

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE FÍSICA

**Operador Deslocamento Condicional:
Geração de Estados e Medida da Função de Wigner**

Simone Ferreira Souza

*Dissertação apresentada ao Instituto de Física
da Universidade Federal de Goiás como parte
dos requisitos para a obtenção do título de
Mestre em Física.*

ORIENTADOR: *Prof. Dr. Basílio Baseia*

GOIÂNIA

2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

A meus pais, Delcino e Fátima.

Agradecimentos

- Ao Prof. Basílio Baseia, meu orientador, pelas oportunidades, incentivos e principalmente pela paciência.
- Ao Ardiley Torres Avelar, meu querido amigo, a quem considero como co-orientador, pelas conversas, incentivos e pelo apoio nas horas difíceis. Esse cara é fantástico!
- Ao Prof. Norton G. de Almeida, pelas boas discussões sobre Óptica Quântica e por incentivar minha ida a São Carlos.
- Aos membros do Grupo de Óptica, Geisa Pires, Bruno de Moura Escher, Wesley B. Cardoso e Iara P. de Queiroz, "cumpanheiros" e "cumpanheiras" do dia-a-dia, por simplesmente existirem. A-D-O-R-O vocês!
- Aos meus amigos do mestrado: Paulo E. R. Weber, Renato P. Valle, Erivelton de Oliveira Alves, Domingos Lopes, Emílio Santiago, Agnaldo R. de Almeida e Rafael Otoniel por produzirem um ambiente mais que agradável. Paulo, valeu pela ajuda com o Linux.
- A todos os professores do Instituto de Física, em especial aos professores Nelson C. do Amaral, Marcos A. de Castro e Nicodemos T. Rabelo, pelo exemplo de educadores que são.
- Às amigas, Milriam e Lorena por serem minhas companheiras... tanto das horas boas quanto das ruins. Vou sentir falta das risadas de vocês.
- Ao meu amor, Claudinei Caetano de Souza, pelo carinho, companheirismo e por me ajudar a ser uma pessoa mais forte, confiante e feliz. Vou sentir muitas saudades....
- Aos meu pais, pelo constante incentivo e pelo carinho com que me criaram. Tudo isso é por vocês.
- A Deus, meu amigo.

Conteúdo

| | |
|--|-----------|
| Lista de Figuras | ii |
| 1 Introdução | 1 |
| 2 Elementos da Geração de Estados em Modos Viajantes e em Cavidades | 5 |
| 2.1 Modos Viajantes | 5 |
| 2.1.1 Divisores de feixes | 5 |
| 2.1.2 Meio não-linear | 6 |
| 2.1.3 Fotodetetores | 8 |
| 2.2 Modos estacionários | 9 |
| 2.2.1 Átomos de Rydberg | 9 |
| 2.2.2 Cavidades com alto fator de qualidade | 10 |
| 2.2.3 Zonas de Ramsey | 12 |
| 2.2.4 Detectores atômicos | 13 |
| 3 Princípios de Óptica Quântica | 15 |
| 3.1 Quantização do Campo Eletromagnético | 17 |
| 3.2 O Formalismo do Operador Densidade | 19 |
| 3.3 Propriedades dos Estados Quânticos da Luz | 20 |
| 3.3.1 Distribuição de Número de Fótons | 20 |
| 3.3.2 Estatística Sub-Poissoniana | 21 |
| 3.3.3 Anti-Agrupamento de Fótons | 21 |
| 3.4 Alguns estados do campo luminoso | 22 |
| 3.4.1 Estado de Número | 22 |
| 3.4.2 Estado Coerente | 24 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.4.3 | Estado de Número Deslocado | 26 |
| 3.4.4 | Estados tipo “Gato” de Schrödinger | 27 |
| 4 | Distribuições de probabilidade | 29 |
| 4.1 | Teoria de Probabilidade Clássica | 29 |
| 4.2 | Funções de Quase-Probabilidade | 30 |
| 4.2.1 | Função \mathcal{P} de Glauber-Surdarshan | 32 |
| 4.2.2 | Função \mathcal{Q} de Husimi | 32 |
| 4.2.3 | Função de Wigner | 33 |
| 4.2.4 | Definições alternativas | 36 |
| 5 | Operador Deslocamento Condicional | 38 |
| 5.1 | Construindo o Operador Deslocamento Condicional | 39 |
| 5.2 | Aplicações | 41 |
| 5.2.1 | Gerando a Superposição: $ \psi\rangle \pm \hat{D}(\beta) \psi\rangle$ | 41 |
| 5.2.2 | Medida da Função de Wigner | 43 |
| 5.3 | Geração da Superposição $ \psi\rangle \pm \hat{D}(\beta) \psi\rangle$ em modos estacionários | 46 |
| 5.4 | Superposição de Número mais Número Deslocado: Propriedades Não-Clássicas | 48 |
| 5.4.1 | Distribuição de Número de Fótons | 50 |
| 5.4.2 | Estatística Sub-Poissoniana | 52 |
| 5.4.3 | Anti-Agrupamento de Fótons | 53 |
| 6 | Comentários e Conclusões | 56 |
| | Apêndices | 59 |
| A | Aproximação de James | 59 |
| B | Dedução do Hamiltoniano (5.25): $H_{ef} = \frac{\hbar\Omega\lambda}{\delta}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) e\rangle\langle e$ | 61 |
| C | Hamiltonianos de Interação | 66 |
| C.1 | Hamiltoniano de interação dispersiva | 66 |
| C.2 | Hamiltoniano de Jaynes-Cummings | 67 |
| C.3 | Zonas de Ramsey | 72 |

| | |
|-----------------------------------|-----------|
| C.4 Divisores de Feixe | 72 |
| D Efeito Kerr | 75 |
| Referências Bibliográficas | 76 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Divisor de feixes. | 6 |
| 2.2 | Níveis de energia para átomos de Rydberg, em que a frequência do campo (ω) está : (a) ressonante com a frequência de transição atômica (ω_0) e (b) longe da ressonância (dispersiva) com a frequência de transição atômica (ω_0), ou seja, $\omega_0 = \omega + \delta$. Os níveis tracejados não são percebidos pelo campo. | 12 |
| 2.3 | Esquema para a detecção atômica. | 14 |
| 3.1 | Representação de um estado de número no espaço de fase. | 24 |
| 3.2 | Representação do estado coerente no espaço de fase. | 26 |
| 4.1 | Função de Wigner do campo eletromagnético no plano (q,p) para; (a) estado de número 1⟩ ; (b) estado coerente, com $\alpha = 0.4$ e (c) estado coerente comprimido. | 34 |
| 5.1 | Ilustração esquemática do dispositivo ODC: consiste em um meio Kerr entre dois divisores de feixe ao longo do trajeto dos sinais de entrada. | 40 |
| 5.2 | Ilustração esquemática do interferômetro de Mach-Zehnder (IMZ), incluindo o dispositivo do ODC em um braço, acoplando o modo interno b com o sinal do feixe de entrada em a | 42 |
| 5.3 | Esquema experimental para a geração da superposição $ \varphi\rangle \pm \hat{D}(\beta) \varphi\rangle$ em modos estacionários. | 47 |
| 5.4 | Probabilidade de sucesso $\mathcal{P}^{(+)}$ versus α para a superposição NND -par. | 49 |
| 5.5 | Probabilidade de sucesso para a superposição NND -par e ímpar usando $ N\rangle = 1\rangle$ | 50 |
| 5.6 | Distribuição de Número de Fótons, $P_n^{(+)}$ versus n (caso par), for (a) $N = 1, \alpha ^2 = 1.0$; (b) $N = 2, \alpha ^2 = 2.0$; (c) $N = 3, \alpha ^2 = 3.0$; (d) $N = 4, \alpha ^2 = 4.0$ | 51 |
| 5.7 | Distribuição de Número de Fótons, $P_n^{(-)}$ versus n (caso ímpar), for (a) $N = 2,$ $ \alpha ^2 = 2.0$ e (b) $N = 3, \alpha ^2 = 3.0$ | 52 |
| 5.8 | Parâmetro Q de Mandel $Q^{(+)}$ versus $ \alpha ^2$ (caso par), para pequenos valores de N | 53 |

| | | |
|------|--|----|
| 5.9 | Parâmetro Q de Mandel $Q^{(-)}$ versus $ \alpha ^2$ (caso ímpar), para pequenos valores de N | 53 |
| 5.10 | Função de correlção de segunda ordem $g^{2(+)}(0)$ versus parâmetro (real) α | 54 |
| 5.11 | Função de correlção de segunda ordem $g^{2(-)}(0)$ versus parâmetro (real) α | 55 |
| B.1 | Ilustração esquemática de um átomo de três níveis bombeado por um laser e interagindo com um campo quantizado. | 62 |

Resumo

Apresentamos uma proposta factível para a construção do operador deslocamento condicional usando um meio Kerr entre dois divisores de feixes alimentados por estados coerentes altamente excitados. O dispositivo permite implementar a geração de uma nova classe de estados do campo eletromagnético quantizado (superposições de estados arbitrários com estados deslocados) bem como a medição da função de Wigner para estados arbitrários. A aplicação especial ao caso de estados de número e o estudo de suas propriedades não-clássicas, foram também consideradas.

Abstract

A feasible proposal constructing the conditional displacement operator is presented, using a Kerr medium placed between two beam-splitters fed by highly excited coherent states. The arrangement allows us to generate a new class of states of the quantized electromagnetic field (superpositions of an arbitrary state with its displaced counterpart) and the measurement of the Wigner function for arbitrary fields. Special application to the case of number state, and its nonclassical properties, were also considered.

Capítulo 1

Introdução

Propostas e realizações de experimentos para a geração e reconstrução de estados quânticos são temas de interesse atual, tanto em Óptica Quântica quanto em Física Atômica, devido a várias propriedades e potenciais aplicações que estados quânticos podem apresentar. Esses temas dizem respeito tanto a estados atômicos, onde nos referimos aos estados vibracionais de átomos armadilhados, quanto a estados do campo, que podem ser estados de um único modo do campo armadilhado em cavidades ou estados do campo em ondas viajantes. No que concerne à geração de estados, o tema é usualmente nomeado *Engenharia de Estados Quânticos* (EEQ) [1], enquanto que nomeado *Tomografia* [2] ou *Endoscopia* [3] quântica, quando referente à reconstrução de estados. Na reconstrução, os procedimentos monitoram a Função de Wigner ou a Função Q de Husimi ou ainda o próprio estado do sistema.

Várias são as motivações na consideração desses temas, dentre elas podemos destacar: (i) *Física básica*: a necessidade de preparação de estados quânticos de referência para se medir certas propriedades de algum campo [4, 5, 6]; a realização de testes para a própria mecânica quântica [7, 8], onde se torna possível a comparação dos dados experimentais com os resultados teóricos; a observação de processos fundamentais, tais como produção de estados emaranhados [9], no estudo da decoerência de estados [10, 11] etc. (ii) em *Física aplicada*: a possibilidade de construção de novas alternativas tecnológicas, como por exemplo, comunicação quântica [12],

computação e informação quânticas [13], criptografia quântica [14], teletransporte [7, 9] entre outras.

No que se refere a EEQ, vários esquemas experimentais, no domínio da Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (EQD) [15, 16, 1] e no domínio de ondas viajantes [4, 17, 18] tem sido propostos. Devido a este crescente avanço, tanto do desenvolvimento teórico quanto das técnicas experimentais, foi possível a realização experimental de alguns estados do campo eletromagnético, tais como: estados tipo “Gato de Schrödinger” [15], possibilitando a observação do processo de decoerência de superposições mesoscópicas de campos com fases clássicas distintas [10]; estados de número (ou estados de Fock) do campo de radiação [19, 20, 21], que permitem vários avanços, como em teletransporte e comunicação quântica; estados comprimidos da luz [22], que abrem caminho para pesquisas em transporte de informação com baixo ruído, etc. Estes avanços permitiram ainda o desenvolvimento de esquemas de medidas quânticas não demolidoras do número de fótons de um campo, tanto em ondas viajantes, usando o efeito Kerr [17], quanto em modos estacionários [23], via interação dispersiva átomo-campo; a violação da desigualdade de Bell [24] usando dois fótons e a realização experimental de processos de teletransporte [9]. Nesses processos, é extremamente importante saber se o estado que está sendo produzido é realmente o estado projetado. Para tanto fez-se necessário o desenvolvimento de ferramentas que atingissem esse objetivo. De grande importância e usadas em vários estudos dentro da Óptica Quântica são as chamadas *Funções de Quase-Probabilidade* (FQP) que, definidas a partir do operador densidade, podem descrever o sistema completamente. Dessa forma, elas permitem encontrar as propriedades estatísticas de campos luminosos (ou de átomos) e são de grande utilidade na análise da conexão entre as mecânicas quântica e a clássica, pela representação da dinâmica de um sistema quântico no espaço de fase [25]. Entre estas distribuições, a função de Wigner (\mathcal{W}) [26] tem sido enfatizada. Esta distribuição, que

é real e limitada [27], pode apresentar valores negativos em contraste com as distribuições de probabilidade clássicas. A observação destes valores negativos em \mathcal{W} é condição suficiente para caracterizar a natureza não-clássica do sistema, embora não necessária. Este aspecto é explorado também no estudo de processos de decoerência [11], onde \mathcal{W} permite estimar o tempo durante o qual um estado de superposição perde as franjas de interferência, as quais estão associadas à não-classicalidade do estado. Vários métodos de reconstrução para obter \mathcal{W} e, conseqüentemente caracterizar o estado do sistema, tem sido propostos e, inclusive, alguns experimentalmente demonstrados. Encontramos em [28], proposto por Lutterbach e Davidovich, um esquema para medir diretamente a função \mathcal{W} envolvendo EQC e íons armadilhados. Este esquema foi realizado experimentalmente por Nogues e colaboradores [29] que mediram a função \mathcal{W} , para o estado de um único fóton, em um único ponto (origem) do espaço de fase. Posteriormente a mesma função foi medida completamente para o estado de vácuo e estado de um fóton [30]. Podemos citar também o esquema proposto por Zou e colaboradores [31], onde se mediu diretamente a função característica, que fornece a função de Wigner do modo do campo na cavidade, considerando uma interação ressonante entre o átomo e o campo. No domínio de ondas propagantes, Villas-Bôas e colaboradores [32] propuseram um esquema para a medida direta da distribuição de Wigner usando um interferômetro de Mach-Zehnder acoplado a um meio não linear, do tipo Kerr. Experimentalmente, Lvovsky e colaboradores [33] apresentaram a medida completa da função \mathcal{W} do estado de um único fóton ($|1\rangle$), executando medidas diretas das quadraturas do campo por meio das quais as distribuições de probabilidade foram obtidas. Experimentos com íons armadilhados levaram também a medição completa da função de Wigner para estados de Fock; como exemplo citamos Leibfried e colaboradores [34] que mediram \mathcal{W} para o estado vibracional de um íon ${}^9\text{Be}^+$.

Mediante todos os avanços, tanto teóricos como experimentais, apresentaremos neste

trabalho uma *proposta* para a construção de um dispositivo que chamaremos de *Operador Deslocamento Condicional*(ODC) que, convenientemente inserido em um interferômetro de Mach-Zehnder, alimentado pelos estados de zero (vácuo) e um fóton, permite-nos gerar superposições de um estado arbitrário com sua contrapartida deslocada $|\psi\rangle \pm \widehat{D}(\beta)|\psi\rangle$, bem como fazer a medida da função de Wigner de estados arbitrários. O esquema, desenvolvido para modos viajantes, foi estendido para o caso de modos estacionários, através do uso de um átomo de três níveis interagindo com um único modo do campo em uma cavidade com alto fator de qualidade. Como aplicação usaremos os Estados de Números ($|N\rangle$) e estudaremos algumas propriedades estatísticas da superposição $|N\rangle \pm \widehat{D}(\beta)|N\rangle$, tais como: distribuição estatística do número de fótons, estatística sub-Poissoniana, anti-agrupamento de fótons e sua distribuição de Wigner. Com este intuito dividiremos esta dissertação em seis capítulos. No Capítulo 2 apresentaremos os sistemas físicos envolvidos neste trabalho, no que tange a EQD e a preparação em modos viajantes; no Capítulo 3 mostraremos de forma simplificada a quantização do campo eletromagnético, o formalismo do operador densidade e algumas das propriedades não-clássicas importantes na área da Óptica Quântica considerando alguns estados importantes do campo eletromagnético. No Capítulo 4 seguiremos com as distribuições de quase-probabilidade, passando por um breve resumo sobre a teoria da probabilidade clássica até as três distribuições de quase probabilidades mais usadas, dando ênfase à distribuição de Wigner. No Capítulo 5 abordaremos a construção do ODC usado para gerar a superposição $|\psi\rangle \pm \widehat{D}(\beta)|\psi\rangle$, bem como medir a função de Wigner de campos arbitrários. Estenderemos a geração da superposição mencionada para o caso de modos estacionários e estudaremos as propriedades estatísticas dessa superposição para o caso específico onde $|\psi\rangle = |N\rangle$. O Capítulo 6 contém os comentários e as discussões sobre resultados.

Capítulo 2

Elementos da Geração de Estados em Modos Vianjantes e em Cavidades

A Óptica Quântica preocupa-se também em criar, manipular e caracterizar estados do campo eletromagnético, bem como o estudo de sua interação com a matéria. Para tanto faz-se necessário o constante desenvolvimento de esquemas téóricos e instrumentos para experiências nesta área. Neste capítulo abordaremos os elementos presentes nos arranjos experimentais propostos neste trabalho, tanto para o caso de ondas eletromagnéticas em modos viajantes, quanto para ondas em cavidades. Em modos viajantes: (i) divisores de feixes; (ii) meio não-linear; (iii) fotodetetores. Em modos estacionários: (i) átomos de Rydberg; (ii) cavidades com alto fator de qualidade; (iii) zonas de Ramsey; (iv) detectores atômicos.

2.1 Modos Viajantes

2.1.1 Divisores de feixes

O divisor de feixe é um dispositivo de reflexão parcial que acopla conjuntos de modos de entrada de campos eletromagnéticos incidentes, produzindo estados emaranhados nos modos de saída. Neste acoplamento, os operadores de aniquilação de fótons dos modos de entrada são relacionados com os operadores de aniquilação emergentes através de uma transformação unitária, ou seja, é preservada não somente as relações de comutação entre os operadores de

criação e aniquilação de fótons, mas também o número de fótons (conservação da energia). Portanto, em uma situação ideal, o divisor de feixe comporta-se como um dispositivo óptico sem perdas.

A Fig. 2.1 mostra um diagrama esquemático de um divisor de feixes (com modos de entrada **a** e **b**) que pode ser facilmente realizado através de um meio linear, onde o vetor polarização é proporcional ao campo de entrada: $\hat{P} = \chi \hat{E}$, onde $\chi \equiv \chi^1$ é a susceptibilidade linear de primeira ordem (veja próxima seção). A ação deste dispositivo sobre os campos de entrada é descrita pelo operador unitário [35] (ver Apêndice C.4)

$$\hat{R}_{ab} = \exp \left[i\theta(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger) \right], \quad (2.1)$$

onde θ é o ângulo que definirá as porções de luz refletida e transmitida; \hat{a} (\hat{b}) são os operadores de aniquilação relacionados aos modos **a** (**b**) de entrada do divisor de feixes. Este mesmo dispositivo pode atuar também, como mostrado por Paris [36], como um operador deslocamento

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}), \quad (2.2)$$

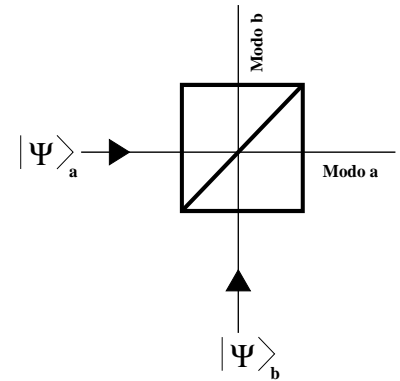


Figura 2.1: Divisor de feixes.

desde de que seu modo (ou porta) **b** seja alimentado por um estado coerente altamente excitado, $|\Psi\rangle_b = |\alpha\rangle_b$, e que o coeficiente de transmissão do divisor seja próximo da unidade [36].

2.1.2 Meio não-linear

O índice de refração de um meio, em geral, depende do arranjo dos átomos e da distribuição dos elétrons. O campo eletromagnético (com velocidade $v = c/n_0$) redireciona as cargas (elétrons), gerando um campo proporcional ao campo incidente e resultando num deslocamento de fase no campo transmitido, que equivale a uma alteração na velocidade de

propagação do campo. Se a intensidade do campo incidente for muito menor que a intensidade do campo intra-atômico, podemos considerar o deslocamento de fase (ou seja, o índice de refração do meio) independente da intensidade do campo. Este é o regime da óptica linear. Porém, quando a intensidade do campo incidente é comparável ao campo elétrico intra-atômico, a distribuição dos elétrons no meio pode ser alterada, levando a diferentes índices de refração e a propagação através do meio dependerá da intensidade do campo incidente. Este é o regime da óptica não-linear.

Na teoria eletromagnética, a resposta do meio material à ação do campo de radiação pode ser obtida em boa aproximação expandindo a polarização do meio até terceira ordem na amplitude do campo elétrico:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \epsilon_0 \chi^{(2)} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) + \epsilon_0 \chi^{(3)} \mathbf{E}^3(\mathbf{r}) + \dots \quad (2.3)$$

sendo ϵ_0 a constante dielétrica do vácuo, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ é o vetor campo elétrico e $\chi^{(1)}$, $\chi^{(2)}$, $\chi^{(3)}$, respectivamente, as susceptibilidades de primeira, segunda e terceira ordem do meio não-linear [37]. A óptica linear é descrita por $\chi^{(1)}$ e relacionada ao índice de refração linear do meio por $n_0 = 1 + \chi^{(1)}$. A resposta não-linear do meio é caracterizada por $\chi^{(2)}$ e $\chi^{(3)}$. Se houver uma ausência de combinação de fases, podemos desprezar $\chi^{(2)}$ [37]. Em um nível fundamental, a origem da resposta não-linear está relacionada com o movimento anarmônico dos elétrons devido à ação do campo elétrico aplicado. Termos de quarta ordem ou superior, podem se tornar importantes dependendo do meio físico estudado, ou da intensidade do campo aplicado, da direção de propagação e também da frequência. As susceptibilidades $\chi^{(n)}$, são funções apenas das frequências da radiação e da característica do material.

Um número de interessantes fenômenos ópticos surge das susceptibilidades de segunda e terceira ordem [38]. Por exemplo, $\chi^{(2)}$ é responsável pela geração de segundo harmônico, retificação, etc. A susceptibilidade de terceira ordem $\chi^{(3)}$, é responsável pela geração de terceiro

harmônico, o efeito eletro-óptico quadrático ou efeito Kerr, dentre outros.

