

MIGRAÇÃO PRÉ-EMPILHAMENTO POR ROTAÇÃO DE FASE COM  
INTERPOLAÇÃO (PSPI) E APLICAÇÕES

Jan Maurice Brandão Vieira

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO  
DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL

Aprovada por:

---

Prof. Webe João Mansur, Ph.D.

---

Dr. Marcos Antonio Gallotti Guimarães, Ph.D.

---

Dr. Djalma Manoel Soares Filho, D.Sc.

---

Prof. Marco Antonio Cetale Santos, D.Sc.

---

Prof. Luis Volnei Sudati Sagrilo, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 2005

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

VIEIRA, JAN MAURICE BRANDÃO

Migração Pré-Empilhamento por Rotação de  
Fase com Interpolação (PSPI) e Aplicações

X, 58 p. 29.7 cm (COPPE/UFRJ, M. Sc.,  
Engenharia Civil, 2005)

Dissertação - Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE

1. Migração em Profundidade
2. Equação Escalar da Onda
3. Síntese de ondas planas

I.COPPE/UFRJ II.Título(série)

A minha família, pelo apoio à minha formação, em toda a minha vida.  
A Tati, pela paciência e presença quase física durante a fase mais dura do trabalho.

# Agradecimentos

Aos meus orientadores, pelo tema sugerido e por acreditar no sucesso do meu trabalho.

Aos amigos da UFF e derivados, Carla, Julia, Renata, Mosquera, Coutinho, entre vários outros, pela amizade e pela cumplicidade em todos esses anos de estudo.

Aos amigos do LAMEC, pela amizade e pelos debates quase sempre construtivos e de muito valor, especialmente ao Cleberon, pela imensa contribuição teórica e prática, fundamental para a evolução da pesquisa.

A todos aqueles que, durante o longo período do curso, me classificaram como “louco”, “nerd”, “cabeçudo”, “coitado” e até “maníaco”, mas sempre com carinho e admiração.

À Irene, minha mãe, pelos conselhos, pelas broncas, pela sabedoria, pelo enorme carinho e pela casa, comida e roupa lavada na maior parte da minha vida.

Ao Carlos Alberto, meu Pai, por participar deste projeto de vida que o Mestrado representa.

À Tati, por ser como é.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.).

MIGRAÇÃO PRÉ-EMPILHAMENTO POR ROTAÇÃO DE FASE COM  
INTERPOLAÇÃO (PSPI) E APLICAÇÕES

Jan Maurice Brandão Vieira

Dezembro / 2005

Orientadores: Webe João Mansur

Marcos Antonio Gallotti Guimarães

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho aborda um método de migração sísmica baseado na equação escalar da onda. É desenvolvido um algoritmo para realização de migração pré-empilhamento em profundidade no domínio F-K, utilizando rotação de fase com interpolação - PSPI. O método também é testado em associação à técnica de síntese de ondas planas como fontes, ou migração multifocal.

Para preparação dos dados sísmicos, foram utilizados recursos do pacote Seismic Unix, bem como um programa de modelagem por Diferenças Finitas.

O código computacional desenvolvido para efetuar migração foi testado em modelos sintéticos, sendo dois de utilidade meramente acadêmica, devido à sua simplicidade, e o modelo Marmousi, que possui estrutura complexa, impondo ao programa dificuldades iguais ou maiores do que as que se pode encontrar em levantamentos reais.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.).

PRÉ-STACK PHASE SHIFT PLUS INTERPOLATION (PSPI)  
MIGRATION AND APLICATIONS

Jan Maurice Brandão Vieira

December / 2005

Advisors: Webe João Mansur

Marcos Antonio Gallotti Guimarães

Department: Civil Engineering

This work deals with a method for seismic migration based on the scalar wave equation. An algorithm for pre-stack F-K domain migration is developed, using PSPI - phase shift plus interpolation. The method is also evaluated in association with the plane wave-front synthesis technique.

Seismic data was prepared with the Seismic Unix package as well as with a Finite Diference modelling program.

The computational code developed to perform migration was tested with two synthetic academic models and with the Marmousi model, a synthetic complex one, which imposes real-like difficulties to it.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	<b>6</b>
2.1	O Refletor Explosivo . . . . .	6
2.2	Modelagem e Migração . . . . .	7
2.3	Modelagem por Traçado de Raios . . . . .	9
2.4	Modelagem por Diferenças Finitas . . . . .	11
2.4.1	Operador de Diferenças Finitas . . . . .	12
2.4.2	Condições de Contorno . . . . .	15
2.4.3	Fonte Sísmica e Espaçamento da Malha . . . . .	17
2.4.4	Exemplos . . . . .	22
2.5	Migração por Rotação de Fase com Interpolação . . . . .	26
2.5.1	<i>Pós-Stack</i> ou <i>Pré-Stack</i> ? . . . . .	29
2.5.2	Imageamento . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Procedimentos</b>	<b>35</b>
3.1	Modelo sintético de 3 camadas homogêneas . . . . .	35
3.2	Modelo Sintético nº 2: inserindo dificuldades . . . . .	37
3.3	Marmousi . . . . .	38
3.4	Síntese de ondas planas . . . . .	41
3.4.1	Modelo sintético de 3 camadas homogêneas . . . . .	42

3.4.2 Marmousi . . . . .	42
<b>4 Observações</b>	<b>48</b>
<b>5 Conclusões</b>	<b>51</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>54</b>
<b>A Interpolação Linear</b>	<b>58</b>

# Lista de Figuras

2.1	Refletor explosivo . . . . .	7
2.2	Traçado de Raios . . . . .	10
2.3	Modelo de velocidades e sismograma do tiro central . . . . .	11
2.4	Fonte sísmica no domínio do tempo, corte em 80 Hz. . . . .	18
2.5	Fonte sísmica domínio da frequência, corte em 80 Hz. . . . .	18
2.6	Propagação de onda sísmica. Frequência de corte de 60 Hz. . . . .	19
2.7	Propagação de onda sísmica. Frequência de corte de 80 Hz. . . . .	20
2.8	Propagação de onda sísmica. Frequência de corte de 120 Hz. . . . .	21
2.9	$f_{corte} = 60Hz$ , $fat = 0.0$ e $fat = 0.15$ , respectivamente. . . . .	23
2.10	$f_{corte} = 60Hz$ , $fat = 0.30$ , com e sem onda direta. . . . .	24
2.11	$f_{corte} = 80Hz$ , $fat = 0.0$ e $fat = 0.15$ , respectivamente. . . . .	24
2.12	$f_{corte} = 80Hz$ , $fat = 0.30$ , com e sem onda direta. . . . .	25
2.13	$f_{corte} = 120Hz$ , $fat = 0.0$ e $fat = 0.15$ , respectivamente. . . . .	25
2.14	$f_{corte} = 120Hz$ , $fat = 0.30$ , com e sem onda direta. . . . .	26
2.15	Fluxograma de Migração PSPI Pré-Empilhamento. . . . .	34
3.1	Modelo de velocidades - camadas homogêneas . . . . .	36
3.2	Migração do tiro central e emp. de 10 tiros - cam. homog. . . . .	36
3.3	Modelo de velocidades e sismograma do tiro central - modelo 2 . . . . .	38
3.4	Migração do tiro central - modelo 2 . . . . .	39
3.5	Empilhamento de 25 tiros migrados - modelo 2 . . . . .	39
3.6	Modelo de velocidades - Marmousi . . . . .	40

3.7	Empilhamento de 192 tiros - Marmousi . . . . .	44
3.8	Empilhamento de 192 tiros filtrados - Marmousi . . . . .	44
3.9	Síntese horizontal de 17 tiros - cam. homogêneas . . . . .	45
3.10	Síntese com rotação horária de $13,5^\circ$ - cam. homogêneas . . . . .	45
3.11	Síntese com rotação anti-horária de $13,5^\circ$ - cam. homogêneas . . . . .	46
3.12	Soma das 3 migrações de síntese - camadas homogêneas . . . . .	46
3.13	Síntese de 192 tiros - Marmousi . . . . .	47
3.14	Síntese de 192 tiros filtrados - Marmousi . . . . .	47

# Capítulo 1

## Introdução

Os métodos sísmicos são cada vez mais utilizados na indústria do petróleo para localizar reservas de hidrocarbonetos por todo o mundo, que são cada vez menores, mais raras, e mais difíceis de serem encontradas. Por isso, tais métodos estão em constante aprimoramento e sempre utilizando os avanços tecnológicos disponíveis. Com alguns destes métodos, é possível obter imagens da geologia em subsuperfície, através da análise de coeficientes de reflexão, determinando assim algumas propriedades geológicas do subsolo que podem indicar a presença ou não de formações favoráveis ao acúmulo de hidrocarbonetos.

Os eventos registrados em uma seção sísmica não mostram diretamente o correto posicionamento das estruturas em subsuperfície, já que o meio em questão possui gradientes de velocidade em todas as direções, camadas geológicas com inclinações variantes, e mudanças bruscas de propriedades, como em falhas, por exemplo.

A migração sísmica é a etapa do processamento sísmico em que dados de reflexões sísmicas registrados, comumente na superfície, são extrapolados em direção ao interior do meio geológico, com o objetivo de se posicionar corretamente as origens dos eventos registrados, para então tirar imagens deste meio.

Na tentativa constante de chegar a melhores resultados neste processo, diversos métodos foram empregados, ao longo da história. Na década de 60, com o surgimento do processamento digital, hoje indispensável à área, eram utilizados métodos estatísticos, que levavam em consideração as difrações e interferências entre as frentes de onda. Já na década de 70, Jon Claerbout introduziu a idéia de se resolver a equação da onda, como forma de mapear o subsolo. Foi quando algoritmos utilizando operadores de diferenças finitas entraram, para não mais sair, na sismica de reflexão. No decorrer da década de 70 surgiram algumas importantes técnicas de migração, até hoje utilizadas. É o caso, por exemplo, da migração Kirchoff, introduzida por French (1974, 1975) e aprimorada por Schneider (1978), que possui baixo custo computacional e é capaz de migrar estruturas com um pequeno grau de complexidade.

Ainda em 1978, Stolt, baseado no modelo do refletor explosivo de Loewenthal e seus colaboradores (1976), deu início ao estudo da propagação do campo de ondas no domínio da frequência-número de onda, criando o método de Migração ( $F - K$ ), que é baseado na solução exata da equação da onda e, fazendo a extrapolação do campo de ondas em um único passo, é bastante estável e rápido. Sua principal deficiência é o fato de só realizar a migração considerando uma velocidade constante para todo o meio.

O método de Phase Shift, de Gazdag (1978), é uma evolução ao método de Stolt. Nele a extrapolação do campo se dá em vários pequenos passos na direção vertical, tornando possível a variação vertical da velocidade a cada incremento em profundidade. Porém, o método não é capaz de lidar com variações laterais da velocidade.

Para superar esta limitação, Yilmaz (1980) propôs uma extensão do Phase Shift, em que o operador de rotação de fase é baseado na equação DSR (*double square root*), que, como diz seu nome, possui duas raízes quadradas, e que

extrapola todos os afastamentos e CMP's simultaneamente.

Mas o método baseado no deslocamento de fase que mais se popularizou foi o proposto por Gazdag e Sguazzero (1984), conhecido por Rotação (ou deslocamento) de Fase com Interpolação, que faz a extrapolação do campo de ondas em duas etapas. A primeira, no domínio do espaço-freqüência, utiliza o valor real da velocidade para realizar um passo em profundidade da propagação da onda. A segunda, no domínio da freqüência-número de onda, utiliza duas ou mais velocidades de referência para realizar correções horizontais do deslocamento do campo, e depois interpola os campos obtidos com cada uma das velocidades.

Esta dissertação aborda o estudo desta que é uma das técnicas de migração de dados sísmicos, mais utilizadas atualmente, devido à sua eficiência e precisão, seja em sua forma básica ou em alguma de suas possíveis variações.

Ainda, a utilização da migração pré-empilhamento veio para melhorar os resultados anteriores, fornecendo uma solução que dispensa a aproximação da seção CMP, necessária para a migração pós-empilhamento, e com aumento da relação sinal/ruído, devido ao cancelamento de parte do ruído por soma aleatória.

Na migração pré-empilhamento abordada nesta dissertação, é estimada a resposta impulsiva do meio geológico, sendo a imagem gerada a partir desta estimativa.

Com o objetivo de se aproveitar das vantagens da migração pré-empilhamento, mas com custo computacional da mesma ordem da migração pós-empilhamento, vem sendo estudada também a técnica de migração de sínteses de frentes de onda, como pode ser visto em [2], [3], [6], [9], [13] e [19]

Esta técnica é baseada na reconstrução de frentes de onda pela superposição de frentes de onda esféricas, e foi considerada como alternativa na exploração sísmica inicialmente por Taner (1976). Posteriormente, Schultz e

Claerbout (1978) deduziram uma forma de se observar coeficientes de reflexão dependentes do ângulo de incidência da onda, através da síntese de uma onda plana inclinada. Em 1992, Berkhout apresentou uma técnica otimizada de iluminação, sintetizando uma onda plana numa profundidade específica. Com isto, a síntese de frentes de onda voltou a ser foco de grande atenção de pesquisadores da área.

A pesquisa relativa à presente dissertação teve como objetivos principais:

- Desenvolvimento de código computacional capaz de executar migrações de dados sísmicos bidimensionais empilhados (seções *zero-offset*), baseado na metodologia de rotação de fase com interpolação;
- Extensão do código desenvolvido para migração pré-empilhamento no domínio do tiro;
- Teste da eficiência do método com modelos geológicos complexos;
- Exploração da flexibilidade do método, promovendo variações em diferentes etapas do processamento.

No Capítulo 2 do presente trabalho é descrito o modelo do refletor explosivo no qual se baseia a migração por rotação de fase. É também dada uma breve explicação do significado e da utilidade de duas importantes etapas do processamento sísmico: a Modelagem e a Migração. Em seguida, são dados os parâmetros e fundamentos teóricos para os métodos de modelagem por Traçado de Raios e por Diferenças Finitas, utilizados na preparação dos dados sísmicos que serviram de entrada para a migração.

Ainda neste capítulo, é descrito o método de Rotação de Fase com Interpolação além de sua particularização para migração pré-empilhamento, com ênfase para a correlação cruzada dos campos da fonte e dos receptores e aplicação da condição de imagem.

