

UMA ESTIMATIVA DE ERRO APOSTERIORI PARA ANÁLISE MECÂNICA DE
ESTRUTURAS DE MATERIAIS HETEROGÊNEOS

Gustavo Bechara Meurer

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM
ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho, D.Sc.

Prof. Luiz Landau, D.Sc.

Dr. Rubens Mítri Sydenstricker, D.Sc.

Dr. Anderson Moraes, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

NOVEMBRO DE 2005

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

MEURER, GUSTAVO BECHARA

Uma estimativa de erro a posteriori para análise mecânica de estruturas de materiais heterogêneos [Rio de Janeiro]2005.

IX, 74, p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M. Sc., Engenharia Civil, 2005).

Dissertação – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Elementos Finitos
2. Mecânica dos sólidos
3. Erro a posteriori

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

A Elvira, Dilermando, Clarice e Daniela.

Agradecimentos

Gostaria de oferecer meus sinceros votos de agradecimento:

- Ao amigo, orientador e mestre Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho, pelo incondicional apoio dado ao desenvolvimento desta dissertação e acima de tudo pela energia e pelas idéias fundamentais para a realização desse trabalho;
- Ao Prof. Luiz Landau, que foi o principal responsável por tornar possível a realização desse trabalho. Pelo empenho em garantir um curso de excelente infra-estrutura e qualidade e pela compreensão das necessidades de cada pessoa que compõe sua equipe no Laboratório de Métodos Computacionais em Engenharia;
- Aos professores do Curso de Sistemas Petrolíferos da COPPE, que em muito contribuíram para a realização deste trabalho;
- Aos funcionários do Laboratório de Métodos Computacionais em Engenharia (LAMCE) e Núcleo de Atendimento em Computação de Alto Desempenho (NACAD), em especial à Mônica, Sérgio e Magda (LAMCE) e Mara, Albino e Myrian (NACAD);
- Agradeço à Agência Nacional do Petróleo (ANP) que através do Programa de Recursos Humanos 02 (PRH-02) forneceu o suporte financeiro para a execução deste trabalho;
- Aos amigos Marcos, Rubens e Renato, autênticos cúmplices deste trabalho, pela atenção e pelas importantes sugestões apresentadas nas diferentes versões desta dissertação;

- À minha namorada Claudia, pelo incentivo, paciência, apoio e compreensão nos momentos de ausência. Ao meu pai, por ver seu filho vencer mais essa importante etapa na vida. A minha mãe e minhas irmãs, que mesmo na ausência sempre apoiaram e se orgulharam de minhas conquistas;

Finalizando, eu gostaria de agradecer a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para que esse trabalho fosse possível.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

UMA ESTIMATIVA DE ERRO APOSTERIORI PARA ANÁLISE MECÂNICA DE
ESTRUTURAS DE MATERIAIS HETEROGÊNEOS

Gustavo Bechara Meurer

Novembro/2005

Orientador: Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho

Programa: Engenharia Civil

Neste trabalho avaliamos o desempenho de diferentes estimativas de erro para o método dos elementos finitos. Foram consideradas as estimativas de erro baseadas na norma de tensão e de energia propostas por Zienkiewicz e Zhu e o estimador de erro recentemente proposto por Sydenstricker et al. que leva em consideração as heterogeneidades. Este estimador foi implementado e validado apenas em problemas bi-dimensionais. Já neste trabalho o estimador foi implementado para elementos tetraédricos lineares, validado e aplicado a problemas geológicos reais, em três dimensões, incluindo a análise de tensões de modelos de bacia sedimentar em escala regional.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

A-POSTERIORI ERROR ESTIMATION IN FINITE ELEMENT ANALYSIS
TO HETEROGENEOUS MATERIALS

Gustavo Bechara Meurer

November/2005

Advisor: Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho

Department: Civil Engineering

In this work, the performance of different error estimators for finite element methods were evaluated. We considered the error estimators based on stress and energy norm proposed by Zienkiewicz and Zhu and the error estimator recently proposed by Sydenstricker et al. This error estimator is able to deal with heterogeneous materials. The estimator proposed by Sydenstricker et al. was implemented and validated only in two-dimensional problems. In our work the error estimator was implemented for tetrahedral elements, validated and applied to true three-dimensional geological problems. Including a stress analysis of regional sedimentary basin scale models.

Índice Analítico

CAPÍTULO 1	1
INTRODUÇÃO	1
1.1. REVISÃO DA LITERATURA.	2
1.2. PROPOSTA.	4
1.3. ORGANIZAÇÃO DO TEXTO.	5
CAPÍTULO 2	6
MEF PARA ELASTICIDADE 3D	6
2.1. EQUAÇÕES GOVERNANTES.	7
2.2. FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.	15
2.3. ELEMENTOS DE INTERFACE PARA ANÁLISE 3D.	18
2.4. SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES.	19
2.5. IMPLEMENTAÇÃO DA ESTRUTURA DE DADOS POR ARESTAS.	21
CAPÍTULO 3	23
ESTIMATIVAS DE ERRO APOSTERIORI	23
3.1. ESTIMADORES DE ERRO CONVENCIONAIS.	23
3.2. PROPOSTA DA NOVA METODOLOGIA.	26
3.3. NORMA DE TENSÃO DO ERRO DE CONTATO.	30
3.4. ADAPTATIVIDADE.	32
3.5. QUALIDADE DOS ELEMENTOS DA MALHA.	33
3.6. ANÁLISE DE ERRO PARA ELEMENTOS DE INTERFACE.	34
3.7. OBTENÇÃO DAS FACES DOS ELEMENTOS DA MALHA.	34
CAPÍTULO 4	35
EXEMPLOS NUMÉRICOS	35

4.1. VALIDAÇÃO.	35
4.2. EXEMPLOS.	36
4.3. APLICAÇÃO NO MODELO DA BACIA SEDIMENTAR DO RECÔNCAVO.	44
4.4. APLICAÇÃO NO MODELO DA BACIA SEDIMENTAR DA COLÔMBIA.	54
<u>CAPÍTULO 5</u>	<u>67</u>
CONCLUSÕES	67
TRABALHOS FUTUROS	68
<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>	<u>69</u>

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A exploração é uma atividade estratégica da cadeia produtiva do petróleo, e estudos para melhorar as técnicas e sistemas de análise dessa etapa são fundamentais para a indústria. Uma das fases da exploração é a análise da evolução da bacia sedimentar. Nessa etapa, a utilização de técnicas de modelagem e simulação para identificação das áreas mais promissoras e prospectos é fundamental.

A análise de bacias sedimentares envolve estudos evolutivos da variação de distribuição espacial e temporal de tensões e deformações. Para esses estudos são necessários modelos 3D que representem os vários fenômenos envolvidos como o fluxo de calor e mecânica da fratura, entre outros. Análises numéricas fornecem resultados aproximados e ao empregar-se um método numérico, tal como o Método dos Elementos Finitos, na modelagem dos problemas físicos em bacias sedimentares, refinamentos da malha são necessários. Esses refinamentos visam homogeneizar a qualidade da solução, e ocorrem devido aos erros na modelagem da geometria complexa, das falhas, das heterogeneidades etc.

Entre os componentes do erro presente em tais análises a mais importante é o erro devido à discretização, que se traduz no não cumprimento das equações que regem o problema. Uma quantificação desse erro deve ser adotada com a finalidade de prover o analista de maior confiabilidade nos resultados obtidos e permitir o refinamento adequado da malha, da forma mais econômica possível.

Os métodos convencionais de estimativa de erro apresentam dificuldade em avaliar os resultados de tensão em um domínio constituído de materiais heterogêneos. Com o desenvolvimento de uma nova metodologia para medida de erro, esperamos conseguir melhores resultados que aqueles das estimativas convencionais. Essa melhora poderá ser observada quando se avaliarem os resultados de tensão em uma análise mecânica de uma bacia sedimentar, exemplo típico de domínio constituído de materiais heterogêneos com variações súbitas de propriedades físicas.

O Brasil possui 29 bacias com potencial para exploração de petróleo e necessita de todas as ferramentas para o desenvolvimento do setor de exploração e produção. Logo, novas ferramentas de análise para avaliação de dados são essenciais à diminuição dos riscos e redução dos custos, principalmente nas operações em águas profundas, devido aos altos custos envolvidos.

1.1. Revisão da Literatura.

Desde o começo da simulação computacional de fenômenos físicos, a presença do erro numérico tem sido uma das maiores preocupações dos analistas. O que é o erro aproximado nas simulações? Como esse erro pode ser medido, controlado e também minimizado? Essas questões têm acompanhado a mecânica computacional desde as primeiras aplicações dos métodos numéricos em problemas de engenharia e na ciência. Avanços concretos têm ocorrido em direção à resolução dessas questões na forma de teorias e métodos de avaliação de erro.

Desde o final dos anos 70 várias estratégias vêm sendo desenvolvidas para estimativa de erros intrínsecos à discretização do método dos elementos finitos (MEF). Basicamente temos dois tipos de avaliação do erro: a avaliação de erro a priori que fornece informações sobre o comportamento assintótico dos erros de discretização, não auxiliando no refino da malha. Ao contrário, os estimadores de erro a posteriori fazem estimativas do resultado obtido com determinada malha, sendo usados em métodos adaptativos onde a malha pode ser localmente refinada.

O sucesso da avaliação a posteriori abriu um novo capítulo na mecânica e na matemática computacional, revolucionando o assunto. Através de uma efetiva estimativa de erro, a possibilidade de controle completo sobre o processo computacional através de algoritmos adaptativos surgiu. Mais importante, o analista pode usar a estimativa a posteriori como medida independente da qualidade da simulação estudada.

Tradicionalmente, o analista usa a simulação numérica e, quando ciente de que existem erros, é raro interessar-se com a quantificação deste. A qualidade da simulação é geralmente qualificada por argumentos baseados na experiência do analista.

O interesse na estimativa de erro a posteriori para o Método dos Elementos Finitos começou com os trabalhos de Babuska e Rheinboldt [4], [5], [6]. As técnicas de avaliação de estimativa de erro a posteriori foram desenvolvidas obtendo-se valores aproximados do erro de energia ou uma norma aproximada. Isso formou as bases para os procedimentos adaptativos de malha e minimização do erro. Esses estudos tiveram as primeiras propostas apresentadas por Carey [13].

O uso da formulação da energia complementar para se obter estimativas de erro a posteriori foi apresentado por Veubeke [20]. Outra técnica para obter estimativas de erro foi desenvolvida por Ladezeve e Leguillon [25], consistindo em resolver, elemento por elemento, problemas complementares junto com o conceito de equilíbrio de dados de contorno. Idéias relacionadas podem ser encontradas em [22], [32]. Foram desenvolvidos também estimadores baseados nos resíduos dos elementos, como, por exemplo, o descrito por [16], [17] e aplicado a vários problemas na mecânica e na física.

Durante os anos 80, a procura por um método adaptativo levou a uma grande variedade de estimativas de erro a posteriori, incluindo o método de equilíbrio de dados de contorno [9], [10].

Zienkiewicz e Zhu [40] desenvolveram uma técnica bastante eficiente para um grande número de problemas e aproximações de elementos finitos. Esse método consiste em: obtida a solução em uma malha, essa é suavizada e a solução suavizada é comparada

com o resultado, obtendo-se assim uma estimativa para o erro. Mais recentemente, essa aproximação foi modificada obtendo-se os métodos de super-convergência [37], [38].

Muitos estudos foram divulgados no emprego de estimativas de erro a posteriori para implementação computacional de estratégias de refinamento de malha [28], [29], [30]. Existem de forma geral três alternativas para o refinamento da malha. No método h, os elementos são subdivididos em elementos menores e este método é adequado para o tratamento de singularidades. Já o método p consiste em enriquecer o espaço solução aumentando-se o grau das funções de interpolação. A terceira é a combinação dos métodos anteriores, conhecido como método h-p.

Nos anos 90, as técnicas básicas de avaliação de erro já estavam bastante estudadas, encontrando-se vasto material, destacando-se o livro de Oden [2], e a atenção se voltou para aplicações nos mais variados problemas.

O estudo de estimativa de erro a posteriori para aproximações de elementos finitos está bem amadurecido. A ênfase agora tem sido no desenvolvimento de novas técnicas para o estudo da robustez dos estimadores e a identificação dos limites de seu desempenho [7], [8].

1.2. Proposta.

O objetivo deste trabalho é desenvolver e testar em ambiente 3D a metodologia de estimativa de erros a posteriori de tensão para problemas heterogêneos apresentada em [33]. Essa nova metodologia melhora as estimativas de erro para problemas de materiais heterogêneos onde os métodos convencionais apresentam dificuldade em avaliar os resultados de tensão.

Comprovada a eficiência do método, faremos o estudo do campo de tensões em modelos tridimensionais de bacias sedimentares, contemplando:

- A utilização de modelos geológicos reais 3D de bacias sedimentares;

- A análise por elementos finitos do campo de tensões, incluindo o emprego de estrutura de dados por arestas para otimização da solução iterativa do sistema de equações lineares;
- O desenvolvimento de procedimentos para a análise de erros a posteriori de tensão;
- A aplicação dos procedimentos computacionais para medida de erro desenvolvidos aos modelos geológicos 3D;
- A visualização dos resultados.

1.3. Organização do Texto.

No capítulo 2 são mostrados os elementos básicos de elasticidade 3D, com elementos apropriados para o sólido e as interfaces (falhas). Descrevem-se as equações governantes e a discretização em elementos finitos, e são apresentados também a implementação da estrutura de dados por arestas, o método dos gradientes conjugados preconditionado para a solução do sistema linear resultante e os elementos de interface.

No capítulo 3 é apresentada a formulação da nova metodologia de medida de erro a posteriori e sua respectiva implementação.

O capítulo 4 apresenta os exemplos utilizados para validação da metodologia. Nesse capítulo aplicamos a avaliação de erro nos modelos de bacias sedimentares e comparamos com resultados de metodologias mais utilizadas.

No capítulo 5 são apresentadas as conclusões e recomendações advindas deste trabalho.

Capítulo 2

MEF para Elasticidade 3D

Este capítulo apresenta elementos da teoria da elasticidade 3D utilizada neste trabalho. A teoria da elasticidade se ocupa do estudo do comportamento dos corpos deformáveis mediante solicitações externas. Tais esforços provocam deslocamentos relativos entre os pontos materiais ao longo de toda a estrutura. Como a maioria dos materiais possui propriedades elásticas, na medida em que ocorrem deformações, surgem tensões internas.

O tratamento teórico da elasticidade pode ser encontrado em [35], [36], enquanto que a ênfase na utilização do método dos elementos finitos em [21], [41].

De acordo com os objetivos deste trabalho, a verificação da robustez da teoria de avaliação de erro a posteriori e a avaliação de seus resultados podem ser efetuadas, considerando-se simplesmente problemas envolvendo elasticidade linear e isotrópica, independente do tempo (não são considerados efeitos não-lineares e de inércia) e sob o domínio de pequenas deformações.

Inicialmente, é apresentada a estrutura matemática das equações governantes, relevantes à implementação numérica do problema. É apresentada também a formulação do Método dos Elementos Finitos para a solução aproximada das equações diferenciais parciais resultantes. Acrescenta-se uma breve discussão sobre elementos de interface com espessura nula para a representação de falhas, juntas e descontinuidades entre corpos sólidos.

Em seguida, apresentamos a técnica de estrutura de dados por aresta e o método dos gradientes conjugados preconditionado, empregados na solução do sistema de equações lineares.

2.1. Equações Governantes.

Em um problema elástico, temos um corpo sólido submetido à ação externa de forças de superfície e de volume. As cargas externas são equilibradas por um estado de tensões e a configuração deformada resultante é definida por um estado de deformações e por um campo de deslocamentos. Teremos então seis componentes de tensão, seis de deformação e três componentes de deslocamento, mostrados adiante. Observa-se que o número total de incógnitas é quinze.

Para definir o modelo matemático que representa o problema elástico, vamos apresentar as 15 equações básicas:

- Três equações de equilíbrio;
- Seis relações entre deformação e deslocamento;
- Seis equações constitutivas.

Observa-se que o número total de equações que definem o problema elástico corresponde ao número total de incógnitas.

A solução do problema deve satisfazer também às condições de contorno, como apresentadas adiante.

2.1.1. Tensão, Deformação e Deslocamento.

Seja um paralelepípedo infinitesimal, de faces perpendiculares aos eixos cartesianos conforme Figura 2.1. Esse elemento, retirado do interior de um corpo sujeito a carregamento externo, permite a análise das tensões e das deformações em cada ponto interno da estrutura. Em cada face do paralelepípedo atuam uma tensão normal (perpendicular à face) e duas cisalhantes contidas no plano da face, e orientadas segundo os eixos cartesianos que lhes são paralelos. Dessa forma, τ_{xy} é a componente de tensão que atua na face perpendicular ao eixo X , orientada na direção Y , por exemplo.

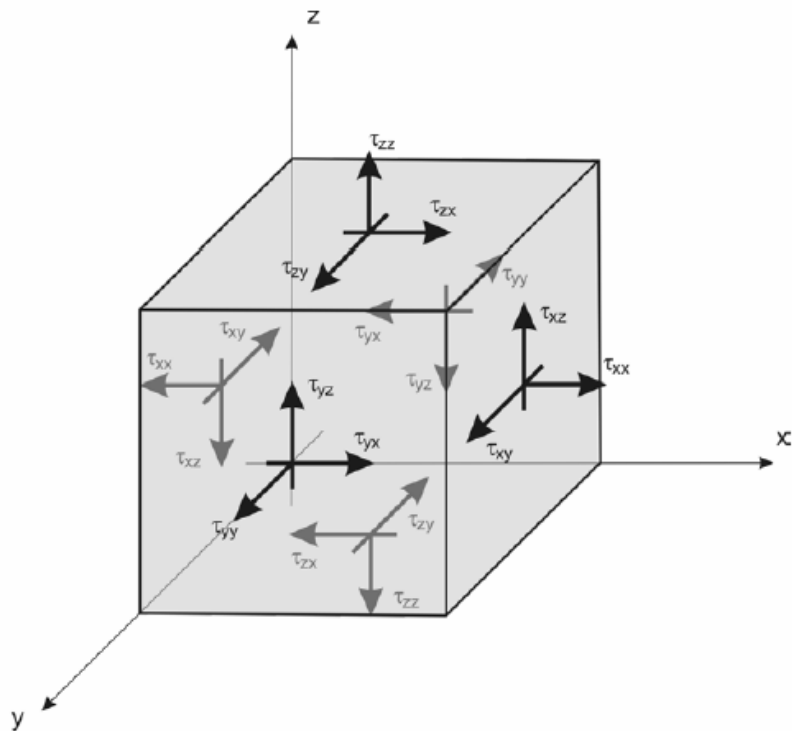


Figura 2.1 – Estado de tensões em torno de um ponto do corpo.

Considere-se um plano oblíquo que seccione o paralelepípedo, conforme mostrado na Figura 2.2. As forças resultantes das tensões que atuam nas três faces do tetraedro infinitesimal formado pelo corte devem ser capazes de equilibrar a força resultante da tensão neste plano. Ou seja, a partir de nove componentes de tensão que atuam em três faces adjacentes entre si, é possível determinar o vetor tensão que atua em um plano qualquer.

Além disso, a conservação de momento angular no elemento impõe que, em faces adjacentes, tensões cisalhantes paralelas ao mesmo plano assumam valores iguais, logo

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ e $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Portanto, no espaço, um estado de tensões fica definido por seis componentes.