Os meios não-lineares nem sempre são meios sólidos ou sólidos cristalinos. Eles também podem ser líquidos ou gasosos. Para materiais com simetria de inversão, os termos $\chi^{(n)}$, $n = \text{par}$, são identicamente nulos e o termo não-linear mais importante é o $\chi^{(3)}$, responsável pela estabilização do laser de $He - Ne$. Os meios não-lineares que apresentam a susceptibilidade não linear de terceira ordem ($\chi^{(3)}$), também são conhecidos como meios tipo Kerr (ver Apêndice D). A hamiltoniana que descreve o efeito da interação deste meio com um campo eletromagnético livre é dada por [17]

$$\hat{H}_K = hK\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{b} \quad (2.4)$$

onde \hat{a}^\dagger e \hat{a} são os operadores de criação e aniquilação para o campo livre, \hat{b}^\dagger e \hat{b} são os operadores análogos, para o meio não-linear e K é proporcional a $\chi^{(3)}$ (ordem de grandeza $\sim 10^{-15}$). Em vista da Eq. (2.4) a evolução do estado global (campo-meio)

$$\hat{U}_K = \exp(-i\phi\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{b}) \quad (2.5)$$

sendo $\phi = Kl/v$, onde l é o comprimento do meio Kerr e v é a velocidade da luz no meio.

2.1.3 Fotodetetores

O princípio de funcionamento dos fotodetetores está baseado no efeito fotoelétrico para as medidas do campo, onde o fóton incidente sobre o detector é absorvido, levando à liberação de um elétron. Da integração da probabilidade total de geração do fóto-elétron pela aniquilação do fóton incidente na superfície do detector temos a taxa total do fluxo de elétrons gerados, que identificamos como a fotocorrente i . Esta é dada por [39]

$$\langle i \rangle = e \sum_{\mathbf{k}s} \langle \hat{n}_{\mathbf{k}s} \rangle, \quad (2.6)$$

onde \mathbf{k} designa um dos diferente modos do campo e s a polarização do campo. O operador de número $\hat{n}_{\mathbf{k}s} = \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}s}$ fornece o fluxo de fótons por segundo na área envolvida pelo feixe. A

constante e é a carga do elétron, fornecendo o valor da fotocorrente em unidade de carga por tempo (Ampère no SI). Isto significa que, para um detetor ideal, cada fóton incidente irá gerar um elétron em sua saída, traduzindo de forma fiel o fluxo de fótons pela área envolvida pelo fotodetetor.

Consideraremos aqui fotodetetores ideais, negligenciando perdas ou a eficiência. Na prática, parte da luz incidente pode ser refletida na interface do detetor com o ar, além das perdas por reflexão na janela empregada para a sua proteção. Desse modo, a eficiência quântica da detecção é necessariamente inferior a 1; contudo, na prática, os detetores atuais já têm eficiências muito altas, bem próximas de 1 [40, 41].

2.2 Modos estacionários

2.2.1 Átomos de Rydberg

Quando estudamos átomos que apresentam um número quântico principal n muito grande ($n \simeq 50$), estes são os chamados átomos de Rydberg. Usualmente, na preparação destes estados, utilizam-se elementos alcalinos como Rubídio (Rb) ou Potássio (K) [42], que são produzidos normalmente em um feixe atômico ou confinados em uma célula de vapor. Estes átomos partem do estado fundamental e são excitados, em cascata, por um ou mais fótons de um feixe de laser. Em tais átomos, o elétron mais externo “vê” o núcleo de carga Z blindado por $Z-1$ elétrons e isso faz com que ele sinta um potencial semelhante ao de um átomo de hidrogênio.

Átomos em estado de Rydberg, possuem propriedades bastante interessantes: sua dimensão espacial pode chegar a ser 10 mil vezes maior que em átomos usualmente excitados, próximos do nível fundamental e sua vida média é próxima de 10^{-2} s [42], portanto, 10^5 vezes maior que os valores usuais (10^{-7} s). As energias dos níveis internos destes átomos seguem o

comportamento $E_n \approx -1/n^2$ e o momento de dipolo de transição entre dois estados de Rydberg $n \rightarrow n - 1$ resulta [42] em $d \cong n^2 e a_0$, enquanto o raio atômico médio é dado por $\bar{r} \cong n^2 a_0$, onde e é a carga do elétron e a_0 é o raio atômico de Bohr [43].

Uma classe especial desses átomos é constituída pelos “átomos circulares” [44] em que o momento angular orbital l e sua projeção m , no eixo z , têm valores máximos: $m = l = n - 1$. Sendo assim, pela regra de seleção de dipolo elétrico $\Delta l = \pm 1$, esses estados só podem se acoplar aos estados circulares imediatamente superiores ($n + 1$) ou inferiores ($n - 1$) e, por possuírem um momento de dipolo elevado, permitem um forte acoplamento com o campo eletromagnético. O tempo de vida dos átomos excitados cresce muito nesta condição. Um átomo circular com $n \sim 50$ terá um tempo de vida de cerca de $30ms$, enquanto o de um átomo em estado de Rydberg com momentos angulares próximos de 0 é da ordem de $10^{-2}ms$. Em um átomo comum no estado fundamental o tempo de vida é de aproximadamente $10^{-5}ms$ [42].

Experimentos em eletrodinâmica quântica de cavidade, na maioria das vezes utilizam-se de átomos de Rydberg com números quânticos adjacentes $n = 50$ (estado fundamental $|g\rangle$), $n = 51$ (estado excitado $|e\rangle$) e $n = 52$ (estado auxiliar $|i\rangle$). Estes átomos são tratados como de dois ou três níveis e as cavidades são projetadas de forma que um dado modo interaja apenas com os níveis escolhidos, sendo os outros transparentes para o campo de radiação.

2.2.2 Cavidades com alto fator de qualidade

Quando lidamos no domínio de cavidades o tempo de vida do campo eletromagnético em seu interior é tanto maior quanto maior for o fator de qualidade Q da cavidade, visto que estas duas grandezas estão relacionadas pela equação

$$Q = \omega \tau_v , \quad (2.7)$$

onde ω é a frequência do campo armadilhado e τ_v o tempo de vida do campo no interior da

cavidade.

Cavidades supercondutoras de Nióbio podem apresentar alto fator de qualidade ($Q \sim 10^8$) e baixo número médio de fótons térmicos (da ordem de 0.15), em frequências da ordem de $20GHz$, quando resfriadas a $T \simeq 0.5K$ por meio de um criostato de 3He [45]. Este fator de qualidade permite fazer com que os campos de radiação na região de microondas ($\omega_c \sim 10^{10}Hz$) possuam um tempo de vida no intervalo $10^{-3}s$ a $10^{-2}s$ [45].

Na preparação do arranjo experimental são ajustadas as frequências do campo e das transições atômicas de forma a obter dois tipos de interação radiação-matéria: interação ressonante e interação dispersiva. No primeiro caso, o modo dentro da cavidade é ajustado com frequência igual à frequência de transição atômica $|g\rangle \longleftrightarrow |e\rangle$ (veja Fig.2.2-(a)), obtendo-se uma interação com troca de fótons. Este tipo de interação átomo-campo é descrito pelo hamiltoniano de Jaynes-Cummings [46], na aproximação de onda girante,

$$H_{JC} = \hbar g_R (\hat{a}^\dagger \sigma_- + \hat{a} \sigma_+), \quad (2.8)$$

em que g_R é a frequência de Rabi [45], \hat{a}^\dagger (\hat{a}) é o operador de criação (aniquilação) de fótons do campo eletromagnético e $\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|$ ($\hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|$) é o operador levantamento (abaixamento) entre dois níveis atômicos, ressonantes com o campo

No segundo caso, o campo na cavidade é ajustado, via Efeito Stark², de modo que a sua frequência esteja longe da ressonância com a frequência de transição atômica (veja Fig.2.2-(b)). Neste tipo de interação a energia fornecida ao sistema não é suficiente para haver troca de fótons entre o átomo e o campo, porém acarreta uma mudança na fase do campo aprisionado dependendo das frequências envolvidas e do tempo de interação. Tal interação é descrita pelo hamiltoniano efetivo (veja Apêndice C.1)

$$\hat{H}_{ef} = \hbar \chi \hat{a}^\dagger \hat{a} \sigma_z \quad (2.9)$$

²Aplica-se um campo elétrico nas paredes da cavidade, produzindo alargamento entre os níveis de energia do átomo, causando dessintonia δ entre a frequência de transição atômica e a frequência do campo.

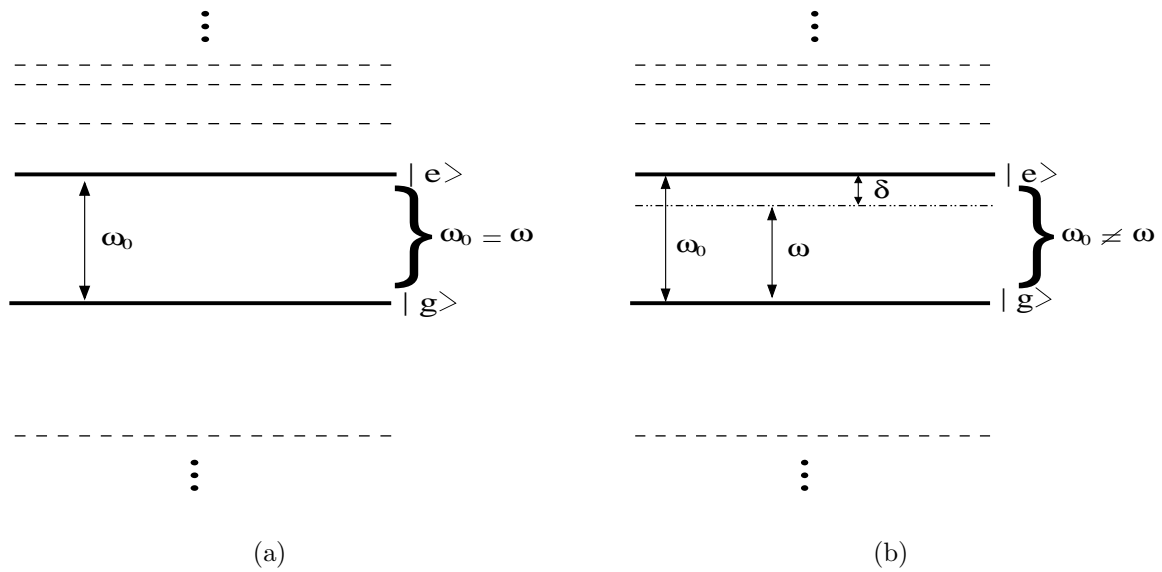


Figura 2.2: Níveis de energia para átomos de Rydberg, em que a frequência do campo (ω) está : (a) ressonante com a frequência de transição atômica (ω_0) e (b) longe da ressonância (disperssiva) com a frequência de transição atômica (ω_0), ou seja, $\omega_0 = \omega + \delta$. Os níveis tracejados não são percebidos pelo campo.

onde $\chi = g^2/\delta$ é a constante de acoplamento átomo-campo e $\delta = \omega_0 - \omega$ é a dessintonia entre as frequências ω_0 e ω ; $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$.

2.2.3 Zonas de Ramsey

As zonas de Ramsey (R_n) são cavidades com baixo fator de qualidade ($Q \sim 10^3$) que armadilham campos intensos, clássicos, produzidos por um gerador de microondas, com o intuito de manipular os estados internos de um átomo atravessando uma delas. Devido ao baixo fator de qualidade é necessária uma contínua aplicação do campo eletromagnético na cavidade, uma vez que este vai perdendo sua “identidade” devido a múltiplas reflexões nas paredes da mesma.

Quando um átomo de dois níveis atravessa uma zona R_n , interage ressonantemente com um campo clássico e o efeito desta interação átomo-campo pode ser descrito pela atuação

do operador [47] (ver Apêndice C.3)

$$\hat{R}_n(\varphi, \phi) = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \hat{I} - i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) [e^{-i\phi} \hat{\sigma}_+ + e^{i\phi} \hat{\sigma}_-], \quad (2.10)$$

onde φ , que está relacionada com a intensidade da rotação desejada e ϕ , que fornece a fase do campo clássico, são parâmetros de controle usados para definir o estado atômico após a interação.

Os níveis de um átomo atravessando tal zona R_n são transformados da seguinte forma

$$\hat{R}_n(\varphi, \phi)|g\rangle = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) |g\rangle - i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) e^{-i\phi} |e\rangle, \quad (2.11)$$

$$\hat{R}_n(\varphi, \phi)|e\rangle = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) |e\rangle - i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) e^{i\phi} |g\rangle. \quad (2.12)$$

Em especial, se ajustarmos a intensidade do campo de modo a produzir uma rotação de $\pi/2$ no estado atômico, o que significa fazer $\varphi = \pi$, $\phi = \pi/2$ em (2.10), os níveis $|e\rangle$ ou $|g\rangle$ são transformados segundo as operações:

$$\hat{R}_n|e\rangle = \frac{|g\rangle + |e\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.13)$$

$$\hat{R}_n|g\rangle = \frac{|g\rangle - |e\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.14)$$

2.2.4 Detectores atômicos

Os detectores atômicos, ou detectores de ionização seletivos, são constituídos por duas placas metálicas alimentadas por um campo elétrico capaz de ionizar o átomo (veja Fig.2.3). Devido a sua baixa eficiência ($\sim 70\%$ [48]) e a necessidade de discriminar os estados atômicos $|e\rangle$ e $|g\rangle$, são usados dois detectores seletivos D_e e D_g . Em D_e é aplicado um campo elétrico capaz de ionizar o átomo se este se encontrar no estado excitado $|e\rangle$, mas insuficiente para ionizá-lo caso se encontre no estado fundamental $|g\rangle$. No caso do segundo detector, D_g , um campo elétrico mais intenso é aplicado, suficiente para ionizá-lo no estado fundamental $|g\rangle$. Isso explica o fato do detector D_e ser sempre colocado antes de D_g .

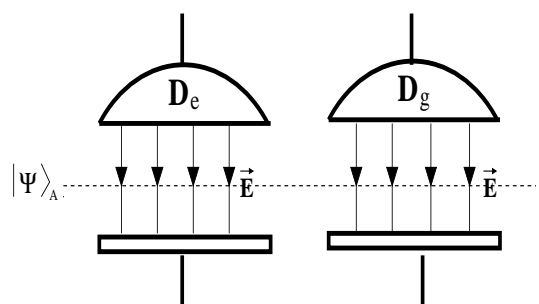


Figura 2.3: Esquema para a detecção atômica.

Capítulo 3

Princípios de Óptica Quântica

Classicamente, a radiação luminosa é tratada como uma onda eletromagnética com fase e amplitude bem definidas. Uma proposta para a quantização do campo eletromagnético veio com Born, Heisenberg e Jordan em 1926 [49]. Contudo, este último avanço não empolgou a comunidade científica de modo geral, visto que a teoria de vários fenômenos envolvendo luz, tais como, interferência, difração e a geração da luz eram bem entendidos com a física semi-clássica, ou seja, tratando a luz por meio de uma teoria clássica e a matéria por meio de uma teoria quântica. Entretanto, com os trabalhos pioneiros de Glauber [50] e Sudarshan [51] que, impulsionados pelo grande avanço tecnológico provocado pelo laser desenvolveram uma teoria sobre a coerência quântica, tornou-se claro que alguns estados da luz não poderiam ser descritos em termos da física clássica, assim como a análise da geração de estados não poderia ser feita semi-classicamente. O primeiro fenômeno previsto pela teoria quântica da luz foi o de anti-agrupamento de fótons (antibunching), obtido por Kimble, Dagenais e Mandel [52] em 1977. Usando luz fluorescente emitida por átomos de sódio excitados por um feixe de laser, eles mediram a correlação da flutuação da intensidade de dois campos distintos, mostrando a desagregação apresentada pelos fótons e probabilidade quase nula para a detecção simultânea de dois ou mais fótons. Este efeito implicava que a distribuição de probabilidade¹ $P(\alpha)$ devia

¹Em geral, $P(\alpha)$ é não-positiva definida, ou seja, pode apresentar valores tanto positivos quanto negativos, ao contrário do que se espera de uma função densidade de probabilidade clássica. Para estados com análogo

assumir valores negativos, evidenciando o seu caráter não-clássico.

Foi devido à comprovação de fenômenos sem análogos clássicos (exclusivamente descritos por teoria quântica da luz), que surgiu uma nova área de pesquisa, a Óptica Quântica, a qual está inteiramente voltada aos aspectos quânticos do campo eletromagnético, e tem demonstrado a existência de muitos efeitos quânticos da luz que até então não tinham sido nem imaginados. Além do efeito de anti-agrupamento de fótons, outros ocorreram posteriormente: (i) o efeito sub-Poissoniano, verificado experimentalmente por Mandel [53] em 1979, mostrando que alguns estados apresentavam flutuação (ruído) no número de fótons menor que o número médio de fótons ($\Delta\hat{n}^2 < \langle\hat{n}\rangle$), acarretando $P(\alpha) < 0$, tal como ocorria com o anti-agrupamento de fótons; (ii) o efeito de “compressão do ruído quântico” (squeezing), observado experimentalmente por Slusher e colaboradores [22] em 1985, onde o ruído em uma das quadraturas do campo é comprimido, podendo ficar abaixo do ruído quântico do vácuo (com o limite inferior para o ruído ditado pelo princípio da incerteza), sendo este um resultado de potencial importância tecnológica; (iii) o efeito de colapso e ressurgimento de oscilações, um efeito contido no modelo de Jaynes-Cummings de 1963 e observado experimentalmente em 1987, por Rempe e colaboradores [54], mostrando que a amplitude de oscilação da inversão atômica pode apresentar efeitos de colapso, seguido de ressurgimento. Este efeito foi atribuído ao caráter discreto do espectro energético do campo luminoso, padecendo de explicação clássica. Daí em diante, outros efeitos foram observados experimentalmente podendo ser explicados somente com a teoria quântica. Conceitos novos como as distribuições de quase-probabilidade (ver Cap.4) e novas interpretações referentes ao espaço de fase foram abordados, ficando clara a necessidade do uso da Óptica Quântica.

Neste capítulo apresentamos conceitos fundamentais como a quantização do campo clássico, $P(\alpha)$ desempenha o papel de densidade de probabilidade no espaço de fase, sendo positiva. Já em estados sem análogo clássico, $P(\alpha)$ pode apresentar valores negativos, ou ser mais singular que a “função” $-\delta$ de Dirac.

eletromagnético; o formalismo do operador densidade, que nos permite descrever de forma mais geral o estado de um sistema quântico; algumas propriedades estatísticas do campo eletromagnético, tais como, distribuição de número de fótons, estatística sub-Poissoniana e anti-agrupamento de fótons e, por fim, alguns estados do campo eletromagnético e suas propriedades estatísticas, importantes no decorrer do trabalho. São eles: estados de número, coerente, de número deslocado e do tipo “gato de Schrödinger”.

3.1 Quantização do Campo Eletromagnético

Em mecânica quântica, as grandezas físicas são descritas por operadores hermitianos, os quais são associados a grandezas clássicas. As grandezas que classicamente são canonicamente conjugadas¹, quanticamente, serão associadas a operadores que obedecem a uma certa relação de comutação. Por exemplo, à posição x de uma partícula livre, em uma dimensão, é associado um operador de posição \hat{x} ; ao momento p desta partícula, é associado um operador \hat{p} . A regra de associação destas grandezas é tal que os operadores associados obedecem à seguinte relação de comutação [55],

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = \hat{x} \hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{x} = i \hbar. \quad (3.1)$$

Se o sistema em questão for o campo eletromagnético, deveremos encontrar, em seu hamiltoniano, as variáveis canonicamente conjugadas que fazem o papel de x e p dos sistemas mecânicos. Para tanto, devemos escrever a energia clássica do campo em função do potencial vetor [56, 57], que por sua vez é expandido em ondas planas. Neste ponto, o novo hamiltoniano se transforma em uma somatória, onde cada termo é, a menos de uma constante, a energia de um oscilador harmônico simples, unidimensional de massa unitária [58]. Assim, quantizar o campo eletromagnético significa quantizarmos cada oscilador harmônico dessa soma [57, 55].

¹Duas grandezas, a e b , serão canonicamente conjugadas quando seu Parênteses de Poisson for igual a um, $\{a, b\} = 1$.

Para o oscilador unidimensional de massa unitária e frequência ω , o hamiltoniano quântico é dado por

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{x}^2). \quad (3.2)$$

Contudo, uma transformação leva os operadores \hat{x} e \hat{p} nos operadores de criação e aniquilação de fótons \hat{a}^\dagger e \hat{a} , respectivamente definidos por

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega \hat{x} - i \hat{p}) \quad (3.3)$$

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega \hat{x} + i \hat{p}). \quad (3.4)$$

A definição destes operadores é extremamente útil apesar de eles não serem hermitianos e portanto não representarem observáveis do oscilador. Para estes novos operadores a relação de comutação (3.1) é dada por

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (3.5)$$

Assim, o hamiltoniano dado pela Eq. (3.2) pode ser reescrito como

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right), \quad (3.6)$$

onde $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ é o chamado operador de número, hermitiano.

Os auto-estados do hamiltoniano (3.6), denotados por $|n\rangle$, formam uma base ortonormal no espaço de Hilbert, chamados estados de Fock ou de Número, com autovalores que são os valores de energia permitidos, dados por

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (3.7)$$

com n inteiro positivo. A aplicação dos operadores \hat{a}^\dagger e \hat{a} nestes auto-estados os leva para

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (3.8)$$

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (3.9)$$

sendo, por este motivo, chamados de operadores de criação e aniquilação de fótons¹.

3.2 O Formalismo do Operador Densidade

O formalismo do *Operador Densidade* [55] ou Matrix densidade é uma ferramenta importante, pois permite-nos descrever o estado de um sistema quântico de uma forma mais geral, tratando tanto estados puros quanto estados de mistura estatística, através do operador densidade hermitiano² $\hat{\rho}$ definido como

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|, \quad (3.10)$$

sendo $|\Psi_i\rangle$ os possíveis estados do sistema puro e P_i 's as probabilidades para os estados $|\Psi_i\rangle$, com

$$\sum_i P_i = 1 \quad ; \quad 0 \leq P_i \leq 1. \quad (3.11)$$

Se o estado é puro, isto é, o sistema está precisamente no estado quântico $|\Psi_j\rangle$, teremos $P_i = \delta_{ij}$ na Eq. (3.10) o que acarreta

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \quad ; \quad Tr\hat{\rho}^2 = 1. \quad (3.12)$$

Por outro lado, se não conhecemos precisamente o estado do sistema, isto é, existem distintos $P_i \neq 0$, teremos

$$\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho} \quad e \quad Tr\hat{\rho}^2 < 1, \quad (3.13)$$

e o estado do sistema é dito de mistura.

Podemos então usar as relações acima para termos uma medida do grau de “pureza” de um estado, definindo o seguinte parâmetro

$$\zeta = 1 - Tr\hat{\rho}^2. \quad (3.14)$$

¹Com respeito a \hat{a} , ele nem sempre aniquila [59].

²Um operador \hat{O} é dito hermitiano quando $\hat{O} = \hat{O}^\dagger$.

