

VERA LÚCIA DA SILVA

**ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROBLEMAS
DE PRODUTO CARTESIANO: INTER-RELAÇÕES
ENTRE DIFERENTES REPRESENTAÇÕES**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**PUC/SP
São Paulo
2006**

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

VERA LÚCIA DA SILVA

**ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROBLEMAS
DE PRODUTO CARTESIANO: INTER-RELAÇÕES
ENTRE DIFERENTES REPRESENTAÇÕES**

*Texto apresentado à Banca Examinadora da
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,
como exigência para qualificação do título de
Mestre em Educação Matemática, sob a
orientação da **Profª Drª Anna Franchi**.*

**PUC/SP
São Paulo
2006**

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

AGRADECIMENTOS

À Profa. Dra. Anna Franchi por sua orientação, competência, compreensão, cooperação, dedicação e disponibilidade para a realização deste trabalho.

À Profa. Dra. Anna Regina Lanner de Moura e à Profa. Dra. Siobhan Victoria (Lulu Healy) pelos comentários e sugestões para enriquecimento desta pesquisa.

Aos professores, coordenação e funcionários do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP.

À minha família pelo apoio e compreensão em diversos momentos da vida.

Aos amigos e colegas de Mestrado que compartilharam suas experiências e conhecimento.

A direção, professores, funcionários e alunos das escolas, que contribuíram para o desenvolvimento da pesquisa.

Ao Governo do Estado de São Paulo pelas condições proporcionadas para a conclusão deste Mestrado.

Enfim a todos, que direta ou indiretamente, auxiliaram na elaboração e aperfeiçoamento deste trabalho.

RESUMO

Nesta pesquisa, desenvolvemos uma proposta de ensino voltada ao domínio de competências e conceitos, relativos à resolução de problemas de multiplicação cartesiana.

A população selecionada foi constituída por alunos de uma classe de 4^a série do Ensino Fundamental, de uma Escola Estadual localizada da zona leste do Estado de São Paulo.

Tomamos como referência a Teoria dos Campos Conceituais, de G. Vergnaud, e consideramos elementos teóricos de pesquisadores que desenvolvem pesquisas sobre o pensamento multiplicativo.

Os dados foram obtidos por meio de registro e avaliação contínua do comportamento dos alunos no desenvolvimento das atividades, da análise do material produzido por eles e de entrevistas, entre outros.

No desenvolvimento das atividades, buscamos estabelecer conexões entre procedimentos aditivos e multiplicativos e os processos envolvidos na determinação de todos os pares do produto cartesiano.

Essas conexões foram ressaltadas ao serem representadas por meio de relações espaciais, promovendo a evolução de representações não convencionais, produzidas pelos alunos, para representações convencionais, em gráficos cartesianos e “de árvore”.

Como principais contribuições desta pesquisa para a compreensão das operações cognitivas envolvidas na resolução de problemas de produto cartesiano, ressalte-se: o levantamento de um repertório de procedimentos não convencionais empregados pela classe selecionada e suas justificativas, a análise de fenômenos ocorridos na passagem de uma para outra das diferentes representações do produto cartesiano.

A pesquisa oferece, igualmente, contribuições para a formação de professores do ensino fundamental.

Palavras-chaves: produto cartesiano, combinações, representações espaciais, procedimentos aditivos e multiplicativos.

ABSTRACT

This research is about a teaching project aiming at mastering abilities and concepts related to the solution of problems of Cartesian product.

The selected population were students of 4th Grade from a State School in the eastern region of the city of São Paulo.

Our reference is the G. Vergnaud Conceptual Fields Theory and we took in consideration theoretical elements from researchers interested in studying the multiplicative reasoning.

Data were collected from continuous observation and evaluation of the students performance, from the analyses of the materials produced by them and from interviews.

The activities were designed with the intent of establishing connections between adding and multiplying processes and the processes involved in the determination of all the pairs of the Cartesian product.

These connections become evident when represented by means of spatial relations promoting the evolution of non-conventional representations, produced by the students, to conventional representations, in Cartesian graphics and “tree” diagrams.

The major contributions of this research for understanding the cognitive operations involved in solving Cartesian product problems are the repertory of non-conventional processes, employed by the selected group of participants, and their justification, and the analyses of the phenomena that occur in the passage from one to the other of the different representations of the Cartesian product.

This research also offers contribution for the training of elementary education teachers.

Key-words: Cartesian product, spatial representations, word problems, adding and multiplying processes.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	12
Capítulo 1 – PROBLEMÁTICA E OBJETIVO	14
Capítulo 2 – CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS	21
2.1 – Campo Conceitual.....	21
2.2 – Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas.....	29
2.2.1 – Classes de problemas de estrutura multiplicativa.....	30
• Isomorfismo de medidas.....	30
• Produto cartesiano na visão de diferentes autores.....	33
Capítulo 3 – PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	42
3.1 - Metodologia de pesquisa.....	42
3.2 – A trajetória da investigação.....	43
3.2.1 - Busca da escola.....	43
3.2.2 – Descrição da escola.....	44
3.2.3 - A sala de aula.....	45
• População da pesquisa.....	45
• Quanto ao conteúdo.....	46
3.2.4 – Intervenção de ensino.....	46
• Descrição geral.....	46
• Avaliação diagnóstica.....	48
• Descrição e desenvolvimento das atividades.....	49
- Atividade 1 (1 ^o e 2 ^o encontros).....	49
- Atividade 2 (2 ^o encontro).....	53
- Atividade 3 (3 ^o encontro).....	54
- Atividades 4.1 e 4.2 (4 ^o encontro).....	56
- Atividades 5 e 5 ^A (5 ^o e 6 ^o encontros).....	58
- Atividades 6.1 e 6.2 (7 ^o encontro).....	62
- Atividades 7.1 e 7.2 (8 ^o encontro).....	64

- Atividades 8.1 e 8.2 (9º encontro).....	66
- Atividades 9 e 9 ^A (10º e 11º encontros).....	67
- Atividades 10.1; 10.2 e 10.3 (12º encontro).....	72
- Atividade 11 (13º encontro).....	73
- Atividades 12.1; 12.2 e 12.3 (14º encontro).....	75
- Atividades 13.1; 13.2; 13.3 e 13.4 (15º encontro).....	77
Capítulo 4 – ANÁLISE DOS DADOS	79
4.1 – Análise do desempenho na avaliação diagnóstica inicial.....	82
4.2 – Análise do desempenho nas atividades.....	87
• 1º bloco (atividades 1 a 4).....	87
- Categorias dos procedimentos de solução.....	98
- Respostas dos alunos (avaliação diagnóstica e atividades 1 a 4).....	100
• 2º bloco (Atividades 6.1; 6.2; 8.1 e 8.2).....	102
• 3º bloco (Atividades 10.1; 10.2; 12.1; 12.2, 13.2 e 13.4).....	110
Capítulo 5 – CONCLUSÕES	121
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	130
ANEXOS	134
Anexos 1A a 1P – Avaliação diagnóstica e Atividades 1 a 13.....	134
Anexos 2A a 2F – Discussões individuais ou coletivas em sala.....	150
Anexos 3A a 3E – Transcrições de entrevistas individuais ou em duplas.....	156

LISTA DE QUADROS

- Quadro 1 – Avaliação diagnóstica – Problemas cartesianos.....
- Quadro 2 – Atividade 4.1 - Problema verbal (4 chapéus x 6 enfeites).....
- Quadro 3 – Atividade 4.2 - Material manipulativo (3 carinhas x 4 chapéus).....
- Quadro 4 – Atividade 6.1 - Problema verbal (7 blusas x 5 saias).....
- Quadro 5 – Atividade 6.2 - Problema verbal aditivo (8 blusas e 11 calças).....
- Quadro 6 – Atividade 7.1 – Introdução da tabela de dupla entrada (3 carinhas x 5 chapéus).....
- Quadro 7 – Atividade 7.2 – Introdução da tabela de dupla entrada (4 chapéus x 3 enfeites de pescoço).....
- Quadro 8 – Atividade 8.1 - Problema verbal (3 pratos x 4 misturas).....
- Quadro 9 – Atividade 8.2 - Problema verbal (4 automóveis x 3 cores).....
- Quadro 10- Atividade 9 - Introdução da árvore de possibilidade (3 sorvetes x 3 coberturas).....
- Quadro 11- Atividade 9A – “Diagrama de árvore” (4 sorvetes x 3 coberturas)....
- Quadro 12 – Atividade 10.1 - Problema verbal (3 pães x 4 frios).....
- Quadro 13 – Atividade 10.2 - Problema verbal (3 camisetas x 4 bermudas).....
- Quadro 14 – Atividade 10.3 - Problema verbal (4 automóveis x 5 cores).....
- Quadro 15 – Atividade 11 - Enigma combinatório.....
- Quadro 16 – Atividade 12.1 - Passagem do “diagrama de árvore” para tabela de dupla entrada.....
- Quadro 17 – Atividade 12.3 - Passagem da tabela para o “diagrama de árvore”
- Quadro 18 – Atividade 12.3 - Problema verbal (7 automóveis x 6 cores).....
- Quadro 19 - Atividade 13.1 - Problema verbal (8 pacotes de figurinhas).....
- Quadro 20 – Atividade 13.2 - Problema verbal (4 meninos x 6 meninas).....
- Quadro 21 - Atividade 13.3 - Problema verbal (8 fileiras de poltronas).....
- Quadro 22 – Atividade 13.4 - Problema verbal (7 camisetas x 3 calças).....
- Quadro 23 - Categoria dos procedimentos para a representação dos pares.....
- Quadro 24 - Categoria dos procedimentos para a linguagem matemática.....

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Respostas na avaliação diagnóstica (problemas cartesianos 1 e 3)..

Tabela 2 - Respostas nas atividades 1 a 4.....

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Passagem de uma representação a outra.....

Figura 2 – Tabela de dupla entrada.....

Figura 3 – Representação em árvore.....

Figura 4 – Relações quaternárias.....

Figura 5 – Classe de problemas elementares.....

Figura 6 – Relações escalares e funcionais.....

Figura 7 – Proporção dupla.....

Figura 8 – Tabela de correspondência dupla (área).....

Figura 9 – Tabela de dupla entrada (casais).....

Figura 10– Tabela de correspondência dupla (casais).....

Figura 11 – Atividade 1 - Álbum.....

Figura 12 – Atividade 1 – Peças do álbum.....

Figura 13– Atividade 5 - Painel com combinações desorganizadas e repetidas.

Figura 14– Atividade 5 - Painel com combinações ordenadas por 1 critério.....

Figura 15 – Atividade 5^A - Painel com combinações ordenadas por 2 critérios..

APRESENTAÇÃO

No presente estudo, são abordados aspectos relativos ao processo de ensino-aprendizagem de problemas de estrutura multiplicativa com números naturais, que requerem o raciocínio combinatório, classificados na classe de produto cartesiano.

A população selecionada é uma turma da 4^a série, de uma escola estadual da cidade de São Paulo, onde realizamos 15 encontros para desenvolvimento das atividades.

A metodologia de pesquisa, utilizada neste estudo, refere-se a uma abordagem qualitativa tendo o ambiente escolar como lócus de investigação, ou melhor, a sala de aula.

Fundamentamo-nos na “Teoria dos Campos Conceituais”, de Gerard Vergnaud, considerando aspectos teóricos de outros pesquisadores.

Nosso trabalho insere-se entre as pesquisas realizadas no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, desenvolvido no grupo de pesquisa denominado G2 – Álgebra e Análise: especificidades, inter-relações e relações com outros domínios da Matemática nos diversos níveis de ensino.

Situações de produto cartesiano são pouco conhecidas e, comparativamente a outras classes de problemas multiplicativos, requerem um novo raciocínio e exige outras habilidades.

Julgamos importante que as crianças possam vivenciar tais situações, para evolução de seus conhecimentos e sejam capazes de compreender e buscar meios apropriados à solução de problemas escolares e da vida diária.

Trabalhamos com situações diversificadas e vivenciadas pelos alunos para que estas tivessem relação com seu domínio de experiência e para que a aprendizagem ocorresse de forma significativa.

Durante a intervenção docente, apresentamos a tabela cartesiana e o “diagrama de árvore” como forma de representações, por julgá-los meios econômicos e eficientes à aprendizagem, e enfatizamos a passagem de uma para outra das representações utilizadas.

Para a coleta de dados, utilizamos como instrumento: registro, avaliação contínua, análise do material produzido pelos alunos e entrevistas, entre outros.

Este trabalho consiste de 5 capítulos, conforme descrevemos a seguir.

No primeiro capítulo, destacamos a problemática e a importância do tema, delimitando o objetivo e propondo investigar algumas questões relevantes para a pesquisa e o ensino.

O segundo capítulo refere-se as considerações teóricas para desenvolvimento do estudo.

No terceiro capítulo são abordados os procedimentos metodológicos: metodologia da pesquisa e a trajetória da investigação.

No quarto capítulo é feita a análise dos resultados obtidos na avaliação diagnóstica e dos trabalhos desenvolvidos no lócus da investigação.

No quinto capítulo é apresentada a conclusão da pesquisa.

Em seguida, são destacados as referências bibliográficas e os anexos (atividades, discussões e entrevistas).

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA E OBJETIVO

Nosso trabalho insere-se entre as investigações realizadas no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, sendo desenvolvido no grupo de pesquisa denominado G2 – Álgebra e Análise: especificidades, inter-relações e relações com outros domínios da Matemática nos diversos níveis de ensino. O estudo das estruturas multiplicativas, pela sua complexidade, é relevante na perspectiva da investigação sobre os problemas da relação entre aritmética e álgebra.

Diferentes pesquisas sobre estruturas multiplicativas e sobre a transição da aritmética para álgebra têm sido realizadas nesse grupo, revelando dificuldades na compreensão dos problemas. Dentre estas pesquisas, tem sido amplamente constatado que os conceitos multiplicativos têm sua própria estrutura e não são redutíveis às noções aditivas. Esses estudos têm, igualmente, assinalado que a passagem de procedimentos aditivos para procedimentos multiplicativos se faz em um longo período e que o emprego de procedimentos não canônicos¹ intermediários ocupa, nesse processo, um importante papel (VERGNAUD 1987; CARRAHER 1996; FRANCHI 1995, 2002; BARRETO 2001).

Para Vergnaud (1994, p.180), o estudo das relações multiplicativas mostra a existência de muitos tipos de multiplicações ou divisões, ou várias classes de problemas cuja solução pede uma multiplicação ou uma divisão. A distinção destes diferentes casos e sua análise deve ser cuidadosamente abordada para ajudar a criança a reconhecer a estrutura dos problemas e a encontrar o procedimento que conduz à sua solução. O autor acrescenta que certas noções como as de relação, proporção, fração e função devem ser abordadas desde o ensino elementar.

As relações proporcionais, conforme Barreto (2001), são um dos conceitos matemáticos mais presentes no cotidiano, pois sempre nos deparamos com situações que colocam em prática as noções deste conceito. A forma de

¹ Canônico: conforme regra, padrão, norma. (Ferreira, p.135)

raciocinar por meio de um pensamento proporcional é fundamental quando se comparam duas razões e é bem aplicada a situações de variação entre duas dimensões ou de comparações múltiplas.

Quanto à proporção dupla, Vergnaud destaca, os estudantes são introduzidos a estas noções no domínio da combinatória durante a escola elementar (6 – 10/11 anos).

Para o autor (1987), um dos principais desafios de ensinar matemática é promover na sala de aula uma melhor relação entre os conceitos matemáticos e a resolução de problemas, de modo a serem interessantes e compreensíveis para os alunos. Ele enfatiza que a resolução de problemas deve ser considerada como “fonte e critério de conhecimento”: o conhecimento conceitual deve emergir da resolução de problemas. E isto significa escolher situações didáticas e debates adequados, justificações, representações e formulações, para ajudar os alunos a desenvolverem novos conceitos; também significa escolher uma série adequada de problemas, para avaliar os conhecimentos dos alunos, pois diferentes competências dependem de diferentes conhecimentos, explícitos ou implícitos.

Conforme Franchi:

“(...) no processo de resolução, o aluno confronta-se com uma tarefa de converter, para a linguagem matemática, conceitos, relações, proposições expressas em um texto verbal tendo em vista um tratamento adequado das informações pertinentes. Tais relações incidem sobre expressões referentes à determinadas situações e domínios de experiência: traços pertinentes dessas situações integram, de algum modo, o significado das operações. Assim sendo, resolver problemas em diferentes contextos é uma das condições de ampliação desse significado o que contribui para a sua descontextualização e generalização”.
(FRANCHI 2000, pp. 27-28)

Entretanto, conforme pesquisas na área, os princípios teórico-práticos e as recomendações acima descritas não têm sido considerados no processo de ensino-aprendizagem: a multiplicação tem sido insistentemente introduzida a partir de adições reiteradas, não se tem procedido à análise dos diferentes processos cognitivos envolvidos em diferentes classes de problemas e busca-se a resposta final em detrimento dos procedimentos de resolução (Franchi, 1995; Nunes e Bryant, 1997), valorizando-se, conseqüentemente, as palavras chaves (Franchi, 1995). Pode-se ainda perguntar: em que medida a resolução de problemas tem sido tratada de modo integrado aos aspectos conceituais?

Nos resultados dos exames institucionais SAEB² e SARESP³ sobre o desempenho de matemática, têm-se constatado fraco rendimento dos alunos sobre a resolução de problemas, demonstrando que os alunos não interpretam bem os enunciados dos problemas e não os solucionam de forma coerente.

A partir das considerações acima, mostramos nossa preocupação em relação a este quadro, pois tais dificuldades podem ocorrer devido ao modo com que, muitas vezes, os assuntos são abordados em sala de aula, de forma fragmentada e sem significado.

Sendo assim, centralizamos nosso trabalho no estudo de problemas multiplicativos, entre os quais selecionamos os de produto cartesiano.

Esta classe de problema é menos conhecida e exige o emprego de métodos e de inferências que envolvem o raciocínio combinatório.

Exemplo: Maria tem duas saias e três blusas diferentes; quantos trajes diferentes ela pode vestir mudando suas saias e blusas?

Definição: Designa-se por $S = \{s_1, s_2\}$ o conjunto das saias e por $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ o conjunto das blusas. O conjunto C , da formação dos pares possíveis, é o produto cartesiano do conjunto das saias pelo conjunto das blusas.

$$C = S \times B$$

Isto significa que, para concluir que se pode formar 6 trajes = 2×3 combinações diferentes, deve-se combinar cada saia com cada uma das blusas.

Conforme Vergnaud (1983, 1994), problemas de produto cartesiano pertencem à classe de produto de medidas.

Maiores detalhes sobre essa classe de problemas serão descritos no capítulo 2.

² Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica.

³ Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo.

Comparativamente a outras classes de problemas multiplicativos, situações deste tipo introduzem um novo raciocínio que exige outras habilidades, tais como agrupamento, associação, comparação, correspondência, classificação, enumeração, ordenação, organização, relação, levantamento e validação de hipóteses.

Soares e Moro (internet, 2006, p.3) salienta que a construção cognitiva do raciocínio combinatório é necessária e significativa para a cultura do ser humano, porque essa forma de raciocínio multiplicativo faz-se presente *“tanto na solução de diversos problemas do mundo cotidiano, de ordem matemática, como no trato de conceitos e relações de outros ramos das ciências em níveis os mais variados de compreensão (a física, a economia, por exemplo)”*.

Os autores (p.16) recomendam que problemas envolvendo o raciocínio combinatório estejam presentes na escola fundamental. Afirmam que os alunos se mostram capazes e também devem trabalhar com problemas de produto cartesiano pois, ao lado de sua utilidade em tantas áreas, lidar com tais conteúdos e em problemas interessantes é circunstância indispensável ao aparecimento e transformação de esquemas⁴ e relações de compreensão combinatória.

Carraher et al (1988) destacam que, além de fazer parte do ensino formal, a combinatória é utilizada fora da escola em diversas situações de jogos, brincadeiras ou trabalho. Os autores compararam o conhecimento matemático (combinatória) entre três grupos: cambistas do jogo do bicho que lidavam com a análise combinatória em seu trabalho e cuja escolaridade variava de zero a 11 anos, estudantes aprovados em exame vestibular, e trabalhadores cuja profissão não exigia o uso da análise combinatória e que tinham mesmo nível escolar dos cambistas. Na conclusão dos autores, a compreensão matemática é melhor obtida quando a experiência diária é combinada com a experiência escolar; sendo assim, a educação matemática deve promover oportunidades para que os algoritmos, fórmulas e modelos simbólicos sejam relacionados às experiências que lhes proporcionarão significado.

Para Canoas, o professor tem uma responsabilidade muito grande em promover tarefas às crianças nas séries iniciais e

⁴ Organização invariante de ação para uma certa classe de situações. (Vergnaud, 1994, p.53)

“o não entendimento do raciocínio combinatório, que envolve a operação de multiplicação, muito provavelmente bloqueará o aluno no estudo de funções, no qual ele encontrará dificuldade para o entendimento do conceito de relação (uma relação R é um subconjunto do $A \times B$) entre dois conjuntos”. (CANOAS, 1997, pp.7-8)

Batanero et al (1996) destacam que a análise combinatória com seus conceitos e métodos não representa somente um domínio definido da matemática; expressa, um pré-requisito estrutural importante à dinâmica e potência criativa do raciocínio lógico em geral. Porém, apesar da ênfase dada ao ensino combinatório, por ser uma ferramenta matemática útil ao desenvolvimento e funcionamento cognitivo dos estudantes, este geralmente só se inicia no nível secundário, por meio de fórmulas e exercícios repetitivos, o que dificulta a aprendizagem.

Para os autores, a apresentação rigorosa da combinatória e seu desenvolvimento formal requerem a intervenção de grande quantidade de noções algébricas abstratas e, entre elas, está relacionada a de produto cartesiano de conjunto.

Devido a nem sempre se alcançar espontaneamente o raciocínio combinatório ao se chegar na idade adulta, os autores consideram a necessidade de estimular o desenvolvimento deste raciocínio mediante uma adequada instrução e propõem que o ensino de combinatória seja mantido em todos os níveis de ensino.

Nunes et al (2002, p.182) destacam que, em um estudo feito por Monteiro, foi verificado que adultos não escolarizados, perfeitamente capazes de resolver problemas de “isomorfismo de medidas”⁵, mostraram um nível de sucesso praticamente nulo em problemas do tipo “produto de medidas”. Já para os que tinham escolaridade equivalente ao ensino fundamental incompleto ou completo, o desempenho nos problemas de produtos de medida foi significativamente superior ao dos adultos não escolarizados. As autoras consideram que este estudo indica a importância da escola como instituição que pode promover a expansão do raciocínio multiplicativo a novos tipos de situações.

Também verificamos que nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (1^a a 4^a séries, 1997, p.72) é destacada a importância de um trabalho conjunto de

⁵ Esta classe de problemas será descrita no capítulo 2.

problemas que explorem a multiplicação e a divisão, uma vez que há estreitas conexões entre as situações que os envolvem e a necessidade de trabalhar essas operações com base em um campo mais amplo de significado.

Entre essas situações e na perspectiva de nosso trabalho, salientamos a importância dada à classe de problema que envolve a idéia de combinatória. Para essa classe de problema, o PCN enfatiza que o resultado, traduzido pelo número de combinações possíveis entre os termos iniciais, evidencia um conceito matemático importante, o de produto cartesiano.

Quanto ao papel dos problemas, o PCN destaca:

“(...) os problemas cumprem um importante papel no sentido de propiciar às crianças, do primeiro e segundo ciclos, interagirem com os diferentes significados das operações, levando-as a reconhecer que um mesmo problema pode ser resolvido por diferentes operações, assim como uma mesma operação pode estar associada a diferentes problemas” (p.74)

Em seu artigo, Soares e Fini (2004, p.199) sugerem que o professor contemple problemas do tipo produto de medidas nas tarefas de solução de problemas. Os autores relatam que ao propor problemas de estrutura, diferenciados dos usualmente apresentados, em especial no início do ensino fundamental, como os de análise combinatória, o professor poderá promover progressos no processo de construção das operações aritméticas, assim como no estabelecimento de relações mais ampliadas em tarefas escolares.

Considerando a problemática desenvolvida acima e a fundamentação teórica exposta no próximo capítulo, desenvolveremos nosso trabalho sobre a resolução de problemas de produto cartesiano com números naturais, envolvendo o raciocínio combinatório.

Optamos em realizar a pesquisa em um ambiente natural, a sala de aula, visando estudar o processo de compreensão, dos alunos da 4^a série do Ensino Fundamental, nas resoluções desta classe de problemas.

Propusemo-nos a trabalhar com situações diversificadas e vivenciadas pelos alunos, relacionadas com seu domínio de experiência.

Consideramos, com Vergnaud, a importância de utilizar diferentes modos de representação, que são:

- expressões lingüísticas ou enunciado na linguagem natural;
- diagramas⁶ espaciais no plano (linhas, setas, regiões do espaço, locais);
- linguagem matemática.

Enfatizamos a tabela cartesiana e o diagrama de árvore como forma de representações por julgar que são meios econômicos e eficientes à aprendizagem. Também enfatizamos a passagem de uma para outra das representações utilizadas.

Considerando-se a resolução de problemas em que são dados dois conjuntos A e B pretendemos verificar:

- Que procedimentos os alunos utilizam na formação dos pares ordenados do produto cartesiano de A por B?
- Como interpretam esses procedimentos em linguagem matemática?
- Como as estratégias de ensino favoreceram a evolução das representações não convencionais para as representações convencionais?

⁶ Para Vergnaud os principais diagramas espaciais para as relações binárias são: o diagrama sagital e a tabela cartesiana (conforme descrito na página 25).

CAPÍTULO 2

CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

Nosso estudo fundamenta-se na teoria de Gerard Vergnaud sobre o “Campo Conceitual Multiplicativo”. Em complemento, consideramos aspectos de outros autores que entendemos como relevantes à nossa investigação sobre “Problemas de Produto Cartesiano”, tais como Batanero et al, Franchi, Neshet, Nunes e Bryant, Schwartz.

No primeiro item, faremos uma apresentação sobre o Campo Conceitual. No segundo, versaremos sobre o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas e classes de problemas, em que incluiremos a visão de diferentes autores sobre “Produto Cartesiano”.

2.1 - CAMPO CONCEITUAL

A teoria dos campos conceituais, proposta por Vergnaud, “é uma teoria cognitivista que visa a fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, notadamente das que relevam das ciências e das técnicas”. (VERGNAUD, 1990, apud FRANCHI, 2002, p.157)

Esta teoria visa a construção de princípios que permitam articular competências e concepções construídas em situações. A natureza da relação, que se estabelece entre competências, concepções e situações, imprime ao conhecimento muitos traços locais e um domínio de validade restrito, que varia com a experiência e o desenvolvimento cognitivo.

Processos cognitivos são entendidos como aqueles “*que organizam a conduta, a representação e a percepção, assim como o desenvolvimento de competências e de concepções de um sujeito no curso de sua experiência*”. (VERGNAUD, 1995, p.174)

O autor esclarece que em seu discurso os termos “competências e concepções” são de uso corrente. Em contraposição, os termos esquemas e invariantes operatórios requerem definições mais precisas, e complementa:

As concepções são em geral expressas por uma seqüência de enunciados, enquanto as competências se expressam por ações julgadas adequadas para tratar as situações. (VERGNAUD, 1995, p.175)

Em seus fundamentos, Vergnaud busca compor, em um mesmo foco de análise, desenvolvimento e funcionamento. A esse respeito, Vergnaud (1991) ressalta que é interessante e ao mesmo tempo difícil transpor ao ensino a idéia de que o conhecimento é funcional. Para o autor, um dos desafios a enfrentar nessa tarefa é considerar que as noções de problema e de situação, como ocasião de aprendizagem e desenvolvimento dos conhecimentos, são noções relativas, ou seja, o que é problemático para uma criança hoje, pode vir a não ser alguns anos mais tarde, o mesmo ocorrendo na vida profissional de adultos, assim como na pesquisa científica.

Isto exige da teoria, fundamentos que permitam a análise dos processos cognitivos envolvidos na constituição e evolução dos conhecimentos frente a determinadas situações.

A teoria do campo conceitual afirma que uma abordagem mais produtiva para essa análise é obtida pela utilização de um sistema referente ao próprio conteúdo do conhecimento e à análise conceitual desse domínio.

Não se trata de raciocinar matematicamente sobre idéias abstratas, mas:

- tomar como referência situações e problemas adequados ao ensino, considerando a experiência inicial da criança, tais como comprar mercadorias, dividir doces, deslocar-se no espaço, probabilidades etc;
- levar em conta o contraste e as interconexões entre as operações conceituais necessárias para o domínio progressivo deste campo; e,
- não minimizar o papel da linguagem e símbolos no desenvolvimento e no funcionamento do pensamento; é essencial classificar e analisar a variedade de significantes simbólicos e lingüísticos que usamos quando nos comunicamos e pensamos, mesmo que não sejam conceitos ou operações conceituais, mas somente um suporte para eles.

Consideramos outros dois fundamentos básicos em Vergnaud. O primeiro diz respeito à constituição da experiência, deslocando o foco da relação sujeito-objeto (Piaget) para a relação sujeito-situação: o conhecimento constitui-se e desenvolve-se no tempo em interação adaptativa do indivíduo com as situações que experiencia. O funcionamento cognitivo do sujeito em situação repousa sobre os conhecimentos anteriormente formados; ao mesmo tempo, o sujeito incorpora novos aspectos a esses conhecimentos, desenvolvendo competências cada vez mais complexas.

Ao referir-se ao termo situação, o autor esclarece que, em sua teoria, limita-se ao sentido atribuído pelo psicólogo, *“ou seja, os processos cognitivos e as respostas do sujeito são função das situações com as quais são confrontadas”*. (VERGNAUD, 1990, p.50)

Franchi (2002) acrescenta que *“pode-se pensar em situação como um dado complexo de objetos, propriedades e relações num espaço e tempo determinado, envolvendo o sujeito e suas ações”*.

O segundo fundamento coloca a conceitualização no centro do desenvolvimento cognitivo: um conceito não é somente uma definição dada por meio de um enunciado e texto, mas é também aquilo que é subjacente às competências e permite que a ação seja operatória. Porém, por serem poucos explícitos, os conhecimentos subjacentes às competências não são menos precisos e operatórios, mesmo que o sujeito não seja capaz de explicitá-los por ele mesmo. (VERGNAUD, sem data, pp.177-178)

No centro dessas idéias, situam-se as noções de classes de situações e de esquema.

Quanto à classes de situações, Vergnaud considera a possibilidade e a relevância de classificar, clara e exaustivamente, as situações do ponto de vista de sua estrutura conceitual, sendo que qualquer situação pode ser remetida para uma combinação de relações de base com dados conhecidos e desconhecidos, que correspondem a outras tantas questões possíveis. Para o autor, a classificação das situações é resultado de considerações matemáticas e psicológicas.

A classificação de situações e o binômio desenvolvimento/funcionamento consideram a evolução das condutas de um sujeito diante de uma classe de situações, *“desde as primeiras formas de conduta que ele adota até as formas*

largamente automatizadas que elas assumem quando os saberes e o saber-fazer são adquiridos”.

Quanto aos esquemas, o autor considera que:

Um esquema é definido como a organização invariante da ação para uma certa classe de situações. Esta totalidade dinâmica, introduzida por Piaget (a partir de Kant) para abranger tanto as “habilidades sensório-motoras” e as “habilidades intelectuais”, exige uma análise rigorosa e profunda se queremos compreender a relação entre competências e concepções. (VERGNAUD, 1994, p.53) (tradução nossa)

Um esquema é composto de:

- *invariantes operatórios (teoremas em ação e conceitos em ação) que pilotam o reconhecimento, pelo sujeito, dos elementos pertinentes da situação e a apreensão da informação sobre a situação a tratar;*
- *antecipações do objetivo a alcançar, dos efeitos a considerar e das etapas intermediárias eventuais;*
- *regras de ação do tipo “se...então”, que permitem gerar a seqüência de ações do sujeito;*
- *inferências, que permitem calcular as regras e as antecipações a partir das informações e do sistema de invariantes operatórios de que dispõe o sujeito. (VERGNAUD, 1990, p.159)*

Sendo assim, o autor destaca que devemos dedicar atenção aos aspectos conceituais de esquemas e à análise das situações para as quais estudantes desenvolvem seus esquemas, na escola ou na vida real.

Para o autor:

É indispensável distinguir entre o plano dos significantes e dos significados, entre os diferentes sistemas de significantes (linguagem natural, gestos, desenhos, esquemas, tabelas, álgebras,...) e entre os diferentes componentes do significado (invariantes, inferências, regras de ação, predições). (VERGNAUD, 1985, p.3)

Considera importante que os invariantes (conceitos e teoremas) possam ser expressos com palavras, símbolos, diagramas, ou gráficos para que se tornem elementos de concepções racionais explícitas e não permaneçam somente como elementos de *esquemas implícitos*. E conjectura que esta é uma condição necessária à transferência de conceitos e teoremas a quaisquer valores numéricos e domínio de experiência; ou seja, ao colocar o estudante frente a uma variedade de situações, deve-se atentar para a importância da contribuição dos *meios externos, tais como, significantes lingüísticos e extralingüísticos, no reconhecimento de estrutura invariante de diferentes problemas e então a possibilidade de usar os mesmos esquemas ou os similares.*

A partir de considerações como as acima, a complexidade sobre a qual a teoria de Vergnaud enfoca como conceito, implica na impossibilidade de contemplar isoladamente a aquisição de conceitos interconectados. Ou seja, a compreensão de um conceito não emerge apenas de um único tipo de situação e uma simples situação sempre envolve mais que um único conceito.

O campo conceitual, em resumo, caracteriza-se por *“um conjunto de situações, cujo domínio progressivo requer a utilização de uma variedade de procedimentos, de conceitos e de representações simbólicas em estreita conexão”*. (VERGNAUD, 1982, p.36; 1991, p.21)

Como já mencionamos no capítulo 1, na problemática, nossa pesquisa refere-se ao tema “Produto Cartesiano”, em uma abordagem que se utiliza de vários modos de representação e da passagem de uma representação a outra. Faz-se, portanto, necessário ampliar os fundamentos teóricos nestes aspectos, que consideramos conforme definição de Vergnaud (1994).

Para o ensino da matemática, ele destaca que as principais representações usadas são:

- expressões lingüísticas ou enunciado na linguagem natural;
- diagramas⁷ espaciais no plano (linhas, setas, regiões do espaço, locais);
- linguagem matemática.

Os principais diagramas espaciais para as relações binárias são o diagrama sagital e a tabela cartesiana. Para o autor (1994, p.13), relações binárias são as que ligam dois elementos entre si.

Os elementos colocados em relação podem ser de diferente natureza como, por exemplo, objetos inertes (o lápiz está sobre a mesa) números (sete é maior que três), expressões algébricas (x é igual a $3y$ ($x = 3y$)) pessoas (Pierre está ao lado de Janine).

⁷ No texto de Vergnaud, é usada a expressão “schémas spatiaux”. No dicionário, a tradução da palavra “schéma” é a seguinte: figura geométrica; figura de retórica (do latim *schema*, do grego *skhêma*); maneira de ser de uma figura; figura dando uma representação simplificada e funcional (de um objeto, de um movimento, de um processo. V. diagrama, plano). (Robert, P. 1973)

Vergnaud considera que todos os exercícios possíveis de passagem podem ser representados conforme indicado no diagrama⁸ e enunciados a seguir.

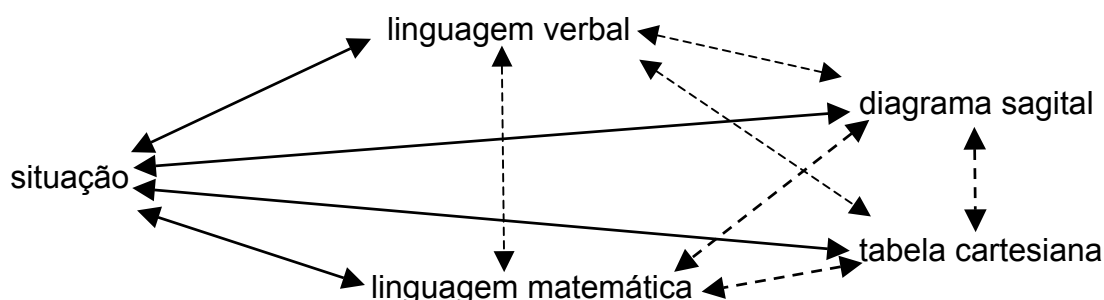


Figura 1: Passagem de uma representação a outra
(Fonte: Vergnaud, 1994, p.55)

- a) de uma situação real para uma representação e reciprocamente (setas com traços plenos);
- b) de uma representação para uma outra (setas com traços interrompidos).

Exemplos de tarefas do item a:

- descrever verbalmente as relações existentes entre crianças sentadas a uma mesa (próxima a, na frente de, na mesma fila que, etc.);
- desenhar um diagrama sagital (ou tabela cartesiana) de uma dessas relações;
- colocar as crianças ao redor de uma mesa conforme um enunciado dado (ou um diagrama sagital, ou uma tabela cartesiana).

Exemplos de tarefas do item b:

- elaborar o diagrama sagital correspondente a um enunciado dado;
- fazer a tabela cartesiana correspondente a um diagrama sagital dado;
- escrever a equação algébrica correspondente a um enunciado dado;
- dar um exemplo de enunciado correspondente a uma equação dada (ou um diagrama sagital, ou uma tabela cartesiana).

⁸ As traduções das palavras, no diagrama, foram feitas por nós.

Para Vergnaud: “Os exercícios de passagem de uma representação a outra são de grande fertilidade pedagógica, tanto no caso de atividade classificatória como em outras atividades lógico-matemáticas”. (VEGNAUD, 1994, p.80)

Exemplificando para o caso de situações de estrutura multiplicativa, consideramos que estas podem ser representadas por meio de problemas verbais⁹, por meio de expressões aritméticas e algébricas, e por meio de diagramas e tabelas. Isto é especialmente válido também no caso dos problemas multiplicativos do tipo produto cartesiano, para os quais a representação em tabela (ou gráfico) cartesiana e a representação em árvore desempenham um papel importante.

Ao referir-se a essas representações, o autor destaca que são claramente enquadradas na categoria de representações espaciais e que podem utilizar muitas propriedades do espaço, tais como alinhamentos, direções, ortogonalidade, ordem de medida, assim como simetrias, centro e periferia, etc.

Em relação à tabela, fez a seguinte ilustração, mencionando que uma classificação de dupla entrada utiliza linha e coluna, intersecção, assim como a ortogonalidade e a independência.

		CORES		
		amarela	Azul	vermelha
FORMAS	Quadrado			
	Círculo			
	Triângulo			
	Retângulo			

Classes de objetos possíveis

Figura 2: Tabela de dupla entrada
(Fonte: Vergnaud, 1994, p.27)

⁹ Problemas rotineiros, freqüentes em nossos livros didáticos.

