preferem, como Dedekind, começar a contar a partir do 1.

O terceiro axioma é uma formulação em termos de conjunto do princípio de recorrência enunciado, a seguir: se 0 possuir uma propriedade P e se a implicação "se o inteiro natural n possuir a propriedade P, então, seu sucessor S(n) possuirá também" for verdadeira, assim, todos os inteiros possuem a propriedade P.

A equivalência, o princípio da recorrência e o terceiro axioma são demonstrados, substituindo-se a propriedade P pelo conjunto M dos elementos de N possuindo a propriedade P. No lugar de dizer "n possui a propriedade P", pode-se dizer "a propriedade P aplica-se a n" ou "P(n) é verdadeira". O princípio da recorrência não é um silogismo qualquer resultando de regras de dedução lógica; é a tradução do axioma S(3), para mostrar que uma asserção é verificada para todos os inteiros naturais.

A conceituação de número inteiro natural acarreta a seguinte definição de conjunto infinito: Um conjunto M é infinito se existir uma aplicação injetiva $f : M \to M$ tal que $f(M) \neq M$. Esta definição exprime que só os conjuntos infinitos podem ser postos em bijeção com uma de suas partes próprias. Historicamente, esta definição foi dada por Dedekind em sua obra[3], na qual, o autor refere-se a aplicação de similaridade no lugar de aplicação injetiva.

A relação entre a conceituação de número natural e conjunto infinito é expressa pelo teorema: Existe um conjunto infinito se e somente se existe um conjunto N satisfazendo aos axiomas (S1), (S2) e (S3).

Demonstração: Se existe um conjunto N satisfazendo a (S1), (S2) e (S3), então, existe um conjunto infinito: basta considerar a aplicação de sucessão S.

Reciprocamente, suponhamos que existe um conjunto infinito A. Então, por definição, existe uma aplicação injetiva $f : A \to A$ tal que $f(A) \neq A$. Por conseqüência, existe um elemento $0 \in A / f(A)$. Seja I a classe de todos as partes M de A tais que $0 \in M$, e $f(M) \subset M$. Por hipótese $I \neq \emptyset$. Coloquemos, portanto, $N = \bigcap_{M \in I} M$. Se tomarmos como função S a restrição de f a N, vemos que o conjunto N satisfaz aos axiomas (S1), (S2) e (S3).

Dedekind apresenta, assim, uma prova da existência de um conjunto infinito, mas, utilizando a noção contraditória do conjunto de todos os conjuntos. Uma outra tentativa infrutífera foi tentada por Bolzano (1851) nos Paradoxos do Infinito. (BOLZANO apud SINACEUR, 1993).

Frege e Cantor, respectivamente definiram, os inteiros naturais como "potências finitas" e, "números cardinais finitos". Esta formulação foi feita também igualmente por Russell.

[3] *"Was sind und was sollen die Zahlen?" de 1888.*

O teorema de recorrência e a unicidade de N. As formulações de novos conceitos apoiando-se nos inteiros naturais são feitas, geralmente, por recorrência. Por exemplo, a adição pode ser definida estipulando-se, m+0: = m; m+1: = S(m); m+2: = S(m+1) e mais, geralmente, m+ S(n): =S(m+n). Esta maneira de operar justifica-se.

Teorema de Recorrência (Dedekind, 1888). Sejam A um conjunto não vazio, a $\in$ A, e g uma aplicação de A em A. Então, existe uma única aplicação $\varphi: N \to A$ tal que $\varphi(0) = a$ e $\varphi \circ \mathrm{S} = \mathrm{g} \circ \varphi$.

Dizemos que a aplicação φ é definida por recorrência, iniciando-se por φ(0) = a, e a fórmula de recorrência φ(n+1) = g(φ(n)).

Demonstração: Mostremos, inicialmente, a unicidade de φ. Sejam φ_1 e φ_2, duas aplicações de N em A, tendo a propriedade do enunciado. Mostremos por recorrência que, para todo $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$, tem-se $\varphi_1(\mathrm{n}) = \varphi_2(n)$. A propriedade é verdadeira para $\mathrm{n} = 0$, pois $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \mathrm{a}$. Suponhamos que se tenha $\varphi_1(\mathrm{n}) = \varphi_2(n)$. Então, $\varphi_1(\mathrm{S(n)}) = \mathrm{g}(\varphi_1(n)) = \mathrm{g}(\varphi_2(n)) = \varphi_2(\mathrm{S(n)})$, o que acarreta a recorrência.

Mostremos agora a existência de φ. Seja E o conjunto das partes H de $\mathrm{N} \times \mathrm{A}$, contendo (0, a) e tal que, para todo n, b, a inclusão $(\mathrm{n, b}) \in \mathrm{H}$ implica $(\mathrm{S(n), g(b)}) \in \mathrm{H}$. Como E contém $\mathrm{N} \times \mathrm{A}$, E não é vazio. Podemos, portanto considerar D $\bigcap_{H \in E} H$. Claramente, $\mathrm{D} \in \mathrm{E}$,e D contém os menores elementos de E. Iremos demonstrar que D é o gráfico de uma aplicação $\varphi: N \to A$ por recorrência.

Trata-se de estabelecer, para todo $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$, a propriedade P(n): “existe um único $\mathrm{b} \in \mathrm{A}$ tal que $(\mathrm{n, b}) \in \mathrm{D}$.” Como $\mathrm{D} \in \mathrm{E}$, D contém (0, a); suponhamos que D contenha (0, c), com $\mathrm{c} \neq \mathrm{a}$. Então, $\mathrm{D}/\{(0, \mathrm{c})\}$ pertence ainda a E, e isto, contradiz o caráter minimal de D. Assim, a propriedade P(n) é verdadeira para $\mathrm{n} = 0$. Suponhamos que P(n) seja verdadeira e que exista, portanto, um único $\mathrm{b} \in \mathrm{A}$ tal que $(\mathrm{n, b}) \in \mathrm{D}$. Suponhamos que D contenha $(\mathrm{S(n), c})$, com $\mathrm{c} \neq \mathrm{b}$. Então $\mathrm{D}/(\mathrm{S(n), c})$, pertence, também, a E o que contradiz o caráter minimal de D. Isto acarreta demonstrar que para todo $n \in N$, existe um único $b \in A$ tal que $(n, b) \in D$. Seja, portanto, φ a aplicação de N em A da qual D é o gráfico. A pertinência $(0, a) \in D$ mostra que $\varphi(0) = a$, enquanto (S(n), g(b)) $\in$ D mostram que, para todo $n \in N$, $\varphi \circ S(n) = g \circ \varphi(n)$.

Exemplo: A potência n-ésima c^n de um número real c é definida pela fórmula $c^{n+1} = c^n \cdot c$ com a iniciação $c^0 = 1$. Aplica-se o teorema de recorrência com A = R, a = 1 e $g(b) = b \cdot c$.

A primeira aplicação do teorema de recorrência que iremos estabelecer é a unicidade de N.

Teorema: Seja N' um conjunto munido de um elemento $0'$, de uma função de sucessão S', e satisfazendo as três condições (S1), (S2), (S3). Então, N e N' são canonicamente isomorfos: existe uma única bijeção $\varphi : N \to N'$ verificando $\varphi(0) = 0'$ e $S' \circ \varphi = \varphi \circ S$.

As operações de adição, multiplicação são aplicações do teorema de recorrência.

Adição: m + n é definida pela fórmula de recorrência m+ S(n) = S(m+n). Toma-se A = N, a = m, g = S, e φ(n) = m + n. Sendo 1: = S(0) obtém-se, em particular, m + 1 = S(m).

A multiplicação é definida como a adição por recorrência $m \cdot (m+1) = m \cdot n + m$ assumindo-se que $m \cdot 0 = 0$.

I.1.5 Os números naturais: definição de Peano

Peano apresenta um conjunto de cinco axiomas que permite caracterizar o conjunto N com a ajuda de zero e da função sucessor S. São eles:

(P1) 0 $\in$ N;

(P2) Se n $\in$ N, então, S(n) $\in$ N;

(P3) Se $n \in N$, então, $S(n) \neq 0$;

(P4) Se $0 \in E$, e se ($n \in E \Rightarrow S(n) \in E$), então, $N \subset E$;

(P5) Se $n, m \in N$, e se $S(m) = S(n)$, então, $m = n$.

Se interpretarmos os axiomas de Peano em termos de conjuntos, observaremos que eles são equivalentes à definição de Dedekind. No entanto, o ponto de vista de Peano é diferente de Dedekind. Este último buscava uma construção em termos de conjuntos dos números naturais e Peano, uma axiomatização dos inteiros numa linguagem formal.

Ao conhecer a apresentação de Peano sobre os números, Russell considera-o grão-mestre da arte do raciocínio formal. Para ele, Peano reduziu a maior parte da Matemática à estrita forma simbólica, na qual não há palavra alguma. Russell reforça que "nos livros comuns de matemática, há sem dúvida menos palavras do que desejaria a maioria dos leitores. Todavia, ocorrem pequenas frases como, *portanto, suponhamos, consideremos e do que decorre.* Todas elas, porém, são concessões, e assim eliminadas pelo Professor. Por exemplo, se desejarmos aprender toda a Aritmética, a Álgebra, o Cálculo e, na verdade tudo quanto geralmente se denomina matemática pura (exceto geometria), deveremos começar com um vocabulário de três palavras: "Um símbolo é *zero*, outro representa *número* e um terceiro seguinte *depois*" (RUSSELL, 1957, pp. 92-93)

Russell acrescenta em nota, em 1957, que ao fazer o comentário a respeito de Peano, que acabamos de citar, não conhecia ainda a obra de Frege. Mais tarde Russell contrapõe-se a Peano. Sobre isso trataremos no terceiro capítulo desta pesquisa.

I.1.6 A antinomia de Russell

Friedrich Ludwing Frege, concebeu essencialmente a lógica pela construção de um sistema formal que, de fato, constituiu o primeiro cálculo de predicado (uma linguagem formal, e um método de prova no qual se podem representar inferências válidas por meio de predicação, isto é, por meio de afirmações, cujas propriedades são predicados de objetos).

No sistema formal, Frege desenvolveu uma análise de afirmações quantificadas e formalizou a noção de prova em termos que, até hoje, são aceitáveis. Então, demonstrou que se pode usar seu sistema para resolver afirmações matemáticas teóricas em termos de noções lógicas e matemáticas mais simples. Seu objetivo era estabelecer um fundamento lógico rigoroso da Aritmética e, portanto, da Matemática.

Assim, um de seus axiomas exprime de maneira bem precisa a idéia, segundo a qual um conjunto pode ser definido seja como a lista de seus elementos, seja como uma propriedade caracterizando seus elementos. Este axioma, denominado axioma da compreensão, foi provado como inconsistente.

Frege acrescentou-o a seu sistema visando derivar partes significantes da Matemática para a Lógica. Todavia, sua definição (de relação *predecessor* e de conceito de número natural) e métodos (para obter os axiomas da teoria dos números) constituíram um significativo avanço. Para aumentar sua visão sobre o relacionamento da Lógica e da Matemática, Frege concebeu uma filosofia compreensível de linguagem. No entanto, seu projeto, mostrando que a Matemática era redutível à Lógica, não teve muito sucesso. O axioma de compreensão de Frege enuncia que: “para toda propriedade P existe um conjunto M, contendo todos os conjuntos, e somente os conjuntos que satisfazem a propriedade P”.

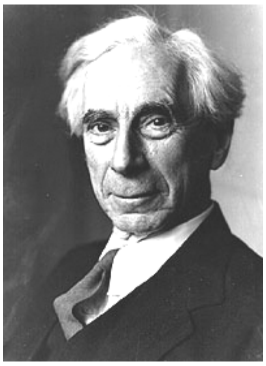
Bertrand Russell descobre a inconsistência desse axioma construindo um paradoxo, o chamado paradoxo de Russell.

A descoberta do paradoxo de Russell fornece argumentos aos conservadores adversários da teoria dos conjuntos que se opõem globalmente a seu programa. Eles pensavam que tais contradições eram enraizadas na idéia mesma da Matemática fundamentada na teoria dos conjuntos, que repousava em particular na suposição de um infinito real. Eles desejavam retornar à segurança das construções, cuja existência pode ser controlada e verificada. Um dos precursores desta atitude (e sob este aspecto um adversário de Dedekind e, mais ainda, de Cantor) foi Leopold Kronecker (1823-1891).

I.2 Biografias

Com o objetivo de inserir os filósofos e matemáticos referenciados neste trabalho, a seguir, apresentamos alguns dados de suas biografias: o britânico Bertrand Russell, o italiano Giuseppe Peano e o alemão Michael Otte.

I.2.1 Bertrand Arthur William Russell



Lógico e filósofo, Russell, nasceu no dia 18 de maio de 1872, no País de Gales. Ele tinha um irmão mais velho Frank, e pertencia a uma família aristocrática inglesa. Ficou órfão aos três anos e foi educado por seus avós paternos e governantas, até matricular-se no curso de Filosofia em Cambridge.

A partir de 1910, como mestre de conferências na Universidade de Cambridge, trouxe decisiva contribuição aos problemas da fundamentação lógica da Matemática que marcavam o início do século XX.

As principais contribuições de Russell à filosofia foram, em especial, a Lógica e a Teoria de Conjuntos. Seus primeiros trabalhos originaram-se de sua preocupação para estabelecer uma forte fundamentação lógica para as matemáticas, preocupação que originou os "*The Principles of Mathematics*", em 1903. Obra esta, elaborada a partir dos trabalhos de Frege e Peano entre outros.

Em 1908, Russell tornou-se membro do Trinity College. Pacifista, perdeu a cátedra por recusar-se se alistar na Primeira Guerra Mundial, ficando preso por seis meses. Nesse período, escreveu a "*Introduction to Mathematical Philosophy*".

De 1910 a 1913, Russell publica em três volumes a obra "*Principia Mathematica*", escrita com Alfred North Whitehead (1861-1947). Para Russell, a Aritmética podia ser construída baseada em puras noções lógicas e nos conceitos de "classes" e "sucessor". Esta obra é considerada como um importante tratado de Lógica do século XX.

Russell utilizou os métodos rigorosos da lógica formal em uma grande variedade de problemas. Um modelo de raciocínio filosófico é apresentado em sua "teoria das descrições". O problema tem a ver com o significado da referência a um objeto não existente, como por exemplo, "o atual rei da França". A solução de Russell é dizer que a forma lógica da proposição é obscurecida pela sua forma gramatical, cuja análise mostra uma descrição ligada a uma falsa asserção de existência. O autor estava empenhado na aplicação da análise lógica às questões epistemológicas e atacou esse problema, tentando dividir o conhecimento humano em proposições mínimas que fossem verificáveis por observação empírica, pela razão e pela lógica.

Estava profundamente convencido de que todos os fatos, objetos e relações eram logicamente independentes, tanto uns em relação aos outros, como de nossa capacidade de conhecê-los e, todo conhecimento é dependente da experiência sensível[4]. Essa posição de Russell originou a obra "*Our knowledge of the external world*" (Nosso conhecimento do mundo externo) em 1914, designada de atomismo[5] lógico, influenciada pelas idéias de seu aluno Ludwig Wittgenstein (1889-1951), de quem descordaria mais tarde.

Dificuldades de análise levaram Russell a desistir de muitas das teses características do atomismo lógico e com sua "*Analysis of mind*" (Análise da mente) de 1921 e "Analysis of matter" (Análise da matéria) de 1926, mudou para o chamado monismo[6] neutral. Suas análises das bases do método científico

---

[4] Aquilo que pode ser percebido pelos sentidos. (ABBAGNANO, 2003, p. 872)

[5] A concepção atomística consiste em propor, explicar a vida da consciência, da sociedade ou da linguagem, uma hipótese análoga à do A. filósofo ou da teoria atômica, afirmando que a consciência, a sociedade ou a linguagem, são constituídas de elementos simples irredutíveis, cujas diferentes combinações explicam todas as modalidades. (Ibid., p. 92)

[6] Toda doutrina para a qual existe uma só substância ou um só tipo de substâncias. [...] Opõe-se em todos os casos ao dualismo, que supõe a existência de dois tipos de substância (Descartes) ou de dois mundo (Platão, Kant). (COMTE-SPONVILLE, 2003, pp. 396-397)

culminaram na obra "*Human knowledge, its scope and limits*" (Conhecimento humano, seu escopo e limites) de 1948.

Russell financiou-se com a escrita de livros populares, explanando a respeito da Física, Ética e Educação para leigos. Fundou a escola experimental de Beacon Hill com Dora, até, então sua esposa, em 1927.

Em 1939 foi viver nos Estados Unidos da América, para ensinar na Universidade da Califórnia, em Los Angeles. Foi nomeado professor do *City College* de New York pouco tempo. Depois de controvérsias públicas, sua nomeação foi anulada pelo tribunal, e tornou-se "moralmente impróprio" para o ensino no C*ollege*, por suas opiniões radicais. Em 1944, retornou à Grã-Bretanha e ao *Trinity College*.

A obra mais lida de Russell foi a "History of Western Philosophy" (História da Filosofia Ocidental) de 1954, que se tornou *best-seller* no Reino Unido e nos Estados Unidos da América.

Já com 90 anos, mediou o conflito relativo aos mísseis de Cuba para evitar que se desencadeasse um ataque militar. Organizou com Albert Einstein o movimento *Pugwash* que luta contra a proliferação de armas nucleares.

No final dos anos 60 do século passado, Russell escreveu sua autobiografia em três volumes. Morreu de gripe no dia 2 de fevereiro de 1970, suas cinzas foram dispersas sobre as montanhas inglesas.

Ao longo de sua vida, Russell reconheceu dificuldades em suas posições e esteve sempre pronto a aceitar críticas e a modificar seus pontos de vista. Abrangendo um campo imenso, demonstrou flexibilidade e aversão aos dogmas e um rigor de análise que justificam e, muito, sua posição.

Para Russell, a filosofia deve preparar terreno para uma ciência pragmática que permitirá ao homem dedicar-se ao aperfeiçoamento do mundo em que vive.

I.2.2 Giuseppe Peano

Lógico e matemático, Peano, nasceu em 27 de agosto de 1858, em Spinetta, num vilarejo da Itália, próximo a Cuneo. Formou-se em matemática na Universidade de Turim em 1880. Após a conclusão do curso, tornou-se professor assistente universitário.

No período em que trabalhou como professor assistente, Peano percebeu a necessidade de uma revisão dos fundamentos da Matemática. Baseado em suas aulas de Cálculo, ele decidiu lançar seu primeiro livro com o nome do mestre Genocchi sob o título *"Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale"* (Cálculo diferencial e princípios do cálculo diferencial) em 1884. Em 1887, Peano escreveu o livro *"Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale"* (Aplicação geométrica do cálculo infinitesimal). Casou-se, mas não teve filhos.

No livro "*Calcolo geométrico"* (Cálculo geométrico) de 1888, que representa seu primeiro trabalho em Lógica Matemática, Peano é conhecido, sobretudo, pela criação de um sistema de símbolos que permite a descrição e o enunciado das proposições lógicas e matemáticas sem recorrer à linguagem comum. Embora não seja considerado como o pai da Lógica Matemática, cuja patente é de Frege, Peano foi o fundador, um dos pioneiros na história da Lógica, desempenhando nessa área papel de grande importância.

Neste período, o movimento a favor da axiomatização[7] da Matemática teve grande impulso com Cantor e com o surgimento das geometrias não-euclidianas. A contribuição de Peano foi decisiva, originando, naturalmente, o desejo de uma axiomatização de toda a Matemática, isto é, o desenvolvimento dos postulados (axiomas) e definições que são bases do sistema matemático.

[7] Entende-se, às vezes, a exigência surgida em meados do século XIX, no campo das matemáticas, para conferir unidade e rigor lógico à análise matemática, fundando-a em uma teoria dos números reais. Essa teoria foi depois desenvolvida por Cantor e Dedekind (ABBAGNANO, 2003. p. 80)

Em 1889, Peano propõe a axiomatização dos números naturais, na forma de panfletos, escritos em latim, "*Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita"* (Princípios Aritméticos: Novo Método de Exposição*)*.

Em sua primeira versão, esta obra contém, um sistema da Lógica Matemática, incluindo os famosos axiomas que definiram os números naturais, denominados de *axiomas de Peano*. A sua importância na Lógica e nos Fundamentos da Matemática foi imediatamente reconhecida.

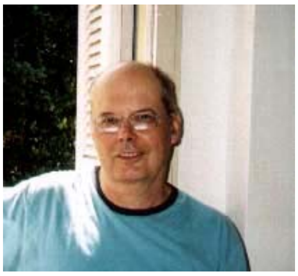
Em 1890, Peano inventou uma curva que preenche uma área plana conhecida como *curva de Peano*, cuja existência supunha-se impossível, e, assim, muito dinamizou a Teoria dos Conjuntos.

O matemático italiano preocupado com a lingüística criou uma língua internacional denominada "latino sine flexione" ou "interlíngua", cujo vocabulário é muito simplificado, língua essa criada a partir do Latim, Francês, Inglês e Alemão. Peano fundou a "*Rivista di Matemática*" (Revista de Matemática) em 1891, que mais tarde foi publicada em francês e em sua interlíngua. No ano de 1908, foi eleito presidente da "Academia pro interlíngua" que, posteriormente, se transformou em uma associação científica e obteve por meio da revista "Schola et Vita" (Escola e Vida) um meio para a expressão oficial.

Em 1900, participou do Congresso Internacional de Paris sobre Filosofia e Matemática, a sua intervenção nesse congresso impressionou muito Bertrand Russell, que atribuiu a precisão da argumentação de Peano a seus conhecimentos em Lógica Matemática.

Giuseppe Peano foi vítima de um ataque cardíaco e faleceu no dia 20 de abril de 1932 em Turim, na Itália.

I.2.3 Michael Friedrich Otte



Matemático e filósofo, Otte, nasceu dia 27 de março de 1938 em Riga. Na Alemanha, concluiu seu mestrado em 1963, e defendeu dois doutorados em matemática, sendo, o segundo doutorado em 1972. Atuou em cinco países diferentes, como pesquisador e educador.

Na Alemanha, trabalhou na Universitaet Muenster (Westfaelische-Wilhelms) W.W.U.M, de 1967 a 1973, cuja dedicação era exclusiva, atuou como membro da diretoria do Instituto da Matemática, como professor de Matemática da Graduação e, em Educação Matemática na Pós-Graduação.

Em 1973, fundou um novo Instituto de Pesquisas em Didática Matemática (IDM), estabelecido na Universitaet Bielefeld, que se tornou referência mundial nesta área. Nesse mesmo período, Otte, trabalhou como diretor executivo.

Aposentou-se em abril de 2003, mas continuou a contribuir com sua experiência em Educação Matemática, no Brasil. Otte trabalhou na Universidade Estadual Paulista (UNESP) em Rio Claro, de 1990 a 1991, na Universidade Federal do Mato Grosso (UFMT) em Cuiabá, de 1996 a 1999 e na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) de 2002 a 2005 como professor pesquisador no Programa de Pós Graduação em Educação Matemática, atuando na linha de pesquisa da História, Epistemologia e Educação Matemática.

Atualmente, trabalha na Universidade Federal do Mato Grosso (UFMT), no Instituto de Educação Programa de Pós-Graduação, cuja linha de pesquisa é Ensino de Ciências e Educação Matemática.

A carreira acadêmica de Otte está fundamentada em estudos importantes que muito contribuíram para a Educação da Matemática. Otte é considerado um dos fundadores da Educação Matemática na Alemanha.

A institucionalização da Educação Matemática ocorreu por volta dos anos 60 do século passado e, como uma disciplina, ampliou-se em larga escala. Houve relevantes mudanças no papel e no lugar da ciência na sociedade, as universidades começaram a enfatizar problemas de pesquisa aplicados e básicos. O desenvolvimento da Educação Matemática tem início internacional.

Os trabalhos didáticos de matemáticos dos séculos XIX e XX, podem ser observados nos resultados dos trabalhos da Comissão Internacional em Instrução Matemática (ICMI), inspirada e comandada por Felix Klein (1849-1925), de 1908 até a década 20 do século passado, com uma pesquisa na qual compara a Educação Matemática com a de outros países. O objetivo desta Comissão Internacional foi tentar reformular e revolucionar a Educação Matemática.

Esse movimento iniciou-se em 1960 e de certo modo levou o espírito internacional das Comissões Internacionais, em especial a da ICMI. Muitos foram os colaboradores que atuaram nesse período.

A carreira acadêmica e científica de Michael Otte situou-se nesse momento histórico de desenvolvimento. Esse período representou a inauguração de pesquisas sistemáticas e, de uma nova imagem da disciplina da Educação Matemática. Também na Alemanha, iniciaram a institucionalização da pesquisa básica em Educação Matemática, nos departamentos das Universidades e Faculdades. A fundação Volkswagen propôs estabelecer um instituto central de pesquisa na Universidade de Bielefeld, o já mencionado IDM, objetivando alcançar uma compreensão científica mais profunda da desastrosa falha da nova Matemática nas escolas primárias alemãs.

Michael Otte foi indicado para ocupar uma das três cadeiras de diretor executivo fundador, dirigindo o IDM (Instituto de Pesquisas em Didática Matemática) na Universidade de Bielefeld por 30 anos.

Após o Instituto iniciar seus trabalhos, três dos mais importantes livros surgiram. O primeiro, "Mathematiker ueber die Mathematik" (Matemáticos sobre a Matemática) em 1974, "Mathematik die uns angeht" (A Matemática no que concerne a nós) em 1977 e "*Text, Wissen, Taetigkeit*" (Textos, Conhecimentos e Atividade) em 1980. Otte escreveu, um artigo, que se encontra na publicação intitulada "*New Trends in Mathematics Teaching*" (Paris, 1979) da Unesco, a respeito da Formação de professores, artigo este, desenvolvido a partir dos resultados do III Congresso Internacional de Educação Matemática de 1976 em Karlsruhe. Estas obras discursavam sobre a Matemática e sua aprendizagem, além da epistemologia, história e ciência, cujos volumes foram frutos de um relevante esforço científico do autor.

Para Otte, a importância de seu trabalho está na conexão única de considerar a Educação Matemática como uma disciplina, incluindo, a ênfase na compreensão da natureza disciplinar e interdisciplinar.

Na tentativa de identificar as idéias centrais da Educação Matemática, guiando princípios e problemas essenciais, Otte criou uma perspectiva totalmente nova e pouco usual no campo da ciência e das relações que as disciplinas têm umas com as outras, e, com essas novas disciplinas da Educação Matemática que foram, então, estabelecidas. Ele defendeu que a Educação Matemática não poderia sobreviver sem relações vivamente conectadas com as disciplinas que ocupam o topo do conhecimento como, a epistemologia, a historia da Ciência e da Matemática, a filosofia, a semiótica, a sociologia, a psicologia, dentre outras. A sugestão interessante para fazer com que essas idéias funcionassem, foi sua utilização da noção de complementaridade[8].

Para Otte, a complementaridade parece como uma metodologia heurística, que é igualmente conhecida como a dialética entre coexistência e co-corrência da contradição.

Recentemente, Michael Otte e seus colaboradores começaram a trabalhar em uma perspectiva de pesquisa que tenta compreender melhor o papel do sentido e das representações da atividade matemática e a comunicação a respeito da Matemática. Estas tentativas podem estar relacionadas à recente tentativa internacional que acaba de emergir para reformular os valores da Educação Matemática em termos semióticos, da "teoria do sentido". A fundamentação semiótica da Educação Matemática pode ser uma possibilidade promissora.

---

[8] A noção de complementaridade será abordada no Capítulo II, no tópico II.2

Capítulo II

O Método Axiomático e a Noção de Complementaridade

Neste capítulo, apresentamos alguns elementos que expressam a problemática de diferentes usos do método axiomático em análise por Russell, referente à conceituação de número. Incluímos, também, neste capítulo, uma síntese do estudo de Otte sobre a noção de complementaridade, noção esta que possibilita o enfrentamento da dualidade conceitual de número. Nosso objetivo é referenciar as bases teóricas que sustentam esta pesquisa.

II.1 O método axiomático e a diversidade de usos

A axiomatização da Aritmética exigiu uma nova conceituação da noção de axioma, exigência essa, que se constituiu em uma das razões de demora de tantos séculos para a conceituação de número. As diferentes finalidades do recurso à axiomática explicam a dificuldade que os matemáticos encontraram para axiomatizar a Aritmética, ou a Matemática em geral.

A origem do método axiomático remonta aos gregos, e, os Elementos de Euclides, aparentemente, são os primeiros monumentos que testemunham, sem a menor ambigüidade, a aplicação do método. É possível mesmo, que eles marcam.

O início dessa invenção, e é certo, que eles forneceram uma sorte de modelo histórico. Segundo um tal modelo, o método axiomático consiste em colocar, à base da teoria que se propõe axiomatizar, algumas proposições ou regras, as mais simples e as menos numerosas o possível, para as quais não se fornece alguma demonstração, mas a partir das quais pode-se obter, em contraposição, a demonstração de todas as proposições que se necessita deduzir.

Se, uma tal descrição é suficientemente geral para poder se aplicar tanto aos gregos do fim do século IV a.C, como aos lógicos e matemáticos do século XX, o recurso a certas considerações suplementares permite introduzir algumas diferenças entre uns e outros.

Nos Elementos de Euclides, é feito um duplo uso do método axiomático, no sentido em que era aplicado a duas disciplinas sem grande parentesco uma com a outra, a Geometria e a Aritmética. Aparentemente, foi um certo reconhecimento desta dupla utilização que induziu o autor dos Elementos a distinguir entre as proposições inicialmente admitidas sem demonstração, aquelas que chamava de *postulados* e as que ele denominava de *noções comuns*.

Manifestamente os gregos, por *noções comuns*, entendiam noções comuns ao menos à geometria e à aritmética. Por exemplo, citamos as concernentes às propriedades de *igualdade*, sem a distinção que os modernos introduziram entre congruência, próprias à Geometria, e uma espécie de *identidade* que se pode encontrar na Aritmética. Os postulados, em contraposição, tratando de *pontos*, de *linhas retas*, do *círculo* ou de *ângulos*, parecem bem, diferentemente das *noções comuns*, próprios só aos objetos da Geometria. Aparentemente, portanto, esta distinção entre *noções comuns* e *postulados,* é essencialmente ligada ao fato, de se tratarem de duas disciplinas distintas; de um lado, a Geometria dos seis primeiros livros e de outro, a Aritmética, dos três seguintes.

Pouco importa para o que estamos tratando, que alguns comentadores da obra de Euclides tenham pensado que as *noções comuns* fossem verdades muito evidentes para dever, ou mesmo poder, serem demonstradas e que os *postulados*, ao contrário, só pudessem ser admitidos por alguma convenção. Nos é suficiente no momento constatar que, se se propõe construir uma teoria, um sistema de proposições, por vias dedutivas, que as teses assim elaboradas sejam essencialmente verdadeiras ou que elas sejam, ao contrário, de pura convenção, será necessário de toda maneira postular ao menos uma proposição inicial a partir da qual as deduções possam em seguida serem executadas.

Os gregos haviam largamente compreendido o interesse do método que hoje chamamos de *hipotético-dedutivo*, para a elaboração dos sistemas lógico-matemáticos. Este método, que nos séculos IV e III a.C tinha sido ao menos brilhantemente ilustrado, senão inventado, não será esquecido na vintena de séculos que se seguem. Ele continuará a ser aplicado, em particular no domínio da geometria; mas não parece que ele mesmo tenha sido objeto de uma evolução muito original antes do século XIX.

A essa época, o instrumento axiomático vai se abrir para uma renovação, por ocasião do reexame dos fundamentos da Geometria e dos estudos de Lógica Formal, configurando o término de uma relativa estagnação.

Ao final do século XVIII, o problema dos fundamentos da Geometria encontra, de fato, um novo interesse em razão do reconhecimento da impossibilidade de deduzir, o que constituía na obra de Euclides o quinto postulado, a partir dos demais axiomas, e, pela possibilidade de considerar geometrias que pressuporiam que se pudesse por um ponto do plano, passar mais de uma paralela a uma reta dada, ou que não se pudesse passar nenhuma.

Esse encontro imporá a idéia que certos, ou ao menos, postulados da única geometria até então considerada, e doravante restritivamente designada como euclidiana, não gozavam de um privilégio de particular evidência, e que seria necessário reconhecer que eles se acomodavam bastante bem aos dados de nossa experiência, ao menos no interior de certos limites dela.

Retomar a construção axiomática da Geometria clássica faz desembocar notadamente na obra-prima matemática, lógica e filosófica: Os Fundamentos da Geometria, de Hilbert que deram lugar à modificações bastante importantes.

E para se organizar o inventário dos pressupostos da Geometria, deve-se levar em conta, que é bem conhecido que, ao final do século XIX, emerge também um interesse renovado pela questão dos fundamentos da lógica. A melhor testemunha disso é, sem dúvida, a *Begriffsschrift*, publicada em 1879. Frege procede nessa obra, na tradição euclidiana, pela via axiomática. Ele introduz a forma de *cálculo dos predicados*, apresentando nove proposições indemonstráveis (digamos nove axiomas), o que ele justifica da maneira seguinte.

> “Como não se podem enumerar todas as leis afirmáveis, pois seu conjunto é incalculável, só se pode atingir a completude buscando aquelas que contêm *em potência* todas as outras”[9] (FREGE apud GARDIES, 2004, p. 98)

Encontramos um recurso análogo ao procedimento hipotético-dedutivo, para o fundamento da Lógica, nos *Principia Matemática* de Whitehead e Russell.

Os Modernos, retomando assim um princípio herdado dos gregos, poderiam ser tentados a melhorar a aplicação do método de diversas maneiras. A mais imediata consistia em assegurar que os axiomas, dos quais se pudessem deduzir todas as proposições em número infinito constitutivas da teoria fossem, as mais simples, e menos numerosas, o possível. Em contraposição, seria necessário assegurar que a axiomática assim pressuposta fosse bem completa, isto é, que ela pudesse ser suficiente para engendrar todos os teoremas que se pudesse esperar. Mas a evolução, ou o aperfeiçoamento, do princípio euclidiano, arquimediano, aristotélico, chrysippiano da axiomática, podia ainda tomar uma outra forma que aquela de uma redução a um número mínimal de axiomas indispensáveis. Trata-se da organização de grupos de axiomas como fez Hilbert.

[9] Comme on ne peut pas énumérer toutes les lois affirmables, puisque leur ensemble est incalculable, on ne peut atteindre la complétude qu’ en cherchant celles qui contiennent en *puissance* toutes les autres.

Este procedimento que foi inaugurado para o caso da geometria, era bastante sedutor para que pudesse ser aplicado a outros sistemas.