Se $\zeta = 0$ teremos um estado puro e se $\zeta > 0$ o sistema estará em um estado do tipo mistura estatística. Independentemente de o operador $\hat{\rho}$ descrever um estado puro ou de mistura, cumpre-se a conservação da probabilidade expressa pela igualdade

$$Tr\hat{\rho} = 1. \quad (3.15)$$

Como exemplo de aplicação, o valor médio de um observável \hat{A} , obtido via operador densidade, é dado por

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle &= Tr \left[\hat{\rho} \hat{A} \right] \\ &= \sum_k \langle \Psi_k | \hat{\rho} \hat{A} | \Psi_k \rangle. \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.3 Propriedades dos Estados Quânticos da Luz

Para caracterizar o estado de um dado campo luminoso podemos utilizar grandezas que estão associadas a tipos particulares de medida. Apresentamos aqui algumas destas grandezas, as quais utilizaremos no desenvolvimento deste trabalho.

3.3.1 Distribuição de Número de Fótons

Uma forma de caracterizar um estado arbitrário do campo eletromagnético, a partir do seu operador densidade $\hat{\rho}$, é obtida através da projeção do estado do campo na base de estado de número. Para estados puros, onde $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, temos

$$P_n = \langle n | \hat{\rho} | n \rangle = \langle n | \psi \rangle \langle \psi | n \rangle = |C_n|^2, \quad (3.17)$$

onde P_n denota a probabilidade de encontrar n fótons no campo (descrito por $\hat{\rho}$) e é denominada de *distribuição de número de fótons*. Está claro, de (3.17), que P_n contem apenas informação parcial a respeito do sistema descrito por $\hat{\rho}$, visto que considera apenas os elementos diagonais na base de Fock. Contudo, a distribuição P_n é uma grandeza bastante usada para a representação de estados do campo de radiação.

3.3.2 Estatística Sub-Poissoniana

Os estados do campo eletromagnético estudados experimentalmente são, em geral, estados com um número indefinido de fótons. Portanto, tal estudo só pode ser feito através de uma descrição estatística. Para classificar estes estados da luz de acordo com a flutuação no número de fótons, utilizamos um parâmetro introduzido por Mandel em 1979 [53], definido como

$$Q = \frac{(\Delta\hat{n})^2 - \langle\hat{n}\rangle}{\langle\hat{n}\rangle}, \quad (3.18)$$

onde $\Delta\hat{n}^2 = \langle\hat{n}^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle^2$ e $\langle\hat{n}^k\rangle = \sum_n n^k P_n$, $k = 1, 2$.

Se $Q > 0$ a distribuição estatística do número de fótons é dita super-Poissoniana e a flutuação em seu número de fótons será maior que seu número médio: $(\Delta\hat{n})^2 > \langle\hat{n}\rangle$. Se $Q = 0$ a distribuição estatística é dita Poissoniana. Esta classificação tem como padrão a distribuição estatística do número de fótons do estado coerente. No caso $Q < 0$, teremos uma distribuição sub-Poissoniana [53]: $(\Delta\hat{n})^2 < \langle\hat{n}\rangle$. O domínio no qual o estado do campo é sub-Poissoniano é exclusivo de estados quânticos. Assim, um parâmetro Q negativo também revela a natureza quântica do estado do campo.

3.3.3 Anti-Agrupamento de Fótons

Uma função de grande interesse em óptica quântica é a chamada função de correlação de segunda ordem, visto que esta permite diferenciar experimentalmente os campos clássicos dos quânticos. Ela é definida em termos da correlação de intensidades da luz em dois pontos do espaço-tempo. Essas intensidades são medidas por fotodetectores, assim essa correlação é proporcional à taxa de transição para a absorção de fótons nos pontos x_1 e x_2 . O grau de coerência de segunda ordem é definido como

$$g^2(x_1, x_2) = \frac{\langle \hat{E}^{(-)}(x_1) \hat{E}^{(-)}(x_2) \hat{E}^{(+)}(x_2) \hat{E}^{(+)}(x_1) \rangle}{\langle \hat{E}^{(-)}(x_1) \hat{E}^{(+)}(x_1) \rangle \langle \hat{E}^{(-)}(x_2) \hat{E}^{(+)}(x_2) \rangle}, \quad (3.19)$$

onde $\hat{E}^{(+)}$ e $\hat{E}^{(-)}$ são proporcionais a \hat{a}^\dagger e \hat{a} representando os operadores de criação e aniquilação de fótons em função da posição e do tempo, respectivamente.

Considerando um caso simplificado, de correlação no mesmo ponto do espaço-tempo $x_1 = x_2$, ou seja, $\tau = 0$ (τ é o intervalo de tempo entre duas detecções), podemos escrever

$$g^2(0) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2}. \quad (3.20)$$

Usando as equações 3.5 e 3.16 obtemos:

$$g^2(0) = \frac{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2}{\langle \hat{n} \rangle^2} \quad (3.21)$$

Esta função nos informa se a probabilidade de detectar um segundo fóton logo após a detecção do primeiro é maior ou menor em relação àquela da luz coerente ($g^2(0) = 1$). Estes efeitos são denominados de agrupamento ($g^2(0) > 1$) e anti-agrupamento ($g^2(0) < 1$) de fótons, respectivamente. O resultado de anti-agrupamento, que caracteriza efeitos quânticos, foi previsto teoricamente em 1976 por Carmichael e Walls [60] e observado experimentalmente por Kimble, Degenais e Mandel em 1977 [52], usando luz fluorescente emitida por átomos de sódio excitados por um feixe de laser.

3.4 Alguns estados do campo luminoso

Existe uma grande variedade de possíveis estados para o campo eletromagnético de radiação alguns deles sendo de fundamental importância para a Óptica Quântica. Apresentaremos aqui alguns destes estados, que serão úteis no decorrer do nosso trabalho, bem como algumas de suas propriedades não-clássicas.

3.4.1 Estado de Número

Os estados de número $|n\rangle$, também conhecidos como estados de Fock, são autoestados de energia do oscilador harmônico, associados a um modo do campo eletromagnético e podem

ser definidos como

$$\hat{n} |n\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle, \quad (3.22)$$

onde \hat{n} é o operador de número e \hat{a} (\hat{a}^\dagger) é o operador criação (aniquilação) de fótons.

A discretização do número de excitações para cada modo evidencia o caráter quântico do campo luminoso. Estas excitações podem ser vistas como ondas com amplitudes restritas a valores discretos ou como partículas do campo. Por isso, dizemos que os estados de Fock estão associados à intensidade do campo ou ao número de fótons. Estas duas abordagens são complementares e facilitam a compreensão de fenômenos corpusculares e ondulatórios.

Estes estados podem ser obtidos pela atuação do operador de criação no estado de vácuo repetidas vezes, como segue

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (3.23)$$

Eles formam uma base de estados, ou seja, satisfazem as relações de ortonormalidade e completeza,

$$\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}, \quad \sum_n |n\rangle \langle n| = 1. \quad (3.24)$$

Sua distribuição estatística de número de fótons tem uma forma simples,

$$P_n = |\langle n|m\rangle|^2 = \delta_{n,m}, \quad (3.25)$$

isto é, a distribuição é centrada em $\langle \hat{n} \rangle = n$, com incerteza no número igual a zero ($(\Delta \hat{n})^2 = 0$), como o esperado, visto que no estado de Fock o número de fótons é bem definido.

O parâmetro Q de Mandel para este estado é $Q = -1$, independente de n , isto é, ele é o mais sub-Poissoniano dos estados que se pode gerar. Contudo, este apresenta, segundo a Eq. (3.21), uma função de correlação de segunda ordem dependente de n ,

$$g_n^2(0) = 1 - \frac{1}{n} < 1 \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.26)$$

apresentando também o efeito de anti-agrupamento de fótons que é tanto maior quanto menor o valor de n .

Conforme mostrado por Schleich [61], a representação deste estado no espaço de fase é uma coroa circular de raio menor (R_{me}) igual a \sqrt{n} e raio maior (R_{ma}) igual a $\sqrt{n+1}$ (ver Fig. 3.2).

Os estados de número são muito importantes no tratamento de problemas em mecânica quântica e muitas são as propostas para a geração destes estados [62], contudo existem grandes dificuldades experimentais em sua preparação, sendo obtidos até hoje em laboratório apenas estados de número pouco excitados ($n = 1$ e $n = 2$) [19, 20, 21]

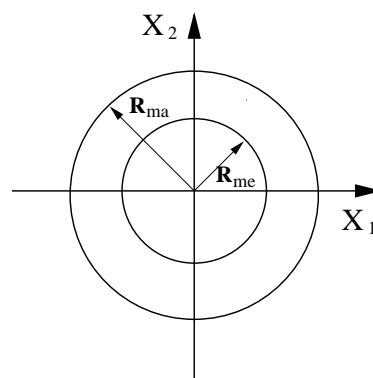


Figura 3.1: Representação de um estado de número no espaço de fase.

3.4.2 Estado Coerente

Os estados coerentes foram introduzidos por Schrödinger em 1926 [63]; contudo ficaram populares a partir de 1963 com Glauber [50], por se mostrarem úteis para descrever o campo de radiação. Os estados coerentes são os que mais se aproximam do campo clássico, no sentido de que os valores esperados do campo, calculados com estes estados, são aproximadamente os mesmos que os obtidos com o eletromagnetismo clássico. Além disso, seu ruído quântico é o mínimo possível, sendo igual ao do estado de vácuo.

Um estado coerente pode ser definido como sendo um auto-estado do operador aniquilação de fótons

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (3.27)$$

onde α é um número complexo definido como $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$, sendo que $|\alpha|$ indica a intensidade do

deslocamento a partir da origem no espaço das quadraturas e θ indica a direção do deslocamento. A expansão deste estado na base de Fock resulta na forma

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.28)$$

Usando a definição para o estado de número dada pela Eq. (3.23), podemos redefinir o estado coerente a partir do estado fundamental $|0\rangle$,

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})|0\rangle, \quad (3.29)$$

onde $\hat{D}(\alpha)$ é o operador¹ deslocamento de Glauber [50]. O efeito deste operador consiste em “deslocar” o estado fundamental até o centro deste coincidir com o ponto $(Re(\alpha), Im(\alpha))$ conservando as suas características de mínima incerteza.

O conjunto de todos os estados coerentes é super-completo. A relação de completeza neste caso é dada por

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \hat{1} \quad (3.30)$$

onde $d^2\alpha = d Re(\alpha) d Im(\alpha)$. Por outro lado, estados com amplitudes diferentes, $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$, não são ortogonais, a saber,

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \beta \alpha^*\right), \quad (3.31)$$

de magnitude absoluta $|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = \exp(-|\alpha - \beta|^2)$. Estes estados vão se tornando ortogonais no limite $|\alpha - \beta| \gg 1$. Podemos representar qualquer estado na base de estados coerentes, que é dita *super completa*. A supercompleteza resulta da relação (3.31), a qual permite expandir um genérico estado coerente $|\alpha'\rangle$, na base coerente, como segue,

$$\hat{\rho}' = |\alpha'\rangle \langle \alpha'| = \int P(\alpha) |\langle \alpha | \alpha' \rangle|^2 d^2\alpha. \quad (3.32)$$

¹Sendo este unitário: $\hat{D}(\alpha) \hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{D}(\alpha) = \hat{1}$

Um procedimento impossível nas bases tradicionais (completas em vez de super-completas).

Para estes estados encontramos que a distribuição estatística de número de fótons é dada por,

$$P_n(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}, \quad (3.33)$$

conhecida como distribuição de Poisson. O número médio de fótons e a dispersão no número de fótons são iguais no estado coerente,

$$\langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = \langle \alpha | (\Delta \hat{n})^2 | \alpha \rangle = |\alpha|^2. \quad (3.34)$$

Isso acarreta anulamento do parâmetro Q de Mandel. Dizemos então que o estado coerente exibe estatística Poissoniana.

A função de correlação de segunda ordem para este estado é igual a 1, significando que a probabilidade de se detectar o segundo fóton independe da detecção do primeiro fóton.

Os círculos na Fig. 3.2 representam o estado de vácuo $|0\rangle$ e o estado coerente $|\alpha\rangle$ (região circular cujo centro situa-se a uma distância $|\alpha|$ da origem). Ambos são estados de mínima incerteza, ou seja, ambos possuem o valor mínimo permitido pelo princípio de Heisenberg ($\Delta \hat{X}_1^2 = \Delta \hat{X}_2^2 = \frac{1}{4}$).

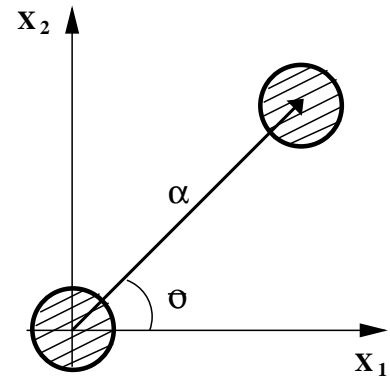


Figura 3.2: Representação do estado coerente no espaço de fase.

3.4.3 Estado de Número Deslocado

Propostos inicialmente por Cahill e Glauber [27] em 1969, os Estados de Número Deslocado tiveram real atenção somente a partir de 1989 [64], quando suas propriedades estatísticas foram analisadas.

Eles são contruídos a partir da aplicação do operador deslocamento de Glauber, $\hat{D}(\alpha)$, em um estado de número. Assim,

$$|\alpha, n\rangle = \hat{D}(\alpha)|n\rangle = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}) |n\rangle. \quad (3.35)$$

Expandindo $|\alpha, n\rangle$ na base de Fock temos

$$|\alpha, n\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(n, \alpha) |m\rangle, \quad (3.36)$$

onde os coeficientes C_m são dados por [64],

$$C_m(n, \alpha) = \begin{cases} \left(\frac{n!}{m!}\right)^{1/2} e^{-|\alpha|^2/2} \alpha^{(m-n)} \mathcal{L}_n^{m-n}(|\alpha|^2); & m \geq n \\ \left(\frac{m!}{n!}\right)^{1/2} e^{-|\alpha|^2/2} [\alpha^{(m-n)}]^* \mathcal{L}_m^{n-m}(|\alpha|^2); & m \leq n, \end{cases} \quad (3.37)$$

sendo $\mathcal{L}_n^{m-n}(|\alpha|^2)$ são os polinômios de Laguerre associados, de ordem n . Para este estado, $P_n \neq \delta_{n,m}$. O número médio de fótons e a variância em \hat{n} para este estado resultam [64]

$$\langle \hat{n} \rangle = n + |\alpha|^2, \quad (3.38)$$

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = (2n + 1)|\alpha|^2, \quad (3.39)$$

onde $n = 0$ recupera os estados coerentes e $\alpha = 0$ recupera os estados de Fock. Notamos também que para $|\alpha| < 1/2$ o estado de número deslocado exibe anti-agrupamento de fótons ($g_n^2(0) < 1$) bem como estatística sub-Poissoniana ($Q < 0$) [64].

3.4.4 Estados tipo “Gato” de Schrödinger

Em geral, o estado tipo “gato” é definido como a superposição de dois estados clássicos do campo eletromagnético, da mesma forma que os estados de “gato vivo” e “gato morto” de Schrödinger em seu famoso paradoxo formulado em 1935 [63]. Particularmente interessantes são as superposições de estados coerentes [61], devido a possibilidade de produzir superposições quânticas macroscopicamente distinguíveis, uma vez que tais estados são quase-clássicos. A

definição geral de um estado tipo gato, envolvendo um estado coerente $|\alpha\rangle$ (com $|\alpha|^2$) e um segundo estado coerente com fase deslocada de π , denotado como $|-\alpha\rangle$, toma a forma

$$|G\rangle = \mathcal{N} [|\alpha\rangle + e^{i\phi} |-\alpha\rangle], \quad (3.40)$$

onde

$$\mathcal{N} = (2 + 2 \cos \phi e^{-2|\alpha|^2})^{-1/2} \quad (3.41)$$

é o fator de normalização, que depende tanto do valor da amplitude α quanto da fase relativa ϕ dos estados envolvidos na superposição. A expansão deste estado na base de número é dada por

$$|G\rangle = (\mathcal{N})^{-1} e^{-2|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} [1 + (-1)^n e^{i\phi}] \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (3.42)$$

e sua distribuição de número de fótons resulta na forma,

$$P_n(\alpha, \phi) = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{(1 + e^{-2|\alpha|^2} \cos \phi) n!}, \quad (3.43)$$

com o respectivo número médio de fótons

$$\langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2 \frac{1 - e^{-2|\alpha|^2} \cos \phi}{1 + e^{-2|\alpha|^2} \cos \phi}. \quad (3.44)$$

Fazendo $\phi = 0$ na Eq. (3.40) teremos o denominado “gato de Schrödinger” par, onde sua P_n contém somente estados de Fock pares. Por outro lado fazendo $\phi = \pi$, teremos uma superposição de estados de número ímpar, ou “gato de Schrödinger ímpar”. Quando $\phi = \pi/2$ teremos o estado coerente de Yurke-Stoler [65], o primeiro proposto, que é um estado coerente transformado unitariamente.

O parâmetro Q de Mandel para os estados “gato de Schrödinger” par e ímpar é

$$Q_{par(impar)} = (\pm) \frac{4 |\alpha|^2 e^{-2|\alpha|^2}}{1 - e^{-4|\alpha|^2}} > (<) 0, \quad (3.45)$$

ou seja, o estado de superposição par(ímpar) exhibe estatística de fótons super(sub)-Poissoniana enquanto o estado de Yurke-Stoler exhibe estatística de fótons Poissoniana ($Q = 0$). Em resumo, o parâmetro ϕ define esse caráter estatístico do estado tipo “gato de Schrödinger”.

Capítulo 4

Distribuições de probabilidade

O princípio da incerteza na descrição quântica traz problemas na representação de um estado no espaço de fase. Como consequência, não é possível definir uma verdadeira distribuição de probabilidade como uma função das variáveis clássicas do espaço de fase. No entanto, as chamadas *Funções de Quase-Probabilidades*, que são uma tentativa de transcrição para o formalismo quântico das distribuições clássicas de probabilidades conjuntas (definidas no espaço de fase) vem tendo uma grande utilidade no estudo de sistema quânticos [66]. Estas distribuições são chamadas de quase-probabilidade porque, em alguns casos, são singulares, apresentam valores negativos, ou, ainda, não possuem distribuições marginais adequadas.

4.1 Teoria de Probabilidade Clássica

Em Física Clássica, o espaço de fase é um conjunto contínuo de pontos, cada qual correspondendo à posição (q) e momento (p) de cada componente de um dado sistema físico. Para calcularmos o valor médio de uma grandeza $F(q, p)$ neste espaço, devemos usar a média estatística

$$\langle \hat{F} \rangle_{cl} = \int dq \int dp P_{cl}(q, p) F(q, p), \quad (4.1)$$

onde $P_{cl}(q, p)$ é a chamada *distribuição de probabilidade conjunta*, positiva e normalizada, a

saber,

$$P_{cl}(q, p) \geq 0, \quad (4.2)$$

$$\int dq \int dp P_{cl}(q, p) = 1.$$

Integrando a distribuição de probabilidade conjunta em uma de suas variáveis, obteremos uma distribuição de probabilidade na outra variável. A saber

$$P(q) = \int P_{cl}(q, p) dp \quad (4.3)$$

$$P(p) = \int P_{cl}(q, p) dq \quad (4.4)$$

Estas são as chamadas *distribuições marginais*. Ao calcularmos, no plano complexo, a transformada de Fourier da distribuição de probabilidade conjunta, obteremos a chamada função característica

$$\begin{aligned} \chi_{cl}(\eta) &= \int d^2\beta \exp(\beta\eta^* - \beta^*\eta) P(\eta, \eta^*) \\ &= \langle \exp(\beta\eta^* - \beta^*\eta) \rangle \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $\beta = x + iy$, $\beta^* = x - iy$, sendo x e y as variáveis de posição e momento, respectivamente. Uma propriedade útil das funções características é que podemos calcular momentos de variáveis do espaço de fase através de sua derivação

$$\langle \beta^{*m} \beta^n \rangle_{cl} = \frac{\partial^{n+m}}{\partial \eta^m \partial (-\eta^*)^n} \chi_{cl}(\eta) \Big|_{\eta=0}. \quad (4.6)$$

As funções características também serão muito úteis na definição das distribuições quânticas de quase-probabilidades.

4.2 Funções de Quase-Probabilidade

O operador densidade pode ser associado à distribuição de probabilidade clássica, $P_{cl}(q, p)$, pois este também deve ser positivo e normalizado [58], ou seja, $\langle \Psi | \hat{\rho} | \Psi \rangle \geq 0$ e

$Tr\hat{\rho} = 1$. O cálculo dos valores médios de operadores usando o operador densidade (ver Eq. (3.16)) também é semelhante àquela usada pela estatística clássica para o cálculo de médias de grandezas físicas.

As distribuições marginais de probabilidade nas representações de momento e posição associadas ao operador densidade são

$$P(q) = \langle q | \hat{\rho} | q \rangle \geq 0, \quad (4.7)$$

$$P(p) = \langle p | \hat{\rho} | p \rangle \geq 0. \quad (4.8)$$

Quanticamente, não é trivial definir uma distribuição de probabilidade conjunta, devido a não comutatividade entre \hat{q} e \hat{p} . É mais simples definir uma função característica quântica (s -parametrizada), em analogia com a definição da teoria clássica, porém levando em consideração as regras de comutação (Lema de Baker-Campbell-Hausdorff: $exp(\hat{A}+\hat{B}) = exp(-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]) exp(\hat{A}) exp(\hat{B})$ se $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$). Escrevemos então [27]

$$\chi(\eta, s) = Tr \left[\hat{\rho} exp \left(\eta \hat{a}^\dagger - \eta^* \hat{a} + \frac{s|\eta|^2}{2} \right) \right], \quad (4.9)$$

sendo $s \in [-1, 1]$ um parâmetro que indica o ordenamento dos operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger na exponencial, o que permite um número infinito de funções características (uma para cada s). Os ordenamentos mais usados em óptica quântica são: ordenamento normal, $s = 1$ (\hat{a}^\dagger à esquerda de \hat{a}), como $(\hat{a}^\dagger)^m (\hat{a})^n$; ordenamento anti-normal, $s = -1$ (\hat{a}^\dagger à direita de \hat{a}), como $(\hat{a})^m (\hat{a}^\dagger)^n$; e um ordenamento simétrico, $s = 0$ (\sim soma das permutações, ponderadas), como $(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger)/2$

Podemos agora, novamente em analogia com o caso clássico, definir a função de quase-probabilidade como a transformada de Fourier da função característica parametrizada em s [27],

$$P(\beta, s) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\eta \chi(\eta, s) exp(\beta\eta^* - \beta^*\eta). \quad (4.10)$$

As distribuições de quase-probabilidade são definidas unicamente pelo operador densidade e, neste sentido, caracterizam o estado quântico de um sistema. De acordo com os valores de s teremos diferentes funções de quase-probabilidade, como apresentaremos a seguir.