Assim sendo, outra representação pertinente para o problema de produto cartesiano é a em forma de árvore, que segundo o autor, é mais simples, pois fundamenta-se na tomada sucessiva de cada um dos descritores; além disso, ela também tem a vantagem de ser indefinidamente extensível, tendo ligação privilegiada com a combinatória.

A ilustração seguinte mostra uma representação em árvore para três descritores: formas (quadrado, círculo, triângulo), cores (amarela, azul) tamanho (grande, pequeno).

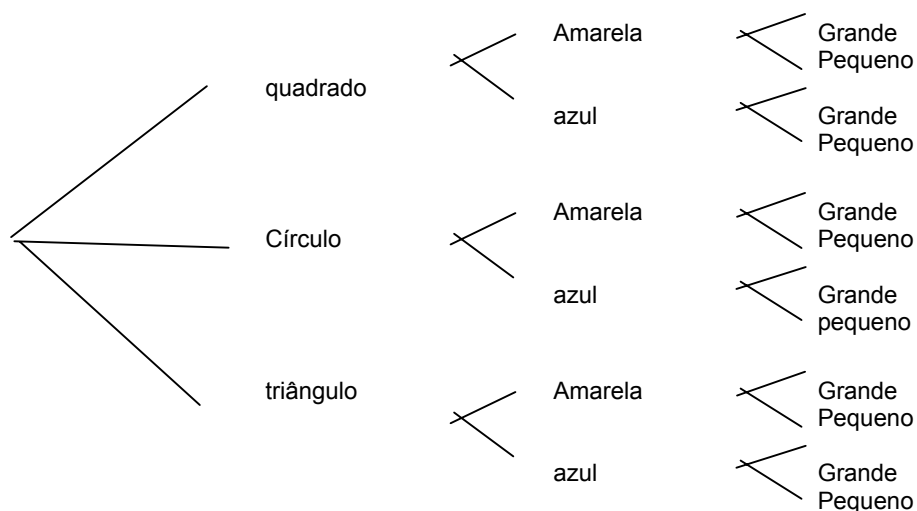


Figura 3: Representação em árvore
(Fonte: Vergnaud, 1994, p.79)

Segundo Vergnaud (ibid, p.203), é simultaneamente com a ajuda das diferentes representações que a criança raciocina, passando de um plano a outro em função das necessidades e das relações que tem para tratar. Pensar consiste não somente em passar de uma situação real a uma representação, mais passar de uma representação a uma outra e a voltar.

Resumindo: a representação refere-se à formação da experiência em seu conjunto, quer esta experiência seja social ou individual, sistematicamente organizada ou aberta, discursiva ou não discursiva.

Faremos agora, uma apresentação do campo conceitual das estruturas multiplicativas, dando ênfase aos problemas de produto cartesiano, assunto relacionado à nossa pesquisa, e complementando com aspectos teóricos de diferentes autores.

2.2 - CAMPO CONCEITUAL DAS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS (C.C.M.).

O campo conceitual multiplicativo, segundo Vergnaud (1994, pp.57-58), pode ser visto como:

- a) o conjunto de situações que requer multiplicação, divisão, ou combinação de tais operações;
- b) o conjunto de esquemas necessários para lidar com estas situações;
- c) o conjunto de conceitos e teoremas que torna possível analisar as operações necessárias do pensamento: função linear e n-linear, fração, razão, proporção, número racional, análise dimensional, teoria do espaço vetorial; e
- d) o conjunto de formulações e simbolizações.

Para o autor (1983, p.128), o desenvolvimento das estruturas aditivas e multiplicativas é necessário para o domínio de certas relações envolvidas em outros campos conceituais. Porém, as estruturas multiplicativas têm suas próprias organizações intrínsecas, não redutíveis aos aspectos aditivos.

Como já referido neste capítulo, um trabalho científico de classificação exige que em toda situação se estabeleça, com os dados pertinentes (conhecidos e desconhecidos), uma combinação de “relações de base”.

Os problemas sobre as quatro operações fundamentais podem ser analisados sob a ótica das relações de base que engendram; ou seja, as relações de bases elementares e as classes de problemas que elas podem gerar são instrumentos para a análise das situações e para a análise das dificuldades enfrentadas pelos alunos.

A seguir, descrevemos as classes de problemas de estrutura multiplicativa, e conforme já mencionamos, damos ênfase aos problemas de produto cartesiano.

2.2.1 – CLASSES DE PROBLEMAS DE ESTRUTURA MULTIPLICATIVA.

No conjunto dos problemas de estrutura multiplicativa, Vergnaud (1994) distingue duas categorias:

- a) isomorfismo de medida;
- b) produto de medida.

Faremos uma descrição sintetizando o “Isomorfismo de Medida” no primeiro item, deixando a discussão de “Produto de Medida” para ser feita no próximo item, em que incluiremos a concepção de vários autores sobre “Produto Cartesiano”, assunto de nossa investigação.

Para a primeira classe, exporemos elementos característicos fundamentais de acordo com definição de Vergnaud (1983, 1996), Franchi (2002). Para a segunda classe, de acordo com Vergnaud (1983, 1994, 1996), Nesher (1988), Schwartz (1988), Nunes e Bryant (1997), Batanero et al (1996).

- **ISOMORFISMO DE MEDIDA**

A classe de situação de isomorfismo de medida caracteriza-se por uma estrutura que consiste de uma proporção direta simples entre dois espaços de medidas M_1 e M_2 . Vergnaud descreve um grande número de situações na vida profissional e comum, as quais incluem: repartição igual (pessoas e objetos), preço constante (mercadorias e custos), velocidade uniforme e velocidade média constante (duração e distância), densidade constante linear (árvores e distâncias); em uma superfície ou em um volume.

Referindo-se a análise das estruturas multiplicativas elementares, o autor considera que as relações de base mais simples são as quartenárias. Isto se deve ao fato de que os mais simples problemas multiplicativos e de divisão implicam na proporção simples de duas variáveis, uma em relação à outra.

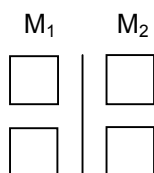


Figura 4: Relação quaternária
(Fonte: Vergnaud, 1996, p.174)

Esta relação permite a geração de quatro classes de problemas elementares pertencentes à classe de isomorfismo de medida, cujas representações destacamos a seguir:

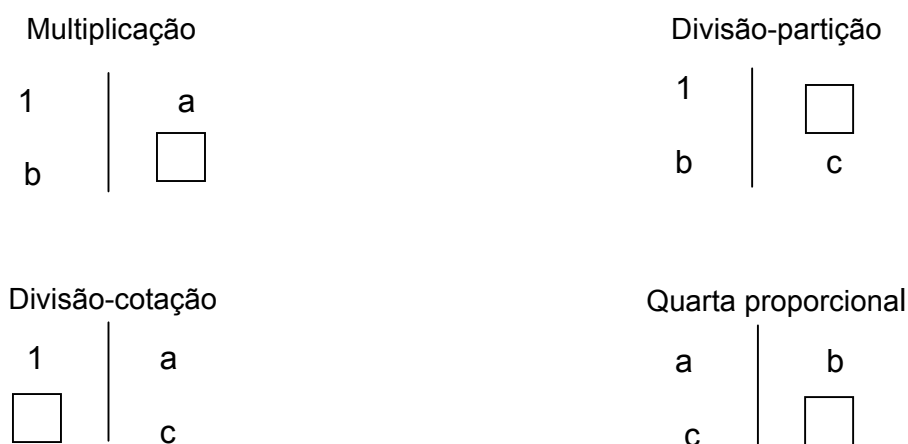


Figura 5: Classes de problemas elementares
(Fonte: Vergnaud, 1996, p.174)

Quanto a complexidade de um simples problema multiplicativo pertencente à classe “isomorfismo de medida”, analisamos o problema multiplicativo utilizando o exemplo de Barreto (2001), envolvendo 4 litros de combustível ao preço de R\$10,00.

Vergnaud considera, primeiramente, que os diferentes conceitos e modos de operar as informações dadas no texto são interpretados por meio de relações de proporcionalidade simples; assim, a relação multiplicativa caracteriza-se por lidar com duas variáveis, por exemplo, (x, y) , pertencendo a espaços de medidas de naturezas diferentes, assumindo valores em uma razão dada. Pode-se, portanto definir uma função $f(x) = ax$, em que a cada x do domínio (x pertencente a R) corresponde um e somente um elemento do contradomínio, sendo que “ a ” é a constante de proporcionalidade R .

Os diagramas seguintes representam as relações estabelecidas entre número de litros e custos.

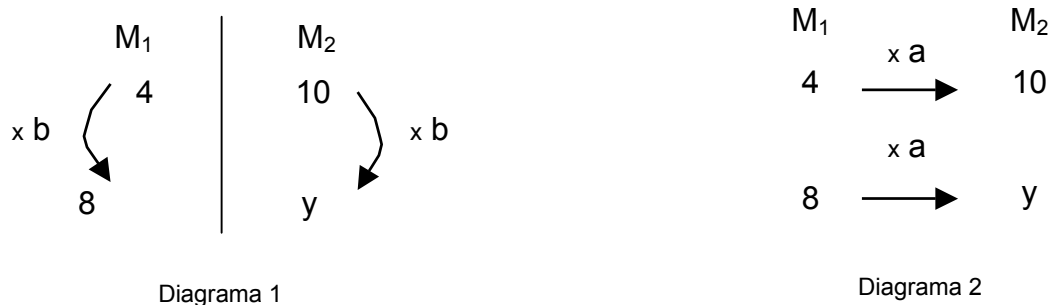


Figura 6: Relações escalares e funcionais
(Fonte: Vergnaud, 1983, p.130)

O autor ressalta que as duas relações existentes neste problema são:

- *relações escalares:* caracterizam-se por relações multiplicativas estabelecidas entre os elementos de um mesmo espaço de medida; no exemplo acima (diagrama 1), correspondem aos escalares indicados nas setas ligando 4 com 8, e 10 com y .
- *relação funcional:* consiste em operar com o coeficiente de proporcionalidade, ou seja, implicitamente, como a relação funcional acima expressa (diagrama 2). No exemplo dado, consiste em determinar o valor da função, para diferentes valores de x .

Para Franchi (2002, p.187), o modelo multiplicativo adotado por Vergnaud ressalta uma relação matemática importante ao pensamento multiplicativo, que é a proporcionalidade, o que permite estender esse modelo para situações multiplicativas complexas, inclusive para diferentes campos numéricos.

Entretanto, a proposta de Vergnaud não abrange aspectos importantes constitutivos iniciais dessa relação; ou seja, componentes pré-multiplicativos: nas fases iniciais da aprendizagem é necessária a coordenação de diferentes processos que levam ao significado dos elementos constitutivos de uma situação multiplicativa (adição repetida, constituição de seqüências, tabuada, cálculo de algoritmos), cuja coordenação se domina em um longo trabalho de elaboração, no qual diferentes significados integram-se em uma complexa rede de relações. Na mesma direção, Davidov (1991) também considera que a condição característica da multiplicação chamada trivial (reduzível à adição repetida) e as informações advindas do ato de ensinar essa operação devem integrar-se ao exame teórico dos elementos que integram sua estrutura.

- **PRODUTO CARTESIANO NA VISÃO DE DIFERENTES AUTORES.**

- **VERGNAUD**

Conforme Vergnaud (1983, pp.134-136), problemas de produto cartesiano pertencem à classe de produto de medida.

O produto de medida é uma estrutura que consiste da composição cartesiana de dois espaços de medidas, M_1 e M_2 , em um terceiro, M_3 . Esta estrutura descreve um razoável número de problemas referente a área, volume, produto cartesiano e muitos conceitos físicos.

Devido a ter (pelo menos) três variáveis envolvidas, esta estrutura não pode ser representada por um quadro de correspondência simples, como o utilizado na estrutura de isomorfismo de medida. Sua representação se faz, de preferência, por uma tabela de correspondência dupla.

Quando se trata da combinação de duas proporções, Vergnaud (1996) ressalta que esta não conduz aos mesmos problemas cognitivos como, por exemplo, no caso em que ela se faz por produto, sendo z proporcional a x e a y , com x e y independentes entre si; tratando-se, aqui, de uma estrutura de proporção dupla.

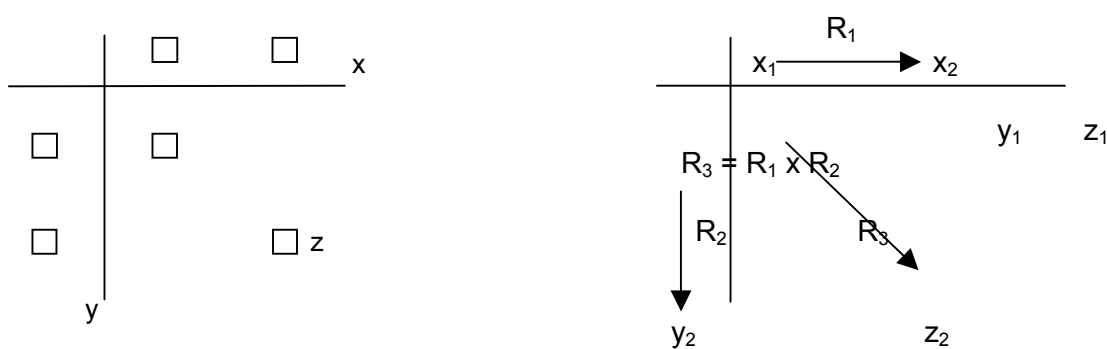


Figura 7: Proporção dupla
(Fonte: Vergnaud, 1996, p.176)

A proporção dupla, conforme Vergnaud, é de extrema importância epistemológica para a geometria, a física, as probabilidades e a estatística. As questões relacionadas ao seu ensino não são bem reconhecidas pelos alunos, e isto ocorre porque são, conceitualmente, mais difíceis e porque acionam muitos elementos de uma só vez; isto é: seis grandezas e três razões para a proporção dupla, sem contar as funções e razões intermediárias a considerar.

O autor destaca que os conceitos de fração, quociente, número racional, produto e quociente de dimensões, escalar, função linear, combinação e aplicação linear assumem sentido, primitivamente, nos problemas de proporção e desenvolvem-se como instrumentos de raciocínio através do progressivo domínio dessas situações, muitos antes de poderem ser apresentados e tratados como objeto matemático.

Como representação de proporção dupla, ilustramos o seguinte diagrama que reflete a da área do retângulo para o comprimento e da área para a largura, independentes entre si.

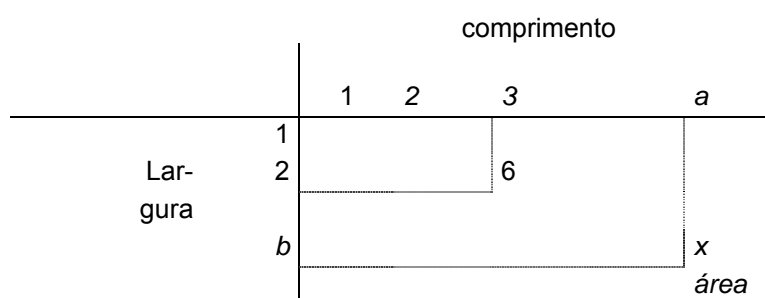


Figura 8: Tabela de correspondência dupla
(Fonte: Vergnaud, 1983, p.134)

No produto de medidas, há uma maneira canônica de escolher unidades. Isto é, $f(1,1) = 1$; ou no caso de encontrar a área do quadrado,

$$(1 \text{ unidade de comprimento}) \times (1 \text{ unidade de comprimento}) = (1 \text{ unidade de área}).$$

As unidades do produto são expressas como de unidades elementares; por exemplo, centímetros quadrados, centímetros cúbicos.

Outro exemplo é o seguinte:

Três meninos e quatro meninas estão num salão de dança. Cada menino quer dançar com cada menina e cada menina com cada menino. Quantos casais diferentes de menino-menina são possíveis?

$$f(1 \text{ menino} \times 1 \text{ menina}) = 1 \text{ par}$$

Os diferentes pares possíveis podem ser facilmente formados e classificados por uma tabela de dupla entrada. A proporção do número de pares para o número de meninos e de meninas, independentemente, pode também ser feita visivelmente por uma tabela de correspondência dupla: o número de pares é

proporcional ao número de meninos quando o número de meninas é mantido constante (colunas paralelas), e para o número de meninas quando o de rapazes também é mantido constante (linhas paralelas), como segue.

		F			
		f	g	h	i
G	a	(a, f)	(a, g)	(a, h)	(a, i)
	b	(b, f)	(b, g)	(b, h)	(b, i)
	c	(c, f)	(c, g)	(c, h)	(c, i)

pares

		Número de meninas						
		1	2	3	4	5	...	n
número de meninos	1	1		3				
	2	2	4	6	8	10		$2n$
	3			9				
	m			$3m$				mn

Número de pares

Figura 9: Tabela de dupla entrada
(Fonte: Vergnaud, 1994, p.172)

Figura 10: Tabela de correspondência dupla
(Fonte: Vergnaud, 1983, p.135)

Uma análise feita, para este problema, é a seguinte:

Designa-se por $G = \{a, b, c\}$ o conjunto dos meninos e por $F = \{f, g, h, i\}$ o das meninas. O conjunto C dos pares possíveis é o produto cartesiano do conjunto dos meninos pelo das meninas,

$$C = G \times F$$

como também mostrado na tabela cartesiana (figura 9).

Em outros termos: um par consiste na associação de um elemento do primeiro conjunto com um elemento do segundo. O número de pares é igual ao produto do número de meninos pelo de meninas.

Para Vergnaud, o produto cartesiano é atraente, tendo sido implementado, na França, por ocasião do advento da “matemática moderna”, para introduzir a multiplicação nos segundo e terceiro níveis da escola elementar. Porém, muitas crianças fracassam em entender a multiplicação, quando ensinada por esse enfoque. O autor considera que a estrutura aritmética do produto cartesiano, como um produto de medidas, na verdade é muito difícil e realmente não pode ser dominada até ser analisada como uma proporção dupla. Proporção simples deve vir em primeiro lugar. Na estrutura do produto de medidas, multiplicar metros por

metros resulta metros quadrados; multiplicar número de meninos por números de meninas resulta em pares.

Segundo o autor (1994, pp.171-173), esta forma de relação consiste em uma relação ternária entre as quantidades, na qual uma é o produto das duas outras, ao mesmo tempo sobre o plano numérico e sobre o plano dimensional.

Para representar esta forma de relação, o autor considera como diagrama mais natural a tabela cartesiana, porque é, de fato, a noção de produto cartesiano de conjuntos que explica a estrutura do produto de medidas.

□ NESHHER

Para Neshher (1988), a classe de problema de produto cartesiano é menos conhecida, e considera, com Vergnaud, que envolve multiplicação de duas dimensões diferentes para produzir uma terceira.

De acordo com a autora, para que ocorra uma apropriação adequada da estrutura textual de problemas com palavras, é necessário começar pela consideração das exigências lógicas relacionadas às tarefas de natureza aritmética.

Para os textos de problemas de multiplicação e divisão, considera que as condições lógicas para a boa formação de texto destes problemas podem ser formuladas primeiro e, só então, suas realizações lingüísticas, em termos das relações semânticas entre proposições subjacentes ao texto, poderão ser traçadas.

A autora discute três classes distintas de problemas verbais multiplicativos, cujos exemplos estão descritos nas tabelas seguintes.

- a) Problemas multiplicativos descrevendo uma "regra de mapeamento" (alguns referem-se a eles como adição "repetida");
- b) problemas multiplicativos do tipo "comparativo" (ou "ampliação");
- c) produto Cartesiano.

a) Existem 5 estantes de livros no quarto de Dan. Dan colocou 8 livros em cada estante. Quantos livros há nesse quarto?	b) Dan tem 5 bolinhas de gude. Rute tem 4 vezes mais bolinhas que Dan. Quantas bolinhas tem Rute?	c) Rute tem 4 saias e 3 blusas. Quantas combinações, diferentes de saias e blusas, Rute pode formar?
---	---	--

Nesher considera que o problema do item a refere-se ao que Vergnaud define como isomorfismo de medida.

Ao referir-se ao problema de produto cartesiano (item c), Nesher destaca que ele consiste de:

“três cadeias em que as duas primeiras descrevem dois conjuntos independentes de objetos (o número de blusas (x) e o número de saias (y)). A terceira cadeia é a componente questão e pergunta quanto “z” há; onde z é a multiplicação cruzada entre cada um dos x e cada um dos y (para cada blusa e saia há um traje); esse z, que é um predicado de três argumentos, é único”. (Nesher 1988, p.23)

Para Nesher, este tipo de problema traz um pressuposto implícito no texto do problema e que deve ser ativamente considerado na sua resolução. O pressuposto é que cada x é multiplicado em cruz com cada y. Na ausência de uma descrição exata, a criança pode pensar em todos os tipos de combinações entre x e y, incluindo a combinação aditiva. A similaridade desse tipo de problema, com a adição, torna-se ainda mais clara quando se consideram as duas primeiras proposições, que são idênticas em estruturas às duas primeiras proposições nos problemas aditivos do tipo de “combinação”.

Nessa classe de problema, o texto não descreve explicitamente a correspondência a ser feita entre os elementos dos conjuntos, sendo que a criança tem que pensar que para cada “x”, há tantos “y”; chegando, assim, ao número total de combinações.

Nesher complementa:

Por isso, em relação à multiplicação, pode-se prever que os problemas cartesianos são os mais difíceis; os de mapeamento os mais fáceis, e os comparativos ficam entre os dois”. (ibid, p.24)

Ao referir-se a análise dimensional, Nesher pondera que a análise enfatizada por Vergnaud e Schwartz é o resultado de uma análise prévia do problema formulado verbalmente.

Quanto aos problemas cartesianos, os dois autores consideram que a resolução destes problemas envolve a composição de duas dimensões, resultando em uma terceira. Entretanto, Vergnaud identifica esta composição como $M_1 \times M_2 = M_3$, em que “M” é o espaço de medida (cf. indicado nas páginas 33-36), e Schwartz como $E_1 \times E_2 = E_3$, em que “E” é a quantidade extensiva, conforme indicado a seguir.

□ SCHWARTZ

Para a abordagem dimensional, Schwartz (1988) focaliza sua atenção para o referente da questão, ou seja, se a quantidade intensiva (I) ou extensiva (E). A distinção entre estas quantidades é também baseada na análise dimensional e, no caso da quantidade extensiva, o referente é uma entidade simples (dimensão), enquanto que a quantidade intensiva envolve um referente de duas entidades.

Por exemplo: Quando se fala de 5 médicos, estamos tratando de uma quantidade extensiva (E), onde o referente é médicos (uma entidade); porém, 60 quilômetros por hora, é uma quantidade intensiva (I) porque os referentes são quilômetros e hora (duas entidades).

Tomando por base esta distinção, Schwartz define três categorias de problemas verbais multiplicativos, levando em conta a composição de medidas que podem ou não resultar em novos referentes. Dentre estas categorias, está o produto cartesiano.

Na multiplicação cartesiana, a multiplicação de uma medida extensiva E_1 por outra medida extensiva E_2 , resulta numa terceira medida E_3 (por exemplo: se E_1 é o número de blusas e E_2 é o número de calças, então $E_1 \times E_2$ resulta numa nova medida E_3 , o número de trajes possíveis), ou seja ($E_1 \times E_2 = E_3$).

□ NUNES & BRYANT

Nunes e Bryant (1997, pp.142-143) relatam que há muito mais na compreensão da multiplicação e divisão do que calcular quantidades. A criança deve aprender e entender um conjunto inteiramente novo de sentidos de números e um conjunto de invariáveis, todas as quais estão relacionadas à multiplicação e à divisão, mas não à adição e à subtração.

Para estes autores, o raciocínio multiplicativo é um tópico muito complicado, por assumir formas diferentes e tratar de muitas situações.

Em relação a problemas do tipo produto cartesiano, eles investigaram como as crianças dominavam esta classe de problemas, trabalhando somente com situações manipulativas (6 shorts e 4 camisetas em miniatura, p.159) e não com problemas verbais. Os autores relatam que este tipo de problema foi verificado ser mais difícil do que outros problemas de correspondência um-para-

muitos, mencionando que Neshet o apontou como sendo mais complexo, por pelo menos duas razões:

1º) porque o problema envolve dois conjuntos básicos (exemplo: shorts e camisetas); mais um terceiro conjunto, o de trajes. Os trajes são identificados pela combinação de cada elemento em um conjunto básico (por exemplo: os shorts) com cada elemento do outro conjunto (as camisetas);

2º) a correspondência um-para-muitos não é explicitamente indicada na formulação verbal, cabendo ao solucionador do problema descobrir que para cada shorts há três transformações possíveis de camisetas, ou seja, três trajes possíveis.

A seguir, apresentamos uma síntese da definição de Nunes e Bryant, sobre a correspondência um-para-muitos.

Para os autores, as situações de correspondência um-para-muitos envolvem o desenvolvimento de dois novos sentidos de números: a *proporção*, que é expressa por um par de números que permanece invariável em uma situação mesmo quando o tamanho do conjunto varia, e o *fator escalar*, que se refere ao número de replicações aplicadas a ambos os conjuntos, mantendo a proporção constante (por exemplo: 1 criança tem 2 pés; 5 crianças tem ... pés).

Referindo-se a esta correspondência Nunes e Bryant mencionam que:

“para resolver um problema de multiplicação quantitativa, as crianças precisam de mais do que entendimento de relações: elas devem também organizar sua atividade de contagem de uma forma nova. Elas precisam ser capazes de efetuar replicações e saber como contar as unidades apropriadas em cada um dos conjuntos”. (1997, p.158)

□ NOSSA VISÃO

Ampliando a análise sob a perspectiva da estrutura textual, fazemos um comentário: nos problemas multiplicativos (5 livros em 1 estante, x livros em y estantes; 1 carro tem 4 rodas, x carros tem y rodas), a regra de mapeamento já é dada no texto; porém, nos problemas de produto cartesiano esta regra não é explícita, sendo necessário se passar de “A” shorts e “B” camisetas para a regra de mapeamento (para cada short, 4 camisetas) e só a partir daí é que o problema atinge a correspondência um-para-muitos. Note-se que essa passagem não se faz de um só golpe, necessitando de toda uma elaboração em que ocorrem diferentes processos, como os já mencionados no capítulo 1. Portanto, estes dois

tipos de problemas são completamente diferentes, independentemente da possibilidade de o cartesiano chegar na correspondência um-para-muitos.

□ **BATANERO ET ALL**

Na resolução de problemas de produto cartesiano, usa-se o raciocínio combinatório; assim, faremos uma breve apresentação da combinatória conforme definição de Batanero et al (1996).

Os autores destacam que, segundo uma perspectiva histórica, a Combinatória ou Análise Combinatória estuda os conjuntos discretos e as configurações que se podem obter a partir de seus elementos mediante certas transformações que originam mudanças na sua estrutura ou na sua composição. A estrutura destes conjuntos pode ser muito complexa, dependendo das relações existentes entre os elementos, sendo que a primeira tarefa da análise combinatória consiste em estudar tais estruturas discretas e expressar suas propriedades, empregando métodos matemáticos.

Sobre os conjuntos discretos realizam-se certas classes de operações e algumas delas originam a mudança de estrutura, ou seja, as inter-relações entre os elementos dos conjuntos modificam sua composição.

Um exemplo, entre as operações mais simples do primeiro tipo, seria o das permutações de elementos, que originam uma mudança na ordem relativa dos mesmos; e do segundo tipo, a obtenção de amostras ou subconjuntos a partir de um conjunto dado ou de produto cartesiano n -ésimo de tal conjunto. Também figura entre as transformações combinatórias o estabelecimento de correspondências entre distintos conjuntos discretos de objetos. Com freqüência, as ações mencionadas se aplicam mais de uma vez (reiteradamente) e, além disso, nas combinações mais diversas, quando se impõem diferentes condições.

Segundo os autores:

Esta é uma das razões, pela qual se apresentam possibilidades praticamente inesgotáveis de criar construções discretas, as quais se denominam configurações combinatórias, que são o objeto de estudo deste ramo da matemática, especialmente os processos de formação destas configurações e recontagem das mesmas. (ibid, p.18)

Uma estratégia a ser utilizada na resolução desses problemas, quando o número de possibilidades não é excessivamente elevado, é a enumeração sistemática de todas as configurações combinatórias.

Para os autores, os gráficos de árvore são representações que permitem visualizar de forma simples fatos ou relações e

“ajudam a compreender melhor as situações de enumeração e a encontrar com simplicidade a regra do produto; por exemplo: se uma árvore tem dois níveis de ramificação, no primeiro nível há n_1 ramos e cada um destes ramos se divide em n_2 novos ramos no segundo nível, o número total de ramos é $n_1 \times n_2$ ”. (ibid, p.54)

CAPÍTULO 3

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo descreve a metodologia utilizada para o desenvolvimento de nosso estudo sobre problemas de produto cartesiano com números naturais, com alunos da 4ª série do ensino fundamental. Trata-se de uma abordagem qualitativa que tem o ambiente escolar como lócus da investigação. Em seguida, apresentamos a trajetória da investigação e procedimentos utilizados para realização deste trabalho.

3.1- METODOLOGIA DE PESQUISA

Nossa investigação foi feita por meio de uma abordagem qualitativa. Segundo Lüdke et al (1986), uma pesquisa qualitativa apresenta as seguintes características básicas:

- tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento;
- os dados coletados são predominantemente descritivos;
- a preocupação com o processo é muito maior do que com produto;
- o “significado” que as pessoas dão as coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador;
- a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo¹⁰.

Esta pesquisa foi realizada no ambiente escolar, em sala de aula, e refere-se à compreensão dos alunos, ao desenvolvimento e avaliação de uma proposta de ensino sobre o processo de resolução de problemas de produto cartesiano.

¹⁰ “Os pesquisadores não se preocupam em buscar evidências que comprovem hipóteses antes do início dos estudos. As abstrações formam-se ou consolidam-se basicamente a partir da inspeção dos dados num processo de baixo para cima. No início há questões ou focos de interesse muito amplos, que, no final, tornam-se mais diretos e específicos; o pesquisador vai precisando melhor esses focos à medida que o estudo se desenvolve.” (LÜDKE, 1986, p.13)

Assumi o papel de pesquisadora e professora da turma no percurso do ensino, fazendo intervenções quando necessárias. As avaliações ocorreram durante todo o processo e as atividades foram se configurando no decorrer da investigação.

Promovemos situações diversificadas, relacionadas ao domínio de experiência dos alunos, para que houvesse melhor interação com as mesmas a fim de ocorrer a evolução do conhecimento, por meio de uma aprendizagem significativa. Além disso, também procuramos desvendar a compreensão dos sujeitos sobre o objeto de estudo.

Utilizamos, como instrumento de coleta de dados, depoimentos, discussões com os alunos, avaliações, anotações, diário de classe, plano gestão, algumas observações da professora e estagiária, fotografias, entrevistas.

Optamos em desenvolver a investigação por meio desta abordagem, por possibilitar um conhecimento mais profundo da totalidade do ambiente onde é realizado o trabalho. Ou seja, a sala de aula de uma escola pública da cidade de São Paulo, nas condições em que ela se apresenta no seu cotidiano escolar. Aspectos como a heterogeneidade do desempenho dos alunos, tanto em matemática quanto em língua portuguesa, a ocorrência de faltas e outros dados interferiu nos resultados, revelando uma diversidade de trajetórias no processo de aprendizagem.

A seguir apresentamos maiores detalhes sobre a realização de nosso trabalho.

3.2 – A TRAJETÓRIA DA INVESTIGAÇÃO

3.2.1 – BUSCA DA ESCOLA

Visitamos algumas escolas públicas estaduais para decisão do “lócus” da pesquisa. Fomos bem recepcionadas em todas elas e apresentadas à professora da sala, para esclarecimentos sobre o desenvolvimento de nossa investigação.

Mesmo sabendo que pretendíamos verificar de que maneira resolveriam os problemas e que dificuldades teriam, para que pudessemos elaborar uma proposta de ensino, os alunos ficavam meios receosos em realizar o teste piloto, questionando se receberiam notas. Porém, quando reafirmávamos nossa proposta, havia a concordância na participação.

A realização do teste foi feita em duas escolas (uma 4^a série da escola A e uma 5^a série da escola B), para verificarmos quais raciocínios os alunos desenvolveriam e se o texto estava claro ou se seria necessário proceder a algum acerto.

Devido à dificuldade na compreensão do enunciado dos problemas, vimos ser necessário a reelaboração do teste. Porém, optamos por não realizar a pesquisa junto à 5^a série, pois durante a aplicação, em conversa com a professora da sala, constatamos que os alunos já haviam tido contato inicial com o objeto de estudo.

Assim, realizamos o teste, reformulado como “avaliação diagnóstica” (vide página 48), em uma 4^a série de outra escola, da mesma região.

3.2.2 – DESCRIÇÃO DA ESCOLA

Nossa investigação foi desenvolvida em uma sala de aula, com alunos de 4^a série de uma escola pública da rede estadual, localizada em São Miguel Paulista, na região leste da cidade de São Paulo.

A partir de 1986, esta escola iniciou o curso de habilitação de 2^o grau para o magistério de 1^o grau e pré-escola; de 1988 a 1990 foi vinculada ao Projeto CEFAM (Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério); a partir de 1992 foi incluída no projeto escola-padrão.

A partir de 1995, foi organizada, passando a ministrar o Ensino Fundamental, ciclo I (1^a a 4^a série) e Ensino Médio; sendo que, atualmente, os cursos são oferecidos como segue: manhã (3^a e 4^a séries), tarde (1^a e 2^a séries), noite (1^o a 3^o anos E.M). A quantidade de alunos matriculados é 928 no Ensino Fundamental e 441 no Ensino Médio.

A clientela é diversificada e a faixa etária dos alunos do Ensino Fundamental, em sua maioria, está entre os 7 e 12 anos, porém existem alguns com idade superior a 12 anos. O nível sócio-econômico destes alunos é de regular para baixo, a maioria reside nas imediações da escola, pertencendo à comunidade, e somente alguns fazem curso extra-curricular. Alguns são oriundos de abrigos e requerem, da escola, Projetos Especiais para melhor acolhê-los e integrá-los no coletivo escolar. Quanto ao acesso a bens materiais e serviços tecnológicos, grande parte destes alunos não tem acesso ao computador, à

Internet ou canal por assinatura; tem acesso, apenas, às redes públicas de televisão.

No Ensino Médio, a maioria tem idade entre 15 e 21 anos e, em pequena porcentagem, até alunos maiores de 25 anos. Considerável parte destes alunos mora distante e estuda nesta escola por estar localizada entre o trabalho e a residência. Por estarem inseridos no mercado de trabalho, de alguma forma, eles têm contato com as novas tecnologias.

Por serem, em sua maioria, os alunos menores de idade, a escola conta com significativa participação dos pais na sua vida escolar, diariamente e em reuniões bimestrais.

3.2.3 - A SALA DE AULA

- **POPULAÇÃO DA PESQUISA**

Ao conversarmos com a direção da escola, nos foi indicada uma 4^a série do período diurno, porque a professora e alunos aceitavam participar de projetos e a turma era considerada boa. Para melhor conhecimento do ambiente e para relacionar-me com os sujeitos pesquisados, antes da avaliação diagnóstica, passei a freqüentar, de vez em quando, algumas aulas de matemática, sem interferir nos procedimentos utilizados pela professora da turma.

A professora, que ministrava todas as disciplinas na sala, informou-me que os alunos haviam aprendido multiplicação, mas não problemas de raciocínio combinatório. Contou que trabalhava com resolução de problemas, para que os alunos pudessem pensar e buscar a solução, mas que muitos tinham dificuldades.

Na sala havia 31 alunos matriculados, sendo que o número de meninas era 17 (14 alunas com 10 anos; 2 com 11 anos, e 1 com 12 anos) e de meninos, 14 (9 alunos com 10 anos; 4 com 11anos, e 1 com 13 anos). Em todos os encontros, fizemos o registro de presença, e não consideramos como população da pesquisa 9 alunos que tiveram 4 faltas, 1 aluna desistente e 1 aluna que iniciou seu estudo fora do período de matrícula; totalizando 11 alunos eliminados.

Era nosso interesse que todos fizessem parte deste estudo; porém, em vista do ocorrido, consideraremos, para efeito da análise dos resultados, uma população de 20 alunos, embora os outros também pudessem participar das atividades, quando presentes.

- **QUANTO AO CONTEÚDO**

Conforme observado no diário de classe da professora, foi desenvolvido o seguinte conteúdo no ano de 2005, até o período em que estive em campo.

Revisão (multiplicação, subtração, multiplicação e subtração); problemas com tabelas; sistema romano de números; história dos números; sistema de numeração decimal; composição e decomposição de números; situações-problema; sistema de números (classe dos milhões); cálculos (adição); atividades com \square ; atividades envolvendo adição e subtração; situações-problema com expressões; numerais até 3000; gráficos; atividade de revisão; verificação de aprendizagem; operações multiplicativas; multiplicação por dois algarismos; divisão; atividades de multiplicação e divisão; cálculos; divisão com divisor maior que 10; expressões numéricas (envolvendo adição, subtração, multiplicação e divisão); múltiplos e divisores de um número; frações e expressões; testes aplicativos; frações decimais; tabelas e gráficos; desafios; polígonos; triângulos (atividades variadas); quadriláteros; adição e subtração de frações; projeto Saresp; gráficos e porcentagem; algoritmos de divisão e multiplicação; provão (matemática).

A turma também participou dos projetos: Cefam (projeto água); viver e conviver com idosos, visita a casa do ancião; fábulas, textos, lendas, leituras; atividades recreativas; datas comemorativas; limpeza; horta.

3.2.4 - INTERVENÇÃO DE ENSINO

- **DESCRIÇÃO GERAL**

A avaliação diagnóstica, as atividades de ensino, as avaliações das atividades e outras coletas de dados foram realizadas por mim, conforme descrito a seguir.

A avaliação diagnóstica foi feita para verificarmos os conhecimentos mobilizados pelos alunos na resolução dos problemas cartesianos, conforme descritos no próximo item, página 48. A aplicação ocorreu no dia 29/08/2005, estando presentes 25 alunos. Iniciou-se aproximadamente às 8h10m e terminou às 9h30m.

As atividades de ensino e suas avaliações ocorreram dos dias 31/08 à 30/11/2005, constando de 15 encontros, nos horários regulares das aulas, no período diurno. Desses encontros, 9 foram para desenvolvimento de atividades de ensino e 6 para avaliações escritas, 1 em dupla e 5 individuais. Com o tempo gasto para organizar os alunos e com o ritmo de trabalho deles, as atividades e/ou suas avaliações eram desenvolvidas em 1h, 1h30m e até 2h cada uma.

Quando iniciamos o desenvolvimento das atividades, a professora da turma auxiliava na observação, mas nem sempre. Também tivemos, em 3 encontros, a colaboração de uma estagiária e em outros 3 encontros, a ajuda da professora substituta da sala, sendo que as discussões sobre suas anotações e observações foram feitas rapidamente, após as aulas.