A situação altera-se nos dias que sucedem a Primeira Guerra Mundial, quando se toma consciência que um sistema lógico que não se supunha ser apresentado senão em bases sintáxicas, poderia ser também fundamentado em um procedimento puramente semântico que justificaria de modo direto a validade de suas teses.

Então, o recurso ao procedimento axiomático pode corresponder às exigências muito diferentes.

Primeira situação: a concepção dos sistemas lógico-matemáticos, constituída sobre o modelo dos fundamentos da geometria; que se parta de um conjunto de proposições iniciais simplesmente postuladas; que não pode ter então outro critério de verdade que a não contradição.

Segunda situação: a possibilidade de fundamentar os sistemas propriamente lógicos sobre bases semânticas; que isso não signifique que, sobre tais bases, se pudesse, para além ao menos do simples *cálculo das proposições*, aceder a procedimentos que sejam decisórios.

Terceira situação, na qual não há identidade entre o conjunto das proposições sintaticamente dedutíveis e aquele das proposições semanticamente válidas, mas, simples inclusão do primeiro no segundo. Que existem assim em Aritmética proposições semanticamente verdadeiras que não sejam demonstráveis no sistema axiomático que se possa colocar à base desta disciplina.

Quarta situação, quando o recurso aos procedimentos hipotético-dedutivos tem por função permitir tirar conseqüências e propriedades comuns, a partir de contextos nos quais as aparências muito diferentes poderiam dissimular a identidade de estrutura.

Como recapitulação dos quatro tipos de uso do método axiomático, podemos dizer que a assimilação abusiva do procedimento axiomático próprio às três últimas situações àquela da primeira, pode induzir a pensar abusivamente que todo o rigor do matemático só pode se exercer nos limites de seus próprios pressupostos.

O estudo direto das estruturas destaca-se, também, como importante na evolução da Matemática ocorrida a partir do século XIX, na qual se podia revelar a presença dos objetos que não tinham, em um primeiro olhar, nada em comum.

Jean Dieudonné (1906-1992) fez observar que, o inventário dos poliedros regulares convexos, objeto do último livro dos Elementos que culminava a geometria de Euclides, seria substituído hoje pela "descrição dos subgrupos finitos do grupo dos deslocamentos no espaço a 3 dimensões" (apud GARDIES, 2004, pg. 117). O que é verdadeiro para este objeto dependente, ou ao menos parcialmente, de nossa experiência empírica que é o espaço euclidiano, permanece verdadeiro para objetos como os diferentes tipos de números, que aparentemente não dependem dela, se admite sua edificação progressiva pautada nos inteiros naturais. "Sobre o conjunto dos números reais, observa o mesmo autor, se entrecruzam estruturas diversas: corpo, ordem, topologia".

A multiplicação de tais observações incita, às vezes, a caracterizar a evolução da Matemática por uma progressiva substituição pelo estudo da estrutura o estudo da natureza de seus objetos.

> Pouco a pouco, escreve ainda Dieudonné, se resgata uma idéia geral que se tornará precisa no século XX, aquela da estrutura à base de uma teoria matemática; ela é a conseqüência da constatação que o que joga o papel primordial numa teoria, são as *relações* entre os objetos matemáticos que nela figuram, mais que a *natureza* desses objetos, e que em duas teorias muito diferentes, pode ocorrer que relações se exprimam da *mesma maneira*...; o sistema dessas relações e suas conseqüências é uma mesma estrutura "subjascentes" às duas teorias.[10] (DIEUDONNÉ apud GARDIES, 2004, p. 118)

[10] Peu à peu, écrit encore Jean Dieudonné, se dégage une idée genérale qui se précisera au XX[e] siécle, celle de *struture* à la base d´une théorie mathématique; elle est la conséquence de la constatation que ce qui joue le rôle primordial dans une théorie, ce sont les *relations* entre les objets mathématiques qui y figurent, plutôt que la *nature* de ces objets, et que dans deux théories très différentes, il se peut que des relations s´expriment de la *même maniére*...; le systéme de ces relations et de leurs conséquences est une même structure "sous-jacente" aux deux théories.

Após dois séculos, a história da Matemática tenderá a mostrar que o interesse manifestado no início, em particular, na escola alemã após Gauss e Dirichlet, pelo estudo da *natureza* de diversas entidades numéricas, dos inteiros aos complexos, é progressivamente substituído pelo estudo direto das estruturas que se poderiam se encontrar nas entidades de natureza muito diferentes. Assim, observa Dieudonné, os matemáticos vão de mais a mais, a partir dos últimos anos do século XIX, "falar de relações entre objetos em que a natureza é completamente indeterminada":

> Então, simplesmente, continua o mesmo autor, elementos dos conjuntos colocados como objetos primitivos de uma teoria axiomática...., a teoria de uma tal estrutura será o desenvolvimento das propriedades que são unicamente conseqüência de seus axiomas, e não dependem da natureza dos objetos matemáticos que podem verificar esses axiomas[11]. (DIEUDONNÉ apud GARDIES, 2004, p. 118)

A importância fundamental tomada na Matemática por este reconhecimento das estruturas comuns a objetos muito diferentes, cada uma definida nela mesma por algum conjunto de axiomas, podendo, portanto se encontrar de um objeto a outro, têm as vias de pesquisa assim abertas.

Entretanto, é preciso sublinhar que o reconhecimento dessas estruturas não implica nenhum desconhecimento da adversidade da *natureza* dos objetos em que essas estruturas se enraízam.

Desse modo, uma vez reconhecida a natureza lógica dos inteiros naturais e dos inteiros relativos a dos racionais, dos reais, dos complexos, elaborados cada vez a partir do nível precedente, nada impede de caracterizar nelas mesmas propriedades estruturais comuns a algumas, estabelecendo, mais por garantia sobre uma mesma axiomática.

A estrutura aqui, longe de eliminar a natureza ou mais simplesmente de ocupar seu lugar, a pressupõe. Em contraposição, é preciso reconhecer que, podem ocorrer em certos casos, em particular na Geometria, que seja mais

[11] Ce sont simplesment, continue le même auteur, des elements d´ensemble poses comme objets primitives d´une théorie axiomatique…; la théorie d´une telle structure sera lê déroulement des proprietéss qui sont uniquement consequence de ses axioms, et ne dependent pas de la nature des objets mathématiques qui peuvent vérifier ces axiomes.

pertinente falar de *estrutura*, que é contestável que possa aí falar de natureza; mas isto está longe de ser uma regra que se possa aplicar a todos os casos.

Desse sobrevôo sobre, os diversos usos do termo, *axiomática*, parece que se pode concluir que o procedimento designado por essa palavra corresponde à situações muito diferentes, cuja confusão só pode induzir a simplificações abusivas. A importância tomada na Matemática pelo estudo direto das estruturas, em particular, só leva a esquecer que esta disciplina tem seus objetos e alguns destes ao menos pudessem ter sua natureza, estando bem entendido que esta natureza, não se situa no mesmo nível de existência que aquele das substâncias primeiras, que os mais afirmativos, ou os mais provocantes dos matemáticos, não têm hesitado às vezes em sugerir um lugar para eles, como para melhor sublinhar a irredutível objetividade.

II.2 A noção de Complementaridade

Apresentamos a seguir, alguns aspectos da noção da complementaridade, baseados no artigo de Michael Otte, intitulado “Complementarity, sets and numbers”, de 2003.

II.2.1 Epistemologia e cognição

Em meados de 1930, a noção de “complementaridade” foi introduzida pelo físico dinamarquês Niels Bohr (1885-1962), baseada na constatação de que, ao se observar um fenômeno atômico, conclui-se que, uma realidade independente do senso físico comum não poderá ser descrita nem pelo fenômeno nem pelos observadores. Bohr acreditou no significado epistemológico e metafísico de seu princípio.

Em Matemática e em outros campos da Ciência, a noção de complementaridade tem sido muito usada. Vários autores têm feito uso dessa noção, objetivando capturar os aspectos essenciais do desenvolvimento cognitivo e epistemológico dos conceitos científicos e matemáticos. Uma postura complementarista é induzida pela impossibilidade de definir a realidade matemática independente da atividade do conhecimento em si.

> [...] A prática matemática, que tem progressivamente se libertado de esquemas metafísicos e ontológicos desde Cantor e Hilbert, requer uma abordagem complementarista – talvez mais do que qualquer outro campo de conhecimento – afim de que seja adequadamente compreendida.[12] (OTTE, 2003. p. 204)

A complementaridade é concebida em termos das noções duais intensão e extensão[13] de termos matemáticos. Intensões e extensões tornam-se relativamente independentes uma da outra e estão circular ou complementarmente conectadas.

Para Michael Otte, as teorias modernas axiomáticas tornaram-se teorias intensionais no modo que os axiomas são utilizados, como um conjunto de postulados que não só determinam as intensões dos termos teóricos, mas também constituem as extensões ou referentes.

O autor citado apresenta no decorrer do capítulo, exemplos baseados da geometria euclidiana, que faz uso de objetos que parecem ser dados pela intuição e independente da teoria. Entretanto, já na Geometria de Hilbert a situação é outra. Para responder questões como: o que é um ponto? O que é um número? É necessário citar as descrições axiomáticas respectivas das relações ou leis que governam estas entidades.

Para Otte, qualquer teoria possui várias aplicações ou modelos não-isomórficos e o que os axiomas descrevem são classes de objetos, mais que objetos em si. A esse respeito, os axiomas parecem leis naturais e, portanto, devem ser suplementados por uma indicação do domínio de objetos sobre os quais eles se aplicam.

---

[12] […] Mathematical practice, which has increasingly liberated itself from metaphysical and ontological agendas since Cantor and Hilbert, requires a complementarist approach – perhaps more than any other field of knowledge – in order to be understood properly.

[13] Este par de termos (intensão e extensão) foi introduzido por Leibniz, para expressar a distinção que a *Lógica* de Port-Royal expressara com o par, *compreensão-extensão*, e a lógica de Stuart Mill expressara com o par, *conotação-denotação*. [...] O uso desses dois termos ainda prevalece na lógica contemporânea, que associou distinção, estabelecida por Frege, entre sentido e significado. Frege disse: "Ao pensarmos num signo, deveremos ligar a ele duas coisas distintas: não só o objeto designado, que será denominado *significado* daquele signo, mas também o *sentido* do signo, que denota a maneira como esse objeto nos é dado" ("Über Sinn und Bedeutung", 1892, § 1, trad. It., em *Aritmética e lógica*, p. 218) (ABBAGNANO, 2003, pp. 89-90)

Portanto, os termos matemáticos, sentidos ou intensões, que são dados pelos sistemas de axiomas e noções como leis, são usados de maneira “atributiva”, assim como “referencialmente”. Isto é, por um lado, os termos decorrentes dos axiomas de uma teoria podem ser vistos como os que apresentam descrições a seus referentes, objetivando aplicá-los àquelas e somente àquelas entidades com relação às quais eles são verdadeiros. Por outro, os termos contidos nos axiomas ou nos discursos matemáticos, em geral, podem ser usados também “referencialmente”.

A complementaridade torna-se visível e distinguível da mera dualidade entre intensão e extensão só baseada na perspectiva genética. Esta perspectiva concentra-se no caráter evolutivo de nosso conhecimento matemático. Portanto, só apoiada nessa perspectiva a relação entre sujeito e objeto, mais que o objeto em si, torna-se o foco. Para Otte, a noção de complementaridade é, então, relevante, em especial, para todo o estudo da fundamentação epistemológica da Educação Matemática.

Segundo Otte, se entendermos a Matemática na perspectiva genética, deveremos abandonar algumas noções, tais como, o desconhecido, isto é, objetos matemáticos que não podem ser representados ou uma verdade independente da possibilidade de verificação ou prova. Para Otte (2003, p. 205) “[...] nossa visão da matemática, por essa razão, tem um sabor pragmático, e sua tradição retoma a Peirce, Kant e, finalmente, Berkeley[...]”[14].

Berkeley (1685-1753) concordava com a afirmação de Locke (1632-1704), isto é, que nosso conhecimento é fundamentado em idéias concebidas por sensações. Nessas bases, propôs-se a examinar tudo que existia. O autor citado acreditava que, para algo existir para nós, necessariamente deveria ser representado. Daí, a importância da complementaridade que surge, porque signos são, ao mesmo tempo, usados referencial e atributivamente.

O conhecimento é uma atividade para além de uma simples imagem refletida, de algum mundo existente. Com freqüência, a essência dos discursos sobre a existência em Matemática está na relevância do fenômeno da

[14] [...] Our view of mathematics, therefore, has a pragmatic flavor, and its tradition goes back to Peirce, Kant, and finally Berkeley […]

objetividade matemática, muito mais que nos objetos em sentido empírico e concreto. Para Otte, esta visão pragmática da Matemática poderia ser reformulada da seguinte maneira:

> Um conceito matemático, como o conceito de número ou função, não existe independentemente da totalidade de suas possíveis representações, mas, não pode ser confundido tão pouco, com nenhuma de tais representações.[15] (OTTE, 2003, p. 206)

Uma "equação" representada por A = B é, geralmente, interpretada como A e B sendo duas diferentes intensões da mesma extensão, isto é, distintas designações do mesmo objeto. Ambos os termos A e B têm a mesma referência, enquanto o sentido ou modo de representação é diferente. Para Otte (2003, p. 206), então, "todo teorema matemático pode ser estabelecido como uma igualdade A = B [...]"[16] O autor apresenta um exemplo de Frege, encontrado em seu famoso ensaio, intitulado "*Sinn und Bedeutung"* de 1969.

> Sejam *a*, *b* e *c* retas que conectam os vértices de um triângulo aos pontos médios dos lados opostos. O ponto de intersecção de *a* e *b*, então, é o mesmo que o ponto de intersecção de *b* e *c*. Então, temos diferentes designações para o mesmo ponto, e esses nomes ('ponto de intersecção de *a* e *b*': 'ponto de intersecção de *b* e c'), da mesma forma indicam o modo de apresentação, e, conseqüentemente, a afirmação contém conhecimento efetivo.[17] (FREGE apud OTTE, 2003, p. 206)

Para Frege, A e B são denominações de descrição de um certo ponto. Sendo relevante a abstração desse procedimento para a Matemática e o primeiro a notar essa importância foi Peirce (1839-1914).

O uso predicativo ou atributivo de um conceito é transformado em um uso referencial para poder incorporar a entidade, então, é sintetizado em numa nova estrutura relacional, menciona Otte. Portanto, na Matemática, a relação entre o particular e geral, entre objeto e conceito ou relações é extremamente relevante, mais que a busca por fundamentos objetivos absolutos.

---

[15] A mathematical concept, such as the concept of number or function, does not exist independently of the *totality* of its possible representations, but must not be confused with any such representation either.

[16] Every mathematical theorem can be established as an equality A=B […]

[17] Let a, b, c be the lines connecting the vertices of a triangle with the midpoints of the opposite sides. The point of intersection of a and b is then same as the point of intersection of b and c. So we have different designations for the same point, and these names ('point of intersection of a and b': 'point of intersection of b and c') likewise indicate the mode of presentation, and hence the statement contains actual knowledge.

Já nas ciências empíricas, há uma distinção natural entre fatos e leis ou objetos e relações, as relações parecem ser completamente penetrantes na Matemática. A diferença entre objetos e relações torna-se extremamente relativa.

A Matemática não é uma ciência analítica de conceitos nem de conhecimentos puramente descritivos baseados em meras abstrações observadas de objetos predeterminados. De acordo com Otte a "Matemática não é completamente intensional nem meramente um conhecimento extensional"[18]. (2003, p. 207)

Para Frege, os matemáticos não definem conceitos nem seus conteúdos, mas, suas extensões.

> Para o matemático, não é mais correto e nem mais incorreto definir uma secção cônica como a circunferência da intersecção de um plano com a superfície de um cone circular reto, quanto como uma curva plana cuja equação em coordenadas retangulares é de grau 2. Qualquer escolha que ele faça de uma ou de outra dessas duas definições, é guiada apenas pelos graus da conveniência, embora essas expressões não tenham o mesmo sentido nem evoquem as mesmas idéias.[19] (FREGE apud OTTE, 2003, p. 207)

No entanto, Otte apresenta algumas objeções. Em primeiro lugar, objetivando o crescimento do conhecimento, parece importante a definição escolhida, a perspectiva tomada ou como a situação-problema é representada, isto é, diferentes conceitos auxiliam a estabelecer distintos tipos de relações e influenciam no desenvolvimento de diferentes modos.

Dois conceitos podem ser extensionalmente equivalentes e, mesmo assim, ser diferentes e podem exercer distintas funções com respeito a um certo contexto cognitivo e ao crescimento do conhecimento. Portanto, A = B pode, algumas vezes, ser mais interpretado de modo conveniente como uma transformação ou uma relação de referência.

[18] Mathematics is neither completely intensional nor merely extensional knowledge.
[19] For the mathematician, it is no correct and more incorrect to define a conic section as the circumference of the intersection of a plane and the surface of a right circular cone than as a plane curve whose equation with respect to rectangular co-ordinates is of degree 2. Which of these two definitions he chooses, or whether he chooses another again, is guided solely by grounds of convenience, although these expressions neither have the same sense nor evoke the same ideas.

Em segundo lugar, esta extensão como, por exemplo, as entidades matemáticas ou, no caso dos termos teóricos, como energia – o calor e o movimento são representações diferentes – não são necessariamente dadas dessa maneira, como um objeto empírico, mas como um objeto universal ou uma relação invariante. O que nos leva a questionar a interpretação de Frege sobre A = B, entendendo-a mais em termos de relações ou funções.

Consideremos um exemplo trivial, a equação 2 + 2 = 4. De acordo com Frege "2 + 2" e "4" têm o mesmo significado, mas sentidos diferentes. Esta interpretação pressupõe a existência de números como objetos. O tipo de ponto de vista encontra fortes objeções das mentes construtivas de matemáticos, para os quais a existência matemática só faz sentido se for relativa a uma linguagem ou a um sistema axiomático.

Para Lebesgue (1875-1941), a Aritmética pode ser tratada independente do sistema decimal de numeração. Ele questiona sobre: Quais seriam as razões que poderiam recusar uma abordagem como esta?

Segundo Otte, Lebesgue, primeiramente, atribui estas razões aos nossos hábitos metafísicos, o que não seria uma blasfêmia chamar um número de símbolo. O número constitui a verdadeira essência das coisas? Temos aqui o medo manifestando-se das mais variadas maneiras.

> [...] Por exemplo, nós sabemos que podemos certamente usar indistintamente o termo em inglês *chair* ou o termo em francês *chaise*, porque ambos se referem ao mesmo objeto, mas o que é análogo ao objeto cadeira no uso do símbolo 101 no sistema binário e 5 no sistema decimal? Já que não há nenhuma cadeira oculta debaixo de 5, podemos evitar a dificuldade por uma pirueta verbal e falar da entidade metafísica 5, que substituirá a realidade física cadeira. Isso leva a recusa para responder a questão.[20] (LEBESGUE apud OTTE, 2003, p. 208)

Segundo Lebesgue, a Aritmética é considerada como uma disciplina aplicada, o que a torna capaz de distinguir entre proposições verdadeiras e falsas. Portanto, para ele, a Matemática nada mais é do que um instrumento para outras

[20] [...] For instance, let us say we may certainly use interchangeably the English Word *chair* or the Frech word *chaise* because they both refer to the same object, but what is the analogue of the object chair in the use of the symbols *101* in the binary system and 5 in the decimal system? Since there is no chair hidden under 5, we can avoid the difficulty by a verbal pirouette and speak of the metaphysical entity 5, which will replace the physical reality chair. This amounts to refusing to answer the question.

ciências. A Aritmética não é uma teoria de sua própria aplicabilidade. Hilbert como Lebesgue considerava a Matemática Pura como incompleta, enquanto seu crescimento vai depender da aplicação de vários tipos.

Para Otte, é esta a visão popular, intensional ou instrumental apresentada nas escolas.

Discípulos dessa visão têm, entretanto, dificuldades com equações; por que eles interpretam e aprendem o símbolo da igualdade exatamente no sentido funcional de "rendimento", isto é, não percebem a igualdade como objeto, mas, como uma relação funcional.

Otte refere que o conceito de equação ainda não foi transformado em um objeto de reflexão matemática, isto é, "esse entendimento funcional ou puramente instrumental de equações é insuficiente, de qualquer modo, já em problemas tais como 8 + x = 13 [...]"[21] (OTTE, 2003, p. 208)

Até mesmo, tarefas triviais precisam de uma interpretação diferente de uma equação, isto é, uma interpretação que trata a equação como um conceito independente, como se fosse uma metáfora. Otte exemplifica por meio de estudantes, que entendem bem que o mesmo pode ser feito em ambos os membros de uma equação, entretanto, em geral, sentem dificuldades em entender que somando ou subtraindo uma equação A = B é o mesmo e legítimo como no caso da equação A = A. Esta dificuldade ocorre por que esses alunos sabem pensar nos termos das funções ou procedimentos, menos com relação às afirmações diretas. "[...] Cognição matemática é, entretanto, caracterizada por uma complementaridade entre interpretações predicativas ou extensionais e interpretações instrumentais ou intensionais"[22] (Ibid., pp. 208-209)

Otte acredita que isso nos leva à terceira objeção, conforme a visão de Frege. Para Otte (2003, p. 209), "[...] A concepção universal de lógica de Frege

[21] This functional or purely instrumental understanding of equations is insufficient, however, already in problems such as 8 + x = 13 […]

[22] [...] Mathematical cognition, however, is characterized by a complementarity between predicative or extensional and instrumental or intensional interpretations.

leva a uma inadequada e formalística visão da matemática, porque isto implica na convicção da inefabilidade da semântica [...]"[23]

Portanto, Frege não pode usar da existência como um predicativo, emprego comum em Matemática. Os matemáticos utilizam a palavra "existe" como um predicativo, mas a usam relativamente a um determinado universo de discurso. Por exemplo, considere a questão: O número real x, que satisfaz a equação $x^2 = -1$ existe? Caso exista, deve ser uma raiz do campo dos números reais e deve ser igual a 1 ou – 1, mas 1 = -1 é uma contradição. Portanto, os matemáticos ampliam seu universo e encontram um novo sistema de números, os números complexos.

II.2.2 Uso atributivo e referencial de símbolos e conceitos

Otte (2003) menciona que Arnauld e Nicole já haviam definido as noções de intensão ou atributivo e extensão ou referencial em 1662 na obra "Logic of Port Royal". Para eles, o conteúdo de uma idéia ou atributos consiste de tudo que abrange essa idéia e afirmam que não podemos separá-los sem destruir a idéia, assim como o conteúdo da idéia de triângulo que abrange seu tamanho, sua forma, três ângulos e, assim, por diante.

Otte acredita que isso expressa a concepção analítica da Matemática, por exemplo, o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo é algo imediatamente pertencente à idéia de triângulo. Para Kant, esse teorema era sintético ou construtivo. Construções matemáticas não surgem apenas de conceitos, mas até certo ponto dependem de instanciações particulares de si mesmo, bem como, de um objeto particular.

Kant tentou mostrar a importância dos aspectos da prova. Por exemplo, numa prova dedutiva, podemos questionar, se a linha *a* é paralela à linha *b* ou se há uma intersecção no ponto C, entre elas.

[23] […] Frege's universal conception of logic leads to an inadequate and formalistic view of mathematics, because it implies the belief in the ineffability of semantic […]

Para Hintikka (apud Otte, 2003) a caracterização de Kant (1724-1804) da Matemática é baseada no uso de construções que devem ser compreendidas, simplesmente, pela introdução incessante de representações particulares dos conceitos gerais e extraindo argumentos dos termos de tais representações particulares, argumentos esses que não podem ser tirados com um único significado dos conceitos gerais.

Peirce denominou a forma de Kant pensar de "teoremática", em contraste, ao "corolário", que se baseia apenas no que é enunciado. Para Peirce, o raciocínio teoremático é relevante e necessário para se obter uma nova visão e que de certa maneira, depende de representações, que denominou de diagrama. Uma representação é sempre relevante ao introduzir algo novo ao pensamento e, ainda, um teorema está quase sempre conectado a uma generalização.

Ainda na obra "Logic of Port Royal", as extensões de uma idéia são tratadas como os assuntos aos quais a idéia lida, que também são denominados de subordinados de um modo geral.

> [...] Número, nesse sentido, é simplesmente tudo que verifica os axiomas de Peano, isto é, a extensão de um conceito significaria todas as possíveis aplicações da teoria axiomatizada. Como não podemos fornecer essa totalidade de possíveis aplicações, a matemática não pode, tão pouco, ser puramente extensional.[24] (OTTE, 2003, p. 210)

Para Otte, parece que as teorias precisam ser extensionais ou intensionais, o que parece ser um quebra-cabeça ou, até mesmo, um paradoxo. O problema está em algo muito conhecido a todos que trabalham na educação ou com a teoria cognitiva. Pensar nessas noções como um "organizador avançado" (Ausubel, 1960), ou na "idéia fundamental" e a regra de Bruner (1961) em relação ao ensinar e aprender. Por outro lado, as idéias, que constituem o desenvolvimento completo de uma teoria, são úteis para desvendá-la ou explicá-la.

[24] [...] Number, in this sense, is simply all that for which Peano's axioms hold, that is, the extension of a concept would mean all the possible applications of the axiomatized theory. As we cannot give this totality of possible applications, mathematics cannot be purely extensional either.

> [...] Na matemática, entender um conceito, significa desenvolver uma teoria, e vice-versa, a teoria como um todo logicamente fundado, se ela pode ser entendida como uma idéia – original – que tem sido desenvolvida, tornada concreta e explicada. O mais longe alcance explicativo da teoria fundamenta o conceito original, embora ele seja estabelecido por último [...][25] (Ibid., p. 210)

A compreensão dessas idéias é o objetivo do desenvolvimento de uma teoria, pois são simultaneamente a base e o topo, isto é, devem ser intuitivamente impressionantes e, assim, motivar as atividades e orientar as representações. A intuição nos fornece algo ao invés de ser apreendido. Otte (2003, p. 210) cita que "[...] Tanto mais, um objeto não é, de algum modo, incorporado a um sistema conceitual ou teoria, quanto mais ele não é realmente conhecido [...]"[26]

Entretanto, o sistema conceitual precisa ser estabelecido, isto é, necessita constituir uma teoria, e para isso uma nova intuição ou idéia é necessária. Otte cita que "Conceitos fundamentais ou idéias básicas são auto-referenciais, isto é, eles mesmos têm que organizar o processo de seus próprios desdobramentos e articulação" [27] (apud OTTE et al, 2003, p. 211).

Ao supor ser impossível que um conceito forneça a base para seu próprio desenvolvimento, a única opção seria verificar se as novas idéias e conceitos são similares aos antigos, já que o antigo já dado continuaria sendo à base de tudo. "[...] Explicar algo novo significaria tentar reduzi-lo ao já conhecido"[28] (Ibid., p. 211)

Em contraste, o novo torna-se uma base exclusiva do mundo, não haverá nada além da incomensurabilidade e descontinuidade, isto é, uma mudança total e sem motivação da perspectiva da realidade, transformando o desenvolvimento do conhecimento em um processo aleatório.

---

[25] [...] In mathematics, to understand a concept means to develop a theory, and vice-versa, the theory as a whole is logically founded, if it can be understood as an – original – Idea, which has been developed, made concrete, und unfolded. The most far-reaching unfolding of the theory substantiates the original concept, although it is founded on the latter […]

[26] [...] As long as an object is not in some way incorporated into a conceptual system or theory, it is not really known [...]

[27] Fundamental concepts or basic ideas are self-referential, that is they themselves have to organize the process of their own deployment and articulation.

[28] [...] To explain something new would mean to try to reduce it to the already known.

> [...] Se desejarmos evitar isso, intensão e extensão de nossos conceitos devem ser vistas como complementares uma para outra, por um lado, elas funcionam com relativa independência e, permanecem, por outro lado, circularmente conectadas [...][29] (Ibid., p. 211)

A observação de Otte assemelha-se à discussão do círculo hermético de interpretação de texto. Tomemos a noção de complementaridade para mostrar mais uma vez o uso de símbolos e conceitos em um sentido ambíguo, ambos utilizados de modo atributivo e referencial.

Segundo Otte, Russell mostra essa distinção entre nomes e descrições, afirmando que são duas coisas a se comparar: um *nome* que representa um símbolo simples que designa diretamente um indivíduo, com esse significado (referencial) e uma *descrição* que consiste de várias palavras, cujos significados são predeterminados.

Se considerarmos a distinção apresentada por Russell, seremos induzidos a criticar a interpretação de Frege sobre A = B e A = A que trata a diferença entre as duas equações por meio de seu próprio sentido e significado, concluindo que funções descritivas únicas da mesma forma que designações, ocorrem referencialmente. Para Russell isso é um equívoco, pois não podemos adquirir conhecimento simplesmente fornecendo nomes novos. Assim, acredita que uma proposição contendo uma descrição não é idêntica à proposição que obtém quando o nome é substituído, mesmo que este nomeie o mesmo objeto descrito. Por exemplo, "Scott é o autor de Waverley" é obviamente uma proposição diferente de "Scott é Scott". Consideremos outro exemplo.

> Se 'x' é um nome, x = x não é a mesma proposição que "o autor de *Waverley* é o autor de *Waverley*". ... De fato, proposições da forma "o isso e isso" é o "aquilo e aquilo" não são sempre verdadeiras: é necessário que o "isso e isso" *exista*. É falso que o atual rei da França é o atual rei da França, ou que um quadrado redondo é um quadrado redondo.[30] (RUSSELL apud, OTTE, 2003, p. 212)

---

[29] [...] If we wish to avoid this, intensions and extensions of our concepts must be seen as complementary to each other in that, on the one side, they function in relative independence from each other and remain, on the other side, circularly connected [...]

[30] If 'x' is a name, x = x is not the some proposition as "the author of *Waverley*is the author of *Waverley*. …In fact, propositions of the form 'the so-and-so is the so-and-so" are not always true: it is necessary that the so-and-so should *exist*. It is false that the present king of France is the present king of France, or that a round square is a round square.

Para Russell e Frege "Unicórnio" e "v-1" são descrições abreviadas, pois para essas descrições a afirmação de que "x existe" faz sentido, embora falsa já "y existe", não faz sentido, se "y" é um nome, porque "existir" não é um predicado.

> Mas o ponto essencial é que ambos, índices (nomes) assim como ícones (predicados ou descrições) são essenciais embora nós nunca conseguirmos separá-los completamente, como nós sempre usamos nossos termos lingüísticos tanto referencialmente como atributivamente [...][31](Ibid., p. 212)

Otte apresenta um exemplo que ilustra muito bem o assunto. Consideremos um turista inglês que visita a Amazônia e vê um animal à beira de um lago e pergunta que tipo de animal é esse? O animal que ele viu, é uma capivara. Como o turista não fala a língua portuguesa, a única representação disponível é o que ele vê, isto é, ele fica sem representação que lhe é conhecida. Se alguém lhe disser que é um "porco aquático", ele acreditará, achando que entendeu apenas com os significados das palavras "porco" e "aquático". Aí esta um caso de uma designação descritiva que tem a desvantagem de criar falsas noções. A capivara não é um porco, mas, um comedor de gramas e é este significado que o termo capivara traz a um amazonense, enquanto porco aquático não significa nada.

Entretanto, após algum tempo, o turista poderá observar algumas características e hábitos da capivara e dirá: "As capivaras são boas nadadoras e mergulhadoras" ou "as capivaras vivem em grupo". Gradualmente, o uso dos termos tornou-se uma descrição.

> [...] De fato teorias em *status nascendi* são usadas principalmente 'referencialmente' pelos seus expoentes como por seus oponentes, ao alcançarem o topo do conhecimento, elas serão usadas 'atributivamente', até que uma nova teoria emirja e possa acender ao seu topo, assim, a teoria formada poderá ser usada de novo 'referencialmente'.[32] (Ibid., pp. 212-213)

---

[31] But the essential point is that both, indices (names) as well as icons (predicates or descriptions) are essential although we may never be able to separate them completely, as we always use our linguistic terms both referentially and attributively […]

[32] [...] And indeed theories *in status nascendi* are mainly used 'referentially' by their exponents as well as by their opponents, while having reached their zenith, they are used 'attributively', until a new theory emerges and ascends to its zenith, when the former theory is used 'referentially' again.

Otte afirma que o foco principal de um nome ou índice é sua conectividade direta com o objeto, no presente exemplo, a conectividade apresenta-se por meio de uma ostentação concreta, isto é, indica o objeto sem oferecer nenhuma informação sobre ele. Entretanto, somos capazes de entender um índice como um sinal, apenas por meio de experiências colaterais ou aproximações contextuais que unidas aos sinais fazem com que a interpretação funcione.

> A interdependência de atributivo versus usos referenciais dos termos é muito mais notável com respeito aos conhecimentos matemáticos do que ao empírico, porque primeiramente, objetos matemáticos não existem independentemente de alguma representação e, em segundo lugar, porque seu caráter instrumental é muito mais acentuado [...][33] (Ibid., p. 213)

Na teoria dos números tanto números puros como aritméticos são objetos de estudo, a maioria dos números em proposições numéricas ocorrem como substantivos, ao passo que termos matemáticos aplicados são como predicados ou adjetivos. Os números parecem ter existência como adjetivos.

Frege achava natural a estratégia dos adjetivos e descobriu a necessidade de usar palavras-número, como substantivos ou considerar também os números como objeto, porque a igualdade A = B de números, precisa ser estabilizada por uma correspondência de conjuntos de mesma cardinalidade.

Otte chama a atenção para a importância de desenvolver um sentimento relativo à complementaridade. Afirma que o mesmo ocorre para o comportamento lingüístico.

Segundo Otte, Jakobson (1896-1986), por exemplo, classificou o comportamento lingüístico como uma referência ao código ou ao contexto que tem a ver com as diversas formas escritas de se lidar com as relações dessas referências. Tal comportamento é caracterizado por ele como uma "perda de metalinguagem", deixando-os incapazes de lidar com um predicado que não foi simulado em um contexto.

[33] The interdependence of attributive vs. referential uses of terms is much more prominent with respect to mathematical concepts than in empirical ones, because mathematical objects firstly do not exist independently of any representation and secondly because their instrumental character is much more pronounced […]

Jakobson acreditava que em alguns casos patológicos, uma palavra isolada significa na verdade nada além de besteira. Entretanto, foram realizados testes e concluiu-se que, duas ocorrências da mesma palavra em dois contextos diferentes são meramente homônimas.