O estado de tensões em um ponto qualquer é dado pelo tensor de tensões de Cauchy, como mostrado por [36],

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Sendo $\sigma_x = \tau_{xx}$, $\sigma_y = \tau_{yy}$, $\sigma_z = \tau_{zz}$ as tensões normais, onde o primeiro índice corresponde ao plano perpendicular ao eixo considerado e o segundo índice corresponde à direção da tensão.

Essas componentes podem ser agrupadas na seguinte forma vetorial:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz})^T \quad (2.2)$$

O vetor tensão $\boldsymbol{\sigma}_n$, que atua em um ponto de um plano qualquer, pode ser determinado com auxílio do tensor $\boldsymbol{\sigma}$. Conhecida a normal ao plano, cujos cosenos diretores formam o vetor unitário \mathbf{n} normal à face, demonstra-se [36] a seguinte relação:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_x \\ \boldsymbol{\sigma}_y \\ \boldsymbol{\sigma}_z \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (2.3)$$

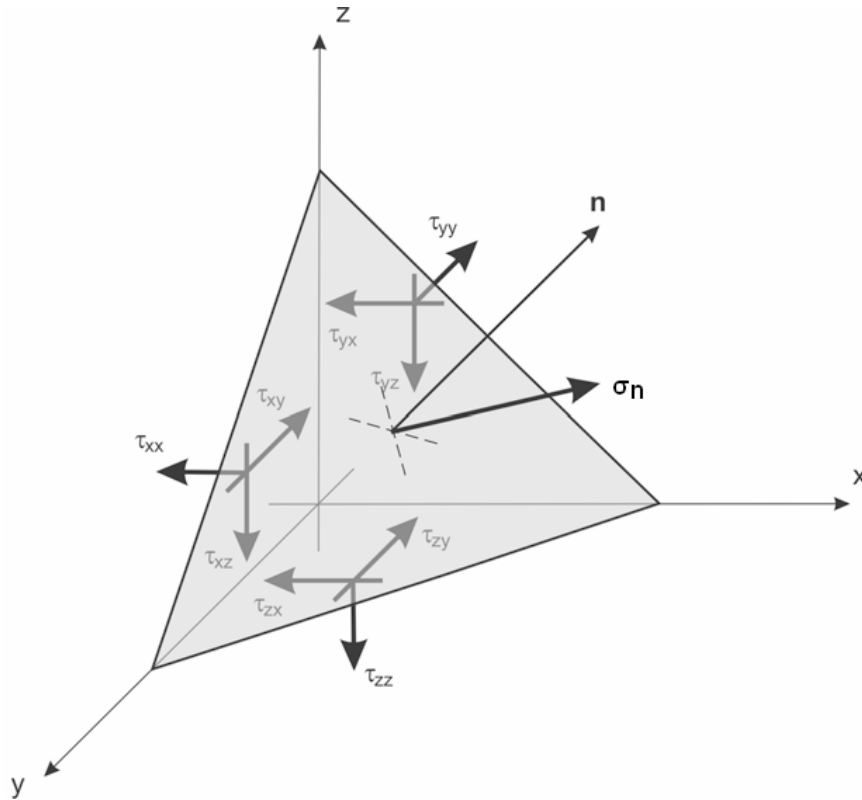


Figura 2.2 – Tensão em um plano qualquer.

Como resultado dessas solicitações de tensão, cada ponto do corpo passa da posição original para uma nova (correspondente à configuração deformada), sofrendo deslocamentos em cada direção cartesiana X, Y, Z .

Sendo \mathbf{u} o vetor de deslocamentos, temos:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

onde u, v e w são os deslocamentos em cada direção cartesiana X, Y, Z .

Assim como a tensão, a deformação é uma grandeza tensorial. A variação unitária no comprimento de um lado do paralelepípedo é o alongamento relativo, ou deformação linear específica. Dessa forma, ε_{xx} é o alongamento relativo da direção X . A variação do ângulo, ou distorção entre duas arestas da face, inicialmente perpendiculares, é a

deformação angular ocorrida na face. Desta forma, γ_{xy} é a distorção ocorrida nas faces paralelas ao plano XY em torno do eixo Z .

A Figura 2.3 ilustra esses dois exemplos.

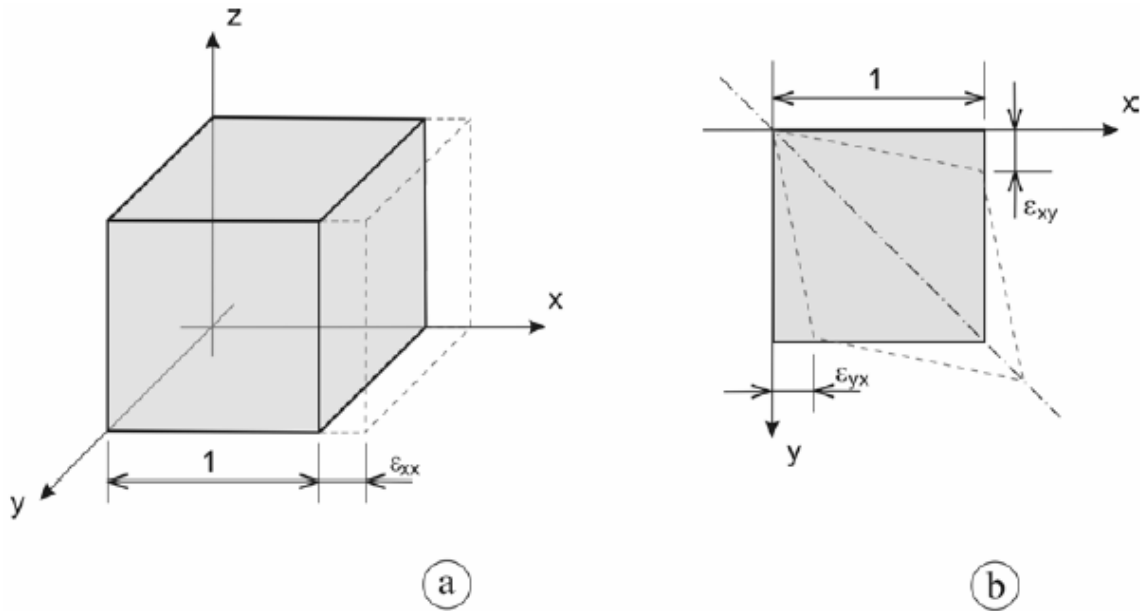


Figura 2.3 – (a) deformação linear específica; (b) deformação angular.

Devido à simetria das tensões, faces paralelas têm a mesma distorção. Portanto, são seis componentes que definem um estado de deformações. O tensor de deformações é dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0,5\gamma_{xy} & 0,5\gamma_{xz} \\ 0,5\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0,5\gamma_{yz} \\ 0,5\gamma_{zx} & 0,5\gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

onde, para pequenas deformações, têm-se

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.6)$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \gamma_{xz} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \gamma_{yz} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

As componentes do tensor de deformações também podem ser agrupadas em um vetor:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz})^T \quad (2.7)$$

2.1.2. Equações de Equilíbrio.

As equações de equilíbrio de um cubo arbitrariamente pequeno no interior do corpo são obtidas através do equilíbrio entre as forças internas (resultantes das tensões) e as forças externas (de volume) que atuam sobre o cubo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

2.1.3. Forma matricial das relações Deformação e Deslocamento.

Podemos reescrever a equação (2.6) em uma forma matricial. Portanto,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

ou ainda,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

2.1.4. Relação Constitutiva.

As equações constitutivas que permitem obter as tensões a partir das deformações são definidas pela seguinte expressão matricial:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.12)$$

onde \mathbf{C} é a matriz constitutiva ou matriz elástica, simétrica de ordem 6x6.

A matriz constitutiva tem a forma:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

onde E é o módulo de elasticidade e ν é o coeficiente de Poisson.

Essa expressão da matriz constitutiva define uma relação linear de tensões e deformações e, portanto, representa materiais de comportamento elástico linear.

2.1.5. Condições de contorno.

A solução deve atender a duas possíveis condições estabelecidas na superfície Γ do corpo: condições de contorno de deslocamento ou de tensões prescritas. As condições de contorno que prescrevem os deslocamentos \mathbf{g} do corpo em determinada região Γ_g de sua superfície, são dadas por:

$$\mathbf{u}(X, Y, Z) = \mathbf{g} \text{ em } \Gamma_g \quad (2.14)$$

As condições que prescrevem forças de superfície \mathbf{h} normais à região Γ_h , são:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ em } \Gamma_h \quad (2.15)$$

Note que $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h$ e $\Gamma_g \cap \Gamma_h = \emptyset$.

2.2. Formulação do Método dos Elementos Finitos.

O método dos elementos finitos consiste em subdividir o domínio Ω em subdomínios Ω_e . Assim, o sólido é dividido em elementos, constituindo uma malha de tal forma que:

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{nel} \Omega_e \text{ e } \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad (2.16)$$

onde nel é o número de elementos da malha.

Existem vários tipos de elementos e os elementos utilizados nesse trabalho, para discretização dos sólidos, serão tetraedros lineares.

A Figura 2.4 representa, esquematicamente, um corpo discretizado através de uma malha de elementos finitos, tendo sido realçado um dos elementos que a constitui.

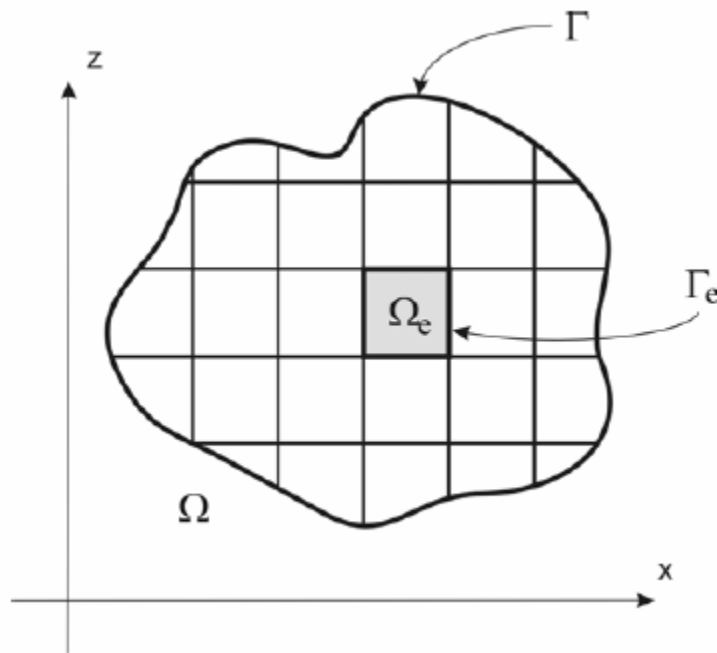


Figura 2.4 – Malha de elementos finitos.

Seja o subdomínio Ω_e correspondente a um elemento onde os deslocamentos são aproximados por $\hat{\mathbf{u}}_e$, resultado de uma interpolação feita a partir de deslocamentos a serem determinados para alguns pontos tomados em Ω_e .

Esses pontos são os nós da malha e, geralmente, estão dispostos no contorno do elemento, de forma a interconectar um com os outros, podendo, também, adotar pontos no seu interior. Os deslocamentos nodais \mathbf{u}_i^e (incógnitas do problema) são parâmetros de escala que multiplicam, cada qual, uma função de interpolação. Em geral, as funções de interpolação utilizadas são funções lineares, ou polinomiais, das coordenadas X, Y, Z , definidas no subdomínio Ω_e . Há tantos parâmetros quanto o número de graus de liberdade do elemento (ngl). A interpolação dos deslocamentos é então:

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}}_e = \sum_{i=1}^n N_i \mathbf{u}_i^e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}^e \quad (2.17)$$

A matriz \mathbf{N} contém funções de interpolação ou funções de forma N_i (uma para cada um dos nós do elemento)

Para a transformação do modelo matemático contínuo, em um modelo numérico discreto, primeiramente, é obtida uma formulação integral a partir da formulação diferencial do problema elástico-estático; correspondente às equações (2.9), (2.15) e (2.16):

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0 & \text{em } \Omega \\ u_i = g_i & \text{em } \Gamma_g \quad (i, j = 1, 2, 3; \text{ somatório em } j) \\ \sigma_{ij} n_j = h_i & \text{em } \Gamma_h \end{cases} \quad (2.18)$$

A primeira linha desse conjunto de expressões representa as equações de equilíbrio, e as duas seguintes, as condições de contorno.

Para a obtenção da formulação integral, utiliza-se o método dos resíduos ponderados, base do método de Galerkin [21], que conduz à seguinte formulação:

$$\int_{\Omega} \nabla \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^T \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Gamma_h} \nabla \mathbf{u}^T \mathbf{h} d\Gamma = 0 \quad (2.19)$$

onde $\nabla \mathbf{u}$ representa uma pequena variação no campo de deslocamentos, compatível com as condições de contorno de deslocamentos prescritos essenciais à formulação, e

$\nabla \boldsymbol{\varepsilon}$ é a correspondente variação do campo de deformações. Na equação (2.19), a primeira integral representa o trabalho virtual das forças internas, a segunda o trabalho virtual das forças de corpo e a última o trabalho virtual das forças de superfície.

Substituindo as equações constitutivas (2.12) e as relações entre deformações e deslocamentos (2.11) na formulação integral (2.19), esta fica expressa somente em termos do vetor de deslocamentos \mathbf{u} . Com uso de (2.17) é obtido um conjunto de equações discretas que regem o equilíbrio do elemento (e) em termos do vetor \mathbf{u}^e .

$$\left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega \right) \mathbf{u}^e - \int_{\Omega} \mathbf{N} \mathbf{f}_e d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{N} \cdot \mathbf{h}_e d\Gamma_h = 0 \quad (2.20)$$

onde \mathbf{B} é a matriz de deformação, composta por derivadas das funções de interpolação.

A equação (2.20) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F}^e \quad (2.21)$$

onde:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega \quad (2.22)$$

e

$$\mathbf{F}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N} \mathbf{f}_e d\Omega - \int_{\Gamma_h} \mathbf{N} \mathbf{h}_e d\Gamma_h = 0 \quad (2.23)$$

Uma vez que os nós de um elemento sejam tomados no seu contorno, os elementos vizinhos compartilharão estes nós com ele, ou melhor, apresentarão graus de liberdade comuns. Haverá tantas equações de equilíbrio quanto o número de elementos da malha (*nel*), todas devendo ser satisfeitas simultaneamente. O conjunto dessas equações, inter-relacionadas através dos graus de liberdade comuns, é resumido pela seguinte equação, que rege o equilíbrio global da estrutura:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (2.24)$$

A matriz de rigidez global é obtida da seguinte maneira:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{nel} \mathbf{K}^e \quad (2.25)$$

E o vetor de forças global é obtido por:

$$\mathbf{F} = \sum_{e=1}^{nel} \mathbf{F}^e \quad (2.26)$$

Essa operação representa o espalhamento das matrizes de rigidez \mathbf{K}^e de todos os elementos da malha na matriz de rigidez \mathbf{K} da estrutura.

2.3. Elementos de interface para análise 3D.

Elementos de interface, para simulação de falhas em domínios representados por elementos tetraédricos lineares, são estudados em [15] e [34]. Esses elementos possuem forma prismática, com duas faces triangulares de 3 nós e 3 graus de liberdade por nó, como mostra a Figura 2.5. Vale ressaltar que os elementos de interface considerados possuem espessura nula, ou seja, as linhas tracejadas possuem comprimento nulo.

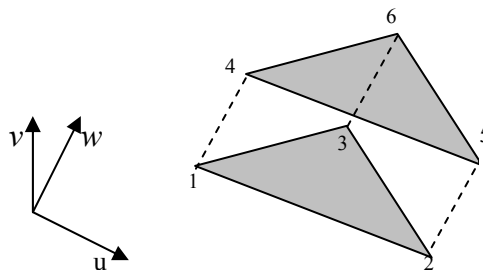


Figura 2.5 – Elemento de interface - incidência e geometria.

Os deslocamentos da face superior e inferior são interpolados separadamente por funções lineares, e deformações são computadas em relação ao deslocamento como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{h} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{Bmatrix} w'_{\text{sup}} - w'_{\text{inf}} \\ u_{\text{sup}} - u_{\text{inf}} \\ v_{\text{sup}} - v_{\text{inf}} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

onde h é a espessura do elemento, u e v são os deslocamentos no plano e w é o deslocamento transversal.

As tensões são obtidas a partir das deformações e propriedades elásticas como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.28)$$

onde \mathbf{C} é a matriz constitutiva.

Maiores detalhes sobre os parâmetros, a estratégia computacional adotada na representação desses efeitos e os procedimentos adotados na geração de elementos de interface são encontrados em [15] e [34].

2.4. Solução do Sistema de Equações Lineares.

O Método dos Gradientes Conjugados [3], [18] explora o fato de que a solução do sistema de equações,

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (2.29)$$

pode ser substituído pela minimização do funcional quadrático ou funcional de energia dado por,

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{F} \quad (2.30)$$

Prova-se que a convergência do Método dos Gradientes Conjugados é proporcional à razão entre o maior e o menor autovalor do espectro de \mathbf{K} , λ_n e λ_1 , respectivamente.

$$\rho(\mathbf{K}) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \quad (2.31)$$

onde ρ é denominado razão espectral ou número de condicionamento espectral e mede a eficiência do método numérico. Quando $\rho(\mathbf{K}) \rightarrow 1$ o método é eficiente. Caso contrário, quando a razão espectral se apresenta muito maior que a unidade, torna-se necessário a utilização de uma técnica de pré condicionamento, que tem como efeito reduzir o número do condicionamento espectral e, conseqüentemente, diminuir o número de iterações para obtenção da solução.

Logo, com o objetivo de atingir uma convergência mais rápida, o Método dos Gradientes Conjugados pode ser aplicado a um sistema equivalente ao original, mas que tenha sido pré-condicionado. Pré-multiplicando-se a equação original do sistema pelo operador discreto \mathbf{B}^{-1} temos:

$$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F} \quad (2.32)$$

e aplicando-se o Método dos Gradientes Conjugados ao sistema pré-condicionado acima, obtém-se o algoritmo dos Gradientes Conjugados Pré-condicionado, cujos principais passos são apresentados em [26].

Em geral, uma matriz de pré-condicionamento \mathbf{B} , para ser eficiente, deve atender a alguns requisitos básicos: seus componentes devem ser facilmente determinados, além de não necessitar armazenamento excessivo em relação à matriz \mathbf{K} .

O pré-condicionador implementado neste trabalho é do tipo bloco-diagonal-nodal [18],[31]. Este pré-condicionador é de fácil implementação, envolve baixo número de

operações e tem efeito favorável no escalonamento de variáveis de grandezas dimensionais diferentes.

2.5. Implementação da Estrutura de Dados por Arestas.

A distinção relativa ao método dos gradientes conjugados, aplicado à estrutura de dados por arestas dos elementos, concentra-se na estratégia de multiplicação matriz-vetor. Equivalentemente à abordagem por elementos, a matriz global \mathbf{K} , agora, é construída através das contribuições individuais das arestas e , naturalmente, a estratégia de multiplicação matriz-vetor é executada aresta por aresta ou por agrupamentos especiais de arestas. Os itens a seguir apresentam a descrição do processo de cálculo da matriz de aresta, aspectos computacionais referentes à demanda de memória e multiplicação matriz-vetor para o elemento utilizado neste trabalho, tetraedros lineares.