Os alunos podiam expressar seu pensamento, enquanto eu procurava mediar a discussão com a turma, evitando, sempre que possível, uma interferência direta. Ao circular pela sala, observei os comportamentos dos alunos, fazendo entrevistas rápidas centradas nas tarefas que realizavam, conversando para entender seus raciocínios, verificando que procedimentos utilizavam e que dificuldades tinham. Muitos se mostraram interessados em participar do trabalho e pudemos constatar isto em nossos diálogos, pois quando alguém se dispersava com conversa paralela, os próprios alunos pediam silêncio para compreender e realizar as tarefas.

As avaliações ocorreram durante todo o processo e algumas atividades foram se configurando no decorrer da investigação. Porém, algumas avaliações escritas foram sendo realizadas à medida que determinada atividade era finalizada para verificarmos a compreensão dos alunos sobre a tarefa.

As tarefas referentes às atividades eram realizadas tanto individualmente como em duplas, formadas pela professora da sala nos primeiros dias de nossos encontros. Quando se tratava de problemas verbais¹¹, líamos o enunciado junto com os alunos, pois alguns tinham dificuldades na leitura. Porém, esclarecíamos dúvidas somente quanto ao enunciado do problema e não quanto ao raciocínio a ser mobilizado em sua resolução.

Nos términos das aulas, recolhíamos as produções dos alunos e fazíamos encontros de orientação para verificarmos seus desempenhos, a fim de elaborar tarefas visando superar as dificuldades encontradas.

Também fizemos gravações das discussões em sala, durante o desenvolvimento das atividades, e outros diálogos foram registrados por escrito, das conversas com os alunos, quando eu circulava pela sala.

¹¹ Problemas verbais multiplicativos são os clássicos problemas escolares que requerem, para sua resolução, as operações referidas. (apud FRANCHI, 1995, p.VII).

Além dos 15 encontros em sala de aula, realizamos e gravamos entrevistas com alguns alunos, em um espaço livre da escola, sobre suas produções, buscando entender as estratégias de solução.

• AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL

Esta avaliação foi realizada para verificarmos os procedimentos utilizados pelos alunos na resolução dos problemas cartesianos a seguir.

A aplicação ocorreu no dia 29/08/2005, com 25 alunos presentes. Teve início aproximadamente às 8h10m e terminou às 9h30m.

1) Uma fábrica de carros vai produzir automóveis de 5 modelos e 4 cores diferentes. Os modelos escolhidos foram: corsa, fiesta, gol, pálio e uno. As cores escolhidas foram: azul, branca, prata e verde. Quantos tipos diferentes de automóveis podem ser fabricados combinando estes modelos e estas cores?
Escreva como você encontrou a resposta e depois faça o cálculo.

2) Esta fábrica também vai fabricar outros automóveis combinando 6 modelos, 4 pinturas e 3 janelas. Os modelos escolhidos são: astra, brava, celta, focus, pólo e saveiro. As cores são: cinza, marrom, vermelha e preta. Os vidros das janelas são: transparente, verde e fumê. E agora, quantos tipos diferentes de automóveis podem ser fabricados?
Escreva como você encontrou a resposta e depois faça o cálculo.

3) Uma escola vai fazer um teatrinho e precisa de um menino e uma menina para formar um casal. Os meninos são 6: Alberto, Francisco, João, Mário, Pedro e Renato. As meninas são 5 : Graça, Joana, Maria, Sara e Vilma. A professora pode escolher Renato e Sara, Francisco e Graça ou outros casais. Quantos casais diferentes ela poderá formar?
Escreva como você encontrou a resposta e depois faça o cálculo.

4) A professora de uma outra escola também vai fazer um grupo de teatro. 7 meninos e algumas meninas se candidataram para formar os casais possíveis. A professora sabe que é possível formar 28 casais diferentes escolhendo um menino e uma menina. Quantas são as meninas?
Escreva como você encontrou a resposta e depois faça o cálculo.

Quadro 1: Avaliação diagnóstica. Apresentação somente para uma boa visualização do leitor.

Cada aluno recebeu as folhas com os problemas e os enunciados foram lidos com eles. Solicitamos que fizessem a resolução da maneira que achassem melhor, bem como comentamos que poderíamos esclarecer dúvidas somente quanto ao enunciado dos problemas, mas não quanto aos procedimentos de resolução. Para solucionar os problemas, os alunos utilizaram lápis e borracha.

Os procedimentos para análise dos resultados, dos alunos considerados como população da pesquisa, estão descritos no capítulo 4, páginas 82-86.

- **DESCRIÇÃO E DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES**

As realizações das atividades ocorreram dos dias 31/08 à 30/11/2005, constando de 15 encontros, conforme segue. Incluindo o tempo gasto para organizar os alunos e o ritmo de trabalho deles, as atividades foram desenvolvidas em 1h, 1h30m e até 2h cada uma.

1º ENCONTRO

Neste encontro, tivemos o desenvolvimento de uma atividade utilizando papel sulfite, lápis, borracha e o álbum ilustrado a seguir, o qual continha 5 modelos de chapéus, 5 rostos e 4 blusas; cujas descrições, efetuadas pelos alunos, durante a realização da atividade, estão abaixo de cada figura.

As peças do álbum são manuseáveis para a formação de diferentes personagens. Cada folha é composta de três “faixas” (cada uma delas reservada para um modelo diferente de cada atributo).

ATIVIDADE 1 – (5 chapéus, 5 rostos, 4 blusas)



Figura 11: Álbum adaptado de 2500 rostos famosos (Baptista, 1995)

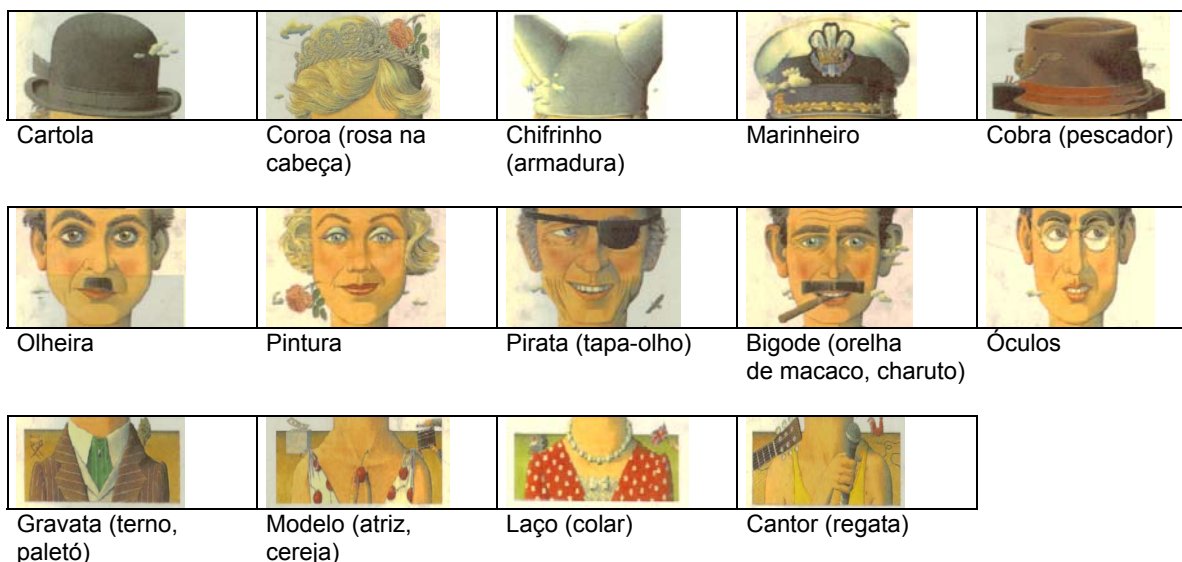


Figura 12: Peças do álbum

Esta atividade teve por objetivo o manuseio do álbum para familiarização e reconhecimento de material combinatório, bem como verificarmos os procedimentos utilizados pelos alunos na elaboração das combinações e no seu registro.

Realização da atividade:

Distribuímos o material (1 para cada dupla), solicitando que conversassem a respeito, mexessem bastante em todo o álbum, observassem e falassem o que estavam vendo; ou seja, que peças havia no álbum.

Muitas duplas, ao manipularem algumas peças e formarem umas combinações, riam, timidamente, outras mais espontaneamente, e algumas falaram que formavam diferentes figuras.

Ao observar que alguns alunos estavam manuseando o material individualmente, não havendo troca de informações, alterei a dinâmica do trabalho; parei em alguns grupos e intervi para que o trabalho ocorresse pela troca entre os participantes. Fiz algumas intervenções provocando a busca da descrição do material.

A dupla B:

- P: *O que vocês verificaram?*
 B1: *Que tem pessoas antigas e roupas também. As pessoas hoje não se vestem assim.*
 P: *O que mais você verificou?*
 B1: *Tem bastantes características.*
 P: *Quais?*

- B1: *Chapéu, rosto, roupa.*
 B2: *Eu entendi que tem roupas muito diferentes, rostos diferentes e chapéus diferentes.*

A dupla J:

- P: *E vocês, o que verificaram?*
 J: *(manuseando as partes do álbum): Aqui eu vejo uma mulher famosa com chapéu de pirata e terno de homem. A outra combinação é um homem com chapéu de marinheiro e roupa de mulher e o outro personagem é um homem fumando charuto e com cabelo de homem e um longo vestido de mulher famosa. Eu gostei de ver um homem com aparência de cantor e um vestido de mulher antiga. Eu percebi que tem vários tipos de rostos e corpos diferentes.*

Para que a identificação das características de cada atributo ficasse nos lugares adequados, os alunos eram questionados sobre os atributos que havia nas 3 faixas do álbum. À medida que mostravam e descreviam as peças, eram questionados quanto à posição em que ficava tal descrição, informações que eu registrava na lousa. Deixei-os expressarem-se livremente, mesmo que houvesse repetição, para que perdessem a timidez e verificassem como relacionar as diferentes propriedades dos atributos. No momento de suas comunicações, caso as descrições referissem a um mesmo objeto, a turma indicava em que posição ficaria (as quais estão entre parêntesis). A relação ficou constituída assim:

- Chapéu: cartola, coroa (rosa na cabeça), marinheiro, chifrinho (armadura), marinheiro, cobra (pescador), coroa.
 Rostos: Bigode (orelha de macaco, charuto), pirata (tapa-olho), óculos, pintura, óculos, olheira.
 Blusa: Cantor (regata), gravata (terno, paletó), modelo (atriz, cereja), laço (colar), gravata.

Solicitei a cada aluno registrar, da maneira que achasse melhor, algumas possíveis combinações com o chapéu e a blusa.

Apesar desta restrição, ao fazerem combinações aleatórias, os alunos também privilegiaram as de três atributos, como transcrevemos a seguir, de acordo com alguns protocolos.

Cartola bigode palito	coroa pintura atriz	Marinheiro tapa-olho pirata	charuto pirata tapa-olho	gravata palito terno	óculos terno palitó
Terno Cartola	marinheiro moda	atriz coroa	pescador palito	cantor marinheiro	colar coroa

cartola, bigode, terno.
 marinheiro, óculos, paletó.
 coroa, pintura, modelo.
 chifrinho, charuto, cantor.
 pescador, gravata, olheira.

armadura, tapa-olho, moda.
 coroa, atriz.
 marinheiro, paletó..
 cartola, gravata.
 pescador, terno

(Adr, 11)

cartola+bigode+terno
 colar+gravata+terno
 coroa+cantor+modelo

(Thai, 10)

coroa modelo pintura
 charuto moda gravata
 marinheiro coroa bigode
 orelha de macaco tapa-olho
 cantor pintura chifrinho
 pescador rosa na coroa cartola
 paletó moda armadura
 colar blusa de bolinha rosa no rosto

(Yg, 10)

Neste dia, o tempo foi curto para concluir a atividade; combinamos continuar no encontro seguinte.

2º ENCONTRO

Neste encontro, prosseguimos rapidamente com a atividade 1 e desenvolvemos a atividade 2. Utilizamos o mesmo álbum para a realização destas atividades.

ATIVIDADE 1 - Continuação

Para relembrar o que havíamos visto, registrei em um papel as denominações dadas pelos alunos aos atributos das figuras representadas no álbum (página 51, deste capítulo) e propus uma atividade coletiva.

Cada dupla recebeu um álbum para escolher uma possibilidade de combinar 2 atributos (chapéu com blusa) e comunicá-la verbalmente. Os registros foram feitos na lousa e as demais duplas localizavam no álbum; sendo que a dupla, que havia comunicado sua combinação, confirmava quais atributos considerou.

As combinações feitas, por algumas duplas, foram as seguintes:

- paletó com cartola;
- coroa com vestido vermelho;
- cartola com blusa de bolinha;
- rosa na coroa com o modelo (cereja);

- marinheiro com terno;
- armadura com terno.

Ao serem questionados se na lousa estavam todos os modos de combinar os chapéus com as blusas, responderam que não, descobrindo que estavam trabalhando com problemas de “combinações”, de “possibilidades”.

Uma vez que os alunos haviam se familiarizado com o material, propus-me a esclarecer o que se espera da resolução de um problema “combinatório”, encontrar todas as possibilidades. Esta etapa será desenvolvida na atividade 2.

ATIVIDADE 2 – (5 chapéus x 4 blusas)

Continuamos com o álbum, a fim de verificarmos a compreensão dos alunos na formação de combinações com 2 atributos (5 chapéus; 4 blusas), seus registros e a socialização de respostas.

Solicitamos a escolha de uma carinha, que ficaria fixa. Era para imaginar que esta pessoa iria se vestir e queria escolher todos os modos possíveis de combinar os chapéu com as blusas. A cada combinação, seria feito o registro e no final o cálculo (ou seja: quantas maneiras esta pessoa teria para combinar os chapéus com as blusas?)

Devido a não compreensão, de alguns alunos, do que era para ser feito, solicitei a uma dupla para escolher uma carinha e deixá-la fixa; depois, um chapéu para formar as combinações com as blusas. Manuseando o álbum, a dupla formou duas combinações e parou, quando indaguei:

P: *Só tem estas?*

Dupla: *Não, tem mais.*

O seguinte diálogo ocorreu quando a dupla finalizou as combinações com aquele chapéu.

P: *Tem mais algum chapéu?*

Dupla: *Tem mais estes 4.*

P: (falando com a dupla e ao mesmo tempo com a turma, os provoqueei a pensar): *Quais são as outras possibilidades de combinar os outros chapéus com as blusas?*

Solicitei então o registro das combinações e o cálculo. Ao circular pela sala foram observadas diversas ocorrências e intervi quando necessário.

Ao término da atividade, as folhas com as soluções foram coladas na lousa e cada dupla expôs seu procedimento à classe. Dupla por dupla explicou seu raciocínio às demais, com minha intervenção. Algumas descrições em sala e as explicações dos alunos frente a esta intervenção constam no anexo 2, páginas 150-152.

De modo geral, constatamos que das 11 duplas que participaram dessa atividade, apenas 5 manifestaram ter compreendido a tarefa, construindo todos os pares, fazendo descrições e revelando diferentes níveis de clareza e precisão. As outras 6 duplas apresentaram dificuldades fazendo combinações aleatórias, contagem mais assistemáticas, incluindo pares de $A \times B$ e $B \times A$, e selecionando combinações de saias e blusas que lhe mais agradavam. Procedimentos de solução encontram-se nas páginas 87-102.

Visando a superação de tais dificuldades, constatamos a necessidade de promover a atividade seguinte.

3º ENCONTRO

Neste encontro, desenvolvemos de maneira lúdica, uma dinâmica em forma de teatrinho, sendo atores 4 meninos e 4 meninas da sala e, platéia, os demais alunos.

ATIVIDADE 3 – (4 meninos x 4 meninas)

O objetivo desta atividade é verificar como são feitas as construções dos pares (se é de forma organizada ou não); se com as ações dos sujeitos, os alunos descobrem como proceder na formação total das combinações; se há a percepção da relação um para muitos e que registros utilizam para representar as ações verificadas.

Realização da atividade

Os alunos estavam empolgados para participar do teatrinho. Muitos levantaram as mãos, mas para a realização da atividade eram necessários 4

meninos e 4 meninas. Foram formadas duas filas com os meninos de frente para as meninas. Os demais podiam opinar, durante a atividade, se ela sendo efetuada adequadamente ou não.

Para as ações dos atores, foi indicada, verbalmente, a seguinte situação: *“Imaginem que vocês estão se conhecendo agora. Os meninos vão cumprimentar as meninas dando as mãos para elas, mostrando todas as possibilidades de dar os cumprimentos”*.

Cada menino cumprimentou todas as meninas ordenadamente; isto é, na mesma seqüência dos outros.

Para o registro da atividade, foi distribuída uma folha para escreverem todas as possibilidades de cumprimentos entre meninos e meninas, e quantas foram. Como os alunos não compreenderam a tarefa, fiz a mediação.

P: *Quem cumprimentou quem?*

A: *O Jon e a Lar. (ficaram quietos).*

P: *Só foi ela?*

A: *Não, a Adr, a Thai...*

P: *Então. vocês irão escrever o que viram os meninos fazendo.*

Durante o registro e na sua entrega, observamos ocorrências como as descritas abaixo.

De modo geral, observamos que das 13 duplas, somente 5 duplas encontraram todas as combinações possíveis e fizeram seus registros por meio de palavras. Outras 2 duplas não formaram todos os pares, mas descreveram o processo, conforme transcrição do protocolo:

Os meninos cumprimentaram as meninas. Eram 4 meninos e 4 meninas. Houve 16 cumprimentos. Cada menino cumprimentou 4 meninas; os cumprimentos foram: bom dia, tudo bem, olá, oi.

(Luc, 10 - Yn, 10)

Já 2 duplas fizeram as combinações somente com 1 menino e 1 menina de cada conjunto, como descrito no seguinte extrato:

Jon cumprimentou Tha	Lui cumprimentou Ing	Riv cumprimentou Adr	Yn cumprimentou Lar
-------------------------	-------------------------	-------------------------	------------------------

(Lar, 10 - Lay, 10)

As demais 4 duplas não registraram pares, fazendo apenas descrição com ausência de combinação. Como exemplo, transcrevemos o protocolo a seguir.

Os meninos “Riv”, “Jon”, “Yn” e “Lui” são meninos muito educados. O “Riv” não conhecia ninguém; era novo na escola; eles ficaram amigos.

Meninos: Yn, Jon, Riv e Lui

Meninas: Thai, Ing, Adr e Lar

4

$$\frac{x4}{16}$$

(Daí, 10 - Ing, 10)





Neste caso, os alunos desviaram-se do objetivo da tarefa. Face a esses resultados, promovemos outro tipo de atividade, deixando os alunos livres para resolverem os problemas propostos para avaliarmos seus procedimentos.

4º ENCONTRO

Neste encontro, efetuamos uma avaliação de duas atividades, descritas a seguir. A primeira refere-se a um problema verbal e a segunda, ao material manipulativo e seus registros.

ATIVIDADE 4.1 - (4 chapéu x 6 enfeites de pescoço)

1) O palhaço Alecrim vai se arrumar para um espetáculo.

Ele pode combinar os 4 modelos de chapéus     com os

6 modelos de enfeites para pescoço      

Quantos tipos de combinações diferentes o Alecrim pode fazer com estes modelos de chapéus e estes enfeites?

Escreva nesta folha todas as possibilidades que você encontrou e depois faça o cálculo.

Quadro 2: Resolução de problema cartesiano (4 chapéus; 6 enfeites)¹², em dupla. As apresentações feitas em todos os quadros são somente para uma boa visualização do leitor.

Após realizarmos as atividades nos encontros anteriores, em que os alunos utilizaram a operação multiplicativa para suas resoluções e alguns outros meios

¹² Figuras adaptadas da coleção Ensinando-Aprendendo (Carvalho, 1986)

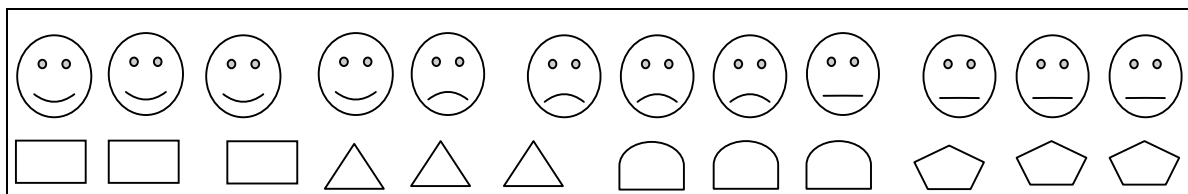
de representação na formação de pares, nesta avaliação, temos o intuito de verificar se estavam trabalhando de forma consciente; quais operações seriam utilizadas (ex: multiplicação, adição repetida ou outra); além de verificar a compreensão, interpretação e que outros meios de representação poderiam ser mobilizados à resolução deste problema.

Realização da atividade:

Para avaliação em dupla, distribuímos uma folha com o problema acima. Lemos o problema junto com os alunos e solicitamos que fizessem a resolução da maneira que achassem melhor, seguida do cálculo.

Registraram soluções por meio de combinações parciais ou totais, por palavras, desenhos, por palavra e desenhos, diagrama de árvore e, logo após, fizeram o cálculo. Uma das entrevistas sobre o procedimento de solução encontra-se no anexo 3, página 156.

ATIVIDADE 4.2 – (3 carinhas x 4 chapéus)



Quadro 3: Para formação livre na carteira (3 carinhas; 4 chapéus)¹³, em dupla. Material foi entregue em tamanho maior.

O objetivo desta atividade é verificar como os alunos procedem à formação livre das combinações das carinhas com chapéus, sobre a carteira; e se fazem de forma organizada ou não.

Realização da atividade:

Distribuímos um envelope contendo, cortados: 12 carinhas (4 alegres, 4 tristes e 4 normais) e 12 chapéus (3 quadrangulares, 3 triangulares, 3 circulares, 3 pentagonais) e folha sulfite em branco.

¹³ Figuras adaptadas da coleção Ensinando-Aprendendo (Carvalho, 1986)

Solicitamos que cada dupla fizesse suas combinações sobre a carteira, bem como as registrassem no papel.

As combinações foram feitas livremente: de forma organizada, desorganizada, total ou parcial, dispostas em uma fileira, em duas, em três, em quatro ou espalhadas. O registro foi feito por meio de palavras, desenhos e, depois, o cálculo.

Ao verificarmos as estratégias utilizadas, ainda constatamos a desorganização e a não construção de todas as combinações. Sendo assim, vimos a necessidade de elaborar outra atividade para a superação de tais ocorrências. Nas páginas 87-102 encontram-se os procedimentos de soluções, e no anexo 3 (p.156) entrevista feito com uma dupla.

5º e 6º ENCONTROS

Nestes encontros, desenvolvemos duas atividades coletivas. No 5º encontro foi feita a atividade 5 - formação na placa de combinações por um critério; e no 6º encontro, a atividade 5A - formação na placa por dois critérios. Este trabalho foi concluído no 6º encontro, por não ter sido possível a formação completa por dois critérios em um encontro somente.

Promovemos estas atividades, visando favorecer a elaboração de critério de organização utilizando uma placa pois, em nossas observações, verificamos que os alunos ainda apresentavam dificuldades na organização e formação de todos os pares.

Utilizamos o número total de peças para verificar como os alunos iriam selecioná-las na construção de todas combinações e como as organizariam. Esperávamos que com esta tarefa os alunos observassem a disposição dos elementos percebendo a importância da organização total, familiarizando-se com uma representação próxima da tabela de dupla entrada. Conforme Vergnaud, a tabela desempenha um papel importante na resolução dos problemas de produto cartesiano e está classificada na categoria de representação espacial, utilizando conceitos de linha e coluna, alinhamento, direção, intersecção, ortogonalidade.

ATIVIDADE 5 - (5 blusas x 6 saias/calças)Realização da Atividade:

Trabalhamos com 5 modelos de blusas e 6 modelos de calças/saias, diferentes. Para a formação dos pares, dispusemos as peças em um mostruário com 30 peças de blusas (6 de cada modelo) e 30 peças de calças/saias (5 de cada modelo); além de fornecermos placas de isopor, percevejos coloridos, folhas de papel sulfite.

Para que houvesse o envolvimento da turma, sorteamos 8 alunos (4 de cada sexo) para que cada um deles formasse 4 trajes, sendo que o último só formou 2. A princípio não interviemos em suas combinações para verificarmos como procederiam em suas escolhas. Os demais alunos observariam e informariam, caso percebessem a posição inadequada de alguma peça.

Durante a dinâmica, muitos queriam participar e até falaram aos colegas quais combinações achavam que eram para ser formadas.

De maneira geral, pudemos constatar, entre os sorteados, que a 1ª aluna (Cly) ficou um pouco indecisa nas suas escolhas e demorou um pouco a terminar; o 2º aluno (Riv) não teve dúvidas; os 3º(Thau), 4º(Ron), 6º(Thi) e 8º(Yn) fizeram as combinações rapidamente, mas com 1 repetida; as 5ª(Let) e 7ª(Ing) não tiveram dificuldades, mas fizeram 2 repetidas.

O painel abaixo ilustra as formações dos pares feitas pelos alunos.



Figura 13: Painel com combinações desorganizadas e repetidas.

Promovemos uma discussão, para que os alunos pudessem perceber a incoerência na disposição dos pares, e continuamos com a atividade coletiva para ser feita uma outra formação, para melhor visualização e organização das possibilidades de se vestir com tais peças. Nesta etapa, foram feitas novas combinações por 1 critério, quando observamos que os 1º(Nar) e 4º(And) alunos não fizeram as combinações adequadas, por não compreenderem a tarefa; o 2º(Eli) também não fez corretamente, mas sua dificuldade parece ter sido porque não estava atento; os 3º(Adr), 5º(Pat) e 6º(Jon) fizeram as combinações sem dificuldade.

A seguir está o painel com estas combinações.



Figura 14: Painel com combinações ordenadas por 1 critério.

Uma outra discussão foi feita, ao término da atividade, sobre a formação total das combinações, agrupamentos e cálculo, e associação de cada elemento do 1º conjunto com todos os do 2º, cujo conteúdo encontra-se no anexo 2, página 153.

A fim de verificarmos que procedimentos utilizaríamos agora, solicitamos que, em dupla, registrassem, em uma folha, todas as combinações possíveis com as 5 blusas e as 6 calças/saias e também fizessem o cálculo; ficando em amostra somente os modelos destas peças.

ATIVIDADE 5A - (5 blusas x 6 saias/calças)Realização da Atividade:

Esta dinâmica foi feita em forma de jogo, em que os alunos iriam completar o painel, formando todas as combinações por 2 critérios, utilizando o mesmo material da atividade 5.

Para localização das combinações, servimo-nos de uma regra que enfatiza o “cruzamento” dos elementos da linha x com coluna y , sendo o ponto de partida, a blusa x e o de chegada a calça/saia y . Como a escola está localizada em uma esquina, aproveitamos a situação para fazer a representação e levar os alunos a perceberem o conceito de cruzamento, linha e coluna.

Para que fizessem localizações e as comunicassem, provocamos uma discussão sobre o painel; como, por exemplo: “esta combinação (indicava o 1º agrupamento) está em que linha?”; “a daqui (indicava 2º agrupamento) em que linha?”; e assim sucessivamente, até o 5º agrupamento. O mesmo procedimento foi utilizado para as colunas, focalizando a atenção para a posição das calças/saias.

Ao constatar que muitos alunos ainda confundiam linha e coluna, eu os provoquei a darem a localização de algum outro par já formado ou a ser formado, tal como: “a combinação que vai ser formada aqui (indicava a posição) vai ficar no cruzamento de que linha (blusa) e coluna (calça/saia)?”

Para que percebessem a importância do tema estudado e sua relação com o dia-a-dia, criamos uma situação sobre possíveis ocorrências no jogo, que se encontra no anexo 2, página 153.

Durante a realização da tarefa, observamos que somente o 2º aluno (Yg) não formou as combinações adequadamente; os demais 1ª(Kay), 3ª(Lar), 4º(Dan), 5ª(Thai), 6º(Ped), 7ª(Thau) e 8º(Thi) não tiveram dificuldades em suas escolhas.

Essas combinações estão ilustradas a seguir.



Figura 15: Painel com combinações por 2 critérios.

A pontuação foi registrada na lousa e a computação feita verbalmente pelos alunos; para as meninas: “(3, 6, 9, 12)”; e para os meninos: “(3, 6, 9)”.

No encontro seguinte, entregamos aos alunos alguns de seus registros para socialização, cujas combinações foram efetuadas de forma organizada ou desorganizada, por meio de palavras e/ou desenhos. Discutimos quais soluções seriam as melhores para visualizar e interpretar os dados do problema.

Também elaboramos uma avaliação para verificarmos a compreensão dos alunos sobre essa atividade e que procedimentos utilizariam na solução dos problemas propostos. Nesta tarefa, propusemos o uso de códigos como meio econômico de resolução, cuja descrição encontra-se a seguir.

7º ENCONTRO

Neste encontro, realizamos uma avaliação contendo dois problemas. O primeiro refere-se a um problema cartesiano e o segundo, a um problema aditivo.

ATIVIDADE 6.1 – (7 blusas x 5 saias)

1) Imagine que uma de suas amigas tem 7 modelos de blusas e 5 modelos de saias e ela vai a uma festa.

Os modelos de blusas são:



Os modelos de saias são:



De quantas maneiras diferentes ela pode se vestir, combinando os modelos de blusas com os modelos de saias?

Escreva como você encontrou a resposta e também faça o cálculo.

Quadro 4: Resolução de problema cartesiano (7 blusas; 5 saias), individual.

Após a atividade do encontro anterior, sobre a formação organizada dos pares, nesta avaliação pretendemos verificar a compreensão, procedimentos de solução e operações mobilizadas, a fim de obtermos elementos mais sistemáticos e individuais de avaliação dos alunos sobre a resolução de problema de produtos cartesiano; bem como introduzir códigos como meios de representação, visando facilitar sua resolução.

ATIVIDADE 6.2 - (8 blusas e 11 calças).

2) Joãozinho fez aniversário e ganhou 8 modelos de blusas e 11 modelos de calças. Ele quer guardar cada peça de roupa em um cabide diferente, mas não tem os cabides. Quantos cabides Joãozinho têm que comprar?
Escreva como você encontrou a resposta e também faça o cálculo.

Quadro 5: Resolução de problema aditivo (8 blusas; 11 saias; cabides), individual.

Incluímos o 2º problema para verificarmos que procedimentos os alunos utilizariam na sua solução, visando minimizar a ocorrência do acerto dos problemas pela influência da rotina escolar estabelecida em classe no que se refere ao conteúdo de ensino.

Realização das Atividades:

Distribuímos uma folha com as descrições dos problemas, a cada aluno, para avaliação individual.

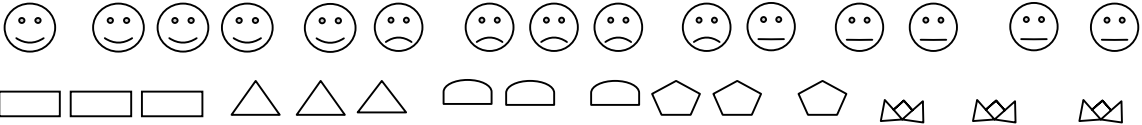
Os problemas foram lidos com os alunos; só que, para maior facilidade, rapidez na solução, melhor visualização e interpretação dos dados do problema, as blusas e saias seriam representadas por códigos.

Os modelos de blusas e saias foram registrados na lousa por meio de linguagem natural; na frente de cada um destes registros, foram desenhadas as figuras indicadas pela turma. As blusas foram denominadas pelas figuras geométricas (círculo, quadrado, triângulo, retângulo), coração, estrela; os alunos preferiram o círculo por considerarem mais fácil de desenhar. Assim, combinamos que essa figura teria cores e/ou preenchimentos diferentes para representar modelos diferentes. Para as saias, usariam o triângulo, sendo as cores e/ou preenchimentos escolhidos por eles.

Em seguida os alunos solucionaram os problemas, cujo resultado será apresentado no capítulo 4, páginas 102-110.

8º ENCONTRO

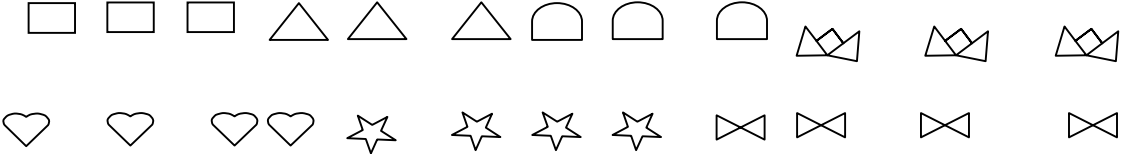
Foram desenvolvidas duas atividades, neste encontro. Ambas referem-se à tabela de dupla entrada e trabalham com material manipulativo (etiquetas), utilizando quantidades e elementos diferentes.

ATIVIDADE 7.1 – (3 carinhas x 5 chapéus)


Montar o material para formar todas as possibilidades de combinações das carinhas com os chapéus; e transportar para esta tabela.

Escreva como você encontrou a resposta e depois faça o cálculo de duas maneiras diferentes para achar o total.

Quadro 6: Tabela de dupla entrada (combinações com 3 carinhas; 5 chapéus).

ATIVIDADE 7.2 - (4 chapéus x 3 enfeites de pescoço)


Montar o material para formar todas as possibilidades de combinações dos chapéus com os enfeites de pescoço; e transportar para esta tabela.

Escreva como você encontrou a resposta e depois faça o cálculo de duas maneiras diferentes para achar o total.

Quadro 7: Tabela de dupla entrada (combinações com 4 chapéus; 3 enfeites de pescoço).

O objetivo das duas atividades é introduzir a tabela de dupla entrada, para efetuar todas as combinações de forma ordenada, fazendo o cruzamento das informações das linhas (x) com as colunas (y).

A partir destas atividades, nosso intuito é também solicitar o cálculo de duas maneiras diferentes. Percebemos que, nas atividades anteriores, quando provocávamos uma resposta relativa ao cálculo efetuado, havia fortes indícios de que o algoritmo da multiplicação era feito de forma automática, não havendo compreensão do procedimento utilizado.

Uma das possibilidades previstas para o cálculo, era o aparecimento de algoritmos utilizando a iteração de parcelas, uma vez que tal raciocínio foi constatado na realização de entrevistas.

Essa ocorrência pode ter acontecido devido a interferência de diversos fatores relativos a dinâmica do modo de organização das lições escolares; assim, solicitamos outro cálculo, por consideramos importante, para verificação da influência destes fatores no significado atribuído pelo aluno, na escrita multiplicativa na resolução de problema de produto cartesiano.

Realização das Atividades:

Atividades em dupla, sendo distribuídos para a atividade 7.1: um envelope contendo, cortados: 15 carinhas (5 alegres, 5 tristes e 5 normais), 15 chapéus (3 quadrados, 3 triângulos, 3 circulares, 3 pentagonais, 3 coroas), folha com malha desenhada (3 linhas e 5 colunas); e para atividade 7.2: um envelope contendo, cortados: 12 chapéus (3 quadrados, 3 triângulos, 3 circulares, 3 coroas), 12 enfeites (4 corações, 4 estrelas, 4 gravatas), folha com malha desenhada (4 linhas e 3 colunas).

Solicitamos para cada dupla formar suas combinações, transportar para as tabelas e, logo após, registrar seus cálculos.

Para a introdução da tabela de dupla entrada, construí uma tabela na lousa, fazendo perguntas sobre quais atributos eram para ser combinados, enfatizando a posição das informações do cruzamento da linha (x) com a coluna (y), bem como a organização e ordenação das combinações.

Deixamos a critério dos alunos formarem suas combinações nas carteiras e preencherem a tabela.

Uma avaliação do seu desempenho foi efetuada no encontro seguinte.

9º ENCONTRO

Para verificarmos o conhecimento adquirido pelos alunos, realizamos uma avaliação contendo dois problemas, para uso da tabela de dupla entrada.

ATIVIDADE 8.1 – (3 pratos x 4 misturas)

- 1) Suponha que sua escola vai ter como merenda arroz, macarronada e polenta que podem ser combinados com carne, frango, salsicha ou almôndega.
Quantos pratos diferentes podem ser preparados combinando ou o arroz ou a macarronada ou a polenta com cada uma das misturas?
Verifique a tabela abaixo e complete com todas as possibilidades.

	Carne	Frango	Salsicha	Almôndega
Arroz				
Macarrão				
Polenta				

Responda:

- Quantas combinações podem ser feitas com o arroz?

- Quantas combinações podem ser feitas com o macarrão?

- Quantas combinações podem ser feitas com a polenta?

- Quantas combinações podem ser feitas ao total?

- Faça o cálculo de duas maneiras diferentes para achar o total.

Quadro 8: Resolução de problema cartesiano em tabela (merenda escolar), individual.

ATIVIDADE 8.2 – (4 automóveis x 3 cores)

- 2) Imagine que você está em uma fábrica de carros e você vai ajudar a fabricar 4 modelos de automóveis combinados com 3 cores.
Os modelos escolhidos são: celta, corsa, gol e pálio.
As cores escolhidas são: azul, prata e verde.
Quantos tipos diferentes de automóveis podem ser fabricados combinando estes modelos com estas cores?
Na folha em anexo, construa uma tabela e preencha com todas as possibilidades.

Responda:

- Quantas combinações você pode fazer com o celta e todas as cores?

- Quantas combinações você pode fazer com o corsa e todas as cores?

- Quantas combinações você pode fazer com o gol e todas as cores?

- Quantas combinações você pode fazer com o pálio e todas as cores?

- Quantas combinações podem ser feitas no total?

- Faça o cálculo de duas maneiras diferentes para achar o total.

Quadro 9: Resolução de problema cartesiano em tabela (4 automóveis; 3 cores), individual.

Foram realizadas algumas atividades nas quais os alunos ordenaram combinações (cruzamento de informações) em tabelas e também fizeram os cálculos. Por meio de avaliação, pretendemos verificar a facilidade ou não na construção e utilização de tabela, sua eficácia na resolução de problemas de produto cartesiano, a compreensão destas situações, quais operações serão mobilizadas e se feitas de forma consciente.

A partir destas atividades, solicitamos o registro das combinações de cada elemento do conjunto A com todos os de B, para que os alunos percebessem e utilizassem a correspondência um-para-muitos, pois constatamos a incoerência dos pares formados com a operação matemática efetuada.

Além disso, os fatores nos dois problemas são iguais: no primeiro (3 e 4) e no segundo (4 e 3), pois também pretendemos verificar se as duas tabelas seriam ou não construídas no mesmo formato e qual a relação feita com o cálculo.

Realização das Atividades:

Distribuímos régua e folhas com os problemas, para avaliação individual. A leitura foi feita com os alunos, lembrando a necessidade da organização das combinações de acordo com o cruzamento das informações da linha (x) e coluna (y).