No Capítulo 3, é relatado o desenvolvimento prático do estudo e os resultados alcançados com o código desenvolvido para migração PSPI pré-empilhamento são demonstrados, com dois modelos sintéticos de utilidade meramente acadêmica e com o modelo Marmousi, conhecido modelo sintético possuidor de irregularidades intencionalmente inseridas, com o objetivo de testar o comportamento de métodos de modelagem e migração em situações extremas.

Nesta capítulo também é descrito o princípio da migração de sínteses de frentes de onda e são demonstrados resultados de testes com esta técnica.

No Capítulo 4 são feitas algumas observações sobre o desenvolvimento da pesquisa e sobre particularidades das técnicas utilizadas.

No Capítulo 5, são expostas as conclusões a que se chegou e dadas algumas sugestões para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Fundamentação Teórica

### 2.1 O Refletor Explosivo

A propagação de ondas sísmicas pode ser analisada de diversas formas. Uma das mais comuns, o tratamento através da equação da onda, pode ser utilizada lançando-se mão de uma analogia bastante simples. A figura 2.1 mostra esquematicamente esta analogia, que dá origem ao modelo do refletor explosivo ([10]).

Na primeira situação, o caso real, uma fonte impulsiva é detonada na superfície e um detector (geofone) registra o retorno das reflexões da onda gerada. A superposição da fonte e do receptor caracteriza a construção de uma seção zero-offset.

No segundo caso, os receptores são colocados na superfície e as fontes são supostamente colocadas sobre os refletores. Em um determinado instante (o instante inicial da análise) os refletores “explodem”, gerando ondas impulsivas que sobem até a superfície, sendo então registradas pelos receptores.

Pode-se observar pelas figuras que os raios que representam as frentes de onda percorrem os mesmos caminhos, obviamente com as mesmas velocidades. Desta forma, a única diferença quantitativa entre os dois casos é que no segundo a onda percorre a metade da distância (apenas subida), natural-

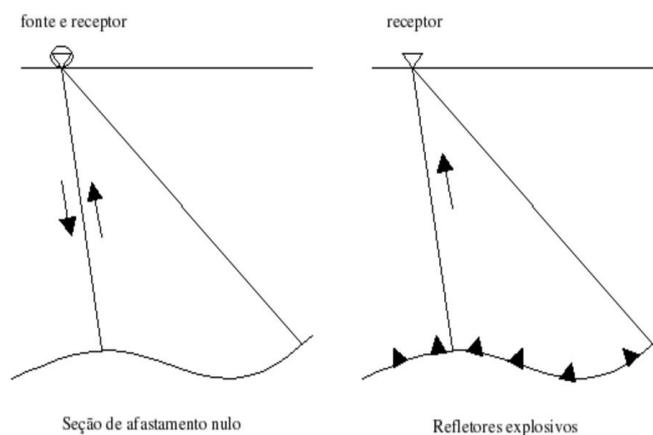


Figura 2.1: Refletor explosivo

mente na metade do tempo. Para efeitos práticos, utiliza-se o princípio do refletor explosivo com a *meia velocidade*, ou seja, considerando-se a velocidade sempre com a metade do seu valor, de modo que a onda irá percorrer a metade da distância, no mesmo tempo em que percorreria a distância completa no caso real.

## 2.2 Modelagem e Migração

A obtenção dos dados sísmicos é feita de variadas formas, mas basicamente, pode ser definida como o registro das chegadas de frentes de onda, geradas por uma ou mais fontes na superfície e refletidas nas interfaces do meio, como ilustrado na figura 2.1.

Estes registros nada mais são do que vibrações ou deslocamentos do meio nos pontos onde se localizam os detectores, os chamados *eventos*, ocorridos em determinados intervalos de tempo.

Assim sendo, os registros sísmicos, ou *sismogramas*, são seções temporais, relacionadas às posições das fontes e dos receptores, que fornecem a intensidade das perturbações que chegam aos receptores em cada instante.

Estes sismogramas podem também ser gerados de forma sintética, com o objetivo de se estudar etapas do processamento sísmico, promovendo-se uma simulação da situação real. A esta técnica de geração de sismogramas sintéticos deu-se o nome de Modelagem, e ela pode ser física, simulando-se as condições geográficas e geológicas em um tanque ou similar, ou numérica, simulando-se as mesmas condições em programas de computador. Nesta pesquisa, todos os procedimentos desenvolvidos foram numéricos. Além do desenvolvimento do algoritmo de migração com PSPI[16], foram utilizados ainda modelagem por Traçado de Raios, utilizando o programa *Cshot*, incluído no pacote gratuito *Seismic Unix*, da Colorado School of Mines e modelagem pelo Método das Diferenças Finitas[11]<sup>1</sup>.

A variação da velocidade da onda no meio faz com que esta seja refratada, modificando sua direção de propagação por diversas vezes durante o percurso. Mudanças abruptas na geologia do meio podem causar também difrações. O processo de migração se caracteriza pelo colapso das difrações e retorno das reflexões registradas às suas origens, resultando no correto posicionamento dos refletores e difratores. Pode ser feito em tempo ou em profundidade, sendo que a migração em tempo é menos afetada por erros na estimativa do modelo de velocidades, porém os resultados precisam ainda ser convertidos para a profundidade para que se possa obter a imagem “fonográfica” do meio geológico em estudo. No caso da migração em profundidade, essa conversão já se dá automaticamente durante o processo. Métodos de migração em profundidade, como o de rotação de fase, podem fornecer imagens com grande qualidade dos meios geológicos, como se pode verificar em [5], [8], [12], [14], entre outros, e como será demonstrado neste trabalho.

Conceitualmente, a migração é o processo inverso à modelagem. Isso fica

---

<sup>1</sup>Programa de modelagem baseado no algoritmo proposto por Cohen e Joly[11], desenvolvido e gentilmente cedido por Cleberson Dors.

claro ao pensarmos nos dois processos utilizando o modelo do refletor explosivo. Por esse modelo, ondas geradas nos refletores irão se propagar em direção à superfície e serão registradas nos receptores, fornecendo sismogramas. Isso caracteriza a modelagem. Através da migração, essas ondas serão depropagadas, retornando aos refletores e possibilitando o imageamento dos mesmos.

Diversos métodos de migração sísmica já foram testados, comparados e utilizados na indústria de petróleo. Dentre eles, os métodos que trabalham no domínio da frequência possuem a conveniência de facilitar o processamento em paralelo (em clusters de computadores) aproveitando ao máximo o desempenho das máquinas, já que cada frequência pode ser migrada independentemente. Essa é uma das mais importantes vantagens dos métodos no domínio de Fourier, pois este recurso é bastante utilizado atualmente, tanto na indústria quanto em pesquisa. Dos métodos no domínio da frequência, o de migração por rotação de fase [15] é o que dá mais possibilidades de aprimoramentos, seja no tempo de processamento, seja no tratamento das variações laterais de velocidade ou até mesmo em meios com características geológicas mais específicas (meios complexos). Alguns destes aprimoramentos já foram desenvolvidos, como por exemplo o próprio método de migração por rotação de fase com interpolação[16], estudado nesta pesquisa, o método de migração por mudança de fase em duas etapas, ou Split Step[14], e o de migração por rotação de fase para meios localmente transversalmente isotrópicos (LTI)[8].

## 2.3 Modelagem por Traçado de Raios

Os testes de migração com modelos mais simples foram realizados sobre sismogramas gerados por Traçado de Raios (*Ray Tracing*) com o programa

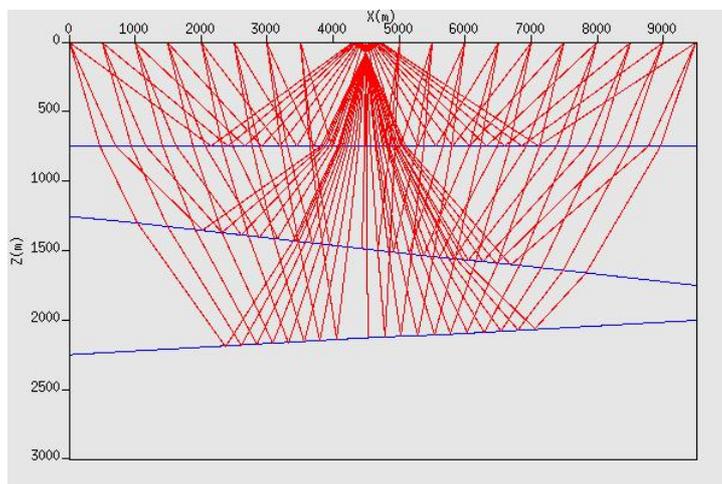


Figura 2.2: Traçado de Raios

Cshot, integrante do pacote gratuito Seismic Unix, da Colorado School of Mines.

A figura 2.2 ilustra o conceito do traçado de raios. É calculada a trajetória dos raios normais à frente de onda, desde a fonte até os refletores, e destes até os receptores, aqui dispostos na superfície.

Sobre o modelo da figura 2.3 foram gerados 10 sismogramas, com os pontos de tiro distribuídos na superfície. O sismograma mostrado foi gerado com o tiro central, e receptores na superfície, um por traço, a cada 5 metros. O grid, de 200x256 pontos, cobre uma área de 1000x1280 metros.

O tempo de amostragem foi de 1.024 segundos, com intervalo de tempo de 0.002 segundos, gerando um total de 512 amostras por traço, como visto na figura 2.3. A fonte, gerada internamente pelo programa, é um pacote de onda (*wavelet*) de 25 ms de duração, formado por um filtro de banda limitada com frequências 10-25-35-50 Hz.

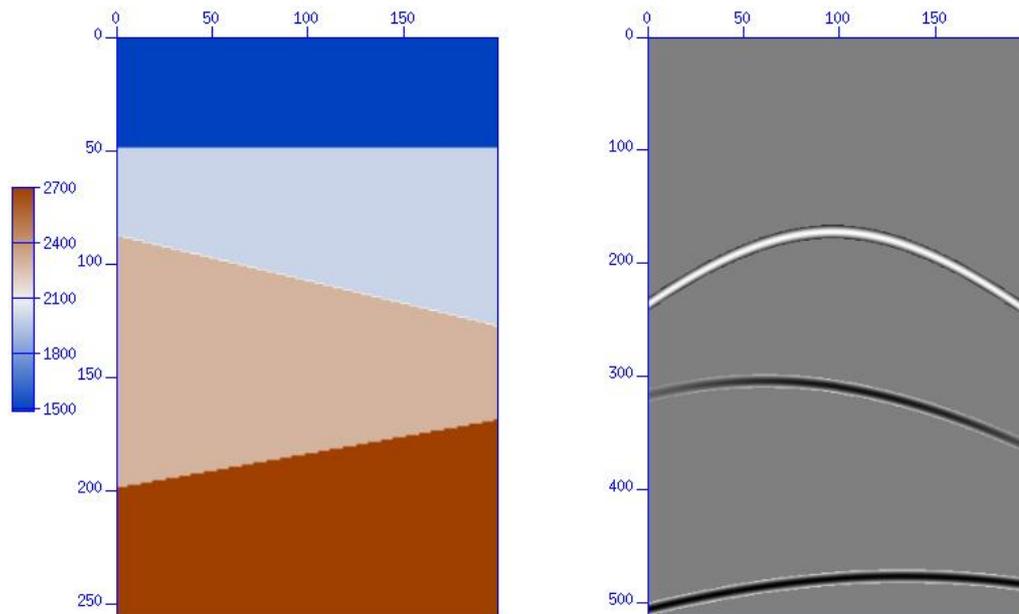


Figura 2.3: Modelo de velocidades e sismograma do tiro central

Foram registradas apenas as reflexões primárias.

Este método gera sismogramas bastante “limpos” ou seja, com um mínimo de ruídos e sem reflexões indesejadas nos limites do modelo, porém, o programa Cshot possui o inconveniente de não possibilitar a modelagem sobre qualquer modelo, já que o mesmo é construído durante o processamento, e apenas com camadas homogêneas, o que inviabiliza a utilização de modelos complexos.

## 2.4 Modelagem por Diferenças Finitas

Todos os procedimentos realizados neste trabalho consideram a propagação de ondas acústicas. Logo, na modelagem por Diferenças Finitas buscou-se também a resolução da equação escalar da onda, ou seja, considerou-se apenas a propagação de ondas compressoriais (ondas P).

### 2.4.1 Operador de Diferenças Finitas

A idéia principal do Método das Diferenças Finitas é a de se representar de forma discretizada o meio físico a ser estudado, bem como o tempo de análise, no caso de um problema dinâmico.

Se o fenômeno a ser analisado for governado por uma equação diferencial, busca-se representar as derivadas desta equação por aproximações matemáticas, resultantes do truncamento de uma expansão em série de Taylor.

A expansão de uma função  $p$  em série de Taylor, em uma direção, em torno da posição  $i$ , é descrita por

$$p_{i+1} = p_i + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \frac{\Delta x^3}{6} + \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} \frac{\Delta x^4}{24} + \dots \quad (2.1)$$

onde  $\Delta x$  é o incremento espacial, que caracteriza a discretização.

A primeira derivada espacial da função  $p$  pode então ser calculada por

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \frac{\Delta x}{2} - \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \frac{\Delta x^2}{6} - \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} \frac{\Delta x^3}{24} + \dots \quad (2.2)$$

Desprezando-se os termos de ordem igual ou superior a  $\Delta x$ , ficamos com a aproximação de primeira ordem para a derivada primeira espacial da função  $p$  por diferença progressiva,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (2.3)$$

De forma análoga pode-se chegar à expressão referente à diferença regressiva,

$$p_{i-1} = p_i - \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} - \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \frac{\Delta x^3}{6} + \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} \frac{\Delta x^4}{24} + \dots \quad (2.4)$$

e novamente obter a derivada de  $p$  em torno de  $i$ ,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \frac{\Delta x}{2} - \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \frac{\Delta x^2}{6} + \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} \frac{\Delta x^3}{24} + \dots \quad (2.5)$$

ou, após o truncamento,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (2.6)$$

Ainda, somando-se as equações 2.2 e 2.5, o termo da segunda derivada na série de Taylor se cancela, e, teremos a aproximação da derivada primeira espacial por diferença central, cujo erro é de segunda ordem,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (2.7)$$

Para se obter a aproximação de segunda ordem da derivada segunda de  $f$  em relação a  $x$ , subtrai-se 2.2 de 2.5, chegando a

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (2.8)$$

Uma aproximação de quarta ordem pode ser obtida truncando-se a série de Taylor após o termo de derivada quarta nas equações 2.1 e 2.4.