A implementação da estrutura de dados por aresta, na solução do sistema de equações lineares, implica na reformulação da construção da matriz do sistema, correspondendo ao desmembramento da matriz de rigidez do elemento em suas arestas. As arestas representam a interferência recíproca entre os graus de liberdade de um elemento, que correspondem às submatrizes constituintes da matriz deste. Portanto, a matriz de aresta, para um grau de liberdade por nó, qualquer que seja o elemento, é dada por [26].

$$\mathbf{T}_{ij}^e = \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_{ij} & \mathbf{T}_{ij} \\ \mathbf{T}_{ij} & -\mathbf{T}_{ij} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

onde \mathbf{T}_{ij} é o coeficiente correspondente à aresta ij do elemento e .

O cálculo dos coeficientes totais de uma aresta, levando-se em consideração as contribuições de todos seus elementos concorrentes, é

$$\mathbf{T}_{ij}^A = \begin{bmatrix} -\sum_{e=1}^n \mathbf{K}_{ij}^e & \sum_{e=1}^n \mathbf{K}_{ij}^e \\ \sum_{e=1}^n \mathbf{K}_{ij}^{e^T} & -\sum_{e=1}^n \mathbf{K}_{ij}^{e^T} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

onde n é o total de elementos concorrentes à aresta ij e \mathbf{K}_{ij}^e é a submatriz do elemento e correspondente aos graus de liberdade dos nós i e j da aresta. Portanto, a matriz de aresta para um grau de liberdade por nó corresponde a uma matriz 2×2 , para dois graus de liberdade por nó, 4×4 , três graus de liberdade por nó, e assim por diante. Para o elemento tetraédrico, essas arestas confundem-se com as arestas geométricas, totalizando seis arestas. Os elementos de interface geram também seis arestas geométricas e nove computacionais.

Maiores detalhes sobre a estratégia computacional adotada e os procedimentos adotados na estrutura por arestas são encontrados em [26] para o elemento tetraédrico e em [34] para elementos de interface.

Capítulo 3

Estimativas de Erro A posteriori

Nesse capítulo apresentamos a extensão da nova estimativa de erro proposta por Sydenstricker *et al.* [33] em duas dimensões e desenvolvida para três dimensões no intuito de aplicar os resultados às análises de tensões em bacias sedimentares.

3.1. Estimadores de erro convencionais.

A fim de comparar os resultados obtidos com o novo estimador, foi implementado um método de estimador de erro muito comum, proposto em [40].

Este estimador, para os elementos do presente trabalho, considera a tensão em um nó n que é avaliada como:

$$\sigma_n = \frac{1}{\sum_{E=1}^{NELcon} V_E} \sum_{E=1}^{NELcon} V_E \sigma_E \quad (3.1)$$

onde σ_E representa a tensão, V_E o volume do elemento E e $NELcon$ representa o número de elementos conectados ao nó n . A partir das tensões nodais, obtém-se o campo de tensões suavizadas para cada elemento através da expressão:

$$\boldsymbol{\sigma}_E^* = \sum_{i=1}^{NNOEL} \mathbf{N}_i \boldsymbol{\sigma}_i \quad (3.2)$$

onde \mathbf{N}_i e $\boldsymbol{\sigma}_i$ representam respectivamente as funções de interpolação e as tensões nos nós do elemento (calculadas conforme a equação (3.1)). O campo do erro de tensões em um elemento é então avaliado pela expressão:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_E = \boldsymbol{\sigma}_E^* - \boldsymbol{\sigma}_E \quad (3.3)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_E$ representa as tensões do elemento.

3.1.1. Norma de energia.

Normalmente, utiliza-se a norma de energia para aferição da magnitude do erro. Em problemas de elasticidade, a norma de energia do erro é obtida para cada elemento E pela expressão:

$$\|e_w\|_E^2 = \frac{1}{2} \int_{V_E} \Delta \boldsymbol{\sigma}_E^T \mathbf{C}^{-1} \Delta \boldsymbol{\sigma}_E dV \quad (3.4)$$

onde V_E é o volume do elemento.

A norma de energia do erro do modelo é calculada pela expressão abaixo, sendo nel o número de elementos da malha.

$$\|e_w\|_{tot}^2 = \sum_{E=1}^{nel} \|e\|_E^2 \quad (3.5)$$

A magnitude do erro medido na norma de energia depende das unidades utilizadas. Portanto, deve-se preferencialmente usar o erro relativo η_w :

$$\eta_w = 100 \sqrt{\frac{\|e_w\|_{tot}^2}{U + \|e_w\|_{tot}^2}} \% \quad (3.6)$$

onde U é a energia de deformação total da malha calculada como:

$$U = \sum_{E=1}^{NEL} U_E \quad (3.7)$$

sendo U_E a energia de deformação de um elemento E dada por:

$$U_E = \frac{1}{2} \int_{V_E} \boldsymbol{\sigma}_E^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_E dV \quad (3.8)$$

3.1.2. Norma de tensão.

Outra norma frequentemente utilizada é a norma de tensão ou L_2 . A norma L_2 para avaliar o erro em cada elemento é calculada como:

$$\|e_\sigma\|_E^2 = \int_{V_E} \Delta \boldsymbol{\sigma}_E^T \Delta \boldsymbol{\sigma}_E dV \quad (3.9)$$

onde $\Delta \boldsymbol{\sigma}_E$ é calculado pela equação (3.3).

A aferição do erro total da malha $\|e_\sigma\|_{tot}$ pela norma L_2 é dada por,

$$\|e_\sigma\|_{tot}^2 = \sum_{E=1}^{nel} \|e_\sigma\|_E^2 \quad (3.10)$$

já o erro relativo para norma de tensão η_σ pode ser definido como,

$$\eta_\sigma = 100 \sqrt{\frac{\|e_\sigma\|_{tot}^2}{\|\boldsymbol{\sigma}\|_{tot}^2 + \|e_\sigma\|_{tot}^2}} \% \quad (3.11)$$

onde a tensão total da malha $\|\boldsymbol{\sigma}\|_{tot}$ é dada por,

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_{tot}^2 = \sum_{E=1}^{nel} \int_{V_E} \boldsymbol{\sigma}_E^T \boldsymbol{\sigma}_E dV \quad (3.12)$$

3.2. Proposta da nova metodologia.

Neste trabalho, propomos que erros de tensão sejam medidos ao longo de superfícies (áreas) de contato entre elementos da malha e não ao longo do volume discretizado como nos itens anteriores. Também propomos que as componentes de tensão sejam referidas a um sistema de eixos local x, y e z , onde o plano xy é definido pela superfície de contato entre dois elementos, como ilustra a Figura 3.1. O sistema de coordenadas globais XYZ e as componentes de translação na direção de cada eixo também estão indicadas. Note que a superfície de contato entre os elementos E_i e E_j é denotada como Γ_{i-j} . Neste estudo, convencionamos que o eixo local z é normal a Γ_{i-j} .

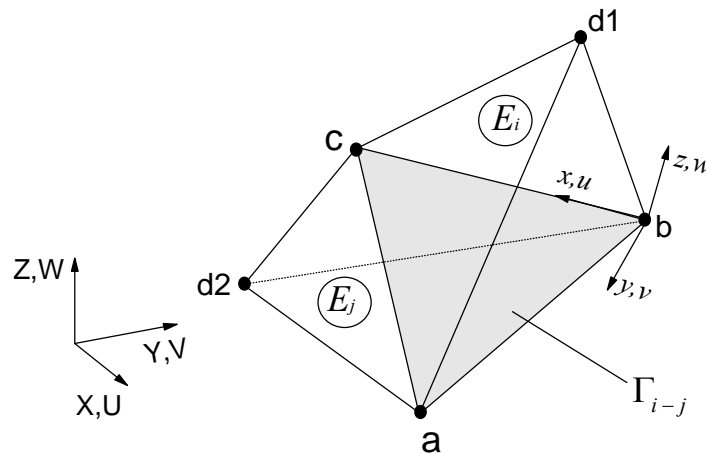


Figura 3.1 – Superfície de contato entre dois elementos vizinhos.

Partindo da teoria da elasticidade 3D e da formulação de elementos finitos apresentados no segundo capítulo, temos que o domínio discretizado através de elementos tetraédricos, com campo de deslocamento \mathbf{u} interpolado como (2.17), onde as funções de interpolação garantem a continuidade C^0 . O campo de tensões é fornecido por (2.12) e o campo de deformações é obtido a partir do campo de deslocamentos em (2.11). Já para os elementos de interface, o campo de tensões é fornecido por (2.28) e o campo de deformações é obtido a partir do campo de deslocamentos em (2.27).

Para o elemento tetraédrico, o campo de tensões possui seis componentes de tensão e foi definido em (2.2). Já o campo de deformações também possui seis componentes, agrupadas como mostrado em (2.7).

Nas equações (2.2) e (2.7), x , y e z constituem um sistema de eixos ortogonais, em relação aos quais são referidas as translações u , v e w (respectivamente) assim como as componentes de tensão. Esses eixos podem ser escolhidos a critério do analista e, de modo geral, o mesmo sistema de eixos (sistema global) é utilizado para avaliar o erro de tensões em todo domínio. Também é comum estipular-se que todas as componentes de tensão devem ser contínuas entre elementos e tensões suavizadas são utilizadas para estimar o erro de tensões como em (3.3).

Definimos tensões de contato, medidas pelo elemento E_i sobre sua superfície de contato com outro elemento E_j , como:

$$\boldsymbol{\sigma}_{E_i}^T \Big|_{\Gamma_{i-j}} = \begin{pmatrix} \sigma_z & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

onde σ_z , τ_{xz} e τ_{yz} são referidas ao sistema local xyz e medidas sobre Γ_{i-j} (plano xy local). Impondo-se o equilíbrio entre as tensões que atuam nos dois lados de Γ_{i-j} , concluímos que apenas as três componentes de tensão contidas em $\boldsymbol{\sigma}_{E_i}^T \Big|_{\Gamma_{i-j}}$ devem, necessariamente, ser contínuas entre elementos. Por isso, propomos que o vetor de tensões suavizadas possua apenas 3 componentes de tensão e seja calculado como:

$$\boldsymbol{\sigma}^* \Big|_{\Gamma_{i-j}} = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\sigma}_{E_i} \Big|_{\Gamma_{i-j}} + \boldsymbol{\sigma}_{E_j} \Big|_{\Gamma_{i-j}} \right) \quad (3.14)$$

Sydenstricker et al. [33] demonstraram para o caso 3D que, se o campo de deslocamentos garantir continuidade C^0 de todas suas componentes (u , v e w), então as derivadas de deslocamento em relação aos eixos locais x e y , pertencentes a face Γ_{i-j} , também são contínuas, como resume a Tabela 3.1.

Continuidade obrigatória	Continuidade não obrigatória
$\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

Tabela 3.1-Continuidade de tensões para equilíbrio de contato.

Continuidade garantida	Continuidade não garantida
$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}$ $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}$	$\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z}$

Tabela 3.2 – Continuidade para campos de deslocamento C^0 .

É importante observar que as continuidades obrigatórias, indicadas na Tabela 3.2, são adequadamente garantidas pelo campo de deslocamento C^0 .

Conforme a equação (2.13), para material isotrópico a matriz constitutiva tem a forma:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C1 & C2 & C2 & & & \\ C2 & C1 & C2 & & & \\ C2 & C2 & C1 & & & \\ & & & G & & \\ & & & & G & \\ & & & & & G \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

As equações (2.11), (2.12), (3.15) fornecem:

$$\sigma_{E_i} \Big|_{\Gamma_{i-j}} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_z \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} C2_{E_i} \frac{\partial u}{\partial x} + C2_{E_i} \frac{\partial v}{\partial y} \\ G_{E_i} \frac{\partial w}{\partial x} \\ G_{E_i} \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} C1_{E_i} \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{E_i} \\ G_{E_i} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{E_i} \\ G_{E_i} \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{E_i} \end{array} \right\} \quad (3.16)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{E_i}|_{\Omega_{E_i}} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C1_{E_i} \frac{\partial u}{\partial x} + C2_{E_i} \frac{\partial v}{\partial y} \\ C2_{E_i} \frac{\partial u}{\partial x} + C1_{E_i} \frac{\partial v}{\partial y} \\ G_{E_i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} C2_{E_i} \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{E_i} \\ C2_{E_i} \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{E_i} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

As componentes de tensão contidas em $\boldsymbol{\sigma}_{E_i}|_{\Omega_{E_i}}$ podem ser denominadas ‘tensões internas de um elemento E_i ’, pois não participam dos equilíbrios na interface entre elementos.

Devemos notar que as derivadas contidas no primeiro termo do lado direito das equações (3.16), (3.17) são contínuas, enquanto que no segundo termo temos derivadas em relação ao eixo local z , cuja continuidade não é garantida. Assim, se a malha for constituída de um único material, a componente de tensão τ_{xy} , medida em relação ao sistema de eixos locais xyz , será necessariamente contínua entre elementos, pois depende apenas das derivadas em relação a x e y (veja o lado direito da equação (3.17)).

Imagine, ainda, o contato de dois elementos de materiais distintos com coeficiente de Poisson nulo (de modo que $C2_{E_1} = C2_{E_2} = 0$). Neste caso, a equação (3.16) fornece:

$\sigma_z|_{E_1} = C_{E_1} \frac{\partial w}{\partial z}$ e $\sigma_z|_{E_2} = C_{E_2} \frac{\partial w}{\partial z}$ e, para que $\sigma_z|_{E_1} = \sigma_z|_{E_2}$, é preciso de $\frac{\partial w}{\partial z}$ seja adequadamente descontínuo (visto que $C1_{E_1} \neq C1_{E_2}$). Portanto, para uma análise com materiais heterogêneos, campos de deslocamento de continuidade C^1 (ou superior), mesmo que disponíveis, não devem ser utilizados.

Finalmente, se as propriedades elásticas forem contínuas, $\boldsymbol{\sigma}_{E_i}|_{\Gamma_{i-j}}$ será contínuo apenas se houver continuidade das derivadas de deslocamento em relação à z . Se isso ocorrer, então a continuidade de $\boldsymbol{\sigma}_{E_i}|_{\Omega_{E_i}}$ também estará assegurada. Portanto, todo o erro da

análise pode ser avaliado estimando-se apenas o erro cometido na predição de $\sigma_{E_i}|_{\Gamma_{i-j}}$.

Se este erro for nulo, então o erro na predição de $\sigma_{E_i}|_{\Omega_{E_i}}$ também será.

3.3. Norma de tensão do erro de contato.

No item anterior definimos a tensão de contato $\sigma_E|_{\Gamma_{i-j}}$ pela equação (3.13) e também o vetor de tensões suavizadas $\sigma^*|_{\Gamma_{i-j}}$ calculado em (3.14), ambas possuindo apenas 3 componentes de tensão.

Propomos que a aferição da magnitude do erro em uma malha de elementos finitos seja feita pela análise das tensões de contato medidas respectivamente nos elementos E_i e E_j pela expressão:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{E_i}|_{\Gamma_{i-j}} &= \sigma_{E_i}|_{\Gamma_{i-j}} - \sigma^*|_{\Gamma_{i-j}} \\ \Delta\sigma_{E_j}|_{\Gamma_{i-j}} &= \sigma_{E_j}|_{\Gamma_{i-j}} - \sigma^*|_{\Gamma_{i-j}}\end{aligned}\tag{3.18}$$

Como se pode observar nessa expressão, o erro em uma das faces do elemento pode ser escrito em função da diferença entre a tensão calculada e a suavizada.

Teremos então que o quadrado da norma de tensões do erro de contato $\|e_{\sigma_r}\|^2$ de uma malha será:

$$\|e_{\sigma_r}\|_{tot}^2 = \int_{\Gamma} \left(\Delta\sigma_{E_i}|_{\Gamma_{i-j}}^T \Delta\sigma_{E_i}|_{\Gamma_{i-j}} + \Delta\sigma_{E_j}|_{\Gamma_{i-j}}^T \Delta\sigma_{E_j}|_{\Gamma_{i-j}} \right) d\Gamma\tag{3.19}$$

sendo que:

$$\|e_{\sigma_r}\|_{tot}^2 = \sum_1^{N_{\Gamma}} \|e_{\sigma_{\Gamma_{i-j}}}\|^2\tag{3.20}$$

onde N_Γ é o número de superfícies de contato da malha, $\|e_{\sigma_{\Gamma_{i-j}}}\|^2$ é o quadrado da norma de tensão do erro de contato de uma dada superfície Γ_{i-j} calculada como:

$$\|e_{\sigma_{\Gamma_{i-j}}}\|^2 = \int_{\Gamma_{i-j}} \left(\Delta \boldsymbol{\sigma}_{E_i} \Big|_{\Gamma_{i-j}}^T \Delta \boldsymbol{\sigma}_{E_i} \Big|_{\Gamma_{i-j}} + \Delta \boldsymbol{\sigma}_{E_j} \Big|_{\Gamma_{i-j}}^T \Delta \boldsymbol{\sigma}_{E_j} \Big|_{\Gamma_{i-j}} \right) d\Gamma \quad (3.21)$$

A norma de tensão de contato pode ser então estimada localmente para um elemento tetraédrico como:

$$\|e_{\sigma_\Gamma}\|_E^2 = \sum_{n=1}^4 \|e_{\sigma_{\Gamma_n}}\|^2 * \frac{A_{\Gamma_n}}{A_{\Gamma_E}} \quad (3.22)$$

onde A_{Γ_n} é a área da face de contato e A_{Γ_E} é a área total das faces do elemento.

O erro relativo para norma de tensão de contato η_Γ pode ser definido como:

$$\eta_\Gamma = 100 \sqrt{\frac{\|e_{\sigma_\Gamma}\|_{tot}^2}{\|e_{\sigma_\Gamma}\|_{tot}^2 + \|\sigma_\Gamma\|_{tot}^2}} \% \quad (3.23)$$

onde o quadrado da norma de tensão de contato total da malha $\|\sigma_\Gamma\|_{tot}^2$ é calculada como:

$$\|\sigma_\Gamma\|_{tot}^2 = \int_\Gamma \left(\boldsymbol{\sigma}_{E_i} \Big|_{\Gamma_{i-j}}^T \boldsymbol{\sigma}_{E_i} \Big|_{\Gamma_{i-j}} + \boldsymbol{\sigma}_{E_j} \Big|_{\Gamma_{i-j}}^T \boldsymbol{\sigma}_{E_j} \Big|_{\Gamma_{i-j}} \right) d\Gamma \quad (3.24)$$

onde Γ representa toda a superfície de contato da malha, ou seja:

$$\Gamma = \sum_1^{N_\Gamma} \Gamma_{i-j} \quad (3.25)$$

onde N_Γ é o número de superfícies de contato Γ_{i-j} da malha, temos:

$$\|\sigma_\Gamma\|_{tot}^2 = \sum_1^{N_\Gamma} \int_{\Gamma_{i-j}} \left(\boldsymbol{\sigma}_{E_i} \Big|_{\Gamma_{i-j}}^T \boldsymbol{\sigma}_{E_i} \Big|_{\Gamma_{i-j}} + \boldsymbol{\sigma}_{E_j} \Big|_{\Gamma_{i-j}}^T \boldsymbol{\sigma}_{E_j} \Big|_{\Gamma_{i-j}} \right) d\Gamma_{i-j} \quad (3.26)$$

3.4. Adaptatividade.

Através dos métodos de avaliação da norma do erro a posteriori mostrados anteriormente, podemos estabelecer um limite para o erro e , dessa forma, orientar o processo de refinamento ou desrefinamento da malha, adotando:

$$\alpha^* \leq \bar{\alpha} \quad (3.27)$$

onde α^* é o valor da norma do erro obtida e $\bar{\alpha}$ é o limite estabelecido.