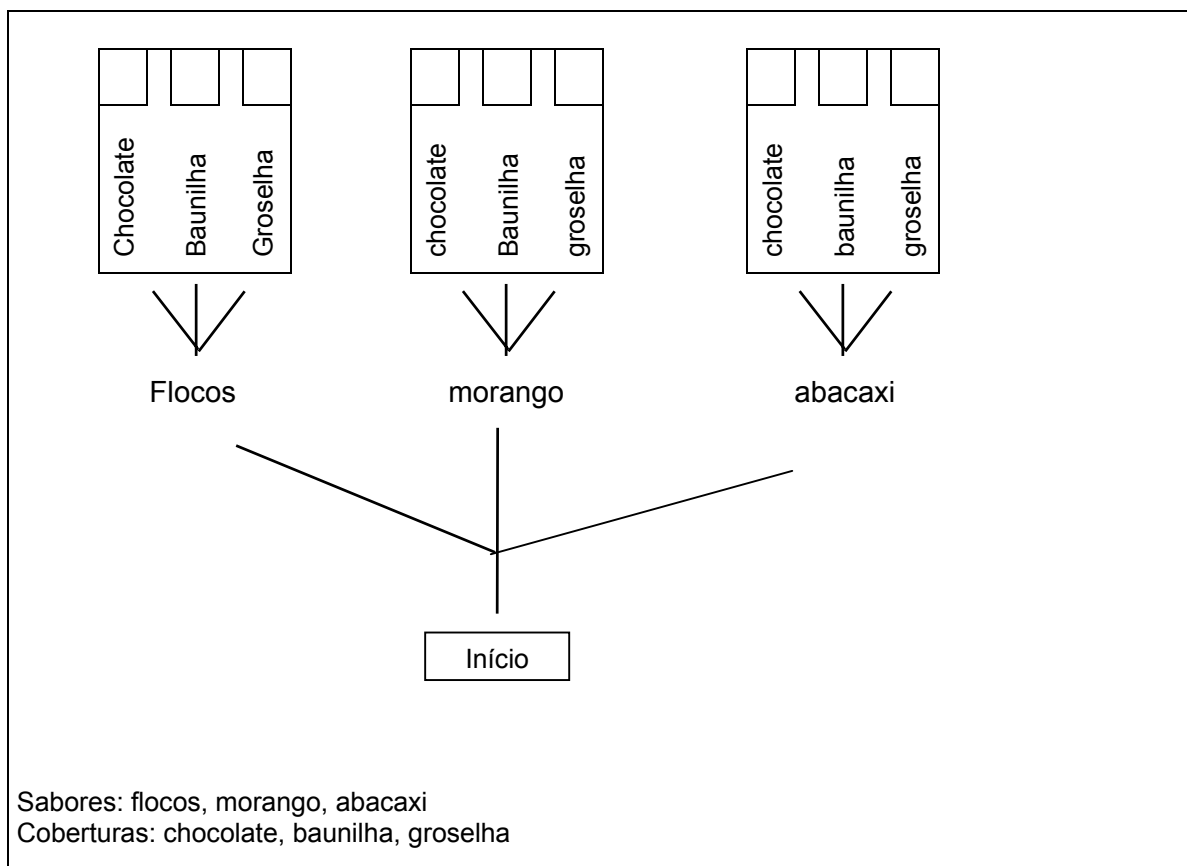
Procedimentos de solução mobilizados pelos alunos serão descritos no capítulo 4, páginas 102-110.

10º e 11º ENCONTROS

Nestes encontros, desenvolvemos duas atividades, descritas a seguir. No 10º encontro foi feita a atividade 9 e no 11º encontro, a atividade 9A. Ambas as atividades referem-se à árvore de possibilidades. Não íamos realizar a atividade 9, devido ao baixo número de alunos presentes (9), mas, como não havíamos previsto este fato, não tínhamos elaborado um trabalho diferenciado. Em conversa com a professora da turma, como era dia letivo, ficou decido fazer a aplicação neste dia e revisão com os demais alunos no outro encontro. De um modo geral, esta atividade serviu como experiência, pois constatamos a dificuldade dos alunos para fazerem a representação da árvore, como apresentada na dinâmica.

O objetivo desta atividade foi introduzir árvore de possibilidades como outra forma de representação dos problemas de produto cartesiano, bem como verificar a eficácia na compreensão e solução destes problemas.

ATIVIDADE 9 – (3 sorvetes x 3 coberturas)



Quadro 10: Árvore de possibilidades (3 sorvetes; 3 coberturas). A construção foi feita no chão,¹⁴ em tamanho maior.

Realização da Atividade:

Antes da introdução desta árvore, em papel pardo, discutimos as combinações, feitas por meio da representação de diagrama de árvore, da aluna “Adr” na atividade 6 (7º encontro). Os alunos foram incentivados a falar sobre o problema e sua solução. Falaram sobre a representação dos objetos por figuras, a maneira que as combinações e cálculos foram feitos, a boa visualização e facilidade na resolução quando os dados estão organizados.

Iniciamos, então, a atividade 9, afastando as carteiras para o canto da sala e fazendo a construção, no chão, da árvore de possibilidades. Utilizamos 3 papéis

¹⁴ Adaptação da coleção Ensinando-Aprendendo (Carvalho, 1986)

pardos, fita crepe, pincel atômico e folhas sulfite. Os papéis pardos estavam preparados para que fossem completadas as combinações.

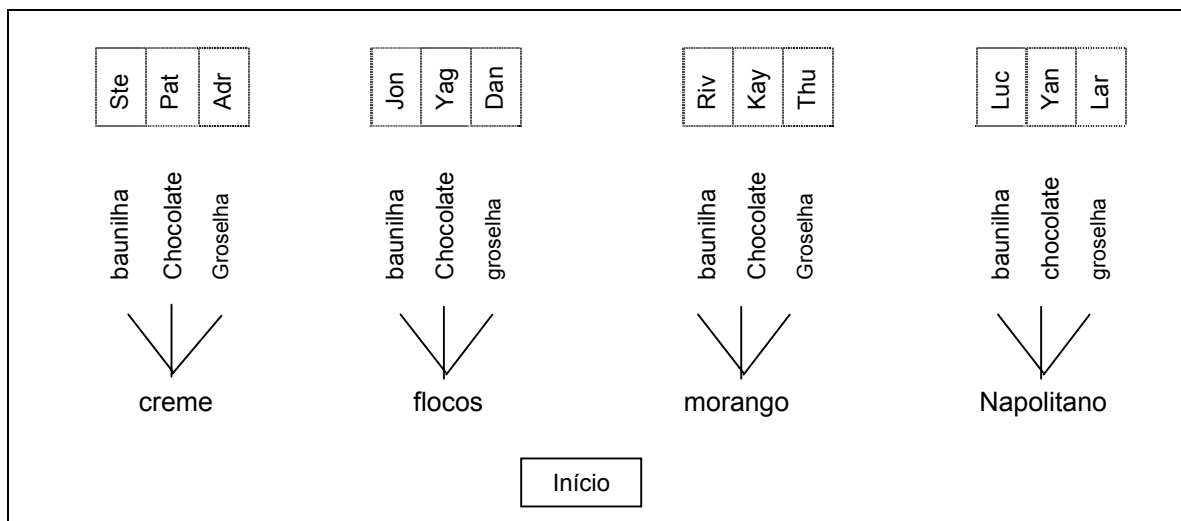
Os alunos estavam interessados em participar da atividade, cooperando na construção da árvore, a qual foi feita conforme quadro 10.

Distribuímos, aleatoriamente, 1 folha sulfite com 1 combinação já escrita (sorvete com cobertura) para cada aluno. Eles se posicionaram em fila, no ponto de partida, e um por vez, percorreu o caminho, parando na casa que correspondia à combinação que tinha em mãos. Em seguida, solicitei o registro em papel, por meio da árvore de possibilidades, das combinações de 4 sabores de sorvetes (flocos, morango, abacaxi, creme) com 3 coberturas (chocolate, baunilha, groselha).

Alguns alunos tiveram dificuldades para iniciar seus registros; assim como modelo, foi esboçada, em papel pardo e fixada na lousa, a árvore de possibilidade das combinações feitas no chão (3 sorvetes x 3 coberturas).

No anexo 2, página 154, encontram-se observações e diálogos com os alunos durante a realização de seus registros.

ATIVIDADE 9A - (4 sorvetes x 3 coberturas)



Quadro 11: Diagrama de árvore (4 sorvetes; 3 coberturas), já apresentando os nomes dos alunos que preencheram as casas referentes as combinações que tinham em mãos. A construção foi feita no chão em tamanho maior.

O objetivo foi o mesmo da atividade anterior, introduzir a árvore de possibilidades como outra forma de representação dos problemas de produto cartesiano e verificar a eficácia na compreensão e solução destes problemas.

Realização da Atividade 9A:

Refizemos esta atividade por estarem presentes poucos alunos no encontro anterior e pela dificuldade apresentada na solução do problema proposto. Utilizamos o diagrama de árvore, informando aos alunos que este era um outro meio de representar todas as combinações.

Esta dinâmica foi feita em forma de jogo, com 12 alunos completando as casas das combinações e 4 respondendo questões. Com exceção dos 4 papéis pardos, foram utilizados todos os demais materiais da atividade 9.

Também fixamos na lousa, uma etiqueta com os elementos a serem combinados: sabores (creme, flocos, morango, napolitano) e coberturas (baunilha, chocolate, groselha).

Para montagem do diagrama, procedemos do mesmo modo que na atividade 9; só que enquanto fazia a colagem no chão, a professora sorteava os nomes dos alunos, dando 1 combinação aleatória aos que iriam parar nas casas.

Um aluno por vez, saindo do ponto de partida, deveria percorrer o caminho de forma ordenada, como indicado no chão, parando na casa vazia referente à combinação que tinha em mãos. As combinações foram feitas sem dificuldades e todos acertaram, ficando a árvore constituída, com os participantes, como no diagrama do quadro 11, página 69.

Em seguida, foi feita uma pergunta a cada um dos outros alunos, na ordem em que foram sorteados.

- 1) Quantos sabores de sorvete têm?
- 2) Quantas coberturas têm?
- 3) Quantas combinações diferentes podem ser feitas com cada sabor de sorvete?
- 4) Quantas combinações diferentes podem ser feitas no total?

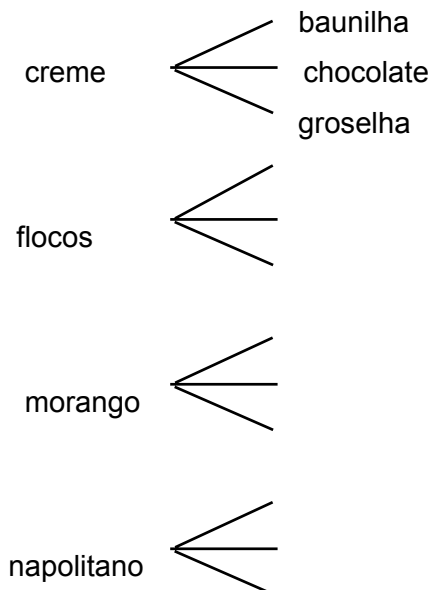
Somente o aluno “And”, na questão 3, errou, dizendo: “4”..; “5”...

Os demais meninos, não querendo perder o jogo, sussurram a resposta, mas parece que o “And” não escutou a mensagem; continuando indeciso: “4”...

Assim, intervi, perguntei à turma se estava certo e disseram que não, porque era 3. Novamente as meninas ficaram alegres e fizeram a maior festa por terem vencido o jogo.

Para verificarmos como procederiam no registro, solicitamos que, em dupla, fizessem as combinações de outras quantidades de sorvetes e coberturas, por meio de diagrama de árvore. Para isto, fixamos duas tabelas na lousa; na primeira constavam os sabores: abacaxi, chocolate, flocos; e as coberturas: baunilha, caramelo, chocolate, groselha; e, na segunda, os sabores: cereja, chocolate, creme, napolitano, uva; e as coberturas: baunilha, caramelo, morango.

Para servir como modelo, com a participação da turma, fizemos uma discussão coletiva, escrevendo na lousa algumas combinações que haviam sido feitas no chão, ficando, a representação, da seguinte maneira.



No encontro seguinte, efetuamos avaliação para verificarmos o desempenho dos alunos.

12º ENCONTRO

Neste encontro, para verificarmos o conhecimento adquirido, realizamos uma avaliação contendo três problemas cartesianos, para os alunos solucionarem os dois primeiros, da maneira que quisessem, e o terceiro por meio de tabela.

ATIVIDADE 10.1 – (3 pães x 4 frios)

- 1) O dono de uma lanchonete vai fazer uma promoção de sanduíches e quer informar a seus clientes sobre as diferentes possibilidades de escolha. Cada sanduíche será preparado somente com um tipo de frio.
Os tipos de pães são: baguete, forma e francês.
Os tipos de frios são: mortadela, presunto, queijo e salame.
Ajude o dono a descobrir quais e quantos sanduíches poderão ser feitos com estes pães e estes recheios.
Resolva o problema da maneira como você quiser. Escreva como você encontrou a resposta e também faça o cálculo de duas maneiras diferentes para encontrar o total.

Quadro 12: Resolução de problema cartesiano; solução livre (3 pães; 4 frios), individual.

ATIVIDADE 10.2 – (6 camisetas x 3 bermudas)

- 2) Imagine que sua escola vai participar de um campeonato e que ela tem 6 modelos de camisetas e 3 modelos de bermudas. Se os alunos tiverem que usar em cada dia um conjunto diferente, quais e quantas combinações poderão ser feitas com cada camiseta e com todas as bermudas?
Resolva o problema da maneira como você quiser. Escreva como você encontrou a resposta e também faça o cálculo de duas maneiras diferentes para encontrar o total.

Quadro 13: Resolução de problema cartesiano; solução livre (6 camisetas; 4 bermudas), individual.

ATIVIDADE 10.3 – (4 automóveis x 5 cores)

- 3) Suponha que você vai a uma loja para comprar miniaturas de automóvel para um colega que vai fazer aniversário. A vendedora mostra 4 modelos e diz que tem cada um nas 5 cores (amarela, azul, marrom, preta e vermelha).
Quais e quantas possibilidades diferentes você tem para escolher o presente de seu amigo?
a) Construa uma tabela e preencha com todas as possibilidades.
b) Responda:
- Quantas combinações podem ser feitas com o primeiro modelo e todas as cores?

 - Quantas combinações podem ser feitas com o segundo modelo e todas as cores?

 - Quantas combinações podem ser feitas com o terceiro modelo e todas as cores?

 - Quantas combinações podem ser feitas com o quarto modelo e todas as cores?

 - Quantas possibilidades de escolhas podem ser feitas ao total?

 - Faça o cálculo de duas maneiras diferentes para achar o total.

Quadro 14: Resolução de problema cartesiano, por tabela (4 automóveis; 5 cores), individual.

Por meio desta avaliação, pretendemos verificar o desenvolvimento do raciocínio combinatório, uso da correspondência um-para-muitos, a evolução do conhecimento, qual representação será mais utilizada na resolução dos dois primeiros problemas e se constroem e formam os pares na tabela no terceiro problema, bem como a eficácia destas representações na compreensão e interpretação das situações, quais operações serão mobilizadas e se serão feitas de forma consciente.

Além disso, nos problemas 2 e 3, não indicamos os modelos das camisetas e bermudas, os automóveis e as cores, para que os alunos pudessem perceber a possibilidade de elaborar e utilizar seus próprios meios de solução.

Realização das Atividades:

Distribuímos lápis, régua, borracha e os problemas, para avaliação individual, fazendo a leitura dos problemas junto com os alunos.

Os resultados dos dados serão apresentados nas páginas 110-120 (capítulo 4), e nas páginas 156-160 (anexo 3) encontram-se algumas entrevistas.

13º ENCONTRO

Neste encontro, elaboramos uma atividade em forma de enigma, desafiando o aluno a descobrir a qual situação refere-se uma determinada representação, com os problemas verbais cartesianos e questões descritas na próxima página.

Após os alunos terem sido iniciados no estudo da tabela de dupla entrada e no diagrama de árvore, com esta atividade pretendemos promover debates e verificar a sua compreensão quanto à passagem da linguagem natural para uma representação espacial e vice-versa; ou seja, ao analisar uma determinada representação, o aluno é capaz de descobrir a qual problema verbal se refere?

ATIVIDADE 11 - Enigma combinatório

Enigma combinatório (Grupo x Grupo)

Instrução: Cada grupo receberá esta mesma folha. Um grupo escolherá dois problemas do enigma 1 e o outro grupo dois problemas do enigma 2.

Não fale e nem mostre ao outro grupo que problemas foram selecionados. Marque na folha de resposta qual é o enigma que o outro grupo vai decifrar. Decida em seu grupo qual problema será resolvido por meio de diagrama de árvore e qual será resolvido por meio de tabela. Quando tiver terminado, entregue somente as respostas ao outro grupo para ele descobrir quais problemas o seu grupo escolheu. Veja se ele acerta ou erra e responda as seguintes questões.

Marque o número do enigma do seu grupo para o outro grupo: _____

Quais problemas o seu grupo escolheu? _____

Quais são os resultados destes problemas? _____

Como você encontrou os resultados dos problemas? _____

O outro grupo acertou ou errou os problemas que foram escolhidos? _____

Como o seu grupo verificou que o outro grupo acertou ou errou? _____

(Enigma nº 1) - Do grupo _____ para o grupo _____:

- 1) Suponha que você vai dar uma festa de aniversário e quer saber quantas combinações diferentes podem ser feitas entre 5 salgadinhos e 3 bebidas.
Escolha 5 salgadinhos que você quiser.
As bebidas são: chá, refrigerante e suco.
As combinações devem ter um salgadinho e uma bebida.
Quantas combinações diferentes podem ser feitas com os salgadinhos e as bebidas?
- 2) Quantos trajes diferentes podem ser formados combinando 4 modelos de camisetas com 3 modelos de shorts?
- 3) Uma escola vai fazer a festa do sorvete e tem 7 sabores de sorvete e 4 de cobertura. Ela quer saber que combinações podem ser feitas com os sorvetes e coberturas. Cada sorvete deve ter somente uma cobertura. Quantas combinações diferentes a escola pode fazer?
- 4) Uma loja quer comprar 3 modelos de calçados em 6 cores diferentes. Quantos calçados podem ser comprados combinando cada modelo com todas as cores?

(Enigma nº 2) - Do grupo _____ para o grupo _____:

- 1) Uma loja quer comprar 4 modelos de calçados em 7 cores diferentes. Quantos calçados podem ser comprados combinando cada modelo com todas as cores?
- 2) Suponha que você vai a uma lanchonete e quer saber quantos sucos diferentes podem ser feitos entre 3 tipos de líquidos e 4 frutas.
Os líquidos são: água, chá e leite.
Escolha 4 frutas que você quiser.
Os sucos devem ter um líquido e uma fruta.
Quantos sucos diferentes podem ser feitos combinando cada líquido com todas as frutas?
- 3) Quantos uniformes diferentes podem ser formados combinando 5 modelos de camisetas com 3 modelos de shorts?
- 4) Uma escola vai fazer a festa do sorvete e tem 6 sabores de sorvete e 4 de cobertura. Ela quer saber que combinações podem ser feitas com os sorvetes e coberturas. Cada sorvete deve ter somente uma cobertura. Quantas combinações diferentes a escola pode fazer?

Nome(s): _____ série: _____ Grupo: _____

Respostas do Enigma nº _____ Do grupo _____ para o grupo _____

Deixe esta parte para o grupo que recebeu as respostas verificar a quais problemas o diagrama de árvore e a tabela se referem:

Quais problemas o outro grupo escolheu? _____

Todas as possibilidades de combinações feitas pelo outro grupo estão certas? _____

Que resultados o outro grupo encontrou? _____

Os resultados estão certos ou errados? _____

Como você sabe se os resultados estão certos ou errados? _____

Quadro 15: Enigma combinatório (resolução de problema verbal), em dupla.

Realização das Atividades:

Foram distribuídos lápis, borracha, régua e folhas com instruções e problemas para dinâmica em dupla. As instruções foram lidas junto com os alunos e quando surgiam dúvidas sobre a regra do jogo, fazíamos as intervenções necessárias.

Uma dupla ficou em frente à outra e cada uma escolheu, em segredo, dois problemas para resolver, utilizando a representação de sua opção. Os alunos estavam envolvidos no jogo e evitavam que o oponente olhasse quais problemas estavam solucionando. Ao terminarem, uma dupla entregou sua resposta à outra dupla para que estas descobrissem, a partir das soluções, quais foram os problemas selecionados.

Conversamos com algumas duplas durante e após o desenvolvimento da atividade. Os problemas escolhidos foram diversos, porém as representações foram feitas tanto por meio da tabela de dupla entrada como por diagrama de árvore. Devido as discussões, com cada dupla, terem sido extensas e similares, descrevemos somente uma delas, a qual se encontra no anexo 2, páginas 154-155.

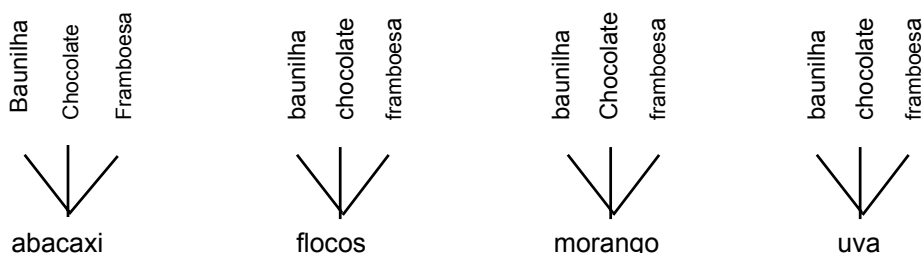
Uma avaliação sobre a compreensão da passagem de uma representação a outra foi realizada no encontro seguinte.

14º ENCONTRO

Neste encontro, realizamos uma avaliação com três problemas verbais cartesianos. O primeiro, para fazer a passagem do diagrama de árvore para a tabela de dupla entrada; o segundo, da tabela para o diagrama de árvore; e o terceiro, por meio de representação escolhida pelo aluno.

ATIVIDADE 12.1 – (4 sorvetes x 3 coberturas)

- 1) Suponha que um amigo pediu sua ajuda porque queria saber como combinar estes sorvetes com estas coberturas. Para ajudar seu amigo a resolver o problema, você fez esse diagrama de árvore.



Agora você vai resolver esse mesmo problema por meio de tabela.

Qual é a resposta desse problema? Escreva na sua folha.

Também responda:

- Quantos sabores de sorvetes têm para combinar com as coberturas? _____
- Quantas coberturas têm para combinar com os sorvetes? _____
- Quantas combinações podem ser feitas com _____ sabores de sorvetes e _____ coberturas?

Quadro 16: Resolução de problema cartesiano; do diagrama de árvore para tabela (4 sorvetes; 3 coberturas), individual.

ATIVIDADE 12.2 - (6 verduras x 5 legumes)

- 2) Veja a tabela abaixo.

Antonio resolveu um problema que a professora deu em classe e fez essa tabela. Depois combinou os legumes com as verduras para fazer as saladas.

	Beterraba	cenoura	Ervilha	palmito	tomate
Alface					
Almeirão					
Brócolis					
Couve					
Repolho					
Rúcula					

Agora você vai resolver esse mesmo problema por meio de diagrama de árvore.

Qual é a resposta desse problema? Escreva na sua folha.

Também responda:

- Quantos legumes têm para combinar com as verduras? _____
- Quantas verduras têm para combinar com os legumes? _____
- Quantas saladas podem ser feitas com _____ legumes e _____ verduras?

Quadro 17: Resolução de problema cartesiano; da tabela para diagrama de árvore (5 legumes; 6 verduras), individual.

ATIVIDADE 12.3 – (7 automóveis x 6 cores)

- 3) Em uma agência vai chegar sete modelos de automóveis nas cores amarela, azul, cinza, marrom, preta e vermelha. Quantos automóveis a agência vai receber combinando cada modelo com todas as cores?

Resolva este problema da maneira como você quiser. Escreva como você encontrou a resposta e registre neste papel o cálculo que você fez.

Quadro 18: Resolução de problema cartesiano; solução livre (7 automóveis; 6 cores), individual.

O objetivo desta avaliação é verificar a compreensão dos alunos sobre a passagem de uma representação a outra e a evolução da aprendizagem sobre problemas de produto cartesiano.

Realização das Atividades:

Distribuímos, a cada aluno, lápis, régua, borracha e folhas com descrições dos problemas para avaliação individual, fazendo a leitura junto com os alunos.

Os resultados serão apresentados no capítulo 4, páginas 110-120.

15º ENCONTRO

Neste encontro, realizamos uma avaliação contendo quatro problemas. O primeiro e terceiro referem-se a problema multiplicativo; o segundo e o quarto a problema cartesiano, para os alunos solucionarem da maneira que quisessem.

ATIVIDADE 13.1 - (9 pacotes de figurinhas com 24 em cada)

- 1) Marcos comprou 9 pacotes de figurinhas. Em um pacote tem 24 figurinhas. Quantas figurinhas Marcos comprou?
Escreva como você encontrou a resposta e registre neste papel o cálculo que fez.

Quadro 19: Resolução de problema verbal multiplicativo (pacotes de figurinhas), individual.

ATIVIDADE 13.2 - (4 meninos x 6 meninas)

- 2) A professora de uma escola vai fazer um teatrinho e precisa de um menino e uma menina para formar um casal. Na escola tem 4 meninos e 6 meninas que querem participar do teatrinho. Quantos casais diferentes podem ser formados?
Resolva este problema da maneira como você quiser. Escreva como encontrou a resposta e registre neste papel o cálculo que fez.

Quadro 20: Resolução de problema cartesiano; solução livre (4 meninos; 6 meninas), individual.

ATIVIDADE 13.3 - (8 fileiras de poltronas com 17 em cada)

- 3) Num cinema tem 8 fileiras de poltronas. Em cada fileira tem 17 poltronas alinhadas. Quantas poltronas há no cinema?
Escreva como encontrou a resposta e registre neste papel o cálculo que você fez.

Quadro 21: Resolução de problema verbal multiplicativo (fileiras de poltronas), individual.

ATIVIDADE 13.4 - (7 camisetas x 3 calças)

- 4) Em uma loja tem 7 modelos de camiseta e 3 modelos de calças. Quantas combinações podem ser feitas com as camisetas e as calças?
Resolva este problema da maneira como quiser. Escreva como você encontrou a resposta e registre neste papel o cálculo que fez.

Quadro 22: Resolução de problema cartesiano; solução livre (7 camisetas; 3 calças), individual.

O objetivo desta avaliação foi verificar os procedimentos de soluções utilizados pelos alunos, em situações diversas de estrutura multiplicativa, e a evolução de seus conhecimentos.

O 1º problema foi inserido junto com os demais, para que o aluno pudesse reconhecer situações diversas de estrutura multiplicativa, buscando procedimentos adequados à sua resolução.

No 3º problema, pretendemos verificar se os alunos transferiram o raciocínio utilizado na construção da tabela de dupla entrada (linha e coluna) para outras situações com tabela.

Para os 2º e 4º problemas, queríamos analisar a compreensão dos alunos, se as representações convencionais favoreceram a aprendizagem e quais os meios mais utilizados na solução destas situações.

Realização das Atividades:

Os problemas para avaliação individual foram lidos juntos com os alunos, informando que poderiam resolver da maneira que quisessem.

Os resultados serão apresentados no capítulo 4, páginas 110-120.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DOS DADOS

Visando buscar elementos para compreender os processos cognitivos mobilizados pelos alunos, faremos, neste capítulo, uma análise predominantemente qualitativa, que nos permita descrever a evolução dos procedimentos dos alunos na resolução de problemas de produto cartesiano. De modo mais específico, buscamos elementos que nos permitam esclarecer as questões propostas no capítulo 1.

- Que procedimentos os alunos utilizam na formação dos pares ordenados do produto cartesiano de A por B?
- Como interpretam esses procedimentos em linguagem matemática?
- Como as estratégias de ensino favoreceram a evolução das representações não convencionais para as representações convencionais?

Para esse propósito, consideremos os fundamentos teóricos expostos no capítulo 2, tomando como ponto de partida a caracterização de campos conceituais propostos por Vergnaud.

O campo conceitual caracteriza-se por *“um conjunto de situações, cujo domínio progressivo requer a utilização de uma variedade de procedimentos, de conceitos e de representações simbólicas em estreita conexão”*. (VERGNAUD, 1982, p.36; 1991, p.21)

Nesta perspectiva, podemos assumir que as questões acima apontam para os seguintes focos de análise dos dados, os quais não serão trabalhados isoladamente: os modos de representação utilizados pelos alunos no processo de formação dos pares, interpretação da solução do problema dado em linguagem verbal para a linguagem matemática e inter-relações possíveis entre estas representações. Estes aspectos são fundamentais para o domínio da estrutura conceitual do produto cartesiano.

Entre os múltiplos e complexos aspectos envolvidos neste tema, priorizaremos, para esta dissertação¹⁵, aqueles que, em uma situação de produto cartesiano, dizem respeito a constituição da “unidade do produto”, ou seja, de um “par ordenado”, dos processos de determinação de todos os pares possíveis e das representações espaciais produzidas na representação desses pares, considerando-se as condições do ensino desenvolvido em sala de aula. A análise desses aspectos fornece elementos para a análise do desenvolvimento progressivo de conceitos e habilidades necessárias para a evolução das representações não convencionais, utilizadas em classe, para as convencionais. A passagem de problemas verbais para a linguagem matemática será vista em conexão com os demais, restringindo-se a aspectos que esclareceremos quando da apresentação dos focos de análise dos três sub-itens que exporemos a seguir.

Destacamos que realizamos avaliação diagnóstica durante todo o desenvolvimento das atividades, registrando sistematicamente os comportamentos feitos em classe, conforme descrito no item 3.2.4, do capítulo 3. Entretanto, nos 2º e 3º blocos, relacionamos, para a análise, apenas as atividades feitas individualmente, após o desenvolvimento de atividades de ensino voltadas a objetivos específicos. Consideramos que, neste caso, tem-se a possibilidade de fazer análise mais objetiva dos dados obtidos.

Primeiramente, indicaremos os resultados na avaliação diagnóstica (inicial).

Em seguida, apresentaremos a análise do desempenho dos alunos, em três blocos.

- No primeiro bloco, consideraremos as atividades em que foram utilizadas as representações espontâneas dos alunos: 1 e 2 (álbum: reconhecimento de material combinatório; e formação de pares com 5 chapéus e 4 blusas); atividade 3 (cumprimentos entre 4 meninos e 4 meninas); e atividade 4 (pv¹⁶: 4 chapéus com 6 enfeites; e 3 carinhas com 4 chapéus);
- no segundo, consideraremos as atividades 6.1 e 6.2 (7 blusas com 5 saias; e compra de cabides para 8 blusas e 11 calças); e atividades 8.1 e 8.2 (3 pratos com 4 misturas; e 4 automóveis com 3 cores). Essas referem-se a

¹⁵ Limite de tempo para a sistematização e análise, fundamentada teoricamente, dos dados obtidos.

¹⁶ Quando usarmos a abreviação “pv”, estaremos referindo-nos a resolução de problema verbal.

representação próxima a tabela feita no painel e a introdução da tabela de dupla entrada; e,

- no terceiro, consideraremos as atividades 10.1 e 10.2 (3 pães com 4 frios; e 6 camisetas com 3 bermudas), nas quais o aluno pode escolher o modo de resolução; atividades 12.1 e 12.2 (4 sorvetes com 3 coberturas; e 6 verduras com 5 legumes), referem-se a passagem da tabela para o diagrama de árvore e a passagem no sentido inverso; e as atividades 13.2 e 13.4 (4 meninos com 6 meninas; e 7 camisetas com 3 calças), as soluções são de livre escolha.

Esclarecemos que não consideraremos as atividades 10.3 porque somente as 10.1 e 10.2 permitem-nos verificar a aprendizagem sobre a representação do “diagrama de árvore”; bem como também não consideraremos as 13.1 e 13.3 por não terem sido trabalhadas em sala; mas recorreremos a elas quando os procedimentos dos alunos levantar alguma dúvida.

Salientamos que as atividades foram sendo configuradas no decorrer da investigação, ao discutirmos com a orientação as produções dos alunos e ao estabelecermos que tarefas seriam propostas para a obtenção dos objetivos previstos.

Na análise, além das reflexões sobre as produções dos alunos na realização das atividades, faremos a reprodução de alguns protocolos, trechos de discussão (coletiva, individual ou em dupla), e/ou de entrevistas.

Por meio destes dados, é possível entender o raciocínio/compreensão e o grau de dificuldade na resolução dos problemas de produto cartesiano, em que constatamos a necessidade dos alunos serem colocados em frente a novas situações para que ocorra a ampliação de seus conhecimentos.

De acordo com Vergnaud:

“A distinção entre os diferentes casos e sua análise deve ser cuidadosamente abordada para ajudar a criança a reconhecer a estrutura dos problemas e a encontrar procedimentos que conduzem à sua solução. Não se deve subestimar a dificuldade de certas noções (...); elas devem, porém, ser abordadas desde o ensino elementar”. (VERGNAUD, 1994, p.180)

4.1 – ANÁLISE DO DESEMPENHO NA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA (INICIAL)

Conforme mencionamos no capítulo 3, dentre os 31 alunos matriculados na turma, tivemos que excluir 11, sendo que consideraremos 20 alunos na população de nossa pesquisa. Como, na avaliação diagnóstica, estiveram presentes somente 25 alunos, dos quais 8 fazem parte dos eliminados, na análise desta avaliação contamos com 17 alunos.

A análise será desenvolvida considerando-se, simultaneamente, dois aspectos: a representação das combinações que solucionam o problema e o cálculo efetuado. Ressaltaremos apenas as ocorrências que justificam a apresentação de atividades de ensino de problemas de produto cartesiano. A interpretação teórica dos comportamentos manifestados pelos alunos, nessas ocorrências, será desenvolvida nos itens posteriores.

A seguir, reproduzimos os problemas da avaliação diagnóstica na ordem em que foram feitas suas análises. Os 1º e 3º problemas foram agrupados por referirem-se situações de produto cartesiano de 2 conjuntos (A x B).

3) Uma fábrica de carros vai produzir automóveis de 5 modelos e 4 cores diferentes.
Os modelos escolhidos foram: corsa, fiesta, gol, pálio e uno.
As cores escolhidas foram: azul, branca, prata e verde.
Quantos tipos diferentes de automóveis podem ser fabricados combinando estes modelos e estas cores?
Escreva como você encontrou a resposta e depois faça o cálculo.

3) Uma escola vai fazer um teatrinho e precisa de um menino e uma menina para formar um casal.
Os meninos são 6: Alberto, Francisco, João, Mário, Pedro e Renato.
As meninas são 5: Graça, Joana, Maria, Sara e Vilma.
A professora pode escolher Renato e Sara, Francisco e Graça ou outros casais.
Quantos casais diferentes ela poderá formar?
Escreva como você encontrou a resposta e depois faça o cálculo.

“Adr” e “Let” resolveram o 1º problema, apresentando os pares com palavras fixando cada elemento do 1º conjunto e combinando-os com todos os elementos do 2º conjunto. Porém, enquanto no 3º problema, Adr trabalhou com duas representações, a anterior e o diagrama de árvore, “Let” não formou os pares, registrando diretamente a resposta correta (número de casais). Nos dois problemas, os cálculos foram feitos por meio da multiplicação ($n_A \times n_B$).

Outros quatro alunos apresentaram indícios de compreensão dos problemas, ou seja, combinaram aleatoriamente alguns elementos de A com

alguns elementos de B. De modo geral, as representações foram feitas por palavras ou por desenhos e palavras.

No 1º problema, os quatro alunos fizeram somente algumas combinações como, por exemplo:

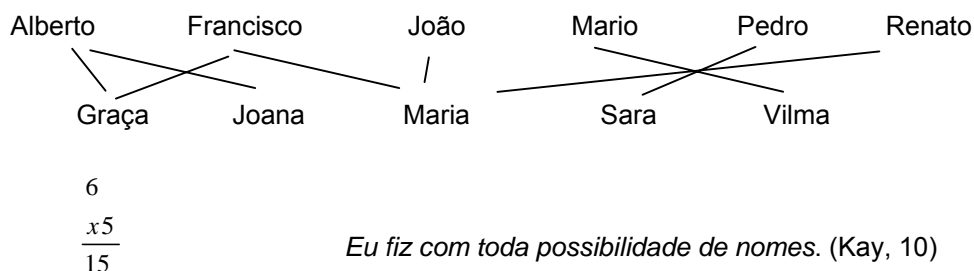
- “Ped”, formou 8 combinações:.

Corsa azul	Corsa branco	Fiesta branco	Gol branco
Corsa verde	Fiesta azul	Fiesta prata	

9 carros. (Ped, 10)

Não indicou a operação e a resposta dada não corresponde ao número de combinações feitas. Esse aluno não manteve o mesmo procedimento no 3º problema, mas igualou os elementos dos dois conjuntos, formando pares 1 a 1. Esse procedimento será descrito logo mais.

- “Kay” utilizou o mesmo procedimento para solucionar os 1º e 3º problemas; esta estratégia pode ser vista na seguinte transcrição.



“Kay” indicou a operação matemática, mas o resultado não corresponde nem à operação nem à formação dos pares. Além disso, sua justificativa não esclarece quantas possibilidades considerou, não havendo coerência entre as representações.

Em síntese, refletindo conjuntamente a resolução apresentada, nesses dois problemas, por esses quatro alunos, concluímos que embora compreendam que os problemas exigem a formação de pares, eles desconhecem as regras de sua formação, conforme proposição dos problemas. Além disso, manifestaram desconhecimento dos procedimentos de passagem dessa situação para a linguagem matemática, mesmo quando produzem uma representação espacial.

Como já esclarecemos, considerações teóricas a esse respeito serão desenvolvidas posteriormente. No momento, e para fins de comprovar a

pertinência do desenvolvimento das atividades efetuadas com essa população, podemos afirmar que os alunos apresentaram sérias dificuldades na resolução dos problemas propostos, em particular na interpretação matemática de problemas de produto cartesiano.

Uma outra ocorrência, a mais freqüente, foi que nos problemas em foco, outros 7 alunos igualaram os elementos dos conjuntos A e B, eliminando ou repetindo elementos em um dos conjuntos para obter o mesmo número de elementos. Deste modo, combinaram um elemento do conjunto A com somente um elemento do conjunto B. Neste caso, o processo de formação de pares não corresponde ao processo da determinação dos pares do produto cartesiano; não envolve ocorrências possíveis sendo que, uma vez igualados os elementos dos dois conjuntos, $n(A) = n(B)$, o problema está resolvido para o aluno.

Os protocolos a seguir ilustram esses fatos, os quais também mostram as incoerências entre as representações.

Corsa verde, fiesta prata, gol azul, palio azul, uno verde. $\frac{5}{9} + 4$ (And, 11)

As parcelas utilizadas no cálculo referem-se ao número de elementos dos conjuntos dados indicando que os pares não foram considerados.

Francisco e Graça, João e Joana, Mario e Maria, Pedro e Vila, Renato e Sara.
6 : 5 = 1 (Thi, 13)

Já nesse caso, efetuou a divisão com os dados do problema.