> [...] O paciente era capaz de selecionar o termo apropriado *solteiro* quando ele era apoiado pelo contexto... mas era incapaz de utilizar a substituição *solteiro = homem não casado* como o tópico de uma sentença, porque a habilidade para seleção autônoma e substituição tinham sido afetadas. [Esses pacientes não podem] ser levados a compreender o uso metafórico da palavra.[34] (JAKOBSON apud OTTE, 2003, p. 214)

De acordo com Jakobson, em outro tipo de afasia, a habilidade de construir contextos é imparcial. As regras sintáticas para organizar palavras em um todo estão perdidas, isto é, o paciente confinado na substituição lida com maneiras similares e suas aproximações identificadas são de mesma natureza metafórica, contrária a outros tipos de afasia. Outro tipo de afasia é caracterizado pela perda de predicado ou pela perda de iconismo e outras perdas como de orientações instrumentais. Portanto, quanto menos uma palavra depende gramaticamente do contexto, mais forte será sua tenacidade no discurso de processos, assim uma desordem contingente é mais cedo derrubada por pacientes com desordens similares.

Para Otte a Matemática é considerada como uma atividade semântica, isto é, caracterizada por complementaridades relativas ou pela "... necessidade de estabilizar uma complementaridade com o processo de evolução e atividades cognitivas".

II.2.3 Uma explanação histórica da Complementaridade na Matemática

O desenvolvimento da complementaridade dos conceitos matemáticos é mais bem compreendido, reportando-se à história da Matemática. O objetivo da

[34] [...] The patient was able to select the appropriate term *bachelor* when it was supported by the context…but was incapable of utilizing the substitution set *bachelor = unmarried man* as the topic of a sentence, because the ability for autonomous selection and substitution had been affected. [These patients cannot] be brought to understand the metaphoric use of word.

complementaridade é, essencialmente, o desenvolvimento da matemática. Para o matemático Boutroux (1880-1922), neto de Henri Poincaré, essa noção é um dos aspectos mais interessantes já vistos. Ele dividiu a história da Matemática a partir da Antiguidade em três períodos: (1°) Platão a Euclides; (2°) (Descartes a Leibniz e 3°) Bolzano a Cantor.

Boutroux menciona que houve uma revolução essencial e um intervalo de pausa nas atividades matemáticas entre os segundo e terceiro períodos, entretanto, entre os primeiro e segundo períodos, houve um esforço dedicado a um ideal semântico da Matemática caracterizado por uma harmonia preestabelecida.

> No início do século XIX, a matemática pura surge baseada em análises de provas e na criação dos mais conceitos abstratos, e a harmonia entre significados e objetos da atividade matemática começa a romper-se [...][35] (OTTE, 2003, p. 215)

Para Michael Otte, a Matemática pura representou o início de um crescimento explosivo das atividades matemáticas, por volta de 1800, classificada como o começo da história da Matemática em respeito ao grande número de conexões entre diferentes resultados e problemas descobertos.

O processo da descoberta de Descartes sobre a geometria analítica já havia sido iniciado, entretanto, somente se tornou dominante no início do século XIX. Descartes inaugurou uma série interrupta de assimilações recíprocas entre os ramos da Matemática até então heterogêneos, o que parece ser a principal razão da Matemática pura passar a ser sabedora de si mesma.

As perspectivas de funcionalidade introduzidas por razões operativas, foram relevantes, pois objetivavam alcançar essa transição da Matemática clássica para um esquema algébrico iniciado desde Descartes. Um aspecto complementar desse processo foi a geometrização ou o pensamento relacional, que se tornou dominante no início do século XIX, quando a Álgebra foi

[35] At the beginning of the 19th century, pure mathematics arises based on proof analysis and the creation of ever more abstract concepts, and the harmony between means and objects of mathematical activity begin to break down […]

transformada em uma língua para uma ciência de estruturas. Os esquemas de conceitos ativos operacionais em si mesmo tornaram-se objetos para se pensar.

Para Boutroux, no início do século XIX, ocorreu uma ruptura na história da Matemática por dois motivos: em primeiro lugar, a harmonia entre objetos e os significados das atividades matemáticas desapareceu, este dualismo manifesta-se por meio das matemáticas puras, em segundo, a Matemática havia se tornado uma ciência analítica fundamentada no pensamento conceitual por si só.

O objeto matemático passa a ser independente de suas possíveis representações, assim, a preocupação relevante está em buscar definições, proposições, formas ou signos que podemos oferecer para expressá-las. A Matemática tornou-se uma atividade com algum significado.

Tendo em mente a historiografia tradicional da Matemática, Otte questiona se a Matemática é a ciência do infinito de uma vez por todas, por que Boutroux colocou Descartes e Leibniz no mesmo “barco”?

Não existem diferenças essenciais para serem observadas entre a Álgebra finita de Descartes e a Álgebra do infinito de Leibniz (1646-1716), que trouxe os cálculos infinitos.

O ponto de vista principal ocorreu com Cantor que definiu os números reais como séries convergentes dos números racionais. O objetivo não é mais aproximar uma quantidade já dada, mas estabilizar um novo tipo de número por significados de um conjunto de números elementares. Não é mais necessário pensar na construção de termos para medir uma quantidade predeterminada.

Construtivistas como Kronecker basearam-se na continuidade de números reais e optaram por utilizar métodos decisivos, como regras ou leis, que efetivamente determinaram todos os termos em uma seqüência infinita até o fim. Entretanto, Cantor argumentou que os símbolos numéricos fornecidos por Kronecker nunca poderiam descrever completamente o contínuo.

Boutroux acreditava que a descontinuidade essencial ou revolucionária ocorreu com a introdução do infinito atual, como pensamento matemático. Os números de Kronecker são os “números computáveis”, esses números não são nem racionais nem algébricos, isto é, são números cujo desenvolvimento decimal é dado por algum tipo de algoritmo. Não podemos dizer que sabemos a respeito de um número específico que não é completamente descritível, pois, nenhum conceito geral de número surge.

O ponto essencial sobre a noção de Cantor sobre conjuntos infinitos é exatamente a transformação do conceito de um objeto, operando-a com extensões desses conceitos. Cantor era um monge filosófico e acreditava em uma harmonia preestabelecida, assim como Leibniz.

> [...] dois sentidos em nossa conversa sobre a realidade ou existência dos números inteiros serem finitos ou infinitos. Por um lado nós podemos considerar números como sendo reais mesmo que nós os tenhamos estabelecido por significados e definições em nossas mentes.... Por outro nós podemos atribuir realidade aos números, como eles podem ser considerados as imagens ou expressões de eventos e relações de um mundo cósmico que confronta o intelecto.... Eu não tenho dúvida que estes dois tipos de realidades virão sempre juntos no sentido de que um conceito, que é real de acordo com o primeiro significado do termo, deve também, ser real em inúmeras maneiras de acordo com o segundo significado, embora verificar essa tese seja uma das tarefas mais difíceis da metafísica.[36] (CANTOR apud OTTE, 2003, pp. 217-218)

Para Otte, a noção de conjunto tem uma natureza dupla. Representa um conceito (coleção-de-um) assim como um conjunto de objetos (coleção-de-muitos). O problema ocorre ao tentar eliminar essa complementaridade e introduzir uma diferença absoluta entre coisas (conjuntos) de um lado e conceitos de outro. Esta diferença é relativa e obscura nos conjuntos teóricos modernos da Matemática. No sentido de Cantor, o conceito de conjunto mostra isso. Matemáticos enfatizam que a abstração de conjunto é a totalidade de coisas, porque não adicionam novas propriedades em si mesmas, e é ela mesma, uma coisa.

---

[36] [...] two senses in our talking about the reality or existence of the whole numbers be they finite or infinite. On the one hand we may consider numbers to be real insofar as we have established them by means of definitions in our mind…On the other hand we may attribute reality to numbers, as they must be considered the images or expressions of events and relations of an outer world that confronts the intellect… I have no doubt that these two kind of reality will always come together in the sense that a concept, which is real according to the first meaning of the term, shall also always be real in innumerable ways according to the second meaning, although it is one the most difficult tasks of metaphysics to verify this thesis.

Portanto, conjuntos infinitos constituem uma abstração e não podem, em hipótese alguma, ser dado por extensão, mas, sim, por intensão, isto é, por meio de uma descrição conceitual. Os números reais, por exemplo, são apresentados somente por uma descrição axiomática.

Para Peirce uma idéia, uma abstração ou um modo racional de existência depende de existir outras coisas fundamentais. Nesse sentido, um conjunto de abstrações hipostáticas é baseado na existência de seus próprios elementos. As noções de existência não estão conectadas em nossas idéias gerais, isto é, podemos falar de fênix ou unicórnio sem questionar sua real existência. Michael Otte (2003, p. 218) refere que “Essa complementaridade das compreensões extensional e intensional da noção de conjunto desencadeia um infinito processo recursivo de abstração”[37] .

Otte menciona que para Bochner (1899-1982) a Matemática grega não avançou além de um processo de idealização, isto é, de um processo de abstração de uma realidade direta. Entretanto, qualquer escala completa da simbolização é muito mais que mera idealização. É relevante que a abstração geral (abstração da abstração, abstração da abstração da abstração, etc.) do objeto, conseqüentemente, emerge, se vistas as instâncias dos símbolos, aptos para o exercício de certas manipulações produtivas e operacionais. A Matemática Moderna, a Matemática a partir do século XVI, encarregou-se da abstração para possibilitar somente no século XIX, um avanço efetivo no que se refere aos conjuntos.

> Uma categoria extremamente importante de opinião sobre o pensamento, que minhas análises lógicas têm mostrado ser uma das principais senão a condutora da explicação do poder do raciocínio matemático, é um assunto comum de ridículo entre as pessoas espirituosas. Essa operação é realizada quando alguma coisa que alguém tenha pensado sobre algum assunto, é ela mesma feita um sujeito de pensamento.[38] (PEIRCE apud OTTE, 2003, p. 219)

---

[37] This complemetarity of extensional and intensional understandings of the notion of set triggers an infinite recursive process of abstraction.

[38] One extremely important grade of thinking about thought, which my logical analyses have shown to be of the chief if not be chief, explanation of the power of mathematical reasoning, is a stock topic of ridicule among the wits. This operation is performed when something that one has thought about any subject, is itself made a subject of thought.

O significado é a condição do pensamento que se torna um objeto dele mesmo. O uso de predicado ou atributo de alguns conceitos é transformado em um uso referencial para incorporar novas relações estruturais. Por exemplo, a introdução dos números imaginários, utilizados para generalizarem certas opções algébricas. Otte acredita que a abstração da abstração é certamente facilitada pela estrutura gramatical das línguas européias, o que permite o uso simples destes idiomas ao falarem de entidades abstratas se elas tivessem existido.

Uma abstração hipostática é alcançada, por exemplo, ao hipostatizar um predicado ou uma qualidade, e conseqüentemente, tornando-se um assunto capaz de fazer emergir mais previsões. Por exemplo, transformamos a proposição "mel é doce" em "mel possui doçura", embora pareça trivial, facilita os pensamentos sobre a doçura do mel, leva-nos a crer que a doçura do mel é algo como a doçura de uma lua-de-mel, e, assim, por diante.

De acordo com Otte, as abstrações desse tipo são particularmente congênitas às Matemáticas. Grassmann, em 1844, mostrou que em uma dimensão de um espaço arbitrário um ponto movimenta-se: em função da abstração que a geometria diz que ele "descreve uma linha". Esta linha, apesar de ser uma abstração, mexe (movimenta-se) em si mesma e isso é considerado como uma superfície.

Mais uma vez a construção de um procedimento algorítmico é usado como um objeto a ser incorporado em outra construção ou procedimento.

> [...] Mas com o objetivo de entender os conceitos operacionais, pode haver a necessidade de empregar a intuição espacial, porque a intuição e a atividade matemática não operam em objetos singulares, mas, em 'espaços' de toda espécie.[39] (OTTE, 2003, p. 220)

Otte menciona, entretanto, que o significado matemático deve ser complementado de extensões e intensões.

[39] [...] But in order to reify operational concepts it might be necessary to employ spatial intuition, because mathematical intuition and activity do not operate on singular objects but on 'spaces' of all kinds. […]

> [...] Significado tem dois componentes objetivos, um que se refere aos objetos ou que os indica; o outro que se refere às expressões lingüísticas ou representações diagramáticas, as quais mostram as características do objeto de atividade (que, em geral, não é o objeto mencionado) e que expressam como as características se interdependem. A complementaridade é estabelecida por processos de generalização e verificação.[40] (Ibid., p. 220)

Michael Otte refere que essa discussão está considerada em uma citação de Castonguay (1929), que afirma existirem dois componentes de significado; um que se refere ao objeto, denominado de extensional, que correspondente ao componente do significado e outro relativo ao conceito ou expressões lingüísticas, que é chamado de intensional.

II.2.4 A complementaridade e as tentativas de explicar a noção de número

A discussão relacionada às visões intensional e extensional tem sido intensa, no que se refere ao conceito de número. A visão intensional (que apresenta ordinalidade e descrições axiomáticas) sofreu muitas críticas por aqueles que estavam interessados primeiramente em aplicações matemáticas. Russell em seu livro "Introdução à Filosofia Matemática" de 1918, publicado em 1974, tem como objetivo principal o número e tudo relacionado a ele, como a Aritmética e a Lógica da Aritmética.

No primeiro capítulo intitulado "A série dos números naturais" esses números são introduzidos com base nos axiomas de Peano. Russell aponta falhas nesse sistema. Primeiro, ele não aceita o fato dos termos "0", "número" e "sucessor" não terem significado e afirma a necessidade de substituí-los por três outros termos que possam verificar os axiomas de Peano.

---

[40] [...] Meaning has two objective components, one of which refers to objects or indicates them; the other relating to linguistic expressions or diagrammatic representations, which show the characteristics of the object of activity (which in general is not the object named) and which express how the characteristic hang together. The complementarity is established by processes of generalization and verification.

Para Otte, é exatamente esse o entendimento comum de uma teoria axiomática, isto é, a aritmética não é sobre aspectos concretamente existentes, mas, até certo ponto, sobre uma relação geral ou objetos ideais.

Russell não aceitava esse ponto de vista e apresentou mais falhas no sistema de Peano. Para ele, falhou em apresentar uma base para a Aritmética. Em primeiro lugar, porque não nos possibilita saber se existem conjuntos de termos que verifiquem esses axiomas. Em segundo, por querermos que nossos números sejam usados para contar objetos comuns e isso requer que nossos números tenham um significado definido e não simplesmente que atendam a certas propriedades formais.

> [...] se nós damos início das idéias indefinidas e das proposições iniciais, de Peano, aritmética e análise não dizem respeito com objetos logicamente definidos chamados números, mas com os termos de progressão qualquer. Podemos chamar os termos de progressão qualquer 0, 1, 2, 3, ..., nesse caso, 0, 1, 2, ... tornam-se 'variáveis'. Para torná-los constantes, precisamos escolher alguma progressão definida; a natural delas para escolher é a progressão dos números cardinais finitos como definidos por Frege.[41] (RUSSELL apud OTTE, 2003, p. 221)

Entretanto, nem Peano, nem Hilbert concordavam com Russell, porque não acreditavam que Russell seria capaz de definir número. Para Frege (1980), "a aritmética assim como o pensamento, se bastam sem a possibilidade da aplicação" e, completa que, equações aritméticas podem ser aplicadas simplesmente porque expressam o pensamento.

Como Frege, Russell acreditava que termos primitivos devem ser substituídos por estruturas lógicas relevantes para provar que satisfazem as cinco proposições de Peano e essenciais para conectar a Aritmética à Lógica Pura. Portanto, a Lógica é interpretada de maneira completamente realista.

Russell acreditava que

[41] ...if we start from Peano's undefined ideas and initial propositions, arithmetic and analysis are not concerned with definite logical objects called numbers, but with the terms of any progression. We may call the terms of *any* progression 0, 1, 2, 3,…, in which case 0, 1, 2,…become 'variables'. To make them constants, we must choose some one definite progression; the natural one to choose is the progression of finite cardinal numbers as defined by Frege.

> [...] a lógica está preocupada com o mundo real tão verdadeiramente quanto a zoologia, embora seja mais abstrata e tenha características gerais. Falar que os unicórnios têm existência na literatura ou na imaginação, é a menor e menos importante fuga. O que existe na simbologia não é um animal, composto de carne e osso, movendo-se e respirando por si mesmo. O que existe é uma figura, ou uma descrição em palavras [...] Há somente uma palavra, o mundo “real” [...] O senso de realidade é essencial para a lógica. .[42] (RUSSELL apud OTTE, 2003, p. 222)

Otte alega que para Russell poder conceituar número como uma extensão, que é real, temos de entender número como uma quantidade e fornecer uma aplicação do conceito definido para demonstrar a existência de conjuntos de cardinalidade arbitrária. Entretanto, isso só pode ocorrer de maneira axiomática. Nesse caso, a noção de axioma não deve ser entendida no sentido de Peano-Hilbert, mas, de acordo com a tradição euclidiana que é intuitivamente evidente como uma condição da Matemática.

Desse modo, Russell introduz o “axioma do infinito”, isto é, conjuntos infinitos de cardinalidade arbitrária que só podem ser tratados intensionalmente. Russell (OTTE, 2003, p. 222) menciona que se: “[...] existe e então podem ser referidos em nossa razão [...]”[43]

De acordo com Russell, a intuição aritmética deve ser substituída por uma intuição teórica predefinida, entretanto parece estranho, pois a axiomatização da Aritmética ocorre pelo sentimento de sermos incapazes de entender ou satisfazer leis e lidarmos com esses números. Para ele, parece trocar número pelo conceito intuitivo de conjunto dessas leis formais.

> [...] Matemática não é uma ciência quase empírica que estabelece seus métodos por significados das propriedades de seus objetos; antes, os objetos têm de ser construídos simultaneamente com as regras e métodos de raciocínios.[44] (Ibid., p. 222)

---

[42] [...] logic is concerned with the real world just as truly as zoology, though with its more abstract and general features. To say that unicorns have an existence in heraldry, or in literature, or in imagination, is a most pitiful and paltry evasion. What exists in heraldry is not an animal, made od flesh and blood, moving and breathing of its own initiative. What exists is a picture, or a description in words. …There is only one world, the ‘real’ world….The sense of reality is vital for logic.

[43] [...] exist and thus can be referred to in our reasoning [...]

[44] [...] Mathematics is not a quasi-empirical science,, which establishes its methods by means of the properties of its objects; rather, the objects have to be constructed simultaneously with the rules and methods of reasoning.

Dedekind não estava pronto para fornecer uma definição axiomática direta de número, pois, para ele, depois de reconhecer as características essenciais de tal sistema, surge a questão: será que tal sistema existe em todo o domínio de nossas idéias?

Ele tentou fornecer uma totalidade infinita de coisas, porque seu próprio pensamento funcionava como uma prova lógica de existência ao contrário de Russell que se preocupou com o significado dos símbolos numéricos individuais. Para Russell ninguém pode obter uma totalidade infinita por mera enumeração que considerou como um fato empírico, pois a mente é incapaz de repetir infinitamente o mesmo ato.

Otte argumenta que não podemos provar a existência de números ou conjuntos infinitos e o próprio Russell foca-se na plausibilidade intuitiva do significado do axioma do infinito. E, ainda, em contraste com a opinião de Russell, Otte alega que alguém poderia reivindicar se não é justamente a aplicabilidade o interesse da axiomática moderna que muitas vezes é interpretado. Ele questiona por que é tão difícil entender o significado de todos os conceitos que seriam previamente pré-fixados para toda aplicação. Otte (2003, p. 223) cita que "[...] conceitos não seriam nada mais do que uma descrição completa de entidades individuais [...]"[45]

Em 1899, Hilbert escreve para Frege citando que cada teoria sempre pode ser aplicada em um número infinito de sistemas de elementos básicos.

Michael Otte menciona que quando temos uma aplicação em mente surge o problema de como construir as correspondências necessárias. Durante os séculos XVII e XVIII, a Matemática foi entendida como a ciência da quantidade. Mas só no século XIX, os fenômenos da eletricidade e do magnetismo foram matematizados e, para tanto, tornaram-se necessários estender o conceito de quantidade para quantidade de vetor (quantidade direta) e generalizar as correspondentes quantidades de operações.

[45] […] concepts would be no more than complete description of individual entities […]

> [...] Como uma regra, não se podem obter os axiomas da 'essência' do relacionado (do significado dos últimos conceitos). Todo conhecimento objetivo é, de fato, conhecimento relacional. Alguém fixa algumas hipóteses ou formas e procura organizar suas conseqüências. Cálculos vetoriais, por exemplo, resultaram da matematização do fenômeno elétrico.[46] (OTTE, 2003, pp. 223-224)

Russell não tinha consciência do método axiomático de Hilbert, para ele, a interpretação de um sistema dedutivo sempre foi de um significado filosófico fundamental, o qual se torna também útil para mostrar como uma teoria empírica pode conectar-se à percepção, assim como, as teorias matemática e aritmética podem conectar-se à lógica. Apesar de ter uma visão ampla dos futuros desenvolvimentos da Matemática, e de outras ciências exatas naturais, Russell, repentinamente, concentrou-se em elementos absolutos e invariantes de conceitos matemáticos.

O método axiomático foi classificado como incompleto por Russell, pois os termos não especificados não ocorriam pelos axiomas. Para ele, esses termos não interpretados precisavam ser especificados de uma maneira que permitisse uma conexão com a aplicação desejada.

> [...] Uma interpretação absoluta ou definitiva de conceitos matemáticos, entretanto, geralmente não é nem possível nem desejável. A determinação axiomática de conceitos matemáticos sempre será incompleta, assim tem-se sempre que levar em consideração a possibilidade de um conceito ter uma extensão vazia (os axiomas podem ser inconsistentes), ou de ela ser ambígua (uma propriedade desejável sob o aspecto da aplicação). Se se pretende, ao contrário disso, introduzir todos os conceitos por meio de definições completas deve-se necessariamente fazer proposições metafísicas e psicológicas sobre o mundo, como ele é em si mesmo, o que é uma tarefa infrutífera.[47] (Ibid., p. 224)

Otte conclui que, de fato, não existe a menor possibilidade de definir "número", nem mesmo na estrutura da teoria de conjuntos. Na obra de Paul

---

[46] [...] As a rule, one cannot derive the axioms from the 'essence' of the relate (from the meaning of the latter's concepts). All objective knowledge is, in fact, relational knowledge. One fixes some assumptions or forms and searches to outline their consequences. Vector calculus, for example, resulted from the mathematization of electrical phenomenon.

[47] [...] an absolute or ultimate interpretation of mathematical concepts, however, is generally neither possible nor desirable. The axiomatic determination of mathematical concepts will always be incomplete, in so far as one has to always take into account the possibility that a concept has an empty extension (the axioms can be inconsistent), or that it is ambiguous (a property desirable under the aspect of application). If one intends, against that, to introduce all concepts by complete definitions, one must necessarily make metaphysical and psychological assumptions about the world, as it is itself, which is a futile undertaking.

Benacerraf intitulada “What Number Could Not Be” (O que os números não podem ser), de 1965, foram reimpressas algumas partes da Introdução à Filosofia Matemática de Russell.

Benacerraf mostra que o conceito de número pode ser reduzido ao conceito de conjuntos de várias maneiras diferentes, sem a possibilidade de separar baseada em uma interpretação teórica de conjunto, a identidade verdadeira do número natural em termos de conjuntos. O autor conclui que números não podem ser conjuntos ou conjuntos de conjuntos, pois existem diferentes explicações para o significado da palavra número na teoria dos conjuntos.

Até mesmo, Quine (1908-2000), compartilhou o desgosto de Russell sobre a “falta de interpretação da Matemática” e enfatiza que, todo conjunto de interpretações teóricas de palavras numéricas é usado oportunamente para facilitar o trabalho, caso esse trabalho surja de uma fonte numérica, assim como Frege, von Neumann e Zermelo, citados por Otte.

> Mesmo se fosse possível reduzir o conceito de número inequivocamente à noção de conjunto, não se ganharia muito, como Russell descobriu com paradoxos da teoria de conjuntos. Assim o realismo lógico direto de Russell trouxe problemas, que sua teoria dos tipos tentou solucionar [...][48] (Ibid., p. 225)

Com o objetivo de solucionar os paradoxos da lógica e da teoria dos conjuntos, Russell apresentou sua teoria dos tipos que diz “O que envolver a totalidade de uma coleção, não deve fazer parte dela”, isto é, um conceito referindo-se à totalidade não pode fazer parte da totalidade.

Dedekind em sua obra de 1888 fundamenta sua prova da existência de conjuntos infinitos relativa à antinomia do conjunto (de todas as coisas), “o qual pode ser um objeto de meu pensamento” (o conjunto de Russell de conjuntos que não são membros de si mesmo, certamente, é um possível objeto do pensamento).

[48] Even if in were possible to reduce the number concept unequivocally to the notion of set, not much would be gained, as Russell discovered with the set theoretical paradoxes. Thus Russell’s straightforward logical realism brought about problems, which his theory of types was intended to solve […]

Entretanto, por volta de 1899, Cantor chamou a atenção de Dedekind sobre a inconsistência da fundamentação de suas teorias, logo depois isso o levou ao construtivismo, abandonando a idéia de que um número real seria uma totalidade completa.

Em alguns casos específicos, Otte considera que certas limitações devem ser estabelecidas ao considerar o alcance das variáveis quantitativas em funções proposicionais, por exemplo, a expressão, "todas as proposições são verdadeiras ou falsas", não faz mais sentido. Entretanto, distinções teóricas são evidentes e comuns. Por exemplo, a totalidade de cadeiras não é uma cadeira, assim como, a classe dos pontos vermelhos não é uma coisa vermelha, mas sim uma abstração hipostática, como vermelhidão ou como uma função proposicional "x é vermelho", ou qualquer outra coisa.

> [...] Enquanto conceito e objeto, cardápio e refeição, mapa e território são facilmente distinguidos, essa distinção, por outro lado, torna-se relativa na perspectiva da atividade cognitiva e seu desenvolvimento dinâmico. Nós indicamos na verdade quão essencial a interação da abstração é como fator distintivo da matemática na modernidade.[49] (Ibid., p. 225)

Para Otte, a teoria dos tipos de Russell mostra que os conjuntos não são o que o senso comum imagina e o que a Matemática vem ensinando, desde os tempos da Reforma da Matemática. Embora Russell tenha se esforçado para reduzir número, seu argumento precisa ser revisado. O próprio Russell preocupa-se ao perceber que não podemos falar de classes em um caminho puramente extensional e que se concebermos os objetos extensionalmente seria impossível entender, a classe vazia que não tem membros e não pode ser vista como uma coleção, o mesmo ocorre com a classe que tem apenas um membro, que não é identificada com esse membro.

Para Gödel (1906-1978) a argumentação de Russell mostra que tanto a classe vazia como a classe única são ficções, assim, nem todas as classes são ficções. Para ele, essas duas classes são pontos no infinito da geometria e generalizações matemáticas similares. Entretanto, Otte argumenta que se

---

[49] [...] While concept and object, menu and meal, map and territory are easily distinguished, this distinction, on the other hand, becomes a relative one from the perspective of cognitive activity and its dynamical development. We have pointed out indeed how essential the iteration of abstraction is a distinctive feature of the mathematics of modernity.

considerarmos esse ponto de vista, seria necessário generalizar e criar novas estruturas axiomáticas, em termos de puro pensamento relativo, o que nos levaria a retornar à visão axiomática e aos problemas de Russell na busca de determinar a consistência na aplicabilidade da teoria axiomatizada.

Segundo Otte, esse movimento que vai das relações e funções (axiomática) aos objetos (conjuntos) e de volta as relações ou funções (função proposicional) demonstra o desespero na busca da lógica para algo dado ou existente, isto é, a busca eterna e incessante de precisão.

CAPÍTULO III

CONCEPÇÃO DE RUSSELL DO CONCEITO DE NÚMERO

No que segue, tratamos do que constam nos seis primeiros capítulos do livro Introdução à Filosofia Matemática, de 1974, nos quais Russell apresenta seus fundamentos para a concepção do conceito de número. Os temas desses capítulos são: a série dos números naturais; definição de número; finitude e Indução Matemática; definição de ordem; tipos de relações e similaridade de relações.

III.1 A série dos números naturais

A título de introdução para o estudo da série dos números naturais, visando a indicar em qual perspectiva trataria do assunto, Russell discute a diferença entre Matemática e Filosofia Matemática, enfatizando a importância da reflexão sobre os fundamentos da Matemática.

Segundo ele, a primeira, mais comum, é caracterizada como construtiva, no sentido da complexidade gradual do avanço do estudo que vai dos números inteiros aos complexos. Já a Filosofia Matemática avança pela análise para a abstração e simplicidade lógica, objetivando levantar interrogações sobre os fundamentos da Matemática. Mas para o autor, essa distinção depende, sobretudo, do interesse que inspira a pesquisa e da etapa por esta atingida e não só das proposições a qual a investigação afeta. Desse modo, precisamos ampliar nossa capacidade lógica. Da Matemática Superior aos fundamentos da Matemática podemos obter uma visão renovada, isto é, trilhar meios para alcançar novos assuntos e simplesmente conquistar novas linhas de avanço. Este é justamente o objetivo de Russell, isto é, explicar a Filosofia Matemática de forma não técnica. O assunto completo encontra-se na obra "*Principia Mathematica*"[50]

Para o autor, o ponto de partida no estudo da Matemática ocorre por meio da "série dos números naturais" 0, 1, 2, 3, 4, ..., n, n+1,..., caracterizada com base no zero.

Entretanto, Russell afirma que embora exista essa série familiar, ela não é compreendida, pois são pouquíssimas pessoas que têm a definição para o significado de "0" ou "número" ou "1". Até recentemente, acreditava-se que algumas dessas primeiras noções da Aritmética deveriam ser aceitas como simples demais e primitivas para que fossem definidas.

Mas, Russell não concordava que houvesse termos que não pudessem ser definidos. Para ele, por mais que avancemos nas definições, há sempre a possibilidade de ir além. A menos que a análise avance suficientemente e alcance termos realmente simples, portanto, incapazes da definição que consiste em analisar.

Russell considera por ora que as definições conhecidas começam em algum ponto, por meio dos termos indefinidos para o momento, mas talvez não permanente.

> Toda a Matemática pura tradicional, incluindo a Geometria Analítica, pode ser considerada como consistindo totalmente em proposições sobre os números naturais. Equivale a dizer, que os termos que ocorrem, podem ser definidos por meio dos números naturais e as proposições podem ser deduzidas das propriedades dos números naturais [...] (RUSSELL, 1974, pp. 11-12)

[50] Obra escrita por Russell e Whitehead, publicada em três volumes, em 1910, 1912 e 1913.

Se toda a Matemática pura tradicional puder ser reduzida à teoria dos números naturais, o próximo passo na análise lógica será reduzir a teoria dos números ao menor conjunto de premissas e termos não definidos dos quais seja derivada. Este trabalho foi realizado pelo italiano Giuseppe Peano, que mostrou que toda a teoria dos números naturais poderia ser derivada por meio de três idéias primitivas e cinco proposições primitivas.

Para Russell, por "sucessor", Peano quer dizer o número seguinte na ordem natural. Por "número", quer dizer, no caso a classe dos números naturais.

Peano não pressupõe que conheçamos todos os números dessa classe, mas apenas saibamos o que queremos dizer quando citamos que isto ou aquilo é um número.

As cinco proposições primitivas adotadas por Peano são:

1) 0 é um número.
2) O sucessor de qualquer número é um número.
3) Não há dois números diferentes com um mesmo sucessor.
4) 0 não é sucessor de nenhum número.
5) Qualquer propriedade que pertença a 0, e também ao sucessor de todo número que tenha essa propriedade, pertence a todos os números. (Princípio de Indução Matemática)

Russell mostra como derivar a teoria dos números naturais por meio das três idéias primitivas e das cinco proposições de Peano. Inicialmente, definimos 1 como "sucessor de 0", 2 como "sucessor de 1" e, assim, por diante. Todo número que atingirmos, terá um sucessor e, em virtude de 3), esse número não poderá ser qualquer dos já definidos e, em virtude do 4), nenhum dos números que alcancemos na série de sucessores poderá ser '0'. Sendo assim, a série de sucessores nos dá uma série infinita de números continuamente novos. E em virtude do 5), todos os números estão nessa série, que começa com o '0' e prossegue por meio de sucessores sucessivos: porque: a) '0' pertence a essa série, e b) se um número *n* a ela pertence, também, a ela, pertencerá seu sucessor, portanto, de acordo com a indução matemática, todos os números pertencem à série.

Para Russell, existem algumas considerações que tornam necessário avançar mais além do ponto a que chegou Peano. Para ele, em primeiro lugar, as três idéias primitivas de Peano, isto é, “0”, “número” e “sucessor” podem assumir diversas interpretações diferentes que satisfazem todas as cinco proposições. Vejamos alguns exemplos.

1. Admitamos que “0” signifique 100 e que “número” signifique os números de 100 em diante na série dos números naturais. Então, todas as nossas proposições primitivas serão satisfeitas, até mesmo a 4), embora 100 seja o sucessor de 99, este não será um “número” pelo significado que Russel por ora empresta a esta palavra. Nossa série de números será: 100, 101, 102, 103. É óbvio que qualquer número poderá substituir ‘0’ neste exemplo.
2. Deixemos que “0” tenha seu significado usual, mas façamos que “número” signifique o que, geralmente, chamamos de “número par” e que o sucessor de um número seja o resultado da adição de dois a ele. Então, “1” ficará no lugar de número dois, “2” ficará no número quatro, e assim por diante; a série dos “números” será agora: zero, dois, quatro, seis, oito,....Todas as cinco proposições de Peano serão satisfeitas.

Não há nada no sistema de Peano que nos permita distinguir entre essas diferentes interpretações de suas três idéias primitivas. Admite-se que saibamos o que queremos dizer por “0” e que não devemos supor que esse símbolo signifique 100 ou qualquer dos outros aspectos que possa significar.

E também é importante perceber que estas idéias não podem ser definidas por meio dos cinco axiomas de Peano, devendo ser independentemente entendidas. Esse significado exato é definido pela teoria lógica da Aritmética.

III.2 Definição de número

Russell pretende responder à questão: “O que é um número?”. Para ele, número não pode ser confundido com pluralidade, mas, sim, com algo que é característico de certas coleções ou classes.

Mas, antes, ele apresenta algumas definições úteis para a compreensão dessa definição. Russell afirma que as classes podem ser definidas intensional (propriedades) e/ou extensionalmente (enumeração). E ainda que, duas coleções pertencem à mesma coleção se forem similares entre si. A similaridade definida como a relação de "um-para-um".

Russell apresenta uma resposta para a questão "O que é número?". Muitos filósofos tentaram definir número, mas, sem sucesso. Para Russell, eles falharam por se dedicarem, na verdade, a definir a pluralidade, que é algo muito diferente. Russell considera que *número* é o que é característico de números, assim como *homem* é característico de homens. Uma pluralidade não é uma instância de número, mas de um número determinado. Por exemplo, um trio de homens é uma instância do número 3 e este 3 é uma instância de número, mas o trio não é uma instância de número.