A derivada quarta é escrita em função da expressão obtida para a derivada segunda:

$$\frac{\partial^4 p}{\partial x^4} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{\Delta x^2} \right) \quad (2.9)$$

o que fornece

$$\frac{\partial^4 p}{\partial x^4} = \frac{p_{i+2} - 4p_{i+1} + 6p_i - 4p_{i-1} + p_{i-2}}{\Delta x^4}. \quad (2.10)$$

Finalmente, somando-se as equações 2.1 e 2.4, substituindo-se a derivada de quarta ordem pela expressão acima e isolando-se a derivada de segunda ordem, chegaremos a

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{-p_{i+2} + 16p_{i+1} - 30p_i + 16p_{i-1} - p_{i-2}}{16\Delta x^2} + O(\Delta x^4). \quad (2.11)$$

Esta aproximação de quarta ordem pode ser estendida ao caso bidimensional, com uma forma algébrica para a derivada em cada direção:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{-p_{i+2,j} + 16p_{i+1,j} - 30p_{i,j} + 16p_{i-1,j} - p_{i-2,j}}{16h^2} \quad (2.12)$$

e

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{-p_{i,j+2} + 16p_{i,j+1} - 30p_{i,j} + 16p_{i,j-1} - p_{i,j-2}}{16h^2} \quad (2.13)$$

onde  $\Delta x = \Delta z = h$ .

A derivada temporal pode ser escrita como a aproximação de segunda ordem, de forma análoga à derivada espacial,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{p_{i,j}^{k+1} - 2p_{i,j}^k + p_{i,j}^{k-1}}{\Delta t^2}, \quad (2.14)$$

e assim podemos resolver a equação escalar da onda,

$$\frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2(x, z)} \frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial t^2} = f(x, z, t) \quad (2.15)$$

como uma equação algébrica.

Substituindo-se as equações 2.12, 2.13 e 2.14 em 2.15, teremos

$$p_{i,j}^{k+1} = 2p_{i,j}^k - p_{i,j}^{k-1} + \frac{v_{i,j}^2 \Delta t^2}{12h^2} \left[ -60p_{i,j}^k - p_{i+2,j}^k + 16p_{i+1,j}^k + 16p_{i-1,j}^k \right. \\ \left. - p_{i-2,j}^k - p_{i,j+2}^k + 16p_{i,j+1}^k + 16p_{i,j-1}^k - p_{i,j-2}^k \right] + f_{i,j}^k \quad (2.16)$$

onde  $v$  é a matriz que contém o grid de velocidades e  $f$  é o termo da fonte sísmica aplicada.

## 2.4.2 Condições de Contorno

Na superfície do modelo, podem ser aplicadas as condições de contorno natural (Condição de Dirichlet) e essencial (Condição de Newmann). A condição de contorno natural é definida pela prescrição de um valor nulo para a pressão acústica, em todos os pontos da superfície e em todos os instantes de tempo,

$$p_{i,1}^k = 0. \quad (2.17)$$

Já a condição de contorno essencial prediz o valor nulo para a derivada espacial da pressão acústica, na direção normal à superfície,

$$\frac{\partial p^k}{\partial z_{i,1}} = 0. \quad (2.18)$$

Para a implementação desta última, foi criada uma linha de pontos fictícios, ou seja, inexistentes no modelo físico, para que se pudesse então utilizar a aproximação de primeira ordem para a derivada primeira (eq. 2.3). Assim sendo, a aplicação desta condição de contorno se deu pela equação

$$p_{i,j=1}^k = p_{i,j=0}^k \quad (2.19)$$

Nas interfaces laterais e inferior (fundo) do modelo, foram usadas condições de contorno não-reflexivas[23], que descrevem o comportamento da pressão acústica nas interfaces através da equação da onda em uma direção,

$$\frac{\partial p^k}{\partial x_{i=1,j}} = -\frac{1}{v_{i=1,j}} \frac{\partial p^k}{\partial t_{i=1,j}} \quad (2.20)$$

para a borda lateral direita, e

$$\frac{\partial p^k}{\partial x_{i=n_i,j}} = \frac{1}{v_{i=n_i,j}} \frac{\partial p^k}{\partial t_{i=n_i,j}} \quad (2.21)$$

para a borda lateral esquerda.

Analogamente, para o fundo do modelo,

$$\frac{\partial p^k}{\partial z_{i,j=n_j}} = \frac{1}{v_{i,j=n_j}} \frac{\partial p^k}{\partial t_{i,j=n_j}}. \quad (2.22)$$

Utilizando a aproximação de primeira ordem para as derivadas (eq. 2.3), teremos

$$p_{n_i,j}^k = \frac{h}{v_{n_i,j} \Delta t} (p_{n_i,j}^k - p_{n_i,j}^{k-1}) + p_{n_i,j+1}^k \quad (2.23)$$

para a borda lateral direita,

$$p_{1,j}^k = -\frac{h}{v_{1,j} \Delta t} (p_{1,j}^k - p_{1,j}^{k-1}) + p_{1,j+1}^k \quad (2.24)$$

para a borda lateral esquerda, e

$$p_{i,n_j}^k = \frac{h}{v_{i,n_j} \Delta t} (p_{i,n_j}^k - p_{i,n_j}^{k-1}) + p_{i+1,n_j}^k \quad (2.25)$$

para o fundo do modelo.

Para estas interfaces em que reflexões eram indesejadas foram utilizadas, além das condições de contorno não-reflexivas, zonas de amortecimento, em que a amplitude da onda sofre um decaimento exponencial, antes de alcançar as bordas do modelo.

Neste trabalho, o amortecimento obedeceu à equação[7]

$$w(k) = e^{[-fat(n_{am}-k)^2]} \quad (2.26)$$

onde  $k$  é um índice diretamente proporcional à distância do ponto do grid à borda mais próxima do modelo;  $fat$  é o fator de amortecimento;  $n_{am}$  é o número de pontos de cada camada de amortecimento (uma camada para cada interface); e  $w$  é o fator ao qual as amplitudes da pressão acústica serão multiplicadas, para que sejam amortecidas.

### 2.4.3 Fonte Sísmica e Espaçamento da Malha

A fonte sísmica utilizada na modelagem foi uma fonte explosiva. Matematicamente, esta fonte é representada pela segunda derivada temporal da função Gaussiana [12],

$$f(t) = [1 - 2\pi(\pi f_c t)^2] e^{-\pi(\pi f_c t)^2} \quad (2.27)$$

onde  $t$  é o tempo e  $f_c$  é um parâmetro que está relacionado à frequência de corte por

$$f_{corte} = 3\sqrt{\pi}f_c. \quad (2.28)$$

No domínio da frequência, a segunda derivada da função Gaussiana é representada pela expressão

$$F(f) = \frac{2f^2}{\pi^2 f_c^3} e^{-\frac{f^2}{\pi f_c^2}} \quad (2.29)$$

As figuras 2.4 e 2.5 mostram a forma desta fonte explosiva, no domínio do tempo e no domínio da frequência, respectivamente, para uma frequência de corte de 80 Hz, valor preferencialmente utilizado para a modelagem durante esta pesquisa.

A escolha da frequência máxima no espectro da fonte, a frequência de corte, está relacionada ao alcance da onda sísmica, que é maior quanto menor for sua frequência, à definição da imagem obtida das reflexões, que aumenta com a frequência (figuras 2.6, 2.7 e 2.8), e ao erro decorrente do cálculo numérico das derivadas, a dispersão numérica.

Pelo teorema da amostragem, uma boa amostragem do campo de ondas pode ser obtida com um espaçamento que obedeça à restrição

$$h \leq \frac{\lambda_{min}}{2} \quad (2.30)$$

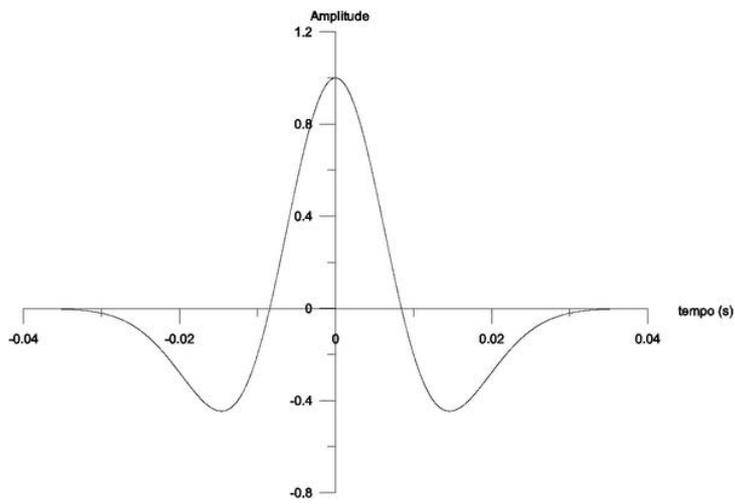


Figura 2.4: Fonte sísmica no domínio do tempo, corte em 80 Hz.

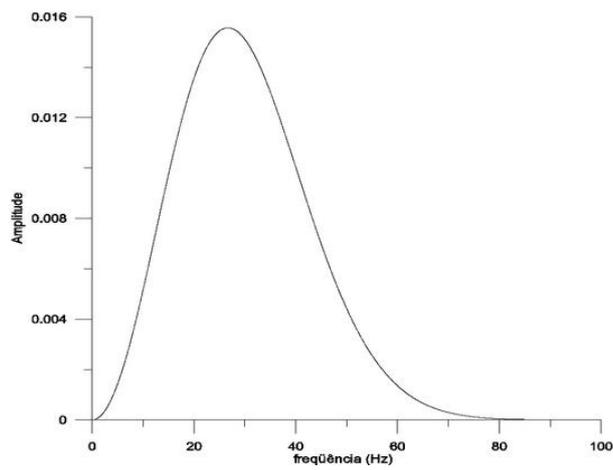


Figura 2.5: Fonte sísmica domínio da frequência, corte em 80 Hz.

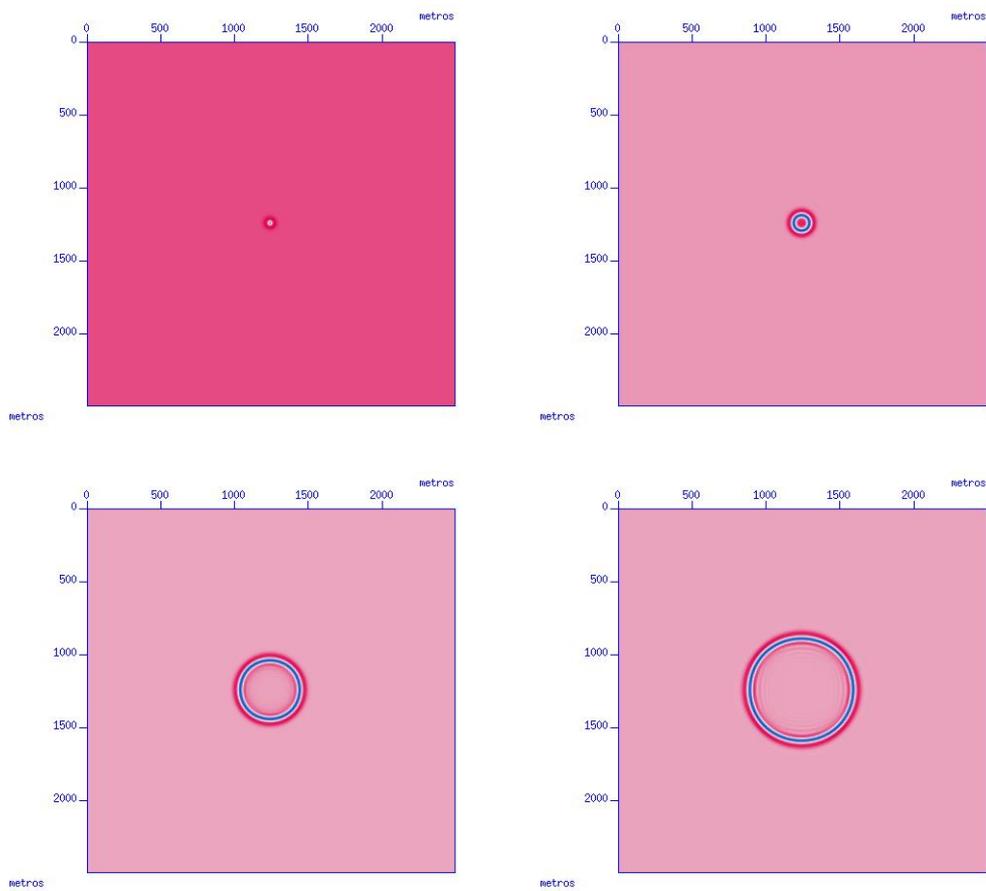


Figura 2.6: Propagação de onda sísmica. Frequência de corte de 60 Hz.

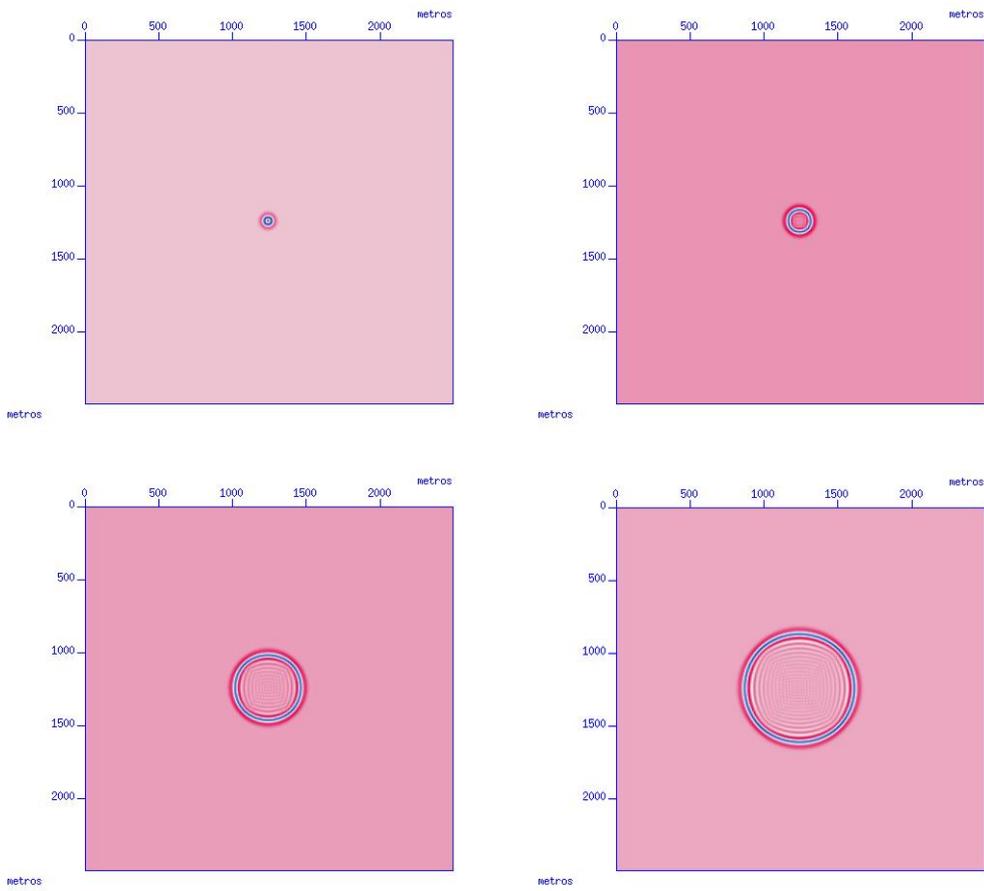


Figura 2.7: Propagação de onda sísmica. Frequência de corte de 80 Hz.