Os restantes quatro alunos não fizeram formação de pares tanto para o 1º como para o 3º problema; porém, apresentaram cálculos como adição com dados do problema ($n_A + n_B$); multiplicação ($n_A \times n_B$); divisão ($n_A : n_B$) e produto com dados não fornecidos no problema.

Observe-se a relevância dos dados obtidos. A maioria da classe manifestou dificuldades, demonstrando que não desenvolveu habilidades de resolução de problemas de produto cartesiano.

Faremos uma análise menos detalhada dos 2º e 4º problemas, por não terem sido trabalhados na seqüência de ensino.

O 2º problema refere-se a produto cartesiano ($A \times B \times C$).

4) Esta fábrica também vai fabricar outros automóveis combinando 6 modelos, 4 pinturas e 3 janelas.
 Os modelos escolhidos são: astra, brava, celta, focus, pólo e saveiro.
 As cores são: cinza, marrom, vermelha e preta.
 Os vidros das janelas são: transparente, verde e fumê.
 E agora, quantos tipos diferentes de automóveis podem ser fabricados?
 Escreva como você encontrou a resposta e depois faça o cálculo.

Para este problema, apenas a aluna “Adr” apresentou solução interpretável, mas fazendo combinações de $A \times B$ e $A \times C$ por meio de diagrama de árvore, como já havia feito em suas respostas anteriores.

Oito alunos demonstraram desconhecer o processo de formação dos pares ordenados de $(A \times B) \times C$, apresentando soluções como:

- composição de alguns pares apenas de $A \times B$ e/ou $B \times C$;
- composição de “trios” formadas aleatoriamente com um e somente um elemento de cada um dos conjuntos A, B e C;
- procedimento que consiste em parear os elementos dos conjuntos A, B e C, ou seja, em igualar os elementos dos conjuntos A ou B ou C, para obter o mesmo número de elementos do outro conjunto, de modo a poder colocá-los frente a frente, interligando-os por meio de pequenos traços verticais. Os resultados indicados foram: uma contagem coerente com a formação dos pares, duas contagens coerentes e uma incoerente; e quatro cálculos incoerentes com a composição das ternas.

Os outros oito alunos não fizeram combinações, deixando em branco suas respostas. Porém, foram feitos cálculos como uma multiplicação ($n_A \times n_B$); duas operações mistas $[(n_B \times n_A) + (n_C \times n_A)]$ e $[(n_A \times n_B) + (n_C)]$; duas subtrações ($n_A - n_B$); uma adição com 1 dos valores não apresentados no problema; e duas operações não interpretáveis.

O 4º problema refere-se a uma divisão.

Assim, considerando o número de meninos como sendo o conjunto A; o número de meninas como sendo o conjunto B; e o total das combinações como sendo o conjunto C; tem-se $n(B) = n(C) : n(A)$.

- 5) A professora de uma outra escola também vai fazer um grupo de teatro. 7 meninos e algumas meninas se candidataram para formar os casais possíveis. A professora sabe que é possível formar 28 casais diferentes escolhendo um menino e uma menina. Quantas são as meninas?
Escreva como você encontrou a resposta e depois faça o cálculo.

Esta questão não apresentou elementos suficientes para efetuarmos a análise, pois os alunos não registraram nenhuma forma de representação das combinações. Somente foram feitos alguns cálculos, dentre os quais tiveram maior ocorrência, oito operações não interpretáveis e quatro operações multiplicativas. Os demais foram feitos como divisão ($n_C : n_A$); multiplicação ($n_C \times n_A$); subtração ($n_C - n_A$) e em branco.

Pelos resultados obtidos nessa avaliação, pode-se concluir que os alunos desconhecem a classe de problemas de produto cartesiano. Apresentaram grandes dificuldades para lidar com situações de possibilidades, no processo de determinação de todas as combinações, o que revela aspectos importantes a serem trabalhados em uma proposta de ensino da multiplicação cartesiana.

Os quadros com as categorias dos procedimentos de solução para a representação dos pares e para a linguagem matemática para os problemas A x B, bem como a tabela com as respostas dos alunos nos problemas 1 e 3, encontram-se nas páginas 98-100.

4.2 - ANÁLISE DO DESEMPENHO NAS ATIVIDADES

- **1º BLOCO**

Atividades 1 e 2 - Álbum: formação de pares (5 chapéus x 4 blusas)

Atividade 3 - Cumprimentos (4 meninos x 4 meninas)

Atividade 4 – pv 4.1 (4 chapéus x 6 enfeites) e montagem 4.2 (3 carinhas x 4 chapéus)

Como já mencionado, analisaremos, neste primeiro bloco, o desempenho dos alunos durante as realizações das atividades introdutórias, nas quais expressaram os significados iniciais atribuídos à regra de formação de todos os pares possíveis, nas situações problemas sobre produto cartesiano, bem como na utilização de representações não convencionais.

Nas resoluções destas atividades, apareceram representações com maior ou menor organização por meio de linguagem natural, desenho e linguagem natural, diagrama análogo ao “diagrama de árvore” ou aproximação de tabela, estas duas últimas somente com palavras ou com palavras e desenhos. Em alguns casos, os alunos também indicaram a operação matemática ou fizeram contagem, possibilitando-nos efetuar um diagnóstico do significado atribuído, por eles, a essas operações.

Lembramos que essas atividades foram realizadas em duplas; para as atividades 1; 2 e 3 as entrevistas foram feitas em sala, durante prática coletiva ou quando percorríamos as carteiras (anexo 2, páginas 150-152) e, para as atividades 4.1 e 4.2, as entrevistas foram feitas com alguns alunos, em outro espaço da escola (anexo 3, página 156).

Na análise dos protocolos dos sujeitos pesquisados, consideramos como ponto de partida os procedimentos de formação de pares, organizando-os em categorias (cf. quadro 23, página 98). Essas categorias não se constituem em níveis de aprendizagem. Entretanto, pode-se afirmar que as cinco primeiras categorias envolvem raciocínio combinatório, enquanto as demais não o fazem. Ressalte-se que a categoria [Descr(ñc)] inclui descrições que se afastam dos objetivos matemáticos da tarefa, buscando relações no contexto de experiências não escolares. Em cada uma delas, verificamos os modos de representação e

sua interpretação em linguagem matemática. Em alguns casos verificamos os modos de representação e sua interpretação em linguagem matemática, um diagnóstico dos procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos para determinação do número total de pares formados, constatando em que medida utilizam procedimentos aditivos ou multiplicativos.

Focalizaremos, inicialmente, os casos em que foram construídos todos os pares do produto cartesiano, distinguindo:

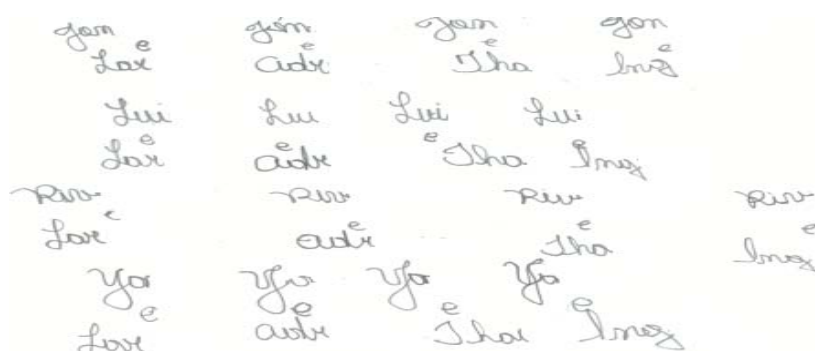
- a) Construção dos pares apresentando critérios, uma regra que estabelece a ordem de sua enumeração. Essa categoria de resposta será denominada por combinação total organizada.
- b) Construção dos pares sem uma ordem aparente de enumeração. Essa categoria de resposta será denominada por combinação total não organizada.

Consideremos a caracterização de produto cartesiano, exposta nos fundamentos teóricos (item 2.2.1).

Na composição dos pares ordenados de um produto cartesiano, estão envolvidas três variáveis: x , y , pertencentes respectivamente a um dos espaços de medida M_1 e M_2 , e z , pertencente a um espaço M_3 , resultante da composição desses dois espaços.

Podemos dizer que, nos casos acima mencionados, foram considerados, para a determinação dos valores da variável z , pertencente a M_3 , todos os valores das variáveis x , y pertencentes, respectivamente, a M_1 e M_2 .

Entre as representações feitas para as combinações totais, indicamos as que revelaram uma certa sistemática na formação dos pares, sendo que sua disposição na vertical e na horizontal, com critérios definidos, está muito próxima da tabela, conforme ilustrado nos seguintes protocolos.



$$\begin{array}{r} \text{calculo} \quad 16 \\ \quad \quad \quad \times 2 \\ \hline \quad \quad \quad 32 \end{array}$$

Atividade 3 (Fla, 10 - Thau, 10)

Nestes casos, os alunos conseguem identificar os elementos com os quais estão trabalhando e revelam alguns aspectos de organização com relação ao espaço. Porém, no protocolo apresentado, o cálculo não corresponde à formação de pares.

Um outro modo de representação, utilizando códigos dispostos ordenadamente em linhas e colunas, é o seguinte.

Atividade 4.1 (Pat, 10 - Ste, 10)

A aluna representa os pares por meio de diagrama e embora não tenha feito as combinações, demonstra saber quais são elas. Também indica o algoritmo da multiplicação e, quando provocada a justificar por que havia considerado este cálculo, responde:

“Para cada chapéu deu 6, e como tem 4 chapéus, 4 x 6”. (Ste)

Consideramos que sua justificativa apresenta elementos reveladores de clareza nos procedimentos utilizados: ela explicita a relação “para cada elemento do conjunto A \rightarrow todos os do B”; ou seja, a correspondência “um-para-seis”. A aluna também faz a representação em linguagem pictórica e matemática, esclarecendo deste modo o que está implícito na representação gráfica. O cálculo efetuado por ela relaciona os dados do problema por meio da operação correta.

Deve-se notar o surgimento espontâneo de representações esquemáticas próximas ao “diagrama de árvore” e que ocorreram igualmente na avaliação diagnóstica.



Atividade 4.1 (Luc, 10 - Ped, 10)

Note-se que a dupla indica, por meio de elemento do 1º conjunto, as seis possibilidades de combinação com gravatas, e de modo ordenado.

Em seguida, estenderemos a análise das categorias em pauta neste item, incluindo algumas análises de entrevistas que evidenciam procedimentos de cálculo considerados para as representações construídas.

Após uma primeira tentativa, na qual uma dupla fez combinações parciais e diante da interação que ocorria espontaneamente na classe quanto ao número de combinações encontradas, tal dupla fez todas as combinações totais de forma organizada e o respectivo cálculo, conforme protocolo transcrito abaixo. O registro da dupla foi feito em uma coluna; porém, fazemos a reprodução em três colunas, na mesma linguagem utilizada pelos alunos.

Chapéu e palito	Chapéu marinheiro palito	
Chapéu e regata branca com cereja	Chapéu marinheiro regata branca com cereja	
Chapéu com vestido vermelho e florzinha	Chapéu marinheiro regata vermelha com florzinha	
Chapéu com regata amarela	Chapéu marinheiro com regata amarela	calculo
Coroa com palito	Chapéu e palito	5
Coroa regata branca com cereja	Chapéu e regata branca com cereja	$\times 4$
Coroa com vestido vermelho com florzinha	Chapéu regata vermelha	<u>20</u>
Coroa com regata amarela	Chapéu regata amarela	20
Armadura com palito		
Armadura com regata branca com cereja		
Armadura e vestido vermelho de florzinha		
Armadura e regata amarela		

Atividade 2 (And,11 – Kay 10)

Embora o processo de formação dos pares se realize e seja registrado de forma organizada, o que demonstra uma seqüência de ações adequada, a dupla apresentou dificuldades em explicitar verbalmente esse processo, bem como em justificar a operação matemática feita. É o que se pode inferir da entrevista realizada quando da apresentação de sua resposta à classe (atividade coletiva de socialização).

A aluna, com ajuda das questões propostas, descreve em pormenores o processo, o que fizera sinteticamente em suas primeiras falas:

Kay: *Eu peguei o chapéu e fui combinando cada roupa com... o chapéu com várias roupas... e aí eu mudei o chapéu e fui combinando.(...) peguei primeiro o chapéu e fui passando,(...) A coroa, a mesma coisa... (Anexo nº 2)*

A entrevistadora continua:

P: *Tudo bem. Então, você foi pegando cada chapéu... Quanto que deu no total, todas as possibilidades de combinações?*

Kay: *20.*

P: *E como você chegou no 20?*

Kay: *5 x 4.*

P: *Por que deu 5 x 4? Você lembra?*

Kay: *Eu contei; por causa que aqui eu contei.. que eu vi que dá combinação.. dá 5.... dá 4 e 4.... 4 é a quantidade de chapéu...*

A aluna faz a contagem de quatro em quatro. Sua fala apresenta fortes indícios de que o número de parcelas refere-se a quantidade de chapéus e revela que a aluna apresenta dificuldades para explicitar claramente a relação entre as quantidades dos elementos envolvidos nessa relação. A seqüência do diálogo abaixo não traz elementos, para esclarecer a afirmação, sobre o número de parcelas iteradas na fala da aluna.

P: *Quantos chapéus tinham?*

Kay responde vacilando:

Kay: *Chapéu... 5.. 2...*

P: *Chapéu.. 2?*

Kay: *5... (apresentando dúvidas)*

P: *Conta direitinho.*

Kay: *1, 2, 3, 4.*

P: *Tem 4 chapéus? Tudo o que pode por na cabeça, deu quanto no total? Conta de novo.*

Kay: *... 3, 4, 5 (os dois primeiros, a aluna não falou; somente manuseou, contando implicitamente).*

P: *Deu 5.*

Após esse acordo sobre o número de chapéus, a aluna descreve seu procedimento; explica combinando cada chapéu com as blusas:

Kay: *Então, eu fui pondo aqui, o chapéu... e aí coroa... armadura... o chapéu marinheiro... o chapéu... e vai mudando... (a aluna somente foi mudando, rapidamente, as blusas no último chapéu).*

Constatamos que a aluna apresentou dificuldades para explicitar verbalmente a regra de formação dos pares, mas ao combinar todos os elementos no manuseio do material, manifestou um conhecimento implícito dessa regra, o que lhe permitiu operar de modo funcional na formação desses pares. Acrescente-se que a aluna não tinha clareza quanto à passagem da contagem de parcelas iguais para a multiplicação ($5 \times 4 = 20$).

Já para o procedimento transcrito a seguir, foram feitas todas as combinações de forma não organizada e, quando provocada a justificar o cálculo, a dupla demonstrou ter feito contagem relacionada com adição, indicada por meio do algoritmo da multiplicação, mas esta estratégia não foi explicitada verbalmente.

Cartola com palito	Marinheiro com vestido vermelho	
Cartola com vestido cereja	Marinheiro com regata	"cálculos"
Cartola com vestido vermelho	Marinheiro com vestido cereja	5
com bolinhas brancas	Marinheiro com terno	$\underline{x4}$
Cartola com regata	-----	20
-----	Pescador com palito	
Coroa com vestido cereja	Pescador com vestido cereja	
Coroa com terno	Pescador com vestido vermelho	R: Eu contei 4
Coroa com vestido vermelho	Pescador com regata	em 4 cada um e
Coroa com regata		como tinha 5
-----		somei $5 \times 4 = 20$
Chifrinho com regata		
Chifrinho com vestido (vermelho)		
Chifrinho com vestido (cereja)		
Chifrinho com terno		

- P: *E quanto deu no total as suas combinações?*
 Adr: *20.*
 P: *20, tá. E por que você achou que deu 20?*
 Adr: *Porque eu fui contando. Porque como tinha 5 modelos, deu 20.*
 P: *Tinha 5 modelos de quê?*
 Adr: *de chapéu... (silencio).*
 P: *5 modelos de chapéus e..*
 Adr: *É...*
 P: *E quantos de blusa?*
 Adr: *4...*

Observa-se que a aluna, em sua primeira justificativa, refere-se apenas ao número de elementos do primeiro conjunto a ser combinado, denominando-o genericamente: como tinha 5 modelos, deu 20. Menciona o número de blusas apenas com a intervenção da entrevistadora. Na análise das entrevistas, pude constatar a dificuldade dos alunos em referir-se ao segundo elemento do par.

- P: *Por que deu 5×4 ? (esperava que a aluna explicitasse seu registro; como ficou quieta então intervi e disse, baseando-me no cálculo que havia indicado em sua folha de resposta).*
 Adr: *5... (vacila)*
 P: *Você pegou, cada chapéu com o quê?*
 Adr: *Cada chapéu com... eu contei.*
 P: *Você contou? Aqui você fez uma conta de multiplicação. Deu 5×4 .*
 Adr: *É...*

A aluna reforça o procedimento de contagem sem considerar a questão feita na entrevista. Aparentemente, essa contagem refere-se à de 4 em 4 , como se pode ver a seguir

Relembremos que esse diálogo ocorreu no momento da apresentação das justificativas de cada dupla para toda a classe. Como esta dupla havia explicitado anteriormente sua resposta, quando eu circulava pela sala, fiquei ansiosa para saber por que não o haviam feito na socialização. Assim, falei em seguida com cada integrante da dupla, individualmente, para verificar sua ação.

- P: *Você lembra por que aqui você escreveu que contou 4 em 4 cada; o que você considerou como sendo 4?*
 Adr: *Que tem 4 em cada (a aluna foi indicando com os dedos, as 4 combinações feitas com cada tipo de chapéu).*
 P: *Mas, o que é que tem 4?*
 Adr: *As blusas.*
 P: *E por que deu 20?*
 Adr: *Porque tem 4 blusas em cada; e como tem 5 chapéus; eu fiz 5×4 .*

A relação de “um para quatro” é manifestada por meio de gestos, indicando com os dedos, os cinco agrupamentos de quatro na representação (*4 blusas em cada e como tem 5 chapéus*).

Procedimento idêntico ao da aluna “Adr” foi descrito por Nunes e Bryant (1997, p.158) sobre a investigação de Steffe em que as crianças teriam que resolver problemas de correspondência um-para-muitos. No exemplo, em que havia seis filas de três blocos, estando apenas uma fila visível, elas teriam que informar o total de blocos. As crianças, que resolveram este problema, apontaram para cada um dos blocos contando as seis filas correspondentes e a cada bloco contavam 6, 12, 18. Segundo Steffe, cada um dos blocos visíveis pode ser usado para representar a unidade composta de seis, que leva em conta as seis filas.

Como vimos no item 2.2.1 do capítulo 2, na fundamentação teórica, Nunes e Bryant, referindo-se a esta correspondência, mencionam que “*para resolver um problema de multiplicação quantitativa, as crianças precisam mais do que entendimento de relações: elas devem também organizar sua atividade de contagem de uma forma nova. Precisam ser capazes de efetuar replicações e saber como contar as unidades apropriadas em cada um dos conjuntos*”; ou seja, o multiplicando que expressa o número de “*unidades compostas*” e o multiplicador que expressa o número dessas unidades. (STEFFE,1994 apud NUNES & BRYANT, 1997)

Conforme Lamon (1994), o processo de formação de unidades compostas começa, provavelmente, desde a infância, pela percepção visual durante atividades de quantificação. O autor salienta que, quando a criança está contando nos dedos e, nessa contagem, começa a substituir cinco dedos por uma mão, ela adotou uma técnica mais poderosa. (apud FRANCHI, 1995, p.134)

Passemos a análise das atividades deste primeiro bloco, considerando as representações, feitas pelos alunos, que não interpretaram o texto do problema como um produto cartesiano, conduzindo, portanto, a cálculos diversificados. Alguns procedimentos revelaram uma certa compreensão, pelo menos, da composição de pares, enquanto outros revelaram uma total incompreensão do problema proposto. Em ambos os casos, os cálculos foram coerentes ou não

coerentes com a representação. Este aspecto será considerado como um critério para a avaliação da compreensão do aluno sobre a atividade proposta.

- c) Procedimento de resolução em que o aluno representa pares considerando alguns ou todos elementos do conjunto A, fazendo corresponder aleatoriamente alguns elementos do conjunto B.

Esse procedimento ocorreu na avaliação diagnóstica e nas atividades 1; 2; 4.1 e 4.2. Apresentamos protocolo que se distingue pela coerência ou não coerência do cálculo com a representação feita.

} Chapéu triângulo com uma garrafa
 } Chapéu triângulo com um balão
 } Chapéu retângulo com uma estrela
 } Chapéu retângulo com um coração
 } Chapéu redondo com uma fita
 } Chapéu redondo com um balão
 } Chapéu quadrado com uma estrela
 } Chapéu quadrado com uma fita

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 2 \\ \hline 8 \end{array}$$

Atividade 4.1 (Joy, 10 - Yn, 10)

- d) Repetição ou eliminação de alguns elementos de A ou B, até obter o mesmo número de elementos do outro conjunto; ou seja, o aluno faz combinação 1 a 1, entre os elementos de A e de B.

Primeira possibilidade foi um chapéu
 com um enfilete e a outra combinação
 foi um chapéu com um enfilete
 de pescaria
 A terceira possibilidade foi este chapéu
 e o enfilete foi este enfilete.
 E o quarto foi este chapéu com
 este enfilete de pescaria e a outra foi
 este chapéu com este enfilete
 de pescaria e a última foi este
 chapéu com este enfilete de
 pescaria

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 6 \\ \hline 36 \end{array}$$

Atividade 4.1 (Riv, 10 – Thia, 13)

É importante apresentar algumas considerações sobre este procedimento, uma vez que foi o mais freqüente na avaliação diagnóstica e revela um modo de formação de pares em que diferentes possibilidades não são consideradas. O seguinte trecho da entrevista feita com a dupla esclarece este aspecto na estratégia utilizada.

- Riv: Ah... nós pegamos.. é.. os chapéus de cada tipo, né.. e fomos colocando com os enfeites de pescoço. No finalzinho, nós repetimos 2 chapéus.
 P: Tá. Por que vocês repetiram 2 chapéus? Se tinham 4 aqui?
 Riv: Porque... é... pra dar todos os enfeites do pescoço
 P: Ah.. para combinar igual?
 Riv: É.

Entre os protocolos, observamos que surgiram cálculos como $(n_A+n_B; n_A:n_B)$ e outros. Não temos indicações precisas de como os alunos interpretaram os cálculos ao “parearem” os elementos dos conjuntos A e B, mas os cálculos indicam claramente que os alunos não consideraram cada combinação como formação de um par.

Obtivemos ainda:

- e) Procedimentos em que os alunos contaram (a,b) e (b,a) como combinações diferentes, conforme esclarece o trecho da entrevista.

Thau: Eu não mexi na carinha. Eu achei todas estas (foi fazendo algumas combinações no álbum desordenadamente). Uma hora eu fiz a cartola com o paletó e também inverti o paletó com a cartola e para os outros também.

Atividade 2 (Fla, 10 – Thau, 10)

- f) Procedimentos em que os alunos fizeram uma descrição com ausência de pares, utilizando, em suas respostas, critérios não matemáticos para análise da tarefa, ou seja, utilizando critérios de suas preferências ou valores culturais.

Salientamos que esses procedimentos ocorreram exclusivamente na atividade 3, referente ao teatrinho onde ocorreram os cumprimentos dos alunos. Esta ocorrência pode ser vista nas transcrições dos protocolos.

Eles cumprimentaram as meninas. Yn disse bom dia, o Jon disse oi e o Yn disse como vai e o Lui disse oi tudo bem

Atividade 3 (And, 11 – Kay 10)

Jon: Devia abraçar;
 Yn: Com um jeito de vergonha cumprimentou com um oi;
 Riv: Muito tímido só deu a mão invés de dar um beijo na bochecha
 Lui: Muito sem graça fez mais jeito de: que linda

Lar: Muita simpática gostou do cumprimento
 Adr: Muito tímida não se saiu muito bonita
 Thai: Sem graça respondeu bem
 Ing: Não ligou para nada, levou na brincadeira

Total: 20

Atividade 3 (Pat, 10 - Ste, 10)

g) Procedimentos não classificáveis:

Para esta categoria, uma ocorrência que ilustramos é a seguinte:



Atividade 4.1 (Dai,10 – Ing,10)

Neste caso, os alunos incluíram uma das gravatas no mesmo conjunto dos chapéus e eliminou uma peça no conjunto das gravatas. Além disso, não formaram combinações e também apresentaram uma diversidade de operações matemáticas, demonstrando total incompreensão da situação.

Para comparação dos dados obtidos na avaliação diagnóstica inicial e nas atividades de ensino, incluímos, a seguir, quadros e tabelas com a categoria em que incidiram as respostas.

Nos quadros 23 e 24, categorizamos os procedimentos de solução para a representação dos pares e para a linguagem matemática para os problemas A x B e, nas tabelas 1 e 2, destacamos as respostas dos alunos na avaliação diagnóstica inicial e nas atividades 1 a 4.

CATEGORIAS DOS PROCEDIMENTOS DE SOLUÇÃO

PROCEDIMENTOS	CÓDIGO
- Constrói todos elementos de $A \times B$ sendo os elementos de B selecionados de forma organizada.	CTo
- Constrói todos elementos de $A \times B$ sendo os elementos de B selecionados de forma não organizada.	CTño
- Considera alguns ou todos elementos de A, fazendo corresponder aleatoriamente alguns elementos de B.	CPa
- Descreve o processo de formação de pares e ilustra com a combinação de 1 elemento de A com todos os de B.	Descr(1,b)
- Considera (a,b) e (b,a) como combinações diferentes.	C(ab≠ba)
- Faz correspondência 1 a 1, entre os elementos de A e de B (repete alguns elementos de A ou B, até obter o mesmo numero de elementos do outro conjunto).	C(1, 1)
- Não constrói pares (somente escreve os elementos do problema ou somente registra o total das combinações).	ÑC
- Descrição com ausência de combinação; faz descrições afetivas e pragmáticas do cotidiano.	Descr(ñc)
- Não classificáveis	ÑClass
- Em branco.	EB

Quadro 23: Categoria dos procedimentos de solução para a representação dos pares.

PROCEDIMENTOS	CÓDIGO
- Multiplicação com dados do problema e resultado correto ($n_A \times n_B$).	MF
- Multiplicação com dados do problema, mas com resultado errado.	MF ₁
- Multiplicação com dados não correspondentes ao problema, mas com as combinações consideradas.	MF ₂
- Multiplicação com dados não correspondentes ao problema e nem com as combinações consideradas.	MF ₃
- Multiplicação com dados não correspondentes ao problema.	MF ₄
- Contagem coerente com combinações consideradas.	Cont
- Adição de parcela repetida.	(+)Parc
- Adição das combinações parciais consideradas.	(+)CPa
- Adição dos elementos dos conjuntos do problema.	$n_A + n_B$
- Não explicita o cálculo (somente número de combinações, de acordo com formação de pares).	SR
- Não explicita o cálculo (somente número de combinações, diferente das formações de pares).	SR ₁
- Não explicita o cálculo (somente resultado de acordo com total proposto problema).	SR ₂
- Não explicita o cálculo (somente o total de combinações com resultado diferente do proposto no problema).	SR ₃
- Divisão.	$n_A : n_B$
- Subtração.	$n_A - n_B$
- Em branco.	EB
- Outros (não interpretáveis).	ÑInterp

Quadro 24: Categoria dos procedimentos de solução para a linguagem matemática utilizada na resolução do problema ($A \times B$).

RESPOSTAS DOS ALUNOS

alunos	Problema 1		Problema 3	
	Repres. Pares	Ling. Mat.	Repres. Pares	Ling Mat.
Adr	CTo	Cont	CTo	Cont
And	C(1, 1)	$n_A + n_B$	EB	$n_A + n_B$
Daí	EB	$n_A + n_B$	EB	$n_A + n_B$
Dan	C(1, 1)	SR	C(1, 1)	SR
Fla	C(1, 1)	SR	C(1, 1)	SR ₁
Ing	EB	$n_A : n_B$	EB	$n_A : n_B$
Jon	ÑC	MF	ÑC	MF ₁
Kay	CPa	MF	CPa	MF ₁
Lar	C(1, 1)	MF	C(1, 1)	MF
Let	CTo	MF	ÑC	MF
Nar	C(1, 1)	SR	C(1, 1)	SR ₁
Pat	CPa	EB	EB	$n_A + n_B$
Ped	CPa	SR ₁	C(1, 1)	SR
Riv	C(1, 1)	MF	ÑC	MF ₄
Thau	ÑC	MF	ÑC	MF ₄
Thia	C(1, 1)	$n_A : n_B$	C(1, 1)	$n_A : n_B$
Yg	C(1, 1)	SR	C(1, 1)	SR

Tabela 1: Respostas dos alunos na avaliação diagnóstica para os problemas 1 e 3 (AxB). Representação dos pares e linguagem matemática.

Duplas (Alunos)	Atividades 1 e 2		Atividade 3		Atividade 4.1		Atividade 4.2	
	Repres. Pares	Ling. Mat.	Repres. Pares	Ling Mat.	Repres. Pares	Ling. Mat.	Repres. Pares	Ling. Mat.
Adr,Let	CT _{ño}	MF	CT _o	Cont	CT _o	MF	CT _o	MF
And,Kay	CT _o	MF	Desc(ñc)	EB	CT _o	ÑInt	CT _{ño}	ÑInt
Daí,Ing	CP _a	EB	Desc(ñc)	MF	ÑClass	ÑInt	ÑClass	ÑInt
Dan,Ric	-	-	ÑC	EB	ÑClass	ÑInt	CT _{ño}	ÑInt
Eli,Yg	C _{pa}	MF ₃	-	-	-	-	-	-
Fla,Thau	C(ab#ba)	MF ₃	CT _o	MF ₃	C(ab#ba)	MF	CT _o	ÑInt
Jon,Lui	CT _{ño}	MF	CT _o	MF	CT _o	MF	CT _{ño}	Cont
Joy,Yn	CT _{ño}	MF	Desc(1,b)	SR ₂	CP _a	MF ₂	CT _o	Cont
Kel,Thai	CT _{ño}	MF	C(1, 1)	MF	-	-	-	-
Lar,Lay	-	-	C(1, 1)	EB	CT _o	MF	CP _a	Cont
Luc,Ped	-	-	CT _o	MF ₃	CT _o	MF	ÑClass	EB
Nar,Ron	CP _a	EB	CT _o	SR ₃	CP _a	ÑInt	CT _o	EB
Pat,Ste	CP _a	(+)CP _a	Desc(ñc)	SR ₃	CT _o	MF	CT _o	Cont
Riv,Thia	CP _a	Cont	Desc(1,b)	MF	C(1, 1)	MF ₃	CT _{ño}	ÑInt
Cly,May (Eliminado)	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabela 2: Respostas dos alunos nas atividades 1 a 4.
Representação dos pares e linguagem matemática.

Nesses resultados, observamos que alguns alunos mantiveram a mesma organização nas atividades. Como exemplo, indicamos o caso de “Adr, Let”, que utilizaram os procedimentos da categoria CT_{ño}, CT_o, CT_o, CT_o.

Verificamos, também, diferença de procedimentos, ocorrendo mudanças significativas nas estratégias de solução dos alunos, para as quais relacionamos as respostas de “Pat, Ste” que foram: CP_a, Desc_r(ñc), CT_o, CT_o.

Outros alunos mantiveram estratégias alternadas, das quais, indicamos as respostas de “Fla, Thau”, classificadas em C_(ab#ba), CT_o, C_(ab#ba), CT_o.

Já para alguns alunos, houve uma evolução nos procedimentos de solução somente na última atividade, como de “Riv, Thia”: CP_a, Desc_r(1, b), C_(1, 1), CT_{ño}.

Porém, também teve alunos que continuaram utilizando procedimentos incoerentes em todas as atividades, como as respostas de "Daí, Ing", classificadas nas categorias: CP_a , $Descr_{(nc)}$, \tilde{N}_{Class} , \tilde{N}_{class} .

Considerando os resultados, verificamos o aparecimento de uma diversidade de procedimentos de representações de pares ordenados. Entre estes, alguns apresentaram características das representações convencionais, sendo quatro próximas a tabela de dupla entrada e três próximas ao "diagrama de árvore".

Evidenciamos, igualmente, manifestações de diferentes modos de compreender a noção de pares, tais como: correspondência 1 a 1 entre os elementos dos conjuntos, combinações (a,b) e (b,a) consideradas como diferentes.

Os casos mais freqüentes ocorridos na avaliação inicial e nas atividades deste bloco foi o classificado como correspondência 1 a 1, persistindo em atividades posteriores.

Ressalte-se a ocorrência na atividade 3, descrições dos cumprimentos trocados entre os alunos, não fornecendo elementos para avaliação da compreensão da formação dos pares, objetivo previsto na tarefa.

Diante da presença de diferentes categorias que evidenciam erros e incompreensão dos elementos conceituais que caracterizam problemas de produto cartesiano, constatamos que, para esta classe de problema, foram apresentadas dificuldades diferentes em aspectos que têm de ser dominados pelos alunos.

- **2º BLOCO:**

A análise será desenvolvida considerando-se os modos convencionais de representação na formação de pares e suas conexões; ou seja, se os alunos apresentam uma organização espacial, considerando os cruzamentos das informações (linha x coluna), se têm facilidade ou não na construção e utilização da tabela na resolução de problemas de produto cartesiano e que interpretações fazem das representações.

A análise da interpretação, efetuada pelo aluno, em linguagem matemática, será realizada considerando essa linguagem como um meio de avaliar as

conexões que se estabelecem entre essas representações, as quais serão tomadas como relacionadas às operações conceituais efetuadas pelo aluno.

Além de constatações pontuais, focalizando a coerência ou a incoerência entre essas representações, procederemos a uma análise teórica mais consistente utilizando dados de entrevista.

Esclarecemos que, a partir de agora, faremos a análise por agrupamento de alunos, o qual constituímos conforme o desempenho de cada um, verificado no decorrer de nossa investigação, como destacamos a seguir.

- 1º agrupamento¹⁷: 6 alunos que não demonstravam dificuldade na realização das atividades, resolvendo-as com rapidez, apresentando respostas adequadas aos problemas propostos;
- 2º agrupamento¹⁸: 7 alunos, que realizavam as atividades, mas demoravam para concluí-las, apresentando-se como instáveis em suas respostas;
- 3º agrupamento¹⁹: 7 alunos que, na maioria das atividades, apresentavam dificuldades, não resolvendo os problemas adequadamente.

Atividades 6 e 8

Iniciaremos pela análise do desempenho dos alunos nas atividades 6.1 e 6.2 (7 blusas com 5 saias; e compra de cabides para 8 blusas e 11 calças) que referem-se à representação próxima a tabela e pv aditivo; e, em seguida, nas atividades 8.1 e 8.2 (3 pratos com 4 misturas; e 4 automóveis com 3 cores), que referem-se à tabela de dupla entrada (completar e construir).

Lembramos que, antes da atividade 6, promovemos atividade coletiva utilizando o número total de peças para formação de todos os pares, em uma placa de isopor, visando favorecer a elaboração de critério de organização. Desenvolvemos, a seguir, atividades docentes, apresentando a tabela de dupla entrada, para formação de todas as combinações de forma ordenada, fazendo o cruzamento das informações das linhas (x) com as colunas (y), e, na seqüência, a

¹⁷ Adr, Jon, Let, Step, Thai, Yn.

¹⁸ And, Fla, Kay, Ped, Riv, Thau, Thi.

¹⁹ Daí, Dan, Ing, Lar, Nar, Pat, Yg.

atividade 8, na qual o aluno deveria completar e construir a tabela, para podermos verificar em que medida os objetivos das atividades foram atingidos.

Assumimos que, tabela pronta para formação de pares, pode eventualmente levar a um processo rotineiro, no qual não há uma reflexão sobre as operações conceituais envolvidas nesta tarefa.

A construção da tabela, por sua vez, envolve o estabelecimento de correspondência entre as relações espaciais configuradas na tabela e as relações estabelecidas no sistema simbólico da matemática.

Também julgamos importante solicitar o cálculo do número dessas combinações de duas maneiras diferentes. A escrita $A \times B$ não revela, por si só, que o produto cartesiano é concebido como descrevendo processos bidimensionais em confronto com o aspecto linear próprio a adição. Percebemos, nas atividades anteriores, que, quando provocávamos uma resposta relativa ao cálculo efetuado, havia fortes indícios de que o algoritmo da multiplicação era feito de forma automática. Entre esses, obtivemos um número significativo de respostas associando o cálculo $(n_A \times n_B)$ à representações parciais ou inadequadas dos possíveis pares ordenados. Além disto, os alunos sabem que o conteúdo ensinado naquele período é a multiplicação.

Quanto ao problema aditivo do item 6, considere-se, com Nesher (1988), que, comparando este problema com o anterior, constata-se que os textos, em que se apresentam, compõem-se de uma primeira proposição de mesma estrutura, exigindo do aluno uma leitura atenta das relações descritas na 2ª proposição.

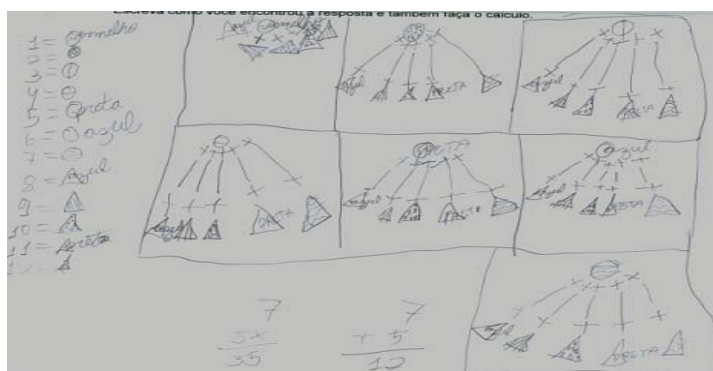
O mesmo pode ocorrer na passagem de problema verbal para a linguagem matemática. A estrutura verbal dos problemas de produto cartesiano é bem definida. Nesher assume que o aluno pode resolvê-lo pela familiaridade com essa estrutura e com a indicação de que ela remete à multiplicação.

Atividade 6 - Representação próxima a tabela e pv aditivo
(7 blusas x 5 saias) e (compra de cabides para 8 blusas e 11 calças)

Passemos à análise do desempenho dos 18 alunos que realizaram esta atividade.

No 1º agrupamento, todos os 6 alunos acertaram o problema (7 blusas x 5 saias) indicando os pares por códigos, aparecendo 4 representações próximas a tabela (Let, Ste, Tha, Yn) e 2 “diagramas de árvore”²⁰ (“Adr” que manteve a mesma representação desde a avaliação diagnóstica e “Jon” que passou de combinações desordenadas feitas por palavras para a representação abaixo). Quanto à linguagem matemática, apenas “Jon” fez cálculo incoerente com a formação dos pares.

A seguir, ilustramos o protocolo desse aluno.



(Jon, 11)

Apesar de indicar, por meio de setas, a correspondência um-para-muitos de um elemento do conjunto A com todos os cinco elementos do conjunto B, o aluno considerou cada representação, assim obtida, como um agrupamento, não fazendo a interligação entre os pontos representativos dos elementos de partida.