> Um determinado número não é idêntico a qualquer coleção de termos que o contenha: o número 3 não é idêntico ao trio consistindo de Brown, Jones e Robinson. O número 3 é algo que todos os trios têm em comum e que o distingue de outras coleções. Um número é algo que caracteriza certas coleções, isto é, aquelas que têm aquele número. (RUSSELL, 1974, p. 18)

Para Russell uma classe ou coleção pode ser definida de duas maneiras. A primeira, pela enumeração de seus termos, chamada de definição por extensão. A outra por uma propriedade que a caracterize, chamada de definição por intensão que é considerada a mais fundamental por duas considerações:

1º). A definição extensional pode sempre ser reduzida à definição intensional.

2º). A definição intensional, freqüentemente, não podem sequer de modo teórico ser reduzida à definição extensional. Por exemplo, podemos com freqüência saber muito sobre uma classe, sem ser necessário enumerar seus membros sobretudo, quando nos referimos às classes infinitas, para as quais a definição por extensão torna-se ainda mais inviável. Portanto, nosso conhecimento relativo a esse tipo de classes só será possível por meio da definição intensional.

Para o autor, ao tentarmos buscar a definição de número, devemos estar atentos a três pontos relevantes: 1) os números formam, eles próprios, uma coleção infinita, sendo inviável a definição por extensão. 2) as coleções que tenham um determinado número de termos, formam, elas próprias, presumivelmente, uma coleção infinita. 3) desejamos definir "número" de tal maneira que possibilite os números infinitos, isto é, que possamos falar do número de termos de uma coleção infinita, portanto, tal coleção deverá ser definida por intensão, isto é, por uma propriedade comum a todos os membros.

É importante perceber que uma classe e uma característica que a definem estão intimamente ligadas. A diferença vital entre ambas é que há apenas uma classe com um dado conjunto de membros, e sempre existem muitas características diferentes pelas quais uma classe pode ser definida. Por exemplo, a classe dos homens pode ser definida como bípedes implumes ou como animais racionais. "É esse fato, de uma característica definidora jamais ser única, que torna as classes úteis; de outro modo, poderíamos contentar-nos com as propriedades comuns e peculiares a seus membros" (Ibid., p. 20)

Para o autor, número é um modo de reunir certas coleções, que são aquelas que têm um dado número de termos. Cada coleção é uma classe, cujos membros são coleções, isto é, classes. Assim, cada uma é uma classe de classes. Mas como saber se duas coleções deverão pertencer à mesma coleção?

Se considerarmos as coleções infinitas, será mais simples descobrir se duas coleções têm o mesmo número de termos do que definir qual será esse número. Assim, não queremos que nossa definição de número seja válida apenas para números finitos, nem podemos, de qualquer modo, sem cair em um círculo vicioso, usar a contagem para definir números, porque estes serão usados na contagem.

Por exemplo, se não houvesse poligamia ou poliandria, o número de maridos vivos a qualquer momento seria exatamente igual ao número de esposas vivas. Sabemos que cada marido tem uma esposa e cada esposa tem um marido. Este tipo de relação é a de relação "um-para-um", o de filho para pai é de "muitos-para-um", enquanto a de pai para filho é de "um-para-muitos", e a o de filho mais velho para pai é a relação de "um-para-um". Estes tipos de relações desempenham um relevante papel nos princípios da Matemática, não apenas na definição de número, mas, em muitos outros aspectos.

> Duas classes são ditas "similares" quando há uma relação de um-para-um que correlaciona cada termo de uma classe com um termo da outra classe, do mesmo modo como a relação de casamento correlaciona maridos com as esposas (Ibid., p. 22)

Para Russell, algumas definições preliminares são necessárias para enunciar a definição de similaridade entre classes, a de domínio e de domínio inverso. A classe dos termos que tem uma determinada relação com algo é chamada *domínio* daquela relação e o *domínio inverso* de uma determinada relação é a classe dos termos y sempre que essa relação existir entre x e y. Por exemplo, os maridos são domínio das esposas e ambos do casamento. Já a relação da esposa para o marido é *inversa* da relação marido para esposa.

Russell define que "uma classe é dita "similar" a outra quando existe uma relação de um-para-um da qual uma classe é o domínio, enquanto a outra é o domínio inverso".

É fácil ver que: toda classe é similar a si mesmo; se uma classe α é similar a uma classe β; então, β é similar a α e se α é similar a β e β é similar a λ, então, α é similar a λ, isto é, a similaridade é reflexiva, simétrica e transitiva. Caso uma relação seja simétrica e transitiva, esta deverá também ser reflexiva em todo seu domínio. As relações que têm essas propriedades são importantes, como é o caso da similaridade.

Segundo Russell, a noção de similaridade está logicamente pressuposta na operação de contar, sendo mais simples embora menos familiar. Na contagem, é necessário considerar os objetos em uma certa ordem, isto é, a ordinalidade. Entretanto, para Russell, ordem não é a essência de número: é um acréscimo irrelevante, uma complicação desnecessária do ponto de vista lógico.

Agora, a similaridade não exige uma ordem, nem que as classes similares sejam finitas. Russell apresenta alguns exemplos: o da relação marido-esposa na qual o número de maridos é o mesmo que o número de esposas sem ser necessário estabelecer uma ordem de precedência entre eles e o dos números naturais (excluindo o ‘0’), de um lado e de outro, as frações que têm 1 como numerador. É óbvio que podemos correlacionar 2 com 1 / 2, 3 com 1 / 3 e, assim por diante, mostrando que as duas classes são similares.

Logo, podemos utilizar a noção de “similaridade” para responder à questão de como saber se duas coleções deverão pertencer à mesma coleção. Para Russell perceber que, por exemplo, se uma coleção têm três membros, a classe de todas as coleções similares a ela será dos trios. Qualquer que seja o número de termos de uma coleção, as coleções que lhe sejam “similares” terão o mesmo número de termos. Por enquanto, esta observação limita-se às coleções finitas.

Russell reafirma a distinção entre a classe das duplas e o número 2. Esta, diz ele “nos parece algo diferente do número 2, apesar de não haver dúvida alguma quanto à classe das duplas, pois é indubitável e fácil de definir. O mesmo não ocorre com o número 2, porque se trata de uma entidade metafísica, cuja existência jamais poderemos estar seguros e cuja pista nunca poderemos estar certos de haver determinado. Então, será mais prudente, contentar-nos com a classe das duplas da qual estamos mais seguros, do que caçarmos um problemático número 2 que sempre se mostrará fugidio”. É um exemplo bem motivador para sua definição: “O número de uma classe é a classe de todas as classes similares a ela” (Ibid., p. 24)

Por meio esta definição, o número de uma dupla será a classe de todas as duplas e, a classe de todas as duplas será o número 2.

Para enunciar a definição dos números, em geral, consideremos que, um número será um conjunto de classes, tais que duas quaisquer sejam similares entre si e nenhuma fora do conjunto seja similar a qualquer uma de dentro do conjunto, isto é, “um número é qualquer coisa que seja o número de alguma classe” (Ibid., p. 25)

Russell chama a atenção da aparente circularidade dessa definição que conceitua o número de uma determinada classe sem usar a noção de número em geral, mas também que definições como essas são comuns. Devemos considerá-la como legítima e até, com freqüência, necessária. Apresenta como exemplo entre outros, a classe dos pais para qual deveria se definir primeiro o que é ser o pai de alguém; a classe dos pais será, então, a de todos os que são pais de alguém.

Esta definição de número que Russell apresenta servirá para as coleções finitas, para que se possa saber como ela poderá servir para coleções infinitas, ele destaca que primeiro é preciso saber como decidir o que se quer dizer por "finito" e "infinito".

III.3 Finitude e Indução Matemática

Para a continuidade do estudo, Russell preocupa-se em definir "0" e "sucessor". Para tanto, apresenta algumas propriedades relevantes, tais como; as propriedades hereditária, indutiva e posteridade, além de utilizar a definição de número, em geral, já apresentada. Estas propriedades somadas à generalização da Indução Matemática resultam nas definições de "0" e "sucessor".

Russell inicia reforçando que já sabemos que podemos definir inteiramente a série dos números naturais se soubermos o que queremos dizer por "0", "número" e "sucessor". Entretanto, destaca que se pode dar mais um passo, ou seja, dar significado aos termos "0" e "sucessor" e, assim definir todos os números naturais de maneira mais precisa. Para tanto, é preciso compreender a diferença entre finito e infinito para entender como a definição desses dois termos se constrói e, ainda, porque esse método não pode abranger além do finito.

Por meio da experiência real, podemos atingir qualquer número natural. Primeiramente definindo "1" como "o sucessor de 0", "2" como "o sucessor de 1" e assim por diante. No entanto, apesar da experiência real ser viável,

> [...] não nos podemos valer para provar a proposição geral de que *todos* esses números podem ser atingidos dessa maneira, isto é, prosseguindo a partir do '0', passo a passo, de cada número para o seu sucessor. (RUSSELL, 1974, p. 26)

Então, haverá outra maneira pelo qual isso poderá ser provado? Quais os números que poderão ser atingidos sendo fornecidos os termos “0” e “sucessor”? Haverá algum meio pelo qual possamos definir toda a classe de tais números?

Poderemos fazer uso da experiência real, no alcance dos números naturais, mas, em algum momento, deveremos nos contentar com um “e assim por diante” e é justamente este o objetivo de Russell substituir esse “e assim por diante” por algo menos vago e indefinido. Assim, poderemos ser tentados a dizer que “e assim por diante” significa que o processo de passar para o sucessor poderá ser repetido *qualquer número finito* de vezes, entretanto, o que desejamos é definir “número finito”, logo esse não poderá ser utilizado em nossa definição.

Para Russell, a solução está na quinta proposição primitiva do sistema de Peano o princípio da Indução Matemática admitida não como um princípio, mas como uma definição. Nesta proposição “qualquer propriedade que pertença a ‘0’ e também ao sucessor de todo número que tenha esta propriedade, pertencerá a todos os números naturais”. Russell considera fácil ver que os termos que a ela obedecem são os mesmos que os números atingidos a partir de ‘0’ por passos sucessivos de um número para o outro seguinte. Este assunto é muito importante e exige detalhamento, com algumas definições relevantes que destacamos em seguida.

Uma propriedade é denominada “hereditária” para a série dos números naturais, quando satisfeita por um número *n* também for satisfeita por *n* +1, o sucessor de *n*. Uma classe é dita “hereditária” quando: se *n* for um membro dessa classe, *n* + 1 também é.

Uma propriedade é chamada de “indutiva”, quando é propriedade hereditária satisfeita pelo ‘0’. Analogamente, uma classe é denominada “indutiva” quando é uma classe hereditária da qual ‘0’ é um membro.

> Dada uma classe hereditária da qual ‘0’ é um membro, segue-se que 1 é seu membro, porque uma classe hereditária contém os sucessores de seus membros e 1 é sucessor de 0. De maneira análoga, dada uma classe hereditária da qual 1 seja um membro, segue-se que 2 é também seu membro e, assim, por diante (Ibid., p. 28).

Provamos passo a passo que qualquer número natural é um membro de toda classe indutiva.

Russell definiu "posteridade" de um determinado número natural, com respeito à relação de "predecessor imediato" (inverso de "sucessor"), ou seja, a posteridade de um número natural consiste dele e de todos os números naturais maiores do que ele. Portanto, de acordo com as definições apresentadas, a posteridade de '0' consistirá dos termos que pertencem a toda classe indutiva.

Assim, chegamos a definição de uma das três idéias primitivas de Peano em termos das outras duas: "Os 'números naturais' são a posteridade de '0' com respeito à relação "predecessor imediato" (que é o inverso de "sucessor")" (Ibid., p. 28)

Como conseqüência dessa definição notamos que duas das proposições primitivas tornam-se desnecessárias, isto é, (a 1°) '0' é um número e 5°) sobre a Indução Matemática. A respeito da segunda proposição que diz que o sucessor de um número é um número, só é necessária se considerarmos que "todo número natural tem um sucessor".

Para Russell, agora, podemos definir com facilidade "0" e "sucessor" por meio da definição de número, em geral (O número de uma classe é a de todas as classes similares a ela) apresentada no capítulo II. O número '0' é o número de termos de uma classe que não tem membro algum, ou seja, a "classe vazia". Entretanto, de acordo com a definição de número, em geral, o número de termos de uma classe vazia é o conjunto de todas as classes similares à classe vazia, ou seja, o conjunto consistindo apenas da classe vazia, isto é, a classe cujo único membro é a classe vazia. Russell conclui que '0' é a classe cujo único membro é a classe vazia.

Agora resta definir "sucessor". Considerando qualquer número *n*, admitamos que *a* seja uma classe que tenha *n* membros e que x seja um termo que não é membro de *a*. Então, a classe consistindo de *a* é um acréscimo de x, e terá *n* + 1. Chegamos na seguinte definição: "O sucessor de um número de termos da classe *a* é o número de termos da classe que consiste de *a* e x, em que x é qualquer termo que não pertença à classe" (Ibid., p.29)

Conforme Russell, desse modo, reduzimos as três idéias primitivas de Peano em idéias da Lógica, fornecendo definições que as tornam mais precisas e evitando inúmeros significados diferentes apresentados no tópico III.1. No que se refere às cinco proposições primitivas do sistema de Peano, ele demonstrou duas delas (1° e a 5°) por meio da definição de "número natural" (Os 'números naturais' são a posteridade de '0' com relação ao predecessor imediato). Mas como ficam as outras três restantes?

Russell refere que as proposições: 4) '0' não é sucessor de número nenhum e 2), o sucessor de qualquer número é um número fácil de ser demonstrado. O problema está na (3ª) proposição que assevera que "não há dois números com o mesmo sucessor". Esta dificuldade surgirá quando o número total de indivíduos no universo for finito. Por exemplo, supondo que o número de indivíduos no universo seja igual a 10; então, não haveria classe alguma de 11 indivíduos e essa seria a classe vazia. O mesmo seria com o número 12. Dessa maneira, teríamos 11 = 12; portanto, o sucessor de 10 seria o mesmo que o sucessor de 11, embora o número 10, não fosse o mesmo que o número 11. Teríamos, assim, dois números diferentes com o mesmo sucessor. Falha essa que não surge se o número de indivíduos não for finito.

> Admitindo que o número de indivíduos do universo não seja finito, conseguimos agora não apenas definir as três idéias de Peano, mas também ver como provar as cinco proposições primitivas por meio de idéias e proposições primitivas pertencentes à Lógica (Ibid., p. 30).

É possível generalizar o processo de Indução Matemática, que foi utilizada para definir os números naturais. Definimos número natural como a 'posteridade' de '0' com respeito à relação entre número e seu sucessor imediato. Se chamarmos essa relação de N, qualquer número *m* terá essa relação com *m* + 1. Uma propriedade é "hereditária com respeito a N" ou, simplesmente, "N-hereditária", se, quando for satisfeita por um número *m*, também será por *m* + 1, isto é, ao número com o qual m tenha a relação N. Dir-se-á que um número *n* pertencerá à "posteridade" de *m* com respeito á relação N se *n* tiver todas as propriedades N-hereditárias pertencentes a *m*. Essas definições podem ser aplicadas a qualquer outra relação, tanto quanto a N. Assim, se R for uma relação qualquer, poderemos estabelecer as seguintes definições:

Uma propriedade é chamada de “R-hereditária” se satisfeita por um termo x, e x R y, então, ela será satisfeita por y.

Uma classe é R-hereditária quando sua propriedade definidora for R-hereditária.

Diz-se que um termo x é “R-ancestral” do termo y se y tiver toda propriedade R-hereditária que x tiver, desde que x seja um termo que tenha a relação R com alguma coisa ou com o qual alguma coisa tenha a relação R.

A “R-posteridade” de x é constituída de todos os termos dos quais x seja um R-ancestral.

Conforme Russell, as definições acima foram estruturadas de forma que, se um termo for o ancestral de alguma coisa, ele seja seu próprio ancestral e pertença à sua própria posteridade.

Para Russell, como já foi dito “finito”, deve ser definido por meio da Indução Matemática e é mais fácil definir a relação de ancestral de modo geral do que defini-la primeiro para o caso da relação entre n e $n+1$ e depois estendê-la a outros casos. Pois, a generalidade exige maior raciocínio desde o princípio, entretanto economizará e aumentará o poder lógico a longo prazo.

A Indução Matemática tratada pelo autor, como definição, pode ser aplicada a alguns números e a outros não. Russell utiliza a expressão de “números indutivos” ao se referir aos “números naturais”, pois deste modo, mantém em evidência que a definição desse conjunto foi obtida por meio da indução matemática. “A indução matemática possibilita, acima de tudo, a característica essencial pela qual o finito é distinguido do infinito” (Russell, 1974. p. 33).

O princípio da Indução Matemática enuncia popularmente: “o que pode ser inferido do seguinte para o seguinte pode ser inferido do primeiro ao último”. Segundo Russell, isso se verifica quando o número de passos intermediários entre o primeiro e o último é finito e não em caso contrário.

Portanto, a Indução Matemática não é válida ao que se refere aos números infinitos. Mas as propriedades de tais números ajudarão a estabelecer uma relação quase inconsciente como a que ocorre entre a indução matemática e os números finitos.

III.4 Definição de ordem

Para colocar a noção de ordem em referenciais lógicos, Russell reforça sua importância na Matemática. Destaca a existência da variedade de ordens para além da ordem da grandeza; que a ordem não está na classe, mas, na relação existente entre os membros dessa classe; que não devemos buscar a definição de ordem na natureza do conjunto de termos a ser ordenado, pois ele pode ter muitas ordens. Chama a atenção de que as características essenciais que precisam ser descobertas para que uma relação dê surgimento a uma ordem, é que os dois termos da classe a serem ordenados, um deve “preceder” e o outro “suceder”.

Nessas condições, ele afirma que: as três propriedades necessárias para que uma relação seja ordenadora, são:

1º). Se x preceder y, y não deverá também preceder x. A relação que tenha esta propriedade é chamada de *assimétrica*.

2º). Se x preceder y e y preceder z, então x deverá preceder z. Nesse caso, a relação que possui essa propriedade, é denominada *transitiva.*

3º). Dados dois termos quaisquer da classe a ser ordenada, deve haver um que precede, e outro que sucede. Por exemplo, se considerarmos dois pontos em uma linha, um deverá estar à esquerda do outro. A relação que tem essa propriedade é chamada de *conexa.*

Russell conclui que uma relação com as três propriedades dá surgimento a uma ordem entre os termos, e sempre que exista uma ordem esta poderá ser encontrada como a geradora de uma relação com essas propriedades.

Algumas definições são apresentadas para ilustrar esta tese: *aliorrelativa* (em razão de Peirce), nenhum termo está em relação consigo mesmo; *quadrado,* se dois termos estiverem na relação, existirá um termo intermediário na relação com eles; *domínio,* todos os termos que têm essa relação com alguma coisa; *domínio inverso*, todos os termos com os quais algo está relacionado; *campo,* união do domínio com domínio inverso; e, *contém* quando uma relação se verifica sempre que a outra verifica.

Russell apresenta sua justificativa, mostrando que: uma relação assimétrica é o mesmo que uma relação, cujo quadrado é uma aliorrelativa. Embora uma relação aliorrelativa possa deixar de ser assimétrica, o contrário não acontece. Uma relação transitiva contém seu quadrado e uma relação que é transitiva e assimétrica, é equivalente a uma aliorrelativa. Ele ainda mostra que as propriedades aliorrelativas, transitivas e conexas são mutuamente independentes e, finalmente define: “Uma relação é serial quando é aliorrelativa, transitiva e conexa; ou o que é equivalente, quando é assimétrica, transitiva e conexa”. (RUSSELL, 1974, p. 39)

Na continuidade, discute a diferença entre série e campo de uma relação serial, exemplificando com séries diferentes apresentadas em um mesmo campo como, por exemplo: 1, 2, 3 ou 3, 2, 1.

Após ter apresentado a definição de relação serial ou de ordem, ele passa a discutir a questão de que embora em uma série sempre haja uma relação satisfazendo as três propriedades, nem sempre é gerada mais naturalmente por ela, como ocorre com a série dos números naturais. Nesse caso, a relação geradora é a da *sucessão imediata* que é assimétrica, porém não transitiva ou conexa.

Russell deduz da indução matemática a relação ancestral e contorna esta situação, definindo a relação “menor que” entre dois números indutivos (denominação dele para números naturais). “Um número indutivo *m* é menor que um número indutivo *n* se n possuir todas as propriedades hereditárias possuídas pelo sucessor de *m*” (Ibid., p. 40).

É fácil ver que essa relação é transitiva, assimétrica e conexa. Assim, Russell atribui à série dos números indutivos uma relação de ordem que atende a sua definição e a denomina de ordem "natural" ou ordem de grandeza.

Na busca de reverter a geração de séries por uma relação entre termos consecutivos Russell denomina de "posteridade própria de x com respeito a R" à classe dos termos que pertencem a R-posteridade de algum termo com o qual x tem relação R, no sentido dado antes à "posteridade" que inclui um termo em sua própria posteridade. Define que "a posteridade própria" de x com respeito a R consiste de todos os termos que possuem todas as propriedades R-hereditária possuídas por todos os termos com os quais x tem a relação R" (Ibid., p. 41)

Esta definição é aplicável, não apenas quando existir um só termo com o qual x se relacione por R, mas também quando se relacionar com vários, como, em geral, o de pai e filho. Define ainda que "um termo x é um "ancestral próprio" de y com respeito a R se y pertence à posteridade própria de x com respeito a R".

Agora, é preciso que a relação "R-ancestral próprio" seja aliorrelativa, transitiva e conexa. Fica, então, a questão: Mas, em que circunstâncias isso ocorrerá? Ela será sempre transitiva, mas só em certas circunstâncias será aliorrelativa e conexa.

De modo geral, o resultado principal é o método que usa uma relação transitiva para definir ordem, é mais geral que o da geração de ordem por meio de relações de consecutividade.

Russell ressalta que se dependêssemos da consecutividade para definir ordem, estaríamos impossibilitados de definir ordem de grandezas entre frações. As relações de maior e menor, entre frações, não exigem geração de relações de consecutividade e têm as três características de que necessitamos para definir as relações seriais. Uma conclusão importante é que: em todos esses casos a ordem deve ser definida por uma relação transitiva, porquanto somente essa relação é capaz de ultrapassar um número infinito de termos intermediários.

O método da consecutividade, como o da contagem, é apropriado ao finito: pode até ser estendido a certas séries infinitas, isto é, aquelas, que, embora o número total de termos seja infinito, o número de termos entre quaisquer dois é sempre finito. Russell destaca a importância vital dessa problemática para o entendimento de continuidade, espaço, tempo e movimento.

Existem várias maneiras pelas quais as séries podem ser geradas, mas todas dependem da descoberta ou construção de uma relação assimétrica, transitiva e conexa.

Russell exemplifica pela geração de séries por meio da relação “entre”, uma relação de três termos. Esta relação é muito útil em Geometria, mas nesse estudo é enfocada para os pontos de uma linha reta e à ordenação desses pontos, é, assim, definida:

Tomando-se dois pontos quaisquer *a*, *b*, a linha (*ab*) consiste de três partes (além dos próprios *a* e *b*):

1) Os pontos entre *a* e *b.*
2) Os pontos x, tais quais *a* está entre x e *b*.
3) Os pontos y, tais que *b* está entre y e *a*.

A linha (*ab*) pode ser, assim, definida em termos da relação “entre”. Para que essa relação “entre” possa arranjar os pontos da linha em uma ordem da direita para a esquerda, necessitamos de certas suposições, que são as seguintes:

1) Se algo está entre *a* e *b*, *a* e *b* não são idênticos.
2) Algo que esteja entre *a* e *b* está também entre *b* e *a*.
3) Algo que esteja entre *a* e *b* não é idêntico a *a* (nem, conseqüentemente, a *b*, em virtude de 2).
4) Se x está entre *a* e *b*, algo que esteja entre *a* e x está também entre *a* e *b*.
5) Se x está entre *a* e *b*, e *b* está entre x e y, então, *b* está entre *a* e y.
6) Se x e y estão entre *a* e *b*, então, ou x e y são idênticos ou x está entre *a* e y, ou x está entre y e *b*.
7) Se *b* está entre *a* e x e também entre *a* e y, então, ou x e y são idênticos, ou x está entre *b* e y ou y está entre *b* e x.

Para Russell, estas sete propriedades são claramente verificadas no caso de pontos sobre uma linha reta no espaço ordinário sendo importante observar que nada nas definições ou argumentos depende do que queiramos dizer por "entre", a relação real daquele nome que ocorre no espaço empírico.

Este tema não se esgota aqui, por exemplo, a ordem cíclica, tal como a dos pontos em um círculo não pode ser gerada por meio da relação entre termos da espécie "entre". Necessitamos de uma relação de quatro termos que poderá ser chamada de "separação de duplas".

Conforme Russell a "geração de relações seriais", vai além das geradas pela relação de consecutividade, assim como a série dos naturais.

III.5 Tipos de relações

Segundo Russell, grande parte da Filosofia Matemática é dedicada à diversidade de tipos e de usos das relações. Sua atenção é voltada para as suas propriedades, destacando que algumas delas, satisfeitas por todas estas relações, só são importantes para alguns tipos delas.

De início, o autor destaca uma das classes de relações consideradas das mais importantes, a das relações seriais definidas pelas propriedades: assimetria, transitividade e conexão.

A respeito da assimetria, isto é, a propriedade de ser incompatível com seu inverso, discute o exemplo da relação "marido (ou esposa)" reafirmando que: se a é marido (ou esposa) de b, b não poderá ser marido (ou esposa) de a. Na contraposição, está a relação "cônjuge" que é simétrica: "se a é cônjuge de b então b será cônjuge de a".

Russell analisa, também, como deduzir uma relação baseando-se em outra, tendo como método à restrição do domínio. Da relação "marido", pode-se deduzir a relação "cônjuge", restringindo o domínio ao domínio dos homens. Este exemplo mostra que, por vezes, de uma relação simétrica é possível separá-la em duas relações assimétricas. Isto ocorre, pois existem duas classes mutuamente exclusivas, a masculina e a feminina. No entanto, o autor alerta, que casos como estes são raros e excepcionais. As relações seriais de mais de dois termos, não se incluem entre eles, já que para elas o domínio e o domínio inverso sobrepõem-se.

Russell considera importante encontrar formas de *construir* relações, tendo alguma propriedade útil, por meio de operações com relações que apenas tenham rudimentos da referida propriedade. Trata-se dos casos de transitividade e a conexidade.

Segundo o autor, a relação ancestral deduzida de uma relação R qualquer, por indução generalizada é transitiva; ou, partindo de uma relação R de *muitos-para-um*, poderemos *construir* a relação ancestral de R, conexa limitada à posteridade de um termo dado. A assimetria é uma propriedade mais difícil de se garantir por construção. Isto é verdade porque os casos nos quais podemos obter uma relação simétrica somando à relação dada e seu inverso, não permitem voltar dessa relação simétrica para a assimétrica original.

A relação desigual é simétrica: aqui o que Russell pretende é destacar o caráter fundamental da assimetria distinguindo também que, na classificação das relações, ser assimétrica é mais importante que implicar diversidade, pois uma relação assimétrica implica diversidade, mas o contrário não é verdade.

Russell propõe dispensar as posições de relações, substituindo-as por predicados aos sujeitos, quando se faz restrição às relações simétricas, pois se transitivas podem afirmar um predicado comum. Assim, poder-se-ia considerar o número de uma coleção como um predicado da coleção no lugar de usar a relação de *similaridade entre classes.* Com este procedimento "duas classes similares são duas que têm o mesmo predicado numérico, enquanto duas que não são similares serão duas que têm predicados numéricos diferentes" (RUSSELL, 1974, p. 49).

Mesmo ao considerar ser possível formalmente substituir qualquer relação em uma relação um-para-muitos, por exemplo, na relação menor entre números indutivos, tomar a classe de todos os menores que um número *n* maior que 1. É claro que essa classe tem uma relação com *n* que não é compartilhada por nenhuma outra classe. Assim, entre esta classe e *n* é estabelecida uma relação um-para-muitos não como antes. Russell refere que Peano entendia as relações simétricas desse modo. Apesar dessa possibilidade, ele continuava considerando as relações um-para-muitos um tipo especial de relação.

Neste ponto, Russell alarga a noção de função para além dos números para todas as relações um-para-muitos. Introduz também as noções, mais importantes na lógica, das relações: inverso, domínio, domínio inverso, campo. Ele dá atenção especial às relações um-para-um entre as relações um-para-muitos, por sua conexão com a definição de número.

Refere também que não é só conhecer a definição formal desse tipo de relação, mas, sim, ter familiarização com elas. Por isso, explora bastante sua definição e apresenta vários exemplos.

Vale destacar a indicação de que tais relações são aquelas em que o produto de uma delas e seu inverso implicam na identidade. Chama de "produto relativo" entre duas relações R e S a composição (denominação atual) entre elas.

O autor citado refere que é uma característica das relações um-para-muitos é que o produto relativo de uma relação e seu inverso implica a identidade, e que no caso das relações um-para-um, além disso acontecer, também, vale que o produto relativo do inverso pela relação também implique identidade.

E sugere o uso das denominações *referente* para o termo do qual a relação parte e *relato* para o termo para o qual a relação chega. Completa que se x e y são marido e mulher, então, com respeito à relação "marido", x é *referente* e y é *relato*, mas, a respeito da relação "esposa", y é *referente* e x é relato.

Após a introdução das denominações *referente* e *relato*, Russell pode inserir a noção de "sentido" nas relações. Uma relação e seu inverso têm sentidos opostos.

O fato de uma relação ter um "sentido" é considerado fundamental e parte da razão para que a ordem possa ser gerada por relações apropriadas.

O domínio de uma relação é a classe de todos os *referentes* possíveis e o domínio inverso é a dos *relatos*.

Russell destaca que, no caso das relações um-para-um, com freqüência, o domínio e o domínio inverso sobrepõem-se. Apresenta vários exemplos, entre eles: R é a relação que acrescenta 1 aos dez primeiros números inteiros (excluindo o zero). No domínio inverso, temos quase os mesmos termos que no domínio, a menos do primeiro e do último.

Um caso considerado interessante é o da relação um-para-um cujo domínio inverso é parte do domínio, mas não todo o domínio. O autor exemplifica a relação que leva cada número a seu quadrado. Assim, Russell cita que o domínio inverso é uma "parte própria" do domínio, assunto que será tratado quando se tratar do infinito.

Russell apresenta ainda a classe das "permutações" cujo domínio e o domínio inverso são idênticos. Com alguns exemplos de permutações, o autor mostra que a classe das permutações constitui um "grupo".

III.6 Similaridade de relações

A similaridade entre duas classes significa que estas têm o mesmo número de elementos ou que existe uma "correlação" de um-para-um, entre elas. Com papel idêntico ao que a similaridade de classes desempenha para as classes, Russell vai definir "similaridade de relações" ou "semelhança" entre relações.

Ele vai buscar condições favoráveis para utilizar a noção de similaridade entre relações. Não considera suficiente que apenas o domínio (ou domínio inverso) de uma relação possa ser correlacionada com o domínio (ou domínio inverso) da outra. Acha importante que sempre que uma das relações existir entre dois termos, a outra relação exista também entre os correlatos desses dois termos. Por exemplo, se um mapa de um lugar está ao norte de outro, o ponto do mapa correspondente ao primeiro estará acima do correspondente do segundo. As relações espaciais do mapa têm "semelhança" com as relações espaciais do país cartografado. Este é o tipo de conexão entre relações que vai interessar a Russell.

Nesta perspectiva, uma primeira restrição é feita para se definir semelhança. O autor vai considerar apenas as relações que têm “campos” ou em outras palavras aquelas, cujos domínios ou domínios inversos sejam formados por uma única classe. Isto porque uma relação só terá campo se for homogênea, ou seja, se o domínio e o domínio inverso forem do mesmo tipo lógico. A noção de semelhança não é muito útil quando aplicada a relações não homogêneas. Na prática, a restrição não é relevante e pode mesmo ser esquecida depois de definida a semelhança.

Por meio, destas preliminares, Russell define que duas relações P e Q são “similares” ou têm “semelhança”, quando existir uma relação S um-para-um, cujo domínio será o campo de P e cujo domínio inverso será o campo de Q. Se um termo tiver a relação P com outro, o correlato de um deles terá a relação Q com o correlato do outro e vice-versa.

Com as condições acima preenchidas, a relação P coincide com o produto relativo de S e Q e inverso de S. Desse modo, S será denominada “correlacionadora” ou “correlacionadora ordinal”. A existência de S torna P e Q similares ou tendo a mesma semelhança. Duas relações similares satisfazem sempre as mesmas propriedades independentemente dos termos reais que compõem seus campos.

A definição de relações similares leva a um problema importante na Filosofia Matemática que, segundo Russell, até então, não havia sido adequadamente reconhecido.

É o seguinte: se um enunciado for elaborado em uma linguagem em que se conhece a gramática e a sintaxe e não se conhece o vocabulário, quais os significados possíveis de tal enunciado e quais os significados das palavras desconhecidas que o tornariam verdadeiro?

Russell atribui importância a esse problema para a Filosofia da Matemática, porque para ele a questão representa o estado de nosso conhecimento da natureza. Assim, nas ciências mais avançadas, certas proposições científicas, mais ou menos verdadeiras, a respeito do mundo expressam-se em símbolos matemáticos e as interpretações dos termos dessas proposições são feitas meio a esmo.

Então, o que realmente sabemos quando enunciamos uma lei da natureza é que provavelmente exista alguma interpretação de nossos termos que tornará nossa lei quase verdadeira. Aí está a importância do problema enunciado. Russell deixa de lado a pergunta geral e ocupa-se da questão da semelhança em si.

Do mesmo modo que ele denomina "número" de uma classe dada, o conjunto das classes similares a ela, ele vai denominar "número" de uma relação, ao conjunto de todas as relações que são similares a ela. Para distinguir esse caso do outro, denomina este último de "número-relação", pois quer deixar claro que se trata do número das classes e atribui a denominação "números cardinais".

Os números cardinais são então os números apropriados às classes. Os inteiros comuns da vida cotidiana e números infinitos estão aí incluídos. Quando utiliza a denominação "números" sem especificação, fica subentendido tratar-se de números cardinais.

As séries são aplicações dos números-de-relação. Assim, se duas séries tiverem o mesmo número-relação, elas serão consideradas igualmente longas. No caso das séries finitas seus campos devem ter o mesmo número cardinal e aí o número relação terá um paralelismo com o número cardinal.