4.2.1 Função \mathcal{P} de Glauber-Sudarshan

Ao ordenamento normal dos operadores na função característica parametrizada, correspondente a fazermos $s = 1$ na Eq. (4.9), associamos a *Função \mathcal{P}* , introduzida por Glauber e Sudarshan em 1963 [50]. Assim, para um sistema descrito pelo operador densidade $\hat{\rho}$, podemos escrevê-la como

$$\mathcal{P}(\beta) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\eta \text{Tr} [\hat{\rho} \exp(\eta \hat{a}^\dagger) \exp(-\eta^* \hat{a})] \exp(\beta \eta^* - \beta^* \eta). \quad (4.11)$$

Considerando que $\hat{\rho}$ descreva um estado coerente ($\hat{\rho} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$), encontramos uma função \mathcal{P} do tipo δ -Dirac. Para estados genéricos, ela pode apresentar singularidade maior que a δ -Dirac, tipo δ' , δ'' , etc. Em certos casos, como do estado de Fock, $\mathcal{P}(\beta)$ pode resultar numa ultra-distribuição, isto é, envolvendo série infinita de derivadas de δ -Dirac [67]

$\mathcal{P}(\beta)$ é útil para calcular valores esperados de produtos de operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger normalmente ordenados; e é útil para representar operadores na base coerente, quando eles estão anti-normal ordenados.

$$\langle (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n \rangle = \int d^2\eta (\beta^*)^m \beta^n \mathcal{P}(\beta). \quad (4.12)$$

4.2.2 Função \mathcal{Q} de Husimi

A Função de Husimi [68], ou *Função \mathcal{Q}* , está associada ao ordenamento anti-normal dos operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger , sendo encontrada ao fazermos $s = -1$ na Eq. (4.9). Isto permite escrever, segundo a Eq. (4.10),

$$\mathcal{Q}(\beta) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\eta \text{Tr} [\hat{\rho} \exp(\eta^* \hat{a}) \exp(-\eta \hat{a}^\dagger)] \exp(\beta \eta^* - \beta^* \eta). \quad (4.13)$$

Na representação coerente, a equação anterior toma a forma mais compacta [25]

$$\mathcal{Q}(\beta) = \frac{1}{\pi} \langle \beta | \hat{\rho} | \beta \rangle, \quad (4.14)$$

onde β é um estado coerente com amplitude $\beta = x + iy$.

A Função \mathcal{Q} é sempre positiva, está bem definida para todo operador densidade e não apresenta singularidades. Contudo, esta ainda não pode ser considerada uma função de probabilidade usual pois nem sempre leva a distribuições marginais corretas (ver Eqs. (4.3) e (4.4)). A vantagem desta função é a facilidade de cálculo quando o operador densidade de um determinado problema pode ser expandido como um produto anti-normal

$$\langle \hat{a}^m (\hat{a}^\dagger)^n \rangle = \int d^2\eta (\beta^*)^m \beta^n \mathcal{Q}(\beta). \quad (4.15)$$

A Função \mathcal{Q} também é uma ferramenta útil na compreensão do mecanismo de interação do Modelo Jaynes-Cummings [69].

4.2.3 Função de Wigner

A *Função de Wigner* [26] para o campo eletromagnético está associada ao ordenamento simétrico dos operadores ($s = 0$ em 4.9) que, definida a partir da função característica, escreve-se como

$$\mathcal{W}(\beta) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\eta \text{Tr} [\hat{\rho} \exp(\eta \hat{a}^\dagger - \eta^* \hat{a})] \exp(\beta \eta^* - \beta^* \eta), \quad (4.16)$$

significando a “probabilidade” de observar a amplitude β do campo. Na realidade, a probabilidade real de medir um valor preciso de um observável é dada sempre pela distribuição marginal da função; por exemplo, ao expressarmos β em termos da posição q e do momento p , a probabilidade da medida de um valor em uma destas quadraturas será dada pela distribuição marginal

$$\mathcal{W}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}(q, p) dp. \quad (4.17)$$

Além de ser sempre real e normalizada a Função de Wigner existe para todos os operadores densidade $\hat{\rho}$, contudo não pode ser interpretada como uma probabilidade verdadeira, visto que pode, diferentemente da função \mathcal{Q} , apresentar valores negativos. A existência de partes negativas revelam que o estado do sistema é não-clássico [70]. Por esta razão, a função de Wigner pode ser usada no estudo da conexão entre as duas descrições, clássica e quântica. Esta função é também utilizada no estudo de decoerência e interferência quântica que surgem da superposição de estados [70], na reconstrução de estados quânticos [33] e em diversos estudos de propriedades do campo eletromagnético quantizado. Para uma melhor idéia de como esta distribuição nos fornece as informações do campo, calculemos sua representação para alguns estados do campo eletromagnético.

No estado de número, onde $\hat{\rho} = |n\rangle\langle n|$, obtemos

$$\mathcal{W}_n(q, p) = \frac{2}{\pi} (-1)^n \exp[-2(q^2 + p^2)] \frac{\mathcal{L}_n [4(q^2 + p^2)]}{n!}, \quad (4.18)$$

onde \mathcal{L}_n são os polinômios de Laguerre.

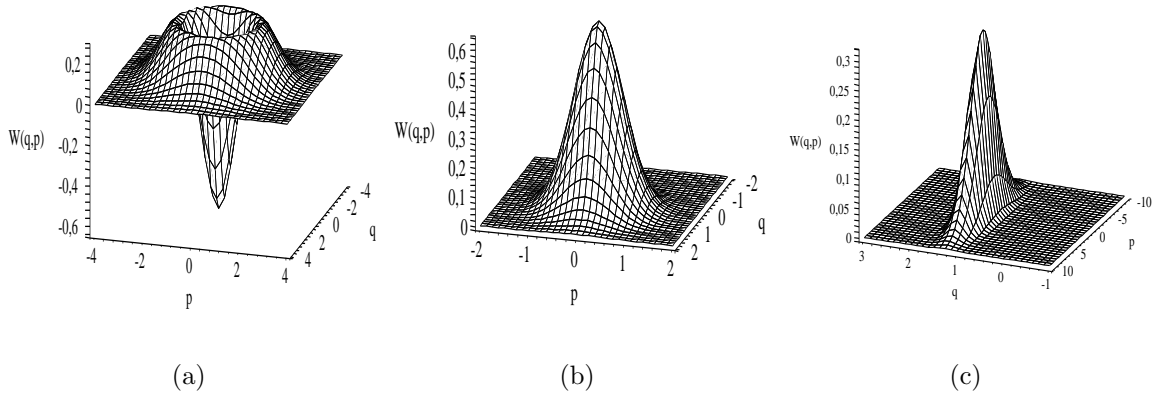


Figura 4.1: Função de Wigner do campo eletromagnético no plano (q,p) para; (a) estado de número $|1\rangle$; (b) estado coerente, com $\alpha = 0.4$ e (c) estado coerente comprimido.

Na Fig. 4.1-(a) apresentamos o gráfico, referente à Eq. (4.18), para o estado de número $|1\rangle$. Vemos que esta função tem simetria axial ao redor da origem do espaço de fase (com raio

correspondente a $r = \sqrt{n} = 1$), mostrando que as incertezas na determinação de q e p para o campo no estado de número são igualmente distribuídas e aumentam com n (não mostrado no gráfico). Além disso, a função apresenta valores negativos, que são uma assinatura do caráter quântico do campo, impedindo sua descrição via tratamento clássico.

No caso de um campo no estado coerente, $\hat{\rho} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$, a forma da função de Wigner é dada como

$$\mathcal{W}_c(q, p) = \frac{2}{\pi} \exp(-2|q + ip - \alpha|^2). \quad (4.19)$$

Para este estado, a função de Wigner é representada por uma Gaussiana (ver Fig. 4.1-(b)), sempre positiva e centrada no ponto $q_0 = \text{Re}(\alpha)$ e $p_0 = \text{Im}(\alpha)$, indicando que este estado tem fase e número médio de fótons bem definidos. A função não possui parte negativa e sua forma indica que é um estado de incerteza mínima, o que coincide com a definição do estado coerente como o mais “clássico” possível dos estados do oscilador harmônico quantizado.

No caso de um estado coerente comprimido a Gaussiana perde a simetria de rotação, apresentando um achatamento em uma das quadraturas do campo. Para este estado, a função de Wigner resulta

$$\mathcal{W}_{cc}(q, p) = \frac{1}{\pi} \exp\left[-r(q - \sqrt{2}\alpha)^2 - \frac{p^2}{r}\right], \quad (4.20)$$

onde r é o parâmetro de compressão.

Na Fig. 4.1-(c) mostramos a função de Wigner do estado coerente comprimido. Aqui, a compressão e o deslocamento foram feitos na variável q , visto que tomamos os parâmetros de compressão e deslocamento reais. Neste caso, a incerteza na quadratura q é comprimida abaixo da incerteza do estado coerente, tanto mais quanto maior for a compressão aplicada. Em consequência, a incerteza na variável p aumenta, garantindo que o princípio de incerteza de Heisenberg não seja violado.

4.2.4 Definições alternativas

Existem formas alternativas para funções de quase-probabilidade. Uma delas foi proposta por C. T. Lee [71], em 1991, que definiu uma função de distribuição $\mathcal{R}(r, \theta, \tau)$, chamada *função* \mathcal{R}^1 , que representada na base de número fica na forma

$$\mathcal{R}(r, \theta, \tau) = \frac{1}{\pi \tau} e^{-\frac{r^2}{\tau}} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \rho(n, m) e^{i(m-n)\theta} A_{n,m}, \quad (4.21)$$

onde os coeficientes $A_{n,m}$ são dados por

$$A_{n,m} = \left\{ \begin{array}{ll} (\tau - 1)/\tau^n \mathcal{L}_n(r^2/\tau(1 - \tau)), & \text{p/ } n = m \\ (\sqrt{m!/n!}) \frac{(\tau-1)^m}{\tau^n} r^{(n-m)} \mathcal{L}_m^{n-m}(r^2/\tau(1 - \tau)), & \text{p/ } n > m \\ (\sqrt{n!/m!}) \frac{(\tau-1)^n}{\tau^m} r^{(m-n)} \mathcal{L}_n^{m-n}(r^2/\tau(1 - \tau)), & \text{p/ } n < m \end{array} \right\} \quad (4.22)$$

e τ é um parâmetro contínuo ($\tau \in [0, 1]$).

De forma análoga à Eq. (4.9), a Eq. (4.21) apresenta infinitas distribuições de probabilidade, contudo para valores especiais de τ esta representará as funções de distribuição citadas nas seções anteriores. A saber [71]:

$$\begin{array}{ll} \tau = 0 & \implies \text{Função } \mathcal{P} \text{ de Glauber-Surdarshan,} \\ \tau = \frac{1}{2} & \implies \text{Função de Wigner,} \\ \tau = 1 & \implies \text{Função } \mathcal{Q} \text{ de Husimi.} \end{array}$$

Outra definição foi proposta por Moya-Cessa e Knight [72], em 1993, onde as distribuições de quase-probabilidade parametrizadas por s podem ser obtidas através de um traço na base de Fock

$$P(\beta, s) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1+s)^k}{(1-s)^{k+1}} \langle k | \hat{D}^\dagger(\beta) \hat{\rho} \hat{D}(\beta) | k \rangle, \quad (4.23)$$

¹Seguindo um procedimento similar ao de Cahill e Glauber [27], que correlacionou as funções \mathcal{Q} e \mathcal{P} através de uma transformação convolutiva, C. T. Lee introduziu um parâmetro τ contínuo e definiu uma função de distribuição geral, sendo esta uma interpolação contínua entre as funções \mathcal{Q} e \mathcal{P} , com a motivação de definir um parâmetro para medir a profundidade não-clássica de um estado.

ao invés da integração no espaço de fase. Esta mudança permite agilizar cálculos computacionais. Neste caso, os valores do parâmetro s que representarão as distribuições conhecidas serão os seguintes,

| | | |
|----------|------------|--|
| $s = -1$ | \implies | Distribuição de Husimi (\mathcal{Q}), |
| $s = 0$ | \implies | Distribuição de Wigner, |
| $s = 1$ | \implies | Distribuição \mathcal{P} de Glauber-Sudarshan. |

Capítulo 5

Operador Deslocamento Condicional

O *Operador Deslocamento Condicional* (ODC) é um dispositivo que acopla dois campos emergentes deslocando um deles. Este dispositivo tem sido extensivamente usado na literatura, por exemplo, por Milburn e Walls [73] em medidas quânticas não demolidoras, via contagem quântica; por Ban [74] em estudos teóricos de estatísticas de fótons, usando um misturador de quatro ondas (four-wave mixer) e por Avelar e *et al.* [75], em medidas da função característica, que fornece a distribuição de Wigner descrevendo estados quânticos em ondas propagantes.

No domínio da eletrodinâmica quântica de cavidades, Zou e *et al.* [31] propuseram a criação de ODC usando um átomo de dois níveis interagindo com um único modo do campo na cavidade, alimentados por um campo clássico intenso. Contudo, não há proposta de como implementar esse operador, de uma forma factível, para estados quânticos arbitrários no domínio de ondas viajantes. Aqui apresentamos um cálculo mostrando como deslocar condicionalmente um estado quântico arbitrário (puro ou de mistura) usando um meio Kerr entre dois divisores de feixe que tem uma de suas portas apropriadamente alimentadas por estados coerentes altamente excitados (Simone Souza, A. T. Avelar, J. M. C. Malbouisson e B. Baseia, *Conditional displacement operator for traveling wave fields*, submetido para publicação).

Como aplicações, mostramos que, acoplando o ODC em um dos braços de um interferômetro

de Mach-Zehnder alimentado pelos estados de zero (vácuo) e um fóton, é possível gerar superposi oes pares (+) e ímpares (−) de um estado arbitrário com sua contrapartida deslocada, $|\psi\rangle \pm \widehat{D}(\beta)|\psi\rangle$ e que medidas da probabilidade de detec ao do número de fótons, na saída do interferômetro, leva à fun ao de Wigner do estado $|\psi\rangle$ (Simone Souza, A. T. Avelar, J. M. C. Malbouisson e B. Baseia, *Conditional displacement operator for traveling wave fields*, submetido para publica ao).

Ainda neste capítulo, mostramos como gerar a superposi ao $|\psi\rangle \pm \widehat{D}(\beta)|\psi\rangle$ para modos estacionários e estudamos as propriedades estatísticas para o caso particular onde $|\psi\rangle = |N\rangle$, sendo $|N\rangle$ estado de número.

5.1 Construindo o Operador Deslocamento Condicional

Um diagrama esquemático do procedimento de gera ao do ODC   mostrado na Fig. 5.1. Dois modos, **a** e **b**, são conectados por um meio não-linear do tipo Kerr colocado entre dois divisores de feixe, DF_1 e DF_2 . Ambos os divisores de feixe simulam a a ao de um operador deslocamento em um estado quântico do campo incidente no modo **a**, quando sua segunda porta   alimentada por estados coerentes altamente excitados $|\gamma\rangle$ e $|-\gamma\rangle$. Desta forma, se dois estados arbitrários $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ entram, respectivamente, nos modos **a** e **b**, teremos que, depois de DF_1 , o estado total do sistema será

$$|\Psi'\rangle_{ab} = \widehat{D}_a(\alpha)|\psi\rangle_a|\phi\rangle_b, \quad (5.1)$$

onde $\alpha = R\gamma$, sendo R a reflectância de DF_1 (com $R \ll 1$) e $\widehat{D}_a(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})$ o operador deslocamento de Glauber [50].

O meio Kerr interage dispersivamente com os modos **a** e **b** segundo o hamiltoniano de intera ao [17]

$$\widehat{H}_K = hK\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{b}, \quad (5.2)$$

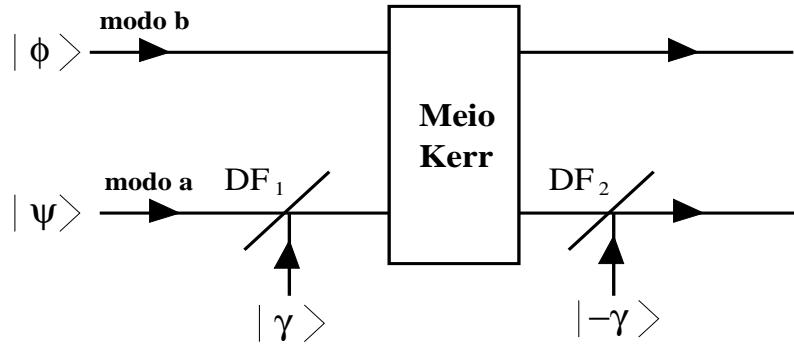


Figura 5.1: Ilustração esquemática do dispositivo ODC: consiste em um meio Kerr entre dois divisores de feixe ao longo do trajeto dos sinais de entrada.

onde K é proporcional à susceptibilidade não-linear de terceira ordem $\chi^{(3)}$. Assim, a ação do meio Kerr sobre os estados do campo é representada pelo operador unitário

$$\hat{U}_K = \exp(-i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{b}), \quad (5.3)$$

onde $\theta = Kl/v$, l é o comprimento do meio Kerr e v é a velocidade da luz no meio.

Devido à ação do hamiltoniano (5.2) sobre os modos **a** e **b**, seguido da ação de DF_2 , que corresponde a um segundo deslocamento, o estado do sistema evolui para

$$|\Psi''\rangle_{ab} = \hat{D}_a^\dagger(\alpha)e^{-i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{b}}\hat{D}_a(\alpha)|\psi\rangle_a|\phi\rangle_b. \quad (5.4)$$

Após alguma álgebra encontramos

$$\begin{aligned} \hat{D}_a^\dagger(\alpha)e^{-i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{b}}\hat{D}_a(\alpha) &= e^{-i\theta(\hat{a}^\dagger+\alpha^*)(\hat{a}+\alpha)\hat{b}^\dagger\hat{b}} \\ &= e^{(-i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}-i\theta\alpha\hat{a}^\dagger-i\theta\alpha^*\hat{a}-i\theta|\alpha|^2)\hat{b}^\dagger\hat{b}}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde usamos $\hat{D}(\alpha)^\dagger\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha$ e $\hat{D}(\alpha)^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*$ [76].

Para um meio Kerr realístico, pequenas mudanças na fase θ são facilmente produzidas em laboratórios; para altos valores de α e campos pouco excitados podemos descartar o primeiro termo da Eq. (5.5). Logo esta pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned} \hat{D}_a^\dagger(\alpha)e^{-i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{b}}\hat{D}_a(\alpha) &\simeq e^{-i\theta|\alpha|^2\hat{b}^\dagger\hat{b}}e^{(-i\theta\alpha\hat{a}^\dagger-i\theta\alpha^*\hat{a})\hat{b}^\dagger\hat{b}} \\ &\simeq e^{-i\theta|\alpha|^2\hat{b}^\dagger\hat{b}}\hat{U}_{DC}(\beta), \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde $\beta = -i\theta\alpha$, $|\beta| = \theta|\alpha|$ finito e

$$\hat{U}_{DC}(\beta) = \exp[\hat{b}^\dagger \hat{b} (\beta \hat{a}^\dagger - \beta^* \hat{a})] \quad (5.7)$$

é o Operador de Deslocamento Condicional (ODC) desejado.

Enfatizamos que a Eq.(5.6) é uma relação algébrica do operador; assim, não depende do estado da entrada no dispositivo ODC. No caso de um estado puro emaranhado, a Eq. (5.1) deve ser substituída por $|\Psi'\rangle_{ab} = \hat{D}_a(\alpha)|\Phi\rangle_{ab}$, enquanto que para um estado geral descrito por um operador densidade $\hat{\rho}_{ab}$ (que satisfaz $Tr\hat{\rho} = 1$ e $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$), deve ser escrito como $\hat{\rho}'_{ab} = \hat{D}_a(\alpha) \hat{\rho}_{ab} \hat{D}_a^\dagger(\alpha)$.

5.2 Aplicações

5.2.1 Gerando a Superposição: $|\psi\rangle \pm \hat{D}(\beta)|\psi\rangle$

Para preparar a superposição mencionada usaremos um Interferômetro de Mach-Zehnder (**IMZ**) associado a um ODC auxiliar e a um defasador (η) como mostrado na Fig.5.2. O ODC acopla um dos modos internos do interferômetro (modo **b**) com o modo externo (modo **a**) onde o campo em um estado $|\psi\rangle$ é injetado. Medidas da probabilidade de detecção do número de fótons na saída do **IMZ** permite preparar a superposição $|\psi\rangle \pm \hat{D}(\beta)|\psi\rangle$.

Inicialmente, um estado de vácuo $|0\rangle$ e um estado de um único fóton $|1\rangle$ entram nos modos **b** e **c**, respectivamente, passando pelo primeiro divisor de feixes (DF_1) (veja Fig.5.2). Consideramos aqui um divisor de feixes 50/50 ideal¹, o que significa fazer $\theta = \pi/2$ na Eq. (2.1). Assim a ação de DF_1 sobre os campos de entrada em **b** e **c** fica representada por

$$\hat{R}_{bc} = \exp\left[i\frac{\pi}{4}(\hat{b}^\dagger \hat{c} + \hat{b} \hat{c}^\dagger)\right], \quad (5.8)$$

¹Neste tipo de divisor de feixe, metade do feixe incidente é refletido; a outra metade transmitida.

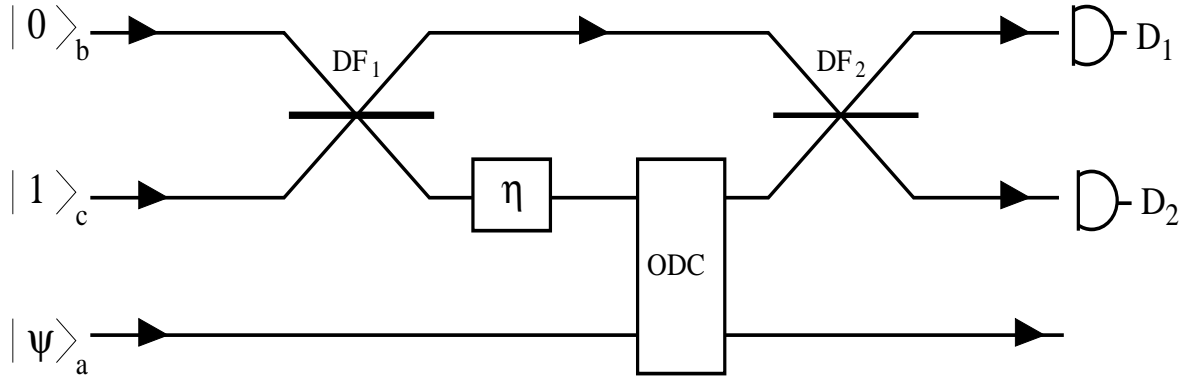


Figura 5.2: Ilustração esquemática do interferômetro de Mach-Zehnder (**IMZ**), incluindo o dispositivo do ODC em um braço, acoplando o modo interno **b** com o sinal do feixe de entrada em **a**.

onde \hat{b} (\hat{b}^\dagger) e \hat{c} (\hat{c}^\dagger) são os operadores aniquilação (criação) associados aos modos internos do interferômetro. Usando a Eq. (5.8) obtemos a seguinte transformação (ver Apêndice C.4)

$$\hat{R}_{bc}|0\rangle_b|1\rangle_c = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_b|1\rangle_c + i|1\rangle_b|0\rangle_c), \quad (5.9)$$

O defasador η adiciona uma fase $e^{i\eta}$ a um campo que o atravessa. Assim, justamente após atravessar DF_1 e o defasador, o estado (emaranhado) do sistema evolui para

$$|\Psi\rangle_{abc} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\eta}|0\rangle_b|1\rangle_c + i|1\rangle_b|0\rangle_c)|\psi\rangle_a, \quad (5.10)$$

onde o estado $|\psi\rangle_a$ no segundo membro é o estado inicial incidente no modo **a**.