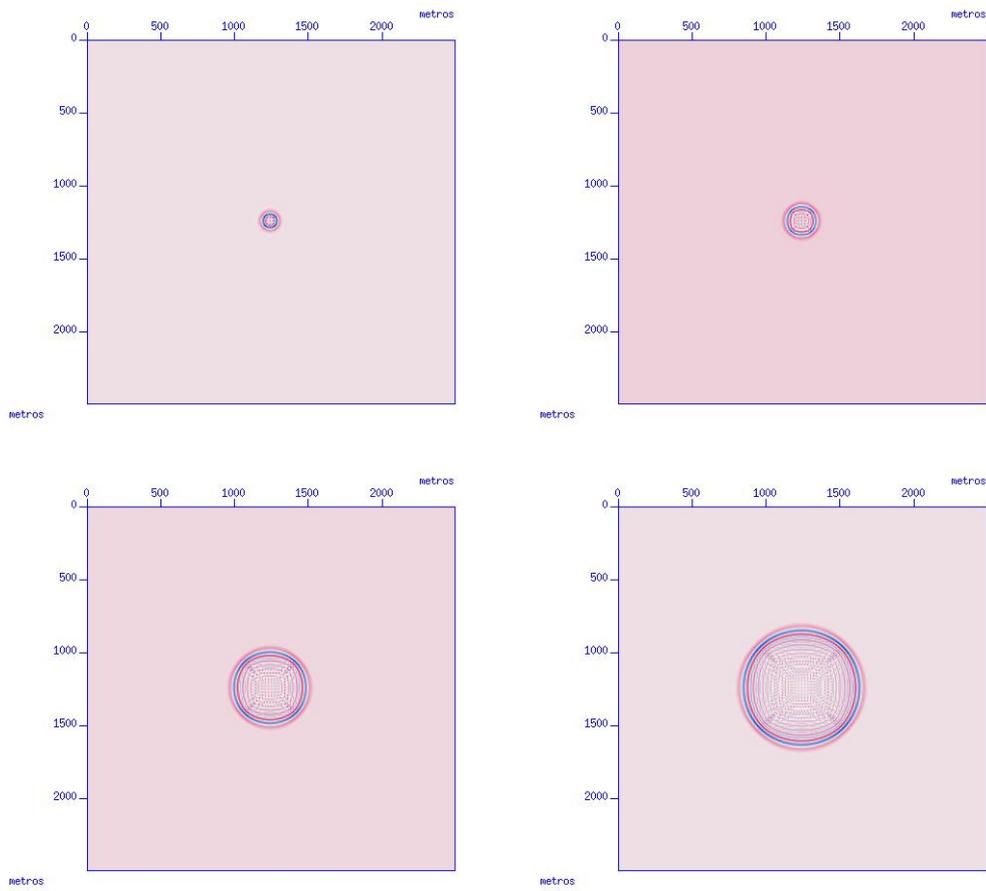


Figura 2.8: Propagação de onda sísmica. Freqüência de corte de 120 Hz.

onde  $\lambda_{min}$  é o menor comprimento de onda e está relacionado à frequência máxima da fonte e à menor velocidade de propagação da onda sísmica pela equação seguinte.

$$\lambda_{min} = \frac{c_{min}}{f_{max}}. \quad (2.31)$$

Mas o cálculo numérico das derivadas na equação da onda produz erros, que geram a dispersão e a instabilidade numéricas. Por isso é necessário o aumento do número de pontos por comprimento de onda, no caso das derivadas espaciais, e do número de pontos por período, para as derivadas temporais. Assim a melhor escolha dos intervalos espaciais e temporal e da frequência de corte da fonte sísmica se dá levando em consideração os fatores previamente mencionados (alcance da onda e definição da imagem) e as equações a seguir[12]:

$$h \leq \frac{\lambda_{min}}{\alpha} \quad (2.32)$$

e

$$\frac{c_{max}\Delta t}{h} \leq \sqrt{\frac{3}{8}} \quad (2.33)$$

onde  $\alpha$  é o número de pontos por comprimento de onda ou por período.

Na prática, para modelagem acústica com o operador de quarta ordem[11] utiliza-se o valor empírico  $\alpha = 5$ [27], que é bem mais restritivo do que o valor teórico proposto por Cunha[12] ( $\sqrt{\frac{3}{8}} \approx \frac{3}{5}$ ).

#### 2.4.4 Exemplos

O programa de modelagem por diferenças finitas também foi testado para o modelo de velocidades da figura 2.3, com diversos valores para a frequência e para o fator de amortecimento próximo às bordas laterais e inferior.

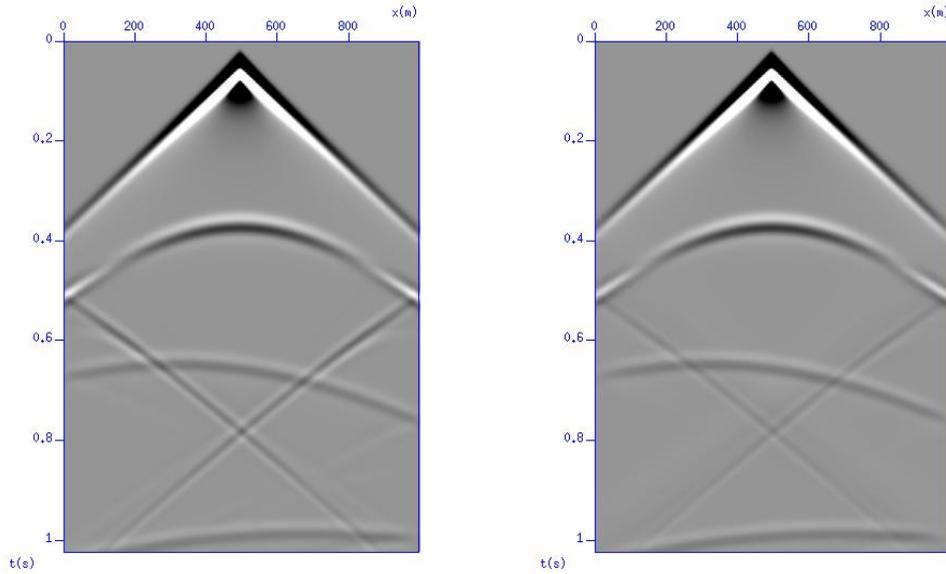


Figura 2.9:  $f_{corte} = 60Hz$ ,  $fat = 0.0$  e  $fat = 0.15$ , respectivamente.

Nestes testes, foi usado espaçamento  $h = 5$  metros, em ambas as direções, e intervalos de tempo de 0.001 segundos. A amplitude da fonte foi de  $10^6$  e foram usados 20 pontos de grid para cada camada amortecida, de um total de 200 pontos na direção X e 256 na direção Z.

Os sismogramas das figuras 2.9 e 2.10 foram obtidos com uma fonte de frequência de corte de 60 Hz e com fator de amortecimento variando de 0.0 a 0.30. O segundo sismograma da figura 2.10 mostra o sinal medido após a remoção da onda direta, ou seja, o sismograma como ele seria migrado.

Nota-se a melhor supressão das reflexões nas laterais e no fundo com o fator de amortecimento de 0.30, sem comprometimento dos dados úteis.

Nas figuras 2.11 e 2.12 a frequência máxima da fonte utilizada foi de 80 Hz, com a mesma variação do fator de amortecimento. É possível notar a maior definição das reflexões nos sismogramas com a fonte de 80 Hz (o traço é mais fino), porém, na figura 2.12, sem a onda direta, já se pode observar ruído, causado por uma leve dispersão numérica.

Nos testes seguintes, a fonte sísmica foi gerada com frequência de corte de 120 Hz, também com as mesmas variações da constante de amortecimento

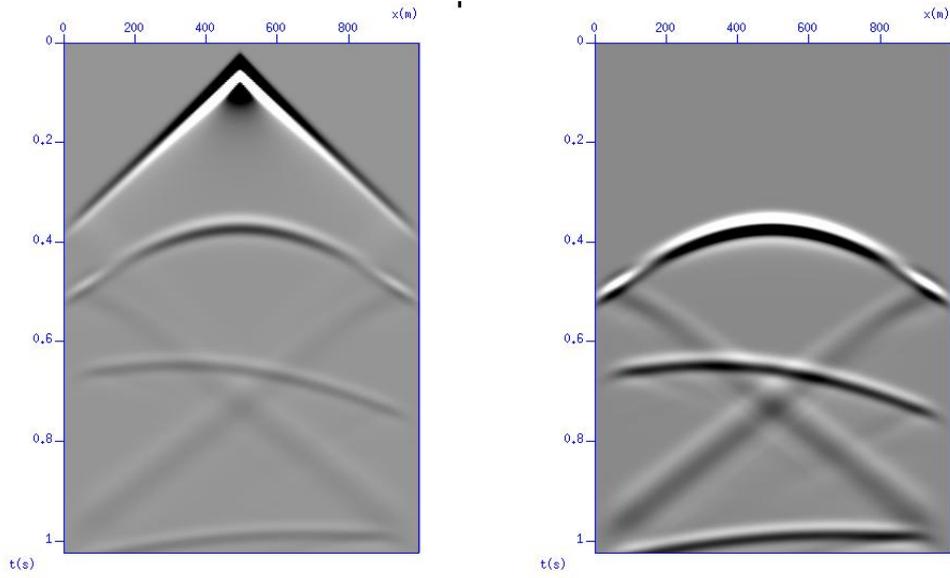


Figura 2.10:  $f_{corte} = 60Hz$ ,  $fat = 0.30$ , com e sem onda direta.

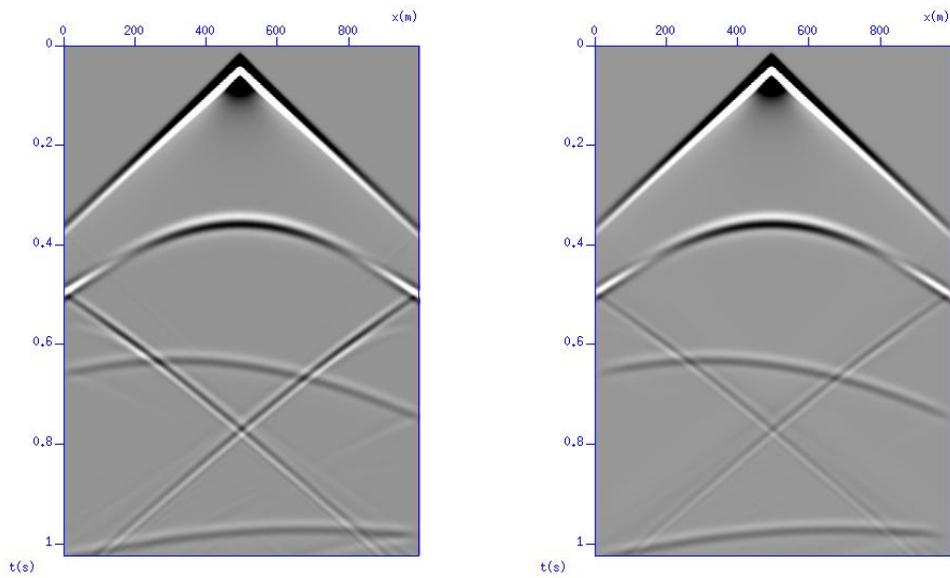


Figura 2.11:  $f_{corte} = 80Hz$ ,  $fat = 0.0$  e  $fat = 0.15$ , respectivamente.

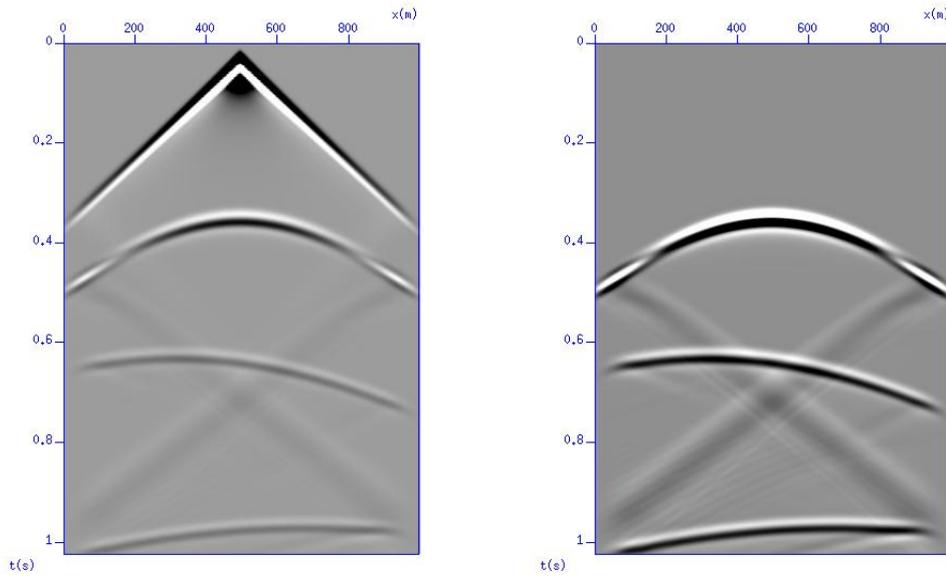


Figura 2.12:  $f_{corte} = 80Hz$ ,  $fat = 0.30$ , com e sem onda direta.