De qualquer forma, essa representação conduz à multiplicação; entretanto, interpreta-a também como $7 + 5$, não estabelecendo conexão entre as mesmas.

Referindo-se ao problema 6.2, somente a “Adr” errou a solução fazendo multiplicação em vez da adição, indicando a resposta do seguinte modo:

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 8 \\ \hline 88 \end{array}$$

R: Eu contei 11×8 e deu 88 eu acho que é isso.

R: Tem que comprar 88 cabides diferentes. (Adr, 10)

Em síntese, nesse agrupamento, apenas um aluno revelou uma compreensão parcial da solução do produto cartesiano e outra aluna confundiu o problema de raciocínio aditivo com o multiplicativo.

²⁰ Embora a representação esteja próxima do diagrama de árvore, a denominaremos por “diagrama de árvore”, entre aspas.

Ressalte-se a importância destas atividades, nas quais buscamos favorecer a percepção, pelo aluno, “do contraste e das interconexões entre as operações conceituais”, mobilizada em diferentes situações, fundamental para o domínio da estrutura do produto cartesiano (cf. capítulo 2).

No segundo agrupamento, consideraremos 6 participantes porque, dos sete alunos deste grupo, “Ped” não compareceu a aula.

Para os problemas 6.1 e 6.2, dos seis alunos, houve quatro representações de pares coerentes com o cálculo: 2 próximas da tabela com códigos (Riv, Thau) e 2 por palavras e códigos (And, Kay). Desses, “And” errou o 2º problema fazendo multiplicação e “Kay” a adição com resultado errado ($11+8=99$). Embora esses dois alunos tenham mostrado clareza na resolução do 1º problema, confundiram-se ao resolver o 2º problema.

Dentre as respostas corretas, destacamos a da “Kay”, que fez combinação de 1 elemento de A com todos os de B. Embora ela não tenha indicado todas as combinações, consideramos que está realizando implicitamente todas as possibilidades. Representou as 7 blusas por meio de código e palavras em frente de cada uma, descrevendo o processo de formação como sendo a combinação de 1 elemento de A com todos os de B, conforme extrato de seu protocolo:

- vermelha dá com todas as saias
- preta dá com todas as saias

$$\frac{7}{\frac{x5}{35}} \quad (\text{Kay, 10})$$

A aluna não se refere ao número de saias. O cálculo apresentado indica esse número como implicitamente considerado, ou seja, as proposições, formuladas para descrever o processo de formação de pares, constituem-se na regra de correspondência “um para muitos”.

Já “Fla” e “Thia” utilizaram representação próxima à tabela. Porém, “Fla” formou 42 pares com 7 blusas x 6 saias, não utilizando os dados do problema mas apresentando cálculo com os mesmos (7×5); “Thia” fez apenas 6 pares, escolhendo os aleatoriamente, indicando cálculos com os dados do problema (7×5) e ($7+5$). Esses dois alunos erraram o 2º problema, “Fla” fez multiplicação e “Thi” apresentou 11 combinações com cálculo $11+8$. Esse tipo de erro foi mencionado anteriormente.

Em síntese, pelo resultado desse grupo, podemos verificar o comportamento instável dos alunos, em que a estrutura conceitual não está completamente estabelecida.

Para o terceiro agrupamento de alunos, serão considerados 6 participantes pois dos sete alunos deste grupo, “Dan” não compareceu a aula.

No problema 6.1, foram feitas duas representações de pares corretas: “Daí” que fez próxima a tabela, mas indicou cálculo (7×2) incoerente com as combinações, e “Nar” que fez “diagrama de árvore”.

Os outros quatro alunos erraram o problema, verificando-se as seguintes ocorrências:

- “Pat”, fez correspondência 1 a 1, pareando os elementos dos dois conjuntos com 5 combinações e cálculo $7+5=35$;
- “Yg” formou 5 pares apenas com 1 elemento do 1º conjunto com todos os do 2º conjunto, não indicando a quantidade; e
- “Ing, Lar” que apenas indicaram os modelos das roupas, não fizeram combinações, porém “Lar” fez várias operações somando os resultados (7×5 ; 2×5 ; 5×5 ; $35+25+10$).

Quanto ao 2º problema, todos os 6 alunos erraram; observando-se 1 multiplicação (Pat), 2 operações não interpretáveis (Daí, Lar), e 3 em branco (Nar, Yg, Ing).

Observe-se que muitos alunos desse agrupamento já tinham desempenho insatisfatório com a professora da sala, tendo a necessidade de participar das aulas de reforço após o horário das aulas regulares. Apesar disso, pudemos perceber que muitos deles esforçaram-se para realizar nossas atividades, em que alguns tiveram sucesso e outros não, conforme descreveremos nas próximas análises.

Considerando-se as ocorrências, apesar de nossa intervenção, promovendo atividades para uma melhor organização espacial e formação de todos os pares, constatamos que os alunos apresentaram dificuldades quando em confronto com as situações propostas, não discriminando a situação aditiva da multiplicativa, havendo possibilidade de ocorrer mecanização na resolução de problemas de produto cartesiano.

Atividade 8 - Tabela de dupla entrada (completar e construir)
(3 pratos x 4 misturas) e (4 automóveis x 3 cores)

A seguir, faremos a análise dos 20 alunos que realizaram esta atividade.

Todos os 6 alunos do primeiro grupo resolveram os 1º e 2º problemas corretamente, completando a tabela e construindo-a adequadamente, respondendo as questões propostas e indicando os cálculos por meio dos algoritmos da multiplicação e da adição repetida.

Por isso, entendemos que, na construção da tabela, eles identificaram, na descrição dos carros, os dois atributos que foram considerados (modelos, cores), bem como os valores assumidos por esses diferentes atributos, estabelecendo conexões entre as propriedades da tabela e as operações matemáticas realizadas.

Para identificar os atributos e propriedades dos carros, foram utilizados diferentes símbolos, tais como desenhos, códigos, palavras e códigos, e somente palavras. Relevamos um dos protocolos, pela criatividade com que “Thai” expressou as propriedades indicadas por meio de códigos nas linhas e colunas básicas da tabela.

	Corpo	Celta	gol	golias
azul	+	+	+	+
prata	+	+	+	+
verde	+	+	+	+

Observe-se que a composição de pares foi indicada pelo sinal mais (+), que, de alguma forma, revela o caráter operatório na construção de pares.

No caso dos sete alunos do segundo agrupamento, “Fla”, “Kay”, “Thau”, não fizeram a composição dos pares adequadamente, nas tabelas para os dois problemas. Embora no problema (4 carros x 3 cores) tenham na construído indicando os elementos dos 1º e 2º conjuntos nas linhas e colunas principais, não reproduziram os elementos do 1º conjunto na composição de pares.

Em diálogo com os alunos que usaram esse procedimento, verificamos que não representavam as combinações na tabela, mas consideravam-nas implicitamente; ou seja, justificaram, verbalmente, que formaram os pares usando cada elemento da linha principal com todos os elementos desta linha, como, por

exemplo, carro 1 com todas as cores indicadas na 1ª linha,... e assim por diante; conforme reprodução do protocolo:

	Azul	prata	verde
Celta	<i>Azul</i>	<i>prata</i>	<i>verde</i>
Corsa	<i>Azul</i>	<i>prata</i>	<i>verde</i>
Gol	<i>Azul</i>	<i>prata</i>	<i>verde</i>
Palio	<i>Azul</i>	<i>prata</i>	<i>verde</i>

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 4 \\ \hline 12 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ + 3 \\ 3 \\ \hline 12 \end{array} \quad \text{Atividade 8.2 (Thau, 10)}$$

Mas “Ped” completou a tabela fazendo a composição dos pares, selecionando os elementos de B de forma não organizada, invertendo a ordem de alguns elementos dos pares.

Nos dois problemas, os cálculos foram efetuados indicando o total das combinações, sendo respondidas corretamente as questões propostas e os cálculos indicados por multiplicação e adição repetida (And, Kay, Riv, Thau, Thi) e somente adição repetida (Fla, Ped).

Enfim, para os sete alunos do terceiro grupo, “Daí”, “Dan”, “Lar”, “Yg”, no 1º problema, completaram a tabela, fazendo a composição de pares. Porém, os cálculos com coerência entre as representações, foram apenas os de “Daí” e “Yg”, pois “Dan” fez multiplicação ($12 \times 4 = 48$), e “Lar” multiplicação (3×4) e adição ($3 + 4$), sendo que a notação $3 + 4$ não corresponde à formação de pares.

Já “Ing” completou a tabela não fazendo composição de pares, porém, efetuou cálculo de multiplicação com dados do problema, corretamente.

“Nar” e “Pat” erraram os dois problemas. “Nar” preencheu as colunas com permutações dos valores de apenas um atributo e “Pat” fez apenas alguns pares, não considerando o cruzamento dos valores indicados na tabela, deixando em branco o 2º problema.

No 2º problema, apenas “Daí” e “Dan” construíram a tabela adequadamente, fazendo a composição dos pares; porém, “Daí” apresentou cálculo coerente e “Dan” não apresentou, pois fez multiplicação (12×4), não correspondendo aos pares formados.

“Ing” e “Lar” construíram a tabela com os elementos, mas não fizeram a composição dos pares; seus cálculos não apresentaram coerência com o número

de combinações a serem formadas, pois “Ing” efetuou ($4 \times 4 = 16$) e “Lar” usou os mesmos procedimentos de seu problema anterior.

Pelos resultados, observamos que alguns alunos situados no 2º grupo tiveram uma melhoria em seu desempenho. Porém, no 3º grupo, apesar da nossa intervenção, buscando atividades que favorecessem a utilização e interpretação das representações espaciais, permaneceram algumas dificuldades, como a instabilidade, verificada pelos erros cometidos, representação incompleta, a representação completa organizada e não organizada, cálculo errado.

Tudo isto permite dizer que os alunos tiveram uma compreensão parcial das relações envolvidas na resolução de produto cartesiano.

• 3º BLOCO

Neste bloco, a análise será desenvolvida considerando-se as representações convencionais, a interpretação das representações, e se as estratégias de ensino favoreceram a aprendizagem de problemas de produto cartesiano.

Avaliaremos, igualmente, a evolução de procedimentos dos alunos, tomando como referência os dados da atividade 4 e, quando pertinente, da avaliação diagnóstica inicial.

Atividades 10, 12 e 13

Este bloco, refere-se a análise do desempenho dos alunos nas atividades:

- 10.1 e 10.2 (3 pães com 4 frios; e 6 camisetas com 3 bermudas), em que se pode escolher o modo de resolução. Relembramos que não consideramos o problema 10.3 porque somente os dois primeiros permite-nos verificar a aprendizagem dos alunos na representação do “diagrama de árvore”;
- 12.1 e 12.2 (4 sorvetes com 3 coberturas; e 6 verduras com 5 legumes), que referem-se a passagem da tabela para o “diagrama de árvore” e a passagem no sentido inverso; e
- 13.2 e 13.4 (4 meninos com 6 meninas; e 7 camisetas com 3 calças), em que as soluções são de livre escolha. Consideramos apenas estas questões, pois não trabalhamos as 13.1 e 13.3 em

classe; mas a elas recorreremos quando os procedimentos dos alunos levantarem alguma dúvida.

Observe-se que, nos problemas 10.2, 13.2 e 13.4, o texto refere-se apenas aos elementos dos 1º e 2º conjuntos, sem especificar suas propriedades. Em outros termos, refere-se às variáveis, sem caracterizar suas diferentes possibilidades.

Destacamos que, antes da atividade 10, efetuamos atividades docente, introduzindo a árvore de possibilidades como outra forma de representação dos problemas de produto cartesiano.

O diagrama de árvore é incluído por Confrey (1994) na categoria “splitting”, que pode ser definida como a ação de criar, simultaneamente, múltiplas versões do original. O “splitting” pode ser diferenciado da contagem e da adição repetida pelas suas conexões geométricas com a similaridade.

Observe-se que o diagrama utilizado pelos alunos para resolver os problemas 10.1 e 10.2, comparativamente ao diagrama de árvore, apresenta as seguintes restrições: a natureza multiplicativa manifestada na possibilidade de criar simultaneamente múltiplas versões do original, fica apenas evidenciada na passagem do nível 1 para o nível 2 do diagrama de árvore. Os esquemas que representam a correspondência de 1 para n , não estão interligados, mas dispostos em grupos isolados.

Batanero et al considera os gráficos de árvore como representações que permitem visualizar, de forma simples, fatos ou relações para melhor compreensão das situações de enumeração e encontrar com simplicidade a regra do produto. Mas constatamos a dificuldade dos alunos para fazer a representação com vários níveis de ramificações, como apresentada na 1ª dinâmica feita no chão.

Assim, visando socializar representações espontâneas, anteriormente utilizadas por alguns alunos, decidimos trabalhar com o “diagrama de árvore” como meio facilitador à promoção do raciocínio combinatório.

Nas considerações de Vergnaud, a representação em árvore tem a vantagem de ser indefinidamente extensível e tem ligação privilegiada com a combinatória. A nosso ver, assim como a tabela, o “diagrama de árvore” é um meio de representação eficiente, no qual podemos visualizar a correspondência

um-para-muitos ajudando a criança na construção, organização de todos os pares, e no desenvolvimento do raciocínio multiplicativo.

Quanto a avaliação 12, antes da sua realização, desenvolvemos atividade do “enigma combinatório” com problemas verbais, para passagem da linguagem natural para a de representação espacial e vice-versa, visando promover debates entre os alunos e verificar o seu desempenho.

Em seguida, realizamos a avaliação final 13, para analisar o desempenho dos alunos, se as representações convencionais favoreceram a aprendizagem e quais os meios mais utilizados.

Conforme Vergnaud, “*os exercícios de passagem de uma representação a outra são de grande fertilidade pedagógica, tanto no caso de atividade classificatória como em outras atividades lógico-matemáticas*”. (VERGNAUD, 1994, p.80)

Atividade 10 - Resolução de livre escolha

(3 pães x 4 frios) e (6 camisetas x 3 bermudas)

A seguir, faremos análise do desempenho dos 18 alunos que realizaram a esta atividade, conforme agrupamentos já indicados anteriormente. As entrevistas sobre essa atividade foram feitas com alguns alunos, em outro espaço da escola (anexo 3, páginas 156-160).

Do primeiro agrupamento, consideraremos cinco alunos, para esta análise, pois dos seis alunos deste grupo, a aluna “Thai” não compareceu nesse dia.

Para os problemas 10.1 e 10.2, os alunos desse grupo não tiveram dificuldade, devido ao texto do problema, criando seus próprios modelos e formando os pares adequadamente, com cálculos coerentes com as combinações consideradas. No 1º problema, “Adr” e “Yn” utilizaram a tabela de dupla entrada, e “Let”, “Ste”, “Jon”, o “diagrama de árvore”; no 2º problema, “Adr”, “Jon”, “Yn” utilizaram a tabela e “Let”, “Ste”, o “diagrama de árvore”. Todos os que utilizaram a tabela fizeram a composição de pares corretamente.

Note-se que dois alunos (Let, Ste) apresentaram o “diagrama de árvore” pela primeira vez, e “Adr”, que vinha utilizando essa representação desde a avaliação inicial, preferiu usar a tabela de dupla entrada nessa avaliação.

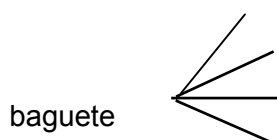
Para o segundo agrupamento de alunos, consideramos seis participantes porque dos sete alunos deste grupo, a aluna “Thau” não compareceu a aula.

Dos alunos desse grupo, somente “Ped” teve dificuldade em criar os modelos de roupas, como veremos logo mais.

Quanto à resolução dos dois problemas, dos seis alunos desse agrupamento, quatro resolveram-nos corretamente, indicando as operações matemáticas coerentes com as combinações: “Fla” e “Thia” por meio de “diagrama de árvore”; “Riv” por tabela; e “Kay” descrevendo os pares verbalmente, no 1º problema, e fazendo tabela, no 2º. Aqui também, a composição de pares foi indicada adequadamente.

“And” apresentou representações corretas por meio de “diagrama de árvore” nos dois problemas, e “Ped” apenas no primeiro. Entretanto, apresentaram cálculos não coerentes com as representações.

Em entrevista (anexo 3) sobre o 1º problema (3 pães com 4 frios), “And” descreveu, verbalmente, a formação dos pares, de cada elemento do conjunto A, com todos os elementos do conjunto B, formando 12 combinações ao total, representando a correspondência 1 para 4 por meio de setas, como ilustrado no desenho.



Para o total das combinações, foram feitas 3 representações como essa, posicionando cada elemento do conjunto A com todos os de B. Porém, quando provoquei uma resposta sobre os cálculos, para entender a conexão feita entre as representações, o aluno não deu uma justificativa coerente, como segue:

P: ... Por que deu 16? Suas contas foram $\frac{3 \times 4}{16}$ $\frac{4}{3}$ (And, 11)

And: Porque tem 3 possibilidades 3... de fazer o negócio aqui. Aí, 3 x 4 é 16.

P: 3 x 4 dá 16?

And: Hum, humm..

Ao ser solicitado a justificar por que havia dado 16, o aluno responde:

And: Aqui eu fiz assim, olha; 4 x 3, daí eu fiz assim olha; 3 x 4 é a mesma coisa que 4x3; aí eu peguei o 3 e fiz 3x4; daí 3, 6, 9,...(o aluno continua a conta nos dedos); aí 12 e depois 16.

Quando o questioneei sobre a outra conta, seguiu-se o diálogo:

And: É coloquei 4 e depois fui pondo o 3 pra... daqui olha, eu pus 4, depois pus 3; só 3 pra dar a continha exata.

P: Tá. Aqui você pegou 4, que era?
 And: É, os.. os.. o recheio.
 P: E os 3 aqui?
 And: Que era.. é.. é.. o baguete, o da forma e do francês.

Continuamos o diálogo e quando perguntei novamente sobre o 16, respondeu:

And: É que eu fiz a mesma coisa que eu tava falando, que eu peguei 4, é... é o recheio com 3; eu fui pondo; é aqui, os 3; eu fui pondo até dar 16.

A análise da entrevista revela que o aluno não estabelece correspondência entre as operações matemáticas efetuadas e o diagrama. Considere-se que o aspecto multiplicativo, evidenciado na passagem do 1º para o 2º nível da árvore (1 produz 4), deveria ser descrito pelo aluno no caso da adição como $4+4+4$ ao invés de $3+3+3+3$.

Além disso, o cálculo aditivo inclui parcelas relativas ao número de pães e o número de frios. Seu dialogo não esclareceu muito sobre este aspecto.

“Ped”, que também representou os pares corretamente por “diagrama de árvore” no 1º problema, usando a correspondência $1 \rightarrow 4$, totalizando 12 combinações; quando provocado a justificar sobre o total de possibilidades, deu uma resposta inadequada, conforme trecho de entrevista:

P: ... E quantos sanduíches diferentes você conseguiu formar, combinando pão e recheio?

Ped: 5 Seus cálculos foram $\begin{array}{r} 5 \\ + 5 \\ \hline 10 \end{array}$ $\begin{array}{r} 5 \\ \times 3 \\ \hline 15 \end{array}$ (Ped, 10)

P: 5? Onde que está o 5?

Ped: Aqui, oh; com este aqui e o recheio (o aluno indicou o 1º tipo de pão (baguete) com os 4 frios que havia feito em um “diagrama de árvore”).

No prolongamento da entrevista, propus questões provocando resposta sobre a quantidade total de lanches:

P: No total, quantos lanches diferentes você conseguiu fazer?

Ped: 15

P: Por que deu 15?

Ped: Porque eu somei tudo e fiz $5+5$, 10 com mais... e aí 5×3 , 15.

O aluno constrói o “diagrama de árvore” e explicita a correspondência um-para-muitos. Entretanto, as relações conceituais envolvidas nas representações não se apresentam de modo constante e estável. Ao interpretá-las, “Ped” não distingue os elementos que representam fatores (elementos de A e B) daqueles que representam pares (elementos de $A \times B$), revelando incompreensão na composição da formação de pares.

A entrevista esclareceu pontos significativos da passagem do “diagrama de árvore” para a linguagem matemática, apontando a importância de se avaliar como a compreensão manifesta-se em diferentes modos de representações e, em especial, na interpretação de representações em que as operações são indicadas esquematicamente.

Com isso, criamos oportunidades e propusemos outras questões, para que o aluno percebesse a correspondência $1 \rightarrow 4$ procedendo assim, à composição dos elementos na formação dos pares e reformulando a operação matemática de acordo com a representação correta dos pares.

Já para o problema (6 camisas com 3 bermudas), “Ped” apresentou 9 combinações, criando apenas 1 camisas e 3 bermudas; repetiu a camiseta 3 vezes e embaixo de cada uma indicou as três bermudas em ordem invertida, sem fazer setas. Além disso, mostrou que havia formado somente 3 combinações. Não temos elementos consistentes para avaliar esta resolução, mas é possível que a dificuldade tenha ocorrido devido à formulação verbal do problema.

Dos sete alunos do terceiro agrupamento, somente duas alunas responderam aos dois problemas corretamente e com cálculos coerentes com as combinações: “Ing”, que formou pares por “diagramas de árvore” e tabela, e “Nar”, por “diagrama de árvore”.

Cabe salientar, “Ing”, que vinha apresentando resultados incoerentes na maioria das outras atividades, já nesses dois problemas, fez todas as combinações de forma organizada, embora não tenha conseguido explicitar verbalmente a correspondência um-para-muitos.

Segue trecho da entrevista feita sobre a resolução do problema 10.1.

P: Quantos lanches diferentes você conseguiu fazer?... Você poderia comer?

Ing: 12.

P:

Tá. E aqui (indiquei a cálculo) $\frac{3 \times 4}{12}$. Como é que você lê esta conta de multiplicação?

Ing: É 3×4 , porque aqui eu tenho 3 e aqui eu tenho 4 (a aluna indicou com as mãos, nas combinações feitas no diagrama de árvore: cada tipo de pão e depois os 4 tipos de frios de cada agrupamento de combinações; ou seja, considerou 1 tipo de pão com 4 tipos de frios (3 vezes)).

Dizer aqui eu tenho 3 e aqui 4 não esclarece a operação realizada entre 3 e 4. Entretanto, ao referir-se a iteração aditiva de 3 parcelas de 4, essa operação fica

esclarecida e, embora direcionada pela pesquisadora, reconhece que pode fazer 4 sanduíches com cada pão.

- P: Tá. (a aluna também havia indicado o cálculo como $\frac{4}{12}$ e sem ser questionada sobre este, justifica):
 Ing: Ou então, $4 + 4 + 4$ que deu 12
 P: Tudo bem. Então você lê 3×4 ? E para cada pão? Quantos sanduíches você consegue fazer com cada pão?
 Ing: 4

Quanto aos 4 alunos restantes:

- “Dan” continuou apresentando produção instável manifestando alguma compreensão da utilização da tabela (1º problema), mas utilizando no 2º problema, procedimento de igualar os elementos dos 1º e 2º conjuntos, descrito no item 4.1 deste capítulo.
- Três alunos, apesar da realização de atividades com a utilização do “diagrama de árvore”, continuaram manifestando total incompreensão da proposta: dois deles apresentando somente cálculos com as variáveis dos problemas (“Daí” e “Pat”) e outro “Yg” apenas 4 combinações como solução 1º problema.

Constatamos que os alunos manifestaram menores dificuldades nas tarefas de natureza combinatória, ou seja, na realização de ações, segundo uma regra implícita de formação de todos os pares. Garantiram, assim, o encontro de todas as possibilidades de modo ordenado, com o estabelecimento das relações matemáticas aditivas e multiplicativas subjacentes às ações envolvidas nessas tarefas cognitivas.

Considerações análogas foram feitas por Vergnaud (1994), ao considerar a introdução da multiplicação nos níveis iniciais da escola elementar. Para ele, muitas crianças fracassam em entender a multiplicação quando ensinadas por esse enfoque. O autor considera que a estrutura aritmética do produto cartesiano, como um produto de medida, é muito difícil e não pode ser apreendida antes de ser analisada como proporção dupla.

Atividade 12 - Passagem da tabela para o “diagrama de árvore” e vice-versa (4 sorvetes x 3 coberturas) e (6 verduras x 5 legumes)

Esta atividade (realizada com a presença de 19 alunos) refere-se à passagem do “diagrama de árvore” para a tabela cartesiana (12.1) e vice-versa (12.2). Coloca novos desafios, uma vez que envolve o reconhecimento das variáveis e dos processos envolvidos na formação de todos os pares possíveis (de serem formados com essas variáveis) em duas configurações espaciais diferentes.

Em outros termos, na passagem da representação cartesiana para a “árvore” é necessário reconhecer que os elementos do conjunto A (valores de x) são representados na coluna de referência, os do conjunto B na linha de referência (valores da variável y) e que cada um dos pares do produto cartesiano é obtido pelo cruzamento desses elementos. Os números de pares possíveis de serem formados com um elemento de A não são dados diretamente, como na representação em “árvore”, na qual os elementos do conjunto são alinhados horizontalmente e a correspondência de um para três (na questão dada) se faz diretamente, passando-se, sucessivamente, de cada um valores de x a três valores de y . O atendimento das regras de correspondência entre essas representações implica, portanto, em mudanças nas relações espaciais de posição relativa, de alinhamento, de direção, de ortogonalidade, entre outras.

No problema 12.1, todos os seis alunos do primeiro agrupamento fizeram a passagem para o “diagrama de árvore” e no 12.2 construíram a tabela cartesiana correspondente a árvore, apresentando uma boa disposição espacial. Alguns usaram códigos para representar os atributos dos elementos do 1º e 2º conjuntos, posicionando-os adequadamente nas linhas e colunas principais da tabela. Não tiveram necessidade de preencher a tabela para fazer o diagrama de árvore.

No segundo agrupamento de alunos, consideramos seis participantes porque dos sete alunos deste grupo, a aluna “Kay” não compareceu a aula.

Neste grupo, nem todos os alunos apresentaram uma boa organização espacial, embora tenham feito a passagem adequadamente. Somente, “Fla”, no 1º problema, não alinhou adequadamente a coluna principal, confundindo-se na

formação dos pares e, no 2º problema, preencheu a tabela e fez o diagrama. O protocolo desta aluna está indicado abaixo.

Já “And” e “Thau” indicaram os elementos dos 1º e 2º conjuntos nas linhas e colunas principais, adequadamente, mas não reproduziram os elementos do 2º conjunto na composição dos pares.

Para o terceiro agrupamento de sete alunos, as representações gráficas, quando construídas, não apresentaram boa disposição espacial.

No 1º problema, houve cinco soluções, como as de “And” e “Thau”, do grupo anterior. Já “Dan” indicou todos os elementos do 2º conjunto em cada coluna principal da tabela, não fazendo a composição dos pares, e “Pat” efetuou uma rotação de 90º no gráfico de árvore, colocando-os em duas colunas, acrescentando, em uma coluna, indicações dos elementos do 1º conjunto.

Em síntese, a maior dificuldade constatada no primeiro problema (7 entre 19 alunos) foi em incluir, na construção da tabela correspondente à árvore, a linha com a identificação das propriedades descritivas dos elementos do conjunto B. Apenas dois alunos revelaram total incompreensão da tabela.

Relembramos que, na segunda atividade, foi fornecida uma tabela apenas com a identificação dos elementos representando os “fatores produto” e, a partir dela, pedia-se a construção do diagrama de árvore. Dezesesseis, entre os 19 alunos, preencheram a tabela, fizeram adequadamente a passagem para o diagrama. Dos três alunos restantes “Pat” efetuou somente algumas combinações e “Ing” e “Lar” não executaram a passagem. Além dessa ocorrência indicativa de dificuldades, não constatamos outras que pudessem indicar dificuldades específicas, como no caso anterior.

Destacamos os protocolos de dois alunos, um do 1º grupo e outro do 2º, pelo contraste da organização espacial apresentada nas representações.

laranja	abacaxi	manga
abacaxi com	laranja com	manga com
laranja	abacaxi	manga
abacaxi	laranja	manga
manga	abacaxi	laranja
manga	laranja	abacaxi

(Adr, 11)

laranja	abacaxi	manga
abacaxi com	laranja com	manga com
laranja	abacaxi	manga
abacaxi	laranja	manga
manga	abacaxi	laranja
manga	laranja	abacaxi

(Fla, 10)

Atividade 13 - Resolução de livre escolha
(4 meninos x 6 meninas) e (7 camisetas x 3 calças)

A próxima análise foi feita para os 18 alunos que realizaram a avaliação 13, mantendo-se os agrupamentos anteriores.

Após as atividades com as representações espaciais, retornamos às atividades de interpretação de problemas verbais em linguagem matemática, visando avaliar em que medida proporcionaram melhor desempenho nessa transposição. Foram propostos problemas similares aos da avaliação diagnóstica, um dos quais refere-se ao mesmo contexto do problema 3, dessa avaliação.

Do primeiro agrupamento de alunos, consideramos cinco alunos, pois dos seis, “Jon” não compareceu nesse dia.

Como temos constatado, os participantes deste grupo tem mantido um bom desempenho, resolvendo adequadamente as questões anteriores desde a atividade 6. Entretanto, nesta atividade, “Ste”, no problema (4 meninos com 6 meninas), fez pareamento desconsiderando duas meninas; ela formou tanto combinações um a um, totalizando 4 pares, como também pareou uma menina com outra menina, formando 5 pares, indicando os totais de casais por contagem, em coerência com os pares considerados mas não com a situação proposta.

Abaixo, transcrevemos protocolo efetuado pela aluna.

*Com 6 meninas e 4 meninos dará para formar 4 casais e sobram 2 meninas.
Ou 5 casais com um de 2 meninas.* *Legenda* *meninos: Δ*
meninas: O

O	O	O	O	O	O	→ sobram
Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	
		ou				
O	O	O	O	O	O	
Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	O	

(Step, 10)

Considere-se, esse mesmo procedimento foi privilegiado na solução de problema análogo, proposto na avaliação inicial, no qual constatamos interpretações, que tomaram como referência relações não matemáticas ocorridas em atividades cotidianas. Isto nos permite conjecturar que a solução foi apresentada, pela aluna, sob influência do contexto.

Os demais participantes do grupo privilegiaram o “diagrama de árvore”, elaborado por meio de desenhos ou palavras: efetuando corretamente o cálculo. Essa representação foi igualmente utilizada por três alunos, no 2º problema.

No segundo agrupamento de sete alunos, como no 1º grupo, o “diagrama de árvore” foi privilegiado na resolução dos dois problemas, a qual apresentou cálculos coerentes com a representação de pares, nas atividades de seis alunos. O mesmo não aconteceu com “Fla” que fez pareamento.

Observe-se que na avaliação diagnóstica e nas atividades (1 a 4) esse grupo usava representações espontâneas sem organização espacial, apresentava combinações parciais, pareamento, ou somente cálculos coerentes e/ou incoerentes com a situação. Porém, com nossa intervenção, apresentando meios convencionais de representação, houve evolução no desempenho deste grupo, com exceção de “Fla”, que apresentou instabilidade nesta última atividade.

No terceiro agrupamento, com sete alunos, “Nar” não compareceu à aula. Porém, a instabilidade deste grupo persistiu na maioria das atividades.

Na atividade 13, apenas “Dan” acertou o primeiro problema e “Yg”, o segundo, representando a formação de pares por “diagrama de árvore” com cálculo coerente. Os outros participantes apresentaram “diagrama de árvore” incompletos ou somente cálculos coerentes e/ou incoerentes com a situação.

Porém, observe-se que na avaliação diagnóstica e atividade (1 a 4), este grupo apresentava combinações parciais, pareamento, respostas não classificáveis e em branco. Nas atividades posteriores, quando apresentamos representações convencionais, quatro alunos resolveram uma das atividades corretamente (Daí, Ing, Nar, Yg), não obtendo o mesmo desempenho nas outras. O restante dos alunos ou apresentaram apenas uma questão na atividade ou não executaram a tarefa adequadamente.

No decorrer da pesquisa, preocupamo-nos com este grupo, fazendo algumas entrevistas para entender o raciocínio e promover questões para realização das tarefas.

Apesar de termos constatado a evolução nos procedimentos de solução, o grupo apresentou respostas instáveis na maioria das atividades de mesma natureza, evidenciando que a estrutura conceitual não estava completamente estabelecida para tratar situações de produto cartesiano.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

Neste trabalho, investigamos aspectos relativos ao processo de ensino aprendizagem de resolução de problemas de produto cartesiano²¹. Tomamos como referência a teoria dos campos conceituais de Vergnaud e consideramos aspectos teóricos de pesquisadores que desenvolvem pesquisas sobre o pensamento multiplicativo.

Esta pesquisa foi desenvolvida em uma sala de aula, nas condições em que ela se apresentou no seu cotidiano escolar. Eu mesma assumi o papel de professora – pesquisadora, desenvolvendo um projeto de intervenção de ensino. Nesse processo, o papel do professor é necessário e importante, pois é ele que organiza a aprendizagem, promovendo situações didáticas, debates, justificações, representações, assegurando e facilitando as conexões indispensáveis para a evolução do conhecimento.

A classe selecionada - quarta série do ensino fundamental - compunha-se de uma população caracterizada por grande heterogeneidade quanto ao aproveitamento escolar, não apenas em matemática como em língua portuguesa, com os alunos apresentando dificuldades em expressar suas idéias, cometendo, inclusive, sérios erros de ortografia. A configuração da classe em termos desse aproveitamento, apesar do progresso manifestado na aprendizagem do conteúdo desenvolvido, manteve-se constante durante todo o percurso da investigação.

No decorrer do estudo, desenvolvemos avaliações diagnósticas contínuas, registrando sistematicamente os comportamentos em classe e fazendo encaminhamento de novas propostas para a obtenção dos objetivos previstos. As atividades foram realizadas coletivamente, com a participação da sala. Efetuamos entrevistas e intervenções pontuais durante a execução das tarefas individuais e em duplas, dialogando com os alunos, utilizando estratégias diversificadas de ensino.

²¹ Neste capítulo indicaremos o produto cartesiano por $A \times B$, designando por x o elemento de A e por y os elementos de B , com $x \in N$, $y \in N$.

Assumimos que a aquisição de conhecimentos forma-se a partir de problemas a resolver, considerados como motor e critério de aprendizagem. Estes conhecimentos não se restringiram ao domínio de regras para a constituição de todas as possibilidades de pares ordenados, constituintes do $(A \times B)$. A ênfase se deu no processo, na busca de representações próprias dos alunos. Na passagem dessas representações para a linguagem matemática, avaliamos os procedimentos de cálculo a elas relacionados, buscando meios de integrar procedimentos aditivos e multiplicativos. Consideramos, com Vergnaud, a importância da passagem de uma para outra representação como um meio de favorecer e avaliar o processo de compreensão dos conceitos envolvidos nos procedimentos de resolução de problemas de produto cartesiano. Essas atividades foram particularmente importantes na passagem de representações espaciais não convencionais para convencionais.

Sintetizamos, a seguir, a análise das atividades em que foram utilizadas representações não convencionais.

Ressaltamos, também com Vergnaud, a importância de saber sob que formas se apresentam as concepções iniciais, quais os erros e mal entendidos delas decorrentes, e como essas concepções podem transformarem-se e tornarem-se mais complexas e abrangentes.

Quanto aos procedimentos utilizados pelos alunos na formação dos pares ordenados de $(A \times B)$, salientamos o aparecimento de uma diversidade de representação desses pares, alguns apresentando características próximas às das representações convencionais: tabela de dupla entrada e “diagrama de árvore”, com combinações parciais e combinações totais ordenadas e não ordenadas.

Evidenciamos, igualmente, manifestações de diferentes modos de compreender a noção de pares, tais como: combinações (a,b) e (b,a) consideradas como diferentes, a formação de pares fixos ao combinar um elemento do primeiro conjunto com um ou dois elementos do segundo igualando-os (correspondência de um 1 para 1). A concepção de par, revelada nessa última categoria, persistiu na avaliação diagnóstica, nas atividades no bloco 1, reincidindo, igualmente, em outras atividades (10 e 13 do bloco 3).

Ressalte-se que, em situações de troca de cumprimentos e na formação de casais entre alunos e alunas para dança (atividades 3 e 13), houve a ocorrência

de descrições com ausência de pares ordenados e a utilização de critérios não matemáticos para analisá-las, desviando-se dos objetivos da tarefa escolar.

Quanto aos procedimentos de cálculos considerados para as representações construídas, constatamos dificuldades nas justificativas apresentadas, tais como:

Dificuldade em explicitar verbalmente a regra de formação de pares, referindo-se às ações realizadas por meio de gestos apontando agrupamentos feitos em suas respostas, revelando a natureza funcional de conhecimentos implícitos. (bloco 1, páginas 91-92)

“Eu contei; por causa que aqui eu contei... que vi que dá combinação...” (And,11 – Kay,10)

A justificativa mais freqüente mencionou apenas os dados dos problemas, sem indicar a operação que os relacionam (porque tenho tantos x e tantos y).

Outras revelaram falta de clareza quando referiram-se aos fatores (a e b) incluídos na multiplicação, que efetuavam, por exemplo, fazendo a leitura de (a x b) como (somei a + b). (bloco 1, páginas 92-94)

“Eu contei 4 em 4 cada um e como tinha 5 somei $5 \times 4 = 20$ ” (Adr, 11 – Let.10)

Referindo-se a interpretação dos problemas verbais e das representações espaciais em linguagem matemática, relembramos que solicitamos, pelas razões expostas na atividade 7, a explicitação de dois modos de resolver o problema, o que foi mantido por alguns alunos, mesmo quando não solicitada. As razões dessa opção foram expostas na introdução da análise do 2º bloco (atividades 6 e 8, página 104) e na delimitação das questões de nossa pesquisa, páginas 79-80. Conseqüentemente, a avaliação dos conceitos implícitos mobilizados pelo aluno, ao interpretar uma situação problema de $A \times B$ por meio de uma fórmula multiplicativa, exigiria a utilização de instrumentos específicos²². Justifica-se, portanto, a limitação desta análise à avaliação da coerência ou não entre as diferentes representações de um mesmo problema.

No caso de formação de todos os pares, observamos tanto a ocorrência da operação de multiplicação como a de adição ou de ambas. O erro em uma delas foi considerado como incoerência.

²² Entrevistas individuais, observação de discussão em grupos impossíveis de serem realizadas nos limites desta pesquisa.

Pelos resultados da análise realizada no capítulo anterior, constatamos que houve um aumento progressivo no decorrer das atividades, do número de igualdades coerentes, conforme indicaremos logo mais.

Os alunos manifestaram menor dificuldade nas tarefas de natureza combinatória, ou seja, na realização de ações segundo uma regra implícita de formação dos pares, garantindo o encontro de todas as possibilidades de modo ordenado, do que no estabelecimento das relações matemáticas aditivas e multiplicativas, subjacentes às ações realizadas nessas tarefas cognitivas.

Sintetizamos, a seguir, a análise das atividades nas quais visamos promover a evolução das representações não convencionais, utilizadas até então nas aulas, para as representações convencionais.