Os números-de-relação aplicáveis às séries são chamados números seriais, sendo os números ordinais uma subclasse destes.

Por exemplo, duas séries finitas terão o mesmo número-de-relação quando seus campos tiverem o mesmo número cardinal de termos. Uma série de 15 termos terá o mesmo número-de-relação que qualquer outra série de 15 termos, mas não terá o mesmo número-de-relação que uma série de 14 ou 16 termos e, naturalmente, o mesmo número-relação que uma relação que não seja serial.

Os números-de-relação aplicáveis às séries podem ser chamados de "números seriais"[51], isto é, um número serial finito é determinado quando conhecemos o número cardinal de dois termos do campo de uma série que tenha o número serial em questão. Quando, o número cardinal de termos do campo de uma série for infinito, o número-de-relação da série não será determinado simplesmente pelo número cardinal. Russell menciona que podemos definir a adição e a multiplicação para os números-de-relação, tanto quanto aos números cardinais, podendo, assim, desenvolver toda uma aritmética dos números-de-relação.

Por exemplo, suponhamos que queremos definir a soma de duas séries que não se interceptam (mutuamente exclusivas), de modo que o número-de-relação da soma seja possível de ser definido como a soma dos números-de-relação das duas séries. Primeiro, devemos respeitar a ordem que existe entre as duas séries: uma delas deverá ser colocada à frente da outra. Assim, se P e Q são as relações geradoras das duas séries, na série que é a soma com P colocada antes de Q, todo membro do campo de P precederá todo membro do campo de Q.

Desse modo, a relação serial a ser definida como a soma de P e Q não é simplesmente "P ou Q", mas "P ou Q ou a relação de qualquer membro do campo de P com qualquer membro do campo de Q". Admitindo que P e Q não se sobrepõem, esta relação é serial, mas "P ou Q" não é serial, não sendo conexa, portanto não se estabelece entre um membro do campo de P e um membro do campo de Q. Logo a soma de P e Q, conforme definida acima, é o que necessitamos para definir a soma de dois números-de-relação. Algumas modificações tornam-se necessárias para produtos e potências.

A lei resultante não obedece à lei comutativa, mas à lei associativa que é uma forma da lei distributiva. Assim, as duas das leis formais das potências, não apenas quando aplicadas aos números seriais, mas também aos números-de-relação, em geral.

---

[51] Também conhecidos como 'números ordinais', que são subclasses desses.

Segundo Russell, não devemos supor que, simplesmente, pelo fato das séries possibilitarem a mais óbvia aplicação das idéias de semelhança, não existam outras aplicações importantes, a Geometria, em geral, por exemplo.

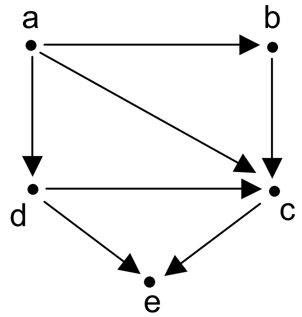
> Se o sistema de relações, pelo qual uma Geometria for aplicada a um determinado conjunto de termos, pode ser colocado inteiramente em relação de semelhança com um sistema que se aplique a outro conjunto de termos, então, a Geometria dos dois conjuntos é indistinguível do ponto de vista matemático, isto é, todas as proposições são as mesmas, exceto pelo fato de serem aplicadas em um caso a um conjunto de termos, e, no outro, a outro conjunto de termos. (RUSSELL, 1974, p. 61)

Se duas relações forem similares, isso significará que ambas têm a mesma "estrutura". Para fins matemáticos, o único aspecto que interessa, no que se refere à relação, é o caso em que ela se estabeleça e não sua natureza intrínseca. Se duas classes puderem ser definidas por vários conceitos diferentes, por exemplo, "homem" ou "bípede implume". Assim, duas relações que são conceitualmente diferentes, podem estabelecer-se no mesmo conjunto de instâncias. Uma "instância" em que se estabelece uma relação, deve ser concebida como um par ordenado de termos, isto é, com uma ordem: o par deve, naturalmente ser tal que, seu primeiro termo tenha a relação em questão com o segundo.

Russell apresenta o seguinte exemplo: consideremos a relação "pai", podemos definir o que chamamos de "extensão" dessa relação como a classe de todos os pares ordenados (x, y), tais que: x é o pai de y. Do ponto de vista matemático, o que importa da relação "pai" é que ela define esse conjunto de pares ordenados. Portanto, temos "a 'extensão' de uma relação é a classe dos pares ordenados (x, y), tais que x tem a relação em questão com y" (Ibid., p. 63).

Na busca de um processo de abstração maior, podemos dar um passo à frente, isto é, considerando o que queremos dizer por "estrutura". Dada qualquer relação, podemos, se ela for suficientemente simples, construir o seu mapa. Tomemos, por exemplo, a relação cuja extensão tenham os seguintes pares: *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *ce*, *dc*, *de*, onde *a*, *b*, *c*, *d*, *e* são cinco termos quaisquer.

Desse modo, podemos confeccionar um mapa dessa relação tomando cinco pontos sobre um plano e ligando-os por setas, como na figura. Pelo mapa, é apresentado justamente aquilo que denominamos “estrutura” da relação.



Russell menciona que a “estrutura” da relação não depende dos termos particulares que formem o campo da relação, pois o campo pode ser modificado sem que se modifique a estrutura. Esta poderá também ser alterada, sem que se altere o campo. Portanto, duas relações têm a mesma estrutura quando têm semelhança, isto é, quando têm o mesmo número-relação. Assim, aquilo que definimos como “número-relação”, é exatamente a mesma coisa que está obscuramente insinuada pela palavra “estrutura”, termo que jamais será definido com precisão por aqueles que a utilizam.

Capítulo IV

Reflexões de Michael F. Otte

No que segue, apresentamos a parte principal teórica, trata-se da síntese das reflexões de Otte sobre as contradições de Russell quando analisa a concepção de número de Peano. A tradução da integra do artigo de Otte[52] que ora sintetizamos, encontra-se em anexo.

IV.1 A respeito das abordagens de Russell e Peano sobre a concepção de número

No início do artigo, Michael Otte enfatiza a importância da obra de Russell “Introduction to Mathematical Philosophy” de 1918, que apresenta um estudo aprofundado dos fundamentos epistemológicos da Matemática.

Otte menciona também que Russell foi um dos fundadores da filosofia analítica da Matemática, predominante até a atualidade, e sua visão lógica do mundo visava a iluminação científica e, conseqüentemente, os méritos do progresso. Após a Primeira Guerra Mundial (1914 a 1918), o pensamento predominante foi o do irracionalismo surdo, Russell com sua orientação estritamente lógico-científica pretendia apresentar uma nova visão.

[52] Artigo intitulado: B. Russell’s “Introduction to Mathematical Philosophy” de 2001.

Conforme Otte, embora usemos até hoje, os resultados técnicos de Russell, não existe preocupação com o caráter filosófico e histórico ligado inseparavelmente aos resultados. Aconselha que seria apropriado atentar às origens históricas e epistemológicas da Moderna Matemática.

Otte chama a atenção para o fato de que, desde o século XIX a Matemática apresentava uma tendência à aritmetização. Já no final desse século, número não parecia algo tão transparente, surgindo, assim, a questão "O que é um número?", além da necessidade de completar os fundamentos da Aritmética por meio da análise lógica.

Para tentar responder a essa questão, Russell precisava de uma "nova lógica", a qual defrontou-se, em 1900 no Congresso de Matemática em Paris, com o que expôs o italiano Giuseppe Peano.

> [...] o Congresso foi um momento decisivo em minha vida intelectual, porque eu encontrei Peano. Eu já o conhecia de nome e tinha visto alguns de seus trabalhos, mas não tinha me esforçado em dominar sua notação. Durante a discussão no Congresso, eu observei que ele era sempre mais preciso do que qualquer outro e que ele invariavelmente tinha o melhor argumento no qual embarcava. À medida que os dias passaram, eu decidi que isso era em razão de sua lógica matemática.[53] (RUSSELL apud OTTE, 2001, p. 14)

Continuando sua exposição, Otte considera que o método axiomático moderno representa o último passo no sentido de uma matematização de todos os fenômenos e áreas da realidade, com a própria Matemática sendo finalmente matematizada – "[...] O conceito de número, em particular, sempre marcou o âmago do pensamento matemático [...]"[54] (OTTE, 2001, p. 15)

Para Otte, as pesquisas da filosofia e dos fundamentos matemáticos surgiram de duas maneiras distintas. A primeira, denominada reducionismo teórico de conjuntos, iniciada por Bolzano (1781-1848) e Cauchy (1789-1857) que culminou em Russell. A segunda, chamada de método axiomático ou

[53] [...] the Congress was a turning point in my intellectual life, because I there met Peano. I already knew him by name and had seen some of his work, but had not taken the trouble to master his notation. In discussion at the Congress I observed that he was always more precise than anyone else, and that he invariably got the better of any argument upon which he embarked, As the days went by, I decided that this must be owing to his mathematical logic.

[54] [...] The concept of number, in particular, has always marked the heart of mathematical thought […]

postulacional, que se originou com os trabalhos de Poncelet (1788-1867) e Grassmann, atingindo pleno desenvolvimento nos trabalhos de Peano e Hilbert.

Só por volta de 1870, as pessoas começaram a investigar os fundamentos da Matemática e a buscar por justificativas lógicas específicas da Aritmética, isto é, foram forçadas a preocuparem-se com os sistemas epistemológicos tradicionais.

De acordo com Otte, ao tratarmos dos fundamentos da Matemática pura e da Aritmética em particular, mudamos nossas atitudes epistemológicas, assim como regras metodológicas, tornando-nos obcecados por encontrar respostas fundamentais.

Primeiramente, Russell mostra em sua obra “Book of Nature” (Livro da Natureza), que não podemos chegar além de nossa própria visão dos fenômenos naturais, isto é, apenas podemos tratá-los por meio das representações das relações e estruturas matemáticas. Em contrapartida, no que se refere ao conceito de número, Russell insiste em buscar uma resposta para a questão “O que é um número?”, de maneira definitiva.

Russell mencionou que o caráter abstrato da Matemática é muito importante, pois, para ele, as representações matemáticas de fenômenos são úteis pela sua fertilidade e seus usos. Exemplifica esse conhecimento matemático abstrato por meio de um financista, que pode negociar trigo ou algodão sem nunca ter visto qualquer um deles, tudo o que precisa saber é se esses produtos vão valorizar ou desvalorizar.

Entretanto, para Otte, Russell quer contrapor suas abstrações matemáticas pelo raciocínio puro e, conseqüentemente, garantir sua aplicabilidade de maneira completamente *a priori* em um espírito, até certo ponto, num sentido kantiano. Ainda cita que segundo Russell deveríamos reduzir toda a ciência e a vida cotidiana, até onde fosse possível, a números e Aritmética. Assim, número e seu significado devem ser determinados independentes de qualquer aplicação por pensamentos puros e análise lógica.

Russell assegura que, por meio da explicação do significado do conceito de número, a Lógica estará substituindo a Aritmética, superando a lacuna entre empirismo e mentalismo.

Otte menciona que embora Russell acredite que a ciência possa somente determinar seu domínio de investigação por meio das relações (isomorfismo estrutural) no que se refere ao campo das Ciências Naturais, não gostaria de tratar dessa maneira a Matemática, isto é, simplesmente pela sua própria estrutura.

> Esta diferença na atitude e no comportamento cognitivo parece devida ao fato que na Matemática temos, diferentemente das Ciências Naturais, simultaneamente que assegurar a existência do nosso universo de discurso, assim como construir os meios conceituais de procedimento com o existente [...][55] (OTTE, 2001, p.17)

Para Bateson (1904-1980), do ponto de vista epistemológico temos a opção de tratar como real tanto os objetos, como os eventos, sinais ou mensagens. Mas, o que difere o mundo newtoniano (mundo dos objetos) do mundo da comunicação é o fato do primeiro atribuir realidade aos objetos, excluindo de fato todas as meta-relações, enquanto o outro insiste em considerar e analisar as meta-relações, excluindo todos os objetos.

Para Otte a Matemática parece pertencer a esses dois mundos, compartilhando da exigência de ambos. O autor inicia sua análise do primeiro capítulo da obra de Russell, explicitando que não existe menção sobre cardinalidade nesse capítulo. Russell aponta falhas no sistema de Peano, do qual se derivam os números naturais.

Para Otte, esta é a característica de uma abordagem axiomática que se expressa por meio de relações gerais ou objetos ideais (coisas que não existem concretamente). Entretanto, Russell não concordava com essa visão.

Russell aponta falhas na abordagem de Peano. E menciona que as idéias primitivas deste sistema são “variáveis”, pois podem assumir várias interpretações e mesmo assim, verificarem os cinco axiomas.

[55] This difference in attitude and cognitive behavior seems due to the fact that in mathematics we have, differently from the natural sciences, simultaneously to secure the existence of our universe of discourse as well as to construct the conceptual means of dealing with the existent. […]

Para ele, os termos primitivos devem ser substituídos por estruturas lógicas, que devem satisfazer os cinco axiomas de Peano. Este processo é de fundamental importância para conectar a Aritmética à Lógica pura.

Para Otte, precisamos compreender número como o "número de uma quantidade" e fornecer uma aplicação para o conceito assim definido, por meio da existência de conjuntos de cardinalidade qualquer.

Isso poderá acontecer apenas pelo método axiomático, entretanto, devemos entender a noção de axioma no sentido euclidiano, isto é, axioma como uma verdade intuitiva evidente como uma pré-condição matemática, e não axioma no sentido de Peano-Hilbert. Para garantir a existência dos números infinitos, Russell introduz o "axioma do infinito".

O autor menciona que Russell supôs que existam infinitos conjuntos de cardinalidade arbitrárias, pois não é difícil imaginar que haja infinitas coleções de conjuntos no mundo. Para Russell, a teoria dos conjuntos não deve ser vista, simplesmente, como uma teoria formal, mas, como um modelo intuitivo da realidade.

Portanto, a intuição aritmética é agora substituída pela intuição da teoria dos conjuntos. Otte acha difícil entender essa substituição, considerando que a axiomatização da Aritmética foi motivada pelo fato de sermos incapazes de intuir ou compreender completamente os números, restando assim, fazer uso das leis formais. "[...] Quase meio século depois, a educação matemática mundial tentou repetir esse movimento, com pouco sucesso"[56] (Ibid., p. 20)

Michael Otte considera instrutivo comparar as preocupações de Russell com as de Rudolf Carnap (1891-1970), que sofreu grande influência de Russell em meados de 1920. O principal objetivo de Carnap, de uma visão estruturalista, era o de estabelecer um sistema lógico-cognitivo de conceitos, isto é, a construção de um conceito passo a passo baseado em certos conceitos básicos, obtendo como resultado uma genealogia de conceitos em que qualquer conceito poderá encontrar um lugar seguro.

[56] [...] Nearly half a century later, mathematical education worldwide tried to repeat this move, with little success.

> Cada declaração científica pode a princípio ser tão transformada em nada mais que uma declaração estrutural. Mas esta transformação não é somente possível, é imperativa. Para ciência falta falar sobre o que é objetivo, e o que quer que faça não pertence à estrutura, mas ao material (i.e., qualquer coisa pode ser apontada numa definição concreta ostensiva) é, em uma última análise, subjetivo.[57] (CARNAP apud OTTE, 2001. p. 20)

Segundo Otte parece haver algo de errado com essa visão estruturalista, pois não conseguimos compreender a estrutura diretamente sem a mediação de alguma incorporação ou sua aplicação, porque devemos considerar as influências dessas mediações.

Russell com sua visão positivista[58] contrapõe-se à visão de Carnap, assegurando que sua análise da Matemática está comprometida com uma noção absoluta da verdade e do significado e não apenas com as descrições estruturais. “[...] É esta preocupação que confere um certo peso à interpretação dos sistemas dedutivos, e um eminente papel desta conexão é devido ao exemplo da interpretação da aritmética axiomatizada [...]”[59] (OTTE, 2001,. p. 21)

Conforme refere Otte, Russell está interessado no realismo e no significado da palavra “verdade”, conectando esse interesse à questão: Existem elementos ou construções dos mesmos que verificam as condições estabelecidas em um determinado sistema de axiomas? Por isso, Russell trata dos números e de suas aplicações lógicas no contexto da teoria dos conjuntos.

Para Russell o conceito de conjunto agora serve para conectar a Aritmética à Lógica pura e, por conseqüência, interpretar e caracterizar a axiomática em termos lógicos.

Otte acredita que as preocupações de Russell são consistentes, pois para a Aritmética ser axiomatizável é necessário que isso se estabeleça no campo de objetos científicos.

---

[57] Each scientific statement can in principle be so transformed that it is nothing but a structure statement. But this transformation is not only possible, it is imperative. For science wants to speak about what is objective, and whatever does not belong to the structure but to the material (i.e., anything that can be pointed out in a concrete ostensive definition) is, in the final analysis subjective.

[58] Ou positivismo é, antes de qualquer coisa, o sistema de Auguste Comte, que pretendia se basear unicamente nos fatos e nas ciências [...] (COMPTE-SPONVILLE, 2003. p.461)

[59] [...] It is this concern which conveys a certain weight to the interpretation of the deductive systems, and in this connection an eminent roles is due to the example of the interpretation of axiomatized arithmetic […]

Assim, a teoria axiomatizada isolada, como as Ciências Naturais que não nos fornecem as descrições completas dos objetos, e somente por meio das aplicações e interpretações desses axiomas ou das leis naturais que se pode produzir conhecimento. Os termos indefinidos que aparecem nos sistemas axiomáticos, não tratam de objetos específicos, porém servem para possibilitar certas ligações entre objetos indeterminados ou objetos gerais, isto é, os axiomas no sentido moderno, por esse motivo são considerados meros esquemas axiomáticos.

Segundo o autor, se desejarmos completar um conceito axiomático, deveremos indicar todas as aplicações pretendidas. Na Aritmética, são infinitas as aplicações, entretanto a maioria dos matemáticos tentou determinar a existência de infinitos conjuntos por meio de argumentos epistemológicos e não ontológicos.

Dedekind não imaginou uma definição axiomática direta para número, porque depois de reconhecer as características essenciais de um sistema desses surgiu à questão: será que um sistema, assim, existe no campo de nossas idéias?

O autor citado considera a capacidade de repetir infinitamente certas idéias ou ações mentais uma prova da existência lógica, pois ele não estava preocupado com o significado dos números, assim como Russell.

Esta postura pode ser inconveniente, caso não se esteja disposto a discernir rigorosamente o mundo mental do mundo empírico externo, mas, por que existe mais confiança nas ilustrações conceituais do que nas representações intuitivas?

Se considerarmos que nenhum dos dois casos (por exemplo, contagem e axioma do paralelismo) clama por existência, logo não haverá diferença. Mas podemos entender que a contagem por um lado, exige um esforço mental, porém não está sujeita a limitações ou é puramente lógica; e de outro, a construção geométrica, que deve obedecer a algumas restrições objetivas. Portanto, uma é tratada de maneira lógica e a outra objetiva. Em contraste com Frege, na Aritmética:

> [...] não estamos preocupados com objetos que venhamos a conhecer, como algo estranho dado por meio dos sentidos, mas com objetos dados diretamente à nossa razão e que sendo sua própria espécie são completamente transparentes a ela.[60] (FREGE apud Otte, 2001, p. 22)

Os paradoxos lógicos mostraram que se trata de ilusão acreditar que nosso mundo mental é menos complexo e transparente do que nosso mundo exterior e, ainda, que existam restrições, tanto para nossas ações mentais como nossas ações concretas.

Para Otte, não há possibilidades de conduzir uma demonstração de existência sem outras suposições, para Russell, é impossível atingir quantidades infinitas por mera enumeração e considera como um fato empírico que a mente humana é incapaz de repetir infinitas vezes o mesmo ato. Conclui que não podemos provar que infinitos números ou conjuntos existem. Para Otte, trata-se de um contexto que, ainda hoje, apresenta muitas controvérsias.

Russell critica a relação objeto e conceito na construção de Dedekind, crítica essa relevante, tanto para a Lógica como para a Epistemologia. Apesar de se precisar postular, os objetos e conceitos devem ser distinguidos, mesmo se forem de tipos lógicos diferentes, isto é, mesmo que pertençam a distintos estratos categóricos.

Por outro lado, os conceitos surgem no passo seguinte da repetição como extensões de segunda ordem. Assim, considerando que as hipóteses necessárias, para justificar tais noções, não são axiomas lógicos, a situação torna-se obscura. Nesse sentido, Russell afirma que os conceitos não têm uma existência de fato no senso comum. Logo não podem ser tratados como coisas, que são, portanto, contrários à prática matemática.

Russell não concordava com as tentativas de fornecer existência a um conjunto infinito, simplesmente porque elas infligem as exigências de sua própria teoria dos tipos.

---

[60] [...] we are not concerned with objects which we come to know as something alien from without through the medium of the senses, but with objects given directly to our reason and which being their own kind are utterly transparent to it.

A teoria dos tipos de Russell objetiva contornar paradoxos da Lógica e da Teoria dos Conjuntos. Ele enunciou que aquilo que envolver a totalidade de uma coleção não poderá pertencer à coleção. Por sua vez, Dedekind criou uma prova para a existência de conjuntos infinitos no conjunto antinomial (de todas as coisas), que podem ser objeto do pensamento. Entretanto, Cantor encontrou, em 1920, uma inconsistência nessa criação.

Embora o fato não se trate do princípio da classificação de tipo em si mesmo, ele é rígido demais, concretizando a interpretação, que é problemática, o próprio Russell caracteriza apenas como sendo um lance negativo, como um princípio de interdição. Em particular, certas limitações devem ser estabelecidas com vista ao alcance das variáveis classificadas nas funções proposicionais. Uma expressão como "todas as proposições são verdadeiras ou falsas", por exemplo, não tem mais nenhum sentido.

Assim, com respeito à Aritmética, fica claro que axiomas formais podiam caracterizar número apenas em conexão com uma classe de aplicações pretendidas. Portanto, os clamores de existência tornam-se a principal preocupação da Filosofia Matemática, como eles sempre foram desde o começo do século XIX na própria Matemática. A existência pode, entretanto, ser assegurada apenas pelos meios, como ostentação que Carnap excluiu por ser subjetiva. Neste sentido, idéias, conceitos, leis e outras regras universais, falando rigorosamente, não existem. Será que os conjuntos de Russell existem?

Para Otte, como conseqüência, os axiomas devem ser compreendidos em comparação com as leis naturais, isto é, como proposições hipotéticas condicionais e Russell, em contraste com outros lógicos, parece aceitar esta visão, pois apresenta uma postura realista, em especial, quando afirma que o sentido da realidade é essencial à Lógica.

Russell tenta, assim, assegurar que os conceitos matemáticos ou lógicos sejam obtidos por meio da abstração. Justamente por isso ele postula a existência dos conjuntos infinitos.

> Russell aceita – e isso pode parecer surpreendente para uma posição empirista – que pensamentos e sentimentos sejam reais, enquanto considera os "objetos" com os quais nossos pensamentos e sentimentos estejam preocupados como sendo amplamente irreais [...][61] (OTTE, 2001, p. 25)

O autor exemplifica argumentando que os pensamentos de Shakespeare ao escrever "Hamlet" são reais, entretanto é por definição da ficção que estes são irreais. Um unicórnio é uma descrição indefinida, isto é, uma descrição que descreve algo irreal, logo não descreve nada. Este tipo de realismo pode enganar quanto aos clamores por existência dos objetos descritos. Considerando os interesses de aplicação das teorias matemáticas, surge a questão sobre qual é o *status* ontológico, portanto matemático, ideal que os objetos possuam.

Otte considera que, por um lado, distinções teóricas desse tipo são óbvias e comuns. A totalidade de cadeiras não é uma cadeira; a classe de coisas vermelhas não é algo vermelho, mas, uma abstração hipostática, como vermelhidão ou uma função proposicional do tipo como "x é vermelho".

> [...] A hipótese de fronteiras absolutas entre essência e existência, ou entre signo e objeto, é problemática de um ponto de vista epistemológico, tão somente que pode aparecer como motivo e força condutora da atividade cognitiva que, por qualquer razão, parece realmente existir [...][62] (OTTE, 2001, p. 25).

Otte menciona que os números são estabelecidos por meio das medidas como relações entre quantidades, já na teoria dos números, estes são definidos como objetos de investigação.

A própria Matemática distingue-se pelo fato de a abstração ser continuada indefinidamente, e o número de níveis semânticos parece ter aumentado de modo considerável na ciência da computação em comparação com a Matemática tradicional. Para o autor, é a complexidade da Matemática que gera os problemas. Daí as limitações da teoria dos tipos, pois esta apresenta os mesmos

[61] Russell accepts – and this might seem astonishing for an empiricist position – that thoughts and feelings are real, while considering the "objects" with which our thoughts and feelings are concerned, to be widely unreal […]

[62] [...] The assumption of absolute boundaries between essence and existence, or between sign and object, is problematical from an epistemological point of view, as only that may appear as motive and driving force of cognizing activity which somehow appear to really exist […]

problemas de contextualização e interpretação que foram os estímulos às objeções de Russell contra a axiomática moderna.

Segundo Otte, se considerarmos a teoria dos tipos no sentido ontológico, os próprios números naturais já seriam de um tipo lógico diferente. Já a atividade aritmética, ao contrário, exige que todos eles sejam do mesmo tipo. Na tentativa de satisfazer esta exigência, Russell, apresenta (mais tarde) os axiomas lógicos adicionais.

Entretanto, números e conjuntos de números ou conceitos de números são de diferentes tipos lógicos. "Nós não podemos proceder indutivamente na aritmética, não mais que em qualquer campo empírico, para obter o conceito geral de número [...]"[63]. (Ibid., p. 26)

É, então, somente uma variável, um marcador de lugar para os números individuais, devendo as proposições que a contêm, ser interpretadas no sentido de uma conjunção lógica infinita? Ou os objetos matemáticos ideais existem e, nesse caso, em que sentido?

Conforme refere Otte, as duas visões coexistem na Matemática e a afirmação entre um número geral e sobre todos os números deve ser introduzida na Matemática, assim como o próprio Russell admite porque a dedução depende de três variáveis ou objetos ideais. Não podemos nomear todas as pedras ou todos os átomos do universo.

Os axiomas de Peano devem ser entendidos, significando que se um número for dado, ele deverá obedecer à descrição matemática e os axiomas também não deverão ser interpretados como uma conjunção infinita de afirmações definidas.

Na Aritmética como nas leis naturais, temos de aceitar os modelos da teoria não-padrão tão logo nos confinemos às descrições lógicas. Entretanto, o campo objeto da teoria não pode permanecer completamente indeterminado, pois as leis naturais sozinhas não produzem qualquer conhecimento definido.

---

[63] We cannot proceed inductively in arithmetic, no more than in any empirical field, to gain general number concept [...]

"Os esforços de Russell para atribuir um derradeiro significado a número mostram, portanto, que um desenvolvimento e aplicação da teoria são entrelaçados num modo muito complicado"**[64]** (Ibid., p. 27)

Por exemplo, Frege que teve relevante influência sobre Russell, apresentava uma visão que na Aritmética era necessário um apelo à intuição sempre que a Geometria não pudesse ser divorciada da intuição. Segundo Otte, a analogia entre Aritmética e leis naturais aplicar-se-ia apenas à axiomática geométrica e, conseqüentemente, a noção de variável também seria diferente na Aritmética e na Geometria. Na Aritmética, as variáveis estavam no lugar de entidades definidas e, portanto, no axioma do infinito de Russell.

Otte menciona que o próprio Russell apela para a plausibilidade intuitiva; para ele, de acordo com nossa prova empírica; a divisibilidade pareceria favorável a admitir a existência de um número infinito de objetos no universo, entretanto, não se sabe nada sobre ele *a priori*, supondo que o axioma seja falso ou verdadeiro, ainda não existem maneiras conhecidas de descobrir.

Para o autor, Russell falha ao ver que a divisibilidade infinita realmente não significa nada, além do postulado de Dedekind da infinita repetição de uma mesma operação. Para Otte não existe nenhuma possibilidade de determinar o significado de "número", nem mesmo dentro da estrutura da Teoria dos Conjuntos. O ensaio de Benacerraf, citado no capítulo II, tópico II.2.4, mostra que o conceito de número pode ser reduzido ao conceito de conjunto de diversas maneiras diferentes, portanto, os números em absoluto não podem ser conjuntos ou conjunto de conjuntos, considerando que existem diferentes interpretações de número e referências à palavra de número em termos da teoria dos conjuntos.

Quine mostra que as palavras "dois" ou "quatro" não têm uma única interpretação em qualquer lugar da linguagem e, ainda, enfatiza que qualquer interpretação teórica dos conjuntos das palavras de número – de Frege, von Neumann ou Zermelo – é usada intencionalmente com o intuito de adaptar-se as necessidades do momento.

[64] [...] Russell's efforts at awarding an ultimate meaning to numbers thus show that a theory's development and application are intertwined in a very complicated way […]

Otte refere que devemos compreender a teoria dos conjuntos como um meio de construção semelhante à régua e ao compasso da geometria euclidiana, percebendo que, como na geometria, as coisas podem ser construídas de diversas maneiras e qualquer construção realça características distintas da coisa construída. A existência não pode ser fornecida por meio de símbolos, assim, deve ser admitida desde o início.

Conforme o autor citado, existe de um lado, a possibilidade de ver o reducionismo teórico de conjuntos de Russell e de outro, o método axiomático no sentido de Peano e Hilbert, como visões complementares da Matemática, assim como a Geometria construtiva clássica e o método dedutivo foram complementares entre si. Esta complementaridade está expressa também nas noções de conceito e objeto na Matemática.

Qualquer proposição pode ser escrita como uma relação entre objetos concretos e universais (números, por exemplo). Conforme Otte, exigimos, por exemplo, que os números que apresentam certas propriedades, devam existir, exatamente como falamos da existência de conceitos empíricos, como "energia" ou "sociedade". Justamente, essa condição caracteriza o método axiomático. Um sistema axiomático não define um conceito ou objeto determinado, mas, um objeto universal indeterminado. A teoria axiomática abstém-se deliberadamente a estabelecer o seu campo de aplicação em detalhes. Entretanto, Russell não concordava com esta visão, pois entendia seus objetos em um sentido geral.

Otte acredita que se a Matemática clama para estabelecer também as verdades objetivas, uma vez que ela é com freqüência concebida essencialmente, em termos de raciocínio dedutivo e demonstração formal, ambos os tipos universais, funções e objetos, são indispensáveis ao seu entendimento.

Para o autor, quando se trata da inferência dedutiva, naturalmente, não é necessário admitirmos a existência de objetos concretos determinados em todos os respeitos. Ainda exemplifica, afirmando que a dedução matemática reduz-se à implicação material que interpreta a proposição "X implica Y", para duas sentenças X e Y informarem que ou X deve ser falso, ou Y deve ser verdadeiro (ou ambos, se for o caso), não é necessário admitir a existência de um objeto x que poderia tornar verdadeira a função proposicional de Russell “x é um triângulo geral”, isto é, um índice assegurando que a referência é suficiente, pois objetos gerais não são mais que relações ou signos.

Otte apresenta outro exemplo, por meio do conceito geométrico elementar de “triângulo genérico”, que foi objeto de muitas discussões desde Locke e Berkeley, cujas propriedades são devidas a um “triângulo genérico”. O ponto fundamental está no fato de o “triângulo genérico” não possuir nenhuma propriedade determinante, mas representa somente uma possibilidade para determinar um triângulo apropriado em um contexto particular. Um triângulo genérico é uma variável independente e não uma coleção de triângulos determinados.

As propriedades devidas a um “triângulo genérico” dependem exclusivamente do contexto em questão. A verdade sobre uma proposição de um “triângulo genérico” não significa nada além de que esta proposição é provável de uma certa maneira, no qual um certo esquema de demonstrações possa aplicar-se. Para Otte, se somente operarmos na base das características axiomáticas do objeto, não usaremos os conceitos envolvidos referencialmente; e ambas as teorias, Matemática e Empírica, via de regra, usam outros recursos para resolver seus problemas, e eis como o problema de interpretação de sistemas dedutivos torna-se significativo.

Considerações Finais

Russell acreditava que Peano havia falhado na tentativa de reduzir a Aritmética em seu sistema axiomático, por duas razões; em primeiro lugar, este sistema axiomático não nos possibilita saber se existe um conjunto de termos que possam satisfazer os cinco axiomas e, em segundo, queremos que nossos números sejam utilizados para contar objetos comuns. Russell refere a importância de um significado definido para número e que não se admita possibilidade de inúmeras interpretações desse objeto. O que os cinco axiomas definem são os termos de uma progressão ou classe.

Para Michael Otte, um sistema axiomático tem como objetivo, exatamente fornecer as relações e descrições de objetos, a Aritmética não é sobre coisas concretamente existentes. Para que Russell possa conceituar número de maneira extensional, devemos entender número como quantidade e fornecer uma aplicação do conceito definido. Assim, demonstrar a existência de conjuntos de cardinalidade arbitrária, entretanto, só é possível de maneira axiomática. Faz-se necessário entender a noção de axioma de acordo com Euclides, como uma verdade intuitiva evidente.

A axiomatização da Aritmética decorre do sentimento de sermos incapazes de entender ou satisfazer leis e tratarmos com os números. Para Otte, no final, conceitos não seriam nada mais do que uma descrição completa de entidades individuais.

Entretanto, a idéia de Russell foi substituir as três idéias primitivas de Peano – “0”, “número” e “sucessor” – por três termos quaisquer que possam verificar os cinco axiomas. Para que isso seja possível devemos estar atentos para a gramática da questão: O que é número? Com o intuito de tentar responder essa questão, não devemos entender número como pluralidade, mas como algo que caracteriza certos conjunto ou classe. Uma classe pode ser definida intensionalmente, por meio de uma propriedade definidora ou extensionalmente, isto é, pela enumeração de seus membros.

Russell acreditava que a conceituação de ‘número’ deveria pressupor os números infinitos, pois os números naturais formam, eles próprios uma coleção infinita. Desse modo, o autor citado referiu-se aos números infinitos como número de termos de uma coleção infinita, e definidos intensionalmente.

Conforme Russell, número é um modo de reunir certas coleções, isto é, aquelas que têm um dado número de termos, em um aspecto cardinal. E para saber se duas coleções pertencem à mesma classe, Russell definiu a similaridade entre elas. Duas classes são similares entre si, quando há uma relação de um-para-um, do qual uma classe é o domínio enquanto a outra é o domínio inverso.

E, conseqüentemente, definiu o ‘número de uma classe’ como a classe de todas as classes similares à classe dada, isto é, um número é qualquer coisa que seja o número de uma classe.