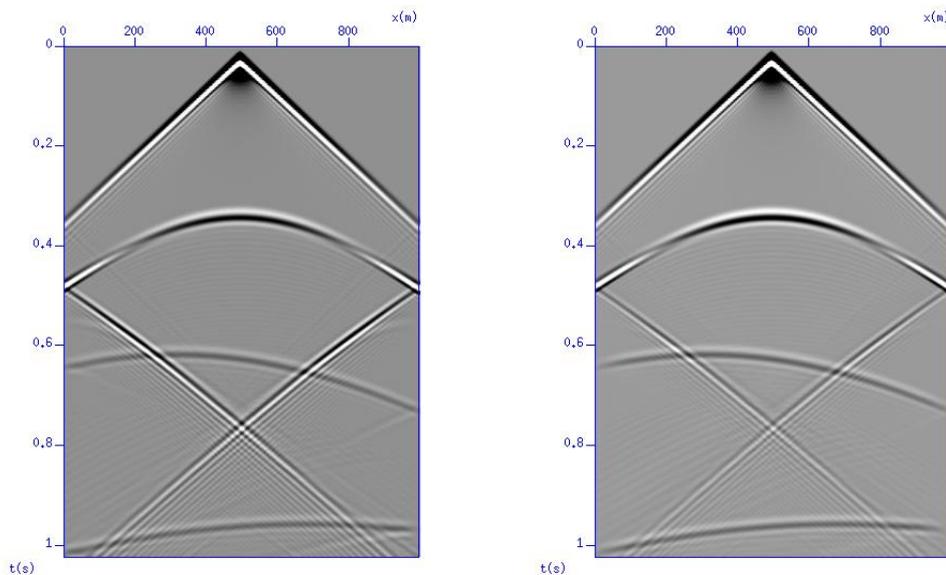


Figura 2.13:  $f_{corte} = 120Hz$ ,  $fat = 0.0$  e  $fat = 0.15$ , respectivamente.

(figs. 2.13 e 2.14). Novamente é possível notar o aumento da definição das reflexões, mas agora a dispersão numérica é bem aparente.

Com base nestas figuras, a frequência de 80 Hz foi escolhida para a modelagem dos dados sintéticos a serem migrados.

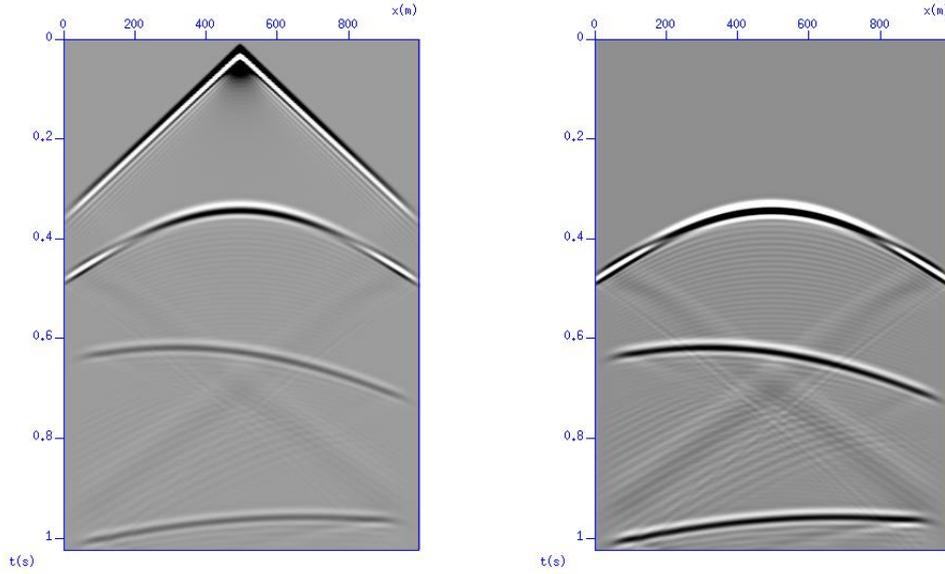


Figura 2.14:  $f_{corte} = 120Hz$ ,  $fat = 0.30$ , com e sem onda direta.

## 2.5 Migração por Rotação de Fase com Interpolação

O princípio da migração por rotação de fase está ligado à idéia de que se pode descrever o comportamento de uma onda plana, conhecendo-a em um determinado instante e em uma determinada posição, através da equação a seguir.

$$P_{plana}(x, z, t) = P_{plana}(x_0, z_0, t_0)e^{i(k_x x + k_z z + \omega t)}, \quad (2.34)$$

onde

$$k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2}. \quad (2.35)$$

Aqui,  $k_x$  e  $k_z$  são os números de onda nas direções  $X$  e  $Z$ , respectivamente,  $\omega$  é a frequência angular da onda e  $v$  sua velocidade de propagação. Quando  $k_z = 0$ , tem-se uma onda apenas com sua componente horizontal ( $k_x = \pm\omega/v$ ). Quando  $k_x = 0$ , a onda se propaga apenas na direção  $Z$ .

De acordo com a teoria da expansão em séries de Fourier, pode-se repre-

sentar qualquer função periódica dentro de um determinado intervalo como um somatório de funções de ondas planas, ou seja,

$$p(x, z, t) = \sum_{k_x} \sum_{k_z} \sum_{\omega} p(k_x, k_z, \omega) e^{i(k_x x + k_z z + \omega t)}. \quad (2.36)$$

Para ondas planas viajando na direção  $Z$ , teremos

$$p(x, z, t) = \sum_{k_x} \sum_{\omega} P(k_x, z_0, \omega) e^{i(k_x x + k_z z + \omega t)}. \quad (2.37)$$

Logo, podemos escrever

$$P(k_x, z, \omega) = P(k_x, z_0, \omega) e^{i(k_z z)}, \quad (2.38)$$

que nada mais é do que uma solução da equação da onda no domínio  $k_x - \omega$ ,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = -k_z^2 P. \quad (2.39)$$

Reescrevendo a equação (2.35) para isolar  $k_z$ , ficamos com

$$k_z = \pm \frac{\omega}{v} \left[ 1 - \left( \frac{v k_x}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.40)$$

Mas a equação 2.38 só é solução da equação 2.39, com  $k_z$  definido pela equação 2.40, para uma velocidade  $v$  constante entre  $z$  e  $z_0$ . Para que possamos introduzir uma velocidade como função da profundidade,  $v(z)$ , fazemos com que a propagação se dê em intervalos  $\Delta z$  pequenos o suficiente para que esta variação da velocidade seja bastante suave entre cada intervalo. Desta forma, a equação utilizada para a propagação da onda será

$$P(k_x, z + \Delta z, \omega) = P(k_x, z, \omega) e^{i(k_z \Delta z)} \quad (2.41)$$

A escolha dos sinais a serem utilizados nas equações (2.6) e (2.7) é feita considerando-se os sentidos de propagação da onda. A última descreverá uma onda descendente quando  $\Delta z$  for positivo. Nesta situação, a primeira equação será referente à propagação para  $t < 0$  quando for utilizado o sinal positivo. Para a migração, que é um processo inverso, estamos interessados nesta combinação de sinais.

O processo descrito acima define o método de extrapolação do campo de ondas conhecido como rotação de fase (phase shift). Este método não comporta variações laterais de velocidades, por isso, Jenó Gazdag e Piero Sguazzero propuseram, em 1984, o PSPI - Phase Shift Plus Interpolation, ou, em sua tradução, Rotação de Fase com Interpolação.

A idéia do PSPI é repetir o processo de extrapolação da onda considerando duas ou mais velocidades, incluindo entre elas a maior e a menor em cada profundidade. Ao final, os campos obtidos de cada extrapolação são interpolados, resultando em um único campo final, do qual será obtida a imagem.

Por este método, a propagação da onda é feita em duas etapas, uma horizontal e uma vertical. Assim, a operação de rotação de fase é dividida em duas,

$$P^*(z) = P(z)e^{(-i\frac{\omega}{v(x,z)}\Delta z)} \quad (2.42)$$

e

$$P(z + \Delta z) = P^*(z)e^{i(k_z + \frac{\omega}{v_r})\Delta z}. \quad (2.43)$$

A primeira, ainda no domínio  $f - x$ , utiliza a velocidade real ( $v(x, z)$ ) e governa ondas viajando verticalmente no intervalo.

A segunda, já no domínio  $f - k$ , governa a correção horizontal para a

velocidade referência ( $v_r$ ).

### 2.5.1 *Pós-Stack* ou *Pré-Stack*?

A migração dos dados sísmicos pode se dar antes ou depois do empilhamento (*stacking*) dos mesmos. O empilhamento consiste na soma de dados sísmicos com o mesmo ponto médio entre fonte e receptor (CMP - *common midpoint*) na superfície, que sofrem uma correção de sobretempo normal (NMO - *normal moveout*). Esses dados CMP, quando somados, formam um traço, referente àquele ponto médio. Esse procedimento é feito para diversos pontos na superfície e os traços resultantes são colocados lado a lado, gerando a chamada seção sísmica CMP, que é uma aproximação da seção em que as fontes e os receptores estão em posições coincidentes, a seção com afastamento entre fonte e receptor nulo (*zero-offset*), na qual se baseia o modelo do refletor explosivo.

O problema da utilização deste conceito está justamente no fato de que todo o processo de migração é construído sobre uma aproximação, que se mostra imprecisa quando se tenta imagear estruturas com inclinação (mergulho) ou variações laterais de velocidade muito grandes.

Tal problema não surge caso os dados obtidos de cada tiro sejam migrados antes do empilhamento. Hoje, os recursos tecnológicos possibilitam que se façam várias migrações sobre um mesmo modelo em tempo hábil, neste caso, cada tiro dado pode ser registrado por todos os receptores e o sismograma obtido, migrado individualmente. O imageamento feito com este único tiro cobre uma área relativamente pequena do modelo, mas, após a migração individual de diversos tiros, distribuídos na superfície de modo a cobrir toda a área desejada, as imagens obtidas podem ser sobrepostas (uma mera soma de amplitudes), obtendo-se uma imagem de alta qualidade do meio geológico. Na migração pós-empilhamento o processamento é bastante mais rápido, já

que esta é feita uma única vez, sobre a seção de afastamento nulo obtida. De fato foi esta a razão para se buscar, uma aproximação para a seção *zero-offset*.

Mas atualmente esta aproximação deixou de ser indispensável, e o uso de métodos de migração pré-empilhamento se mostrou mais vantajoso.

## 2.5.2 Imageamento

### Pós-Empilhamento

De acordo com o modelo do refletor explosivo, a onda registrada nos receptores “surgiu” nos próprios refletores. Assume-se que a análise é iniciada no instante em que esse fenômeno ocorre, ou seja, as ondas “emanam” dos refletores no instante  $t=0$ . No caso da migração pós-empilhamento, esta é a condição de imagem. Após cada passo em profundidade ( $\Delta z$ ), registra-se o valor do campo em  $t=0$  para este valor de  $Z$ , e após todos os passos em profundidade, ter-se-á a imagem, uma seção  $P(x,z,t=0)$ .

### Pré-Empilhamento

Já com a migração pré-empilhamento, o processo se dá de forma um pouco mais complexa. Além da depropagação do campo dos receptores (sismograma), também é feita a propagação do campo da fonte sísmica à partir da superfície, e a imagem é obtida através da correlação cruzada entre os campos, seguida da extração dos valores obtidos em  $t=0$ [10].

A correlação de dois sinais é uma comparação entre os mesmos, por meio de uma operação matemática que fornece um resultado proporcional à similaridade entre eles. Supõe-se que a propagação do sinal da fonte e a depropagação de uma reflexão medida nos receptores os tornará tão mais parecidos quanto mais próximos eles estiverem do refletor que gerou esta re-

flexão. Desta forma, quanto maior o valor da correlação cruzada entre eles, maior a chance de eles estarem no ponto do modelo onde a reflexão ocorreu.

É claro que se o campo da fonte a ser propagado for igual ao campo da fonte usada na modelagem, a similaridade entre este campo e o campo medido nos receptores será a maior possível, quando estes coincidirem com o refletor, mas esta não é uma condição excludente para o correto imageamento. Qualquer fonte com uma amplitude máxima bem definida pode ser utilizada, desde que esta amplitude esteja bem próxima (exatamente, se possível) da amplitude máxima da fonte utilizada na modelagem ou na aquisição, no instante em que esta surge.

Em outras palavras, se a amplitude máxima da fonte, durante a modelagem, está por exemplo a 3 metros de profundidade, na posição  $x = 100$  metros, 0.04 segundos após o início da análise, então, a amplitude máxima da fonte utilizada na migração deverá estar nesta mesma posição, 0.04 segundos após o início da análise.

Os resultados obtidos neste trabalhos foram alcançados utilizando-se como fonte um *spike*, que é uma fonte pontual, de amplitude unitária.

No domínio do tempo a operação de correlação é representada pela operação de convolução entre os campos envolvidos[28],

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (2.44)$$

onde  $\tau$  é uma defasagem de tempo entre os sinais  $x$  e de  $h$ .

Se  $x(t)$  é um sinal de entrada em um determinado sistema linear, e  $y(t)$  é o sinal de saída deste sistema, então  $h(t)$  representa a resposta impulsiva deste sistema. Como a equação escalar da onda é uma equação linear, então esta propriedade pode ser ajustada ao problema de propagação da onda acústica.

Logo, chamando o campo da fonte, descendente, de  $s(t)$ , o campo medido nos receptores, ascendente, de  $g(t)$ , e a resposta impulsiva do meio, ou

refletividade, ou coeficiente de reflexão, de  $r(t)$ , teremos

$$g(t) = s(t) * r(t). \quad (2.45)$$

Pelo teorema da convolução[28], a operação acima, ao passar por uma transformada de Fourier no tempo, será representada por um produto simples entre os sinais transformados.

Desta forma, a relação entre os sinais da fonte e do receptor e a refletividade do meio no domínio da frequência será[22]

$$G(\omega) = S(\omega).R(\omega). \quad (2.46)$$

A imagem será obtida após a soma da refletividade para todas as frequências (a transformada inversa de Fourier) e registro dos seus valores para  $t=0$ . Logo,

$$R(\omega) = \frac{G(\omega)}{S(\omega)} \quad (2.47)$$

Nas equações a seguir a dependência em  $\omega$  será omitida. Vale lembrar que as grandezas envolvidas dependem também da posição  $(x, z)$ .

A equação acima pode ser modificada, sem prejuízo de seu significado físico, para

$$R = \frac{G.S^*}{S.S^* + \epsilon^2} \quad (2.48)$$

onde  $S^*$  é o complexo conjugado de  $S$ .

Mas  $\epsilon$  tem um valor bem pequeno, e é empregado apenas pra garantir a estabilidade, já que  $S$  pode conter valores nulos.