Podemos definir o erro médio dos elementos de uma malha como:

$$e_m = \sqrt{\frac{\|e\|_{tot}^2}{nel}} \quad (3.28)$$

O erro médio é um parâmetro importante em métodos adaptativos. Para um determinado número de equações, a malha ideal é aquela em que a distribuição de erros por elemento é a mais uniforme possível [41]. Para chegar à malha ótima pode-se adotar uma estratégia de refinamento, onde até que seja alcançado um nível de erro pré-especificado, são refinados os elementos com um erro maior que o erro médio.

Pode-se estabelecer o limite do erro para cada elemento E dado em [15] pela expressão:

$$\|e\|_E \leq \bar{\alpha} \sqrt{\frac{a + \|e\|_{tot}^2}{nel}} \quad (3.29)$$

onde o segundo membro da expressão do erro corresponde ao erro médio por elemento, e_m e a varia para cada estimativa sendo: $a \equiv U^2$, para norma de energia do erro; $a \equiv \|\sigma\|_{tot}^2$, para norma L2 de tensões; $a \equiv \|\sigma_\Gamma\|_{tot}^2$, para norma de tensão de contato.

Assim o indicador de refinamento ou desrefinamento é dado por [15] sendo:

$$\xi_E = \log_{10} \left(\frac{\|e\|_E}{e_m} \right) \quad (3.30)$$

onde valores maiores que a unidade indicam a necessidade de refinamento.

3.5. Qualidade dos elementos da malha.

Avaliamos a qualidade da forma dos elementos através do procedimento descrito em [15], devido à sua simplicidade de implementação e eficiência computacional, com boa capacidade de avaliação da qualidade dos elementos tetraédricos.

Neste procedimento, a qualidade da forma de um determinado elemento é verificada avaliando-se inicialmente uma aresta característica do elemento, através da expressão:

$$S_{rms} = \sqrt{\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 S_i^2} \quad (3.31)$$

onde S_i é o comprimento de cada aresta do tetraedro. Note que, para um elemento regular, com arestas de mesmo comprimento S , temos $S_{rms} = S$. A qualidade geométrica do elemento é, então, aferida pela razão entre o volume do cubo de lado característico e o volume do elemento, ou seja:

$$\gamma = \frac{S_{rms}^3}{V} \quad (3.32)$$

onde V é o volume do elemento tetraédrico. Pode-se demonstrar que, se o elemento for regular com todas as arestas de mesmo comprimento (elemento ideal), então a expressão (3.32) fornece $\gamma = 8,485$ e é desejável que a geometria dos elementos se mantenha com $\gamma \leq 250$ como apresenta [27].

3.6. Análise de erro para elementos de interface.

Após a geração das malhas que representam o domínio, contemplando as descontinuidades geométricas e de materiais inerentes ao problema, são introduzidos elementos de interface ao longo das superfícies de falha. Esses elementos permitem que efeitos de deslizamento e de separação dos domínios em contato através das superfícies de falha sejam considerados.

A teoria de avaliação de erro a posteriori, apresentada anteriormente, também pode ser estendida para elementos de interface.

As definições de tensão de contato $\sigma_E|_{\Gamma_{i-j}}$ pela equação (3.13) e também o vetor de tensões suavizadas $\sigma^*|_{\Gamma_{i-j}}$ calculado em (3.14), possuem apenas 3 componentes de tensão, assim como o campo de tensões do elemento de interface. Portanto, os erros de tensão de contato, medidos respectivamente nos elementos E_i e E_j serão então calculados pelas componentes do elemento.

No capítulo seguinte apresentamos exemplos de aplicação desses elementos de interface e a validação da análise de erro baseada na norma de tensão de contato para os referidos elementos.

3.7. Obtenção das faces dos elementos da malha.

Para o cálculo da nova metodologia de estimativa de erro a posteriori implementada neste trabalho é necessária a obtenção das faces dos elementos da malha e a respectiva indicação dos elementos vizinhos a ela. A utilização de um método tradicional de armazenamento e endereçamento dessas faces pode implicar na sobrecarga de processamento, tornando o método desvantajoso. Nesse trabalho foi utilizada a técnica de espalhamento (*hash*) que permite economia de tempo e memória. A implementação e detalhes dessa técnica pode ser encontrada em Martins[26] no apêndice F.2.

Capítulo 4

Exemplos Numéricos

A estimativa de erro para três dimensões foi implementada e testada em modelos simplificados de blocos formados por camadas heterogêneas. Depois de comprovada sua eficiência, o método foi aplicado a modelos complexos de bacias sedimentares, comprovando a diminuição das indicações de erro da malha nas interfaces entre dois materiais distintos. Com isso, houve redução na necessidade de refinamentos de malha sem comprometimento dos resultados.

4.1. Validação.

Procuramos comparar a estimativa de erro de tensão de contato com a estimativa de erro baseada na norma de energia $\|e_W\|$ e com a estimativa de erro calculada pela norma de tensão $\|e_\sigma\|$ propostas em [40].

As normas de erro permitem avaliar a distribuição do erro ao longo da malha, e serão comparadas com a norma de tensão do erro de contato $\|e_{\sigma_T}\|$. Os erros relativos permitem avaliar a qualidade global do resultado fornecido por uma dada malha, e serão comparados com o erro relativo de tensão de contato η_{σ_T} .

Ao longo deste trabalho iremos nos referir as estimativas de erro, e aos referentes erros relativos como proposto na Tabela 4.1.

Norma de energia do erro	$\ e_W\ $	erro relativo de energia	η_W
Norma de tensão do erro	$\ e_\sigma\ $	erro relativo de tensão	η_σ
Norma de tensão do erro de contato	$\ e_{\sigma_T}\ $	erro relativo de tensão de contato	η_{σ_T}

Tabela 4.1-Normas e erros relativos.

4.2. Exemplos.

Utilizaremos como exemplo um sólido submetido a um deslocamento horizontal aplicado a uma das laterais. Esse exemplo será usado para comparação com os resultados obtidos por Sydenstricker *et al* [33] em suas análises 2D.

Foram utilizadas três condições distintas, uma com o sólido homogêneo e com sua base fixa e outras duas condições com sólido heterogêneo: uma com o sólido formado por camadas horizontais e outra com camadas verticais, ambas com os deslocamentos em X restringidos na base e os deslocamentos em Y restringidos na lateral oposta a aplicação do deslocamento.

4.2.1. Sólido homogêneo sob compressão.

Nesse exemplo aplicamos um deslocamento de 57,6 m em um bloco homogêneo com modulo de elasticidade de 300.000,00 e coeficiente de Poisson de 0,25. A Figura 4.1 indica a geometria do bloco que tem 192 metros de comprimento, 128 metros de altura e a espessura é unitária ($h = 1.00$). A malha é de tetraedros regulares e tem a orientação indicada na figura.

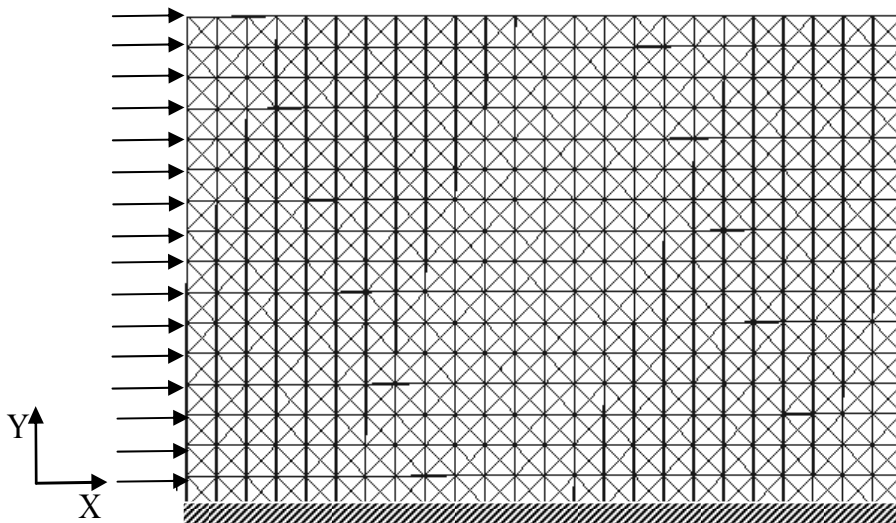


Figura 4.1 – Sólido com base fixa e deslocamento lateral.

Esse problema foi analisado considerando-se 3 malhas, cujas propriedades são dadas na Tabela 4.2, onde neq , nno , nel e N_f representam respectivamente os números de equações (incógnitas nodais), de nós, de elementos e de faces de contato.

N	malha	neq	nno	nel	N_f
1	24x16x5	2368	850	1920	4688
2	48x32x5	9344	3234	7680	18592
3	96x64x5	55680	18915	61440	135808

Tabela 4.2 – Propriedades das malhas.

A Figura 4.2 apresenta a distribuição das estimativas de erro por elemento. As malhas com 24, 48, 96 divisões referidas a X são as mesmas divisões utilizadas por Sydenstricker *et al* [33] para os quadrados em 2D, sendo que, nas análises 3D cada bloco gerou 5 tetraedros. Os valores máximos e mínimos dos erros medidos não foram explicitados, visto que agora o interesse é de avaliar em que regiões os erros estão concentrados.

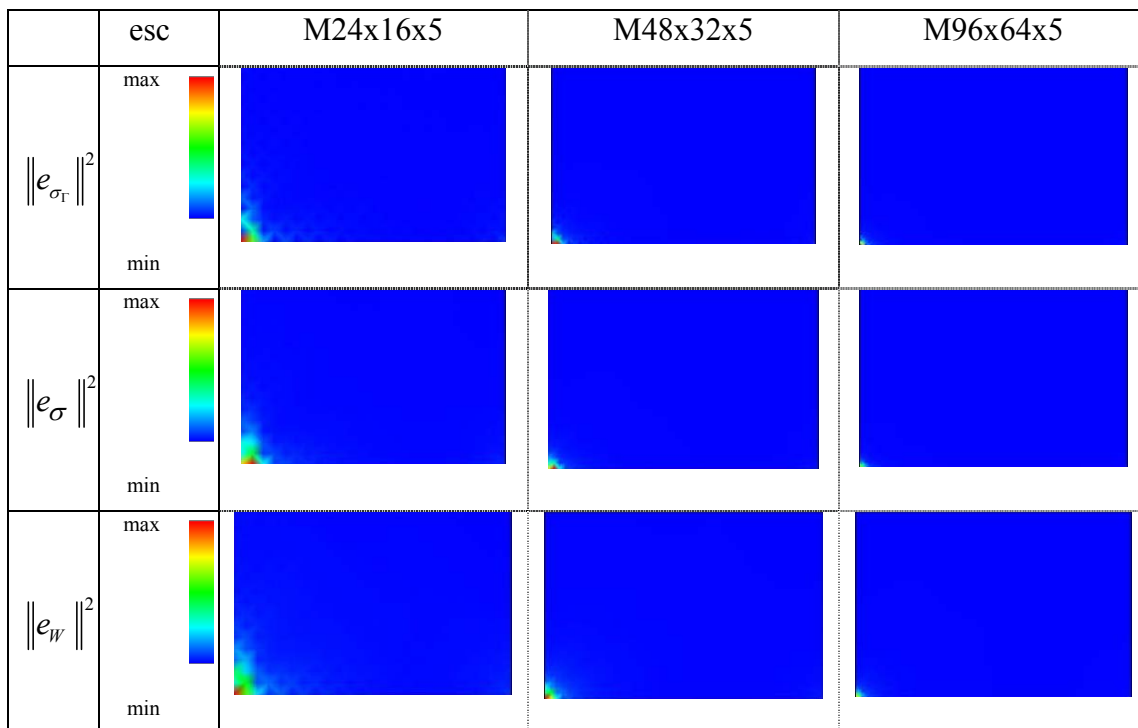


Figura 4.2 – Distribuição do erro

Podemos observar que o resultado, para norma de tensão do erro de contato proposta, demonstra as mesmas concentrações que as fornecidas pelas estimativas tradicionais.

A Tabela 4.3 apresenta os erros relativos das malhas calculados pelas estimativas de erro avaliadas.

N	<i>malha</i>	η_{σ_T}	η_{σ}	η_W
1	24x16x5	57.51%	63.18%	1320.67%
2	48x32x5	51.22%	54.17%	963.35%
3	96x64x5	48.27%	51.37%	426.32%

Tabela 4.3 – Resultados de erro relativo.

4.2.2. Sólido heterogêneo sob compressão.

Neste exemplo, consideramos dois painéis heterogêneos, de espessura $h=1,00$, submetidos a um deslocamento na direção X de $57,6\text{ m}$.

Os painéis são constituídos de dois materiais isotrópicos distintos, formando camadas horizontais e verticais como nas Figura 4.3 e Figura 4.5 respectivamente. Várias malhas foram consideradas e, suas propriedades estão na Tabela 4.4, sempre com a orientação indicada.

N	malha	neq	nnos	nel	N_T
1	24x16x5	2007	850	1920	4688
2	48x32x5	7855	3234	7680	18592
3	96x64x5	49759	18915	61440	135808

Tabela 4.4 – Propriedades das malhas.

Painel heterogêneo com camadas horizontais.

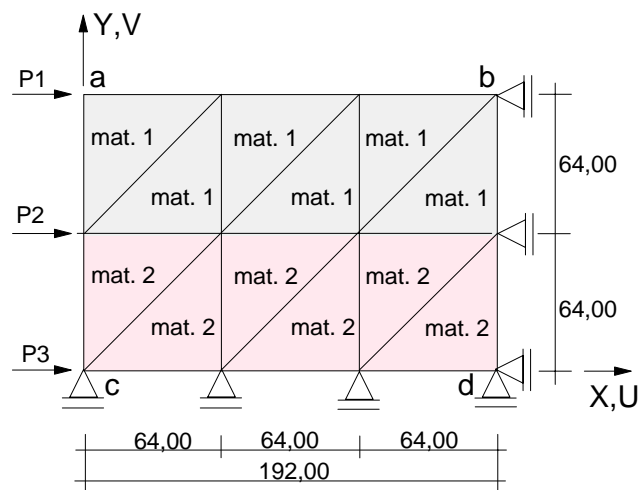


Figura 4.3 – Camadas horizontais. (Fonte: Sydenstricker *et al* [33])

Aqui consideramos o painel da Figura 4.3 com os materiais apresentando as seguintes propriedades elásticas: $E_{mat.1} = 300.000,00$, $E_{mat.2} = 30.000,00$, $\nu_{mat.1} = 0,25$, $\nu_{mat.2} = 0,25$.

Consideramos um deslocamento horizontal aplicado na lateral esquerda. Assim, nas camadas 1 (superior) e 2 (inferior) aplicamos deslocamentos de 57,6 m.

Resolvemos esse problema utilizando para malha as mesmas divisões propostas por Sydenstricker *et al* [33] com 24x16x5, 48x32x5 e 96x64x5 divisões em X, Y e Z.

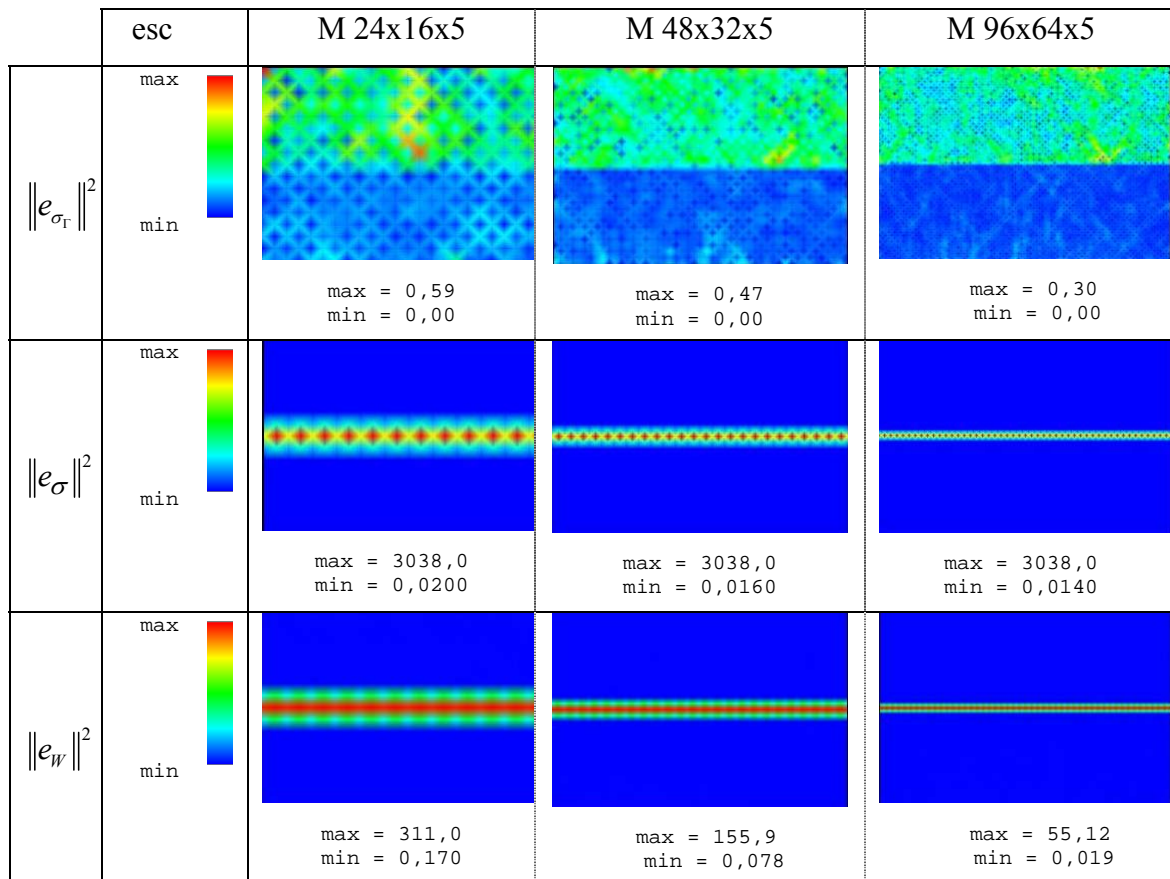


Figura 4.4 – Distribuição das estimativas de erro para camadas horizontais.

Na Figura 4.4 , apresentamos plotagens da distribuição de erro nos elementos fornecida pelas diversas normas. A norma de tensão do erro de contato é muito próxima de zero para todas as malhas consideradas. As normas de tensão e de energia acusam equivocadamente erros no contato das camadas, onde ocorre uma natural descontinuidade de tensões.

Na Tabela 4.5, temos os erros relativos apresentados pelas três normas. Note-se que o erro indicado pela norma de erro de tensões de contato é nulo. Note-se ainda que os

erros relativos de energia e tensão diminuem à medida que a malha é refinada, visto que o tamanho dos elementos vizinhos à fronteira das camadas diminui, restringindo assim o domínio ao longo do qual o mesmo erro é integrado.