Com o intuito de avançar além, no sistema de Peano, Russell afirmou que, podemos definir todos os números naturais, se sabemos o que queremos dizer por ‘0’ e ‘sucessor’. Objetivando viabilizar este avanço, Russell se baseou no princípio da Indução Matemática ou quinto axioma de Peano, referido pelo autor, como uma definição.

Não parece difícil, perceber que os termos que obedecem a Indução Matemática, são os mesmos termos que podem ser atingidos a partir do ‘0’ por passos sucessivos, do próximo número para o próximo seguinte. Entretanto, a Indução Matemática possibilita esse alcance de maneira menos vaga.

Russell mostrou que, passo a passo, qualquer número natural pode ser atingido por meio das propriedades hereditária e indutiva. Definiu também os números naturais, como a posteridade de '0' com respeito à relação de predecessor imediato (inverso de sucessor).

Desse modo, por meio da definição de número em geral, Russell definiu '0' e 'sucessor'; '0' é a classe cujo único membro é a classe vazia e 'sucessor' do número de termos da classe *a* é o número de termos da classe que consiste de *a*, juntamente com *x*, o qual é qualquer termo que não pertence à classe *a*.

Assim, Russell conseguiu reduzir as três idéias primitivas de Peano em idéias da lógica, não mais possíveis de inúmeras interpretações ou significados diferentes.

Conforme Russell, dois dos axiomas de Peano se tornaram demonstráveis, baseados na definição de 'número natural'. Um a respeito de '0' não ser sucessor de nenhum número e o quinto sobre Indução Matemática. Se considerarmos, o número de indivíduos no universo não finito, além de definir as três idéias primitivas de Peano, poderemos provar as cinco proposições, baseadas nas proposições primitivas pertencentes à Lógica.

Por meio de sua teoria dos tipos, Russell tentou sanar paradoxos existentes na Teoria dos Conjuntos e Lógica, cuja teoria refere-se à totalidade não poder fazer parte da totalidade. Para Otte, esta teoria mostra que, os conjuntos não são o que o senso comum imagina e nem o que vem sendo ensinado nas escolas, entretanto, os argumentos de Russell devem ser revisados.

Otte refere que, não podemos provar a existência de números ou conjuntos infinitos e por Russell ter acreditado nisto, introduz o 'axioma do infinito'. Russell falha em tentar fornecer uma definição de número puramente extensional, pois coleções infinitas só podem ser definidas intensionalmente.

Benacerraf mostra, em sua obra de 1965, que o conceito de número podia ser reduzido ao conceito de conjuntos de maneiras diferentes. Números não podiam ser conjuntos, nem conjunto de conjuntos, pois há diversas interpretações para esta palavra, em termos da Teoria de Conjuntos.

Frege, von Neumann e Zermelo utilizaram oportunamente diferentes interpretações teóricas da palavra número, objetivando viabilizar o trabalho, caso este surja de uma fonte numérica.

Temos de um lado, a abordagem axiomática no sentido de Hilbert-Peano, e, de outro, a abordagem fundamentada na Teoria dos Conjuntos e Lógica. Entretanto, percebemos que nenhuma delas oferece, isoladamente, a possibilidade de conhecer o objeto de maneira completa.

O método axiomático cujo aspecto é intensional, não possibilita conceituar número de maneira completa, porque não é possível considerar todas as características e relações deste objeto. A abordagem proposta por Russell, a qual tenta conceituar número de maneira puramente extensional, também é insuficiente, pois ao tratar dos números infinitos, recorremos à definição intensional.

Para Michael Otte essas abordagens não devem ser descartadas, mas vistas como complementares na Matemática. Essa complementaridade é expressa nas noções de conceito e de objeto da Matemática.

Como conclusão pode-se afirmar que números são: por um lado, características de certas classes e, por outro, conceitos operativos. Por isso, a polêmica entre filósofos como Frege e Russell que favoreceram os aspectos predicativos, isto é, definem os números em termos de cardinalidade e, outros como, Grassmann, Dedekind e Peano que destacam os números ordinais, razão pela qual Otte propõe a complementaridade entre as abordagens.

Em seu artigo, Michael Otte, aponta e discute vantagens e desvantagens na abordagem de Russell, relativa à conceituação de número fundamentada na Teoria dos Conjuntos e Lógica. Enfocando a necessidade da Complementaridade para a apreensão desse objeto de maneira mais completa.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de Filosofia.** São Paulo. MARTINS FONTES, 2003.

BOLZANO. Bernard. **Les paradoxes de L'infini.** Tradução Hourya Sinaceur. Paris. Éditions de SEUL, 1993.

COMPTE-SPONVILLE, André. **Dicionário filosófico.** São Paulo. MARTINS FONTES, 2003.

GARDIES, Jean-Louis. **Du mode d'existence des objets de la mathématique.** Paris, J.VRIN, 2004.

MAINZER, K. et al. **Les Nombres.** Paris: Éditions française. Librairie Vuibert, 1998.

OTTE, Michael. **B. Russell "Introduction to Mathematical Philosophy".** In: **Educação Matemática Pesquisa.** São Paulo: EDUC, v. 3, 2001. pp. 11-55

OTTE, Michael. **Complementarity, sets and numbers**. Educational Studies in Mathematics. Kluwer Academic Publishers, 2003.

RUSSELL, Bertrand. **Introdução à Filosofia Matemática.** Tradução Giasone Rebuá. Rio de Janeiro: ZAHAR, 1974. pp. 9-66.

RUSSELL, Bertrand. **Misticismo e Lógica.** Tradução Wilson Velloso. São Paulo. COMPANHIA EDITORA NACIONAL, 1957.

Bibliografia Consultada

AYER, Alfred Jules. **As idéias de Bertrand Russell.** Tradução de Leônidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota. São Paulo: CULTRIX, 1974.

BARKER, Stephen F. **Filosofia da Matemática.** Tradução Leônidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota. Rio de Janeiro. ZAHAR, 1969. pp. 77-109.

BOOTH, W. C. et al. **A Arte da Pesquisa.** São Paulo: Martins Fontes, 2000. pp. 1-111.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo. EDGARD BLÜCHER, 1996.

CARVALHO, Maria Cecília M. **Construindo o Saber.** São Paulo. PAPIRUS, 1989.

CATTO, Glória Garrido: **Registro de Representação e o número racional: uma abordagem em livros didáticos,** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, 2000.

COBIANCHI, Antonio S. **Métodos de Continuidade e Números Reais: Matemática, Descobertas e Justificativas de Professores**, Tese de Doutorado em Educação Matemática, IGCE - Rio Claro, 2001.

CHIZZOTTI, Antonio. **Pesquisa em ciências humanas e sociais.** São Paulo. CORTEZ, 2003.

DANTZIG, Tobias. **Número: a linguagem da Ciência.** Tradução de Sérgio Góes de Paula. Rio de Janeiro. ZAHAR, 1970.

DELEUZE, Gilles. **Empirismo e subjetividade**. Tradução de Luiz B. L. Orlandi. São Paulo. EDITORA 34, 2001.

DEMO, Pedro. **Pesquisa e informação qualitativa.** São Paulo. PAPIRUS, 2001.

DIAS, Marisa da Silva. **Reta Real: conceito imagem e conceito definição.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC - São Paulo, 2002.

GILES, Thomas Ransom. **Introdução à Filosofia.** São Paulo: E. P. U, 1980.

IGLIORI, Sonia Barbosa C.; SILVA, Benedito A. **Concepções dos alunos sobre os números reais,** in João Bosco Laudares (Org.), Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real.** Rio de Janeiro. IMPA, 2001.

MENEGHETTI, Renata Cristina Geromel. **O intuitivo e o lógico nas correntes filosóficas da matemática pós-século XIX.** Rio Claro. UNESP (V Seminário Nacional de História da Matemática), 2003. pp. 411-419

MONK, Ray. **Bertrand Russell. Matemática: sonhos e pesadelos.** Tradução de Luiz Henrique de A. Dutra. São Paulo: UNESP, 2000.

NIVEN, Ivan**. Números Racionais e Irracionais**. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

ROBBINS, Herbert; COURANT, Richard. **O que é Matemática?**. Tradução Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000. pp. 1-11.

SEVERINO, Antonio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico.** São Paulo. CORTEZ, 1996.

ANEXO

Apresentamos a tradução do artigo de Michael Otte, intitulado: B. Russell "Introduction to Mathematical Philosophy" de 2001

B. RUSSELL "INTRODUÇÃO À FILOSOFIA MATEMÁTICA"

Resumo

Bertrand Russell foi uma figura importante e interessante, e, sem dúvida, o mais lido, honrado e contestado filósofo que falava a língua inglesa do século vinte. Seu livro "Introdução à Filosofia Matemática" não é menos fascinante. Na verdade, seu trabalho anteriormente mencionado, publicado em 1918, tem sido corretamente chamado "uma admirável exposição ao monumental trabalho dos Princípios da Matemática".

O principal objeto do livro de Russell é o número e tudo pertencente ao número, para a Aritmética e para a Lógica da aritmética. Os princípios da aritmética sempre foram o foco do interesse de Russell em lógica e matemática, e seus pontos de vista tiveram profunda influência no movimento de reforma da educação matemática que começou por volta de 1960.

Desde o começo do século XIX, a matemática mostrou uma forte tendência na direção da aritmetização, porque o espaço e o contínuo pareciam problemáticas de ordem aparentemente difícil. No final do século XIX, até mesmo o número pareceu não ser tão transparente e então imediatamente a questão "o que são os números" apareceu para explicar e completar as fundamentações da aritmética através da análise lógica e da construção teórica do conjunto.

Palavras-chave: fundamentos da matemática; matemática moderna, construção do conceito de número.

I. Apresentação

Bertrand Russell é uma figura importante e fascinante, e, sem dúvida, o mais lido, honrado e contestado filósofo que falava a língua inglesa do século XX. Ele nasceu no País de Gales em 1872 e morreu lá, em 1970. Portanto, ele viveu desde os tempos de Bismarck e da rainha Victoria até os períodos da bomba atômica e guerra fria.

A “Introdução à Filosofia Matemática” de Russell não é uma leitura menos fascinante e é um livro que apenas alguém como ele poderia ter escrito, enquanto estava na prisão sem recursos, obrigado a se livrar de todo o respaldo técnico e obrigado a tratar o assunto de maneira clara tentando proporcionar um livro de fácil leitura, quase que uma apresentação popular do assunto. Na verdade, a “Introduction à Filosofia Matemática” de 1918 tem, às vezes, sido chamada de “uma exposição admirável do trabalho monumental *Principia Mathematica*”. O livro é ainda mais, porque ele se constrói baseados nos resultados do trabalho de Russell desde 1900. E, é, ao mesmo tempo algo mais, porque ele proporciona uma introdução aos Fundamentos da Matemática bem como sua epistemologia que é mais original, viva e completa. De fato, este trabalho é como se fosse um resumo de todas as questões fundamentais da epistemologia matemática.

Ao contrário dos textos atuais acerca da Filosofia Matemática, Russell sempre permite ao leitor um rápido olhar no seu pensamento, enquanto este se desenvolve, sem tentar esconder suas presunções e erros. O leitor pode literalmente experimentar o entusiasmo de Russell em lidar com os assuntos. Russell sempre teve um espírito independente, para quem, uma especialização específica era algo desconhecido, e quem lutou para, ao mesmo tempo, estar atualizado com todas as descobertas da matemática, filosofia, ciências naturais experimentais e política. E durante sua vida, ele escreveu sobre diversas áreas, na maioria das vezes de maneira viva, um fato que fez com que muitos dos seus livros tratassem da ciência de maneira popular. Seus estudos, bem como, sua convicção de sua verdadeira vocação para escrever permitiu que ele escrevesse desta maneira.

Como Russell é um dos eminentes protagonistas do empirismo científico moderno, e, um dos fundadores da filosofia analítica matemática, dominante até os dias de hoje, seus escritos deu uma chance rara e única para um profundo *insight* acerca das questões filosóficas, científicas tecnológicas e políticas na primeira metade do século 20. Ao passo que o programa da visão mundial da lógica, como inaugurado, entre outros, por Frege e Russell, e depois continuado por seus "discípulos" – Carnap e Quine – pode parecer muito seco, técnico e talvez até desumano, as intenções eram firmemente ancoradas em uma crença humana nos méritos da clarificação e progresso científico.

A orientação na direção de um restrito modo lógico-científico de pensar intencionava reagir ao irracionalismo e tradicionalismo, que prevaleceram após a Primeira Guerra Mundial. Como Rudolf Carnap expressou em 1928, a filosofia lógica é apoiada pela crença de que o futuro pertence a uma mentalidade que "requer claridade em todo lugar, mas que percebe que a fábrica da vida não pode ser compreendida", e que conseqüentemente coloca "a claridade de conceitos", "precisão dos métodos", "teses responsáveis" a serviço de um progresso de cognição por cooperação (Carnap 1968, prefácio à primeira edição). Com vista no fato de que a filosofia da matemática e da presente teoria analítica da ciência, enquanto adotando as "realizações técnicas" de Russell, não diz nenhuma palavra acerca das preocupações históricas e filosóficas inseparavelmente ligadas a esta teoria, pareceria apropriado apontar as origens históricas do moderno conjunto teórico da matemática e epistemologia, e o contexto político e cultural de seu aparecimento.

II

O principal objetivo do livro de Russell é o número e tudo pertencendo a ele, a aritmética, e a lógica da aritmética. As fundamentações da aritmética sempre foram o foco do interesse de Russell na lógica e na matemática. Desde o começo do século 19, a matemática mostrou uma tendência forte em direção a aritmetização, porque o espaço e o contínuo pareciam problemáticas de ordem aparentemente difíceis. No final do século 19, até mesmo o número pareceu não ser tão transparente e, então, imediatamente a questão “o que são os números” apareceu para explicar e completar as fundamentações da aritmética através da análise e construção lógica. A preocupação de Russell não é primeiramente com a clarificação das fundamentações ontológicas da aritmética, ou da matemática como um todo, e sim com a diferenciação do aparelho conceitual, e a especificação dos métodos de prova. Ao passo que sua argumentação vai sendo feita, torna-se óbvio, entretanto, que os argumentos utilizados eram muito inseguros.

Para responder a questão “o que é um número” uma “nova lógica” era necessária. Russell foi primeiramente confrontado acerca desta nova lógica por Peano no Congresso Internacional de Matemática (International Congress of Mathematics) em Paris em 1900. E embora estivesse impressionado pela precisão lógica de Peano, ele não percebeu a concordância entre formas de lógica advinda das abordagens algébricas e axiomáticas com suas disposições naturais e com seus próprios interesses focados na aritmetização da matemática. Russell descreve o desenvolvimento como segue:

> A própria lógica matemática não tem sido por muito tempo uma nova disciplina (i.e. por volta de 1900). {...} Boole havia publicado suas Leis de Pensamento (Laws of Thought) in 1854; C.S. Pierce havia elaborado uma lógica das relações, e Schröder havia publicado um trabalho compreensivo na Alemanha em três volumes, no qual ele resumiu tudo o que fora alcançado até aquele momento. Whitehead havia tratado o cálculo de Boole, na primeira parte da Álgebra Universal (Universal Álgebra), o qual surgiu em 1898, tratando além dos autores acima mencionados, Grassmann, De Morgan e outros, minha inserção, M.O.). Conheço a maioria destes trabalhos, mas não tenho a impressão que estes fizeram a gramática lógica da aritmética aparecer sob um novo prisma.

Entretanto, Russell lembra,

> O Congresso foi um momento de transição na minha vida intelectual, porque foi lá que eu encontrei Peano. Eu já o conhecia de nome e havia visto alguns de seus trabalhos, mas não havia tentado entender completamente suas notas. Durante a discussão no Congresso eu observei que ele era sempre mais preciso que qualquer outra pessoa, e que invariavelmente, ele tinha um argumento melhor no que embarcava. Na medida que os dias se passaram, entendi que isto se devia à sua lógica matemática. (Russell 1967, 144)

Os lógicos da escola algébrica como Peirce, Peano ou Schröder, é verdade, continuaram matematicamente, transpondo as leis matemáticas para a área da lógica, entendendo lógica como uma álgebra universal, sem ter a intenção de revisar os métodos da matemática. O método axiomático moderno representa apenas o último passo em direção a matematização de todos os fenômenos e áreas da realidade agora sendo finalmente matematizados. O conceito do número, em particular, sempre marcou o centro do pensamento matemático. Porém, parece legítimo perguntar o porque da aritmética ter sido axiomatizada apenas na segunda metade do século 19, quer dizer, mais de 2000 anos depois de Euclides ter axiomatizado a geometria.

Agora a filosofia matemática e a pesquisa de fundamentação surgiram de duas maneiras distintas de pensar na matemática. A primeira delas, cujo nome é reducionismo da teoria dos conjuntos parece apropriado, começou com Bolzano (1781-1848) e Cauchy (1789-1857) e culminou na realização de Russell. O outro, usualmente chamado método axiomático ou postulacional, foi originado nos trabalhos de Poncelet (1788-1867) e Grassmann (1809-1878), que continuou e radicalizou a abordagem de seu pai Justus Grassmann (1779-1852) e alcançou total desenvolvimento nos trabalhos de Penao e Hilbert (1861-1943). Enquanto o reducionismo da teoria dos conjuntos era principalmente o trabalho de analistas e filósofos, o novo pensamento estrutural e axiomático era primariamente estabelecido por pessoas que lidam com geometria, álgebra e engenharia.

Foram principalmente os problemas em ensinar e comunicação que sempre levaram a exposição algébrica da análise e os quais, após não parecerem mais apropriados forçaram uma nova busca acerca do conceito de número. Até então estas duas tradições não pareciam conscientes de sua diferença real, ou da possibilidade de propô-las como duas alternativas de perspectivas com fundamento, uma vez que a própria axiomática moderna apareceu em duas formas bem diferentes, por um lado a forma de Pasch (1843-1930) e por outro a de Hilbert.

E apenas em 1870, quando as pessoas começaram a questionar a fundamentação da matemática, procurando por justificativas específicas lógicas, foi que houve uma preocupação com sistemas epistemológicos tradicionais. O caráter auto-referencial do processo da matematização que se dirige a própria matemática, o que significa aritmética agora, leva inevitavelmente ao aparecimento de problemas lógicos e epistemológicos. A fundação da geometria, desde Descartes, sempre fez, explicita ou implicitamente, o uso de números e aritmética. Qualquer matematização do contínuo requer o conceito de número de um ou outro jeito (veja: Hölder 1899; e para uma alternativa Grassmann 1844). E enquanto os paradoxos de Zenão foram considerados meros sofismas ou anacronismos por muito tempo, o que pode ter um certo charme, desde o século 19 eles se tornaram o foco de um intenso e profundo debate, porque agora a consistência de uma figura discreta de mundo tornou-se um problema sério (veja W.C. Salmon (ed) 1970).

Quando lidando com as fundamentações da matemática pura, e da aritmética em particular, as pessoas geralmente mudam suas atitudes epistemológicas bem como suas regras metodológicas e, tornam-se mais ou menos obcecados em encontrar verdades finais sobre a natureza da realidade. Russell proporciona um exemplo esclarecedor desta atitude. Por um lado, Russell deixa claro, por exemplo, que não conseguimos ir mais longe na nossa própria visão dos fenômenos naturais do que na representação matemática das relações e das estruturas relacionais – o "Livro da Natureza" foi escrito em linguagem matemática, como Galileu já disse – nós temos que admitir que sabemos muito mais sobre "a forma da natureza do que seu conteúdo". Por outro lado, no que diz respeito à matemática e ao conceito do número, Russell faz um esforço para responder questões como "o que" de uma maneira absoluta e definitiva.

Enquanto ele responde à mente "não-matemática", para quem o caráter abstrato do nosso conhecimento físico parece não satisfatório, dizendo que estas abstrações podem pessoalmente não agradar, mas são úteis do ponto de vista prático e teórico, ele considera que o oposto seja verdadeiro no que diz respeito à matemática. E contra as reclamações de senso comum empírico ou da imaginação artística, ele justifica os fenômenos da representação matemática por sua fertilidade e utilizações:

> Abstração, difícil como é, é a fonte do poder prático. Uma pessoa da área financeira, para a qual lidar com o mundo é mais abstrato do que para qualquer outro homem 'prático', é também mais poderosa que qualquer outro homem 'prático'. Esta pessoa pode lidar com trigo ou algodão sem nunca ter os visto: a única coisa que precisa saber é se os preços sobem ou descem. Este é um conhecimento abstrato da matemática, ao menos quando comparado com o conhecimento de um agricultor. Similarmente ao físico, que embora saiba apenas algumas leis e seus movimentos, sabe o suficiente para manipular estas leis e conhecimentos. Após trabalhar com sistemas de equações, nos quais os símbolos representam aspectos da natureza que serão sempre desconhecidos para nós, o físico chega ao menos a um resultado que pode ser interpretado de acordo com nossas próprias percepções e utilizados para trazer o efeito desejado em nossas vidas. (Russell 1971a, 138f)

Ao contrário, ele gostaria de constituir essas abstrações matemáticas por raciocínio puro e por assegurar sua aplicabilidade de uma maneira completa *a priori* de algum jeito através do espírito de Kant. Ele parece recomendar que tudo em ciência e vida diária seja reduzido a número e aritmética. O que o número é e o que o conceito de número representa, entretanto, deve ser determinado independentemente de qualquer aplicação do pensamento puro e da análise lógica. Percepções e números têm formado as fundamentações de nossa cognição desde Descartes, diz Russell. Através da clarificação do significado do conceito de número, lógica está agora substituindo a aritmética, completando preenchendo a lacuna entre empirismo e mentalidade.

Enquanto Russell acredita que a ciência pode apenas determinar sua área de investigação até o mapeamento isomórfico, porém, o isomorfismo estrutural marca os limites de nossas possibilidades de representação simbólica do mundo e nossas descrições matemáticas do mesmo, e enquanto ele acredita que esta possa até ser uma vantagem na área das ciências naturais, porque "no tratamento matemático da natureza, nós podemos estar muito mais certos de que nossas fórmulas estão corretas, do que estarmos certos de que suas interpretações o estão" (Russell, 1971a, 131), embora ele não goste de ver a matemática descrita apenas como sua própria estrutura.

Quando falamos sobre a compreensão da natureza, Russell diz que "a compreensão da natureza, ao passo que o raciocínio melhorou, tem menos poder de provar os fatos" (Russell 1971a, 135). Isto é precisamente o que ele se recusa a aceitar em relação à matemática.

Esta diferença na atitude e no comportamento cognitivo parece ocorrer em razão que, diferentemente de outras Ciências Naturais, simultaneamente assegura a existência de nosso universo de discurso, assim como a construção de meios conceituais de se lidar com a existência. Bateson afirmou que do ponto de vista epistemológico nós temos a opção de tratar como objetos, ambos, as representações de objetos quanto os eventos e sinais representando as mensagens. E ele deu a seguinte descrição destas duas opções:

> A diferença entre o mundo de Newton (o mundo dos objetos, minha inserção M.O.) e o mundo da comunicação é simplesmente esta: o mundo de Newton atribui realidade aos objetos e alcança sua simplicidade ao excluir o contexto do contexto – excluindo então todas as meta-relações – excluindo então o infinito retorno a tais relações. Em contraste, teóricos da comunicação insistem em examinar as meta-relações enquanto atingem a simplicidade através da exclusão de todos os objetos. Este mundo da comunicação é um mundo de Berkeleyan. (Bateson 1973, 221)

Agora a matemática parece pertencer a ambos os mundos e a explicação da matemática representa a pesquisa de fundamentação em matemática, porém, sem dividir as exigências resultantes de ambos.

III

Russel começa seu trabalho com um capítulo sobre "as séries dos números naturais", no qual os números naturais são introduzidos através dos axiomas de Peano, o conceito de número ordinal é o único que tem um papel aqui. Não há menção de cardinalidade no início.

As cinco proposições primitivas que Peano assume são:

(1) 0 é um número
(2) O sucessor de qualquer número é um número
(3) Dois números não têm o mesmo sucessor
(4) 0 não é o sucessor de nenhum número
(5) Qualquer propriedade pertencente ao 0, e também qualquer sucessor de números que tenham esta propriedade, pertence a todos os números".
(pp.5-6)

Pode ser sugerido, Russell diz ao final do capítulo,

> que, ao invés de tratar o "0" e "número" e "sucessor" como termos os quais sabemos o significado mas não conseguimos definir, nós deveríamos deixa-los ter o significado de quaisquer três termos que sejam definidos porém indefinidos: estes serão variáveis. (pp. 9-10)

Esta é a compreensão comum da abordagem axiomática. Ela também pode ser expressa através da fala de que a matemática não é sobre coisas existentes concretas, mas sobre relações gerais ou objetos ideais. Mas este ponto de vista não satisfaz Russell.

Russell diz que a abordagem de Peano

> falha em dar adequada base para a aritmética. Em primeiro lugar, esta abordagem não nos permite saber se há conjuntos de termos verificando os axiomas de Peano; [...] Em segundo lugar [...] queremos que nossos números sejam usados para contar objetos comuns, e isto requer que nossos números tenham um significado definido, eles não devem meramente ter certas propriedades formais. (p. 10)
>
> [...] se começarmos das idéias indefinidas de Peano e das proposições iniciais, aritmética e análise não têm relação com objetos locais definidos chamados números, mas com os termos de qualquer progressão. Nós podemos chamar os termos de qualquer progressão 0, 1, 2 ,3, [...] "variáveis". Para torná-los constantes, devemos escolher uma progressão definida; a progressão naturalmente escolhida é a progressão dos números finitos cardinais definidos por Frege. (Russell 1954,4)

De acordo com a definição de número de Frege, a qual Russell, sem saber anteriormente, redescobriu sozinho após a conferência de Paris

> [...] termos primitivos são substituídos por estruturas lógicas, de acordo com o que é necessário provar para satisfazer as cinco proposições primitivas de Peano. Este processo é essencial ao conectar-se a aritmética à lógica pura. Nós podemos encontrar um processo similar em alguns aspectos, porém muito diferentes em outros, processo este necessário para conectar física com percepção. (Russell 1954,4)

Lógica, neste aspecto, é interpretada de uma maneira realista.

Os requerimentos mínimos para justificar o conceito de número, ou a função proposicional "x é um número" estão mostrando ter instanciações, que não são "vazias" na compreensão de Kant. Nós temos que entender "número como número de uma quantidade" e proporcionar uma aplicação para o conceito então definido através da demonstração da existência de conjuntos de cardinalidade arbitrária. Isto pode obviamente ser feito apenas de maneira axiomática. Através disso, porém, a noção de axioma dever ser entendida na compreensão de Peano-Hilbertian; o termo deve ser entendido de acordo com a tradição clássica de Euclides, é uma verdade intuitivamente evidente e a pré-condição da matemática. Este é o porque de Russell introduzir o "axioma do infinito".

Nós temos que entender que há, de fato, coleções ou conjuntos infinitos no mundo para que possamos encontrar o número (p.77). Russell diz existir conjuntos infinitos de cardinalidade arbitrária, portanto, podemos nos referir a eles em nosso raciocínio. A teoria dos conjuntos não deve ser entendida aqui como meramente uma maneira formal de se falar, ela deve ser vista como um modelo intuitivo da realidade. Intuição aritmética é, por essa razão, substituída por intuição teórica do conjunto. Este fato pode parecer estranho uma vez que a axiomatização da aritmética tem sido causada pelo sentimento que devemos ser incapazes de intuir ou entender completamente o número. Portanto, temos que aceitar as leis formais dos números. Russell aparentemente agora substitui o número pelo conceito intuitivo de conjunto como uma fundamentação destas leis formais. Quase meio século depois, a educação matemática mundial tentou repetir este movimento, com pouco sucesso.

É instrutivo comparar a preocupação de Russell com aquela de Rudolf Carnap, em quem Russell exerceu uma influência crucial na década de 20. Carnap diz que um dos objetivos de seu projeto "Der logische Aufbau der Welt" é estabelecer um "sistema lógico cognitivo" dos conceitos e objetos os quais permitem derivar ou "constituir" todos conceitos "passo a passo a partir dos conceitos básicos", o resultado sendo "uma genealogia dos conceitos nos quais cada conceito tem seu lugar seguro" (Carnap 1968). Mas a principal característica do livro de Carnap é seu estruturalismo:

> Cada declaração científica pode a princípio ser transformado em apenas um declaração estrutural. Mas esta transformação não é apenas possível, é imperativa. Isso ocorre porque a ciência quer referir-se apenas ao que é objetivo, e o que quer que não pertença á estrutura e sim ao material (i.e., qualquer coisa pode ser apontada como uma definição concreta ostensiva), é, em última análise, subjetivo. (Carnap 1968, 29)

De acordo com esta visão, as teorias fazem comentários apenas sobre a estrutura. Objetos teóricos são determinados apenas pela estrutura de suas relações. Estrutura é apenas o que pode ser representado pela matemática e lógica. Parece existir alguma coisa de errado com essa visão, porque não podemos entender as estruturas diretamente sem a mediação através de sua incorporação ou aplicação. E nós sempre temos que observar a influência destas mediações. Ao contrário de Carnap e para o positivismo lógico, Russell, na sua análise da matemática, não está simplesmente preocupado com descrições estruturais, mas sua própria análise está sempre misturada com a noção de uma noção absoluta da verdade e de significado. É esta preocupação que atribui um certo peso à interpretação dos sistemas dedutivos, e o eminente papel desta conexão é devido ao exemplo da interpretação da aritmética axiomatizada. O conceito de conjunto agora serve para “ligar aritmética à lógica pura”, e, portanto, a interpretar a caracterização axiomática em termos lógicos (Russell 1954, 4). Nesta conexão, Russell também fala de uma estimação exagerada do número. Ao desistir do número, conseguimos “um ganho na pureza da lógica”.

Russell está ciente de que sua própria compreensão da teoria, aplicação e verdade, não é “experimentável”, e que “ela parece ser uma questão de gosto individual aceitar ou recusar o que é chamada a hipótese realista” (a.a.O.). Ele está interessado no realismo e no significado da palavra “verdade”, ligando este interesse à questão se há “elementos, ou construções advindas desta hipótese”, as quais têm as condições necessárias de um sistema de axiomas. Neste sentido, ele lida com números e com sua construção lógica em um contexto teórico de conjuntos.

Se acreditarmos que a origem da axiomatização está na matematização, aceitando a convicção de Hilbert que “tudo que pode ser objeto de pensamento científico acaba no método axiomático, e, portanto, imediatamente na matemática, desde que estejam prontos para formar uma teoria” (Hilbert 1964, 11), a preocupação de Russell parece perfeitamente consistente. Para a aritmética, ser axiomatizável, deve ser considerado como um objeto específico. A teoria axiomática sozinha, assim como as leis naturais, não proporcionam descrições completas que esta área de estudo objetiva. É apenas a aplicação ou interpretação dos axiomas que representam as leis naturais as quais respondem a sabedoria. Leis, bem como axiomas, representam apenas possível conhecimento. Os termos indefinidos, os quais aparecem nas categorizações axiomáticas, não se referem a objetos específicos singulares, mas servem para representar possíveis conexões entre objetos indeterminados ou gerais, variáveis livres. Axiomas na compreensão moderna são considerados meros esquemas axiomáticos.

Para completar uma descrição axiomática devemos também indicar as aplicações as quais temos interesse. As aplicações da aritmética não são finitas, porém, a maioria dos matemáticos tem tentado entender a existência de conjuntos infinitos através de argumentos epistemológicos, e não por argumentos ontológicos. Se tivermos a intenção, por exemplo, de gerar, de maneira construtiva, tais conjuntos, talvez tenhamos que postular o poder da mente por repetição interminável de algumas operações, por exemplo, a operação de contar. Dedekind não estava pronto para imaginar a definição axiomática direta de um número, porque depois de reconhecer as características iniciais de tais sistemas "a questão surge: um sistema como esse existe na área de nossas idéias?" (Dedekind em sua carta ao Kefertein em 1980). Dedekind tentou proporcionar uma totalidade infinita das coisas dizendo que humanos têm a habilidade de repetir infinitamente certas idéias ou ações mentais. Dedekind considerou seu experimento de pensamento uma prova lógica da existência, e ele não estava preocupado, como Russell, como o significado com os símbolos de números individuais.

Surgem dúvidas em relação ao quão plausível tais construções são quando não queremos rigorosamente separar nosso mundo mental interno do mundo empírico externo. De outra maneira, poderíamos "provar" o axioma das paralelas de Euclides precisamente desta maneira, através do desenho interativo de duas linhas paralelas segmentares de uma polegada de comprimento. Por que a possibilidade de contar um conjunto indefinido parece mais plausível do que uma ilustração do axioma paralelo geométrico? Por que há mais segurança em construções conceituais do que em representações intuitivas?

A resposta pode ser a seguinte: qualquer destas duas idéias representa apenas possibilidades em nenhuma existência envolvida, então não há diferença.

Uma delas, contar, é algo mental e não sujeito a quaisquer limitações, enquanto a outra, por exemplo, construção geométrica, tem que respeitar restrições objetivas. Então as condições para as duas formas de controle não seriam analisadas primeiramente, e uma teria que desenvolver uma noção (objetiva ou lógica) de possibilidade. Ao contrário disso, muitos têm sido convencidos, juntamente com Frege que

> Na aritmética não estamos preocupados com objetos estranhos que venhamos a conhecer, mas estamos preocupados sim com os objetos dados diretamente a nossa razão e que sendo da sua própria espécie são completamente transparentes a ela. (Frege 1884, § 105)

Os paradoxos lógicos provaram ser uma mera ilusão e mostraram que nosso mundo mental não é menos complexo e não-transparente que outra realidade externa, e que existem limitações para nossas atividades mentais e para nossas ações concretas. Resumindo, não é possível conduzir uma prova de existência sem suposições mais profundas. Nós não sabemos como Russell deve ter considerado a diferença entre número e espaço, como representações de nosso mundo interno. Em qualquer caso, Russell pensa que não podemos conseguir totalidades infinitas através da mera enumeração, e considera isto um fato empírico “que a mente não é capaz de repetir o mesmo ato de maneira ilimitada, sem haver um final”. Russell diz: Então, se o leitor tiver um senso robusto da realidade, se sentirá convencido que é impossível fabricar uma coleção infinita através de uma coleção finita de indivíduos” (p 135). Não podemos provar que números ou conjuntos infinitos existam. Este é provavelmente o consenso hoje, enquanto as explicações dadas são diversas e causam “controvérsia”.