O estado descrito pela Eq. (5.10) atravessa o dispositivo do ODC e a ação deste dispositivo sobre o estado $|\Psi\rangle_{abc}$ fornece as seguintes relações

$$e^{-i\theta|\alpha|^2\hat{b}^\dagger\hat{b}}\hat{U}_{CD}(\beta)|\psi\rangle_a|0\rangle_b = |\psi\rangle_a|0\rangle_b, \quad (5.11)$$

$$e^{-i\theta|\alpha|^2\hat{b}^\dagger\hat{b}}\hat{U}_{CD}(\beta)|\psi\rangle_a|1\rangle_b = e^{-i\theta|\alpha|^2}\hat{D}_a(\beta)|\psi\rangle_a|1\rangle_b, \quad (5.12)$$

e assim, depois do ODC e de DF_2 (que nos fornece $\hat{R}_{bc}|1\rangle_b|0\rangle_c = 1/2(|1\rangle_b|0\rangle_c + i|0\rangle_b|1\rangle_c)$) o estado inteiro do sistema pode ser escrito como

$$|\Psi'\rangle_{abc} = \frac{1}{2}\left[e^{i\eta}(|0\rangle_b|1\rangle_c + i|1\rangle_b|0\rangle_c) + i e^{-i\theta|\alpha|^2}\hat{D}_a(\beta)(|1\rangle_b|0\rangle_c + i|0\rangle_b|1\rangle_c)\right]|\psi\rangle_a \quad (5.13)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-i\theta|\alpha|^2}\left[|0\rangle_b|1\rangle_c\left(e^{i\xi} - \hat{D}_a(\beta)\right) + i|1\rangle_b|0\rangle_c\left(e^{i\xi} + \hat{D}_a(\beta)\right)\right]|\psi\rangle_a, \quad (5.14)$$

com $\xi = \eta + \theta|\alpha|^2$.

Note que o estado $|\Psi'\rangle_{abc}$ também é emaranhado. Neste ponto teremos que, se o detector D_1 disparar (não disparar), enquanto D_2 não disparar (disparar), corresponderá a obtermos o estado $|1\rangle_b|0\rangle_c$ ($|0\rangle_b|1\rangle_c$) na saída de DF_2 e o modo **a** é projetado no estado

$$|\psi^\pm\rangle_a^{saida} = \frac{1}{2}e^{-i\theta|\alpha|^2} \left[e^{i\xi_0} \pm \hat{D}_a(\beta) \right] |\psi\rangle_a, \quad (5.15)$$

onde fizemos $\xi = \xi_0 + 2\pi n$, com n inteiro e $0 \leq \xi_0 < 2\pi$. Finalmente, a menos de uma fase global, a superposição $|\psi\rangle \pm \hat{D}(\beta)|\psi\rangle$ é obtida da Eq. (5.15) para $\xi_0 = 0$; isto pode ser feito ajustando PS tal que $\eta = -\theta|\alpha|^2$.

Superposições de estados do tipo $|\psi\rangle \pm \hat{D}(\beta)|\psi\rangle$ em ondas viajantes tem interessantes aplicações na literatura. Por exemplo, fazendo $|\psi\rangle = |\alpha\rangle$ e $\beta = -2\alpha$ obtemos os estados tipo gato de Schrödinger par (+) e ímpar (-), $|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle$; fazendo $|\psi\rangle = |0\rangle$ obtemos a superposição de um estado de vácuo e um estado coerente, $|0\rangle \pm |\beta\rangle$, neste caso o ODC faz o papel de interruptor quântico [77]. Outra família interessante de estados pode ser obtida fazendo $|\psi\rangle = |n\rangle$, produzindo a superposição $|n\rangle \pm \hat{D}(\beta)|n\rangle$.

5.2.2 Medida da Função de Wigner

Mostraremos agora de que forma o ODC implementado aqui poderá ser usado para medir a função de Wigner de um estado do campo eletromagnético. Começaremos calculando a probabilidade de detecção do número de fótons na saída do **IMZ**, usando, para este fim, os estados dados pela Eq. (5.15). Uma vez que o experimento de fotodetecção, que nos fornece a Eq. (5.15), é repetido muitas vezes, começando sempre do mesmo estado inicial, podemos calcular as probabilidades $P_{10}(\beta, \xi_0)$ e $P_{01}(\beta, \xi_0)$ de detectar $|1\rangle_b|0\rangle_c$ e $|0\rangle_b|1\rangle_c$, respectivamente. Assim, sabendo que

$$P_{10}(\beta, \xi_0) = |\langle A_{10}|\Psi'\rangle_{abc}|^2, \quad (5.16)$$

onde definimos $|A_{10}\rangle = |1\rangle_b|0\rangle_c$, teremos

$$\begin{aligned}
P_{10}(\beta, \xi_0) &= \langle A_{10}|\Psi'\rangle_{abc} \langle\Psi'|A_{10}\rangle \\
&= \langle A_{10}|\hat{\rho}_{abc}|A_{10}\rangle \\
&= Tr_{A_{10}} \{ \hat{\rho}_{abc} |A_{10}\rangle\langle A_{10}| \}.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Usando a Eq. (5.14) encontramos

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{abc} &= \frac{1}{4} \left(e^{i\xi_0} - \hat{D}_a(\beta) \right) |A_{01}\rangle\langle A_{01}| \hat{\rho}_a \left(e^{-i\xi_0} - \hat{D}_a^\dagger(\beta) \right) \\
&\quad - \frac{i}{4} \left(e^{i\xi_0} - \hat{D}_a(\beta) \right) |A_{01}\rangle\langle A_{10}| \hat{\rho}_a \left(e^{-i\xi_0} + \hat{D}_a^\dagger(\beta) \right) \\
&\quad + \frac{i}{4} \left(e^{i\xi_0} + \hat{D}_a(\beta) \right) |A_{10}\rangle\langle A_{01}| \hat{\rho}_a \left(e^{-i\xi_0} - \hat{D}_a^\dagger(\beta) \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \left(e^{i\xi_0} + \hat{D}_a(\beta) \right) |A_{10}\rangle\langle A_{10}| \hat{\rho}_a \left(e^{-i\xi_0} + \hat{D}_a^\dagger(\beta) \right),
\end{aligned} \tag{5.18}$$

onde $|A_{01}\rangle = |0\rangle_b|1\rangle_c$ e $\hat{\rho}_a = |\Psi\rangle_a\langle\Psi|_a$ é o operador densidade descrevendo o estado inicial sendo medido. Desta forma encontramos

$$\begin{aligned}
P_{10}(\beta, \xi_0) &= \frac{1}{4} Tr_a \left\{ \left[e^{i\xi_0} + \hat{D}_a(\beta) \right] \hat{\rho}_a \left[e^{-i\xi_0} + \hat{D}_a^\dagger(\beta) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ e^{-i\xi_0} Tr_a \left[\hat{D}(\beta) \hat{\rho}_a \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

De forma similar, a probabilidade $P_{01}(\beta, \xi_0)$ para a detecção em D_2 , ou seja, para a detecção de $|0\rangle_b|1\rangle_c$, resulta

$$P_{01}(\beta, \xi_0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ e^{-i\xi_0} Tr_a \left[\hat{D}(\beta) \hat{\rho}_a \right] \right\}. \tag{5.20}$$

As probabilidades (5.19) e (5.20) nos fornecem

$$\begin{aligned}
\Delta P(\beta, \xi_0) &= P_{10}(\beta, \xi_0) - P_{01}(\beta, \xi_0) \\
&= \text{Re} \left\{ e^{-i\xi_0} Tr_a \left[\hat{D}(\beta) \hat{\rho}_a \right] \right\},
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Usando a definição de função característica de um estado quântico com os operadores simetricamente ordenados [27], $\chi_a(\beta) = \text{Tr} [\hat{\rho} \hat{D}(\beta)]$, a Eq. (5.21) pode ser reescrita como

$$\Delta P(\beta, \xi_0) = \text{Re} \{ e^{-i\xi_0} \chi_a(\beta) \}. \quad (5.22)$$

Observamos que a medida de $\Delta P(\beta, 0)$ fornece a parte real da função característica, ao passo que a medida de $\Delta P(\beta, \pi/2)$ fornece sua parte imaginária. Assim, obtemos

$$\chi_a(\beta) = \Delta P(\beta, 0) + i\Delta P\left(\beta, \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.23)$$

Estas duas medidas conduzem aos valores de $\chi_a(\beta)$ em dois pontos, β e $-\beta$, devido a propriedade $\chi_a^*(\beta) = \chi_a(-\beta)$. Uma discussão detalhada sobre essa ambiguidade da função característica pode ser encontrada em [78].

Visto que a função de Wigner é a transformada de Fourier da função característica χ_a , isto é,

$$W(z) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\beta \chi_a(\beta) \exp(z\beta^* - z^*\beta), \quad (5.24)$$

resulta que a determinação de uma base razoável de valores de $\chi_a(\beta)$ permite a reconstrução da função de Wigner do estado do campo que entra pelo modo externo **a**.

Podemos encontrar também a função característica anti-normal ordenada, $\chi_A(\beta) = \chi_a(\beta) \exp(-|\beta|^2/2)$, que conduz a função \mathcal{Q} de Husimi via transformada de Fourier. Neste caso, é necessário encontrar somente os valores de $\chi(\beta)$ em uma vizinhança de $\beta = 0$, visto que o fator exponencial faz $\chi_A(\beta)$ ter valores insignificantes para grandes valores de $|\beta|$. O parâmetro β pode ser variado na escala de interesse controlando os parâmetros α e θ , uma vez que este é dado por $\beta = -i\theta\alpha$ (assumimos, como visto anteriormente, que experimentalmente devemos ter grandes valores para α e pequenos valores para θ).

5.3 Geração da Superposição $|\psi\rangle \pm \hat{D}(\beta)|\psi\rangle$ em modos estacionários

A superposição $|\psi\rangle \pm \hat{D}(\beta)|\psi\rangle$ pode ser produzida em um campo estacionário aprisionado em uma cavidade de microondas (Simone Souza, A.T. Avelar, N.G. de Almeida e B. Baseia, *Superposition of Fock and displaced Fock states: generation and properties*, submetido para publicação) usando o seguinte procedimento: uma cavidade supercondutora de alta qualidade é colocada entre duas cavidades de baixa qualidade (zonas de Ramsey \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 , como mostrado na Fig. 5.3. Um átomo de Rydberg de três níveis é ejetado de uma fonte de átomos (representada na Fig. 5.3 por \mathbf{F}_a), com velocidade selecionada e é preparado em um estado circular excitado $|e\rangle$ (número quântico principal tipicamente igual a 50, correspondendo a um tempo de vida da ordem de milisegundos). As zonas de Ramsey \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 são alimentadas por um campo clássico, produzido pelo gerador de microondas (\mathbf{MG}) e este campo interage ressonantemente com os estados $|e\rangle$ e $|g\rangle$ do átomo de Rydberg. Segundo as Eqs. (2.13) e (2.14) se ajustarmos a intensidade do campo de modo a produzir uma rotação de $\pi/2$ no estado atômico, este será levado a uma superposição dos estados $|e\rangle$ (excitado) e $|g\rangle$ (fundamental), a saber

$$\hat{R}_n|e\rangle = \frac{|g\rangle + |e\rangle}{\sqrt{2}}, \quad \text{e} \quad \hat{R}_n|g\rangle = \frac{|g\rangle - |e\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Em seguida, o átomo, neste estado de superposição, interage com o campo na cavidade \mathbf{C} . Esta interação átomo-campo é descrita pelo hamiltoniano efetivo (veja Apêndice B)

$$H_{ef} = \hbar \chi (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) |e\rangle \langle e|, \quad (5.25)$$

sendo \hat{a}^\dagger e \hat{a} os operados criação e aniquilação de fótons do campo, $\chi = \Omega\lambda/\delta$, em que Ω indica a frequência de transição entre os níveis $|e\rangle$ e $|i\rangle$ (intermediário) do átomo, λ a frequência de transição entre $|e\rangle$ e o estado do laser e $\delta = \omega_c - \omega_0$ a dessintonia entre as frequências do átomo (ω_0) e do campo na cavidade (ω_c). Assim, a ação do átomo sobre o estado inicial do campo

($|\varphi\rangle$) dentro da cavidade **C** é representado pelo seguinte operador unitário

$$U_{ef} = e^{-i\frac{\Omega\lambda}{\delta}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)|e\rangle\langle e|t}, \quad (5.26)$$

que pode ser reescrito como (ver Apêndice B)

$$U_{ef} = \hat{D}(\alpha) |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|, \quad (5.27)$$

onde $\hat{D}(\alpha) = e^{-i(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})}$ é o operador deslocamento de Glauber com $\alpha = -i\Omega\lambda t/\delta$.

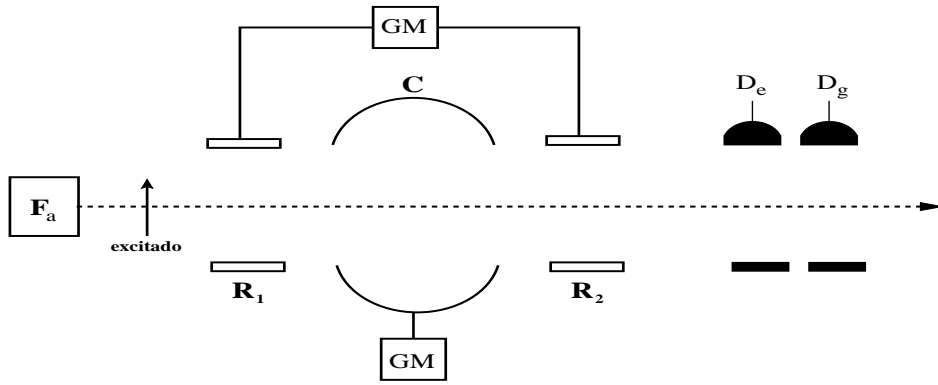


Figura 5.3: Esquema experimental para a geração da superposição $|\varphi\rangle \pm \hat{D}(\beta)|\varphi\rangle$ em modos estacionários.

Como o átomo é preparado em um estado excitado $|e\rangle$, teremos, no momento em que ele cruza a cavidade **C**, interagindo com o estado $|\varphi\rangle$ em seu interior, o seguinte estado

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{AC} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\hat{D}(\alpha) |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| \right] [|e\rangle + |g\rangle] |\varphi\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\hat{D}(\alpha) |e\rangle + |g\rangle \right] |\varphi\rangle. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Após deixar a cavidade **C**, o átomo interage com a segunda zona de Ramsey (R_2), assim como em R_1 , fazendo com que os estados $|e\rangle$ e $|g\rangle$ sejam transformados novamente segundo as Eqs. (2.13) e (2.14). Após a passagem do átomo o estado que descreve o sistema átomo-campo torna-se

$$|\psi\rangle_{AC} = \frac{1}{2} \left[(\hat{D}(\alpha) - 1) |\varphi\rangle |e\rangle + (\hat{D}(\alpha) + 1) |\varphi\rangle |g\rangle \right]. \quad (5.29)$$

Depois de \mathbf{R}_2 o átomo pode ser detectado tanto em $|e\rangle$ quanto em $|g\rangle$ pelos dois detectores atômicos \mathbf{D}_1 e \mathbf{D}_2 (ver Fig. 5.3); se o átomo for detectado em $|g\rangle$, o campo dentro da cavidade colapsa na superposição

$$|\psi\rangle_C = \frac{1}{2} \left[|\varphi\rangle + \hat{D}(\alpha) |\varphi\rangle \right]; \quad (5.30)$$

enquanto que, se o átomo for detectado em $|e\rangle$ teremos

$$|\psi\rangle_C = \frac{1}{2} \left[|\varphi\rangle - \hat{D}(\alpha) |\varphi\rangle \right], \quad (5.31)$$

sendo estes os estados superpostos que queríamos gerar.

5.4 Superposição de Número mais Número Deslocado: Propriedades Não-Clássicas

Mostramos como gerar a superposição $|\psi\rangle \pm \hat{D}(\beta)|\psi\rangle$ tanto em modos viajantes como em cavidades. Como aplicação, vamos considerar um caso particular onde $|\varphi\rangle = |N\rangle$, sendo $|N\rangle$ um estado de número. Neste caso a superposição “número mais número deslocado” (NND) pode ser escrita como

$$|\psi\rangle = \mathcal{N} \left[|N\rangle \pm \hat{D}(\alpha) |N\rangle \right], \quad (5.32)$$

onde \mathcal{N} é o fator de normalização do estado. Expandindo o estado $|\psi\rangle$ na base de Fock, $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle$, os coeficientes da expansão (C_n) podem ser escritos como [64]

$$C_n = \begin{cases} \mathcal{N} \left[\sqrt{\frac{N!}{n!}} e^{-|\alpha|^2/2} \alpha^{(n-N)} \mathcal{L}_N^{n-N}(|\alpha|^2) \right]; & n > N \\ \mathcal{N} \left[e^{-|\alpha|^2/2} \mathcal{L}_n^{N-n}(|\alpha|^2) + 1 \right]; & n = N \\ \mathcal{N} \left[\sqrt{\frac{n!}{N!}} e^{-|\alpha|^2/2} [\alpha^{(n-N)}]^* \mathcal{L}_n^{N-n}(|\alpha|^2) \right]; & n < N \end{cases} \quad (5.33)$$

onde \mathcal{L}_i^j são os polinômios generalizados de Laguerre e \mathcal{N} resulta

$$\mathcal{N} = \left[2 \pm 2e^{-|\alpha|^2/2} \mathcal{L}_N(|\alpha|^2) \right]^{-1/2}. \quad (5.34)$$

Estudando a probabilidade de sucesso para a geração destes estados de superposição vemos que, para o estado de **NND**-par (o que significa tomarmos o sinal + nas Eqs. (5.32), (5.33) e 5.34), a probabilidade de sucesso será igual a probabilidade de detectar o estado atômico da superposição descrita pela Eq. (5.29), com $|\varphi\rangle = |N\rangle$, no estado fundamental $|g\rangle$, ou seja,

$$\mathcal{P}^{(+)} = |\langle g|\Psi\rangle|^2, \quad (5.35)$$

cujo resultados para vários valores de N são mostrados na Fig. 5.4. Os gráficos para o **NND** ímpar começam da origem e são complementares ao **NND**-par, como mostra a Fig. 5.5.

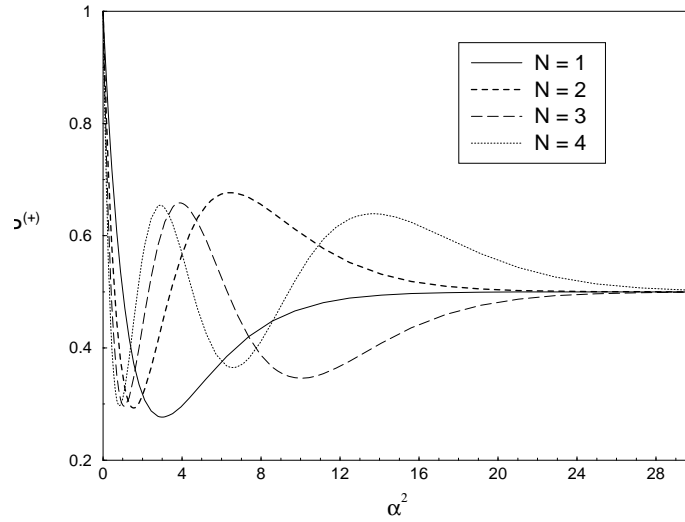


Figura 5.4: Probabilidade de sucesso $\mathcal{P}^{(+)}$ versus α para a superposição **NND**-par.

Notamos que a probabilidade de sucesso do esquema depende dos parâmetros N e $|\alpha|^2$. Essa probabilidade do sucesso para geração do **NND**-par pode ser maior que 0.5, como é mostrado na Fig. 5.4 para pequenos valores de $|\alpha|^2$ ($|\alpha|^2 < 1$). Por outro lado, a probabilidade de gerar a superposição **NND**-ímpar ($|N\rangle - \hat{D}(\alpha)|N\rangle$) é complementar a probabilidade para o **NND**-par (veja Fig. 5.5), uma vez que a detecção atômica dos estados $|g\rangle$ e $|e\rangle$ são complementares. Desse modo o resultado $\mathcal{P}(\alpha) > 0,5$ ocorrerá para a superposição **NND**-ímpar quando $|\alpha|^2 > 1$.

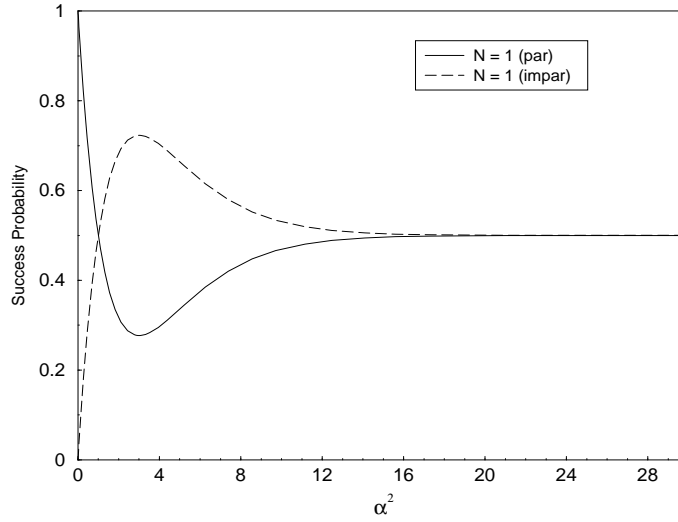


Figura 5.5: Probabilidade de sucesso para a superposição **NND**-par e ímpar usando $|N\rangle = |1\rangle$.

Descrevemos, nas próximas sub-seções, algumas propriedades não-clássicas, como as apresentadas no Cap. 3, para o estado de superposição descrito pela Eq. (5.32).