Ainda, a fonte pode ter amplitude unitária, e se assim for, chegamos a forma final da equação utilizada para a refletividade:

$$R = G.S^* \tag{2.49}$$

E os valores em  $t=0$  da transformada inversa de Fourier de  $R(\omega)$  dão a imagem desejada.

A figura 2.15 mostra o fluxograma de migração pré-empilhamento por PSPI. O mesmo está de acordo com o programa desenvolvido durante este trabalho, que realiza a propagação do campo da fonte e a depropagação do campo dos receptores simultaneamente, de forma acoplada, ou seja, para cada operação feita com o campo descendente, uma operação correspondente é feita ao campo ascendente, no mesmo ponto do programa.

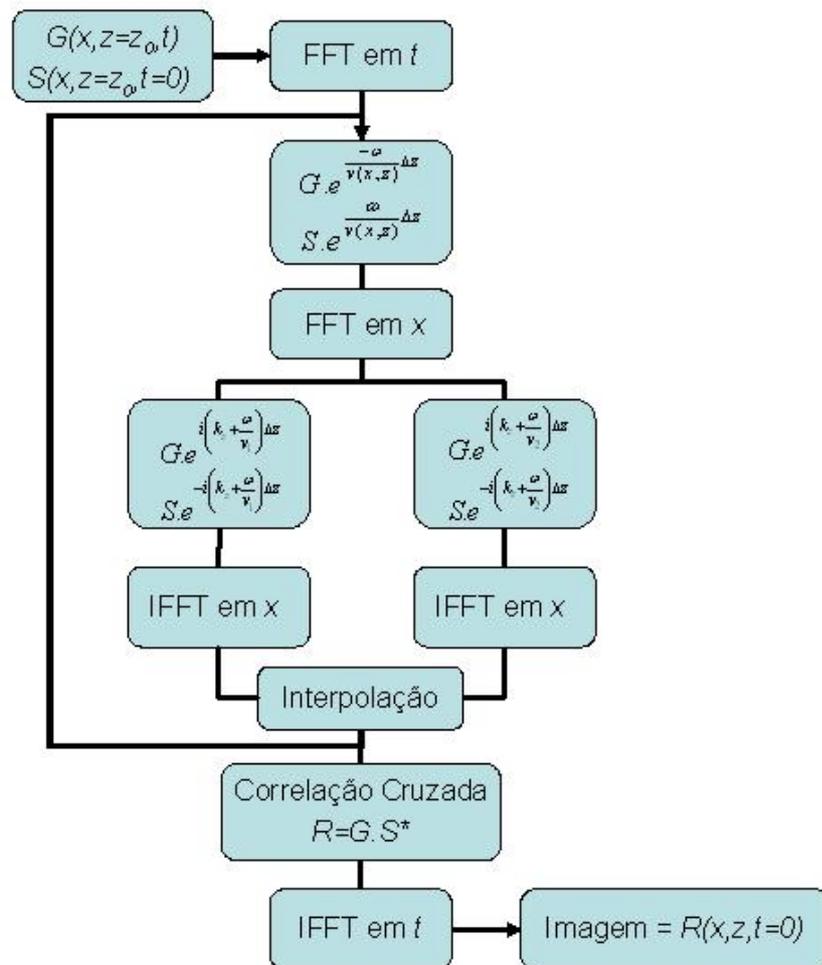


Figura 2.15: Fluxograma de Migração PSPI Pré-Empilhamento.

# Capítulo 3

## Procedimentos

Neste capítulo são descritos os procedimentos para se chegar aos resultados nos diversos exemplos explorados.

Em todas as figuras geradas neste capítulo, as unidades exibidas são contagens de pontos do grid, em espaço ( $X \times Z$ ) para os modelos de velocidades e imagens finais, e em espaço e tempo ( $X \times t$ ) para os sismogramas.

### 3.1 Modelo sintético de 3 camadas homogêneas

Para a migração no domínio do tiro, foram utilizados sismogramas obtidos de cada tiro, detonado próximo à superfície e detectado em todos os pontos da mesma.

Neste exemplo, a modelagem foi feita por Traçado de Raios (Ray Tracing), usando-se para tanto o programa Cshot, integrante do pacote Seismic Unix (SU). Os sismogramas possuem pouco ruído (ver fig.2.3), o que contribuiu bastante para a excelente qualidade das imagens obtidas.

Aqui utilizou-se apenas duas velocidades de referência na migração, dada a simplicidade do modelo. O grid possui 200x256 pontos, com espaçamento de 5 metros, tanto na direção  $X$  quanto na direção  $Z$ . O intervalo de tempo usado foi de 0.002 segundos, completando 1.024 segundos em 512 pontos na

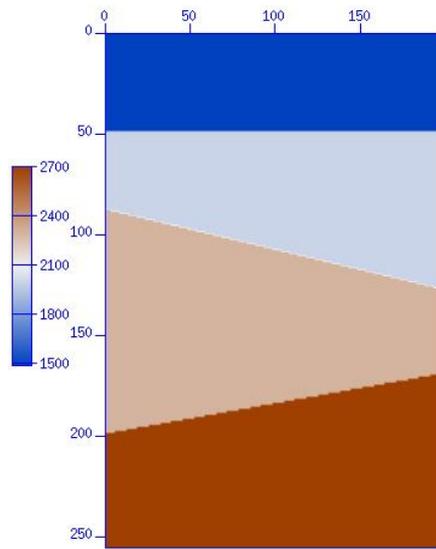


Figura 3.1: Modelo de velocidades - camadas homogêneas

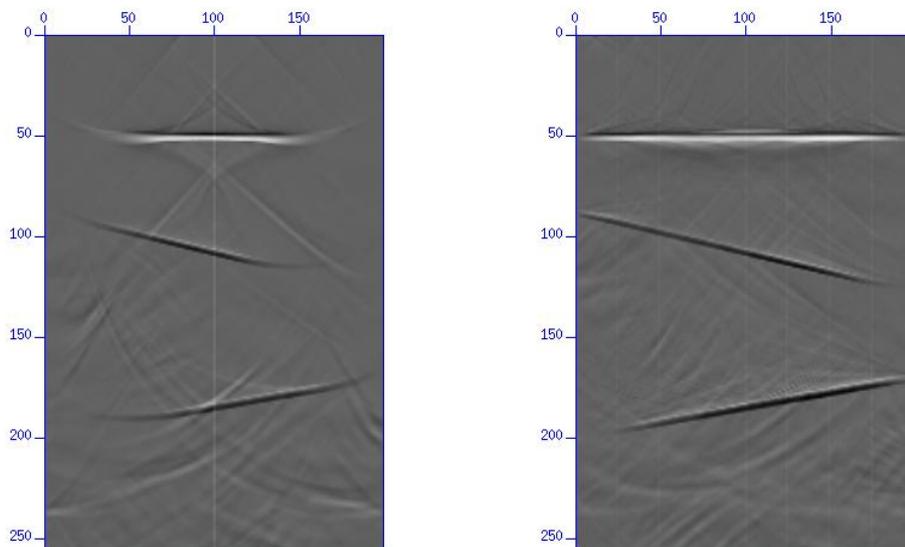


Figura 3.2: Migração do tiro central e emp. de 10 tiros - cam. homog.

geração do sismograma. A imagem empilhada é simplesmente a superposição das migrações de cada tiro.

### **3.2 Modelo Sintético nº 2: inserindo dificuldades**

No exemplo a seguir foi utilizado um modelo de maior complexidade, com mergulhos mais acentuados e regiões de alta velocidade. A modelagem foi feita pelo Método das Diferenças Finitas, com pequena camada de absorção, o que proporcionou sismogramas com mais ruídos do que aqueles fornecidos por Traçado de Raios (fig. 3.2).

Para compensar esse fatores complicadores, a continuação para baixo do campo foi feita com 4 velocidades de referência(o maior número presente no modelo, em cada profundidade) e 25 tiros foram modelados e migrados. O espaçamento foi de 10 metros por ponto do grid, sendo 250x150 o total de pontos, e o intervalo de tempo, de 0,00175 segundos por passo.

O método foi capaz de produzir uma boa imagem de todas as interfaces refletoras, inclusive da região esférica, de alta velocidade.

A imagem final apresenta grande incidência de ruído de alta frequência na região de velocidade mais baixa. Este ruído é resultado de dispersão numérica, que ocorreu devido à relação inadequada entre a frequência da fonte utilizada na modelagem, de 80 Hz, e o espaçamento do grid, de 10 metros. O uso de uma fonte frequência de corte mais baixa ou de um espaçamento reduzido diminuiria consideravelmente a incidência destes ruídos.

Mas estes dados indesejados também podem ser suprimidos submetendo-se os sismogramas a um filtro passa-baixa antes de se realizar a migração. Esta filtragem pode também ser feita mesmo durante o processo de migração, anulando-se os termos de frequências indesejadas, após a primeira transfor-

mada de Fourier.

### 3.3 Marmousi

Finalmente, o principal objetivo do trabalho: o imageamento de um modelo que apresente complexidade comparável à de levantamentos reais. Para isso, foi usado o modelo Marmousi (fig. 3.6), conhecido por sua estrutura complexa, ideal para o teste deste tipo de algoritmo.

Aqui, novamente foi feita modelagem por Diferenças Finitas. O modelo possui 384x122 pontos, com espaçamento de 25 metros em ambas as direções, o que demandou tempo de análise bastante maior na migração. Ainda, a complexidade do modelo exigiu um número muito maior de tiros a serem modelados e migrados, 192 no exemplo aqui exposto, e 6 velocidades de propagação foram utilizadas. A migração de cada tiro levou cerca de 13 minutos, em uma máquina com processador AMD de 1.2 GHz e 512 Mb de memória RAM, configuração apenas razoável, atualmente. O resultado, visto na figura 3.7, foi obtido sem uso de filtros, apenas pela superposição das migrações individuais de cada tiro. Já na figura 3.8, todos os sismogramas passaram por um filtro passa-baixa, de modo que sinais de frequência menor

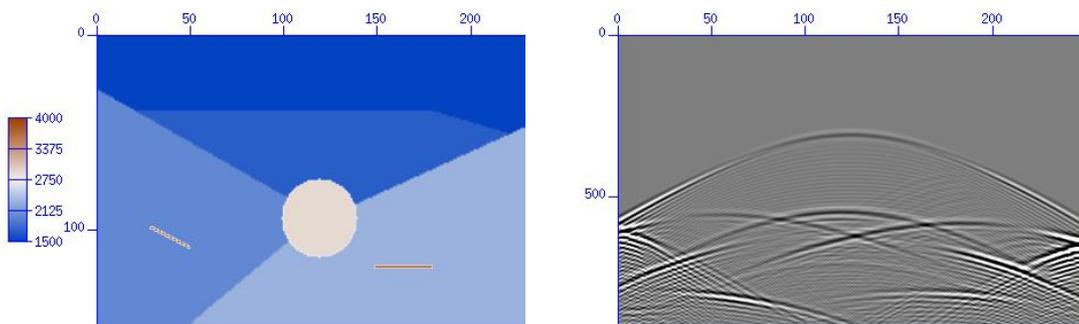


Figura 3.3: Modelo de velocidades e sismograma do tiro central - modelo 2

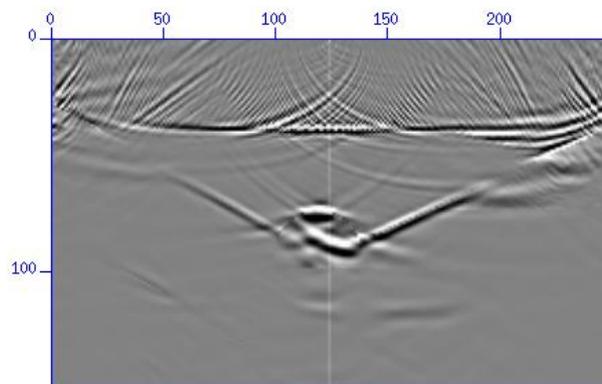


Figura 3.4: Migração do tiro central - modelo 2

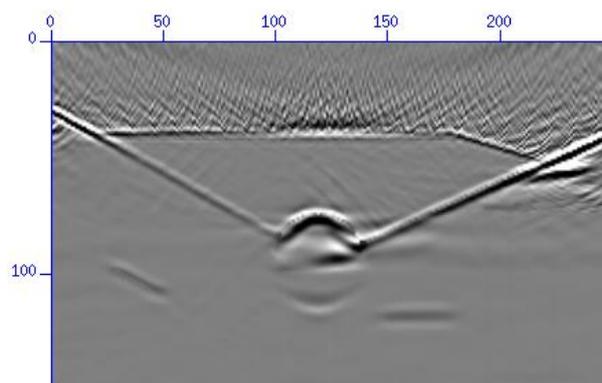


Figura 3.5: Empilhamento de 25 tiros migrados - modelo 2

do que 25 Hertz permaneceram íntegros, sinais de 25 a 30 Hertz tiveram suas amplitudes reduzidas linearmente e sinais de frequência superior a 30 Hertz foram totalmente anulados. Na imagem filtrada pode-se notar a eliminação de grande parte do ruído.

Assim como no modelo sintético nº 2, a modelagem para o Marmousi foi feita utilizando-se uma fonte com frequência máxima de 80 Hz. Com o espaçamento de 25 metros, esta frequência ficou bem acima do valor recomendado, indicado no capítulo 2 desta dissertação. Isto gerou dispersão

numérica, e explica a presença de grande quantidade de ruído.

Como foi mencionado na seção anterior, boa parte do ruído resultante da dispersão numérica desaparece com a aplicação do filtro passa-baixa, ainda que este não seja o procedimento mais adequado.

O resultado obtido ainda pode ser melhorado, com a anulação do ruído fora do cone de iluminação, na imagem de cada tiro migrado, ou seja, antes da soma de todos os tiros.