A crítica de Russell à construção de Dedekind refere-se também à relação entre objeto e conceitos, as quais são relevantes tanto, para a lógica quanto, para a epistemologia. Enquanto um pode postular, por um lado, que o conceito e objeto devem ser distinguidos, mesmo com tipos lógicos diferentes, que pertencem a um extrato categórico diferente, por outro lado, conceitos, aparecem ser o próximo passo à interação como extensões de uma segunda ordem de conceitos. Como as suposições necessárias para justificar tais noções não são axiomas lógicos, a situação torna-se não transparente. Russell então enfatiza “que conceitos não têm uma existência factual no senso comum" e, portanto não podem ser tratados como coisas, o que é, porém, contrário à prática matemática comum.

O topologista Salomon Bochner corretamente imagina a interação de abstração como a característica distintiva da matemática da Revolução Científica do século 17.

> Na matemática Grega, qualquer que seja sua reputação, simbolização [...] não avançava o primeiro estágio, além do processo de idealização, que é um processo de abstração da realidade direta, [...] Porém [...] a simbolização em escala completa é muito mais do que uma mera idealização. Ela envolve, em particular, um aumento ilimitado da abstração, quer dizer, a abstração da abstração, a abstração da abstração da abstração, e assim por diante; e, de maneira importante, o surgimento dos objetos abstratos gerais, se vistos como instâncias de símbolos, devem ser permitidos para o exercício de certas manipulações e operações produtivas, se eles têm um significado matemático. (Bochner 1966,18)

Russell também rejeita todas as tentativas de provar a existência de conjuntos infinitos pela razão que eles violam requerimentos de sua própria teoria dos tipos. Por outro lado, como dissemos, o desenvolvimento matemático demanda apenas isso.

IV

Sobre o que é, então, a teoria dos tipos de Russell? Com o objetivo de consertar alguns paradoxos da lógica e da teoria dos conjuntos, Russell introduziu a regra "Qualquer coisa que envolva todos de uma coleção não deve ser um da coleção" (Russell 1971, 63). Um conceito total referindo-se a uma totalidade não pode pertencer à totalidade. Agora Dedekind, em seu "Was sind und was sollen die Zahlen?" (cf. Dedekind 1969, 14) fundou a prova da existência de conjuntos no conjunto antinominal (de todas as coisas) "o qual pode ser objeto de meu pensamento" (o conjunto de conjuntos que não são membros deles mesmos de Russell são certamente um possível objeto de pensamento). Cantor chamou a atenção de Dedekind para a inconsistência de sua fundação do número já em 1899.

Apesar do fato de este não ser o princípio do tipo de classificação em si mesmo, Russell caracteriza este apenas como um movimento negativo, como um princípio de interdição. Em particular, algumas limitações devem ser estabelecidas com relação à variedade de variáveis quantificadas em funções proposicionais. Uma expressão como "todas as proposições podem ser verdadeiras ou falsas", por exemplo, não faz mais sentido. E no que diz respeito à aritmética torna-se claro que axiomas formais poderiam caracterizar o número apenas em conexão com uma classe de aplicações intencionais. Portanto existência torna-se a principal preocupação da filosofia da matemática, como já havia acontecido no início do século 19 na própria matemática. A existência pode, porém, ser assegurada por algumas maneiras, as quais Carnap julgou serem subjetivas. Neste sentido, idéias, leis ou outras verdades, não existem. Os conjuntos de Russell existem?

Outra conseqüência é a de que os axiomas matemáticos devem ser compreendidos em analogia com suas leis naturais, como proposições condicionais hipotéticas, algo que Russell, contrariamente a outras pessoas relacionadas à lógica, parece aceitar, mesmo se repetidamente muda sua opinião sobre o assunto (cf. Gödel, 1944, 127). Russell adota uma posição realista expressada, por exemplo, quando ele diz que

> a lógica está preocupada com o mundo real tão verdadeiramente quanto a zoologia, embora seja mais abstrata e tenha características gerais. Falar que os unicórnios têm existência na literatura ou na imaginação, é a menor e menos importante fuga. O que existe na simbologia não é um animal, composto de carne e osso, movendo-se e respirando por si mesmo. O que existe é uma figura, ou uma descrição em palavras [...] Há somente uma palavra, o mundo "real" [...] O senso de realidade é essencial para a lógica. (pp. 169-170)

Portanto, Russell gostaria de assegurar que os conceitos matemáticos podem ser obtidos por abstrações como as empíricas mais do que as construtivistas. Esta é a razão pela qual ele postula a existência de conjuntos infinitos.

Russell aceita – e isto parece surpreendente para uma posição empírica - que pensamentos e sentimentos são reais, enquanto considera os "objetos" que povoam nossos pensamentos e sentimentos como irreais. Os pensamentos de

Shakespeare, por exemplo, “ao escrever Hamlet são reais”. Porém, eles estão na essência da ficção [...] não há [...] um Hamlet objetivo” (p. 169). “Um unicórnio é a descrição indefinida a qual não descreve nada. Não é uma descrição indefinida que descreve algo irreal”(p. 170). Tal realismo pode ser interpretado erroneamente em relação à existência dos objetos descritos. No interesse das teorias de aplicações matemáticas a questão surge com *status* ontológico, portanto matemático.

Por outro lado, distinções teóricas de tipo são bastante evidentes e comuns. A totalidade de cadeiras não é cadeira, a classe de coisas vermelhas não é uma coisa vermelha, mas uma abstração como avermelhado, ou uma função proposicional como “x é vermelho”, ou algo assim. Enquanto conceito e objeto, cardápio e carne, mapa e território são facilmente distinguidos, esta distinção, por outro lado, torna-se relativa da perspectiva da atividade matemática e seu desenvolvimento dinâmico. A hipótese das barreiras absolutas entre a essência e a existência, ou entre o signo e o objeto, é problemática de um ponto de vista epistemológico, como pode aparecer um motivo e conduzir a uma força da atividade cognitiva que, de alguma maneira, possa parecer que realmente existe. O mapa ou o modelo matemático, sendo modelos de exploração, primeiramente podem também se tornar objetos de cognição da mesma maneira que eram meios de estudo anteriormente. Ou se pegamos o exemplo da teoria do número: números são estabelecidos em medidas como relações entre quantidades, mas são na teoria do número considerada como objetos definidos de investigação.

É a matemática que se distingue pelo fato de que o processo de abstração continua indefinidamente e recursivamente, e o número de níveis semânticos parece ter aumentado consideravelmente de novo, nas ciências da computação, comparado com a matemática tradicional. Isso significa que é a complexidade da matemática, do “mapa” ele mesmo, que leva aos problemas. Por esta razão, existem limitações da teoria dos tipos. A teoria dos tipos toca o mesmo problema de contextualização e interpretação que estimularam as objeções de Russell contra a axiomática moderna.

Se imaginarmos a teoria dos tipos em um senso ontológico ou absoluto ou , os números naturais seriam todos de um diferente tipo, não apenas na descrição de Dedekind, mas também de acordo com a interpretação do conjunto teórico dada por Russell. A atividade aritmética, ao contrário, requer que todos sejam do mesmo tipo. Russell tenta ir de encontro a esta requisição mais tarde, introduzindo axiomas lógicos adicionais.

Mas números e conjuntos de números ou conceitos de números são tipos de lógica diferentes. Não podemos proceder indutivamente na matemática, não mais do que em qualquer área empírica, para obter o conceito geral de número. As variáveis são, apenas, para os números individuais e as proposições contendo-as devem ser interpretadas como uma conjunção lógica infinita? Ou existem objetos matemáticos ideais e se existem, em qual sentido? Estas duas visões coexistem em matemática. A diferença entre uma afirmação sobre um número geral e uma afirmação sobre todos os números deve ser introduzida na matemática, e mesmo como Russell admite, porque a dedução depende de variáveis livres, ou objetos ideais. As leis naturais não podem ser entendidas como conjunções infinitas também, quer dizer, de acordo com o padrão "pedra *a* cai", e "pedra *b* cai" , e "pedra *c* cai", etc. Não podemos dar nomes individuais para todas as pedras ou todos os átomos no universo, não mais do que podemos nomear todos os números ou todos os triângulos. Os axiomas de Peano devem ser compreendidos através do significado que se um número é dado ele obedece à descrição axiomática e os axiomas não devem ser interpretados como uma conjunção infinita ou sentenças definidas.

> Por exemplo, se a é um símbolo numérico, então a+1=1+a é universalmente verdadeiro, é, para nossa perspectiva finita, inegável. Nós veremos isto melhor se considerarmos que esta sentença não pode ser interpretada como uma conjunção de infinito, muitas equações numéricas através do "e", mas apenas como um julgamento hipotético o qual assegura algo para o caso em que um símbolo numérico é dado. (Hilbert in: Benacerraf/Putnam (eds.) 1983, 194)

A área das leis naturais que pretende ser aplicada deve permanecer aberta e indeterminada em um certo sentido, e se desenvolve juntamente com a teoria da evolução. E mesmo em aritmética temos que aceitar modelos não estandardizados quando nos confinamos às descrições lógicas. Por outro lado, a área de objeto de uma teoria não pode permanecer completamente indeterminada, porque as leis naturais sozinhas não resultam em nenhum conhecimento definitivo. Os esforços de Russell em dar um significado final aos números nos mostram que o desenvolvimento e aplicação de uma teoria estão relacionados de uma maneira muito complicada. É verdade que a geometria e aritmética são tratadas diferentemente em geral. Frege, por exemplo, que influenciou Russell de maneira profunda, acreditava que em aritmética não tem que haver nenhuma atenção à intuição enquanto a geometria não pode ser separada da intuição. A analogia entre axiomas matemáticos e leis naturais se aplicaria apenas à axiomática geométrica e conseqüentemente à noção de variável é também diferente em aritmética e geometria. Em aritmética, variáveis seriam de entidades definidas e conseqüentemente, o axioma de Russell, de infinitas.

Russell parece assumir que o axioma do infinito é ontológico em sua natureza, e que é mais plausível assumir a existência de conjuntos infinitos do que adotar a hipótese oposta, mesmo que nenhuma possa ser provada. Este é precisamente um caso de um axioma no senso clássico. E Russell chama atenção para a plausibilidade intuitiva. De acordo com nossa "evidência empírica e a divisibilidade pareceria favorável assumir que há um número infinito de objetos no universo", mas não conseguimos saber nada sobre eles *a priori*, e "não há métodos para descobrirmos se o axioma é verdadeiro ou falso" (p. 143). Estranhamente, Russell não consegue ver que a divisibilidade infinita não significa nada na verdade, porém, Dedekind postula que o processo infinito de um é da mesma operação, não gostaria de assumir um mundo desconhecido das coisas, como Kant.

V

Uma comparação a Kant é um fato sugestivo aqui. A compreensão matemática de Kant é baseada nas características exemplificadas do método de Euclides como discutidas amplamente na *Analítica de Aristóteles*.

De acordo com Aristóteles, definições matemáticas dão a essência de uma coisa, mas não dizem nada sobre sua existência. Por esse motivo, a existência de algo deve ser dada diretamente pela intuição ou deve ser provada, mostrando o porque algo é assim, quer dizer, proporcionando explicações para sua existência. Aristóteles diz que é particularmente o caso da geometria, onde a existência de pontos e linhas deve ser assumida, enquanto as outras noções devem ser dadas através da mesma construção. Então, o que não pode ser intuído deve ser construído em intuição.

Na sua crítica ao Julgamento Kant levanta a questão de se é possível proporcionar uma caracterização geral do intelecto humano diferentemente de todos outros modelos de conhecimento e ele descobre que não podemos saber intuitivamente, mas existem mentes discursivas que dependem dos conceitos. A inteligência de Deus é intuitiva e ele não pode, comenta Cassirer,

> pensar em uma coisa sem, por este ato de pensar, criar e produzir a coisa. ... O conhecimento humano é por sua natureza um conhecimento simbólico. É essa característica que caracteriza ambos sua força e limitações. E para o pensamento simbólico é indispensável fazer uma distinção entre real e possível, entre coisas reais e ideais. Um símbolo não tem existência real como parte do mundo físico; ele tem "significado". (Cassirer 1962, 28th impressão 1977, 56; 57)

Nunca possuímos um acesso direto e imediato para as coisas. Podemos apenas pensar através de símbolos ou conceitos, mas "conceitos sem intuição são vazios". Kant escreve:

> posso pensar no que eu quiser, desde que eu não me contrarie, quer dizer, desde que minha concepção seja um pensamento possível, embora eu possa ser incapaz de responder sobre a existência de um determinado objeto em meio a uma soma de possibilidades. Porém, algo mais é necessário antes que eu atribua validade ao conceito, que é a possibilidade real que a outra possibilidade seja apenas lógica. (Kant, B XXVII)

Para exibir a possibilidade real de uma concepção matemática é necessária sua construção. "A construção de uma concepção é a apresentação *a priori* da intuição que corresponde à concepção" (Kant, B 741). Isso corresponde ao método de Aristóteles.

A objetividade do conhecimento matemático é baseada em um caráter legislativo de pura intuição no processo de aplicação de conhecimento e experiência concreta, de acordo com Kant. Sabemos que Kant questiona como é possível que conclusões matemáticas *a priori* levem ao conhecimento real. E ele responde esta questão tentando, de uma maneira similar a de Russell, determinar as condições de aplicabilidade dos julgamentos matemáticos *a priori*. Kant localiza estas condições em intuição pura, a qual, diferentemente da mera análise e conceitualização lógica, alimenta a possibilidade real. Seguindo Kant, temos que distinguir, de uma maneira que antecipe a teoria dos tipos de Russell, as condições gerais de aplicabilidade, bem como a aplicação em si, devemos distinguir as condições de possibilidade de experiência por um lado, e as experiências individuais por outro, porque Hume nos ensinou que a inferência indutiva do particular para o geral não é possível "sem princípios de experiência *a priori* reguladores (não construtivos)".

As condições gerais da possibilidade de experiência têm que ser determinadas *a priori*, no mesmo sentido de Russell, e estas explicações *a priori* referem-se às condições que devem ser encontradas por objetos de experiência possível. Uma epistemologia da perspectiva do sujeito humano finito nos leva a definir questões ontológicas epistemologicamente, e Kant, portanto, determina a realidade e a objetividade da experiência a partir de condições produtivas mais do que a partir de suposições metafísicas. Nós obtemos nossas cognições, porém, por intuição, mesmo se não identificarmos a intuição com a percepção da mera informação, da maneira que o empirismo faz.

Ernst Cassire também compara a visão de Kant à de Russell, escrevendo:

> que os nossos conceitos têm que referir-se a intuição significa que eles têm que referir-se a física matemática, e provar-se frutíferos na maneira em que são formados. Os conceitos lógicos e matemáticos não devem mais formar as ferramentas que utilizamos para formular um mundo de pensamento metafísico. Eles têm sua função e legítima aplicação meramente na ciência empírica em si. É a limitação que assegura sua realidade. Neste sentido, Kant formulou o princípio supremo de todos julgamentos sintéticos: "*As condições da possibilidade de experiência em geral são como condições da possibilidade dos objetos de experiência, e têm, por esta razão, o objetivo validado em um julgamento sintético a priori* (B 197). Cassirer, 1907, 43)

Frege ou Russell talvez responderiam a isso dizendo que há objetividade em nosso raciocínio e julgando sem objetos pré-estabelecidos, por este motivo eu entendo, diz Frege, por exemplo,

> objetividade pode significar independência dos nossos sentimentos, percepções e intuições [...] mas não independência do raciocínio. Porque, responder a questão, sobre quais coisas são independentes da razão, seria como julgar sem julgar, ou lavar o pelo sem secá-lo. (Frege 1884, § 26)

Por este motivo existe uma semelhança forte entre Frege, Russell e Kant, exceto pela questão da intuição. Intuição e espaço deveriam justificar a existência e eram indispensáveis, porque para Kant a existência possível dos objetos era um pré-requisito para o conhecimento e julgamento. Frege, como vimos, queria se livrar deste pré-requisito. Porém, não poderíamos definir a identidade de conceitos ou funções sem ele. Frege não tinha nenhuma solução para identificar os conceitos, os quais, apesar de queimados, continuam assuntos complexos até hoje. E se "a equivalência extensiva dependesse da intuição, a importância de Frege cairia, essencialmente, na de Kant" (Potter 2000, 80). Este é, de fato, o caso da abordagem de Russell baseada no axioma do infinito.

Devemos lembrar que Russell, no seu "Problemas da Filosofia" de 1912, formulou um princípio epistemológico fundamental o qual fortemente lembra a ênfase de Kant na indispensabilidade da intuição. Ele diz que "toda suposição que pode ser entendida deve ser composta inteiramente por seus constituintes que conhecemos" (Russell 1991, 58), mas do que sabe-los apenas em sua descrição. No capítulo anterior, devemos nos lembrar, vimos que a existência envolvida em nossas descrições de mundo marca a pedra fundamental do realismo de Russell.

Ao contrário de Kant, Russell propõe uma construção lógica do conceito teórico, uma construção, na qual o axioma do infinito substitui as formas de pura intuição de Kant. Como Kant, Russell quer constituir a aplicabilidade de conceitos matemáticos *a priori*. E ambos consideram esta possibilidade de investigar a estrutura de um mundo separado – o mundo da intuição versus o mundo da lógica.

E embora Russell repetidamente critique Kant, por fazer muito uso da intuição, enquanto entrando ouço na lógica e análise lógica, a filosofia de Russell pode, porém ser caracterizada justamente, como tem sido feito constantemente, através da formulação "longe de Kant e de volta à Kant". A idéia de conjunto de Russell-Cantor na concepção matemática é apenas um substituto para espaço? E os modelos de conjunto teórico, os quais suplementam a matemática axiomática, não deveriam ser entendidos de uma maneira similar a como a intuição geométrica deve ser entendida na relação com a axiomática de Euclides?

Em particular, o quinto axioma de Peano, o axioma da indução matemática, não pertence à lógica no próprio senso (ordem é baseada na lógica) e não pode ser substituída por axiomas lógicos (nem mesmo muito infinitamente, um fato provado em 1934 por Thoralf Skolem). Em 1900, matemáticos como Poincaré interpretaram este axioma como uma indicação ao caráter sintético da aritmética no sentido de Kant. Russell considera os pontos de vista de Poincaré errôneos porque

> a indução matemática é uma definição, não um princípio. Há alguns números nos quais isto pode ser aplicado, e há outros [...] nos quais isso não pode ser aplicado. Nós definimos os 'números naturais' como aqueles cujas provas por indução matemática podem ser aplicadas, como aquelas que possuem todas propriedades indutivas. (p. 27)

Esta definição, porém, depende da fundamentação do conceito de número ou da noção de conjunto, e então depende do axioma do infinito, e outras suposições "disputadas" como o axioma da escolha, o qual Russell considera ser "improvável" (p. 117, veja também Heinzmann, 1993)

VI

Sabemos, ao seguir o argumento de Russell, que o conceito de "número" não é vazio, para explicar os termos de Kant, porque há conjuntos finitos e infinitos aos quais ele pode se referir. Porém, ainda não sabemos seu significado concreto, seu conteúdo, exceto pelo fato de que temos que assumir que ele é um conceito da teoria dos conjuntos no senso geral. Uma coisa é postular que conjuntos infinitos existem, e outra é estabelecer uma correspondência entre números e conjuntos. Temos que concretizar esta correspondência em particular de maneira que as entidades respeitem os cinco axiomas de Peano. Para este propósito, Russell constrói um modelo conjunto-teórico de detalhes os quais as necessidades não nos interessam agora.

“Consciência dos universos é chamada idéia, e um universo o qual estamos conscientes é chamado conceito” (Russell 1997, 52). Nós não percebemos apenas gradações individuais de amarelo, estamos cientes das universais, idéias gerais como o amarelado. O universo é o assunto em julgamentos como, amarelo é diferente de azul”. Em o que, a consciência de um universal como “amarelo” é diferente de “árvore”? Palavras numéricas não funcionam como questões que alguém tem que resolver. Porém, esta resposta não é muito profunda.

Russell diz que aquele “número” é a característica em números, assim como “homem” é a característica em homens, ou “triângulo” a característica em triângulos. “Um número é qualquer coisa que é o número de alguma classe” (p. 19) Russell define que os números individuais cuja essência é resumida no conceito geral do número como designações de respectivas classes de conjuntos de equivalência determinada, e o número de uma classe é a classe de todas as classes que são similares a ele (18). Nesta determinação, o conceito de classe ou conjunto é ainda visto como um conceito básico indefinido, e agimos como se os conjuntos fossem coisas reais, e fossem, de fato, a única coisa existente.

Todas as pessoas que tenham ido a escola nos últimos 30 anos sentirão a expressão “Nova Matemática” de alguma maneira familiar. É ainda mais interessante dizer que este movimento de reforma representa uma tentativa de criar um lugar para a matemática moderna no senso comum, uma tentativa que era certamente tão fascinante e heróica quanto mal formulada, foi dividida no interior dela mesma, desde o início. Uma corrente principal que intencionava reduzir o significado de todos os conceitos à lógica e à teoria do conjunto foi desde o começo, oposta à outra teoria, esta última mais orientada em direção a estrutura e axiomática.

Um dos mais eminentes reformadores, por exemplo, Georges Papy da Bélgica, deu uma palestra na Düsseldorf Academy em 1967 na qual ele apontou em particular a importância do método axiomático. Axiomática, ele disse,

> tem às vezes sido apresentada como a maior descoberta matemática do século 20. É a axiomática que oferece uma parte importante para a nova pedagogia. É importante que nos entendamos neste ponto. Há métodos axiomáticos diferentes, e diferentes tipos de exposições axiomáticas. A mais perfeita e elevada dentre elas é a representação axiomática formal. Os objetos não são definidos e têm um papel na teoria apenas através das relações abstratas as quais foram introduzidas pelos axiomas.

Não devemos dizer, Papy continua, que este modo de pensamento é inapropriado para iniciantes. "Contrariamente, pegaremos o ponto de vista do físico, que, nos seus melhores momentos, formula axiomas sem perceber. Como Monsieur Jourdain de Molière formulou a prosa" (nossa tradução).

Aqui novamente, nós temos um eco de conexão, entre, a matematização e axiomatização, indicada por Hilbert. A concepção de Russell é então confrontada, em todas as áreas que têm relação com a matemática, com a outra visão que números e todos os universos têm que ser concebidos na funcionalidade, em seu papel como meio de pensamento. Rudolf Carnap diz que o empirismo lógico assume "que o objeto e seu conceito são o mesmo". Esta identificação sendo a "funcionalização" do objeto, mas do que intencionando uma hipotetização do conceito. (Carnap, 1968, 10). E Moritz Schlick, fundador do "Ciclo de Viena", pensa que

> para fazer o uso dos conceitos na área do raciocínio, é necessário que seus julgamentos sejam válidos. Nenhuma de suas propriedades é necessária (exemplo: os axiomas sobre os conceitos básicos da geometria). Para a ciência exata que junta conclusão após conclusão, o conceito, conseqüentemente, é apenas um julgamento. Deve, por esse motivo, ser definido. (Schlick 1979, 51)

Na abordagem axiomática, o objetivo parece reduzido à função de ter a noção da verdade definível.

Russell não era um positivista lógico, e ele chamou a tendência predominante do positivismo lógico um novo tipo de escolasticismo o qual, por se concentrar muito na estrutura formal, "deve esquecer a relação do fato que faz uma declaração verdadeira" (Russell 1966, 380). Russell, enquanto profundamente interessado na análise lógica, sempre alertou contra o formalismo do pensamento.

> Uma linguagem logicamente perfeita se pudesse ser construída, não seria apenas intoleravelmente fastidiosa, mas, em relação ao seu vocabulário, seria muito particular a um falante. Isso quer dizer que todos os nomes que seriam particulares a uma pessoa não poderiam entrar na linguagem de outra. [...] Porque em uma linguagem logicamente perfeita, existiria apenas uma palavra para cada objeto simples. [...] Esta é a razão da lógica ser por trás uma ciência, porque as necessidades da lógica são tão extraordinariamente diferentes das necessidades da vida diária. Queremos a linguagem em ambos, e, infelizmente foi a lógica que foi substituída, não a vida diária. (Russell 1966/1998, 198)

A intenção de reduzir a aritmética à lógica, segundo Russell, apenas segue-se "uma regra que é reconhecida em todas as matemáticas" e que tem o objetivo de "fazer os resultados de um processo dedutivo aplicáveis". O matemático, porém, não tem as mesmas intenções da pessoa que trabalha com lógica no que diz respeito a tentar dissecar os conceitos em seus componentes elementares. O matemático não procura uma linguagem, e sim um modelo ou uma estrutura. O matemático generaliza, como uma regra, enfraquecendo as hipóteses de seus teoremas, portanto fazendo com que eles se tornem mais verdadeiros no que diz respeito às estruturas e fazendo as estruturas menos condicionais com o objetivo de aumentar a variedade de aplicações possíveis. Isto é afetado pela fundamentação axiomática das teorias matemáticas.

Bastante ao contrário da visão de Russell, podemos dizer que os aspectos de aplicação das diferentes interpretações dos sistemas axiomáticos fazem a força e o significado do método axiomático. O porque do significado de todos os conceitos dever ser totalmente fixado antes de toda aplicação é algo difícil de entender. No final os conceitos não seriam mais do que uma completa descrição de entidades individuais. A axiomática matemática, ao contrário, sempre caracterizada pelos pronunciamentos de Hilbert, de acordo com os quais, nos axiomas da geometria plena, os termos "pontos" e "linhas" poderiam ser substituídos por termos como 'caneca de cerveja' e 'mesa'; "em outras palavras, toda e cada teoria aplicada pode ser sempre aplicada a um número infinito de sistemas de elementos básicos" (Hilbert em uma carta para Frege com data de 29 de dezembro de 1899). Ainda é verdade que devemos encontrar no mínimo uma aplicação para resolver o problema da existência.

Mesmo de maneira intuitiva e construtivista, pessoas que trabalham com lógica e filosofia, que não designam nenhuma função ao método axiomático enfatizam seu significado para as aplicações de praxe. Em particular, o método parece preparado para clarificar a estrutura de teorias, e "fundir teorias que eram originalmente diferentes através da descoberta das relações de isomorfia" (Heyting 1934, 30). Sistemas de axiomas são então propriamente dizendo entidades meta-teóricas; este aspecto tem um papel muito importante na matemática dos dias de hoje porque uma grande parte das aplicações e processos de matematização ocorre na matemática em si (como na busca de relações teóricas relacionadas).

Apenas quando temos uma aplicação específica em mente, o problema de como construir as correspondências necessárias surge. Durante os séculos 17 e 18, por exemplo, a matemática tem sido compreendida como uma ciência de quantidade. Como os novos fenômenos de eletricidade e magnetismo tiveram que ser matematizados no século 19, tornou-se necessário estender o conceito de quantidade para quantidade vetorial (quantidade direcionada) e generalizar a quantidade de operações correspondentemente (por exemplo, através da introdução de produtos vetoriais não comutativos). Podemos, por via de regra, não obter o axioma da "essência", simplesmente porque apenas sabemos as coisas com o foco em algumas relações entre elas. Todo o conhecimento objetivo é, de fato, um conhecimento relacional. Kant, portanto insistiu que não podemos saber as coisas em si. Teorias axiomáticas são sintéticas neste sentido, e seus valores estão em sua fertilidade, não em justificação lógica ou objetiva.

Russell não estava a par do método axiomático de Hilbert. Para ele, porém, a interpretação de um sistema dedutivo é sempre de fundamental significância filosófica, enquanto deve servir para clarear quanto uma teoria empírica pode estar ligada à percepção, e quanto uma teoria matemática, como uma teoria aritmética, pode estar ligada à lógica. Apesar de seu estado de mente aberta, no que diz respeito aos desenvolvimentos futuros da matemática e das ciências naturais, Russell repetidamente endereça seu interesse em elementos absolutamente invariantes de cognição.

Russell acredita que o método axiomático é incompleto, porque termos indeterminados ocorrem nos axiomas. Estes termos não interpretados devem ser especificados de uma maneira que permita estabelecer uma conexão com a aplicação pretendida. Uma interpretação absoluta ou final acerca dos conceitos matemáticos, porém, não é geralmente possível nem desejável. A determinação axiomática de conceitos matemáticos será sempre incompleta como sempre temos que levar em consideração a possibilidade que um conceito tenha uma extensão vazia (visto que o axioma pode ser inconsistente), ou que seja ambíguo (uma propriedade desejada no aspecto da aplicação). Se tivermos a intenção, contrariamente a isso, de introduzir todos os conceitos através de definições completas, devemos necessariamente fazer proposições metafísicas e psicológicas sobre o mundo, como ele é, o que é uma tarefa fútil. O conceito de conjunto que Russell tenta usar para especificar o significado do número agora é certamente cognitivo, não menos sofisticado que o conceito de número em si. Russell, porém, acredita no conceito de conjunto de uma maneira lógica mais fundamentada e empiricamente mais simples.

Tecnicamente, existem dois problemas que já foram mencionados algumas vezes. Primeiramente, o contraste entre fundamentação construtivista e indutiva a respeito dos conceitos ou teorias. No que diz respeito à aritmética, Russell, como outros construtivistas, (Hölder, por exemplo), prefere basear número em cardinalidade, definindo o número cardinal de uma coleção dada como o conjunto de todas as coleções iguais, mais do que utilizando a axiomática do número ordinal.

Em segundo lugar, o problema da indeterminação: quanto mais tentamos controlar nossos próprios conceitos, mais codificamos e formalizamos nossa linguagem, quanto mais restringimos nossa noção de existência, menos podemos dizer *a priori* algo sobre a aplicabilidade de nossas teorias científicas ou matemáticas, ou sobre suas fundamentações ontológicas, porque uma linguagem lógica não seria, como o próprio Russell diz, uma linguagem particular de quem está falando, mas seria também inútil no que diz respeito à aplicação e generalização. Creio que este seja o significado real do famoso dito de Einstein: “contanto que os teoremas da matemática refiram-se à realidade, eles não são certos, contanto que eles sejam certos, eles não se referem à realidade” (Einstein, trecho da re-impressão em: Strubecker (ed), 1972, 414). Isso não significa que a matemática seja dispensável, ou não usada para a aplicação, mas apenas que não podemos “explicar” sua aplicabilidade em uma teoria matemática ou lógica. Teorias não são, ao mesmo tempo, teoria de sua própria aplicação.

Elas também não são meras estruturas relacionais. O significado dos nossos conceitos teóricos depende mais dos métodos de aplicação, como métodos de experimentação e medição, por exemplo, do que nas noções sobre o mundo. A perspectiva axiomática, e até este momento Russell está certo, deve sempre ser suplementada pela perspectiva do sujeito ativo, localizada em um contexto completo de vida e atividade. Devemos nos focar em outras relações com os objetos de nossa cognição do que apenas em relações teórico-conceituais.

VII

Não há possibilidade de determinar o significado do “número”, nem mesmo com a teoria dos conjuntos. A conhecida e re-impressa coleção acerca da filosofia da matemática (cf. Benacerraf/Putnam 1983), onde partes do trabalho de Russell “Introdução a Filosofia Matemática” foram também re-impressas, também contém um ensaio de Paul Benacerraf intitulado “O que os números não poderiam ser” no qual ele demonstra que o conceito de número pode ser reduzido ao conceito de conjunto de muitas maneiras diferentes, sem a oportunidade de separar a interpretação correta da teoria do conjunto de todas as possíveis. Benacerraf conclui, por esta razão, que números não podem ser conjuntos, ou conjuntos de conjuntos, porque existem muitos significados e referências a palavra número em termos da teoria dos conjuntos. E até mesmo Quine, que concordava com o fato de Russell não gostar da “falta de interpretação da matemática” apontou que palavras como “dois” ou “quatro” não deixam de ser interpretadas em nenhum momento na nossa linguagem, enfatizando que toda interpretação do conjunto teórico de palavras numéricas – de Frege, von Neumann ou Zermelo – é usado “oportunamente para ajustar o trabalho nas mãos, se um trabalho que tentar proporcionar uma versão do número” (Quine, 1960, 263).

Agora a teoria dos conjuntos não é entendida, nem como meio de construção, nem como a régua e compasso na geometria de Euclides, sendo assim preparada a aceitar, como em geometria, que as coisas podem ser construídas de diversas maneiras e que toda a construção naturalmente enfatiza características diferentes do que está sendo construído – as várias reconstruções da teoria dos conjuntos do sistema numérico, concordam em uma estrutura, enquanto discordam no que diz respeito à especificação das referências para termos numéricos particulares -, ou teríamos que dizer que o conceito de conjuntos não representa a última base adequada para estabelecer a existência do número. Existência não pode ser fornecida por meios simbólicos e tem que ser assumida desde o início.

Poderíamos ver o reducionismo da teoria dos conjuntos de Russell ou deveríamos dizer construtivismo, ou o método axiomático no senso de Peano e Hilbert, por outro lado às visões complementares da matemática exatamente como nos métodos construtivistas e dedutivos da geometria clássica que têm sido complementares (cf. Casari 1974, 49-61; Putnam <1967>, 1975). Esta complementaridade é também expressada nas noções de conceito e objeto na matemática.

Números, por exemplo, são conceitos universais ou gerais. Enquanto, por um ponto de vista o geral é tratado como uma afirmação geral, como o conceito (correto ou incorreto) designa uma certa afirmação ao objeto (concreto ou ideal), o geral também pode aparecer como um objeto o qual a generalidade opõe-se a sua relativa indeterminação. Qualquer proposição pode ser escrita como uma relação entre os objetos concretos e universais. Ao invés de dizer, por exemplo: “mel é doce, podemos dizer: mel possui doçura” e poderia então adicionar sentenças nas quais “doçura” entra na posição do sujeito como “ a doçura do mel é diferente da doçura do açúcar”. Isso implica termos dois tipos de universos. Nós dizemos, por exemplo, que números tendo certas propriedades existem, assim como falamos da existência de conceitos empíricos. Nós afirmamos, por exemplo, que números que têm certas propriedades existem, assim como falamos da existência de conceitos empíricos; como “energia” e “sociedade” por exemplo. Esta é uma linha com a visão axiomática. Um sistema de axiomas nunca define um conceito ou objeto determinado ou individual, mas define um conceito ou objeto universal e indeterminado. A teoria axiomática abstém-se deliberadamente de estabelecer sua área de aplicação em detalhe – esta é a reclamação de Russell – mas ela possui seus "objetos" em um senso geral.

Vamos pegar outro exemplo empírico, o das cores. A vermelhidão pode ser entendida predicativamente, e, ao mesmo tempo como um objeto, como uma cor, que ocorre em uma infinitiva variedade de nuances. Podemos atribuir a generalidade a este caráter de natureza predicativa, ou a sua indeterminação relativa. No primeiro caso, o geral é exclusivamente de natureza predicativa ou, como Russell diria, reside em funções proposicionais, e de acordo com isso, a vermelhidão pode ser entendida em junção proposicional "x é vermelho". No segundo caso, assumimos a existência de objetos reais ou ideais mais ou menos em um senso de Platão, uma visão expressa no fato de que uma abstração como "vermelhidão" ou "doçura" assume nestas expressões a posição de sujeito.