5.4.1 Distribuição de Número de Fótons

Podemos calcular a distribuição de número de fótons (P_n) da superposição (5.32) usando a Eq. (3.17), descrita na Seç. 3.3.1, onde os C_n são os coeficientes da expansão do estado de **NND** na base de Fock. Desta forma obtemos

$$P_n = \begin{cases} \mathcal{N}^2 \left[\frac{N!}{n!} e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2(n-N)} (\mathcal{L}_N^{n-N}(|\alpha|^2))^2 \right]; n > N \\ \mathcal{N}^2 \left[1 + e^{-|\alpha|^2} [\mathcal{L}_n^{N-n}(|\alpha|^2)]^2 \pm e^{-|\alpha|^2/2} \mathcal{L}_n^{N-n}(|\alpha|^2) \right]; n = N \\ \mathcal{N}^2 \left[\frac{n!}{N!} e^{-|\alpha|^2} (|\alpha|)^{2(n-N)} (\mathcal{L}_n^{N-n}(|\alpha|^2))^2 \right]; n < N \end{cases} \quad (5.36)$$

As Figs. 5.6 e 5.7 mostram as distribuições estatísticas $P_n^{(+)}$ (caso par) e $P_n^{(-)}$ (caso ímpar) versus n , respectivamente, para alguns valores de $|\alpha|^2$ e N . Em ambos os casos notamos oscilações na distribuição, evidenciando o caráter quântico da superposição [79]. A ocorrência de zeros na distribuição de número de fótons constitui também uma característica não-clássica

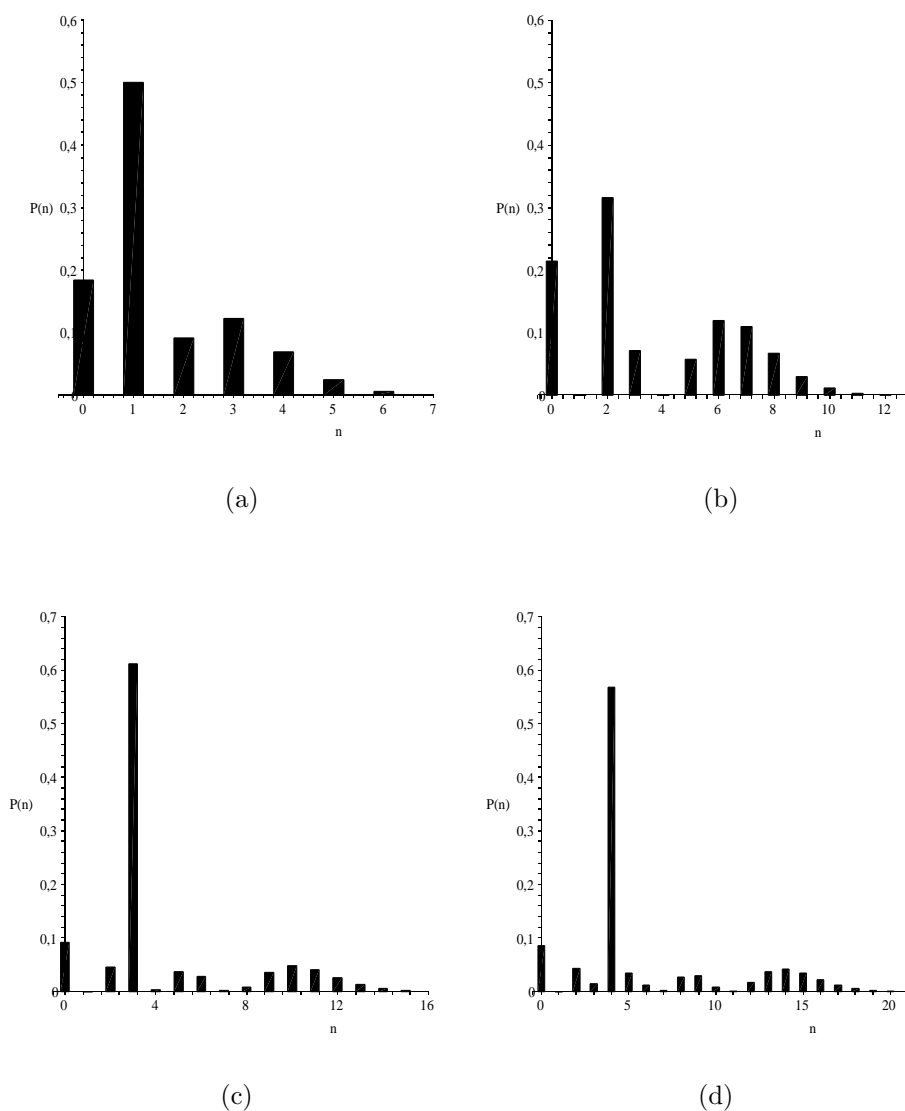


Figura 5.6: Distribuição de Número de Fótons, $P_n^{(+)}$ versus n (caso par), for (a) $N = 1$, $|\alpha|^2 = 1.0$; (b) $N = 2$, $|\alpha|^2 = 2.0$; (c) $N = 3$, $|\alpha|^2 = 3.0$; (d) $N = 4$, $|\alpha|^2 = 4.0$.

do estado [80]. Notamos nas Figs. 5.6 e 5.7, que a distribuição estatística está concentrada em $n = N$ para cada conjunto de parâmetros $(|\alpha|^2, N)$ quando $|\alpha|^2 = N$, sendo que essa concentração é igual, para o caso par e ímpar, quando $(|\alpha|^2, N) = (1, 1)$ e diferente para os demais casos, onde P_n é maior quando a paridade de N (com $|\alpha|^2 = N$) é contrária a paridade (par (+) e ímpar (-)) da superposição, ou seja, $P_2^{(+)} < P_2^{(-)}$ e $P_3^{(-)} < P_3^{(+)}$.

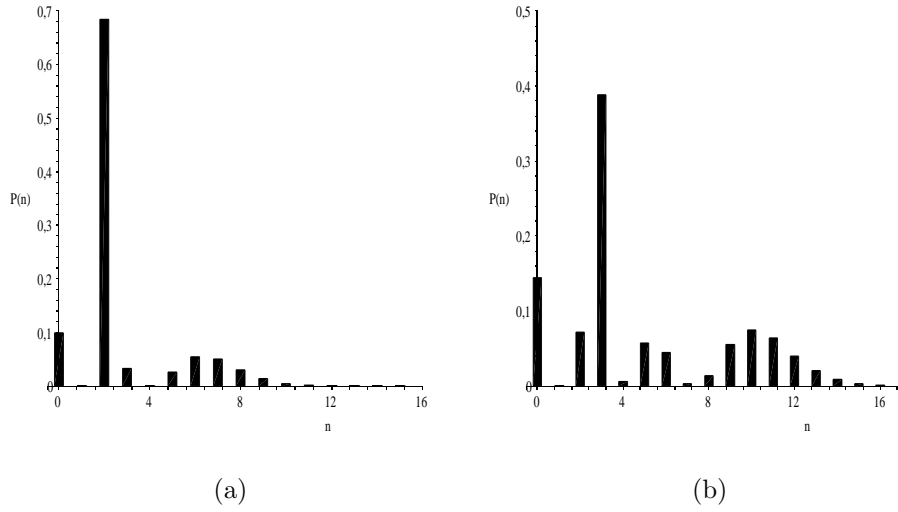


Figura 5.7: Distribuição de Número de Fótons, $P_n^{(-)}$ versus n (caso ímpar), for (a) $N = 2$, $|\alpha|^2 = 2.0$ e (b) $N = 3$, $|\alpha|^2 = 3.0$.

5.4.2 Estatística Sub-Poissoniana

O efeito sub-Poissoniano é usualmente estudado via o parâmetro Q de Mandel, descrito pela Eq. (3.18). Substituindo a Eq. (5.36) na Eq. (3.18), encontramos o valor do parâmetro Q de Mandel para a superposição **NND** dada pela Eq. (5.32). Como já mencionado, o estado de número $|N\rangle$ exibe máximo efeito sub-Poissoniano ($Q = -1$) independente do valor de N , ao passo que o estado de número deslocado $D(\alpha)|N\rangle$ exibe este efeito somente quando $|\alpha| < 1/2$ [64]. A superposição dessas duas componentes altera esses resultados.

As Figs. 5.8 e 5.9 exibem gráficos do parâmetro Q de Mandel, para o estado de **NND**-par e **NND**-ímpar, respectivamente, como função de $|\alpha|^2$, para $N = 1, 2, 3, 4$. Os gráficos mostram que as superposições exibem as três estatísticas (Poissoniana, sub-Poissoniana e super-Poissoniana), contudo o efeito sub-Poissoniano ocorre somente para certos intervalos do parâmetro $|\alpha|^2$. No caso par $|\alpha|^2 \lesssim 0.65$, sendo que este intervalo aumenta quando N diminui; para $N = 1$, este intervalo é máximo. No caso ímpar esse intervalo aumenta; contudo o efeito

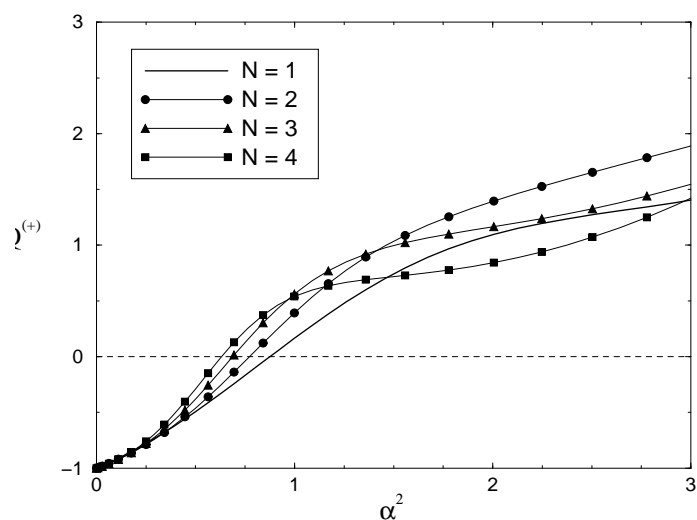


Figura 5.8: Parâmetro Q de Mandel $Q^{(+)}$ versus $|\alpha|^2$ (caso par), para pequenos valores de N .

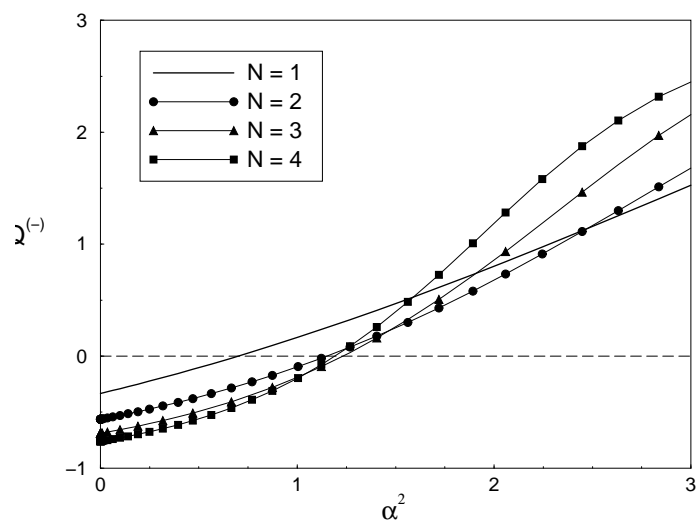


Figura 5.9: Parâmetro Q de Mandel $Q^{(-)}$ versus $|\alpha|^2$ (caso ímpar), para pequenos valores de N .

não é tão intenso ($Q > -1$) e, ao contrário do caso par, o intervalo é mínimo para $N = 1$.

5.4.3 Anti-Agrupamento de Fótons

A função de correlação de segunda ordem de um estado do campo (ver Eq. (3.21)) informa se a probabilidade de detectar um segundo fóton logo após a detecção do primeiro é maior ou menor em relação àquela da luz coerente. Esta probabilidade é descrita pela Eq. (3.21)

e se resultar menor que 1 implica que este estado exhibe o efeito de anti-agrupamento de fótons ou “antibunching”. Sabemos que para um estado de número $|N\rangle$, este efeito é mais pronunciado para pequenos valores de N [58] (veja Eq. (3.26)), ao passo que para o estado de número deslocado $|\alpha, N\rangle$ este efeito ocorre somente para $|\alpha| < 0,5$ [64].

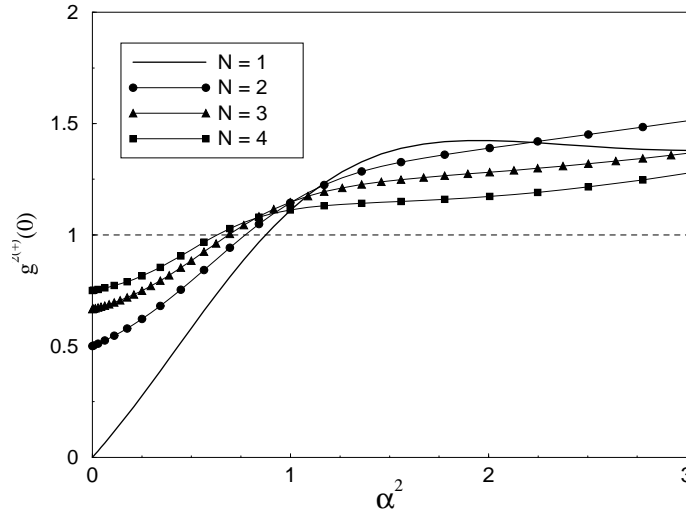


Figura 5.10: Função de correlação de segunda ordem $g^{2(+)}(0)$ versus parâmetro (real) α .

Das Figs. 5.10 e 5.11, que exibem os gráficos da função de correlação de 2ª ordem para as superposições **NND-par** e **NND-ímpar**, vemos que o efeito de anti-agrupamento torna-se mais relevante, no caso da superposição **NND-par**, para pequenos valores de N , diminuindo quando $|\alpha|$ aumenta até desaparecer quando $|\alpha| > 1$, uma característica similar ao efeito sub-Poissoniano mostrado na Fig. 5.8. Outra característica similar nestes dois efeitos é a de que no intervalo em que ocorrem ($|\alpha| \lesssim 0.8$) suas intensidades ficam mais relevantes quando $N = 1$ (ver Figs. 5.8, 5.10). Para o caso ímpar também vemos efeitos similares aos mostrados na Fig. 5.9. Neste caso notamos que o intervalo em que o efeito ocorre também aumenta e que este é mínimo para $N = 1$.

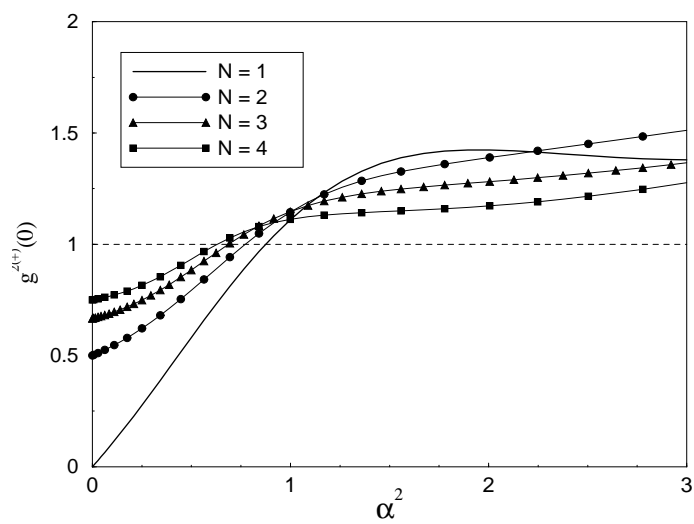


Figura 5.11: Função de correlção de segunda ordem $g^{2(-)}(0)$ versus parâmetro (real) α .

Capítulo 6

Comentários e Conclusões

Neste trabalho apresentamos uma técnica para a geração do Operador Deslocamento Condicional (ODC) para campos em modos viajantes, utilizando um meio Kerr colocado entre dois divisores de feixe alimentados por campos coerentes altamente excitados. Mostramos que este dispositivo, quando convenientemente inserido em um dos braços de um interferômetro de Mach-Zehnder, permite a geração de estados do tipo $|\psi\rangle \pm \hat{D}(\beta)|\psi\rangle$, com interessantes aplicações mencionadas na Seção 5.2.1, bem como a medida da função de Wigner (Seção 5.2.2) a partir da probabilidade de detecção de fótons na saída do interferômetro. Ambas as aplicações são válidas também para estados de mistura. Mostramos, ainda no Cap. 5, como gerar a superposição mencionada acima em modos estacionários utilizando um átomo de três níveis interagindo com um único modo do campo em uma cavidade com alto fator de qualidade. Como aplicação, estudamos algumas propriedades estatísticas desta superposição especificando $|\psi\rangle = |N\rangle$.

No que diz respeito à realização experimental do esquema em modos viajantes, podemos dizer que, devido aos atuais avanços tecnológicos, fotodetectores com eficiência próxima a 100% podem ser encontrados [40, 41] bem como fontes de um único fóton bastante estáveis, por exemplo, usando: pontos quânticos [81], moléculas [82], átomos [83], métodos de conversão paramétrica descendente (down-conversion) [84], dentre outros, tornando factível a geração da superposição $|\psi\rangle \pm \hat{D}(\beta)|\psi\rangle$, bem como a medida da função de Wigner. Com respeito a esta

função, vale a pena comparar o esquema com aquele da Ref. [32], onde a medida da função de Wigner usa um interferômetro de Mach-Zehnder auxiliado por um meio Kerr. Neste, a função de Wigner é medida diretamente, sendo portanto vantajoso; contudo [32] requer uma mudança de π na fase do campo ($\theta = \pi$). Para modalidades óticas, obter tal fase requer uma susceptibilidade não-linear muito grande, não disponível, ou um meio Kerr extremamente longo [85], o que torna sua implementação experimental muito difícil atualmente. No esquema proposto neste trabalho, o objetivo (medir a função de Wigner e gerar a superposição em modos viajantes) é atingido com o uso de pequenos valores de θ , ou seja, pequenas mudanças na fase, que são conseguidas facilmente em laboratório usando um meio Kerr realístico. Essa característica constitui um resultado notável do ponto de vista experimental.

As dificuldades para a geração do estado de superposição em modos estacionários são um pouco maiores do que aquelas nos modos viajantes. Entre essas dificuldades podemos citar o fato de que os detectores de ionização disponíveis terem eficiência máxima em torno de 70%; porém, em um trabalho recente [86], Haroche e colaboradores abrem ótimas perspectivas em relação ao aumento da eficiência de detecção atômica em experiências em cavidades de microondas. Outra inconveniência experimental é que estados de campos em cavidades são fortemente afetados pelos efeitos de decoerência que degradam o estado que está sendo preparado; contudo esforços tem sido feitos com o intuito de minimizar este efeito [48]. Irregularidades provenientes da perda de coerência é quantificado fazendo uso do conceito de *Fidelidade*¹, sendo muito importante, visto que estima as condições que permitem a confiabilidade do esquema experimental. Neste trabalho, a fidelidade de geração da superposição de número com número deslocado (**NND**) é aproximadamente 100%, assumindo que o estado $|N\rangle$ inicial é um dado

¹A *Fidelidade* é definida como sendo o quadrado do módulo do produto interno entre o estado final (supostamente danificado) e o estado ideal, representando portanto uma medida do desvio do estado real em relação ao estado ideal. No caso geral, em que o estado final é uma mistura estatística, a fidelidade é definida como o valor do operador densidade reduzido do sistema em relação ao estado ideal.

exato do experimento e sabendo que os estados de número $|N\rangle$, com pequenos valores de N [20, 21], e parâmetros de deslocamento α com precisão na primeira casa decimal, podem ser preparados com altas fidelidades. Quanto ao sucesso de geração, vimos que no caso particular do estado **NND**, a probabilidade de sucesso da geração depende dos parâmetros N e α e que esta pode ser maior que 0.5 (veja Fig. 5.5). Observamos também que as probabilidades, para **NND-par** e **NND-ímpar** são complementares. Estudamos ainda algumas das propriedades não-clássicas desta superposição: (i) distribuição estatística, P_n ; (ii) ocorrência de estatística sub-Poissoniana e (iii) anti-agrupamento de fótons; sendo que todas apresentaram alguma característica não-clássica, a saber, oscilações e zeros na distribuição estatística P_n , fator Q de Mandel menor que zero para valores específicos de α e N e função de correlação de segunda ordem ($g^2(0)$) menor que 1.

Finalmente, é importante mencionar que além do caso especial **NND** aqui estudado, a superposição $|\psi\rangle \pm \hat{D}(\beta)|\psi\rangle$ contempla outros casos interessantes; um deles é o estado $|0\rangle + \hat{D}(\alpha)|0\rangle$ estudado por Lutterbach e Davidovich [77], para executar um interruptor ótico com coerência quântica entre seus estados aberto e fechado.

Apêndice A

Aproximação de James

Começemos com a Equação de Schrödinger na representação de interação,

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}_I(t) |\psi(t)\rangle. \quad (\text{A.1})$$

A solução formal para esta equação diferencial, parcial, de primeira ordem, é

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{H}_I(t') |\psi(t')\rangle dt'. \quad (\text{A.2})$$

Substituindo (A.2) em (A.1) resulta,

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}_I(t) |\psi(0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{H}_I(t) \hat{H}_I(t') |\psi(t')\rangle dt' \quad (\text{A.3})$$

Se assumimos que o hamiltoniano de interação $\hat{H}_I(t)$ consiste de um número de termos altamente oscilantes [87], em boa aproximação o primeiro termo do lado direito da Eq. (A.3) pode ser descartado e podemos adotar uma aproximação Markoviana¹ para o segundo termo, tal que a evolução de $|\psi(t)\rangle$ é governada aproximadamente pela seguinte equação [87]

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} \simeq \hat{H}_{ef}(t) |\psi(t)\rangle \quad (\text{A.4})$$

onde

$$\hat{H}_{ef}(t) = \frac{1}{i\hbar} \hat{H}_I(t) \int \hat{H}_I(t') dt' \quad (\text{A.5})$$

¹Assumimos que o sistema não tem memória, ou seja, os eventos no tempo t não dependem dos eventos anteriores.

e a integral indefinida é obtida no tempo t , desacompanhada de contante de integração.

Estes argumentos podem ser colocados de forma mais rigorosa considerando a evolução temporal da função de onda.