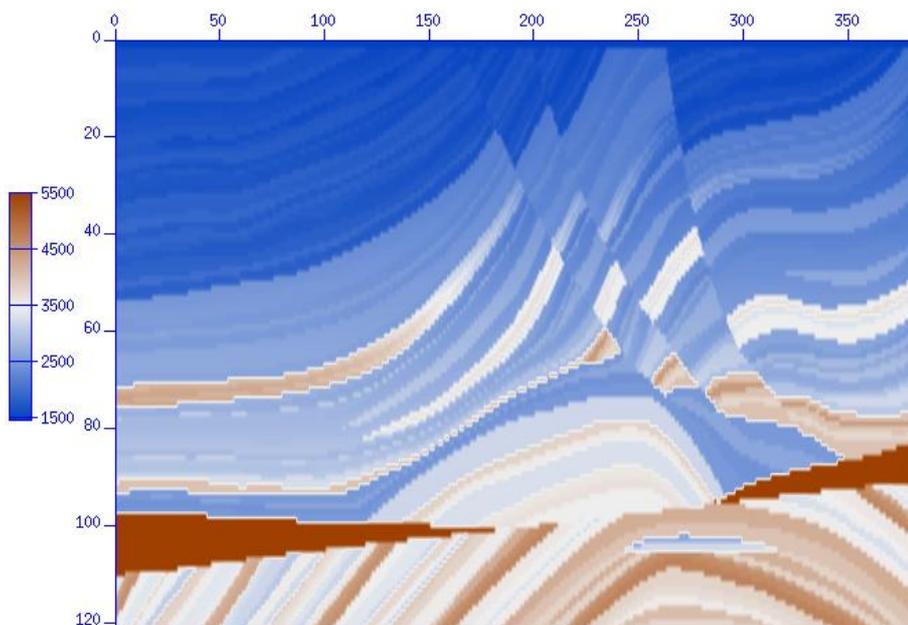


Figura 3.6: Modelo de velocidades - Marmousi

### 3.4 Síntese de ondas planas

O princípio de Huygens diz que é possível formar frentes de onda de qualquer forma pela superposição de frentes de onda esféricas. Assim, uma superposição de todos os sismogramas gerados para um determinado meio, formando uma única frente de onda, em geral plana, pode ser migrada como se a fonte utilizada na aquisição ou na modelagem fosse realmente uma única onda com esta forma sintetizada.

Na realidade, e meios heterogêneos, as ondas não se propagam esfericamente. Além disso, as formas irregulares dos refletores não permitem que ondas vindas de algumas direções forneçam informações completas dos refletores após a migração.

Segundo Ji[17], esta dificuldade pode ser parcialmente contornada se forem utilizadas sínteses de frentes de onda com diferentes inclinações para migração.

Assim, o uso de frentes de onda planas com diferentes inclinações darão melhor definição das amplitudes dos coeficientes de reflexão do modelo.

No entanto, as variações de velocidade no modelo “deformarão” a frente de onda, ao longo do percurso, por isso, Rietveld et al. (1992) e Berkhout (1992) sugeriram que a síntese da onda plana fosse orientada ao alvo, ou seja, a posição de cada fonte seria calculada de forma a tornar plana a frente de onda em um determinado ponto do modelo, próximo ao refletor que se deseja iluminar com maior precisão.

Neste trabalho foram feitos alguns testes com migração de sínteses de ondas planas, de forma bem simples. Os tiros foram dados separadamente, como no processo comum, e os sismogramas foram somados, com inserção de pontos fictícios em tempo, antes do instante de detonação da fonte, tanto nos sismogramas quanto nos campos de fonte usados na migração. Com isto,

todos os tiros ficaram alinhados e a frente de onda plana sintetizada, inclinada em relação à vertical, dependendo do  $n^o$  de pontos fictícios em tempo inseridos. O campo da fonte a ser propagado na migração é também a soma de todas as fontes individuais.

A migração é feita sobre o novo sismograma e a condição de imagem é obtida da correlação cruzada desse campo depropagado com o campo propagado da fonte sintética. Desta forma, em  $t=0$ , ter-se-á a imagem aproximada do modelo iluminado por uma onda plana.

Os modelos utilizados foram o modelo simples de 3 camadas homogêneas e o Marmousi.

### **3.4.1 Modelo sintético de 3 camadas homogêneas**

Para este modelo, foram testadas uma onda plana sintética horizontal (fig. 3.9) e duas outras com rotações de 13,5 graus, em sentidos horário (fig. 3.10) e anti-horário (fig. 3.11). Nos três casos, 17 tiros foram modelados, somados e migrados. No segundo e no terceiro, a inclinação da onda foi obtida defasando-se cada sismograma de 0,02 segundos em relação ao adjacente, sendo o tempo total da análise de 1,8 segundos.

Pode-se notar pelas figuras que as imagens geradas pelas ondas inclinadas mostram com iluminação diferente as camadas, exatamente como previsto por Ji[17]. Apesar de a melhor imagem neste exemplo ser mesmo a gerada pela onda horizontal, a soma das três imagens certamente contém maior conteúdo de informações a respeito dos refletores.

A imagem desta soma das três migrações está na figura 3.12.

### **3.4.2 Marmousi**

Para o modelo Marmousi foi feita a síntese de apenas uma onda plana, e sem inclinação em relação à direção horizontal. O sismograma final foi resultado da

soma dos 192 obtidos anteriormente. A qualidade da imagem vista nas figuras [3.13](#) e [3.14](#) é relativamente baixa, mas a queda no custo computacional, com apenas uma migração tendo sido feita, é tão maior quanto maior for número de tiros. Aqui ficou clara a necessidade de realização de sínteses de ondas planas com outras inclinações, de modo a compor uma imagem resultante da soma de migrações diferentes.

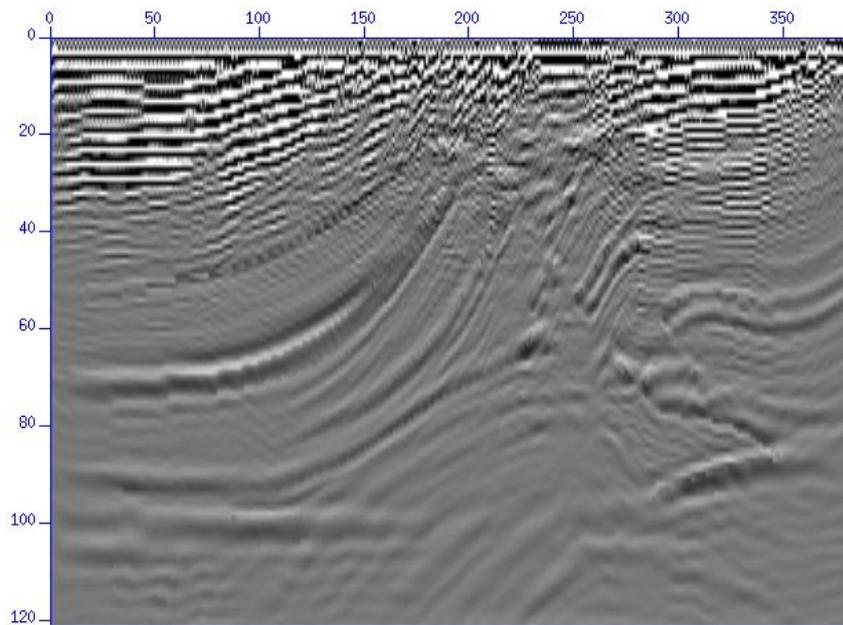


Figura 3.7: Empilhamento de 192 tiros - Marmousi

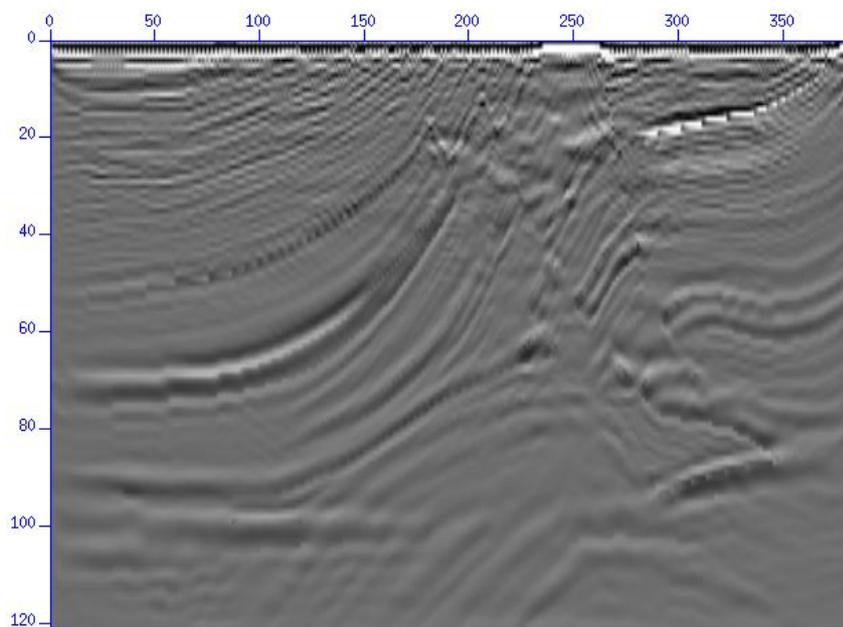


Figura 3.8: Empilhamento de 192 tiros filtrados - Marmousi

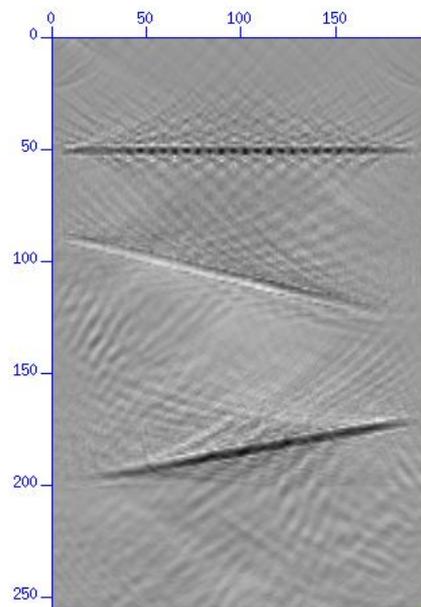


Figura 3.9: Síntese horizontal de 17 tiros - cam. homogêneas

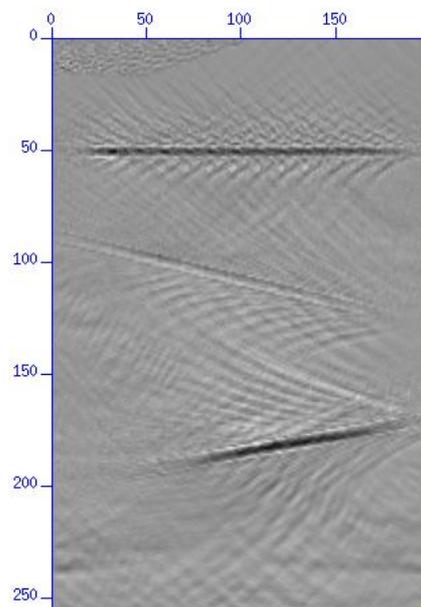


Figura 3.10: Síntese com rotação horária de  $13,5^\circ$  - cam. homogêneas

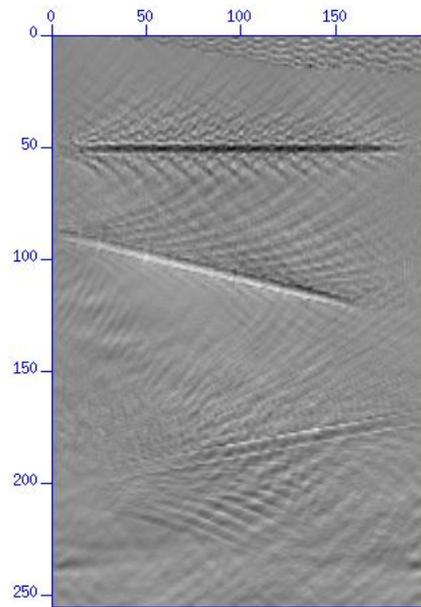


Figura 3.11: Síntese com rotação anti-horária de  $13,5^\circ$  - cam. homogêneas

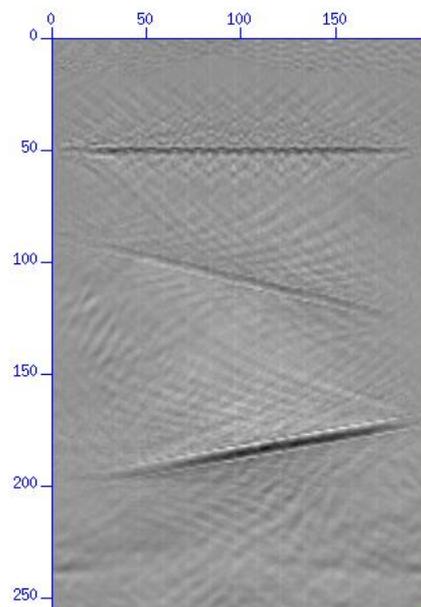


Figura 3.12: Soma das 3 migrações de síntese - camadas homogêneas

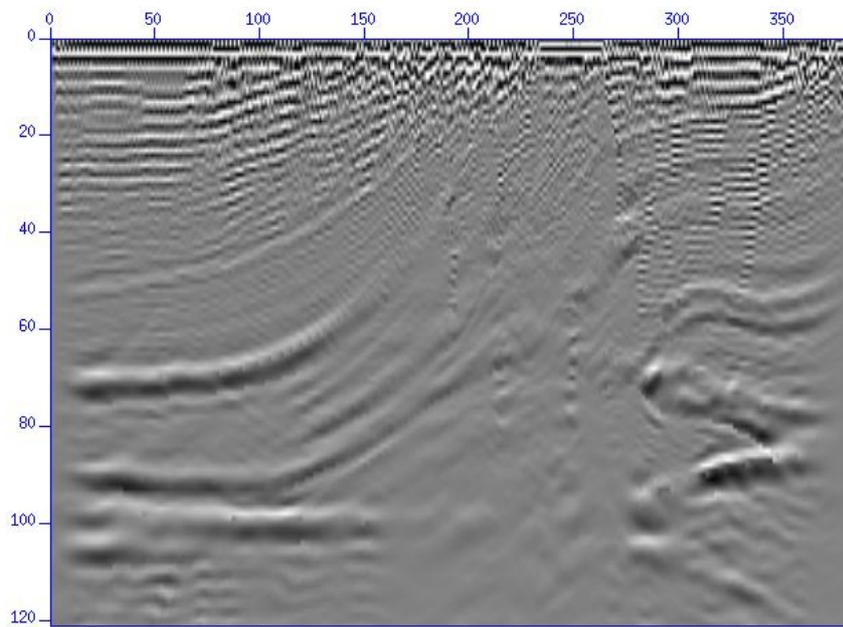


Figura 3.13: Síntese de 192 tiros - Marmousi

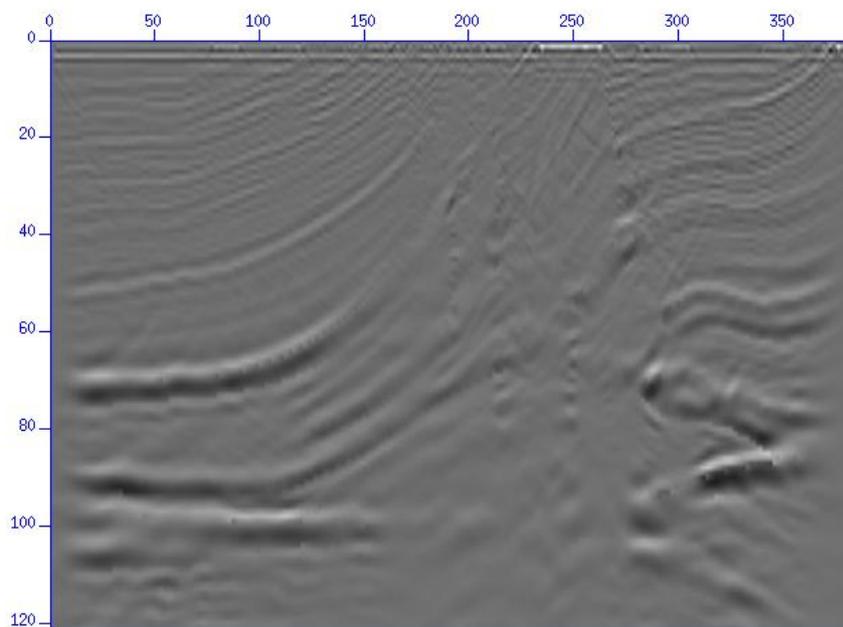


Figura 3.14: Síntese de 192 tiros filtrados - Marmousi

# Capítulo 4

## Observações

- A frequência de corte da fonte escolhida na modelagem por diferenças finitas foi de 80 Hz, porque produziu reflexões mais bem definidas. Porém, com este valor de frequência máxima houve dispersão numérica, caracterizada nas imagens migradas pelo ruído próximo à superfície. A aplicação do filtro passa-baixa, com corte em 30 Hz para o modelo Marmousi, por exemplo, removeu boa parte deste ruído, possibilitando um bom imageamento mesmo com uma modelagem não tão boa.