N	malha	N_S	η_{σ_r}	η_{σ}	η_w
1	24x16x1	4688	0.0%	12.48%	340.00%
2	48x32x1	18592	0.0%	8.75%	130.68%
3	96x64x2	135808	0.0%	6.16%	40.13%

Tabela 4.5 – Resultados de erros relativos.

Painel heterogêneo com camadas verticais.

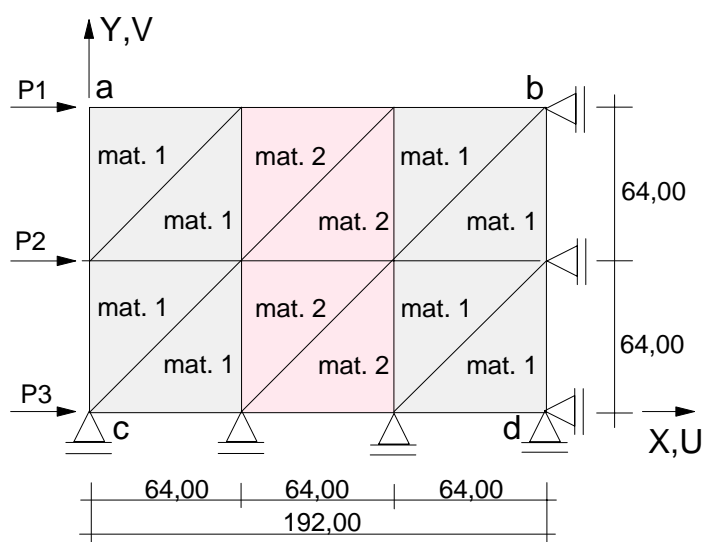


Figura 4.5 – Camadas verticais. (Fonte: Sydenstricker *et al* [33])

Utiliza-se o bloco heterogêneo anterior, agora formado por camadas verticais, que também foi proposto por Sydenstricker *et al* [33] em suas análises 2D e com as mesmas propriedades e condições de contorno: deslocamento na direção Y e Z restringidos na base e na lateral oposta ao carregamento o deslocamento em X foi restringido. O bloco é submetido a um deslocamento uniforme $d_x = 57,6 m$ aplicado na lateral esquerda. A malha é constituída de tetraedros.

Devemos notar que, como $E_{mat.2} < E_{mat.1}$, teremos $\varepsilon_x|_{mat.2} > \varepsilon_x|_{mat.1}$. Ainda, como os materiais têm o mesmo coeficiente de Poisson, há uma tendência de que $\varepsilon_y|_{mat.2} > \varepsilon_y|_{mat.1}$. Contudo, nas divisas da camada central com as das extremidades, a mesma deformação ε_y é imposta a ambos os materiais, acarretando tensões de cisalhamento nas interfaces.

Essas tensões devem ser contínuas, ou seja, nas divisas das camadas desejamos que $\tau_{xy}|_{mat.1} = \tau_{xy}|_{mat.2}$, o que não é assegurado pela compatibilidade do elemento utilizado.

Por outro lado, a correta garantia de que nas interfaces $\varepsilon_y|_{mat.2} = \varepsilon_y|_{mat.1}$, imposta pela continuidade C^0 dos deslocamentos, acarreta a descontinuidade da componente de tensão σ_y . Assim, a descontinuidade de σ_y não deve ser vista como erro da resposta numérica, mas como característica natural do fenômeno representado.

Na Figura 4.6 apresentamos as componentes de tensão obtidas com a malha de 96x64x5 divisões.

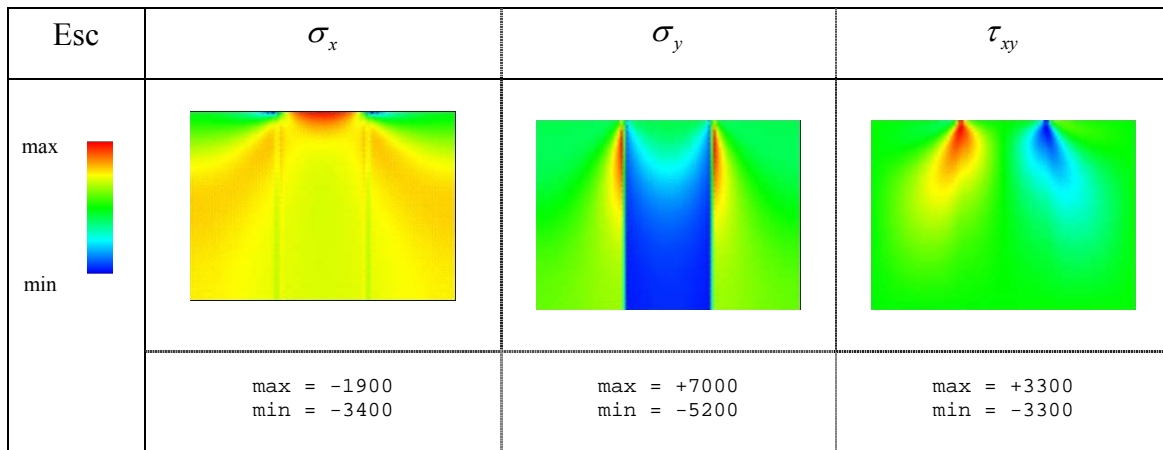


Figura 4.6 – Tensões para bloco com camadas verticais (malha 96x64x5).

Podemos também observar que a camada central encontra-se quase toda comprimida na direção vertical. Notamos ainda que há uma significativa concentração de tensões de cisalhamento na parte superior do contato das camadas.

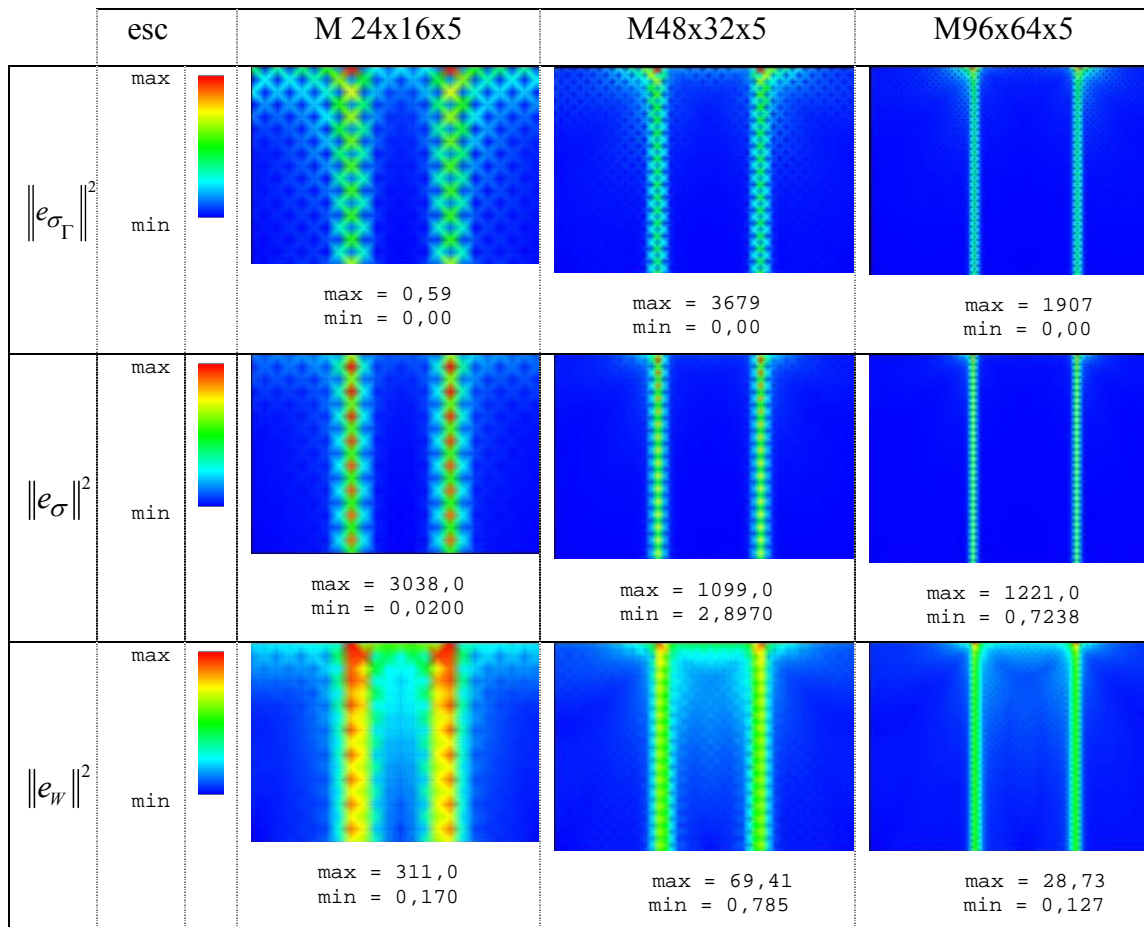


Figura 4.7 – Distribuição das estimativas de erro para camadas verticais.

Na Figura 4.7 apresentamos a distribuição das normas de erro nos elementos para as malhas consideradas. Podemos notar que as normas de tensão e de energia persistem em acusar erros ao longo do toda a superfície de contato, decorrentes da variação súbita de σ_y . Nota-se valores maiores para norma de tensão do erro de contato, mas esses valores são localizados apenas nas regiões onde ocorrem as descontinuidades e em todas as outras regiões do sólido ela é nula, acompanhando corretamente a descontinuidade representada pelo modelo.

Na Tabela 4.6 apresentamos os erros relativos fornecidos pelas normas. Notamos também que os erros se aproximam com o refinamento.

N	<i>malha</i>	η_{σ_T}	η_{σ}	η_W
1	24x16x5	14.99%	10.48%	140.79%
2	48x32x5	6.66%	7.45%	54.28%
3	96x64x5	4.59%	5.31%	17.09%

Tabela 4.6 – Resultados de erros relativos.

4.3. Aplicação no modelo da Bacia sedimentar do Recôncavo.

O modelo utilizado foi tirado de [15]. É um modelo geológico tridimensional da Bacia sedimentar do Recôncavo, situada na região nordeste do Brasil, onde foi delimitada uma porção representativa da área total da bacia.

O trabalho de modelagem tridimensional tem início com a utilização de mapas estruturais sísmicos. Dois modelos foram discretizados, o primeiro compreende uma área de três mil quilômetros quadrados, sendo a região de maior potencial para exploração de petróleo. Esse modelo foi denominado Modelo Recôncavo e está representado com todas as camadas geológicas e falhas na Figura 4.8.

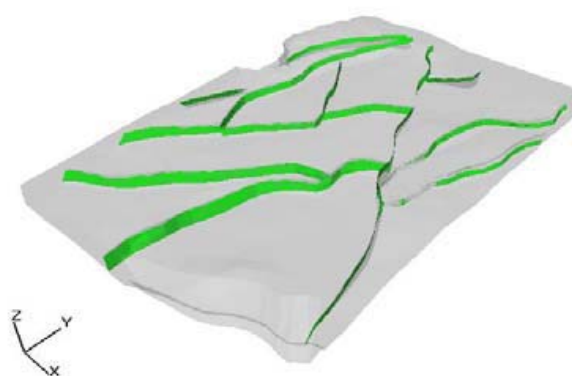


Figura 4.8 – Modelo Recôncavo. (Fonte:[15])

O segundo modelo foi denominado Modelo M16 e corresponde a um trecho do Modelo Recôncavo, como indicado na Figura 4.9.

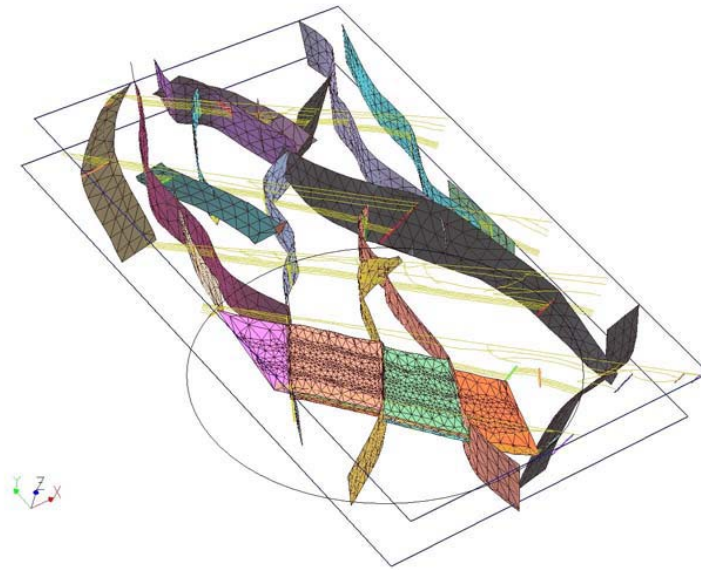


Figura 4.9 – Posição do modelo M16 dentro da Bacia do Recôncavo. (Fonte:[15])

4.3.1. Modelo M16 homogêneo.

No modelo proposto, as camadas sedimentares estão com propriedades iguais. Pretendemos, com isso, demonstrar que o indicador de erro proposto apresenta o mesmo desempenho que outros já utilizados quando não há heterogeneidade.

Será aplicado um deslocamento de 5 metros longitudinalmente. O modelo foi engastado na face oposta à aplicação da carga, representando assim um movimento compressional. O sistema de equações resultante é resolvido pelo método iterativo dos Gradientes Conjugados preconditionado, com tolerância para convergência de $1.0e-06$ [26].

As sete camadas sedimentares receberam as mesmas propriedades elásticas, formando assim um bloco homogêneo, com $E = 50\text{GPa}$ e $\nu = 0,29$. Nesse exemplo não foram utilizados elementos de interface.

A Figura 4.10 mostra o modelo homogêneo utilizado, em que foi aplicado um deslocamento da ordem de 5m comprimindo os blocos do modelo. Também é indicada a

malha de tetraedros lineares do modelo utilizado e podemos observar, no detalhe, o aumento do número de elementos na região da falha geológica.

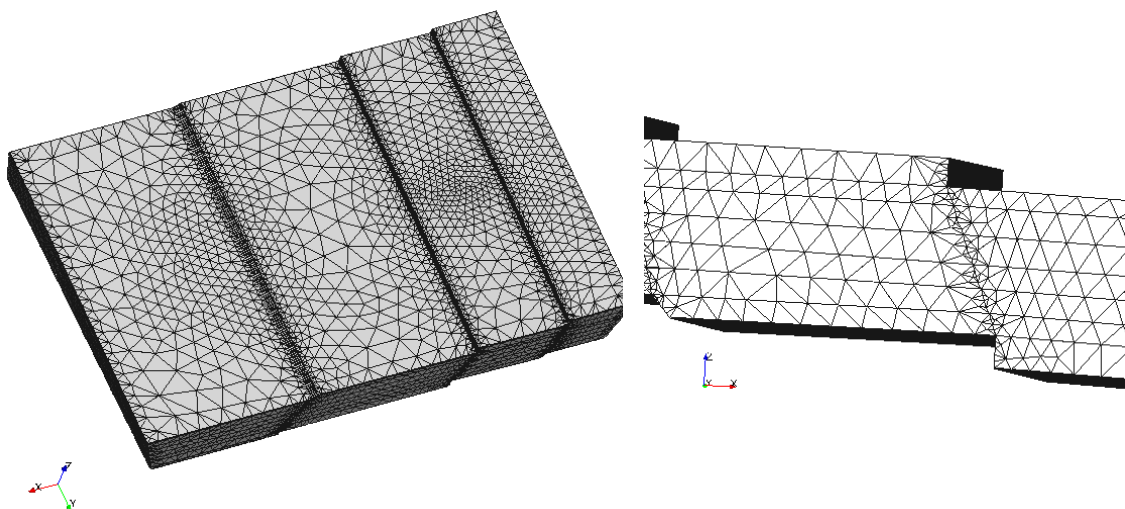


Figura 4.10 – Malha modelo M16.

Na tabela abaixo encontram-se as propriedades da malha utilizada para o modelo.

<i>PROPRIEDADES DO MODELO M 16</i>	
Número de elementos da malha	136738
Número de nós	28814
Número de faces	282529
Número de equações	81434

Tabela 4.7 – Propriedades do modelo.

Na Tabela 4.8, apresentamos índices de qualidade de malha (equação (3.32)) para o modelo considerado. Pode-se observar que o modelo M16 apresenta elementos de excelente qualidade.

Parâmetro GAMA	
Porcentagem de elementos bons	100.00%
Porcentagem de elementos ruins	0.00%
Gama médio	16.29
Gama desvio padrão	0.02
Gama médio bom	16.29
Gama médio ruim	0.00
Gama mínimo (elemento)	8.51(108567)

Gama máximo (elemento)	106.96(124549)
------------------------	----------------

Tabela 4.8 – Avaliação da qualidade dos elementos da malha.

A Figura 4.11 apresenta os resultados das normas de energia de erro e norma L2 respectivamente.

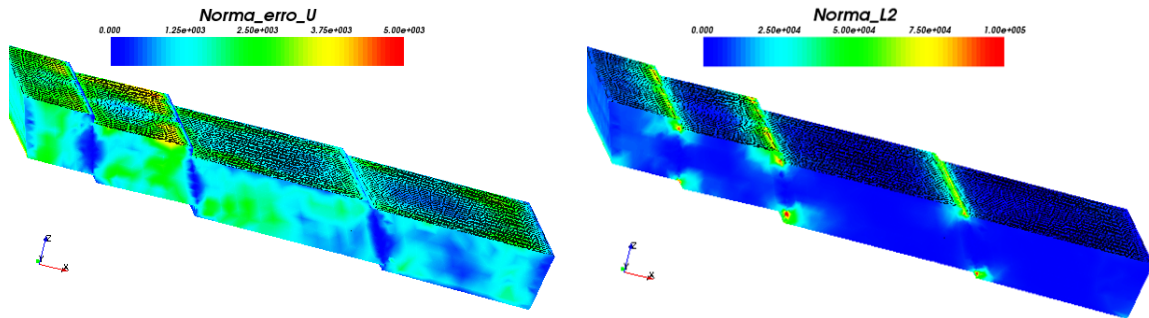


Figura 4.11 – Norma de energia do erro $\|e_w\|^2$ e Norma de tensão do erro $\|e_\sigma\|^2$

O resultado da norma de tensão do erro de contato para modelo da bacia do recôncavo homogêneo é apresentado na Figura 4.12, e podemos verificar um comportamento semelhante à norma L2 do erro de tensões.

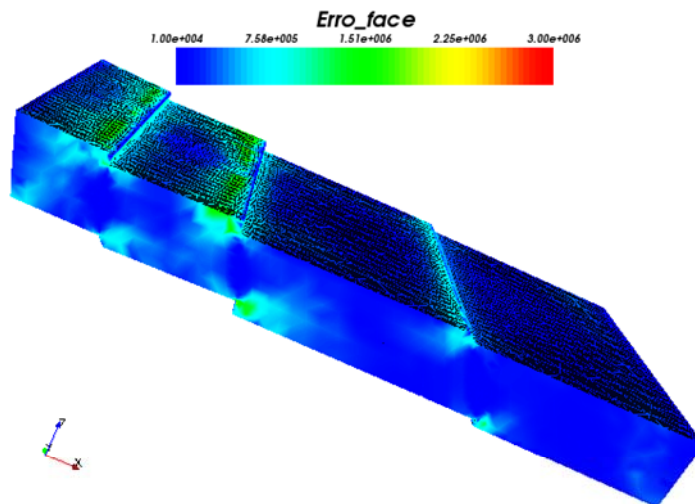


Figura 4.12 – Norma de tensão do erro de contato $\|e_{\sigma_\Gamma}\|^2$ modelo homogêneo.