Assumiremos agora que o hamiltoniano de interação consiste explicitamente de uma combinação de componentes variando harmonicamente com o tempo, isto é

$$\hat{H}_I(t) = \sum_m \hat{h}_m e^{i\omega_m t} + h.c \quad (\text{A.6})$$

onde h.c é o hermitiano conjugado e ω_m são todos independentes (isto é, $\omega_m \neq \omega_n$). Neste caso, o hamiltoniano efetivo $\hat{H}_{ef}(t)$ reduz-se a uma forma simples e muito útil em análises de interações laser-ion

$$\hat{H}_{ef}(t) = \sum_{m,n} \frac{1}{i\hbar} \left\{ \hat{h}_m e^{i\omega_m t} + \hat{h}_m^\dagger e^{-i\omega_m t} \right\} \left\{ \hat{h}_n \frac{e^{i\omega_n t}}{i\omega_n} + \hat{h}_n^\dagger \frac{e^{-i\omega_n t}}{-i\omega_n} \right\},$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ef}(t) &= \sum_{m,n} \frac{1}{-\hbar\omega_n} \hat{h}_m \hat{h}_n e^{i(\omega_m + \omega_n)t} + \hat{h}_m \hat{h}_n^\dagger e^{i(\omega_m - \omega_n)t} \\ &\quad - \frac{1}{-\hbar\omega_n} \hat{h}_m^\dagger \hat{h}_n e^{-i(\omega_m - \omega_n)t} - \hat{h}_m^\dagger \hat{h}_n^\dagger e^{-i(\omega_m + \omega_n)t}, \end{aligned}$$

considerando os termos $\omega_m = \omega_n$ encontramos

$$\hat{H}_{ef}(t) = \sum_m \frac{1}{\hbar\omega_m} \left[\hat{h}_m^\dagger, \hat{h}_m \right] + \text{termos oscilantes}. \quad (\text{A.7})$$

Se limitamos nosso interesse em dinâmicas que são médias temporais sobre um período muito mais longo que o período de qualquer das oscilações presentes no hamiltoniano efetivo (isto é, a média sobre o tempo $T \gg 2\pi/\min|\omega_m - \omega_n|$), então os termos oscilantes podem ser descartados, assim

$$\hat{H}_{ef} = \sum_m \frac{1}{\hbar\omega_m} \left[\hat{h}_m^\dagger, \hat{h}_m \right]. \quad (\text{A.8})$$

Apêndice B

Dedução do Hamiltoniano (5.25):

$$H_{ef} = \frac{\hbar\Omega\lambda}{\delta}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)|e\rangle\langle e|$$

O hamiltoniano de um sistema constituído de um átomo de três níveis bombeado por um laser e interagindo com um campo quantizado é dado por

$$\hat{H} = \hbar\omega_0|i\rangle\langle i| + \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\Omega(\hat{\sigma}_{ie}\hat{a} + \hat{\sigma}_{ei}\hat{a}^\dagger) + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_{ie}e^{-i\omega_s t} + \hat{\sigma}_{ei}e^{i\omega_s t}). \quad (\text{B.1})$$

onde Ω e λ são as constantes de acoplamento átomo-campo quântico e átomo-campo clássico respectivamente, ω_0 é a frequência de transição atômica dos níveis $|i\rangle$ e $|e\rangle$ do átomo¹ e ω_c é a frequência do campo quantizado (veja Fig. B.1).

1º Passo: passar para o referencial do laser

Para que possamos eliminar a dependência temporal da Eq. (B.1), realizamos uma transformação unitária² usando o seguinte operador

$$\hat{U}_L = e^{-i\omega_s(\hat{a}^\dagger\hat{a} + |i\rangle\langle i|)t}. \quad (\text{B.2})$$

¹ $|g\rangle$ está tão dessintonizado que não influencia na evolução do sistema.

²Ao realizarmos uma operação unitária $\hat{U}_0 = e^{-i\hat{H}_0/\hbar}$, em um hamiltoniano que pode ser escrito na forma $\hat{H}_s = \hat{H}_0 + \hat{V}$, onde \hat{H}_0 e \hat{V} correspondem aos termos livres e de interação, respectivamente, encontraremos $\hat{U}_0^\dagger \hat{H}_s \hat{U}_0 = \hat{H}_0 + \hat{U}_0^\dagger \hat{V} \hat{U}_0$, de forma que podemos escrever $\hat{H} = \hat{U}_0^\dagger \hat{H}_s \hat{U}_0 - \hat{H}_0$, onde $\hat{H} = \hat{U}_0^\dagger \hat{V} \hat{U}_0$.

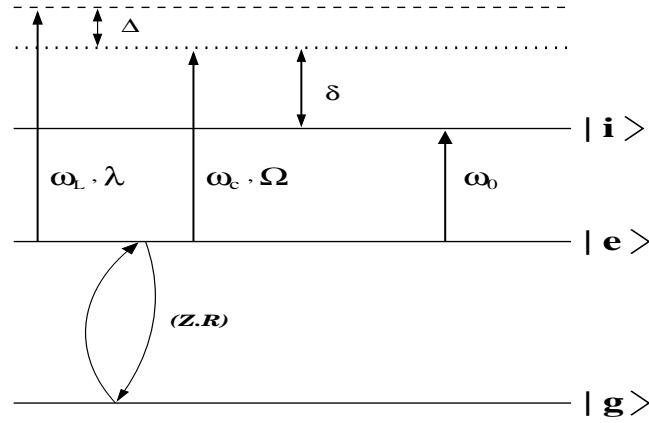


Figura B.1: Ilustração esquemática de um átomo de três níveis bombeado por um laser e interagindo com um campo quantizado.

No caso de (B.1) teremos

$$\hat{H}_L = \hat{U}_L^\dagger \hat{H} \hat{U}_L - \hbar\omega_s(\hat{a}^\dagger \hat{a} + |i\rangle\langle i|), \quad (\text{B.3})$$

onde \hat{H} é o termo de interação átomo-campo clássico e quantizado.

Usando a relação de Baker-Hausdorff [55] para a expansão da exponencial

$$e^{\xi\hat{A}}\hat{B}e^{-\xi\hat{A}} = \hat{B} + \xi[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (\text{B.4})$$

encontramos

$$\hat{U}_L^\dagger \hat{\sigma}_{ie} \hat{U}_L = \hat{\sigma}_{ie} e^{i\omega_s t}, \quad (\text{B.5})$$

$$\hat{U}_L^\dagger \hat{a} \hat{U}_L = \hat{a} e^{-i\omega_s t}. \quad (\text{B.6})$$

Assim, reescrevemos (B.3) como

$$\hat{H}_L = \hbar\Delta_{0s}|i\rangle\langle i| + \hbar\Delta_{cs}\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\Omega(\hat{\sigma}_{ie}\hat{a} + \hat{\sigma}_{ei}\hat{a}^\dagger) + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_{ie} + \hat{\sigma}_{ei}). \quad (\text{B.7})$$

2º Passo: passar para a representação de interação

Esta passagem é feita a fim de preparar o hamiltoniano dado pela Eq. (B.7) para a aproximação de James. Assim, escrevendo (B.7) como $\hat{H}_L = \hat{H}_0 + \hat{H}_I$ onde $\hat{H}_0 = \hbar\Delta_{0s}|i\rangle\langle i| +$

$\hbar\Delta_{cs}\hat{a}^\dagger\hat{a}$, podemos definir o operador unitário na forma

$$\hat{U}_I = e^{-i\hbar(\Delta_{0s}|i\rangle\langle i| + \Delta_{cs}\hat{a}^\dagger\hat{a})t}. \quad (\text{B.8})$$

Através dessa transformação unitária, o novo hamiltoniano, que chamaremos de V , pode ser escrito como

$$V = \hat{U}_I^\dagger \hat{H}_L \hat{U}_I - \hbar(\Delta_{0s}|i\rangle\langle i| + \Delta_{cs}\hat{a}^\dagger\hat{a}). \quad (\text{B.9})$$

Usando as Eqs. (B.8)e (B.4) encontramos

$$\hat{U}_I^\dagger \hat{\sigma}_{ie} \hat{U}_I = \hat{\sigma}_{ei} e^{-i\Delta_{0s}t}, \quad (\text{B.10})$$

$$\hat{U}_I^\dagger \hat{a} \hat{U}_I = \hat{a} e^{-i\Delta_{cs}t}, \quad (\text{B.11})$$

logo,

$$V = \hbar\Omega(\hat{\sigma}_{ie}\hat{a}e^{i(\Delta_{0s}-\Delta_{cs})t} + \hat{\sigma}_{ei}\hat{a}^\dagger e^{-i(\Delta_{0s}-\Delta_{cs})t}) + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_{ie}e^{i\Delta_{0s}t} + \hat{\sigma}_{ei}e^{-i\Delta_{0s}t}). \quad (\text{B.12})$$

Da Fig. (B.1) vemos que,

$$\begin{cases} \Delta_{0s} - \Delta_{cs} = \omega_0 - \omega_c - (\omega_c - \omega_s) = \omega_0 - \omega_c = -\delta \\ \Delta_{0s} = \omega_0 - \omega_c = -(\Delta + \delta) \end{cases}$$

Assim, resulta,

$$V = \hbar\Omega(\hat{\sigma}_{ie}\hat{a}e^{-i\delta t} + \hat{\sigma}_{ei}\hat{a}^\dagger e^{i\delta t}) + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_{ie}e^{-i(\Delta+\delta)t} + \hat{\sigma}_{ei}e^{i(\Delta+\delta)t}). \quad (\text{B.13})$$

3º Passo: usar a aproximação de James

Segundo a aproximação de James

$$\hat{H}_{ef'} = \frac{1}{i\hbar} V(t) \int V(t') dt'. \quad (\text{B.14})$$

Substituindo (B.13) em (B.14) obtemos

$$\hat{H}_{ef'} = \hbar\hat{\sigma}_{ee} \left\{ \frac{\Omega^2 \hat{a}^\dagger \hat{a}}{\delta} + \frac{\Omega\lambda \hat{a}^\dagger e^{-i\Delta t}}{\Delta + \delta} + \frac{\Omega\lambda \hat{a} e^{i\Delta t}}{\delta} \right\}. \quad (\text{B.15})$$

onde descartamos a contribuição referente a $\hat{\sigma}_{ii}$, pois queremos um hamiltoniano condicionado à preparação do átomo inicialmente no estado $|e\rangle$.

4º Passo: nova transformação unitária

Como último passo fazemos nova transformação unitária com o objetivo de eliminar a dependência temporal na Eq. (B.15). Escrevendo $\hat{H}_{ef'} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I$ com $\hat{H}_0 = \frac{\hbar\Omega^2\hat{\sigma}_{ee}\hat{a}^\dagger\hat{a}}{\delta}$ teremos

$$\hat{U}_0 = \exp\left[-\frac{i\Omega^2\hat{\sigma}_{ee}\hat{a}^\dagger\hat{a}}{\delta}t\right]. \quad (\text{B.16})$$

Assim

$$\hat{U}_0^\dagger\hat{\sigma}_{ee}\hat{U}_0 = \hat{\sigma}_{ee}, \quad (\text{B.17})$$

$$\hat{U}_0^\dagger\hat{a}\hat{U}_0 = ae^{-\frac{i\Omega^2}{\delta}t}, \quad (\text{B.18})$$

e

$$\hat{H}_{ef} = \hat{U}_0^\dagger\hat{H}_{ef}\hat{U}_0 - \frac{\hbar\Omega^2\hat{\sigma}_{ee}\hat{a}^\dagger\hat{a}}{\delta}. \quad (\text{B.19})$$

Usando (B.17), (B.18) e (B.19) encontramos

$$\hat{H}_{ef} = \frac{\hbar\Omega\lambda}{\delta}\hat{\sigma}_{ee}\hat{a}^\dagger e^{-i(\Delta-\frac{\Omega^2}{\delta})t} + \frac{\hbar\Omega\lambda}{\delta}\hat{\sigma}_{ee}\hat{a} e^{i(\Delta-\frac{\Omega^2}{\delta})t}. \quad (\text{B.20})$$

Fazendo $\Delta = \Omega^2/\delta$ obtemos

$$\hat{H}_{ef} = \frac{\hbar\Omega\lambda}{\delta}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)|e\rangle\langle e|, \quad (\text{B.21})$$

que é exatamente o hamiltoniano descrito pela Eq. (5.25). Logo, da Eq. (B.21) teremos

$$U_{ef} = e^{-i\frac{\Omega\lambda}{\delta}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)|e\rangle\langle e|t}. \quad (\text{B.22})$$

Podemos reescrever a equação acima na seguinte forma

$$U_{ef} = e^{(\alpha\hat{a}-\alpha^*\hat{a}^\dagger)|e\rangle\langle e|t}, \quad (\text{B.23})$$

com $\alpha = -i\Omega\lambda t/\delta$. Expandindo a exponencial na Eq. (B.23) ela resulta em

$$U_{ef} = 1 + (\alpha\hat{a} - \alpha^*\hat{a}^\dagger)|e\rangle\langle e| + \frac{(\alpha\hat{a} - \alpha^*\hat{a}^\dagger)^2|e\rangle\langle e|}{2!} + \dots, \quad (\text{B.24})$$

e, finalmente, uma vez que os auto-estados atômicos formam uma base ortonormal, podemos reescreve-la na forma

$$U_{ef} = e^{(\alpha\hat{a} - \alpha^*\hat{a}^\dagger)}|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|, \quad (\text{B.25})$$

que é uma forma bastante útil, tornando mais fácil sua manipulação nas aplicações.

Apêndice C

Hamiltonianos de Interação

C.1 Hamiltoniano de interação dispersiva

Podemos escrever o hamiltoniano de um sistema constituído de um átomo de dois níveis acoplado a um modo do campo eletromagnético da seguinte forma

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{H}_I \\ &= \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z}{2} + \hbar g(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- + \hat{a}\hat{\sigma}_+)\end{aligned}\tag{C.1}$$

onde $\hat{H}_0 = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_0\hat{\sigma}_z/2$ refere-se ao campo livre e ao átomo livre; $\hat{H}_I = \hbar g(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- + \hat{a}\hat{\sigma}_+)$ descreve a interação entre o campo eletromagnético e o elétron. Nestes, g é a constante de acoplamento átomo-campo, ω é a frequência do campo e ω_0 é a frequência de transição nos níveis atômicos.

A fim de operar somente com os termos de interação, passamos à representação de interação usando o seguinte operador unitário

$$\hat{U}_0 = e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} = e^{-i(\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_0\hat{\sigma}_z/2)t}.\tag{C.2}$$

Nesta representação, podemos escrever o hamiltoniano como sendo

$$\begin{aligned}\hat{H}_I &= \hat{U}_0^\dagger \hat{H} \hat{U}_0 - \hat{H}_0 \\ &= \hbar g(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- e^{-i\delta t} + \hat{a}\hat{\sigma}_+ e^{-i\delta t}),\end{aligned}\tag{C.3}$$

onde definimos $\delta = \omega_0 - \omega$.

Realizaremos na Eq. (C.3) a aproximação de James. Neste caso teremos (veja Apêndice A)

$$\hat{H}_{ef}(t) = \frac{1}{i\hbar} \hat{H}_I(t) \int \hat{H}_I(t') dt'. \quad (C.4)$$

Dessa forma encontraremos o seguinte hamiltoniano efetivo

$$\hat{H}_{ef} = \frac{\hbar g^2}{\delta} (\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-), \quad (C.5)$$

onde descartamos os termos rapidamente oscilantes.

Utilizando o operador

$$\hat{U} = e^{-ig^2|e\rangle\langle e|t/\delta} \quad (C.6)$$

podemos passar novamente para a representação de interação. Neste caso, encontramos

$$\hat{H} = \frac{\hbar g^2}{\delta} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_z \quad (C.7)$$

sendo este o hamiltoniano que representa a interação dispersiva.

C.2 Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

Com respeito ao modelo de Jaynes-Cummings [46], costuma-se dizer que este permite uma descrição simples da interação entre matéria e campo eletromagnético, além de ser analiticamente solúvel. O sistema consiste de um átomo de dois níveis interagindo com um modo quantizado do campo eletromagnético. O hamiltoniano que descreve a interação entre um campo eletromagnético e um elétron é dado por [?]

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e \mathbf{A})^2 + V(\mathbf{x}) + H_c \quad (C.8)$$

onde m , e , \mathbf{p} a massa, carga e momento do elétron, respectivamente. $V(\mathbf{x})$ designa o potencial de Coulomb e H_c o hamiltoniano do campo livre. Com a quantização do campo de elétrons o

hamiltoniano é reescrito como

$$\hat{H} = \hat{H}_c + \hat{H}_{el} + \hat{H}_I , \quad (C.9)$$

sendo

$$\hat{H}_{el} = \sum_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j E_j \quad e \quad \hat{H}_c = \hbar \sum_l \omega_l (\hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l + 1/2) \quad (C.10)$$

os hamiltonianos referentes ao movimento livre dos elétrons (\hat{H}_{el}) e do campo livre (\hat{H}_c), respectivamente. Na Eq. (C.9) \hat{H}_I descreve a interação entre o campo eletromagnético e os elétrons. Este hamiltoniano de interação pode ser escrito (no formalismo da segunda quantização) em duas partes:

$$\hat{H}_{I,1} = \int \Psi^\dagger(\mathbf{x}) \left\{ -\frac{e}{m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} \right\} \Psi(\mathbf{x}) d^3x , \quad (C.11)$$

$$\hat{H}_{I,2} = \int \Psi^\dagger(\mathbf{x}) \left\{ -\frac{e^2}{2m} \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{p} \right\} \Psi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} . \quad (C.12)$$

A contribuição do termo em \mathbf{A}^2 na equação acima, só será importante nos processos não-lineares (que envolvem campos intensos), e por isso não a consideraremos aqui. A seguir, expande-se os operadores do campo eletrônico $\Psi(\mathbf{x})$ como uma superposição das funções de onda não perturbada $\phi_j(\mathbf{x})$ (sendo $\phi_j(\mathbf{x})$ auto-funções do hamiltoniano \hat{H}_{el} com auto-valores E_j):

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_j \hat{a}_j \phi_j(\mathbf{x}) \quad (C.13)$$

e usando o fato de que o potencial vetor do campo de radiação quantizado, $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ pode ser escrito como uma combinação de $\mathbf{A}^+(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{A}^-(\mathbf{x}, t)$ ($\mathbf{A}^-(\mathbf{x}, t) = [\mathbf{A}^+(\mathbf{x}, t)]^\dagger$) expandidos nos modos k , temos

$$\mathbf{A}^+(\mathbf{x}, t) = \sum_k q_k(t) \mathbf{u}_k(\mathbf{x}) = \hbar \sum_k \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k\epsilon_0}} \hat{b}_k \mathbf{u}_k(\mathbf{x}) e^{-i\omega_k t} , \quad (C.14)$$

com $\mathbf{u}_k(\mathbf{x})$ descrevendo ondas eletromagnéticas em geral (ondas estacionárias, viajantes, esféricas, etc.). Portanto,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{x}, t) = \hbar \sum_k \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k\epsilon_0}} (\hat{b}_k u_k(x) e^{-i\omega_k t} + h.c.), \quad (C.15)$$

de forma que podemos reescrever a Eq. (C.11) como

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{I,1} &= \int \Psi^\dagger(\mathbf{x}) \left\{ -\frac{e}{m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} \right\} \Psi(\mathbf{x}) d^3x \\
&= -\frac{e\hbar}{m} \sum_{jlk} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_l \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k\epsilon_0}} \int \phi_j^*(\mathbf{x}) \left[\left(\hat{b}_k(t) u_k(\mathbf{x}) + \hat{b}_k^\dagger u_k^*(\mathbf{x}) \right) \cdot \mathbf{p} \right] \phi_l(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \\
&= \hbar \sum_{jlk} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_l \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k\epsilon_0}} \left\{ \hat{b}_k(t) \int \phi_j^*(\mathbf{x}) [u_k(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}] \phi_l(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} + h.c \right\} \\
&= \hbar \sum_{jlk} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_l \left\{ \hat{b}_k(t) g_{jlk} + \hat{b}_k^\dagger(t) g_{jlk}^* \right\} , \tag{C.16}
\end{aligned}$$

em que definimos o fator de acoplamento átomo-campo g_{jlk} como sendo

$$g_{jlk} = -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k\epsilon_0}} \int \phi_j^*(\mathbf{x}) [u_k(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}] \phi_l(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \tag{C.17}$$

Pode-se simplificar esta expressão para o fator g_{jlk} fazendo-se a aproximação de dipolo elétrico onde assume-se que $u_k(\mathbf{x})$ (que é do tipo $u_k(\mathbf{x}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\varphi)/\sqrt{V}$, $V =$ volume do campo quantizado) tenha uma variação espacial muito mais lenta que as funções de onda eletrônicas, de forma que podemos considerar $u_k(\mathbf{x})$ aproximadamente constante e tirá-la da integral em (C.17), trocando-a por $u_k(\mathbf{x}_0)$, sendo \mathbf{x}_0 a posição do átomo. Esta aproximação é justificada no regime óptico uma vez que, nesse regime, o comprimento de onda do fóton é muito maior que a dimensão do átomo, ou seja, $\bar{\lambda}_{fóton} = 1/|\mathbf{k}| \gg r_{atômico}$ ($\bar{\lambda}_{fóton} \sim 10^3 \text{ \AA}$ e $r_{atômico} \sim 1 \text{ \AA}$), de forma que

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\varphi} = e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}) + i\varphi} = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0 + i\varphi} \left(1 + i\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{x} - \frac{(\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{x})^2}{2} \dots \right) \approx e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0 + \varphi)} . \tag{C.18}$$

A integral $e \int \phi_j^*(\mathbf{x}) [u_k(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}] \phi_l(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$ pode ser escrita como o elemento de matriz de dipolo

$$i m \vartheta_{jl} \int \phi_j^*(\mathbf{x}) e \mathbf{x} \phi_l(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} , \tag{C.19}$$

sendo m a massa do elétron e $\vartheta_{jl} = (E_j - E_l)/\hbar$. De fato

$$\begin{aligned} \int \phi_j^*(\mathbf{x}) [u_k(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}] \phi_l(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} &= \frac{im}{\hbar} \int \phi_j^*(\mathbf{x}) [H_{el}, \mathbf{x}] \phi_l(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \\ &= \frac{im}{\hbar} (E_j - E_l) \int \phi_j^*(\mathbf{x}) \mathbf{x} \phi_l(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \\ &= im \vartheta_{jl} \int \phi_j^*(\mathbf{x}) \mathbf{x} \phi_l(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

o que nos permite escrever o fator g_{jlk} como

$$g_{jlk} = -i \vartheta_{jl} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k\epsilon_0}} \int \phi_j^*(\mathbf{x}) (e\mathbf{x}) \phi_l(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}. \quad (\text{C.21})$$

O hamiltoniano de interação (C.16) pode ser simplificado considerando alguns casos particulares. Primeiramente, a fase da função pode ser escolhida de modo que g_{jlk} seja real. Com isto, a Eq. (C.16) fica

$$\hat{H}_{I,1} = \hbar \sum_{jlk} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_l g_{jlk} (\hat{b}_k + \hat{b}_k^\dagger). \quad (\text{C.22})$$

Passando para a representação de interação e usando as relações entre esses operadores nas representações de interação e Schrödinger

$$(\hat{a}_j)_I = (\hat{a}_j)_S e^{-iE_j t/\hbar}, \quad (\hat{b}_k)_I = (\hat{b}_k)_S e^{-i\omega_k t/\hbar}, \quad (\text{C.23})$$

obtemos

$$\hat{H}_I = \hbar \sum_{jlk} g_{jlk} \left[(\hat{b}_k)_S e^{-i\omega_k t/\hbar} + (\hat{b}_k^\dagger)_S e^{+i\omega_k t/\hbar} \right] \left[(\hat{a}_j)_S e^{-iE_j t/\hbar} (\hat{a}_l^\dagger)_S e^{-iE_l t/\hbar} \right]. \quad (\text{C.24})$$

Nesta equação observamos que somente termos da forma $e^{\pm i(\omega_k + \vartheta_{jl})t}$ e $e^{\pm i(\omega_k - \vartheta_{jl})t}$ ocorrem. Quando $\omega_k \approx \vartheta_{jl}$ vemos que o primeiro desses termos oscilam rapidamente com o tempo. Podemos desprezar esses termos em relação àquele próximos da ressonância. Essa aproximação é conhecida como *aproximação de onda girante*.