A filtragem de frequências foi também feita durante o processo de migração, simplesmente desprezando-se os valores do coeficiente de reflexão para as frequências altas, antes de se fazer a transformada inversa de Fourier, do domínio da frequência para o domínio do tempo.

O resultado desta filtragem durante a migração, como era de se esperar, foi o mesmo da filtragem antes da migração.

- O algoritmo de modelagem com PSPI foi desenvolvido, mas não foi utilizado. Como a modelagem e a migração sísmicas são processos inversos, o uso da mesma técnica para estas duas etapas do processamento sísmico poderia causar a omissão, na imagem final, de erros presentes nos códigos de uma e/ou da outra.

Além disso, para se utilizar tal modelagem seria necessário obter-se os coeficientes de reflexão de cada ponto do modelo, para que se pudesse adotar o conceito do refletor explosivo. A melhor forma de se obter a refletividade em cada ponto do modelo é a própria migração, logo, a modelagem por PSPI teria como única utilidade o teste de uma outra técnica de migração, através da comparação entre o sismograma original e o sismograma gerado a partir do resultado desta migração.

- Quanto às vantagens da migração pré-empilhamento, pode-se destacar a atenuação de ruídos aleatórios, que se somam fora de fase, e a atenuação do efeitos de borda, em comparação com uma seção CMP [14].
- A migração por rotação de fase também diminui o efeito das múltiplas, que resultam de reflexões entre as camadas do meio. Isto ocorre devido ao fato de o método ser baseado na equação unidirecional da onda.

Segundo Freire[14], resultados da migração de dados obtidos em uma região de aproximadamente 1 km de lamina d'água mostraram atenuação de múltiplas de grande amplitude.

- A complexidade do modelo Marmousi, mesmo próximo à superfície, impede que uma frente de onda rotacionada seja produzida numa parte homogênea do modelo, forma como foram feitas as sínteses de ondas planas nesta pesquisa. Assim, a abordagem multifocal para este modelo foi feita apenas com a síntese de uma onda plana horizontal, e sem considerar-se a mudança de amplitude da onda gerada pelas fontes em posições do modelo com propriedades diferentes.

Mas este procedimento é relativamente simples, e já é objeto de estudo de pesquisadores da área.

- O acoplamento dos operadores de propagação do campo da fonte e de propagação do campo dos receptores foi encarado como uma vantagem, já que diminui o tempo de processamento, ao realizar duas operações para cada “loop” do código, ao invés de realizar dois “loop’s” com uma operação cada. Mas isso nem sempre é vantajoso. Como o operador PSPI utiliza o modelo do refletor explosivo, realizando a propagação dos campos com a meia-velocidade, caso a fonte (ou os receptores) seja detonada de uma grande profundidade, como no fundo do mar, por exemplo, isso fará com que o tempo de propagação da onda da fonte até o refletor seja bem diferente do tempo de propagação da onda do refletor até os receptores e a migração pré-empilhamento deste tipo de dados (OBS/OBC) deverá tratar os campos descendente e ascendente separadamente.

# Capítulo 5

## Conclusões

As simulações computacionais de situações Físicas e Geológicas, mesmo as de grande complexidade, foram feitas com sucesso, e desta forma foi possível estudar o comportamento de ondas acústicas viajando por meios geológicos com propriedades diversas, e assim determinar algumas destas propriedades.

Os modelos matemáticos baseados na equação escalar da onda aqui empregados demonstraram coerência com os casos reais, tornando válidos os esforços para que se trabalhe com eles e incentivando a busca de novos modelos.

O código computacional de migração por PSPI foi corretamente desenvolvido, bem como sua extensão para migração pré-empilhamento.

Pelos resultados obtidos de foi possível concluir que o método de migração por rotação de fase com interpolação produz imagens de alta qualidade, a um baixo custo computacional, se comparado a alguns outros métodos, como a migração RTM, por exemplo[5].

Apesar de aparentemente rudimentar no que diz respeito ao tratamento de variações laterais de velocidade, o PSPI lida bem com este problema, mesmo em meios com grandes variações laterais de velocidade, como é o caso do modelo Marmousi.

Bons resultados foram atingidos com um número relativamente pequeno de velocidades de referência. para o Marmousi, a melhor relação custo/benefício

foi obtida com 6 velocidades. Um  $n^\circ$  maior de velocidades implica em grande aumento do custo computacional, com pouquíssima melhora na imagem final.

A qualidade da modelagem utilizada se mostrou determinante também para a qualidade da imagem adquirida com a migração, o que já era previsto, já que os sismogramas são o principal dado de entrada para a realização da mesma.

O uso de filtros mostrou-se útil, abrindo caminho para uma maior pesquisa de tipos de filtro a serem usados antes, e talvez também após a migração.

O método ainda demonstra grande flexibilidade, quanto à possibilidade de se buscar soluções complementares que melhorem seu desempenho. Já existem na literatura variações do PSPI no que diz respeito à interpolação e à escolha das velocidades de referência[4].

Há também métodos que tratam de forma diferente a variação lateral de velocidades. O principal exemplo é o método conhecido como Split Step[14], que ao invés de utilizar diversas velocidades de referência utiliza um valor médio da velocidade real com perturbações laterais locais.

Também é possível a adaptação do método para lidar com ondas elásticas e meios anisotrópicos[8].

Quanto à síntese de frentes de onda, verificou-se que pode diminuir imensamente o tempo de processamento e ainda assim atingir a mesma qualidade da migração pré-empilhamento comum, ou talvez até superá-la, caso seja utilizada iluminação direcionada ao alvo.

Sugestões para trabalhos futuros:

- Otimização dos códigos de programação. Inicialmente, a implementação dos códigos foi feita com maior atenção aos resultados, do que ao tempo de processamento, e algumas melhorias possíveis já foram identificadas, mas não ainda executadas.
- Seleção das velocidades de referência por levantamento estatístico, de modo a aumentar a precisão e diminuir o custo computacional.
- Implementação do método em processamento paralelo, para realização do processamento em clusters de computadores.
- Implementação do método para modelos 3D. Esta etapa dependerá da anterior, devido ao grande aumento do tempo de processamento, em relação à migração de seções bidimensionais.
- Aprofundamento do estudo da aplicação do método com iluminação controlada (abordagem multi-focal).
- Adaptação do método para migração de dados de OBC/OBS (receptores no fundo do mar). Para tanto é necessário o desacoplamento dos operadores de propagação e depropagação.
- Aplicação do método para migração de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> chegadas (utilização vantajosa das múltiplas).

# Referências Bibliográficas

- [1] Artman, B. and Fomel, S., *Fourier-domain imaging condition for shot-profile migration*, in 75th Ann. Internat. Mtg. Soc. of Expl. Geophys., 2005.
- [2] Berkhout, A. J., *Aerial shot record technology*, Journal os Seismic Exploration, 1, 251-264, 1992.
- [3] Boechat, J. B., et. al., *Migração RTM orientada ao alvo*, 9º congresso da SBGF, 2005.
- [4] Bonomi, E. Brieger, L. M., Pieroni, E., Arienti, M. T., Cazzola, L. and Marchetti, P., *PSPI: Streamlining 3D echo-reconstructive imaging*, Proc. of the 5th European SGI/Cray MPP Workshop, Bologna, 1999.
- [5] Bulcão, A., *Modelagem e Migração Reversa no tempo empregando operadores elásticos e acústicos*, Tese de doutorado - UFRJ, 2004.
- [6] Bulcão, A., Soares Filho, D. M., Mansur, W. J., *Aerial Shot Records: migração reversa no tempo e a influência dos critérios para a determinação das matrizes de tempo de trânsito*, apresentado no 9º Congresso Internacional da SBGF, 09/2005.
- [7] Cerjan, C., Kosloff, D. and Reshef, M., *A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations*, Geophysics, v. 50, pp. 705-708, 1985.

- [8] Cetale Santos, M. A., *Migração em profundidade por rotação de fase dos campos de onda  $qP$  e  $qSV$  em meios com simetria polar local*, Tese de Doutorado - PUC-RJ, 2003.
- [9] Cetale Santos, M. A., et. al., *Phase-shift anisotropic depth migration using controlled illumination: Stability in relation to addition of random noise*, 9º congresso da SBGF, 2005.
- [10] Claerbout, J. F., *Imaging the Earth's Interior*, Blackwell Scientific Publications, 1985.
- [11] Cohen, G. and Joly, P., *Fourth-order schemes for the heterogeneous acoustics equation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 80, 397-407, 1990.
- [12] Cunha, P. E. M., *Estratégias eficientes para migração reversa no tempo pré-empilhamento 3-D em profundidade pelo método das diferenças finitas*, Dissertação de Mestrado - UFBA, 1997.
- [13] Cunha, P. E. M. e Palermo, L. A. C., *A multi-source version of the reverse time migration (RTM)*, 8º congresso da SBGF, 2003.
- [14] Freire, R. M. L., *Migração por mudança de fase em duas etapas* Tese de Doutorado - UFBA, 1988.
- [15] Gazdag, J., *Wave equation migration with the phase shift method*, Geophysics, 43, 1342-1351, 1978.
- [16] Gazdag, J. and Sguazzero, P., *Migration of seismic data by phase shift plus interpolation*, Geophysics, 49, 124-131, 1984.
- [17] Ji, J., *Controlled illumination by wavefront synthesis*, SEP-79, 1-18, 1997.

- [18] Ji, J., *Angle-dependent reflectivity by wavefront synthesis imaging*, SEP-80,1-477, 2001.
- [19] Palermo, L. A. C., *Migração reversa no tempo: uma abordagem multifocal*, Tese de Mestrado - UFRJ, 2002.
- [20] Popovici, A. M., *Phase shift plus interpolation and split step Fourier migration*, SEP-72, 139-152, 1991.
- [21] Popovici, A. M., *3-d and 2-d phase shift plus interpolation and split step Fourier modeling*, SEP-73, 351-366, 1997.
- [22] Poquechoque, G. C. A., *Migração pré-empilhamento usando operadores de extrapolação "split-step"*, Dissertação de Mestrado - UFBA, 2002.
- [23] Reynolds, A. C., *Boundary conditions for the numerical solution of wave propagation problems*, Geophysics, v.43, pp. 1099-1110, 1978.
- [24] Sava, P. and Fomel, S., *Time-shift imaging condition*, in 5th Ann. Internat. Mtg. Soc. of Expl. Geophys., 2005.
- [25] Scales, J. A., *Theory of Seismic Imaging*, Notes for graduate courses, Colorado School of Mines, 1997.  
(<http://landau.Mines.EDU/samizdat/imaging/index.html>)
- [26] Silva, R. S. e Almeida, R. C., *Métodos numéricos, Interpolação/Aproximação*, Laboratório Nacional de Computação Científica - Brasil, 2003.
- [27] Soares Filho, D.M., *Modelagem Sísmica, Notas de aula*, PEC/COPPE/UFRJ, 2003.

- [28] Tenenbaum, R. A., *Introdução à Acústica e Processamento de Sinais*, *Notas de aula*, Programa de Engenharia Mecânica, COPPE/UFRJ, 2003.
- [29] Yilmaz, O., *Seismic data processing*, Investigation in Geophysics, 2, SEG, 1987.

# Apêndice A

## Interpolação Linear

Para cada passo em profundidade, o campo de onda é propagado utilizando todas as velocidades de referência e então interpolado. A escolha destas velocidades se baseia na verificação da maior e da menor velocidades naquela profundidade do modelo. Os valores a serem usados estarão entre estes extremos e terão intervalos iguais entre si. A interpolação utilizada foi uma interpolação linear no domínio da frequência e do espaço, que se dá da forma descrita a seguir.

Sendo  $P^n(x, z, \omega)$  o campo propagado com a velocidade  $v_z^n$  à partir do campo na profundidade anterior, e  $P(x, z, \omega)$  o campo resultante da interpolação, tem-se que

$$P(x, z, \omega) = P^n(x, z, \omega) \frac{v_z^{n+1} - v(x, z)}{v_z^{n+1} - v_z^n} + P^{n+1}(x, z, \omega) \frac{v(x, z) - v_z^n}{v_z^{n+1} - v_z^n}, \quad (\text{A.1})$$

com  $v_z^n \leq v(x, z) \leq v_z^{n+1}$ , ou seja, a interpolação só será feita no ponto  $(x, z)$  para os campos  $P^n$  e  $P^{n+1}$  quando a velocidade real  $v(x, z)$  estiver entre as velocidades de referência  $v_z^n$  e  $v_z^{n+1}$ .

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)