Partimos dos pressupostos teóricos enunciados no Capítulo 2, que enfatizaram a importância da tabela como um instrumento que facilita encontrar e classificar os diferentes pares possíveis na resolução de $A \times B$. Nesse processo, intervêm muitas propriedades do espaço, tais como linha e coluna, alinhamento, direção, interseção, ortogonalidade.

As nossas intervenções para a introdução da tabela cartesiana deram-se em duas etapas. A primeira teve o objetivo de apresentar uma representação próxima à tabela de dupla entrada, por suas propriedades não estarem presentes, tais como, linha e coluna principal. Porém, observe-se que representações como essas foram produzidas desde as primeiras atividades, conforme vimos na reflexão a respeito na análise do bloco 1.

Promovemos uma atividade coletiva (cf. indicada nas páginas 59-62) para organização e formação total dos pares, por termos verificado a diversidade de procedimentos evidenciando erros e incompreensão dos elementos conceituais que caracterizam problemas de $A \times B$.

Na avaliação, constatamos que apareceram representações próximas a tabela, com combinações totais de forma organizada, usando códigos. Estas têm a mesma característica do painel em que desenvolvemos a atividade.

Esta representação favoreceu a construção de todos os pares, pois os alunos, que haviam manifestado dificuldade em atividades anteriores, tiveram um bom desempenho, fazendo a composição dos elementos do conjunto A e B .

Neste caso, os cálculos foram apresentados de forma coerente com a formação dos pares, indicando que os alunos fizeram conexão entre as representações. Apenas um aluno, que usou o “diagrama de árvore” com formação de pares corretas, indicou cálculo incoerente com a representação (cf. indicado na página 105). Outros dois alunos não apresentaram bom desempenho. Embora um deles tenha utilizado representação próxima à tabela, não utilizou os dados do problema, formando mais pares; o outro fez somente algumas combinações.

Os alunos do 3º agrupamento apresentaram maiores incoerências, mantendo-se instáveis em suas respostas ou na representação incompleta ou na representação completa organizada e não organizada. Porém, constatamos melhorias em determinadas atividades.

Na segunda etapa, adicionamos novos elementos às representações anteriores, introduzindo as linhas e colunas principais para indicamos atributos a serem combinados, fazendo perguntas sobre quais deveriam ser, enfatizando a posição das informações do cruzamento da linha (x) com a coluna (y).

Para avaliar a eficiência dessa intervenção, propusemos a resolução de situações problema com a utilização da tabela cartesiana: a primeira para completar a tabela e a outra, para construí-la.

A tabela pronta para a formação de pares pode levar a um processo rotineiro, sem reflexão sobre quais operações conceituais estão envolvidas nesta tarefa. Já na construção da tabela, deve-se perceber que o número de linhas e colunas varia conforme os valores possíveis das variáveis x e y . As informações sobre a variação do número de linhas e colunas ajudam os estudantes na visualização e percepção da formação dos pares possíveis.

Na atividade proposta, constatamos que os alunos do 1º agrupamento, não apresentaram dificuldades na realização das duas tarefas. Por isso, entendemos que, na construção da tabela, identificaram, na descrição dos carros os dois atributos que foram considerados (modelos, cores), bem como os valores assumidos por esses diferentes atributos, estabelecendo conexões entre as propriedades da tabela e operações matemáticas realizadas.

Os alunos do 2º agrupamento apresentaram dificuldade na composição dos pares. Apenas indicaram um dos elementos do conjunto e não reproduziram

o outro, deixando implícita a formação dos pares considerados. Todavia, a operação matemática realizada identificou os atributos e o resultado do problema.

Foram utilizados diferentes símbolos para identificar os atributos e propriedades dos carros, tais como desenhos, códigos, palavras e códigos, e somente palavras.

Os componentes do 3º agrupamento apresentaram-se instáveis em suas respostas, porém, com maior frequência de acertos, em relação as atividades anteriores .

Os alunos com melhor desempenho nas habilidades requeridas para o reconhecimento e a enumeração dos pares de $A \times B$, e sua interpretação em uma forma multiplicativa, produziram gráficos cartesianos melhor organizados espacialmente em comparação com os produzidos pelos alunos com dificuldade. Estes não utilizaram códigos ou outras formas mais criativas, restringindo-se a enumerá-los com palavras, freqüentemente com erros de ortografia.

Pelos resultados, observamos, os alunos que apresentaram dificuldade na atividade anterior, tiveram bom desempenho nesta tarefa, apresentando coerência entre as representações, especialmente os do grupo 2.

Podemos, portanto, concluir que os alunos desenvolveram as habilidades necessárias para utilizá-las no contexto em que a tarefa foi trabalhada, apresentando-se como uma representação espacial natural para $A \times B$.

Sua utilização como instrumento de organização e ordenação, pode constituir-se em uma experiência de aprendizagem extensiva a outros domínios. Essa representação é um meio convencional, social importante no tratamento de informação em diferentes áreas do conhecimento, tais como a divulgação de dados, registro de informações, interpretação de diferentes formas de registros, entre outros.

Como a tabela cartesiana, o “diagrama de árvore” também permite a visualização do processo de construção dos pares de $A \times B$ de outras relações espaciais. É considerado como uma representação privilegiada para promover o desenvolvimento do pensamento multiplicativo e o processo de crescimento do número de eventos ocorridos em um problema.

Analisando sua apresentação no ensino (atividade 9), constatamos dificuldades na construção dos vários níveis de crescimento, indicados em suas sucessivas ramificações. Assim, optamos por socializar representações

espontâneas, anteriormente utilizadas pelos alunos, ou seja, trabalhar com o “diagrama de árvore²³”. O aparecimento espontâneo do “diagrama de árvore” ocorreu duas vezes: por uma aluna, na avaliação diagnóstica que se manteve, nesse procedimento, até avaliação final, e por outro aluno, na atividade 6. Esse diagrama foi apresentado e descrito no capítulo 4, página 105. Constitui-se de pontos isolados, correspondentes aos elementos do conjunto A, a partir dos quais foram representadas as combinações com os elementos do conjunto B, por meio de setas.

O aspecto combinatório do “diagrama” em uma árvore, foi mantido na representação esquemática produzida em classe, quando consideramos a combinação de apenas dois elementos. Assim como a tabela, esse diagrama esquemático revelou-se como meio eficiente para visualizar a correspondência de um-para-muitos, bem como para a construção/ organização de todos os pares, e desenvolvimento do raciocínio combinatório, mobilizando diferentes processos de cálculo.

Após nossa intervenção, apresentando o diagrama de árvore, propusemos problemas verbais para soluções de livre escolha, em que houve maior ocorrência no uso desse diagrama, em comparação com o uso da tabela, apresentado, pela primeira vez, por seis alunos.

Na análise dos resultados, observamos que a frequência de casos em que foram encontradas todas as possibilidades, foi a mesma que a da representação em tabela.

Entretanto, nem sempre os alunos estabeleceram regra de correspondência entre as representações e a linguagem matemática. Constatamos a ocorrência de dois casos incoerentes, em que não houve distinção entre os elementos que representam fatores (elementos de A e B) daqueles que representam pares (elementos de $A \times B$). (cf. trechos de entrevista nas páginas 113-115, capítulo 4).

É importante observar, a representação pela iteração de parcelas favoreceu o diagnóstico de compreensão, pelos alunos, de suas representações espaciais e do significado atribuído à formulação multiplicativa $A \times B$.

²³ Relembramos que embora a representação esteja próxima do diagrama de árvore, a denominamos por “diagrama de árvore” entre aspas.

Também, enfatizamos a passagem do “diagrama de árvore” e o sentido inverso. Esta tarefa coloca novos desafios, uma vez que abarca o reconhecimento das variáveis e dos processos envolvidos na formação de todos os pares possíveis de serem formados com elas, em duas configurações espaciais diferentes.

Conforme Vergnaud, “*os exercícios de passagem de uma representação a outra são de grande fertilidade pedagógica, tanto no caso de atividade classificatória como em outras atividades lógico-matemáticas*”. (VERGNAUD, 1994, p.80)

O atendimento das regras de correspondência entre as representações implica em mudanças nas relações espaciais de posição relativa, de alinhamento, de direção, de ortogonalidade, entre outras.

Nesta atividade, embora tenham feito a passagem do “diagrama de árvore” para a tabela, nem todos os alunos apresentaram uma boa organização espacial. A maior dificuldade (7 entre 19 alunos) foi incluir, na construção da tabela, a linha com a identificação das propriedades descritivas dos elementos do conjunto B. Todavia, a operação matemática realizada identificou os atributos e o resultado do problema.

Comparando o desempenho da classe, desde a avaliação diagnóstica até a última atividade, verificamos progresso nas coerências estabelecidas entre a representação de pares e linguagem matemática. Para isso, tomamos como referência as resoluções de problemas verbais (atividades 10 e 13) que foram de livre escolha e em que estiveram presentes 18 alunos. Obtivemos 12 coerências na atividade 10, e 11, na atividade 13. Nestas duas atividades, houve maior frequência no uso de representação do “diagrama de árvore”.

Concluimos que as atividades de formação dos pares, utilizando a tabela cartesiana e o gráfico de árvore, favoreceram o estabelecimento de conexões entre as operações espaciais e as operações matemáticas.

Analisando os procedimentos de solução utilizados desde a avaliação inicial e as atividades (1 a 4), constatamos a evolução dos conhecimentos. Consideramos que promover situações diversificadas de resolução de problema de $A \times B$ ajudou no desenvolvimento do raciocínio combinatório, pois as dificuldades apresentadas anteriormente não foram mais constatadas.

Ressalte-se também a preocupação, que tivemos, em fazer avaliações contínuas, entrevistas, discussões em sala, verificar as produções e entender as dificuldades dos alunos para preparar novas tarefas.

É interessante lembrar, Vergnaud (1987) considera que um dos principais desafios do ensino da matemática é promover, na sala de aula, uma melhor relação entre os conceitos matemáticos e a resolução de problemas, de modo a serem interessantes e compreensíveis para os alunos. A resolução de problemas deve ser considerada como “fonte e critério de conhecimento”: o conhecimento conceitual deve emergir da resolução de problemas. E isto significa escolher situações didáticas e debates adequados, justificações, representações e formulações, para ajudar os alunos a desenvolverem novos conceitos; também significa escolher uma série adequada de problemas, para avaliar os conhecimentos dos alunos, pois diferentes competências dependem de diferentes conhecimentos, explícitos ou implícitos.

Nesse sentido, é função do professor organizar as aprendizagens, assegurar e facilitar as conexões indispensáveis entre os alunos e os objetos do saber, facilitando a constituição dessas conexões, diminuindo o custo psicológico e cognitivo.

Não pretendemos esgotar o tema e nem indicar soluções para todas as dificuldades dos alunos. Mas esperamos que esta pesquisa contribua para a compreensão do processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo, e ofereça subsídios para a formação de professores.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRÉ, M.E.D.A. **Etnografia e o estudo da prática escolar cotidiana**. In: *Etnografia da prática escolar*. Campinas, SP: Papirus, 2000, p.35-49,

BAPTISTA, Maria A. **2.500 rostos famosos de Norman Messenger**. 1ª ed. São Paulo: Editora Manoeli Ltda, 1995.

BARRETO, Isva M.A. **Problemas verbais multiplicativos de quarta-proporcional: A diversidade de procedimentos de resolução**. São Paulo: PUC-SP. Dissertação de Mestrado. Orientador: Anna Franchi, 2001.

BATANERO, M^a C.; GODINO, Juan D.; PELAYO, Virginia N. **Razonamiento combinatorio**. 1996.

BEZERRA, Manoel J.; BEZERRA Roberto Z. **Aritmética**. Rio de Janeiro, FENAME, 1977, pp.57-59.

BOOTH, W.C. **Pesquisa, pesquisadores e leitores**. In: *A produção do texto científico: A arte da pesquisa*. São Paulo: Martins Fontes, 2000, p.1-83.

BRASIL, Secretaria de Ed.Fund. **Parâmetros curriculares nacionais (1ª a 4ª série): matemática**. Secretaria de Educação Fundamental, Brasília: MEC/SEF, 1997.

CAETANO, Simone S.D. **Introduzindo a estatística nas séries iniciais do ensino fundamental a partir de material manipulativo**. São Paulo: PUC-SP. Dissertação de Mestrado. Orientador: Sandra Magina, 2004.

CANOAS, Silvia S. **O campo conceitual multiplicativo na perspectiva do professor das séries iniciais (1ª a 4ª série)**. São Paulo: PUC-SP. Dissertação de Mestrado. Orientador: Sandra Magina, 1997.

CARRAHER, T.; CARRAHER D.; SCHLIEMANN A. **A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária**. In: *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo: Cortez Editora, 1988, pp.85-100.

CARVALHO, Dione L. **Multiplicação e Divisão: Aprendizagem de transformações multiplicativas da pré-escola à 6ª série do 1º grau**. Coleção Ensinando e Aprendendo. São Paulo: CLR Balieiro, 1986.

CHIZZOTTI, Antonio **Pesquisa em ciências humanas e sociais**. São Paulo: Cortes Editora, 1991.

CONFREY, Jere **Splitting and rate of change: A new approach to multiplication and exponential functions**. In: *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. Edited by Guershon Harel and Jere Confrey. III series. State University of New York Press, Albany, 1994, pp.291-330.

COSTA, Claudinei A. **As concepções dos professores de matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no ensino fundamental.** São Paulo: PUC-SP. Dissertação de Mestrado. Orientador: Cileda, 2003.

ESTEVES, Ines. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental.** São Paulo: PUC-SP. Dissertação de Mestrado. Orientador: Sandra M.P.Magina, 2001.

FERREIRA, Aurélio B.H. **Mini dicionário da língua portuguesa.** 5ª ed. Rio de Janeiro: Ed.Nova Fronteira, 2004.

FRANCHI, Anna. **Compreensão das situações multiplicativas elementares.** São Paulo: PUC-SP. Tese de Doutorado. PUC-SP, 1995.

_____. **A constituição de uma trajetória de investigação em sala de aula: múltiplos enfoques.** In: *Educação matemática pesquisa.* São Paulo, v.2, n.1, 2000, pp.19-69.

_____. **Considerações sobre a teoria dos campos conceituais.** In: *Educação Matemática - Uma Introdução.* Maçado, Silvia D. A. et al, 2 ed., São Paulo: EDUC, 2002, pp.155-196,

GÓMEZ, Carlos M. **Enseñanza de la multiplicacion y la division.** Madrid: Editorial Síntesis, 1991.

GOMIDE, Elza F.; ROCHA, Janice C. **Atividades de laboratório de matemática** (iniciado em 1997, concluído em 2000), Ensino fundamental – 5ª a 8ª séries, CAEM, IME-USP, sem data.

GREER. B. **Multiplication and division as models of situations.** In: *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* Edited by Douglas A.Growns. By national council of teachers of mathematics, USA, 1992.

KOCH, Nancy T.O. **O professor, os alunos e a formação das competências matemáticas: o caso das estruturas aditivas.** Curitiba: Universidade Federal do Paraná. Dissertação de Mestrado. Orientador: Maria Tereza C. Soares, 2002.

LAMON, S.J. **Ratio and proportion: cognitive foundations in unitizing and norming.** In: *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.* Edited by Guershon Harel and Jere Confrey. III series. State University of New York Press, Albany, 1994, pp.89-117.

LATOURET, B. **Abrindo a caixa-preta de pandora.** In: *A produção científica/O texto científico: Ciência em ação: Como seguir cientistas e engenheiros sociedade afora.* São Paulo: Editora UNESP, 2000, pp.11-104.

LAVILLE, Christian; DIONNE Jean. **A construção do saber.** Manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. Porto Alegre: Editora UFMG, Artmed, 1999.

LOPES, Wagner S. **A importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito função: uma proposta de ensino.** São Paulo: PUC-SP. Dissertação de Mestrado. Orientador: Anna Franchi, 2003.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativa.** São Paulo: EPU, 1986.

MAGINA, Sandra et al. **Repensando adição e subtração: contribuições da teoria dos campos conceituais.** 1 ed., São Paulo: PROEM, 2001.

MOREIRA, Marco A. **A Teoria dos campos conceituais de Vergnaud – O ensino de ciências e a pesquisa nesta área.** Disponível em www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n1/v7_n1_a1.html. Acesso em 04/12/2004.

NEHRING, C.M. **A multiplicação e seus registros de representação nas séries iniciais.** Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina. Dissertação de Mestrado. Orientador: Regina Flemming Damm, 1996.

NESHER, Pearla. **Multiplicative school word problems: theoretical approaches and empirical findings.** In: *Number concepts and operations in the middle grades.* NCTM, 1988.

NUNES, Terezinha & BRYANT Peter. **O progresso para a multiplicação e a divisão.** In: *Crianças fazendo matemática.* Porto Alegre: Editora Artes Médicas Sul Ltda, 1997, pp.141-167.

NUNES, Terezinha et al. **As estruturas multiplicativas: avaliando e promovendo o desenvolvimento dos conceitos de multiplicação e divisão em sala de aula.** In: *Introdução à educação matemática. Os números e as operações numéricas.* 1 ed., São Paulo, PROEM, 2002 , pp.77-110.

ROCHA, Janice R. **O ensino de análise combinatória: uma discussão sobre o uso do princípio multiplicativo na resolução de problemas.** São Paulo: Universidade de São Paulo - Faculdade de Educação. Dissertação de Mestrado. Orientador: Maria do Carmo S.Domite, 2002.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Experiências matemáticas: 5ª série, 2ª versão.** São Paulo: SE/CENP, 1998.

SCHWARTZ, Judah L. **Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations.** In: *Number concepts and operations in the middle grades.* NCTM, 1988, pp.41-52.

SILVA, Benedito A. da S. **Contrato didático.** In: *Educação Matemática - Uma Introdução.* Machado, Silvia D. A. et al, 2 ed., São Paulo: EDUC, 2002, pp.43-64.

SOARES, Maria T.C.; MORO, Maria L.F. **Raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental.** Disponível em <<http://fordis.ese.ips.pt/docs//siem/texto54.doc>>. Acesso em 18/04/2006.

SOARES, Fernanda de O.; FINI, Lucila D.T. **Problemas multiplicativos: a solução por meio de somas repetidas e produto cartesiano.** In: *Revista teoria e prática da educação*, Universidade Estadual de Maringá, v.7, n.2, pp.191-200, maio/agosto 2004.

VERGNAUD, Gerard. **Multiplicative structures.** In: *Acquisition of mathematics concepts and processes.* Edited by Richard Lesh and Marsha Landau. Academic Press, NY, 1983, pp.127-174.

_____. **Conceitos e esquemas numa teoria operatória da representação.** Artigo da Revista Psychologie Française, n° 30-3/4.(traduzido por A.Franchi e D.Luchesi), 1985, pp.245-252.

_____. **Problem solving and concept development in the learning of mathematics.** In: *E.A.R.L.I. Second Meeting.* Tübingen, Sept.1987, pp.1-15.

_____. **Multiplicative structures.** In: *Reseach agend for mathematics education – Number concepts and operation in the middle grades.* University of London Institute of Education Library, 1989, pp.141-161.

_____. **Teoria dos campos conceituais.** RDM 102/3, 1990, pp.133-170.

_____. **Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques.** In: *Revue Française de Pédagogie*, n° 96, 1991, pp.79-80.

_____. **L'enfant, la mathématique et la réalité. Problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.** 5^e édition. Paris : Peter Lang, 1994.

_____. **Multiplicative conceptual field : what and why?** In: *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.* Edited by Guershon Harel and Jere Confrey. III series. State University of New York Press, Albany, 1994, pp.41-59.

_____. **Homomorphismes réel-représentation et signifié-signifiant. Exemples en mathématiques.** In: *Didaskalia*, n° 5., 1994, pp.25-28..

_____. **A teoria dos campos conceituais.** In: BRUN, Jean. *Didáctica das matemáticas.* Lisboa: Instituto Piaget, Horizontes Pedagógicos, 1996, pp.155-191.

_____. **Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel,** sem data, pp.177-191.

_____. **Problemas aditivos y multiplicativos.** In: *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas.* Aulas de verano. Instituto Superior de Formación del profesorado. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, sem data.

ANEXO 1 - AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA E ATIVIDADES**Anexo 1-A**Avaliação Diagnóstica - Problemas cartesianos.

E.E. _____ Data: _____

Nome: _____ Série: _____

- 1) Uma fábrica de carros vai produzir automóveis de 5 modelos e 4 cores diferentes. Os modelos escolhidos foram: corsa, fiesta, gol, pálio e uno. As cores escolhidas foram: azul, branca, prata e verde. Quantos tipos diferentes de automóveis podem ser fabricados combinando estes modelos e estas cores?

Escreva como você encontrou a resposta e depois faça o cálculo.

- 2) Esta fábrica também vai fabricar outros automóveis combinando 6 modelos, 4 pinturas e 3 janelas. Os modelos escolhidos são: astra, brava, celta, focus, pólo e saveiro. As cores são: cinza, marrom, vermelha e preta. Os vidros das janelas são: transparente, verde e fumê. E agora, quantos tipos diferentes de automóveis podem ser fabricados?

Escreva como você encontrou a resposta e depois faça o cálculo.

- 3) Uma escola vai fazer um teatrinho e precisa de um menino e uma menina para formar um casal. Os meninos são 6: Alberto, Francisco, João, Mário, Pedro e Renato. As meninas são 5 : Graça, Joana, Maria, Sara e Vilma. A professora pode escolher Renato e Sara, Francisco e Graça ou outros casais. Quantos casais diferentes ela poderá formar?

Escreva como você encontrou a resposta e depois faça o cálculo.

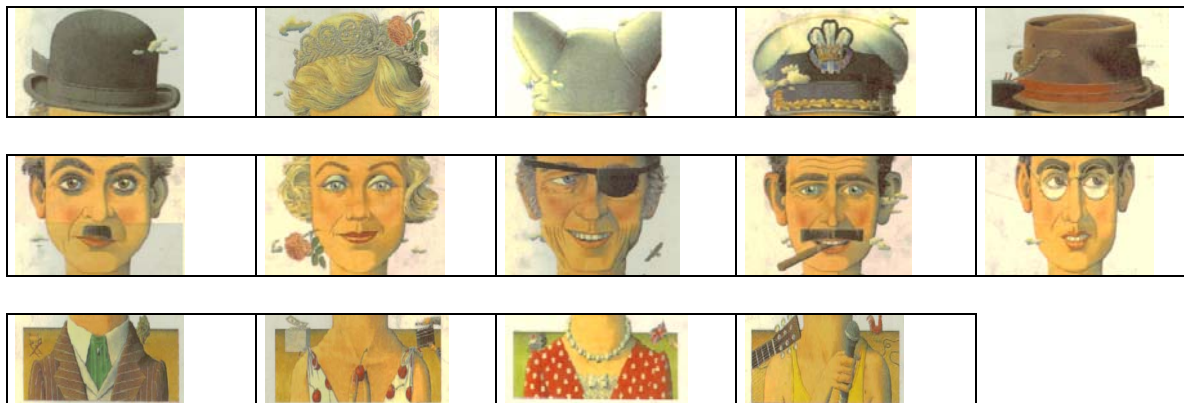
- 4) A professora de uma outra escola também vai fazer um grupo de teatro. 7 meninos e algumas meninas se candidataram para formar os casais possíveis. A professora sabe que é possível formar 28 casais diferentes escolhendo um menino e uma menina. Quantas são as meninas?

Escreva como você encontrou a resposta e depois faça o cálculo.

Anexo 1-B

Atividade 1 - Álbum: reconhecimento de material combinatório (5 modelos de chapéus, 5 rostos e 4 blusas).

Atividade 2 - Formação de pares e socialização (5 chapéus x 4 blusas).



Atividade 3 – Cumprimentos entre 4 meninos e 4 meninas.

Para as ações dos alunos, foi indicada, verbalmente, a seguinte situação:
“Imaginem que vocês estão se conhecendo agora. Os meninos vão cumprimentar as meninas dando as mãos para elas, mostrando todas as possibilidades de dar os cumprimentos”...

Anexo 1-CAtividade 4 – Problema verbal e material manipulativo.

E.E. _____ Data: ____ / ____ / 2005.

Nome(s): _____ Série: _____ Grupo: _____
_____Atividade 4.1 – Problema verbal (4 chapéu x 6 enfeites de pescoço).

O palhaço Alecrim vai se arrumar para um espetáculo.

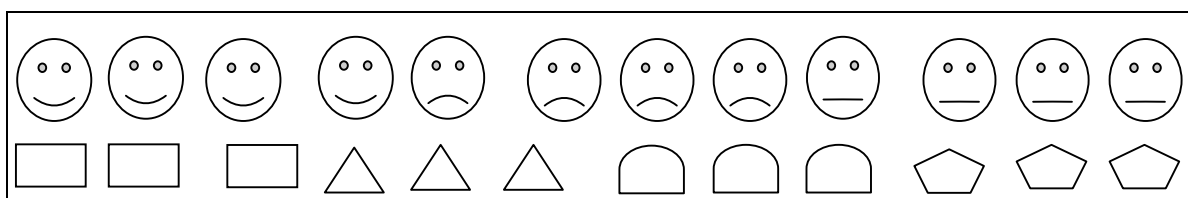
Ele pode combinar os 4 modelos de chapéus     com os6 modelos de enfeites para pescoço      

Quantos tipos de combinações diferentes o Alecrim pode fazer com estes modelos de chapéus e estes enfeites?

Escreva nesta folha todas as possibilidades que você encontrou e depois faça o cálculo.

Atividade 4.2 – Montagem de pares na carteira.

(3 carinhas x 4 chapéus) (12 carinhas: 4 alegres, 4 tristes e 4 normais com 12 chapéus: 3 quadrangulares, 3 triangulares, 3 circulares, 3 pentagonais).



Anexo 1-D

Atividades 5 e 5A

Formação de pares na placa: (5 blusas x 6 saias/calças) (30 peças de blusas: 6 de cada modelo com 30 peças de saias/calças: 5 de cada modelo).

Atividade 6 - Problemas verbais.

E.E. _____ Data: ____/____/2005.

Nome: _____ Série: _____

Atividade 6.1 – (7 blusas x 5 saias).

- 1) Imagine que uma de suas amigas tem 7 modelos de blusas e 5 modelos de saias e ela vai a uma festa.

Os modelos de blusas são:



Os modelos de saias são:



De quantas maneiras diferentes ela pode se vestir combinando os modelos de blusas com os modelos de saias?

Escreva como você encontrou a resposta e também faça o cálculo.

Atividade 6.2 - Compra de cabides para 8 blusas e 11 calças.

- 2) Joãozinho fez aniversário e ganhou 8 modelos de blusas e 11 modelos de calças. Ele quer guardar cada peça de roupa em cabide diferente, mas não tem os cabides. Quantos cabides Joãozinho tem que comprar?

Escreva como você encontrou a resposta e também faça o cálculo.

Anexo 1-E

Atividade 7 – Material manipulativo para tabela de dupla entrada.

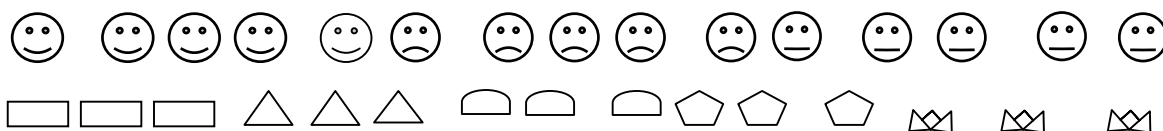
E.E. _____ Data: ____/____/2005.

Nome(s): _____ Série: _____

_____ Grupo: _____

Atividade 7.1 – Montagem livre na carteira e transportar para tabela.

3 carinhas x 5 chapéus (15 carinhas: 5 alegres, 5 tristes e 5 normais com 15 chapéus: 3 quadrados, 3 triângulos, 3 circulares, 3 pentagonais, 3 coroas); e



Montar o material para formar todas as possibilidades de combinações das carinhas com os chapéus; e transportar para esta tabela.

Escrever como você encontrou a resposta e depois faça o cálculo de duas maneiras diferentes para achar o total.

Anexo 1-F

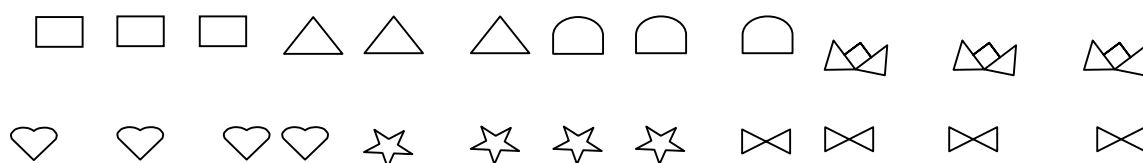
Atividade 7.2 - Montagem livre na carteira e transportar para tabela.

4 chapéus x 3 enfeites de pescoço (12 chapéus: 3 quadrados, 3 triângulos, 3 circulares, 3 coroas com 12 enfeites: 4 corações, 4 estrelas, 4 gravatas).

E.E. _____ Data: ____ / ____ / 2005.

Nome(s): _____ Série: _____

_____ Grupo: _____



Montar o material para formar todas as possibilidades de combinações dos chapéus com os enfeites de pescoço; e transportar para esta tabela.

Escrever como você encontrou a resposta e depois faça o cálculo de duas maneiras diferentes para achar o total.

Anexo 1-G

Atividade 8 - Problemas verbais (completar e construir tabela de dupla entrada).

E.E. _____ Data: ____/____/2005.

Nome(s): _____ Série: _____ Grupo: _____

_____ mantimento

Atividade 8.1 – (3 pratos x 4 misturas).

1) Suponha que sua escola vai ter como merenda arroz, macarronada, e polenta que podem ser combinados com carne, com frango, com salsicha ou com almôndega.

Quantos pratos diferentes podem ser preparados combinando ou o arroz, ou a macarronada ou a polenta com cada uma das misturas?

Verifique a tabela abaixo e complete com todas as possibilidades.

	Carne	Frango	Salsicha	Almôndega
Arroz				
Macarrão				
Polenta				

Responda:

- Quantas combinações podem ser feitas com o arroz?

- Quantas combinações podem ser feitas com o macarrão?

- Quantas combinações podem ser feitas com a polenta?

- Quantas combinações podem ser feitas ao total?

- Faça o cálculo de duas maneiras diferentes para achar o total.

Anexo 1-HAtividade 8.2 - (4 automóveis x 3 cores).

2) Imagine que você está em uma fábrica de carros e você vai ajudar a fabricar 4 modelos de automóveis combinados com 3 cores.

Os modelos escolhidos são: celta, corsa, gol e pálio.

As cores escolhidas são: azul, prata e verde.

Quantos tipos diferentes de automóveis podem ser fabricados combinando estes modelos com estas cores?

Na folha em anexo, construa uma tabela e preencha com todas as possibilidades.

Responda:

- Quantas combinações você pode fazer com o celta e todas as cores?

- Quantas combinações você pode fazer com o corsa e todas as cores?

- Quantas combinações você pode fazer com o gol e todas as cores?

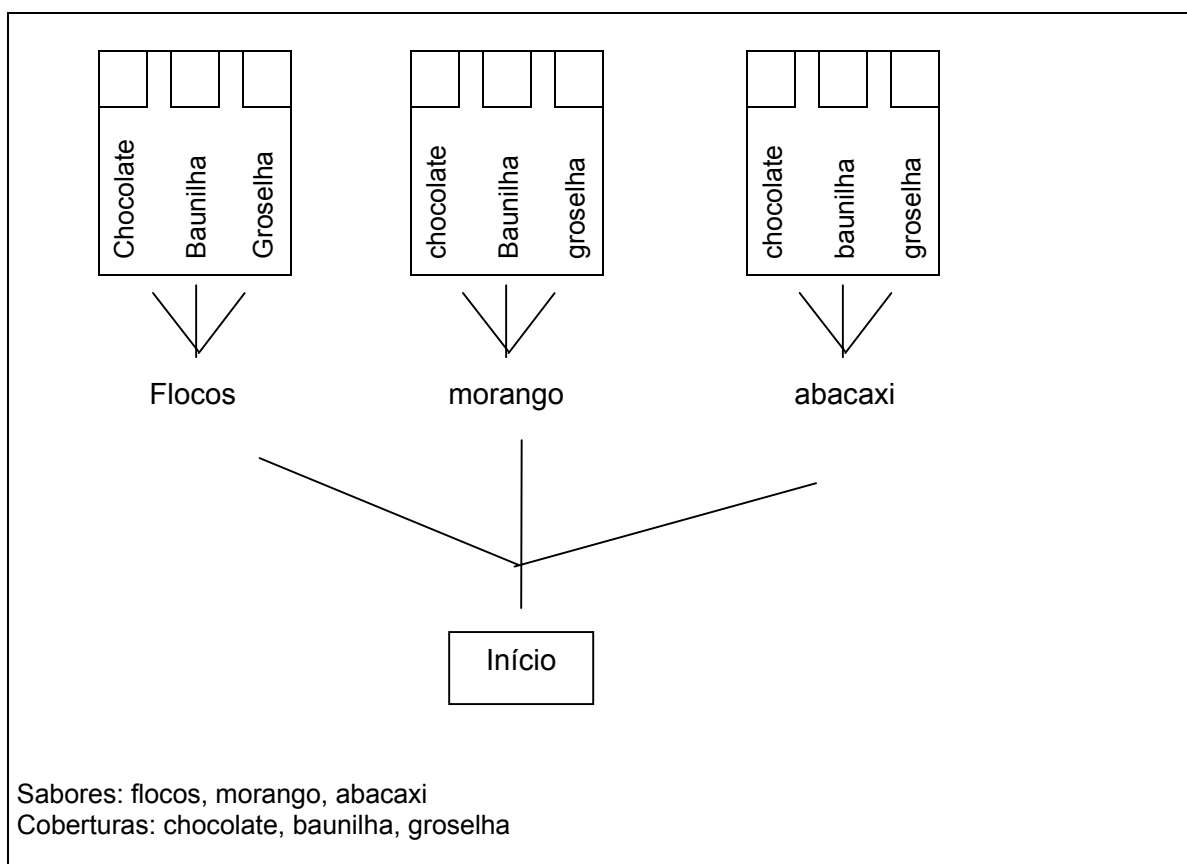
- Quantas combinações você pode fazer com o pálio e todas as cores?

- Quantas combinações podem ser feitas ao total?

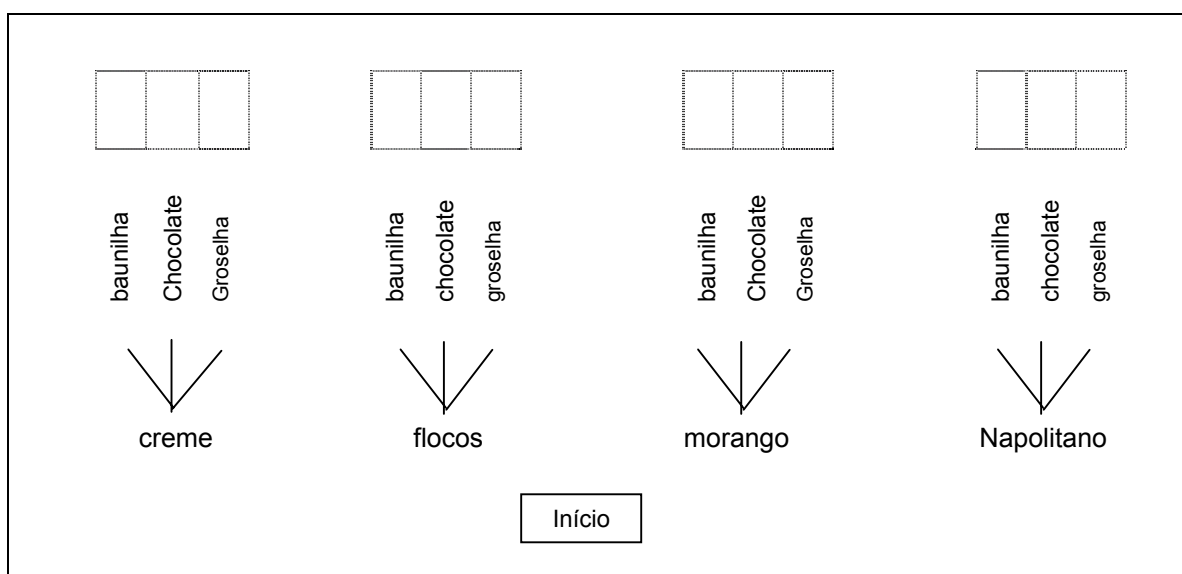
- Faça o cálculo de duas maneiras diferentes para achar o total.

Anexo 1-I

Atividade 9 – Introdução da árvore de possibilidade (3 sorvetes x 3 coberturas).



Atividade 9^A - Diagrama de árvore (4 sorvetes x 3 coberturas).



Anexo 1-J

Atividade 10 – Problemas verbais com soluções de livre escolha.

E.E. _____ Data: ____ / ____ / 2005.

Nome: _____ Série: _____

Atividade 10.1 – (3 pães x 4 frios).

- 1) O dono de uma lanchonete vai fazer uma promoção de sanduíches e quer informar a seus clientes sobre as diferentes possibilidades de escolha. Cada sanduíche será preparado somente com um tipo de frio. Os tipos de pães são: baguete, forma e francês. Os tipos de frios são: mortadela, presunto, queijo e salame. Ajude o dono a descobrir quais e quantos sanduíches poderão ser feitos com estes pães e estes recheios.

Resolva o problema da maneira como você quiser. Escreva como você encontrou a resposta e também faça o cálculo de duas maneiras diferentes para encontrar o total.

Atividade 10.2 – (6 camisetas x 3 bermudas).

- 2) Imagine que sua escola vai participar de um campeonato e que ela tem 6 modelos de camisetas e 3 modelos de bermudas. Se os alunos tiverem que usar em cada dia um conjunto diferente, quais e quantas combinações poderão ser feitas com cada camiseta e com todas as bermudas?

Resolva o problema da maneira como você quiser. Escreva como você encontrou a resposta e também faça o cálculo de duas maneiras diferentes para encontrar o total.

Anexo 1-KAtividade 10.3 - (4 automóveis x 5 cores).

3) Suponha que você vai a uma loja para comprar miniaturas de automóvel para um colega que vai fazer aniversário. A vendedora mostra 4 modelos e diz que tem cada um nas 5 cores (amarela, azul, marrom, preta e vermelha).

Quais e quantas possibilidades diferentes você tem para escolher o presente de seu amigo?

a) Construa uma tabela e preencha com todas as possibilidades.

b) Responda:

- Quantas combinações podem ser feitas com o primeiro modelo e todas as cores?

- Quantas combinações podem ser feitas com o segundo modelo e todas as cores?

- Quantas combinações podem ser feitas com o terceiro modelo e todas as cores?

- Quantas combinações podem ser feitas com o quarto modelo e todas as cores?

- Quantas possibilidades de escolhas podem ser feitas ao total?

- Faça o cálculo de duas maneiras diferentes para achar o total.

Anexo 1-L

Atividade 11 - Enigma combinatório: resolução de problemas.

E.E. _____ Data: ____/____/2005.