Podemos também considerar um átomo de dois níveis somente ($j, l = 1, 2$) e um campo de um único modo de frequência ω . Desse modo, o hamiltoniano na representação de interação será dado por

$$\hat{H}_I = \hbar g \left\{ \hat{b} \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 + \hat{b}^\dagger \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right\} , \quad (\text{C.25})$$

sendo o fator g aqui é dado por

$$g = -i \sqrt{\frac{1}{2 \hbar \omega_k \epsilon_0}} \vartheta_{21} u(\mathbf{x}_0) d_{12} , \quad (\text{C.26})$$

com

$$d_{12} = \int \phi_2^*(\mathbf{x}) (e \mathbf{x}) \phi_1(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} , \quad (\text{C.27})$$

sendo o momento de dipolo para a transição $1 \rightarrow 2$ e \mathbf{x}_0 a coordenada do centro do átomo.

Da quantização do campo eletrônico (ver, por exemplo, ref. [58], capítulo 10), um átomo de dois níveis descrito pelos operadores fermiônicos \hat{a}_2 e \hat{a}_1 pode ser descrito pelos operadores de “pseudo-spin” seguindo a seguinte correspondência:

| operadores de pseudo-spin | operadores eletrônicos |
|---------------------------|--|
| $\hat{\sigma}_+$ | $\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1$ |
| $\hat{\sigma}_-$ | $\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2$ |
| $\hat{\sigma}_z$ | $\frac{1}{2}(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1) ,$ |

sendo $\hat{\sigma}_+$ ($\hat{\sigma}_-$) o operador de levantamento (abaixamento) dos níveis atômicos internos. Dessa correspondência podemos escrever o Hamiltoniano de interação de um único átomo de dois níveis com um único modo do campo, na ressonância, como

$$\hat{H}_I = \hbar g \left\{ \hat{b} \hat{\sigma}_+ + \hat{b}^\dagger \hat{\sigma}_- \right\} , \quad (\text{C.28})$$

conhecido como Hamiltoniano de Jaynes-Cummings.

C.3 Zonas de Ramsey

O hamiltoniano que descreve a interação entre um campo clássico, armadilhado pela zona de Ramsey, e um átomo de dois níveis, pode ser calculado considerando-se o potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ como sendo puramente clássico [?]. Sabendo que este pode ser escrito como uma combinação de $\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{x}, t)$ ($\mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{x}, t) = [\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{x}, t)]^*$), expandidos nos modos k , teremos

$$\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = \sum_k q_k(t) u_k(x) = \hbar \sum_k \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k\epsilon_0}} F_k u_k(x) e^{-i(\omega_k t - \varphi)} \quad (\text{C.29})$$

e, portanto,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{x}, t) = \hbar \sum_k \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k\epsilon_0}} (F_k u_k(x) e^{-i(\omega_k t - \varphi)} + h.c.), \quad (\text{C.30})$$

onde F_k é a intensidade de cada modo do campo clássico.

Refazendo os passos da seção anterior encontraremos que o hamiltoniano que descreve a interação átomo-campo na zona de Ramsey é escrito como

$$H_R = \hbar g |F| (\hat{\sigma}_+ e^{-i\varphi} + \hat{\sigma}_- e^{i\varphi}), \quad (\text{C.31})$$

sendo g o fator de acoplamento átomo-campo. O operador evolução será dado por

$$\begin{aligned} R &= \exp[-i g |F| t (\hat{\sigma}_+ e^{-i\varphi} + \hat{\sigma}_- e^{i\varphi})] \\ &= \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \hat{I} - i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[e^{-i\varphi} \hat{\sigma}_+ + e^{i\varphi} \hat{\sigma}_- \right], \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

sendo $\varphi = 2g|F|t$ o ângulo da rotação desejada, \hat{I} a matriz identidade e $\hat{\sigma}_+$ e $\hat{\sigma}_-$ os operadores de Pauli, análogos ao operadores de spin, $\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|$ e $\hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|$.

C.4 Divisores de Feixe

Um divisor de feixe (**DF**) é um dispositivo óptico implementado por um meio linear onde o vetor de polarização é proporcional ao campo de entrada, isto é, $\hat{\mathbf{P}} = \chi^{(1)} \hat{\mathbf{E}}$, sendo $\chi^{(1)}$

a susceptibilidade linear de primeira ordem. O operador de campo é escrito para os modos a e b , na mesma frequência ω , como

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}[(\hat{a} + \hat{b})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + h.c.], \quad (\text{C.33})$$

onde \hat{a} e \hat{b} são os operadores de aniquilação para os modos a e b .

Na usual aproximação de ondas girantes, onde desprezamos termos contra-girantes $\hat{a}\hat{b}$, $\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger$, o hamiltoniano de interação contém somente termos ressonantes

$$\hat{H}_I = -\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{E}} = -\chi^{(1)}\hat{\mathbf{E}}^2 = \frac{\chi^{(1)}\hbar\omega}{2\epsilon V}(\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{a}\hat{b}^\dagger). \quad (\text{C.34})$$

Desse modo, o operador de evolução do DF é escrito como

$$\hat{R}_{ab} = e^{i\theta(\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{a}\hat{b}^\dagger)}, \quad (\text{C.35})$$

onde $\theta = \chi^{(1)}\hbar\omega/2\epsilon V$. As equações de Heisenberg para os operadores de criação nos modos do campo acarretam as seguintes transformações:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ab}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{R}_{ab} &= t\hat{a}^\dagger + r\hat{b}^\dagger \\ \hat{R}_{ab}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{R}_{ab} &= t\hat{b}^\dagger + r\hat{a}^\dagger \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

onde $t = \cos(\theta)$ e $r = i\sin(\theta)$ são os coeficientes de transmissão e reflexão do DF, respectivamente, satisfazendo à condição $t^2 + r^2 = 1$, em vista da negligência de perdas no **DF**.

NOTA:

Considerando os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ entrando respectivamente nos modos a e b de um **DF** 50/50, teremos (segundo C.35)

$$\hat{R}_{ab}|0\rangle_a|1\rangle_b = \hat{R}_{ab}\hat{b}^\dagger|0\rangle_a|0\rangle_b = \hat{R}_{ab}\hat{b}^\dagger\hat{R}_{ab}^\dagger\hat{R}_{ab}|0\rangle_a|0\rangle_b, \quad (\text{C.37})$$

sendo

$$\hat{R}_{ab}|0\rangle_a|0\rangle_b = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[i\pi(\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{a}\hat{b}^\dagger)/4]^k}{k!} |0\rangle_a|0\rangle_b, \quad (\text{C.38})$$

onde vemos que o resultado se anula para qualquer $k \neq 0$, sendo que, para $k = 0$ é igual a $|0\rangle_a|0\rangle_b$. Assim

$$\hat{R}_{ab} |0\rangle_a|0\rangle_b = \hat{R}_{ab} \hat{b}^\dagger \hat{R}_{ab}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \hat{b}^\dagger + i \hat{a}^\dagger \}, \quad (\text{C.39})$$

onde usamos a Eq. C.36, com $\theta = \pi/4$.

Assim, encontramos

$$\hat{R}_{ab} |0\rangle_a|1\rangle_b = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |0\rangle_a|1\rangle_b + i |1\rangle_a|0\rangle_b \}. \quad (\text{C.40})$$

Apêndice D

Efeito Kerr

Na teoria eletromagnética, a resposta do meio material à ação do campo de radiação pode ser obtida em boa aproximação expandindo a polarização do meio até terceira ordem na amplitude do campo elétrico:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \epsilon_0 \chi^{(2)} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) + \epsilon_0 \chi^{(3)} \mathbf{E}^3(\mathbf{r}) + \dots \quad (\text{D.1})$$

sendo ϵ_0 a constante dielétrica do vácuo, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ é o vetor campo elétrico e $\chi^{(1)}$, $\chi^{(2)}$, $\chi^{(3)}$, respectivamente, os tensores de susceptibilidade de primeira, segunda e terceira ordem que são caracterizados pelas propriedades de simetria do meio [37].

Meios isotrópicos são aqueles que possuem simetria de inversão, isto é, possuem pontos tais que uma inversão (substituição de um átomo na posição \vec{r} por um na posição $-\vec{r}$, com \vec{r} sendo o vetor de posição relativa ao ponto sobre o qual se dá a operação) sobre quaisquer um de seus pontos deixa a estrutura invariante. A existência de tal simetria impõe que $\chi^{(2)}$ e as demais tensores de ordem mais alta com índice par se anulem. Assim o termo não linear dominante em D.1 é $\chi^{(3)}$ e portanto possuindo uma dependência quadrática em $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Fisicamente falando, em um meio isotrópico o eixo óptico é determinado apenas pela direção do campo aplicado, e sendo assim o tensor de susceptibilidade deve ser uma função quadrática desse campo. Este é o chamado efeito Kerr eletro-óptico. No caso do meio não apresentar simetria de inversão, $\chi^{(3)}$ e

os termos ímpares de ordem mais alta ainda estarão presentes, porém o termo dominante será $\chi^{(2)}$.

Bibliografia

- [1] K. Vogel, V. M. Akulin, e W. P. Schleich. Quantum state engineering of the radiation field. *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 1816, 1993.
- [2] G. M. D'Ariano e P. Lo Presti. Quantum Tomography for Measuring Experimentally the Matrix Elements of an Arbitrary Quantum Operation. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 4195, 2001.
- [3] P. J. Bardroff, E. Mayr, e W. P. Schleich. Quantum state endoscopy: Measurement of the quantum state in a cavity. *Phys. Rev. Lett.*, **51**, 4963, 1995.
- [4] S. M. Barnett e D. T. Pegg. Phase Measurement by Projection Synthesis. *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 4148, 1996.
- [5] B. Baseia, M. H. Y. Moussa, e V. S. Bagnato. Q-function measurements by projection synthesis. *Phys. Lett. A*, **231**, 331, 1997.
- [6] S. Souza, A. T. Avelar, N. G. de Almeida, e B. Baseia. Polynomial state of the electromagnetic field: generation and statistical properties. *Opt. Comm.*, **239**, 359, 2004.
- [7] C.H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres, e William K. Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 1895, 1993.
- [8] B. Julsgaard, A. Kozhekin, e E. S. Polzik. Experimental long-lived entanglement of two macroscopic objects. *Nature*, **413**, 400, 2001.
- [9] D. Bouwmeester, J-W. Pan, H. Weinfurter K. Mattle, M. Eibl, e A. Zeilinger. Experimental quantum teleportation. *Nature*, **390**, 575, 1997.

- [10] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maitre, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond, e S. Haroche. Observing the Progressive Decoherence of the "Meter" in a Quantum Measurement. *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 4887, 1996.
- [11] K. M. F. Romero, M. C. Nemes, J. G. P. Faria, A. N. Salgueiro, e A. F. R. T. Piza. Decoherence of mesoscopic states of cavity fields. *Phys. Rev. A*, **58**, 3205, 1998.
- [12] T. Pellizzari. Quantum Networking with Optical Fibres. *Phys. Rev. Lett.*, **79**, 5242, 1997.
- [13] C. H. Bennett e D. P. DiVincenzo. Quantum information and computation. *Nature*, **404**, 247, 2000.
- [14] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, e H. Zbinden. Quantum cryptography. *Rev. Mod. Phys.*, **74**, 145, 2002.
- [15] M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond, L. Davidovich, e N. Zagury. Manipulation of photons in a cavity by dispersive atom-field coupling: Quantum-nondemolition measurements and generation of "Schrödinger cat" states. *Phys. Rev. A*, **45**, 5193, 1992.
- [16] L. G. Lutterbach e L. Davidovich. Production and detection of highly squeezed states in cavity QED. *Phys. Rev. A*, **61**, 023813, 2000.
- [17] N. Imoto, H. A. Haus, e Y. Yamamoto. Quantum nondemolition measurement of the photon number via the optical Kerr effect. *Phys. Rev. A*, **32**, 2287, 1985.
- [18] B. Yurke. Optical back-action-evading amplifiers. *J. Opt. Soc. Am. B*, **2**, 732, 1985.
- [19] B. T. H. Varcoe, S. Brattke, M. Weidinger, e H. Walther. Preparing pure photon number states of the radiation field. *Nature*, **403**, 743, 2000.
- [20] S. Brattke, B. T. H. Varcoe, e H. Walther. Generation of Photon Number States on Demand via Cavity Quantum Electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 3534, 2001.
- [21] P. Bertet, S. Osnaghi, P. Milman, A. Auffeves, P. Maioli, M. Brune, J. M. Raimond, e S. Haroche. Generating and Probing a Two-Photon Fock State with a Single Atom in a Cavity. *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 143601, 2002.

- [22] R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz, e J. F. Valley. Observation of Squeezed States Generated by Four-Wave Mixing in an Optical Cavity. *Phys. Rev. Lett.*, **55**, 2409, 1985.
- [23] M. Brune, S. Haroche, V. Lefevre, J. M. Raimond, e N. Zagury. Quantum nondemolition measurement of small photon numbers by Rydberg-atom phase-sensitive detection. *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 976, 1990.
- [24] P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, e A. Zeilinger. New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 4337, 1995.
- [25] M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully, e E. P. Wigner. Distribution functions in physics: Fundamentals. *Phys. Rep.*, **106**, 121, 1984.
- [26] E.P. Wigner. On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium. *Phys. Rev.*, **40**, 749, 1932.
- [27] K. E. Cahill e R. J. Glauber. Density operators and quasiprobability distributions. *Phys. Rev.*, **177**, 1857, 1969.
- [28] L. G. Lutterbach e L. Davidovich. Method for Direct Measurement of the Wigner Function in Cavity QED and Ion Traps. *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 2547, 1997.
- [29] G. Nogues, A. Rauschenbeutel, S. Osnaghi, P. Bertet, M. Brune, J. M. Raimond, S. Haroche, L. G. Lutterbach, e L. Davidovich. Measurement of a negative value for the Wigner function of radiation. *Phys. Rev. A*, **62**, 054101, 2000.
- [30] P. Bertet, A. Auffeves, P. Maioli, S. Osnaghi, T. Meunier, M. Brune, J.M. Raimond, e S. Haroche. Direct Measurement of the Wigner Function of a One-Photon Fock State in a Cavity. *Phys. Rev. Lett.*, **89**, 200402, 2002.
- [31] XuBo Zou, K. Pahlke, e W. Mathis. Scheme for direct measurement of the Wigner characteristic function in cavity QED. *Phys. Rev. A*, **69**, 015802, 2004.
- [32] C. J. Villas-Bôas, G. A. Prata, e M. H. Y. Moussa. Direct measurement of the Wigner distribution of a traveling field. *Phys. Rev. A*, **64**, 065801, 2001.
- [33] A. I. Lvovsky, H. Hansen, T. Aichele, O. Benson, J. Mlynek, e S. Schiller. Quantum State Reconstruction of the Single-Photon Fock State. *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 050402, 2001.

- [34] D. Leibfried, D. M. Meekhof, B. E. King, C. Monroe, W. M. Itano, e D. J. Wineland. Experimental Determination of the Motional Quantum State of a Trapped Atom. *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 4281, 1996.
- [35] G. Yeoman e S. M. Barnett. Two-mode squeezed Gaussons. *J. Mod. Opt.*, **40**, 1497, 1993.
- [36] M. G. A. Paris. Displacement operator by beam splitter. *Phys. Lett. A*, **217**, 78, 1996.
- [37] P. D. Drummond e D. F. Walls. Quantum theory of optical bistability. I: Nonlinear polarisability model. *J. Phys. A*, **13**, 725, 1980.
- [38] G. C. Baldwin. *An introduction to Nonlinear Optics*. New York, 1969.
- [39] A. Yariv. *Quantum Electronics*. John Wiley & Sons, 1976.
- [40] A. Imamoglu. High Efficiency Photon Counting Using Stored Light. *Phys. Rev. Lett.*, **89**, 163602, 2002.
- [41] D. F. V. James e P. G. Kwiat. Atomic-Vapor-Based High Efficiency Optical Detectors with Photon Number Resolution. *Phys. Rev. Lett.*, **89**, 183601, 2002.
- [42] R. Eijnisman e P. Nussenzveig. Átomos de Rydberg: Estudos Quânticos com Átomos "Quase-Clássicos". *Rev. Bras. Ens. Fis.*, **19**, 90, 1997.
- [43] A. Eisberg e R. Resnick. *Física Quântica*. Editora Campus, 1979.
- [44] R. G. Hulet e D. Kleppner. Rydberg Atoms in "Circular" States. *Phys. Rev. Lett.*, **51**, 1430, 1983.
- [45] M. Brune, F. S. Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond, e S. Haroche. Quantum Rabi Oscillation: A Direct Test of Field Quantization in a Cavity. *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 1800, 1996.
- [46] B. W. Shore e P. L. Knight. The Jaynes-Cummings Model. *J. Mod. Opt.*, **40**, julho 1195, 1993.
- [47] J. I. Kim, K. M. Fonseca Romero, A. M. Horiguti, L. Davidovich, M. C. Nemes, e A. F. R. de Toledo Piza. Classical Behavior with Small Quantum Numbers: The Physics of Ramsey Interferometry of Rydberg Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 4739, 1999.

- [48] J. M. Raimond, M. Brune, e S. Haroche. Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. *Rev. Mod. Phys.*, **73**, 565, 2001.
- [49] M. Born, W. Heisenberg, e P. Jordan. Zur Quantenmechanik II. *Z. Phys.*, **35**, 557, 1926. A translation of this paper is available in van der Waerden, B.L., 1967, *Sources of Quantum Mechanics* (North-Holland Publishing Company).
- [50] R. J. Glauber. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.*, **131**, 2766, 1963.
- [51] E. C. G. Sudarshan. Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams. *Phys. Rev. Lett.*, **10**, 277, 1963.
- [52] H. J. Kimble, M. Dagenais, e L. Mandel. Photon antibunching in resonance fluorescence. *Phys. Rev. Lett.*, **39**, 691, 1977.
- [53] L. Mandel. Sub-Poissonian photon statistics in resonance fluorescence. *Opt. Lett.*, **4**, 205, 1979.
- [54] G. Rempe, H. Walther, e N. Klein. Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser. *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 353, 1987.
- [55] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, e F. Laoë. *Quantum Mechanics*. Wiley & Sons, New York and Hermann, 1994.
- [56] J. D. Jackson. *Eletrodinâmica Clássica*. Editora Guanabara Dois S. A, 1962.
- [57] R. R. Puri. *Mathematical Methods of Quantum Optics*. Springer Series in Optical Sciences, 2001.
- [58] D. F. Walls e G. J. Milburn. *Quantum Optics*. Springer-Verlag, 1994.
- [59] s. S. Mizrahi and V. V. Dodonov. Creating quanta with an 'annihilation' operator. *J. Phys. A*, **35**, 8847, 2002.
- [60] H. J. Carmichael e D. F. Walls. A quantum-mechanical master equation treatment of the dynamical Stark effect. *J. Phys. B*, **9**, 1199, 1976.

- [61] W. Schleich, D. F. Walls, e J. A. Wheeler. Area of overlap and interference in phase space versus wigner pseudoprobabilities. *Phys. Rev. A*, **38**, 1177, 1988.
- [62] J. Krause, M. O. Scully, e H. Walther. State reduction and n -state preparation in a high-Q micromaser. *Phys. Rev. A*, **36**, 4547, 1987.
- [63] E. Schrödinger. Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik. *Naturwissenschaften*, **14**, 664, 1926.
- [64] F. A. M. de Oliveira, M. S. Kim, P. L. Knight, e V. Buek. Properties of displaced number states. *Phys. Rev. A*, **41**, 2645, 1990.
- [65] B. Yurke e D. Stoler. Generating Quantum Mechanical Superpositions of Macroscopically Distinguishable States via Amplitude dispersion *Phys. Rev. Lett.* *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 13, 1986.
- [66] Y. S. Kim e M. E. Noz. *Phase Space Picture of Quantum Mechanics*. World Sc, Singapore, 1991.
- [67] H. M. Nussenzveig. *Introduction to Quantum Optics*. Gordon & Breach Sc. Publ. , NY, 1973.
- [68] K. Husimi. *Proc. Math. Soc. Japan*, **22**, 264, 1940.
- [69] A. Vidiella-Barranco, H. Moya-Cessa, e V. Buzek. Interaction of superpositions of coherent states of light with two-level atoms. *J. Mod. Opt.*, **39**, 1441, 1992.
- [70] V. Buzekand, A. Vidiella-Barranco, e P. L. Knight. Superposition of coherent states: Squeezing and dissipation. *Phys. Rev. A*, **45**, 6570, 1992.
- [71] C. T. Lee. Measure of the nonclassicality of nonclassical states. *Phys. Rev. A*, **44**, R2775, 1991.
- [72] H. Moya-Cessa e P. L. Knight. Series representation of quantum-field quasiprobabilities. *Phys. Rev. A*, **48**, 2479, 1993.
- [73] G. J. Milburn e D. F. Walls. Quantum nondemolition measurements via quantum counting. *Phys. Rev. A*, **28**, 2646, 1983.

- [74] M. Ban. Quasicontinuous measurements of photon number. *Phys. Rev. A*, **49**, 5078, 1994.
- [75] A. T. Avelar, J. M. C. Malbouisson, e B. Baseia. Scheme for direct measurement of the Wigner characteristic function of traveling fields. *Opt. commun.*, 2005.
- [76] M. O. Scully e M. S.l Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997.
- [77] L. Davidovich, A. Maali, M. Brune, J. M. Raimond, e S. Haroche. Quantum Switches and Nonlocal Microwave Fields. *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 2360, 1993.
- [78] S. Stenholm e N. Vitanov. Ambiguity in quantum optics: the pure state. *J. Mod. Opt.*, **46**, 239, 1999.
- [79] W. Schleich e J. A. Wheeler. Oscillations in photon distribution of squeezed states and interference in phase space. *Nature*, **326**, 574, 1987.
- [80] M. Hillery. Classical pure states are coherent states. *Phys. Lett. A*, **111**, 409, 1985.
- [81] A. Kiraz, M. Atatüre, e A. Imamoglu. Quantum-dot single-photon sources: Prospects for applications in linear optics quantum-information processing. *Phys. Rev. A*, **69**, 032305, 2004.
- [82] C. Brunel, B. Lounis, P. Tamarat, e M. Orrit. Triggered Source of Single Photons based on Controlled Single Molecule Fluorescence. *Phys. Rev. Lett*, **83**, 2722, 1999.
- [83] A. Kuhn, M. Hennrich, e G. Rempe. Deterministic Single-Photon Source for Distributed Quantum Networking. *Phys. Rev. Lett.*, **89**, 067901, 2002.
- [84] C. K. Hong e L. Mandel. Experimental realization of a localized one-photon state. *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 58, 1986.
- [85] B. C. Sanders e G. J. Milburn. Quantum limits to all-optical phase shifts in a Kerr nonlinear medium. *Phys. Rev. A*, **45**, 1919, 1992.
- [86] A. Auffeves, P. Maioli, T. Meunier, S. Gleyzes, G. Nogues, M. Brune, J. M. Raimond, e S. Haroche. Entanglement of a Mesoscopic Field with an Atom Induced by Photon Graininess in a Cavity. *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 230405, 2003.
- [87] D. F. V. James. Quantum Coputation with Hot and Cold Ions: An Assessment of Proposed Schemes. *Fortschr. Phys.*, **48**, 823, 2000.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)