No primeiro caso, eu tenho uma atribuição de coisas e julgamentos, no segundo caso, outros julgamentos são inferidos. No primeiro caso, a generalidade é ligada à impossibilidade de encontrar um exemplo contrário. No segundo caso, eu posso aplicar a lei da contradição apenas se eu me retiver a questões admissíveis dentro de um contexto teórico. Não faz sentido inquirir sobre a cor do número três ou a vida espiritual do uma pedra que está caindo. Como a matemática afirma estabelecer verdades objetivas também, como ela é essencialmente concebida muito freqüentemente em termos de raciocínio dedutivo e prova formal, ambos tipos de universos, funções e objetos, são indispensáveis para sua iniciativa.

No que diz respeito à inferência dedutiva, não é necessário assumirmos a existência de objetos concretos determinados em todos os respeitos. Como uma dedução matemática reduz a implicação a qual interpreta a proposição "X implica Y", porque se dissermos que X é falso, Y deve ser verdadeiro (ou ao contrário), eu não preciso assumir a existência de um objeto x o qual faria a função proposicional "x é um triângulo geral" verdadeira. Um índice assegurando a referência é suficiente. Objetos gerais são apenas relações de signos.

Vamos considerar o conceito geométrico elementar do “triângulo geral”. Ele tem sido o objeto de muitas discussões desde Locke e Berkeley, cujas propriedades são devidas ao “triângulo geral”. O ponto essencial está em que o “triângulo geral” não possui nenhuma propriedade determinada, mas representa meramente uma possibilidade de determinar um triângulo apropriado para um contexto particular. Apenas como o contínuo contém a possibilidade de determinar pontos individuais, enquanto não sendo constituído por pontos em si. Um triângulo geral é uma variável livre, e não uma coleção de triângulos determinados.

As propriedades que são de um “triângulo geral” dependem do contexto. Se a tarefa, por exemplo, é provar o teorema que as medianas de um triângulo têm intersecção em um ponto, o triângulo no qual a prova é baseada pode ser assumido um triângulo eqüilátero sem perda de generalidade – porque o teorema no caso é um teorema de geometria e o triângulo é equivalente ao triângulo eqüilátero se passar por transformações. Este fato consideravelmente facilita a condução da prova porque tal triângulo tem alta simetria. A verdade de uma proposição sobre o “triângulo geral” então apenas significa ser provável de alguma maneira na qual um certo esquema de prova se aplica. Se operarmos apenas na base das caracterizações dos objetos axiomáticos, não utilizaremos os conceitos envolvidos referencialmente. Ambas teorias matemática e empírica como regra utilizam fontes para resolver seus problemas, e é desta forma que o problema de interpretação dos sistemas dedutivos torna-se significativo.

VIII

Vamos recapitular o que foi apresentado até agora. O pensamento empírico é inicialmente pensamento objetivo sem preocupações. É sobre as propriedades de objetos familiares, e sobre lidar com as coisas. O pensamento matemático, ao contrário, como Aristóteles já diz, começa com Pitágoras, com “teoremas” como; o produto de dois números ímpares é ímpar”. Ou: “Se um número ímpar divide um número par sem resto, ele também divide a metade deste número sem resto”. Estes são teoremas os quais, dizemos, vão além do que podemos experimentar concretamente porque eles dizem algo sobre muitos objetos. Na verdade, eles não dizem nada sobre todos objetos (exemplo: sobre números), mas são sobre objetos universais ou ideais. Eles são sentenças analíticas, as quais desvendam o significado de certos conceitos. Este tipo de interferência conceitual encontra sua expressão mais exaltada no método axiomático moderno, um método que não é resumido à matemática e lógica.

Agora é um período que o problema da aplicabilidade matemática tornou-se mais significante, Immanuel Kant havia previsto que a real cognição matemática não corresponde a sua concepção estruturalista, e que a matemática, enquanto estando *a priori*, é, porém, como qualquer outra cognição, ao mesmo tempo construtiva e dependente da experiência. O pensamento matemático é objetivo também, de acordo com Kant. Esta objetividade aparece precisamente na intuição. A matemática deve construir seus objetos nas bases de certas determinações conceituais, sendo incapaz de levá-las de maneira abstrata da realidade empírica porque as formas matemáticas são a base de nossa experiência científica. E o que é uma pré-condição de experiência não pode ser seu resultado. A definição do conceito matemático, segundo Kant, tem que ser seguida através da certeza de que o conceito criado não está "vazio", mas possui aplicações possíveis. Como os conceitos matemáticos designam ações conectadas, devemos descobrir a possibilidade de sua aplicação na intuição e antecipação mental.

Como provar, por exemplo, estas proposições analíticas como as já ditas "o produto de dois números ímpares é ímpar?" Nós intuitivamente representamos certas atividades. Falaremos, por exemplo, que se um número ímpar é dividido por dois, haverá por definição um resto de um. A partir disto agora entendemos que há para cada número ímpar X outro número N como X = 2 N +1. Se agora tivermos dois números ímpares representados desta maneira, e multiplicarmos estes números, o teorema dito resultará quase automaticamente através da aplicação de leis distributivas e comutativas. A matemática tipicamente procede através da construção de diagramas algébricos e geométricos e através de sua observação, ao invés de analisarmos os significados dos conceitos matemáticos. E isto resulta do fato que a matemática lida com relações e que as relações são extrínsecas, como Hume havia ensinado a Kant. A matemática entendeu que o raciocínio diagramático é sintético *a priori*, porque não pode justificar as regras de acordo com seu avanço. (por exemplo, as leis comutativas e distributivas no exemplo dado).

Agora de acordo com a abordagem estruturalista ou axiomática definiríamos o conceito exatamente através das relações como especificadas pelos axiomas (leis distributivas e associativas) e chamaríamos a prova analítica. Se, ao contrário, compartilharmos a abordagem epistemológica de Kant que significa sua formação sobre a objetividade do assunto, ou se compartilharmos sua visão que os objetos em questão são números individuais, mais do que estruturas, então vamos ser levados a descobrir que uma equação envolvendo vários números grandes é mediada através de cálculo e de raciocínio diagramático para checar se por esse motivo os teoremas da aritmética não seguem diretamente da natureza dos números envolvidos (um argumento que o próprio Kant usa (B 16) tanto que parece estranho ver Frege usando-o contra Kant (Potter 2000, 60)), e teríamos entendido as leis aritméticas (por exemplo, os axiomas aritméticos) dados objetivamente e por este motivo, considerado aritmética como sintética.

Um empírico como Russell finalmente deve querer obter estas leis indutivamente através dos exemplos e então proceder a argumentação que para este propósito precisamos de alguns princípios de continuidade, nos esforçaríamos para encontrar qual princípio universal pode ser justificado. De acordo com a previsão de Kant, teríamos que aceitar, mostrando a aritmética em um senso sintético.

Russell, por causa da sua concepção das leis da lógica, parece próximo a algum tipo de kantianismo, mas pensa que Kant restringe a validade das expressões *à priori* porque ele parece fazê-los dependentes do assunto. Poderia ser contrário a isso o fato que o princípio lógico da contradição permanece referido ao assunto, assim como o princípio de Kant da pura intuição.

Uma objeção essencial contrária à visão analítica resulta de uma observação que as estruturas matemáticas, bem como as provas, não existem ou não têm efeito sem estarem concretamente representadas ou aplicadas. Os objetos matemáticos são objetos intencionais em um primeiro momento. Dois objetos matemáticos podem ser idênticos em sua extensão, mas diferentes em sua intenção por ser apresentado de maneira diferente. Este é o porque das afirmações matemáticas, como regra, terem que formar as equações A=B. Em nosso exemplo nós tínhamos: X = 2 N +1.

É importante observar neste ponto que não faz sentido perguntar se quaisquer dois símbolos representam o mesmo objeto ou objetos diferentes. Identidades da forma A=B dependem do contexto, referindo-se a coisas de certa perspectiva. Dois objetos, como sapatos e cadeiras, podem ser considerados equivalentes como representantes de algum conceito ou universo. A lei de conservação de energia marca a descoberta mais importante da ciência natural durante a era da Revolução Industrial. De onde sabemos, porém, que movimento e calor são duas formas de fenômeno da mesma entidade, que chamamos energia? É realmente um caso de descoberta, ou o que designamos como energia é apenas ficção? No nosso exemplo, comparamos símbolos numéricos e teríamos que estabelecer o conceito de número antes de estabelecer o conceito essencial. A abordagem de Russell ou Frege, ao contrário, demanda uma visão ontológica universal e uniforme do mundo. A lógica teria que lidar diretamente com o universo. Como Frege colocou:

> se usarmos o símbolo A para designar um objeto, temos que ter um critério para decidir em todos os casos se B é o mesmo que o A, mesmo que não tenhamos sempre o poder de aplicar este critério. (Frege 1884, parágrafo 62) (devemos voltar a isto na sessão XII)

IX

Russell percebeu em 1900, depois de sua visita ao Segundo Congresso Internacional em Paris, que era um período de "excitação intelectual". Ele escreve: "Intelectualmente o mês de Setembro de 1900 foi o auge da minha vida" (Russell 1967, 145). É bem conhecido que a própria descoberta de Russell acerca da teoria dos conjuntos, um ano depois, traz ao fim a crença nas fundamentações lógicas. Durante a tentativa de resolver os problemas lógicos que surgiam deste esforço e trazer o programa de lógica ao final – uma tentativa que surgiu do trabalho monumental "Principia Matemática", que foi publicado entre 1910 e 1913 em três volumes – a lógica chegou a um ponto culminante, e simultaneamente sua crise, enquanto Russell se encontrou forçado a hipoteticamente aceitar axiomas não-lógicos como aqueles que garantem a existência de conjuntos infinitos. O que prova ser problemático, porém, é a concepção de conjunto em si, como uma coleção de qualquer coisa. Pelos paradoxos que ele descobriu, Russell se viu levado a encontrar o conceito da lógica do conjunto.

No que diz respeito à teoria, o paradoxo familiar de Russell pode ser evitado se distinguirmos, no senso do tipo de teoria, entre o conjunto e a totalidade de seus elementos, porque neste caso é verdade para cada conjunto que não é elemento dele mesmo, e de acordo com Russell "o conjunto de todos os conjuntos os quais não contém eles mesmos como elemento" seria o conjunto mais compreensivo e imaginável e representaria algo como um número cardinal maior. Tal conceito, porém, é contraditório. Cantor inferiu isto na base de seu próprio conjunto axiomático, e Leibniz conecta a questão do infinito com o problema do caráter contraditório de tais conceitos universais. Para colocar isso de forma geral: os nossos mais altos conceitos ou princípios não podem ser especificados ou definidos de maneira equivocada.

Em sua carta de julho de 1899, na qual Cantor apontou a Dedekind a inconsistência de sua fundamentação da aritmética, Cantor havia estabelecido o princípio do que pode ser chamado de conjunto ou "multiplicidade consistente" o qual se empresta para ser combinado a "uma coisa", enquanto ele chama multiplicidade "a proposição de que todos seus elementos estão juntos leva a uma contradição", sendo impossível conceber a multiplicidade como "uma coisa completa", totalmente finita ou de multiplicidades inconsistentes. Independente de Cantor, Russell chega a uma conclusão parecida, definindo conjuntos, como veremos, finalmente como extensões de funções proposicionais.

Dos objetos às relações ou funções proposicionais, da construção à dedução, e da intuição à linguagem, este é o caminho da filosofia matemática, a qual Russell representa de uma maneira exemplar. É assim que a linguagem e a fala tornaram-se as "condições de possibilidade de cognição", a última sendo apenas modificada lingüisticamente por Kant.

> A filosofia "analítica" é mais uma variante da filosofia de Kant, uma variante marcada principalmente por pensar na representação como lingüística mais do que mental, e da filosofia da linguagem mais do que uma "crítica transcendental", ou psicologia, como disciplina que exibe as "fundamentações do conhecimento". Esta ênfase na linguagem [...] não muda essencialmente a problemática de Cartesiana-Kantiana, e, portanto, não dá na verdade à filosofia uma nova auto-imagem. (Rotty 1979, p. 8)

Da teoria dos tipos de Russell que segue, como dissemos, conjuntos não podem simplesmente ser o que imagens de senso comum são e o que todos aprenderam na escola nos tempos dos movimentos reformatórios da "Nova Matemática". Embora Russell faça grande esforço em partes extensivas do livro para reduzir o conceito de número ao conceito de conjunto, tratando o último como conceito fundamental, a maneira que ele desenvolve sua argumentação mostra que a concepção tem que ser revisada. O último capítulo é sobre conjuntos, e nele a preocupação de Russell é "perceber porque as classes não podem ser vistas como parte do mundo [...] Não podemos ter classes no conceito de extensão puro simplesmente como conglomerações" (pp. 182-183). Se considerarmos os conjuntos de maneira extensiva como objetos, Russell acredita que seria impossível entender

> como podem existir conjuntos como os vazios, os quais não têm membros e não podem ser vistos como um "conglomerado"; nós devemos também achar difícil de entender como um conjunto que tem apenas um membro não é idêntico a esse membro. (p. 183)

Kurt Gödel considerou isto uma reação exagerada aos paradoxos, dizendo que a argumentação de Russell mostra, na melhor das hipóteses "que o conjunto vazio e o unitário são ficção, nem todos os conjuntos são ficções" (Gödel 1944, p. 141). Os dois conjuntos particulares mencionados acima podem ser tratados, Gödel continua, como os pontos do infinito em geometria, e como generalizações matemáticas. Isto, entretanto, iria requerer limites determinados historicamente como conceitos ou princípios gerais, como o princípio de continuidade, ou o princípio de permanência das relações, e nos levaria então a entender o contexto da teoria como algo primário e com fundamentação. Com isso, porém, nós devemos retornar a visão axiomática e temos que nos preocupar novamente em como Russell determina a aplicabilidade da teoria axiomática.

Durante o argumento de seu livro, Russell mudou gradualmente sua atitude realista bem como as entidades básicas de sua reconstrução tornam-se mais e mais "ficções lógicas". Em seu penúltimo capítulo, Russell define conjuntos como classes equivalentes de funções proposicionais. Tal definição poderia ser concebida como circular se assumíssemos que o conceito de função requer identidade. Uma função proposicional, Russell diz, é "uma função na qual valores são sentenças". Russell, por exemplo, define a classe zero como uma extensão da função proposicional contraditória, por exemplo, a função proposicional, a qual traz pontos contraditórios a este assunto. Aqui, a tentativa da precisão lógica causa a tendência de deixar as proposições de existência e noções ontológicas o mais para trás possível, ou eliminar a todas, e advogar uma visão intencional da teoria dos conjuntos.. o *status* ontológico destas intenções, conceitos ou funções, porém, continuam de alguma maneira não clara. No seu capítulo II, Russell expôs as vantagens de uma internacional concepção de conjuntos i. A mesma tendência, porém, caracterizada predominantemente pelo método axiomático, e, portanto a teoria dos conjuntos veio a ser axiomatizada por Zermelo, com o objetivo de excluir as formações paradoxais dos conjuntos. O problema das aplicações re-aparece.

Das relações e funções (da axiomática) aos objetos (conjuntos) e novamente de lá as funções (funções proposicionais): este é o caminho para demonstrar a busca desesperada das pessoas que trabalham com lógica a uma coisa dada e existente. Neste passo, para deixar as coisas ainda mais precisas, Russell às vezes se coloca em uma posição de empirismo extremo, uma que insiste olhar apenas a informação real.

> Aqui encontramos um desenvolvimento marcante no pensamento de Russell que durou duas ou três décadas. Uma epistemologia que parece direta é puxada pela lógica e uma teoria de significado é uma das mais diferentes teorias meta-físicas, já apresentadas. Nós a chamamos de "atomismo lógico". No início, Russell pensou que as coisas que conheço são os objetos imediatos da experiência. (Hacking 1975, 72)

Porém, ele finalmente termina com uma informação pura. Para mostrar sua opinião, Russell pega um pedaço de giz e diz: "Isto é branco [...] Eu não quero que vocês pensem neste pedaço de giz na minha mão, mas no que vocês vêem se direcionarem seu olhar a este pedaço de giz”. Hacking comenta o fato de que “isto” na fala de Russell “isto é branco” não tem a intenção de designar um objeto mas, uma informação física, indicando que Russell “quase adotou a posição de Berkeley” desta maneira. Russell, após ter chegado à posição de extremo empirismo, assume que objetos empíricos com cadeiras, mesas, etc,. apenas existem nas nossas mentes também. Isto é de alguma maneira o “sem Deus” de Berkeley e, portanto, sem ninguém mais que ainda percebe a mesa, então, dando existência a ela, depois que dei as costas a ela. A posição de Russell, pela sua falta do “Deus” de Berkeley, cuja existência convence duração ao mundo, é mais complicada ou forte que a de Berkeley.

X

Gostaríamos de discutir brevemente o último capítulo do livro sobre a relação entre matemática e lógica, antes de voltarmos à noção de conjunto de Russell. Este capítulo começa dizendo que

> matemática e lógica, historicamente falando, têm sido estudos inteiramente distintos. Matemática tem sido conectada com ciência, lógica com Grego. Mas ambas têm se desenvolvido nos tempos modernos: a lógica tem se tornado mais matemática, e a matemática tem se tornado mais lógica [...] As pessoas que trabalham com lógica ressentem esta visão já que gastaram tempo estudando textos clássicos e são incapazes de seguir um pedaço de raciocínio lógico, e pelos matemáticos que aprenderam a técnica sem perguntarem seu significado ou justificação. (p. 194)

Porém, é ainda mais verdade hoje que a filosofia da matemática significa algo diferente aos matemáticos e às pessoas que trabalham com lógica.

Frege trouxe a extensão da lógica, a qual forma a base de todo o trabalho de Russell através do desejo da noção matemática da função. Esta noção, por este motivo, oferece a oportunidade de estabelecer uma relação entre matemática e lógica, mesmo que seja verdade que, a linha que separa a matemática da lógica existe na matemática por um lado e na lógica por outro. Para a matemática e as ciências exatas o conceito das leis naturais resulta no caso protótipo de uma função. Para a lógica, contra isso, uma função é uma função proposicional ou uma fórmula algébrica.

Apesar destas intuições diferentes, faz sentido ilustrar a diferença entre matemática e lógica considerando a problemática do conceito de função. Este é um fato que a matemática tem estado preocupada desde o século 17 com grande ênfase em construir funções ainda mais lógicas. A matemática é, essencialmente pensamento relacional, e lógica, e não se começou a se modernizar antes de ter aprendido a matemática do século 19 para construir uma lógica de relações. Bolzano, de Morgan, e Jevons presumidamente foram os primeiros a tratar proposições como relações, ou funções.

Vamos falar das funções de uma maneira geral. Funções inicialmente eram correspondências simples entre um território de entradas, que é a área das funções dos argumentos, e uma área de valores da transformação funcional, o chamado co-domínio ou saídas. Funções proposicionais designam sentenças, julgamentos sobre coisas para coisas. Neste sentido, podemos considerar os conceitos como julgamentos abreviados, ou funções.

Porém, como o usuário de um programa de computador não está interessado nos detalhes de programação, mas na função fornecida, matemática, lógica e ciência estão sempre preocupadas em fazer uma dissociação das modalidades concretas pela qual uma função é dada. A matemática e a lógica trabalharam na elaboração de um conceito geral de função durante os séculos 18 e 19, até concluírem que entender uma função como uma classe de equivalência de representações concretas, as relações de equivalência dão dadas por "axiomas de extensionalidade". Este axioma diz que as funções são equivalentes se resultam no mesmo valor quando aplicadas aos mesmos argumentos. Apenas tais classes equivalentes de representações concretas podem ser atribuídas a propriedades importantes, por exemplo, propriedade de continuidade, de diferenciabilidade etc. (cf. Otte, 1994, capítulo X). E então somos capazes de definir operações lógicas e algébricas para tais classes. Desta maneira, as classes equivalentes tornam-se os objetos próprios da matemática e lógica. Este respectivo método de estabelecer funções ou conceitos em geral é chamado "definição por abstração".

Agora é possível ter a visão que, matemática tem essencialmente a ver com os objetos intencionais, objetos os quais são determinados conceitualmente pelas suas propriedades. Uma ou outra representação da função pode ser de importância particular, de acordo com um objetivo respectivo. Se eu tenho, por exemplo, duas visões de uma casa, e desejo saber como e a frente, parece que uma foto da parte da frente é bem mais útil do que uma do fundo. O mesmo é verdadeiro com os objetos ideais de ficção, lógica e matemática. Quais das propriedades são significativas para a representação de um “triângulo geral” na geometria elementar depende da tarefa. Já comentamos isso. E aí está todo o problema em encontrar uma representação específica de tal classe equivalente ou de um objeto ideal, equivalente de maneira extensiva, mas com representação intencionalmente diferente.

XI

Na apresentação de Frege sobre a distinção entre significado e referência, a mesma assimetria acontece a qual estabelecemos para o critério de identidade ou funções, e no qual a existência está baseada no que diz respeito aos argumentos e objetos, enquanto conceitos (intenções) ou funções meramente possuem uma identidade. Russell tratou este problema em partes no capítulo 16 de sua “Introdução”. Ele corrigiu e estendeu a interpretação de Frege de A = B, então A = A através da introdução de uma distinção entre designação e referência. Frege tratou a diferença entre estas duas formas de uma equação através de sua própria distinção entre senso e significado, concluindo funções de descrições singulares como designações que usualmente entendemos referencialmente. Russell considera isto um erro, porque

> uma proposição contendo uma descrição não é idêntica ao que a proposição se torna quando o nome é substituído, mesmo se o nome nomeia o mesmo objeto que a descrição descreve. “Scott é o autor de Waverley” (é obviamente uma proposição diferente), a de “Scott é Scott” (p.174). E mais do que isso: “Se ‘x’ é um nome, x = x não é a mesma proposição de ‘o autor de Waverley é o autor de Waverley’” (p. 176). x = x é sempre verdade porque x sendo um índice (um nome) é entendido mais como existência do que descrição. De fato, proposições da forma “o tal e tal é tal e tal” não são sempre verdadeiras: é necessário que o tal e tal exista. É falso dizer que o presente rei da França é o presente rei da França ou que um quadrado redondo é um quadrado redondo. (p. 176)

Falar de contradições não faz sentido sem falar da existência: unicórnios verdes são amarelos. Ou não são? Mesmo o paradoxo permanente dos habitantes de Creta ou a afirmação de Russell que “os barbeiros barbeiam aqueles que não barbeiam a si mesmos” podem ser reduzidos desta maneira aos problemas causados da ilegítima existência. (cf. L. Wen 2001). Nós não podemos gerar a existência de uma realidade objetiva através de conceitos e linguagem sozinhos, e sem esta realidade, não existem contrações também, Kant diria (cf. Crítica do Raciocínio Puro, B 622)

Russell obviamente passa aqui, no que diz respeito ao conceito de função na posição complementar extensiva também (ele havia falado sobre “os dois tipos de proposições funcionais que temos que fazer”). Em outros termos: o “ser” das funções agora depende da quantidade de documentos válidos, então supondo uma classificação objetiva na área funcional de aplicação. Na matemática clássica, uma teoria de funções, requer primeiro uma teoria de quantidades. A teoria dos tipos de Russell sozinha impõe restrições fortes às variáveis quantificadas. Na própria lógica (primeiro nível), os termos “todos” e “há” podem ser aplicados a objetos (variáveis de assunto), mas em nenhum caso variáveis predicadas (conceitos). Este requerimento não é satisfeito pelos axiomas de Peano, porque no seu quinto axioma ocorrem predicações sobre todas as propriedades.

Acima de todos, porém, Russell deseja ver estabilizado, antes de toda ciência e matemática, uma ontologia absoluta e universal, ver “o que há”. Este tipo de fundamentalismo é de natureza muito tradicional, e é tratado por Russell de uma maneira mais restritiva. Na matemática moderna, porém, a atividade é primária, não ontológica e Russell age desta maneira. Russell fica em silêncio no que diz respeito a suas proposições permanentes acerca da existência da identidade dos conceitos que ele emprega. As questões da ontologia são determinadas relativamente, com referência a uma atividade, a uma teoria. Conjuntos, funções, conceitos e outros não podem ser concebidos de uma maneira puramente extensional. A matemática foi, durante longos períodos, entendida de maneira construtiva.

Equações do tipo A = B só podem ser vistas no âmbito de um conceito, o problema da individualização não pode ser resolvido nem de uma maneira lógica pura nem de maneira empírica. A famosa teoria da descrição de Russell mostra que respostas de qualquer tipo poderiam ser dadas à questão “o que há”. Isto depende da perspectiva seguida. A teoria ou o sistema de descrições na verdade determina o que há, e o que é admitido como possível. Mas até mesmo a filosofia estruturalista da ciência assume que qualquer decomposição da experiência do nosso mundo em categorias ontológicas é uma teoria dependente, que se vê obrigada a aceitar, determinações pragmáticas. Vamos pegar a mecânica da partícula de Newton como exemplo:

> É claro que o termo puramente iniciado e formalmente caracterizado, como o da “partícula”, deve adicionalmente ter sido dado uma interpretação que é correta no que diz respeito ao seu conteúdo; as “partículas” mencionadas aqui devem representar partículas genuínas, e não almas apaixonadas. Porém: o que são partículas genuínas? [...] A resposta dada pela abordagem estruturalista é muito diferente. A primeira coisa estabelecida é que as teorias contêm intenções de aplicações como constituintes – no senso compreensivo da aplicação. [...] A partir daí segue o que a relação pragmática entre o assunto que tenta aplicar a teoria, e a teoria em si, a qual determina o que deve ser visto como objeto real ou genuíno. (Moulines 1994, 187f)

Já apontamos o exemplo do eletromagnetismo, e a re-interpretação do conceito de quantidade. Pessoas que trabalham com a lógica e matemática nunca operaram apenas em uma área objetiva e homogênea, mas tentam obter e abrir novas aplicações para suas estruturas. Ao serem perguntadas pelo que foram guiadas, as respostas mais freqüentes são: intuição, analogia, experiência, etc. E, com certeza, nós teremos entendido estes conceitos de maneira pragmática... o que é “intuitivo” em cada caso é relativo, e a experiência humana nunca pode ser representada em palavras.

Lógicos como Frege e Russell não querem se preocupar com a intuição. Se tivermos a intenção de formar classes de equivalência, porém, devemos introduzir uma perspectiva através da qual consideramos as coisas como similares ou equivalentes. Em um certo sentido tudo parece similar a tudo. Objetos ideais como números, energia, sociedade, etc. são nos dados através de uma atividade e algum sentimento de “similaridade” ou “igualdade das espécies”.

O conceito de similaridade, porém, resiste “a redução de conceitos menos dúbios como o da lógica ou teoria dos conjuntos” (Quine).

O assunto da matemática, sendo definido em termos de similaridade e diferenças, nos leva a introduzir divisões restritas e classificações. O pensamento de Aristóteles foi um enigma com duas orientações opostas. Aristóteles é comumente visto como um grande representante da lógica, e da matemática, que está na proposição da possibilidade de divisões claras e classificação rigorosa.

> mas esta é apenas metade da história sobre Aristóteles; e é questionado se é a metade mais importante. Porque é igualmente verdadeiro que ele primeiro sugeriu as limitações e perigos da classificação, e a não-conformidade da natureza acerca das divisões que são tão indispensáveis para linguagem [...] (Lovejoy 1964, 058),

e para matemática, como podemos adicionar.

XII

A lógica e matemática não diferem apenas em suas visões sobre matemática, mas suas visões diferem dentro da própria lógica também. Nós já falamos sobre isso nos exemplos dados por Russell, por um lado, e por Peano por outro, e chamamos estas duas orientações reducionismo da teoria dos conjuntos por um lado e axiomática por outro. J. Van Heijenoort caracterizou as duas diferentes concepções de lógica conectadas com estes diferentes programas de fundamentação. O primeiro considera lógica como universal o outro mais como parte de um cálculo algébrico no senso de Boole, Grassmann, ou Peano. Russell, que, como muitos outros autores foi influenciado fortemente por Frege, advoga a concepção de lógica como uma linguagem que se mantém inevitavelmente no nosso pensamento.

> A universalidade da lógica se expressa em uma característica importante no sistema de Frege. Como é bem conhecido, de acordo com Frege, o universo ontológico é dividido em objetos e funções. (Heijenoort 1967, 325)

A outra concepção de lógica não sabe a noção do universo ontologicamente fixado. Preferencialmente, a ontologia pode ser mudada.

> O universo do discurso compreende apenas o que concordamos considerar em um certo tempo, em um certo contexto. Para Frege não pode ser uma questão de mudar os universos. Não poderíamos nem dizer que estamos restringidos a um universo. Não necessariamente o universo físico, é claro, porque para Frege alguns objetos não são físicos. O universo de Frege consiste em tudo o que há, e é fixado. (Heijenoort 1967, 325)

Assim como havia duas visões da lógica no século 19, havia duas concepções diferentes do que podia ser chamada "fundamentação da matemática". Além, do movimento axiomático que teve seu clímax com o "Grundlagen der Geometrie" de Hilbert no ano de 1899, havia um movimento chamado de "rigor aritmético" que reduziu toda a matemática aos números. O foco de Russell, também, foi na direção da "compreensão do número" depois de 1897, como ele considerou aritmética uma fundamentação e o ponto de início de toda a matemática. Ele interpretou isto no sentido de que, o objetivo era reduzir matemática a lógica. Com isso, nós retornamos ao ponto de partida.

Isto nos dá uma oportunidade de resumir a apresentação da filosofia matemática de Russell em uma tese que coloca a filosofia matemática em um contexto mais epistemologicamente geral. A epistemologia de Russell, e em particular sua filosofia matemática, está baseada em todas as particularidades e dificuldades na tentativa de especificar o problema de aplicação e referência para a realidade da nossa cognição (matemática) de maneira *a priori*, e portanto, remover sua dinâmica independente e inseguranças do problema de aplicação. Isto reside na natureza de concepção do mundo. Ao contrário da matemática pura e do positivismo lógico, Russell está preocupado com sua aplicação. Porém, atribui prioridade absoluta à lógica, então eliminando o problema relacionado à troca entre cognição e realidade.

O efeito disto é que ler seus textos é instrutivo em dois sentidos, por suas conquistas e inovações lógicas e por suas deficiências e erros. Qualquer introdução à matemática e à filosofia matemática deve começar com um comentário sobre o projeto de Russell.

BIBLIOGRAFIA

BATESON, G. (1973). *Steps to an Ecology Mind.* Paladin, Frogmore UK.

BENACERRAF, P and PUTNAM, H. (eds.) (1983). *Philosophy of Mathematics.* Cambridge UP.

BOCHNER, S. (1966). *The Role of Mathematics in the Rise of Science.* Princeton, Pniceton University Press.

CARNAP, R. (1968). *The logical Structure of the World. London,* Routledge & Kegan Paul.

CASSIRER, E. (1907). *Kant und die moderne Mathematic.* Kantstudien Bd. 12.

________ (1962). *Leibniz' System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen.* Darmstadt, wissenschaftliche Buchgesellschaft.

CASARI, E. (1974). Axiomatical and Set-theoretical Thinking. *Synthese* 27.

DEDEKIND, R. (1969). *Was sind und was sollen die Zahlen?* Vieweg, Braunschweig.

FREGE, G. (1884). *Grundlagen der Arithmetik.* Breslau.

GÖDEL, K. (1944). "Russel's Mathematicl Logic". In: SCHILPP, PA. (hgb.). *The Philosophy of Living Philosophers.*

HACKING, I. (1975). *Why does Language Matters to Philosophy.* Cambridge University Press.

HEIJENOORT, J. (1967). Logic as Calculus and Logic as Language. *Synthese*, v 17, pp. 324-330.

HEINZMANN, G. (1993). *Zwischen Objektkonstruktion und Strukturanalyse.* Vandenoeck Ruprecht, Göttingen.

HEYTING, A. (1934). *Mathematische Grundlagenforschung, Instuitionismus. Beweistheorie*. Heidelberg, Springer Verlag.

HILBERT, D. (1964). Hilbertana. Wissenchaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.

HÖLDER, O. (1899). Anschauung und Denken in der Geometrie. Inauguration Lecture, Leipzig.

KORIAKO, D. (1999). *Kants Philosophie der Mathematik.* Hamburg, Meiner Verlag

KRAJEWSKI, W. (1977). *Correspondence Principle and Growth of Science.* Dorderecht, D. Reidel Publishing Company.

LOVEJOY, A. O. (1964). *The Great Chain of Being: A Study of the History of* an Idea, (The William James Lectures 1933). Harvard Univ. Pr, Cambridge, Mass.

MOULINES, C. U. (1994). "Wer bestimmt was es gibt?" In: Zeitschrift für philosophische Forschung, Bd. 2 (175-196).

OTTE, M. (1994). *Das Formale, das Soziale und das Subjektive.* Frunkfurt/M, Suhrkamp Verlag.

POTTER, M. (2000). Reasons Nearest Kin. Oxford University Press.

PUTNAM, H. (1967-1975). Mathematics without Foundations in ders. Mathematics, Matter and Method, CUP Cambridge

QUINE, W. V. (1960). *Word and Object.* Cambridge, The Mit Press.

RORTY, R. (1979). *Philosophy and the Mirror of Nature.* Princeton University Press.

RUSSEL, B. (1954). *The Analysis of Matter.* London, Allen & Unwin.

________ (1967). *The Autobiography of Bertrand Russell.* London, Allen & Unwin.

________ (1970). *Introduction to Mathematical Philosophy.* London, Allen & Unwin.

________ (1971). *Logic and Knowledge: Essays 1901-1950.* MARSH, R. C. (ed.). London, Allen & Unwin.

________ (1971a). *The ABC of Relativity.* London, Allen & Unwin.

________ (1973). *Essays in Analysis.* LACKEY, D. (ed.), London, Allen & Unwin.

________ (1985). *The Philosophy of Logical Atomism.* La Salle Open Court Publ. Co.

________ (1997). *The Problems of Philosophy.* Oxford University Press.

SALMON, W. C. (ed.) (1970). *Zeno's paradoxes.* Indianapolis, Ind. Bobbs-Merrill.

SCHLICK, M. (1979). *Allgemeine Erkenntnislebre.* Frankfurt/M. Suhrkamp Verlag, 1. Aufl. 1925

STRUBECKER, K. (hgb.) (1972). *Geometrie.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt

WEN, L. (2001). Semantic Paradoxes as Equations. *Math. Intelligencer,* v. 23, pp. 43-49.

Recebido em abr./2000; aprovado em jun./2000