Na Figura 4.13 são apresentados os resultados obtidos para o indicador de refinamento ξ_E (Eq. (3.30)) calculado a partir das normas de energia e L2, onde valores maiores que

a unidade indicam a necessidade de refinamento. Nos resultados desta figura, o limite do erro $\bar{\alpha}$ foi estabelecido em 5%.

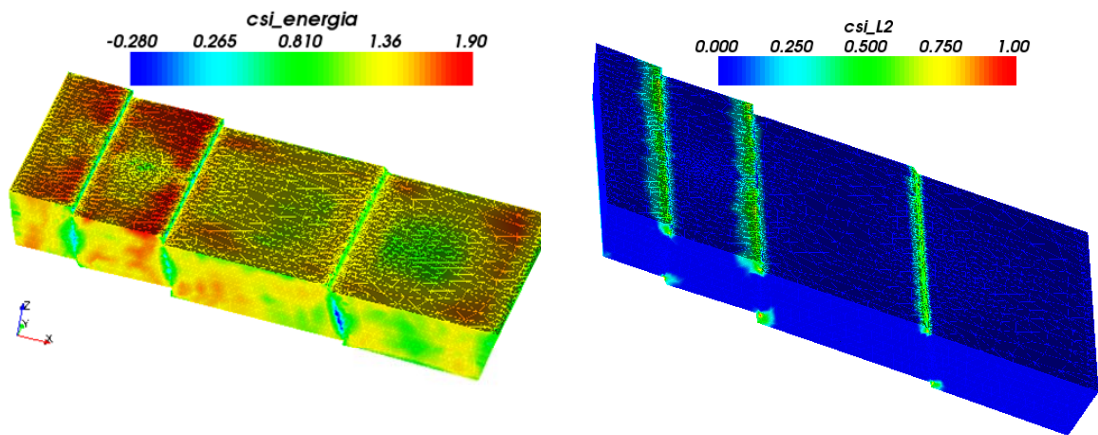


Figura 4.13 – Parâmetros ξ_E de refinamento para energia de deformação e para L2.

Como mostra a Figura 4.14, o resultado obtido para o indicador de refinamento ξ_E calculado a partir da estimativa de erro proposta, foi semelhante aos resultados obtidos com a norma L2, como se quer demonstrar.

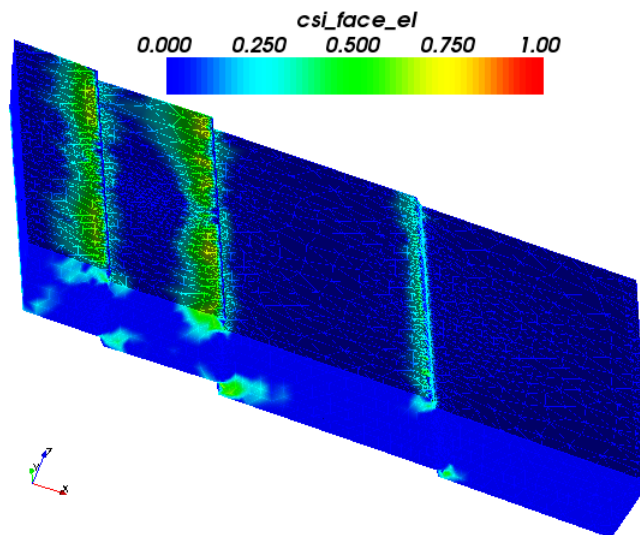


Figura 4.14 – Parâmetro ξ_E de refinamento para a estimativa de erro proposta.

Na Tabela 4.9 são apresentados os erros relativos para cada estimativa de erro e também o número de elementos com necessidade de refinamento. Podemos notar que o maior número de elementos indicados pela norma de tensão do erro é devido à diferença para

o limite do erro imposta, já o indicador baseado na norma proposta ficou muito próximo ao limite de 5%, com isso não indicando elementos para refinamento.

RESULTADOS	
η_w Erro relativo de energia	10.89%
η_σ Erro relativo de tensão	10.74%
η_{σ_t} Erro relativo de tensão de contato	6.34%
Elementos com índice de refinamento maior que 1	
Para norma de energia do erro	71671
Para norma de tensão do erro	1258
Para norma de tensão do erro na face	00

Tabela 4.9 – Resultados do modelo homogêneo.

4.3.2. Modelo M16 heterogêneo.

Este modelo foi construído a partir de dados reais, mas algumas simplificações foram introduzidas na representação geométrica para ser usado como exemplo. O modelo é composto por quatro blocos dispostos em degraus e é formado por sete camadas sedimentares, cujas propriedades elásticas são dadas na Tabela 4.10

PROPRIEDADES	Camadas						
	1	2	3	4	5	6	7
Mod. Elasticidade(GPa)	50	50	40	40	30	30	20
Poisson	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29
Ang. de atrito(graus)	32	32	32	32	31	31	30
Coesão(MPa)	50	50	40	40	30	30	20
Densidade(Kg/m ³)	2,7	2,7	2,7	2,7	2,7	2,7	2,7

Tabela 4.10 – Propriedades das camadas

A Figura 4.15 indica as sete camadas sedimentares que formam o modelo e também as falhas geológicas que formaram os blocos. Temos, no detalhe à direita, a visualização da descontinuidade das camadas junto às interfaces.

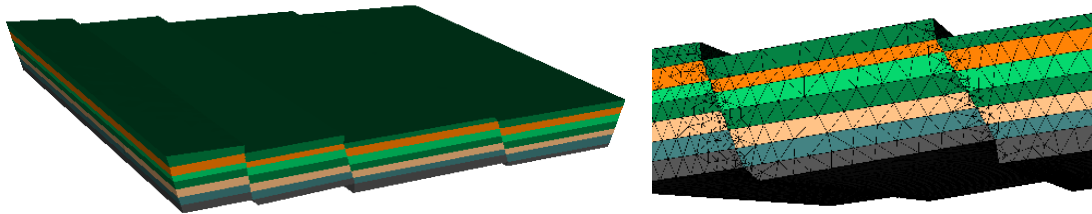


Figura 4.15 – Modelo M16.

No modelo proposto, será aplicado um deslocamento de 5 metros longitudinalmente. O modelo foi engastado na face oposta à aplicação da carga, representando assim um movimento compressional. O sistema de equações resultante é resolvido pelo método iterativo dos Gradientes Conjugados preconditionado, com tolerância para convergência de $1.0e-06$ [26]. O resultado dos deslocamentos está apresentado na Figura 4.16.

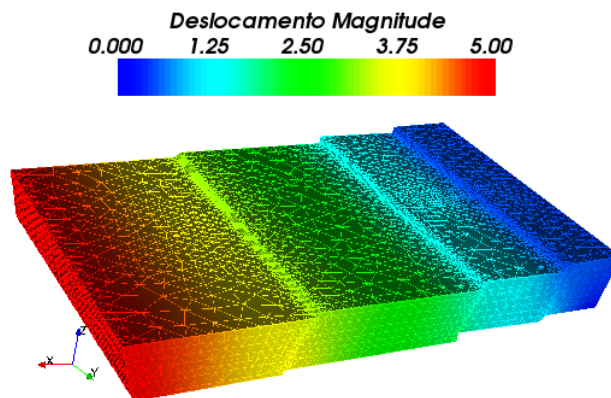


Figura 4.16 – Deslocamento.

A Figura 4.17 apresenta o resultado da norma de energia do erro e da norma de tensão do erro respectivamente. Podemos notar que ambas as normas apresentam concentrações nas interfaces das camadas sedimentares. Isso se deve à descontinuidade de tensão entre essas camadas.

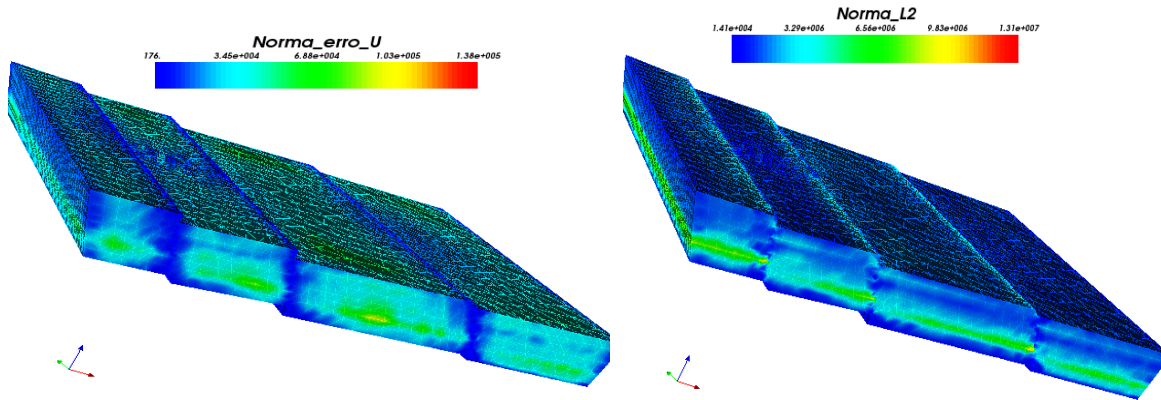


Figura 4.17 – Norma de energia do erro $\|e_W\|^2$ e Norma L2 $\|e_\sigma\|^2$.

Também se observa nos resultados da norma de energia do erro e para norma de tensão do erro a tendência do aumento do erro conforme aumenta o afastamento da junção dos blocos. Isso acontece devido ao modelo estar com as regiões de interface refinadas. Com isso os indicadores de erro apresentam valores menores nessas regiões.

A Figura 4.18 apresenta o resultado da estimativa de erro baseada na norma de tensão de contato.

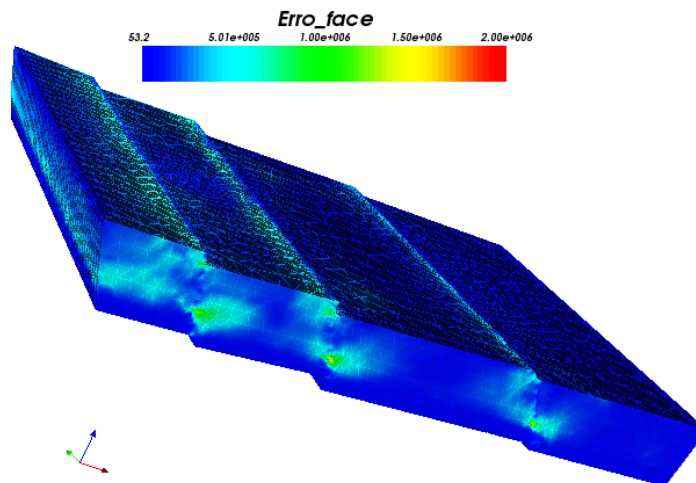


Figura 4.18 – Norma de tensão do erro de contato. $\|e_{\sigma_\Gamma}\|^2$

Comparando os resultados mostrados na Figura 4.18 e Figura 4.17, podemos notar melhora nos resultados obtidos com a nova estimativa, onde houve uma diminuição das concentrações nas indicações de erro. A melhora fica clara quando comparamos os resultados dos erros relativos, nos quais, para estimativa de erro pela norma de tensão

obtemos 19%, enquanto que para norma de tensão do erro de contato temos um erro relativo de 9%. O limite do erro imposto foi igual a 5%.

Na Figura 4.19 são apresentados os resultados obtidos para o indicador de refinamento ξ_E calculado a partir das normas de energia e norma de tensão, onde valores maiores que a unidade indicam a necessidade de refinamento, como apresentado anteriormente.

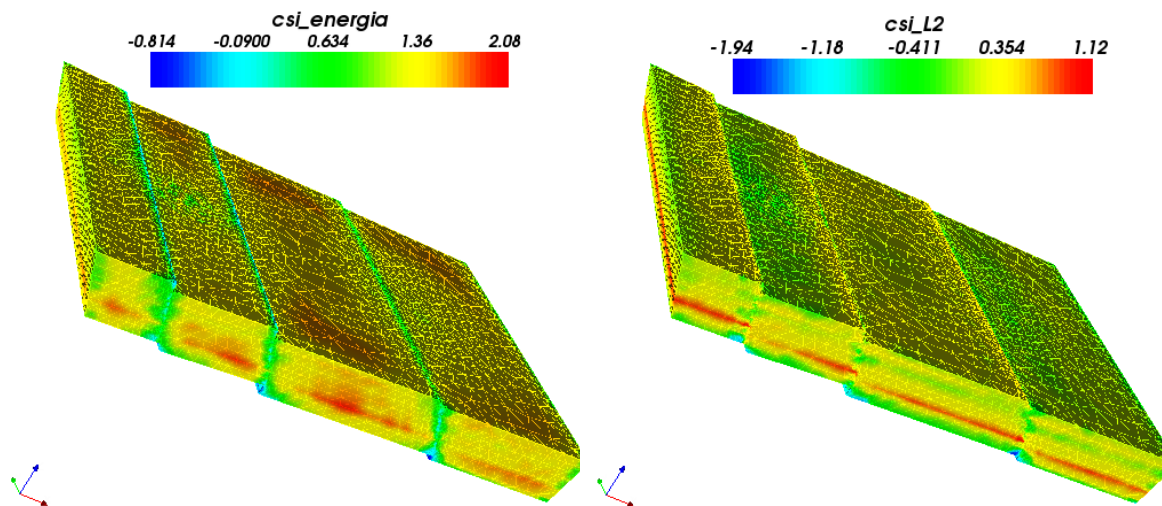


Figura 4.19 – Parâmetros ξ_E de refinamento para norma de energia e tensão.

Podemos notar, entre as camadas, a tendência desses indicadores de acusar necessidade de refinamento. Novamente podemos observar que, nas interfaces dos blocos, há diminuição nos índices devido ao modelo já ter sido refinado nessa região.

Como mostra a Figura 4.20, o resultado obtido para o indicador de refinamento ξ_E calculado a partir da estimativa de erro proposta, foi bastante satisfatório, já que houve diminuição na tendência de refinamento entre as camadas, onde outros indicadores acusam refinamento desnecessário

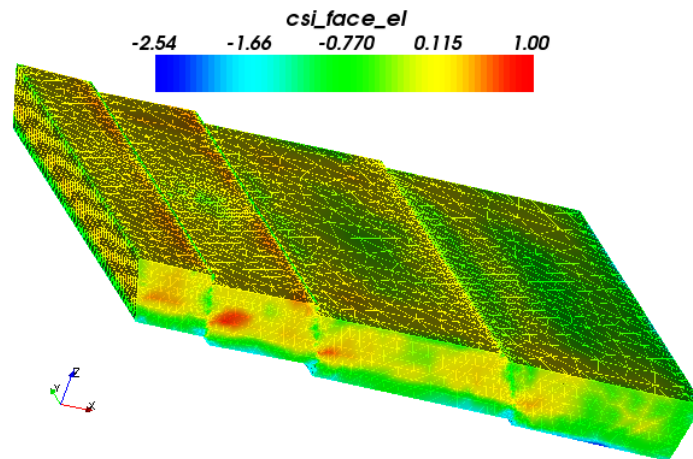


Figura 4.20 – Parâmetro ξ_E de refinamento para a estimativa de erro proposta.

Na Tabela 4.11 abaixo são apresentados os erros relativos para cada estimativa de erro e também o número de elementos com necessidade de refinamento, para as três análises de erro efetuadas.

Note que o maior número de elementos indicados pelas normas de energia e tensão do erro é devido à indicação de erro dessas normas ao longo do contato das camadas sedimentares do modelo.

RESULTADOS	
η_W Erro relativo de energia	54,7%
η_σ Erro relativo de tensão	19.98%
η_{σ_T} Erro relativo de tensão de contato	6.95%
Elementos com índice de refinamento maior que 1	
Para norma de energia do erro	58903
Para norma de tensão do erro	5323
Para norma de tensão do erro na face	9

Tabela 4.11 – Resultados modelo heterogêneo.

4.4. Aplicação no modelo da bacia sedimentar da Colômbia.

Em relação à produção de petróleo, a Colômbia é um dos países mais promissores da América do sul, com 13 bacias sedimentares, sendo sete delas produtoras. Um dos mais importantes campos da Colômbia é o Cusiana-Cupiagua, localizado na bacia do Llanos orientais, uma importante região produtora de óleo e gás. Na região ocorrem duas falhas com grande potencial migratório, conhecidas como falhas Guaicaramo e Cusiana.

O modelo em estudo representa uma região da bacia de aproximadamente 83 km de comprimento, tendo a parte norte 22 km de largura e a parte sul aproximadamente 80 km. Foi modelada a falha de Cusiana, esta falha geológica corta toda a região e a divide em duas, chamadas aqui como lateral alta e lateral baixa. O modelo aqui apresentado, assim como os outros dados, foram extraídos de [24].

A bacia tem uma espessura total de 23 km e é formada por seis principais camadas sedimentares e suas propriedades estão na Tabela 4.12, abaixo:

PROPRIEDADES	Camadas					
	1	2	3	4	5	6
Mod. Elasticidade(GPa)	50	50	40	40	30	30
Poisson	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29
Ang. de atrito(graus)	32	32	32	32	31	31
Coesão(MPa)	50	50	40	40	30	30
Densidade(Kg/m ³)	2,7	2,7	2,7	2,7	2,7	2,7

Tabela 4.12 – Propriedades das camadas sedimentares do modelo.

4.4.1. Modelo da bacia da Colômbia sem estudo da falha.

O modelo resultante está representado na Figura 4.21:

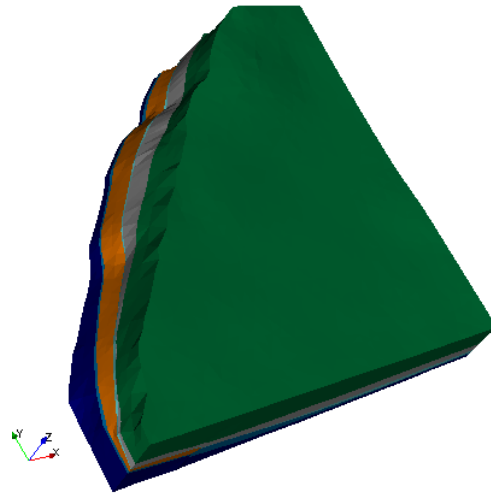


Figura 4.21 – Modelo da bacia da Colômbia.

Para estudos preliminares da bacia foi gerada uma malha de elementos tetraédricos lineares, que é apresentada na Figura 4.22.

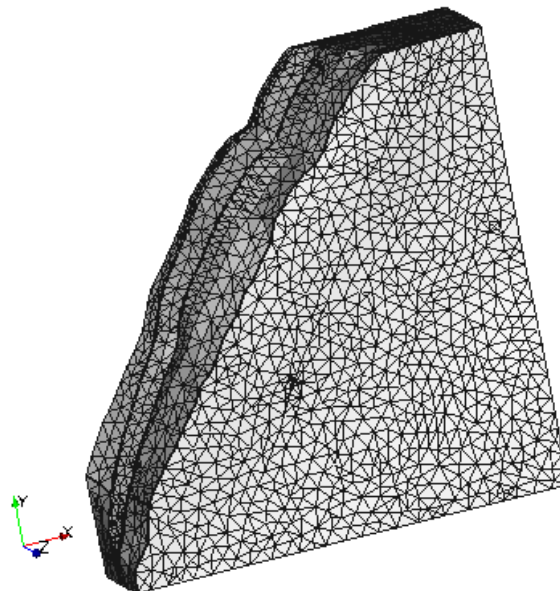


Figura 4.22 – Malha do modelo bacia da Colômbia.