Nome(s): _____ série: _____ Grupo: _____

Enigma combinatório (Grupo x Grupo)

Instrução: Cada grupo receberá esta mesma folha. Um grupo escolherá dois dos problemas do enigma 1 e o outro grupo dois dos problemas do enigma 2.

Não fale e nem mostre ao outro grupo que problemas foram selecionados. Marque na folha de resposta qual é o enigma que o outro grupo vai decifrar. Decida em seu grupo qual problema será resolvido por meio de diagrama de árvore e qual será resolvido por meio de tabela. Quando tiver terminado, entregue somente as respostas ao outro grupo para ele descobrir quais problemas o seu grupo escolheu. Veja se ele acerta ou erra e responda as seguintes questões.

Marque o número do enigma do seu grupo para o outro grupo: _____

Quais problemas o seu grupo escolheu? _____

Quais são os resultados destes problemas? _____

Como você encontrou os resultados dos problemas? _____

O outro grupo acertou ou errou os problemas que foram escolhidos? _____

Como o seu grupo verificou que o outro grupo acertou ou errou? _____

(Enigma nº 1) - Do grupo _____ para o grupo _____:

- 1) Suponha que você vai dar uma festa de aniversário e quer saber quantas combinações diferentes podem ser feitas entre 5 salgadinhos e 3 bebidas.
Escolha 5 salgadinhos que você quiser.
As bebidas são: chá, refrigerante e suco.
As combinações devem ter um salgadinho e uma bebida.
Quantas combinações diferentes podem ser feitas com os salgadinhos e as bebidas?
- 2) Quantos trajes diferentes podem ser formados combinando 4 modelos de camisetas com 3 modelos de shorts?
- 3) Uma escola vai fazer a festa do sorvete e tem 7 sabores de sorvete e 4 de cobertura. Ela quer saber que combinações podem ser feitas com os sorvetes e coberturas. Cada sorvete deve ter somente uma cobertura. Quantas combinações diferentes a escola pode fazer?
- 4) Uma loja quer comprar 3 modelos de calçados em 6 cores diferentes. Quantos calçados podem ser comprados combinando cada modelo com todas as cores?

(Enigma nº 2) - Do grupo _____ para o grupo _____:

- 1) Uma loja quer comprar 4 modelos de calçados em 7 cores diferentes. Quantos calçados podem ser comprados combinando cada modelo com todas as cores?
- 2) Suponha que você vai a uma lanchonete e quer saber quantos sucos diferentes podem ser feitos entre 3 tipos de líquidos e 4 frutas.
Os líquidos são: água, chá e leite.
Escolha 4 frutas que você quiser.
Os sucos devem ter um líquido e uma fruta.
Quantos sucos diferentes podem ser feitos combinando cada líquido com todas as frutas?

Anexo 1-M

- 3) Quantos uniformes diferentes podem ser formados combinando 5 modelos de camisetas com 3 modelos de shorts?
- 4) Uma escola vai fazer a festa do sorvete e tem 6 sabores de sorvete e 4 de cobertura. Ela quer saber que combinações podem ser feitas com os sorvetes e coberturas. Cada sorvete deve ter somente uma cobertura. Quantas combinações diferentes a escola pode fazer?

E.E. _____ Data: ____/____/2005.

Nome(s): _____ série: _____ Grupo: _____

Respostas do Enigma nº _____ Do grupo _____ para o grupo _____

Deixe esta parte para o grupo que recebeu as respostas verificar a quais problemas o diagrama de árvore e a tabela se referem:

Quais problemas o outro grupo escolheu? _____

Todas as possibilidades de combinações feitas pelo outro grupo estão certas? _____

Que resultados o outro grupo encontrou? _____

Os resultados estão certos ou errados? _____

Como você sabe se os resultados estão certos ou errados? _____

Anexo 1-N

Atividade 12 - Problemas: diagrama de árvore para tabela de dupla entrada e vice-versa, e de livre escolha.

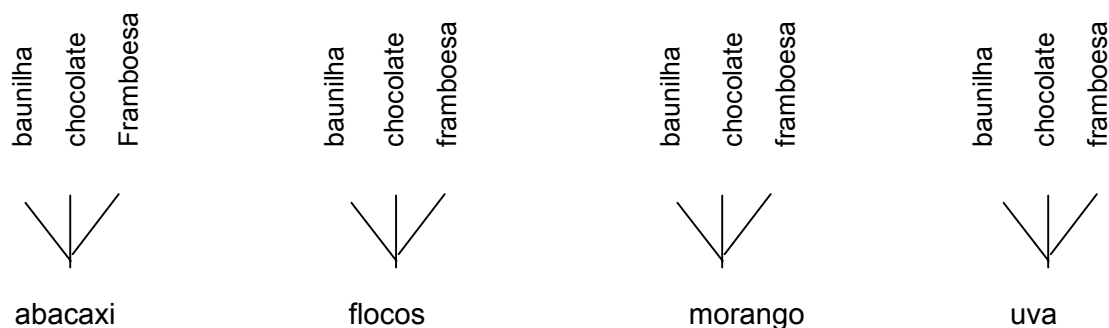
E.E. _____ Data: ___/___/2005.

Nome: _____ Série: _____

Atividade 12.1 - Diagrama de árvore para tabela (4 sorvetes x 3 coberturas).

1) Veja o diagrama de árvore abaixo.

Suponha que seu amigo pediu sua ajuda porque ele queria saber como combinar estes sorvetes com estas coberturas. Para ajudar seu amigo a resolver o problema, você fez esse diagrama de árvore.



Agora você vai resolver esse mesmo problema por meio de uma tabela.

Qual é a resposta desse problema? Escreva na sua folha.

Também responda:

c) Quantos sabores de sorvetes têm para combinar com as coberturas? _____

d) Quantas coberturas têm para combinar com os sorvetes? _____

e) Quantas combinações podem ser feitas com ___ sabores de sorvetes e ___ coberturas?

Anexo 1-O**Atividade 12.2** - Tabela para diagrama de árvore (6 verduras x 5 legumes).

2) Veja a tabela abaixo.

Antonio resolveu um problema que a professora deu em classe e fez essa tabela. Depois combinou os legumes com as verduras para fazer as saladas.

	beterraba	cenoura	ervilha	palmito	tomate
alface					
almeirão					
brócolis					
couve					
repolho					
rúcula					

Agora você vai resolver esse mesmo problema por meio de diagrama de árvore.

Qual é a resposta desse problema? Escreva na sua folha.

Também responda:

c) Quantos legumes têm para combinar com as verduras? _____

d) Quantas verduras têm para combinar com os legumes? _____

e) Quantas saladas podem ser feitas com _____ legumes e _____ verduras?

Atividade 12.3 - (7 automóveis x 6 cores).

3) Em uma agência vai chegar sete modelos de automóveis nas cores amarela, azul, cinza, marrom, preta e vermelha. Quantos automóveis a agência vai receber combinando cada modelo com todas as cores?

Resolva este problema da maneira como você quiser. Escreva como você encontrou a resposta e registre neste papel o cálculo que você fez.

Anexo 1-P

Atividade 13 - Problemas verbais para soluções de livre escolha.

E.E. _____ Data: ____/____/2005.

Nome: _____ Série: _____

Atividade 13.1 - (9 pacotes com 24 figurinhas em cada).

- 1) Marcos comprou 9 pacotes de figurinhas. Em um pacote tem 24 figurinhas. Quantas figurinhas Marcos comprou?

Escreva como você encontrou a resposta e registre neste papel o cálculo que você fez.

Atividade 13.2 - (4 meninos x 6 meninas).

- 2) A professora de uma escola vai fazer um teatrinho e precisa de um menino e uma menina para formar um casal. Na escola tem 4 meninos e 6 meninas que querem participar do teatrinho. Quantos casais diferentes podem ser formados?

Resolva este problema da maneira como você quiser. Escreva como você encontrou a resposta e registre neste papel o cálculo que você fez.

Atividade 13.3 - (8 fileiras de poltrona com 17 em cada).

- 3) Num cinema tem 8 fileiras de poltronas. Em cada fileira tem 17 poltronas alinhadas. Quantas poltronas há no cinema?

Escreva como você encontrou a resposta e registre neste papel o cálculo que você fez.

Atividade 13.4 - (7 camisetas x 3 calças).

- 4) Em uma loja tem 7 modelos de camiseta e 3 modelos de calças. Quantas combinações podem ser feitas com as camisetas e as calças?

Resolva este problema da maneira como você quiser. Escreva como você encontrou a resposta e registre neste papel o cálculo que você fez.

ANEXO 2 - DISCUSSÕES INDIVIDUAIS OU COLETIVAS EM SALA

Anexo 2-A

Atividade 1 (1º encontro)

Álbum: reconhecimento de material combinatório (5 modelos de chapéus, 5 rostos e 4 blusas).

Dupla B:

- P: O que vocês verificaram?
 B1: Que tem pessoas antigas e roupas também. As pessoas hoje não se vestem assim.
 P: O que mais você verificou?
 B1: Tem bastantes características.
 P: Quais?
 B1: Chapéu, rosto, roupa.
 B2: Eu entendi que tem roupas muito diferentes, rostos diferentes e chapéus diferentes.

Dupla J:

- P: E vocês, o que verificaram?
 F: (manuseando as partes do álbum): Aqui eu vejo uma mulher famosa com chapéu de pirata e terno de homem. A outra combinação é um homem com chapéu de marinheiro e roupa de mulher e o outro personagem é um homem fumando charuto e com cabelo de homem e um longo vestido de mulher famosa.

Atividade 2 (2º encontro)

Álbum: formação de pares e socialização (5 chapéus x 4 blusas).

1ª solução (And, Kay).

Antes de entregar a resposta definitiva, esta dupla havia considerado primeiro apenas algumas combinações no total de 11, que foram feitas somente com alguns adornos de cabeça (3 com coroa, 4 com marinheiro e 4 com cartola). Quando estava circulando pelas carteiras, a aluna(K) falou para mim:

- Kay: Eu encontrei 11, contando. Que conta eu faço?
 P: Então, é isto que queremos saber. Como você fez para encontrar 11?
 Kay: (silêncio).

Porém, após algum tempo, quando uma aluna de uma dupla disse que achou 20, a aluna(Kay) me informou que tinha feito errado e pediu outra folha. Falei que podia usar o verso da folha, onde ela fez o registro da outra resposta.

2ª solução (And, Kay).

Comuniquei a esta e as demais duplas para usarem o albinho para explicarem como encontraram todas as possibilidades de combinações dos chapéus com as blusas.

- Kay: Eu peguei o chapéu e fui combinando cada roupa com... o chapéu com várias roupas... e aí eu mudei o chapéu e fui combinando.
 P: Então, e aí você pegou como? O chapéu primeiro...
 K: Peguei primeiro o chapéu e fui passando, primeiro o paletó, a regata primeiro e a regata e..., peguei com o corpinho e a regata amarela aí eu fui mudando o chapéu junto com a coroa...
 P: E a coroa você fez como?
 Kay: A coroa, a mesma coisa...
 P: Como é que você fez a primeira combinação; coroa com que?
 Kay: Coroa com a regata... Oh... com o paletó..

Anexo 2-B

- P: E depois?
- Kay: Depois, coroa com regata branca e cereja... (depois a aluna somente foi manuseando os outros chapéus com as blusas, sem dizer nada).
- P: Tudo bem. Então, você foi pegando cada chapéu... Quanto que deu no total, todas as possibilidades de combinações?
- Kay: 20.
- P: E como você chegou no 20?
- Kay: 5 x 4.
- P: Por que deu 5 x 4? Você lembra?
- Kay: Eu contei; por causa que aqui eu contei.. que eu vi que dá combinação.. dá 5.... dá 4 e 4.... 4 é a quantidade de chapéu...
- P: Quantos chapéus tinham?
- Kay: Chapéu... 5.. 2...
- P: Chapéu.. 2?
- Kay: 5...
- P: Conta direitinho.
- Kay: 1, 2, 3, 4.
- P: Tem 4 chapéus? Tudo o que pode por na cabeça, deu quanto no total? Conta de novo.
- Kay: ... 3, 4, 5 (os dois primeiros, a aluna não falou; somente manuseou, contando implicitamente).
- P: Deu 5.
- Kay: Então, eu fui pondo aqui, o chapéu... e aí coroa.... armadura... o chapéu marinheiro... o chapéu.... e vai mudando... (a aluna somente foi mudando rapidamente as blusas no último chapéu).

(Adr, Let).

- P: Quantas possibilidades deram, combinando os chapéus com todas as blusas? Como você chegou no resultado?
- Adr: Eu fui combinando.
- P: E como você combinou?
- Adr: Fui contando pra ficar... a 1ª combinação eu fiz a cartola com o terno... com o paletó... Depois, eu fiz a cartola com o vestido... E assim por diante... e depois....
- P: Tá. Só foi com a cartola que você fez as combinações?
- Adr: Não, eu fiz todas.
- P: E qual foi a outra.
- Adr: Qual? Foi a cartola com vestido branco... (pausa)
- P: E?
- Adr: E, a cartola com a regata...
- P: Tá, a cartola você fez todas né? Só com a cartola que você combinou? Ou você fez com outros chapéus? (com outros objetos de cabeça).
- Adr: Com a coroa também...
- P: A coroa você combinou com quê?
- Adr: Com o terno... (silêncio)
- P: Com o terno e com que mais?
- Adr: Com a cereja e as outras...
- P: Você fez outros tipos de combinações com chapéu e blusa? Você pegou outro chapéu?
- Adr: Foi... É... foi a armadura... (a aluna fixou este chapéu e mexeu rapidamente as blusas).
- P: E quanto deu no total as suas combinações?
- Adr: 20.
- P: 20, tá. Por que você achou que deu 20?
- Adr: Porque eu fui contando. Porque como tinha 5 modelos, deu 20.
- P: Tinha 5 modelos de quê?
- Adr: de chapéu... (a aluna ficou quieta)
- P: 5 modelos de chapéus e..
- Adr: É...
- P: E quantos de blusa?
- Adr: 4...

Anexo 2-C

- P: (esperava que a aluna explicitasse seu registro; como ficou quieta então intervi e disse, baseando-me no cálculo que havia indicado em sua folha de resposta): Por que deu 5×4 ?
- Adr: 5...
- P: Você pegou, cada chapéu com o quê?
- Adr: Cada chapéu com... eu contei.
- P: Você contou? Aqui você fez uma conta de multiplicação, 5×4 .
- Adr: É... (silêncio)

Esta dupla havia explicado sua resposta para mim, anteriormente, conforme seu registro.

- Adr: Eu contei 4 em 4 cada um e como tinha 5 somei $5 \times 4 = 20$. Peguei 5 chapéus com 4 e contei de 4 em 4 e 5×4 deu 20.

Porém, fiquei ansiosa para saber por que não fizeram na socialização. Falei então, em seguida, com a dupla (individualmente) para verificar sua ação.

- P: Você lembra por que aqui você escreveu que contou 4 em 4 cada; o que você considerou como sendo 4?
- Adr: Que tem 4 em cada (a aluna foi indicando com os dedos, as 4 combinações feitas com cada tipo de chapéu).
- P: Mas, o que é que tem 4?
- Adr: As blusas.
- P: E por que deu 20?
- Adr: Porque tem 4 blusas em cada; e como tem 5 chapéus; eu fiz 5×4 .

(Fla, Thau).

- P: Se você quiser ler sua resposta mostrando o albinho.
- Thau: Eu não mexi na carinha. Eu achei todas estas (e foi fazendo algumas combinações no álbum desordenadamente). Uma hora eu fiz a cartola com o paletó e também inverti o paletó com a cartola e para os outros também.
- P: E por que deu 50?
- Thau: Eu contei.
- P: Como?
- Thau: (foi mostrando palavra por palavra de cada combinação; a aluna contava e considerava 1 combinação (1 chapéu com 1 blusa) como sendo 2 combinações. Como em seu registro haviam 25 quadrinhos e em cada quadrinho uma combinação, com dois atributos, ela falou): Tem 2 aqui, 2 aqui, ... e tem 25 quadrados; então eu fiz $25 \times 2 = 50$.

(Riv, Thi).

- P: Eles vão explicar o que fizeram.
- Riv: O rosto escolhido... que nós escolhemos foi este daqui né e nós começamos com este chapéu né, de marinheiro com este terno; a 2ª que nós escolhemos foi é... a mulher com a cartola né e com o vestido longo; a 3ª foi a armadura com o vestido de cereja; e a outra que nós escolhemos é este chapéu marrom com a blusa de cantor.
- P: Quanto deu no total?
- Riv: Ainda falta uma. E a última que nós escolhemos foi esta cartola com este terno e gravata
- P: Quantas combinações deram no total.
- Riv: É.. nós né... deu 20; deu 20...; mas nós escolhemos as blusas que nós gostamos (em seu registro, fizeram 5 combinações).
- P: Ah.. tá.. mas você achou que deu 20.. e por que deu 20 então?
- Riv: Porque a gente pôs 5 chapéus e 4 blusas.
- P: E aí para chegar no 20, você fez o quê?
- Riv: É... 5×4 .

Antes de fazer a socialização, o aluno "Riv", veio me falar que sabia que tinha 20 combinações, mas que eles escolheram as que mais gostaram. Perguntei por que tinha 20 e ele disse que era porque tinha 5 chapéu e 4 blusas.

Anexo 2-D

Atividades 5 e 5^A (5^o e 5^o encontros)

Formação de pares na placa: 5 blusas x 6 saias/calças (30 peças de blusas: 6 de cada modelo com 30 peças de saias/calças: 5 de cada modelo).

Atividade 5:

- P: Quantas combinações diferentes foram formadas com as blusas e calças/saias?
 A: 30.
 P: Por quê?
 A: Porque é 5×6 .
 P: Por que é 5×6 ?
 A: Porque tem 5 blusas e 6 calças/saias.
 P: A gente pode fazer outro cálculo?
 A: (pausa).
 P: Quantas combinações têm aqui? (indiquei os conjuntos da 1^a linha)
 A: 6.
 P: E aqui? (indicação dos conjuntos da 2^a linha e as outras até a 5^a linha).
 A: 6, 6...
 P: $6 + \dots$ (indiquei a 1^a linha; depois a 2^a e assim sucessivamente até a 5^a)
 A: $6 + 6 + 6 + 6 + 6$
 P: Que dá quanto?
 A: 30.
 P: Então, que continha foi feita?
 A: De mais.
 P: Quantos 6 tem?
 A: 5
 P: Que é igual a?
 A: 5×6 .

Atividade 5A:

- P: As meninas e os meninos vão jogar. O que pode ocorrer?
 A: Ganhar, perder, ganhar. (ao mesmo tempo registrei as palavras na lousa).
 P: O que poder acontecer com as meninas?
 A: Ganhar, perder, empatar. (alguns respondiam).
 P: E com os meninos?
 A: Ganhar, perder, empatar.
 P: Quantas possibilidades de ocorrência nós temos no total?
 A: 6.
 P: Por que 6?
 A: Porque é 2×3 .
 P: Quantas possibilidades para as meninas?
 A: 3
 P: E para os meninos?
 A: 3
 P: Quantas possibilidades nós temos no total?
 A: 6.

Atividade 9 (10º encontro)

Introdução da árvore de possibilidade (3 sorvetes x 3 coberturas).

Em termos gerais, durante a realização do registro dos alunos, foram verificadas as seguintes ocorrências:

- Alguns alunos tiveram dificuldade em fazer a representação da árvore de possibilidade.
- Outros consideraram as mesmas combinações que haviam realizado no chão, apagando e refazendo as combinações com os elementos corretos.
- Alguns demoraram em fazer a generalização, pois registraram a resposta do problema anterior; ou seja, ainda continuaram a fazer combinações com 3 sabores de sorvetes e 3 coberturas.
- A aluna “Ste” questionou-me se podia fazer as contas. Então, aproveitei e comuniquei aos demais alunos, solicitando que também fizessem o cálculo.
- Todos os alunos, com exceção do “Yg” e da “Ing”, apresentaram o registro matemático por meio de multiplicação e também por adição. Mas quando se tratava da multiplicação, embora tenham registrado e considerado que cada sorvete pode combinar com 3 coberturas, alguns indicaram 3×4 , em vez de 4×3 .
- O aluno “Yg”, embora tenha participado de quase todos os encontros anteriores, foi o que mais demonstrou dificuldade no registro desta tarefa. Demorou muito para iniciar. Ao passar pelas carteiras, verifiquei que não havia feito o registro; então solicitei que iniciasse as combinações. Questionou-me se era para fazer igual ao que estava no painel. Relembrei-o que deveria resolver a tarefa usando outras quantidades. A princípio, ele fez sua árvore somente com os sabores a esquerda e as coberturas a direita; sem nenhuma combinação.

Percebendo que o aluno não havia ainda desenvolvido o raciocínio combinatório, fiz algumas questões para levá-lo à construção das combinações anteriores, com o intuito de auxiliá-lo no desenvolvimento da outra atividade. Em seguida, já apresentou o raciocínio combinatório construindo a árvore, sendo que seu registro matemático foi somente por meio de adição de parcelas repetidas.

Atividade 11 (13º encontro)

Enigma Combinatório: resolução de problemas verbais.

(Adr, Let) x (Fla, Thau):

P: Agora vocês vão trocar as respostas para o outro grupo descobrir que problemas vocês resolveram; vocês vão dar suas respostas para elas e elas vão dar as respostas delas para vocês. Vocês vão olhar as respostas e ver no enigma delas quais os problemas que elas resolveram (neste momento a aluna “L” olhou a resposta e leu rapidamente alguns problemas e deu sua resposta).

Let: É o 1.

P: Como você sabe que é o problema 1?

Let: Porque tem 5 salgadinhos e 3 bebidas (mostrando as classificações no diagrama de árvore).

P: Quantas combinações foram feitas?

Let: 15.

P: Ela acertou? (perguntei a aluna “Thau” que havia escolhido o problema).

Thau: Acertou.

P: Agora (falei para a aluna “Let”), vocês vão responder algumas perguntas deste problema (mostrei e li com a aluna as perguntas abaixo da resposta, uma a uma; e a aluna foi falando a resposta e registrando a mesma).

Let: Quais problemas o outro grupo escolheu? 1

Todas as possibilidades de combinações feitas pelo outro grupo estão certas? Sim
Que resultados o outro grupo encontrou? 5×3 e $3+3+3+3+3$

Anexo 2-F

Os resultados estão certos ou errados? certos
 Como você sabe se os resultados estão certos ou errados? Porque ela não misturou as coisas; os salgados com as bebidas.

- P: Agora, você responde qual o problema que ela escolheu (falei com aluna "Thau")
 Thau: O 2.
 P: Como você sabe que é o problema 2?
 Thau: Porque aqui tem água, chá, leite e 4 frutas (mostrando as classificações na tabela das bebidas e das frutas).
 P: Ela acertou ou errou? (perguntei a aluna "Let" que havia escolhido o problema).
 Let: Acertou.
 P: Quantas combinações podem ser feitas?
 Thau: 12.
 P: Agora (para a aluna "Thau"), vocês vão responder as perguntas deste problema (mostrei e li com a aluna as perguntas, uma a uma; e a aluna foi falando a resposta e registrando a mesma).
 Tha: Quais problemas o outro grupo escolheu? 2
 Todas as possibilidades de combinações feitas pelo outro grupo estão certas? sim
 Que resultados o outro grupo encontrou? 12
 Os resultados estão certos ou errados? certos
 Como você sabe se os resultados estão certos ou errados? Porque eu fiz a conta
- P: Qual o problema que ela escolheu?
 Adr: O 2.
 P: Como você sabe?
 Adr: Porque aqui tem frutas e água, chá, leite (mostrando as classificações no diagrama de árvore).
 P: Ela acertou ou errou? (perguntei a aluna "Fla" que havia escolhido o problema).
 Let: Acertou.
 P: Quantas combinações podem ser feitas?
 Adr: Ela errou.
 P: Por que?
 Adr: Acertou aqui encima, mas errou a conta.
 P: Por que?
 Adr: Porque tem 12, e ela achou 24.
 P: Como você achou 24? (perguntei a aluna "Fla").
 Fla: Foi ela que disse que era 24 (mostrando para a aluna "Thau").
 P: Ela quem?
 Thau: Eu não. Eu falei que era 24, porque você perguntou quanto era 6×4 .
 P: Vamos ver quantas combinações deram (mostrando para o diagrama). Qual é a combinação com o morango?
 Fla: Morango com água; morango com chá; morango com leite.
 P: Quantas combinações são com morango?
 Fla: 3.
 P: Quantas você tem aqui? E aqui? E aqui? E no total?
 Fla: 3, 3, 3; 12.
 P: Tá bom. Agora (para a aluna "Adr"), vocês vão responder as perguntas deste problema (mostrei e li com a aluna as perguntas abaixo da resposta, uma a uma; e a aluna foi falando a resposta e registrando a mesma).
 Adr: Quais problemas o outro grupo escolheu? 2
 Todas as possibilidades de combinações feitas pelo outro grupo estão certas? não
 Que resultados o outro grupo encontrou? 24
 Os resultados estão certos ou errados? errado
 Como você sabe se os resultados estão certos ou errados? Porque é 12 o certo; porque a conta deveria ser $4 \times 3 = 12$.

A aluna "Fla" resolveu o problema 2 por meio de diagrama; mas percebemos que os valores referem-se as informações do problema 4.

ANEXO 3 - TRANSCRIÇÕES DE ENTREVISTAS INDIVIDUAIS OU EM DUPLA

Anexo 3-A

Atividade 4.1 (4^o encontro)

Problema verbal: (4 chapéus x 6 enfeites de pescoço).

(Thi e Riv):

- P: Vocês lembram deste problema?
 Riv: Lembro.
 P: Como vocês resolveram para chegar na solução?
 Riv: Ah... nós pegamos.. é.. os chapéus de cada tipo, né.. e fomos colocando com os enfeites de pescoço. No finalzinho, nós repetimos 2 chapéus.
 P: Tá. Por que vocês repetiram 2 chapéus? Se tinham 4 aqui?
 Riv: Porque... é... pra dar todos os enfeites do pescoço
 P: Ah.. para combinar igual?
 Riv: É.
 P: E quantas combinações, vocês acharam no final? Quantas maneiras diferentes o palhacinho podia se vestir no total?
 Riv: Com os 2 chapéus repetidos, nós achamos 6; 6 de cada.
 P: 6 de cada?
 Riv: É... chapéus.
 P: Combinando com que?
 Riv: Com um enfeite.
 P: Mas, e o total? Esta conta aqui (mostrei 6 x 6 que haviam feito); como é que vocês fizeram esta conta, que deu 6 x 6?
 Riv: Nós pegamos todos os chapéus e todos os enfeites do pescoço.
 P: Tá. Mas vocês fizeram que conta aqui?
 Riv: É.. 6 dos chapéus e 6 dos enfeites. Aí, deu 6 x 6.
 P: Deu 36 na sua conta?
 Riv: Hum, hummm...
 P: Tá. Mas, aí você não sabe por que você fez de vezes. Por que você acha que é de vezes?
 Riv: Ah... porque.. é... porque.. nós não pensamos assim na hora de colocar o vezes.; nós já colocamos e fizemos a conta.
 P: Tá, mas você não pensou assim como? Que conta fazer?
 Riv: Não. Eu e ele já colocamos vezes.
 P: Mas não sabe por que? Assim, explicar por que?
 Riv (silêncio)

Atividade 10.1 (12^o encontro)

Problema verbal: (3 pães x 4 frios).

(Ing):

- P: Você lembra deste 1^o problema? Se você quiser ler. (aluna resolveu por diagrama de árvore).
 Ing: Humm.. humm.. É.. para eu falar assim...
 P: O que tinha no problema para você resolver?
 Ing: É.. 3.. É 3.. como é que fala? 3 tipos de pães e 4 tipos de frios.
 P: Certo.
 Ing: Eu peguei assim, 1 baguete. Como que só pode fazer com 1.. com 1... 1...
 P: 1 frio.
 Ing: É.. 1 frio. Eu peguei... pus o baguete com a mortadela; e aí depois eu pus com presunto; depois com queijo; depois com salame. E aí depois, com o pão de forma, né.. eu pus com a mortadela também; com presunto; com queijo e com salame também; fiz as mesmas combinações.

Anexo 3-B

- P: Tá.
- Ing: É, o pão francês.. eu peguei pus a mortadela; pus o presunto, pus o queijo; pus o salame.
- P: Tudo bem. E quantas combinações diferentes você conseguiu fazer com os pães e os frios?
- Ing: (pausa).
- P: Quantos lanches diferentes você conseguiu fazer?... Você poderia comer?
- Ing: 12.
- P: Tá. E aqui (indiquei a cálculo) $\begin{array}{r} 3 \\ \times 4 \\ \hline 12 \end{array}$. Como é que você lê esta conta de multiplicação? (no dia da aplicação na sala, eu também havia perguntado para a aluna sobre a leitura deste cálculo; sendo que ela respondeu: "tanto faz porque vai dar 12; a conta certa seria 4 x 3, mas lê 3 x 4").
- Ing: É 3 x 4, porque aqui eu tenho 3 e aqui eu tenho 4 (a aluna indicou com as mãos, nas combinações feitas no diagrama de árvore: cada tipo de pão e depois os 4 tipos de frios de cada agrupamento de combinações; ou seja, considerou 1 tipo de pão com 4 tipos de frios (3 vezes)).
- P: Tá. (a aluna também havia indicado o cálculo como $\begin{array}{r} 4 \\ + 4 \\ \hline 12 \end{array}$ e sem ser questionada sobre este, justifica):
- Ing: Ou então, 4 + 4 + 4 que deu 12
- P: Tudo bem. Então você lê 3 x 4? E para cada pão? Quantos sanduíches você consegue fazer com cada pão?
- Ing: 4
- (And):**
- P: Como você resolveu este problema 1? (aluno resolveu por diagrama de árvore).
- An: É que eu peguei 6 coisas aqui, as 3 possibilidade de encontrar 4 formas de encontrar estes negócios
- P: Hum, hum..
- An: Aí, eu fiz baguete com mortadela, aí fiz presunto e baguete, baguete e queijo; e baguete e salame. Aí, depois eu peguei a outra possibilidade que era forma e fiz a mesma coisa do que eu fiz;...
- P: Ah, entendi.
- An: Depois...
- P: Pode continuar.
- And: (pausa)
- P: Você pegou o francês também?
- And: Depois eu fiz francês com mortadela, e francês com presunto, e francês com queijo e francês com salame; fiz a mesma coisa.
- P: Tudo bem... e quantas possibilidades diferentes você tem?
- And: 16.
- P: Vamos ver por que deu 16. Por que deu 16, aí?
- And: Porque tem 3 possibilidades 3.... de fazer o negocinho aqui. Aí, 3 x 4 é 16
- P: 3 x 4 dá 16?
- And: Hum, humm...
- P: Tá. E você viu onde que deu esta continha aqui. Você pegou onde pra dar 16.
- And: Eu fiz de cabeça.
- P: Como você fez pra dar 16? Vamos ver?
- And: Aqui eu fiz assim olha; 4 x 3, daí eu fiz assim olha; 3 x 4 é a mesma coisa que 4 x 3; ai eu peguei o 3 e fiz 3 x 4; daí dá 3, 6, 9,... (continua a conta nos dedos); aí 12 e depois 16. (Cálculo do aluno $\begin{array}{r} 3 \\ \times 4 \\ \hline 16 \end{array}$)
- P: Tá; e aqui nesta outra continha o que você fez, para dar 16 também? Vamos ver.
- And: É coloquei 4 e depois fui pondo o 3 pra... daqui olha, eu pus 4 depois pus 3; só 3 pra dar

Anexo 3-C

- $$\begin{array}{r} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ \hline 16 \end{array}$$
- a continha exata. (Cálculo do aluno $\frac{3}{3}$)
- P: Tá. Aqui então, você pegou 4, que era?
- And: É, os.. os... o recheio
- P: E o 3 aqui?
- And: Que era.. é .. é... o baguete, o da forma e do francês
- P: E esse 3? De onde que seria? Vamos ver se eu entendo. É uma quantidade do que?
- And: De (um longo silêncio).... De...
- P: Então, por que aqui deu 16?
- And: É...
- P: Você fez o que? Deixa eu entender.
- And: É que eu fiz a mesma coisa que eu tava falando, que eu peguei 4, é.... é o recheio com 3; eu fui pondo; é aqui olha; os 3; eu fui pondo até dar 16.
- P: Hum, tá. Foi pra dar 16?
- And: É.
- P: O que eu não entendi direito é isto. Deixa eu te falar o que é. O quatro, pelo que eu entendi, são os recheios.
- And: É
- P: Tá. O 3, pelo que eu entendi são...
- And: Pães
- P: Os pães, certo?
- And: Certo.
- P: Aí você repetiu de novo... o pão..
- And: Até dar 16, a continha exata
- P: Ah, tá. E aqui de novo, o 3 repetiu, por que?
- And: É...
- P: É pão?
- And: Porque tem que dar 16; a mesma coisa do que isto.
- P: Agora aqui você multiplicou
- And: É
- P: Por que você pôs 3 x 4?
- And: Porque tem 3 pães e 4 recheios.
- (Ped):**
- P: Você lembra deste 1º problema? (resolveu por diagrama de árvore).
- Ped: Lembro?
- P: Então tá. Sobre o que era?
- Ped: É.. dos.. dos... pão e do recheio
- P: Certo. Pede para fazer o que?
- Ped: Todos os tipos de combinações
- P: E quais combinações que você fez?
- Ped: É panqueca com mortadela, presunto, queijo e salame
- P: Hum, hum...
- Ped: (pausa)
- P: Só foram estas que você fez?
- Ped: Não.. fiz com pão de forma com presunto, salame, mortadela e queijo; e o pão francês também.
- P: Tudo bem.. E quantos sanduíches diferentes você conseguiu formar, combinando pão e recheio?
- Ped: 5
- P: 5? Onde que está o 5?
- Ped: Aqui, oh; com este aqui e o recheio (o aluno indicou 1º tipo de pão (baguete) com os 4 frios que havia feito em um diagrama de árvore; ou seja somou estes elementos (1 pão e 4 frios))
- P: Ah, então você pegou este com este e deu 5. Mas, o que é um lanche? Quando você faz um lanche, o que você põe no lanche?, por exemplo.
- Ped: (pausa)

Anexo 3-D

- P: Esse pão aqui que você chamou de..
- Ped: Panqueca
- P: Então, esse pão que você chamou panqueca; você consegue fazer lanches com que recheios?
- Ped: Mortadela, presunto, queijo e salame
- P: Certo. E para este pãozinho aqui; quantos lanches diferentes você conseguiu fazer?
- Ped: 15?
- P: Com esse pãozinho aqui (indiquei o diagrama do 1º pão).
- Ped: Ah.. 5
- P: Tá. Então, qual é o primeiro lanche?
- Ped: Panqueca...., mortadela, presunto, queijo e salame.
- P: Tá, mas você consegue fazer só um lanche com este pão aqui? (indiquei novamente o 1º pão)
- Ped: Mortadela...
- P: Depois qual que seria o outro?
- Ped: Presunto
- P: Tá.. Você falou que formou 5 lanches. E aqui tem quantos lanches (indiquei o diagrama do 2º pão com os recheios)
- Ped: 5
- P: E aqui?
- Ped: 5..... 15
- P: No total, quantos lanches diferentes você conseguiu fazer?
- Pd: 15.
- P: Por que deu 15?
- Ped: Porque eu somei tudo e fiz $5+5$, 10 com mais... e aí 5×3 , 15. (Cálculo do aluno $\frac{5}{x 5}$ e $\frac{5}{x 3}$)
- P: Ah, aqui você pôs 10; por que deu 10?
- Ped: Porque...(pausa). Ah, porque eu só somei estes 2 (o aluno indicou os 2 primeiros diagramas; porém em cada um só havia 4 combinações; total 8). Porque 5 e 5 fica 10; com esse 5 aqui com 3... aí somei.
- P: Então, aqui deu 10. Mas, Esse 10 é o que? É o total?
- Ped: Não
- P: Mas, se fosse para dar o 15 no total; como é que você ia fazer esta continha?
- Ped: Eu ia por 10 mais 5
- P: E porque você pôs 5 aqui e 5 aqui
- Ped: (aluno indicou os 2 diagramas novamente)
- P: Como é que você lê aqui?
- Ped: 5 vezes o 3
- P: Por que é 5×3 ?
- Ped: Porque é... subi só o 5 aqui; aí peguei o 3 e somei pra dar 1.
- P: Você somou? Onde é que tá a soma aqui?
- Ped: Oh.. multiplicar
- P: Agora o que é 5 no problema?
- Ped: (pausa)
- P: É a quantidade de que?
- Ped: De...
- P: Pode olhar aqui se você quiser (mostrei o problema)
- Ped: Dos recheios.
- P: Tem quantos recheios aqui?
- Ped: 4
- P: E quantos tipos de pães?
- Ped: (o aluno falou baixinho.. 5; depois se corrigiu). 3.
- P: Então, você achou que tinha 5, ou você errou? O que você acha?
- Ped: Eu errei.
- P: Aqui você disse que tinha 5 e 5. Mas na verdade tem quantos recheios?
- Ped: 4.

Anexo 3-E

- P: Agora, se você fosse fazer esta continha aqui; como é que ela ia ficar certinha?
- Ped: (pausa)
- P: Ela deu quanto aqui no total; as combinações?
- Ped: 4
- P: No total..
- Ped: 15
- P: Aqui deu 15? (indiquei os 3 diagramas com 4 combinações em cada um)
- Ped: Não.. não..
- P: Quantos lanches diferentes têm aqui no total?
- Ped: 12?
- P: Então faz a continha aqui agora pra dar 12.
- Ped: Ah, acho que não sei fazer a conta.
- P: Faz do jeito que você quiser.
- Ped: (o aluno fez este cálculo no papel; $\frac{8}{x \ 4}$)
- P: Então aqui você escreveu o que?
- Ped: 8... vezes 4
- P: Foi 8 x 4 que você escreveu?
- Ped: É
- P: Quanto que é 8 x 4?
- Ped: Ah, não... (o aluno refaz o cálculo no papel $\frac{8}{+ \ 4}$)
- P: E por que você pôs 8+4. Você pegou de onde a informação?
- Ped: Eu peguei o 2 aqui; somei 8 com mais 4, 12;
- P: Agora pra gente pegar e fazer outra continha. Que outra continha você pode fazer pra dar 12?
- Ped: 6 + 6
- P: Se você olhar seu resultado; tem 6 aqui? Tipos de lanche...?
- Ped: Não
- P: E se você fosse fazer uma multiplicação? aqui você tem quantos lanches? (fui indicando o as combinações no diagrama de árvore)
- Ped: 4; 4; 4
- P: Se você for escrever isto em forma de multiplicação; como é que você pode escrever?
- Ped: 4 x 3? (em seguida, o aluno escreve o cálculo no papel $\frac{4}{x \ 3}$) (lê 4 x 3)
- P: Então, o que você percebeu aqui na hora de escrever no papel?
- Ped: É que eu peguei este 3 e somei.. Oh.. multipliquei por 4 e deu 12.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)