À seguir, na Tabela 4.13 são apresentadas as propriedades do modelo.

<i>PROPRIEDADES DO MODELO COLÔMBIA</i>	
Número de elementos da malha	141766
Número de nós	28897
Número de faces	292441
Número de equações	81485

Tabela 4.13 – Propriedades modelo da Colômbia.

Na Tabela 4.14 apresentamos os índices de qualidade de malha para o modelo considerado. Pode-se observar, que como se trata de um modelo para estudos preliminares, essa malha ainda apresenta alguns elementos distorcidos e ruins.

Parâmetro GAMA	
Porcentagem de elementos bons	97.59%
Porcentagem de elementos ruins	2.41%
Gama médio	300.34
Gama desvio padrão	155.51
Gama médio bom	25.46
Gama médio ruim	11453.42
Gama mínimo (elemento)	8.53(74737)
Gama máximo (elemento)	18817230.15(136085)

Tabela 4.14 – Avaliação da qualidade dos elementos da malha.

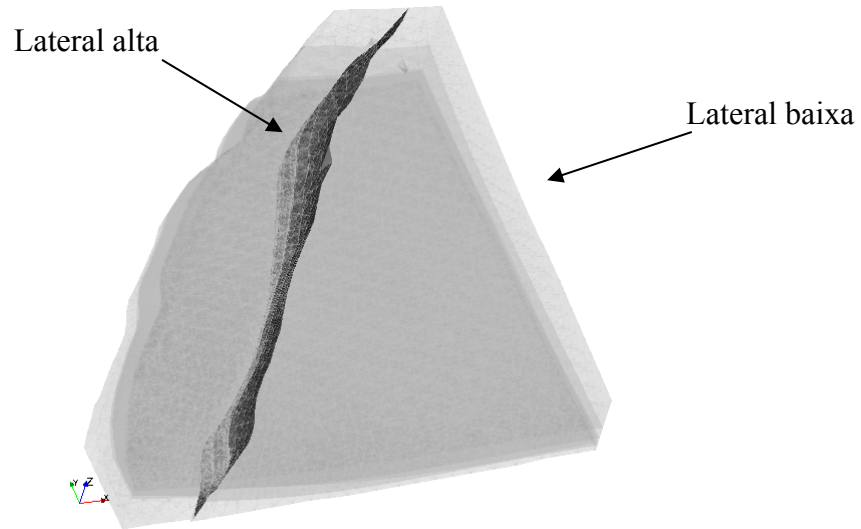


Figura 4.23 – Características do modelo.

No modelo proposto será aplicado um deslocamento de 5 metros longitudinalmente na lateral alta (Figura 4.23). Já a parte oposta, lateral baixa, será prescrita. O sistema de equações resultante é resolvido pelo método iterativo dos Gradientes Conjugados preconditionado, com tolerância para convergência de $1.0e-06$ [26].

O resultado para os deslocamentos está apresentado na Figura 4.24, abaixo:

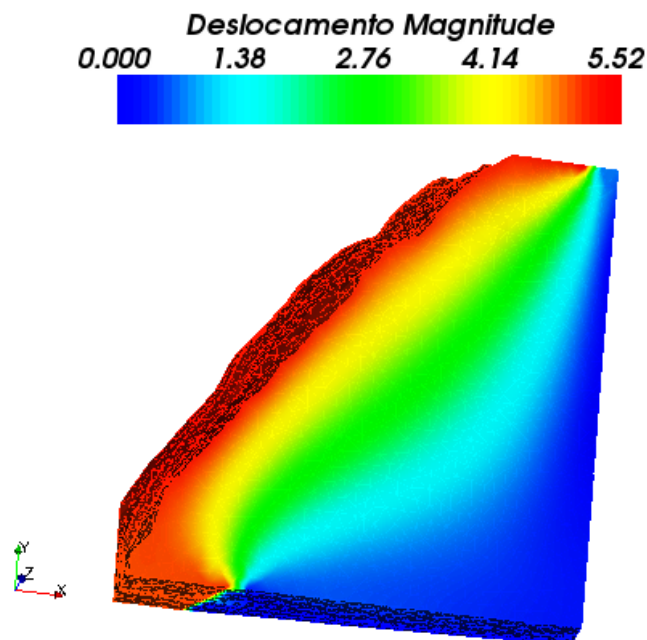


Figura 4.24 – Deslocamento.

A Figura 4.25 apresenta os resultados das normas de energia do erro e norma de tensão, respectivamente.

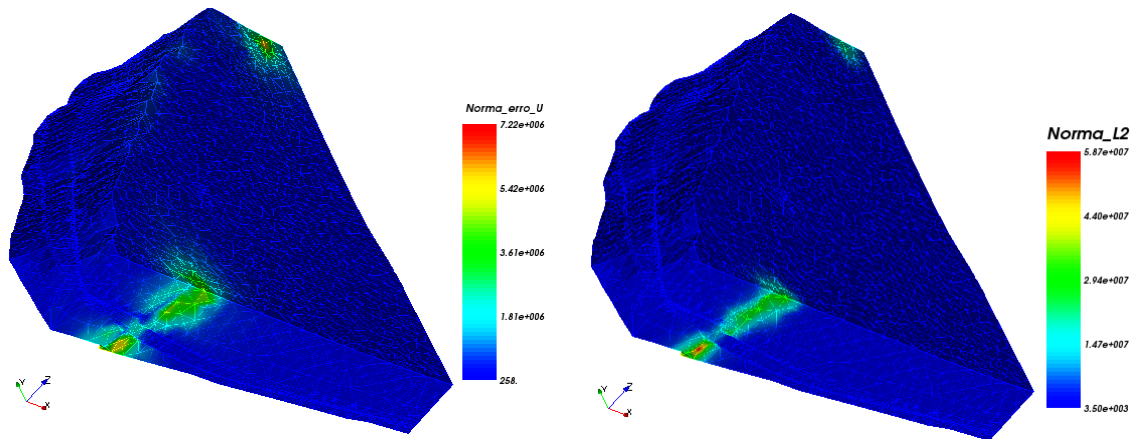


Figura 4.25 – Norma de energia do erro $\|e_W\|^2$ e Norma tensão $\|e_\sigma\|^2$

Podemos notar a concentração da indicação de erro na região de fronteira entre as duas regiões da bacia.

Na Figura 4.26 apresentamos o resultado da norma de tensão do erro de contato. Podemos notar que houve uma melhora nas concentrações do erro na região de fronteira.

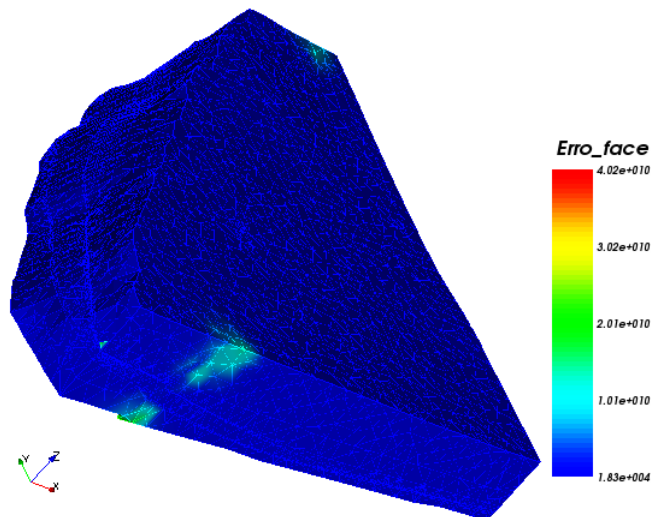


Figura 4.26 – Norma do erro da tensão de contato. $\|e_{\sigma_\Gamma}\|^2$

Na Figura 4.27 são apresentados os resultados obtidos para o indicador de refinamento ξ_E , calculado a partir das normas de energia e tensão, e com um limite do erro de 5%. Podemos notar a tendência desses indicadores de acusar índices de refinamento nas interfaces dos blocos, onde os degraus causam o contato entre camadas de materiais diferentes.

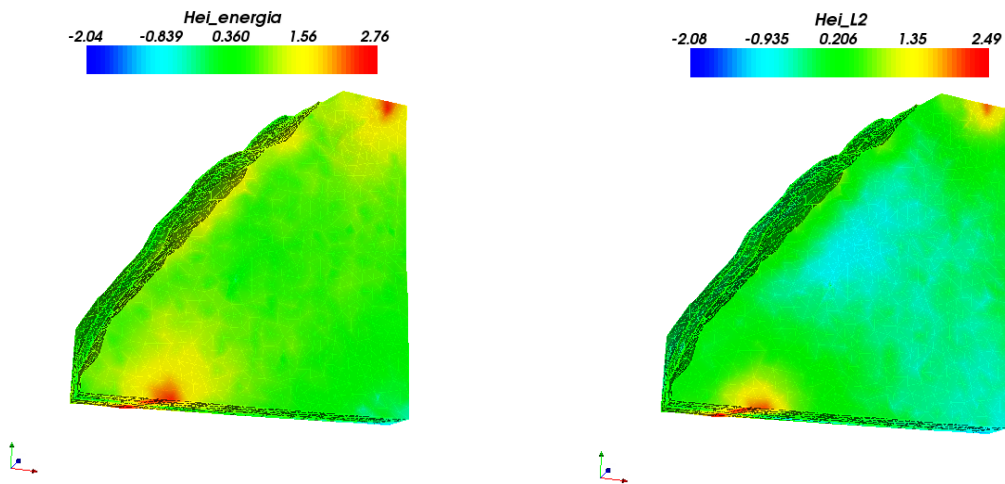


Figura 4.27 – Parâmetros ξ_E de refinamento para normas de energia e tensão.

Como mostra a Figura 4.28, o resultado obtido para o indicador de refinamento ξ_E calculado a partir da estimativa de erro de tensão na face foi bastante satisfatório, diminuindo a tendência que outros indicadores têm de acusar índices de refinamento entre as interfaces dos blocos.

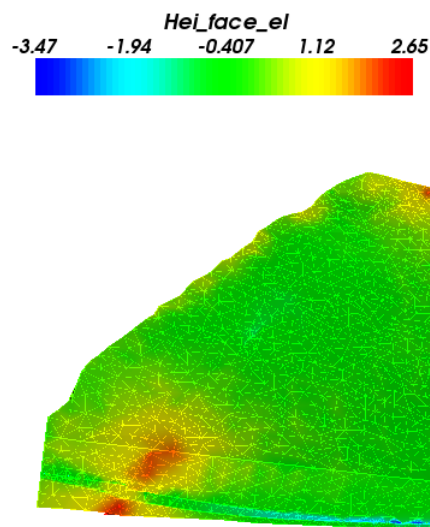


Figura 4.28 – Parâmetro ξ_E de refinamento para a estimativa de erro proposta.

A Tabela 4.15 mostra os índices de erro relativo, calculados para as normas em estudo e também apresenta o número de elementos com indicação de necessidade de refinamento.

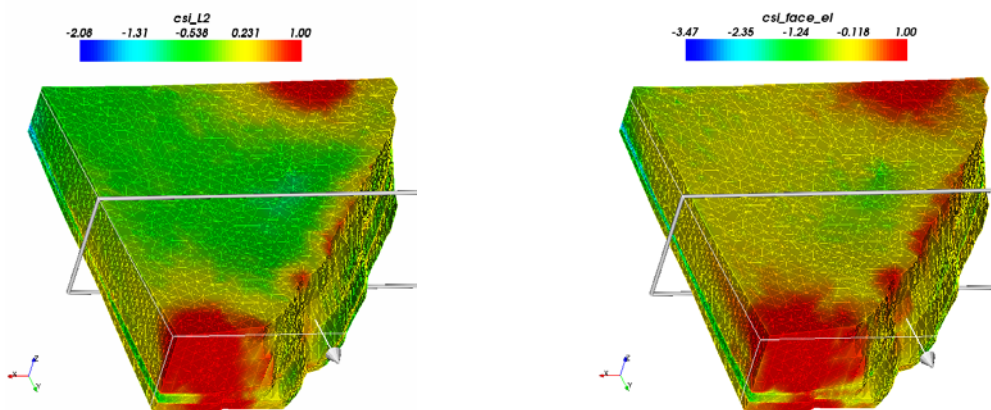
RESULTADOS

η_W	Erro relativo de energia	96.22%
η_σ	Erro relativo de tensão	84.46%
η_{σ_T}	Erro relativo de tensão de contato	42.73%
Elementos com índice de refinamento maior que 1		
Para norma de energia do erro		39911
Para norma de tensão do erro		14799
Para norma de tensão do erro na face		2605

Tabela 4.15 – Resultados modelo Colômbia.

Podemos notar um número muito maior de elementos a serem refinados quando o índice de refinamento é calculado pela norma de tensão do erro ou pela norma de energia. Isso se deve à tendência que esses indicadores têm de acusar refinamento entre as interfaces dos blocos.

Para demonstrarmos a diferença entre os resultados de refinamento obtidos com as estimativas de erro, foi feito um corte transversal no modelo da bacia como mostra a Figura 4.29.



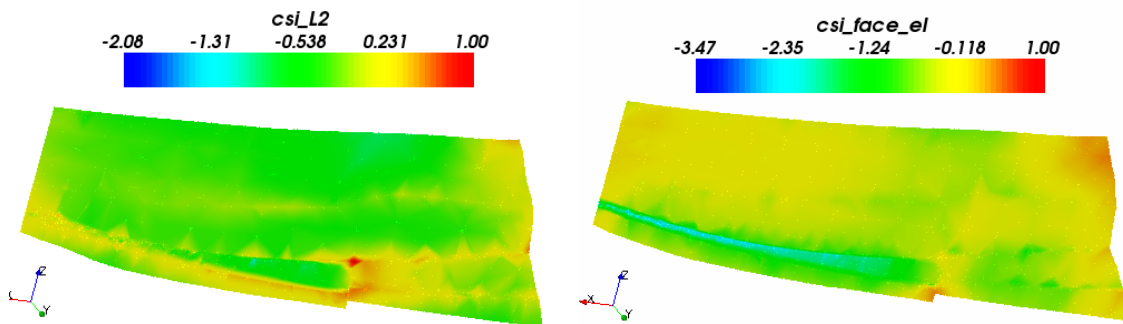


Figura 4.29 – Diferença entre os índices de refinamento.

Esse corte mostra com maior clareza que o estimador de erro, baseado na norma de tensão, indicou refinamento ao longo de toda a região do modelo onde ocorre contato entre duas camadas sedimentares de material distinto. Já o indicador proposto em nosso trabalho não indicou refinamento nessa área de contato, o que explica o número bem menor de elementos a serem refinados quando se utiliza essa nova metodologia.

4.4.2. Modelo Colômbia com elementos de interface.

O modelo da bacia da Colômbia com elementos de interface, para simular a falha geológica, está representado na Figura 4.30.

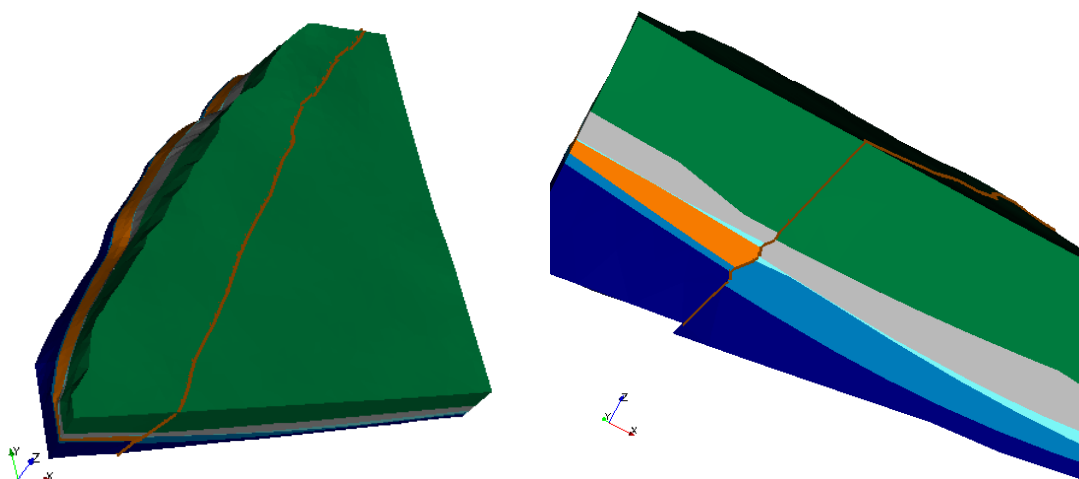


Figura 4.30 – Modelo bacia da Colômbia com falha.

A malha gerada (Figura 4.31) para o modelo é a mesma utilizada anteriormente, porém foram gerados 5133 elementos de interface para simular o deslizamento da falha geológica presente no modelo.

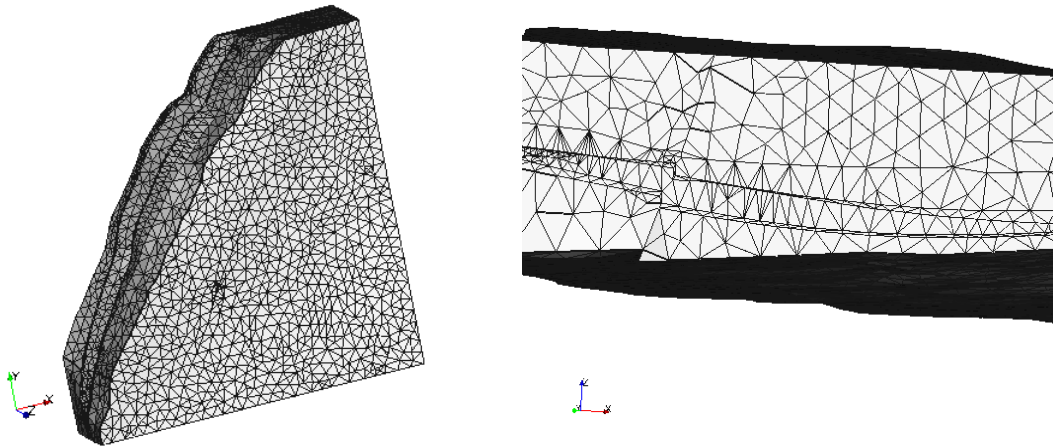


Figura 4.31 – Malha.

No modelo proposto será aplicado um deslocamento de 1 metro na lateral alta na direção X e também na Y. Com a lateral baixa prescrita, teremos a representação de um movimento real da falha. O sistema de equações resultante é resolvido pelo método iterativo dos Gradientes Conjugados preconditionado, com tolerância para convergência de $1.0e-06$ [26]. O resultado dos deslocamentos está apresentado na Figura 4.32.

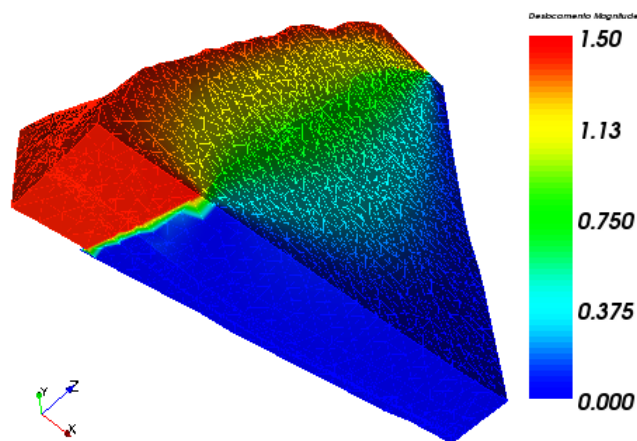


Figura 4.32 – Deslocamento.

A Figura 4.33 apresenta o resultado da norma de energia do erro e da norma de tensão. Podemos notar que ambas as normas apresentam concentrações nas interfaces das laterais do modelo.

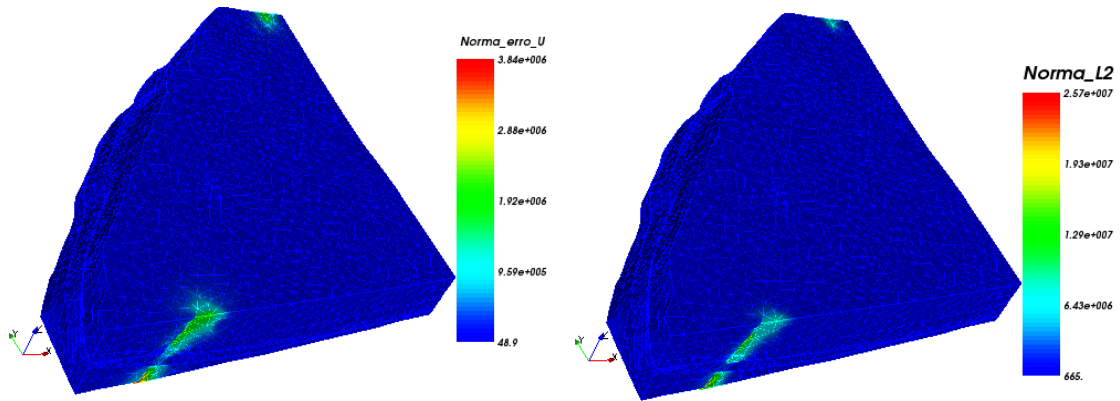


Figura 4.33 – Norma de energia do erro $\|e_W\|^2$ e Norma tensão $\|e_\sigma\|^2$

Na Figura 4.34 apresentamos o resultado da norma de tensão de contato.

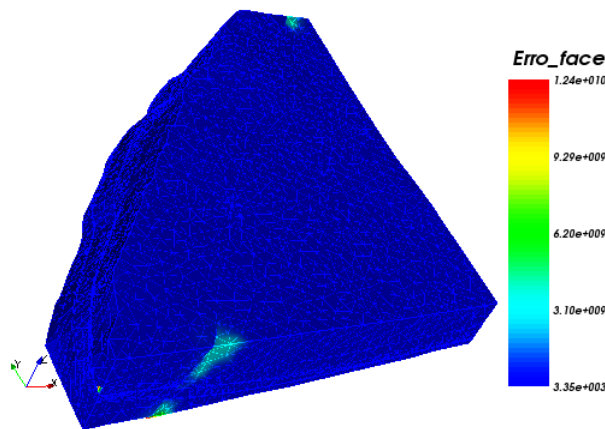


Figura 4.34 – Norma da tensão de contato do erro. $\|e_{\sigma_\Gamma}\|^2$

Podemos observar, comparando os resultados mostrados nas Figura 4.33 e Figura 4.34, que a norma de tensão do erro de contato proposta demonstra concentrações de erro nas mesmas regiões das fornecidas pelas estimativas tradicionais.

Na Figura 4.35 são apresentados os resultados obtidos para o indicador de refinamento ξ_E calculado a partir das normas de energia e L2 e com limite de erro proposto de 5%.

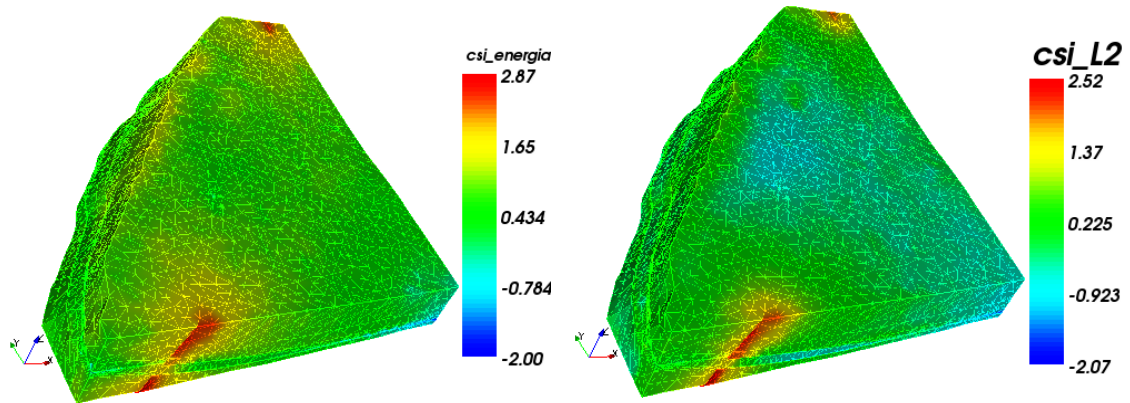


Figura 4.35 – Parâmetros ξ_E de refinamento para norma de energia e tensão.

Pode-se notar no resultado dos elementos com índice de refinamento mostrado na Figura 4.36, que o indicador de refinamento ξ_E calculado a partir da estimativa de erro proposta teve desempenho semelhante aos indicadores tradicionais.

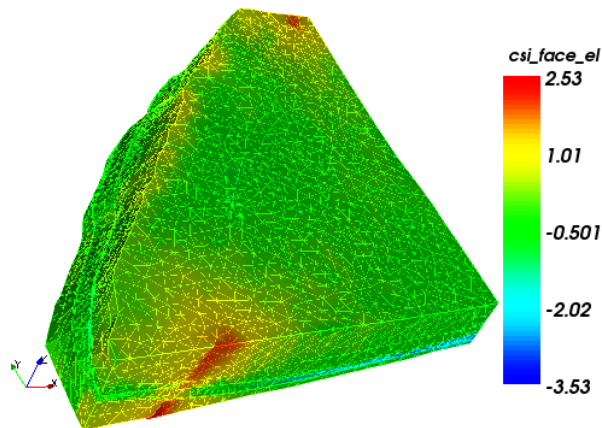


Figura 4.36 – Parâmetro ξ_E de refinamento para a estimativa de erro proposta.

Com os resultados das normas de energia do erro, norma de tensão do erro e norma de tensão do erro de contato calculados para elementos de interface, podemos ver a grande diferença que existe na indicação desses índices quando há o encontro de materiais distintos e conseqüente descontinuidade de tensão.

Na Figura 4.37 apresentamos os resultados de índice de refinamento para a interface, calculados a partir das normas de energia do erro e norma de tensão do erro respectivamente. Nota-se que a estimativa de erro baseada na norma de tensão indica que os elementos na região onde se encontram duas camadas de materiais distintos, necessitam de refinamento.

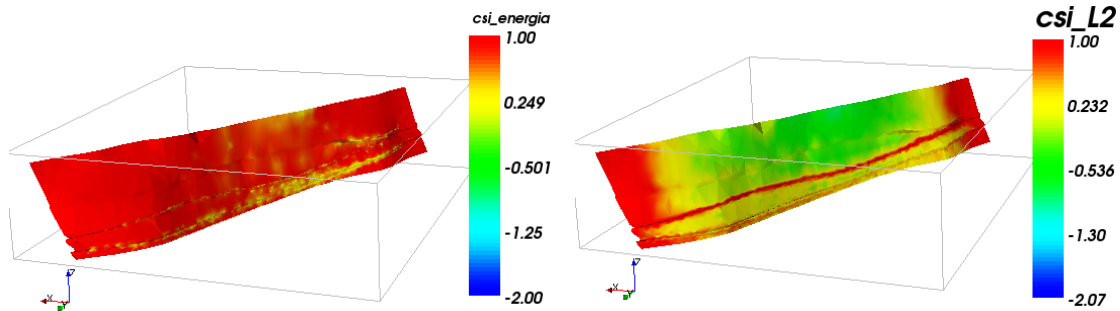


Figura 4.37 – Parâmetros ξ_E de refinamento para energia de deformação e para L2.

A Figura 4.38 abaixo demonstra o resultado de índice de refinamento calculado pela norma de tensão do erro de contato. Podemos observar que o refinamento baseado na estimativa proposta não acusa necessidade de refino junto à região de contato entre dois materiais distintos.

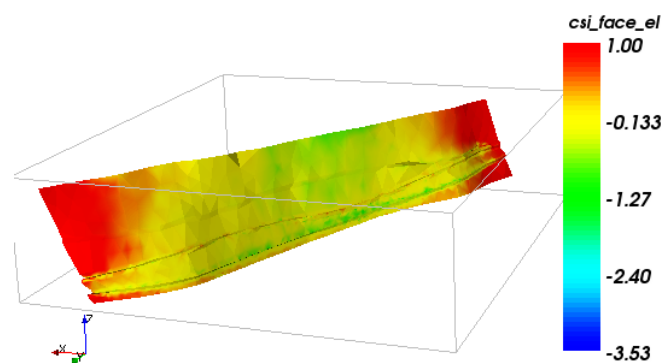


Figura 4.38 – Parâmetro ξ_E de refinamento para a estimativa de erro proposta.

O resultado ξ_E , calculado para elementos de interface a partir da estimativa de erro proposta foi bastante satisfatório, diminuindo a tendência que outros indicadores têm de acusar índices de refinamento entre as camadas e nas interfaces dos blocos.

RESULTADOS

η_W	Erro relativo de energia	171.28%
η_σ	Erro relativo de tensão	118.72%
η_{σ_T}	Erro relativo de tensão de contato	47.27%
Elementos com índice de refinamento maior que 1		
	Para norma de energia do erro	20136
	Para norma de tensão do erro	8122
	Para norma de tensão do erro na face	1545

Tabela 4.16 – Resultados modelo Colômbia.

Capítulo 5

Conclusões

Estenderam-se, neste trabalho, os resultados propostos em [33] para estruturas 3D com malhas de tetraedros lineares e elementos de interface prismáticos com espessura nula.

O presente estudo mostra que os indicadores convencionais de erro não são válidos para malhas de materiais heterogêneos, induzindo a refinamentos em regiões onde não haveria necessidade.

Foi testada, em ambiente 3D, a metodologia de estimativa de erros a posteriori de tensão para problemas heterogêneos apresentada em [33]. Essa nova metodologia melhora as estimativas de erro para problemas de materiais heterogêneos, nos quais os métodos convencionais de estimativa de erro apresentam dificuldade em avaliar os resultados de tensão.

Podemos notar, nos exemplos de validação, que os resultados conseguidos demonstram a efetiva diminuição da indicação de erro para malhas de materiais heterogêneos. Já para malhas de materiais homogêneos, a medida proposta proporciona resultados compatíveis com os fornecidos por normas convencionais.

Nas análises mecânicas de bacia sedimentares, onde ocorrem camadas de materiais distintos e também há descontinuidades dessas camadas entre os blocos, podemos notar

a sensível diminuição da indicação de erro e, com isso, a diminuição da necessidade de refinamento da malha.

Trabalhos futuros

De acordo com os resultados obtidos, são sugeridos os trabalhos seguintes:

- Utilização do estimador proposto junto a um algoritmo para refinamento de malha;
- Estudo de efeitos elasto-plásticos;
- A extensão da metodologia estudada para problemas térmicos, fluidos e problemas acoplados.

Referências Bibliográficas

- [1] AINSWORTH, M. AND ODEN, J.T. “A unified approach to a posteriori error estimation based on element residual methods”, Numer. Math. 65 (1993) 23-50.
- [2] AINSWORTH, M., ODEN, J. T., “A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis”, Wiley, New York, 2000.
- [3] AXELSSON, O., *Iterative Solution Methods*. Cambridge University Press, 1994.
- [4] BABUSKA, I. AND RHEINBOLDT, W.C., “Error estimates for adaptive finite element computations”, SIAM J. Numer. Anal. 18 (1978)736-754.
- [5] BABUSKA, I. and RHEINBOLDT, W.C., “A posteriori error estimates for the finite element method”, Int. J. Numer. Methods Eng.12 (1978) 1597-1615.
- [6] BABUSKA, I. and RHEINBOLDT, W.C. “A posteriori error analysis of finite element solutions for one dimensional problems”, SIAM. Numer. Anal. 18 (1981) 565-589.
- [7] BABUSKA, I., STROUBOULIS, T. UPADHYAY, C.S. and SK. GANGARAJ. “A model study of the quality of a posteriori estimators for linear elliptic problems error estimation in the interior of patchwise uniform grids of triangles”, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 114 (1994) 307-378.
- [8] BABUSKA, I., STROUBOULIS, T. UPADHYAY, C.S. GANGARAJ S.K. and K. COPPS, “Validation of a posteriori error estimators by a numerical approach”, Int.

J. Numer. Methods Eng. 37 (1994) 1073-1123.

- [9] BANK, R.E. “Analysis of a local a posteriori error estimate for elliptic equations”, in: Babuska, I. et al., ed.. Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations (Wiley, New York, 1986) 119-128.
- [10] BANK, R.E. and WEISER, A., “Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations”, Math. Comput. 44 (1985) 283-301.
- [11] BATHE, K. J., *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.
- [12] CAREY, G.F., Computational grids – generation, adaptation and solution strategies, Taylor & Francis, 1997.
- [13] CAREY, G. F. , “A Mesh-Refinement Scheme for Finite Elements Computations”, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., v. 7, pp 93-105, 1976.
- [14] COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd edition, John Wiley & Sons, 1989.
- [15] COUTINHO, A.L.G.A., MARTINS, M.D.A., ANTUNES, P.T.S., SYDENSTRICKER, R. M., CAVALCANTI, P.R., MELLO, U.T., ALVES J.L.D., LANDAU, L., EBECKEN, N.F.F., MORAES, A., BENDER, A.A., CONCEIÇÃO, J.C.J., AZAMBUJA, N.C., DESTRO, N., PEREIRA, S.C.A., Modelagem tridimensional de bacias sedimentares: Tratamento de incertezas, estudo de falhas e otimização computacional, Relatório final MCT/PADCT-CCT, convênio 77.97.040500, 2000.
- [16] DEMKOWICZ, L., ODEN, J.T., STROUBOULIS, T. “Adaptive finite elements for flow problems with moving boundaries”. Part 1: Variational principles and a

- posteriori error estimates. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 46 (1984) 217-251.
- [17] DEMKOWICZ, L, ODEN. J.T., and STROUBOULIS T., “An adaptive p-version finite element method for transient flow problems with moving boundaries”. in: R.H. Gallagher et al., ed., *Finite Elements in Fluids VI* (John Wiley. 1985) 291-305.
- [18] EISENSTAT, S. C., WALKER, H. F., *Choosing the Forcing Terms in an Inexact Newton Method*. In: Tech. Report 6/94/75, Mathematics and Statistics Department, Utah State University, 1994.
- [19] FERENCZ, R. M., *Element-by-Element Preconditioning Techniques for Large-Scale, Vectorized Finite Element Analysis in Nonlinear Solid and Structural Mechanics*, Ph.D. dissertation, Division of Applied Mechanics Stanford, USA, 1989.
- [20] FRAEIJIS DE VEUBEKE, B.. “Displacement and equilibrium models in the finite element method”, in: Zienkiewicz and Holister, eds., *Stress Analysis* (Wiley, London, 1965).
- [21] HUGHES, T. J. R., *The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, Inc., 1987.
- [22] KELLY, D.W. “The self-equilibration of residuals and complementary a posteriori error estimates in the finite element method”, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 20 (1984) 1491-1506.
- [23] KNUPP, P.M., Algebraic mesh quality metrics for unstructured initial meshes, *Finite Elements in Analysis and Design*, 39:217-241, 2003.

- [24] LAB2M/UFRJ - Pré-projeto entre UFRJ e a Ecopetrol (Empresa Colombiana de Petróleo).
- [25] LADEVEZE, P, LEGUILLON, D. “Error estimate procedure in the finite element method and applications”, SIAM J. Numer. Anal. 20 (1983) 485-509.
- [26] MARTINS, M.A.D. *Estrutura de Dados por Arestas para a Solução de Problemas de Plasticidade Computacional*, Tese D.Sc., Coordenação dos Programas de Pós-Graduação de Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2001.
- [27] MORETTI, C. O., *Um sistema computacional paralelo aplicado à simulação de propagação tridimensional de fissuras*, Tese D.Sc, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2001.
- [28] ODEN, J.T. DEMKOWICZ, L. “Advances in adaptive improvements: A survey of adaptive finite element methods in computational mechanics”, Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations (ASME, 1987)1-43.
- [29] ODEN, J.T. DEMKOWICZ, L. W. RACHOWICZ and T.A. WESTERMANN, “Toward a universal h-p adaptive finite element strategy”. Part 2 A posteriori error estimation, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 77 (1989) 113-180.
- [30] RIBEIRO, F.L.B, *Estratégia h-p de Refinamento para o Método dos Elementos Finitos*, Tese D.Sc., Coordenação dos Programas de Pós-Graduação de Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1991.
- [31] SHAKIB, F., HUGHES, T. J. R., JOHAN, Z., “A Multi-Element Group Preconditioned GMRES Algorithm for Nonsymmetric Systems Arising in Finite Element Analysis”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 75, pp. 415-456, 1989.

- [32] STEIN, E.M., “Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions” (Princeton University Press, 1970).
- [33] SYDENSTRICKER, R.M., COUTINHO, A.L.G.A., MARTINS, M.A.D., LANDAU, L. e ALVES, J.L.D. *A posteriori error estimate for stress analysis of homogeneous and heterogeneous materials: an engineering approach*, Finite Elements in Analysis and Design, vol. 42, pp 171-188, 2005.
- [34] SYDENSTRICKER, R.M., MARTINS, M.A.D., COUTINHO, A.L.G.A., et al., *Edge-based interface elements for solution of three-dimensional geomechanical problems*, COMPUTER SCIENCE 2565: 53-64, 2003.
- [35] VILLAÇA, S. F., GARCIA, L. F. T., *Introdução à teoria da elasticidade*. 3ª ed., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1998.
- [36] VILLAÇA, S. F., GARCIA, L. F. T.,: *Notas de aula do curso de Mecânica dos Sólidos*, COPPE/PEC/UFRJ, 1994.
- [37] ZIENKIEWICZ, O.C., ZHU, J.Z., “The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates.” Part 1: The recovery technique, Int. J. Numer. Methods Eng. 33, pp. 1331-1364, 1992.
- [38] ZIENKIEWICZ, O.C., ZHU, J.Z., “The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates.” Part 2: Error estimates and adaptivity, Int J. Numer. Methods Eng. 33, pp. 1365-1382, 1992.
- [39] ZIENKIEWICZ, O.C., ZHU, J.Z. “Adaptive and mesh generation”, Int. J. Numer. Methods Eng. 32, pp. 783-810, 1991.

- [40] ZIENKIEWICZ, O.C., ZHU, J.Z. "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis", Int. J. Numer. Methods Eng. 24, pp. 337-357, 1987.
- [41] ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L., Finite Element Method, 4th ed., vv. 1,2 Mcgraw-Hill. 2000.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)